Mathematik 2

Kapitel 5

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Ulrich H. Becker

Frankfurt University of Applied Sciences

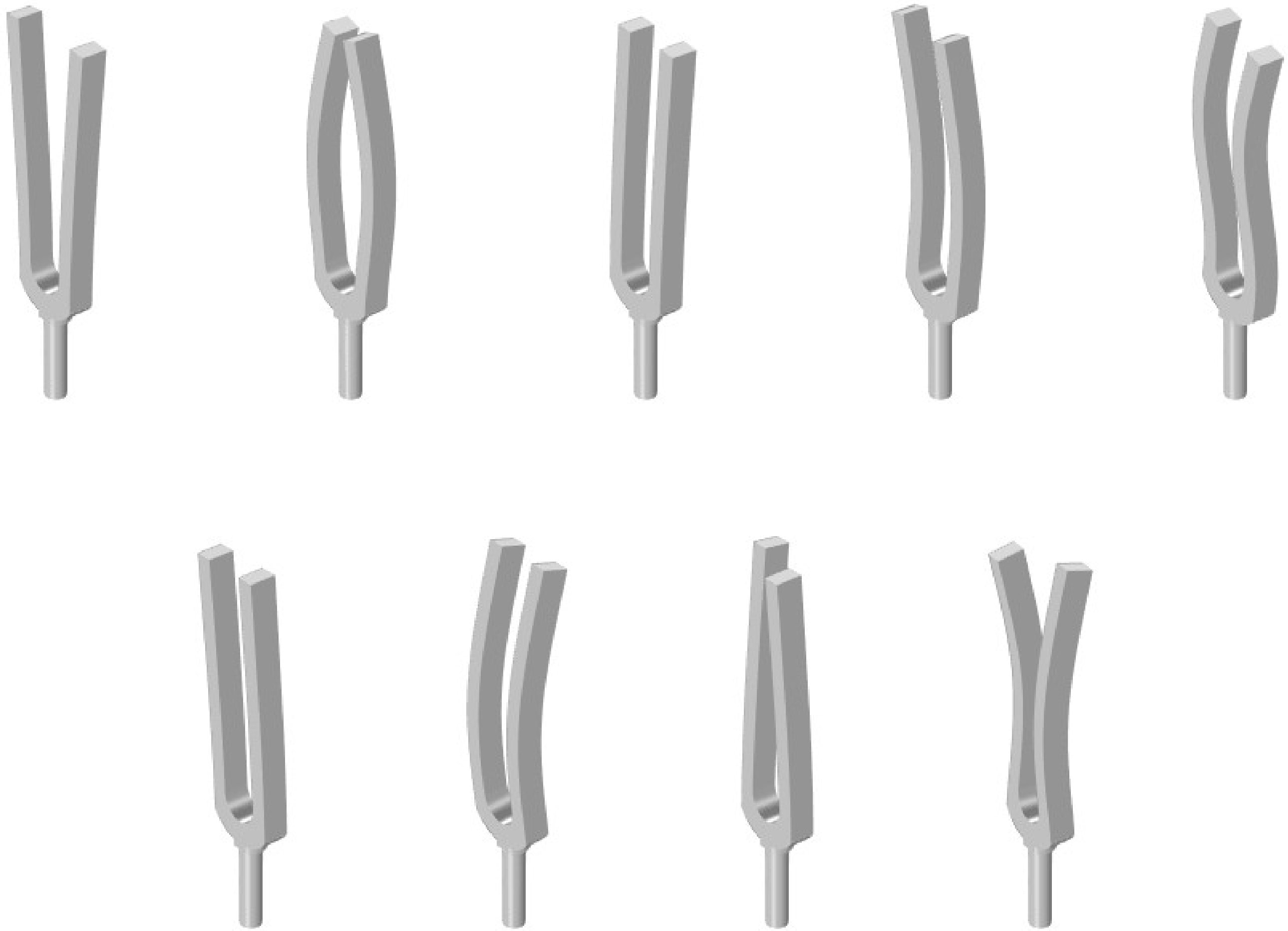
SS 2024

Motivation: Warum Differentialgleichungen?

