微分方程数值解 - 第九章理论作业

强基数学 2001 班樊睿

2023 年 3 月 29 日

习题 1 (9.5). 证明近似解的相对误差由相对残量控制，即

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)}\frac{\|r\|_2}{\|b\|_2} \le \frac{\|e\|_2}{\|x\|_2} \le \mathrm{cond}(A)\frac{\|r\|_2}{\|b\|_2}. \tag{1}$$

证明. 因为 $Ae = r, A^{-1}r = e, Ax = b, A^{-1}b = x$，所以

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{cond}(A)}\frac{\|r\|_2}{\|b\|_2}\\
=&\frac{1}{\|A\|_2\|A^{-1}\|_2}\frac{\|Ae\|_2}{\|b\|_2}\\
\le&\frac{1}{\|A\|_2\|A^{-1}\|_2}\frac{\|A\|_2\|e\|_2}{\|b\|_2}\\
=&\frac{\|e\|_2}{\|A^{-1}\|_2\|b\|_2}\\
\le&\frac{\|e\|_2}{\|x\|_2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cond}(A)\frac{\|r\|_2}{\|b\|_2}\\
=&\|A\|_2\|A^{-1}\|_2\frac{\|r\|_2}{\|b\|_2}\\
\ge&\|A\|_2\|A^{-1}\|_2\frac{\|r\|_2}{\|A\|_2\|x\|_2}\\
=&\frac{\|A^{-1}\|_2\|r\|_2}{\|x\|_2}\\
\ge&\frac{\|e\|_2}{\|x\|_2}.
\end{aligned}$$

□

习题 2 (9.8)**.** 求一维 *Dirichlet* 边值问题的离散矩阵 A 的条件数 $\mathrm{cond}(A)$ 在 $n=8$ 和 $n=1024$ 时的值。

解. 根据 Lem 7.25 可得

$$\lambda_k(A)=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}. \tag{3}$$

由条件数的定义，有

$$\mathrm{cond}(A)=\frac{\lambda_n(A)}{\lambda_1(A)}=\frac{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}=\tan^2\frac{(n-1)\pi}{2n} \tag{4}$$

当 $n=8$ 时，$\mathrm{cond}(A)=25.27$.

当 $n=1024$ 时，$\mathrm{cond}(A)=424971.18$. □

习题 3 (9.11)**.** 对 $\Omega=(0,1)$，作图说明网格 Ω^h 上能表示的最多的波数为 $n_{\max}=\frac{1}{h}$。如果 *Fourier mode* 在所有边界点处均为 0，情况如何？

解. 以 $n=6, h=\frac{1}{6}$ 为例。

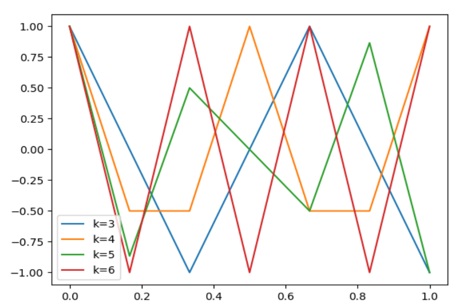

图 1: 题 9.11 图-1

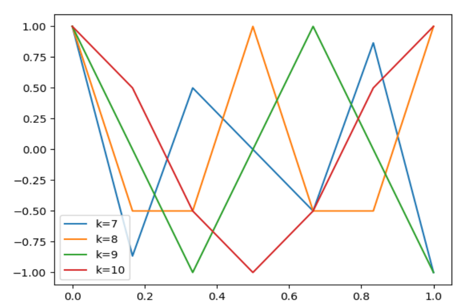

图 2: 题 9.11 图-2

通过作出 $y=\cos(k\pi x)$ 在 $k=3,4,\ldots,10$ 的图像（如 1、2所示），可知：$k\le n$ 时，网格上显示的波数和实际波数相同；$k>n$ 时，网格上显示的波数为 $2n-k$。

