Composição ou concatenação de transformações geométricas

Na prática é necessário com frequência combinar várias transformações e será extremamente vantajoso saber **concatenar transformações**, isto é, determinar uma **transformação única** equivalente à combinação de várias transformações elementares.

- As **rotações** e as **mudanças de escala** são representadas por **produtos matriciais**, mas a **translacção** é representada por uma **soma** de **vetores**.
- Isto significa que é possível concatenar as duas primeiras entre si, mas **não** com a translação.

PROBLEMA!

Coordenadas Homogéneas

A **solução** para este problema passa pela utilização de **coordenadas homogéneas.**

Em coordenadas homogéneas, um ponto **P = (x,y)** é representado por qualquer tripleto de coordenadas $(\mathbf{x_1, x_2, h})$ que satisfaça as seguintes condições:

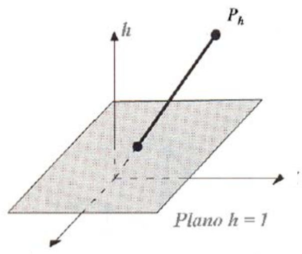
$$h \neq 0 \qquad \frac{x_1}{h} = x \qquad \frac{x_2}{h} = y$$

Como é evidente há uma infinidade de tripletos que satisfazem as 3 condições e qualquer deles representa o ponto P.

Coordenadas Homogéneas

Uma escolha que facilita é **h = 1**

Assim, um ponto P = (x,y) do plano é
representado em coordenadas homogéneas por (x,y,1)



Transformações Geométricas usando coordenadas homogéneas

$x' = x + t_x$

$y' = y + t_y$

Usando coordenadas homogéneas, a **Translação passa a poder representar-se também por um produto matricial**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{P' = T(t_x,t_y).\ P}$

Um ponto é representado por um vetor coluna. A 3ª coordenada é a coordenada homogénea, sempre igual a 1.

Transformações Geométricas usando coordenadas homogéneas

Nestas duas transformações a origem é invariante (ou seja, não é alterada)

Matriz da mudança de escala em coordenadas homogéneas:

$$S(s_x,s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{P' = S(s_x,s_y).\ P}$$

Matriz da rotação em coordenadas homogéneas:

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{P' = R(\alpha).\ P}$$

Transformações Geométricas usando coordenadas homogéneas

- Portanto, utilizando **coordenadas homogéneas e representando um ponto por um vector coluna**, as três transformações geométricas são representadas pelas seguintes matrizes de 3x3:

$$T(t_x,t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_x,s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembrar que o ponto (0,0) é o invariante destas transformações

Composição ou concatenação de transformações geométricas

- Nestas condições é possível, sem limitações, a concatenação de transformações, **existindo sempre uma matriz 3x3 que representa qualquer sequência arbitrária de transformações.**

Transformar um ponto $\mathbf{P'_{3x1} = M_{3x3} \cdot P_{3x1}}$

Transformar k pontos

$$\mathbf{P'_{3xk} = M_{3x3} \cdot P_{3xk}}$$

Matriz dos Pontos Transformados = Matriz da Transformação Geométrica **x** Matriz dos Pontos Originais

Composição ou concatenação de transformações geométricas

É comum uma única transformação composta ser aplicada a muitos pontos (lembrar a dimensão das malhas poligonais que vimos nos exemplos anteriores).

É portanto muito vantajoso que se calcule a matriz da transformação uma única vez.

Depois multiplica-se esta matriz por todos os pontos que se pretende alterar.

