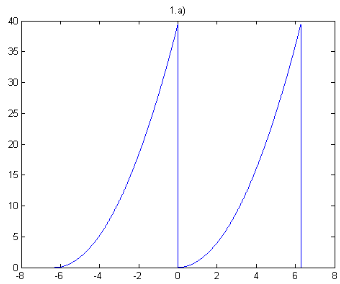
Kapitel 2, Übung 2: Aufgaben

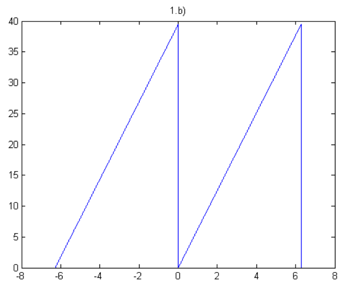
Voraussetzung: Kapitel 2, Seiten 30-47

2.5. Berechnen Sie die Fourier-Reihen zu folgenden Funktionen.

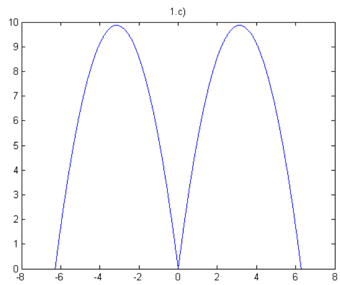
a) $f(x)=x^2$ für $0< x< 2\pi$



b) $f(x)=2\pi x$ für $0< x< 2\pi$

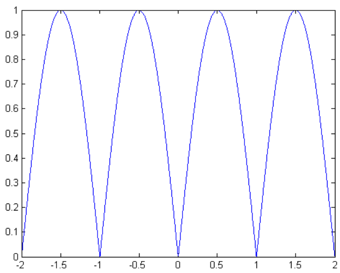


c) $f(x)=x(2\pi-x)$ für $0< x< 2\pi$
Hinweis: Hinschauen!



d) $f(t)=|\sin(\omega_0 t)|$

für $0\leq t\leq T$, $\omega_0=2\pi/T$



Hinweise zu d):

1. Aufwändig! Die ersten 3 nicht verschwindenden Terme reichen.

2. Es treten Integrale der Form $\int \sin(\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,dt$ auf.
   Trick:
   $$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad \text{Sinus-Additionstheorem}$$
   $$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
   Summe: $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$ mit $x=\omega_0 t$ und $y=m\omega_0 t$.

3. Ist die Funktion gerade oder ungerade? Braucht man Integrale der Form
   $\int \sin(\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,dt$?
   Falls ja, kann man das Cosinus-Additionstheorem in ähnlicher Weise verwenden.

Kapitel 2, Übung 2: Lösungen (ganz ultrakurz)

2.5. Berechnen Sie die Fourier-Reihen zu folgenden Funktionen.

a) $f(x)=x^2 \quad \text{für} \quad 0<x<2\pi$

$$f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)$$

b) $f(x)=2\pi x \quad \text{für} \quad 0<x<2\pi$

$$f(x)=2\pi^2-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

c) $f(x)=x(2\pi-x) \quad \text{für} \quad 0<x<2\pi$

$$f(x)=\frac{2\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

d) $f(t)=|\sin(\omega_0 t)| \quad \text{für} \quad 0\le t\le T \;,\; \omega_0=2\pi/T$

$$g(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos(2\omega_0 t)+\frac{1}{3\cdot 5}\cos(4\omega_0 t)+\frac{1}{5\cdot 7}\cos(6\omega_0 t)+\ldots\right)$$

b.w.

Kapitel 2, Übung 2: Lösungen (ausführlich)

Forier-Reihe für Funktionen mit Periode 2π : $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$

mit $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$ $\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$ $\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$

(vgl. Kap2., S. 38)

2.5. Berechnen Sie die Fourier-Reihen zu folgenden Funktionen.

a)

$f(x)=x^2$ für $0<x<2\pi$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}(2\pi)^3-0\right)=\frac{8\pi^3}{3\pi}=\frac{8\pi^2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_0}{2}=\frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{v'}dx$$ Integral berechnen mit Hilfe partieller Integration

$$=\frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ für alle n}}-\int_0^{2\pi}\underbrace{\frac{2x}{n}}_{u}\underbrace{\sin(nx)}_{v'}dx\right)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{2x}{n^2}(-\cos(nx))\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{2}{n}(-\cos(nx))dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi}\frac{2}{n}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nx)dx}_{\text{Integral über volle Periode = 0}}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi}{n^2}\underbrace{\cos(n\cdot 2\pi)}_{=1 \text{ für alle n}}-\frac{0^2}{n^2}\cos(n\cdot 0)\right)=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{\sin(nx)}_{v'}dx$$ Integral berechnen mit Hilfe partieller Integration

