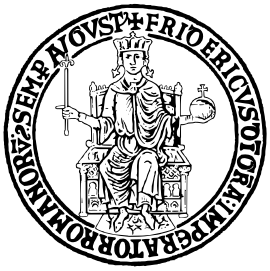
Università degli Studi di Napoli Federico II



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Dipartimento di Ingegneria Elettrica e Tecnologie dell'Informazione

Corso di Laurea Triennale in Informatica

Implementazione di una procedura di decisione per il frammento guarded in Vampire

Relatori
Prof. Fabio Mogavero
Prof. Massimo Benerecetti

Candidato
Francesco Scarfato
N86/3769

Anno Accademico 2022–2023

Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Dipartimento di Ingegneria Elettrica e Tecnologie dell'Informazione

Corso di Laurea Triennale in Informatica

Implementazione di una procedura di decisione per il frammento guarded in Vampire

Relatori
Prof. Fabio Mogavero
Prof. Massimo Benerecetti

Candidato
Francesco Scarfato
N86/3769

Anno Accademico 2022–2023

Indice

Introduzione

La logica del primo ordine è un sistema formale che estende la logica proposizionale e comprende connettivi proposizionali, quantificatori, segni di punteggiatura e variabili. Uno specifico linguaggio del primo ordine è definito da:

- un insieme finito di *simboli per i predicati* in cui a ogni simbolo è associato un intero definito arietà del predicato;
- un insieme finito di *simboli per le funzioni* in cui a ogni simbolo è associato un intero definito arietà della funzione;
- un insieme finito di *costanti*.

Lo studio della logica del primo ordine è fondamentale in quanto, grazie alla sua espressività, è possibile rappresentare concetti e relazioni complesse. Infatti, permette di modellare sistemi formali per la maggior parte delle aree della logica matematica e non solo.

Prima di esporre cos'è un *theorem prover*, bisogna introdurre il concetto di *decidibilità* e di *soddisfacibilità*. Un problema è detto *decidibile* se esiste una procedura di decisione tale che, dato un input, l'algoritmo termini sempre con una risposta positiva o negativa. Un insieme di formule F è detto *soddisfacibile* se, per ogni formula $g \in F$, esiste un assegnamento delle variabili (interpretazione booleana) di g tale che la formula sia vera. Il problema di determinare se è possibile trovare un'interpretazione booleana per rendere l'insieme F soddisfacibile è detto problema della soddisfaciblità (SAT). Questo problema è decidibile per formule della logica proposizionale, ma indecidibile per formule della logica del primo ordine.

Un dimostratore automatico o *theorem prover* è uno strumento software che prova a verificare la validità di un problema ma non risolve il problema dell'indecidibilità. I *theorem prover* sono strumenti *general purpose* che puntano a risolvere il maggior numero di problemi nel modo più veloce ed efficiente possibile. Vengono maggiormente impiegati in campo accademico e in campo industriale per la verifica formale di sistemi hardware e software. Vampire è uno degli *automated theorem prover* per la risoluzione di problemi di logica del primo ordine, più conosciuti ed efficienti in circolazione. Il linguaggio di programmazione usato per implementarlo è C++. La prima versione è stata sviluppata principalmente da Andrei Voronkov e Krystof Hoder tra il 1993 e il 1995 all'Università di Manchester. Dopo il 1995, il progetto è stato sospeso e per poi esser ripreso nel 1998. Vampire ha vinto circa 45 titoli in diverse divisioni della CASC (CADE ATP System

Competition) che è il campionato mondiale per gli ATP (Automated Theorem Prover) [1, 2]. Alcune delle principali caratteristiche del sistema sono:

- la velocità;
- la portabilità sulle piattaforme più comuni;
- la semplicità dell'utilizzo;
- è dotato di strategie di ricerca con risorse limitate;
- supporta numerose sintassi in input;
- la possibilità di parallelizzare, i vari tentativi di prova del problema, su più processori;
- può produrre, in base alle opzioni selezionate, output molto dettagliati.

Come detto precedentemente, il problema dell'indecidibilità per la logica del primo ordine rimane, ed è per questo che la ricerca si sta concentrando sullo studio di sottoinsiemi di questa logica (frammenti) per cui sia possibile stabilire una procedura di decisione. La scoperta di nuove procedure di decisione è rilevante poiché, in alcuni casi, questi approcci possono risultare più efficienti di una strategia *general purpose* come quella del *theorem prover*. L'ideale sarebbe inglobare queste procedure di decisione nei *theorem prover*, quando è possibile, e utilizzarle nel caso in cui un problema appartenga a un determinato frammento. Uno di questi frammenti è quello *guarded* che è un frammento della logica del primo ordine e la sua importanza è dovuta alla possibilità di tradurre molte logiche modali, con importanti proprietà computazionali e di espressività, in formule del primo ordine appartenenti al frammento. Sono state proposte numerose generalizzazioni di questo frammento, in quanto alcune logiche modali (come quella temporale) non possono essere tradotte in esso. La generalizzazione piu datata è il frammento *loosely guarded* che ha vincoli meno stringenti sulla definizione di guardia.

Il frammento analizzato in questa tesi è il frammento *guarded* che è decidibile grazie a una procedura di decisione, definita da De Nivelle e De Rijke. Questa procedura di decisione sfrutta una restrizione della tecnica di *resolution* con un nuovo ordinamento definito sui termini [3].

L'obbiettivo di questa tesi è presentare un'implementazione di una procedura di decisione per il frammento *guarded* su Vampire, confrontare i comportamenti di Vampire originale e Vampire esteso con la procedura di decisione e fornire una valutazione. Nel capitolo 1 sono introdotte le nozioni astratte riguardanti l'architettura di Vampire e il frammento *guarded* con le sue proprietà. Nel capitolo 2 viene presentata l'implementazione sperimentale della procedura di decisione per questo particolare frammento. Nel capitolo 3 vengono analizzate le prestazioni di Vampire con la nuova procedura di decisione e confrontate con il sistema originario. Infine, la tesi si conclude con il capitolo 4, in cui viene esposta una valutazione della procedura di decisione ed eventuali approfondimenti futuri.

1. Background

1.1 Architettura di Vampire

L'*automated theorem prover* Vampire ha un'architettura complessa ma, analizzandola ad alto livello, è possibile riconoscere tre moduli principali:

1. *parser*
2. *preprocessor*
3. *kernel*

1.1.1 Parser

Il *parser* è un modulo che permette la lettura di un problema da un file e la conseguente incapsulazione in una classe specifica. Nel caso di un problema di logica del primo ordine con sintassi TPTP, viene diviso in più unità. Ogni unità è una formula o una clausola a cui viene assegnato uno specifico tag in base al tipo (ipotesi, assioma, congettura, teorema, …).

Nel codice sorgente sono presenti le classi `Problem`, `Unit`, `Formula`, `Clause` e sono in relazione tra loro come mostrato nella figura 1.1. L'attributo *kind* della classe `Unit` permette la distinzione tra `Clause` e `Formula`. Sono presenti altre classi, non rappresentate nella figura, che ereditano `Formula` come: `AtomicFormula`, `JunctionFormula`, `BinaryFormula`, …

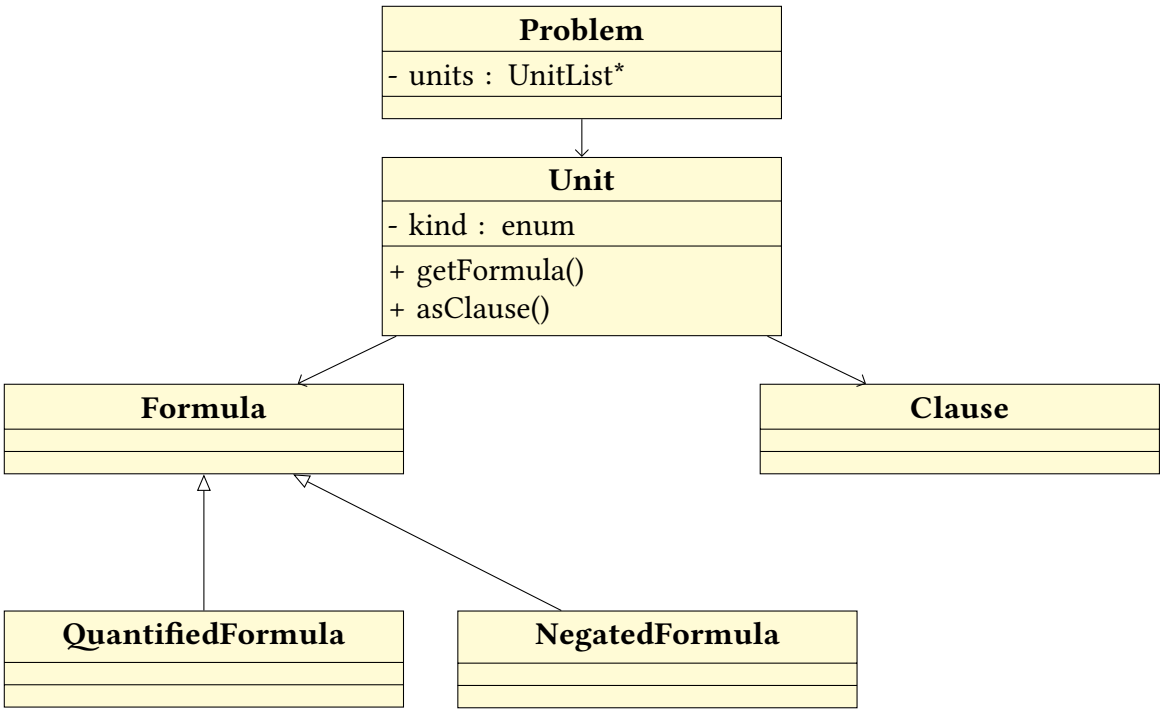


Figura 1.1: Relazioni tra le classi per definire un problema

1.1.2 Preprocessor

Il preprocessor è un modulo che processa il problema in modo che sia trattabile dal *kernel* in fase di risoluzione. Per questo modulo è possibile abilitare numerose opzioni, inoltre vengono eseguite semplificazioni in modo da rendere il sistema il più veloce possibile. Di seguito sono descritti solo i passaggi fondamentali del *preprocessing* [4]:

I step *Rectify*: Il *preprocessor* verifica se una formula ha variabili libere. Se la formula è aperta, allora genera dei quantificatori per vincolare le variabili libere. Inoltre, verifica che per ogni variabile x ci sia una sola occorrenza di $\exists x$ o $\forall x$.

II step *Simplify*: Il *preprocessor* verifica se una formula contiene $\top$ o $\bot$. Nel caso la formula contenesse uno dei due, allora viene semplificata.

III step *Flatten*: Il *preprocessor* trasforma le formule in modo da renderle uniformi. Questo è solo uno step di formattazione che verrà eseguito più volte nel corso del preprocessing.

IV step *Unused definitions and pure predicate removal*: Il *preprocessor* rimuove i predicati e le definizioni delle funzioni che non vengono usati.

V step *ENNF*: Il *preprocessor* trasforma le formula in *extended negative normal form.*

Definizione 1. Una formula è in *extended negation normal form* se non contiene $\rightarrow$, e tutte le $\neg$ sono spostate, il più possibile, verso l'interno.

VI step *Naming*: Il *preprocessor* definisce un nuovo predicato p che viene usato come nome di una sotto-formula. Questa tecnica viene utilizzata per evitare di generare un numero esponenziale di clausole nei prossimi passaggi di preprocessing.

Definizione 2. Sia $\varphi|_\pi$ sotto-formula di φ in posizione π con variabili libere $\bar{x}$, allora si sostituisce $\varphi|_\pi$ con $p(\bar{x})$ nuovo predicato e viene aggiunta la definizione $\text{def}(\varphi, \pi, p)$ tale che

$$\text{def}(\varphi, \pi, p) = \begin{cases} \forall \bar{x}(p(\bar{x}) \rightarrow \varphi|_\pi) & \text{se pol}(\varphi, \pi) = 1 \\ \forall \bar{x}(\varphi|_\pi \rightarrow p(\bar{x})) & \text{se pol}(\varphi, \pi) = -1 \\ \forall \bar{x}(p(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi|_\pi) & \text{se pol}(\varphi, \pi) = 0 \end{cases}$$

in cui $\text{pol}(\varphi, \pi)$ indica la polarità della sotto-formula di φ in posizione π. $\text{pol}(\varphi, \pi) = 0$ si verifica quando il simbolo di livello superiore di $\varphi|_\pi$ è $\leftrightarrow$ o $\otimes$.

Questa tecnica viene adottata solo se il numero di clausole generate supera una certa soglia. Infatti, in Vampire, nella classe `Naming`, è presente un attributo *threshold* che indica proprio questo limite.

VII step *NNF*: Il *preprocessor* trasforma le formule in *negation normal form*.

Definizione 3. Una formula è in *negation normal form* se non contiene $\rightarrow, \leftrightarrow, \otimes$, e tutte le $\neg$ sono spostate, il più possibile, verso l'interno.

VIII step *Skolemization*: Il *preprocessor* applica questa tecnica per eliminare i $\exists$ dalle formule.

Definizione 4. Sia $F = \exists x \mid \varphi(y_1, \ldots, y_n, x)$ formula in negation normal form allora la *skolemization* si ottiene tramite la seguente sostituzione:

$$F = \exists x \mid \varphi(y_1, \ldots, y_n, x) \Rightarrow F' = \varphi(y_1, \ldots, y_n, x)\{x \mapsto sk(y_1, \ldots, y_n)\}$$

in cui $\{x \mapsto sk(y_1, \ldots, y_n)\}$ indica che x, la variabile precedentemente vincolata dal quantificatore esistenziale nella formula F, è sostituita da una nuova funzione $sk(y_1, \ldots, y_n)$, detta di Skolem, nella formula F'.

IX step *Clausification*: Il *preprocessor* trasforma tutte le formule in modo da ottenere un insieme di clausole.

