数值分析-第二章理论作业

2.1 对 $f\in C^2[x_0,x_1]$, $x\in(x_0,x_1)$, f 在 x_0, x_1 两点的线性插值满足

$$f(x)-P_1(f;x)=\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-x_0)(x-x_1).$$

考虑 $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$, $x_1=2$.

(1) 求 $\xi(x)$.

Sol: $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(x_0)=f(1)=1$, $f(x_1)=f(1)=\frac{1}{2}$.

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1}=-\frac{1}{2}.$$

$$P_1(f;x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)=1-\frac{1}{2}(x-1)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

$$f(x)-P_1(f;x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{2}.$$

$\because f''(x)=\frac{2}{x^3}$, $\therefore \frac{2}{\xi(x)^3}=\frac{1}{x}$, $\xi(x)=(2x)^{\frac{1}{3}}$.

(2) 将 $\xi(x)$ 的定义区间连续延拓到 $[x_0,x_1]$. 求 $\max\xi(x)$, $\min\xi(x)$, $\max f''(\xi(x))$.

Sol: $\max\xi(x)=\xi(2)=\sqrt[3]{4}$. $\min\xi(x)=\xi(1)=\sqrt[3]{2}$.

$\max f''(\xi(x))=\max\frac{1}{x}=1$.

2.2 令 $\mathbb{P}_m^+$ 为所有不超过 m 阶~~的多项式~~且在实轴上恒取非负值的多项式.

$\mathbb{P}_m^+=\{p: p\in\mathbb{P}_m, \forall x\in\mathbb{R}, p(x)\geq 0\}$. 求 $p\in\mathbb{P}_{2n}^+$ s.t. $p(x_i)=f_i$, $i=0,1,\ldots,n$, $f_i\geq 0$.

x_i 是 $\mathbb{R}$ 上两两不同的点.

Sol: 设 $P_n(f;x)$ 为 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 点的插值多项式, 满足

$\forall i=0\ldots n$, $P_n(f;x_i)=f_i^{\frac{1}{2}}$.

则令 $p(x)=P_n^2(f;x)$, 则 $p(x)\geq 0$, 且 $p(x_i)=f_i$.

2.3 设 $f(x)=e^x$.

(1) 证明 $\forall t\in\mathbb{R}$, $f[t,t+1,\ldots,t+n]=\frac{(e-1)^n}{n!}e^t$.

Pf: 当 $n=0$ 时, $f[t]=f(t)=e^t=\frac{(e-1)^0}{0!}e^t$.

归纳. 设结论对 $n-1$ 成立, 则

$f[t,t+1,\ldots,t+n]$

$$=\frac{f[t+1,\ldots,t+n]-f[t,t+1,\ldots,t+n-1]}{(t+n)-t}$$

$$=\frac{\frac{(e-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^{t+1}-\frac{(e-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^t}{n}$$

(2) $f[0,1,\dots,n] = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi) \cancel{= \frac{(e-1)^n}{n!}}$，求 ξ，并问 ξ 在 $[0,n]$ 中点 $\frac{n}{2}$ 的左侧还是右侧.

Sol：即 $e^{\xi} = (e-1)^n$.　$\therefore \xi = n\ln(e-1)$.

$\because \ln(e-1) \approx 0.5413 > \frac{1}{2}$，$\therefore \xi$ 在 $[0,n]$ 中点的右侧.

2.4 设 $f(0)=5$，$f(1)=3$，$f(3)=5$，$f(4)=12$.

(1) 用牛顿法求 $P_3(f;x)$.

Sol：差分表如下：

0	5			
1	3	−2		
3	5	1	1	
4	12	7	2	$\frac{1}{4}$

$$P_3(f;x) = 5 - 2x + x(x-1) + \frac{1}{4}x(x-1)(x-3)$$
$$= \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x + 5.$$

(2) 求 f 在区间 $(1,3)$ 的最小值点.

$P_3'(f;x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

$x_{min} = \sqrt{3}$，$P_3(f;x_{min}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + 5$.

2.5 设 $f(x) = x^7$.

(1) 求 $f[0,1,1,1,2,2]$.

Sol：$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f'(1)=7$，$\frac{f''(1)}{2}=21$，$f(2)=128$，$f'(2)=448$.

0	0					
1	1	1				
1	1	7	6			
1	1	7	21	15		
2	128	127	120	99	$\cancel{\frac{85}{2}}$ 42	
2	128	448	321	201	102	$\cancel{\frac{119}{4}}$ 30

$f[0,1,1,1,2,2] = \frac{119}{4}$.

(2) 上述差分可表示为 f 在 $\xi\in(0,2)$ 的5阶导数，求 ξ.

Sol：$f^{(5)}(x) = 2520x^2$.　$\therefore 2520\xi^2 = \frac{119}{4}$，$\xi = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{17}{10}}$

2.6 f 定义在 $[0,3]$ 上，且满足 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'(1)=-1$，$f(3)=f'(3)=0$.

