Kapitel 3, Übung 2: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 3, Seiten 25-41

3.4. Bestimme die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

a) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$

b) $f(x,y,z)=\dfrac{1+x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}$

Hinweis: Die Schwierigkeit bei b) besteht darin, die Übersicht zu behalten und die „Schreibarbeit“ (und damit die Chancen auf Fehler) zu reduzieren. Es kann helfen, wenn man sich Abkürzungen definiert. Z.B.

$$Z=1+x+y+z$$

$$Z_x=\frac{\partial Z}{\partial x}=1 \qquad Z_y=\frac{\partial Z}{\partial y}=1 \qquad Z_z=\frac{\partial Z}{\partial z}=1$$

.

$$N=1+x^2+y^2+z^2$$

$$N_x=\frac{\partial N}{\partial x}=2x \qquad N_y=\frac{\partial N}{\partial y}=2y \qquad N_z=\frac{\partial N}{\partial z}=2z$$

3.5. Bestimme die erste Ableitung der Funktion h mit der Kettenregel.

a) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad h(x_1,x_2)=f(g(x_1,x_2))$

mit

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2^2x_3^2$

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \quad g(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1x_2\end{pmatrix}$

b) $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \quad h(x_1,x_2,x_3)=f(g(x_1,x_2,x_3))$

mit

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \quad f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}-x_2\\-x_3\\-x_1\end{pmatrix}$

$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \quad g(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_1x_2\\x_2x_3\\x_3x_1\end{pmatrix}$

Kapitel 3, Übung 2: Lösungen

3.4. Bestimme die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

a)

$$f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2\,x\,e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2\,y\,e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}=-2\,e^{-(x^2+y^2)}-2\,x(-2\,x)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}=-2\,e^{-(x^2+y^2)}-2\,y(-2\,y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=(-2\,x)(-2\,y)\,e^{-(x^2+y^2)}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

b.w.

b)

$$f(x,y,z)=\frac{1+x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}=\frac{Z}{N}$$

Bezeichnungen:

$$Z=1+x+y+z$$

$$Z_x=\frac{\partial Z}{\partial x}=1 \qquad Z_y=\frac{\partial Z}{\partial y}=1 \qquad Z_z=\frac{\partial Z}{\partial z}=1$$

$$N=1+x^2+y^2+z^2$$

$$N_x=\frac{\partial N}{\partial x}=2x \qquad N_y=\frac{\partial N}{\partial y}=2y \qquad N_z=\frac{\partial N}{\partial z}=2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{Z_x\cdot N-Z\cdot N_x}{N^2}=\frac{1}{N}-\frac{2xZ}{N^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{Z_y\cdot N-Z\cdot N_y}{N^2}=\frac{1}{N}-\frac{2yZ}{N^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{Z_z\cdot N-Z\cdot N_z}{N^2}=\frac{1}{N}-\frac{2zZ}{N^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}=-\frac{N_x}{N^2}-\frac{(2xZ_x+2Z)N^2-(2xZ)2N\,N_x}{N^4}$$

$$=-\frac{2x}{N^2}-\frac{(2x+2Z)N-(2xZ)2(2x)}{N^3}$$

$$=-\frac{2x}{N^2}-\frac{2xN+2ZN-8x^2Z}{N^3}$$

$$=-\frac{2xN+2xN+2ZN-8x^2Z}{N^3}$$

$$=-\frac{4xN+2ZN-8x^2Z}{N^3}$$

Entsprechend:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=-\frac{4yN+2ZN-8y^2Z}{N^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial z}=-\frac{4zN+2ZN-8z^2Z}{N^3}$$

Gemischte Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\frac{N_y}{N^2}-\frac{(2xZ_y)N^2-(2xZ)2N\,N_y}{N^4}$$

$$=-\frac{2y}{N^2}-\frac{2xN-8xyZ}{N^3}=-\frac{2yN+2xN-8xyZ}{N^3}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

Entsprechend:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=-\frac{2zN+2xN-8xzZ}{N^3}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=-\frac{2zN+2yN-8yzZ}{N^3}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$$

3.5. Bestimme die erste Ableitung der Funktion h mit der Kettenregel.

a)

$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad h(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2))$

mit

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3^2 \quad \Rightarrow \quad grad\ f = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 x_3^2 \\ 2x_1^2 x_2 x_3^2 \\ 2x_1^2 x_2^2 x_3 \end{pmatrix}^T \text{(d.h., ein Zeilenvektor)}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad grad\ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$grad\ h = grad\ f \cdot grad\ g = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 (x_1 x_2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 (x_1 x_2) x_2 & 2x_1^2 x_2 (x_1 x_2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 (x_1 x_2) x_1 \end{pmatrix}$$

b)

$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_1, x_2, x_3))$

mit

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad grad\ f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad grad\ g = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$grad\ h = grad\ f \cdot grad\ g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}$$