Klausurtypische Aufgaben

1. Bestimmen Sie die ersten 3 nichtverschwindenden Terme der Taylor-Reihen für folgende Funktionen.
   a) $f(x)=\exp(2x)$ bei $x_0=0$.
   b) $f(x)=\ln(x^2)$ bei $x_0=1$.

2. Ein Rechteck hat einen gegebenen Umfang U. Welche Abmessungen müssen die Rechteckseiten haben, damit die Rechteckfläche A ein Maximum annimmt?

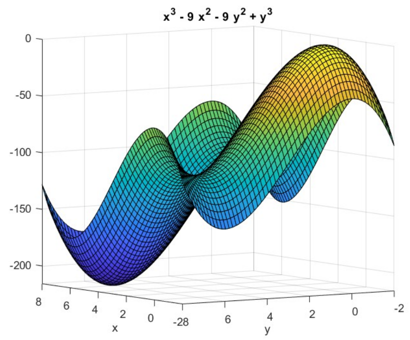
3. Gegeben ist die folgende separable Differentialgleichung (DGL). Berechnen Sie die allgemeine Lösung.

$$\dot{x}=\frac{t^2}{1+x}$$

4. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktion:

$$f(x,y)=x^3-9x^2+y^3-9y^2$$

Hinweis: Gesucht sind sowohl die Extremstellen als auch die Art der Extrema (Min/Max).



5. Ein Dreieck mit Fläche A ist begrenzt durch die x-Achse, die y-Achse und durch die Gerade $y=2-2x$. Berechnen Sie den Schwerpunkt (x_c, y_c) des Dreiecks.

   Hinweise:
   a) Machen Sie eine Skizze und markieren Sie das Integrationsgebiet.
   b) Nutzen Sie die folgenden Formeln (Doppelintegrale über die Fläche A):

$$x_c=\frac{\int\int_A x\,dx\,dy}{\int\int_A 1\,dx\,dy} \quad \text{und} \quad y_c=\frac{\int\int_A y\,dx\,dy}{\int\int_A 1\,dx\,dy}$$

Klausurtypische Aufgaben: Lösungen

1. Taylor-Reihen

a)

$$x_0=0 \qquad \begin{array}{ll} f(x)=e^{2x} & f(0)=1 \\ f'(x)=2\cdot e^{2x} & f'(0)=2 \\ f''(x)=2\cdot 2\cdot e^{2x} & f''(0)=4 \\ f'''(x)=2\cdot 2\cdot 2\cdot e^{2x} & f'''(0)=8 \end{array}$$

$$T(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=1+\frac{2}{1!}x+\frac{4}{2!}x^2+\ldots=1+2x+2x^2+\ldots$$

Beachte: Nur die ersten drei nichtverschwindenden Terme sind gefragt.

b)

$$x_0=1 \qquad \begin{array}{ll} f(x)=\ln x^2 & f(1)=0 \\ f'(x)=\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{2}{x} & f'(1)=2 \\ f''(x)=-\frac{2}{x^2} & f''(1)=-2 \\ f'''(x)=\frac{4}{x^3} & f'''(1)=4 \end{array}$$

$$T(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$$

$$=0+\frac{2}{1!}(x-1)-\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{4}{3!}(x-1)^3\mp\ldots=2(x-1)-(x-1)^2+\frac{2}{3}(x-1)^3\mp\ldots$$

Beachte: Nur die ersten drei nichtverschwindenden Terme sind gefragt.

2. Ein Rechteck hat einen gegebenen Umfang U. Welche Abmessungen müssen die Rechteckseiten haben, damit die Rechteckfläche A ein Maximum annimmt?

Kanten a und b. Deshalb Fläche $A=a\cdot b$ und damit zwei Unbekannte.

Umfang $U=2a+2b$ gegeben. Umstellen z.B. nach $b=\frac{U}{2}-a$

$\Rightarrow A=a\cdot(\frac{U}{2}-a)=\frac{1}{2}aU-a^2$

Mögliche lokale Extremstelle bei $\frac{dA}{da}=0$

$\frac{dA}{da}=\frac{U}{2}-2a\Rightarrow\frac{U}{2}-2a=0\Rightarrow a=\frac{U}{4}$ und deshalb auch $b=\frac{U}{2}-\frac{U}{4}=\frac{U}{4}$

Maximum, falls $\frac{d^2A}{da^2}<0$. Es ist $\frac{d^2A}{da^2}=-2<0$.

Deshalb wird die Fläche maximal bei $a=b=\frac{U}{4}$.