- Differentialgleichung DGL
  Differentialgleichungen DGLn
- Die Beschreibungen von physikalischen und technischen Vorgängen führt auf DGLn.
- Die Lösungen von DGLn kann man berechnen.
- Damit hat man die Möglichkeit, das Verhalten eines technischen Gegenstandes zu bestimmen bzw. kennen zu lernen, bevor man ihn baut.
  - Maschinen, Bauwerke

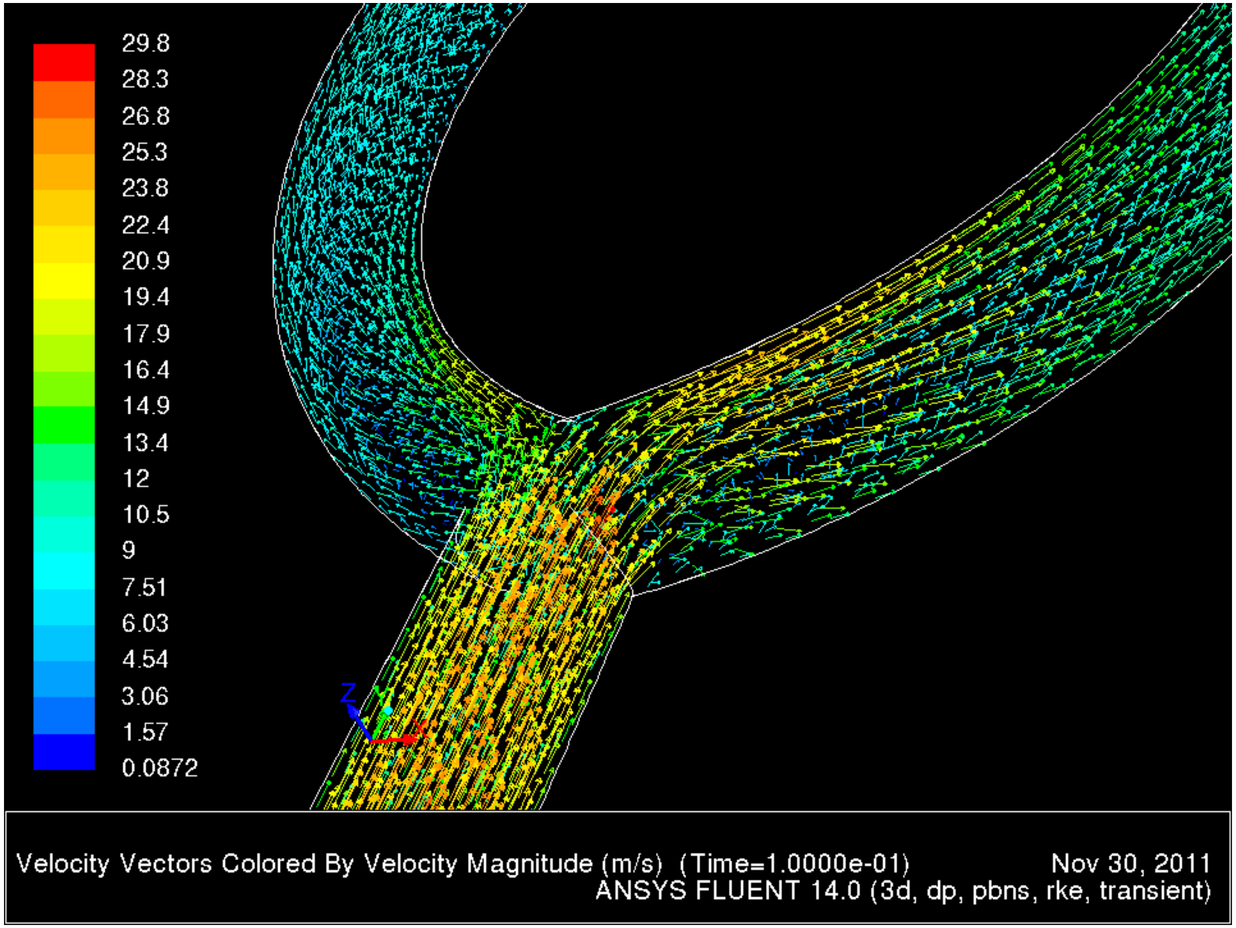
Beispiel: Schwingungen einer Stimmgabel

Dr. Daniel A. Russell, Pennsylvania State University



http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/TuningFork/fork-modes.html

Beispiel: Computational Fluid Dynamics



Beispiele Fazit

- Das sind schon fortgeschrittene Anwendungen, die erhebliche Vorbereitungen brauchen.
- Wir werden in dieser Vorlesung einfachere Aufgaben behandeln.
- Es wird in erster Linie um <u>gewöhnliche Differentialgleichungen</u> gehen.
  - … gleich mehr dazu.
- Die Anwendungen in Simulationsprogrammen wie in den gerade gezeigten Beispielen bauen darauf auf!

