

# TEMA DE PROIECTARE

## REDUCTOR DE TURAȚIE ÎNTR-O TREAPTA

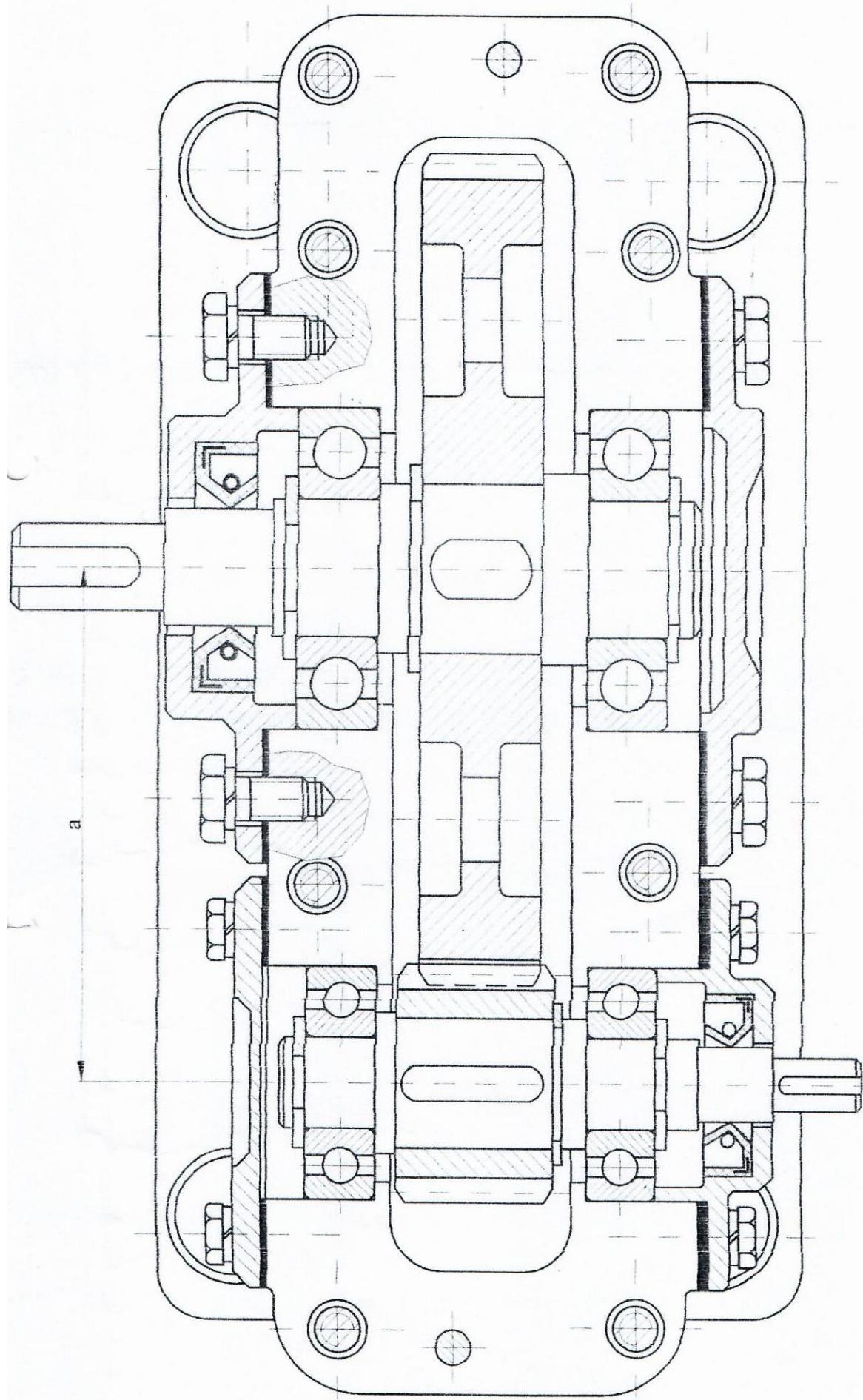
***Etape necesare de parcurs pentru proiectare:***

1. Stabilirea schemei cinematice a sistemului mecanic de proiectat;
2. Stabilirea mărimilor de intrare / ieșire pentru fiecare element al sistemului mecanic;
3. Alegerea motorului electric de acționare;
4. Proiectarea reductorului de turație;
  - 4.1. Proiectarea roților dințate
    - 4.1.1. Alegerea materialelor pentru roțile dințate;
    - 4.1.2. Predimensionarea distanței dintre axe din condiția de rezistență la solicitarea de contact;
    - 4.1.3. Calculul geometric al roților dințate;
    - 4.1.4. Determinarea forțelor ce acționează în angrenaj;
  - 4.2. Proiectarea arborilor;
  - 4.3. Alegerea și verificarea lagărelor;
  - 4.4. Alegerea și verificarea elementelor de îmbinare (pene, îmbinări prin strângere),
5. Desen de ansamblu al reductorului de turație în două vederi;
6. Desen de execuție al arborelui de intrare și al unei roți dințate.

**Date de intrare (varianta:      ):**

Puterea necesară la mașina de lucru:	$P_{ML}$ [kW] =
Turația motorului electric de acționare:	$n_{ME}$ [rot/min] =
Raportul de transmitere:	$i$ [-] =
Unghiul de înclinare al dinților roților dințate:	$\square$ [°] = .

Secțiune prin reductorul de turăție cu roți dințate cu dinți drepti:

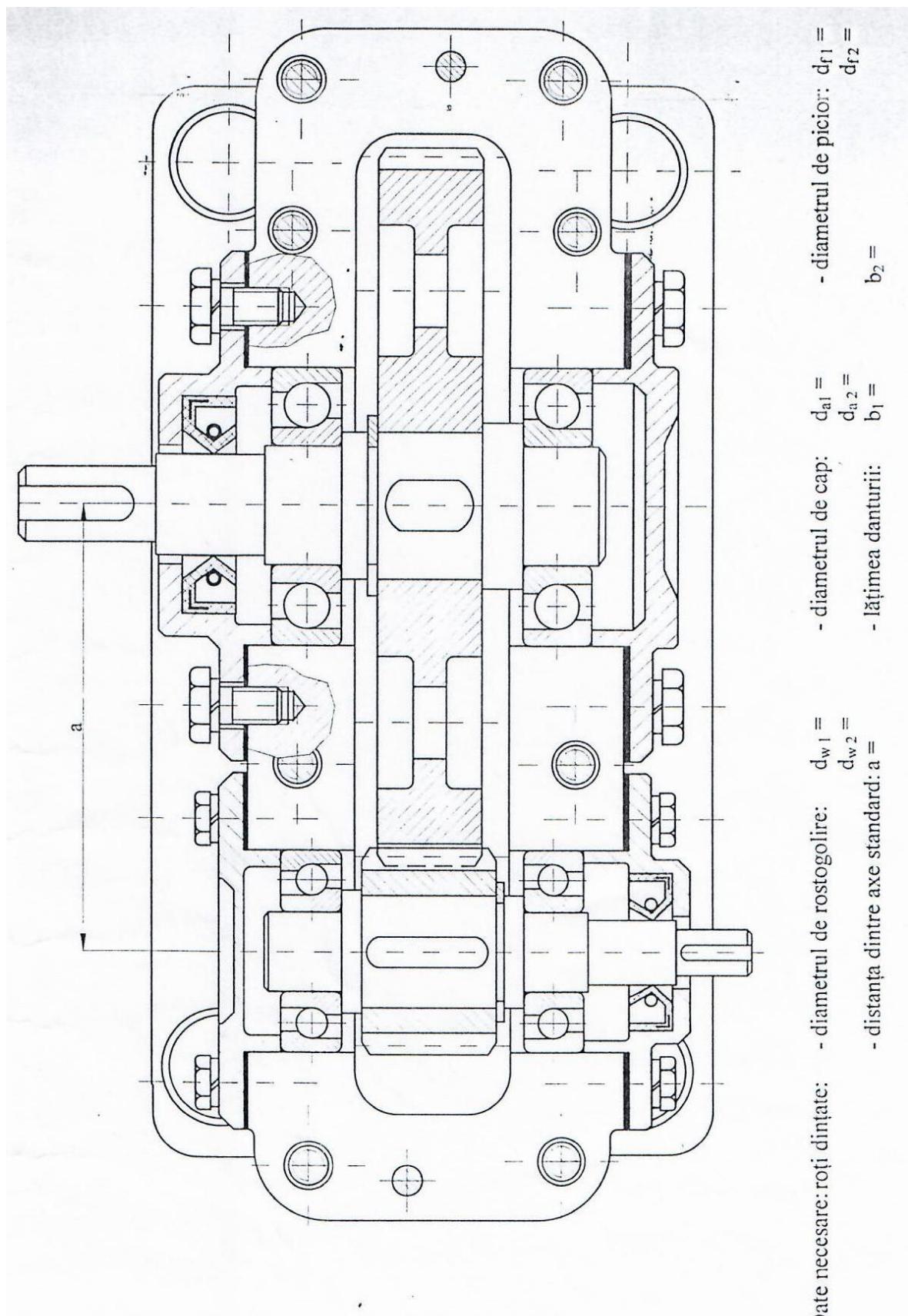


Date necesare: roți dințate:  
- diametrul de rostogolire:  $d_{w1} =$   
 $d_{w2} =$   
- distanța dintre axe standard:  $a =$

