Kapitel 5, Übung 1: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 5, Seiten 1-36

Hinweis: Es ist $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$.

5.1. Berechnen Sie die allg. Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wie viele freie Konstanten sind erforderlich? ($t, x(t) \in \mathbb{R}$)

a) $\dot{x}=-5t$ d) $\dot{x}=e^{4t}$ g) $\dot{x}=\cos 4t$
b) $\dot{x}=5t^2-5t$ e) $\ddot{x}=e^{4t}$ h) $\ddot{x}=\cos 4t$
c) $\ddot{x}=5t^2-5t$ f) $\dot{x}=4x$ (vgl. Vorlesungsunterlagen)

5.2. Die Differentialgleichungen sind die aus der vorherigen Aufgabe. Berechnen Sie die spezielle Lösung zu den gegebenen Randbedingungen.

a) $\dot{x}=-5t$ mit $x(0)=5$
b) $\dot{x}=5t^2-5t$ mit $x(0)=5$
c) $\ddot{x}=5t^2-5t$ mit $x(0)=5$ und $\dot{x}(0)=5$
d) $\dot{x}=e^{4t}$ mit $x(0)=5$
e) $\ddot{x}=e^{4t}$ mit $x(0)=5$ und $\dot{x}(0)=5$
f) $\dot{x}=4x$ mit $x(0)=5$
g) $\dot{x}=\cos 4t$ mit $x(0)=5$
h) $\ddot{x}=\cos 4t$ mit $x(0)=5$ und $\dot{x}(0)=5$

5.3. Berechnen Sie die Lösungen folgender separabler Differentialgleichungen erster Ordnung durch Trennung der Variablen.

a) $\dot{x}=5xt$, $x>0$ d) $\dot{x}=e^{x+t}$
b) $\dot{x}=6xt^2$, $x>0$ e) $\dot{x}=K(5-x)^2$, $K=\text{konst.}$
c) $\dot{x}=\frac{\sin t}{x}$, $x>0$ f) $\dot{x}=\frac{t^2+1}{x+2}$, $x>-2$

5.4. Sind die folgenden Differentialgleichungen exakt? Falls ja, berechnen Sie dementsprechend jeweils die allgemeine Lösung.

a) $(x+t)\dot{x}+x-t=0$ d) $(x-t)\dot{x}-x+t-1=0$
b) $(x+t)\dot{x}-x+t=0$ e) $(2-xt^2)\dot{x}-x^2t=0$
c) $(2x+t)\dot{x}+x+2t=0$ f) $2(x+\sqrt{t})\dot{x}+\frac{x}{\sqrt{t}}+1=0$

Kapitel 5, Übung 1: Lösungen

5.1. Berechnen Sie die allg. Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wie viele freie Konstanten sind erforderlich? ($t, x(t) \in \mathbb{R}$)

a) $\dot{x} = -5t$ ist erster Ordnung: eine Konstante

explizit integrieren: $x(t) = -\frac{5}{2}t^2 + C$

b) $\dot{x} = 5t^2 - 5t$ ist erster Ordnung: eine Konstante

explizit integrieren: $x(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + C$

c) $\ddot{x} = 5t^2 - 5t$ ist zweiter Ordnung: zwei Konstanten

explizit integrieren:
$$\dot{x}(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + C_1$$
$$x(t) = \frac{5}{3}\frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{2}\frac{1}{3}t^3 + C_1 t + C_2$$

d) $\dot{x} = e^{4t}$ ist erster Ordnung: eine Konstante

explizit integrieren: $x(t) = \frac{1}{4}e^{4t} + C$

e) $\ddot{x} = e^{4t}$ ist zweiter Ordnung: zwei Konstanten

explizit integrieren:
$$\dot{x}(t) = \frac{1}{4}e^{4t} + C_1$$
$$x(t) = \frac{1}{4^2}e^{4t} + C_1 t + C_2$$

f) $\dot{x} = 4x$ ist erster Ordnung: eine Konstante

vgl. Vorlesungsunterlagen: $x(t) = C e^{4t}$

g) $\dot{x} = \cos 4t$ ist erster Ordnung: eine Konstante

explizit integrieren: $x(t) = \frac{1}{4}\sin(4t) + C$

h) $\ddot{x} = \cos 4t$ ist zweiter Ordnung: zwei Konstanten

explizit integrieren:
$$\dot{x}(t) = \frac{1}{4}\sin(4t) + C_1$$
$$x(t) = -\frac{1}{4^2}\cos(4t) + C_1 t + C_2$$

5.2. Die Differentialgleichungen sind die aus der vorherigen Aufgabe. Berechnen Sie die spezielle Lösung zu den gegebenen Randbedingungen.

