数值分析 - 第二次上机作业 - 实验报告

樊睿
强基数学 2001 班

October 10,2022

摘要

本文详细介绍了 Newton 插值、Hermite 插值、Chebyshev 插值法的实现，并用它们解决了一些实际问题。

1 多项式函数类

本章将用到多项式。为了在计算机中合理地存储任意次的多项式，我们有必要先实现多项式函数类。

多项式首先是函数，所以它要继承第一章的仿函数类，并继承它的两个虚函数求函数值和求导数值。n 次多项式要存储 0 到 n 次项系数，可用一个 `vector` 存储。

因此，多项式函数类要从仿函数类和 `vector` 类同时继承。无需定义更多成员变量。定义成员函数 `time` 求多项式的次数。

本章将用到多项式的加法、数乘和乘法运算，因此要对多项式类重载这三个运算。还需要对多项式求导（返回导函数而非一个导数值），因此也重载了函数 `d`。

多项式的输出使用 `a0+a1*x+a2*x**2+...+an*x**n` 的格式，方便后期在 python 中作图。

代码如下。

注，这段代码有一些问题没有解决：暂时不能用一个 `vector` 去初始化多项式。即 `Polynomial<double> p({1})` 是无法通过编译的。

```
template <class type>
class Polynomial : public vector <type>, public Function <type> {
```

```
public :
    Polynomial (const int & n = -1, const type & x0 = 0, const type & x1 = 0) {
        this -> resize(n+1);
        if (n >= 0) this -> at(0) = x0;
        if (n >= 1) this -> at(1) = x1;
    }
    int time() const {
        return this -> size() - 1;
    }
    Polynomial <type> operator + (const Polynomial <type>& b) const {
        int n = max(time(), b.time()), m = min(time(), b.time());
        Polynomial <type> c(n);
        for (int i = 0; i <= m; ++ i) c[i] = this -> at(i) + b[i];
        if (n == time())
            for (int i = m+1; i <= n; ++ i) c[i] = this -> at(i);
        else
            for (int i = m+1; i <= n; ++ i) c[i] = b[i];
        return c;
    }
    Polynomial <type> operator += (const Polynomial <type>& b) {
        return *this = *this + b;
    }
    Polynomial <type> operator * (const type& b) const {
        int n = time();
        Polynomial <type> c(n);
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) c[i] = this -> at(i) * b;
        return c;
    }
    Polynomial <type> operator *= (const type & b) {
        return *this = *this * b;
    }
    Polynomial <type> operator * (const Polynomial <type>& b) const {
        int n = time(), m = b.time();
```

```
        Polynomial <type> c(n+m);
        for (int i = 0; i <= n; ++ i)
            for (int j = 0; j <= m; ++ j)
                c[i+j] += this -> at(i) * b[j];
        return c;
    }
    Polynomial <type> operator *= (const Polynomial <type>& b) {
        return *this = *this * b;
    }
    virtual type operator ()(const type & x) const {
        int n = time();
        type res = 0;
        for (int i = n; i >= 0; -- i)
            res = res * x + this -> at(i);
        return res;
    }
    Polynomial <type> d() {
        int n = time();
        Polynomial <type> c(n-1);
        for (int i = n; i > 0; -- i)
            c[i-1] = this -> at(i) * i;
        return c;
    }
    virtual type d(const type & x) const {
        int n = time();
        type res = 0;
        for (int i = n; i > 0; -- i)
            res = res * x + this -> at(i) * i;
        return res;
    }
};

template <class type>
```

```
Polynomial <type> operator * (const type & x, const Polynomial <type> & p) {
    return p * x;
}

template <class type>
ostream & operator << (ostream &out, const Polynomial <type> &p) {
    int n = p.time();
    if (n == -1) {cout << 0; return out;}
    for (int i = 0; i <= n; ++ i) {
        out << p[i];
        if (i == 1) out << "*x";
        else if (i >= 2) out << "*x**" << i;
        if (i < n) {
            if (p[i+1] >= 0) out << " +";
            else cout << " ";
        }
    }
    return out;
}
```

2 Newton 插值

2.1 算法的实现

输入插值点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$，满足对任意 $i \neq j$ 均有 $x_i \neq x_j$。输出 n 次插值多项式 $p_n(x)$，满足对任意 $0 \leq i \leq n$，均有 $p_n(x_i) = y_i$。

