§2 多项式插值法

Def 2.1 插值：根据已有的若干点值估计新的点值.

一般通过构造过所有已知点值的插值函数

插值函数一般取 分段常值、分段线性、多项式、分段多项式(样条函数)等.

§2.1 范德蒙德行列式

Def 2.3 称 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的相关范德蒙德矩阵为

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Lem 2.4 $\det V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$.

PF：令 $U(x) = \det V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{bmatrix}$

显然. $U(x) \in \mathbb{P}_n$.

将 $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ 代入. 均有 $U(x) = 0$ (有两行相同).

$\therefore U(x) = A \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$, $A \in \mathbb{R}$.

将 $U(x)$ 按最后一行展开得 x^n 的系数为 $\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n} \end{bmatrix} = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.

即 $\det V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \det V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$.

归纳可证 $\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i>j}^{n} (x_i - x_j)$.

Thm 2.5 给定不同的点 $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ 及其点值 $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}$,

则 $\exists ! \; P_n(x) \in \mathbb{P}_n$, s.t. $P_n(x_i) = f_i$, $\forall i = 0 \dots n$. (称 P_n 是 f 在 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的 n 次插值多项式)

PF：设 $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, 则有方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

由 Lem 2.4, 系数矩阵非奇异, 故方程组有唯一解

即. $P_n(x)$ 唯一.

§2.2 柯西余项

Thm 2.6 设 $n\geq 1$, $f\in C^{n-1}[a,b]$, $f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 上处处存在. ~~f在[a,b]上n-1阶连续可微且n阶导数处处存在~~.

若 $f(x_0)=f(x_1)=\dots=f(x_n)=0$, $a\le x_0<x_1<\dots<x_n\le b$.

则 $\exists\, \xi\in(x_0,x_n)$ s.t. $f^{(n)}(\xi)=0$.

PF: $\forall i=0\dots n-1$. 由罗尔中值定理. $\because f(x_i)=f(x_{i+1})=0$. $\therefore \exists\, \xi_i\in(x_i,x_{i+1})$, s.t. $f'(\xi_i)=0$.

故 f' 在 $[a,b]$ 上有至少 n 个零点 且均在 (x_0,x_n) 中.

继续对 $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ 运用罗尔中值定理, 可得 $f^{(n)}$ 在 $[a,b]$ 上有至少一个零点 $\xi\in(x_0,x_n)$.

Thm 2.7 设 $f\in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 上处处存在.

若 $P_n(f;x)$ 是 ~~$f(x_0), f(x_1),\dots,f(x_n)$~~ f 在 $x_0,x_1,\dots,x_n$ 的 n 次插值多项式.

定义 $R_n(f;x)=f(x)-P_n(f;x)$ 为多项式插值的柯西余项.

若 $a\le x_0<x_1<\dots<x_n\le b$, 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $R_n(f;x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

PF: $\because f(x_k)=P_n(f;x_k)$, $\therefore x_k$ 是 $R_n(f;x)$ 的一个零点.

固定 $x\neq x_0,x_1,\dots,x_n$. 令 $K(x)=\frac{f(x)-P_n(f;x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$. $W(t)=f(t)-P_n(f;t)-K(x)\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$.

$x_0,x_1,\dots,x_n$ 是 $W(t)$ 的零点, 又 $W(x)=0$,

由 Thm 2.5, $\exists\,\xi\in(a,b)$, s.t. $0=W^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!\,K(x)$.

故 $K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. 即 $R_n(f;x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

Cor 2.8 设 $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$, 则 $|R_n(f;x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.

其中 $M_{n+1}=\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$.

§2.3 拉格朗日插值公式

Def 2.10 给定 f 在 $x_0,x_1,\dots,x_n$ 的点值 $f_0,f_1,\dots,f_n$. 则称拉格朗日公式为 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k l_k(x)$.

其中基本插值多项式 $l_k(x)=\prod_{i\neq k}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$.

特别地, 当 $n=0$ 时, $l_0=1$.