Bezeichnungen

- Ableitungen nach der Zeit

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\dot{f}$$

- Ableitung nach einer als bekannt vorausgesetzten Variable, z.B. x

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=f\,'$$

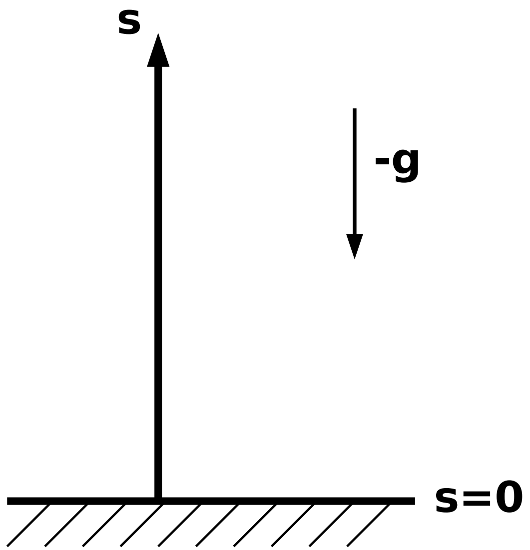
- partielle Ableitung nach einer Variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\partial_x f$$

Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung

- Newton:
  - Kraft = Masse *m* mal Beschleunigung *a*.
  - Beschleunigung ist die zweite Ableitung der Ortskoordinate *s* eines Massenpunktes nach der Zeit *t*.

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{s} \qquad s = s(t)$$



- Freier Fall im luftleeren Raum mit Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

$$F = -m \cdot g$$

Prinzipielle Überlegungen

- In allen diesen Fällen geht es um Bewegungen.
- M.a.W., die Positionen, Geschwindigkeiten, usw. sind Funktionen der Zeit.
- M.a.W., die Lösung des Problems besteht darin, eine oder mehrere Funktionen zu finden.
- Beachte Satz aus der Analysis:
  Wenn zwei Funktionen dieselbe Ableitung haben, dann unterscheiden sie sich höchstens um eine Konstante.
- M.a.W., die Ableitungen einer Funktion sagen sehr viel über die Funktion selber aus.

Prinzipielle Überlegungen

- Vergleiche dazu „normale Gleichungen"

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

- Sie stellen Bedingungen an die Werte der Variablen. Indem man die Gleichungen löst, erhält man die Werte.
- In analoger Weise stellen DGLn Bedingungen an die Funktion und ihre Ableitungen. Indem man nun die DGLn löst, erhält man die gesuchte Funktion.

Grundbegriffe, Klassifikation

- Abhängige und unabhängige Variablen
  - Gesucht $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.
  - M.a.W.: Gesucht ist

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{pmatrix}$$

  - Es sind f_1, f_2, …, f_n die *abhängigen Variablen*.
  - Es sind x_1, x_2, …, x_m die *unabhängigen Variablen.*

Grundbegriffe, Klassifikation

- Beispiel Stimmgabel.
- Gesucht ist die Auslenkung aus der Ruhelage.
- Die Auslenkung kann in drei Raumrichtungen erfolgen:
  - a: Auslenkung in x-Richtung
  - b: Auslenkung in y-Richtung
  - c: Auslenkung in z-Richtung
- Diese Auslenkungen hängen ab von der Position auf der Stimmgabel mit den Koordinaten (x,y,z) und der Zeit t.

Grundbegriffe, Klassifikation

- Beispiel Stimmgabel (Fortsetzung)
- Gesucht ist also

$$\begin{pmatrix} a(x,y,z,t) \\ b(x,y,z,t) \\ c(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

- Abhängige Variablen sind a,b,c
- Unabhängige Variablen sind x,y,z,t
- Beachte:
  Die Anzahl der abhängigen und unabhängigen Variablen muss *nicht* gleich sein!

Grundbegriffe, Klassifikation

- Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen
  - *Gewöhnliche DGL*n haben eine unabhängige Variable.
  - *Partielle DGL*n haben mehr als eine unabhängige Variable.
- Beispiele:
  - $\ddot{s} = -g$ hat eine unabhängige Variable: die Zeit t und eine abhängige Variable s(t): gewöhnl. DGL
  - $\partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0$ hat zwei unabhängige Variablen: die Zeit t und den Ort x ; und eine abhängige Variable u(x,t): partielle DGL

Grundbegriffe, Klassifikation

- Beispiele (Fortsetzung)
  - $$\dot{x} = x - y + t$$
    $$\dot{y} = 2x + y - t$$

    hat eine unabhängige Variable: die Zeit t; und zwei abhängige Variablen, die Koordinaten x(t) und y(t): gewöhnl. DGL

    - Hier: System von gewöhnl. DGLn .