3. DGL:

$$\dot{x}=\frac{t^2}{1+x} \;\Rightarrow\; (1+x)\frac{dx}{dt}=t^2 \;\Rightarrow\; (1+x)dx=t^2dt \quad .$$

Jetzt beide Seiten integrieren: $\int(1+x)dx=\int t^2dt \;\Rightarrow\; x+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{3}t^3+C \quad .$

Auflösen nach x:

$$x+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{3}t^3+C \qquad |*2$$
$$\Rightarrow 2x+x^2=\frac{2}{3}t^3+2C \qquad |+1$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1=(x+1)^2=\frac{2}{3}t^3+1+2C$$
$$\Rightarrow x+1=\pm\sqrt{\frac{2}{3}t^3+1+2C}$$
$$\Rightarrow x(t)=-1\pm\sqrt{\frac{2}{3}t^3+1+2C}$$

4. Extremstellen

$$f(x,y)=x^3-9x^2+y^3-9y^2 \qquad \text{Extremstellen bei } grad\ f=0 \qquad grad\ f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-18x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-18y$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \;\Rightarrow\; 3x^2-18x=0 \;\Rightarrow\; x(x-6)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0 \;\vee\; x_2=6$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=0 \;\Rightarrow\; 3y^2-18y=0 \;\Rightarrow\; y(y-6)=0 \;\Rightarrow\; y_1=0 \;\vee\; y_2=6$$

Das bedeutet, es gibt 4 mögliche Extremstellen:

(x1,y1), (x1,y2), (x2,y1), (x2,y2).

An jeder dieser Stellen müssen wir die Hesse-Matrix prüfen.

$$Hess(f)(x,y)=\begin{pmatrix}6x-18 & 0\\ 0 & 6y-18\end{pmatrix}$$

Erste Stelle (x1,y1): $Hess(f)(0,0)=\begin{pmatrix}-18 & 0\\ 0 & -18\end{pmatrix}$. Damit

$$\begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-18 & 0\\ 0 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=-18u^2-18v^2=-18(u^2+v^2)<0 \quad \forall\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\neq 0$$

Die Hesse-Matrix bei (0,0) ist also negativ definit. Also ist an dieser Stelle ein lokales Maximum.

Zweite Stelle (x1,y2): $Hess(f)(0,6)=\begin{pmatrix}-18 & 0\\ 0 & +18\end{pmatrix}$

Es ist $\begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-18 & 0\\ 0 & +18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=-18u^2+18v^2$.

Betrachte einmal $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$. Dann ist $-18u^2+18v^2=-18<0$.

Andererseits folgt mit $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, dass $-18u^2+18v^2=+18>0$.

Also ist die Hesse-Matrix an dieser Stelle indefinit und an dieser Stelle hat f(x,y) kein Extremum.

Dritte Stelle (x2,y1): $Hess(f)(6,0)=\begin{pmatrix}+18 & 0\\ 0 & -18\end{pmatrix}$

Es ist $\begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+18 & 0\\ 0 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=+18u^2-18v^2$.

Betrachte einmal $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$. Dann ist $+18u^2-18v^2=18>0$.

Andererseits folgt mit $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, dass $+18u^2-18v^2=-18<0$.

Also ist die Hesse-Matrix an dieser Stelle indefinit und an dieser Stelle hat f(x,y) kein Extremum.

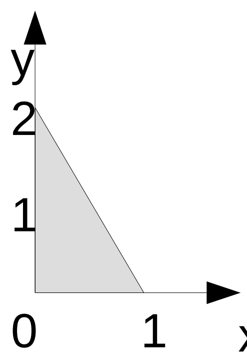
Vierte Stelle (x2,y2): $Hess(f)(6,6)=\begin{pmatrix}18 & 0\\ 0 & 18\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18 & 0\\ 0 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=+18u^2+18v^2=18(u^2+v^2)>0 \quad \forall\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\neq 0$.

Die Hesse-Matrix bei (0,0) ist also positiv definit. Also ist an dieser Stelle ein lokales Minimum.

5. Ein Dreieck ist begrenzt durch die x-Achse, die y-Achse und durch die Gerade $y=2-2x$. Berechnen Sie den Schwerpunkt (x_c, y_c) des Dreiecks.

Skizze:



Achsenabschnitte:
Begrenzung durch y-Achse bedeutet $x=0$.
Begrenzung durch x-Achse bedeutet $y=2-2x=0 \Rightarrow x=1$.
Untere Grenze für y ist Null. Obere Grenze für y ist $y=2-2x$.

b.w.

Damit:

$$A=\int_0^1\int_0^{2-2x} 1\,dy\,dx=\int_0^1[y]_0^{2-2x}dx=\int_0^1(2-2x)-(0)\,dx=[2x-x^2]_0^1=2-1=1$$

$$I_x=\int_0^1\int_0^{2-2x} x\,dy\,dx=\int_0^1 x[y]_0^{2-2x}dx=\int_0^1 x(2-2x)\,dx=\int_0^1 2x-2x^2\,dx$$
$$=\left[x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$
$$x_c=\frac{I_x}{A}=\frac{1}{3}$$

$$I_y=\int_0^1\int_0^{2-2x} y\,dy\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2-2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(4-8x+4x^2)-(0)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[4x-4x^2+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[\left(4-4+\frac{4}{3}\right)-0\right]=\frac{2}{3}$$
$$y_c=\frac{I_y}{A}=\frac{2}{3}$$