例如 $\begin{cases} x_i=1,2,4 \\ f(x_i)=8,1,5\end{cases}$ $\Rightarrow$ ~~$P_2(x)=3x^2-16x+21$~~.

$$P_2(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}\cdot 8+\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}\cdot 5$$

$$=\frac{8(x^2-6x+8)}{3}-\frac{x^2-5x+4}{2}+\frac{5(x^2-3x+2)}{6}=3x^2-16x+21.$$

Lem 2.12 定义 对称多项式 $\pi_n(x)=\begin{cases}1, & n=0\\ \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i), & n>0\end{cases}$, 则 $n>0$ 时,

则基本插值多项式可表为 $l_k(x)=\frac{\pi_{n+1}(x)}{(x-x_k)\pi'_{n+1}(x_k)}$.

Lem 2.13 (~~柯西恒等式~~)(柯西恒等式) $l_k(x)$ 满足如下柯西恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1 \;;\quad \forall j=1,\dots,n,\ \sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(x) \equiv 0.$$

PF：由 Thm 2.5, 2.7 得 $\forall g(x)\in\mathbb{P}_n$, $P_n(g;x)\equiv g(x)$.

取 $g(t)=1$. 则 $P_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$.

取 $g(t)=(t-x)^j$. 则 $P_n(g;x)=\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(x) = (x-x)^j = 0$.

§ 2.4 牛顿插值公式

Def 2.14 给定 f 在 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的点值 $f_0, f_1, \dots, f_n$，则称牛顿公式为 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \pi_k(x)$.

其中 π_k 是对称多项式，a_k 是 $\underbrace{P_k(f;x)}_{f\text{在}x_0,x_1,\dots,x_k\text{的插值多项式}}$ 的 k 次项系数，记作 $a_k = f[x_0,x_1,\dots,x_k]$. ~~称作 k 阶差商~~ 称作 f 在 $x_0,x_1,\dots,x_k$ 的 k 阶差商

特别地，$f[x_0]=f(x_0)$.

Cor 2.15 $f[x_0,x_1,\dots,x_k]=f[x_{i_0},x_{i_1},\dots,x_{i_k}]$，其中 $i_0\dots i_k$ 是 0 到 k 的任意一个排列.

Cor 2.16 $$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=\sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{\pi_{k+1}'(x_i)}.$$

~~PF：记 $P_1(x)$ 为 f 在 $x_1,\dots,x_k$ 的插值多项式，其 x^{k-1} 项系数为~~

~~$P_1(x)$ 为 f 在 $x_0,\dots,x_{k-1}$ 的插值多项式~~

PF：由插值多项式的唯一性，牛顿插值法和拉格朗日插值法所得多项式是相同的.

~~即 $\sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\pi_k(x)$. 而 $l_k(x)=\prod_{i\neq k}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$.~~

~~即 $\sum_{i=0}^{k} a_i\pi_i(x) = \sum_{i=0}^{k} f_i l_i(x) = \sum_{i=0}^{k} f_i\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \sum_{i=0}^{k} a_i\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) \Rightarrow a_i =$~~

~~$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k} a_i \prod_{j\neq i} \frac{f_i}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)} \prod_{j}$~~

$$\sum_{i=0}^{k} f_i l_{i,k}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i\pi_i(x),\qquad \text{又 } l_{i,k}(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{\pi_{k+1}(x)}{(x-x_i)\pi_{k+1}'(x_i)}.$$

$$\begin{aligned}
a_k\pi_k(x) &= \sum_{i=0}^{k} f_i l_{i,k}(x) - \sum_{i=0}^{k-1} f_i l_{i,k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k} f_i\frac{\pi_{k+1}(x)}{(x-x_i)\pi_{k+1}'(x_i)} - \sum_{i=0}^{k-1} f_i\frac{\pi_k(x)}{(x-x_i)\pi_k'(x_i)}\\
&= f_k\frac{\pi_k(x)}{\pi_{k+1}'(x_k)} + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{f_i}{(x-x_i)}\left(\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_{k+1}'(x_i)}-\frac{\pi_k(x)}{\pi_k'(x_i)}\right)\\
&= f_k\frac{\pi_k(x)}{\pi_{k+1}'(x_k)} + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{f_i\pi_k(x)}{\pi_{k+1}'(x_i)}\cdot\frac{1}{x-x_i}\left((x-x_k)-(x_i-x_k)\right)\\
&= \pi_k(x)\sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{\pi_{k+1}'(x_i)}.
\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_k = f[x_0,x_1,\dots,x_k] = \sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{\pi_{k+1}'(x_i)} = \sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}$$

~~Cor 2.14~~
Thm 2.17 $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \dfrac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$

PF: 由定义，$f[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ 是 f 在 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 点的插值多项式 $P_2(x)$ 的 x^{k-1} 项系数.
$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]$ 是 f 在 $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ 点的插值多项式 $P_1(x)$ 的 x^{k-1} 项系数.