根据课本 Def 2.18，需要 $O(n^2)$ 的时空来计算差商表；然后根据课本 Def 2.14 用 $O(n^2)$ 的时间计算插值多项式的表达式。但若不需要计算表达式，则只需 $O(n)$ 的时间计算插值多项式的一个点值。

源码如下：

```
template <class type>
class Newton_Interpolation {
private:
```

```
    vector <type> x, y;
    vector <vector <type>> f;
public:
    Newton_Interpolation(const vector <type>& x, const vector <type>& y) : x(x), y(y) {
        int n = x.size() - 1;
        f.resize(n+1);
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) f[i].resize(n+1);
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) f[i][i] = y[i];
        for (int j = 1; j <= n; ++ j) {
            for (int i = 0; i <= n-j; ++ i)
                f[i][i+j] = (f[i+1][i+j] - f[i][i+j-1]) / (x[i+j] - x[i]);
        }
    }
    type GetValue(const type& _x) const {
        int n = x.size() - 1;
        type res = 0, pi = 1;
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) {
            res += f[0][i] * pi;
            pi *= _x - x[i];
        }
        return res;
    }
    Polynomial <type> GetPolynomial() const {
        int n = x.size() - 1;
        Polynomial <type> res(0, 0), pi(0, 1);
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) {
            res += f[0][i] * pi;
            pi *= Polynomial <type>(1, -x[i], 1);
        }
        return res;
    }
};
```

2.2 在均匀网格上 Newton 插值

输入函数、左右区间、插值点数，输出插值多项式。源码如下：

```
Newton_Interpolation <double> Grid_Interpolation (const Function <double> & f, const do
    vector <double> x(n+1), y(n+1);
    for (int i = 0; i <= n; ++ i) {
        double xi = l + (u - l) * i / n;
        double yi = f(xi);
        x[i] = xi, y[i] = yi;
    }
    return Newton_Interpolation<double>(x, y);
}
```

2.3 Chebyshev 插值

输入函数、左右区间、插值点数，输出插值多项式。

根据 Thm 2.44 计算 Chebyshev 插值点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$。源码如下：

```
Newton_Interpolation <double> Chebyshev_Interpolation (const Function <double> & f, con
    vector <double> x(n+1), y(n+1);
    for (int i = 0; i <= n; ++ i) {
        double xi = (u + l) / 2 + (u - l) / 2 * cos(PI*(2*i+1)/(2*(n+1)));
        double yi = f(xi);
        x[i] = xi, y[i] = yi;
    }
    return Newton_Interpolation<double>(x, y);
}
```

3 Hermite 插值

输入插值点 $(x_0, y_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(m_0)}), (x_1, y_1, y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(m_1)}), \ldots, (x_n, y_n, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(m_n)})$，输出插值多项式 p_N，满足对任意 $0 \le i \le n, 0 \le j \le m_i$，均有 $p_N^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$。

但若直接按课本中问题描述的形式输入插值点，在存储插值点和后续计算差商表时都会非常困难。因此在实际输入时，不输入二维的插值点及其导数值的列表，而是仍采用和 Newton 插值相同的输入格式，以一维

数组的格式给出 $(x_0, y_0), (x_0, y_0^{(1)}), \dots$。例如若插值多项式要满足 $p(0) = 0, p'(0) = 1, p''(0) = 2, p(1) = 1, p(2) = 3, p'(2) = 5$，则输入的数据为 $x = \{0, 0, 0, 1, 2, 2\}, y = \{0, 1, 2, 1, 3, 5\}$。

