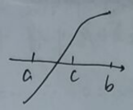
数值分析 - §1. 非线性方程

§1.1 二分法

Algo 1.1 二分法求方程~~的一个根~~在区间 $[a,b]$ 上的一个根.



输入: $a,b\in\mathbb{R}$, $[a,b]$ 上连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(a),f(b)$ 异号,

$\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, 迭代最大次数 $M\in\mathbb{N}^+$.

输出: 零点 c, (误差 h, 迭代次数 k.) 满足 $|f(c)|<\varepsilon$ 或 $|h|<\delta$ 或 $\underset{\text{没找到根}}{\underline{k=M}}$

```
h ← b-a, u ← f(a)
for k = 1:M do
    h ← h/2, c ← a+h, w ← f(c)        (取中点 c, 并求中点函数值)
    if |h|<δ or |w|<ε then break       (已找到根)
    else if sgn(w) = sgn(u) then a ← c   (f(a),f(c)同号, 缩短区间至[c,b]; 否则缩短区间至[a,c]).
end
```

Thm 1.2 二分法的收敛性证明

设第 n 次迭代区间为 $[a_n,b_n]$, 中点为 c_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha\in[a_0,b_0]$, $f(\alpha)=0$.

且 $|c_n-\alpha|\le 2^{-(n+1)}(b_0-a_0)$. 即 二分法是线性收敛的.

Pf: 由二分法的过程, $a_0\le a_1\le\dots\le b_0$. $b_0\ge b_1\ge b_2\ge\dots\ge b_0$. $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)=0$.

由单调有界定理, $\{a_n\},\{b_n\}$ 极限存在. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$.

$\because \forall n$, $f(a_n)f(b_n)\le 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)f(b_n)\overset{f\text{连续}}{=\!=}f(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)\cdot f(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)=f(\alpha)^2\ge 0$.

$\therefore f(\alpha)^2=0$, $f(\alpha)=0$.

$\because \alpha\in[a_n,b_n]$, $c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$, $\therefore |c_n-\alpha|\le|c_n-a_n|=2^{-(n+1)}(b_0-a_0)$.

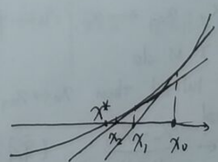
§1.2 牛顿法

Algo 1.3 牛顿法求方程接近 x_0 的一个根 (原理: 牛顿迭代法 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 收敛于 $f(x)$ 的零点)

输入: 二阶可微函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 及 f', $x_0\in\mathbb{R}$ (x_0 适当接近一个根, 否则可能找不到根)

$\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, 迭代最大次数 $M\in\mathbb{N}^+$.

输出: 零点 c, (迭代次数 k), 满足 $|f(c)|<\varepsilon$ 或 $\underset{\text{没找到}}{\underline{k=M}}$




```
x ← x0
for k = 0:M do
    u ← f(x)
    if |u|<ε then break
    x ← x - u/f'(x)
end
```

(牛顿迭代法: $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$)

Thm 1.4 牛顿法的收敛性证明

设 α 是 $f(x)$ 的零点，f 在 α 的某邻域上二阶可微，$f'(\alpha)\neq 0$，x_0 适当接近 α，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha-x_{n+1}}{(\alpha-x_n)^2}=-\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$，即 $\{x_n\}$ 平方收敛于 α.

PF：由泰勒展开得 $f(\alpha)=f(x_n)+(\alpha-x_n)f'(x_n)+\dfrac{(\alpha-x_n)^2}{2}f''(\xi_n)$，$\xi_n$ 在 α 和 x_n 之间.

$\because f(\alpha)=0$，$\therefore -\alpha=-x_n+\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}+\dfrac{(\alpha-x_n)^2}{2}\dfrac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$.

$\because x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，$\therefore x_{n+1}-\alpha=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\alpha=(x_n-\alpha)^2\dfrac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$. ~~即 $\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}=\dfrac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}$~~.

$\because f'$ 连续，$f'(\alpha)\neq 0$，$\therefore \exists\ \delta_1>0$，s.t. $\forall x\in\underbrace{[\alpha-\delta_1,\alpha+\delta_1]}_{B_1}$，$f'(x)\neq 0$.