令 $P(x) = P_1(x) + \dfrac{x - x_0}{x_k - x_0}(P_2(x) - P_1(x))$. 则

$P(x_0) = P_1(x_0)$;

$\forall i = 1, 2, \ldots, k-1$, $P(x_i) = \underset{f_i}{\underset{\parallel}{P_1(x_i)}} + \dfrac{x_i - x_0}{x_k - x_0}(\underset{f_i}{\underset{\parallel}{P_2(x_i)}} - \underset{f_i}{\underset{\parallel}{P_1(x_i)}}) = P_1(x_i)$

$P(x_k) = P_1(x_k) + (P_2(x_k) - P_1(x_k)) = P_2(x_k)$.

$\therefore$ $P(x)$ 是 f 在 $x_0, x_1, \ldots, x_k$ 点的插值多项式.
$P(x)$ 的 x^k 项系数即 $\dfrac{x}{x_k - x_0}(P_2(x) - P_1(x))$ 的 x^k 项系数.
即 $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \dfrac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

Thm 2.17 ~~Cor 2.14~~ 给出了递推计算 $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ 的方法: 差商表.

~~Cor~~
Def 2.18 差商表

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
x_3 & f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3]
\end{array}
$$

例如. 给定 $\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & 6 & -3 & -6 & 9 \end{array}$, 则其差分表为

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 6 & & & \\
1 & -3 & -9 = \frac{(-3)-6}{1-0} & & \\
2 & -6 & -3 = \frac{(-6)-(-3)}{2-1} & 3 = \frac{(-3)-(-9)}{3-1} & \\
3 & 9 & 15 = \frac{9-(-6)}{4-3} & 9 = \frac{15-(-3)}{4-2} & 2 = \frac{9-3}{4-1}
\end{array}
$$

因此有 $P_3(x) = 6 - 9x + 3x(x-1) + 2x(x-1)(x-2)$.

$f(\frac{3}{2}) \approx P_3(\frac{3}{2}) = -6$.

~~Thm 2.16 $f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i) + f[x_0, x_1, \ldots, x]\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$.~~

~~PF~~

Thm 2.21 $f(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\dots+f[x_0,x_1,\dots,x_n]\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)+f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, $\forall x\neq x_i$.

Pf. 任取 $z\neq x_i$，则 f 在 $x_0,x_1,\dots,x_n,z$ 点的 (n+1)次 插值多项式为

$Q(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\dots+f[x_0,x_1,\dots,x_n]\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)+f[x_0,x_1,\dots,x_n,z]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

$\therefore f(z)=Q(z)=f[x_0]+f[x_0,x_1](z-x_0)+\dots+f[x_0,x_1,\dots,x_n]\prod_{i=0}^{n-1}(z-x_i)+f[x_0,x_1,\dots,x_n,z]\prod_{i=0}^{n}(z-x_i)$.

用 x 替代 z 即得结论.

Cor 2.22 设 $f\in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$ 在 (a,b) 上存在，若 $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$，$x\in[a,b]$，则

$\exists\, \xi(x)\in(a,b)$, s.t. $f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$.

PF: 由 Thm 2.21, Thm 2.7 可知

$f[x_0,x_1,\dots,x]=\dfrac{R_n(f;x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$.

Cor 2.23 设 $x_0<x_1<\dots<x_n$，$f\in C^n[x_0,x_n]$，则 $\lim_{x_n\to x_0}f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$.

Def 2.25~26 记 $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$，$\nabla f_i=f_i-f_{i-1}$，递归定义 $\Delta^n f_i=\Delta(\Delta^{n-1}f_i)$，$\nabla^n f_i=\nabla(\nabla^{n-1}f_i)$.

(向前差分算子) (向后差分算子)

Thm 2.27~28 差分算子的性质:

(1) $\Delta^n f_i=\nabla^n f_{i+n}$

(2) $\Delta^n f_i=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_{i+k}$

PF: (1) 归纳法. 显然 $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i=\nabla f_{i+1}$.