若要求边界点处的值为 0，则当 $k=n$ 时网格点处的值也均为 0。这时是不能显示出 n 个半波的。此时最多只能显示出 $n-1$ 个半波。 □

习题 4 (9.14)**.** 作出 *Example 9.13* 的 $n=6$ 情形的图。

解. 作图代码如下：

```python
N = 1000
n = 6
k1 = n*0.5
k2 = n*1.5

def w(k, x) :
    return math.sin(k*pi*x)

xx = [i/N for i in range(N+1)]
yy1 = [w(k1,t) for t in xx]
yy2 = [w(k2,t) for t in xx]

x = [i/n for i in range(n+1)]
y1 = [w(k1,t) for t in x]
y2 = [w(k2,t) for t in x]

plt.plot(xx,yy1)
plt.plot(xx,yy2)
plt.plot(x,y1)
plt.plot(x,y2)
```

画出 $y = \sin\frac{n}{2}x$ 和 $y = \sin\frac{3n}{2}x$ 的图像，以及仅利用格点处的值线性插值的图像，如图 3所示。

由图 3可知，虽然两条曲线本身波数不同，但在 $n = 6$ 的网格上都只能描述出 $\frac{n}{2} = 3$ 个半波。 □

习题 5 (9.17)**.** 对一维 *Dirichlet* 边值问题的线性系统 $Au = f$ 证明加权 *Jacobi* 迭代的迭代矩阵，证明

$$T_\omega = (1-\omega)I + \omega D^{-1}(L+U) = I - \frac{\omega h^2}{2}A, \tag{5}$$

其特征向量和 A 的相同，特征值为

$$\lambda_k(T_\omega) = 1 - 2\omega\sin^2\frac{k\pi}{2n}. \tag{6}$$

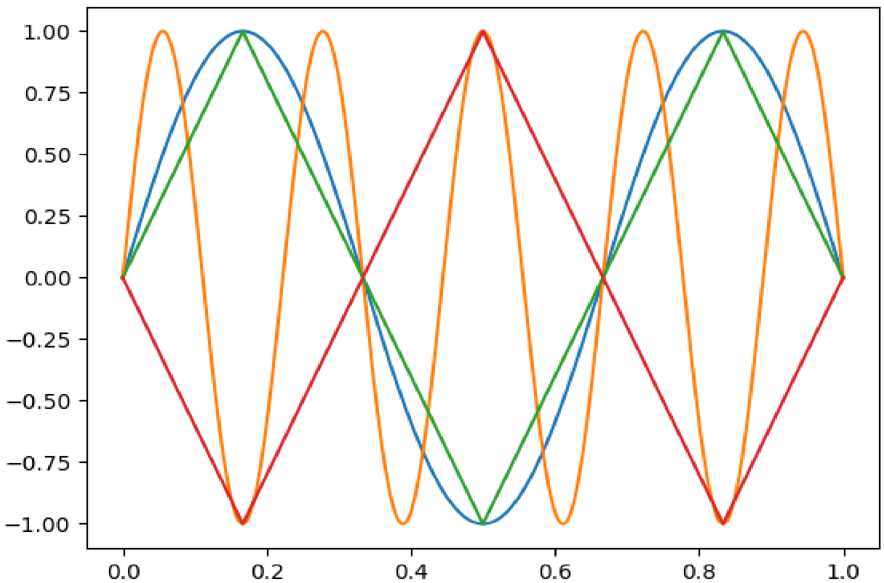

图 3: 题 9.14 图

证明. 根据迭代矩阵的公式，有

$$\begin{aligned} T_w &= (1-\omega)I + \omega D^{-1}(L+U) \\ &= (1-\omega)I + \omega D^{-1}(L+U-D) + \omega I \\ &= I - \omega D^{-1}A \end{aligned} \tag{7}$$