Definizione 5. La *clausification* è il risultato di:

1. $\forall x \mid \varphi(y_1, \ldots, y_n, x) \Rightarrow \varphi(y_1, \ldots, y_n, x)\{x \mapsto X\}$ in cui X è una variabile designata che non occorre in φ
2. Se una formula $F = \varphi' \wedge \varphi''$ allora viene spezzata in due unità diverse $F' = \varphi'$ e $F'' = \varphi''$

Alla fine di questi step, l'insieme di clausole risultanti è pronto per essere passato all'algoritmo di *resolution*.

1.1.3 Kernel

Il *kernel* è il sotto-sistema adibito alla risoluzione del problema. Per raggiungere questo obiettivo, viene implementato un algoritmo di saturazione che permette di trovare una confutazione all'insieme di clausole. É possibile trovare la confutazione all'insieme tramite la sua saturazione con tutte le inferenze presenti nel calcolo. Vampire possiede numerose inferenze ma è possibile sceglierne un sottoinsieme e definire un sistema d'inferenze per la logica del primo ordine.

Formalmente, per definire un sistema d'inferenze bisogna prima definire un *simplification ordering* e una funzione di selezione [1, 2].

Definizione 6. Un ordinamento $\succ$ sui termini è detto *simplification ordering* se rispetta le seguenti condizioni:

1. $\succ$ è *ben formato* ovvero non esiste una sequenza infinita $t_0, t_1, \ldots$ tale che $t_0 \succ t_1 \succ \ldots$
2. $\succ$ è *monotona* ovvero $l \succ r \rightarrow s(l) \succ s(r)$ per tutti i termini s, l, r
3. $\succ$ è *stabile* per la sostituzione ovvero $l \succ r \rightarrow l\theta \succ r\theta$
4. $\succ$ ha la *subterm property* ovvero se r è sottotermine di l e $l \neq r$ allora $l \succ r$

Questa definizione è estendibile agli atomi, ai letterali e alle clausole.

Definizione 7. Una funzione di selezione sceglie un sottoinsieme non vuoto di letterali in ogni clausola non vuota. In $\underline{L} \vee R$, $\underline{\mathrm{L}}$ indica il letterale selezionato.

Il sistema di inferenze che viene definito di seguito è detto *superposition inference system.*

Definizione 8. Il *superposition inference system* è un sistema di inferenze composto dalle seguenti regole:

- **Resolution**

$$\frac{\underline{A} \vee C_1 \quad \underline{\neg A'} \vee C_2}{(C_1 \vee C_2)\theta} \tag{1.1}$$

  in cui θ è l'unificatore più generale di A e A'.

- **Factoring**

$$\frac{\underline{A} \vee \underline{A'} \vee C}{(A \vee C)\theta} \tag{1.2}$$

  in cui θ è l'unificatore più generale di A e A'.

- **Superposition**

$$\frac{\underline{l = r} \vee C_1 \quad \underline{L[s]} \vee C_2}{(L[r] \vee C_1 \vee C_2)\theta} \qquad \frac{\underline{l = r} \vee C_1 \quad \underline{t[s] = t'} \vee C_2}{(t[r] = t' \vee C_1 \vee C_2)\theta} \qquad \frac{\underline{l = r} \vee C_1 \quad \underline{t[s] \neq t'} \vee C_2}{(t[r] \neq t' \vee C_1 \vee C_2)\theta} \tag{1.3}$$

  in cui θ è l'unificatore più generale di l e s, s non è una variabile, $r\theta \prec l\theta$, solo nella prima regola $L[s]$ non è un *equality literal*[1],

- **Equality resolution**

$$\frac{\underline{s \neq t} \vee C}{C\theta} \tag{1.4}$$

  in cui θ è l'unificatore più generale di s e t.

- **Equality factoring**

$$\frac{\underline{s = t} \vee \underline{s' = t'} \vee C}{(s = t \vee t \neq t' \vee C)\theta} \tag{1.5}$$

  in cui θ è l'unificatore più generale di s e t, $t\theta \prec s\theta$ e $t'\theta \prec t\theta$.

Se la funzione di selezione, seleziona sia letterali negativi sia tutti i letterali massimali, allora è possibile enunciare la seguente proprietà:

Proprietà 1. *Il superposition inference system è sound e completo.*

Una volta definito un sistema di inferenze, è possibile formalizzare il concetto di saturazione espresso precedentemente.

Definizione 9. Un insieme di clausole S è detto saturato rispetto al sistema di inferenze ϕ se, per ogni inferenza in ϕ con le premesse in S, la conclusione dell'inferenza appartiene sempre a S.

Grazie alla proprietà 1, si ottiene quest'altra importante proprietà:

Proprietà 2. *Un insieme di clausole è* ***insoddisfacibile*** *se, e solo se, il più piccolo insieme di clausole contenente S, saturato rispetto al superposition inference system, contiene anche la clausola vuota* $\square$.

Inoltre, un algoritmo di saturazione deve essere *fair*, cioè ogni possibile inferenza deve essere selezionata in un certo momento dell'algoritmo.

Per rendere efficiente l'algoritmo di saturazione, oltre queste regole, vengono introdotte regole di semplificazione per eliminare ridondanze e semplificare le inferenze. Alcune di queste regole sono: *demodulation*, *branch demodulation* e *subsumption resolution*.

In generale, un algoritmo di saturazione è composto dalle seguenti fasi:

[1] Un *equality literal* è una clausola con un singolo letterale in cui è presente un =

1. Viene inizializzato un insieme S in cui vengono memorizzate le clausole
2. Viene selezionata un'inferenza che può essere applicata a delle clausole presenti in S
3. Nel caso fosse generato un risultato, allora viene aggiunto a S
4. Se viene trovata una clausola vuota $\square$, allora il problema è insoddisfacibile

Se un'inferenza genera una clausola, allora è detta generatrice. Le inferenze generatrici sono strettamente collegate alle regole di semplificazioni.

Vampire implementa tre tipi di algoritmi di saturazione: *limited resource strategy*(lrs), *otter* e *discount*. Tutti fanno parte della famiglia dei *given clause algorithm*. Lo pseudo codice riportato in algoritmo 1 è semplificato ma descrive, ad alto livello, come sono strutturati gli algoritmi appartenenti a questa famiglia.

Algoritmo 1 Given clause algorithm

```
var active,passive : sets of clause
var current,new : clause
active = ∅
passive = set of input clauses
while passive ≠ ∅ do
    current = select(passive)
    passive = passive \ {current}
    active = active ∪ {current}
    new = infer(current,active)
    if new is □ then
        return provable
    end if
    passive = passive ∪ {new}
end while
return unprovable
```

Vengono definiti due insiemi di clausole: *passive* e *active*. L'insieme *passive* contiene quelle clausole che attendono il passaggio all'insieme *active* e possono solo essere semplificate. L'insieme *active* contiene quelle clausole che sono attive e sono pronte per la generazione delle inferenze. Per passare da passiva ad attiva, una clausola deve essere scelta dalla funzione *select()*, che assicura l'algoritmo di soddisfare il requisito di *fairness*. Questa selezione è effettuata dal *kernel* seguendo due parametri: età e peso della clausola. Per implementarla, vengono definite due code di priorità per i rispettivi parametri: nella prima hanno priorità maggiore le clausole più "vecchie", mentre, nella seconda, le clausole più "leggere". Una volta generata tramite l'inferenza sulla clausola selezionata e *active*, la nuova clausola *new* viene aggiunta a *passive* solo se $new \neq \square$.

***Otter*:** L'algoritmo *otter*, rispetto all'algoritmo 1, aggiunge alcune semplificazioni in modo da ridurre il numero di clausole.

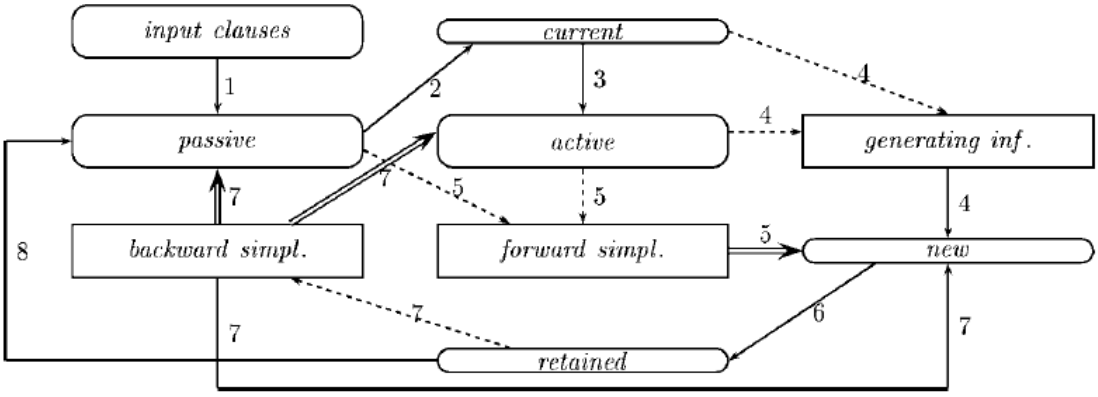


Figura 1.2: Algoritmo otter [2]

In aggiunta all'algoritmo precedente, ci sono:

- *forward simplification*: un'operazione che cerca di semplificare la clausola *new* coinvolgendo anche le clausole negli insiemi *active* e *passive*.
- *retained*: un insieme in cui passa la clausola *new* dopo la *forward simplification*. Su questa clausola viene effettuato un *retention test* e, tramite alcuni criteri (p.e. peso della clausola ovvero grandezza) e l'applicazione di *deletion rules*, viene deciso se la clausola è scartabile o no.
- *backward simplification*: un'operazione eseguita dopo che la clausola ha superato il *retention test*. In questo caso, al contrario della *forward simplification*, si cerca di semplificare gli insiemi *active* e *passive* tramite la clausola generata.

***Limited resource strategy*:** L'algoritmo *lrs* è una variante di *otter* poiché, aggiungendo un limite di tempo, cerca di identificare quali clausole nell'insieme *passive* non hanno possibilità di essere selezionate e le scarta.

***Discount*:** L'algoritmo *discount* non usa l'insieme *passive* per effettuare semplificazioni. Questa scelta è dettata dalla cardinalità di *passive* in quanto è molto maggiore di *active*, quindi la velocità di inferenza potrebbe rallentare significativamente a causa delle semplificazioni sull'insieme *passive*.

Il *kernel* è costituito da molte parti, le principali sono:

- il *main loop*
- il *generating inference engine*
- il *simplifying inference engine*

- uno *splitter*

Sono definite a corredo numerose strutture dati, come indici e buffer, per gestire le sostituzioni, le unificazioni, ...

Main loop: Contiene il vero e proprio algoritmo per la risoluzione del problema.

Generating inference engine: É il cuore delle *generating inferences*, in quanto funge da database per queste inferenze ed è responsabile del loro utilizzo.

Simplifying inference engine: É simile al precedente ma gestisce le inferenze che permettono le semplificazioni.

Splitter: É un componente che interviene sulle clausole generate, che passano il *retention test*, se sono *splittable* ovvero

Definizione 10. Siano $C_1, \dots C_n$ clausole, con $n \geq 2$, definite su insiemi disgiunti di variabili, $F = C_1 \vee \dots \vee C_n$ è detta *splittable* poiché è possibile dividerla in n componenti $F_1 = C_1, \dots, F_n = C_n$.

Per rendere più efficiente questa operazione, lo *splitter* collabora con un SAT solver (Minisat o Z3). Questa architettura è definita AVATAR [5].

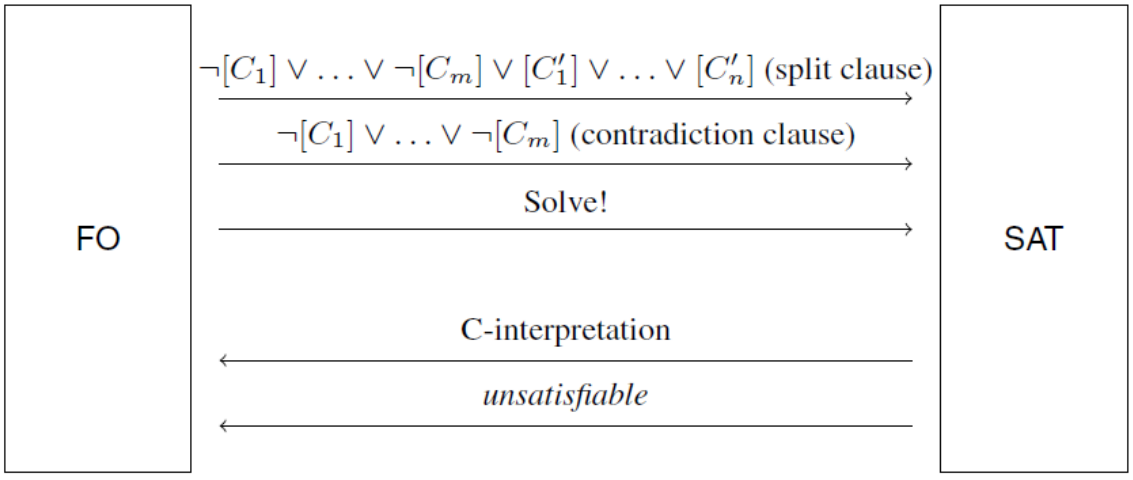


Figura 1.3: Collaborazione tra Vampire (FO) e SAT solver [5]

Il *main loop*, prima di essere avviato, viene configurato tramite la scelta del tipo di algoritmo di saturazione da usare (lrs, otter o discount). Vengono inizializzati un *generating inference engine* e un *simplifying inference engine*, che vengono popolati rispettivamente con delle *generating inferences* e delle *simplifying inferences*. Successivamente questi due *engines* vengono collegati all'algoritmo di saturazione. A questo punto, il *main loop* è configurato correttamente e può essere avviato. Nella figure sottostanti 1.4, 1.5 e 1.6,

vengono presentate le relazioni tra le classi principali del kernel e le relazioni tra le classi dell'*inference engine*.

