Mathematik 2

Kapitel 2

Funktionenreihen

Ulrich H. Becker

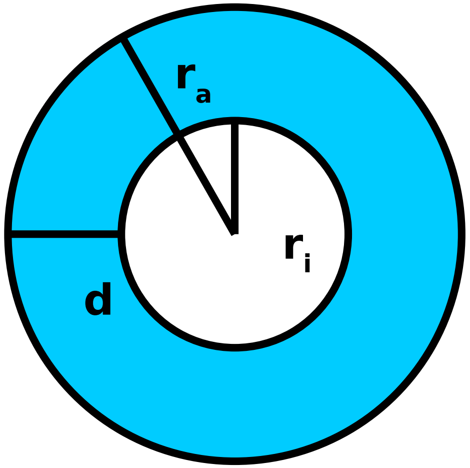
Frankfurt University of Applied Sciences

SS 2024

Motivation: Elektrischer Widerstand

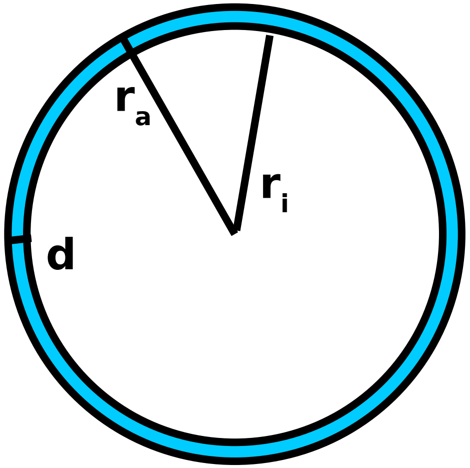
- Elektrischer Widerstand zwischen zwei koaxialen Leitern (Hohlzylinder)

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \qquad r_a > r_i$$



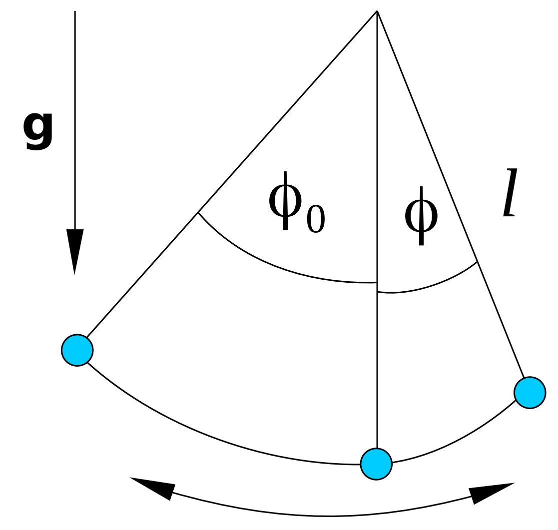
κ Leitfähigkeit
l Länge des Hohlzylinders

- Kann man eine Näherung angeben, so dass man für $d = r_a - r_i \ll r_i$ den Widerstand einfach abschätzen kann?



Motivation: Fadenpendel

- Schwingungsdauer bei maximalem Ausschlag ϕ_0 ist:



$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\phi_0/2)\sin^2 u}}\, du$$

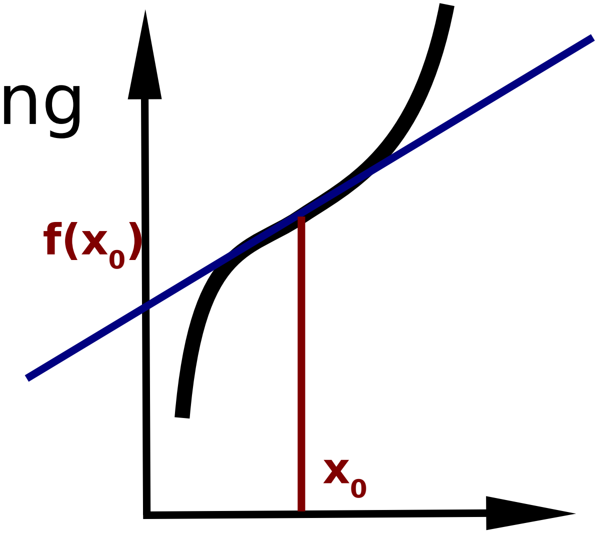
- Nicht analytisch berechenbar!
  - Keine Formel aus der Integraltafel!
  - Sog. „Elliptische Integrale“ auch nicht auf jedem Taschenrechner verfügbar!
- Wie kann man das trotzdem ausrechnen?