这样在计算差商表中 $f[x_i, \dots, x_j]$ 的值时，若 $x_i \neq x_j$，直接使用 Def 2.18 的公式计算即可；若 $x_i = x_j$，则根据 Cor 2.36 从 y 中直接取相应高阶导数值并除以阶数的阶乘即可。这里可能需要辅助数组来存储每个 x_i 在输入的 x 数组的起始位置。

```
template <class type>
class Hermite_Interpolation {
private:
    vector <type> x, y;
    vector <vector <type>> f;
public:
    Hermite_Interpolation(const vector <type>& x, const vector <type>& y) : x(x), y(y)
        int n = x.size() - 1;
        f.resize(n+1);
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) f[i].resize(n+1);
        vector <int> m(n+1);
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) {
            if (!i || x[i] != x[i-1]) m[i] = i;
            else m[i] = m[i-1];
        }
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) f[i][i] = y[m[i]];
        vector <type> fac(n);
        fac[0] = 1;
        for (int i = 1; i <= n; ++ i) fac[i] = fac[i-1] * i;
        for (int j = 1; j <= n; ++ j)
            for (int i = 0; i <= n-j; ++ i) {
                if (x[i+j] == x[i]) f[i][i+j] = y[m[i]+j] / fac[j];
                else f[i][i+j] = (f[i+1][i+j] - f[i][i+j-1]) / (x[i+j] - x[i]);
            }
    }
    type GetValue(const type &_x) const {
```

```
        int n = x.size() - 1;
        type res = 0, pi = 1;
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) {
            res += f[0][i] * pi;
            pi *= _x - x[i];
        }
        return res;
    }
    Polynomial <type> GetPolynomial() const {
        int n = x.size() - 1;
        Polynomial <type> res(0, 0), pi(0, 1);
        for (int i = 0; i <= n; ++ i) {
            res += f[0][i] * pi;
            pi *= Polynomial <type>(1, -x[i], 1);
        }
        return res;
    }
};
```

4 问题求解

4.1 第二题，Runge 现象

首先定义函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$。

```
class F1 : public Function <double> {
public:
    virtual double operator () (const double &x) const {
        return 1 / (x * x + 1);
    }
} f1;
```

然后按题意进行求解。

```
    Newton_Interpolation<double> ip1_2 = Grid_Interpolation(f1, -5, 5, 2);
    Newton_Interpolation<double> ip1_4 = Grid_Interpolation(f1, -5, 5, 4);
```

```
    Newton_Interpolation<double> ip1_6 = Grid_Interpolation(f1, -5, 5, 6);
    Newton_Interpolation<double> ip1_8 = Grid_Interpolation(f1, -5, 5, 8);
    Polynomial<double> p1_2 = ip1_2.GetPolynomial();
    Polynomial<double> p1_4 = ip1_4.GetPolynomial();
    Polynomial<double> p1_6 = ip1_6.GetPolynomial();
    Polynomial<double> p1_8 = ip1_8.GetPolynomial();
    cout << p1_2 << endl;
    cout << p1_4 << endl;
    cout << p1_6 << endl;
    cout << p1_8 << endl;
```

将输出的多项式值复制到 python 程序中，在 $[-5,5]$ 中均匀取 1000 个点作图。

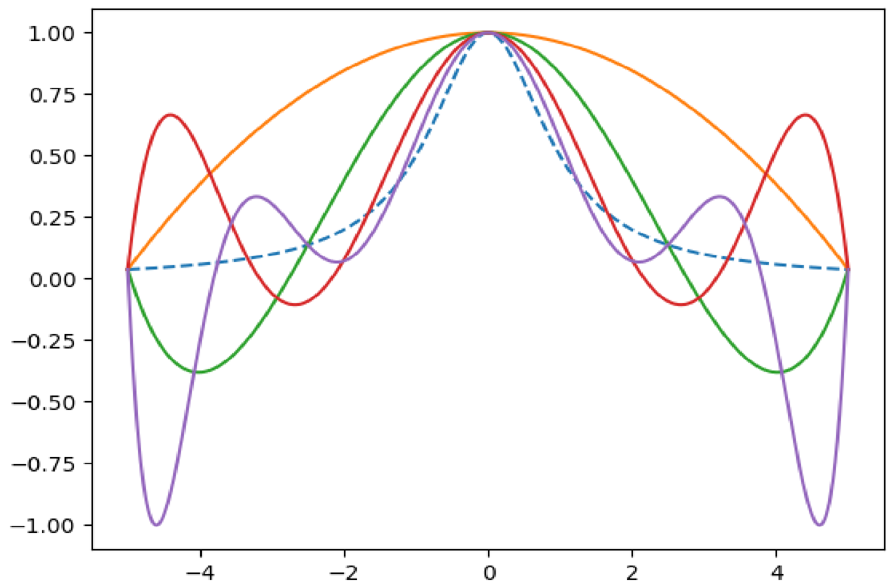
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x) :
    return 1 / (1 + x**2)
def p2(x) :
    return 1 - 0.0384615*x**2
def p4(x) :
    return 1 - 0.171088*x**2 + 0.00530504*x**4
def p6(x) :
    return 1 - 0.351364*x**2 + 0.0335319*x**4 - 0.000840633*x**6
def p8(x) :
    return 1 - 0.528121*x**2 + 0.0981875*x**4 - 0.00658016*x**6 + 0.000137445*x**8