Grundbegriffe, Klassifikation

- Die *Ordnung einer Differentialgleichung* ist der Grad der höchsten Ableitung in der DGL.

- Beispiele:
  - ▷ $\ddot{s} = -g$ ist DGL 2.Ordnung
  - ▷ $(\dot{x})^2 + x = 0$ ist DGL 1.Ordnung

Grundbegriffe, Klassifikation

- Lineare und nicht-lineare Differentialgleichungen
  - In einer *linearen DGL* treten die abhängigen Variablen nur linear auf.
  - In einer *nicht-linearen DGL* eben nicht.

- Beispiele
  - $\ddot{s} = -g$ lineare DGL
  - $(\dot{x})^2 + x = 0$ nicht-lineare DGL
  - $f'' - 4xf' = \cos 2x$ lineare DGL

Grundbegriffe, Klassifikation

- Beispiele (Fortsetzung)
  - $$4\dot{x}+3\dot{y}-x+2y=\cos t$$
    $$6\dot{x}-2\dot{y}-2x+y=2\sin t$$

    ist in System linearer, gewöhnl. DGL

  - $$\ddot{x}+x\dot{x}=4\sin t$$

    $$4\dot{x}+\sin x=0$$

    sind zwei nicht-lineare, gewöhnl. DGL

Grundbegriffe, Klassifikation

- Homogene und inhomogene DGLn
  - Eine lineare DGL heißt *homogen*, wenn
    in jedem Term eine abhängige Variable auftritt.
    - … und sie tritt dort n.V. linear auf.
  - Eine lineare DGL heißt *inhomogen*, wenn es mind. einen Term gibt, in dem keine abhängige Variable auftritt.
- Beispiele
  - $\ddot{s} = -g$ inhomogene, lineare DGL
  - $\dot{x} + 4x = 0$ homogene, lineare DGL

Lösen von DGL

- per Computer:
  - WolframAlpha
  - MATLAB
  - MATHEMATICA
  - MAPLE
  - MuPAD
  - usw.

- Beispiele WolframAlpha:

$$\dot{x}+2x=0$$
$$\dot{x}+2x=t^2$$
$$\ddot{x}+\dot{x}-4*x=\cos t+e^t$$

Lösen von DGL

- Diese Programme, so wie sie hier vorgestellt wurden, berechnen eine <u>analytische</u> Lösung.
- Die kann man nicht immer angeben!
  Diese Programme zeigen dies an.
  Dann muss man sich zu helfen wissen.
- Numerische Lösung von DGLn ist nicht mehr so einfach. Man muss die passenden Algorithmen für die gegebene DGL verwenden.
- Man muss einiges über DGLn gelernt haben,
  um das richtig zu machen.

Einfache DGL: Lösen durch „Draufschauen“

- Wie gesehen: Die Lösung einer DGL ist eine Funktion.
- In einfachen Fällen, kann man eine solche Funktion schnell angeben.
- Beispiele
  - $\dot{f} = -4f$
  - $\ddot{f} + \lambda^2 f = 0$

- Idee: DGL sprechen.
  - Welche Funktion ist bis auf einen Faktor ihre eigene Ableitung?
  - Bei welcher Funktion ist die zweite Ableitung bis auf einen Faktor das negative der Funktion?

1: $f(t) = e^{-4t}$
2: $f(t) = \sin(\lambda t)$

Allgemeine und spezielle Lösung einer DGL

- Selbst wenn man eine Lösung ggf. schnell angeben kann, bedeutet es nicht, dass das Problem generell gelöst ist.
- Beispiele
  - $\dot{f} = -4f$
  - $\ddot{f} + \lambda^2 f = 0$

1: $f(t) = Ae^{-4t}$
2: $f(t) = A\sin(\lambda t) + B\cos(\lambda t)$

- I.d.R. gibt es eine *allgemeine Lösung*, die unbekannte Konstanten enthält.
- Deren Anzahl ist gleich der Ordnung der DGL.
- Für feste Werte dieser Konstanten erhält man eine *spezielle Lösung* der DGL.

Aufgaben

- Wie viele freie Konstanten erwarten Sie für die allg. Lösungen folgender DGLn? Bestimmen Sie dann die allg. Lösung.