Approximation durch Potenzreihen

- 1. Idee: Approximation einer Funktion an einer Stelle x_0 durch ihre Tangente.

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- D.h., Funktionswert und erste Ableitung stimmen an der Stelle x_0 überein.
- Das geht auch besser!
- 2. Idee: Man fordert, dass der Funktionswert („Nullte Ableitung“) und die ersten **n** Ableitungen an der Stelle x_0 übereinstimmen.



Approximation durch Potenzreihen

- Approximation mit einer Geraden (Tangente):

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Approximation mit einer Parabel:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

- Approximation mit einem kubischem Polynom:

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

- Approximation mit Polynom n. Grades:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Beachte: } 0! = 1}$

Taylorsche Formel

- Wie gut ist die Approximation?
- Abschätzung durch Taylorsche Formel:
- Sei die Funktion f auf dem Intervall (x_0,x) (n+1) mal stetig differenzierbar. Dann existiert ein $z \in (x_0,x)$, so dass gilt
- $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\textbf{Restglied}}$$
- M.a.W.: In der „Nähe“ von x_0 geht der Fehler schneller gegen Null als $(x-x_0)^n$.

Bew.: Fetzer&Fränkel, S. 396

Taylorsche Formel

- Beachte: z=z(x) ist für jedes x ein anderes!
- D.h., da man i.d.R. z nicht kennt, kann man f(x) nicht exakt über die Taylorsche Formel berechnen!
- Aber wenn man eine obere Schranke angeben kann für

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \quad ,$$

  dann kann man abschätzen, wie weit man vom exakten Wert entfernt ist.
- Positiv ausgedrückt: Man kann sagen, wie genau die Approximation ist.

Taylorsches Polynom, Taylorsche Reihe

- Taylorsches Polynom vom Grad n:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- Taylorsche Reihe: $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$

- Aber:
  - Manchmal ist nur die Partialsumme bis zum n. Glied gemeint, manchmal der Limes $n\to\infty$.
  - Etwas verwirrend, aber aus dem Kontext heraus meist klar, was gemeint ist.

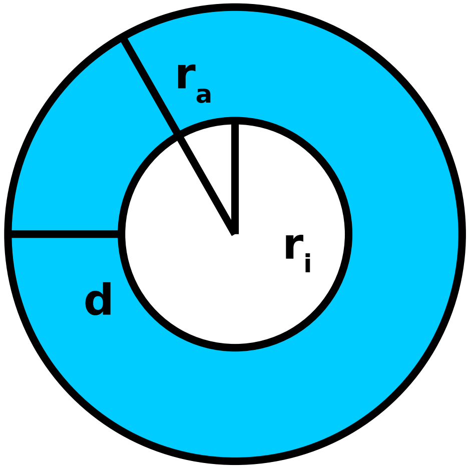
Beispiele

- Taylorsches Polynom bei $x_0=0$ für
  - $f(x) = 1 / (1-x)$
  - $f(x) = e^x$
  - $f(x) = \sin x$
  - $f(x) = \cos x$
  - $f(x) = (1 \pm x)^n$
  - $f(x) = \ln(1+x)$

Beispiel: Elektrischer Widerstand

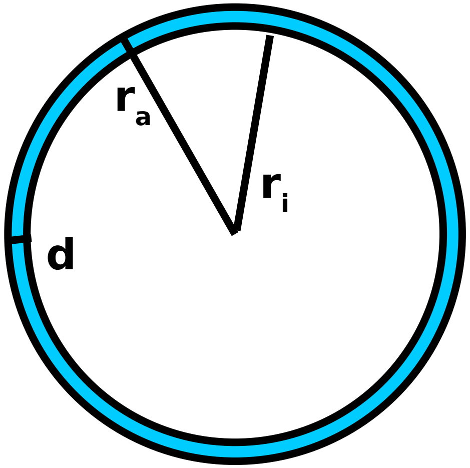
- Elektrischer Widerstand zwischen zwei koaxialen Leitern (Hohlzylinder)

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \qquad r_a > r_i$$



κ Leitfähigkeit
l Länge des Hohlzylinders

- Kann man eine Näherung angeben, so dass man für $d = r_a - r_i \ll r_i$ den Widerstand einfach abschätzen kann?



