Kapitel 3, Übung 3: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 3, Seiten 42-55

3.6. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene bzw. die Linearisierung für die folgenden Funktionen.

a) $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},\ f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$ am Punkt (1,2)

b) $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ am Punkt (1,0)

c) $f:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z)=(x+y)^2 z^2$ am Punkt (1,2,3)

d) (freiwillig)

$f:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=\begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y^2+z^2 \\ x^2+y+z^2 \\ x^2+y^2+z \end{pmatrix}$ am Punkt (-1,0,1)

3.7. Bestimmen Sie, ob und, wenn ja, welche Extrema die folgenden Funktionen haben.

a) $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},\ f(x,y)=x^2 \cdot y^2$

b) $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+y^3-x-y$

Kapitel 3, Übung 3: Lösungen

3.6. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene bzw. die Linearisierung für die folgenden Funktionen.

Die Gleichung einer Tangentialebene am Linearisierungspunkt (x_0, y_0) für eine Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in kartesischen Koordinaten lautet:

$$g(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \qquad (*)$$

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$ am Punkt (1,2)

Bestimmung der einzelnen Komponenten der Gleichung $(*)$:

$$f(x_0=1, y_0=2)=\frac{5}{6}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{2x(1+x^2+y^2)-(x^2+y^2)(2x)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f(x_0=1,y_0=2)}{\partial x}=1/18$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{2y(1+x^2+y^2)-(x^2+y^2)(2y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f(x_0=1,y_0=2)}{\partial y}=1/9$$

Daraus folgt:

$$g(x,y)=\frac{5}{6}+\frac{1}{18}(x-1)+\frac{1}{9}(y-2)$$

b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ am Punkt (1,0)

Bestimmung der einzelnen Komponenten der Gleichung $(*)$:

$$f(x_0=1, y_0=0)=1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x(x^2+y^2)^{-1/2} \qquad \frac{\partial f(x_0=1,y_0=0)}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=y(x^2+y^2)^{-1/2} \qquad \frac{\partial f(x_0=1,y_0=0)}{\partial y}=0$$

Daraus folgt:

$$g(x,y)=1+1(x-1)=x$$

b.w.

c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z)=(x+y)^2 z^2$ am Punkt (1,2,3)

Bei Funktionen $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (3 Variablen) spricht man nicht mehr von einer Tangentialebene, sondern allgemeiner von einer Linearisierung. In Glg. $(*)$ kommt dann noch ganz analog ein Term für die z-Variable hinzu.

Bestimmung der einzelnen Komponenten der Gleichung:

$$f(x_0=1, y_0=2, z_0=3)=81$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2(x+y)z^2 \qquad \frac{\partial f(x_0=1, y_0=2, z_0=3)}{\partial x}=54$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2(x+y)z^2 \qquad \frac{\partial f(x_0=1, y_0=2, z_0=3)}{\partial y}=54$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial z}=2z(x+y)^2 \qquad \frac{\partial f(x_0=1, y_0=2, z_0=3)}{\partial z}=54$$

Daraus folgt:

$$g(x,y,z)=81+54(x-1)+54(y-2)+54(z-3)$$

d)

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z)=\begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y^2+z^2 \\ x^2+y+z^2 \\ x^2+y^2+z \end{pmatrix} \quad \text{am Punkt } (-1,0,1)$$

Auch hier spricht man nicht mehr von einer Tangentialebene, sondern allgemeiner von einer Linearisierung. Vgl. dazu **Kap.3, S.46, Glg. (1).** Angewendet auf $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_0)+grad\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_0)\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_0) \qquad (**)$$

mit $\boldsymbol{a}=(x,y,z), \boldsymbol{a_0}=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$. Der Gradient $grad\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_0})=grad\,\boldsymbol{f}(x_0,y_0,z_0)$ ist nun die Jacobi-Matrix (Kap.3, S.36) und der zweite Term in $(**)$ ist ein Matrix-Vektor-Produkt

Funktionswert am Linearisierungspunkt: $\boldsymbol{f}(x_0=-1, y_0=0, z_0=1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$grad\,\boldsymbol{f}$ ist die Jacobi-Matrix: $grad\,\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} 1 & 2y & 2z \\ 2x & 1 & 2z \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix}$

Der Gradient am Linearisierungspunkt: $grad\,\boldsymbol{f}(x_0=-1, y_0=0, z_0=1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Damit lautet die Linearisierung: $\boldsymbol{g}(x,y,z)=\begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \\ g_3(x,y,z) \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_0})}+\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{grad\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_0})}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}}_{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a_0})}$

Das Ergebnis lässt sich auch so lesen: Für jede Komponente f_i von **f** wird die Linearisierung $(*)$ berechnet und als i-te Komponente in **g** eingetragen.

3.7. Bestimmen Sie, ob und wenn ja welche, Extrema die folgenden Funktionen haben.

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y)=x^2 \cdot y^2$

$$\text{grad}(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy^2 & 2yx^2\end{pmatrix}$$

Mögliches Extremum aus: $grad\,f=0 \quad \Rightarrow$ Mögliches Extremum bei (0,0).

Ob allerdings wirklich ein Extremum vorliegt, wird mit Hilfe der Hesse-Matrix geprüft.

$$\text{Hess}(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2\end{pmatrix}$$

Wenn jetzt die mögliche Extremstelle in die Hessematrix eingesetzt wird, wird die Hessematrix zur Nullmatrix. Sie ist somit weder positiv noch negativ definit. Also liegt kein Extremum vor

b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y)=x^3+y^3-x-y$

$$\text{grad}(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x^2-1 & 3y^2-1\end{pmatrix}$$ Mögliches Extremum aus: $grad\,f=0$

$\Rightarrow \quad 3x^2-1=0 \quad \Rightarrow x_{+,-}=\pm\sqrt{1/3} \quad$ und $\quad 3y^2-1=0 \quad \Rightarrow y_{+,-}=\pm\sqrt{1/3}$

Diese Werte für x und y können unabhängig voneinander angenommen werden. Es gibt vier Kombinationen dieser Werte. Das heisst, an diesen an vier Nullstellen des Gradienten können Extrema vorliegen. Die Definitheit der Hesse-Matrix muss also für diese vier Fälle überprüft werden. Es ist:

$$\text{Hess}(f)=\begin{pmatrix}6x & 0 \\ 0 & 6y\end{pmatrix}$$

Bezeichnung: $(+,-)$ entspricht $x=+\sqrt{1/3}$ und $y=-\sqrt{1/3}$, usw.

$\text{Hess}(f)_{(+,+)}=\begin{pmatrix}\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ ist positiv definit. Dort ist ein Minimum.

$\text{Hess}(f)_{(+,-)}=\begin{pmatrix}\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ ist indefinit. Kein Extremum.

$\text{Hess}(f)_{(-,+)}=\begin{pmatrix}\frac{-6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ ist indefinit. Kein Extremum.

$\text{Hess}(f)_{(-,-)}=\begin{pmatrix}\frac{-6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ ist negativ definit. Dort ist ein Maximum.