

数值分析 - 理论作业 -

10+10+10+10+10+10+10=70

1. 考虑初始区间为 $[1.5, 3.5]$ 的二分法, 以下问题中“区间”指二分区间。

(1) 求第 n 次循环时的区间宽度

Sol: 设第 n 次循环的区间宽度为 $[l_n, u_n]$, 则 $l_0 = 1.5, u_0 = 3.5, u_n - l_n = \frac{u_{n-1} - l_{n-1}}{2}$.

因此 $u_n - l_n = \frac{1}{2^n}(u_0 - l_0) = 2^{-(n+1)}$.

(2) 求根与区间中点的距离的上界。

Sol: $r \in [l_n, u_n], \forall n. \therefore \sup_r |r - \frac{l_n + u_n}{2}| = \frac{u_n - l_n}{2} = 2^{-n}$.

2. 考虑初始区间为 $[a_0, b_0]$ 的二分法, $a_0 > 0$. 证明: 若要算法求得的根的相对误差不超过 ε , 只需至多循环 $n \geq \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon - \log a_0}{\log 2} - 1$ 次。

PF: 设 $r_n = \frac{l_n + u_n}{2}$. 由 (2) 得 $\sup_r |r - r_n| = 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$.

要使 $\frac{|r - r_n|}{r} = \frac{2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)}{r} \leq \frac{2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)}{a_0} \leq \varepsilon$. 只需 $n \geq \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon - \log a_0}{\log 2} - 1$.

3. 对多项式方程 $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3 = 0, x_0 = -1$. 进行 4 步牛顿迭代, 并将结果列在表格中。

Sol: $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3, p'(x) = 12x^2 - 4x$.

n	x_n	$p(x_n)$	$p'(x_n)$
0	-1	-3	16
1	$\frac{-3}{16} = -0.1875$	-0.465820	11.1719
2	-0.770804	-0.020138	10.2129
3	-0.768832	-0.000044	10.1686
4	-0.768828	-2×10^{-10}	10.1685

4. 考虑牛顿法的一个变种: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$. 求 C 和 s 使得 $e_{n+1} = Ce_n^s$.

其中 e_n 是第 n 步迭代时牛顿法的误差, s 是常数, C 可能依赖 x_n, f, f' .

Sol: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \Rightarrow e_{n+1} = |x_{n+1} - \alpha| = |x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}| = |x_n - \alpha| \left| 1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)(x_n - \alpha)} \right| = e_n \left| 1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)(x_n - \alpha)} \right|$

因此, $C = \left| 1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)(x_n - \alpha)} \right|, s = 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)(x_n - \alpha)} \right| = \left| 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)} \right|$, 即 C 一般情况下收敛到 0.

即变种牛顿迭代法是一阶收敛的。

5. $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, 迭代 $x_{n+1} = \tan^{-1} x_n$ 是否收敛?

10 PF: 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, 由 $x = \tan^{-1} x$ 得 $x = 0$. 即迭代只有一个不动点 0.

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时 $x < \tan^{-1} x < 0$, 即 $x_n < x_{n+1} < 0, \forall n$.

由单调有界定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时 $x > \tan^{-1} x > 0$, 即 $x_n > x_{n+1} > 0, \forall n$.

由单调有界定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

10 因此, 迭代收敛.

6. 设 $p > 1$. 求连续函数 $x = \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \dots}}}$ 的值.

解: 构造数列 $\{x_n\}$, $x_1 = \frac{1}{p}$, $x_2 = \frac{1}{p + \frac{1}{p}}$, $x_3 = \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p}}}$, ...

则显然有迭代关系 $x_{n+1} = \frac{1}{p + x_n}, \forall n \geq 1$. ~~$x_1 = \frac{1}{p}, x_2 = \frac{1}{p + \frac{1}{p}}, x_3 = \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p}}}, \dots$~~ $x_0 = 0$.

设 $g(x) = \frac{1}{p+x}$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{(p+x)^2}$. ~~当 $x \in [0, +\infty)$ 时,~~

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $|g'(x)| \leq \frac{1}{p^2} < 1$, 因此 g 是压缩映射. $\{x_n\}$ 收敛于 g 的唯一不动点.

10 由 $x = \frac{1}{p+x}$ 得 $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4}}{2}$ (舍去负值). 因此 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$.

7. 在第2题中, 若 $a_0 < 0 < b_0$, 结论会发生什么变化?

无论循环多少次, 都无法保证相对误差. 因为 $|r|$ 可任意小. $\log_2 \frac{b_0 - a_0}{\epsilon |r|}$ 可任意大.

事实上, 当根 $r = 0$ 时, 相对误差将无意义.