- diametrul de cap:  $d_{a1} =$   
 $d_{a2} =$   
- lățimea danturii:  $b_1 =$   
 $b_2 =$

- diametrul de picior:  $d_{r1} =$   
 $d_{r2} =$

Secțiune prin reductorul de turatie cu roți dințate cu dinți înclinați:



## ELEMENTE DE PROIECTARE PENTRU UN REDUCTOR DE TURAȚIE CILINDRIC ÎNTR-O TREAPTA

Transmisiile mecanice reprezintă subansambluri destinate adaptării parametrilor mișcării (turație, moment) mașinii motoare (motor electric, hidraulic, termic, etc) la necesitățile mașinii de lucru. Reductorul de turație este o unitate independentă plasată între motorul electric și mașina de lucru (fig. 1).

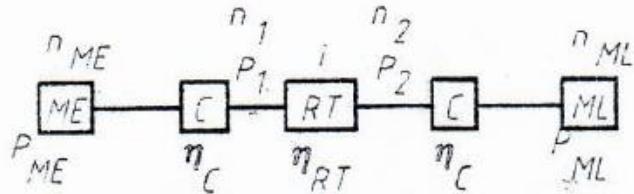


Fig. 1

ME = motor electric; C = cuplaj; RT = reductor de turație; ML = mașina de lucru;  $P_{1,2}$  = puterea la intrarea, respectiv iesirea din reductor;  $\eta_c$ ,  $\eta_{RT}$  = randamentul cuplajului, respectiv reductorului.

Schema cinematică a unui reductor cu roți dințate cilindrice într-o treaptă este prezentată în figura 2.

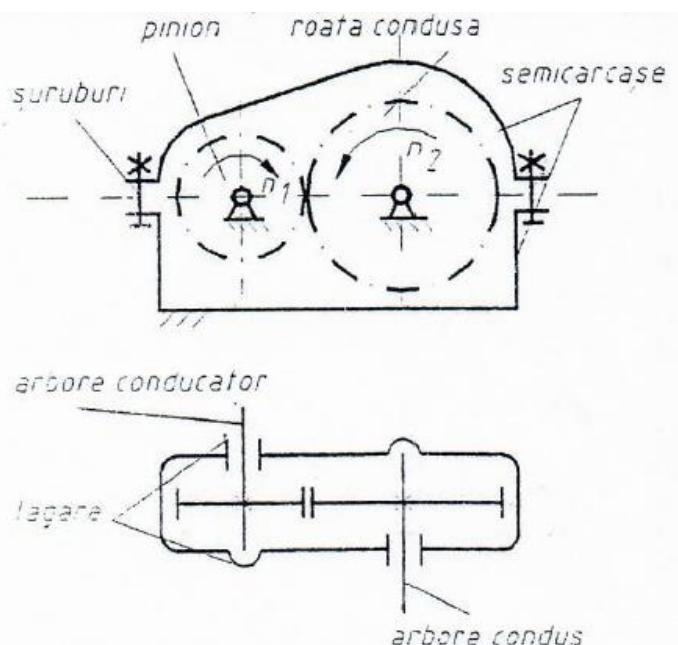


Fig. 2

Proiectarea reductorului conține urmatoarele etape:

- Alegerea motorului electric de antrenare;
- Calculul angrenajului;
- Calculul arborilor;
- Calculul lagărelor;
- Proiectarea constructivă a elementelor carcasei.

Ca date de intrare pentru proiectarea reductorului se consideră:

Puterea necesară la mașina de lucru:

$$P_{DL} [\text{kW}] =$$

Turația motorului electric de acționare:

$$n_{ME} [\text{rot/min}] =$$

Raportul de transmitere:

$$i [-] =$$

Unghiul de înclinare al dinților roților dințate:

$$\beta [^{\circ}] =$$

### 1. Alegerea motorului electric de antrenare

Puterea motorului electric de acționare trebuie să acopere puterea necesară la mașina de lucru și pierderile din lanțul mecanic dintre motor și mașina de lucru. Pierderile se cuantifică prin randamentele elementelor în mișcare.

$$P_{ME\ nec} = \frac{P_{ML}}{\eta_t}$$

$P_{ME\ nec}$  = puterea necesara la motorul electric;  $P_{ML}$  = puterea necesara rnasinii de lucru;  $\square_t$  = randamentul total al lanțului cinematic.

Randamentul total se determină ca produs al randamentelor partiale:

$$\eta_t = \prod_1^n \eta_i = \eta_c^2 \cdot \eta_l^4 \cdot \eta_a$$

unde:  $\eta_c$  = randamentul unui cuplaj;  $\eta_l$  = randamentul unui lagăr;  $\eta_a$  = randamentul angrenajului.

## 2. Calculul angrenajului

### 2.1. Alegerea materialelor pentru roțile dințate

Roțile dințate se pot executa din materiale feroase (oțeluri sau fonte), neferoase (aliaje de cupru sau aluminiu) sau nemetale (textolit, poliamidă). Alegerea materialului se face în funcție de mărimea solicitărilor, de viteza periferică și de alte eventuale condiții (de exemplu se impune ca roțile să fie izolatoare din punct de vedere electric).

Cele două roți care formează angrenajul nu se confectionează din același material. Roții conducatoare (pinionului) își atribuie materialul cu caracteristici superioare. Cele mai multe angrenaje se execută din materiale feroase. Se recomandă alegerea unei perechi de materiale din sirul urmator: OLC45/OLC35; OLC60/OLC35; 40Cr10/OLC45; 33MoC11/OLC35; 33MoCr11/OLC45; 41 MoCr 11/OLC45.

Caracteristicile mecanice de material, care interesează pentru calculul angrenajului sunt duritatea Brinell (HB) și rezistența limită la solicitarea de contact ( $\sigma_H\ lim$ ).

### 2.2. Determinarea distanței dintre axe preliminare (din solicitarea de contact)

Distanța dintre axe, preliminată din solicitarea de contact, este de forma:

$$a_{H\ prel} = 100 \cdot (i + 1) \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{Z_N \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta}{\sigma_{H\ p}}\right)^2 \cdot \frac{K_A \cdot K_v \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha} \cdot P_1}{2 \cdot i \cdot \omega_1 \cdot \Psi_A}}$$

$a_{H\ prel}$  - distanța dintre axe preliminată din solicitarea de contact [mm];

$$i = \text{raportul de transmitere: } i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

$n_1$  = turăția pinionului (egala cu turaria motorului)

$n_2$  = turăția roții conduse;

$z_1$  = numarul de dinți ai pinionului;

$z_2$  = numarul de dinți ai roții conduse.