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[x^2\frac{(-\cos(nx))}{n}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2x\frac{(-\cos(nx))}{n}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\left[x^2\frac{(-\cos(nx))}{n}\right]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\underbrace{\frac{2x}{n}}_{u}\underbrace{\cos(nx)}_{v'}dx\right)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\cos(nx)\right]_0^{2\pi}+\left(\underbrace{\left[\frac{2x}{n}\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{= 0 \text{ für alle n}}-\int_0^{2\pi}\frac{2}{n^2}\sin(nx)dx\right)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{(2\pi)^2}{n}\underbrace{\cos(n\cdot 2\pi)}_{= 1 \text{ für alle n}}-\underbrace{\frac{0^2}{n}\cos(n\cdot 0)}_{= 0 \text{ für alle n}}\right)-\frac{2}{n^2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(nx)dx}_{\text{Integral über volle Periode = 0}}=-\frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{n}=-\frac{4\pi}{n}$$

Eingesetzt in die Formel der Fourierreihe:

$$f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)$$

b)

$$f(x)=2\pi x \quad \text{für} \quad 0<x<2\pi$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}\left(2\pi\frac{(2\pi)^2}{2}-0\right)=\frac{8\pi^3}{2\pi}=4\pi^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_0}{2}=2\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{2\pi x}_{u}\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx \qquad \text{Integral berechnen mit Hilfe partieller Integration}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[2\pi x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0\text{ für alle n}}-\int_0^{2\pi}2\pi\frac{\sin(nx)}{n}dx\right)=0=-\frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{n}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(nx)dx}_{\text{Integral über volle Periode = 0}} \quad =0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{2\pi x}_{u}\cdot\underbrace{\sin(nx)}_{v'}\,dx \qquad \text{Integral berechnen mit Hilfe partieller Integration}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[2\pi x\frac{(-\cos(nx))}{n}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2\pi\frac{(-\cos(nx))}{n}dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi 2\pi}{n}\underbrace{(-\cos(n2\pi))}_{=1\text{ für alle n}}-\frac{2\pi\cdot 0}{n}(-\cos(n\cdot 0))+\frac{2\pi}{n}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nx)dx}_{\text{Integral über volle Periode = 0}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{n}=-\frac{4\pi}{n}$$

Eingesetzt in die Formel zur Bestimmung der Fourierreihe:

$$f(x)=2\pi^2-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

c)

$$f(x)=x(2\pi-x)=2\pi x-x^2 \quad \text{für} \quad 0<x<2\pi$$

Für $f_b(x)=2\pi x$ und $f_a(x)=x^2$ wurden schon die Fourier-Reihen in a) und b) bestimmt.
Die Fourier-Reihe für $f(x)$ kann man deshalb aus denen für $f_b(x)$ und $f_a(x)$ berechnen.

$$f(x)=f_b(x)-f_a(x)=2\pi^2-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}-\left(\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)\right)$$

$$=2\pi^2-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}-\frac{4\pi^2}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n}\sin(nx)$$

$$=\frac{2\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

b.w.

d) (vgl. Kap. 2, S. 40 für Funktionen mit allgemeiner Periode T)

$$f(t)=|\sin(\omega_0 t)| \quad \text{für} \quad 0\le t\le T \; , \; \omega_0=2\pi/T$$

f(x) ist eine gerade Funktion, weshalb keine Sinus-Terme in der Fourier-Reihe auftauchen. Deshalb ist $b_n=0$ für alle n.

Die Periodendauer der Funktion ist jetzt nicht mehr 2π, sondern T.
Demnach muss zur Berechnung von a_0 das $\frac{1}{\pi}$ mit $\frac{2}{T}$ ersetzt werden
und die Integration über eine volle Periode erfolgen, z.B. von 0 bis T.