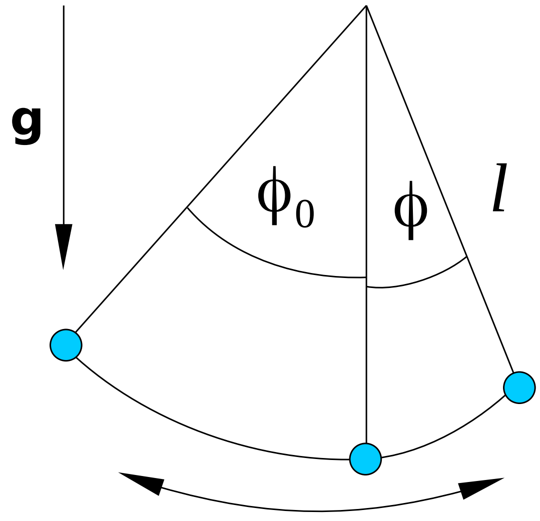
Beispiel: Elektrischer Widerstand

- Es ist: $$\frac{r_a}{r_i}=\frac{r_a+(r_i-r_i)}{r_i}=\frac{r_i+(r_a-r_i)}{r_i}=1+\frac{d}{r_i}=1+x$$
- Damit folgt
$$R=\frac{1}{2\pi\kappa l}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)=\frac{1}{2\pi\kappa l}\ln(1+x) \qquad x=\frac{d}{r_i}>0$$
- Reihenentwicklung: $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\ldots$$
- Für x≪1, kann man nach der 1. bzw. 2. Ordnung abbrechen:
$$R\approx\frac{1}{2\pi\kappa l}\left(\frac{d}{r_i}\right)$$
$$R\approx\frac{1}{2\pi\kappa l}\left(\frac{d}{r_i}-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{r_i}\right)^2\right)$$

Beispiel: Fadenpendel

- Schwingungsdauer bei maximalem Ausschlag ϕ_0 ist:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\phi_0/2)\sin^2 u}}\,du$$



- Nicht analytisch berechenbar!
  - Keine Formel aus der Integraltafel!
  - Sog. „Elliptische Integrale“ auch nicht auf jedem Taschenrechner verfügbar!
- Wie kann man das trotzdem ausrechnen?

Beispiel: Fadenpendel

- Reihenentwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-1/2}$ um x=0:

$$(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5+\ldots$$

- Einsetzen: $x=\sin^2(\phi_0/2)\sin^2 u=\lambda^2\sin^2 u$ mit $\lambda=\sin(\phi_0/2)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$$

$$=1+\frac{1}{2}(\lambda^2\sin^2 u)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(\lambda^2\sin^2 u)^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(\lambda^2\sin^2 u)^3$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}(\lambda^2\sin^2 u)^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}(\lambda^2\sin^2 u)^5+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}(\lambda^2\sin^2 u)+\frac{3}{8}(\lambda^4\sin^4 u)+\frac{5}{16}(\lambda^6\sin^6 u)+\frac{35}{128}(\lambda^8\sin^8 u)+\frac{63}{256}(\lambda^{10}\sin^{10} u)+\ldots$$

Beispiel: Fadenpendel

- Und nun in das Integral einsetzen:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}\, du$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\lambda^2 \sin^2 u\right) + \frac{3}{8}\left(\lambda^4 \sin^4 u\right) + \frac{5}{16}\left(\lambda^6 \sin^6 u\right) + \frac{35}{128}\left(\lambda^8 \sin^8 u\right) + \frac{63}{256}\left(\lambda^{10} \sin^{10} u\right) + \ldots \right] du$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1\, du + \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\, du + \frac{3}{8}\lambda^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 u\, du + \frac{5}{16}\lambda^6 \int_0^{\pi/2} \sin^6 u\, du + \frac{35}{128}\lambda^8 \int_0^{\pi/2} \sin^8 u\, du + \frac{63}{256}\lambda^{10} \int_0^{\pi/2} \sin^{10} u\, du + \ldots$$

