

## Kapitel 3, Übung 1: Aufgaben

### Voraussetzung: Kapitel 3, Seiten 1-31

3.1. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen nach den Variablen.

a)  $f(x, y) = e^x \cdot e^y$

b)  $f(x, y) = e^{x \cdot y}$

c)  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$

d)  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2}}$

3.2. Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen nach den Variablen. Verifizieren Sie, dass das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationsschritte ist.

a)  $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 y^2 + x y + 1$

b)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

3.3. Berechnen Sie alle dritten partiellen Ableitungen. Nutzen Sie aus, dass das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationsschritte ist.

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 + x^3 + y^3 + z^3$$

Hinweis: Wie viele partielle Ableitungen 3. Ordnung gibt es bei 3 Variablen? Wie viele muss man nur explizit ausrechnen?

## Kapitel 3, Übung 1: Lösungen

3.1. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen nach den Variablen.

$$\text{a) } f(x, y) = e^x \cdot e^y \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cdot e^y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cdot e^y$$

$$\text{b) } f(x, y) = e^{x \cdot y} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y e^{x \cdot y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x e^{x \cdot y}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \sin(x) \cos(y) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x) \cos(y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x) (-\sin(y))$$

$$\text{d) } f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{1}{(2x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2})^2} \cdot 4x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{1}{(2x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2})^2} \cdot \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = -\frac{1}{(2x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2})^2} \cdot \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}$$

3.2. Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen nach den Variablen. Verifizieren Sie, dass das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationsschritte ist.

a)

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 y^2 + xy + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2 + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 2x^2 y + x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 6x + 2y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 6y + 2x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy + 1 \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy + 1$$

$$\text{b) } f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = -\frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + 3 \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -\frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + 3 \frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = -\frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + 3 \frac{z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{3xy}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{3xz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{3yz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z}$$

3.3. Berechnen Sie alle dritten partiellen Ableitungen. Nutzen Sie aus, dass das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationsschritte ist.

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 + x^3 + y^3 + z^3$$

Hinweis:

Wie viele partielle Ableitungen 3.Ordnung gibt es bei 3 Variablen?

Es gibt insges. 27 Ableitungen 3. Ordnung.

Wie viele muss man nur explizit ausrechnen?

Es sind 10 Ableitungen zu bilden, z.B. nach den Variablen (Reihenfolge der Differentiation von rechts nach links):

xxx, yxx, zxx, yyy, xyy, zyy, zzz, xzz, yzz, xyz

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2z^2 + 3x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2y^2z^2 + 6x \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x} = 6$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} = 4y^2z^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial x} = 4y^2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2yz^2 + 3y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 2x^2z^2 + 6y \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y} = 6$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} = 4xz^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial y} = 4x^2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2y^2z + 3z^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = 2x^2y^2 + 6z \quad \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial z \partial z} = 6$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial z} = 4xy^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial z} = 4x^2y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = 8xyz$$