a) $\dot{x} = -5t$ mit $x(0) = 5$

$5 = x(0) = 0 + C \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 5$

b) $\dot{x} = 5t^2 - 5t$ mit $x(0) = 5$

$5 = x(0) = 0 + 0 + C \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 5$

c) $\ddot{x} = 5t^2 - 5t$ mit $x(0) = 5$ und $\dot{x}(0) = 5$

$5 = x(0) = 0 + 0 + 0 + C_2$
$5 = \dot{x}(0) = 0 + 0 + C_1$
$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{5}{3}\frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{2}\frac{1}{3}t^3 + 5t + 5$

d) $\dot{x} = e^{4t}$ mit $x(0) = 5$

$$5=x(0)=\frac{1}{4}1+C\Rightarrow C=\frac{19}{4} \quad\Rightarrow\quad x(t)=\frac{1}{4}e^{4t}+\frac{19}{4}$$

e) $\ddot{x}=e^{4t}$ mit $x(0)=5$ und $\dot{x}(0)=5$

$$\begin{matrix}5=x(0)=\frac{1}{16}1+C_2\Rightarrow C_2=\frac{79}{16}\\ 5=\dot{x}(0)=\frac{1}{4}1+C_1\Rightarrow c_1=\frac{19}{4}\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad x(t)=\frac{1}{4^2}e^{4t}+\frac{19}{4}t+\frac{79}{16}$$

f) $\dot{x}=4x$ mit $x(0)=5$

$5=x(0)=C\cdot 1 \quad\Rightarrow\quad x(t)=5e^{4t}$

g) $\dot{x}=\cos 4t$ mit $x(0)=5$

$5=x(0)=0+C \quad\Rightarrow\quad x(t)=\frac{1}{4}\sin(4t)+5$

h) $\ddot{x}=\cos 4t$ mit $x(0)=5$ und $\dot{x}(0)=5$

$$\begin{matrix}5=x(0)=-\frac{1}{16}\cdot 1+C_2 \;\Rightarrow\; C_2=\frac{81}{16}\\ 5=\dot{x}(0)=0+C_1\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad x(t)=-\frac{1}{4^2}\cos(4t)+5t+\frac{81}{16}$$

5.3. Berechnen Sie die Lösungen folgender separabler Differentialgleichungen erster Ordnung durch Trennung der Variablen.

a) $\dot{x}=5xt\;,\;x>0$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=5t\,dt \;\Rightarrow\; \int\frac{dx}{x}=\int 5t\,dt \;\Rightarrow\; \ln x=\frac{5}{2}t^2+C \;\Rightarrow\; x(t)=e^{\frac{5}{2}t^2+C}=e^{\frac{5}{2}t^2}e^C=De^{\frac{5}{2}t^2}$$

mit $D=e^C$

b) $\dot{x}=6xt^2\;,\;x>0$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=6t^2dt \;\Rightarrow\; \int\frac{dx}{x}=\int 6t^2dt \;\Rightarrow\; \ln x=2t^3+C \;\Rightarrow\; x(t)=e^{2t^3+C}=De^{2t^3}$$

mit $D=e^C$

c) $\dot{x}=\frac{\sin t}{x}\;,\;x>0$

$$\Rightarrow x\,dx=\sin t\,dt \;\Rightarrow\; \int x\,dx=\int\sin t\,dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}x^2=-\cos t+C \;\Rightarrow\; x(t)=\pm\sqrt{2C-2\cos t}$$

Probe: $\dot{x}=\frac{1}{2}\frac{2\sin t}{(\pm\sqrt{2C-2\cos t})}=\frac{\sin t}{x}$

d) $\dot{x}=e^{x+t}=e^xe^t$

$$\Rightarrow e^{-x}dx=e^t dt \;\Rightarrow\; \int e^{-x}dx=\int e^t dt \;\Rightarrow\; -e^{-x}=e^t+C \;\Rightarrow\; e^{-x}=D-e^t \quad \text{mit } D=-C$$

$$\Rightarrow -x=\ln(D-e^t) \;\Rightarrow x(t)=-\ln(D-e^t)=\ln\left(\frac{1}{D-e^t}\right)$$

Probe: Es ist $e^x=\frac{1}{D-e^t}$, damit: $\dot{x}=\frac{1}{D-e^t}\cdot\left|-(-e^t)\right|=e^xe^t$

e) $\dot{x}=K(5-x)^2\;,\;K=\text{konst.}$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{(5-x)^2}=K\,dt \;\Rightarrow\; \int \dfrac{dx}{(5-x)^2}=\int K\,dt \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{5-x}=Kt+C \;\Rightarrow\; 5-x=\dfrac{1}{Kt+C}$

$\Rightarrow\; x(t)=5-\dfrac{1}{Kt+C}$

Probe: Es ist $5-x=\dfrac{1}{Kt+C} \;\Rightarrow\; (5-x)^2=\left(\dfrac{1}{Kt+C}\right)^2$. Damit:

$\dot{x}=0-(-1)\dfrac{1}{(Kt+C)^2}K=K(5-x)^2$

f) $\dot{x}=\dfrac{t^2+1}{x+2}$, $x>-2$

$\Rightarrow\; (x+2)dx=(t^2+1)dt \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2}x^2+2x=\dfrac{1}{3}t^3+t+C \;\Rightarrow\; x^2+4x=\dfrac{2}{3}t^3+2t+2C$

$\Rightarrow\; (x+2)^2=\dfrac{2}{3}t^3+2t+4+2C \;\Rightarrow x+2=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}t^3+2t+4+2C} \;\Rightarrow x(t)=-2\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}t^3+2t+4+2C}$

Probe: $\dot{x}=\pm\dfrac{1}{2}\dfrac{2t^2+2}{\sqrt{\dfrac{2}{3}t^3+2t+4+2C}}=\dfrac{t^2+1}{x+2}$

5.4. Sind die folgenden Differentialgleichungen exakt? Falls ja, berechnen Sie dementsprechend jeweils die allgemeine Lösung.

Notation: $p(x,t)\dot{x}+q(x,t)=0$ ist exakt, falls $\dfrac{\partial p}{\partial t}=\dfrac{\partial q}{\partial x}$. Dann existiert h mit $h(x,t)=C$

a) $(x+t)\dot{x}+x-t=0$

Es ist $p=x+t$ und $q=x-t$. Damit $\dfrac{\partial p}{\partial t}=1=\dfrac{\partial q}{\partial x}$, also DGL exakt.

$h_1=\int p\,dx=\dfrac{1}{2}x^2+xt+c_1(t)$. Wähle $c_1(t)=-\dfrac{1}{2}t^2$.

$h_2=\int q\,dt=xt-\dfrac{1}{2}t^2+c_2(x)$ $\qquad c_2(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

Dann folgt $h(x,t)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}t^2+xt=C$.

Auflösen nach x:

$x^2+2xt=2C+t^2 \;\Rightarrow\; (x+t)^2=2C+2t^2 \;\Rightarrow\; x+t=\pm\sqrt{2C+2t^2} \;\Rightarrow\; x(t)=-t\pm\sqrt{2C+2t^2}$

Probe: $\dot{x}=-1\pm\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2C+2t^2}}4t=-1\pm\dfrac{2t}{\sqrt{2C+2t^2}}$. Damit:

$(x+t)\dot{x}=\pm\sqrt{2C+2t^2}\left(-1\pm\dfrac{2t}{\sqrt{2C+2t^2}}\right)=\mp\sqrt{2C+2t^2}+2t=(\mp\sqrt{2C+2t^2}+t)+t=-x+t$

.

b) $(x+t)\dot{x}-x+t=0$

Es ist $p=x+t$ und $q=-x+t$. Damit $\dfrac{\partial p}{\partial t}=1\neq-1=\dfrac{\partial q}{\partial x}$. Also ist die DGL *nicht* exakt. Hier gibt's nichts weiter zu tun.

b.w.

c) $(2x+t)\dot{x}+x+2t=0$

Es ist $p=2x+t$ und $q=x+2t$. Damit $\dfrac{\partial p}{\partial t}=1=\dfrac{\partial q}{\partial x}$, also DGL exakt.

$$\begin{array}{l} h_1=\int p\,dx=x^2+xt+c_1(t) \\ h_2=\int q\,dt=xt+t^2+c_2(x) \end{array} \text{. Wähle } \begin{array}{l} c_1(t)=t^2 \\ c_2(x)=x^2 \end{array} .$$

Dann folgt $h(x,t)=x^2+xt+t^2=C$.

Auflösen nach x:

$$\Rightarrow\ x^2+2x\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}=C-\frac{3}{4}t^2 \ \Rightarrow\ \left(x+\frac{t}{2}\right)^2=C-\frac{3}{4}t^2 \ \Rightarrow\ x+\frac{t}{2}=\pm\sqrt{C-\frac{3}{4}t^2}$$

$$\Rightarrow\ x(t)=-\frac{t}{2}\pm\sqrt{C-\frac{3}{4}t^2}$$

Probe:

$$\dot{x}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\frac{-\frac{3}{4}2t}{\sqrt{C-\frac{3}{4}t^2}}$$

$$2x+t=\pm 2\sqrt{C-\frac{3}{4}t^2}$$

$$(2x+t)\dot{x}=\mp\sqrt{C-\frac{3}{4}t^2}-\frac{3}{2}t=\mp\sqrt{C-\frac{3}{4}t^2}+\frac{t}{2}-\frac{4}{2}t=-x-2t$$

d) $(x-t)\dot{x}-x+t-1=0$

Es ist $p=x-t$ und $q=-x+t-1$. Damit $\dfrac{\partial p}{\partial t}=-1=\dfrac{\partial q}{\partial x}$, also DGL exakt.