记 $M=\dfrac{\max_{x\in B_1}|f''(x)|}{2\min_{x\in B_1}|f'(x)|}$，取 x_0 s.t. $|x_0-\alpha|=\delta_0<\delta_1$，$M\delta_0<1$. 则 $|x_{n+1}-\alpha|\le M|x_n-\alpha|^2$.

且 $M|x_0-\alpha|<1$，因此 $|x_n-\alpha|\le\dfrac{1}{M}(M|x_0-\alpha|)^{2^n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha-x_{n+1}}{(\alpha-x_n)^2}=-\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$

注：(1) 当 $f''(\alpha)=0$ 时，$\{x_n\}$ 的收敛阶数更高.

~~(2) 若 f 是凸函数 即 $f''>0$~~

(2) 若 f', f'' 在 $\mathbb{R}$ 上恒正，则 $\forall x_0\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$.

PF：$\because f'>0$，$\therefore f$ 在 $\mathbb{R}$ 上有唯一零点 α.

由 Thm 1.2 证明，$x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)^2\dfrac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$. ξ_n 在 α 和 x_n 之间.

$\because f'>0$, $f''>0$. $\therefore \forall n>0$, $x_n>\alpha$, $f(x_n)>0$, $f'(x_n)>0$.

$\because x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，$\therefore$ 数列 $\{x_n-\alpha\}$ 单调递减且有下界 0，故收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$. $f(a)=0$. $\therefore a=\alpha$.

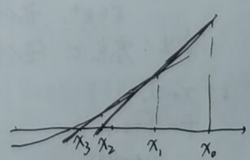
§1.3 割线法

Algo 1.5 割线法求方程接近 x_0 和 x_1 的一个根（原理：迭代 $x_{n+1}=x_n-f(x_n)\dfrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$ 的收敛性）

输入：~~连续~~二阶可微函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$x_0, x_1\in\mathbb{R}$（适当接近一个根）

$\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}^+$，$M\in\mathbb{N}^+$

输出：x_n, x_{n-1}, (k)，满足 $|f(x_n)|<\varepsilon$ 或 $|x_n-x_{n-1}|<\delta$ 或 $k=M$ (X)



$x_n\leftarrow x_1$，$x_{n-1}\leftarrow x_0$，$u\leftarrow f(x_n)$，$v\leftarrow f(x_{n-1})$

for $k=2:M$ do

  if $|u|>|v|$ then $x_n\leftrightarrow x_{n-1}$，$u\leftrightarrow v$ （保证 $|f(x_n)|<|f(x_{n-1})|$）

  ~~end~~

  $s\leftarrow\dfrac{x_n-x_{n-1}}{u-v}$ （割线斜率的倒数）

  $x_{n-1}\leftarrow x_n$，$v\leftarrow u$

  $x_n\leftarrow x_n-u\times s$，$u\leftarrow f(x_n)$ （下一步迭代）

  if $|x_n-x_{n-1}|<\delta$ or $|u|<\varepsilon$ then break （迭代结束）

  ~~end~~

end

Lem 1.6 割线法的误差关系

设 $\{x_n\}$ 是割线法的迭代序列，则存在 ξ_n 介于 x_{n-1} 和 x_n 之间，ζ_n 介于 $\min\{x_{n-1},x_n,\alpha\}$ 和 $\max\{x_{n-1},x_n,\alpha\}$ 之间

使得 $x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\dfrac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)}$.

PF：记 $f[a,b]=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$. 则由迭代公式 $x_{n+1}=x_n-f(x_n)\dfrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$ 得

$$x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\frac{f(x_n)}{f[x_n,x_{n-1}]}=(x_n-\alpha)\left(1-\frac{\frac{f(x_n)}{x_n-\alpha}}{f[x_n,x_{n-1}]}\right)$$

$$\cancel{=(x_n-\alpha)\left(\frac{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}-\frac{f(x_n)}{x_n-\alpha}}{f[x_n,x_{n-1}]}\right)}$$

$$=(x_n-\alpha)\left(\frac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_n,\alpha]}{\cdots}\right)$$

$$\left(\frac{\quad}{f[x_n,x_{n-1}]} \right)$$

$$= (x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\cdot \frac{\frac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_n,\alpha]}{x_{n-1}-\alpha}}{f[x_n,x_{n-1}]}.$$

由拉格朗日中值定理，$\exists\, \xi_n$ 介于 x_n, x_{n-1} 之间，s.t. $f[x_n,x_{n-1}] = f'(\xi_n)$.

