

Mathematik 2

Kapitel 4

Höhere Integralrechnung

Ulrich H. Becker

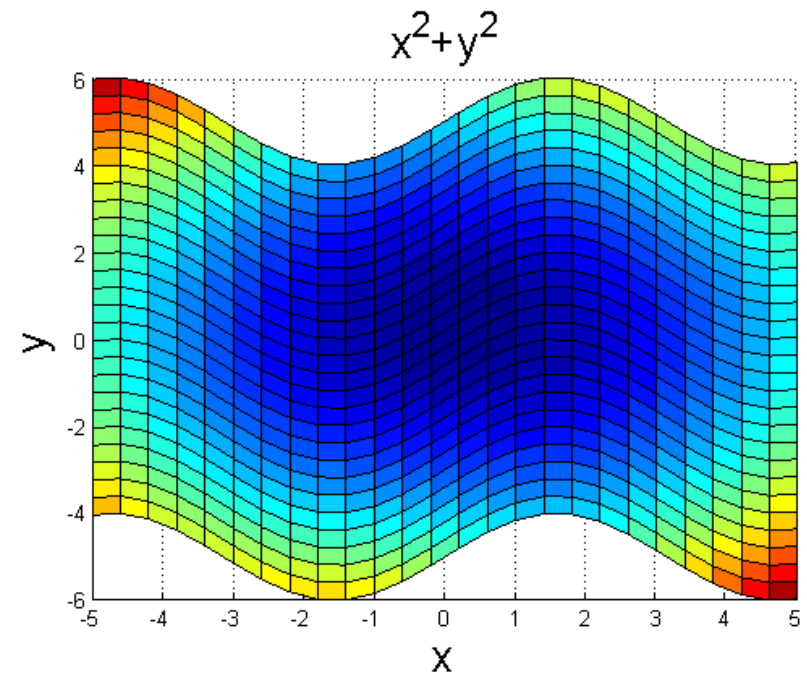
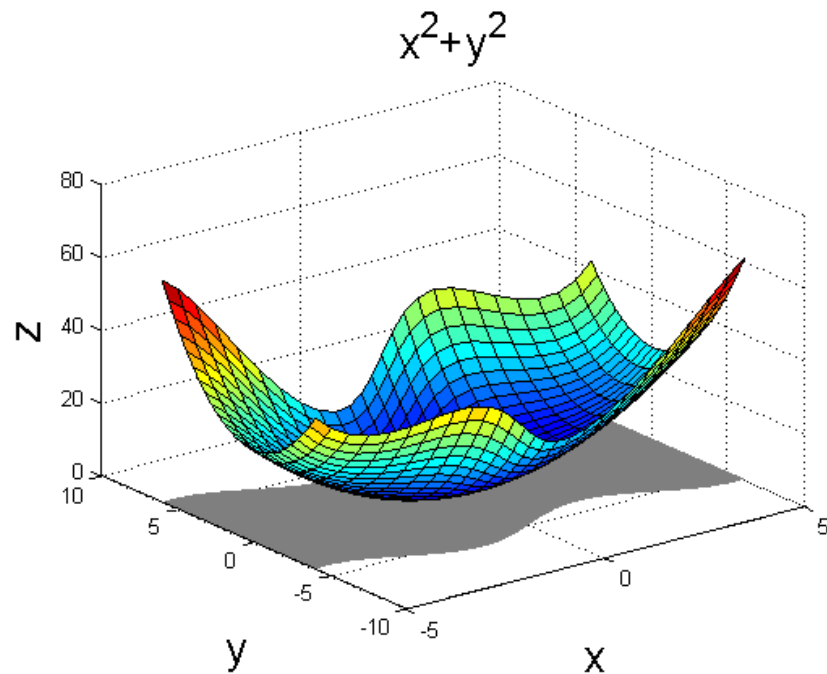
Frankfurt University of Applied Sciences

