Kapitel 5, Übung 2: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 5, Seiten 37-51

Hinweis: Es ist $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$.

5.5. Berechnen Sie die allg. Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) $\dot{x}=-5t$
b) $\dot{x}+5x=-5t$
c) $\dot{x}=5t^2-5t$
d) $\dot{x}+5x=5t^2-5t$
e) $\dot{x}+5tx=-5t$
f) $\dot{x}=\cos 4t$
g) $\dot{x}+2x=\cos 4t$
h) $\dot{x}+\frac{2}{t}x=\cos 4t$, $t>0$ (Lösung ist länglich!)

5.6. Die Differentialgleichungen sind die aus der vorherigen Aufgabe. Berechnen Sie die spezielle Lösung zu den gegebenen Randbedingungen.

a) $\dot{x}=-5t$ mit $x(0)=5$
b) $\dot{x}+5x=-5t$ mit $x(0)=5$
c) $\dot{x}=5t^2-5t$ mit $x(0)=5$
d) $\dot{x}+5x=5t^2-5t$ mit $x(0)=5$
e) $\dot{x}+5tx=-5t$ mit $x(0)=5$
f) $\dot{x}=\cos 4t$ mit $x(0)=5$
g) $\dot{x}+2x=\cos 4t$ mit $x(0)=5$
h) $\dot{x}+\frac{2}{t}x=\cos 4t$, $t>0$ mit $x(1)=5$ (Taschenrechner)

5.7. Berechnen Sie die Lösungen folgender homogener Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung .

a) $\dot{u}=u+v$, $\dot{v}=4u-2v$

b) $\dot{u}=u+v$, $\dot{v}=4u+v$

c) $\dot{u}=u+v$, $\dot{v}=-2u+3v$

d) $\dot{u}=-5u+3v$, $\dot{v}=-15u+7v$

e) $\dot{u}=3u-4v$, $\dot{v}=u-v$

f) $\dot{x}=x-y-z$, $\dot{y}=x+3y+z$, $\dot{z}=-3x+y-z$

g) $\dot{x}=y$, $\dot{y}=z$, $\dot{z}=4x-4y+z$

h) $\dot{x}=x$, $\dot{y}=2x+y-2z$, $\dot{z}=3x+2y+z$

Kapitel 5, Übung 2: Lösungen

5.5. Berechnen Sie die allg. Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Notation für lineare DGL 1.Ordnung: $\dot{x}+p(t)x=r(t)$, $x,t\in\mathbb{R}$

Allg. Lösung $x(t)=e^{-P(t)}\left(\int e^{P(t)}r(t)\,dt+C\right)$ mit $P(t)=\int p(t)\,dt$.

a) $\dot{x}=-5t$

D.h., $p=0$, $r=-5t$. Zunächst $P(t)=\int p\,dt=0$ und deshalb

$e^P(t)=e^0=1=e^{-P(t)}$. Damit $\int e^{P(t)}r(t)\,dt=\int 1\cdot(-5t)\,dt=-\frac{5}{2}t^2$.

Allg. Lösung: $x(t)=-\frac{5}{2}t^2+C$.

Hinweis: Das geht natürlich auch viel einfacher: Direkt integrieren. Dies ist ein Beispiel, dass der Formalismus auch in diesem Fall funktioniert.

b) $\dot{x}+5x=-5t$

D.h., $p=5$, $r=-5t$. Zunächst $P(t)=\int p\,dt=\int 5\,dt=5t$. Damit

$$\int e^{P(t)}r(t)dt=\int e^{5t}\cdot(-5t)\,dt=-5\int t\,e^{5t}\,dt$$
$$=-5\left[t\cdot\frac{1}{5}e^{5t}-\int 1\cdot\frac{1}{5}e^{5t}\,dt\right]=-5\left[t\cdot\frac{1}{5}e^{5t}-\frac{1}{25}e^{5t}\right]=-t\,e^{5t}+\frac{1}{5}e^{5t} \quad .$$

Allg. Lösung: $x(t)=e^{-5t}\left[-t\,e^{5t}+\frac{1}{5}e^{5t}+C\right]=-t+\frac{1}{5}+C\,e^{-5t}$.

c) $\dot{x}=5t^2-5t$

D.h., $p=0$, $r=5t^2-5t$. Zunächst $P(t)=\int p\,dt=0$ und deshalb

$e^P(t)=e^0=1=e^{-P(t)}$. Damit $\int e^{P(t)}r(t)\,dt=\int 1\cdot(5t^2-5t)\,dt=\frac{5}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2$.

Allg. Lösung: $x(t)=\frac{5}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+C$. Hinweis: siehe a).

d) $\dot{x}+5x=5t^2-5t$

D.h., $p=5$, $r=5t^2-5t$. Zunächst $P(t)=\int p\,dt=\int 5\,dt=5t$. Damit

$$\int e^{P(t)}r(t)dt=\int e^{5t}\cdot(5t^2-5t)\,dt=5\int (t^2-t)e^{5t}\,dt$$
$$=5\left[(t^2-t)\cdot\frac{1}{5}e^{5t}-\int (2t-1)\cdot\frac{1}{5}e^{5t}\,dt\right]=(t^2-t)e^{5t}-\int (2t-1)e^{5t}\,dt$$
$$=(t^2-t)e^{5t}-\left((2t-1)\frac{1}{5}e^{5t}-\int 2\frac{1}{5}e^{5t}\,dt\right)=(t^2-t)e^{5t}-\left((2t-1)\frac{1}{5}e^{5t}-\frac{2}{25}e^{5t}\right) \quad .$$
$$=(t^2-t)e^{5t}-\frac{1}{5}(2t-1)e^{5t}+\frac{2}{25}e^{5t}=t^2e^{5t}-\frac{7}{5}t\,e^{5t}+\frac{7}{25}e^{5t}$$