~~$\exists\, \xi_n$ 介于 x_n, α 之间，s.t.~~ .

令 $g_n(x) = f[x,x_n]$，则 $\exists\, \beta_n$ 介于 x_{n-1}, α 之间，s.t. $\dfrac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_n,\alpha]}{x_{n-1}-\alpha} = g'(\beta_n)$.

而 $g'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right) = \dfrac{f'(x)(x-x_n)-(f(x)-f(x_n))}{(x-x_n)^2}$ $\cancel{= \dfrac{f'(x)-\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}}{x-x_n}}$ $= \dfrac{-\frac{1}{2}f''(\xi_n)(x-x_n)^2}{(x-x_n)^2}$ $= -\frac{1}{2}f''(\xi_n)$.

$\cancel{\therefore g'(\beta_n) = \dfrac{f'(\beta_n)-\frac{f(\beta_n)-f(x_n)}{\beta_n-x_n}}{\beta_n-x_n} = \dfrac{f'(\beta_n)-f'(\gamma_n)}{\beta_n-x_n} = f''(\xi_n)}$???

$\therefore x_{n+1}-\alpha = (x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\dfrac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)}$???

Thm 1.7 割线法的收敛性

设 f 在 α 的某邻域 $B=[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ 上二阶可微，$f(\alpha)=0$，$f'(\alpha)\neq 0$，若 x_0, x_1 适当接近 α，且 $f''(\alpha)\neq 0$，则以 x_0, x_1 为初值的割线法迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛于 α，其阶数为 $p=\frac{1+\sqrt5}{2}\approx 1.618$.

PF：由 f' 的连续性，$\exists\, 0<\delta_1<\delta$ s.t. $\forall x\in \underset{B_1}{\underset{\parallel}{[\alpha-\delta_1,\alpha+\delta_1]}}$，$f'(x)\neq 0$。令 $E_i = |x_i-\alpha|$，$M = \dfrac{\max_{x\in B_1}|f''(x)|}{2\min_{x\in B_1}|f'(x)|}$.

则由 Lem 1.6 可得 $ME_{n+1}\le ME_n\, ME_{n-1}$.

取 x_0, x_1 s.t. $E_0, E_1<\delta_1$，且 $\max\{ME_0, ME_1\} = \eta < 1$，则

$ME_0<\eta$，$ME_1<\eta$，$ME_2 < ME_1 ME_0 < \eta^2$，$ME_3 < ME_2 ME_1 < \eta^3$，…，

$ME_n < \eta^{f_n}$，其中 f_n 为斐波纳契数列的第 n 项.

而 $f_n = \frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} ME_n = 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

下面估计收敛阶数. 记 $r_0=\frac{1+\sqrt5}{2}$，$r_1 = \frac{1-\sqrt5}{2}$，

$\{E_n\}$ 的上界 $\{B_n\}$ 的收敛速度：$\dfrac{B_{n+1}}{B_n^{r_0}} = \dfrac{\frac{1}{M}\eta^{f_{n+1}}}{(\frac{1}{M})^{r_0}\eta^{r_0 f_n}} = M^{r_0-1}\eta^{f_{n+1}-r_0 f_n} \le M^{r_0-1}\eta^{-1}$ $(f_{n+1}-r_0 f_0 = r_1^{n+1} > -1)$

记 $m_n = \left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)}\right|$, $m_\alpha = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$. 则有

$$E_n = E_1^{f_n} E_0^{f_{n-1}} \cdot m_1^{f_{n-1}} m_2^{f_{n-2}} \cdots m_{n-1}^{f_1}$$

$$E_{n+1} = E_1^{f_{n+1}} E_0^{f_n} \cdot m_1^{f_n} m_2^{f_{n-1}} \cdots m_{n-1}^{f_2} m_n^{f_1}$$