若 $\Delta^{n-1}f_i=\nabla^{n-1}f_{i+n-1}$，则

$\Delta^n f_i=\Delta(\Delta^{n-1}f_i)=\Delta(\nabla^{n-1}f_{i+n-1})=\nabla^{n-1}f_{i+n}-\nabla^{n-1}f_{i+n-1}=\nabla^{n-1}(f_{i+n}-f_{i+n-1})=\nabla^{n-1}(\nabla f_{i+n})=\nabla^n f_{i+n}$.

(2) 归纳法. 显然 $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i=\binom{1}{1}f_{i+1}-\binom{1}{0}f_i$.

若 $\Delta^n f_i=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_{i+k}$，则

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}f_i&=\Delta(\Delta^n f_i)=\Delta\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_{i+k}\Big)\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(f_{i+k+1}-f_{i+k})\\
&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{k-1}f_{i+k}+f_{i+n+1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{k}f_{i+k}+(-1)^{n+1}f_i\\
&\overset{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}}{=}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}f_{i+k}+\binom{n+1}{n+1}f_{i+n+1}+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{0}f_i\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}f_{i+k}
\end{aligned}$$

Thm 2.29 设 $x_0,h\in\mathbb{R}$，$x_i=x_0+ih$，$f_i=f(x_i)$，则 $\forall n\in\mathbb{N}^+$，$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\dfrac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$.

PF. $\pi'_{n+1}(x_k)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(k-i)h=h^n k!(n-k)!(-1)^{n-k}$.

$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f_k}{\pi'_k(x_k)}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k}f_k}{h^n k!(n-k)!}=\dfrac{1}{h^n n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_k=\dfrac{\Delta^n f_0}{h^n n!}$.

Thm 2.30 (牛顿向前差分定理) 设 $P_n(f;x)\in\mathbb{P}_n$ 是 $f(x)$ 在均匀网格 $x_0, x_1, \dots, x_n$ $(x_i = x_0 + ih)$ 上的(n次)插值多项式，则

$$\forall s\in\mathbb{R},\quad P_n(f;x_0+sh)=\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f_0.$$

PF: 由 Thm 2.26 得 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f[x_0,\dots,x_k]\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)=f_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)$

将 $x=x_0+sh$ 代入上式得

$$P_n(f;x_0+sh)=f_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}\prod_{i=0}^{k-1}(s-i)h=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta^k f_0}{k!}\cdot k!\binom{s}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f_0.$$

§2.5 Neville-Aitken 算法

Thm 2.31 令 $P_0^{[i]}=f(x_i)$, $\forall i=0,1,\dots,n$,

$\forall k=0,1,\dots,n$, $i=0,1,\dots,n-k-1$, 定义 $P_{k+1}^{[i]}(x)=\dfrac{(x-x_i)P_k^{[i+1]}(x)-(x-x_{i+k+1})P_k^{[i]}(x)}{x_{i+k+1}-x_i}$

则 $P_k^{[i]}$ 是 f 在点 $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ 的 (k次) 插值多项式.

特别地, $P_n^{[0]}$ 是 f 在点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的 (n次) 插值多项式.

PF: 归纳法. $k=0$ 时结论显然成立.

假设结论对 k 成立, ~~则 $\forall j=i+1,\dots,i+k$, $P_k^{[i]}(x_j)=f(x_j)$~~

则 $\forall j=i+1,\dots,i+k$, $P_k^{[i+1]}(x_j)=P_k^{[i]}(x_j)=f(x_j)$

因此 $P_{k+1}^{[i]}(x_j)=\dfrac{(x_j-x_i)f(x_j)-(x_j-x_{i+k+1})f(x_j)}{x_{i+k+1}-x_i}=f(x_j)$. $\forall j=i+1,\dots,i+k$.

又 $P_{k+1}^{[i]}(x_i)=P_k^{[i]}(x_i)=f(x_i)$, $P_{k+1}^{[i]}(x_{i+k+1})=P_k^{[i+1]}(x_{i+k+1})=f(x_{i+k+1})$.

因此 结论对 $k+1$ 仍成立.

~~例如~~ ~~给定~~

Thm 2.31 给出了不用计算 $P_n(f;x)$ 的具体表达式直接对一个 x 求 $P_n(f;x)$ 的算法.