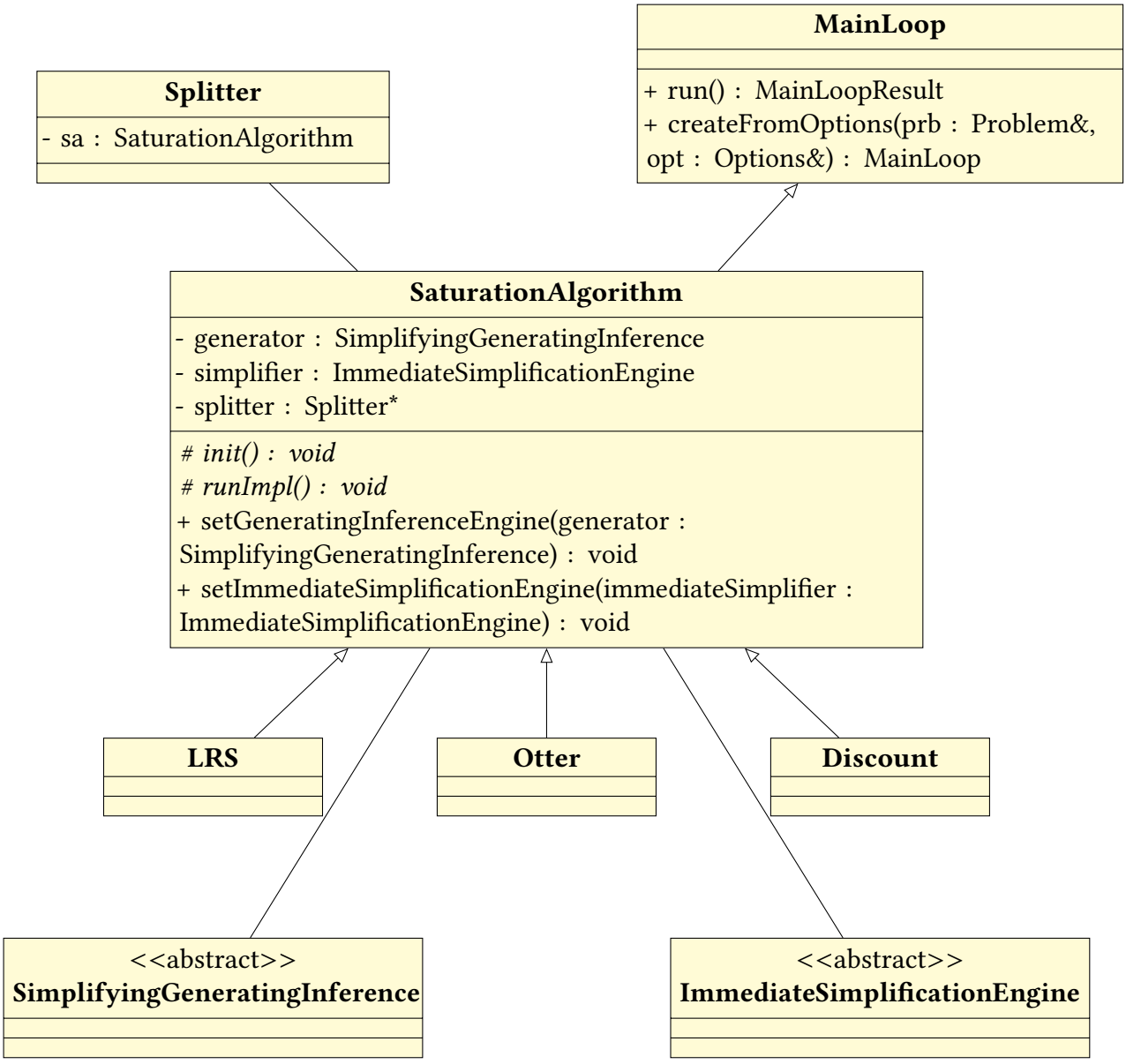


Figura 1.4: Relazioni tra le classi principali del *kernel*

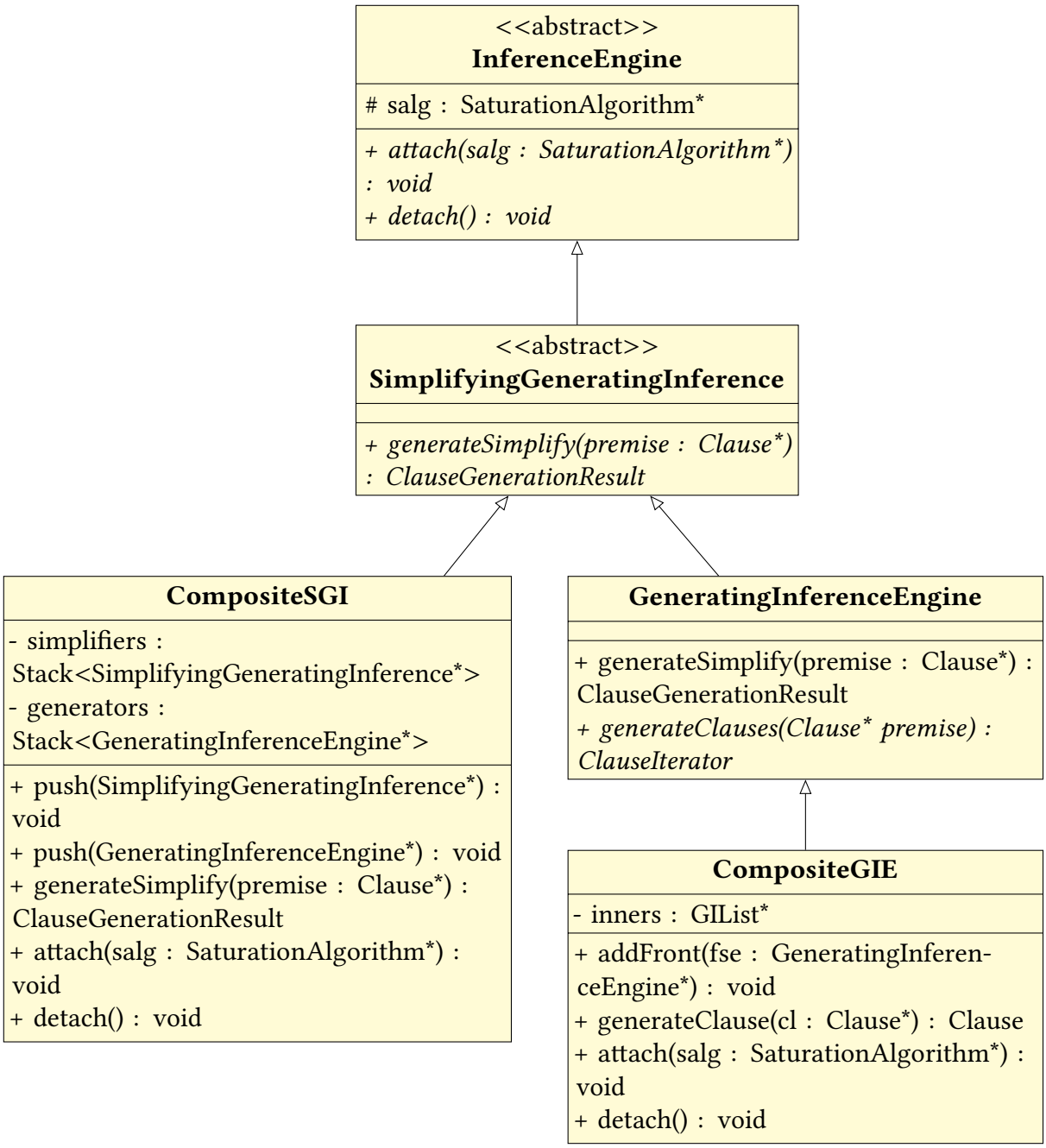


Figura 1.5: Relazioni tra le classi dell'*inference engine* per le *generating inferences*

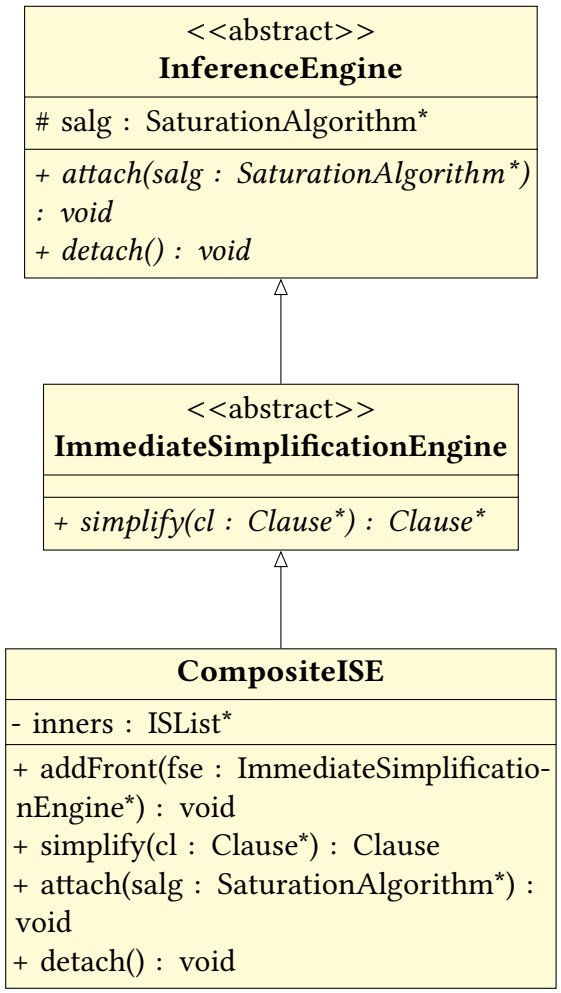


Figura 1.6: Relazioni tra le classi dell'*inference engine* per le *simplifying inferences*

Si noti che tutte le *generating inferences* (resolution, superposition) ereditano la classe `GeneratingInferenceEngine`, così come tutte le *simplifying inferences* ereditano la classe `ImmediateSimplificationEngine`.

Nella fase di configurazione del *main loop*, viene inizializzato un `CompositeGIE` in cui vengono memorizzate tutte le inferenze tramite la funzione `addFront()` nella lista *inners*. Una volta aggiunte tutte le regole di inferenza, viene inizializzato un `CompositeSGI` che memorizza il `CompositeGIE` nello stack *generators* e altre regole di semplificazione nello stack *simplifiers*. Nello stesso modo viene inizializzato un `CompositeISE`. Alla fine, al `SaturationAlgorithm` viene assegnato un generatore (ovvero il `CompositeGIE`) tramite la funzione `setGeneratingInferenceEngine()` e un `ImmediateSimplificationEngine` tramite la funzione apposita.

Esempio 1. Di seguito viene riportato un algoritmo riassuntivo, definendo un algoritmo di saturazione di tipo *otter* con un *superposition inference system* come visto nella definizione 8:

Algoritmo 2 Esempio semplificato di configurazione di un algoritmo di saturazione in VAMPIRE

```
var salg : SaturationAlgorithm
var gie : CompositeGIE
var sgi : CompositeSGI
function createFromOptions
    salg = Otter
    gie.addFront(Resolution)
    gie.addFront(Factoring)
    gie.addFront(Superposition)
    gie.addFront(EqualityResolution)
    gie.addFront(EqualityFactoring)
    sgi.push(gie)
    salg.setGeneratingInferenceEngine(sgi)
    salg.setImmediateSimplificationEngine(createISE())
    return salg
end function
```

La trattazione è stata limitata a una semplificazione di VAMPIRE, al fine di fornire una base per la comprensione dei concetti che verranno affrontati nei capitoli successivi.

1.2 Frammento Guarded

Il frammento *guarded* è un frammento della logica del primo ordine introdotto da Hajnal Andréka, István Nèmeti e Johan van Benthem. É stato provato che questo frammento (con uguaglianza e non) è decidibile in 2-EXPTIME [6].

L'implementazione della procedura di decisione in questa tesi riguarda il frammento *guarded* senza uguaglianza [3].

Definizione 11. Il frammento *guarded* è ricorsivamente definito come i seguenti sottoinsiemi di logica del primo ordine senza uguaglianza e simboli di funzione:

1. $\top, \bot \in \text{GF}$.
2. Se a è una formula atomica, allora $a \in \text{GF}$.
3. GF è chiuso rispetto a $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
4. Sia $A \in \text{GF}$, a formula atomica tale che ogni variabile libera di A occorra almeno una volta negli argomenti di a. Allora
   - $\forall \bar{x}(a \rightarrow A) \in \text{GF}$,
   - $\exists \bar{x}(a \wedge A) \in \text{GF}$,
   - $\forall \bar{x}(a \vee A) \in \text{GF}$ (negazione della precedente)

   con la formula atomica a definita **guardia**.

Dopo aver delineato quando una formula del primo ordine appartiene al frammento *guarded*, di seguito viene definito quando una clausola è *guarded*.

Definizione 12. Una clausola c è *guarded* se soddisfa le seguenti condizioni:

1. Ogni termine funzionale non *ground* in c contiene tutte le variabili di c.
2. Se c è non ground allora c'è un letterale negativo $\neg A$ in c che contiene tutte le variabili di c ma non contiene termini funzionali non *ground*.

   Il letterale negativo $\neg A$ è definito **guardia**.

Se la clausola c è *ground*, allora è *guarded*.

Definizione 13. Una insieme formato da clausole *guarded* è anch'esso *guarded*

1.2.1 Preprocessing

Come menzionato nel precedente capitolo 1.1.2, il problema viene pre-processato per ottenere un insieme di clausole da sottomettere all'algoritmo di risoluzione. Le operazioni di *preprocessing* sono le seguenti:

1. *Negation normal form*
2. $Struct_\forall$
3. *Skolemization*
4. *Clausification*

L'unica operazione non ancora definita è $Struct_\forall$.