因此有 $\frac{E_{n+1}}{E_n^{r_0}} = E_1^{f_{n+1}-r_0f_n} E_0^{f_n - r_0 f_{n-1}} m_1^{F_n - r_0F_{n-1}} m_2^{F_{n-1}-r_0F_{n-2}} \cdots m_{n-1}^{F_2 - r_0F_1} + m_n^{F_1}$

$$\xlongequal{(f_{n+1}=r_0f_n+r_1^n)} E_1^{r_1^n} E_0^{r_1^{n-1}} m_1^{r_1^{n-1}} m_2^{r_1^{n-2}} \cdots m_{n-1}^{r_1} m_n.$$

由收敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = m_\alpha$. 因此有

$\exists N \in \mathbb{N}$, s.t. $\forall n > N$, $m_n \in (\frac{1}{2}m_\alpha, 2m_\alpha)$.

令 $A_n = E_1^{r_1^n} E_0^{r_1^{n-1}} m_1^{r_1^{n-1}} m_2^{r_1^{n-2}} \cdots m_N^{r_1^{n-N}}$. $B_n = m_{N+1}^{r_1^{n-N-1}} \cdots m_{n-1}^{r_1} m_n$. 则 $\frac{E_{n+1}}{E_n^{r_0}} = AB$.

$\because |r_1| < 1$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} A_n = 1$. 而 $B_n < (2m_\alpha)^{1+r_1+\cdots+r_1^{n-N-1}}$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^{r_0}} = \lim\limits_{n\to\infty} A_n \lim\limits_{n\to\infty} B_n \le (2m_\alpha)^{\frac{1}{1-r_1}} = (2m_\alpha)^{r_0^{-1}}$.

因此数列 $\{x_n\}$ r_0 阶收敛于 α.

Cor 1.5 设计算 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的运算量分别为 m 和 sm. 则用牛顿法和割线法求解 $f(x)=0$ 在 x_0 附近的解所需运算量分别为 $T_N = (1+s)m\lceil \log_2 K\rceil$ 和 $T_S = m\lceil \log_{r_0} K\rceil + m$.

其中 $K = \frac{\log c\varepsilon}{\log c|x_0-\alpha|}$. $c = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$.

PF: (1) 设 $E_n = |x_n - \alpha|$, 则由 Thm 1.4 得 $ME_n \le (ME_0)^{2^n}$.

设迭代至第 k 次时满足精度要求, 则 $(ME_0)^{2^k} \le M\varepsilon$.

当 ε 充分小时, $M \to c$. 即 $k = \lceil \log_2 K\rceil$.

(2) 设 $E_n = |x_n-\alpha|$, 则由 Thm 1.7 得 $ME_n \le (ME_0)^{r_0^{n+1}/\sqrt{5}}$

设迭代至第 j 次时满足精度要求, 则 $r_0^j \le \frac{\sqrt5}{r_0}K$. 即 $j = \lceil \log_{r_0} K + \log_{r_0}\frac{\sqrt5}{r_0}\rceil \le \lceil \log_{r_0}K\rceil + 1$.

§1.4 不动点迭代法

Def 1.8 称 α 为 g 的不动点, 如果 $g(\alpha)=\alpha$. 例如 $x=2$ 是 $f(x) = x^2-3x+4$ 的不动点.

Lem 1.9 若 $g: [a,b]\to[a,b]$ 连续, 则 g 在 $[a,b]$ 上至少有一个不动点.

PF: 令 $f(x) = g(x) - x$, 则 $f(a) \ge 0$, $f(b) \le 0$. 由介值定理, $\exists \alpha \in [a,b]$ s.t. $f(\alpha)=0$. 即 $g(\alpha)=\alpha$.

Thm 1.10 (Brouwer 不动点定理) 任意连续函数 $f: D^n \to D^n$ ($D^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| \le 1\}$) 有不动点

Def 1.11 称形如 $x_{n+1} = g(x_n)$ 的迭代为不动点迭代法.

不动点迭代 (在 x_0 取适当范围时) 收敛于 g 的不动点.

例如牛顿迭代法就是一种不动点迭代.

不是所有不动点迭代都收敛的. 例如 $f(x) = x^2-1$, $x_0 = 2$ 时,

分别取 $g_1(x) = x^2+x-1$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$, $g_3(x) = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$, $\alpha=1$ 都是 g_1, g_2, g_3 的不动点.