Beispiel: Fadenpendel

- Integrale berechnen:

$$\int_0^{\pi/2} 1\,du = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}\left[u - \sin u \cos u\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} =: I_1$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \sin^n u\,du = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} u\,du}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 u\,du = \frac{3}{4} I_1 = \frac{3}{4}\frac{\pi}{4} =: I_2$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 u\,du = \frac{5}{6} I_2 = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\frac{\pi}{4} = \frac{5}{8}\frac{\pi}{4} =: I_3$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 u\,du = \frac{7}{8} I_3 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8}\frac{\pi}{4} = \frac{35}{64}\frac{\pi}{4} =: I_4$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{10} u\,du = \frac{9}{10} I_4 = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\frac{\pi}{4} = \frac{63}{128}\frac{\pi}{4} =: I_5$$

Beispiel: Fadenpendel

- Integrale berechnen:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}\, du$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\lambda^2 I_1 + \frac{3}{8}\lambda^4 I_2 + \frac{5}{16}\lambda^6 I_3 + \frac{35}{128}\lambda^8 I_4 + \frac{63}{256}\lambda^{10} I_5 + \dots$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8}\lambda^4 \frac{3}{4}\frac{\pi}{4} + \frac{5}{16}\lambda^6 \frac{5}{8}\frac{\pi}{4} + \frac{35}{128}\lambda^8 \frac{35}{64}\frac{\pi}{4} + \frac{63}{256}\lambda^{10} \frac{63}{128}\frac{\pi}{4} + \dots$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{\pi}{4} + \frac{9}{32}\lambda^4 \frac{\pi}{4} + \frac{25}{128}\lambda^6 \frac{\pi}{4} + \frac{1225}{8192}\lambda^8 \frac{\pi}{4} + \frac{3969}{32768}\lambda^{10} \frac{\pi}{4} + \dots$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(2 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{9}{32}\lambda^4 + \frac{25}{128}\lambda^6 + \frac{1225}{8192}\lambda^8 + \frac{3969}{32768}\lambda^{10} + \dots\right)$$

Mit $\phi_0 = 60° \Rightarrow \lambda = \sin(\phi_0/2) = \sin(30°) = 1/2$

$$= \frac{\pi}{4}\left(2 + \frac{1}{8} + \frac{9}{512} + \frac{25}{8192} + \frac{1225}{2097152} + \frac{3969}{33554432} + \dots\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{4}(2 + 0.125 + 0.017578 + 0.003052 + 0.000584 + 0.000118) = \frac{\pi}{4} 2.146332 \approx \underline{1.686}$$

Beispiel: Fadenpendel

- Für die Schwingungsdauer T folgt damit bei einem Maximalausschlag von 60°:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 1.686 = 6.744 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Vergleiche mit Formel für kleine Auslenkungen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 6.283\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- M.a.W.: Die Approximation für kleine Auslenkungen ist für eine Schwingung um ca. 10% falsch.
- Das bedeutet: Nach ca. 10 Schwingungen stimmt nichts mehr.

Taylorsche Reihe für n→∞

- Restglied ist

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

- Wir hatten gesehen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

- Wenn f unendlich oft differenzierbar ist, existiert $f^{(n+1)}$ für n→∞.
- Fragen:
  - Konvergiert die Taylorsche Reihe einer Funktion f(x) für n→∞ gegen f(x)?
  - Und wenn ja, für welche x?

Potenzreihen

- Allgemein:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Jetzt:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i(x_0)(x - x_0)^i$$

bzw. $$s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i$$ für $x_0 = 0$

- Frage:
  Kann man den Grenzwert $n \to \infty$ für alle x bilden?
- Antwort:
  Manchmal ja (insbes. in wichtigen Fällen),
  aber ganz oft nicht.
- Wie bestimmt man die Konvergenz von Potenzreihen?