1) $\dot{x}=4t^2$

3) $\dot{x}=-6x$

2) $\ddot{x}=t^3-2t$

4) $\ddot{x}=-6x$

1. $x(t)=\frac{4}{3}t^3+C$ 2. $x(t)=C_0+C_1t+\frac{t^5}{20}-\frac{t^3}{3}$ 3. $x(t)=C\,e^{-6t}$

4. $x(t)=C_0\sin(\sqrt{6}t)+C_1\cos(\sqrt{6}t)$

Randbedingungen, Anfangswerte

- Werte für die freien Konstanten der allg. Lösung lassen sich nur durch weitere Bedingungen bestimmen.
- Dies sind i.d.R. *Randbedingungen*, also Bedingungen an die Lösung an den Grenzen des Intervalls, auf dem die Lösung gesucht wird.
- Bei zeitabhängigen Problemen kann man diese Bedingung i.d.R. nur am Anfang stellen. Dann heißen die Randbedingungen *Anfangswerte*.
    - Bemerkung: Genau genommen ist das eine Eigenschaft der DGL, ob nur an einem oder an mehreren Rändern des Lösungsintervalls Werte vorgegeben werden können.

Randbedingungen, Anfangswerte

- Beispiele
  - $\dot{f}=-4f \qquad f(0)=2$
  - $\ddot{f}+\lambda^2 f=0 \qquad f(0)=0\ ,\ \dot{f}(0)=1$
  - $\ddot{f}+\lambda^2 f=0 \qquad f(0)=2\ ,\ f\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)=1$

1: $f(t)=2e^{-4t}$
2: $f(t)=\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t)+0*\cos(\lambda t)$
3: $f(t)=1*\sin(\lambda t)+2*\cos(\lambda t)$

- Kann/muss man Randbedingungen an mehr als einem Rand stellen, spricht man von einem Randwertproblem.
- Bei Bedingungen an nur einem Rand spricht man von einem Anfangswertproblem.
  - Oft sind Anfangswertprobleme einfacher zu lösen.

Aufgaben

- DGLn wie zuvor. Bestimmen Sie nun die spezielle Lösung zu den gegebenen Randbedingungen

1) $\dot{x}=4t^2$
   $x(0)=1$

2) $\ddot{x}=t^3-2t$
   $x(0)=0,\dot{x}(0)=1$

3) $\dot{x}=-6x$
   $x(0)=3$

4) $\ddot{x}=-6x$
   $x(0)=1,\dot{x}(0)=2$

1. $x(t)=\frac{4}{3}t^3+1$ 2. $x(t)=0+t+\frac{t^5}{20}-\frac{t^3}{3}$ 3. $x(t)=3e^{-6t}$

4. $x(t)=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(\sqrt{6}t)+\cos(\sqrt{6}t)$

Separable DGLn 1.Ordnung

- Sei eine DGL von der Form

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

- Sie heißt separabel, wenn man sie durch Umstellen in folgende Form bringen kann:

$$g(x)\frac{dx}{dt} = h(t)$$

- Man nennt das „Trennung der Variablen“.
- Dann kann man eine Lösung berechnen aus

$$\int g(x)\,dx = \int h(t)\,dt$$

… wenn man das Ergebnis nach x auflösen kann.

Separable DGLn 1.Ordnung

- Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = 4\,x\,t \qquad x > 0$$

- Aufgaben:

$$\frac{dx}{dt} = k\,x \qquad x > 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b\,x}{t} \qquad x > 0$$

$$t^2 \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x} \qquad x > 0\,, \quad x(4) = 9$$

Separable DGLn 1.Ordnung: Lösungen

- Beispiel

$$x(t)=C\,e^{2t^2}$$

- Aufgaben:

$$x(t)=C\,e^{k\,t}$$

$$x(t)=C\,t^b$$

$$x(t)=\sqrt{\frac{163}{2}-\frac{2}{t}}$$

Exakte DGLn 1. Ordnung

- Betrachte folgende Anwendung der Kettenregel für Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}h(t,x(t))=\frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial h}{\partial t}$$

- Sei eine DGL von der Form

$$p(t,x)\frac{dx}{dt}+q(t,x)=0$$

- Kann man eine Funktion h(t,x) finden mit

$$\frac{\partial h}{\partial x}=p(t,x) \qquad \frac{\partial h}{\partial t}=q(t,x)$$

dann heißt die DGL *exakt* und es folgt:

$$p(t,x)\frac{dx}{dt}+q(t,x)=\frac{dh}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad h(t,x)=C$$

Nach x auflösen!

Exakte DGLn 1. Ordnung

- Beispiel

$$2xt\frac{dx}{dt}+x^2-2t=0$$

- Frage:
  - Woher weiß man, dass es so eine Funktion h gibt?
  - Und wie findet man sie, wenn man sie nicht erraten kann?

$$x(t)=\pm\sqrt{t+\frac{C}{t}}$$

Exakte DGLn 1. Ordnung

- Woher weiß man, dass es so eine Funktion h gibt?
- Falls es h gibt mit

$$p(t,x)=\frac{\partial h}{\partial x} \qquad q(t,x)=\frac{\partial h}{\partial t}$$

dann gilt auch

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}=\frac{\partial q}{\partial x}$$

- Für unsere Praxis gilt das auch umgekehrt: Aus

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial q}{\partial x}$$

folgt dann, dass es auch die Funktion h gibt.

