Ciências ULisboa | Informática

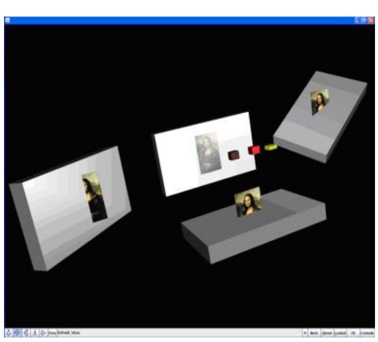
Computação Gráfica 2020/2021

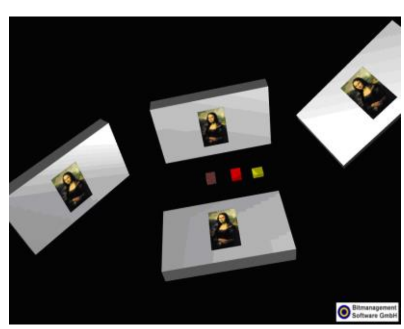
Licenciatura em Engenharia Informática
3ºano, 1º semestre

Guião das Aulas Teóricas
CG2020-03

Ana Paula Cláudio

Transformações Geométricas em 3D



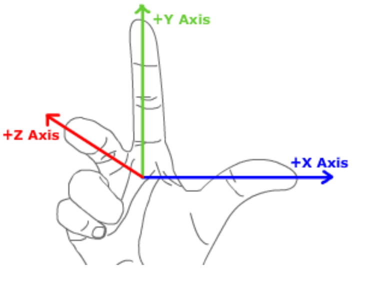


Transformações Geométricas em 3D

- Em 3D um ponto (x, y, z) é representado em **coordenadas homogéneas** por (x, y, z, 1)
- Em notação matricial vamos representar um **ponto** por uma **matriz coluna** e as matrizes das transformações geométricas serão matrizes de 4x4.

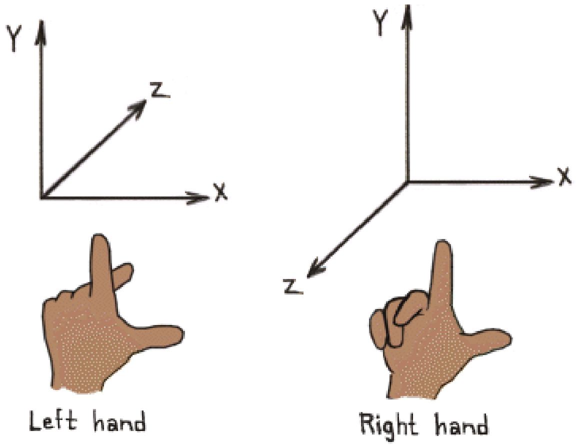
Transformações Geométricas em 3D

- ***Vamos utilizar um sistema de eixos direto (right-handed).***



- Num sistema directo, se alinharmos o <u>polegar</u> e o <u>indicador</u> da **mão direita** com os eixos dos <u>XX</u> e dos <u>YY</u>, respetivamente, <u>o eixo dos ZZ sai da palma da mão direita</u>.

