Kapitel 4, Übung 2: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 4, Seiten 1-13

4.3. Die Koordinaten des Schwerpunktes einer Fläche A berechnen sich gemäß

$$x_S = \frac{1}{A} \iint_A x \, dA \qquad y_S = \frac{1}{A} \iint_A y \, dA$$

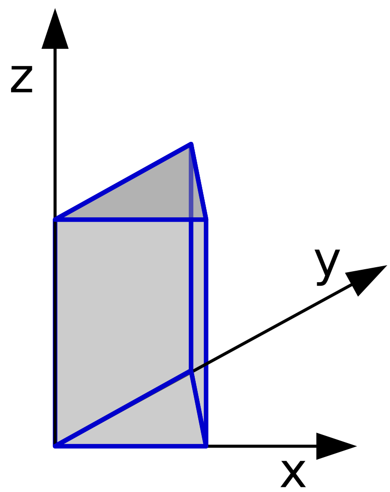
a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $P_1=(2, 5)$, $P_2=(6, 2)$ und $P_3=(5, 7)$.
Hinweis 1: Zeichnen Sie das Dreieck, um die Integrationsgrenzen zu identifizieren.
Hinweis 2: Hier helfen keine Symmetriebetrachtungen.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Halbkreises mit Radius R=5. Verwenden Sie Polarkoordinaten für die Integration, also $dA = r\,dr\,d\phi$. Wie lauten dann die Integrationsgrenzen?
Hinweis 1: Um die Integration ausführen zu können, müssen Sie x und y als Funktion von r und ϕ schreiben.
Hinweis 2: Mit Symmetriebetrachtungen lässt sich der Rechenaufwand reduzieren.

4.4. Gegeben sei ein Prisma mit einer Länge von 2 cm (z-Richtung). Die dreieckige Querschnittsfläche sei gegeben durch die Punkte (0, 0), (1, 0) und (0, 1) mit Einheiten in cm. Berechnen Sie den Schwerpunkt gemäß den folgenden Formeln für den Schwerpunkt eines Körpers (V ist das Volumen des Körpers):

$$x_S = \frac{1}{V} \iiint_V x \, dV \qquad y_S = \frac{1}{V} \iiint_V y \, dV \qquad z_S = \frac{1}{V} \iiint_V z \, dV$$

Hinweis: Mit Symmetriebetrachtungen lässt sich der Rechenaufwand reduzieren.



Kapitel 4, Übung 2: Lösungen

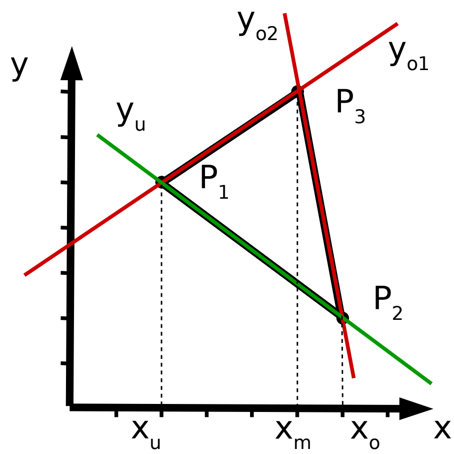
4.3. Schwerpunktsberechnung

a) Bezeichnungen:

$$x_S = \frac{\iint_A x\,dA}{A} = \frac{Z_x}{A} \qquad y_S = \frac{\iint_A y\,dA}{A} = \frac{Z_y}{A}$$

Zunächst die Fläche A berechnen: $A = \iint_A 1\,dA = \int_{x_u}^{x_o} \int_{y_u}^{y_o} 1\,dy\,dx$

Wir benötigen also die Integrationsgrenzen x_u , x_o , y_u und y_o . Dazu liest man aus der Skizze ab.



$x_u = 2$

$x_o = 6$

$y_u = mx + b$ ist die Gerade durch P_1 und P_2.

$$\begin{array}{ll} P_1: & 5 = m2 + b \\ P_2: & 2 = m6 + b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} m = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{13}{2} \end{array}$$

Die obere Grenze y_o ist durch zwei Geraden gegeben.

$y_{o1} = mx + b$ ist die Gerade durch P_1 und P_3.

$$\begin{array}{ll} P_1: & 5 = m2 + b \\ P_3: & 7 = m5 + b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} m = \frac{2}{3} \\ b = \frac{11}{3} \end{array}$$

$y_{o2} = mx + b$ ist die Gerade durch P_3 und P_2.

$$\begin{array}{ll} P_2: & 2 = m6 + b \\ P_3: & 7 = m5 + b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} m = -5 \\ b = 32 \end{array}$$

Ergebnisse: Fläche $A = \frac{17}{2}$, $x_S = \frac{13}{3}$, $y_S = \frac{14}{3}$

Rechenwege:

Berechnung der Gesamtfläche A:

$$A = \int_2^6 \int_{y_u}^{y_o} dydx = \int_2^5 \int_{y_u}^{y_{o1}} dydx + \int_5^6 \int_{y_u}^{y_{o2}} dydx$$

$$= \int_2^5 [y]_{y_u}^{y_{o1}} dx + \int_5^6 [y]_{y_u}^{y_{o2}} dx = \int_2^5 \frac{2}{3}x + \frac{11}{3} - \left(-\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}\right) dx + \int_5^6 -5x + 32 - \left(-\frac{3}{4} + \frac{13}{2}\right) dx$$

$$= \int_2^5 \frac{17}{12}x - \frac{17}{6} dx + \int_5^6 -\frac{17}{4}x + \frac{51}{2} dx = \left[\frac{17}{24}x^2 - \frac{17}{6}x\right]_2^5 + \left[-\frac{17}{8}x^2 - \frac{51}{2}x\right]_5^6 = \frac{17}{2}$$