x = np.linspace(-5, 5, 1000)
y = [f(t) for t in x]
plt.plot(x, y, linestyle = "--")
y = [p2(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
y = [p4(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
```

```
y = [p6(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
y = [p8(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

得到图像如下：



这里虚线是 $f(x)$ 的图像，黄色、绿色、红色和紫色曲线分别对应 $n = 2, 4, 6, 8$ 时的插值多项式图像。

可以看到，随着 n 的增大，插值多项式没有更好地拟合 $f(x)$，反而在 -5 和 5 附近振荡更严重了。

4.2 第三题，Chebyshev 插值减弱 Runge 现象

定义函数 $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$。

```
class F2 : public Function <double> {
public:
    virtual double operator () (const double &x) const {
```

```
        return 1 / (25 * x * x + 1);
    }
} f2;
```

然后按题意进行求解。

```
Newton_Interpolation<double> ip2_2 = Chebyshev_Interpolation(f2, -1, 1, 5);
Newton_Interpolation<double> ip2_4 = Chebyshev_Interpolation(f2, -1, 1, 10);
Newton_Interpolation<double> ip2_6 = Chebyshev_Interpolation(f2, -1, 1, 15);
Newton_Interpolation<double> ip2_8 = Chebyshev_Interpolation(f2, -1, 1, 20);
Polynomial<double> p2_2 = ip2_2.GetPolynomial();
Polynomial<double> p2_4 = ip2_4.GetPolynomial();
Polynomial<double> p2_6 = ip2_6.GetPolynomial();
Polynomial<double> p2_8 = ip2_8.GetPolynomial();
cout << p2_2 << endl;
cout << p2_4 << endl;
cout << p2_6 << endl;
cout << p2_8 << endl;
```

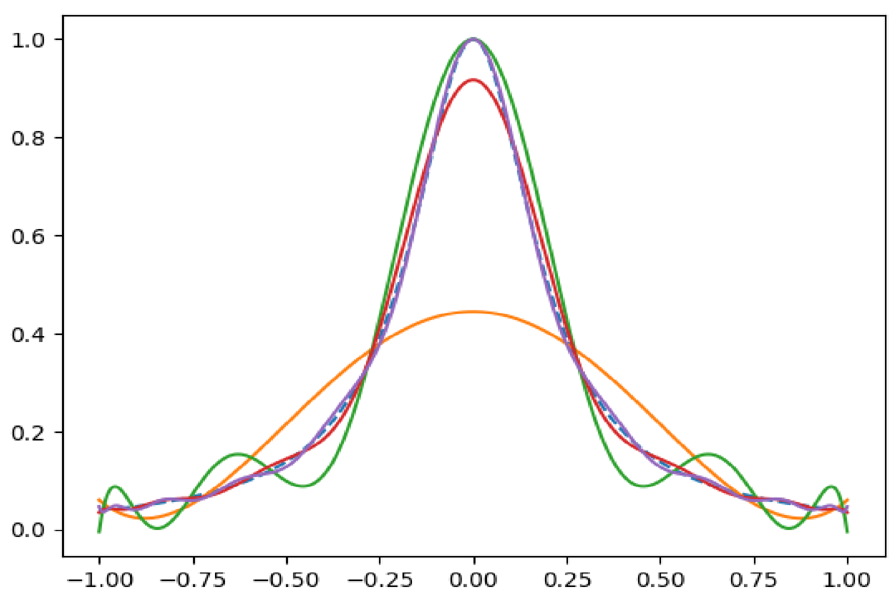
将输出的多项式值复制到 python 程序中，在 $[-1, 1]$ 中均匀取 1000 个点作图。

