Mathematik 2

Kapitel 1

Integralrechnung (Nachtrag)

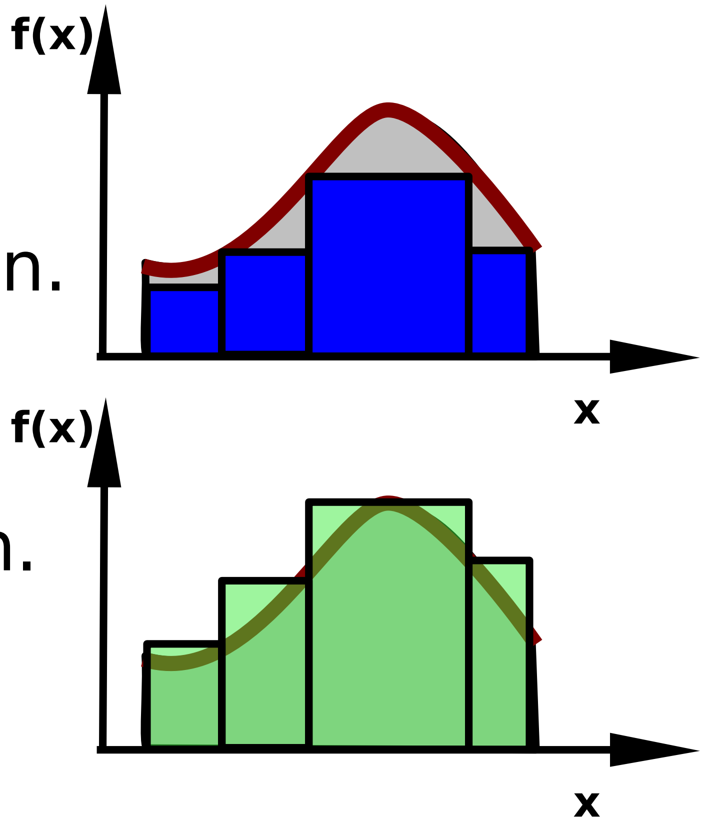
Ulrich H. Becker

Frankfurt University of Applied Sciences

SS 2024

Wiederholung: Integralrechnung

- Beschreibe krummlinig Flächenberandung durch eine Funktion. Versuche, die Flächenmaßzahl einzugrenzen.
- Eine Folge von Flächen, die gegen die gesuchte Flächenmaßzahl von unten streben.
- Konstruiere eine Folge von Flächen, die gegen die gesuchte Flächenmaßzahl von oben streben.
- Wenn die beiden Folgen den gleichen Grenzwert annehmen, ist das die Flächenmaßzahl der krummlinigen Fläche.



Wiederholung: Integrationsregeln

- Es gilt:
  - gleiche Integrationsgrenzen $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
  - vertauschte Integrationsgrenzen
    $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
  - Summe d. Integrationsgrenzen
    $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$
  - Integral der Eins $\int_a^b 1\,dx = b - a$

Wiederholung: Integrationsregeln

- Es gilt:
  - konstanter Faktor $c \in \mathbb{R}$ im Integranden

$$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

  - Summe d. Integranden

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

  - Größenrelation der Integranden überträgt sich auf das Integral.

$$f(x) \leq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\, dx$$

Wiederholung: Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

- Ist eine Funktion f stetig im Intervall [a,b], so ist jede Integralfunktion

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

in [a,b] differenzierbar und es gilt für alle x∈[a,b]

$$F'(x)=f(x)$$

- M.a.W.:

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$$

- In diesem Sinne ist die Integration die Umkehrung der Differentiation.

Wiederholung: Substitutionsregel und Differentiale

- Betrachte die Substitution $x = \varphi(z)$
- Dann ist $dx = \varphi'(z)\, dz$
- Mit f(x) multiplizieren: $f(x)\, dx = f(\varphi(z))\, \varphi'(z)\, dz$
- Und integrieren

$$\int f(x)\, dx = \int \underbrace{f(\varphi(z))}_{f(x)}\, \underbrace{\varphi'(z)\, dz}_{dx}$$

- Die Substitutionsregel ist letztlich die Motivation für das dx in der Integralnotation.