Definizione 14. $Struct_\forall$ è una trasformazione strutturale che è ottenuta da:

1. la sostituzione delle sotto-formule $\forall\bar{x}(a \rightarrow A)$, $\forall\bar{x}(a \vee A)$ che hanno $\bar{y}$ variabili libere, con un nuovo nome $\alpha(\bar{y})$
2. l'aggiunta della formula $\forall\bar{x}\bar{y}(\neg a \vee \neg\alpha \vee A)$

Queste operazioni, oltre a generare un insieme di clausole, preservano l'appartenenza delle formule al frammento *guarded*.

Teorema 1. *Sia $F \in GF$ allora*

1. *$F' = NNF(F) \in GF$,*
2. *$F'' = \mathrm{Struct}_\forall(F') \in GF$,*
3. *applicando skolemization e clausification a F'' si ottiene un insieme di clausole guarded.*

Il teorema è dimostrato nello studio di De Nivelle e De Rijke in [3].

1.2.2 Resolution

La procedure di decisione per il frammento *guarded* necessita della definizione di una nuova regola di risoluzione. Prima di definire tale regola, è necessario stabilire un ordinamento sui termini/letterali e dei parametri secondo cui ordinare.

Definizione 15. La *Vardepth* di un termine/atomo A è definita ricorsivamente come segue:

$$Vardepth(A) = \begin{cases} -1 & \text{se } A \text{ è ground} \\ 0 & \text{se } A \text{ è una variabile} \\ \max\{1 + Vardepth(t_1), \ldots, 1 + Vardepth(t_n)\} & \text{se } A = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Definizione 16. La *Vardepth* di un letterale equivale alla *Vardepth* di un atomo.

Definizione 17. La *Vardepth* di una clausola c equivale alla *Vardepth* massimale di un letterale in c.

Definizione 18. Sia A atomo, letterale o clausola, allora $Var(A)$ è definito come l'insieme delle variabili che occorrono in A.

Una volta definiti questi due parametri *Vardepth* e *Var*, è possibile definire l'ordinamento.

Definizione 19. Definiamo l'ordinamento $\prec$ sui letterali A, B come segue:

$$A \prec B \quad \text{se} \quad (Vardepth(A) < Vardepth(B)) \vee (Var(A) \subset Var(B))$$

Ora è possibile introdurre la nuova regola di risoluzione definita *ordered resolution rule*.

Definizione 20. Sia $\prec$ ordinamento sui letterali, $\{A_1\} \cup R_1$ e $\{\neg A_2\} \cup R_2$ clausole allora se:

1. $\{A_1\} \cup R_1$ e $\{\neg A_2\} \cup R_2$ non hanno variabili in comune,
2. A_1 deve essere massimale in R_1 ovvero $\nexists A \in R_1 : (A_1 \prec A)$,
3. A_2 deve essere massimale in R_2 ovvero $\nexists A \in R_2 : (A_2 \prec A)$,
4. A_1 e A_2 hanno un unificatore più generale (*mgu*) θ,

allora $R_1\theta \cup R_2\theta$ è chiamato $\prec$-*ordered resolvent* di $\{A_1\} \cup R_1$ e $\{\neg A_2\} \cup R_2$.

$$\frac{\{\underline{A_1}\} \vee R_1 \quad \{\underline{\neg A_2}\} \vee R_2}{(R_1 \vee R_2)\theta} \tag{1.6}$$

Questa regola è una *resolution rule* (1.1) ristretta da un'ordinamento $\prec$. É possibile definire anche una *factorization rule* (8) ristretta.

Definizione 21. Sia $\prec$ ordinamento sui letterali, $\{A_1, A_2\} \cup R$ clausola allora se:

1. A_1 deve essere massimale in R ovvero $\nexists A \in R : (A_1 \prec A)$,
2. A_1 e A_2 hanno un unificatore più generale (*mgu*) θ,

allora $\{A_1\theta\} \cup R\theta$ è chiamato $\prec$-*ordered factor* di $\{A_1, A_2\} \cup R$.

$$\frac{\{\underline{A_1} \vee \underline{A_2}\} \vee R}{(A_1 \vee R)\theta} \tag{1.7}$$

Nell'algoritmo di risoluzione è necessaria una *resolution rule* ristretta dall'ordinamento $\prec$ poiché preserva la proprietà degli $\prec$-*ordered resolvent* di essere *guarded*. Invece la *factorization rule* **preserva la proprietà delle clausole di essere *guarded* anche senza applicare una restrizione**. Tutto questo viene provato dal seguente teorema per la cui dimostrazione si rimanda a [3]:

Teorema 2. *1. Se c_1 e c_2 sono clausole* guarded *allora c* $\prec$-ordered resolvent *di c_1 e c_2 è* guarded

2. Se c_1 è una clausola guarded *allora c* factor *di c_1 è* guarded

Un algoritmo di risoluzione, per essere definito procedura di decisione, deve terminare ed essere completo.

L'algoritmo con la $\prec$-*ordered resolution rule* e la *factorization rule* termina perché, grazie alla restrizione sulla *resolution rule*, è possibile derivare solo un insieme finito di clausole da un insieme finito di clausole *guarded*.

Lemma 1. *Sia C un insieme finito di clausole* guarded. *Se $\bar{C}$ è l'insieme generato da C tramite la* $\prec$-ordered resolution rule *e la* factorization rule*, allora $\bar{C}$ ha dimensione finita.*

La dimostrazione di questo lemma è possibile poiché il numero di variabili e la *Vardepth* sono limitati superiormente [3].

Definizione 22. Un algoritmo di risoluzione è completo per una logica se riesce a risolvere ogni problema appartenente a quella logica.

Nello studio di De Nivelle e De Rijke è presentata la dimostrazione della completezza per la procedura di decisione [3].

2. Implementazione della procedura

Come descritto nel precedente capitolo, la procedura di decisione per problemi appartenenti al frammento *guarded* è formata da una fase di *preprocessing* e una fase di risoluzione tramite $\prec$-*ordered resolution* e *factorization*.

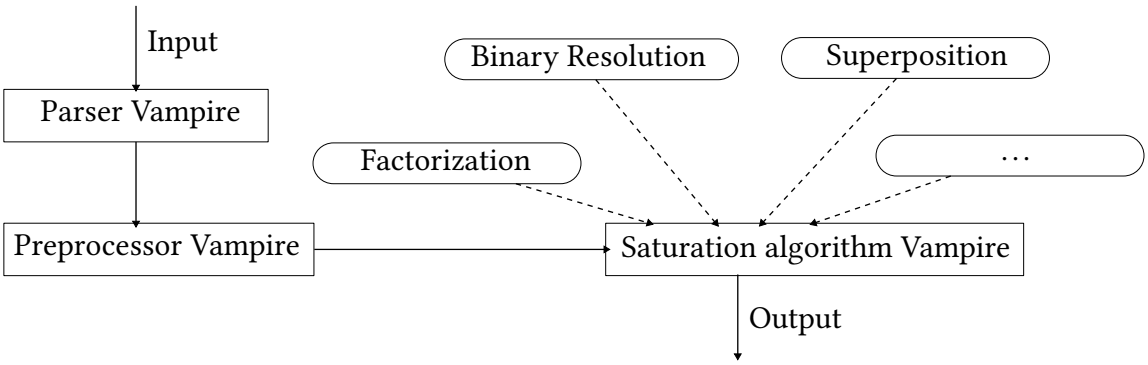


Figura 2.1: Struttura di Vampire prima delle modifiche

L'idea per l'implementazione della procedura è:

1. costruire un nuovo *preprocessor* che trasformi le formule *guarded* in clausole e sostituirlo nel sistema
2. implementare una nuova inferenza ($\prec$-*ordered resolution*) e "iniettarla" nell'algoritmo di saturazione
3. eliminare tutte le inferenze non necessarie dall'algoritmo di saturazione

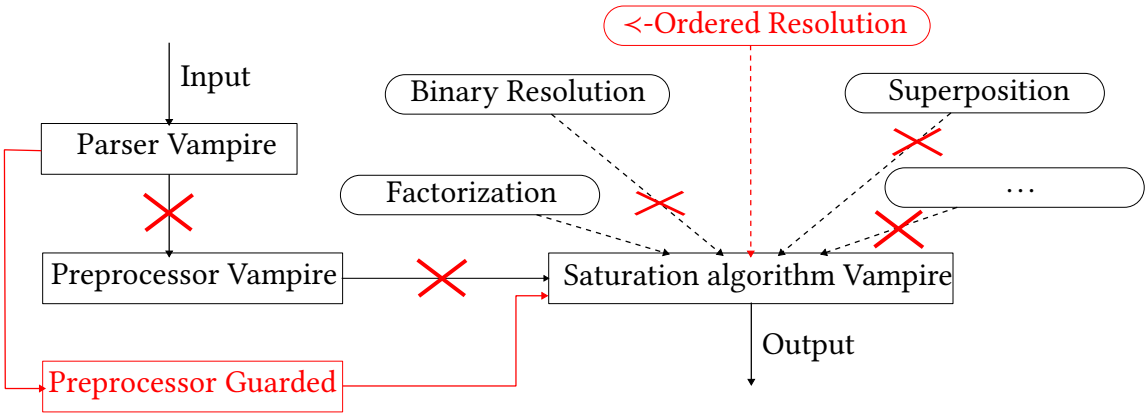


Figura 2.2: Struttura di VAMPIRE dopo le modifiche

2.1 Preprocessing

Per quanto riguarda la fase di *preprocessing*, è stato sviluppato un *preprocessor* per trattare problemi appartenenti al frammento *guarded*. Questa componente è stata implementata seguendo l'architettura del *preprocessor* predefinito di VAMPIRE.

Algoritmo 3 Preprocessing

```
var problem : sets of guarded formula
var result : sets of guarded clause
problem = NNF(problem)
problem = flatten(problem)
problem =Struct∀(problem)
problem = skolemize(problem)
result = clausify(problem)
computeVarDepth(result)
return result
```

NNF, flatten, skolemize e *clausify* (descritte in 1.1.2) sono le funzioni di VAMPIRE che vengono sfruttate per la trasformazione del problema. Invece le funzioni $Struct_{\forall}$ e *computeVarDepth* vengono implementate ex-novo in quanto non presenti nel sistema.

$Struct_{\forall}$ è una funzione ricorsiva che sfrutta la struttura ad albero delle formule.

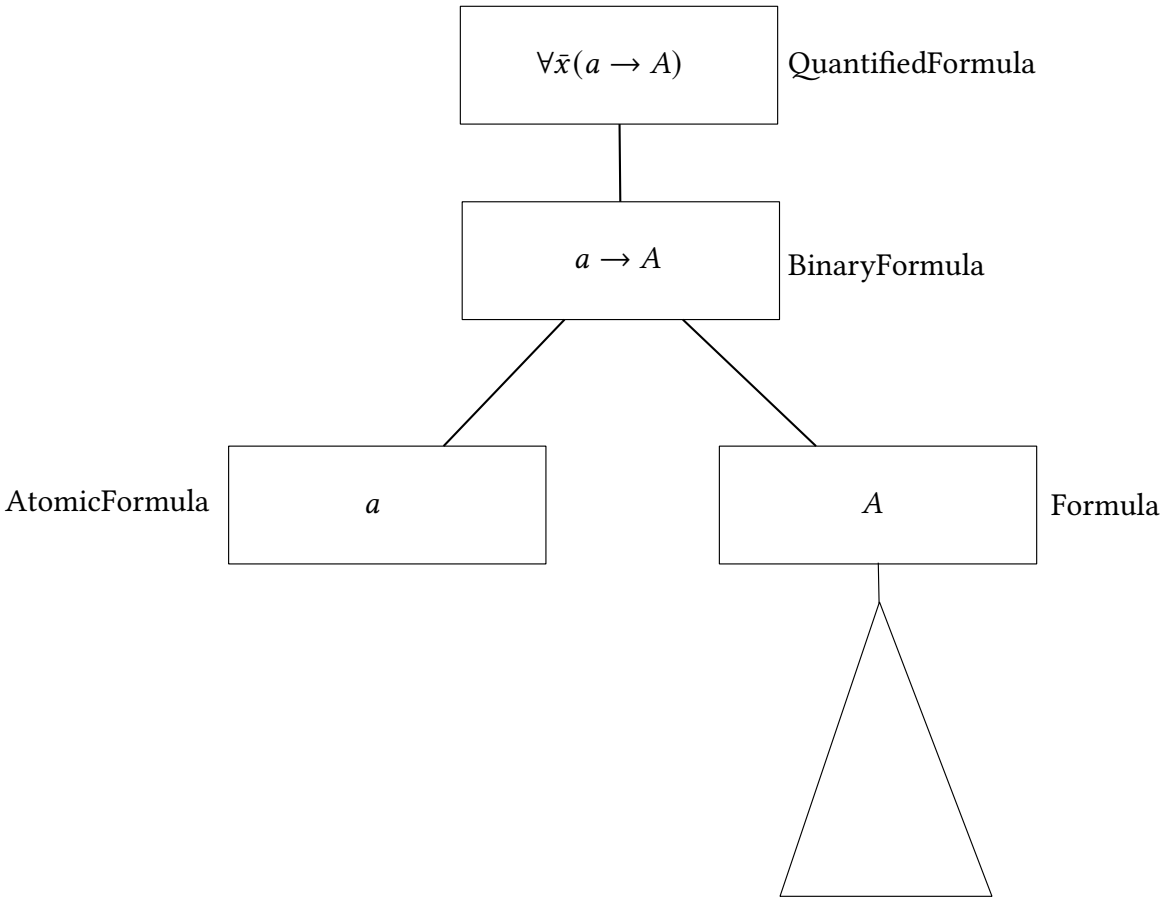


Figura 2.3: Struttura ad albero della formula

L'intero albero sintattico della formula viene visitato tramite una visita post-order. Durante la visita, l'algoritmo controlla se nell'intero albero sono presenti formule del tipo $\forall \bar{x}(a \vee A)$ con almeno una variabile libera. Nel caso venga trovata una formula in questa forma, viene applicata la trasformazione strutturale $Struct_{\forall}$.