Transformações Geométricas em 3D



right-handed cartesian coordinate system

VS

left-handed cartesian coordinate system

Translação

Usando a notação P' = M. P

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mudança de Escala

Usando a notação P' = M. P

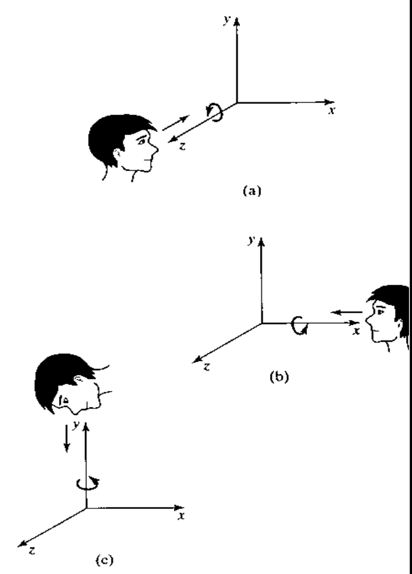
em relação à origem

e aos **eixos principais**

$$S(s_x,s_y,s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

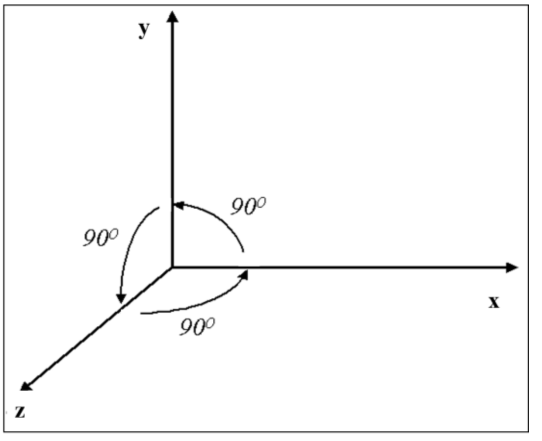
- Uma rotação em 3D não se efectua em torno de um ponto mas sim **em torno de um eixo**.
- Por convenção considera-se como **rotação positiva em torno de um eixo** a rotação efetuada no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio para um observador situado no lado positivo do eixo e olhando para a origem.



Rotação

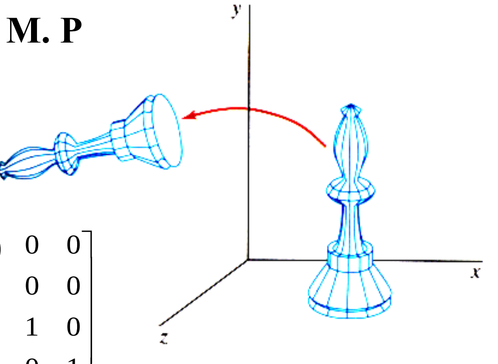
Com esta convenção:

- rodar Y de 90º em torno de X, leva Y a coincidir com Z.
- rodar Z de 90º em torno de Y leva Z a coincidir com X
- rodar X de 90º em torno de Z leva X a coincidir com Y.



Rotação

Usando a notação P’ = M. P

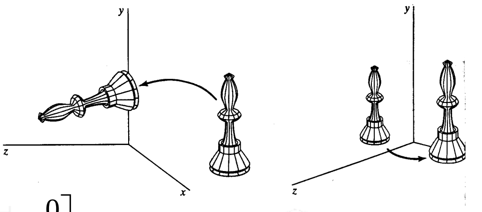


$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O invariante é o eixo dos zz

Rotação

Usando a notação P' = M. P



$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O invariante é o eixo dos xx

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O invariante é o eixo dos yy

Rotação

- O problema geral da rotação em 3D é a

Rotação em torno de um eixo arbitrário

o qual, se pode sempre decompor numa sucessão de transformações envolvendo rotações em torno dos eixos principais.

É uma transformação composta

Rotação em torno de um eixo arbitrário

- O problema resume-se a encontrar um referencial privilegiado no qual a rotação pretendida seja uma rotação em torno de um dos eixos principais.

- Nesse referencial a solução é conhecida.

- Temos portanto 3 passos:
  - fazer a mudança para o referencial privilegiado,
  - efetuar a rotação,
  - desfazer a mudança inicial.

Rotação em torno de um eixo arbitrário

Recordar que:

Um eixo (ou reta) é definido por:

• uma direção e um ponto qualquer no espaço;

• por 2 pontos no espaço;

• ou de outra forma equivalente (por ex., co-senos diretores) .

Para definir o sentido das rotações temos de definir um sentido positivo para o eixo.