Wiederholung: Substitutionsregel und Integrationsgrenzen

- Integrationsgrenzen bei bestimmten Integralen
  - Entweder: Nachdem man im Ergebnis nach der Rücksubstitution wieder bei der ursprünglichen Variable ist, verwendet man die ursprünglichen Integrationsgrenzen.
  - Oder: Nach der eigentlichen Integration führt man die Rücksubstitution nicht aus. Dann muss man auch die Integrationsgrenzen substituieren und so verwenden.

Wiederholung: Spezialfälle

- … bei denen man sich die formelle Anwendung der Substitutionsregel sparen kann.
- Eine reelle Funktion f sei auf [a,b] stetig und $\int f(x)dx = F(x)+c$. Seien $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$. Dann ist für alle x mit $\alpha x+\beta \in [a,b]$

$$\int f(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+c$$

Wiederholung: Spezialfälle

- Eine reelle Funktion f sei auf [a,b] stetig differenzierbar. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und f^α sei auf [a,b] definiert.

  Dann ist für $\alpha \neq -1$

$$\int f'(x)[f(x)]^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + c$$

  Und für $\alpha = -1$ gilt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Wiederholung: Partielle Integration

- Wir wollen die Produktregel für Ableitung ausnutzen, um eine Integrationsmethode zu erhalten.
- Betrachte $[u(x)\cdot v(x)]‘=u‘(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v‘(x)$
- Unbestimmte Integration liefert

$$
\begin{aligned}
u(x)\cdot v(x) &= \int [u(x)\cdot v(x)]‘\,dx \\
&= \int u‘(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v‘(x)\,dx
\end{aligned}
$$

- Damit

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Wiederholung: Partielle Integration

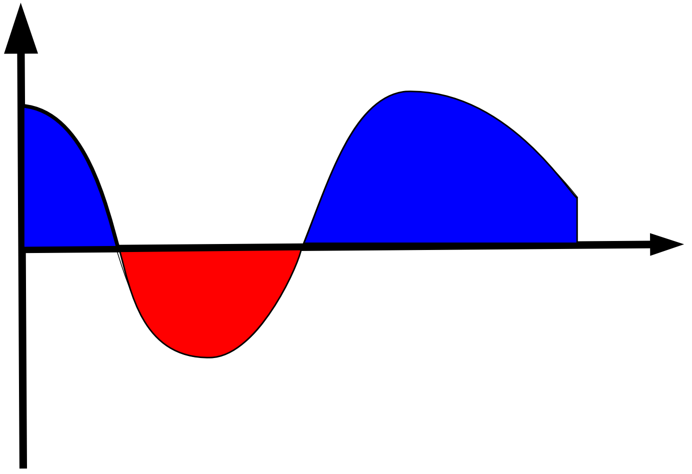
- Beachte: Die Regel trägt es schon im Namen, dass man nur zum Teil integriert, und ein Rest noch zu integrieren bleibt.
- Ziel ist es natürlich, diesen Rest so zu bekommen, dass sich das verbleibende Integral leicht finden lässt.

Flächenberechnung

- Einer Fläche wird eine Maßzahl zugeordnet, mit folgenden Eigenschaften:
  - Jede Flächenmaßzahl ist nicht negativ: $A_F \geq 0$
  - Das Einheitsquadrat hat die Flächenmaßzahl 1.
  - Sind zwei Figuren F_1 und F_2 kongruent, so haben sie die gleiche Flächenmaßzahl: $A_{F1} = A_{F2}$
  - Ist eine Figur F in zwei Figuren F_1 und F_2 zerlegt, so gilt für die zugehörigen Flächenmaßzahlen: $A_F = A_{F1} + A_{F2}$
- Idee: Man beschreibe die Umrandung von ebenen Flächen durch Funktionen. Integrieren liefert dann die Fläche … wenn man ein Detail beachtet!