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T |\sin(\omega_0 t)|dt$$

An dieser Stelle kann nicht einfach der Betrag integriert werden. Für die Werte von t, für die $\sin(\omega_0 t)$ negativ ist, wird $|\sin(\omega_0 t)|$ durch $-\sin(\omega_0 t)$ ersetzt. Dies ist der Fall für Werte $t\in[T/2, T]$. Das Integral muss deshalb aufgespalten werden in:

$$=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin(\omega_0 t)dt+\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} -\sin(\omega_0 t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin(\omega_0 t)dt-\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} \sin(\omega_0 t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\left[\frac{(-\cos(\omega_0 t))}{\omega_0}\right]_0^{T/2}-\frac{2}{T}\left[\frac{(-\cos(\omega_0 t))}{\omega_0}\right]_{T/2}^{T}$$

Es ist: $\cos(\omega_0 T)=\cos(2\pi)=1$ und $\cos(\omega_0 T/2)=\cos(\pi)=-1$ und $\cos(0)=1$.
Damit:

$$=\frac{2}{T}\left(\frac{(-(-1))}{\omega_0}-\frac{(-1)}{\omega_0}\right)-\frac{2}{T}\left(\frac{(-1)}{\omega_0}-\frac{(-(-1))}{\omega_0}\right)=\frac{8}{T\omega_0}\underbrace{=}_{\omega_0=\frac{2\pi}{T}}\frac{8T}{T\,2\pi}=\frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{a_0}{2}=\frac{2}{\pi}$$

Für die Bestimmung von a_n verfahren wir analog:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T |\sin(\omega_0 t)|\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin(\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt+\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} -\sin(\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin(\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt-\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} \sin(\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt \qquad (*)$$

Es wird also das Integral $F(t)=\int \sin(\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt$ gesucht. Dazu hilft Tipp 2.

$$F(t)=\int \sin(\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt=\frac{1}{2}\int \left(\sin(\omega_0 t+n\omega_0 t)+\sin(\omega_0 t-n\omega_0 t)\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \left(\sin((1+n)\omega_0 t)+\sin((1-n)\omega_0 t)\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(-\cos((1+n)\omega_0 t))}{(1+n)\omega_0}+\frac{(-\cos((1-n)\omega_0 t))}{(1-n)\omega_0}\right]$$

$$=-\frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{\cos((1+n)\omega_0 t)}{(1+n)}+\frac{\cos((1-n)\omega_0 t)}{(1-n)}\right]$$ **Aber nur für $n\neq 1$.**

b.w.

Wir brauchen also $F(t)$ an den Grenzen der Integrationsintervalle $(n\neq 1)$.

$$F(0)=-\frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{\cos(0)}{(1+n)}+\frac{\cos(0)}{(1-n)}\right]=-\frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{1}{(1+n)}+\frac{1}{(1-n)}\right]$$

$$F(T/2)=-\frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{\cos\left((1+n)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{(1+n)}+\frac{\cos\left((1-n)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{(1-n)}\right]\qquad\left(\omega_0=\frac{2\pi}{T}\ \text{ verwendet.}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{\cos((1+n)\pi)}{(1+n)}+\frac{\cos((1-n)\pi)}{(1-n)}\right]$$

$$F(T)=-\frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{\cos\left((1+n)\frac{2\pi}{T}T\right)}{(1+n)}+\frac{\cos\left((1-n)\frac{2\pi}{T}T\right)}{(1-n)}\right]\qquad\left(\omega_0=\frac{2\pi}{T}\ \text{ verwendet.}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{\cos((1+n)2\pi)}{(1+n)}+\frac{\cos((1-n)2\pi)}{(1-n)}\right]=-\frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{1}{(1+n)}+\frac{1}{(1-n)}\right]=F(0)$$

Für $\boldsymbol{n\neq 1}$ können wir dies in $(*)$ ensetzen und a_n berechnen:

$$a_n=\frac{2}{T}[F(T/2)-F(0)]-\frac{2}{T}[F(T)-F(T/2)]=\frac{2}{T}(\mathbf{2}F(T/2)\underbrace{-F(0)-F(T)}_{=-2F(0)\ \text{s.o.}})$$

$$=\frac{2}{T}\left(-\frac{\mathbf{2}}{2\omega_0}\left[\frac{\cos((1+n)\pi)}{(1+n)}+\frac{\cos((1-n)\pi)}{(1-n)}\right]-\left(-\frac{\mathbf{2}}{2\omega_0}\right)\left[\frac{1}{(1+n)}+\frac{1}{(1-n)}\right]\right)$$

$$=\frac{2}{T\omega_0}\left(\frac{1-\cos((1+n)\pi)}{(1+n)}+\frac{1-\cos((1-n)\pi)}{(1-n)}\right)$$

Schreiben wir die ersten Koeffizieten explizit auf.