Allg. Lösung: $x(t)=e^{-5t}\left[t^2e^{5t}-\frac{7}{5}t\,e^{5t}+\frac{7}{25}e^{5t}+C\right]=t^2-\frac{7}{5}t+\frac{7}{25}+C\,e^{-5t}$.

e) $\dot{x}+5t\,x=-5t$

D.h., $p=5t$, $r=-5t$. Zunächst $P(t)=\int p\,dt=\int 5t\,dt=\frac{5}{2}t^2$. Damit

$$\int e^{P(t)} r(t)\,dt = \int e^{\frac{5}{2}t^2} \cdot (-5t)\,dt = -5 \int t\, e^{\frac{5}{2}t^2}\,dt \quad .$$

Substitution $\quad z = t^2 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} = 2t \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}dz = t\,dt$. Damit folgt

$$\ldots = -5 \int e^{\frac{5}{2}z} \frac{1}{2}dz = -\frac{5}{2}\int e^{\frac{5}{2}z}\,dz = -\frac{5}{2}\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}z} = -e^{\frac{5}{2}t^2}$$

Allg. Lösung: $\quad x(t) = e^{-\frac{5}{2}t^2}\left[-e^{\frac{5}{2}t^2} + C\right] = -1 + C\,e^{-\frac{5}{2}t^2}$.

f) $\quad \dot{x} = \cos 4t$

D.h., $\quad p = 0 \;,\; r = \cos 4t$. Zunächst $\quad P(t) = \int p\,dt = 0 \quad$ und deshalb

$e^{P(t)} = e^0 = 1 = e^{-P(t)}$. Damit $\quad \int e^{P(t)} r(t)\,dt = \int 1 \cdot (\cos 4t)\,dt = \frac{1}{4}\sin 4t$.

Allg. Lösung: $\quad x(t) = \frac{1}{4}\sin 4t + C$.

g) $\quad \dot{x} + 2x = \cos 4t$

D.h., $\quad p = 2 \;,\; r = \cos 4t$. Zunächst $\quad P(t) = \int p\,dt = \int 2\,dt = 2t$. Damit

$$\int e^{P(t)} r(t)\,dt = \int e^{2t} \cdot (\cos 4t)\,dt \quad \text{part. Int.: } u = \cos 4t \;,\; v' = e^{2t} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}\cos 4t - \int \frac{1}{2}e^{2t}(-4)\sin 4t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}\cos 4t + 2\int e^{2t}\sin 4t\,dt \quad \text{part. Int.: } u = \sin 4t \;,\; v' = e^{2t} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}\cos 4t + 2\left(\frac{1}{2}e^{2t}\sin 4t - \int \frac{1}{2}e^{2t}\,4\cos 4t\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}\cos 4t + e^{2t}\sin 4t - 4\int e^{2t}\cos 4t\,dt$$

Nochmal zusammengefasst in einer Gleichung:

$$\int e^{2t} \cdot (\cos 4t)\,dt = \frac{1}{2}e^{2t}\cos 4t + e^{2t}\sin 4t - 4\int e^{2t}\cos 4t\,dt \quad .$$

Das Integral auf der rechten Seite ist das der linken Seite!
Also die Integrale alle auf die linke Seite bringen:

$$\Rightarrow 5\int e^{2t} \cdot (\cos 4t)\,dt = \frac{1}{2}e^{2t}\cos 4t + e^{2t}\sin 4t$$

$$\Rightarrow \int e^{2t} \cdot (\cos 4t)\,dt = \frac{1}{10}e^{2t}\cos 4t + \frac{1}{5}e^{2t}\sin 4t$$

Allg. Lösung: $\quad x(t) = e^{-2t}\left[\frac{1}{10}e^{2t}\cos 4t + \frac{1}{5}e^{2t}\sin 4t + C\right] = \frac{1}{10}\cos 4t + \frac{1}{5}\sin 4t + C\,e^{-2t}$

h) $\quad \dot{x} + \frac{2}{t}x = \cos 4t \;,\; t > 0$

D.h., $\quad p = \frac{2}{t} \;,\; r = \cos 4t$. Zunächst $\quad P(t) = \int p\,dt = \int \frac{2}{t}\,dt = 2\ln t = \ln t^2$. Dann

$e^{P(t)} = e^{\ln t^2} = t^2 \quad$ und $\quad e^{-P(t)} = \frac{1}{e^{P(t)}} = \frac{1}{e^{\ln t^2}} = \frac{1}{t^2} = t^{-2}$. Damit

$$\int e^{P(t)} r(t)\,dt = \int t^2 \cos 4t\,dt \qquad \text{part.Int.:}\ \ u=t^2\ \ ,\ \ v' = \cos 4t \Rightarrow v = \frac{1}{4}\sin 4t$$

$$= t^2 \frac{1}{4}\sin 4t - \int 2t \frac{1}{4}\sin 4t\,dt$$

$$= t^2 \frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{2}\int t \sin 4t\,dt \qquad \text{part.Int.:}\ \ u=t\ \ ,\ \ v' = \sin 4t \Rightarrow v = -\frac{1}{4}\cos 4t$$

$$= t^2 \frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{2}\left(-t\frac{1}{4}\cos 4t - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cos 4t\,dt\right)$$

$$= t^2 \frac{1}{4}\sin 4t + t\frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{8}\int \cos 4t\,dt$$

$$= t^2 \frac{1}{4}\sin 4t + t\frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{8}\frac{1}{4}\sin 4t$$

Allg. Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{t^2}\left[t^2\frac{1}{4}\sin 4t + t\frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{32}\sin 4t + C\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{8t}\cos 4t - \frac{1}{32t^2}\sin 4t + \frac{C}{t^2}$$