Flächenberechnung

- Wir wissen: $f(x) \leq 0 \Rightarrow \int f(x)\,dx \leq 0$.
  - Kann man also nicht direkt als Flächenmaßzahl verwenden.



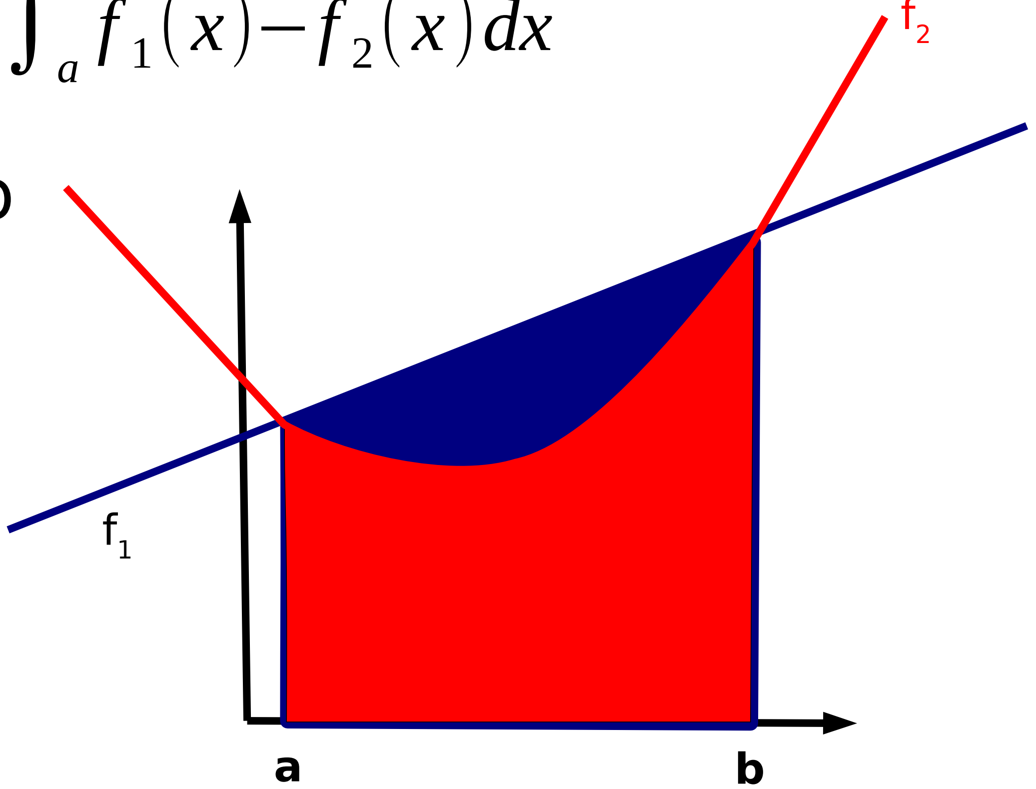
- Um also die Fläche zw. einer Kurve und der x-Achse zu bestimmen, teilt man das Intervall auf der x-Achse in Abschnitte gleichen Vorzeichens von f(x) ein.
- Die Beträge der Integrale über die einzelnen Abschnitte sind dann das gesuchte Flächenmaß.

Flächenberechnung

- Beschränkung auf x-Achse als Flächenrand zu einschränkend!
- Wie bestimmt man die Fläche zwischen zwei Kurven? So:

$$\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b f_1(x) - f_2(x)\,dx$$

mit $f_1(x) \geq f_2(x)$ für $a \leq x \leq b$



- Dies ersetzt $f(x) \geq 0$.
- Beispiel $f_1(x) = \frac{x}{2} + 4$

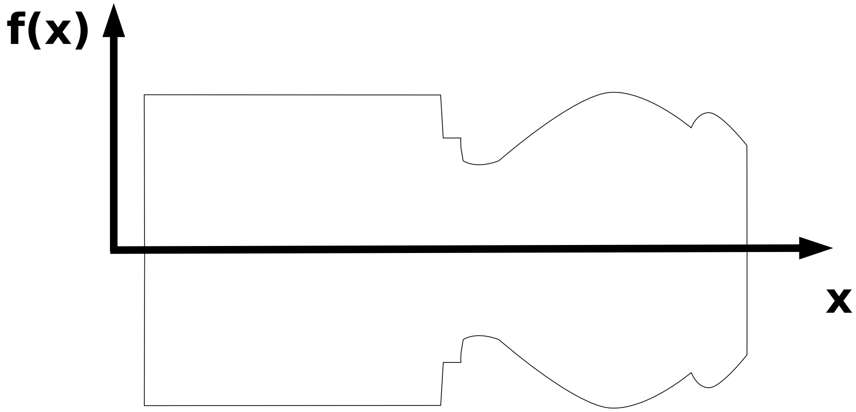
$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Volumenberechnung

- Für einen Quader mit Kantenlängen a, b und c:
  V = a*b*c
- Für einen Quader sind die Kanten konstante Funktionen. Die Faktoren in a*b*c sind das Ergebnis einer Integration der jeweils konstanten Funktion.
  - f(x)=b: $\int_0^a f(x)\,dx = a * b$ = Grundfläche
  - g(z)=a*b: $\int_0^c g(z)\,dz = a * b * c$ = Volumen
- Eine beliebige krummlinige Begrenzung erfordert die Integration in 3 Raumrichtungen.
  - … können wir noch nicht.
- Aber für *spezielle* Körper kann man auch mit gewöhnlichen Integralen das Volumen berechnen.

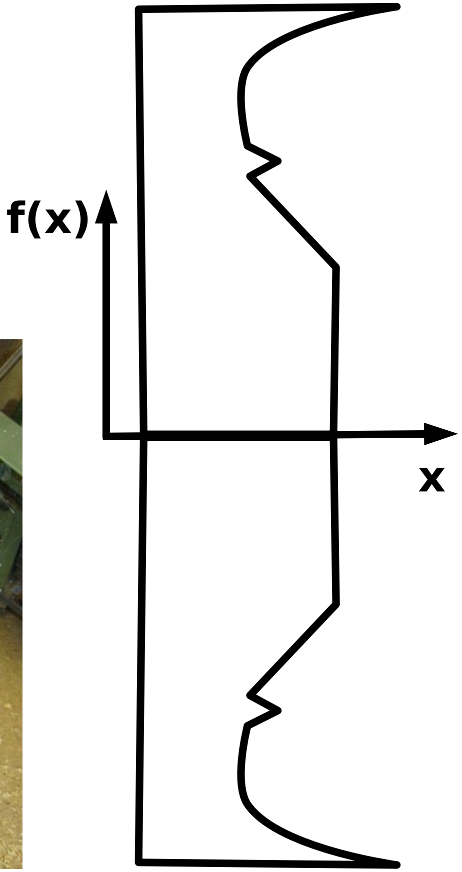
Volumenberechnung Rotationskörper

- Rotationskörper sind rotationssymmetrisch bzgl. einer Achse.
  - Wir legen diese so, dass dies die x-Achse ist.
- Beispiele
  - Kugel
  - Kegel
  - Zylinder
  - Produkte von der Drehbank



