Mathematik 2

Kapitel 3

Höhere Differentialrechnung

Ulrich H. Becker

Frankfurt University of Applied Sciences

SS 2024

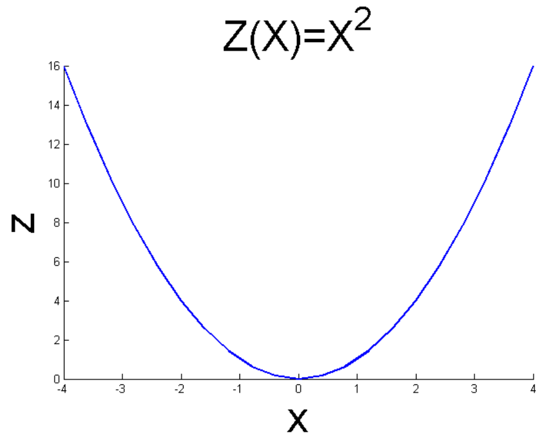
Höhere Analysis

- Höhere Differentialrechnung ist Teil der höheren Analysis. Höhere Analysis bedeutet nicht „höhere Ableitungen“!
  - Ableitungen beliebiger Ordnung hatten wir ja schon.
- Höhere Analysis heißt zunächst einmal:

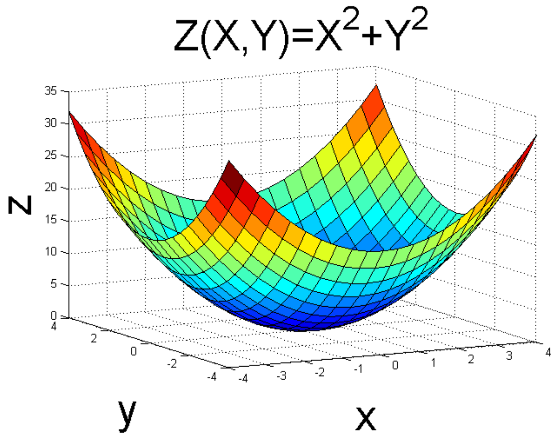
  Höhere Dimensionen !
- M.a.W.: Jetzt bringen wir Analysis und Vektorrechnung zusammen!
- Zunächst Differentialrechnung mit Vektoren.
- Später mehrdimensionale Integrale.

Höhere Analysis

- Z.B. Höhere Dimension des **Definitionsbereiches**.
- Bisher: $x \in \mathbb{R}$, d.h., 1 Dimension
  - z.B. $z = f(x) = x^2$

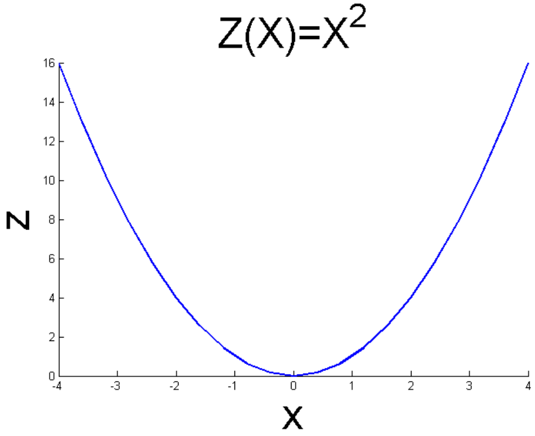


- Jetzt: $x \in \mathbb{R}^n$, d.h., **n** Dimensionen
  - Für's erste aber n=2.
  - z.B. $z = f(x,y) = x^2 + y^2$



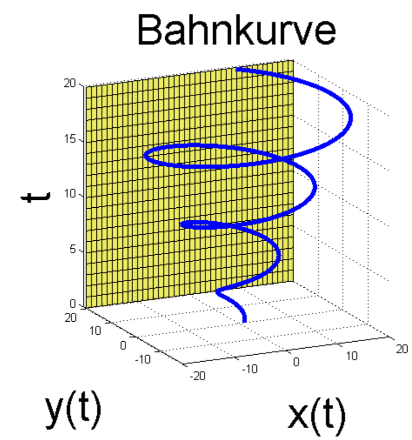
Höhere Analysis

- Z.B. Höhere Dimension des **Wertebereiches**:
- Bisher: $f(x) \in \mathbb{R}$, d.h., 1 Dimension
  - z.B. $z = f(x) = x^2$



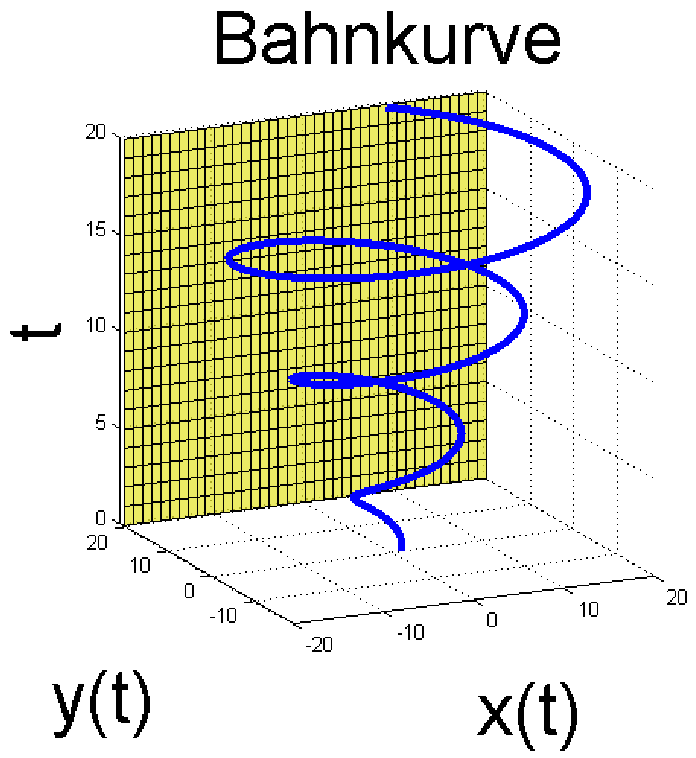
- Jetzt: $f(x) \in \mathbb{R}^m$, d.h., **m** Dimensionen
  - z.B. m=2:

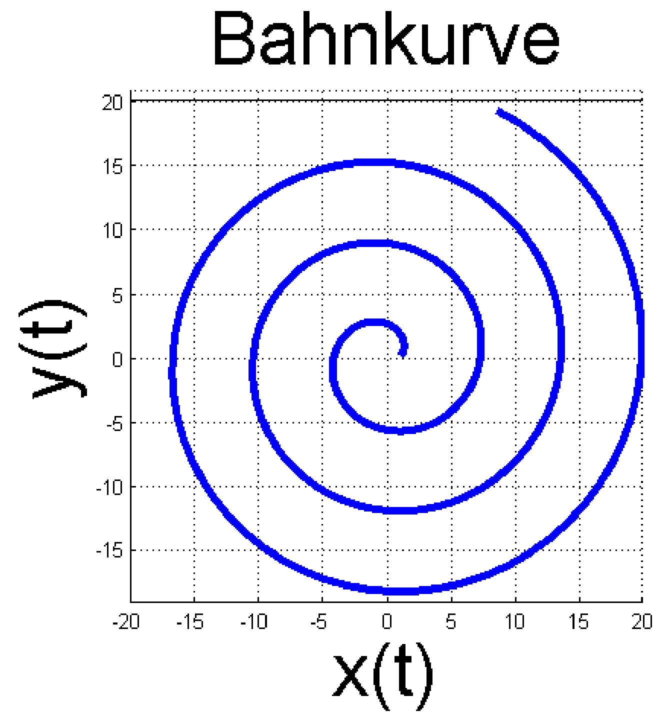
$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)\cos t \\ (1+t)\sin t \end{pmatrix}$$



  - Für‘s erste aber m=1.

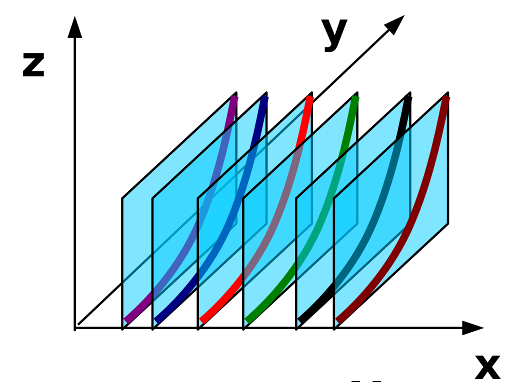
Höhere Analysis

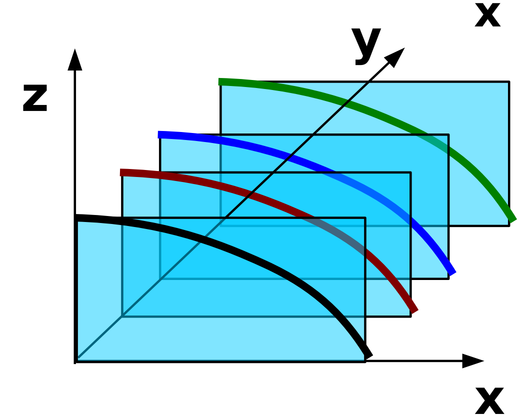




Grafische Darstellung

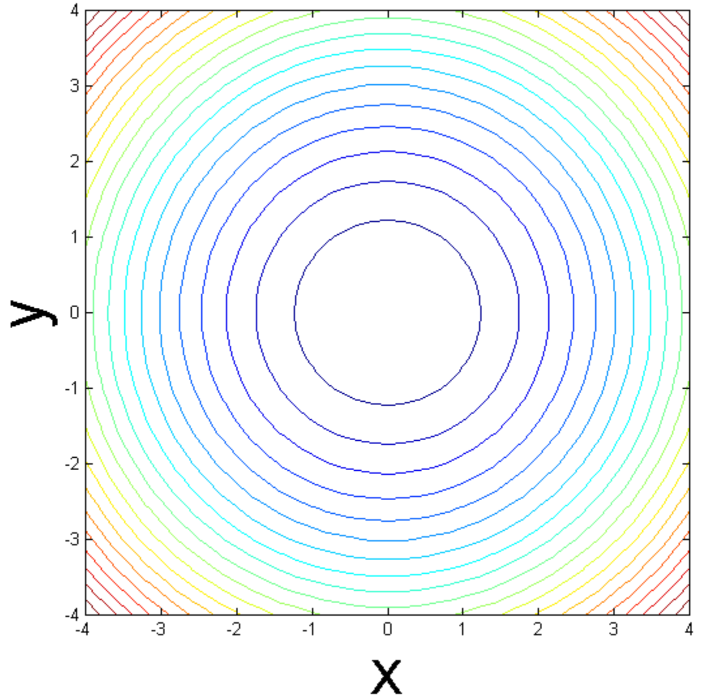
- $D=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Darstellung mögl. im $\mathbb{R}^3$.
- Typischerweise $z=f(x,y)$
  - D.h., 3. Achse für Funktionswerte
  - Abweichung haben wir gerade schon gesehen.
- x=konstant
  - Ebenen senkrecht zur x-Achse
  - y und z sind variabel
- y=konstant
  - Ebenen senkrecht zur y-Achse
  - x und z ist variabel

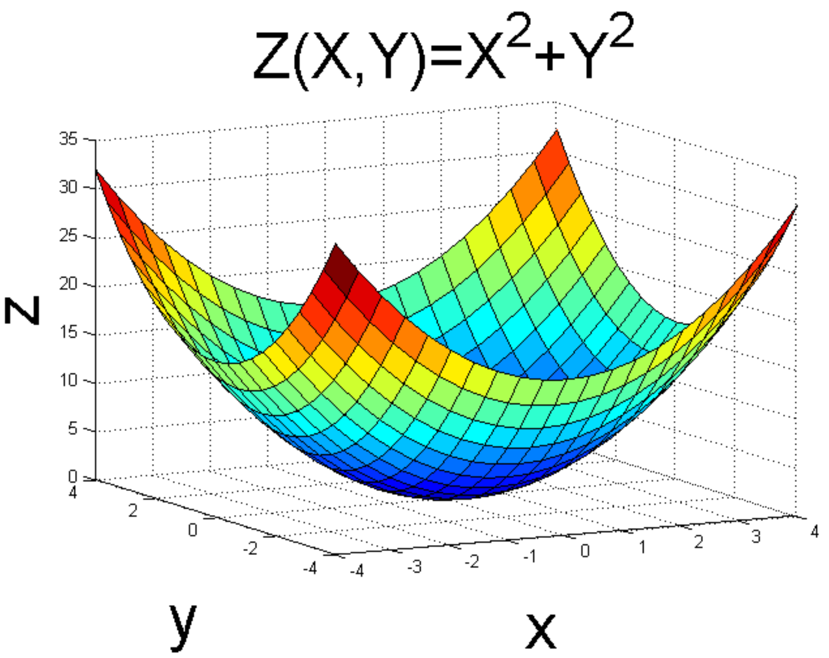


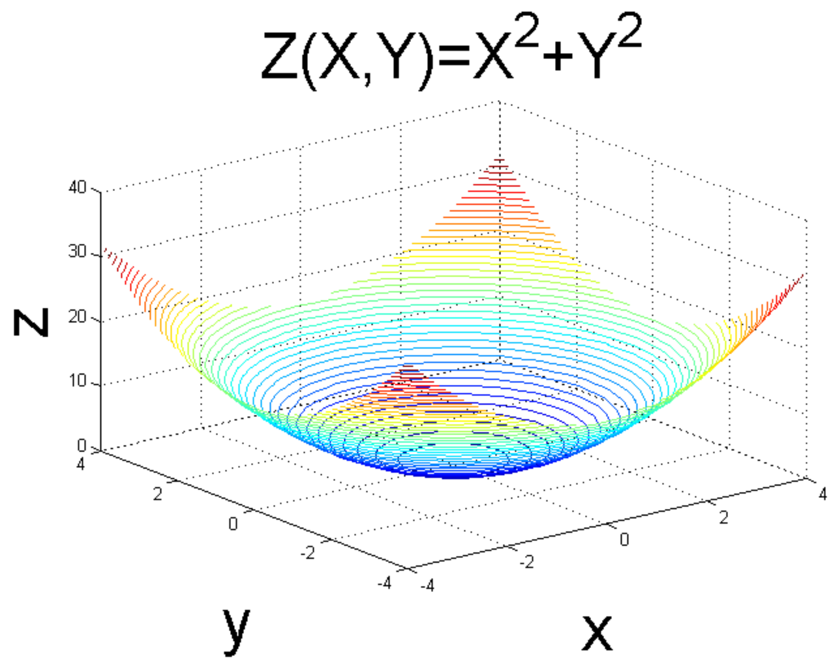


Höhenlinien

- z=konstant
  - Ebenen senkrecht zur z-Achse

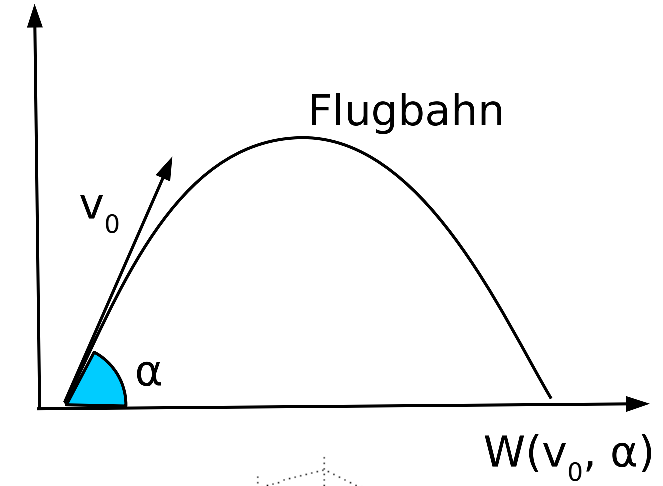






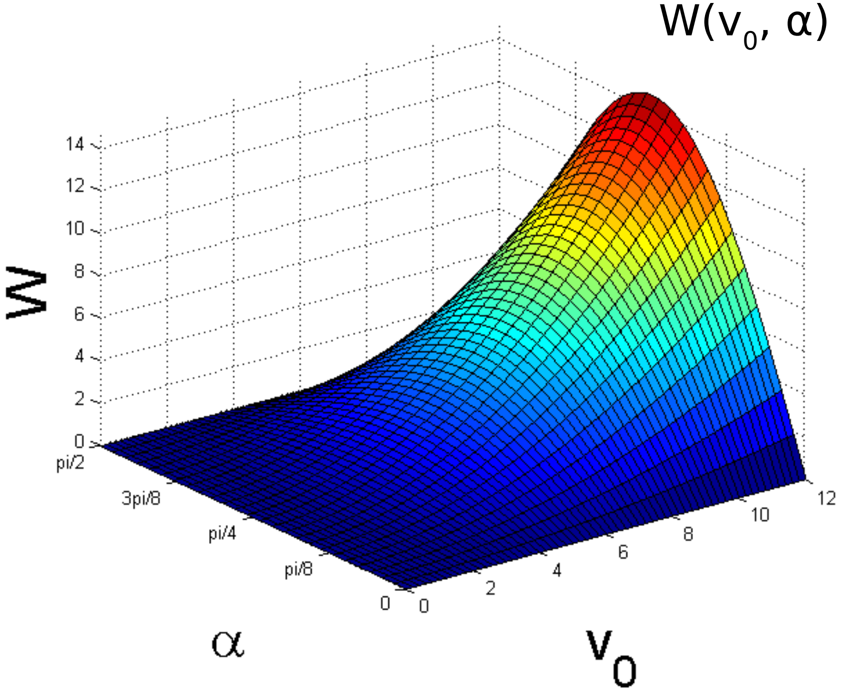
Beispiele

- Schiefer Wurf
  - ohne Luftwiderstand: Parabel.
  - Wurfweite W hängt ab von
    - Anfangsgeschwindigkeit v_0
    - Winkel α gegenüber der Horizontalen