其中第三个等号是因为 $A = D - L - U$。

因为 A 的对角线元素全是 $\frac{2}{h^2}$，所以 $D = \frac{2}{h^2}I$，$D^{-1} = \frac{h^2}{2}I$。

因此

$$T_\omega = I - \frac{\omega h^2}{2}A. \tag{8}$$

设 v_k 是对应 A 的特征值 λ_k 特征向量。则

$$T_\omega v_k = (1-\frac{\omega h^2}{2}A)v_k = v_k - \frac{\omega h^2}{2}Av_k = v_k - \frac{\omega h^2}{2}\lambda_k v_k = (1-\frac{\omega h^2}{2}\lambda_k)v_k \tag{9}$$

因此 v_k 是对应 T_ω 的特征值

$$1 - \frac{\omega h^2}{2}\lambda_k = 1 - \frac{\omega h^2}{2}\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi}{2n} = 1 - 2\omega\sin^2\frac{k\pi}{2n} \tag{10}$$

的特征向量。 □

习题 6 (9.18). 用程序作出 *Fig. 2.7 by Briggs et al. [2000]*. $n = 64, \omega \in [0, 1]$。证明 $\rho(T_\omega) \geq 0.9986$，即收敛速度缓慢。

解. 作图代码如下：

```
n = 64
def lmd(w, k) :
    return 1 - 2 * w * math.sin(k*pi / (2*n)) ** 2

plt.xlabel('k')
plt.ylabel('eigenvalue')
plt.plot([0,64],[0,0])
ks = [k for k in range(1,n)]
for w in [1/3, 1/2, 2/3, 1]:
    ls = [lmd(w, k) for k in ks]
    plt.plot(ks, ls, label = "w={:f}".format(w))
plt.legend()
```

结果如图 4 所示。

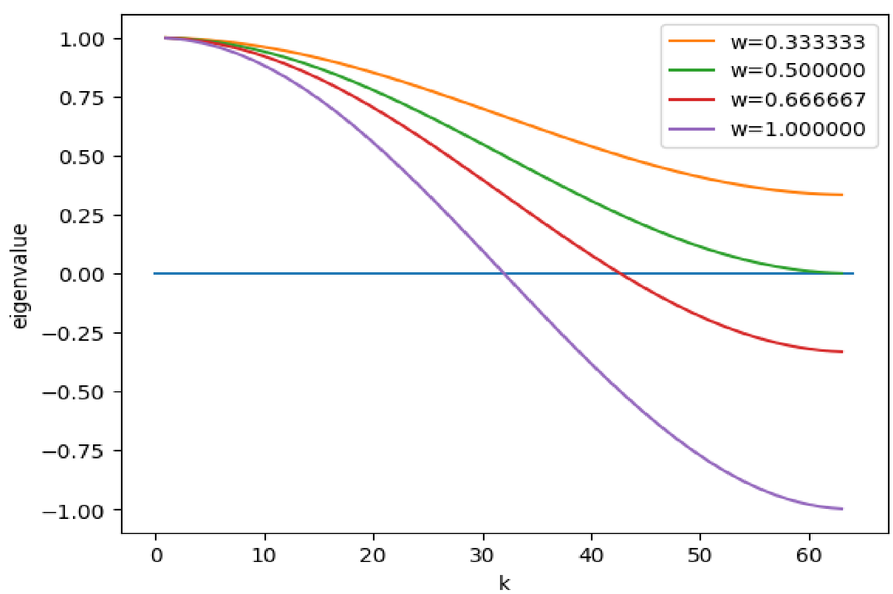

图 4: 题 9.18 图

当 $n = 64, \omega \in (0, 1)$ 时，

$$\rho(T_\omega) = \lambda_{\max} > 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{2n} \approx 0.998795. \tag{11}$$

根据迭代法收敛速度的性质，因为 $\rho(T_\omega) \to 1$，所以收敛速度缓慢。

□

习题 7 (9.21)**.** 用程序作出 *Fig. 2.8 by Briggs et al. [2000].* 证明常规 *Jacobi* 方法只在 $16 \le k \le 48$ 的模式是良好的。反之，对于 $\omega = \dfrac{1}{3}$，证明对 $16 \le k < 64$ 均是良好的。