$$\begin{array}{l} h_1=\int p\,dx=\frac{1}{2}x^2-xt+c_1(t) \\ h_2=\int q\,dt=-xt+\frac{1}{2}t^2-t+c_2(x) \end{array} \text{. Wähle } \begin{array}{l} c_1(t)=\frac{1}{2}t^2-t \\ c_2(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{array} .$$

Dann folgt $h(x,t)=\frac{1}{2}x^2+xt+\frac{1}{2}t^2-t=C$.

Auflösen nach x:

$$\Rightarrow\ x^2-2xt+t^2-2t=2C \ \Rightarrow\ x^2-2xt+t^2=2C+2t \ \Rightarrow\ (x-t)^2=2C+2t$$

$$\Rightarrow\ x-t=\pm\sqrt{2C+2t} \ \Rightarrow x(t)=t\pm\sqrt{2C+2t}$$

Probe:

$$\dot{x}=1\pm\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2C+2t}}$$

$$x-t=\pm\sqrt{2C+2t}$$

$$(x-t)\dot{x}=\pm\sqrt{2C+2t}+1=x-t+1$$

e) $(2-xt^2)\dot{x}-x^2t=0$

Es ist $p=2-xt^2$ und $q=-x^2t$. Damit $\dfrac{\partial p}{\partial t}=-2xt=\dfrac{\partial q}{\partial x}$, also DGL exakt.

$$\begin{array}{l} h_1=\int p\,dx=2x-\frac{1}{2}x^2t^2+c_1(t) \\ h_2=\int q\,dt=\frac{-1}{2}x^2t^2+c_2(x) \end{array} \text{. Wähle } \begin{array}{l} c_1(t)=0 \\ c_2(x)=2x \end{array} .$$

b.w.

Dann folgt $h(x,t)=2x-\frac{1}{2}x^2t^2=C$.

Auflösen nach x:

$$\Rightarrow\ x^2-4x\frac{1}{t^2}=-\frac{2C}{t^2}\ \Rightarrow\ (x-\frac{2}{t^2})^2=\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}\ \Rightarrow\ x(t)=\frac{2}{t^2}\pm\sqrt{\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}}$$

Probe:

$$\dot{x}=-4t^{-3}\pm\frac{1}{2}\frac{-16t^{-5}+4Ct^{-3}}{\sqrt{\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}}}=-4t^{-3}\pm\frac{-8t^{-5}+2Ct^{-3}}{\sqrt{\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}}}$$

$$2-xt^2=\mp t^2\sqrt{\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}}$$

$$(2-xt^2)\dot{x}=\pm\frac{4}{t}\sqrt{\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}}-(-8t^{-3}+2Ct^{-1})=\pm\frac{4}{t}\sqrt{\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}}+\frac{8}{t^3}-2\frac{C}{t}$$

$$x^2=\frac{4}{t^4}\pm\frac{4}{t^2}\sqrt{\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}}+\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}=\pm\frac{4}{t^2}\sqrt{\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}}+\frac{8}{t^4}-\frac{2C}{t^2}$$

$$x^2t=\pm\frac{4}{t}\sqrt{\frac{4}{t^4}-\frac{2C}{t^2}}+\frac{8}{t^3}-\frac{2C}{t}\ \Rightarrow\ (2-xt^2)\dot{x}=x^2t$$

f) $2(x+\sqrt{t})\dot{x}+\frac{x}{\sqrt{t}}+1=0$

Es ist $p=2(x+\sqrt{t})$ und $q=\frac{x}{\sqrt{t}}+1$. Damit $\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{\partial q}{\partial x}$, also DGL exakt.

$h_1=\int p\,dx=x^2+2x\sqrt{t}+c_1(t)$. Wähle $c_1(t)=t$

$h_2=\int q\,dt=2x\sqrt{t}+t+c_2(x)$ $\quad c_2(x)=x^2$.

Dann folgt $h(x,t)=x^2+2x\sqrt{t}+t=C$.

Auflösen nach x:

$$\Rightarrow(x+\sqrt{t})^2=C\ \Rightarrow\ x+\sqrt{t}=\pm\sqrt{C}\ \Rightarrow\ x(t)=D-\sqrt{t}\quad\text{mit}\quad D=\pm\sqrt{C}$$

Probe: $\dot{x}=\frac{-1}{2\sqrt{t}}\ \Rightarrow\ 2(x+\sqrt{t})(\frac{-1}{2\sqrt{t}})=-(\frac{x}{\sqrt{t}}+1)$