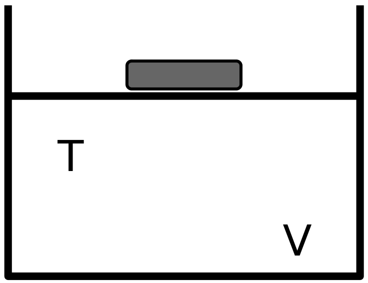
$$W(v_0, \alpha) = \frac{1}{g} v_0^2 \sin(2\alpha)$$

g: Erdbeschleunigung



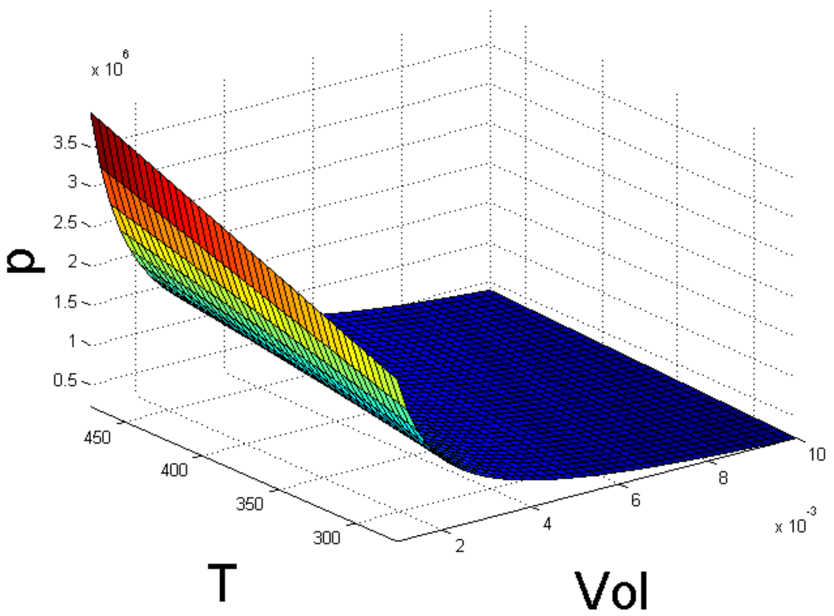
Beispiele

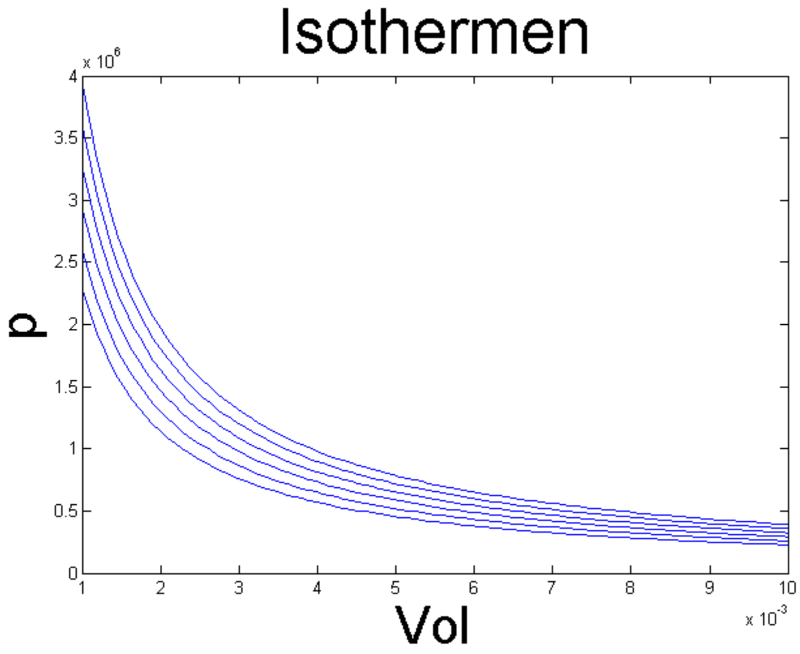
- Ideales Gas
  - Der Gasdruck p hängt ab vom Volumen V und der Temperatur T (für 1 mol):



$$p(V, T) = R\frac{T}{V}$$

R: Gaskonstante



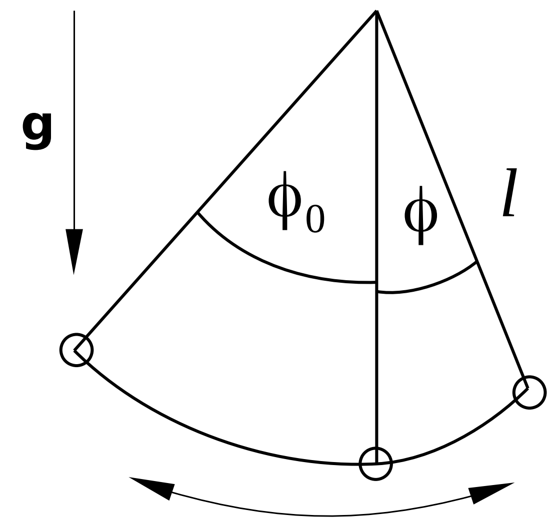


Beispiele

- Fadenpendel
  - Schwingungsdauer bei maximalem Ausschlag ϕ_0 ist:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\phi_0/2)\sin^2 u}}\,du$$

    - siehe Vorlesung über Funktionenreihen



  - Vergleiche mit Formel für kleine Auslenkungen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 6.283\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Beispiele

- Fadenpendel (Fortsetzung)
  - Mit $\lambda = \sin(\phi_0/2)$ ergibt sich (Kap.2, p. 16)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}\, du$$

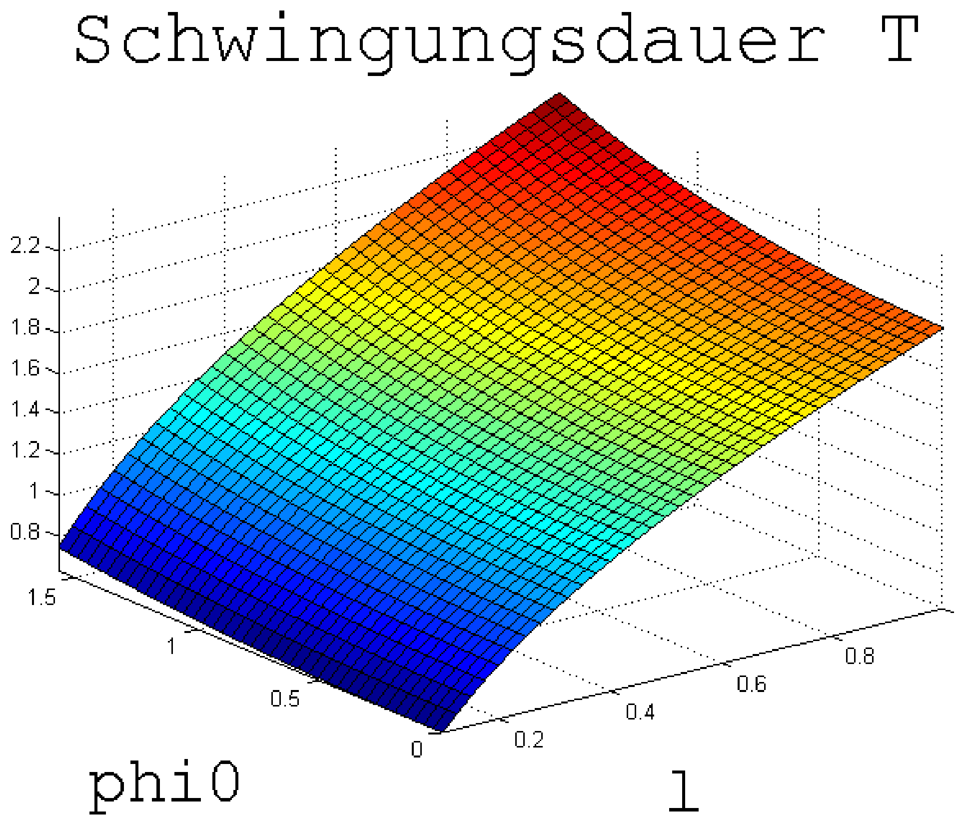
$$= \frac{\pi}{4}\left(2 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{9}{32}\lambda^4 + \frac{25}{128}\lambda^6 + \frac{1225}{8192}\lambda^8 + \frac{3969}{32768}\lambda^{10} + \ldots\right)$$

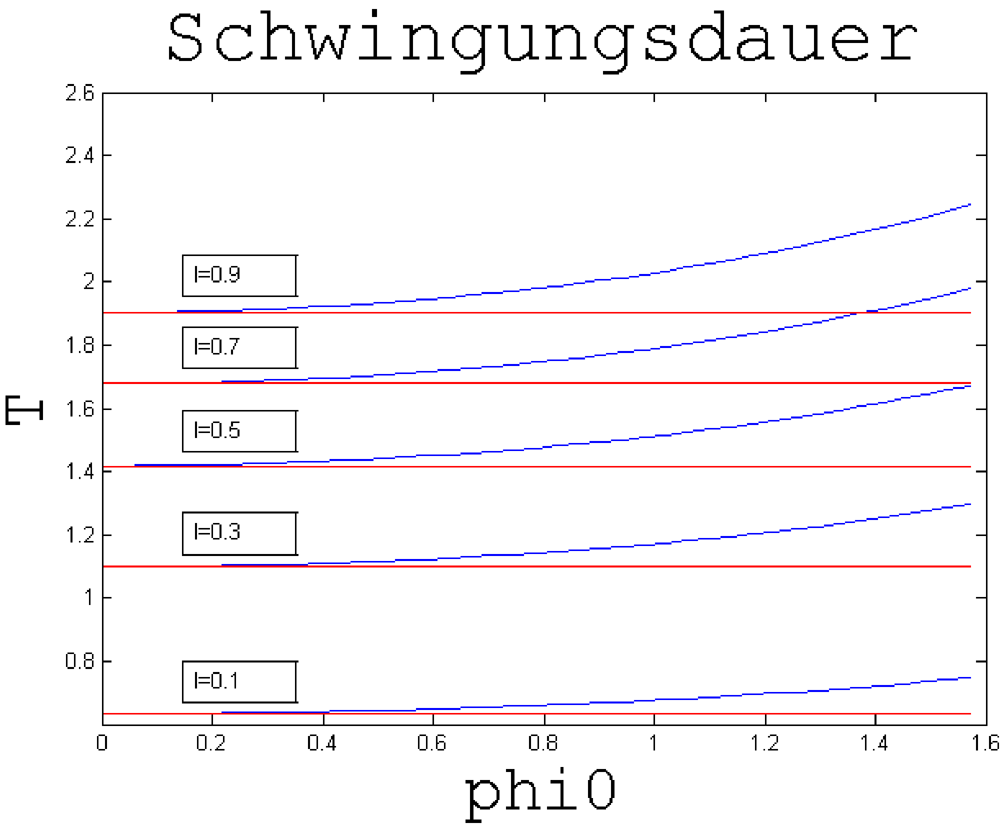
  - Zusammen

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\phi_0/2)\sin^2 u}}\, du \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{4}\left(2 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{9}{32}\lambda^4 + \frac{25}{128}\lambda^6 + \frac{1225}{8192}\lambda^8 + \frac{3969}{32768}\lambda^{10} + \ldots\right) \\ &= T(l, \phi_0) \qquad \text{wegen } \lambda = \sin(\phi_0/2) \end{aligned}$$

Beispiele

- Fadenpendel (Fortsetzung)





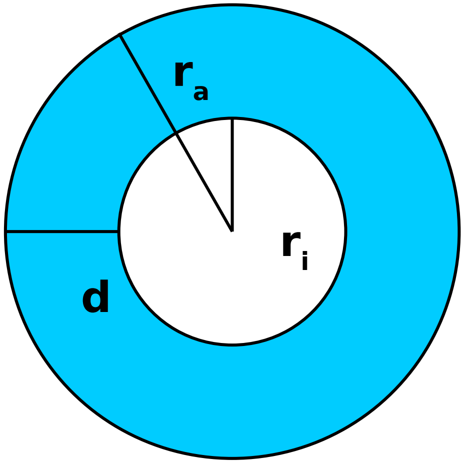
vollständige Formel

Approximation f. kleine Winkel

Beispiele

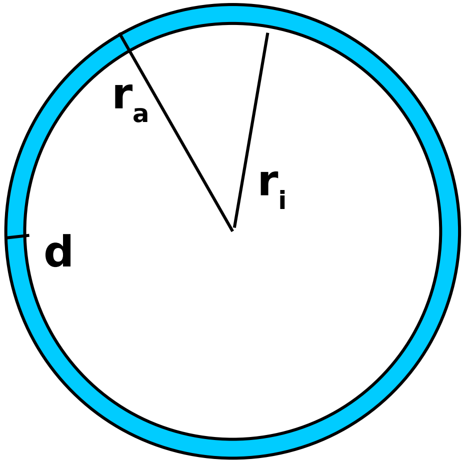
- Elektrischer Widerstand zwischen zwei koaxialen Leitern (Hohlzylinder)

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \qquad r_a > r_i$$



κ Leitfähigkeit

l Länge des Hohlzylinders



- 4 Variablen !

Umgebungen

- Sei **a**=(x,y)$\in\mathbb{R}^2$. Dann ist der Betrag von **a** gegeben durch:

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

- Der Abstand zweier Punkte $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\in\mathbb{R}^2$ ist damit

$$|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

- Eine *ε-Umgebung* von **a**$\in\mathbb{R}^2$ ist damit definiert durch

$$U_\epsilon(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2:\ |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|<\epsilon\}$$

Grenzwerte

- Beachte:
  - 1D: $\lim_{x\to\infty} f(x)$ hat einfache Bedeutung.
  - 2D: Für $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2$, welche Bedeutung hätte
    $\lim_{\mathbf{a}\to\infty} f(\mathbf{a})$?
    - Bedeutung vielleicht für $|\mathbf{a}|\to\infty$.
      Ist aber Spezialfall und wieder 1D!
  - 2D: Deshalb von Interesse für $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$:

$$\lim_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} f(\mathbf{a})$$

Grenzwerte und Stetigkeit

- Sei $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$. Sei $f(\mathbf{b})\in\mathbb{R}$ in einer Umgebung von $\mathbf{b}$ definiert. Dann heißt $g\in\mathbb{R}$ der Grenzwert von f an der Stelle $\mathbf{b}$, wenn gilt

  $$\lim_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} f(\mathbf{a}) = g$$

  unabhängig davon, auf welchem Weg sich $\mathbf{a}$ an $\mathbf{b}$ annähert.

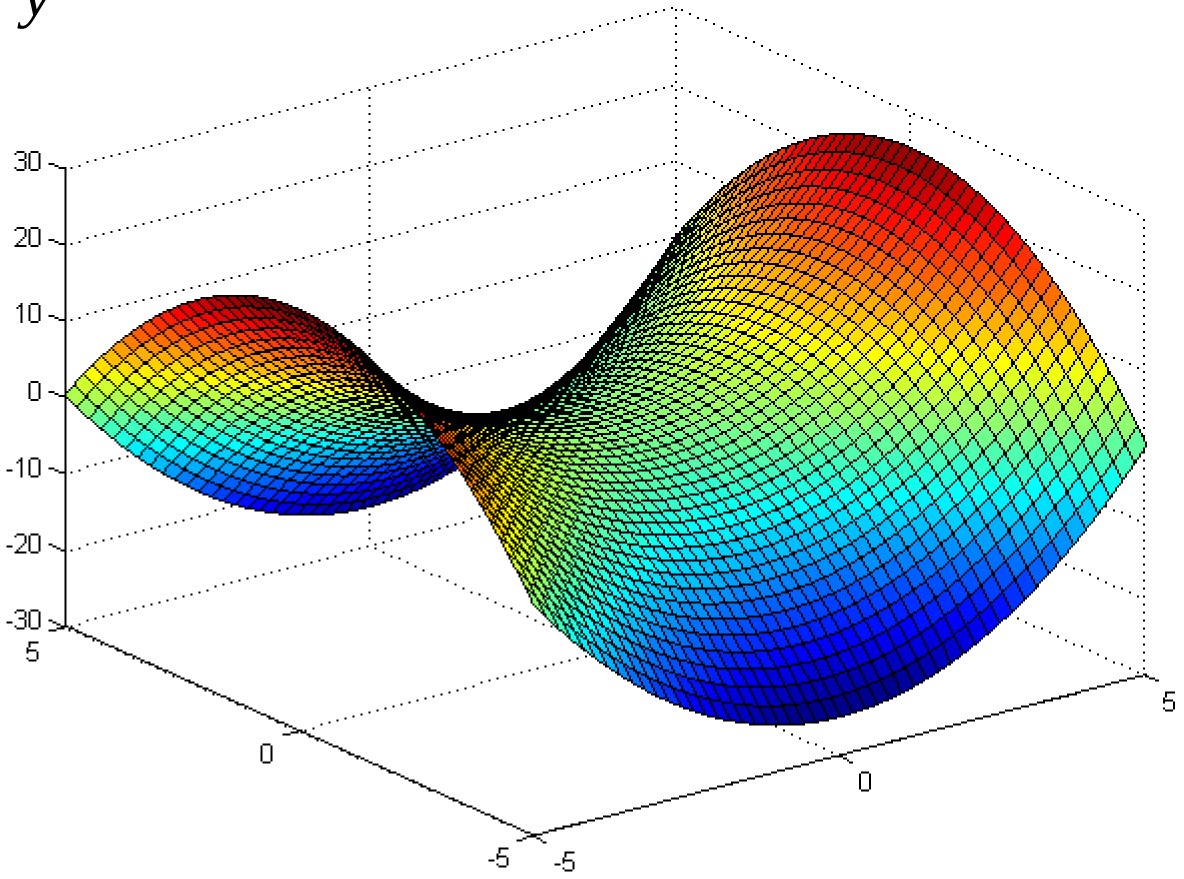
- Eine Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ heißt *stetig an der Stelle* $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2$, wenn mit $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2$ gilt

  $$\lim_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$$

Beispiele

- Sei **a**=(x,y)∈$\mathbb{R}^2$. Betrachte diese Funktionen.

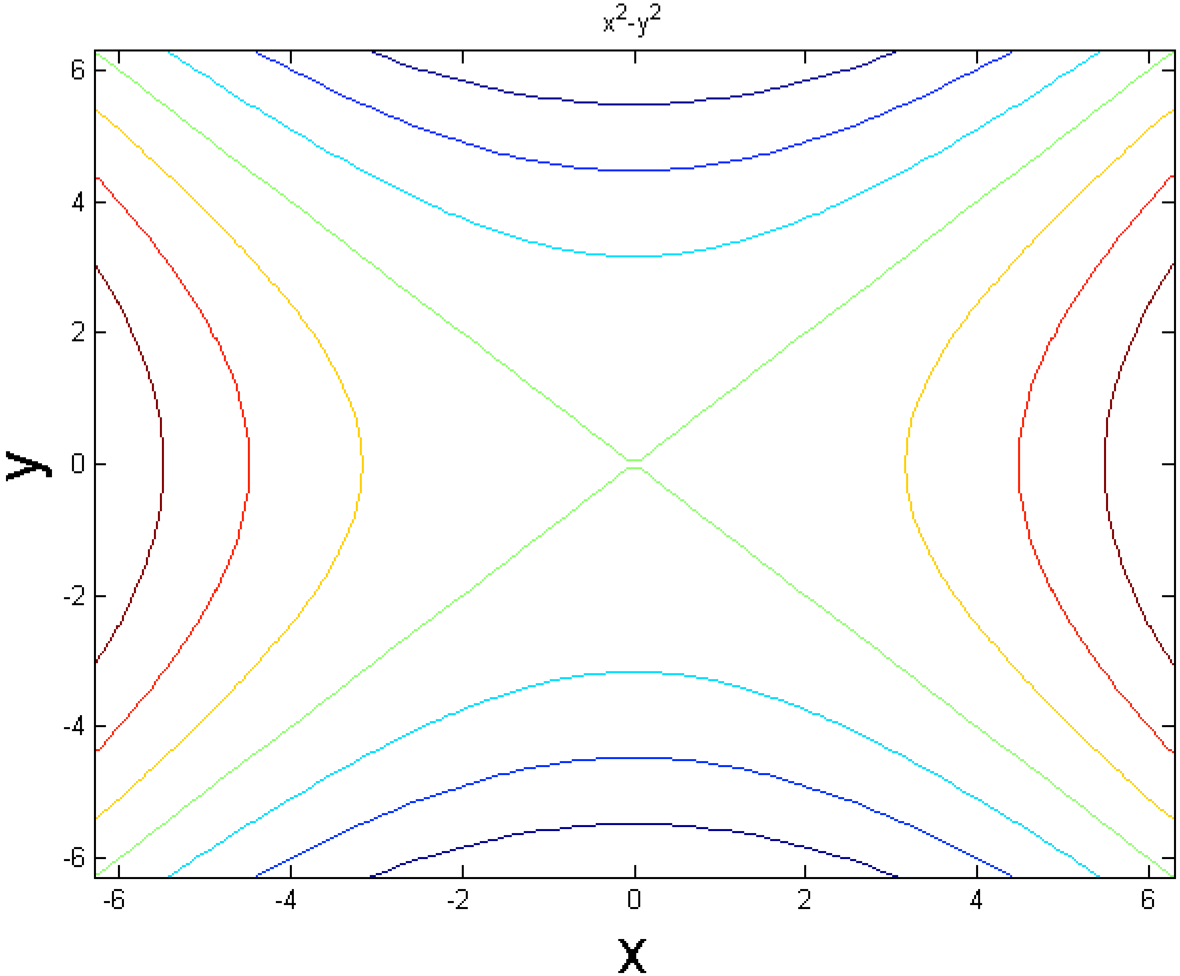
$$f(\boldsymbol{a}) = f(x, y) = x^2 - y^2$$



Beispiele

- Sei **a**=(x,y)∈ℝ². Betrachte diese Funktionen.

