数值分析 - 理论作业一

1. 考虑初始区间为 [1.5, 3.5] 的二分法，以下问题中"区间"指二分区间。

(1) 求第 n 次循环时的区间宽度

Sol: 设第 n 次循环的区间为 $[l_n, u_n]$，则 $l_0 = 1.5$, $u_0 = 3.5$, $u_n - l_n = \frac{u_{n-1} - l_{n-1}}{2}$.

因此 $u_n - l_n = \frac{1}{2^n}(u_0 - l_0) = 2^{-(n-1)}$.

(2) 求根与区间中点的距离的上界。

Sol: $r \in [l_n, u_n]$, $\forall n$. $\therefore \sup_r \left| r - \frac{l_n + u_n}{2} \right| = \frac{u_n - l_n}{2} = 2^{-n}$.

2. 考虑初始区间为 $[a_0, b_0]$ 的二分法，$a_0 > 0$. 证明：保证算法求得的根的相对误差不超过 ε，只需循环 $n \geq \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon - \log a_0}{\log 2} - 1$ 次。

PF: 设 $r_n = \frac{l_n + u_n}{2}$. 由 1 (2) 得 $\sup_r |r - r_n| = 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$.

要使 $\frac{|r - r_n|}{r} = \frac{2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)}{r} \leq \frac{2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)}{a_0} \leq \varepsilon$，只需

$$n \geq \log_2 \frac{b_0 - a_0}{a_0 \varepsilon} - 1 = \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon - \log a_0}{\log 2} - 1.$$

3. 对多项式方程 $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3 = 0$，$x_0 = -1$，进行 4 步牛顿迭代，并将结果列在表格中。

Sol: $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$，$p'(x) = 12x^2 - 4x$.

n	x_n	$p(x_n)$	$p'(x_n)$
0	-1	-3	16
1	-0.8125	-0.465820	11.1719
2	-0.770804	-0.020138	10.2129
3	-0.768832	-0.000044	10.1686
4	-0.768828	-2×10^{-10}	10.1685

4. 考虑牛顿法的一个变种：$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$. 求 C 和 s 使得 $e_{n+1} = C e_n^s$.

其中 e_n 是第 n 步迭代时牛顿法的误差，s 是常数，C 可能依赖 x_n、f、f'.

Sol: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \Rightarrow e_{n+1} = |x_{n+1} - \alpha| = \left| x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \right| = |x_n - \alpha| \left| 1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)(x_n - \alpha)} \right| = e_n \left| 1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)(x_n - \alpha)} \right|$

因此，$C = \left| 1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)(x_n - \alpha)} \right|$，$s = 1$，且 $\lim_{n \to \infty} \left| 1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)(x_n - \alpha)} \right| = \left| 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)} \right|$，即 C 一般情况下不收敛到 0.

即变种牛顿迭代法是一阶收敛的。

5. $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时，迭代 $x_{n+1}=\tan^{-1}x_n$ 是否收敛？

Pf: ~~当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$~~ 由 $x=\tan^{-1}x$ 得 $x=0$. 即迭代只有一个不动点 0.

当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时 $x<\tan^{-1}x<0$. 即 $x_n<x_{n+1}<0, \forall n$.

由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时 $x>\tan^{-1}x>0$. 即 $x_n>x_{n+1}>0, \forall n$.

由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

因此，迭代收敛.

6. 设 $p>1$. 求连续函数 $x=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cdots}}}$ 的值.

Sol: 构造数列 $\{x_n\}$. $x_1=\frac{1}{p}$, $x_2=\cfrac{1}{p+\frac{1}{p}}$, $x_3=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\frac{1}{p}}}$ ……

则显然有迭代关系 $x_{n+1}=\frac{1}{p+x_n}$, $\forall n\geq 1$. ~~$x_1=\frac{1}{p}$~~ $x_0=0$.

设 $g(x)=\frac{1}{p+x}$, 则 $g'(x)=-\frac{1}{(p+x)^2}$. ~~当 $x\in[0,+\infty)$ 时~~

当 $x\in[0,+\infty)$ 时, $|g'(x)|\leq\frac{1}{p^2}<1$. 因此 g 是压缩映射. $\{x_n\}$ 收敛于 g 的唯一不动点.

由 $x=\frac{1}{p+x}$ 得 $x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2+4}}{2}$ (舍去负值). 因此 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{-p+\sqrt{p^2+4}}{2}$.

7. 在第2题中，若 $a_0<0<b_0$. 结论是否会发生什么变化？

无论循环多少次，都无法保证相对误差. 因为 $|r|$ 可任意小. $\log_2\frac{b_0-a_0}{\varepsilon|r|}$ 可任意大.

事实上，当根 $r=0$ 时，相对误差将无意义.