Tuturor elementelor pinionului li se vor atribui indicele 1, iar tuturor elementelor roții conduse, indicele 2

$Z_N$  - factor zonal; ( $Z_N = 1$ )

$Z_N$  - factor de verificare a solicitării herziene; ( $Z_N = 1$ )

$Z_E$  - factor de elasticitate:

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot \left( \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}}$$

$Z_{1,2}$  = modul de elasticitate longitudinal (Young), pentru oțel  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

$v_{1,2}$  = coeficientul Poisson pentru oțel  $v = 0,3$

$Z_\varepsilon$  - factorul gradului de acoperire -  $Z_\varepsilon = 1$

$Z_\beta$  - factorul de inclinare  $Z_\beta = \sqrt{\cos \beta}$

$\sigma_{H,p}$  = solicitarea admisibilă la contact

$$\sigma_{H,p} = \frac{\sigma_{H,lim}}{S_{H,lim}} \cdot Z_N \cdot Z_L \cdot Z_R \cdot Z_V \cdot Z_W \cdot Z_{st}$$

- în care:  $Z_N$  = factor de durabilitate,  $Z_N = 1$ ;  
 $Z_L$  = factor de viscozitate,  $Z_L = 0,85$ ;  
 $Z_R$  = factor de rugozitate,  $Z_R = 1,27$ ;  
 $Z_V$  = factor de viteză,  $Z_V = 0,98$ ;  
 $Z_W$  = factor de duritate,  $Z_W = 1$ ;  
 $Z_{st}$  = factor de precizie,  $Z_{st} = 1,1$ ;

$K_A$  = factor de exploatare,  $K_A = K_{A1} \cdot K_{A2} \cdot K_{A3}$

$K_V$  = factor de viteză,  $K_V = 1,35$

$K_{H\beta}$  = factor de lățime,  $K_{H\beta} = 1$

$K_{H\alpha}$  = factor frontal,  $K_{H\alpha} = 1,1$

$\omega_1$  = viteza unghiulară a pinionului,  $\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_{ME}}{60}$

$\psi_A$  = coefficient de lățime al danturii,  $\psi_A = \frac{b}{a}$      $\psi_A = [0,3 \dots 0,6]$

a = distanța dintre axe;

b = lățimea danturii.

### 2.3. Calculul geometric al angrenajului

Principalele elemente care definesc geometria danturii sunt prezentate în figura 3.

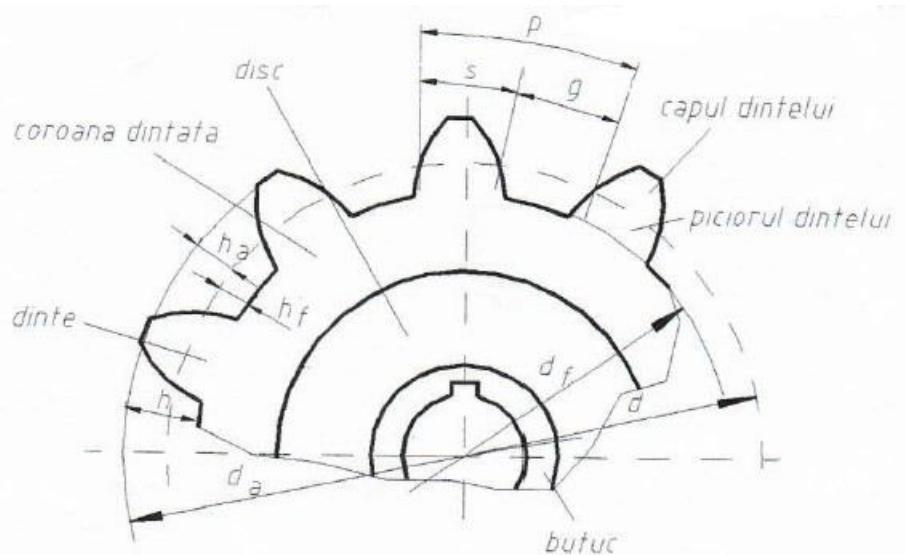


Fig. 3.

Calculul geometric al angrenajului presupune determinarea urmatoarelor elemente:

- numărul de dinți ai pinionului,  $z_1$ ; se alege cu condiția  $z_1 \geq 17$ ;
- numărul de dinți ai roții conduse  $z_2$ :  $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow z_2 = i \cdot z_1$ ;

- modulul normal al danturii,  $m$  – se calculează modulul preliminar, apoi se alege din Anexa 2 primul modul standardizat mai mare sau egal cu cel preliminat:

$$m_{n,prel} = \frac{2 \cdot a_{H,prel} \cdot \cos \beta}{z_1 + z_2}, \quad m_{n,standard} \geq m_{n,prel}$$

- distanța dintre axe de calcul  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{m_n \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \cos \beta}$$

Din Anexa 3 se alege distanța dintre axe standardizată cu condiția:  $a \geq a_0$ .

- unghiul de referință în plan frontal:

$$\alpha_{0t} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\tan \alpha_{0n}}{\cos \beta}\right)$$

Toate elementele de geometrie a danturii pot fi determinate în trei plane de proiecție: normal (indice n), frontal sau tangențial (indice t) și axial (indice ax) (fig. 4):

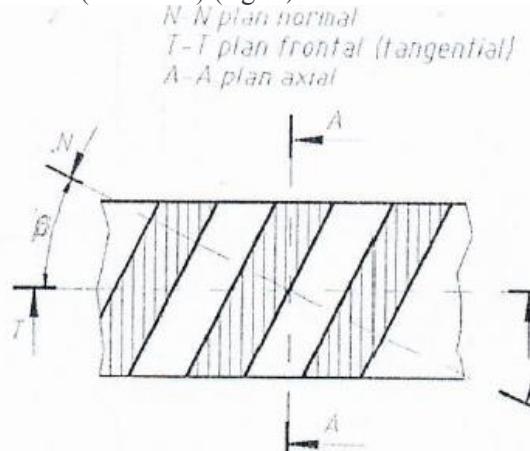


Fig. 4.

Unghiul de referință în plan normal este standardizat prin STAS 821-94, referitor la cremaliera de referință (fig. 5). Standardul stabilește valori și pentru alte elemente de referință:  $\alpha_{0n} = 20^\circ$ ;

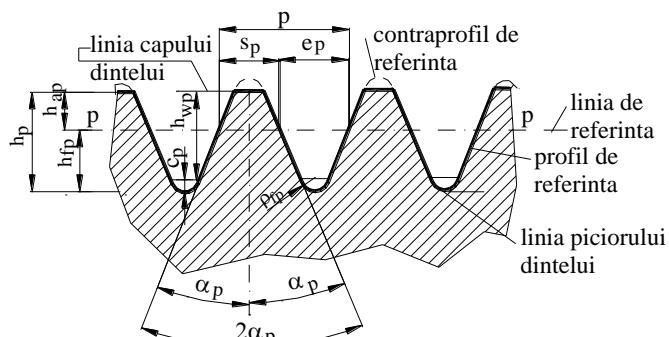


Fig. 5

	Denumirea	Simbol	Relația de definiție
1.	înălțimea capului de referință	$h_{ap}$	$h_{ap} = h_{ap}^* \cdot m = 1 \cdot m$
2.	înălțimea piciorului de referință	$h_{fp}$	$h_{fp} = h_{fp}^* \cdot m = 1 \cdot m + c_p$
3.	înălțimea dintelui de referință	$h_p$	$h_p = h_p^* \cdot m = 2 \cdot m + c_p$
4.	raza de racordare a piciorului dintelui	$\rho_{fp}$	$\rho_{fp} = \rho_{fp}^* \cdot m$
5.	grosimea dintelui pe linia de referință	$s_p$	$s_p = \frac{p}{2} = \frac{\pi \cdot m}{2}$
6.	grosimea golului pe linia de referință	$e_p$	$e_p = \frac{p}{2} = \frac{\pi \cdot m}{2}$
7.	înălțimea dintelui comun profilului și contraprofilului de referință	$h_{wp}$	$h_{wp} = h_{wp}^* \cdot m = 2 \cdot h_{ap}$
8.	unghiul de presiune pe cremaliera de referință	$\alpha_p$	$\alpha_p = 20^\circ$
9.	jocul la fund (picior)	$c_p$	$c_p = c_p^* \cdot m = 0,25 \cdot m$
10	raza de racordare	$\rho_{fp}$	$\rho_{fp} = \frac{c_p}{(1 - \sin \alpha_p)} = 0,38 \cdot m$

- unghiul de angrenare în plan frontal:

$$\alpha_t = \arccos \left( \frac{a_0}{a} \cdot \cos \alpha_{0t} \right)$$

Unghiul de angrenare în plan frontal trebuie să îndeplinească următoarea condiție:  $\alpha_t \leq 25^\circ$ , pentru a obține o evolventă corectă. În caz contrar se modifică valoarea pentru  $z_1$  și se refac calculele pentru  $m$ ,  $a$ ,  $\alpha_t$ .