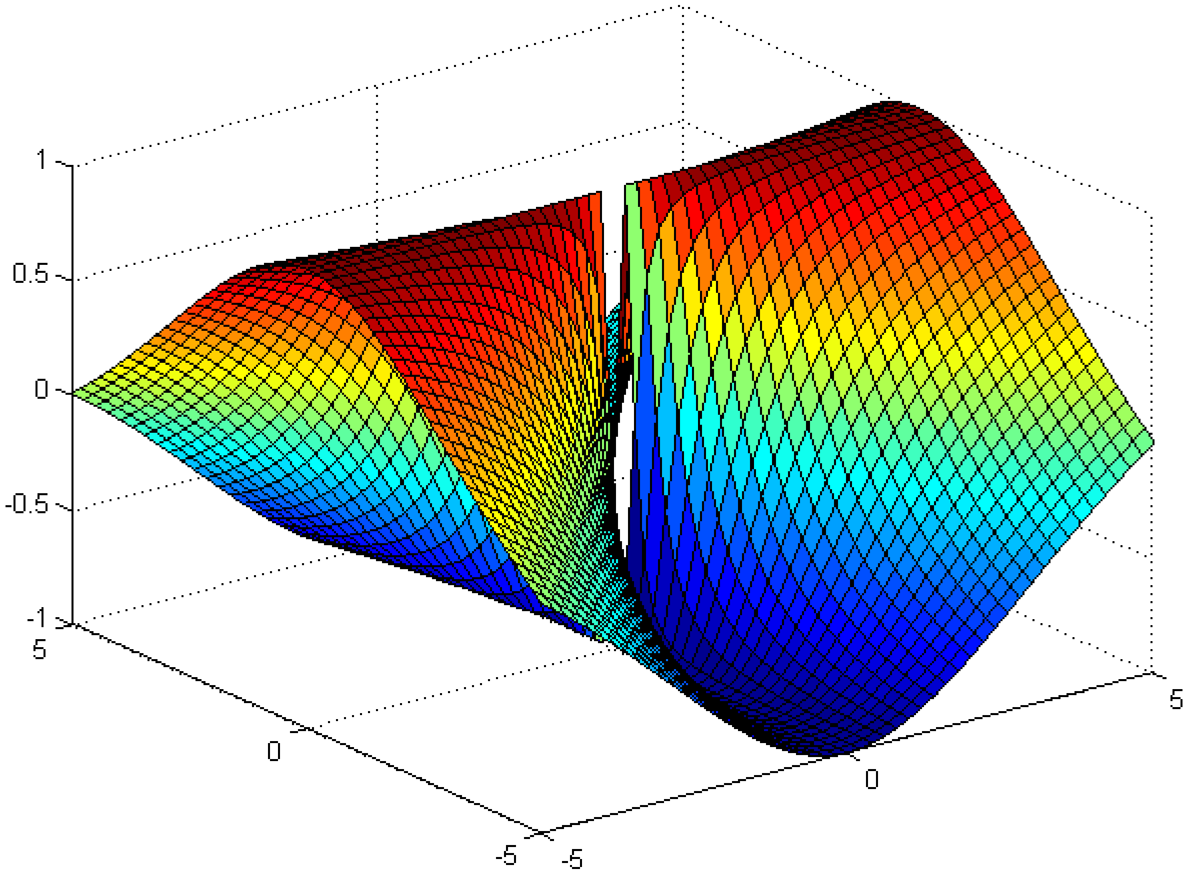
$$f(\boldsymbol{a}) = f(x, y) = x^2 - y^2$$



Beispiele

- Sei **a**=(x,y)∈$\mathbb{R}^2$. Betrachte diese Funktionen.

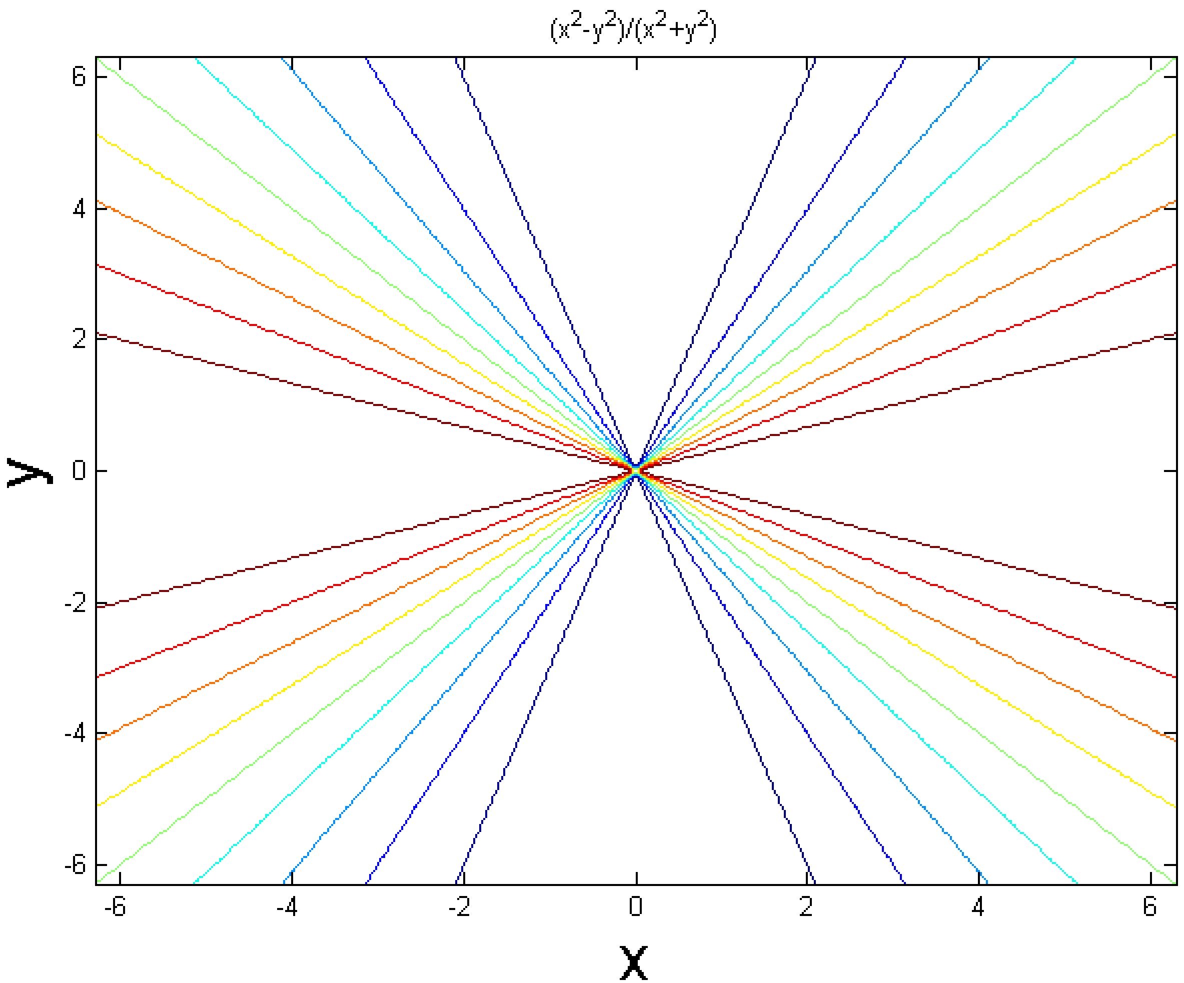
$$f(\boldsymbol{a}) = f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$



Beispiele

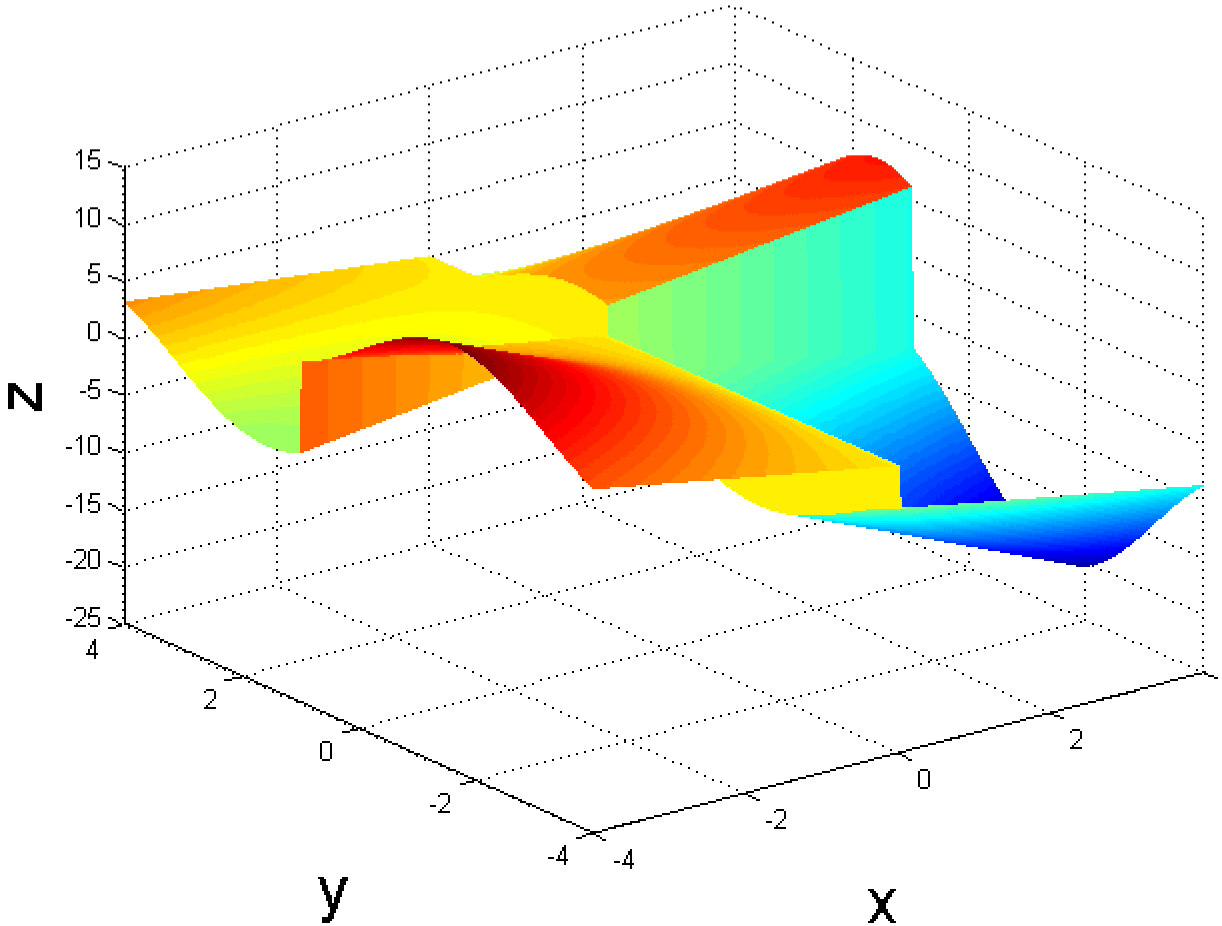
- Sei $\mathbf{a}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Betrachte diese Funktionen.

$$f(\boldsymbol{a})=f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$



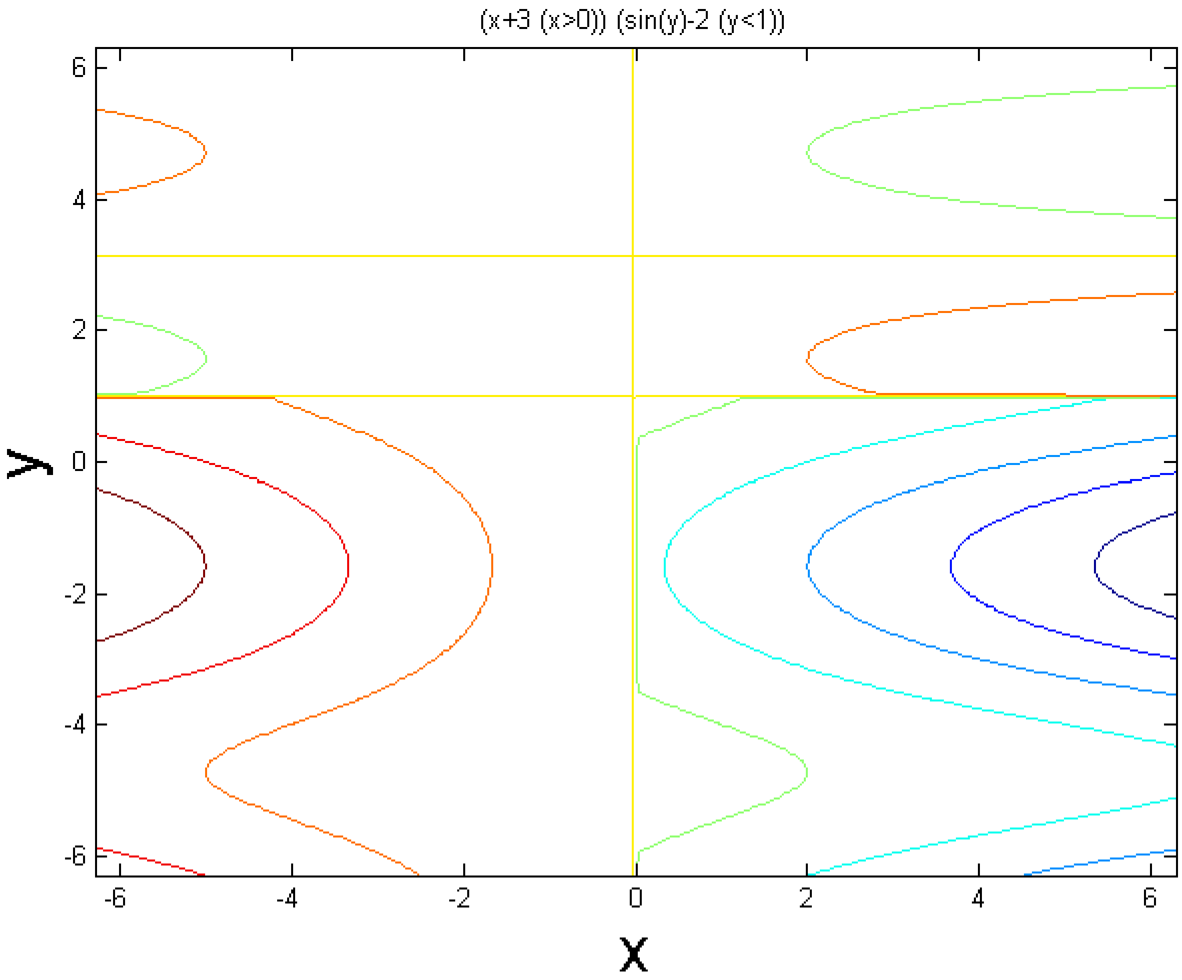
Beispiele

- Step-Funktion in 2 Dimensionen



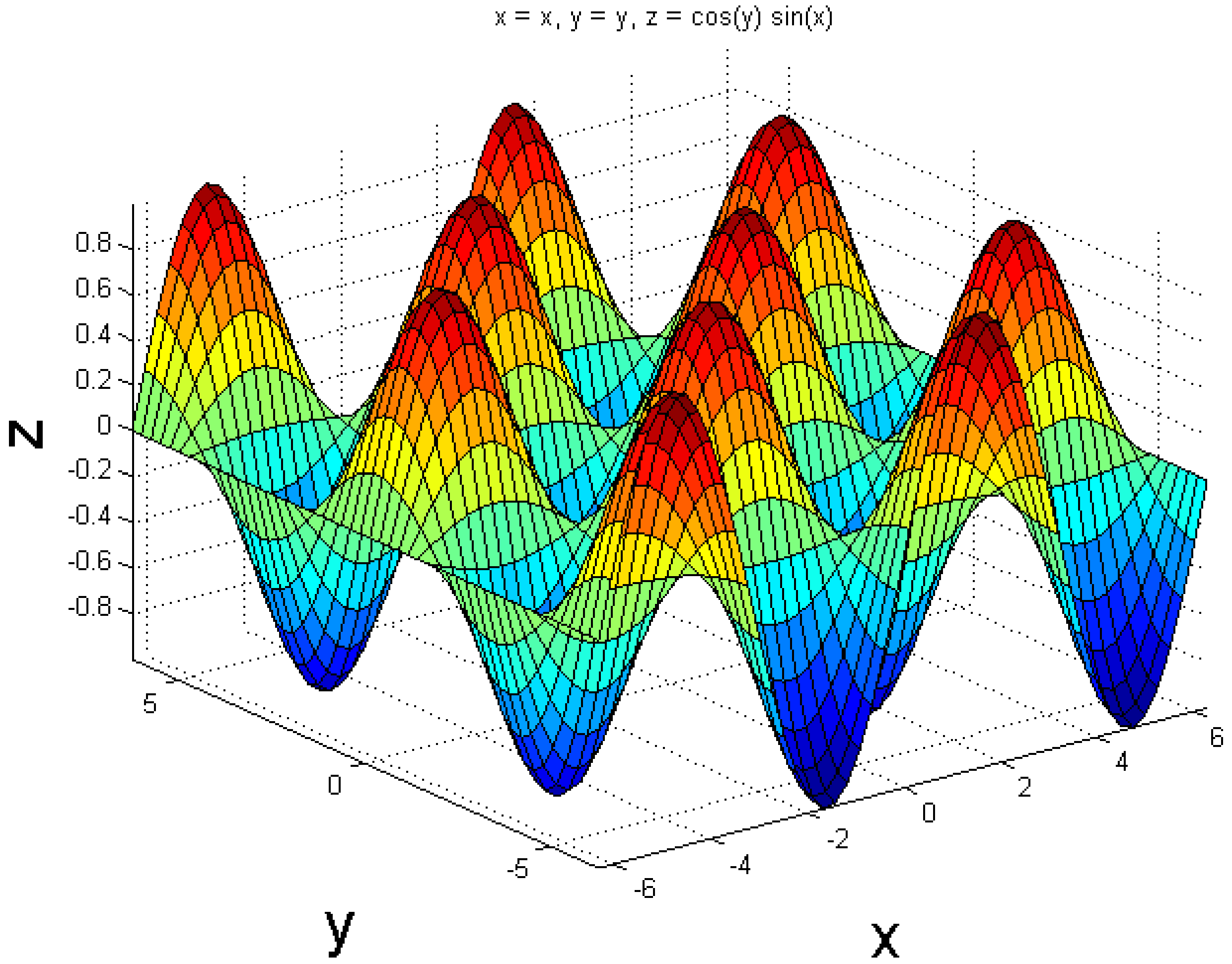
Beispiele

- Step-Funktion in 2 Dimensionen



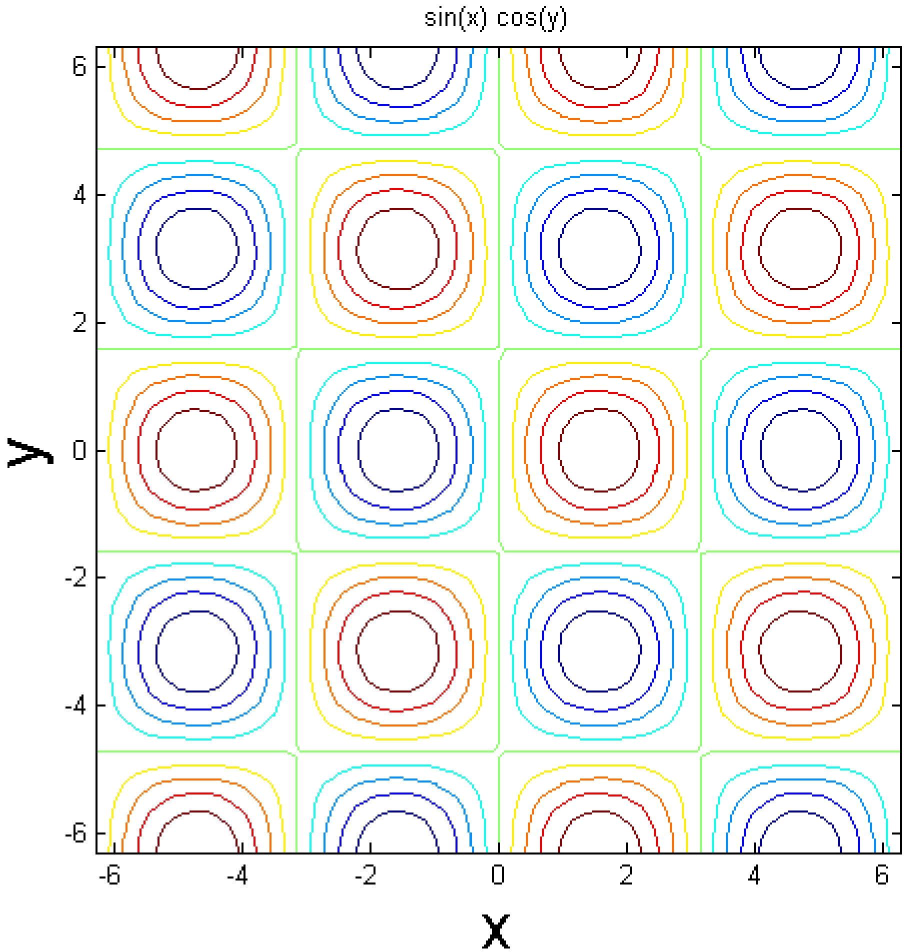
Beispiele

- z=sin(x) * cos(y)