Exakte DGLn 1. Ordnung

- Und wie findet man die Funktion h, wenn man sie nicht erraten kann?
- Ein allgemeines Rezept ist aufwendig.
  Aber folgendes ist i.d.R. ausreichend:
  - Man berechnet h_1 und h_2 aus folgenden Bedingungen

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = p(t,x) \qquad \frac{\partial h_2}{\partial t} = q(t,x)$$

  - … und versucht dann, durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten $h_1 = h_2 = h$ zu erhalten.

Exakte DGLn 1. Ordnung

- Beispiel

$$\frac{t}{x+t}\frac{dx}{dt}+\frac{t}{x+t}+\ln\left(x+t\right)=0$$

- Aufgaben: Sind diese DGLn exakt?
  Wenn ja, bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

$$x\frac{dx}{dt}+t=0 \qquad x\frac{dx}{dt}-t=0 \qquad \left(x-t^2\right)\frac{dx}{dt}-2xt=0$$

Exakte DGLn 1. Ordnung: Lösungen

- Beispiel

$$t \ln(x+t) = C \;\Rightarrow\; x(t) = e^{C/t} - t$$

- Aufgaben: Sind diese DGLn exakt?
  Wenn ja, bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

$$x(t) = \pm\sqrt{C - t^2} \qquad x(t) = \pm\sqrt{C + t^2} \qquad x(t) = t^2 \pm \sqrt{C + t^4}$$

Lineare DGLn 1. Ordnung

- Spezialfall: homogene, lineare DGL 1.Ordnung

$$\frac{dx}{dt} + p(t)\,x = 0$$

- Trick: Mit g(t) multiplizieren.

$$g(t)\frac{dx}{dt} + g(t)\,p(t)\,x = 0$$

- Diese DGL ist exakt, wenn gilt

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial (gpx)}{\partial x} = gp$$

- M.a.W., Wenn wir ein g(t) finden, dass diese Bedingung erfüllt, dann können wir damit ein x(t) finden, das die urspr. DGL erfüllt.

Lineare DGLn 1. Ordnung

- Also erst einmal g(t) finden.
  Trennung der Variablen:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = gp \;\Rightarrow\; \frac{dg}{g} = p\,dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dg}{g} = \int p\,dt = P(t)$$

$$\Rightarrow\; \ln g = P(t) \;\Rightarrow\; g(t) = e^{P(t)} \qquad \text{mit } P(t) = \int p\,dt$$

„Groß-P ist Stammfunktion zu Klein-p.“

- Damit folgt

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 \;\Rightarrow\; e^{P(t)}\frac{dx}{dt} + e^{P(t)}p(t)x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(e^{P(t)}x\right) = 0$$

und es ist deshalb $h(x,t) = e^{P(t)}x$

Lineare DGLn 1. Ordnung

- Damit können wir eine allgemeine Lösung für eine homogene, lineare DGL 1.Ordnung angeben:

$$h(x,t)=e^{P(t)}x=C \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t)=C\,e^{-P(t)}} \qquad P(t)=\int p\,dt$$

- Bemerkung: $g=e^{P(t)}$ bezeichnet man auch als *integrierenden Faktor*, weil es die DGL zu einer exakten DGL macht.

Lineare DGLn 1. Ordnung: Allg. Lösung

- Nun der allgemeinere Fall, die *inhomogene*, lineare DGL 1.Ordnung

$$\frac{dx}{dt}+p(t)x=r(t)$$

- Wir gehen erst einmal genauso vor:

$$e^{P(t)}\frac{dx}{dt}+e^{P(t)}p(t)x=e^{P(t)}r(t) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(e^{P(t)}x\right)=e^{P(t)}r(t)$$

- Integration nach t liefert dann:

$$e^{P(t)}x=\int e^{P(t)}r(t)\,dt+C \quad\Rightarrow\quad \boxed{x(t)=e^{-P(t)}\left[\int e^{P(t)}r(t)\,dt+C\right]}$$

$$P(t)=\int p\,dt$$

Lineare DGLn 1.Ordnung

- Beispiele

$$\frac{dx}{dt}+tx=0$$

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t}=t \qquad x(2)=\frac{1}{3}$$