- modulul în plan frontal:  $m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$

- suma deplasărilor de profil:  $s_n = (x_{1n} + x_{2n}) = \frac{(ev\alpha_1 - ev\alpha_2) \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{0t} \cdot \cos \beta}$ ,

funcția evolventă a unui unghi se definește:  $ev \alpha = \tan \alpha - \alpha$ , în care  $\square$  se exprimă în radiani.

Din nomogramele din anexa 4 se alege deplasarea specifică de profil în plan normal pentru pinion  $x_{1n}$  în funcție de raportul de transmitere  $i$ , numărul de dinți ai pinionului  $z_1$  și suma deplasărilor de profil  $s_n$ :

- deplasarea de profil pentru roată  $x_{2n}$  se calculează prin diferență:  $x_{2n} = s_n - x_{1n}$ .

- deplasările specifice în plan frontal  $x_{1,2t}$  (prezența indiciilor 1, 2 în formulă indică faptul că elementul de geometrie se calculează pentru pinion -1-, respectiv pentru roată -2-):

$$x_{1,2t} = x_{1,2n} \cdot \cos \beta$$

- diametrele de divizare:  $d_{1,2} = m_t \cdot z_{1,2}$

- diametrele de rostogolire:  $d_{w1,2} = d_{1,2} \cdot \frac{\cos \alpha_{0t}}{\cos \alpha_t}$

- pentru verificarea calculelor se determină eroarea:  $\Delta \epsilon = a - 0,5 \cdot (d_{w1} + d_{w2}) \leq 10^{-4}$

- coeficientul înălțimii capului dintelui în plan frontal:  $f_{0t} = f_{0n} \cdot \cos \beta$ ,  $f_{0n} = 1$

- coeficientul jocului la fundul danturii în plan frontal  $w_{0t}$ :  $w_{0t} = w_{0n} \cdot \cos \beta$ ,  $w_{0n} = 0,25$

- diametrele de fund (de picior):  $d_{f1,2} = m_t \cdot [z_{1,2} - 2 \cdot (f_{0t} - x_{1,2t} + w_{0t})]$

- diametrele de bază:  $d_{b1,2} = d_{1,2} \cdot \cos \alpha_{0t}$

- înălțimea dintelui:  $h = a - \frac{d_{f1} + d_{f2}}{2} - w_{0t} \cdot m_t$

- diametrele de cap:  $d_{a1,2} = d_{f1,2} + 2 \cdot h$

- gradul de acoperire:  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$      $\varepsilon_{1,2} = \frac{z_{1,2}}{2 \cdot \pi} \cdot \left( \sqrt{\left( \frac{d_{a1,2}}{d_{b1,2}} \right)^2 - 1} - \tan \alpha_t \right)$

- pentru un angrenaj cu dinți drepti:  $\varepsilon_\alpha = 1,1 \dots 1,9$

- pentru un angrenaj cu dinți înclinați:  $\varepsilon_\alpha > 1,1$

- lățimea danturii:  $b = \Psi_a \cdot a$

- lățimea pinionului se adoptă constructiv mai mare decât cea a roții:

$$b_1 = \operatorname{int}(b + 0,5) + 5 \dots 10 \text{ mm}$$

$$b_2 = \operatorname{int}(b + 0,5)$$

## 2.4. Forțele care acționează în angrenaj

Asupra danturii acționează **O** forță spațială care se poate descompune după cele trei plane raportate la dintre. Aceste forțe se transmit asupra organelor de sustinere (arbori) și sprijinire (lagăre) – fig. 6.

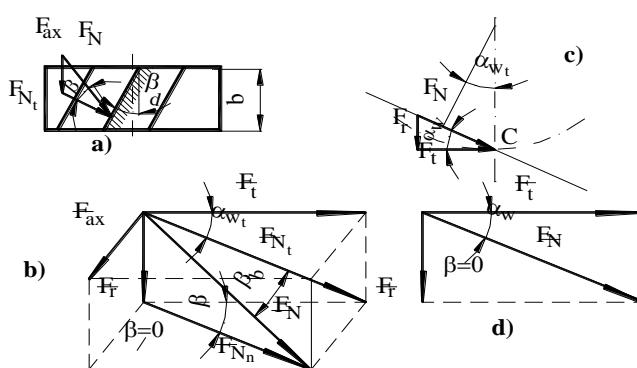


Fig. 6.

- forța tangențială  $F_t$ :  $F_t = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot P_1}{d_1 \cdot \omega_1} \text{ [N]}$ ,  $P_1 \text{ [kW]}$ ,  $d_1 \text{ [mm]}$ ,  $\omega_1 \text{ [rad/s]}$
- forța radială  $F_r$ :  $F_r = \frac{F_t \cdot \tan \alpha_t}{\cos \beta} \text{ [N]}$
- forța axială  $F_{ax}$ :  $F_{ax} = F_t \cdot \tan \beta \text{ [N]}$

### 3. Calculul arborilor

#### 3.1. Generalități

*Arborii* sunt organe de mașini ce au rolul de a centra și susține alte organe de mașini aflate în mișcare de rotație, se rotesc în jurul axei lor geometrice, transmit momente de torsiune și putere; sunt solicitați la torsiune și încovoiere.

*Osiile* sunt organe de mașini ce susțin alte organe de mașină aflate în rotație, sunt fixe sau se rotesc fără să transmită momente de torsiune și sunt solicitate în principal la încovoiere (solicitarea de torsiune datorată frecării din lagăre se neglijeză, fiind mică în raport cu solicitarea de încovoiere). Denumirea de osie se folosește, în principal, în construcția de vehicole feroviare. Notiunea de *ax* se folosește în mecanică fină la mașini și aparate, în general, pentru arbori de diametru mai mic de 10 mm. Axele sunt supuse la torsiune și încovoiere.

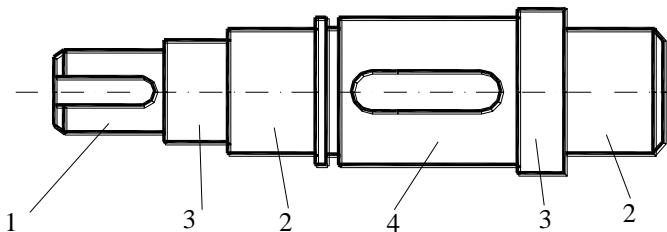


Fig. 7.

Părțile componente ale unui arbore sunt (fig. 7):

- 1, 4 - porțiuni de arbore pe care se fixează organele de mașină care primesc mișcarea de rotație sau care transmit mișcarea de rotație la alte organe de mașină cu care vin în contact; 1 - se mai numește capăt de arbore, cu dimensiunile standardizate (STAS 8724/2-71 și STAS 8724/4-71 pentru arborii cilindrici și în STAS 5343/1-74 și STAS 3432/2-74 pentru arborii mașinilor electrice normale);

- 2 - fusurile - zonele de sprijin, de rezemare ale arborelui în lagăr;
- 3 - corpul arborelui cu rol de legătură între toate zonele arborelui.

În funcție de tipul constructiv și rolul funcțional al arborelui una sau alta dintre părți poate să lipsească sau altele să se repete.

#### 3.2. Materiale folosite pentru construcția arborilor

Se recomandă folosirea următoarelor tipuri de materiale:

- oțeluri carbon de uz general: OL 42; OL 50; OL 60; (STAS 500-80) pentru arbori cu solicitări reduse;  
- oțeluri carbon de calitate: OLC 35; OLC 45; OLC 60; (STAS 880-80) pentru arbori cu solicitări medii;  
- oțeluri aliante: 30Mn16; 33MoCrNi11; 41MoCr11; 50VCr11; 30CrNi15 (STAS 781-80) pentru arbori puternic solicitați sau la care se impun restricții de gabarit;

- fonte de înaltă rezistență Fgn 400-5; Fgn 450-5 și fonte speciale (STAS 6071-82) pentru arbori de dimensiuni mari sau formă complicată.

*Observații:*

1. La arborii care sunt puternic solicitați, dar la care se impun condiții de rigiditate nu se folosesc mărci superioare de oțel; creșterea rigidității se realizează prin modificarea geometriei arborelui; rigiditatea arborelui este independentă de rezistența materialului, fiind funcție de modulul de elasticitate al acestuia (care este practic constant pentru toate oțelurile).

2. La oțelurile aliante sensibilitatea față de concentratorii de tensiune crește și adesea câștigul obținut prin creșterea rezistenței se anulează.