Berechnung x-Koordinate x_s des Flächenschwerpunkts:

$$Z_x=\iint_A x\,dA=\int_2^6\int_{y_u}^{y_o} x\,dy\,dx=\int_2^5\int_{y_u}^{y_{o1}} x\,dy\,dx+\int_5^6\int_{y_u}^{y_{o2}} x\,dy\,dx$$

$$=\int_2^5 [xy]_{y_u}^{y_{o1}}dx+\int_5^6 [xy]_{y_u}^{y_{o2}}dx$$

$$=\int_2^5 x\left(\left(\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}\right)\right)dx$$

$$+\int_5^6 x\left((-5x+32)-\left(-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}\right)\right)dx$$

$$=\int_2^5 x\left(\frac{17}{12}x-\frac{17}{6}\right)dx+\int_5^6 x\left(-\frac{17}{4}x+\frac{51}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{17}{36}x^3-\frac{16}{12}x^2\right]_2^5+\left[-\frac{17}{12}x^3+\frac{51}{4}x^2\right]_5^6=\frac{17\cdot 13}{6}$$

$$x_s=\frac{Z_x}{A}=\frac{\frac{17\cdot 13}{6}}{\frac{17}{2}}=\frac{13}{3}$$

Berechnung y-Koordinate y_s des Flächenschwerpunkts:

$$Z_y=\iint_A y\,dA=\int_2^6\int_{y_u}^{y_o} y\,dy\,dx=\int_2^5\int_{y_u}^{y_{o1}} y\,dy\,dx+\int_5^6\int_{y_u}^{y_{o2}} y\,dy\,dx$$

$$=\int_2^5\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y_u}^{y_{o1}}dx+\int_5^6\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y_u}^{y_{o2}}dx$$

$$=\int_2^5 \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}\right)^2-\left(-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}\right)^2\right)dx+\int_5^6\frac{1}{2}\left((-5x+32)^2-\left(-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}\right)^2\right)dx$$

$$=\int_2^5\frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{44}{9}x+\frac{121}{9}\right)-\left(\frac{9}{16}x^2-\frac{39}{4}x+\frac{169}{4}\right)\right)dx$$

$$+\int_5^6\frac{1}{2}\left((25x^2-320x+32^2)-\left(\frac{9}{16}x^2-\frac{39}{4}x+\frac{169}{4}\right)\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^5 -\frac{17}{2^4\cdot 3^2}x^2+\frac{527}{2^2\cdot 3^2}x-\frac{1037}{2^2\cdot 3^2}dx+\frac{1}{2}\int_5^6\frac{391}{16}x^2-\frac{1241}{4}x+\frac{3927}{4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{17}{2^4\cdot 3^3}x^3+\frac{527}{2^3\cdot 3^2}x^2-\frac{1037}{2^2\cdot 3^2}x\right]_2^5+\frac{1}{2}\left[\frac{391}{16\cdot 3}x^3-\frac{1241}{8}x^2+\frac{3927}{4}x\right]_5^6=\frac{17\cdot 14}{2\cdot 3}$$

$$y_s=\frac{Z_y}{A}=\frac{\frac{17\cdot 14}{2\cdot 3}}{\frac{17}{2}}=\frac{14}{3}$$

b.w.

b) Es ist $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$. Damit

$$x_S = \frac{1}{A}\iint_A x\,dA = \frac{1}{A}\int_0^R\int_0^\pi r\cos\phi\, r\,d\phi\,dr$$

$$y_S = \frac{1}{A}\iint_A y\,dA = \frac{1}{A}\int_0^R\int_0^\pi r\sin\phi\, r\,d\phi\,dr$$

Es ist aber $x_S = 0$ wegen Symmetrie.

(Kann man auch durch Integration verifizieren.)

$y_S = \frac{4R}{3\pi}$ wie in Aufgabe 5.2.b

4.4.

Das Volumen des Prismas ist:

$$V = A\cdot h = \frac{1}{2}1\,\mathrm{cm}\cdot 1\,\mathrm{cm}\cdot 2\,cm = 1\,\mathrm{cm}^3$$

Aufgrund von Symmetrie ist $z_s = 1\,\mathrm{cm}$

Der Flächenschwerpunkt x_s berechnet sich räumlich:

$$x_s = \frac{Z_x}{V} \qquad \text{mit} \qquad Z_x = \int_V x\,dV = \int_0^1\int_{y_u}^{y_o}\int_0^2 x\,dz\,dy\,dx$$

Die z-Integration kann man sofort durchführen:

$$Z_x = \int_0^1\int_{y_u}^{y_o}[xz]_0^2\,dy\,dx = \int_0^1\int_{y_u}^{y_o} 2x - 0\,dy\,dx = 2\int_0^1\int_{y_u}^{y_o} x\,dy\,dx$$

Zeichnet man das Prisma in der x-y- Ebene, lässt sich die untere und obere Grenze der y-Werte erkennen

$$y_u = 0, \quad y_o = 1 - x$$

Damit:

$$Z_x = 2\int_0^1 [xy]_{y_u}^{y_o}\,dx = 2\int_0^1 x(1-x-0)\,dx = 2\int_0^1 x - x^2\,dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$x_s = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

Aufgrund der Symmetrie ist damit auch $y_s = \frac{1}{3}$.

Zusammen: Die Koordinaten des Schwerpunktes sind $x_S = \frac{1}{3}$, $y_S = \frac{1}{3}$, $z_S = 1$