解. 作图代码如下：

```
n = 64

def lmd(w, k) :
    return 1 - 2 * w * math.sin(k*pi / (2*n)) ** 2
def itnum(w, k) :
    return min(100, math.log(0.01) / math.log(abs(lmd(w, k))))

plt.xlabel('k')
plt.ylabel('iteration times')
ks = [k for k in range(1,n)]
for w in [1, 2/3]:
    ls = [itnum(w, k) for k in ks]
    plt.plot(ks, ls, label = "w={:f}".format(w))
plt.legend()
```

结果如图 5 所示。

蓝色和黄色曲线分别是 $\omega = 1$（即不加权的 Jacobi 方法）和 $\omega = \dfrac{2}{3}$ 时迭代次数关于 k 的函数图像。

同样使精度增加两位，不加权的 Jacobi 方法的迭代次数在 $16 \le k \le 48$ 时都很小（不超过 15 次），在 k 较小或较大时迭代次数都会很大；加权的 Jacobi 方法在 $\omega = \dfrac{2}{3}$ 时，只要 $k \ge 16$，迭代次数都不超过 15 次，且当 $k \ge 32$ 时迭代次数非常少，只需最多 5 次。

这是因为，对于不加权的 Jacobi 方法，当 $16 \le k \le 48$ 时，$\sin\dfrac{k\pi}{2n} \in [\sqrt{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}]$，$\lambda_k = 1 - 2\sin^2\dfrac{k\pi}{2n} \in [1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1]$，快速收敛；

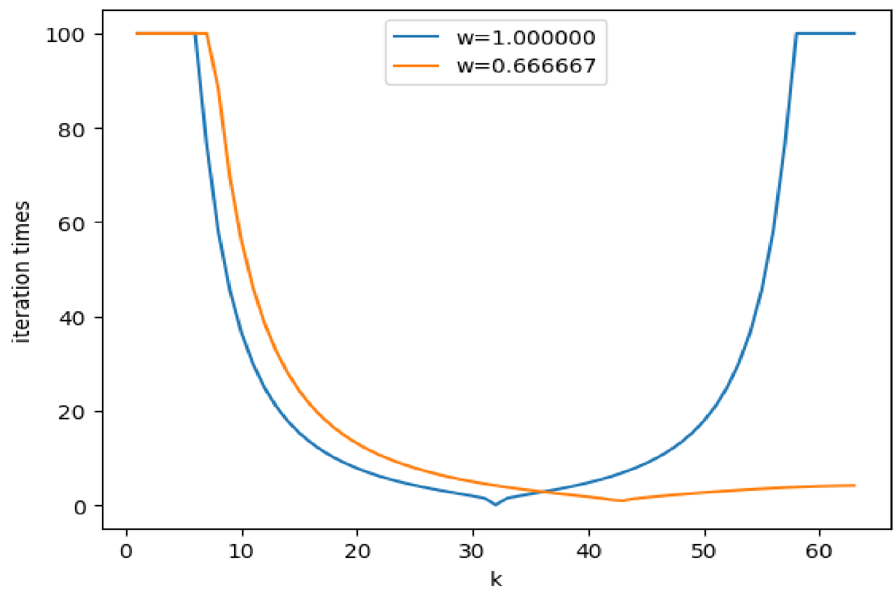

图 5: 题 9.21 图

对于加权 Jacobi 方法，当 $k \geq 32 = \frac{n}{2}$ 时，$\sin\frac{k\pi}{2n} \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$，$\lambda_k = 1 - 2\omega\sin^2\frac{k\pi}{2n} \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$，快速收敛。

□

习题 8 (9.35)**.** 证明对于 $\nu_1 = \nu_2 = 1$, *FMG* 的计算代价小于 $\frac{2}{(1-2^{-\mathrm{D}})^2}$WU。给出 *FMG* 当 $\mathrm{D} = 1, 2, 3$ 时尽可能紧的上界。