Unendliche Reihen: Absolute Konvergenz

- Eine Reihe $s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist *absolut* konvergent,

  wenn auch $s=\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

- Ist die Reihe $s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $a_n > 0$ für alle n, so ist sie auch absolut konvergent.

- Absolut konvergente Reihen erlauben es, bestimmte Rechenoperationen gliedweise auszuführen.

Konvergenz von unendlichen Reihen: Quotientenkriterium

- Eine Reihe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent,

  wenn für alle n∈ℕ gilt:

$$a_n \neq 0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

- Ist q>1, so ist die Reihe divergent.
- Ist q=1, versagt das Quotientenkriterium.
  Dann muss man andere Kriterien verwenden.

Quotientenkriterium: Beispiele

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots + \frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{(2n+2)!} + \ldots$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

  $+ \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$

Konvergenz von unendlichen Reihen: Wurzelkriterium

- Eine Reihe $s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent,

  wenn für alle n∈ℕ gilt:

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=q<1$$

- Ist q>1, so ist die Reihe divergent.
- Ist q=1, versagt das Wurzelkriterium.
  Dann muss man andere Kriterien verwenden.

Konvergenz von unendlichen Reihen: Majorantenkriterium

- Eine Reihe $s_a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent,

  wenn es eine konvergente Reihe $s_b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gibt und für alle n∈ℕ gilt:

$$b_n \geq 0 \quad , \quad |a_n| \leq b_n$$

- s_b ist dann die Majorante zu s_a.
- Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Konvergenz von unendlichen Reihen: Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen

- Eine Reihe $s=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ist konvergent,

  wenn für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$a_n>0$$
$$a_n>a_{n+1}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

- D.h., eine alternierende Reihe ist konvergent, wenn die Glieder der entsprechenden Folge a_n eine streng monoton fallende Nullfolge bilden.
- Beispiel:
  - harmonische Reihe
  - alternierende harmonische Reihe

Potenzreihen: Konvergenzbereich

- Betrachte: $s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i(x_0)(x - x_0)^i$
- Für $x = x_0$ konvergiert jede Potenzreihe und ihr Wert ist b_0.
- Es gibt Potenzreihen, die <u>nur</u> für $x = x_0$ konvergieren, und solche, die für <u>alle</u> $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.
- Der Konvergenzbereich ist symmetrisch zu x_0. D.h., es gibt ein $r > 0$, so dass die Potenzreihe konvergiert für $|x - x_0| < r$. Man bezeichnet r dann als *Konvergenzradius*.
- Für $|x - x_0| > r$ divergiert dann die Potenzreihe.
- An den Randpunkten $|x - x_0| = r$ kann man keine allgemeingültigen Aussagen machen.

Potenzreihen: Konvergenzradius

- Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i(x_0)(x-x_0)^i$$

lässt sich berechnen aus

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|$$

unter der Voraussetzung, dass $b_n \neq 0$ für alle n und dass der Grenzwert existiert.

- Beweis mit Quotientenkriterium: $a_n = b_n (x-x_0)^n$.

Potenzreihen: Konvergenzradius

Beispiele:

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Taylorsche Reihe als Potenzreihe

- Innerhalb des Konvergenzradius konvergiert die Taylorsche Reihe gegen die urspr. Funktion.
  - Beachte Voraussetzungen!

- Man kann das Taylorsche Polynom (endl. viele Terme!) immer berechnen. Aber ob es eine gute Approximation der urspr. Funktion ist, hängt davon ab, ob man innerhalb des Konvergenzradius bleibt!
  - Der Konvergenzradius ist eine Eigenschaft der **unendlichen** Reihe!