Beispiele

- z=sin(x) * cos(y) (Fortsetzung)



Partielle Ableitungen

- Partielle Ableitungen sind wieder der Limes eines Differenzenquotienten.
- Es wird einzeln nach den Komponenten abgeleitet.
  - d.h., die anderen Komponenten werden als konstant betrachtet.
- z.B. mit **a**=(x,y)$\in\mathbb{R}^2$
  - partielle Ableitung nach x

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

  - partielle Ableitung nach y

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Partielle Ableitungen

- Beispiele
  - ▷ $p(V,T) = RT/V$ (für 1 mol; R: Gaskonstante)
  - ▷ $f(x,y) = x^2 y^4 + e^x \cos y + 10x - 2y^2 + 3$
  - ▷ $f(x,y) = x y^2 (\sin x + \sin y)$
  - ▷ $f(x,y) = \sqrt{(x y^2 + x^2 y)}$
- Aufgaben
  - ▷ $f(x,y) = x^3 + x^2 - 2xy + y^2 + y^4$
  - ▷ $f(x,y) = \ln(x + y^2) - e^{2xy} + 3x$
  - ▷ $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - ▷ $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}$

Höhere partielle Ableitungen

- Ist eine partielle Ableitung selbst eine differenzierbare Funktion, so kann man auch sie wiederum ableiten.
- Betrachte wiederum f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

1.Ordnung

2.Ordnung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

3.Ordnung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}$$

- Was ist mit der Reihenfolge der Ableitungen?

Höhere partielle Ableitungen
Satz von Schwarz

- Bei einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetig sind.

- Beispiel f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Unter obigen Voraussetzungen ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

D.h. nur 3 versch. Ableitungen statt 4.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}$$

D.h. nur 4 versch. Ableitungen statt 8.

Höhere partielle Ableitungen

- Mit Ausnahme von Definitionslücken sind die Ableitungen bei vielen Anwendungen im Ingenieurbereich stetig. D.h., man darf die Reihenfolge der Differentiationsschritte vertauschen.

- Beispiele mit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Sei $(x,y)\neq 0$.

  - $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

    (Verifiziere den Satz von Schwarz.)

  - $f(x,y)=\ln\left(x^2+y\right)$

- Haken: Wo ist der „Fehler“ in diesen Beispielen?
  Hinweis: Das ist subtil.

$(x,y)\neq 0$ reicht nicht! Definitionsbereiche komplizierter!

Gradient

- Sei f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann heißt der Vektor der ersten partiellen Ableitungen *der Gradient von f*.

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

- Beispiel:

  f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2 + y^2$.

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2x \quad , \quad 2y\right)$$

Hesse-Matrix

- Sei f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen heißt *Hesse-Matrix*.
- Beachte: Sind die 2. Ableitungen stetig, so ist die Hesse-Matrix symmetrisch!

$$Hess(f)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Beispiel:
  f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
  $f(x,y)=x^2 + y^2$.

$$Hess(f)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gradienten: Ableitungsregeln

- Da wir die partiellen Ableitungen analog den „gewöhnlichen“ Ableitungen definiert haben, übertragen sich die Regeln für Ableitungen sinngemäß. Seien f,g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.
  - Faktorregel $$grad(c \cdot f) = c \cdot grad\ f$$
  - Summenregel $$grad(f + g) = grad\ f + grad\ g$$
  - Produktregel $$grad(f \cdot g) = g \cdot grad\ f + f \cdot grad\ g$$
  - Quotientenregel $$grad\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot grad\ f - f \cdot grad\ g}{g^2}$$

Gradienten: Ableitungsregeln

- Aufgabe: Es seien

  $f,g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = e^x - e^{-y}$

  $g(x,y) = x^2 + y^{-2}$

  Berechnen Sie:

  - grad $(c\, f)$ $\quad c \in \mathbb{R}$, c=konst.
  - grad $(f + g)$
  - grad $(f * g)$
  - grad (f/g)

Gradienten: Ableitungsregeln

- Was ist mit der Kettenregel?
- Was ist mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion?

… erfordern mehr Vorbereitung.

Gradienten: Ableitungsregeln

- Kettenregel zuerst.
- Betrachte Verschachtelung $f(g(x))$ (auch „$f \circ g$“)
- Bisher: Für Funktionen $f,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ problemlos
- Nun: Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$.
- Damit die Verschachtelung überhaupt definiert ist, muss $\mathbf{q = n}$ sein !
- Um Funktionen mit mehreren Variablen zu verschachteln, muss man vektorwertige Funktionen haben!
- Was sind die Ableitungen einer vektorwertigen Funktion?

Ableitung von vektorwertigen Funktionen

- Bisher: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow$ Ableitung ist grad f

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow grad\ f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- Nun: **f**: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \Rightarrow grad\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

m × n Matrix

Jacobi Matrix

Kettenregel

- Seien **f**: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, **g**: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.
  Für **f**∘**g**: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ berechnet sich dann die 1. Ableitung aus:

$$grad\left(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}\right)\left(\boldsymbol{x}\right) = \overbrace{grad\ \boldsymbol{f}\left(g\left(\boldsymbol{x}\right)\right)}^{\textbf{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{grad\ \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}\right)}_{\textbf{innere Ableitung}}$$

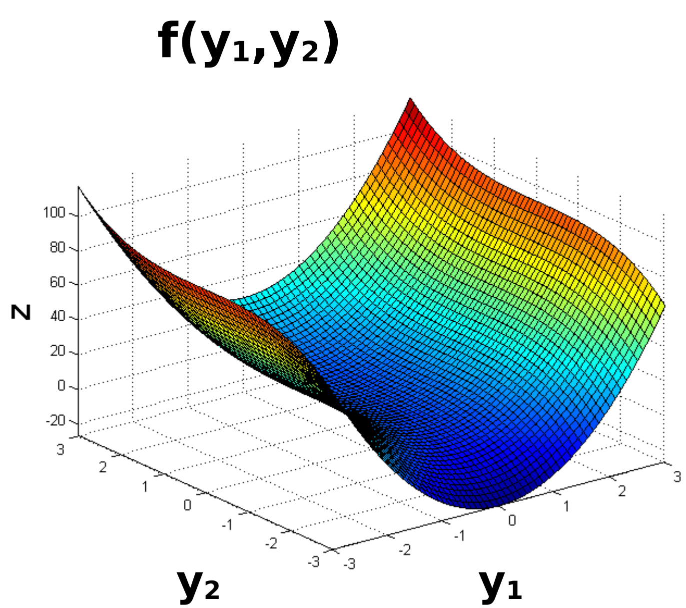
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}}_{\textbf{m × k Matrix}}$$

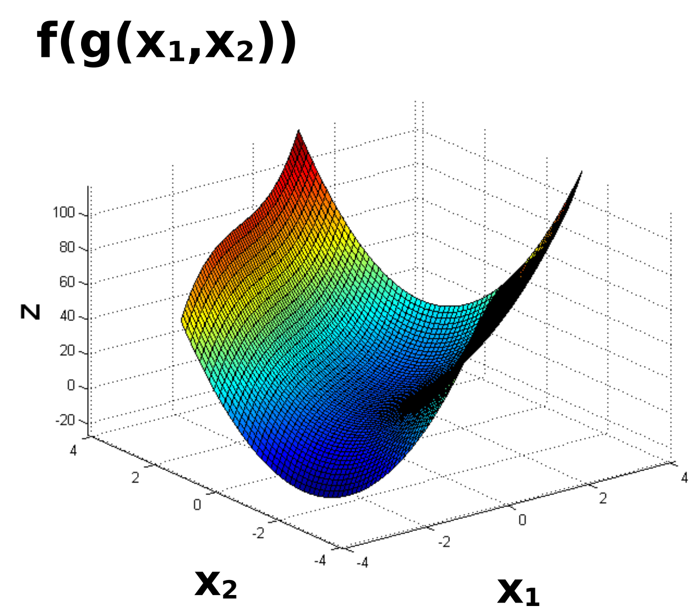
Kettenregel: Beispiel

f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\quad f(y_1, y_2) = 10\, y_1^2 + y_2^3$

$\mathbf{g}$: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad \boldsymbol{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi \\ x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi \end{pmatrix} \quad \phi = \pi/3$

$\Rightarrow f \circ \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$



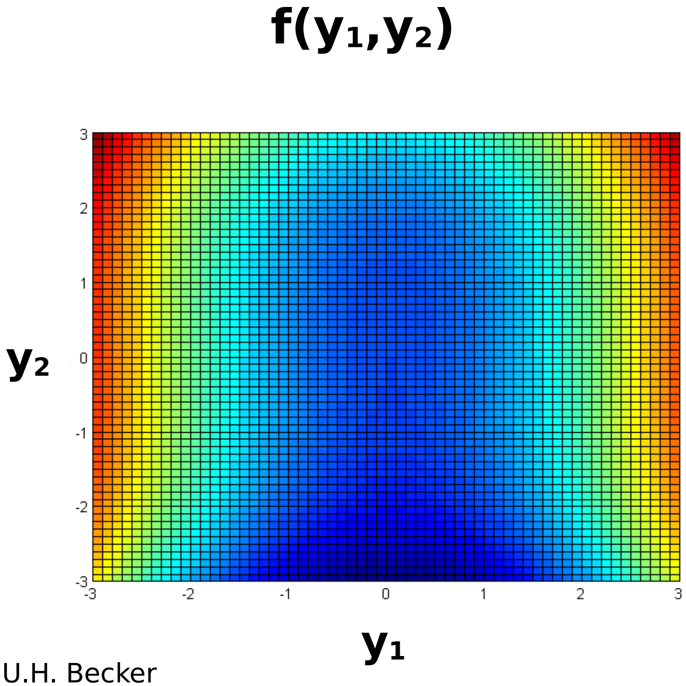


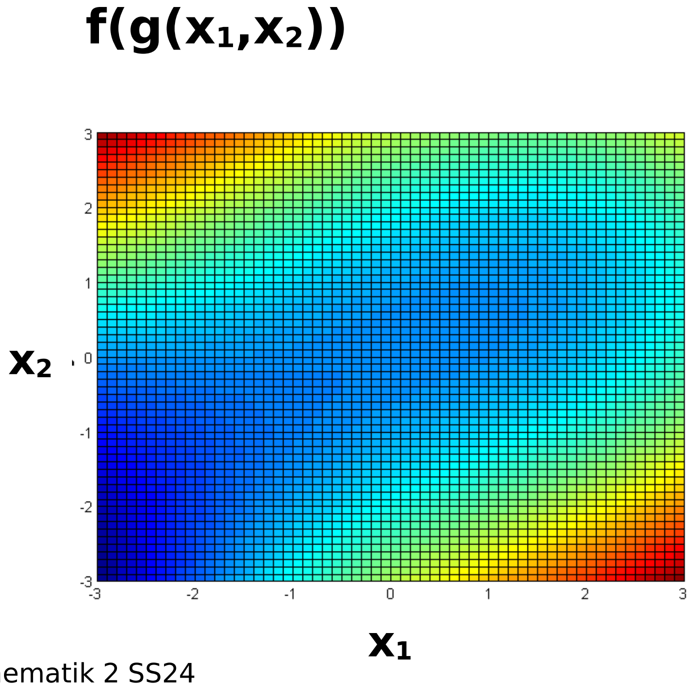
Kettenregel: Beispiel

f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $\quad f(y_1, y_2) = 10\, y_1^2 + y_2^3$

g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad \boldsymbol{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi \\ x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi \end{pmatrix} \quad \phi = \pi/3$

$\Rightarrow$ f $\circ$ **g** : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$





Kettenregel: Beispiel

f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $\qquad f(y_1, y_2) = 10\, y_1^2 + y_2^3$

g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\qquad \boldsymbol{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi \\ x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi \end{pmatrix} \qquad \phi = \pi/3$

$\Rightarrow$ f $\circ$ **g** $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

$$grad\ f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 20\, y_1 \\ 3\, y_2^2 \end{pmatrix}^T \qquad grad\ \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$grad\,(f \circ \boldsymbol{g})(x_1, x_2) = grad\ f(\boldsymbol{g}(x_1, x_2)) \cdot grad\ \boldsymbol{g}$$

$$= \begin{pmatrix} 20(x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi) & 3(x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20(x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi)\cos\phi + 3(x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi)^2 \sin\phi \\ -20(x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi)\sin\phi + 3(x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi)^2 \cos\phi \end{pmatrix}^T$$

Kettenregel: Beispiel

f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $f(y_1, y_2) = 10\, y_1^2 + y_2^3$

g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi \\ x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi \end{pmatrix}$ $\phi = \pi/3$

$\Rightarrow f \circ \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

Gegenprobe: Einsetzen und partielle Ableitungen bilden.

$$F(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = 10(x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi)^2 + (x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi)^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 20(x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi)\cos\phi + 3(x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi)^2 \sin\phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -20(x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi)\sin\phi + 3(x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi)^2 \cos\phi$$

Ableitung der Umkehrfunktion

- Sei **f**: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
- Kann es für n≠m eine Umkehrfunktion geben?
  - Nein!
  - Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$ (also n=2, m=1)
    Gleicher Funktionswert für alle Paare (x,y), die auf einer Höhenlinie liegen. Keine eindeutige Umkehrung möglich!
- Wie verallgemeinert man den eindimensionalen Fall? Erst einmal umschreiben:

$$h(x) = f^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \quad \Rightarrow \quad f'\Big(\underbrace{f^{-1}(x)}_{\textbf{Urbild von x}}\Big) \cdot h'(x) = 1$$

Ableitung der Umkehrfunktion

- Sei $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Sei $\mathbf{b}=\mathbf{f}(\mathbf{a})$ für $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$. Sei die Umkehrfunktion $\mathbf{f}^{(-1)}$ bei $\mathbf{b}$ definiert und differenzierbar. Dann ist

$$grad\ \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{b}) = \underbrace{\left(grad\ \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})\right)^{-1}}_{\textbf{inverse Matrix!}}$$

- Beachte $\mathbf{a} = \mathbf{f}^{(-1)}(\mathbf{b})$ ist Urbild zu $\mathbf{b}$ wie im eindimensionalen Fall.
- „Die Ableitung der Umkehrfunktion $\mathbf{f}^{(-1)}$ an einer Stelle $\mathbf{b}$ ist gleich dem Kehrwert der Ableitung der ursprünglichen Funktion $\mathbf{f}$ am Urbild von $\mathbf{b}$.“

Richtungsableitung

- Bisher: Partielle Ableitungen entlang der Koordinatenachsen.
- Aber im $\mathbb{R}^n$ gibt es viele Richtungen!
- Sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{b}|=1$. Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}$.
  Dann ist die Richtungsableitung definiert durch

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial b} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+h \cdot \boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

- Wert des Limes über l'Hospital mit Ableitungen nach h! Dann Nenner=1. Für den Zähler folgt mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}+h \cdot \boldsymbol{b})}{\partial h} = \underbrace{(grad\ f)}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{b}}_{\text{innere Abl.}}$$

Gradienten und Höhenlinien

- Sei der Richtungsvektor **b** an einer Stelle x tangential zu einer Höhenlinie. Da sich f entlang der Höhenlinie nicht ändert, ist diese Richtungsableitung Null.

$$0=\frac{\partial f}{\partial b}=(grad\ f)\cdot\boldsymbol{b}$$

- D.h., der Gradient von f ist orthogonal zu b. M.a.W., Gradienten stehen senkrecht auf Höhenlinien.
  - Und sie zeigen in die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktionswerte.