În ambele cazuri se preferă deci măsurile tehnologice și constructive.

#### 3.3. Procedee tehnologice de obținere a semifabricatelor

Principalele procedee tehnologice de obținere a semifabricatelor pentru arbori sunt:

- laminarea în bare (pentru diametre  $d \leq 140$  mm);
- laminare cu forjare liberă (pentru diametre  $d > 140$  mm);
- forjarea în lingouri (arbori cotiți, osii de locomotive și vagoane);
- matrițarea (pentru arbori din fontă maleabilă, cu grafit nodular, oțel turnat pentru forme complicate).

**Tratamentele termice** la care se supun arborii sunt:

- îmbunătățire (călire urmată de revenire joasă, medie sau înaltă, în funcție de proprietățile pe care vrem să le obținem pentru arbore);
- călire superficială;
- normalizare.

**Prelucrările mecanice** la care sunt supuse diferite porțiuni ale arborilor sunt:

- strunjire de degroșare - corpul arborelui;
- strunjire de finisare sau rectificare - porțiunile de calare și fusurile.

Baza tehnologică pentru prelucrarea arborilor o constituie găurile de centrare (pentru arborii mașinilor electrice STAS 8198-73, pentru arbori, în general, STAS 1361-73).

### 3.4. Elemente de calcul pentru arbori

Datorită naturii variate a solicitărilor și a influențelor constructive asupra comportării arborilor, dimensiunile lor nu pot fi determinate numai prin calcule de rezistență.

Etapele de calcul pentru arbori sunt:

1. predimensionarea pe baza unui calcul simplificat de solicitare la torsiune;
2. proiectarea formei constructive, cu considerarea condițiilor funcționale, de execuție și de montaj;
3. verificarea arborilor:
  - A. la oboseală;
  - B. la rigiditate (la deformații flexionale);
  - C. la vibrații flexionale (turație critică).
4. definitivarea formei constructive a arborilor.

#### 3.4.1. Predimensionarea arborilor

De cele mai multe ori se cunoaște puterea de transmis  $P$  [kW], turația  $n$  [rot/min], sau momentul de torsiune  $T$  [Nmm], respectiv viteza unghiulară  $\omega$  [rad/s] a arborelui.

Determinarea preliminară a diametrului arborelui se face pe baza unui calcul simplificat, considerând numai solicitarea de torsiune:

$$\tau_t = \frac{T}{W_p} \leq \tau_{t \text{ adm c}}$$

în care:  $T$  [Nmm] - momentul de torsiune ce se transmite:

$$T = 10^6 \cdot \frac{P}{\omega} = 10^6 \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} = 9.55 \cdot 10^6 \cdot \frac{P}{n}$$

$$60$$

$T$  [Nmm];  $\omega$  [rad/s];  $n$  [rot/min];  $P$  [kW];

$W_p$  [ $\text{mm}^3$ ] - modulul de rezistență polar:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

- pentru secțiune circulară are expresia:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot \left( 1 - \left( \frac{d_i}{d} \right)^4 \right) = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot (1 - \xi^4)$$

- pentru secțiune tubulară:

$$\xi = \frac{d_i}{d}$$

$d_i$  - diametrul interior al arborelui,

$\tau_t$  [ $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$ ] =  $\tau_{t \text{ adm c}}$  - tensiunea admisibilă de calcul la torsiune, care are următoarele valori: - pentru arbori de uz general:  $\tau_{t \text{ adm c}} = [12 \dots 35]$  MPa;

- pentru arborii mașinilor electrice:  $\tau_{t \text{ adm c}} = [6 \dots 9]$  MPa

(condițiile de funcționare sunt mai severe - rigiditatea arborelui trebuie să fie mare pentru a avea deformații mai

mici de 10% din întrefierul dintre rotor și stator).

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot \tau_{t_{admc}} \cdot (1 - \xi^4)}} \quad [\text{mm}]$$

Din aceste relații se obține:

### 3.4.2. Proiectarea formei constructive a arborilor

Forma arborilor trebuie riguros corelată cu funcționalitatea ansamblului, tipul, geometria și montajul organelor de mașină ce se fixează pe aceștia, sistemul de rezemare, repartiția sarcinii în lungul arborelui, tehnologia de execuție.

Având diametrul preliminar calculat, se determină pe baza unor recomandări constructive lungimea și diametrele tronsoanelor arborelui cu luarea în considerare a rolului funcțional al pieselor susținute.

Capetele de arbore sunt standardizate și date în STAS 8724/2-71 și STAS 8724/4-71 pentru arborii cilindrici și în STAS 5343/1-74 și STAS 3432/2-74 pentru arborii mașinilor electrice normale.

Diametrele fusurilor pentru montarea rulmenților se stabilesc după seria de dimensiuni pentru rulmenți din standardele firmelor producătoare, ținând cont de diametrul preliminar calculat cu (1.3). Pentru rezemarea axială a rulmenților fusurile se prevăd cu umeri de sprijin și raze de racordare (STAS 6603-75).

Diametrele zonelor de calare trebuie adoptate constructiv, astfel încât, pe lângă împiedicarea rotirii și a deplasărilor relative dintre elementele conjugate, să se asigure un montaj cât mai simplu.

Pe porțiunile greu solicitate ale arborilor trebuie evitate îmbinările filetate, datorită concentratorilor de tensiune puternici pe care îi introduce filetul executat pe arbore.

În funcție de posibilitățile constructive, se recomandă utilizarea canalelor de pană prelucrate cu freză disc față de cele prelucrate cu freză deget, deoarece extremitățile constituie zone periculoase de concentrare a tensiunilor (se recomandă rotunjirea colțurilor canalelor de pană pentru reducerea concentratorilor de tensiune).

### 1.2.3. Verificarea arborilor

#### A. Verificarea la oboseală

Verificarea la oboseală reprezintă *verificarea formei arborelui* și a dimensiunilor acestuia. Această verificare se face în funcție de material, prelucrare, dimensiuni, formă constructivă, condiții de exploatare, starea suprafeței.

Verificarea la oboseală se face la arborii solicitați variabil la cel puțin  $10^3 - 10^4$  cicluri de funcționare.

Verificarea la oboseală se face în secțiunile periculoase. Acestea nu sunt neapărat porțiunile cu secțiune minimă sau încărcare maximă, ci sunt secțiunile în care efectul concentratorilor de tensiune este maxim.

Calculul de verificare la oboseală presupune următoarele etape:

1. stabilirea secțiunilor periculoase;
2. calculul solicitărilor nominale în secțiunile periculoase:  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$ ,  $\sigma_{am}$ ,  $\sigma_{med}$ ,  $\tau_{max}$ ,  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{am}$ ,  $\tau_{med}$  (conform fig. 1.2):

- a. ciclu alternant simetric:

$$\sigma_{min} = -\sigma_{max}$$

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 0; \quad \tau_{med} = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = 0$$

$$\sigma_{amplit} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \sigma_{max}; \quad \tau_{amplit} = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \tau_{max}$$

- b. ciclu pulsator:

$$\sigma_{min} = \tau_{min} = 0;$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{inc}}{W_z}; \quad \tau_{max} = \frac{T}{W_p};$$

$M_{inc}$ ,  $T$  – momentul încovoiotor, respectiv de torsiune din secțiune;

$W_z$ ,  $W_p$  – modulul de rezistență cartezian, respectiv polar al secțiunii;

$$\sigma_{med} = \sigma_{amplit.} = \frac{\sigma_{max}}{2}; \quad \tau_{med} = \tau_{amplit.} = \frac{\tau_{max}}{2};$$

3. calculul coeficienților de siguranță ținând seama de felul ciclului de solicitare, de modul de variație a solicitării, de condițiile constructive, tehnologice și de exploatare ale pieselor.

a. coeficientul de siguranță parțial la solicitarea normală pentru ciclu de funcționare alternant simetric (cazul cel mai des întâlnit) se calculează cu relația:

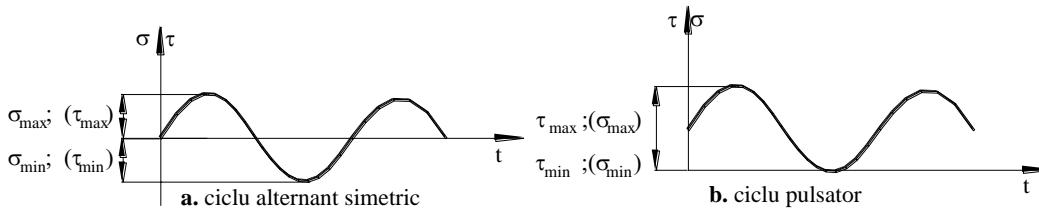


Fig. 9.