5.6. Die Differentialgleichungen sind die aus der vorherigen Aufgabe. Berechnen Sie die spezielle Lösung zu den gegebenen Randbedingungen.

a) $\dot{x} = -5t$ mit $x(0)=5$

$$x(t) = -\frac{5}{2}t^2 + C \;\Rightarrow\; 5 = x(0) = C \;\Rightarrow\; x(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 5$$

b) $\dot{x} + 5x = -5t$ mit $x(0)=5$

$$x(t) = -t + \frac{1}{5} + Ce^{-5t} \;\Rightarrow\; 5 = x(0) = 0 + \frac{1}{5} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{24}{5} \;\Rightarrow\; x(t) = -t + \frac{1}{5} + \frac{24}{5}e^{-5t}$$

c) $\dot{x} = 5t^2 - 5t$ mit $x(0)=5$

$$x(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + C \;\Rightarrow\; 5 = x(0) = C \;\Rightarrow x(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 5$$

d) $\dot{x} + 5x = 5t^2 - 5t$ mit $x(0)=5$

$$x(t) = t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{7}{25} + Ce^{-5t} \;\Rightarrow\; 5 = x(0) = \frac{7}{25} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{118}{25}$$

$$\Rightarrow\; x(t) = t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{7}{25} + \frac{118}{25}e^{-5t}$$

e) $\dot{x} + 5tx = -5t$ mit $x(0)=5$

$$x(t) = -1 + Ce^{-\frac{5}{2}t^2} \;\Rightarrow\; 5 = x(0) = -1 + C \;\Rightarrow\; C = 6 \;\Rightarrow\; x(t) = -1 + 6e^{-\frac{5}{2}t^2}$$

f) $\dot{x} = \cos 4t$ mit $x(0)=5$

$$x(t) = \frac{1}{4}\sin 4t + C \;\Rightarrow\; 5 = x(0) = C \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{1}{4}\sin 4t + 5$$

g) $\dot{x} + 2x = \cos 4t$ mit $x(0)=5$

$$x(t) = \frac{1}{10}\cos 4t + \frac{1}{5}\sin 4t + Ce^{-2t} \;\Rightarrow\; 5 = x(0) = \frac{1}{10} + 0 + C \;\Rightarrow\; C = \frac{49}{10}$$

$$\Rightarrow\; x(t) = \frac{1}{10}\cos 4t + \frac{1}{5}\sin 4t + \frac{49}{10}e^{-2t}$$

h) $\dot{x}+\frac{2}{t}x=\cos 4t$, $t>0$ mit $x(1)=5$ (Taschenrechner)

$$x(t)=\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{8t}\cos 4t-\frac{1}{32t^2}\sin 4t+\frac{C}{t^2}$$

$$\Rightarrow\ 5=x(1)=\frac{1}{4}\sin(4)+\frac{1}{8}\cos(4)-\frac{1}{32}\sin(4)+C\approx-0.247255998456561+C$$

$$\Rightarrow\ C\approx 5.247255998456561$$

$$\Rightarrow\ x(t)\approx\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{8t}\cos 4t-\frac{1}{32t^2}\sin 4t+\frac{5.247255998456561}{t^2}$$

5.7. Berechnen Sie die Lösungen folgender homogener Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung .

a)

$$\begin{aligned}\dot{u}&=u+v\\ \dot{v}&=4u-2v\end{aligned}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-2-\lambda)-4=-2+2\lambda-\lambda+\lambda^2-4$$

$$=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda-2)(\lambda+3)\ \Rightarrow\ \lambda=2\ \vee\ \lambda=-3$$

Also zwei reelle EW. Deshalb Ansatz $\begin{aligned}u&=Ae^{2t}+Be^{-3t}\\ v&=Ce^{2t}+De^{-3t}\end{aligned}$

Einsetzen:

$$2Ae^{2t}-3Be^{-3t}=Ae^{2t}+Be^{-3t}+Ce^{2t}+De^{-3t}$$

$$2Ce^{2t}-3De^{-3t}=4(Ae^{2t}+Be^{-3t})-2(Ce^{2t}+De^{-3t})$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lrl}\text{1.Glg., } e^{2t}: & 2A & =A+C\\ \text{1.Glg., } e^{-3t}: & -3B & =B+D\\ \text{2.Glg., } e^{2t}: & 2C & =4A-2C\\ \text{2.Glg., } e^{-3t}: & -3D & =4B-2D\end{array}\ \Rightarrow\ \begin{array}{rl}A & =C\\ -4B & =D\\ C & =A\\ D & =-4B\end{array}$$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten:

$$u=Ae^{2t}+Be^{-3t}$$

$$v=Ae^{2t}-4Be^{-3t}$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{u}&=u+v\\ \dot{v}&=4u+v\end{aligned}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=1-2\lambda+\lambda^2-4$$

$$=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)\ \Rightarrow\ \lambda=-1\ \vee\ \lambda=3$$

Also zwei reelle EW. Deshalb Ansatz: $\begin{aligned}u&=Ae^{-t}+Be^{3t}\\ v&=Ce^{-t}+De^{3t}\end{aligned}$