Tangentialebene

- Sei f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $\mathbf{a},\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^2$. Dann ist die *Tangentialebene* an den Graphen von f im Punkt $\mathbf{a}_0$ gegeben durch

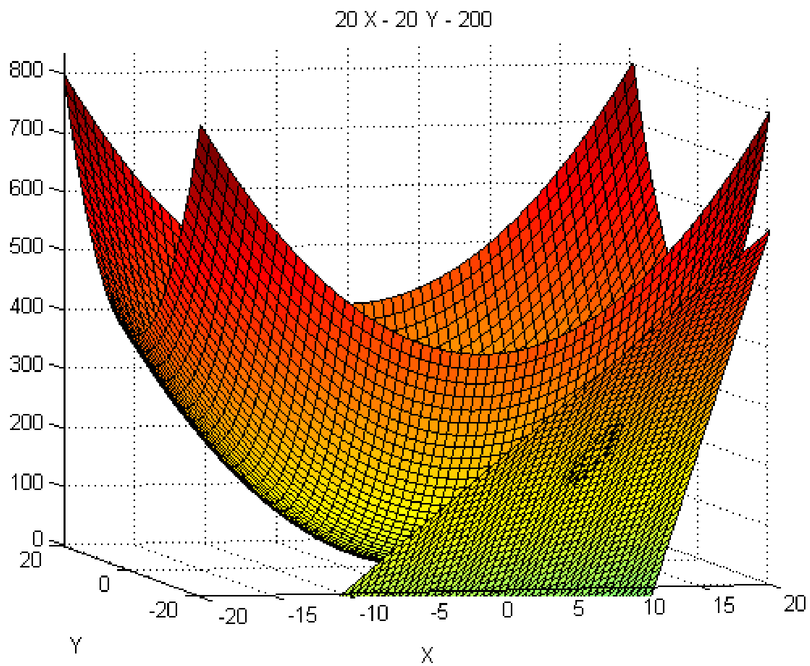
$$T(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}_0) + grad\, f(\boldsymbol{a}_0) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_0) \qquad \textbf{(1)}$$

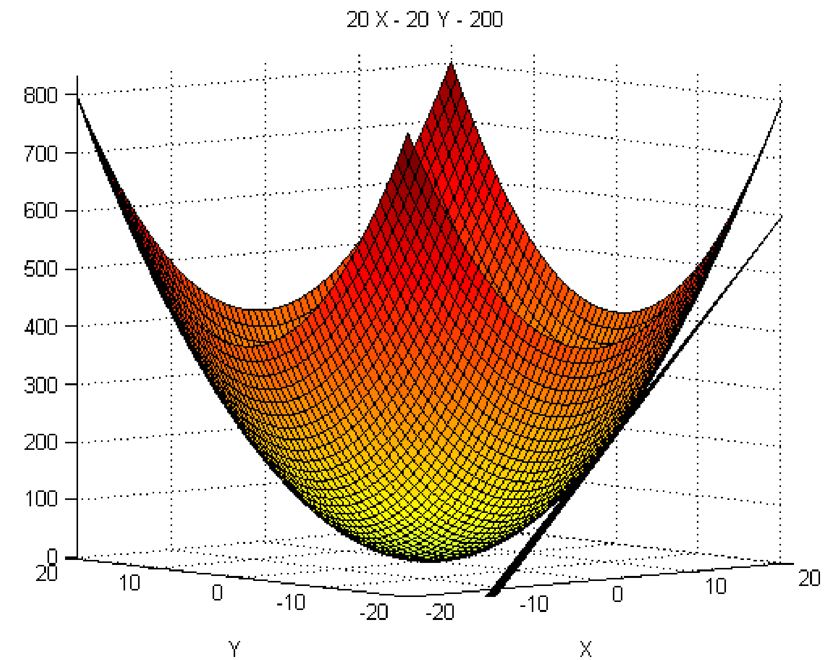
$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) \qquad \textbf{(2)}$$

- Beachte:
  - (1) gilt genauso auch für $\mathbf{a},\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ für ein beliebiges Koordinatensystem.
  - (2) gilt so nur für $\mathbf{a}=(x,y),\mathbf{a}_0=(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit einem kartesischen Koordinatensystem.

Tangentialebene

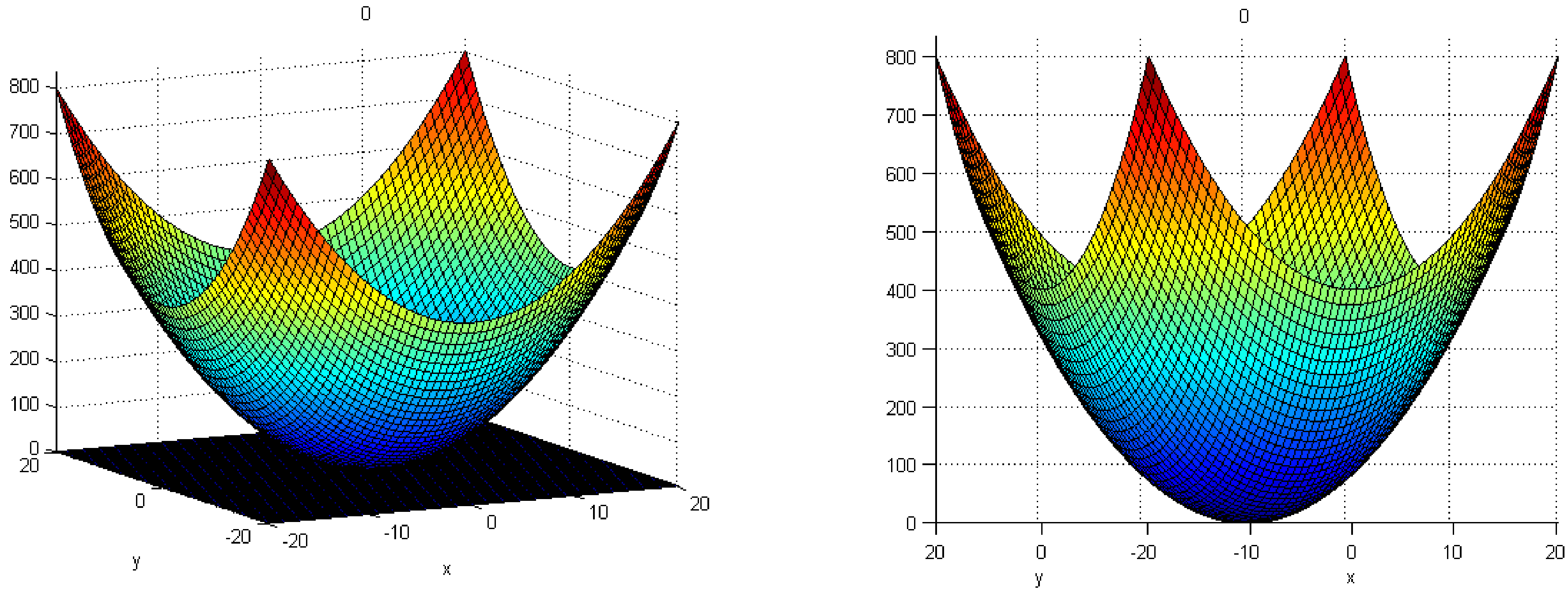
- Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ bei $\mathbf{a}_0 = (10, -10)$





Lokale Extrema

- Beispiel: f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2 + y^2$ bei $\mathbf{a}_0 = (0, 0)$.
- Dann ist grad $f(\mathbf{a}_0) = 0$.
  D.h., die Tangentialebene verläuft horizontal.
- Dies ist die neue notwendige Bedingung
  für ein lokales Extremum.



Definitheit einer Matrix

- Aber die 2.Ableitung ist nun keine Zahl mehr, sondern eine Matrix.
- Deshalb brauchen wir einige Hilfsmittel.
- Eine quadratische nxn–Matrix $\mathbf{M}$ heißt
  - ***positiv definit***, wenn $\mathbf{x}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} > 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
  - ***positiv semidefinit***, wenn $\mathbf{x}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} \geq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
  - ***negativ definit***, wenn $\mathbf{x}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} < 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
  - ***negativ semidefinit***, wenn $\mathbf{x}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} \leq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
  - ***indefinit***, wenn es $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit
    $\mathbf{x}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{y} < 0$

Definitheit einer Matrix

- Wie kann man die Definitheit einer Matrix bestimmen?
- **Mit der Definition!**
- Oder z.B. mit dem Kriterium von Hurwitz:

  Eine quadratische n×n-Matrix ist genau dann **positiv definit**, wenn für alle k=1,..,n gilt

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

  - Beachte: Man muss dies für eine ganze Sequenz von Unterdeterminanten machen!

Definitheit einer Matrix

- Das vorherige Hurwitz-Kriterium sagt nur etwas aus für **positiv definite** Matrizen.
- Was ist mit den anderen?
- Dann wird's nickelig.
- Definition $\mathbf{x}^\mathsf{T}\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} \gtrless 0$ tatsächlich am einfachsten zu merken!
- Aber: Für 2x2-Matrizen (und nur die!) siehe Kasten „Hinreichende Bedingungen für einen relativen Extremwert" in

  Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2, 13.Auflage, Vieweg+Teubner, 2012, Abschnitt 2.5.3, p.249

  FRA-UAS Bibliothek: https://hds.hebis.de/fuas/Record/HEB354359975

Definitheit einer Matrix

- **Exkurs**: Matrizen – Determinanten – Eigenwerte
- Zur Erinnerung: Siehe Themen „Eigenwerte und Eigenvektoren“ und „orthogonale Matrizen“ im Matrizen-Kapitel in Mathematik-1 vom Wintersemester.
- Beobachtung: Gegeben eine symmetrische Matrix. Wenn man nun die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet, zeigen diese Eigenvektoren in bestimmte Richtungen im Raum im gegebenen Koordinatensystem.
- Wechselt man das Koordinatensystem so, dass die neuen Achsen die Eigenvektoren sind, ändert sich die Darstellung der Matrix: Sie wird eine Diagonalmatrix und die Werte auf der Diagonalen sind die Eigenwerte.
- Wichtig: Die Determinante ändert sich dabei nicht!

Definitheit einer Matrix

- Wenn man also verstehen will, was die Determinante über die Matrix aussagt, ist es hilfreich, sich die Matrix in dieser Diagonalform der Eigenwerte anzuschauen!
- Das Kriterium für Definitheit bleibt dasselbe:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} \gtrless 0$$

z.B. für $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \, x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

- alle Eigenwerte positiv ⇒ Matrix positiv definit.
- alle Eigenwerte negativ ⇒ Matrix negativ definit.
- positive <u>und</u> negative Eigenwerte ⇒ Matrix indefinit.

Definitheit einer Matrix

- Und was heißt das nun für die Determinante?

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda_1 * \cdots * \lambda_k$$

- **alle Eigenwerte positiv** heißt: für alle k=1,..,n gilt

$$\lambda_1 * \cdots * \lambda_k \;>\; 0$$

  - Das ist das Kriterium von Hurwitz, das wir schon kennen.

- **alle Eigenwerte negativ** heißt: für alle k=1,..,n gilt

$$\lambda_1 * \cdots * \lambda_k \;>\; 0$$ falls k gerade ist

$$\lambda_1 * \cdots * \lambda_k \;<\; 0$$ falls k ungerade ist

M.a.W.: Wechselnde Vorzeichen der Determinante. Vorzeichen der vollständigen Determinante hängt ab von der Dimension des Vektorraumes. **Nickelig!**

Definitheit einer Matrix

- Und was heißt das nun für die Determinante?

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda_1 * \cdots * \lambda_k$$

- **positive <u>und</u> negative Eigenwerte** heißt:

  Das Vorzeichen der Determinanten für k=1,..,n

$$\lambda_1 * \cdots * \lambda_k$$

  sagt ohne weiteres gar nichts mehr aus. Und ist damit vom Fall einer negativ definiten Matrix gar nicht mehr einfach zu unterscheiden! Dann muss man sich die Details sehr genau anschauen. **Nickelig!**

Definitheit einer Matrix

Fazit:

- Originaldefinition $\mathbf{x}^\top \mathbf{M}\,\mathbf{x} \gtreqless 0$ funktioniert für alles und alles was man sonst noch braucht sind binomische Formeln zum Umstellen.
- Kriterium von Hurwitz gut für positiv definite Matrizen.
- Kriterium mit Determinanten ansonsten noch gut machbar für 2x2-Matrizen (s. Papula, Referenz auf S.51).

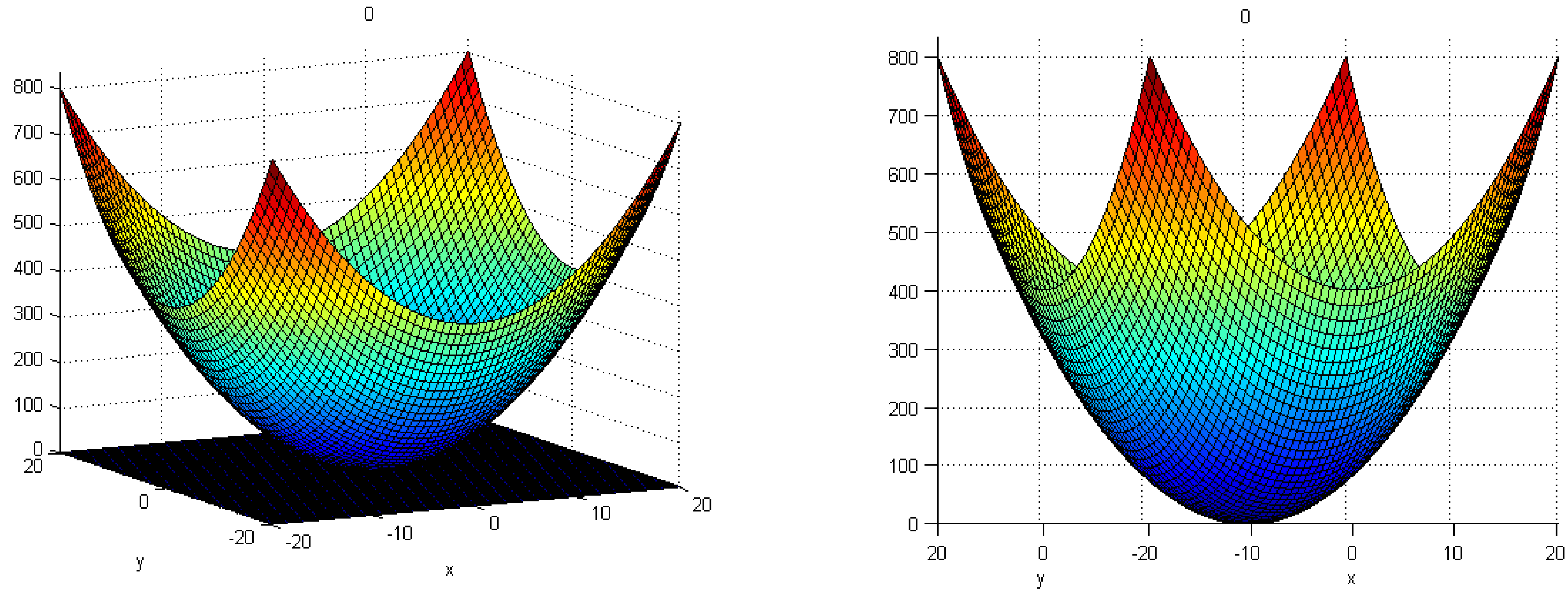
Ende des Exkurses.

Lokale Extrema

- Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei für $\mathbf{a} \in U$ grad $f(\mathbf{a}) = 0$. Dann hat
  - f bei **a** ein lokales Minimum, falls Hess $f(\mathbf{a})$ positiv definit ist.
  - f bei **a** ein lokales Maximum, falls Hess $f(\mathbf{a})$ negativ definit ist.
  - f bei **a** kein Extremum, falls Hess $f(\mathbf{a})$ indefinit ist.

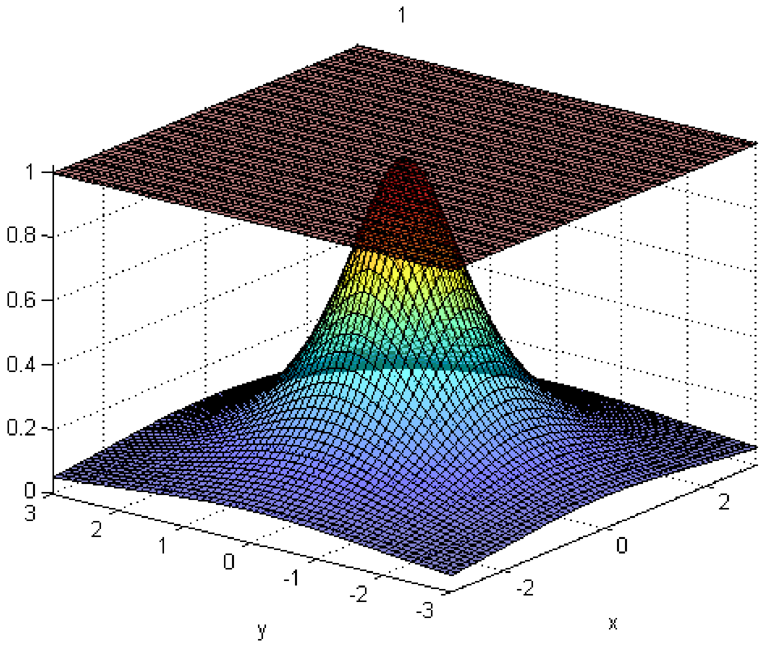
Lokale Extrema

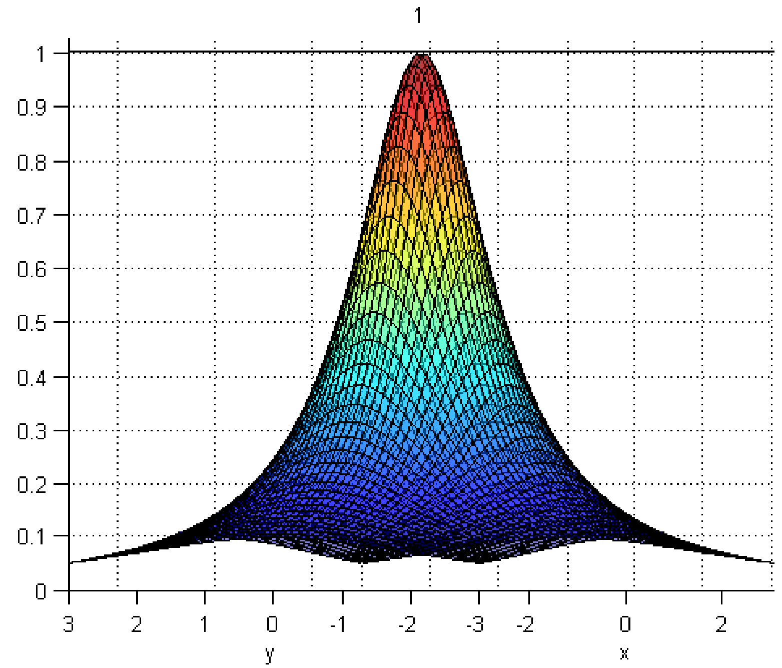
- Beispiel
  - f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2 + y^2$ bei $\mathbf{a}_0 = (0, 0)$.



Lokale Extrema

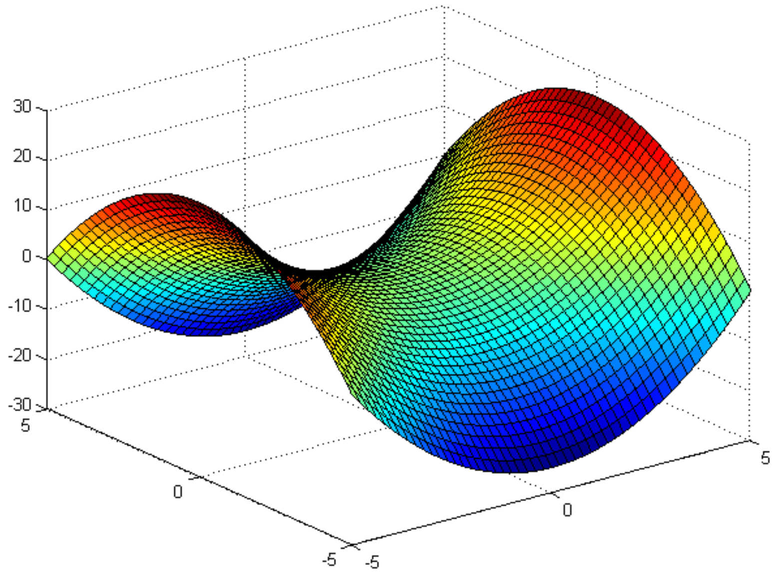
- Beispiel
  - f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y)=1/(1+x^2+y^2)$ bei $\mathbf{a}_0 = (0, 0)$.