Revisão

Identificar a direcção de um vetor em relação aos eixos e aos planos principais

$a,b,c \neq 0$

Direção do vetor	Componentes do vetor		
	X	Y	Z
paralelo ao eixo dos xx			
paralelo ao eixo dos yy			
paralelo ao eixo dos zz			
paralelo ao plano XY			
paralelo ao plano YZ			
paralelo ao plano XZ			

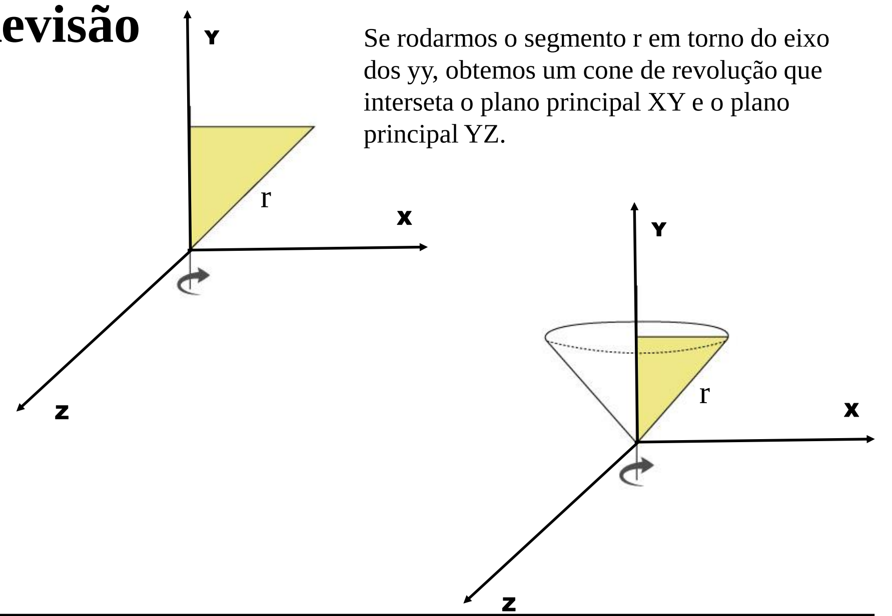
Revisão

Identificar a direcção de um vetor em relação aos eixos e aos planos principais

$a,b,c \neq 0$

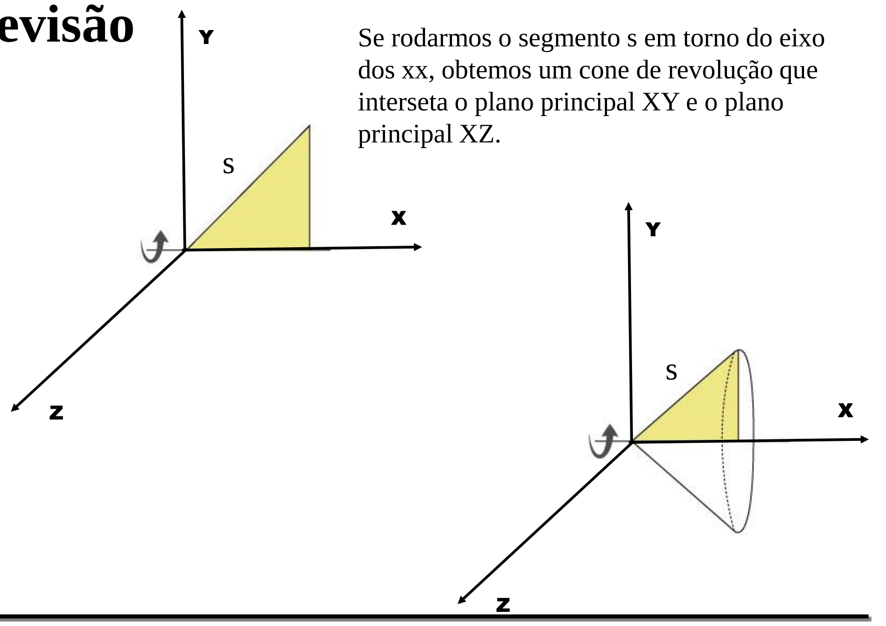
Direção do vetor	Componentes do vetor		
	X	Y	Z
Paralelo ao eixo dos xx	a	0	0
paralelo ao eixo dos yy	0	b	0
paralelo ao eixo dos zz	0	0	c
Paralelo ao plano XY	a	b	0
Paralelo ao plano YZ	0	b	c
Paralelo ao plano XZ	a	0	c

Revisão



Se rodarmos o segmento r em torno do eixo dos yy, obtemos um cone de revolução que interseta o plano principal XY e o plano principal YZ.