Einsetzen:

$$-Ae^{-t}+3Be^{3t}=Ae^{-t}+Be^{3t}+Ce^{-t}+De^{3t}$$

$$-Ce^{-t}+3De^{3t}=4(Ae^{-t}+Be^{3t})+Ce^{-t}+De^{3t}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{llll} \text{1.Glg., } e^{-t}: & -A & =A+C \\ \text{1.Glg., } e^{3t}: & 3B & =B+D \\ \text{2.Glg., } e^{-t}: & -C & =4A+C \\ \text{2.Glg., } e^{3t}: & 3D & =4B+D \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} -2A & =C \\ 2B & =D \\ C & =-2A \\ D & =2B \end{array}$$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten: $\begin{array}{l} u=Ae^{-t}+Be^{3t} \\ v=-2Ae^{-t}+2Be^{3t} \end{array}$

c)

$$\begin{array}{l} \dot{u}=u+v \\ \dot{v}=-2u+3v \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)+2=2-\lambda-3\lambda+\lambda^2+2=\lambda^2-4\lambda+5$$

$$\Rightarrow \lambda^2-4\lambda+4=-1 \Rightarrow (\lambda-2)^2=-1 \Rightarrow \lambda-2=\pm\sqrt{-1}=\pm i \Rightarrow \lambda=2\pm 1i$$

Also zwei komplex-konjugierte EW. Deshalb Ansatz:

$$u=e^{2t}(A\cos(\mathbf{1}t)+B\sin(\mathbf{1}t))=e^{2t}(A\cos t+B\sin t)$$
$$v=e^{2t}(C\cos(\mathbf{1}t)+D\sin(\mathbf{1}t))=e^{2t}(C\cos t+D\sin t)$$

Es ist:

$$\dot{u}=\frac{d}{dt}\left(e^{2t}(A\cos t+B\sin t)\right)=2e^{2t}(A\cos t+B\sin t)+e^{2t}(-A\sin t+B\cos t)$$
$$=(2A+B)e^{2t}\cos t+(-A+2B)e^{2t}\sin t$$

Ebenso $\dot{v}=(2C+D)e^{2t}\cos t+(-C+2D)e^{2t}\sin t$

Einsetzen:

$$(2A+B)e^{2t}\cos t+(-A+2B)e^{2t}\sin t=e^{2t}(A\cos t+B\sin t)+e^{2t}(C\cos t+D\sin t)$$
$$(2C+D)e^{2t}\cos t+(-C+2D)e^{2t}\sin t=-2(e^{2t}(A\cos t+B\sin t))+3(e^{2t}(C\cos t+D\sin t))$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (2A+B)e^{2t}\cos t+(-A+2B)e^{2t}\sin t=(A+C)e^{2t}\cos t+(B+D)e^{2t}\sin t \\ (2C+D)e^{2t}\cos t+(-C+2D)e^{2t}\sin t=(-2A+3C)e^{2t}\cos t+(-2B+3D)e^{2t}\sin t \end{array}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lll} \text{1.Glg., } e^{2t}\cos t: & 2A+B & =A+C \\ \text{1.Glg., } e^{2t}\sin t: & -A+2B & =B+D \\ \text{2.Glg., } e^{2t}\cos t: & 2C+D & =-2A+3C \\ \text{2.Glg., } e^{2t}\sin t: & -C+2D & =-2B+3D \end{array}$$

Sortieren:

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrll} A & +B & -C & & =0 & (1) \\ -A & +B & & -D & =0 & (2) \\ 2A & & -C & +D & =0 & (3) \\ & +2B & -C & -D & =0 & (4) \end{array}$$

(1)+(2) und (3)+2*(2) und (4)-(2):

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrll} & +2B & -C & -D & =0 & (1^*) \\ -A & +B & & -D & =0 & (2) \\ & +2B & -C & -D & =0 & (3^*) \\ A & +B & -C & & =0 & (4^*) \end{array}$$

Gleichungen (1^*) und (3^*) sind redundant, da identisch zu (4).

$(2)\Rightarrow \quad D=B-A$

$(4^*)\Rightarrow \quad C=A+B$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten: $\begin{array}{l} u=e^{2t}(A\cos t+B\sin t) \\ v=e^{2t}((A+B)\cos t+(B-A)\sin t) \end{array}$

d)

$$\begin{array}{l}\dot{u}=-5u+3v\\ \dot{v}=-15u+7v\end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -15 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -15 & 7\end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-5-\lambda & 3\\ -15 & 7-\lambda\end{vmatrix}=(-5-\lambda)(7-\lambda)+45=-35-7\lambda+5\lambda+\lambda^2+45=\lambda^2-2\lambda+10$$

$$\Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=-9 \quad\Rightarrow (\lambda-1)^2=-9 \quad\Rightarrow \lambda-1=\pm\sqrt{-9}=\pm 3i \quad\Rightarrow \lambda=\mathbf{1}\pm\mathbf{3}i$$

Also zwei komplex-konjugierte EW. Deshalb Ansatz:

$$u=e^{\mathbf{1}t}(A\cos(\mathbf{3}t)+B\sin(\mathbf{3}t))=e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)$$
$$v=e^{\mathbf{1}t}(C\cos(\mathbf{3}t)+D\sin(\mathbf{3}t))=e^t(C\cos 3t+D\sin 3t)$$

Es ist:

$$\dot{u}=\frac{d}{dt}\left(e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)\right)=e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)+e^t(-3A\sin 3t+3B\cos 3t)$$
$$=(A+3B)e^t\cos 3t+(-3A+B)e^t\sin 3t$$

Ebenso $\dot{v}=(C+3D)e^t\cos 3t+(-3C+D)e^t\sin 3t$

Einsetzen:

$$(A+3B)e^t\cos 3t+(-3A+B)e^t\sin 3t=-5\left(e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)\right)+3\left(e^t(C\cos 3t+D\sin 3t)\right)$$
$$(C+3D)e^t\cos 3t+(-3C+D)e^t\sin 3t=-15\left(e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)\right)+7\left(e^t(C\cos 3t+D\sin 3t)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}(A+3B)e^t\cos 3t+(-3A+B)e^t\sin 3t=(-5A+3C)e^t\cos 3t+(-5B+3D)e^t\sin 3t\\ (C+3D)e^t\cos 3t+(-3C+D)e^t\sin 3t=(-15A+7C)e^t\cos 3t+(-15B+7D)e^t\sin 3t\end{array}$$

Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich:

1.Glg., $e^t\cos 3t$:	$A+3B$	$=-5A+3C$
1.Glg., $e^t\sin 3t$:	$-3A+B$	$=-5B+3D$
2.Glg., $e^t\cos 3t$:	$C+3D$	$=-15A+7C$
2.Glg., $e^t\sin 3t$:	$-3C+D$	$=-15B+7D$

b.w.