解. 先考虑 FMG-3（即 VC 循环）的执行次数。VC 循环要在宽度为 $h, 2h, 2^2h, \ldots, 2^{m-1}h$ 的网格上各进行一次，每次花费的代价为

$$2(2^{-k\mathrm{D}} + 2^{-(k+1)\mathrm{D}} + \cdots + 2^{-m\mathrm{D}})\mathrm{WU} < \frac{2^{-k\mathrm{D}+1}}{1-2^{-\mathrm{D}}}\mathrm{WU}. \tag{12}$$

其中，$k = 1, 2, \ldots, m$。

这样，VC 循环的总代价就是

$$\frac{2}{1-2^{-\mathrm{D}}}(2^{-\mathrm{D}} + 2^{-2\mathrm{D}} + \cdots + 2^{-m\mathrm{D}})\mathrm{WU} < \frac{2^{-\mathrm{D}+1}}{(1-2^{-\mathrm{D}})^2}\mathrm{WU}. \tag{13}$$

又因为 FMG-1 和 FMG-2 在每种宽度的网格上也都会执行一次，所以

这部分的代价为

$$2(1+2^{-\mathrm{D}}+2^{-2\mathrm{D}}+\cdots+2^{-m\mathrm{D}})\mathrm{WU}=\frac{2}{1-2^{-\mathrm{D}}}\mathrm{WU}. \tag{14}$$

总代价为

$$\frac{2(2^{-\mathrm{D}}+1-2^{-\mathrm{D}})}{(1-2^{-\mathrm{D}})^2}\mathrm{WU}=\frac{2}{(1-2^{-\mathrm{D}})^2}\mathrm{WU}. \tag{15}$$

当 $\mathrm{D}=1,2,3$ 时，分别有上界 $8\mathrm{WU}, \frac{32}{9}\mathrm{WU}, \frac{128}{49}\mathrm{WU}$。 □

习题 9. 将 *(9.32)* 重写为

$$TG\begin{bmatrix} w_k \\ w_{k'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_k^{\nu_1+\nu_2}s_k & \lambda_k^{\nu_1}\lambda_{k'}^{\nu_2}s_k \\ \lambda_{k'}^{\nu_1}\lambda_k^{\nu_2}c_k & \lambda_{k'}^{\nu_1+\nu_2}c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_k \\ w_{k'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_k \\ w_{k'} \end{bmatrix} \tag{16}$$

解释 c_i 很小的原因。通过作出双网格校正 $n=64, \omega=\frac{2}{3}$ 情形对应不同衰减系数的的六个图像，导出 $\rho(TG)\approx 0.1$ 的结论。对 $n=128$ 作同样的图，证明 $\rho(TG)$ 与 n 的大小无关。

解. 作图代码如下：

```
n = 64
w = 2/3

def lmd(w, k) :
    return 1 - 2 * w * math.sin(k*pi / (2*n)) ** 2

def c(k) :
    return math.cos(k*pi/(2*n))**2+

def s(k) :
    return math.sin(k*pi/(2*n))**2

k1s = [k for k in range(1,n//2+1)]
k2s = [k for k in range(n//2, n)]

id = 0
for [v1,v2] in [[0,0],[0,2],[1,1],[2,0],[2,2],[4,0]]:
```

```
    id += 1
    plt.figure(id)
    plt.xlabel('k')
    plt.ylabel('coefficients')
    c1s = [lmd(w, k) ** (v1+v2) * s(k) for k in range(1, n//2+1)]
    c2s = [lmd(w, n-k) ** v1 * lmd(w, k) ** v2 * s(n-k) for k in range(1, n//2+1)]
    c3s = [lmd(w, n-k) ** v1 * lmd(w, k) ** v2 * c(k) for k in range(n//2, n)]
    c4s = [lmd(w, k) ** (v1+v2) * c(n-k) for k in range(n//2, n)]
    plt.plot(k1s, c1s, label = 'c1')
    plt.plot(k1s, c2s, label = 'c2')
    plt.plot(k2s, c3s, label = 'c3')
    plt.plot(k2s, c4s, label = 'c4')
    plt.legend()
```