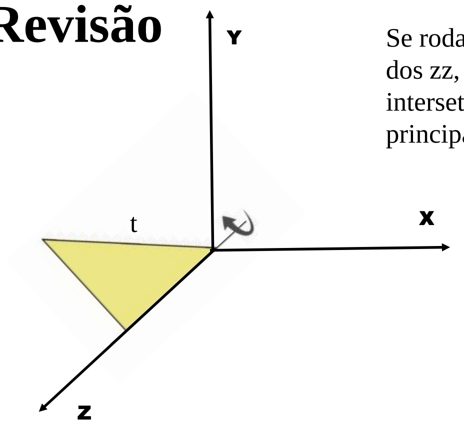
Revisão

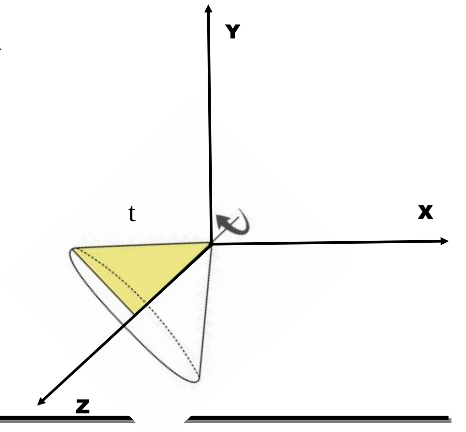


Se rodarmos o segmento s em torno do eixo dos xx, obtemos um cone de revolução que interseta o plano principal XY e o plano principal XZ.

Revisão

Se rodarmos o segmento t em torno do eixo dos zz, obtemos um cone de revolução que interseta o plano principal YZ e o plano principal XZ.





Revisão

Eixo de rotação	Planos principais que o cone interseta	
Eixo dos xx	XY	XZ
Eixo dos yy	XY	YZ
Eixo dos zz	XZ	YZ

Rotação em torno de um eixo arbitrário

Comecemos por resolver algumas situações concretas (simples), antes de resolvermos o caso genérico.

Exemplo 1: Rotação em torno de um eixo paralelo a um eixo principal

Calculemos a matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo definido pelo ponto (1,3,5) e pelo vetor director (2,0,0). A parte positiva do eixo é aquela que tem $x > 0$.

O eixo dado é paralelo ao eixo dos xx. Logo, bastará efetuar uma translação para que o eixo fique coincidente com aquele eixo principal.

$$T(1,3,5) \,.\, R_x(\alpha) \,.\, T(-1,-3,-5)$$

Esta sequência não é a única que permite calcular a matriz pedida !

Rotação em torno de um eixo arbitrário

Exemplo 2: Rotação em torno de um eixo paralelo a um plano principal

Calculemos a matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo definido pelos pontos (5,7,9) e (6,9,9). A parte positiva do eixo é aquela que tem $y > 0$.

Rotação em torno de um eixo arbitrário

Rotação em torno de um eixo paralelo a um plano principal

Exemplo 2: Calculemos a matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo definido pelos pontos (5,7,9) e (6,9,9). A parte positiva do eixo é aquela que tem $y > 0$.

O eixo dado é paralelo ao plano principal XY pois os pontos estão ambos no plano de equação Z = 9 . Uma sequência que nos dá a matriz pretendida é:

5ª 4ª 3ª 2ª 1ª ➡ **Ordem pela qual são aplicadas as transformações geométricas**

$$\underbrace{T(5, 7, 9).\ R_z(\beta).}_{}\ \ R_x(\alpha).\ \ \underbrace{R_z(-\beta).\ T(-5, -7, -9)}_{}$$

Com esta transformação composta, inversa da primeira, o eixo volta à sua posição original

Com esta transformação composta, o eixo fica coincidente com o eixo dos xx

O eixo de rotação é o invariante !

