

2022-2023 数值分析（数院）回忆卷

Wimple

2023 年 1 月 5 日

1 简答题

需在自行准备的 A4 答题纸上作答，并于考试结束后的 5min 内拍照上传。

1.1 解非线性方程组：牛顿迭代法

对于 $f(x) \in C^2$ ，若 f 在 x^* 处有 m 重根，证明：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)}$$

至少二阶收敛。

1.2 插值多项式：Hermite 问题

已知某函数在 x_0, x_1, x_2 处的函数值 $y_i, i = 0, 1, 2$ ，以及其在 x_1 处的导数值 m_1 ，求不高于 3 次的多项式 $P_3(x)$ ，满足：

- $P_3(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2$
- $P_3'(x_1) = m_1$.

1.3 样条函数：三次样条

求 a, b, c 的值，使得函数

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x - 2x^2, & x \in [0, 1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

是一个 $[0, 2]$ 上的三次样条函数；并确定 d 的值，使得 $\int_0^2 [f''(x)]^2 dx$ 最小。

1.4 逼近：最佳平方逼近

求 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $\text{span}\{1, x\}$ 上的最佳平方逼近元，其中 $\langle f, g \rangle = \int_{\frac{1}{4}}^1 f(x)g(x)dx$ 。

1.5 逼近：Fourier 展开

对于任意有限维或无限维空间中的向量 $w, u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*$ 是一标准正交向量组，则求证：

$$\|w - \sum_{i=1}^N \langle w, u_i^* \rangle u_i^*\|_2 \leq \|w - \sum_{i=1}^N a_i u_i^*\|_2$$

对任意的 a_1, a_2, \dots, a_N 成立。

1.6 数值积分：Guass 公式

若求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

对于任意不高于 3 次的多项式可以精确求解，试确定 A_0, A_1, x_0, x_1 的值。

2 论述题

本类题目没有标准答案；需直接在电脑上打字完成，无需写在答题纸上。

2.1 数值计算：浮点数

试说明：浮点数系统在数轴上是均匀分布的吗？若不均匀，在哪里稠密，在哪里稀疏？是什么原因造成的？对于计算有什么影响？