Sortieren:

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrrl} 6A & +3B & -3C & & =0 & |:3 \\ -3A & +6B & & -3D & =0 & |:3 \\ 15A & & -6C & +3D & =0 & |:3 \\ & 15B & -3C & -6D & =0 & |:3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrrl} 2A & +B & -C & & =0 & (1) \\ -A & +2B & & -D & =0 & (2) \\ 5A & & -2C & +D & =0 & (3) \\ & 5B & -C & -2D & =0 & (4) \end{array}$$

(2)+(3) und (4)+2*(3) und anschließend (3)-2*(1):

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrrl} 2A & +B & -C & & =0 & (1) \\ 4A & +2B & -2C & & =0 & (2^*) \\ A & -2B & & +D & =0 & (3^*) \\ 10A & +5B & -5C & & =0 & (4^*) \end{array}$$

Gleichungen (2^*) und (4^*) sind redundant, da identisch zu (1).

$$(1) \Rightarrow \quad C = 2A + B$$
$$(3^*) \Rightarrow \quad D = 2B - A$$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten: $\begin{array}{l} u = e^t(A\cos 3t + B\sin 3t) \\ v = e^t((2A+B)\cos 3t + (2B-A)\sin 3t) \end{array}$

e)

$$\begin{array}{l} \dot{u} = 3u - 4v \\ \dot{v} = u - v \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$0 = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = -3 + \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 4$$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda = 1$ ist doppelte reelle Nullstelle.

Also doppelter reeller EW. Deshalb Ansatz:

$$u = (A + Bt)e^{1t} = (A + Bt)e^t$$
$$v = (C + Dt)e^{1t} = (C + Dt)e^t$$

Die Ableitungen sind: $\dot{u} = \frac{d}{dt}\left((A+Bt)e^t\right) = e^t(A+Bt) + e^t(B) = (A+B)e^t + Bte^t$

und ebenso $\dot{v} = (C+D)e^t + Dte^t$

Einsetzen liefert:

$$(A+B)e^t + Bte^t = 3\left((A+Bt)e^t\right) - 4\left((C+Dt)e^t\right)$$
$$(C+D)e^t + Dte^t = (A+Bt)e^t - \left((C+Dt)e^t\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (A+B)e^t + Bte^t = (3A - 4C)e^t + (3B - 4D)te^t \\ (C+D)e^t + Dte^t = (A - C)e^t + (B - D)te^t \end{array}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lll}
\text{1.Glg., } e^t: & A+B & =3A-4C \\
\text{1.Glg., } te^t: & B & =3B-4D \\
\text{2.Glg., } e^t: & C+D & =A-C \\
\text{2.Glg., } te^t: & D & =B-D
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrll}
-2A & +B & +4C & & =0 & (1) \\
 & -2B & & +4D & =0 & (2) \\
-A & & +2C & +D & =0 & (3) \\
 & -B & & +2D & =0 & (4)
\end{array}$$

(1)+(4):

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrll}
-2A & & +4C & +2D & =0 & (1^*) \\
 & -2B & & +4D & =0 & (2) \\
-A & & +2C & +D & =0 & (3) \\
 & -B & & +2D & =0 & (4)
\end{array}$$

(1*) und (3) sowie (2) und (4) sind jeweils gleich. Es folgt

$$(3) \Rightarrow \quad A=2C+D$$
$$(4) \Rightarrow \quad B=2D$$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten: $\begin{array}{l} u=(2C+D+2Dt)e^t \\ v=(C+Dt)e^t \end{array}$

f)

$$\begin{array}{l} \dot{x}=x-y-z \\ \dot{y}=x+3y+z \\ \dot{z}=-3x+y-z \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)+(-1)(1)(-3)+(-1)(1)(1)$$
$$-(-3)(3-\lambda)(-1)-(1)(1)(1-\lambda)-(-1-\lambda)(1)(-1)$$
$$=-(1-\lambda)(3-\lambda)(1+\lambda)+3-1-3(3-\lambda)-1+\lambda-1-\lambda$$
$$=-(1-\lambda^2)(3-\lambda)+2-9+3\lambda-2$$
$$=-(3-3\lambda^2-\lambda+\lambda^3)-9+3\lambda$$
$$=-\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda-12$$

Eine Nullstelle durch Probieren. Z.B. $\lambda=-2$. Damit Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrl}
(-\lambda^3 & +3\lambda^2 & +4\lambda & -12) & : (\lambda+2) = -\lambda^2+5\lambda-6 \\
-(-\lambda^3 & -2\lambda^2) & & & \\
 & 5\lambda^2 & +4\lambda & & \\
 & -(5\lambda^2 & +10\lambda) & & \\
 & & -6\lambda & -12 & \\
 & & -(-6\lambda^2 & -12) & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

b.w.

Damit geht's weiter:

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\ldots=-\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda-12=(\lambda+2)(-\lambda^2+5\lambda-6)=-(\lambda+2)(\lambda^2-5\lambda+6)$$
$$=-(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Die Nullstellen und damit die EW sind also $\lambda=\mathbf{-2} \vee \lambda=\mathbf{2} \vee \lambda=\mathbf{3}$.