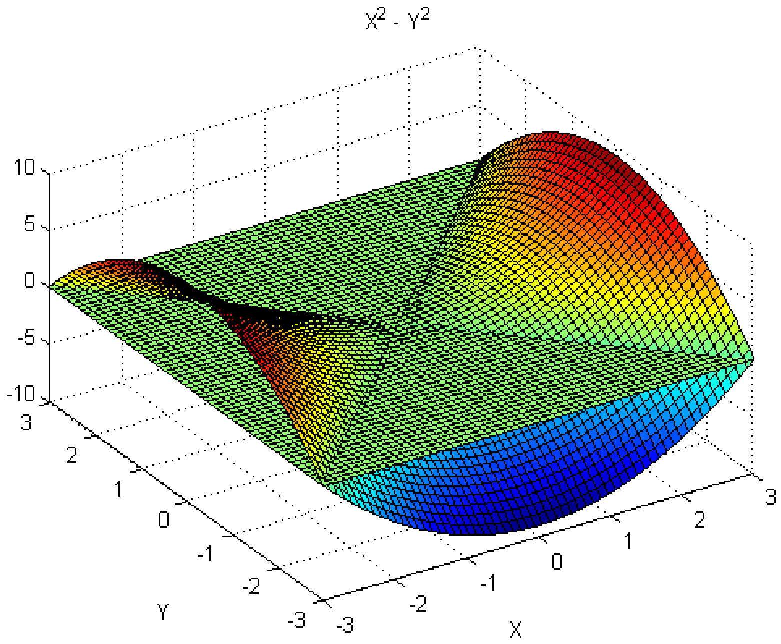




Lokale Extrema

- Beispiel
  - $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$ bei $\mathbf{a}_0 = (0, 0)$.





Lokale Extrema

- Beispiel:
  - Welche Extremstelle(n) hat

    $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$?

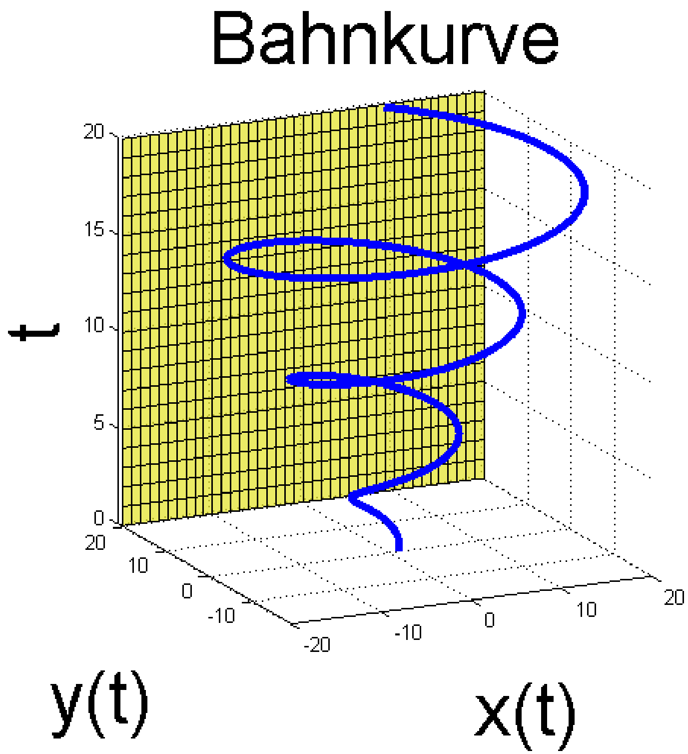
Anwendungen höherer Differentialrechnung

- Bahnkurven
  - Bewegung eine Roboterarmes
    - Komplikation: Gelenke
  - Bewegung eines Federbeines
  - Elektronenstrahlschweißen
  - Inhalation von Tröpfchen oder Partikeln
  - Füllen von Windeln mit flüssigkeitsabsorbierendem Material
  - Krebstherapie mit Kohlenstoffionen
- Feldphänomene

Kinematik

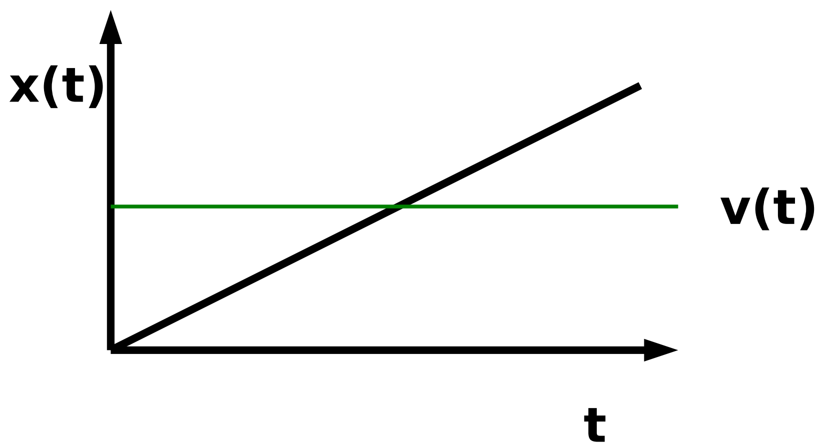
- Ortskurve: Wo befindet sich ein Objekt im Raum?
  - … zu welcher Zeit?
- Ortsvektor (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$
  - … oder kurz $x \in \mathbb{R}^3$
  - … als Funktion der Zeit (x(t), y(t), z(t))
- Beispiel

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)\cos t \\ (1+t)\sin t \end{pmatrix}$$



Kinematik

- Änderung des Ortes in der Zeit: Geschwindigkeit
- v(t) = x'(t)   ... sowohl in $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{R}^n$.
- In $\mathbb{R}$:



$$x(t)=v_0 * t$$
$$v(t)=x'(t)=v_0=\text{konstant}$$

Kinematik

- Erinnerung: $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \Rightarrow grad\ \boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

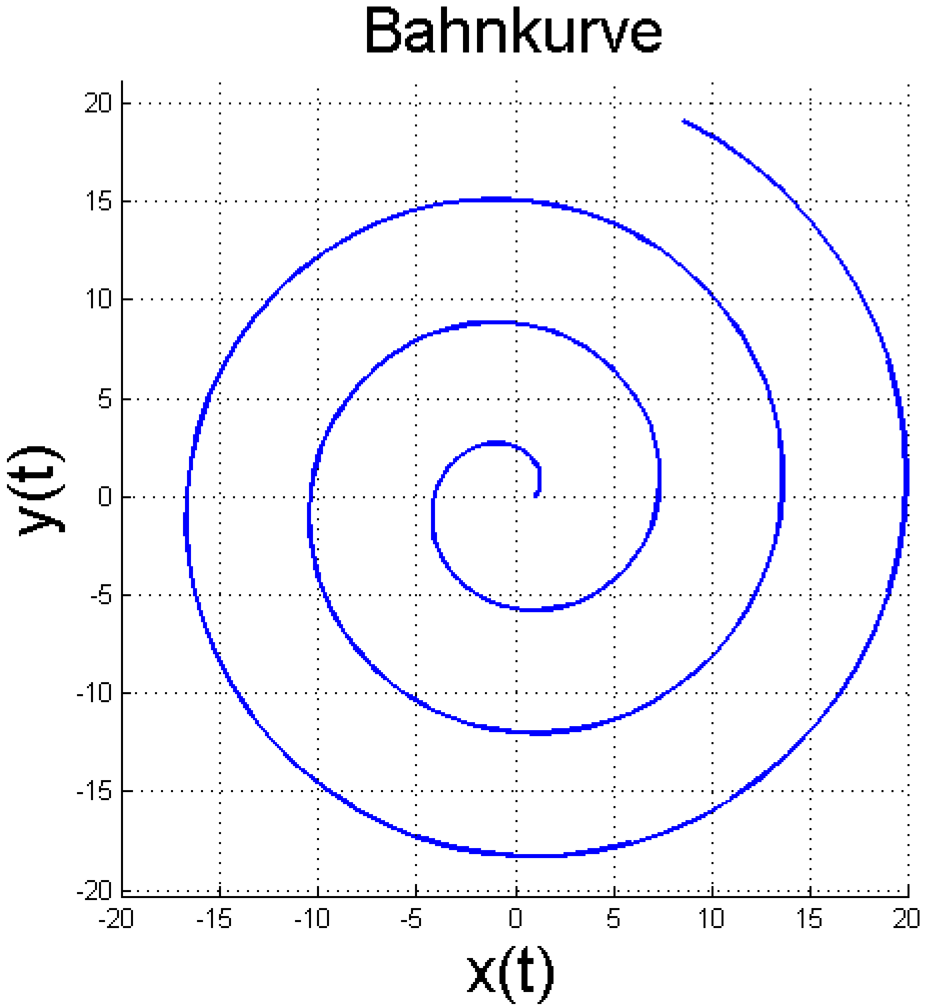
m × n Matrix

Jacobi Matrix

Kinematik

- Nun im f: $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

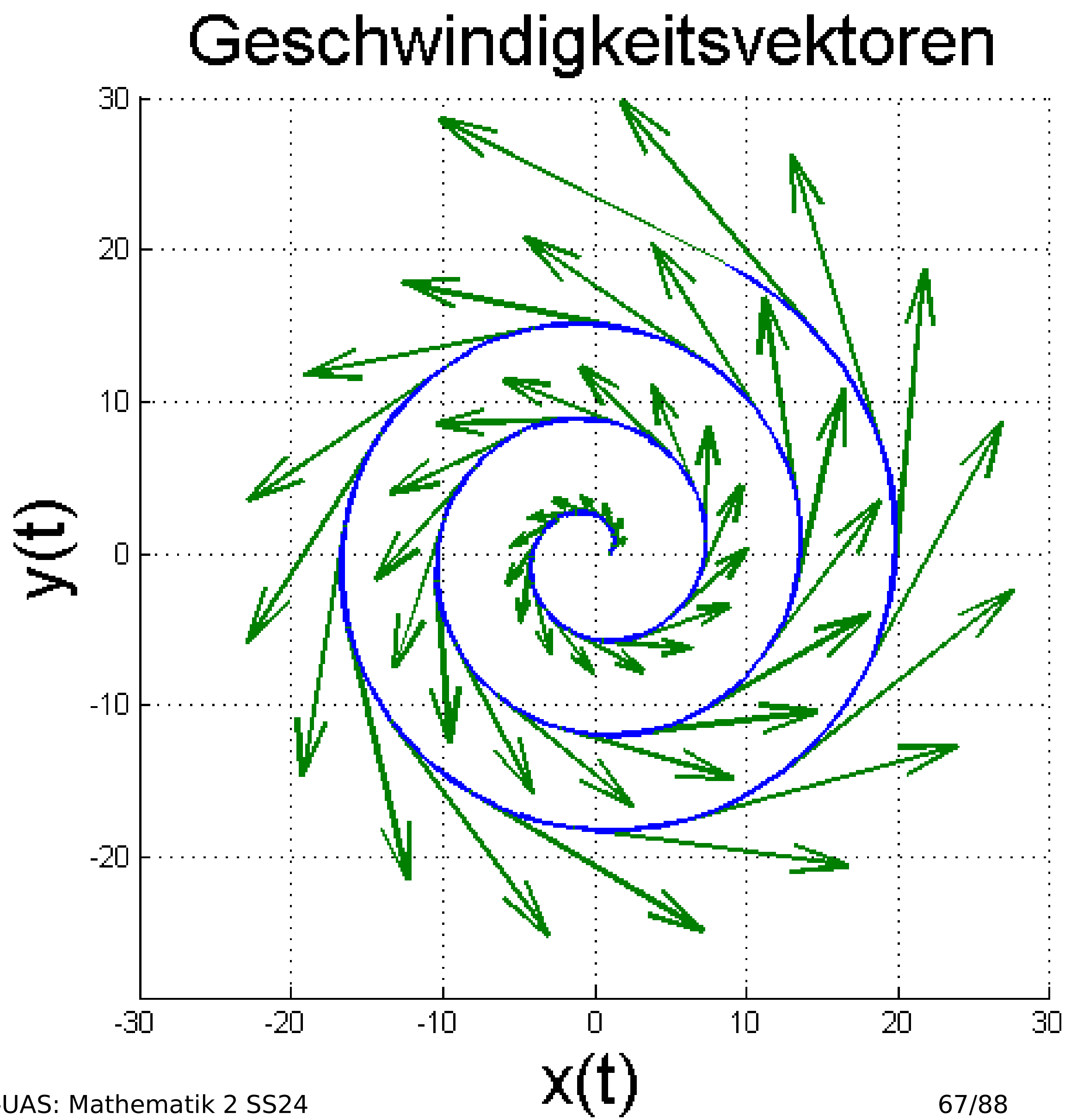
$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+t)\cos t \\ (1+t)\sin t \end{pmatrix}$$



Kinematik

- Nun im f: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+t)\cos t \\ (1+t)\sin t \end{pmatrix}$$

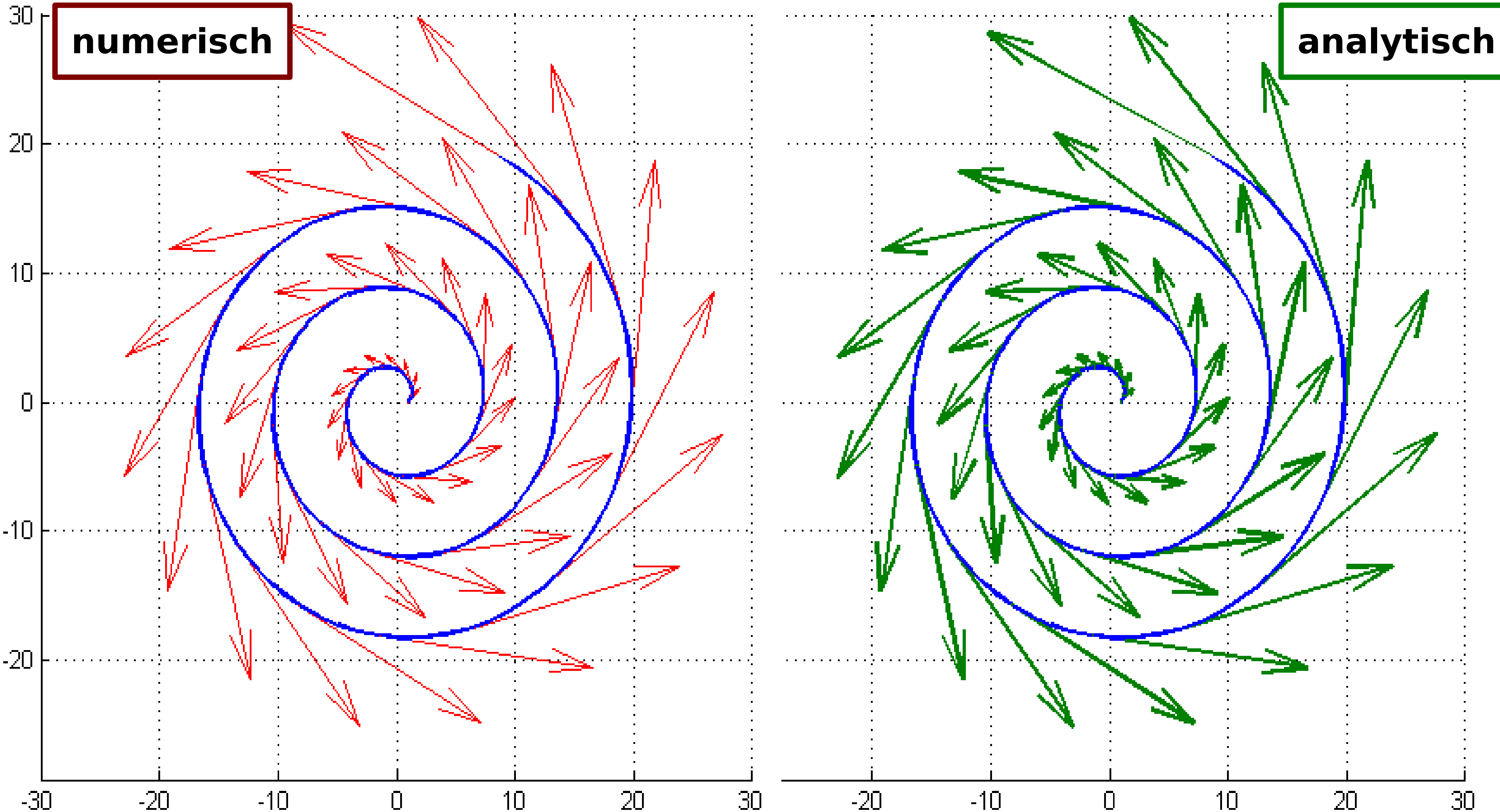


Geschwindigkeit

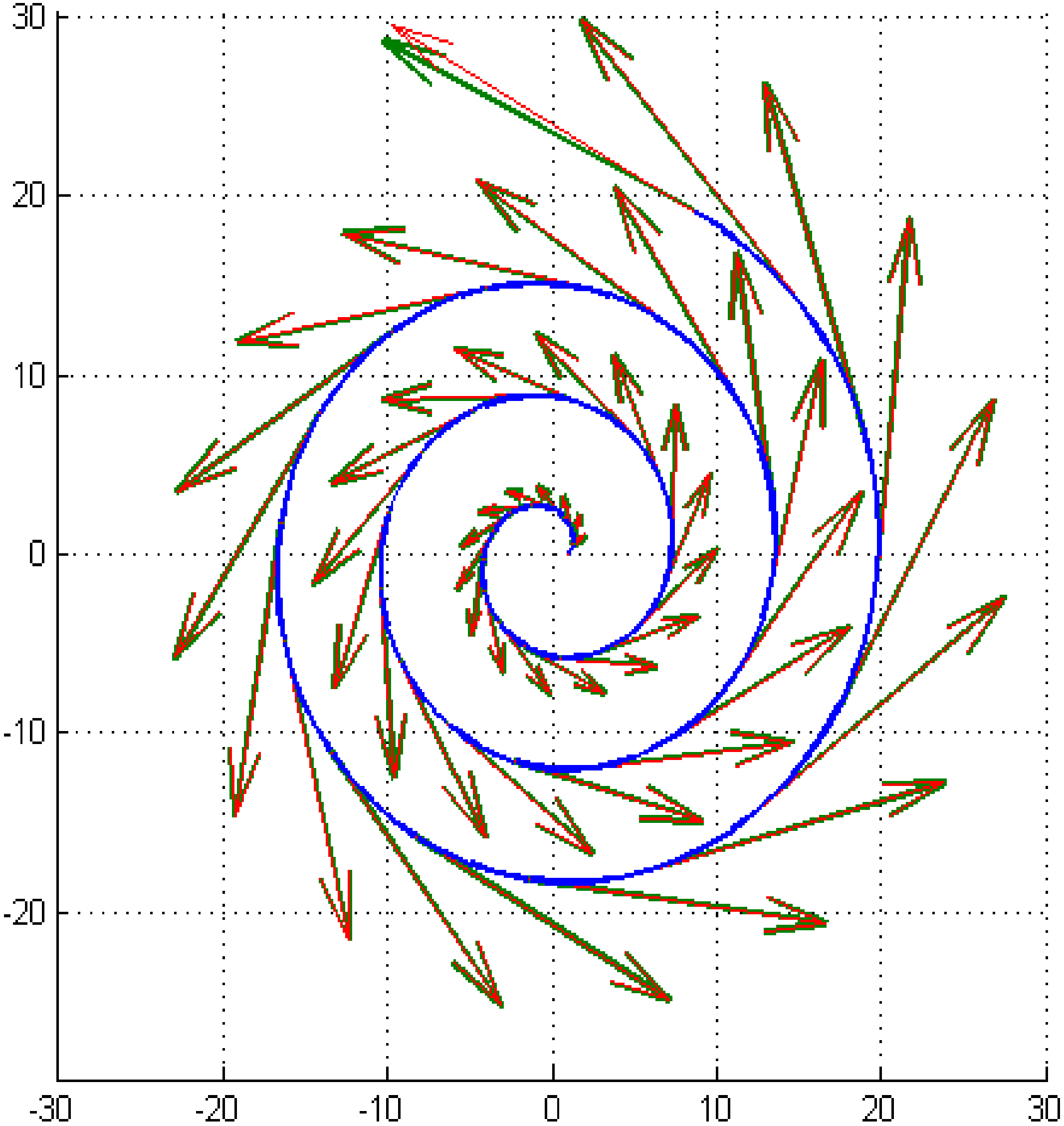
$$\boldsymbol{v}(t)=grad\ \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y(t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(t)-(1+t)\sin(t) \\ \sin(t)+(1+t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

Kinematik: Geschwindigkeitsvektoren



Kinematik: Geschwindigkeitsvektoren



analytisch

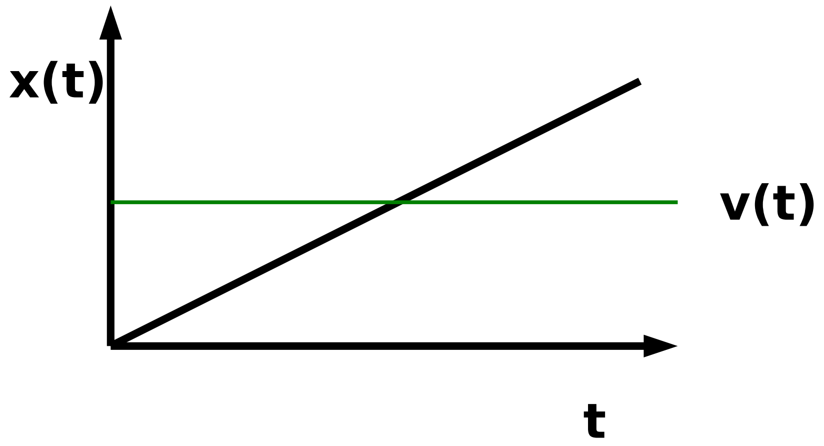
numerisch

Numerisch berechnete Vektoren weisen Fehler am Anfang und Ende auf.