Esta sequência não é a única que permite calcular a matriz pedida !

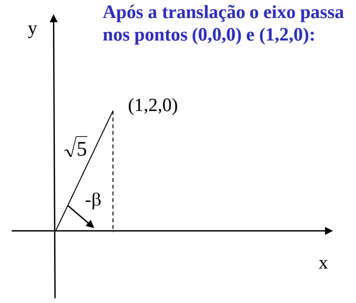
Rotação em torno de um eixo arbitrário

Rotação em torno de um eixo paralelo a um plano principal

Exemplo 2 (cont): As duas últimas matrizes da sequência (ou seja, as matrizes das duas primeiras transformações a ser aplicadas) são:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 2\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ -2\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Após a translação o eixo passa nos pontos (0,0,0) e (1,2,0):



$$\cos(-\beta) = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta = -2\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Rotação em torno de um eixo arbitrário

Rotação em torno de um eixo paralelo a um plano principal

Exemplo 2 (cont): As duas primeiras matrizes da sequência (ou seja, as matrizes das duas últimas transformações a ser aplicadas) são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -2\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ 2\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E a matriz $R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Calculámos as 5 matrizes da sequência, bastaria agora efetuar o respetivo produto matricial para obter a matriz pretendida: a matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo dado.

Rotação em torno de um eixo arbitrário

Exemplo 3:

Indique uma sequência de matrizes de transformações elementares (translações, rotações e mudanças de escala) que definem uma **rotação de ângulo α em torno do eixo** definido pelos pontos (1, 3, 9) e (3, 5,10).

OBS: A direção do eixo é dada por (3-1, 5-3, 10-9) = (2, 2, 1)

Rotação em torno de um eixo arbitrário

Caso genérico:

- Consideremos um eixo definido pela direcção(*) **(a, b, c)** e pelo ponto **(x_0, y_0, z_0)**.
- Consideremos que a parte positiva do eixo é a que se encontra no semi-espaço **y** > **0**.

Vamos proceder ao cálculo da **matriz de rotação de ângulo α em torno deste eixo.**

(*) A direção pode ser definida pelos co-senos diretores. Os co-senos diretores de uma direção são os co-senos dos ângulos que a direção faz com os três eixos coordenados. Os co-senos diretores definem um vector diretor de norma unitária (ver último slide).

Rotação em torno de um eixo arbitrário

Caso genérico(cont)

O eixo de rotação é o invariante!

Uma sequência possível é:

$$T(x_0, y_0, z_0).\ R_z(-\beta).\ R_x(-\theta).\ R_z(\alpha).\ R_x(\theta).\ R_z(\beta).\ T(-x_0, -y_0, -z_0).$$

Eixo fica coincidente com eixo dos ZZ

Eixo fica rebatido sobre o plano YZ

Eixo passa pela origem

Com esta transformação composta, inversa da primeira, o eixo volta à sua posição original

Com esta transformação composta, o eixo fica coincidente com o eixo dos ZZ

Esta sequência não é a única que permite calcular a matriz pedida !

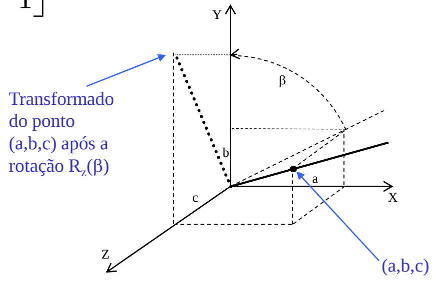
Rotação em torno de um eixo arbitrário

$T(x_0, y_0, z_0). R_z(-\beta). R_x(-\theta). R_z(\alpha). R_x(\theta). R_z(\beta). \boxed{T(-x_0, -y_0, -z_0).}$

A matriz da 1ª transformação a ser aplicada é:

$$T(-x_0, -y_0, -z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Após a aplicação desta translação, o eixo passa em (0,0,0) e (a, b, c). De seguida vamos aplicar Rz(β) para rebater o eixo sobre o plano YZ. A figura ao lado ajuda-nos a perceber qual é o ângulo desta rotação e a calcular o seno e o coseno deste mesmo ângulo.