但迭代 $x_{n+1} = g_1(x_n)$, $x_{n+1} = g_2(x_n)$ 不收敛, $x_{n+1} = g_3(x_n)$ 收敛.

Def 1.12 若函数 $f: [a,b]\to[a,b]$ 满足 $\exists \lambda \in [0,1)$ s.t. $\forall x, y \in [a,b]$, $|f(x)-f(y)| \le \lambda|x-y|$.

则称 f 是压缩映射.

Thm 1.13 若 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的压缩映射, 则 g 在 $[a,b]$ 上有唯一的不动点,

且迭代 $x_{n+1} = g(x_n)$ 收敛于 α, $|x_n - \alpha| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1 - x_0|$.

PF: 由 Lem 1.9, g 在 $[a,b]$ 上有至少一个不动点.

若 g 有两个不动点 α, β, 则 $g(\alpha)=\alpha$, $g(\beta)=\beta$. $|g(\alpha)-g(\beta)| = |\alpha-\beta|$, 与 $\lambda<1$ 矛盾!

因此 g 的不动点 α 唯一.

$\because |x_{n+1}-\alpha| = |g(x_n)-g(\alpha)| \le \lambda|x_n-\alpha|$, $\therefore |x_n-\alpha| \le \lambda^n|x_0-\alpha| \longrightarrow 0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$.

又由 $|x_n-\alpha| \le \lambda^n|x_0-\alpha| \le \lambda^n(|x_1-x_0|+|x_1-\alpha|) \le \lambda^n(|x_1-x_0|+\lambda|x_0-\alpha|)$

得 $|x_n-\alpha| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1-x_0|$.

Thm 1.14 若函数 $g:[a,b]\to[a,b]$ 满足 $g\in C^1[a,b]$ 且 $\lambda=\max\limits_{x\in[a,b]}|g'(x)|<1$. 则 g 在 $[a,b]$ 上有唯一不动点 α

且迭代 ~~$x_{n+1}=g(x_n)$~~ $x_{n+1}=g(x_n)$ 收敛于 α, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=g'(\alpha)$.

PF: 由拉格朗日中值定理, $|g(x)-g(y)| \le \lambda|x-y|$. 故由 Thm 1.13, g 不动点唯一, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$.

$x_{n+1}-\alpha = g(x_n)-g(\alpha) = g'(\xi_n)(x_n-\alpha)$. 即 $\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=g'(\xi_n)$. ξ_n 介于 x_n 和 α 之间.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} g'(\xi_n) = g'(\alpha)$.

Cor 1.15 设 α 是 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的不动点, $|g'(\alpha)|<1$, g 在 α 的某邻域 $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ 上一阶连续可微.

则当 x_0 适当接近 α 时, Thm 1.13 的结论成立.

PF: 取 λ s.t. $|g'(\alpha)|<\lambda<1$. 取 $\delta_0\le\delta$ s.t. $\max\limits_{x\in B_0}|g'(x)|\le\lambda<1$ ($B_0=[\alpha-\delta_0,\alpha+\delta_0]$), 则 $g(B_0)\subset B_0$.

由 Thm 1.14, 结论成立.

Cor 1.16 设 α 是 $g:[a,b]\to[a,b]$ 的不动点, 则如果

① $g\in C^p[a,b]$; ② $\forall k=1,2,\dots,p$, $g^{(k)}(\alpha)=0$; ③ $g^{(p)}(\alpha)\ne0$.

则当 x_0 适当接近 α 时, 迭代 $x_{n+1}=g(x_n)$ p 阶收敛于 α.

PF: $E_{n+1}=|x_{n+1}-\alpha| = |g(x_n)-g(\alpha)| = \left|\sum\limits_{i=1}^{p-1}\frac{(x_n-\alpha)^i}{i!}g^{(i)}(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}g^{(p)}(\xi)\right| = \frac{|x_n-\alpha|^p}{p!}|g^{(p)}(\xi)|$

即 $\frac{E_{n+1}}{E_n}=\frac{|g^{(p)}(\xi)|}{p!}$. $\therefore$ 迭代 p 阶收敛.