§2.6 Hermite 插值问题

Def 2.33 给定互不相同的 $x_0, x_1, \dots, x_k\in[a,b]$ 及非负整数 $m_0, m_1, \dots, m_k$.

$f\in C^M[a,b]$, $M=\max_{i=0}^{k} m_i$, 给出 f 在 x_i 处的值及 1 至 m_i 阶导数值.

Hermite 插值问题是求一个(次数最低的)多项式 P, 使得

$\forall i=0,1,\dots,k$, $\forall \mu=0,1,\dots,m_i$, $P^{(\mu)}(x_i)=f_i^{(\mu)}$.

其中 $f_i^{(\mu)}=f^{(\mu)}(x_i)$ 是 f 在 x_i 处的 μ 阶导数值. 特别地, $f_i^{(0)}=f(x_i)$.

Thm 2.34 Hermite 插值问题的解唯一.

PF: 取 $N=k+\sum_{i=0}^{k} m_i$. Hermite 插值问题等价于求解关于 $a_0,\dots,a_N$ 的 $N+1$ 阶线性方程组,

其中 $a_0\dots a_N$ 是多项式 $P_N(x)\in\mathbb{P}_N$ 的各项系数.

设方程组的系数矩阵为 $M\in\mathbb{R}^{N+1}\times\mathbb{R}^{N+1}$, 若 $\exists a\in\mathbb{R}^{N+1}$ s.t. $Ma=0$, $P(x)=\sum_{i=0}^{N} a_i x^i$,

则因为 $\forall i=0\dots k$, x_i 是 $p(x)$ 的至少 m_i+1 次根,

$\therefore$ $P(x)=\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)^{m_i+1}$ 是 $p(x)$ 的因子. 但 $P(x)$ 的次数为 $N+1$, 大于 N, 因此只能有 $p(x)\equiv 0$.

是非奇异矩阵，方程组的解唯一．即 $p(x)$ 唯一．

~~Cor 2.26 f在 n+1 个相等的点 x_0 处的 n 阶差商为~~

$$\cancel{f[\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{n+1个}] = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)}.$$

~~PF: 在 Hermite 插值问题中令 $k=0$, $m_0=n$.~~

Def 2.35（广义差商）设 $x_0, x_1, \dots, x_k$ 为 $k+1$ 个两两不同的点，且 x_i $(i=0\dots k)$ 出现了 m_i+1 次，令 $N = k+\sum_{i=0}^{k} m_i$，则称 f 在 $\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{m_0+1}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{m_k+1}$ 处的广义差商为：

f 在这些点处的 Hermite 插值问题的解的 N 次幂项系数．记作 $f[x_0,\dots,x_0,x_1,\dots,x_1,\dots,x_k,\dots,x_k]$

Cor 2.36 f在 $\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{n+1个}$ 处的差商为 $f[\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{n+1}] = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

PF: 在 Hermite 插值问题中令 $k=0$. $m_0=n$, 则唯一解为 $p(x)\in\mathbb{P}_n$.

则由广义差商的定义得 $f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0) = n!\cdot f[x_0,\dots,x_0]$.

即 $f[x_0,\dots,x_0] = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$.

Thm 2.37 设 $P_N(f;x)$ 是 Hermite 问题的解，则

$$f(x)-P_N(f;x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)^{m_i+1}$$

证明类似 Thm 2.7.

广义差商的求法同样是差商表．这里以 $f[x_0, x_1, x_1, x_2]$ 为例：（具体数值例子见习题）

$$\begin{array}{c|lllll}
x_0 & f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & \to f[x_0,x_1] & & \\
x_1 & f_1 & f_1' & \to f[x_0,x_1,x_1] & \\
x_2 & f_2 & \to f[x_1,x_2] & \to f[x_1,x_1,x_2] & \to f[x_0,x_1,x_1,x_2].
\end{array}$$

$$P_4(f;x) = f[x_0](x-x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_1](x-x_0)(x-x_1)^2 + f[x_0,x_1,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

§ 2.7 切比雪夫多项式

传统的多项式插值在某些情形下效果很差．例如 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$x\in[-5,5]$.