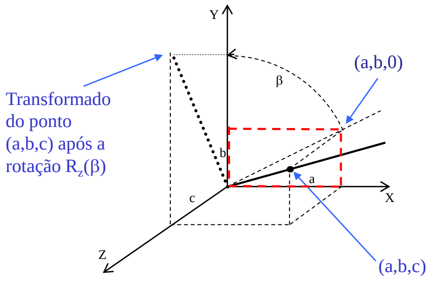


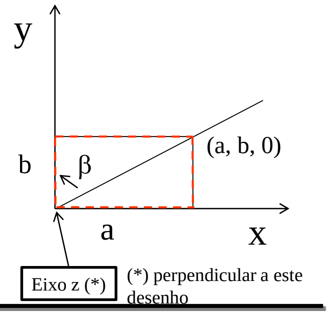
Rotação em torno de um eixo arbitrário

$T(x_0, y_0, z_0). R_z(-\beta). R_x(-\theta). R_z(\alpha). R_x(\theta). \boxed{R_z(\beta). T(-x_0, -y_0, -z_0).}$

Passemos ao cálculo da matriz da 2ª tranformação da sequência a ser aplicada,

$R_z(\beta)$:





Rotação em torno de um eixo arbitrário

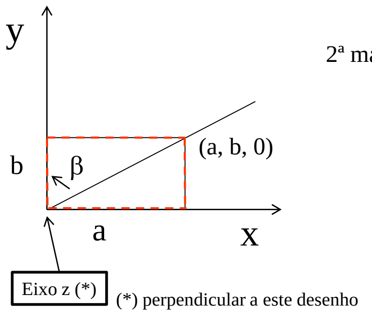
$T(x_0, y_0, z_0).\ R_z(-\beta).\ R_x(-\theta).\ R_z(\alpha).\ R_x(\theta).\ \boxed{R_z(\beta).\ T(-x_0, -y_0, -z_0).}$

Como se pode concluir da figura, o ângulo é

$$\beta = \text{arc tg } (a/b)$$

$$\cos\beta = \frac{b}{h} \qquad \sin\beta = \frac{a}{h}$$

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$



2ª matriz da sequência:

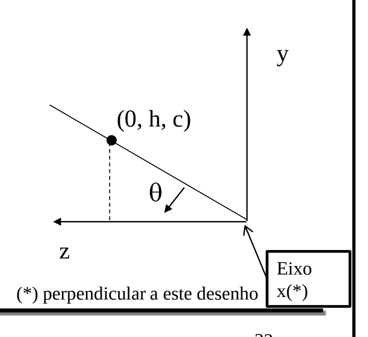
$$R_z(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{b}{h} & -\frac{a}{h} & 0 & 0 \\ \frac{a}{h} & \frac{b}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um eixo arbitrário

$T(x_0, y_0, z_0).\ R_z(-\beta).\ R_x(-\theta).\ R_z(\alpha).\ R_x(\theta).\ \boxed{R_z(\beta).\ T(-x_0, -y_0, -z_0).}$

Após a aplicação desta rotação, o eixo passa em (0,0,0) e (0, h, c):

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{h} & -\frac{a}{h} & 0 & 0 \\ \frac{a}{h} & \frac{b}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotação em torno de um eixo arbitrário

$T(x_0, y_0, z_0).\ R_z(-\beta).\ R_x(-\theta).\ R_z(\alpha).\ \boxed{R_x(\theta).\ R_z(\beta).\ T(-x_0, -y_0, -z_0).}$

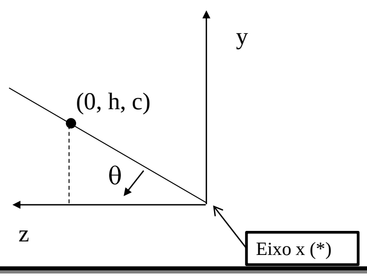
Calculemos $R_x(\theta)$:

$\cos\theta = \dfrac{c}{H}$ $\sin\theta = \dfrac{h}{H}$

O ângulo θ é $\arccos\dfrac{c}{H}$

$$H = \sqrt{h^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Comprimento ou norma do vetor diretor do eixo dado.