Algoritmo 4 Visita post-order

```
function PostOrderVisit(input : formula)
    case connective of input
        switch ⊤, ⊥, Literal do
            return input
        switch ¬, ∃ do
            return PostOrderVisit(subformula of input)
        switch →, ↔ do
            var left, right : formula
            left = PostOrderVisit(left subformula of input)
            right = PostOrderVisit(right subformula of input)
            return input
        switch ∧, ∨ do
            for all subformula in input do
                subformula = PostOrderVisit(subformula)
            end for
            return input
        switch ∀ do
            var subformula : formula
            subformula = PostOrderVisit(subformula of input)
            if (connective of subformula is ∨) ∧ (hasFreeVar(input)) then
                input=Struct∀(input)
            end if
            return input
end function
```

Per l'implementazione della trasformazione strutturale, si segue la definizione 14.

Algoritmo 5 $Struct_{\forall}$

```
function Struct∀(input : formula)
    var new, α : formula
    var ȳ : sets of free variables
    ȳ = saveFreeVariable(input)
    α = createNewLiteral(ȳ)
    new = generateNewFormula(alpha,input)
    addFormulaToUnits(new)
    input = α
    return input
end function
```

In primis viene creato un nuovo letterale/formula atomica α con le variabili libere $\bar{y}$ tramite la funzione *createNewLiteral*() e, subito dopo, la formula in input viene sostituita da α. Successivamente viene generata una nuova formula del tipo $\forall \bar{x}\bar{y}(\neg a \vee \neg\alpha \vee A)$ tramite la funzione *generateNewFormula*() e viene aggiunta al problema con la funzione *addFormulaToUnits*().

La funzione *computeVarDepth*() calcola il parametro *VarDepth* (definizione 15) di ogni letterale presente nelle clausole risultanti. Per salvare il risultato è stata modificata la classe `Literal` ed è stato aggiunto un attributo privato *varDepth*. La visita dei termini per il calcolo della *VarDepth* è stato semplificato grazie a un iteratore già implementato in Vampire. *computeVarDepth*() è diviso in due componenti:

1. la prima funzione scorre i termini più esterni del letterale (termini rossi nella figura 2.4) tramite un `SubtermIterator`
2. la seconda funzione va in profondità e scorre i sottotermini (termini verdi nella figura 2.4) tramite un altro `SubtermIterator`

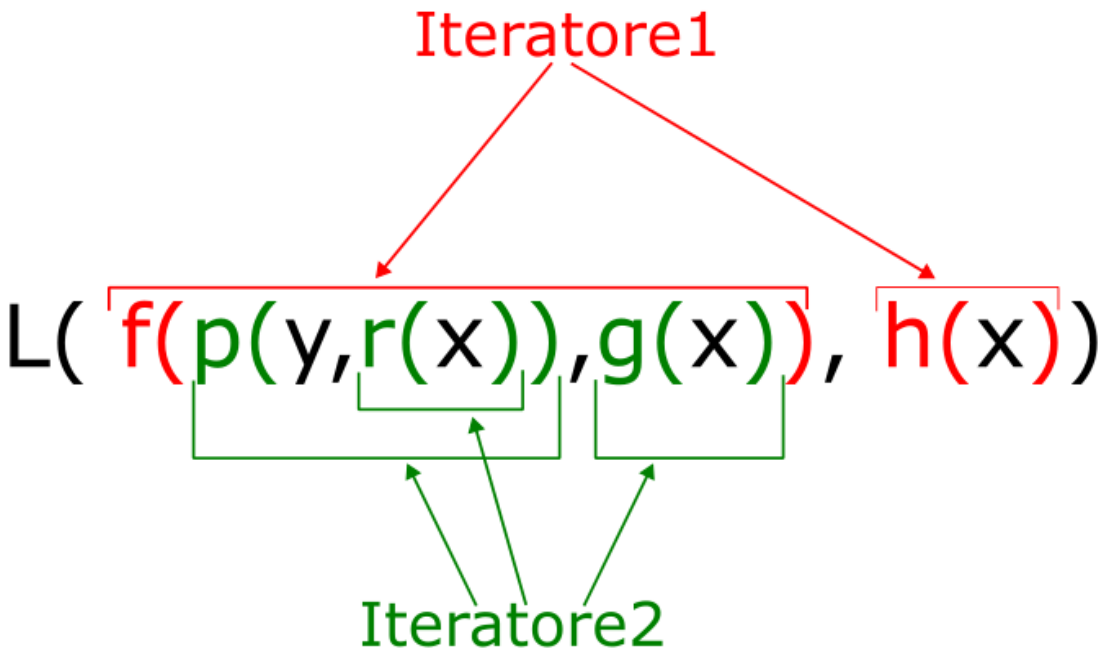


Figura 2.4: Uso degli iteratori per il calcolo della *VarDepth*

In questo caso la prima funzione è iterativa, mentre la seconda è ricorsiva per sfruttare la struttura del letterale.

Algoritmo 6 Prima funzione che scorre i termini esterni del letterale

```
function ComputeVarDepth1(lit : literal)
    if literal is ground then
        setLiteralVarDepth(-1, lit)
        return
    end if
    var max, varDepth : int
    max = 0
    for all term in lit do                    ▷ Iteratore1 qui scorre i termini esterni
        varDepth = 0
        varDepth = 1 + ComputeVarDepth2(term)
        if max < varDepth then
            max = varDepth
        end if
    end for
    setLiteralVarDepth(max, lit)
end function
```

Se il letterale è *ground*[1], la *VarDepth* di *lit* viene impostata a -1 tramite la funzione *setLiteralVarDepth()*. Nel caso non sia *ground*, allora viene calcolata la massima profondità di ciascun termine esterno tramite la seconda funzione ComputeVarDepth2(). Alla fine il risultato sarà la massima profondità calcolata tra tutti i termini.

Algoritmo 7 Seconda funzione che scorre i sottotermini in profondità

```
function ComputeVarDepth1(term : term of literal)
    var max, varDepth : int
    max = 0
    for all subterm in term do                ▷ Iteratore2 qui scorre i sottotermini
        varDepth = 0
        varDepth = 1 + ComputeVarDepth2(subterm)        ▷ Visita in profondità
        if max < varDepth then
            max = varDepth
        end if
    end for
    return max
end function
```

[1]Un letterale è detto *ground* se è privo di variabili

2.2 Resolution

La nuova inferenza implementata, denominata $\prec$-*ordered resolution*, eredita la classe `GeneratingInferenceEngine` (figura 1.5), in modo da avere a disposizione tutti i metodi necessari per essere inserita nell'algoritmo di saturazione e generare nuove clausole. La funzione principale di questa classe è *generateClause*() che sfrutta le varie strutture dati messe a disposizione da Vampire.

Il metodo viene eseguito dopo la selezione di una clausola e la conseguente attivazione. La struttura dati fondamentale è l'indice che tiene traccia di tutte le clausole e permette di trovarne una da unificare con quella selezionata. Sia $\{A_1\} \cup R_1$ clausola selezionata, allora il risultato della query sull'indice viene salvato in un altra struttura dati che comprende:

- una clausola $\{\neg A_2\} \cup R_2$ candidata a unificare con la clausola selezionata
- un letterale $\{\neg A_2\}$ candidato all'unificazione con uno dei letterali della clausola selezionata (in questo caso $\{A_1\}$)

Algoritmo 8 Funzione *generateClause*()

```
var selectedLiteral, candidateLiteral : literal
var selectedClause, candidateClause, result : clause
if IsMaximal(selectedLiteral, selectedClause) ∧ IsMaximal(candidateLiteral) then
    result = unify(selectedClause, candidateClause)
    return result
else
    return NULL
end if
```

Sia $\prec$ un ordinamento definito come prescritto dalla definizione 19. La funzione *generateClause*() verifica se il letterale $\{A_1\}$ in $\{A_1\} \cup R_1$ e il letterale $\{\neg A_2\}$ in $\{\neg A_2\} \cup R_2$ sono massimali (secondo l'ordinamento $\prec$) tramite la funzione IsMaximal() . Nel caso siano massimali, allora viene applicata la *resolution* e l'unificazione tramite la funzione *unify*().

$$\frac{\{\underline{A_1}\} \vee R_1 \quad \{\underline{\neg A_2}\} \vee R_2}{(R_1 \vee R_2)\theta}$$

In caso contrario non viene generata alcuna clausola.

Algoritmo 9 Funzione che controlla se un letterale è il massimale in una clausola

```
function IsMaximal(maxLit : literal, cl : clause)
    for all lit in cl do
        varDepth = getVarDepth(lit)
        if (max<varDepth) ∧ (Var(lit)⊈Var(maxLit)) then
            return ⊥
        end if
    end for
    return ⊤
end function
```

Seguendo la definizione 19, la funzione IsMaximal() controlla se un letterale *maxLit* è massimale nella clausola ovvero:

- se la *VarDepth* di *maxLit* è maggiore o uguale di tutte le *VarDepth* degli altri letterali nella clausola, o
- se l'insieme delle variabili di *maxLit* contiene l'insieme delle variabili degli altri letterali nella clausola

La funzione restituisce $\bot$ se entrambe le condizioni non sono rispettate.

2.3 Classificazione

A fini sperimentali, viene implementato un classificatore per riconoscere, tra un insieme di problemi casuali, quali di questi appartengono al frammento *guarded*. Il classificatore viene richiamato dopo il *parser* di Vampire ed è composto da due funzioni principali; una per analizzare le formule arbitrarie della logica del primo ordine e un'altra per analizzare clausole.

La prima funzione sfrutta, come il *preprocessor*, la struttura ad albero della formula ed è dunque ricorsiva.

Algoritmo 10 Visita dell'albero della formula parte 1

```
1:  function VISIT(input : formula)
2:      case connective of input
3:          switch ⊤, ⊥, Literal do
4:              return ⊤
5:          switch ¬ do
6:              return VISIT(subformula of input)
7:          switch →, ↔ do
8:              var left, right : formula
9:              left = VISIT(left subformula of input)
10:             if left = ⊤ then
11:                 return VISIT(right subformula of input)
12:             end if
13:             return ⊥
14:         switch ∧, ∨ do
15:             for all subformula in input do
16:                 subformula = VISIT(subformula)
17:                 if subformula ≠ ⊤ then
18:                     return ⊥
19:                 end if
20:             end for
21:             return ⊤
22:         switch ∃ do
23:             var subformula : formula
24:             var vars : sets of bounded variables
25:             var lit : literal
26:             var guardFound : bool
27:             subformula = subformula of input
28:             vars = getBoundedVariables(input)
29:             if connective of subformula is ∧ then
30:                 guardFound = ⊥
31:                 while sub-subformula in subformula ∧ guardFound = ⊥ do
32:                     if sub-subformula is Literal then
33:                         lit = literal of sub-subformula
34:                         if isPositive(lit) ∧ isGuard(lit, vars) then
35:                             guardFound = ⊤
36:                         end if
37:                     end if
38:                 end while
39:                 if guardFound == ⊤ then
40:                     return VISIT(subformula)
41:                 else
42:                     return ⊥
43:                 end if
44:             else
45:                 return ⊥
46:             end if
```

Algoritmo 11 Visita dell'albero della formula parte 2

```
47:         switch ∀ do
48:             var subformula : formula
49:             var vars : sets of bounded variables
50:             var lit : literal
51:             var guardFound : bool
52:             subformula = getSubformula(input)
53:             vars = getBoundedVariables(input)
54:             left = getLeft(subformula)
55:             if (connective of subformula is →) ∧ (left is Literal) then
56:                 lit = literal of left
57:                 if isPositive(lit) ∧ isGuard(lit, vars) then
58:                     return Visit(right subformula of subformula)
59:                 else
60:                     return ⊥
61:                 end if
62:             else if connective of subformula is ∨ then
63:                 guardFound = ⊥
64:                 while subformula in input ∧ guardFound = ⊥ do
65:                     if subformula is Literal then
66:                         lit = literal of subformula
67:                         if isNegative(lit) ∧ isGuard(lit, vars) then
68:                             guardFound = ⊤
69:                         end if
70:                     end if
71:                 end while
72:                 if guardFound = ⊤ then
73:                     return Visit(subformula)
74:                 else
75:                     return ⊥
76:                 end if
77:             end if
78:             return ⊥
79: end function
```

Durante la visita l'algoritmo controlla se nell'intero albero sono presenti formule del tipo:

- $\forall \bar{x}(a \rightarrow A)$ (riga 55),
- $\forall \bar{x}(a \vee A)$ (riga 62),
- $\exists \bar{x}(a \wedge A)$ (riga 29)

Nel primo caso verifica che *a* sia un letterale positivo e una guardia tramite le funzioni *isPositive*() e *isGuard*() (riga 57). Nel secondo e nell'ultimo caso si scorrono tutte le sottoformule per trovare, rispettivamente, una guardia negativa (riga 67) e una guardia positiva (riga 34).

Algoritmo 12 Funzione che verifica se un letterale è una guardia

```
function IsGuard(lit : literal, vars : sets of variables)
    var literalVars : sets of variables
    literalVars = getVariablesOf(lit)
    for all variable in vars do
        var foundVariable = ⊥
        while litVar in literalVars ∧ foundVariable == ⊥ do
            if litVar == variable then
                foundVariable = ⊤
            end if
        end while
        if foundVariable == ⊥ then
            return ⊥
        end if
    end for
    return ⊤
end function
```

La funzione IsGuard() verifica se un letterale è una guardia, ovvero se contiene almeno una volta le variabili libere *vars* delle altre sottoformule.

Algoritmo 13 Funzione che verifica se una clausola è *guarded*

```
var cl : clause
var vars : clause variables set
var checkGuard : bool
checkGuard = ⊥
for all lit in cl do
    if isNegative(lit) ∧ foundVariable == ⊥ then
        checkGuard = IsGuard(lit, vars)
        if checkGuard == ⊤ then
            continue
        end if
    end if
    for all term in lit do
        if ¬containsAllVariablesOfClause(term,vars) then
            return ⊥
        end if
    end for
end for
return checkGuard
```

La seconda funzione che analizza le clausole verifica se esiste una guardia negativa (riga 6), tramite la funzione IsGuard(), e se i termini funzionali non ground contengono tutte le variabili della clausola (righe 12, 13).