SS 2024

Mehrfachintegrale

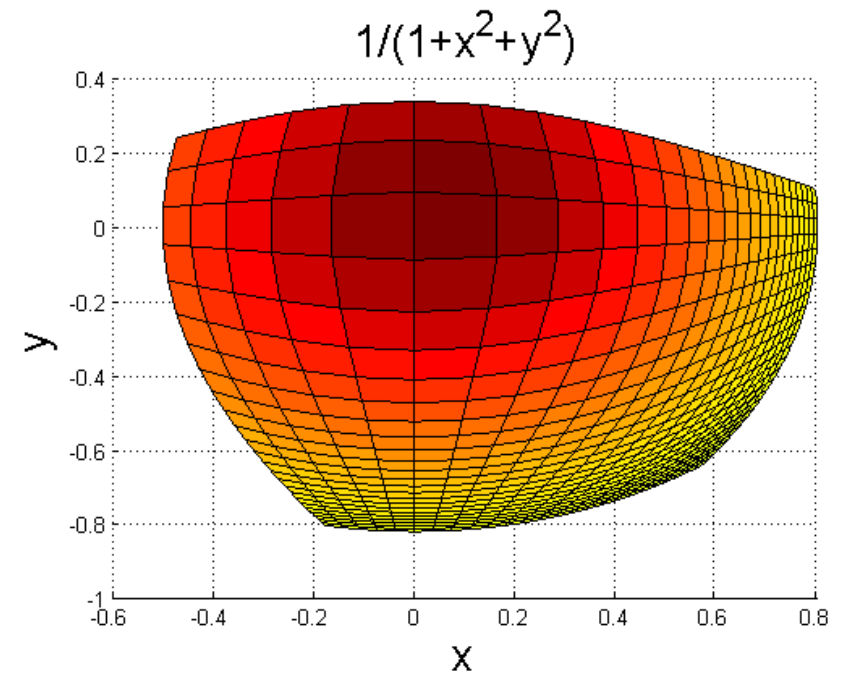
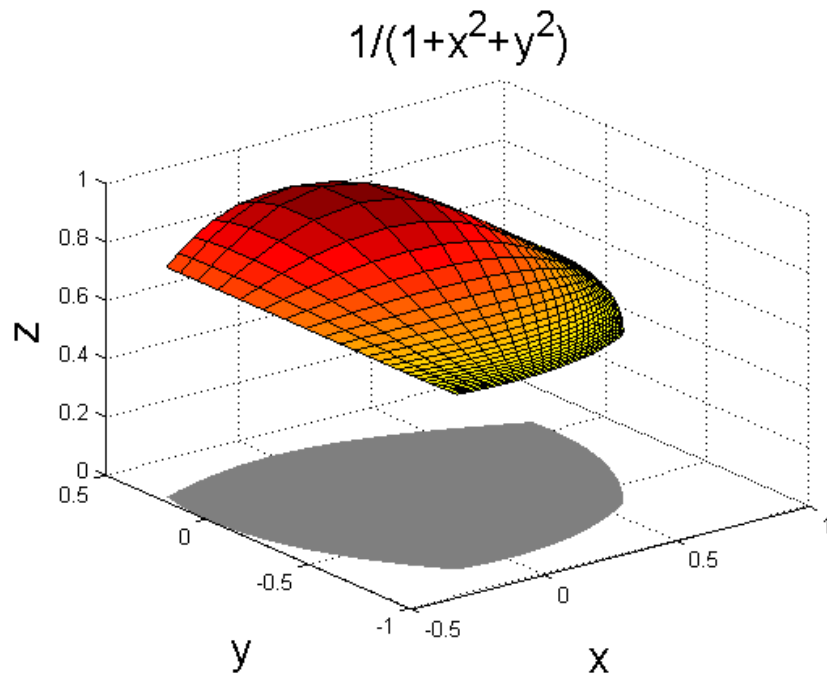
- ▶ Bisher bei gewöhnlicher Integration: Intervall $[a,b]$.
 - ▷ Automatisch entlang der Koordinatenachse.
- ▶ In höheren Dimensionen muss das Integrationsgebiet nicht mehr durch Parallelen zu den Koordinatenachsen begrenzt sein!
- ▶ Es folgen Beispiele ...