- Aufgaben:

$$\frac{dx}{dt}+3x=0$$

$$\frac{dx}{dt}-4x=t$$

$$\frac{dx}{dt}+tx=-2t$$
$$x(0)=2$$

Lineare DGLn 1.Ordnung: Lösungen

- Beispiele

$$x(t) = C\,e^{-\frac{1}{2}t^2} \qquad\qquad x(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{t}$$

- Aufgaben:

$$x(t) = C\,e^{-3t} \qquad x(t) = -\frac{1}{16} - \frac{t}{4} + C\,e^{4t} \qquad x(t) = 4\,e^{-t^2/2} - 2$$

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Gesucht x=x(t), y=y(t) z.B. aus Reaktionen von zwei Substanzen mit Konzentrationen x(t) und y(t).
- Beispiel

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x+12y\\ \dot{y}&=3x+y\end{aligned} \quad \text{oder} \quad \boxed{\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Bei einer DGL: $\dot{x}=\lambda x$

  folgt die Lösung aus $x(t)=C e^{\lambda t}$

- Idee: Ähnlicher Ansatz $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{c}\, e^{\lambda t}$
  - Was ist λ?
  - Was ist der konstante Vektor **c**?

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Ansatz $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{c}\,e^{\lambda t}$ einsetzen in $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$ ergibt

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\lambda\,e^{\lambda t}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{c}\,e^{\lambda t}\;\Rightarrow\;\lambda\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{c}$$

- D.h., λ ist Eigenwert von **A** und der Vektor **c** ist der zugehörige Eigenvektor.
- Das Lösen von Systemen von DGLn führt auf die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren!
- Eigenwerte aus $\left|\boldsymbol{A}-\lambda\,\boldsymbol{I}\right|=0$
- Damit Eigenvektoren aus $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{c}=\lambda\,\boldsymbol{c}$
- Aber es stellen sich Fragen ...

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Fragen:
  - Was ist bei mehreren Eigenwerten/Eigenvektoren?
  - Wir benötigen freie Parameter (Konstanten), um Randbedingungen zu berücksichtigen. Die Vektoren **c** sind aber fest, da sie Eigenvektoren sind.
- Betrachte zwei Lösungen zu zwei unterschiedlichen Eigenwerten.

$$\boldsymbol{x_1}(t)=\boldsymbol{c_1}e^{\lambda_1 t} \qquad \boldsymbol{x_2}(t)=\boldsymbol{c_2}e^{\lambda_2 t}$$

- Also gilt $\dot{x}=\boldsymbol{A}x \Leftrightarrow \dot{x}-\boldsymbol{A}x=0$ sowohl für $\mathbf{x}_1$ als auch $\mathbf{x}_2$
- Nun sieht man durch Einsetzen:

$D_1\boldsymbol{x_1}+D_2\boldsymbol{x_2}$ ist eine Lösung!

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- *Superpositionsprinzip* für lineare homogene DGLn: Sind $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ Lösungen einer homogenen, linearen DGL, so ist auch deren Linearkombination eine Lösung.
- Daraus ergibt sich das (vorläufige!) Programm:
  - Man berechnet alle Eigenwerte λ von $\mathbf{A}$.
  - Man berechnet die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{c}$. (Genaueres dazu später...).
  - Die allgemeine Lösung ergibt sich dann aus der Linearkombination der einzelnen Lösungen.

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Beispiel von oben:

  $$\dot{x} = x + 12y \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$\dot{y} = 3x + y$$

  - Eigenwerte:

    $$0 = \left|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right| = (1-\lambda)^2 - 36 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$
    $$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 7 \;\vee\; \lambda_2 = -5$$

  - Eigenvektoren

    $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{c}_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{c}_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - Allg. Lösung:

    $$\boldsymbol{x}(t) = D_1 \boldsymbol{c}_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 \boldsymbol{c}_2 e^{\lambda_2 t} = D_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + D_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Und jetzt zum Kleingedruckten ...
- Das Beispiel bestand aus zwei Gleichungen für zwei gesuchte Lösungsfunktionen (abhängige Variablen), also einem 2x2-System.
- Aber die Vektor/Matrix-Notation gilt für beliebige NxN-Systeme.
- Die Eigenwerte berechnen sich dann aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|$.
- Dies ist ein Polynom vom Grad N und hat deshalb N Nullstellen, die ggf. komplex sind. Manche Nullstellen kommen ggf. auch mehrfach vor (z.B. doppelte Nullstellen). In diesen Fällen wird es mühsam.