Tranformações Inversas

$$[T(t_x,t_y)]^{-1} = T(-t_x,-t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S(s_x, s_y)]^{-1} = S(1/s_x,1/s_y) = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Inversas

$$[R(\alpha)]^{-1} = R(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

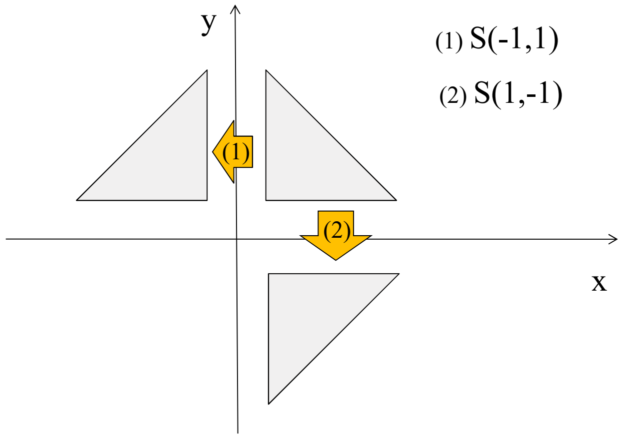
$$\underset{(*)}{=} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [R(\alpha)]^T$$

$$\boxed{[R(\alpha)]^{-1} = [R(\alpha)]^T}$$

(*) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Outras Transformações

Simetrias em relação aos eixos principais



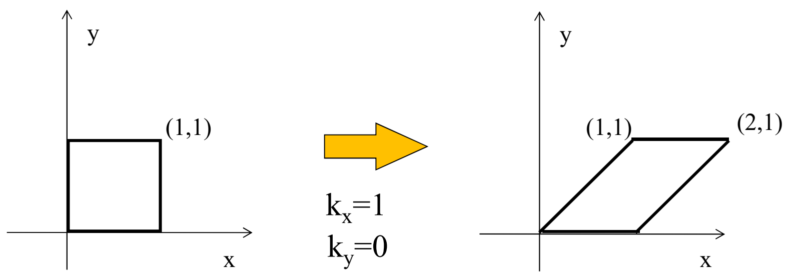
Outras Transformações

Shearing (cisalhamento)

$$x' = x + y.k_x$$
$$y' = x.k_y + y$$

$$Sh(k_x,k_y) = \begin{bmatrix} 1 & k_y & 0 \\ k_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deformação linear ao longo do eixo dos xx ou do eixo dos yy ou de ambos (também é uma transformação afim).



Composição ou concatenação de transformações geométricas

O produto de matrizes não é comutativo, logo,

- a **composição de transformações geométricas não é comutativa.**

Há algumas excepções a esta regra.

Há comutatividade quando:

- Concatenamos transformações do mesmo tipo
- Concatenamos uma rotação e uma mudança de escala com os factores de escala iguais $S(s,s).\ R(\alpha) = R(\alpha).\ S(s,s)$

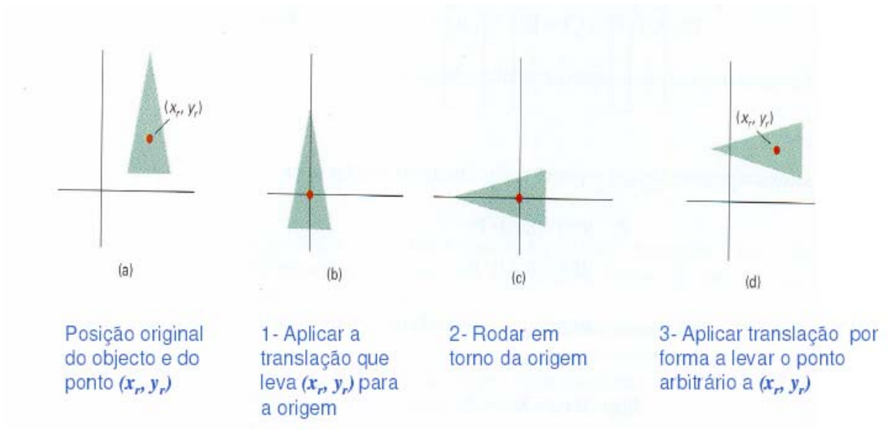
Composição ou concatenação de transformações geométricas

- A composição de Translações é aditiva
$$T(t_x,t_y).\ T(v_x,v_y) = T(t_x+v_x,\ t_y+v_y)$$
- A composição de Rotações é aditiva
$$R(\alpha).\ R(\beta). = R(\alpha + \beta)$$
- A composição de Mudanças de Escala é multiplicativa
$$S(s_x,s_y).\ S(k_x,k_y) = S(s_x.k_x,\ s_y.k_y)$$