Mehrfachintegrale



Parabolfläche wie bisher, aber auf geschwungenem Gebiet.

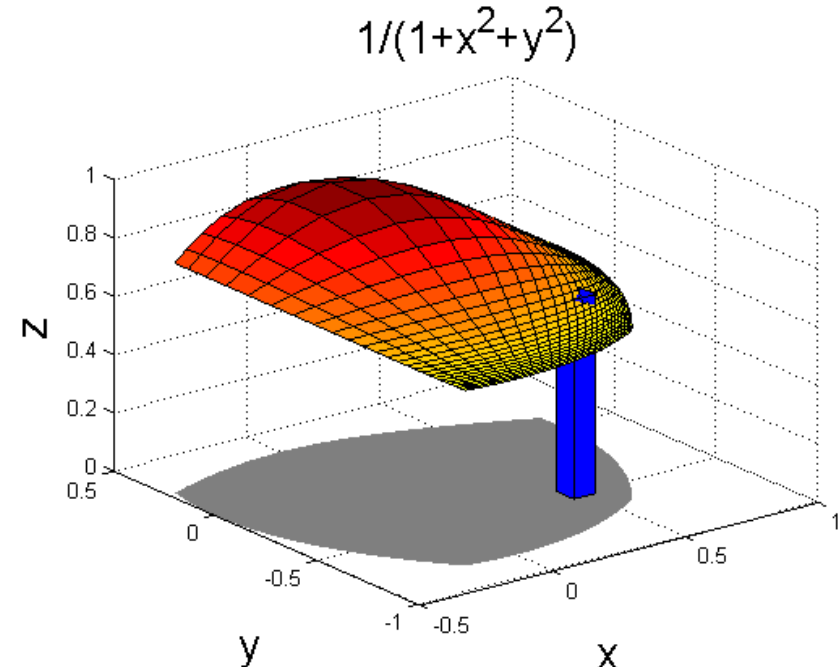
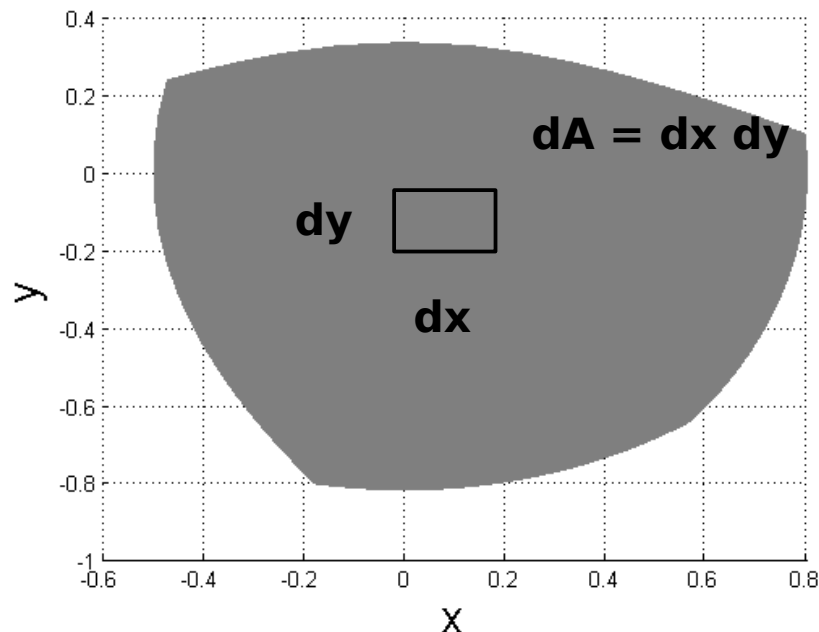
Mehrfachintegrale



„Hut“-Fläche wie bisher, aber auf gerundetem Gebiet.