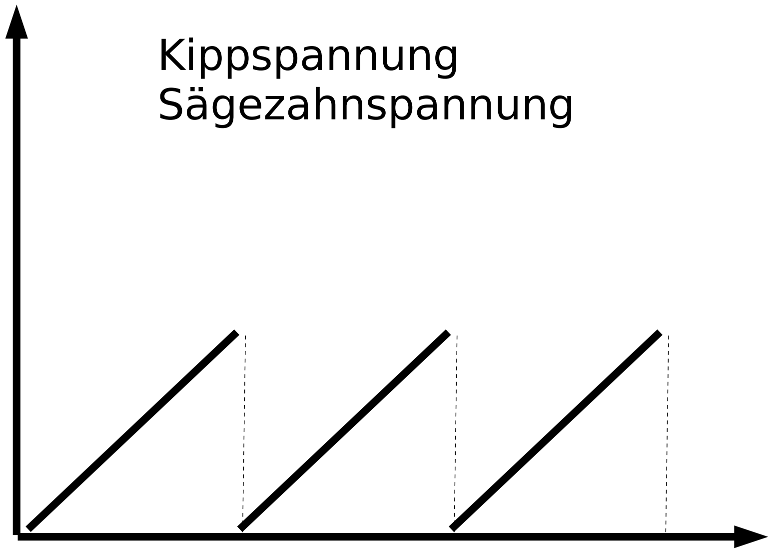
Taylorsche Reihe

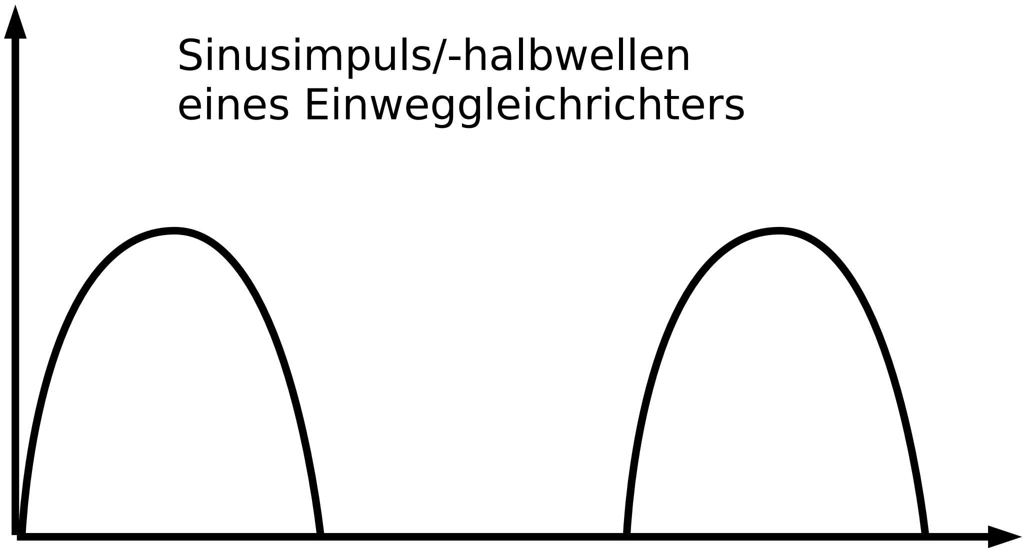
- MATLAB-Beispiele aus

  `Taylorreihen_v2.m`

Approximation von periodischen Funktionen
Fourier-Reihen

- Fourier: „Man kann jede periodische Funktion als Summe von Sinus- und Cosinus-Termen schreiben."
  - „jede periodische Funktion": Das sind viele!
  - Voraussetzungen folgen ...





Fourier-Reihen: Voraussetzungen

- Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele Intervalle zerlegen, in denen die Funktion stetig und monoton ist.
- An den Unstetigkeitsstellen existieren der links- und der rechtsseitige Limes.
  - Als Unstetigkeiten kommen nur endliche Sprünge in Frage.

Fourier-Reihe: Periode P = 2π

- Gegeben sei f(x) mit Periode 2π und gemäß den obigen Voraussetzungen
- Dann gilt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

- Man liest: *Fourier-Reihe von f*
- a_n und b_n sind die *Fourier-Koeffizienten*.
  - Alles steht und fällt mit deren Berechnung.

