Kapitel 4, Übung 1: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 4, Seiten 1-10

4.1. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale

a) $\int_0^1 \int_{y=-x}^{x} x\,y+1\,dy\,dx$

b) $\int_0^{2\pi} \int_{y=-\sin(x)-1}^{\sin(x)+1} x\,y+1\,dy\,dx$

c) $\int_0^{2\pi} \int_{y=-\sin(x)-1}^{\sin(x)+1} x\,dy\,dx$

d) $\int_0^1 \int_{y=0}^{x} \sqrt{x\,y}\,dy\,dx$

e) $\int_0^{2\pi} \int_{y=x(x-\pi)^2(x-2\pi)}^{\sin^2(x)} 1\,dy\,dx$

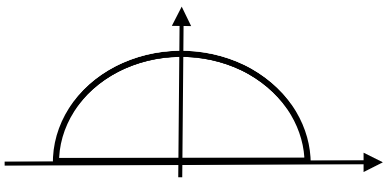
4.2. Die Koordinaten des Schwerpunktes einer Fläche A berechnen sich gemäß

$$x_S=\frac{1}{A}\iint_A x\,dA$$

$$y_S=\frac{1}{A}\iint_A y\,dA$$

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken (1,0), (0,1), (-1,0).

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Halbkreises mit Radius R=5 (Skizze). Berechnen Sie dazu die Fläche des Halbkreises ebenfalls mit einem Doppelintegral. Verwenden Sie kartesische Koordinaten. Verwenden Sie eine Integraltafel für die Integration.



Hinweis: Mit Symmetriebetrachtungen lässt sich der Rechenaufwand bei <u>beiden</u> Aufgaben reduzieren.

Kapitel 4, Übung 1: Lösungen

4.1. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale

a) $\int_0^1 \int_{y=-x}^{x} x\,y+1\,dy\,dx=1$

$\int_0^1 x[\frac{1}{2}y^2]_{-x}^{x}+[y]_{-x}^{x}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}(x^3-x^3)+2\,x\,dx=[x^2]_0^1=1$

b) $\int_0^{2\,pi} \int_{y=-\sin(x)-1}^{\sin(x)+1} x\,y+1\,dy\,dx=4\,\pi$

$\int_0^{2\,pi} \int_{y=-\sin(x)-1}^{\sin(x)+1} x\,y+1\,dy\,dx=\int_0^{2\pi} x[\frac{1}{2}y^2]_{-\sin(x)-1}^{\sin(x)+1}+[y]_{-\sin(x)-1}^{\sin(x)+1}\,dx$

$=\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}\left((\sin(x)+1)^2-(-\sin(x)-1)^2\right)+2\sin(x)+2\,dx=2\int_0^{2\pi}\sin(x)\,dx+2\int_0^{2\pi}1\,dx=4\,\pi$

c) $\int_0^{2\pi} \int_{y=-\sin(x)-1}^{\sin(x)+1} x\,dy\,dx=4(\pi^2-\pi)$

$=\int_0^{2\pi} x\left(\sin(x)+1-(-\sin(x)-1)\right)dx=\int_0^{2\pi} x\left(2\sin(x)+2\right)dx=\int_0^{2\pi} 2\,x\sin(x)+2\,x\,dx$

$=2\left([x(-\cos(x))]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(-\cos(x))\,dx\right)+[x^2]_0^{2\pi}=2\,2\pi(-\cos(2\pi))+4\pi^2=4(\pi^2-\pi)$

d) $\int_0^1 \int_{y=0}^{x} \sqrt{x\,y}\,dy\,dx=\frac{2}{9}$

$=\int_0^1 \sqrt{x}[\frac{2}{3}y^{3/2}]_0^x\,dx=\int_0^1 \sqrt{x}\frac{2}{3}x^{3/2}\,dx=\int_0^1 \frac{2}{3}x^{4/2}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x^2\,dx=\frac{2}{3}\frac{1}{3}[x^3]_0^1=\frac{2}{9}$

e) $\int_0^{2\pi} \int_{y=x(x-\pi)^2(x-2\pi)}^{\sin^2(x)} 1\,dy\,dx=\pi+\frac{4}{15}\pi^5$

$=\int_0^{2\pi} \sin^2 x-x(x-\pi)^2(x-2\pi)\,dx=\pi+\frac{4}{15}\pi^5$

4.2. Schwerpunktsberechnungen

a) $x_S=0$ wegen Symmetrie

Ebenfalls wg. Symmetrie nur das Integral über die rechte Hälfte des Dreiecks berechnen. Dann auch nur durch halbe Fläche teilen.

$y_{oben}=1-x \quad , \quad y_{unten}=0$

$I_y=\int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dy\,dx=\int_0^1 [\frac{1}{2}y^2]_0^{1-x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 1-2\,x+x^2\,dx=\frac{1}{2}[x-x^2+\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{6}$

$$A/2=\frac{1}{2}$$

$$y_S=\frac{I_y}{A/2}=\frac{1}{3}$$

b) $x_S=0$ wegen Symmetrie

$y_{oben}=\sqrt{R^2-x^2} \quad , \quad y_{unten}=0$

Fläche des halben Halbkreises gleich $\pi R^2/4$ mit folgendem Integral:

$$\int \sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{R^2-x^2}+R^2\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right)+C$$

Ebenfalls wg. Symmetrie nur das Integral über die rechte Hälfte des Halbkreises berechnen. Dann auch nur durch halbe Fläche teilen.

$$I_y=\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy\,dx=\int_0^R\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^R R^2-x^2\,dx=\frac{1}{2}\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^R=\frac{1}{2}\frac{2}{3}R^3=\frac{1}{3}R^3$$

Nur rechte Hälfte der Halbkreisfläche A berechnen:

$$A/2=\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\,dy\,dx=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{R^2-x^2}+R^2\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right)\right]_0^R$$

$$=\frac{1}{2}(0+R^2\arcsin(1)-(0+R^2\arcsin(0)))=\frac{1}{2}R^2\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\pi R^2$$ gleich Fläche eines Viertelkreises.

$$y_S=\frac{I_y}{A/2}=\frac{\frac{1}{3}R^3}{\frac{1}{4}\pi R^2}=\frac{4R}{3\pi}$$