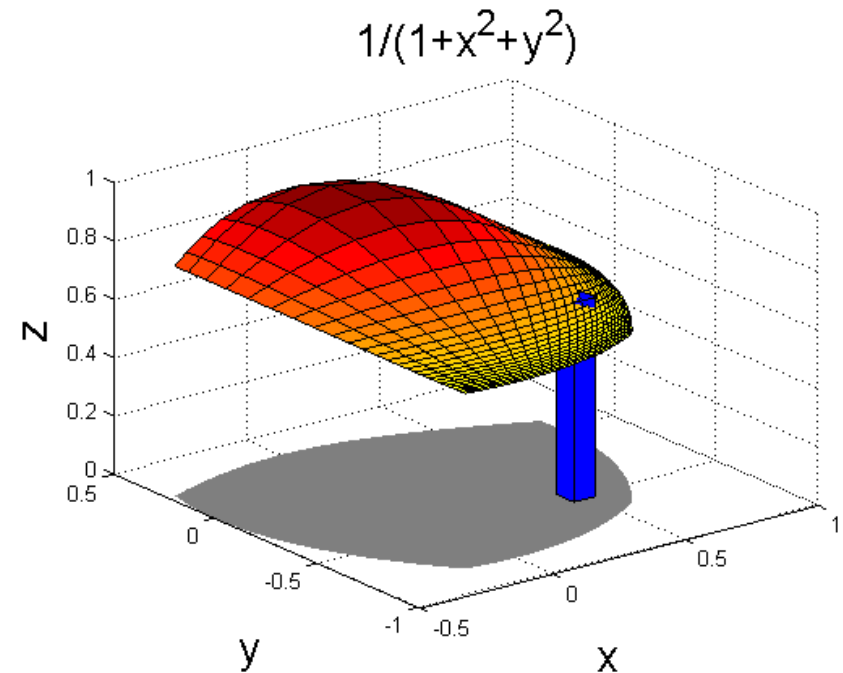
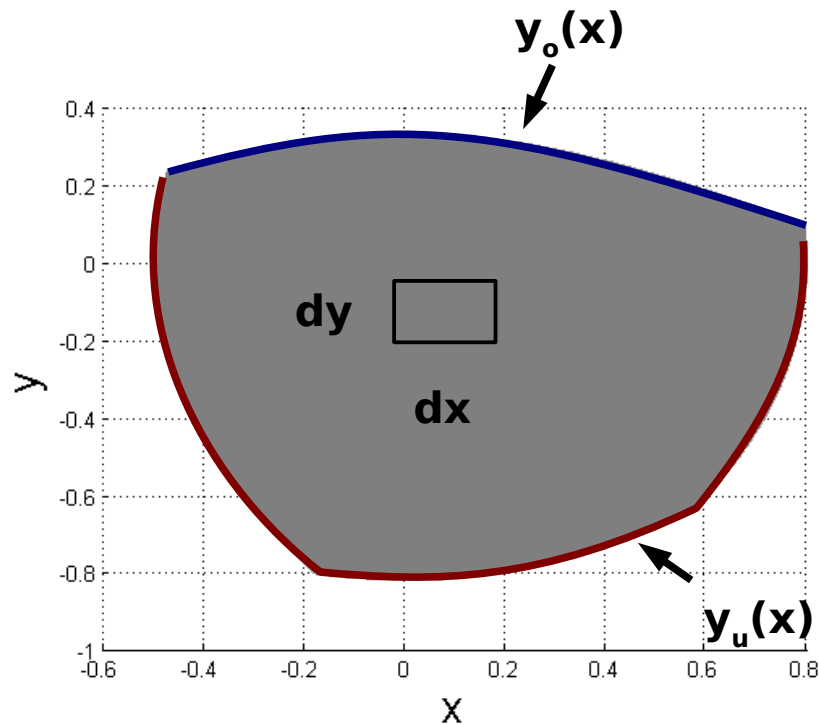
Mehrfachintegrale