(*) perpendicular a este desenho

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{H} & -\dfrac{h}{H} & 0 \\ 0 & \dfrac{h}{H} & \dfrac{c}{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um eixo arbitrário

$T(x_0, y_0, z_0).\ R_z(-\beta).\ R_x(-\theta).\ R_z(\alpha).\ \boxed{R_x(\theta).\ R_z(\beta).\ T(-x_0, -y_0, -z_0).}$

Podemos verificar que o eixo, após esta rotação, está assente no eixo dos ZZ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{H} & -\dfrac{h}{H} & 0 \\ 0 & \dfrac{h}{H} & \dfrac{c}{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comprimento ou norma do vetor diretor. Se forem usados os co-senos diretores então H = 1.

Rotação em torno de um eixo arbitrário

$T(x_0, y_0, z_0). R_z(-\beta). R_x(-\theta). R_z(\alpha).$ $\boxed{R_x(\theta). R_z(\beta). T(-x_0, -y_0, -z_0).}$

α é um dado do problema

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um eixo arbitrário

$T(x_0, y_0, z_0). R_z(-\beta).$ $\boxed{R_x(-\theta). R_z(\alpha). R_x(\theta). R_z(\beta). T(-x_0, -y_0, -z_0).}$

$$R_x(-\theta) = R_x(\theta)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{H} & \frac{h}{H} & 0 \\ 0 & -\frac{h}{H} & \frac{c}{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um eixo arbitrário

$T(x_0, y_0, z_0). R_z(-\beta). R_x(-\theta). R_z(\alpha). R_x(\theta). R_z(\beta). T(-x_0, -y_0, -z_0).$

$$R_z(-\beta) = R_z(\beta)^T = \begin{bmatrix} \frac{b}{h} & \frac{a}{h} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{h} & \frac{b}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um eixo arbitrário

Calcularam-se as 7 matrizes da sequência, bastaria agora efetuar o respetivo produto matricial para obter a matriz pretendida: a matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo dado.

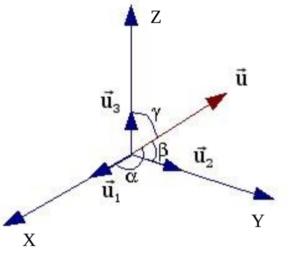
Note-se que a <u>sequência</u> usada <u>não</u> <u>é a única</u> que permite obter a matriz da rotação de ângulo α em torno do eixo dado. Pode fazer-se coincidir o eixo arbitrário com qualquer um dos três eixos principais e, para cada um, há mais do que uma maneira de realizar a transformação.

Co-senos directores

Os co-senos dos ângulos que um vector forma com os eixos coordenados (com o eixo dos xx, dos yy e dos zz, respectivamente,α, β, γ), designam-se por **co-senos directores** do vector.

Verifica-se que:

- $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$
- **Se um vetor é unitário, então as suas coordenadas são os seus co-senos directores.**



http://www.ciencialab.com/mod/resource/view.php?id=224

Exercício

Considere um cilindro cujas bases têm centros em (10,20,20) e (20,30,30). Indique uma sequência de transformações elementares (rotações, translacções e mudanças de escala) que permitam transformar o cilindro de forma que a altura passe a medir o dobro e o diâmetro das bases passe a medir metade. Devem ser mantidas a posição inicial do eixo do cilindro e a posição do centro da base com coordenadas (10,20,20).

Essa sequência é única? Justifique.