3. Risultati sperimentali

In questo capitolo vengono presentati i risultati sperimentali del confronto tra Vampire originale e Vampire con la nuova procedura di decisione.

Per gli esperimenti sono stati utilizzati i problemi della libreria TPTP versione 8.2.0 [7]. I problemi presi in esame sono privi di uguaglianza, poiché la procedura di decisione analizzata in questa tesi tratta solo questo tipo di problemi. É possibile dividere i problemi in due insiemi: uno comprende quelli composti da formule della logica del primo ordine (FOF), mentre l'altro comprende i problemi composti da clausole (CNF).

Tabella 3.1: Numero di problemi

	FOF	**CNF**
Senza equality	1969	2274
Guarded	**52**	**62**

Entrambi gli insiemi sono stati dati in input al classificatore (capitolo 2.3) e il risultato è quello riportato in tabella 3.1: 52 problemi di tipo FOF su 1969 e 62 problemi di tipo CNF su 2274 sono *guarded* (7 di questi 52 problemi di tipo FOF non vengono presi in considerazione nei grafici seguenti, in quanto non possono essere risolti nel tempo limite stabilito). Di seguito viene fornita una numerazione dei problemi FOF e CNF in modo da rendere più chiara la lettura dei grafici.

Tabella 3.2: Numerazione dei problemi FOF

Problema	N.
LCL181+1	1
LCL230+1	2
LCL637+1.001	3
LCL637+1.005	4
MED011+1	5
NLP263+1	6
PHI014+1	7
PUZ005+1	8
PUZ068+2	9
PUZ069+2	10
PUZ079+2	11
PUZ080+2	12
PUZ128+1	13
PUZ138+2	14
SWB001+2	15

Problema	N.
SWB002+2	16
SWV011+1	17
SYN001+1	18
SYN007+1.014	19
SYN040+1	20
SYN041+1	21
SYN044+1	22
SYN045+1	23
SYN046+1	24
SYN047+1	25
SYN068+1	26
SYN356+1	27
SYN387+1	28
SYN388+1	29
SYN389+1	30

Problema	N.
SYN390+1	31
SYN391+1	32
SYN392+1	33
SYN393+1.003	34
SYN406+1	35
SYN407+1	36
SYN416+1	37
SYN915+1	38
SYN916+1	39
SYN942+1	40
SYN973+1	41
SYN977+1	42
SYN978+1	43
SYO525+1.015	44
SYO525+1.018	45

Tabella 3.3: Numerazione dei problemi CNF

Problema	N
GRA001-1	1
HWV003-3	2
KRS004-1	3
LAT260-2	4
LAT261-2	5
LAT264-2	6
LAT265-2	7
LAT267-2	8
LCL181-2	9
LCL230-2	10
MSC007-1.008	11
NUM285-1	12
PUZ004-1	13
PUZ008-2	14
PUZ009-1	15

Problema	N.
PUZ013-1	16
PUZ014-1	17
PUZ015-2.006	18
PUZ016-2.004	19
PUZ016-2.005	20
PUZ028-3	21
PUZ028-4	22
PUZ030-2	23
PUZ033-1	24
PUZ036-1.005	25
SET856-2	26
SYN001-1.005	27
SYN003-1.006	28
SYN004-1.007	29
SYN008-1	30

Problema	N.
SYN010-1.005.005	31
SYN011-1	32
SYN028-1	33
SYN029-1	34
SYN030-1	35
SYN032-1	36
SYN040-1	37
SYN041-1	38
SYN044-1	39
SYN045-1	40
SYN046-1	41
SYN047-1	42
SYN054-1	43
SYN062-1	44
SYN063-2	45

Problema	N.
SYN085-1.010	46
SYN086-1.003	47
SYN087-1.003	48
SYN089-1.002	49
SYN090-1.008	50
SYN091-1.003	51
SYN092-1.003	52
SYN093-1.002	53
SYN094-1.005	54
SYN095-1.002	55
SYN096-1.008	56
SYN097-1.002	57
SYN098-1.002	58
SYN302-1.003	59
SYN724-1	60
SYN915-1	61
SYN916-1	62

Nei test, Vampire con la nuova procedura di decisione è indicato con Guarded. I primi test sono stati eseguiti con le seguenti opzioni di Vampire:

```
--sa otter -t 10m -m 8000
```

L'algoritmo di saturazione scelto è *otter*, il tempo massimo di timeout è 10 minuti e il limite massimo di memoria occupabile è 8000 Mb.

3.1 Problemi FOF

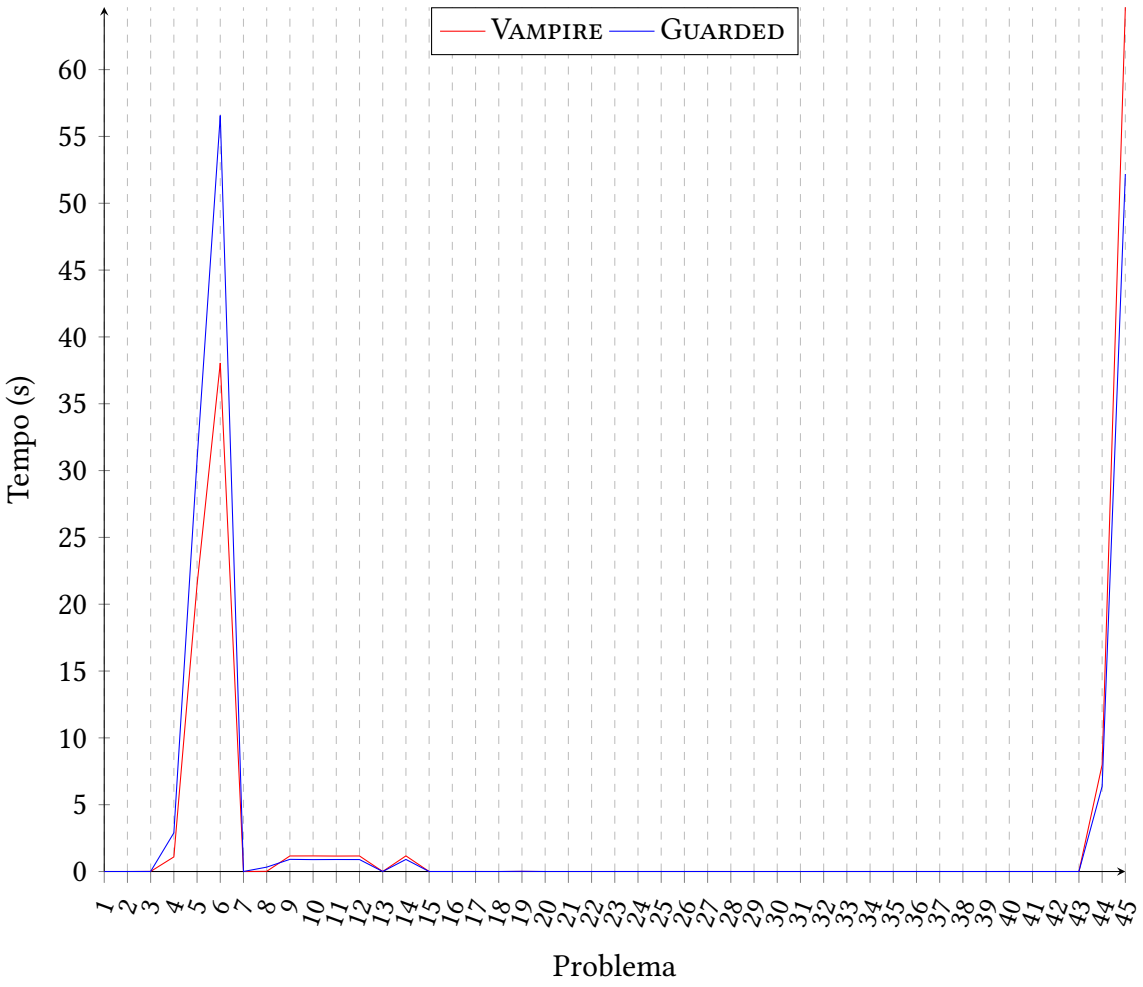


Figura 3.1: Tempo impiegato da Vampire e Guarded per risolvere problemi FOF

Dai primi test sui problemi FOF emerge che, nella maggior parte dei problemi, Guarded è efficiente tanto quanto Vampire in termini di tempo. La differenza tra i due, essendo nell'ordine dei millisecondi, non è significativa. Ci sono alcune eccezioni: i problemi MED011+1 (n.5) e NLP263+1 (n.6) sono a favore di Vampire rispettivamente di circa 10 e 18 secondi, mentre il problema SYO525+1.018 (n.45) è a favore di Guarded di circa 12 secondi.

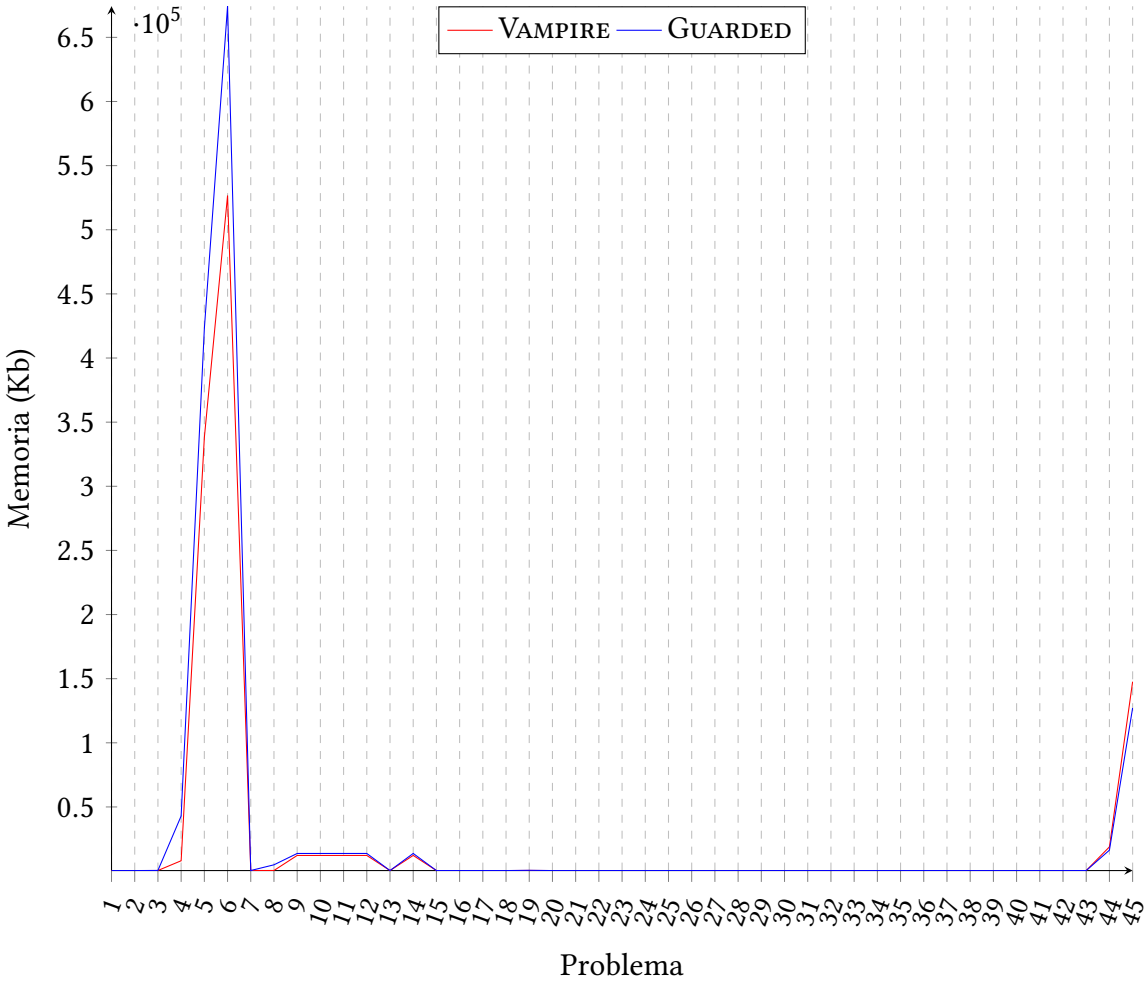


Figura 3.2: Memoria occupata da VAMPIRE e GUARDED per risolvere problemi FOF

VAMPIRE e GUARDED sono molto simili anche in termini di memoria occupata per la risoluzione di un problema. L' unica eccezione rilevante è il problema NLP263+1 (n.6) in cui GUARDED occupa 6.7×10^5 Kb di memoria, mentre VAMPIRE solo 5.2×10^5 Kb.

Alla fine di questa batteria di test, l'analisi ha posto particolare attenzione alle eccezioni.

Memoria: La tendenza di GUARDED ad occupare più memoria in alcuni problemi proseguirà anche nei prossimi test poiché, in problemi complessi e di grandi dimensioni, la trasformazione strutturale $Struct_\forall$ aggiunge nuove formule del tipo $\forall \bar{x}\bar{y}(\neg a \vee \neg\alpha \vee A)$ quindi occupa molto più spazio rispetto a VAMPIRE.

Tempo: Nelle eccezioni in cui VAMPIRE impiega meno tempo, è utilizzata una tecnica di *preprocessing* detta *unused predicate definition removal*. Una definizione di un predicato è una formula del tipo

$$\forall(X_1, \ldots, X_n) : p(X_1, \ldots, X_n) \leftrightarrow F$$

in cui p predicato non risulta in F. Con questa tecnica Vampire si può comportare in 3 modi:

1. se p è presente nel resto del problema solo in forma positiva, allora $\leftrightarrow$ della definizione viene sostituito da $\rightarrow$;
2. se p non è presente nel resto del problema, allora la definizione può essere eliminata;
3. altrimenti la definizione non viene modificata

In tal modo Vampire riesce a risolvere i problemi FOF in modo più rapido.