- ▶ Man kann wieder mit Ober- und Untersummen arbeiten.
- ▶ D.h. im Fall $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: Säulen unter der Fläche.
- ▶ Volumen einer Säule: $dV = f(x,y) dA = f(x,y) dx dy$



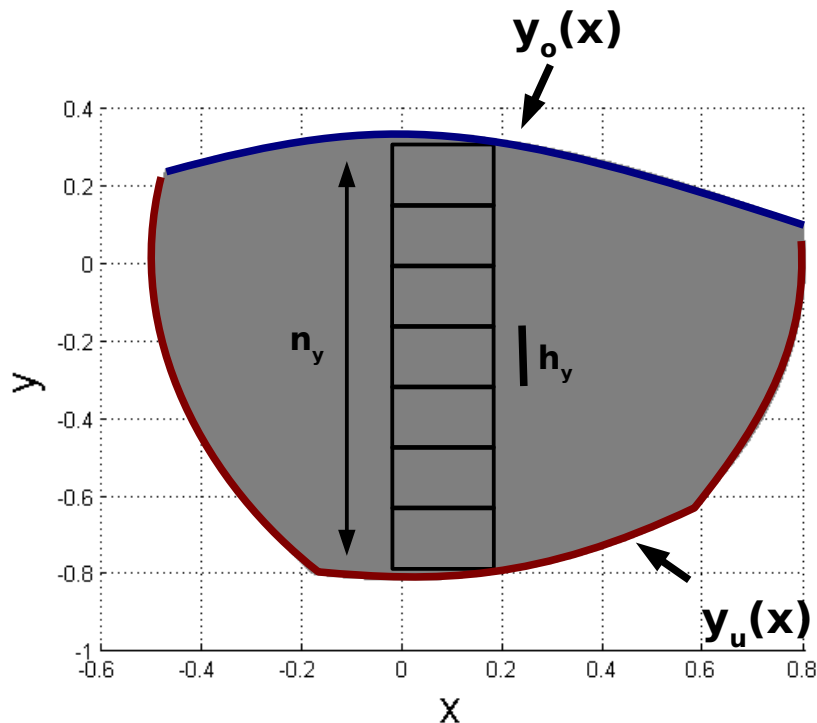
Mehrfachintegrale

- Berandung der Fläche sei gegeben durch Funktionen $y_o(x)$ und $y_u(x)$ („oben“ und „unten“).

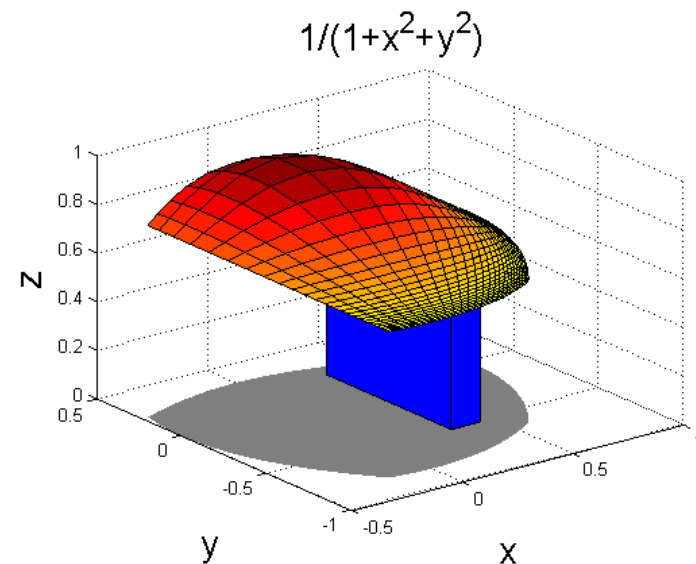


Mehrfachintegrale: 1.Integrationsschritt

- ▶ Bei einem festen x , summiere alle Säulen in y -Richtung.
- ▶ Summe geht von $y_u(x)$ bis $y_o(x)$
- ▶ Das Volumen einer (infinitesimalen) Scheibe folgt aus dem Limes $h_y \rightarrow 0$, $n_y \rightarrow \infty$ als Integral