Def 2.41 称 $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ 为第一类切比雪夫多项式．

Thm 2.42（第一类切比雪夫多项式的递推关系）$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

PF: 令 $x=\cos\theta$, 则 $T_n(x)=\cos n\theta$. $T_{n+1}(x)=\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta$, $T_{n-1}(x)=\cos(n-1)\theta$ $=\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta$

$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x) = 2\cos n\theta\cos\theta = 2xT_n(x)$.

Cor 2.43 T_n 的 n 次项系数为 2^{n-1}.

Thm 2.44 $T_n(x)$ 有 n 个单重零点 $x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ $(k=1,2,\dots,n)$ 和 n 个极值点 $x_k'=\cos\frac{k}{n}\pi$ $(k=1,2,\dots,n)$.

PF: $T_n(x_k) = \cos\left(n\arccos\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0$.

$T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$. $T_n'(x_k) = \frac{n}{\sqrt{1-\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi}}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) \neq 0$.

$T_n'(x_k') = \frac{n}{\sqrt{1-\cos^2\frac{k}{n}\pi}}\sin(k\pi) = 0$. $T_n''(x_k') = \frac{n^2\cos(k\pi)}{\cos^2\frac{k}{n}\pi - 1} + \frac{n\cos\frac{k}{n}\pi\sin(k\pi)}{(1-\cos^2\frac{k}{n}\pi)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$.

Thm 2.46 (切比雪夫定理) 记 $\widetilde{\mathbb{P}}_n$ 为所有 n 次首一多项式，则

$$\forall p \in \widetilde{\mathbb{P}}_n,\quad \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}\right| \le \max_{x\in[-1,1]} |p(x)|.$$

PF: 反证，设结论不成立，则

由 Thm 2.44，$T_n(x)$ 的最值为 ± 1，故 $\exists p \in \widetilde{\mathbb{P}}_n$ s.t. $\max\limits_{x\in[-1,1]} |p(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

令 $Q(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) - p(x)$,

则 $Q(x_k') = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x_k')$. $k=0,1,\dots,n$.

$\because |p(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall x \in [-1,1]$, ~~$\therefore Q(x)$ 在 $[-1,1]$ 上变~~

$\therefore$ 对所有奇数 k，$Q(x_k') < 0$；对所有偶数 k，$Q(x_k') > 0$.

$\therefore$ Q 在 (x_0', x_1'), (x_1', x_2'), …, (x_{n-1}', x_n') 上各有至少一个零点。

$\therefore$ Q 有 n 个零点，~~次数至少为 n.~~ 但 Q 的次数至多为 n-1. 故只有 $Q(x) \equiv 0$. $p(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

矛盾. 故原结论成立.

Cor 2.47 $\max\limits_{x\in[-1,1]} |x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n| \ge \frac{1}{2^{n-1}}$. $\forall n$, $\forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$.

Cor 2.48 $T_{n+1}(x)$ 在其 n+1 个零点上的插值多项式的柯西余项满足

$$|R_n(f;x)| \le \frac{1}{2^n (n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|$$

PF: $|R_n(f;x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \left|\prod_{i=0}^{n} (x-x_i)\right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{2^n (n+1)!} \|T_{n+1}\| \le \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{2^n (n+1)!} \le \frac{\|f^{(n+1)}\|}{2^n (n+1)!}$

§ 2.8 Bernstein 多项式

Def 2.49 称 $b_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ 为 n 次基本 Bernstein 多项式. $k=0,1,\dots,n$.

Lem 2.50 (基本 Bernstein 多项式的性质)

① $\forall k = 0,1,\dots,n$, $\forall t \in (0,1)$, $b_{n,k}(t) > 0$.

② $\sum\limits_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) = 1$. ③ $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, b_{n,k}(t) = nt$. ④ $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nt)^2 b_{n,k}(t) = nt(1-t)$.

Lem 2.51 n 次基本 Bernstein 多项式张成了线性空间 $\mathbb{P}_n = \{p : \deg p \le n\}$.

Def 2.52 称 $f \in C[0,1]$ 的 n 次 Bernstein 多项式为 $(B_n f)(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(t)$.

Thm 2.53 (Weierstrass 估计) 所有连续函数 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 可被 ~~一致~~ ~~其 n 次 Bernstein~~ 多项式一致估计.

即: $\forall f \in C[a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, s.t.

$\forall n > N$, $\exists p_n \in \mathbb{P}_n$ s.t. $\forall x \in [a,b]$, $|p_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.