Nei prossimi test, la tecnica di *unused predicate definition removal* (updr) verrà disattivata da Vampire. Infatti, le opzioni saranno:

```
-updr off --sa otter -t 10m -m 8000
```

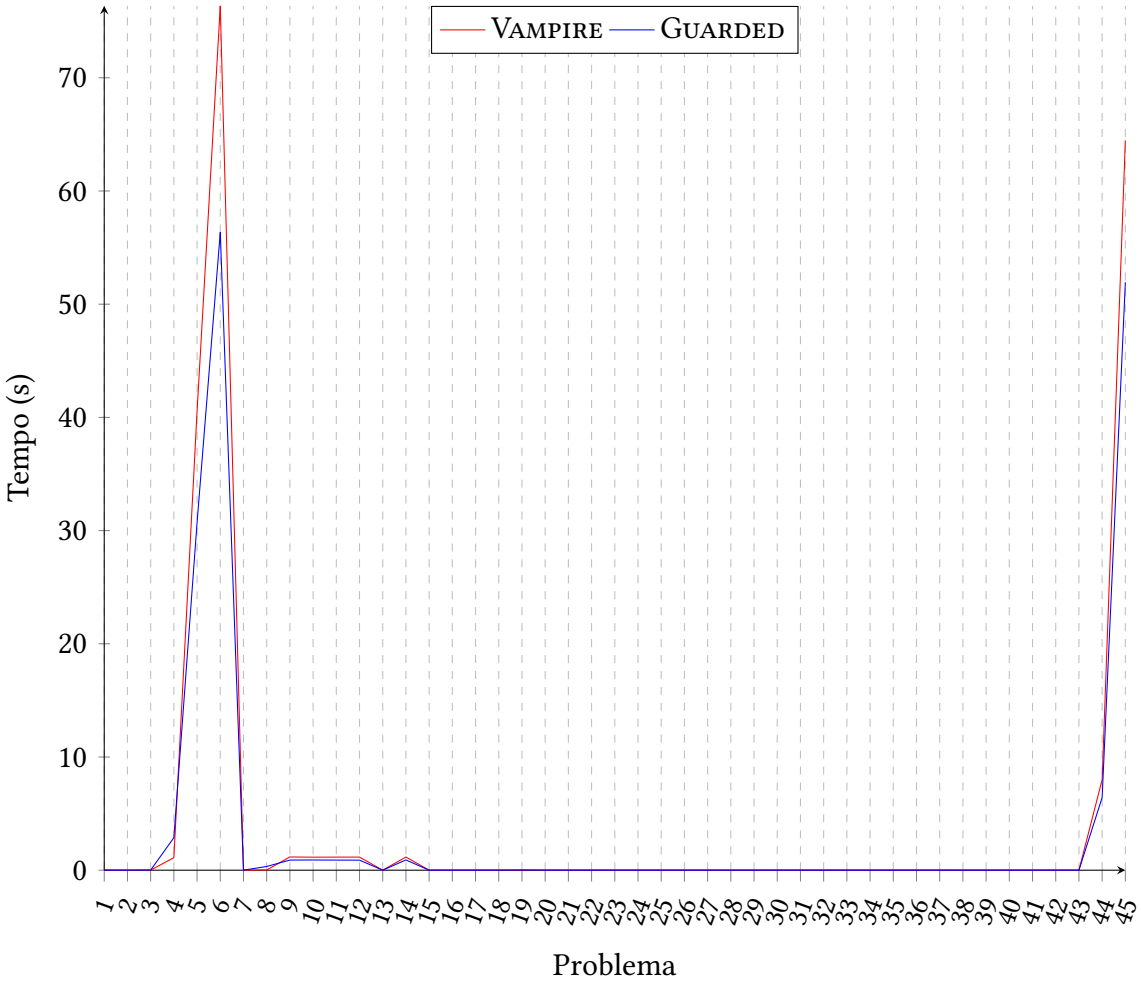


Figura 3.3: Tempo impiegato da Vampire e Guarded per risolvere problemi FOF con *updr* disattivata

Con la disattivazione della *updr*, le prestazioni di Vampire peggiorano significativamente. Infatti, in questo modo Vampire impiega più tempo di Guarded, con una differenza di circa 10 secondi nel problema MED011+1 (n.5) e di circa 20 secondi in NLP263+1 (n.6). In questi test Vampire impiega circa 20 secondi in più nel problema MED011+1 (n.5) e circa 38 secondi in più nel problema NLP263+1 (n.6) rispetto alla batteria di test precedente.

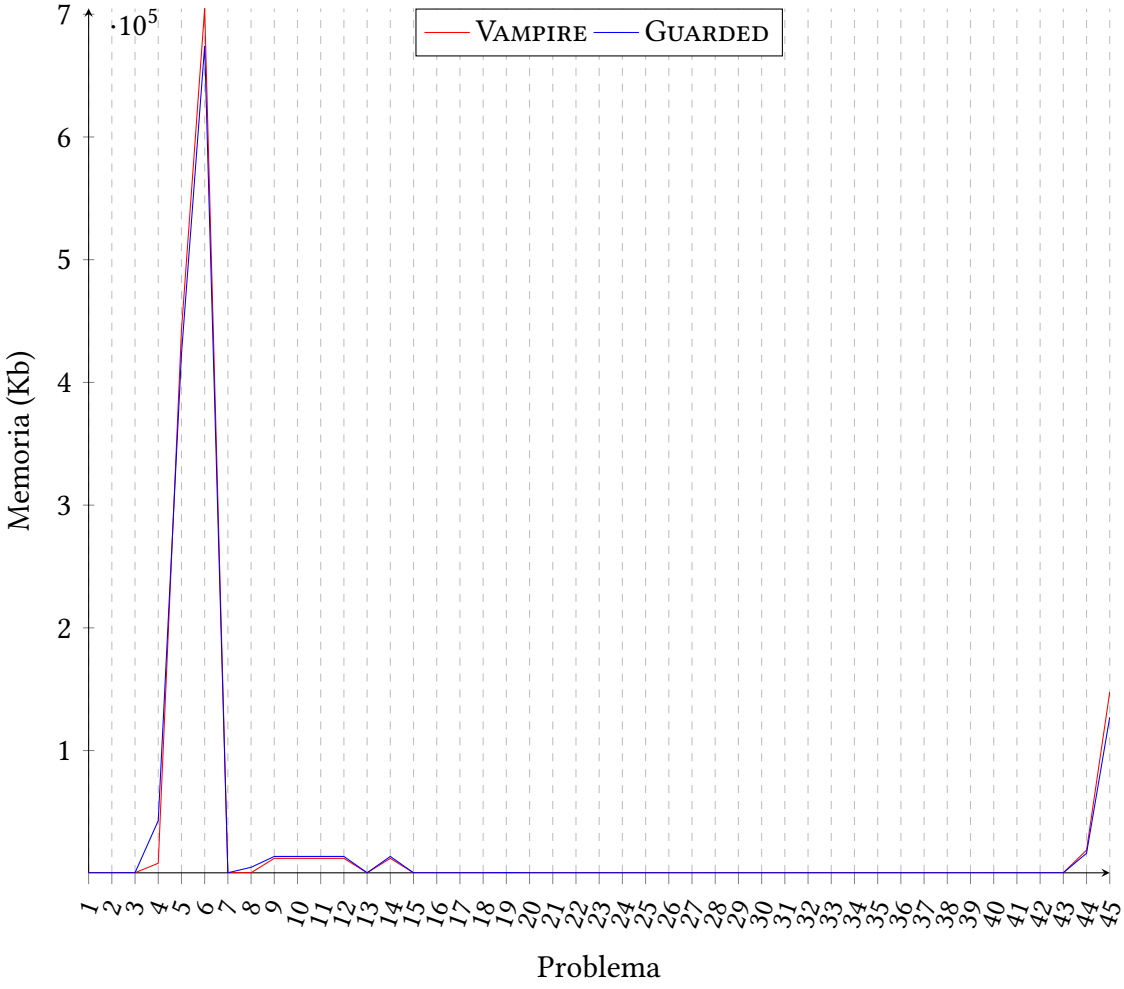


Figura 3.4: Memoria occupata da Vampire e Guarded per risolvere problemi FOF con *updr* disattivata

Disattivando l'*updr*, la quantità di memoria occupata da Vampire per il problema NLP263+1 aumenta al punto da superare quella utilizzata da Guarded. Nonostante ciò, la differenza non è da considerare significativa.

3.2 Problemi CNF

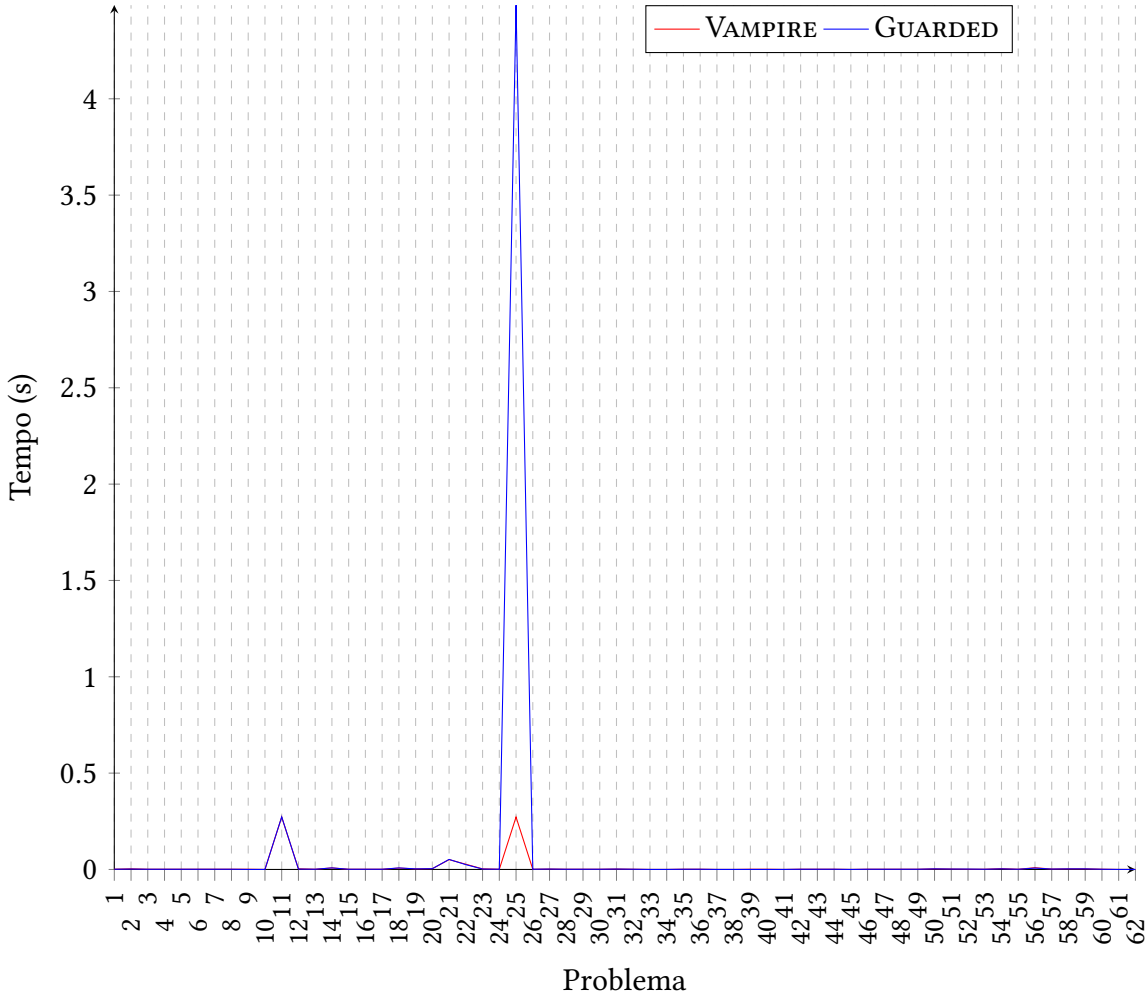


Figura 3.5: Tempo impiegato da Vampire e Guarded per risolvere problemi CNF

Dai test sui problemi CNF emergono gli stessi risultati dei precedenti test sui problemi FOF: nella maggior parte dei problemi, Guarded è efficiente quanto Vampire, sia in termini di tempo che di memoria. In questo caso, la differenza è ancora minore rispetto ai problemi FOF. L'unica eccezione è il problema PUZ036-1.005 (n.25) in cui Vampire impiega circa 0,2 secondi e occupa 1100 Kb, mentre Guarded circa 4 secondi e 15000 Kb.