作图结果如图 6 至 11 所示。$\rho(TG)$ 是图中 ρ 曲线的极大值。

由此可见，当 $\nu_1 \neq 0$ 或 $\nu_2 \neq 0$ 时，均有 $\rho(TG) \leq 0.1$。进一步当 $\nu_1 = 2, \nu_2 = 2$ 或 $\nu_1 = 4, \nu_2 = 0$ 时，$\rho(TG) \approx 0.06$。

将 n 改为 128，得到图 12 到图 17。

可见把 n 改为 128 后，c_1, c_2, c_3, c_4, ρ 的值域都不变。事实上它们的图像相比 $n = 64$ 只是水平方向拉长到原来的 2 倍。显然 $\rho(TG)$ 也不变。

□

习题 10. 证明全加权算子满足

$$\dim \mathcal{R}(I_h^{2h}) = \frac{n}{2} - 1, \dim \mathcal{N}(I_h^{2h}) = \frac{n}{2}. \tag{17}$$

解. 因为 I_h^{2h} 是行满秩的，所以

$$\dim \mathcal{R}(I_h^{2h}) = \operatorname{rank}(I_h^{2h}) = \frac{n}{2} - 1. \tag{18}$$

根据线性映射基本定理，

$$n - 1 = \dim R^{n-1} = \dim \mathcal{R}(I_h^{2h}) + \dim \mathcal{N}(I_h^{2h}). \tag{19}$$

所以

$$\dim \mathcal{N}(I_h^{2h}) = (n-1) - \mathcal{R}(I_h^{2h}) = (n-1) - (\frac{n}{2} - 1) = \frac{n}{2}. \tag{20}$$

