

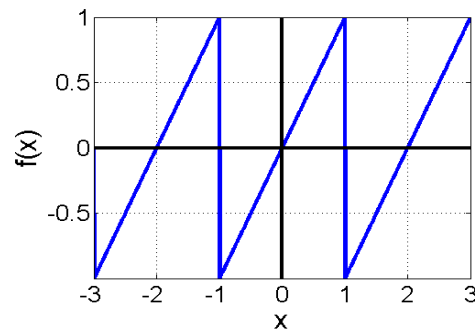
Kapitel 2, Übung 3: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 2, Seiten 30-47

2.6. Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in (-1, 1] \\ x - k & \text{für } x \in (k - 1, k + 1] \text{ mit } k = \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

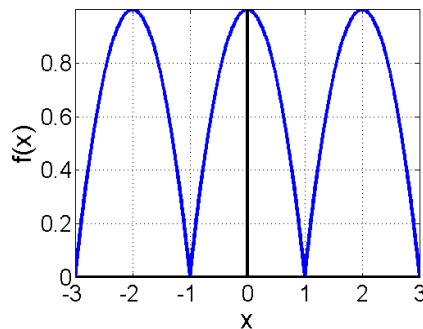
Beachten Sie: Die erste Zeile ist lediglich der Fall $k=0$ in expliziter Form.



- Ist die Funktion eine ungerade Funktion?
- Was ist die Periode dieser Funktion?
- Berechnen Sie die ersten drei nichtverschwindenden Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihe für diese Funktion.

2.7. Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = 1 - (x - k)^2 \quad \text{für } x \in (k - 1, k + 1] \text{ mit } k = \dots, -4, -2, 0, +2, +4, \dots$$



- Ist die Funktion eine gerade Funktion?
- Was ist die Periode dieser Funktion?
- Berechnen Sie die ersten drei nichtverschwindenden Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihe für diese Funktion.

Kapitel 2, Übung 3: Lösungen

2.6. Fourier-Reihe

Funktion ungerade. Deshalb $a_0=0=a_n$, also kein konstanter Term und keine Cosinus-Terme.

Periode ist $T=2$. Damit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Wähle als Integrationsintervall $[-1,1]$.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} x \sin(n\omega x) dx = \int_{-1}^{+1} x \sin(n\pi x) dx = \left[x \left(\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right) \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \left(\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right) dx$$

Das verbleibende Integral verschwindet, weil \cos über eine volle Periode integriert wird.

Damit:

$$b_n = \left[x \left(\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right) \right]_{-1}^{+1} = 1 \left(\frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} \right) - (-1) \left(\frac{-\cos(n\pi(-1))}{n\pi} \right) \\ = -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) + \cos(-n\pi)) = -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi), \text{ denn } \cos \text{ ist eine gerade Funktion.}$$

Damit: $b_1 = \frac{2}{\pi} \quad b_2 = -\frac{1}{\pi} \quad b_3 = \frac{2}{3\pi}$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sin(\pi x) - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\pi x) \mp \dots$$

2.7. Fourier-Reihe

Funktion ist gerade. Deshalb $b_n=0$; d.h., keine Sinus-Terme.

Periode ist $T=2$. Damit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

Wähle als Integrationsintervall $[-1,1]$.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-1}^{+1} 1 - x^2 dx = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) \cos(n\omega_0 x) dx = -\frac{4 \cos(n\pi)}{n^2 \omega_0^2} = -(-1)^n \frac{4}{n^2 \omega_0^2} \quad \text{mit } \cos n\pi = (-1)^n$$

Damit $f(x) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{4}{2^2 \pi^2} \cos 2\pi x + \frac{4}{3^2 \pi^2} \cos 3\pi x \mp \dots$