Das kann man nur überprüfen, wenn man sich die analytische Lösung explizit berechnen kann.

Kinematik

- Änderung der Geschwindigkeit in der Zeit: Beschleunigung
- **a**(t) = **v**‘(t) ... sowohl in $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{R}^n$.
- In $\mathbb{R}$:



$$x(t) = v_0 * t$$
$$v(t) = x'(t) = v_0 = \text{konstant}$$
$$a(t) = v'(t) = 0$$

Kinematik

- Nun im f: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$:

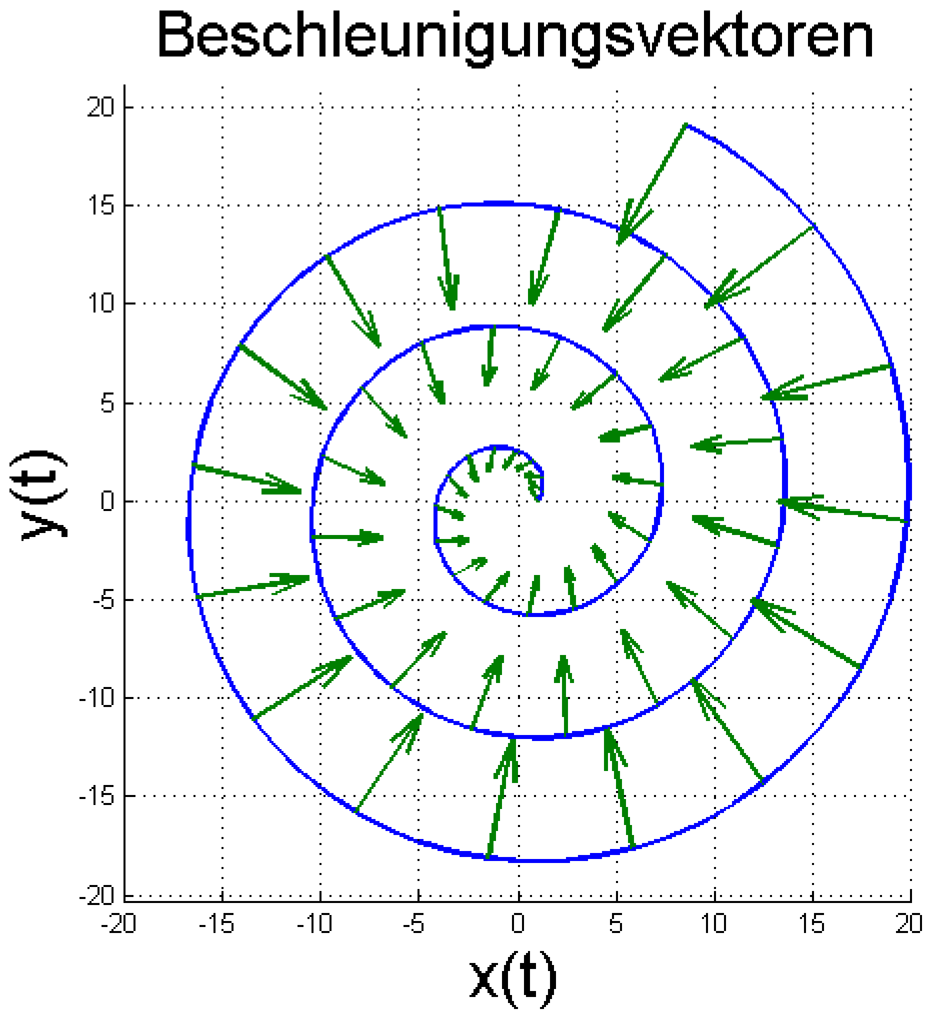
$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+t)\cos t \\ (1+t)\sin t \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\begin{pmatrix} \cos(t)-(1+t)\sin(t) \\ \sin(t)+(1+t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

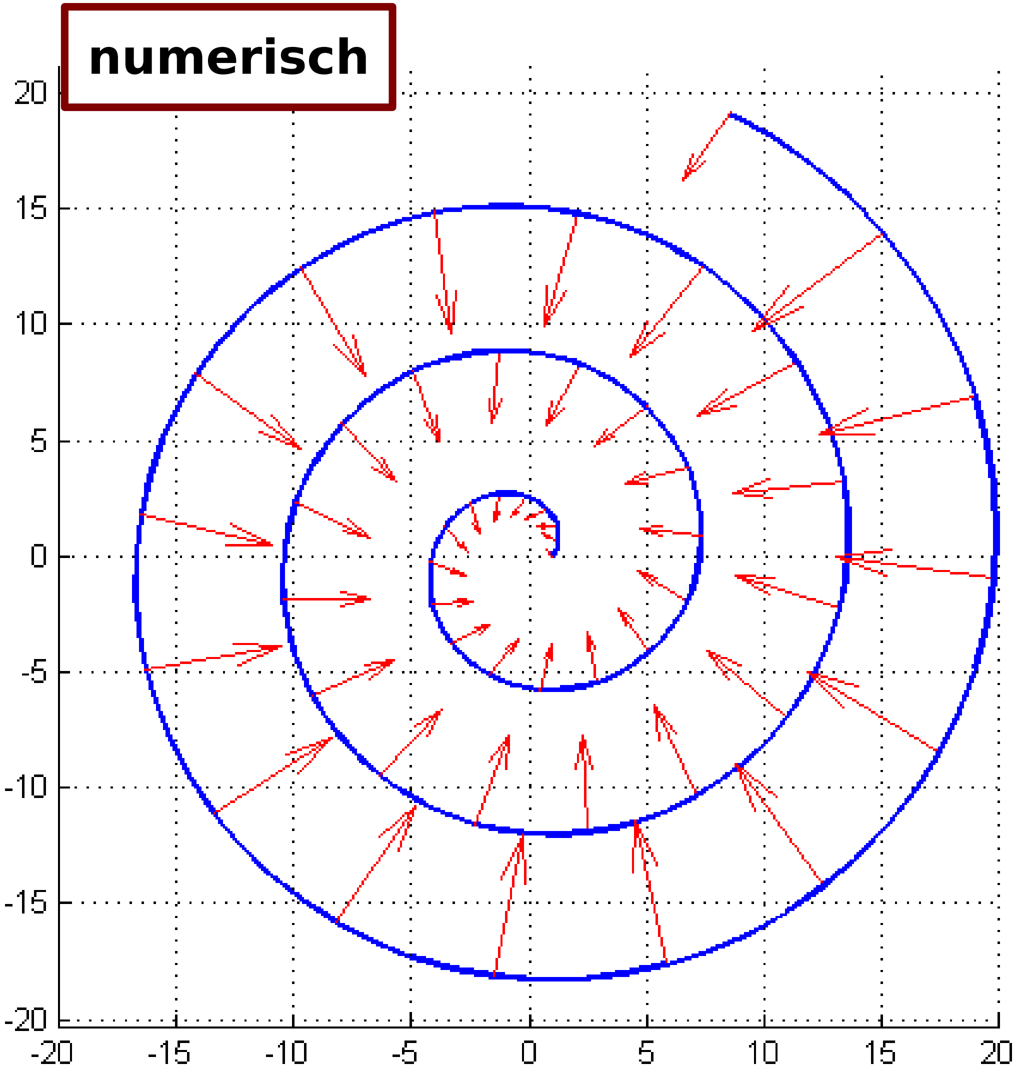
Beschleunigung

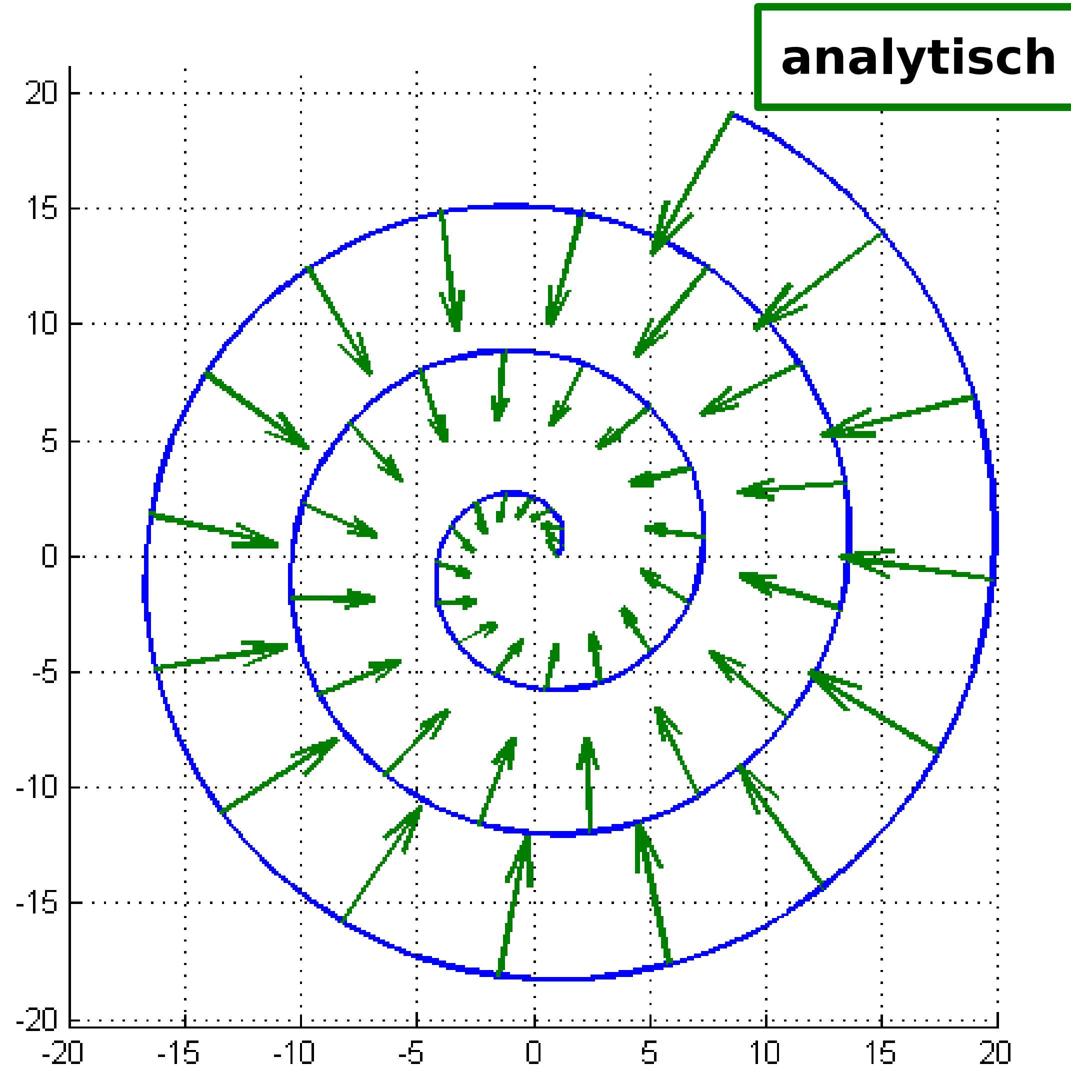
$$\boldsymbol{a}(t)=grad\, v(t)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x(t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v_y(t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2\sin(t)-(1+t)\cos(t) \\ 2\cos(t)-(1+t)\sin(t) \end{pmatrix}$$

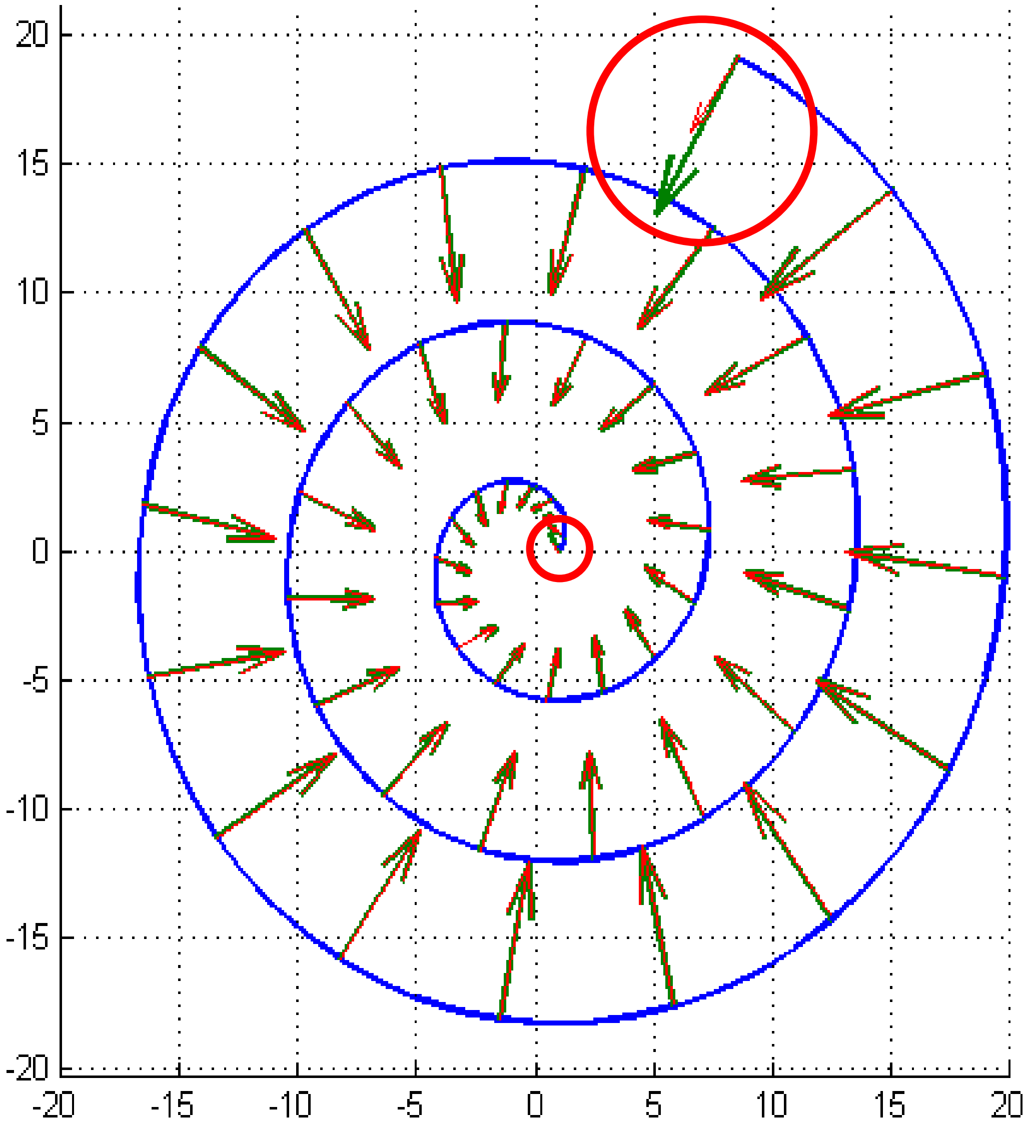


Kinematik: Beschleunigungsvektoren





Kinematik: Beschleunigungsvektoren



analytisch

numerisch

Numerisch berechnete Vektoren weisen Fehler am Anfang und Ende auf.

Das kann man nur überprüfen, wenn man sich die analytische Lösung explizit berechnen kann.