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\left( \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma_\sigma} \cdot \sigma_{amplit.} + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_r} \cdot \sigma_{med} \right) \cdot \sigma_{max}} = \frac{\sigma_{-1}}{\left( \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma_\sigma} \right) \cdot \sigma_{max}}$$

b. coeficientul de siguranță parțial la solicitarea tangențială pentru ciclul pulsator (cazul cel mai des întâlnit) se calculează cu relația:

$$c_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\left( \frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma_\tau} \cdot \tau_{amplit.} + \frac{\tau_{-1}}{\tau_r} \cdot \tau_{med} \right) \cdot \tau_{max}} = \frac{2 \cdot \tau_{-1}}{\left( \frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma_\tau} + \frac{\tau_{-1}}{\tau_r} \right) \cdot \tau_{max}}$$

în care:  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$  - tensiunea normală, respectiv tangențială la oboseală pentru un ciclu alternant simetric;

$k_\sigma, k_\tau$  - coeficienți de concentrare;

$\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\tau$  - coeficienți de mărime;

$\gamma_\sigma, \gamma_\tau$  - coeficienți de calitate a suprafetei;

$\sigma_{max}, \tau_{max}$  – tensiunea normală, respectiv tangențială maximă în secțiunea în care se calculează coeficientul de siguranță;

$\sigma_r, \tau_r$  - tensiunea normală, respectiv tangențială de rupere a materialului arborelui (în cazul în care nu se cunosc valorile pentru  $\tau_r$  se poate admite  $\tau_r = 0,6 \cdot \sigma_r$ ).

4. calculul coeficientului de siguranță global și compararea cu valorile admisibile:

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} \geq c_{adm}$$

$c_{adm} = 1,3 \dots 1,5$  - în cazul determinării precise a caracteristicilor de material și a solicitărilor efective;

$c_{adm} = 1,5 \dots 1,8$  - în cazul în care se cunosc doar aproximativ caracteristicile de material și solicitările efective;

$c_{adm} = 1,8 \dots 2,5$  - pentru calcule aproximative, materiale neomogene, și pentru diametre mari ( $d \geq 200$  mm).

Este necesar și suficient ca cel puțin într-o secțiune coeficientul global de siguranță să fie în intervalul recomandat, restul putând să aibă valori mai mari, nici într-un caz mai mici.

În cazul în care cel mai mic coeficient de siguranță într-o secțiune sau mai multe nu se încadrează în intervalele prescrise (este mai mic) se va reproiecta forma arborelui pe tronsonul respectiv, prin reducere a concentratorilor de tensiune sau mărirea diametrului.

### Măsuri pentru mărirea rezistenței la oboseală a arborilor

Pot să fie de două tipuri:

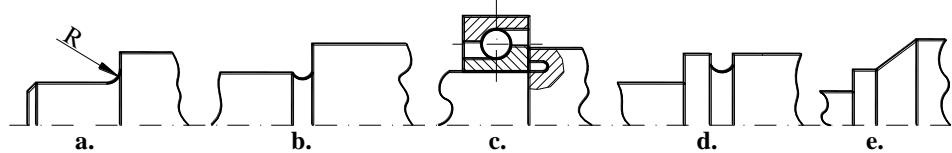
- constructive;
- tehnologice.

#### a. Măsuri constructive de reducere a concentratorilor de tensiune

Rezistența la oboseală a unui arbore depinde în cea mai mare măsură de forma sa. Măsurile constructive

au ca scop construirea unor arbori cu o formă care să permită repartizarea uniformă a eforturilor. Principaliii concentratori de tensiune sunt: raccordările, găurile, îmbinările prin strângere, canalele de pană, canelurile și filetele. Trebuie luate măsuri pentru reducerea efectului acestora.

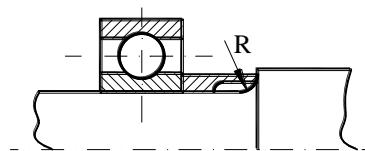
1. *Raccordări* - având în vedere dependența coeficientului de concentrare de raza de raccordare este necesar a se realiza raccordări cu raze cât mai mari (fig.10 a) (raza piesei montate trebuie să fie mai mare decât raza raccordării).



**Fig. 10.**

În cazul în care acest lucru nu este posibil efectul concentratorului poate fi diminuat prin:

- raccordări cu degajare (fig.10 b, c);
- canale de descărcare (fig.10 d);
- utilizarea unor portiuni prelucrate pe suprafață conică între două diametre diferite (fig. 10 e);
- utilizarea unor raze mari de raccordare cu inele de distanțare (fig.11).

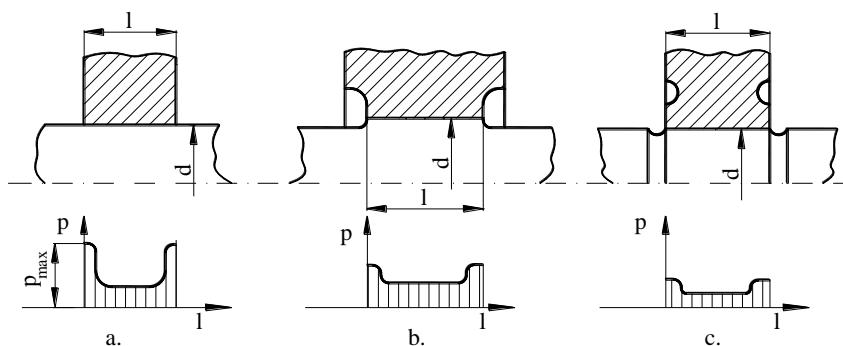


**Fig. 11.**

## 2. *Îmbinări prin strângere*

La îmbinările prin strângere, solicitările sunt prezентate în fig.12 a.

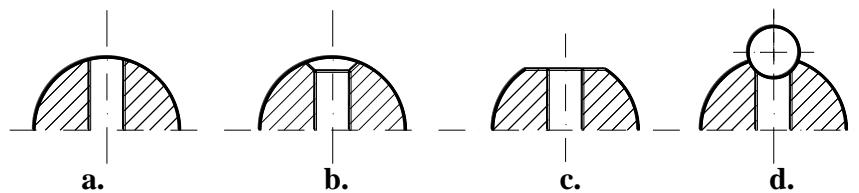
Pentru reducerea concentratorilor de tensiune se poate folosi una dintre soluțiile prezentate în fig.1.5 b, c (îmbinări elastice).



**Fig. 12.**

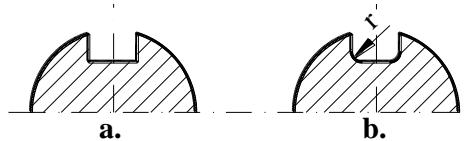
## 3. *Găuri transversale*

Efectul de concentrare ce apare la arborii ce au găuri transversale (fig.13 a), planarea arborelui în dreptul găurii (fig.13 c) sau ecrusarea muchiilor găurii prin presarea cu o bilă sau cu un dorm conic (fig.13 d).



**Fig. 13.**

## 4. *Canale de pană*



**Fig. 14.**

Se preferă canalele de pană realizate cu ajutorul frezei disc ce prezintă concentratori cu 15-20 % mai

mici decât canalele tăiate cu freza deget (fig.14 a) ca urmare a existenței racordării fetelor cu fundul acestora (fig.14 b).

### 5. Filetarea arborilor

Pe cât posibil se va evita filetarea unor porțiuni ale arborilor, iar dacă acest lucru nu este posibil se vor alege filete cu pas fin sau filete cu fundul rotunjit (realizate prin rulare) la care se vor face canale de degajare (fig.15).

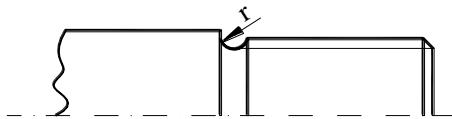


Fig. 15.

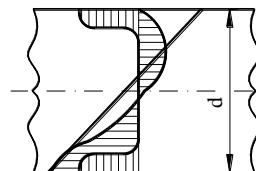


Fig. 16.