(1) 用 Hermite 插值估计 $f(2)$.

Sol：

0	1				
1	2	1			
1	2	−1	−2		
3	0	−1	0	1	
3	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

$$P_4(f;x) = 1 + x - 2x(x-1) + x(x-1)^2 - \frac{1}{4}x(x-1)^2(x-3)$$
$$= \frac{x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x + 4}{4}.$$

$f(2) \approx P_4(f;2) = \frac{1}{2}$.

(2) 估计 f 在 $[0,3]$ 的最大误差. 假设 f 在 $[0,3]$ 的 5 阶导数连续有界 即 $|f^{(5)}(x)| \le M$.

Sol: 由 Thm 2.7 知 $|R_4(f;x)| \le \frac{M}{5!}|x(x-1)^2(x-3)^2|$

记 $g(x)=x(x-1)^2(x-3)^2$, 则 $g'(x)=(x-1)(x-3)(5x^2-12x+3)=0 \Rightarrow x=1,3,\frac{6\pm\sqrt{21}}{5}$.

$g(0)=g(1)=g(3)=0$, $g\left(\frac{6\pm\sqrt{21}}{5}\right)=\frac{48(102\mp 7\sqrt{21})}{3125}$.

因此 $|R_4(f;x)| \le \frac{2(102+7\sqrt{21})}{15625}M$.

2.7 定义向前差分算子 $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$. $\Delta^{k+1}f(x)=\Delta\Delta^k f(x)=\Delta^k f(x+h)-\Delta^k f(x)$.

向后差分算子 $\nabla f(x)=f(x)-f(x-h)$. $\nabla^{k+1}f(x)=\nabla\nabla^k f(x)=\nabla^k f(x)-\nabla^k f(x-h)$.

证明: $\Delta^k f(x)=k!\,h^k f[x_0,x_1,\dots,x_k]$,

$\nabla^k f(x)=k!\,h^k f[x_0,x_{-1},\dots,x_{-k}]$, 其中 $x_j=x+jh$.

PF: 归纳. 对 $k=1$. $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=hf[x,x+h]$. $\nabla f(x)=f(x)-f(x-h)=hf[x,x-h]$.

设结论对 $k-1$ 成立, 即 $\Delta^{k-1}f(x)=(k-1)!\,h^{k-1}f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]$.

$\nabla^{k-1}f(x)=(k-1)!\,h^{k-1}f[x_0,x_{-1},\dots,x_{-(k-1)}]$.

则
$$\begin{aligned}\Delta^k f(x)&=\Delta^{k-1}f(x+h)-\Delta^{k-1}f(x)\\&=(k-1)!\,h^{k-1}f[x_1,x_2,\dots,x_k]-(k-1)!\,h^{k-1}f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]\\&=(k-1)!\,h^{k-1}(hk\,f[x_0,x_1,\dots,x_k])\\&=k!\,h^k f[x_0,x_1,\dots,x_k].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^k f(x)&=\nabla^{k-1}f(x)-\nabla^{k-1}f(x-h)\\&\cancel{=(k-1)!\,h^{k-1}f[x_0,x_1,\dots,x_k]-(k-1)!\,h^{k-1}f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}\\&=(k-1)!\,h^{k-1}f[x_0,x_{-1},\dots,x_{-(k-1)}]-(k-1)!\,h^{k-1}f[x_{-1},x_{-2},\dots,x_{-k}]\\&=(k-1)!\,h^{k-1}(hk\,f[x_0,x_{-1},\dots,x_{-k}])\\&=k!\,h^k f[x_0,x_1,\dots,x_k]\end{aligned}$$

设 f 在 x_0 处可导, 求证 $\frac{\partial}{\partial x_0}f[x_0,x_1,\dots,x_n]=f[x_0,x_0,x_1,\dots,x_n]$. 对其他 x_i 的偏导?

PF: 归纳. 对 $n=0$, $\frac{\partial}{\partial x_0}f[x_0]=\frac{\partial}{\partial x_0}f(x_0)=f'(x_0)=f[x_0,x_0]$.

~~对 $n\ge1$.~~

设结论对 n 成立, 即 $\frac{\partial}{\partial x_0}f[x_0,x_1,\dots,x_n]=f[x_0,x_0,x_1,\dots,x_n]$,

则
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0}f[x_0,x_1,\dots,x_n]&=\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{f[x_1,x_2,\dots,x_n]-f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}\right)\\&\cancel{=f[x_0,x_0,x_1,\dots,x_{n-1}](x_n-x_0)}\\&=\frac{-f[x_0,x_0,x_1,\dots,x_{n-1}](x_n-x_0)+(f[x_1,x_2,\dots,x_n]-f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}])}{(x_n-x_0)^2}\\&=-\frac{f[x_0,x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}+\frac{f[x_0,x_1,\dots,x_n]}{x_n-x_0}\\&=f[x_0,x_0,x_1,\dots,x_n].\end{aligned}$$

对其他 x_i, 注意到 x_i 之间顺序可任意交换, 因此

$\frac{\partial}{\partial x_i}f[x_0,x_1,\dots,x_i,\dots,x_n]=f[x_0,x_1,\dots,x_i,x_i,\dots,x_n]$.