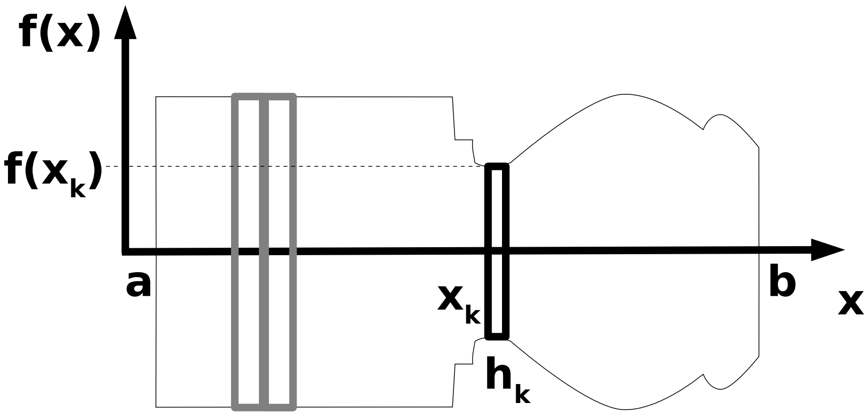
Volumenberechnung Rotationskörper

- Variables Profil senkrecht zur Rotationsachse.
- Kann mit dem Folgenden nicht direkt behandelt werden!



Volumenberechnung Rotationskörper

- Überdecke Volumen mit Kreisscheiben konstanter Höhe h_k, $k=1,..,n$
- Radius der Kreisscheiben ist $f(x_k)$.
- Volumen der Kreisscheiben ist $\pi f(x_k)^2 * h_k$.



- Man kann wieder Ober- und Untersummen konstruieren. Gemeinsamer Grenzwert ist das Integral.
- Volumen eines Rotationskörpers:

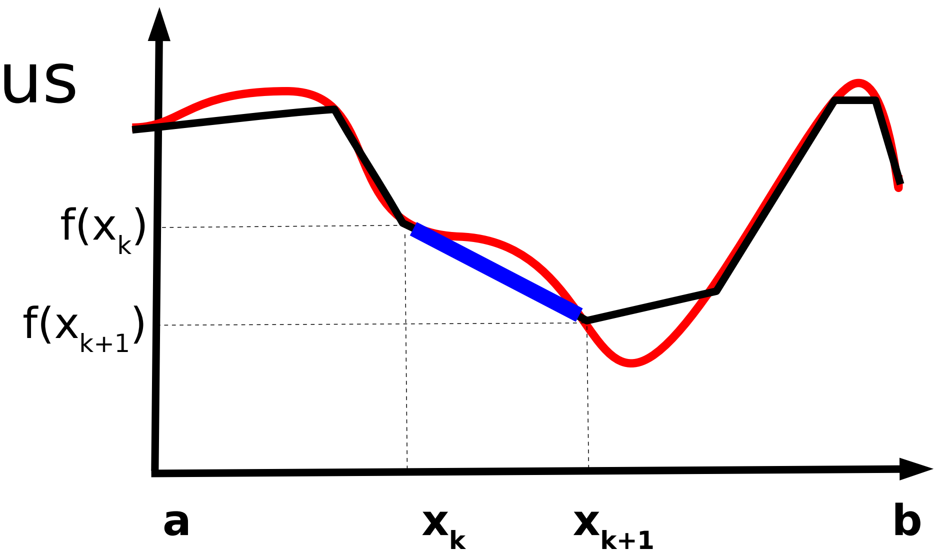
$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx}$$

Volumenberechnung Rotationskörper

- Beispiele
  - Kugelabschnitt
  - Hohlkörper

Bogenlänge

- Betrachte Funktionsgraph über einem Intervall [a,b].
- Approximation durch Sekanten für eine Zerlegung Z_n von [a,b].
- Länge einer Sekante folgt aus



$$\Delta s_k^2 = (x_{k+1}-x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2$$
$$= \Delta x_k^2 + \Delta f_k^2$$
$$= \left(1 + (\Delta f_k/\Delta x_k)^2\right) \Delta x_k^2$$

- Länge des Sekantenzuges:

$$L_n = \sum \Delta s_k = \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k$$

- Länge der Kurve ist Limes $n \to \infty$, $\Delta x_k \to 0$:

$$\boxed{L = \lim_{\Delta x \to 0} L_n = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}\, dx}$$