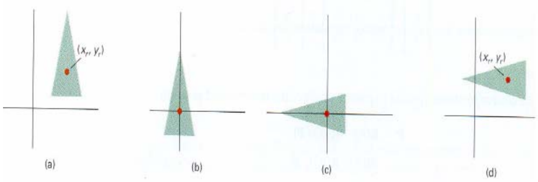
Composição ou concatenação de transformações geométricas

- A composição de Translações, Rotações e Mudanças de Escala é uma Transformação Afim (mantém os paralelismos)

Rotação em torno de um ponto arbitrário (x_r, y_r)



Rotação em torno de um ponto arbitrário (x_r, y_r)



O ponto arbitrário é o invariante desta rotação!

É necessário:

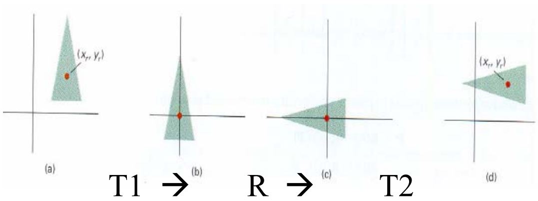
1 – Aplicar uma translação ao objecto por forma a que o ponto arbitrário coincida com a origem → T1

2 – Rodar o objecto em torno da origem → R

3 – Aplicar ao objecto a translação inversa da primeira, por forma a levar o ponto arbitrário para a posição original →T2

T1 → R → T2

Rotação em torno de um ponto arbitrário (x_r, y_r)



T1 → R → T2
(1) (2) (3)

Matriz desta transformação composta?

(1) Aplicar T1: $P'_{3x1} = T(-x_r,-y_r) \cdot P_{3x1}$

(2) A seguir, aplicar R: $P''_{3x1} = R(\alpha) \cdot P'_{3x1}$

(3) Finalmente, aplicar T2: $P'''_{3x1} = T(x_r,y_r) \cdot P''_{3x1}$

$$P'''_{3x1} = \boxed{T(x_r,y_r) \cdot R(\alpha) \cdot T(-x_r,-y_r)} \cdot P_{3x1}$$

Matriz da transformação composta

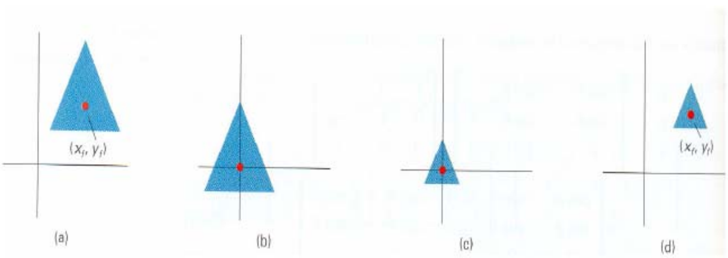
- Observamos que as matrizes são multiplicadas pela ordem inversa da aplicação das transformações geométricas.
- **Isto acontece em todas as transformações compostas**

$$\mathbf{P'''_{3x1} = T(x_r, y_r) \, . \, R(\alpha) \, . \, T(-x_r, -y_r) \, . \, P_{3x1}}$$

3 2 1

Observe a analogia com a composição de funções na Matemática: h∘g∘f(x) = h(g(f(x))).

Mudança de escala em relação a um ponto arbitrário (x_r, y_r)



Posição original do objecto e do ponto (x_f, y_f)

1- Aplicar a translação que leva (x_f, y_f) para a origem

2- Aplicar a mudança de escala

3- Aplicar translação por forma a levar o ponto fixo a (x_f, y_r)

Mudança de escala em relação a um ponto arbitrário (x_r, y_r)

É necessário:

1 – Aplicar uma translação ao objecto por forma a que o ponto arbitrário coincida com a origem