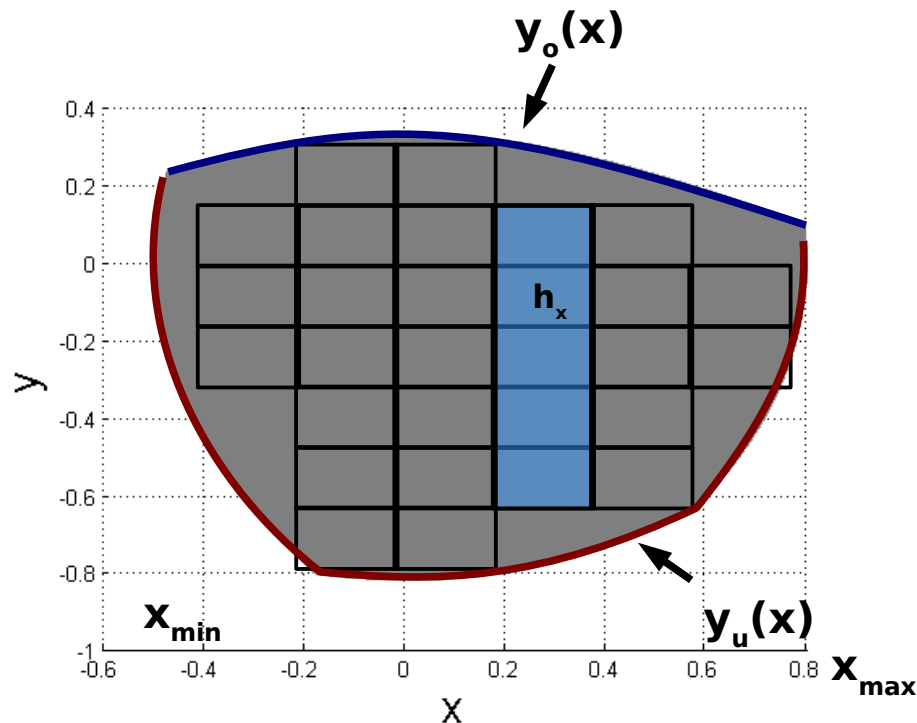
$$dV_{\text{Scheibe}} = \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



Mehrfachintegrale: 2.Integrationsschritt

- Jetzt summiert man die Volumina der Scheiben der Breite h_x auf, von x_{\min} bis x_{\max} . Dann bildet den Limes $h_x \rightarrow 0$, $n_x \rightarrow \infty$ und erhält so das Integral:

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dV_{\text{Scheibe}} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



Eine Scheibe der Breite h_x farblich hervorgehoben. Insges. gibt es n_x Scheiben, die sich aber in der Ausdehnung in y-Richtung unterscheiden können.

Mehrfachintegrale

- Zusammen:

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

inneres Integral

äußeres Integral

- Integrieren „von innen nach außen“.