Damit folgt für den Ansatz:
$$\begin{aligned} x&=Ae^{-2t}+Be^{2t}+Ce^{3t}\\ y&=De^{-2t}+Ee^{2t}+Fe^{3t}\\ z&=Ge^{-2t}+He^{2t}+Ie^{3t}\end{aligned} \quad .$$

Es ist

$$\begin{aligned} \dot{x}&=\frac{d}{dt}\left(Ae^{-2t}+Be^{2t}+Ce^{3t}\right)=-2Ae^{-2t}+2Be^{2t}+3Ce^{3t}\\ \dot{y}&=\frac{d}{dt}\left(De^{-2t}+Ee^{2t}+Fe^{3t}\right)=-2De^{-2t}+2Ee^{2t}+3Fe^{3t}\\ \dot{z}&=\frac{d}{dt}\left(Ge^{-2t}+He^{2t}+Ie^{3t}\right)=-2Ge^{-2t}+2He^{2t}+3Ie^{3t}\end{aligned} \quad .$$

Dies und den Ansatz einsetzen in die originale DGL:

$$-2Ae^{-2t}+2Be^{2t}+3Ce^{3t}=Ae^{-2t}+Be^{2t}+Ce^{3t}-\left(De^{-2t}+Ee^{2t}+Fe^{3t}\right)-\left(Ge^{-2t}+He^{2t}+Ie^{3t}\right)$$
$$-2De^{-2t}+2Ee^{2t}+3Fe^{3t}=Ae^{-2t}+Be^{2t}+Ce^{3t}+3\left(De^{-2t}+Ee^{2t}+Fe^{3t}\right)+Ge^{-2t}+He^{2t}+Ie^{3t}$$
$$-2Ge^{-2t}+2He^{2t}+3Ie^{3t}=-3\left(Ae^{-2t}+Be^{2t}+Ce^{3t}\right)+De^{-2t}+Ee^{2t}+Fe^{3t}-\left(Ge^{-2t}+He^{2t}+Ie^{3t}\right)$$

Koeffizientenvergleich:

1.Glg., e^{-2t}: $\quad -2A \;=A-D-G$

1.Glg., e^{2t}: $\quad 2B \;=B-E-H$

1.Glg., e^{3t}: $\quad 3C \;=C-F-I$

2.Glg., e^{-2t}: $\quad -2D \;=A+3D+G$

2.Glg., e^{2t}: $\quad 2E \;=B+3\mathrm{E}+H$

2.Glg., e^{3t}: $\quad 3F \;=C+3F+I$

3.Glg., e^{-2t}: $\quad -2G \;=-3A+D-G$

3.Glg., e^{2t}: $\quad 2H \;=-3B+E-H$

3.Glg., e^{3t}: $\quad 3I \;=-3C+F-I$

Erst mal einen Überblick verschaffen:

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{cccccccccc}
-3A & & & +D & & & +G & & & =0\\
 & B & & & +E & & & +H & & =0\\
 & & 2C & & & +F & & & +I & =0\\
-A & & & -5D & & & -G & & & =0\\
 & -B & & & -E & & & -H & & =0\\
 & & -C & & & +0F & & & -I & =0\\
3A & & & -D & & & -G & & & =0\\
 & 3B & & & -E & & & +3H & & =0\\
 & & 3C & & & -F & & & +4I & =0
\end{array}$$

Umsortieren:

$$\begin{array}{cccccccccc}
-3A & & & +D & & & +G & & & =0\\
-A & & & -5D & & & -G & & & =0\\
3A & & & -D & & & -G & & & =0\\
 & 3B & & & -E & & & +3H & & =0\\
 & -B & & & -E & & & -H & & =0\\
 & B & & & +E & & & +H & & =0\\
 & & 2C & & & +F & & & +I & =0\\
 & & -C & & & +0F & & & -I & =0\\
 & & 3C & & & -F & & & +4I & =0
\end{array}$$

3 separate Gleichungssysteme:

I.
$$\begin{array}{llllc} -3A & +D & +G & =0 & (1) \\ -A & -5D & -G & =0 & (2) \\ 3A & -D & -G & =0 & (redundant) \end{array}$$

$$(1)+(2) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lllll} -4A & -4D & & =0 & (1^*) \\ -A & -5D & -G & =0 & (2) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} D & =-A \\ G & =4A \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{llllc} 3B & -E & +3H & =0 & (1) \\ -B & -E & -H & =0 & (redundant) \\ B & +E & +H & =0 & (2) \end{array}$$

$$(2)+(1) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lllll} 3B & -E & +3H & =0 & (1) \\ 4B & & +4H & =0 & (2^*) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} E & =0 \\ H & =-B \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{lllll} 2C & +F & +I & =0 & (1) \\ -C & +0F & -I & =0 & (2) \\ 3C & -F & +4I & =0 & (3) \end{array}$$

$$(1)+(3) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{llllc} 5C & & +5I & =0 & (redundant) \\ -C & & -I & =0 & (2) \\ 3C & -F & +4I & =0 & (3) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} I & =-C \\ F & =-C \end{array}$$

Damit folgt die allg. Lösung mit den freien Konstanten A,B,C:

$$\begin{array}{lllll} x(t) & = & Ae^{-2t} & +Be^{2t} & +Ce^{3t} \\ y(t) & = & -Ae^{-2t} & & -Ce^{3t} \\ z(t) & = & 4Ae^{-2t} & -Be^{2t} & -Ce^{3t} \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{l} \dot{x}=y \\ \dot{y}=z \\ \dot{z}=4x-4y+z \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(-\lambda)^2(1-\lambda)+4+0-0-(-4)(1)(-\lambda)-0$$
$$=\lambda^2-\lambda^3+4-4\lambda=-\lambda^3+\lambda^2-4\lambda+4$$