2 – Aplicar a mudança de escala em relação à origem

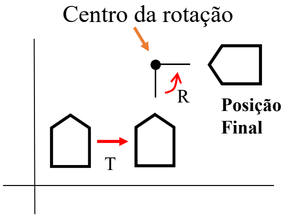
3 – Aplicar ao objecto a translação inversa da primeira, por forma a levar o ponto arbitrário para a posição original

$$T(x_r, y_r) \,.\, S(s_x, s_y).\, T(-x_r, -y_r)$$

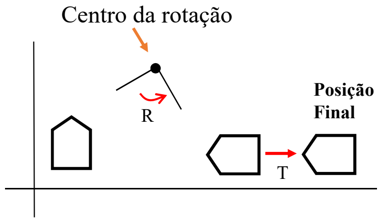
O ponto arbitrário é o invariante desta mudança de escala!

A **composição de transformações geométricas não é comutativa.**

Exemplo de **NÃO Comutatividade**: composição de rotação e de translação



(a)



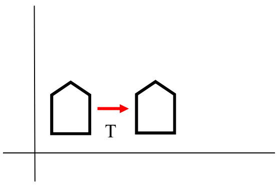
(b)

A alteração da ordem de uma sequência de transformações pode afectar o resultado final, como este exemplo ilustra.

Em (a) aplica-se ao objecto uma translação na direcção x e depois uma rotação 90º em sentido positivo.

Em (b) o objecto é rodado e só depois lhe é aplicada a translação.

Exemplo de **NÃO Comutatividade**: composição de rotação e de translação

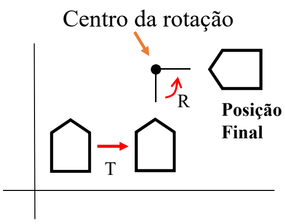


(a)

A alteração da ordem de uma sequência de transformações pode afetar o resultado final, como este exemplo ilustra.

Em **(a)** aplica-se ao objecto uma translação na direcção x

Exemplo de **NÃO Comutatividade**: composição de rotação e de translação

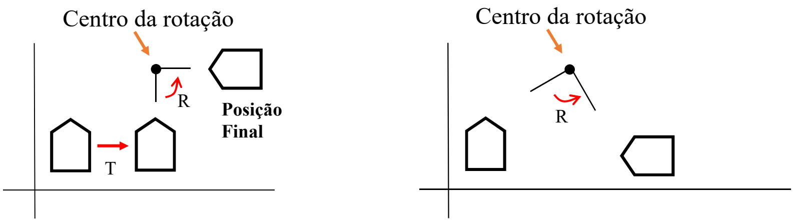


(a)

A alteração da ordem de uma sequência de transformações pode afectar o resultado final, como este exemplo ilustra.

Em **(a)** aplica-se ao objecto uma translação na direcção x e depois uma rotação 90º em sentido positivo.

Exemplo de **NÃO Comutatividade**: composição de rotação e de translação



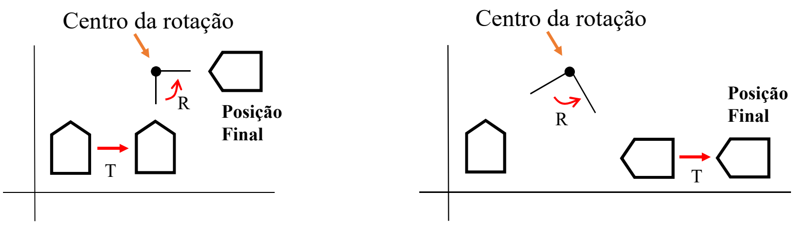
(a) **(b)**

A alteração da ordem de uma sequência de transformações pode afectar o resultado final, como este exemplo ilustra.

Em **(a)** aplica-se ao objecto uma translação na direcção x e depois uma rotação 90º em sentido positivo.

Em **(b)** o objecto é rodado

Exemplo de **NÃO Comutatividade**: composição de rotação e de translação



(a) **(b)**

A alteração da ordem de uma sequência de transformações pode afectar o resultado final, como este exemplo ilustra.

Em **(a)** aplica-se ao objecto uma translação na direcção x e depois uma rotação 90º em sentido positivo.

Em **(b)** o objecto é rodado e só depois lhe é aplicada a translação.