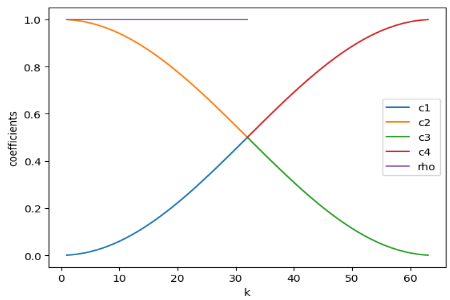

图 6: $\nu_1 = 0, \nu_2 = 0$

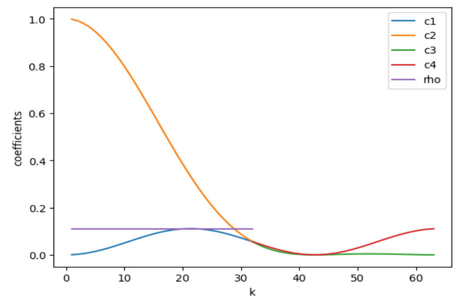

图 7: $\nu_1 = 0, \nu_2 = 2$

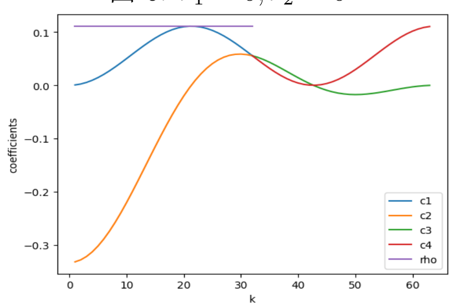

图 8: $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$

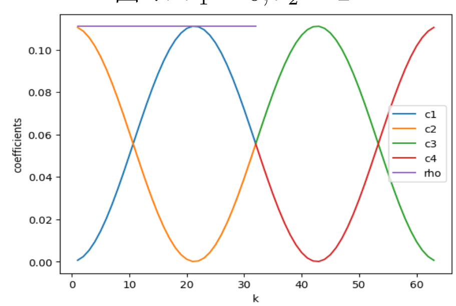

图 9: $\nu_1 = 2, \nu_2 = 0$

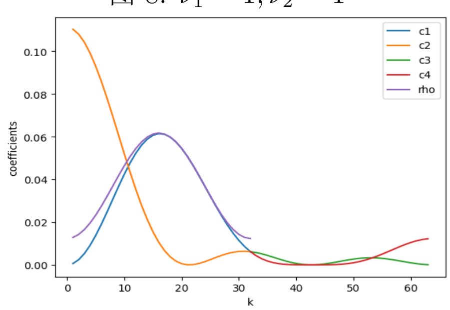

图 10: $\nu_1 = 2, \nu_2 = 2$

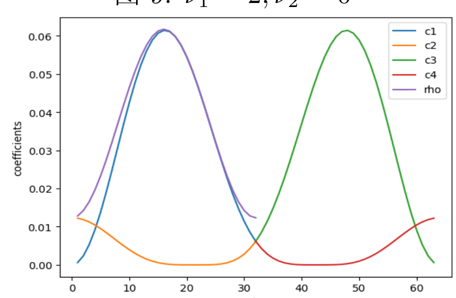

图 11: $\nu_1 = 4, \nu_2 = 0$

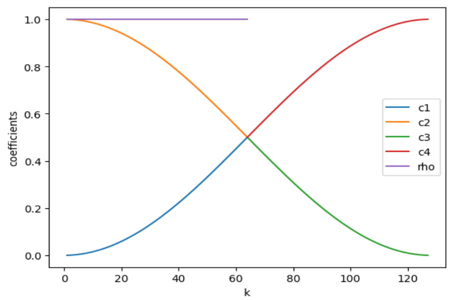

图 12: $\nu_1 = 0, \nu_2 = 0$

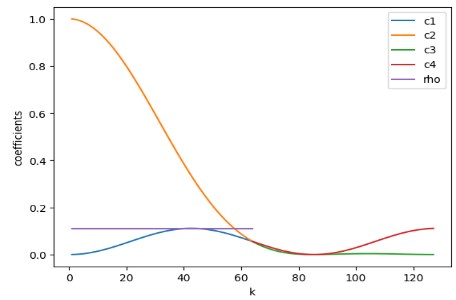

图 13: $\nu_1 = 0, \nu_2 = 2$

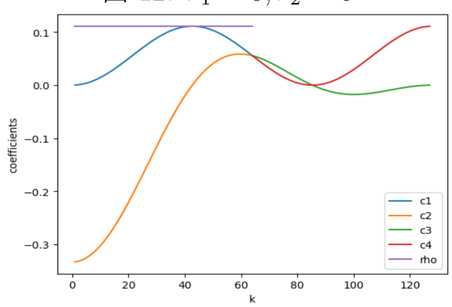

图 14: $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$

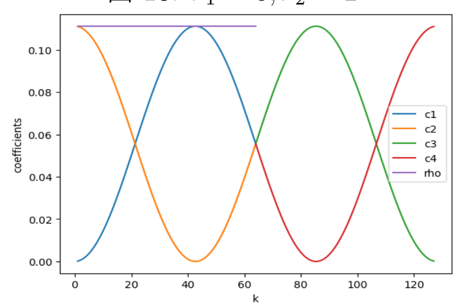

图 15: $\nu_1 = 2, \nu_2 = 0$

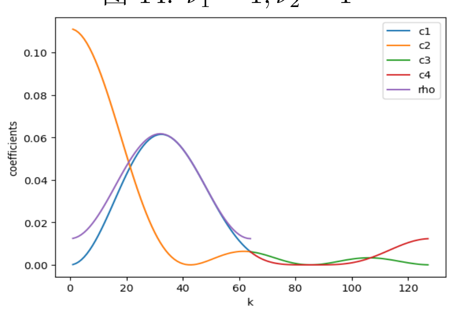

图 16: $\nu_1 = 2, \nu_2 = 2$

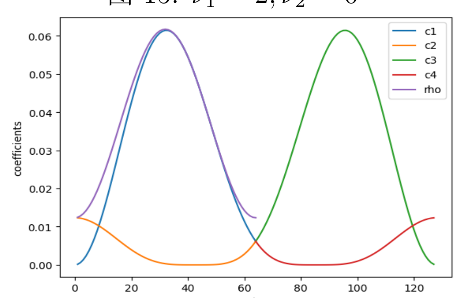

图 17: $\nu_1 = 4, \nu_2 = 0$

□