Eine Nullstelle durch Probieren. Z.B. $\lambda=1$. Damit Polynomdivision:

$$\begin{array}{llllll} (-\lambda^3 & +\lambda^2 & -4\lambda & +4) & : (\lambda-1) & =-\lambda^2-4 \\ -(-\lambda^3 & +\lambda^2) & & & & \\ & 0 & -4\lambda & +4 & & \\ & & -(-4\lambda & +4) & & \\ & & & 0 & & \end{array}$$

Damit geht's weiter

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=...=-\lambda^3+\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-1)(-\lambda^2-4)=-(\lambda-1)(\lambda^2+4) ,$$
$$=-(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)$$

denn die Nullstellen von λ^2+4 sind $\pm 2i$.

Die Nullstellen und damit die EW sind also $\lambda=\mathbf{0}-\mathbf{2}i \;\vee\; \lambda=\mathbf{0}+\mathbf{2}i \;\vee\; \lambda=\mathbf{1}$.

Damit folgt für den Ansatz:

$$\begin{aligned} x &= A e^{1t} + B e^{0} \cos(2t) + C e^{0} \sin(2t) = A e^{t} + B\cos 2t + C\sin 2t \\ y &= D e^{1t} + E e^{0} \cos(2t) + F e^{0} \sin(2t) = D e^{t} + E\cos 2t + F\sin 2t \\ z &= G e^{1t} + H e^{0} \cos(2t) + I e^{0} \sin(2t) = G e^{t} + H\cos 2t + I\sin 2t \end{aligned}\,.$$

Die Ableitungen sind also:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt}\left(A e^{t} + B\cos 2t + C\sin 2t\right) = A e^{t} - 2B\sin 2t + 2C\cos 2t \\ \dot{y} &= \frac{d}{dt}\left(D e^{t} + E\cos 2t + F\sin 2t\right) = D e^{t} - 2E\sin 2t + 2F\cos 2t \\ \dot{z} &= \frac{d}{dt}\left(G e^{t} + H\cos 2t + I\sin 2t\right) = G e^{t} - 2H\sin 2t + 2I\cos 2t \end{aligned}$$

Dies und den Ansatz einsetzen in die originale DGL:

$$\begin{aligned} A e^{t} - 2B\sin 2t + 2C\cos 2t &= D e^{t} + E\cos 2t + F\sin 2t \\ D e^{t} - 2E\sin 2t + 2F\cos 2t &= G e^{t} + H\cos 2t + I\sin 2t \\ G e^{t} - 2H\sin 2t + 2I\cos 2t &= 4\left(A e^{t} + B\cos 2t + C\sin 2t\right) \\ &\quad - 4\left(D e^{t} + E\cos 2t + F\sin 2t\right) \\ &\quad + G e^{t} + H\cos 2t + I\sin 2t \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lrll} \text{1.Glg., } e^{t}: & A & = D & (1) \\ \text{1.Glg., } \cos 2t: & -2B & = F & (2) \\ \text{1.Glg., } \sin 2t: & 2C & = E & (3) \\ \text{2.Glg., } e^{t}: & D & = G & (4) \\ \text{2.Glg., } \cos 2t: & -2E & = I & (5) \\ \text{2.Glg., } \sin 2t: & 2F & = H & (6) \\ \text{3.Glg., } e^{t}: & G & = 4A - 4D + G & (7) \\ \text{3.Glg., } \cos 2t: & -2H & = 4C - 4F + I & (8) \\ \text{3.Glg., } \sin 2t: & 2I & = 4B - 4\mathrm{E} + H & (9) \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir durch „Draufschauen“:
Aus (1) und (4) liest man ab: $A = D = G$ und damit ist auch (7) erfüllt.
Aus (2) folgt $F = -2B$ und deshalb aus (6) $H = -4B$ und aus (3) folgt $E = 2C$ und deshalb aus (5) $I = -4C$. Und damit sind auch (8) und (9) erfüllt.

Damit folgt die allgemeine Lösung mit den drei freien Konstanten A,B,C:

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{t} + B\cos 2t + C\sin 2t \\ y(t) &= A e^{t} + 2C\cos 2t - 2B\sin 2t \\ z(t) &= A e^{t} - 4B\cos 2t - 4C\sin 2t \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= 2x + y - 2z \\ \dot{z} &= 3x + 2y + z \end{aligned} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b.w.

Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 1-\lambda & -2\\ 3 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^3+0+0-0-2(-2)(1-\lambda)-0$$
$$= 1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3+4-4\lambda = -\lambda^3+3\lambda^2-7\lambda+5$$

Eine Nullstelle durch Probieren. Z.B. $\lambda=1$. Dann mit Polynomdivision:

$$\begin{array}{llll} (-\lambda^3 & +3\lambda^2 & -7\lambda & +5) : (\lambda-1) = -\lambda^2+2\lambda-5 \\ -(-\lambda^3 & +\lambda^2) & & \\ & 2\lambda^2 & -7\lambda & \\ & -(2\lambda^2 & -2\lambda) & \\ & & -5\lambda & +5 \\ & & -(-5\lambda & +5) \\ & & & 0 \end{array}$$

Nullstellen von $\lambda^2-2\lambda+5$

$$\begin{array}{llllll} & \lambda^2-2\lambda+5 & =0 & \Rightarrow \quad \lambda^2-2\lambda+1 & =-4 & \Rightarrow \quad (\lambda-1)^2 \quad =-4 \\ \Rightarrow & \lambda-1 & =\pm\sqrt{-4}=\pm 2i & \Rightarrow \qquad \lambda & =1\pm 2i & \end{array}$$