Für $\boldsymbol{n=2}$:

$$a_2=\frac{2}{T\omega_0}\left(\frac{1-\cos((1+2)\pi)}{(1+2)}+\frac{1-\cos((1-2)\pi)}{(1-2)}\right)=\frac{2}{T\omega_0}\left(\frac{1-\cos(3\pi)}{(3)}+\frac{1-\cos(-\pi)}{(-1)}\right)$$

$$=\frac{2}{T\frac{2\pi}{T}}\left(\frac{1-(-1)}{(3)}+\frac{1-(-1)}{(-1)}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{3}-2\right)=-\frac{4}{1\cdot 3\pi}$$

Für $\boldsymbol{n=3}$:

$$a_3=\frac{2}{T\omega_0}\left(\frac{1-\cos((1+3)\pi)}{(1+3)}+\frac{1-\cos((1-3)\pi)}{(1-3)}\right)=\frac{2}{T\omega_0}\left(\frac{1-\cos(4\pi)}{(4)}+\frac{1-\cos(-2\pi)}{(-2)}\right)$$

$$=\frac{2}{T\omega_0}\left(\frac{1-(1)}{(4)}+\frac{1-(1)}{(-2)}\right)=0$$

Für $\boldsymbol{n=4}$:

$$a_4=\frac{2}{T\omega_0}\left(\frac{1-\cos((1+4)\pi)}{(1+4)}+\frac{1-\cos((1-4)\pi)}{(1-4)}\right)=\frac{2}{T\omega_0}\left(\frac{1-\cos(5\pi)}{(5)}+\frac{1-\cos(-3\pi)}{(-3)}\right)$$

$$=\frac{2}{T\frac{2\pi}{T}}\left(\frac{1-(-1)}{(5)}+\frac{1-(-1)}{(-3)}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3\cdot 5\pi}$$

Für $\boldsymbol{n=5}$:

$$a_5=\frac{2}{T\,\omega_0}\left(\frac{1-\cos((1+5)\pi)}{(1+5)}+\frac{1-\cos((1-5)\pi)}{(1-5)}\right)=\frac{2}{T\,\omega_0}\left(\frac{1-\cos(6\pi)}{(6)}+\frac{1-\cos(-4\pi)}{(-4)}\right)$$

$$=\frac{2}{T\,\omega_0}\left(\frac{1-(1)}{(6)}+\frac{1-(1)}{(-4)}\right)=0$$

Für $\boldsymbol{n=6}$:

$$a_6=\frac{2}{T\,\omega_0}\left(\frac{1-\cos((1+6)\pi)}{(1+6)}+\frac{1-\cos((1-6)\pi)}{(1-6)}\right)=\frac{2}{T\,\omega_0}\left(\frac{1-\cos(7\pi)}{(7)}+\frac{1-\cos(-5\pi)}{(-5)}\right)$$

$$=\frac{2}{T\,\frac{2\pi}{T}}\left(\frac{1-(-1)}{(7)}+\frac{1-(-1)}{(-5)}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\right)=-\frac{4}{5\cdot 7\,\pi}$$

Bleibt noch der Fall $\boldsymbol{n=1}$. Den können wir explizit handhaben. Für $n=1$ wird $(*)$ zu:

$$a_1=\frac{2}{T}\int_0^T |\sin(\omega_0 t)|\cos(1\cdot\omega_0 t)\,dt=\ldots$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\,dt-\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\,dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}2\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\,dt-\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}2\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\,dt \qquad \text{Additionstheorem für Sinus}$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}\sin(2\omega_0 t)\,dt-\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}\sin(2\omega_0 t)\,dt$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(2\omega_0 t)}{2\omega_0}\right]_0^{T/2}-\frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(2\omega_0 t)}{2\omega_0}\right]_{T/2}^{T}$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(2\omega_0 T/2)}{2\omega_0}-\frac{-\cos(2\omega_0 0)}{2\omega_0}\right]-\frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(2\omega_0 T)}{2\omega_0}-\frac{-\cos(2\omega_0 T/2)}{2\omega_0}\right]$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(2\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2})}{2\omega_0}-\frac{-\cos(0)}{2\omega_0}\right]-\frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(2\frac{2\pi}{T}T)}{2\omega_0}-\frac{-\cos(2\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2})}{2\omega_0}\right]$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(2\pi)}{2\omega_0}-\frac{-\cos(0)}{2\omega_0}\right]-\frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(4\pi)}{2\omega_0}-\frac{-\cos(2\pi)}{2\omega_0}\right]=0$$

Es tragen also nur die Koeffizienten a_n für gerade Werte von n bei. Alles in die Fourier-Reihe einsetzen liefert das Ergebnis ($-4/\pi$ kann man ausklammern):

$$f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos(2\omega_0 t)+\frac{1}{3\cdot 5}\cos(4\omega_0 t)+\frac{1}{5\cdot 7}\cos(6\omega_0 t)+\ldots\right)$$