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x) :
    return 1 / (1 + 25*x**2)
def p5(x) :
    return 0.444089 -1.35642e-16*x -1.09581*x**2 +1.31782e-15*x**3 +0.711567*x**4 -1.14
def p10(x) :
    return 1 +5.55112e-16*x -12.4765*x**2 +7.10543e-15*x**3 +61.443*x**4 +1.49214e-13*x
def p15(x) :
    return 0.916893 -1.77925e-15*x -12.2846*x**2 +7.26254e-14*x**3 +83.7238*x**4 -4.115
def p20(x) :
    return 1 +4.94049e-15*x -21.7623*x**2 -1.06581e-14*x**3 +306.629*x**4 +1.33582e-12*
```

```
x = np.linspace(-1, 1, 1000)
y = [f(t) for t in x]
plt.plot(x, y, linestyle = "--")
y = [p5(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
y = [p10(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
y = [p15(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
y = [p20(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

得到图像如下：



这里虚线是 $f(x)$ 的图像，黄色、绿色、红色和紫色曲线分别对应 $n = 5, 10, 15, 20$ 时的插值多项式图像。

可以发现，在 $n = 20$ 时，虽然仍有微小振荡，但图像已经与 $f(x)$ 基本完全拟合。可以预见在 n 更大时，图像的拟合程度应该会更高。

4.3 第四题，车速估计

本题已知信息为 $t = 0, 3, 5, 8, 13$ 处的函数值（位移）和导数值（速度），可利用 Hermite 插值得到 9 次插值多项式 $p(t)$。

```
vector <double> x(10), y(10);
x[0] = x[1] = 0, x[2] = x[3] = 3, x[4] = x[5] = 5, x[6] = x[7] = 8, x[8] = x[9] = 1
y[0] = 0, y[2] = 225, y[4] = 383, y[6] = 623, y[8] = 993;
y[1] = 75, y[3] = 77, y[5] = 80, y[7] = 74, y[9] = 72;
Hermite_Interpolation<double> ip3(x, y);
Polynomial<double> p3 = ip3.GetPolynomial();
cout << p3 << endl;
cout << p3.d() << endl;
cout << p3(10) << ' ' << p3.d(10) << endl;
```

得到结果 $p(10) = 742.503, p'(10) = 48.3817$，即第一问所求 $t = 10$ 时的位移和速度。

对于第二问，我们输出 p' 并在 python 中对其作出图像。

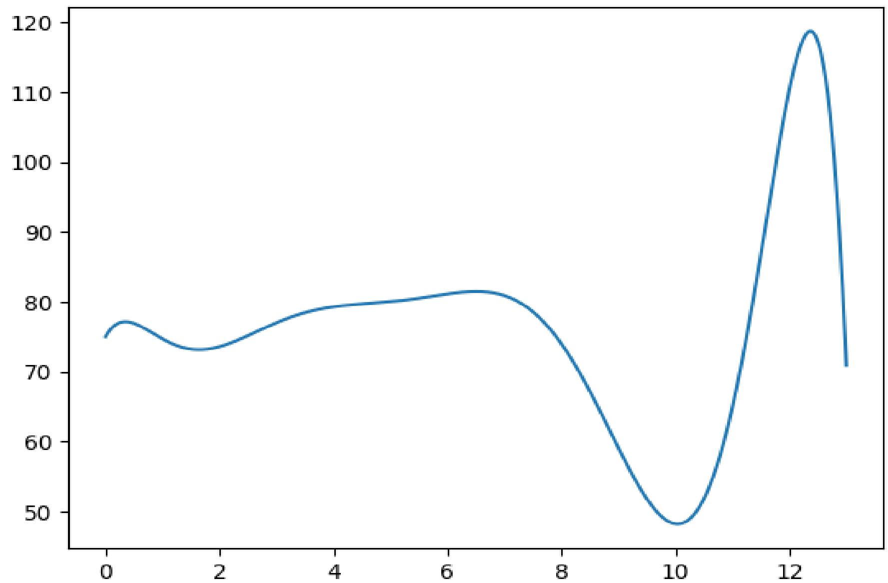
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x) :
    return 75 +14.3238*x -30.2859*x**2 +22.0325*x**3 -7.69148*x**4 +1.45825*x**5 -0.153