### 6. Arbori canelați

Se vor alege canelurile evolventice față de cel cu profil dreptunghiular sau triunghiular. Sunt de preferat canelurile al căror diametru exterior este egal cu cel al arborelui, față de cele cu diametru exterior mai mare.

#### b. Măsurile tehnologice pentru reducerea concentratorilor de tensiune

Măsurile tehnologice ce se pot lua pentru creșterea rezistenței la oboseală constau, în general, în aplicarea unor tratamente termice (călire cu flacără sau CIF), termochimice (cementare, nitrurare, cianurare) sau mecanice (rulare cu role, ecrusare cu jet de alici). Acestea au rolul de a realiza la suprafața arborelui tensiuni inițiale de compresiune, ce vor conduce, după suprapunerea tensiunilor de întindere ce apar în timpul funcționării, la tensiuni rezultante mai mici (fig.16) (se știe că rezistența de compresiune la oboseală este mult mai mare decât rezistența de întindere la oboseală).

## B. Verificarea la deformații flexionale (rigiditate)

Verificarea la deformații flexionale (rigiditate) se impune pentru a obține o funcționare corectă a organelor de mașină fixate pe arbore (lagăre, respectiv fusul la lagărele cu alunecare, bilele sau rolele la lagărele cu rostogolire (rulmenți) și dinți de la roțile dințate în angrenare).

De obicei, se verifică rigiditatea la încovoiere a arborilor și numai în cazuri excepționale se efectuează și verificarea rigidității la torsion (în cazul în care transmisia poate fi scoasă din uz și prin întărirea rulmenților, repartizarea neuniformă a sarcinii pe lățimea dinților roților dințate).

a. Verificarea rigidității la încovoiere constă în compararea săgeții arborelui determinată pe cale analitică, grafo-analitică sau grafică cu valorile admisibile ale acesteia:

$$f_{\max} \leq f_{\text{adm}}$$

în care:  $f_{\text{adm}} = k_1 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \quad [\text{mm}]$

- valorile lui  $k_1$  sunt date în tab.1.1.

Verificarea rigidității la încovoiere în reazeme se face prin calcularea înclinației din reazeme (fig.1.17) și compararea acesteia cu valorile admisibile:

$$\varphi \leq \varphi_{\text{adm}}$$

în care:  $\varphi_{\text{adm}} = k_2 \cdot 10^{-3} [\text{rad}]$

- valorile lui  $k_2$  sunt date în tabelul 1.2.

tab.1.2

tab.1.1	
Domeniul	$k_1$
în construcția de mașini	3
mașini-unelte	2

$k_2$	Tipul lagărului
8	rulmenți cu bile
5	rulmenți oscilații
2,5	rulmenți cu role cilindrice
1,7	rulmenți cu role conice

În dreptul roții dințate de pe arbore rotirea are expresia:

$$\varphi = \frac{c' \cdot F_t}{10^3 \cdot b} \quad [\text{rad}]$$

în care:  $c' = (4...15)$  - coeficient ce se ia în funcție de lățimea dinților (valori superioare pentru număr redus de dinți și  $b/m$  mic și valori inferioare pentru roți dințate cu un număr mare de dinți și  $b/m$  mare);

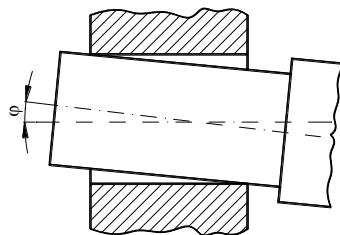


Fig. 1.17.

- $F_t$  [N] - forța tangențială;
- $b$  [mm] - lățimea roții dințate;
- $m$  [mm] - modulul roții dințate.

În cazul lagărelor cu alunecare, pentru a evita griparea, se verifică deviația fusului în cuzinet care trebuie să se mențină în cadrul jocului dintre fus și cuzinet, cu relația:

$$\varphi \cdot l_f \leq j_{\min}$$

în care:  $j_{\min}$  - jocul dintre fus și cuzinet;

$l_f$  - lungimea lagărului;

$\varphi$  - unghiul de rotire din reazem.

În cazul în care avem două plane de deformare, săgeata, respectiv rotirea în secțiunea de calcul se determină cu relația:

$$f = \sqrt{f_H^2 + f_V^2}$$

$$\varphi = \sqrt{\varphi_H^2 + \varphi_V^2}$$

în care:  $f_H, f_V, \varphi_H, \varphi_V$  - săgețile, respectiv rotirile în două plane perpendiculare notate cu  $V$  și  $H$  în care descompunem solicitările arborelui.

Pentru calculul săgeților și rotirilor se pot folosi relațiile din tabelul următor, relații ce au fost determinate pentru un arbore ce are același diametru de la un capăt la celălalt, un arbore echivalent cu cel proiectat având diametrul echivalent egal cu diametrul din zona fusului, iar lungimea echivalentă a fiecărui tronson dată de relația:

$$l_e = \sum_{j=1}^n l_j \cdot \left( \frac{d_e}{d_j} \right)^4$$

Tabelul 1.3.

Cazul de încărc.	Schema de încărcare	Ecuația liniei elastice	Săgeata	Înclinarea în reazem
I.		$y = \frac{F \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I_z} \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right)$	$f = \frac{F}{48} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_z}$	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{F \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I_z}$
II.		<p>- în stânga forței:</p> $y_1 = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{6 \cdot l} \cdot \left( 2 \cdot \frac{x_1}{a} + \frac{x_1}{b} - \frac{x_1^2}{a^2 \cdot b} \right)$ <p>- în dreapta forței:</p> $y_2 = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{6 \cdot l} \cdot \left( 2 \cdot \frac{x_2}{b} + \frac{x_2}{a} - \frac{x_2^2}{b^2 \cdot a} \right)$	$f = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{3 \cdot l}$ $f_{\max} = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot \frac{a}{3l} \left( \frac{b^2 + 2ab}{3} \right)^{\frac{2}{3}}$	$\alpha_A = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot \frac{ab(a+2b)}{6 \cdot l}$ $\alpha_B = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot \frac{ab(b+2a)}{6 \cdot l}$

III.		$y = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot \frac{l^2 \cdot c}{6} \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right)$	$f_1 = \frac{F}{E \cdot I_z} \frac{l^2 c}{9\sqrt{3}}$ $f_2 = \frac{F (1+c)c^2}{EI_z} \frac{1}{3}$ $\alpha_3 = \frac{F c \cdot (3c+2l)}{EI_z} \frac{1}{6}$	$\alpha_1 = \frac{F \cdot 1 \cdot c}{EI_z} \frac{1}{3}$ $\alpha_2 = \frac{F \cdot 1 \cdot c}{EI_z} \frac{1}{6}$ $\alpha_3 = \frac{F \cdot c \cdot (3c+2l)}{EI_z} \frac{1}{6}$
IV.		$y = \frac{F}{EI_z} \frac{l^3}{24} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} - \frac{x^4}{l^4} \right)$	$f = f_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{P \cdot l^3}{E \cdot I_z}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{F}{EI_z} \cdot \frac{l^2}{24}$

Relațiile prezentate în tabelul 1.3 pentru calculul rigidității se pot generaliza prin relația:

$$f = \frac{F \cdot l^3}{k \cdot E \cdot I_z}$$

În cazul în care săgeata calculată rezultă mai mare decât valoarea admisibilă, în diferite situații, trebuie să intervenim pentru a reduce valoarea acesteia. În cazul în care studiem relația anterioară putem observa:

- modulul de elasticitate longitudinal  $E$  este constant, deci nu influențează săgeata;

- reducerea săgeții se face prin:

- montarea pieselor cât mai aproape de reazeme;

- creșterea diametrului arborelui (eventual, folosirea de arbori tubulari, astfel reducând greutatea).

#### b. Rigiditatea la răsucire

În general se permit răsuciriri mari de până la  $\varphi = 13^\circ$  (de exemplu la arborele cardanic), dar sunt cazuri în care acestea sunt limitate din punct de vedere funcțional (de exemplu la podurile rulante - unghiiurile mari de răsucire ale arborelui căruciorului pot să ducă la răsturnarea acestuia); rigiditatea la răsucire nu limitează capacitatea portantă.

