微分方程数值解-第七章理论作业

樊睿强基数学 2001 班 3200102142

March 2023

Exercise 1. 设网格函数 $\mathbf{g}:\mathbf{X}\to\mathbb{R}$ 满足 $\mathbf{X}:=\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$，$g_1=O(h),g_N=O(h)$，$g_j=O(h^2),\forall j=2,3,\ldots,N-1$，证明：

$$\|\mathbf{g}\|_\infty=O(h),\|\mathbf{g}\|_1=O(h^2),\|\mathbf{g}\|_2=O(h^{\frac{3}{2}}) \tag{1}$$

证明. 依题意，设 $|g_1|\le Ch,|g_n|\le Ch,|g_2|,|g_3|,\ldots,|g_{N-1}\le Ch^2$，$C=O(1)$。则

$$\|\mathbf{g}\|_\infty=\max_{j=1}^{N}|g_j|\le Ch=O(h). \tag{2}$$

$$\|\mathbf{g}\|_1=h\sum_{j=1}^{N}|g_j|\le h(2Ch+(N-2)h^2)\le 3Ch^2=O(h^2). \tag{3}$$

$$\|\mathbf{g}\|_2=(h\sum_{j=1}^{N}|g_j|^2)^{\frac{1}{2}}\le(h(2C^2h^2+(N-2)C^2h^4))^{\frac{1}{2}}\le 2Ch^{\frac{3}{2}}=O(h^{\frac{3}{2}}). \tag{4}$$

同理，可证明

$$\|\mathbf{g}\|_\infty\ge O(h),\|\mathbf{g}\|_1\ge O(h^2),\|\mathbf{g}\|_2\ge O(h^{\frac{3}{2}}) \tag{5}$$

这样就证明了原结论正确。 □

Exercise 2. 证明 $B_E=A_E^{-1}$ 的第一列中存在 $O(1)$ 的元素。

证明. 依题意，有

$$A_EB_E=I \tag{6}$$

设 B_E 的第一列为 $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m, \beta_{m+1}$。比较两端的第一列得线性方程组

$$\begin{cases} -\beta_0 + \beta_1 = h \\ \beta_0 - 2\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_1 - 2\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \ldots \\ \beta_{m-1} - 2\beta_m + \beta_{m+1} = 0 \\ \beta_{m+1} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

自下而上将 $\beta_{m-1}, \beta_{m-2}, \ldots, \beta_1, \beta_0$ 都用 β_m 表示，得到

$$\beta_k = (m - k + 1)\beta_m \tag{8}$$

代入第一个方程得到 $\beta_m = -h$。因此 $\beta_0 = -(m+1)h = -(1 + \frac{1}{m})$。即 $\beta_0 = O(1)$。 □

Exercise 3. *证明二维泊松方程的 FD 格式的 LTE τ 为*

$$\tau_{i,j} = -\frac{1}{12}h^2(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4})|_{(x_i, y_j)} + O(h^4). \tag{9}$$

证明. 根据 LTE 的公式，我们有

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = &- \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2} \\ &- \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{h^2} \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j). \end{aligned} \tag{10}$$

我们将 u 在 (x_i,y_j) 处关于 x 和 y 分别泰勒展开到 6 阶，得

$$u(x_{i-1},y_j)=(u-h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6})|_{(x_i,y_j)}+o(h^6) \tag{11}$$

$$u(x_{i+1},y_j)=(u+h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6})|_{(x_i,y_j)}+o(h^6) \tag{12}$$

$$u(x_i,y_{j-1})=(u-h\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}-\frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}+\frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6})|_{(x_i,y_j)}+o(h^6) \tag{13}$$

$$u(x_i,y_{j+1})=(u+h\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}+\frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6})|_{(x_i,y_j)}+o(h^6) \tag{14}$$

将上述四个展开式代入，整理得

$$\tau_{i,j}=-\frac{1}{12}h^2(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})-\frac{1}{360}h^4(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6})+o(h^4). \tag{15}$$