Damit geht's weiter

$$0=|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=...=-\lambda^3+3\lambda^2-7\lambda+5=(\lambda-1)(-\lambda^2+2\lambda-5)=-(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)$$
$$=-(\lambda-1)(\lambda+1+2i)(\lambda+1-2i)$$

Die Eigenwerte der Matrix **A** sind also die Nullstellen

$$\lambda_1=\mathbf{1} \ \vee \ \lambda_2=\mathbf{1}+\mathbf{2}i \ \vee \ \lambda_3=\mathbf{1}-\mathbf{2}i$$

Damit ergibt sich folgender Ansatz:

$$x=A e^{\mathbf{1}t}+B e^{\mathbf{1}t}\cos(\mathbf{2}t)+C e^{\mathbf{1}t}\sin(\mathbf{2}t)=A e^t+e^t(B\cos 2t+C\sin 2t)$$
$$y=D e^{\mathbf{1}t}+E e^{\mathbf{1}t}\cos(\mathbf{2}t)+F e^{\mathbf{1}t}\sin(\mathbf{2}t)=D e^t+e^t(E\cos 2t+F\sin 2t)$$
$$z=G e^{\mathbf{1}t}+H e^{\mathbf{1}t}\cos(\mathbf{2}t)+I e^{\mathbf{1}t}\sin(\mathbf{2}t)=G e^t+e^t(H\cos 2t+I\sin 2t)$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\dot{x} &=\frac{d}{dt}\left(A e^t+e^t(B\cos 2t+C\sin 2t)\right)\\
&=A e^t+e^t(B\cos 2t+C\sin 2t)+e^t(-2B\sin 2t+2C\cos 2t)\\
&=A e^t+e^t((B+2C)\cos 2t+(C-2B)\sin 2t)\\
\dot{y} &=\frac{d}{dt}\left(D e^t+e^t(E\cos 2t+F\sin 2t)\right)\\
&=D e^t+e^t(E\cos 2t+F\sin 2t)+e^t(-2E\sin 2t+2F\cos 2t)\\
&=D e^t+e^t((E+2F)\cos 2t+(F-2E)\sin 2t)\\
\dot{z} &=\frac{d}{dt}\left(G e^t+e^t(H\cos 2t+I\sin 2t)\right)\\
&=G e^t+e^t(H\cos 2t+I\sin 2t)+e^t(-2H\sin 2t+2I\cos 2t)\\
&=G e^t+e^t((H+2I)\cos 2t+(I-2H)\sin 2t)
\end{aligned}$$

Dies und den Ansatz in die Original-DGL einsetzen:

$$A e^t + e^t\left((B+2C)\cos 2t + (C-2B)\sin 2t\right)$$
$$= A e^t + e^t\left(B\cos 2t + C\sin 2t\right)$$

$$D e^t + e^t\left((E+2F)\cos 2t + (F-2E)\sin 2t\right)$$
$$= 2\left(A e^t + e^t\left(B\cos 2t + C\sin 2t\right)\right)$$
$$+ D e^t + e^t\left(E\cos 2t + F\sin 2t\right) - 2\left(G e^t + e^t\left(H\cos 2t + I\sin 2t\right)\right)$$

$$G e^t + e^t\left((H+2I)\cos 2t + (I-2H)\sin 2t\right)$$
$$= 3\left(A e^t + e^t\left(B\cos 2t + C\sin 2t\right)\right)$$
$$+ 2\left(D e^t + e^t\left(E\cos 2t + F\sin 2t\right)\right) + G e^t + e^t\left(H\cos 2t + I\sin 2t\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{llrll}
\text{1.Glg.,} & e^t: & A & = A & (1) \\
\text{1.Glg.,} & e^t\cos 2t: & B+2C & = B & (2) \\
\text{1.Glg.,} & e^t\sin 2t: & C-2B & = C & (3) \\
\text{2.Glg.,} & e^t: & D & = 2A + D - 2G & (4) \\
\text{2.Glg.,} & e^t\cos 2t: & E+2F & = 2B + E - 2H & (5) \\
\text{2.Glg.,} & e^t\sin 2t: & F-2E & = 2C + F - 2I & (6) \\
\text{3.Glg.,} & e^t: & G & = 3A + 2D + G & (7) \\
\text{3.Glg.,} & e^t\cos 2t: & H+2I & = 3B + 2\mathrm{E} + H & (8) \\
\text{3.Glg.,} & e^t\sin 2t: & I-2H & = 3C + 2F + I & (9)
\end{array}$$

Aufräumen:

$$\begin{array}{lrllll}
(1)\Rightarrow & A & = A & & & \\
(2)\Rightarrow & C & = 0 & & & \\
(3)\Rightarrow & B & = 0 & & & \\
(4)\Rightarrow & 0 & = 2A - 2G & \Rightarrow & A & = G \\
(5)\Rightarrow & 2F & = -2H & \Rightarrow & F & = -H \\
(6)\Rightarrow & -2E & = -2I & \Rightarrow & E & = I \\
(7)\Rightarrow & 0 & = 3A + 2D & \Rightarrow & D & = -\dfrac{3}{2}G \\
(8)\Rightarrow & 2I & = 2E & \Rightarrow & E & = I \\
(9)\Rightarrow & -2H & = 2F & \Rightarrow & F & = -H
\end{array}$$

Damit folgt die allgemeine Lösung mit den drei freien Konstanten G,H,I:

$$x(t) = G e^t$$
$$y(t) = -\frac{3}{2} G e^t + e^t\left(I\cos 2t - H\sin 2t\right)$$
$$z(t) = G e^t + e^t\left(H\cos 2t + I\sin 2t\right)$$