Deformația la răsucire se calculează cu relația:

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p} \quad [\text{rad}]$$

Se mai folosește răsucirea pe metru liniar:

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{T}{G \cdot I_p} \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

$$T = 10^6 \cdot \frac{P}{\omega} \quad [\text{Nmm}]$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad [\text{mm}^4]$$

în care:

#### C. Verificarea la vibrații flexionale (turație critică)

Verificarea are drept scop evitarea fenomenului de rezonanță mecanică (frecvența forței exterioare ce acționează asupra arborelui coincide cu frecvența de oscilație proprie a arborelui).

Orice corp scos din echilibru oscilează cu o frecvență constantă numită *frecvență proprie de oscilație*, atât timp cât nu se produce amortizarea. Oscilațiile întreținute sunt produse de forță care acționează periodic asupra unui sistem. Amplitudinea oscilației depinde atât de intensitatea forței exterioare cât și de diferența dintre frecvența proprie de oscilație și frecvența forței exterioare.

Atunci când frecvența forței exterioare coincide cu frecvența proprie de oscilație apare fenomenul de rezonanță; în acest caz amplitudinea oscilațiilor crește continuu, iar arborele tinde să se rupă.

În cazul arborilor drepti, forța periodică exterioară este forța centrifugă datorată maselor neechilibrate. La rezonanță turația arborelui se numește *turație critică*. Notiunea de turație critică s-a generalizat și pentru alți arbori la care forțele diferențiale de forțele centrifuge produc rezonanță (arborii cotiți de la motoare, compresoare sunt supuși la forțe periodice datorate ciclului de funcționare).

Vibrațiile pot fi transversale (flexionale și torsionale) sau longitudinale. Vibrațiile longitudinale (cauzele lor sunt forțele axiale periodice) nu sunt periculoase, deoarece forțele elastice axiale de restabilire a arborilor sunt mari în raport cu masa oscilantă, deci perioada de oscilație este scurtă, iar frecvența proprie de oscilație este mare. Fenomenul vibrator constă în faptul că are loc o transformare continuă a energiei potențiale în energie

cinetică și invers.

Verificarea la turație critică constă în determinarea valorii acesteia și compararea cu valoarea turației de funcționare a arborelui.

### C.1. Turația critică la încovoiere

#### a. arbore vertical

Pe arborele de lungime  $l$  se află un corp de masă  $m$ , montat față de axa de rotație cu excentricitatea  $e$  (fig.1.11 a). Datorită rotației, forța centrifugă  $F_c$  produce o săgeată  $f_{din}$ . Mărimea forței centrifuge este:

$$F_c = m \cdot (f_{din} + e) \cdot \omega^2$$

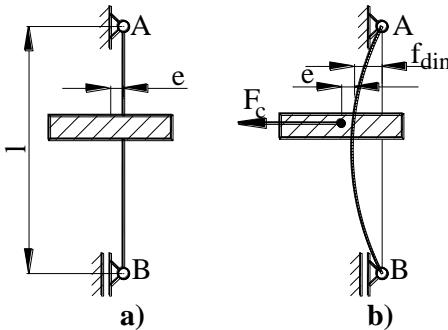


Fig. 1.18.

Dacă arborele nu ar avea rezistență la încovoiere, săgeata ar crește continuu. La un moment dat se produce echilibrul între forța centrifugă și forța elastică a arborelui:

$$F_c = F_e$$

$$m \cdot (f_{din} + e) \cdot \omega^2 = c \cdot f_{din}$$

în care:  $c$  = rigiditatea arborelui:

$$c = \frac{F_c}{f_{din}} = \frac{48 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

Expresia săgeții dinamice  $f_{din}$  devine:

$$f_{din} = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2}{c - m \cdot \omega^2}$$

Dacă viteza unghiulară  $\omega$  crește, numitorul relației (1.20) se poate anula, iar săgeata dinamică  $f_{din}$  tinde spre infinit:

$$c - m \cdot \omega^2 = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega_{crit} \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Această viteza unghiulară este cea critică, identică cu pulsăria proprie a arborelui.

$$f_{din} = \frac{e}{\frac{c}{m \cdot \omega^2} - 1}, \quad c = m \cdot \omega_{crit}^2 \Rightarrow f_{din} = \frac{e}{\left( \frac{\omega_{crit}}{\omega} \right)^2 - 1}$$

Dacă se reprezintă grafic  $\frac{f_{din}}{e}$  pentru diferite valori  $\frac{\omega}{\omega_{crit}}$  se obține graficul din fig.1.19.

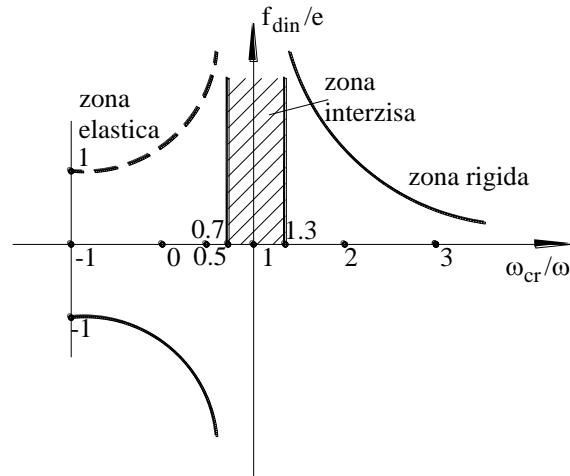


Fig. 1.19.

Dacă  $\omega > \omega_{crit} \Rightarrow f_{din} < 0$  - arbori elastici;

$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow f_{din} = -e$  - dincolo de turația critică a arborelui se produce autocentrarea arborelui;

$\omega < \omega_{crit} \Rightarrow f_{din} > 0$  - arbori rigizi.

În cazul arborilor elastici se pune problema cum ajung aceștia la turația de regim, trecând peste turația critică fără a se rupe. Trecerea se face repede, iar dacă acest lucru nu este suficient se modifică ansamblul din punct de vedere constructiv, adăugând înainte de a trece peste turația critică un volant, care după trecere se poate îndepărta.

În cazul arborilor rigizi turația critică trebuie să fie mare, deoarece în caz contrar săgeata dinamică ce se însumează cu cea statică poate să ducă la avarii. De asemenea echilibrarea trebuie să fie foarte bună ( $e$  - cât mai mic).

#### b. arbore orizontal

Datorită greutății arborelui și a corpului de pe arbore  $G$ , arborele are o săgeată statică  $f_{st}$  cu expresia (independentă de excentricitatea  $e$ ) (fig.1.13):

$$f_{st} = \frac{G}{c} = \frac{m \cdot g}{c}$$

în care:  $c$  - rigiditatea arborelui.

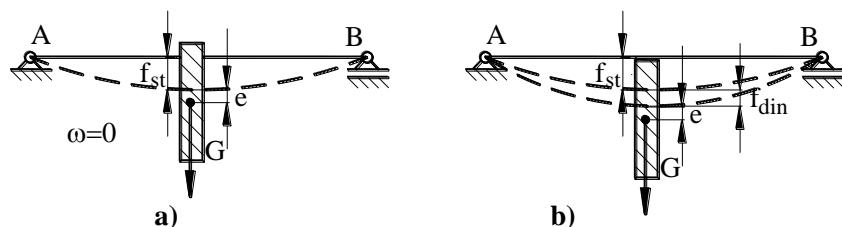


Fig. 1.20.

Datorită mișcării de rotație a arborelui, acesta se rotește pe un cerc de rază  $(e + f_{din})$ , în care  $f_{din}$  este săgeata dinamică datorată forței centrifuge.

$$F_c = m \cdot r \cdot \omega^2 = \frac{G}{g} \cdot (f_{din} + e) \cdot \omega^2$$

$$F_e = c \cdot f_{din}$$

$$F_c = F_e$$

$$\frac{G}{g} \cdot (f_{din} + e) \cdot \omega^2 = c \cdot f_{din}$$

$$c = \frac{G}{f_{st}} \quad (\text{din relația (11.23)}) \Rightarrow f_{din} = \frac{e \cdot f_{st} \cdot \omega^2}{g - f_{st} \cdot \omega^2}$$

$$g - f_{st} \cdot \omega^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_{din} \rightarrow \infty \\ \omega_{crt} = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}} \end{cases}$$

Dacă  $\omega$  crește atunci

Pentru ca pericolul rezonanței să fie evitat, turația arborelui trebuie să fie cât mai îndepărtată de turația critică:  $\omega \notin [0,7...1,3] \cdot \omega_{crt}$ .