故待证式成立。 □

Exercise 4. *证明：在求解非规则区域上的二阶泊松方程时，非正则点处的 LTE 为 $O(h)$，正则点处的 LTE 为 $O(h^2)$。*

证明. 根据 LTE 的公式，在正则点处，若它的 Stencil 都是正则点，则有

$$\begin{aligned}\tau_{i,j}=&-\frac{u(x_{i-1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i+1},y_j)}{h^2}\\&-\frac{u(x_i,y_{j-1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j+1})}{h^2}\\&+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_j).\end{aligned} \tag{16}$$

这和规则区域的误差相同，都为 $-\frac{1}{12}h^2(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})|_{(x_i,y_j)}+O(h^4)$。

若 x 轴方向有一个非正则点，不妨设非正则点在正方向。设其坐标为 $(x_i+\theta h,y_i)$。

则 x 方向对 LTE 的贡献为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\theta u(x_i-h,y_j)-(1+\theta)u(x_i,y_j)+u(x_i+\theta h,y_j)}{\frac{1}{2}\theta(1+\theta)h^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j)\\
=&(-\frac{\theta(u-hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+\frac{h^3}{6}u_{xxx}+O(h^4))-(1+\theta)u+(u+\theta hu_x+\frac{\theta^2h^2}{2}u_{xx}+\frac{\theta^3h^3}{6}u_{xxx}+O(h^4))}{\frac{1}{2}\theta(1+\theta)h^2}\\
&+u_{xx})|_{(x_i,y_j)}\\
=&\frac{1-\theta}{3}hu_{xxx}(x_i,y_j)+O(h^2).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

同理可以证明，当 y 轴方向有非正则点时，其 LTE 也为 $O(h)$。特别地，如果 P 点附近边界如 Example 7.59 所示即 x,y 方向都有非正则点，则 LTE 的表达式为

$$
\tau_P=(\frac{1-\theta}{3}hu_{xxx}+\frac{1-\alpha}{3}hu_{yyy})|_P. \tag{18}
$$

综上，若 Stencil 都为正则点，则 LTE 为 $O(h^2)$；否则 LTE 为 $O(h)$。 □

Exercise 5. *在 Lem 7.56 中选择适当的 ψ 证明 Thm 7.61。*

证明. 定义

$$
\psi:\mathbf{X}\to\mathbb{R},\psi_P=E_P+T_m\phi_P \tag{19}
$$

其中 $T_m=\max\{\frac{T_1}{C_1},\frac{T_2}{C_2}\}$。则当 $P\in\mathbf{X}_1$ 时，

$$
L_h\psi_P=L_h(E_P+T_m\phi_P)\le T_P-\frac{T_1}{C_1}C_1\le 0 \tag{20}
$$

同理 $L_h\psi_P\le 0,P\in\mathbf{X}_2$。

因此 $L_h\psi_P\le 0,P\in\mathbf{X}$。

又因为 $\max_{P\in\mathbf{X}}\phi_P\ge 0$，所以 $\max_{P\in\mathbf{X}}\phi_P\ge 0$。再由 $E_Q|_{\mathbf{X}_{\partial\Omega}}=0$，结合 Lem 7.56 可得

$$
E_P\le\max_{P\in\mathbf{X}}(E_P+T_m\phi_P)\le\max_{Q\in\mathbf{X}_{\partial\Omega}}E_Q+T_m\phi_Q=T_m\max_{Q\in\mathbf{X}_{\partial\Omega}}(\phi_Q). \tag{21}
$$

因此 $E_P\le T_m\max_{Q\in\mathbf{X}_{\partial\Omega}}$。

同理,对 $\psi_P = -E_P + T_m \phi_P$ 作同样处理,则可证明 $-E_P \leq T_m \max_{Q \in \mathbf{X}_{\partial\Omega}}$。

$\square$