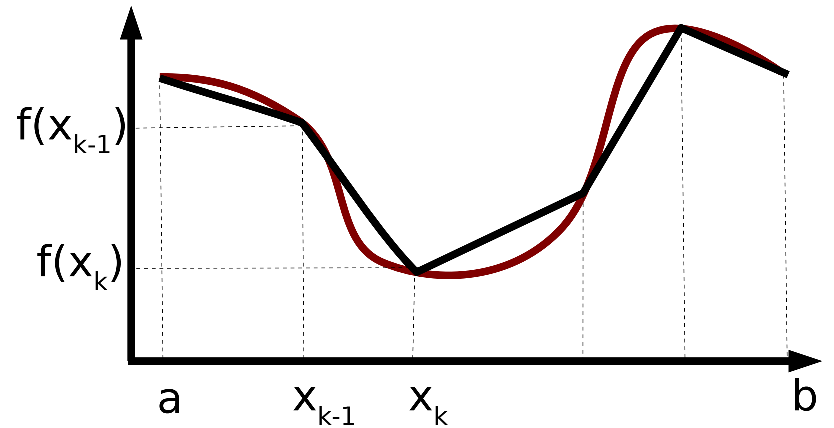
Numerische Integration

- Prinzipiell gilt es, Aufwand gegen Genauigkeit abzuwägen.
- „Einfache“ Integranden kann man gut mit einfachen Verfahren integrieren.
- Integranden mit Polstellen oder uneigentliche Integrale erfordern i.d.R. spezielle Methoden.
  - Numerikvorlesung
- Lange Tradition = viel Literatur
- Stichwort: Quadraturformeln

Numerische Integration: Trapezformel

- Ansatz: Approximiere Kurve durch Sekanten.
- Integral im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$:

$$A_k = \frac{1}{2}\left(f(x_k) + f(x_{k-1})\right) * (x_k - x_{k-1})$$



- Typischerweise für alle k=1,..,n

$$h = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

- Summe:

$$\boxed{A_n = h\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)}$$

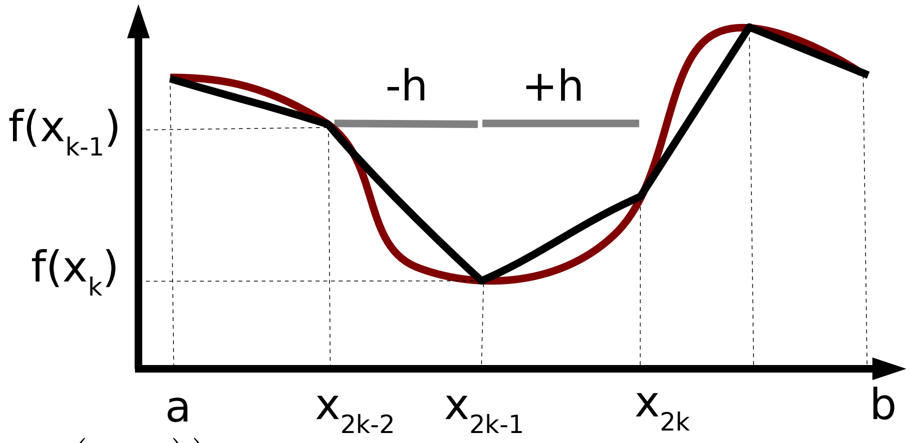
- Fehler:

$$\Delta A_n = (b-a)\frac{h^2}{12} max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

Numerische Integration: Simpson Formel

- Ansatz: Approximiere Kurve durch Parabeln.

- Teile Interval [a,b] in **2**n Intervalle: h = (b-a)/2n



- Integral im Intervall zu x_{2k}:

$$A_k = \frac{(x_{2k} - x_{2k-2})}{6} \left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \right)$$

$$= \frac{(b-a)}{6n} \left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \right)$$

- Summe:

$$\boxed{A_n = \frac{h}{3} \left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k-1}) + f(b) \right)}$$

- Fehler:

$$\Delta A_n = \frac{b-a}{180} h^4 \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|$$