x = np.linspace(0, 13, 1000)
y = [f(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
```

得到图像如下（在下一页）。

图像显示该车辆在 $t = 12$ 时突然加速到 120 然后又减速到 70，显然已经远远超过了 81。但个人认为本题用多项式插值去估计某点的函数值是很不准确的（也许用分段函数插值比较合理）。



4.4 第五题，树叶生长

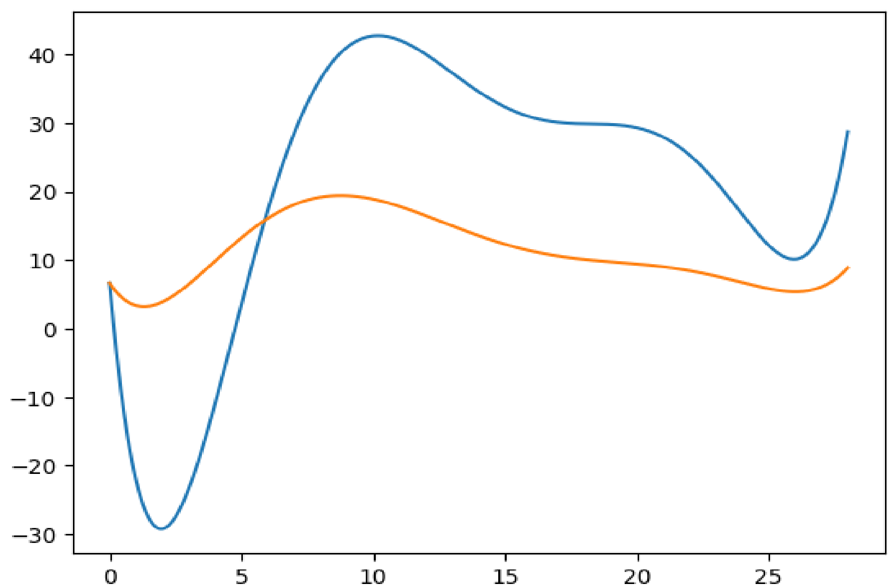
本题已知信息为 $t = 0, 6, 10, 13, 17, 20, 28$ 处的函数值。可利用 Newton 插值法得到 6 次插值多项式 $p_1(t), p_2(t)$。

```
    x.resize(7);
    vector <double> y1(7), y2(7);
    x[0] = 0, x[1] = 6, x[2] = 10, x[3] = 13, x[4] = 17, x[5] = 20, x[6] = 28;
    y1[0] = 6.67, y1[1] = 17.3, y1[2] = 42.7, y1[3] = 37.3, y1[4] = 30.1, y1[5] = 29.3,
    y2[0] = 6.67, y2[1] = 16.1, y2[2] = 18.9, y2[3] = 15.0, y2[4] = 10.6, y2[5] = 9.44,
    Newton_Interpolation<double> ip4_1(x, y1);
    Polynomial<double> p4_1 = ip4_1.GetPolynomial();
    Newton_Interpolation<double> ip4_2(x, y2);
    Polynomial<double> p4_2 = ip4_2.GetPolynomial();
    cout << p4_1 << endl;
    cout << p4_2 << endl;
    cout << p4_1(43) << ' ' << p4_2(43) << endl;
}
```

输出 p_1 和 p_2 并作图：

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def p1(x) :
    return 6.67 -43.0127*x +16.2855*x**2 -2.11512*x**3 +0.128281*x**4 -0.00371557*x**5
def p2(x) :
    return 6.67 -5.85018*x +2.98227*x**2 -0.424283*x**3 +0.0265858*x**4 -0.000777473*x*
x = np.linspace(0, 28, 1000)
y = [p1(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
y = [p2(t) for t in x]
plt.plot(x, y)
```



p_2 的图像还比较合理，但 p_1 的图像在 $t \in [1, 2]$ 时竟然达到了负值！这又一次证明了多项式插值的估计是很不准确的。而多项式插值对 $t = 43$ 时 p_1, p_2 取值的预测更为荒谬，分别是 $p_1(43) = 14640.3$ 和 $p_2 = 2981.48$。事

实上，根据多项式的性质，在待求值点距离插值区间过远时，插值多项式的取值几乎仅与最高次项系数有关。因此用多项式插值去预测一个插值区间外的函数值是毫无意义的。