Dynamik

- Newtonsches Kraftgesetz: $F = m\,a = m\,\frac{d^2 x}{d\,t^2}$

- Kraft auf elektrisch geladenes Partikel:

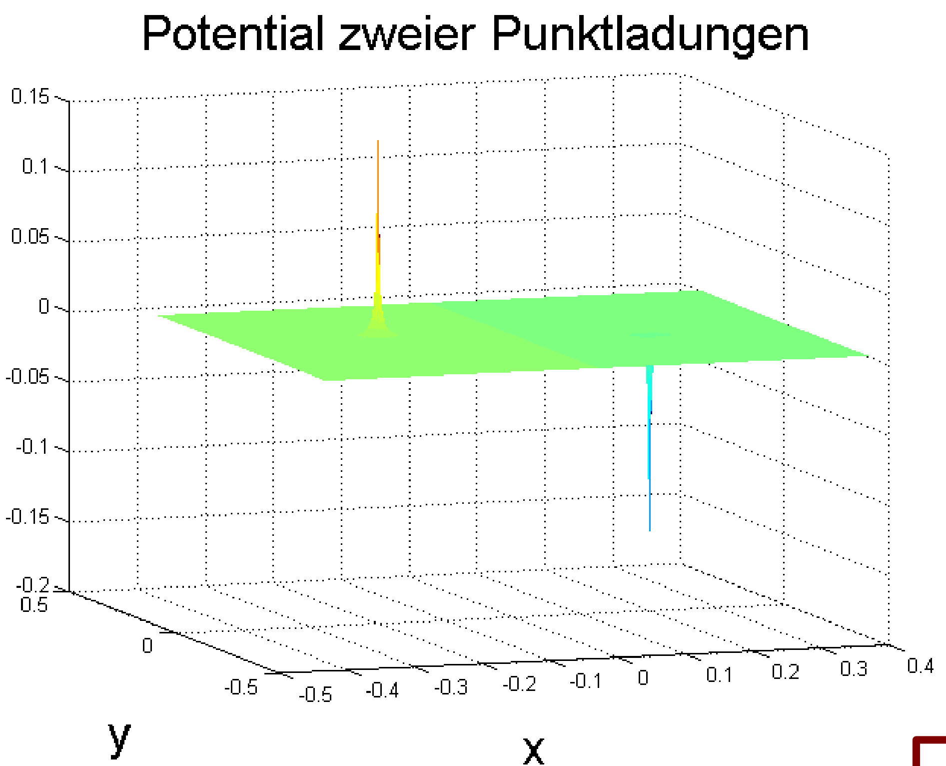
$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E}(x) + q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(x)$$

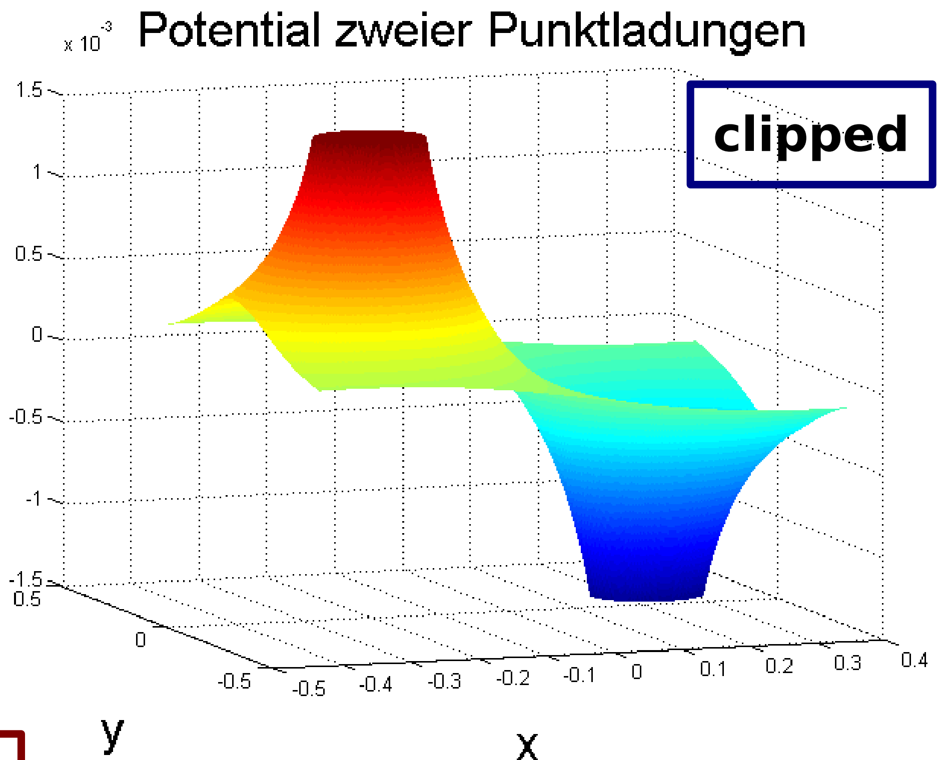
  - q Ladung
  - **E**(x) elektrisches Feld
  - **B**(x) magnetisches Feld

- Typische Situation: **E**(x) = - grad Φ(x)
  - Φ(x) elektrisches Potential

Dynamik: Beispiel

$$\Phi(x,y,z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(a+x)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+y^2+z^2}}\right)$$



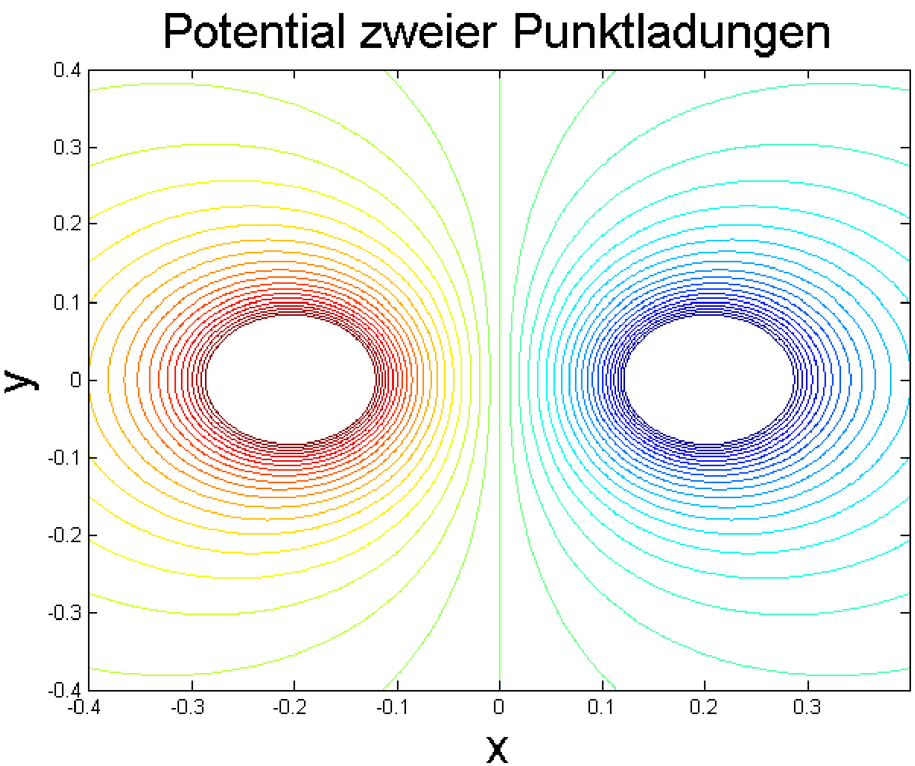


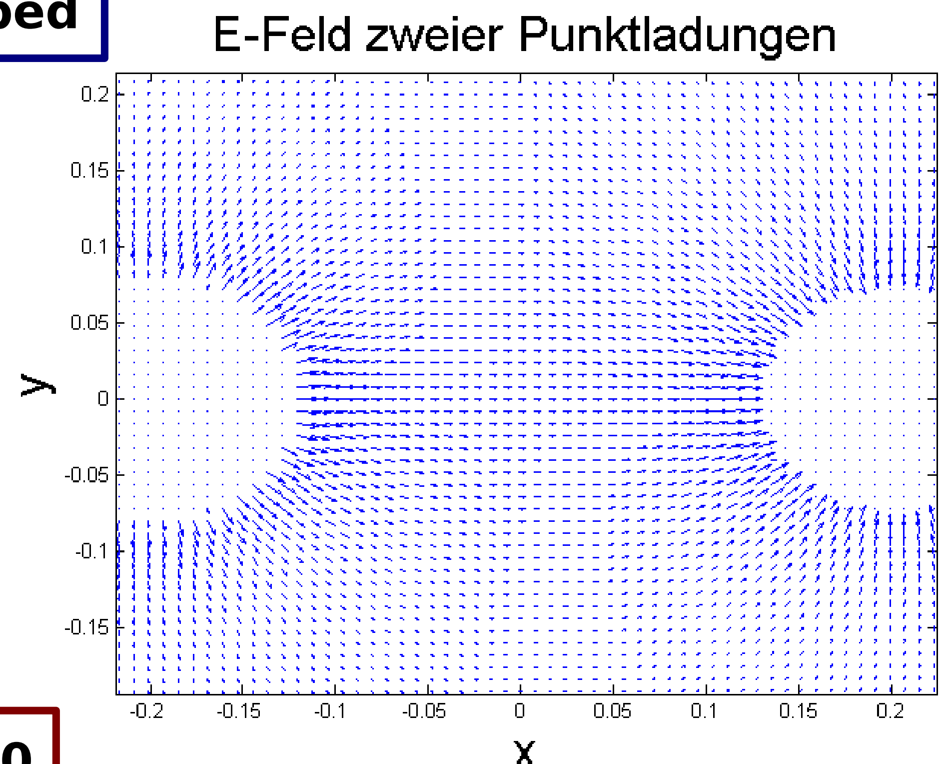
z=0

Dynamik: Beispiel

$$\Phi(x,y,z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(a+x)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+y^2+z^2}}\right)$$

clipped





z=0

Nabla-Schreibweise

- Definiere „Ableitungsoperator“ Nabla in kartesischen Koordinaten in $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Nabla-Schreibweise

- Betrachte reellwertige Funktion f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(grad\ f \right)^T$$

- Analog zu Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (einer Zahl)

Nabla-Schreibweise

- Betrachte vektorwertige Funktion f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot (f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \operatorname{div} f$$

- Analog zum Skalarprodukt eines Vektors mit einem Vektor

Einschub: Dyadisches Produkt

- Seien $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist das dyadische Produkt von a und b definiert als

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \left(b_1, \dots, b_m \right) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

- Das dyadische Produkt ist eine Matrix.

Nabla-Schreibweise

- Betrachte vektorwertige Funktion f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (f_1, \ldots, f_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z} \end{pmatrix} = (grad\ f)^T$$

$$grad\ f = (\nabla f)^T$$

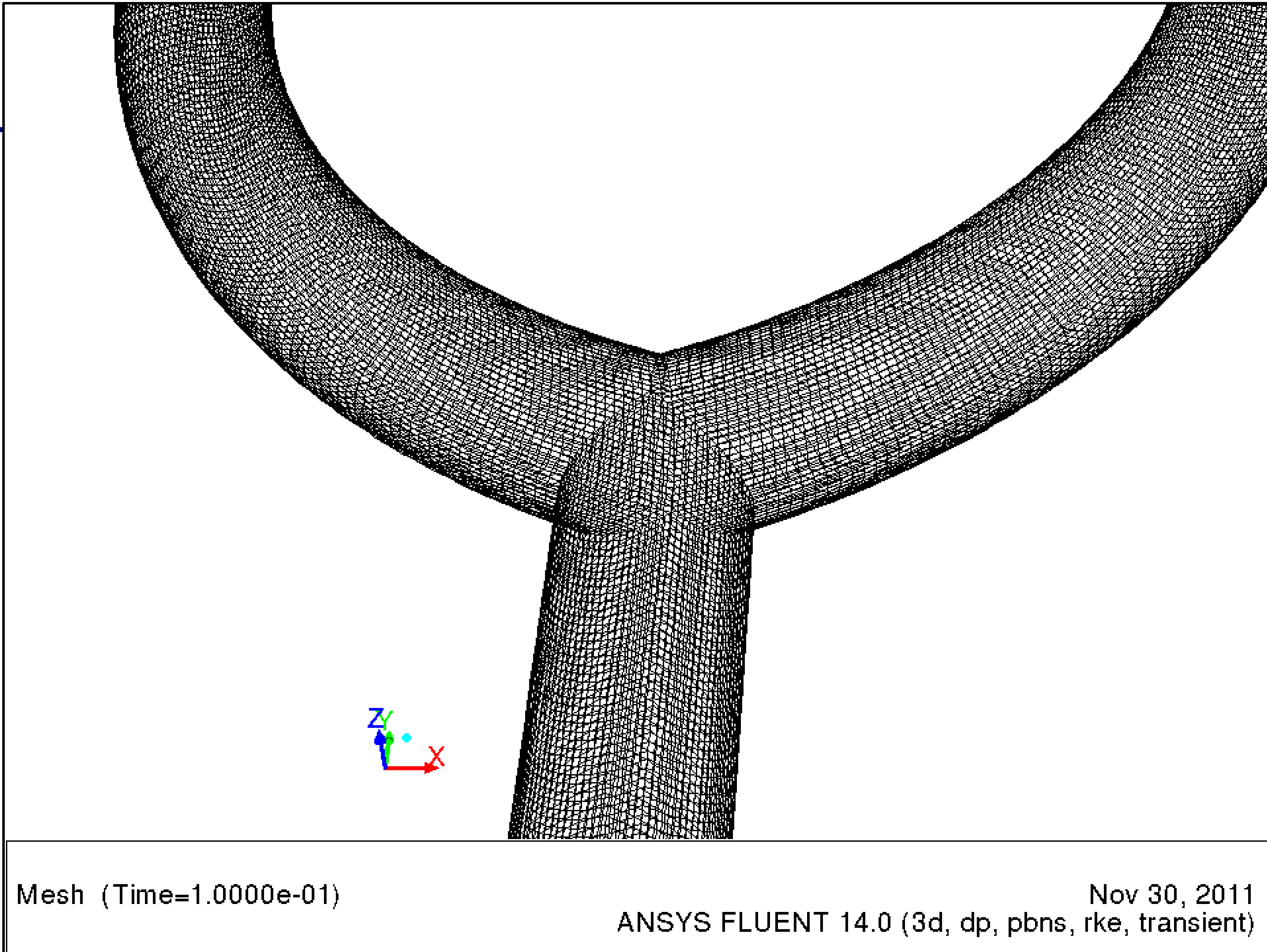
- Analog zum dyadischen Produkt eines Vektors mit einem Vektor

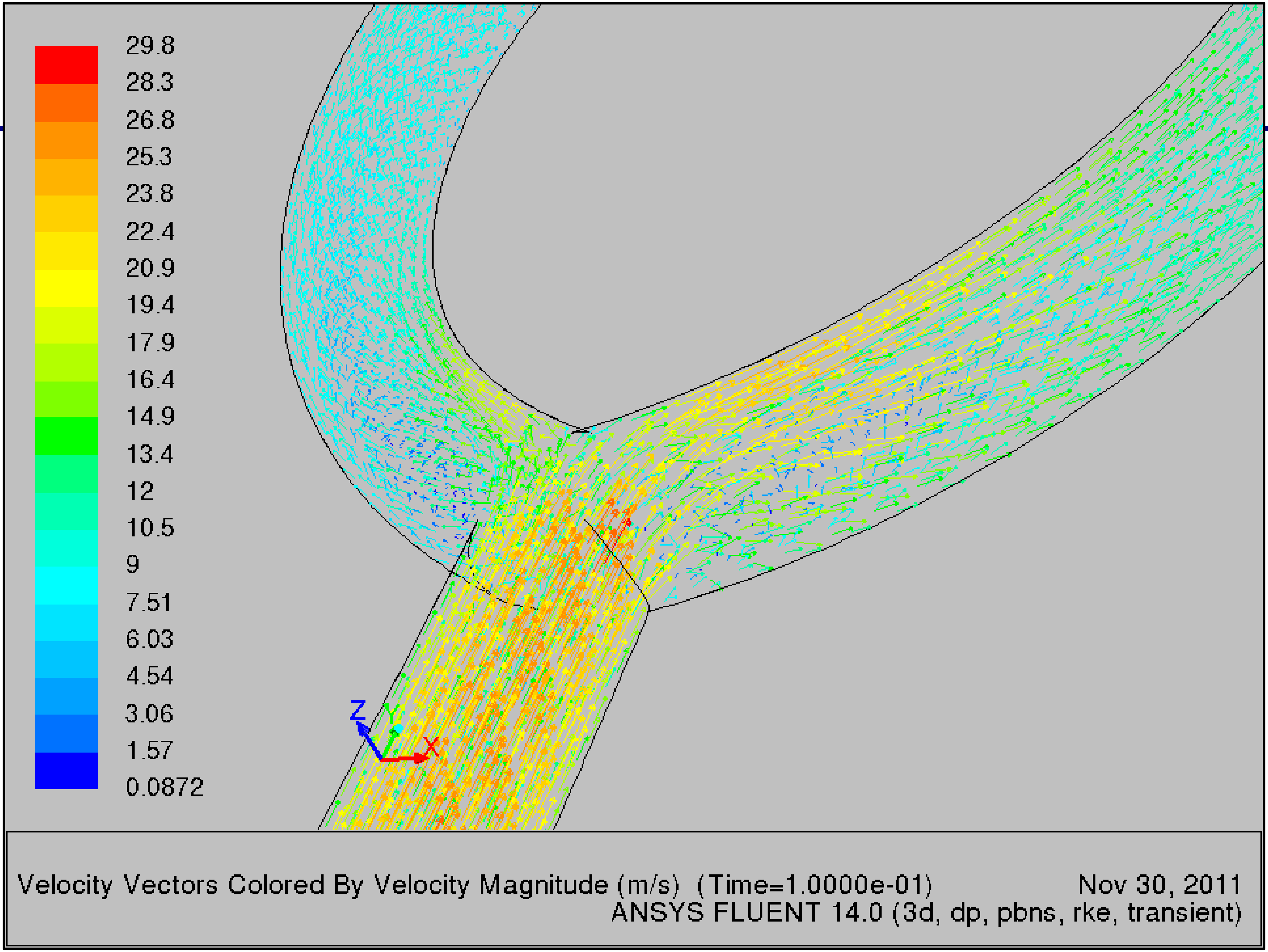
Fluidgleichungen

- Typisches Feldphänomen: Man braucht Orts- und Zeitinformationen nicht nur für einen Punkt, sondern für ein ganzes (ggf. großes) Gebiet.
- Technische Strömungen
  - Aerodynamik
    - Außenströmung
  - Pumpen, Gebläse, Turbolader
    - Innenströmung
  - Partikeltransport
    - Einfüllen von Partikeln (Puder, Flocken, ...)
    - Inhalation

Fluidgleichungen

- Wie beschreibt man Strömungen?
  - Dichte ρ [kg/m3] Skalar
  - Geschwindigkeit v [m/s] Vektor
  - Treibende Kräfte, z.B. Druck p [Pa] Skalar
- Alle diese Größen sind ganz allgemein Funktionen der Raumkoordinaten und der Zeit:
  - $\rho(x,y,z,t)$
  - $\mathbf{v}(x,y,z,t) = (v_x(x,y,z,t),\ v_y(x,y,z,t),\ v_z(x,y,z,t))$
  - $p(x,y,z,t)$


Z
Y
X
Mesh (Time=1.0000e-01)
Nov 30, 2011
ANSYS FLUENT 14.0 (3d, dp, pbns, rke, transient)


29.8
28.3
26.8
25.3
23.8
22.4
20.9
19.4
17.9
16.4
14.9
13.4
12
10.5
9
7.51
6.03
4.54
3.06
1.57
0.0872
Z
Y
X
Velocity Vectors Colored By Velocity Magnitude (m/s) (Time=1.0000e-01)
Nov 30, 2011
ANSYS FLUENT 14.0 (3d, dp, pbns, rke, transient)

Fluidgleichungen

- Druck = Kraft pro Fläche
- In Fluiden: p = p(x,y,z,t)
- Netto Kraft nur bei Druck*unterschieden*!
  - **F** = - grad p(x,y,z,t)

- Euler-Gleichungen für reibungsfreie Fluide in Vektornotation:

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v}) = -\nabla p$$

  - ρ: Dichte, v: Geschwindigkeit, p: Druck

Fluidgleichungen

- Euler-Gleichungen in komponentenweiser Notation in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

- … sehr unübersichtlich …

Fazit

- Die Beschreibung physikalischer Vorgänge für technische Anwendungen führt fast zwingend auf Formulierungen, die Vektoren und Ableitungen bzgl. mehrerer Variablen enthalten.
- Wie genau diese Gesetzmäßigkeiten lauten, ist Teil der Modellbildung in Physik, Chemie, etc.
- Aber die „Sprache“, in der diese Gesetzmäßigkeiten aufgeschrieben werden, ist früher oder später die Mathematik/Analysis.