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Der Ansatz $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{c}\,e^{\lambda t}$ funktioniert nur für einfache, reelle Eigenwerte. In diesem Fall ist **c** ein Eigenvektor, den man vorab berechnen kann.
- Für einen doppelten Eigenwert (also doppelte Nullstelle des charakt. Polynoms) wählt man als Ansatz

$$\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{c}_1 t)\,e^{\lambda t}$$

- Die Vektoren $\mathbf{c}_0$ und $\mathbf{c}_1$ sind keine Eigenvektoren mehr! Man muss dann etwas anders vorgehen.
- Die Komponenten der einzelnen Vektoren bestimmt man aus Gleichungen eines Koeffizientenvergleichs.

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Komplexe Eigenwerte kommen nur als Paare von komplex konjugierten Eigenwerten vor.
  Sei $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$ so ein Eigenwertpaar, dann wählt man den Ansatz

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{c}_0 \cos(\mu t) + \boldsymbol{c}_1 \sin(\mu t)\right) e^{\eta t}$$

- Die Vektoren $\mathbf{c}_0$ und $\mathbf{c}_1$ sind keine Eigenvektoren mehr! Man muss dann etwas anders vorgehen.
- Die Komponenten der einzelnen Vektoren bestimmt man aus Gleichungen eines Koeffizientenvergleichs.

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Zusammenfassung 2x2-Systeme $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
  - **A** hat 2 reelle, verschiedene EW λ_1 und λ_2.
    Ansatz:
    $$\boldsymbol{x}(t) = D_1\,\boldsymbol{c}_1\,e^{\lambda_1 t} + D_2\,\boldsymbol{c}_2\,e^{\lambda_2 t}$$
    - Bemerkung: $\mathbf{c}_{1,2}$ sind Eigenvektoren von **A** zu $\lambda_{1,2}$
  - **A** hat einen doppelten reellen EW λ.
    Ansatz:
    $$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{c}_1\,t\right)e^{\lambda t}$$
  - **A** hat 2 konjugiert komplexe EW $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$
    Ansatz:
    $$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{c}_0 \cos(\mu t) + \boldsymbol{c}_1 \sin(\mu t)\right)e^{\eta t}$$

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Zusammenfassung 2x2-Systeme (Fortsetzung)
  - **A** hat 2 reelle, verschiedene EW λ_1 und λ_2.
    Vorgehen:
    - EV $\mathbf{c}_{1,2}$ zu den EW $\lambda_{1,2}$ ausrechnen.
    - Linearkombination bilden:

$$\boldsymbol{x}(t) = D_1 \boldsymbol{c}_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 \boldsymbol{c}_2 e^{\lambda_2 t}$$

    - D_1 und D_2 sind die freien Konstanten.

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Zusammenfassung 2x2-Systeme (Fortsetzung)
  - **A** hat einen doppelten reellen EW λ.
    Vorgehen:

$$\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{c}_1 t)e^{\lambda t} \qquad \boldsymbol{c}_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} t \right) e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= (A + Ct)e^{\lambda t} \\ y(t) &= (B + Dt)e^{\lambda t} \end{aligned}$$

… in DGL einsetzen und A,B,C,D bestimmen.
Zwei davon sind freie Konstanten.

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Zusammenfassung 2x2-Systeme (Fortsetzung)
  - **A** hat 2 konjugiert komplexe EW $\lambda_{1,2}=\eta\pm i\mu$
    Vorgehen:

$$\boldsymbol{x}(t)=\left(\boldsymbol{c}_0\cos(\mu t)+\boldsymbol{c}_1\sin(\mu t)\right)e^{\eta t} \qquad \boldsymbol{c}_0=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c}_1=\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\cos(\mu t)+\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}\sin(\mu t)\right)e^{\eta t}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}x(t)&=\left(A\cos(\mu t)+C\sin(\mu t)\right)e^{\eta t}\\ y(t)&=\left(B\cos(\mu t)+D\sin(\mu t)\right)e^{\eta t}\end{aligned}$$

… in DGL einsetzen und A,B,C,D bestimmen.
Zwei davon sind freie Konstanten.

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Beispiele aus Heuser,
  „Gewöhnliche Differentialgleichungen“,
  S. 470f

homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Bisher Matrix **A** eine 2x2-Matrix.
- Was ist bei größeren Systemen?
  - z.B. 3 Gleichungen für 3 Funktionen?
    - Dann wäre **A** eine 3x3-Matrix.
  - Allgemein: NxN-Matrix bei N Gle
- In diesem Fall bildet man aus den Ansätzen von <u>allen</u> Eigenwerten eine Linearkombination. Diese bildet dann den neuen Ansatz.
  - M.a.W., man muss erst einmal alle Eigenwerte der Matrix **A** bestimmen.