2.9 一个极值问题. 设 $n\in\mathbb{N}^+$. 求 $\min\max\limits_{x\in[a,b]}|a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n|$.

其中 $a_0\ne0$ 为定值.

Sol: 令 $t=\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}=\frac{2x-(a+b)}{b-a}$. 则 $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}$.

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

$= \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)^{n-j}$

$= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{j} \binom{n-j}{k} \left(\frac{b-a}{2}\right)^k \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-j-k} \xlongequal{\text{Def}} Q(t)$

上式中 t^n 的系数为 $a_0 \left(\frac{b-a}{2}\right)^n$.

由 ~~Thm~~ Cor 2.47. $\min \max_{t\in[-1,1]} |Q(t)| = a_0 \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{a_0(b-a)^n}{2^{2n-1}}$.

2.10 模仿切比雪夫定理的证明. 将记 n 次切比雪夫多项式为 T_n, 将其定义域从 $[-1,1]$ 扩展到 $\mathbb{R}$.

对固定的 $a>1$, 定义 $\mathbb{P}_n^a = \{p \in \mathbb{P}_n : p(a) = 1\}$ 和 $\hat{p}_n(x) = \frac{T_n(x)}{T_n(a)} \in \mathbb{P}_n^a$.

证明: $\forall p \in \mathbb{P}_n^a$, $\|\hat{p}_n\|_\infty \le \|p\|_\infty$. 其中 $\|f\|_\infty \xlongequal{\text{Def}} \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

PF: 反证, 设结论不成立,

$\because T_n(x)$ 的最值为 ± 1, $\therefore \|\hat{p}_n\|_\infty = \left|\frac{1}{T_n(a)}\right|$, $\therefore \exists p \in \mathbb{P}_n^a$, s.t. $\|p(x)\|_\infty < \left|\frac{1}{T_n(a)}\right|$.

~~令 $Q(x) = T_n(x) - p(x)/T_n(a)$, 则~~

令 $Q(x) = T_n(x) - p(x) T_n(a)$. 则 $Q(a) = T_n(a) - p(a) T_n(a) = 0$. 即 a 为 Q 的一个零点.

又 $Q(x_k') = T_n(x_k') - p(x_k') T_n(a)$, $|p(x_k') T_n(a)| < 1$, $|T_n(x_k')| = 1$.

$\therefore$ 对所有奇数 k, $Q(x_k') < 0$; 对所有偶数 k, $Q(x_k') > 0$.

$\therefore Q$ 在 (x_0', x_1'), (x_1', x_2'), $\dots$, (x_{k-1}', x_k') 上分别有至少一个零点.

$\therefore Q$ 有至少 $n+1$ 个零点. 但 Q 的次数至多为 n.

$\therefore Q(x) \equiv 0$, $p(x) \equiv \frac{T_n(x)}{T_n(a)}$. 矛盾! 故原结论成立.

2.11 证明 Lem 2.50

PF: (1) $\because$ $\forall k=0,1,\dots,n$, $\forall t\in(0,1)$, $\binom{n}{k}>0$, $t^k>0$, $(1-t)^k>0$. $\therefore b_{n,k}(t)=\binom{n}{k}t^k(1-t)^k>0$.

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n} b_{n,k}(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=(t+1-t)^n=1$.

(3) $\sum\limits_{k=0}^{n} k b_{n,k}(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=\sum\limits_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}t^k(1-t)^{n-k}=nt\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}t^k(1-t)^{n-1-k}$

$=nt(t+1-t)^{n-1}=nt$.

(4) $\sum\limits_{k=0}^{n}(k-nt)^2 b_{n,k}(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}(k-nt)^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}(k^2-2ntk+n^2t^2)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$

$=\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}-2n^2t^2+n^2t^2=\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}-n^2t^2$.

$\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}+\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$

$=\sum\limits_{k=2}^{n}n(n-1)\binom{n-2}{k-2}t^k(1-t)^{n-k}+nt \quad =n(n-1)t^2\sum\limits_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}t^k(1-t)^{n-2-k}+nt$

$=n(n-1)t^2(t+1-t)^{n-2}+nt \quad =n^2t^2+nt(1-t)$.

$\therefore \sum\limits_{k=0}^{n}(k-nt)^2 b_{n,k}(t)=nt(1-t)$.