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy dx$$

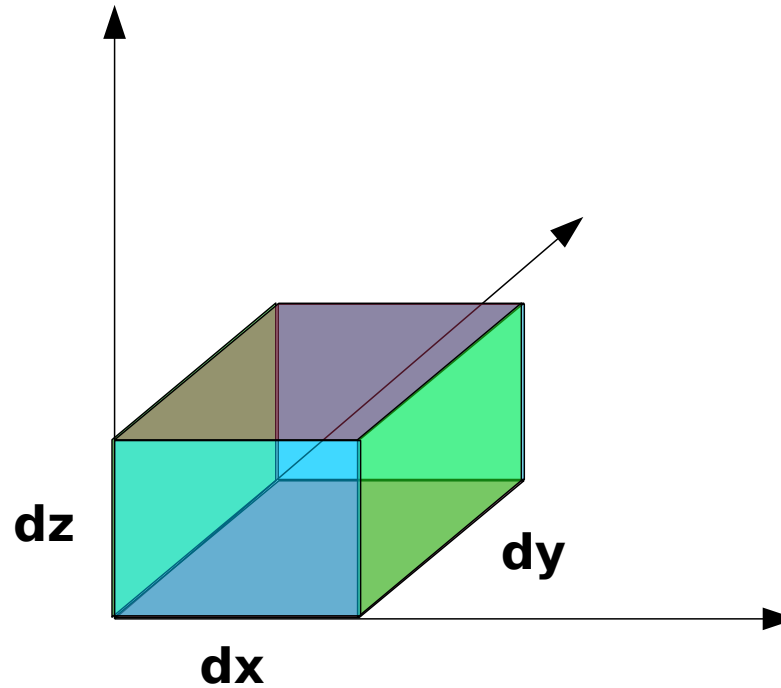
- Dementsprechend Reihenfolge von Integrationsgrenzen und Differentialen.

Mehrfachintegrale

- ▶ Die erste Schwierigkeit bei Mehrfachintegralen besteht darin, sich die Integrationsgrenzen als Funktion der anderen Variablen zu verschaffen.
- ▶ Diese müssen die gewünschte Geometrie exakt (oder eben hinreichend genau) erfassen.
 - ▷ „Funktionen basteln.“
 - ▷ Und dafür gibt es keine festen Regeln ...
- ▶ Beispiele

Mehrfachintegrale 3D

- kartesische Koordinaten 3D: $dV = dx \, dy \, dz$



- Beispiele

Mehrfachintegrale

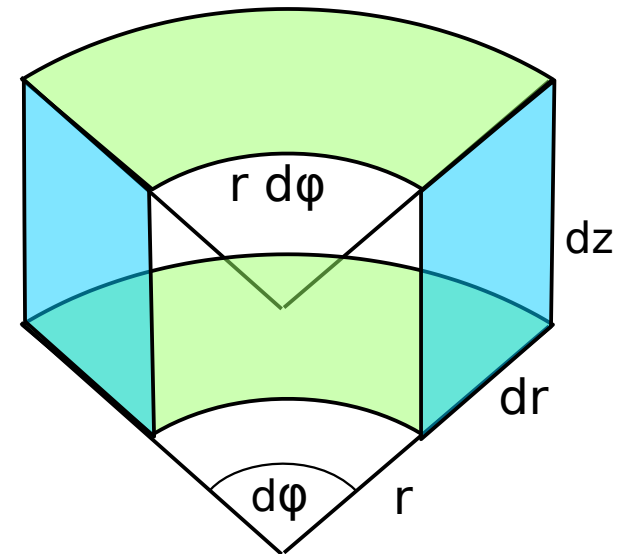
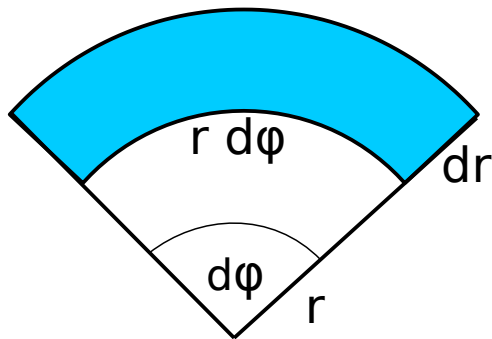
► Massenermittlung

- ▷ Gegeben eine Dichte $\rho(x,y,z)$ oder $\rho(r,\varphi,z)$.
- ▷ Dann ist die Masse M in einem Volumen V gegeben durch:

$$M = \int_V \rho dV$$

Mehrfachintegrale

- Polarkoordinaten 2D: $dA = r \, d\varphi \, dr$



- Zylinderkoordinaten 3D: $dV = r \, d\varphi \, dr \, dz$
- Beispiele