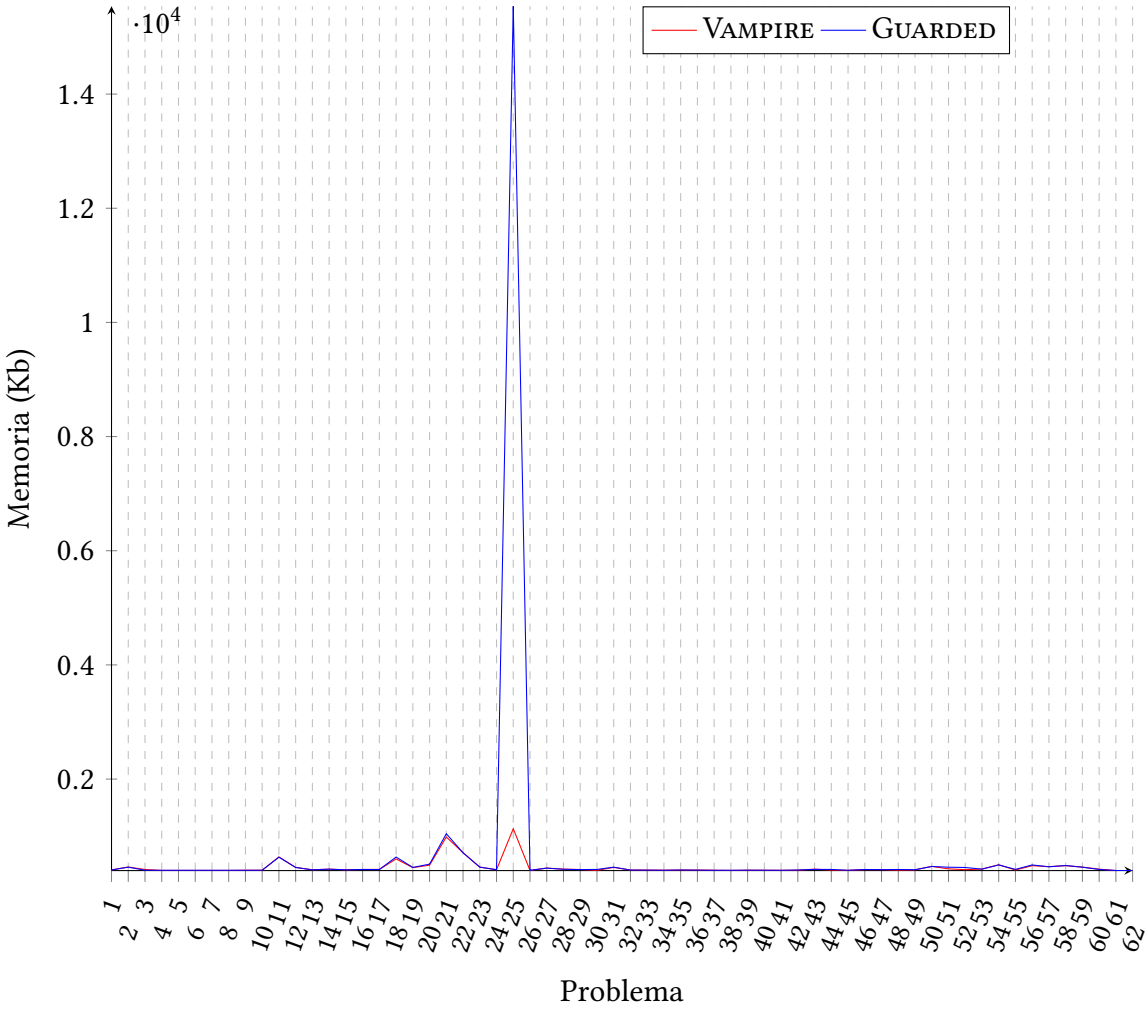


Figura 3.6: Memoria occupata da Vampire e Guarded per risolvere problemi CNF

Alla fine di questi primi test sui problemi CNF, è stata effettuata l'analisi sul problema PUZ036-1.005 (n.25). Vampire, nell'algoritmo di saturazione, utilizza la *forward subsumption*, un'inferenza che fa parte delle *forward simplification* (capitolo 1.1.3) utile per eliminare le ridondanze. Questa tecnica permette a Vampire di essere più veloce ed efficiente.

Nei prossima batteria di test, la tecnica di *forward subsumption* (fs) verrà disattivata da Vampire infatti le opzioni saranno:

```
-fs off --sa otter -t 10m -m 8000
```

Si noti che i test sono stati effettuati anche con *updr* disattivata, ma non stati riportati i risultati poiché non c'è stato nessun cambiamento significativo dei valori. Lo stesso vale anche per l'opzione *fs* nei problemi FOF. Infatti, su questi problemi, sono stati eseguiti i test anche con *fs* disattivata ma i risultati non hanno portato a nessun cambiamento rilevante.

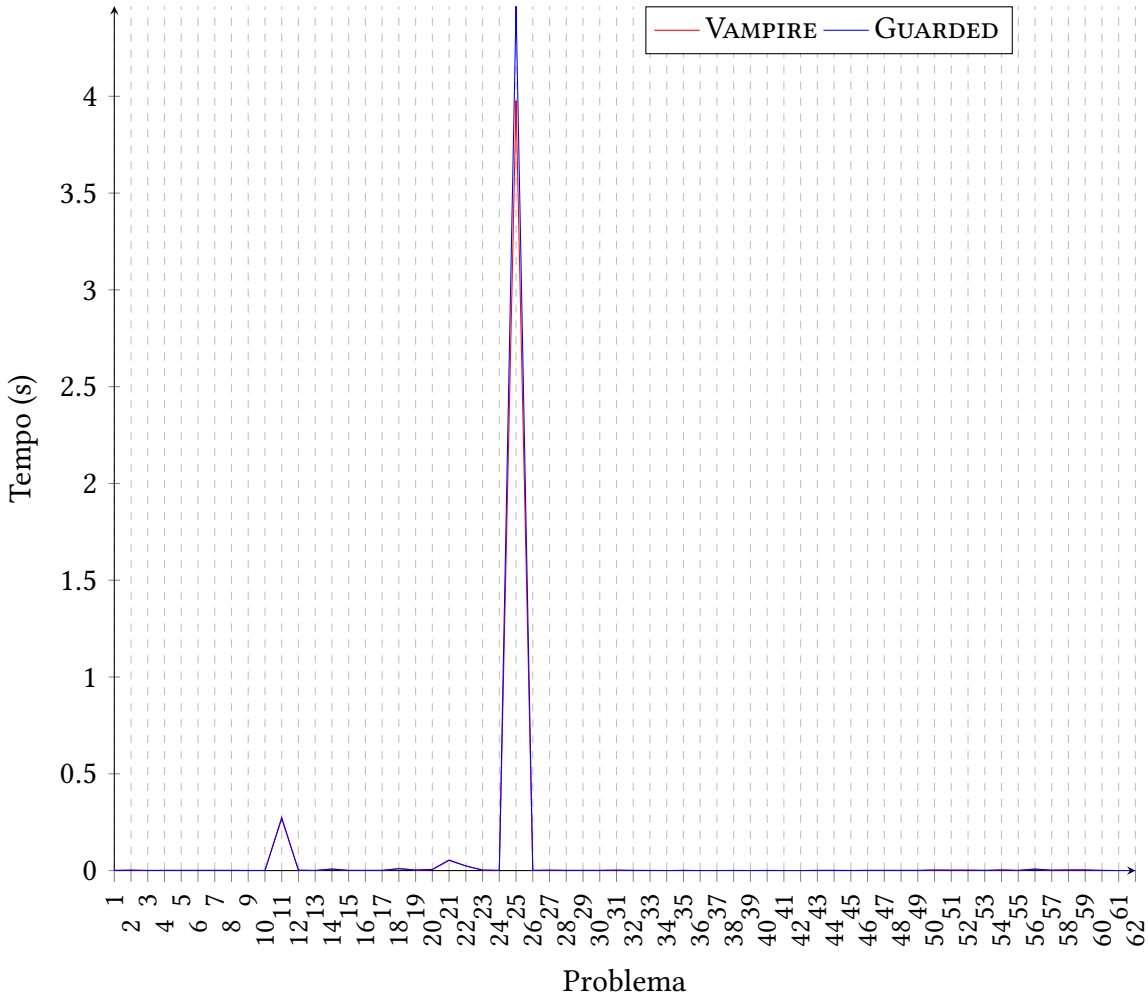


Figura 3.7: Tempo impiegato da Vampire e Guarded per risolvere problemi CNF con *forward subsumption* disattivata per entrambi

Con la disattivazione della *forward subsumption*, Vampire peggiora sia in termini di tempo che di memoria occupata nel problema PUZ036-1.005 (n.25). La differenza di tempo tra Vampire e Guarded si assottiglia molto in questo problema, infatti è di circa mezzo secondo.

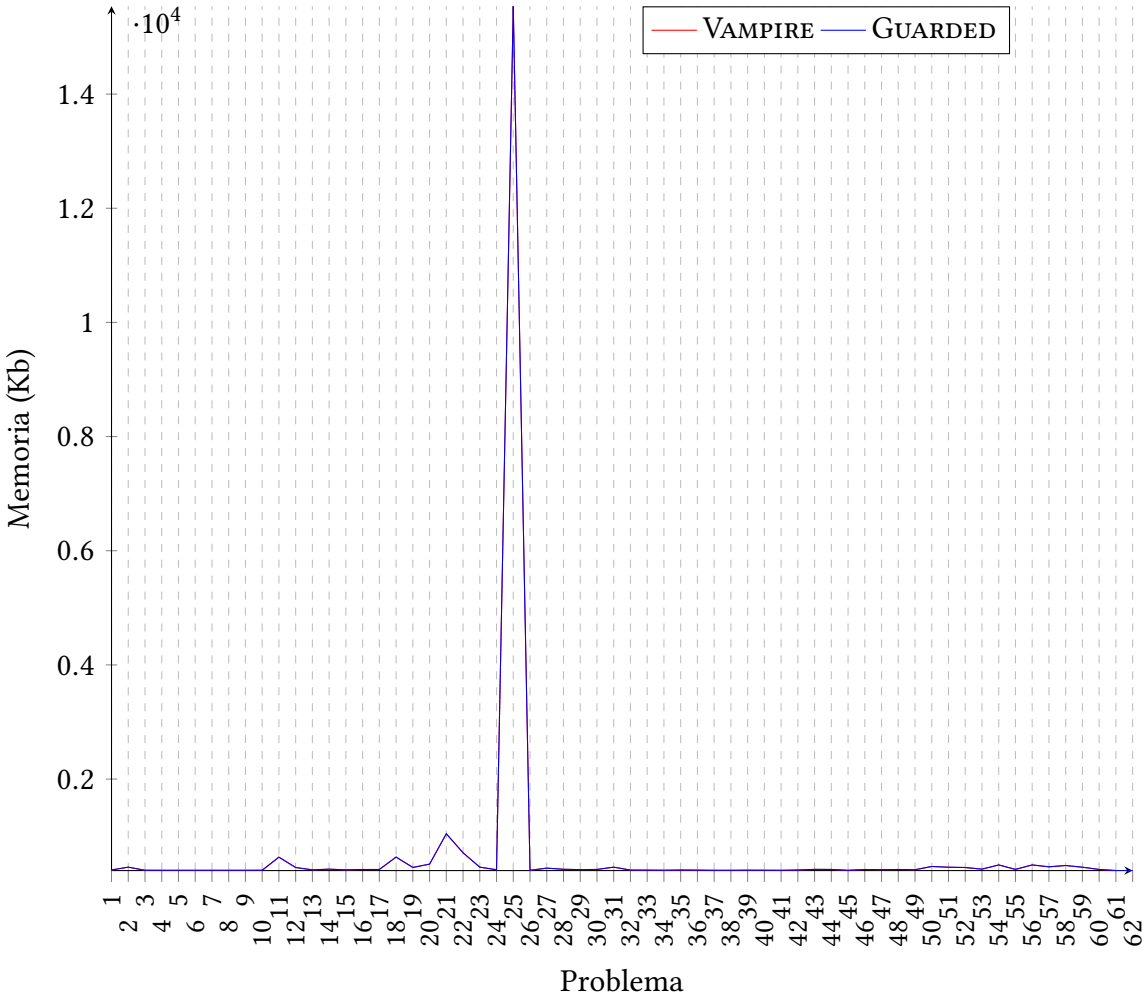


Figura 3.8: Memoria occupata da Vampire e Guarded
per risolvere problemi CNF con *forward subsumption* disattivata per entrambi

Con la disattivazione della *forward subsumption*, Vampire e Guarded occupano circa la stessa quantità di memoria.

4. Conclusioni

In conclusione, quello che è emerso dal capitolo 3 è che Vampire originale e Vampire esteso con la nuova procedura di decisione sono indistinguibili, con un'attenzione però alle potenzialità della procedura nei problemi più complessi. É importante sottolineare che il benchmark effettuato è poco significativo, in quanto sono stati selezionati problemi senza uguaglianza, di cui solo pochi fanno parte del frammento *guarded*.

Sarebbe possibile approfondire l'analisi della procedura di decisione tramite la generazione di problemi complessi che fanno parte della logica modale.

Inoltre, grazie al classificatore (cap 2.3), si è osservato che circa 640 problemi in cui è presente l'uguaglianza sono *guarded*. Quindi, un'ulteriore indagine può essere condotta sullo studio di Ganzinger e De Nivelle, con l'implementazione della procedura di decisione basata sulla *superposition* [8]. In questo modo, sarebbe possibile includere nell'analisi quei problemi *guarded* in cui è presente l'uguaglianza.

Bibliografia

[1] Laura Kovács e Andrei Voronkov. «First-order theorem proving and Vampire». In: *International Conference on Computer Aided Verification*. Springer. 2013, pp. 1–35.

[2] Alexandre Riazanov e Andrei Voronkov. «The design and implementation of VAMPIRE». In: *AI communications* 15.2-3 (2002), pp. 91–110.

[3] Hans De Nivelle e Maarten De Rijke. «Deciding the guarded fragments by resolution». In: *Journal of Symbolic Computation* 35.1 (2003), pp. 21–58.

[4] Giles Reger, Martin Suda e Andrei Voronkov. «New Techniques in Clausal Form Generation.» In: *GCAI* 41 (2016), pp. 11–23.

[5] Andrei Voronkov. «AVATAR: The architecture for first-order theorem provers». In: *Computer Aided Verification: 26th International Conference, CAV 2014, Held as Part of the Vienna Summer of Logic, VSL 2014, Vienna, Austria, July 18-22, 2014. Proceedings 26*. Springer. 2014, pp. 696–710.

[6] Erich Grädel. «On the restraining power of guards». In: *The Journal of Symbolic Logic* 64.4 (1999), pp. 1719–1742.

[7] G. Sutcliffe. «The TPTP Problem Library and Associated Infrastructure. From CNF to TH0, TPTP v6.4.0». In: *Journal of Automated Reasoning* 59.4 (2017), pp. 483–502.

[8] Harald Ganzinger e Hans De Nivelle. «A superposition decision procedure for the guarded fragment with equality». In: *Proceedings. 14th Symposium on Logic in Computer Science (Cat. No. PR00158)*. IEEE. 1999, pp. 295–303.