Grundintegrale

- Bestimmte Integrale über die volle Periode 2π für n,m ∈ℕ:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(mx)\,dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(mx)\,dx = \pi$$

Fourier-Koeffizienten: Berechnung von a_0

▸ Integriere die Fourier-Reihe über eine volle Periode:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx}_{=0} + b_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2} 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Fourier-Koeffizienten: Berechnung von a_m

- Multipliziere die Fourier-Reihe mit cos(m x) und integriere über eine volle Periode:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(m x)\,dx =$$

$$\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(m x)\,dx}_{=0}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(n x)\cos(m x)\,dx}_{=0 \text{ für } m \neq n} + b_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(n x)\cos(m x)\,dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} f(x)\cos(m x)\,dx = a_m \pi$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(m x)\,dx$$

Fourier-Koeffizienten: Berechnung von b_m

- Multipliziere die Fourier-Reihe mit sin(m x) und integriere über eine volle Periode:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(m x)\,dx =$$

$$\underbrace{\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m x)\,dx}_{=0}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(n x)\sin(m x)\,dx}_{=0} + b_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(n x)\sin(m x)\,dx}_{=0 \text{ für } m \neq n}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} f(x)\sin(m x)\,dx = b_m \pi$$

$$\Rightarrow \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(m x)\,dx$$

Fourier-Reihe: Periode P = 2π

Zusammenfassung:

- Funktion mit Periode 2π hat Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\,x) + b_n \cdot \sin(n\,x)$$

mit Fourier-Koeffizienten aus:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

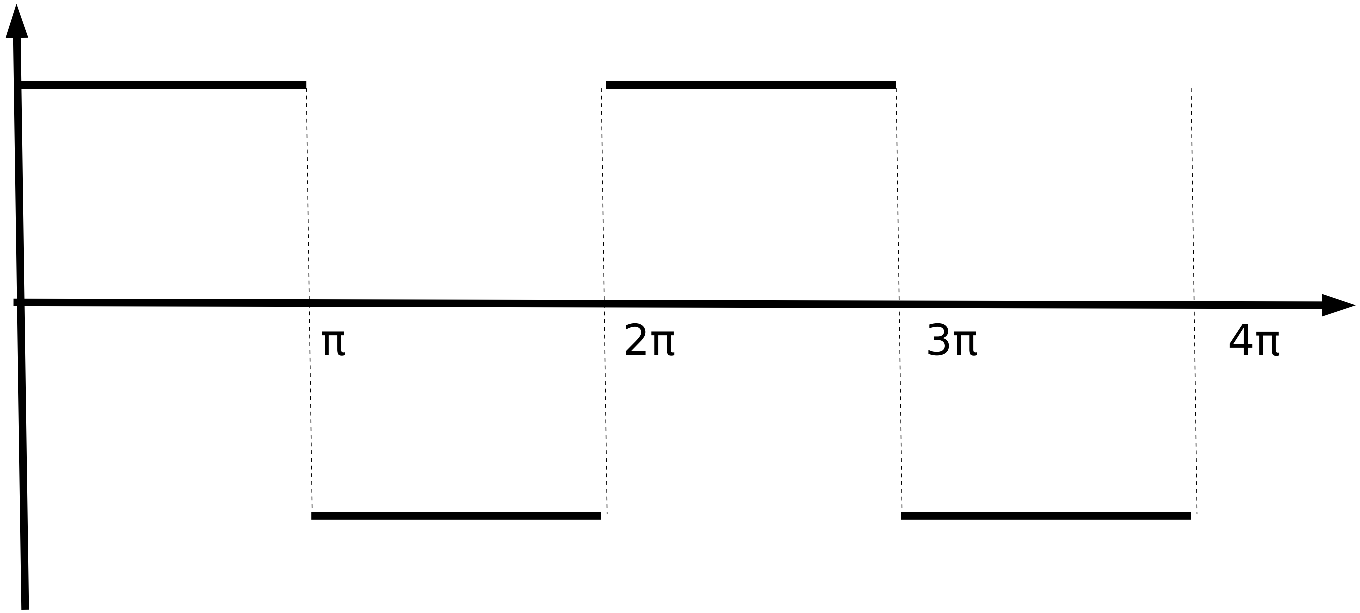
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(m\,x)\,dx \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(m\,x)\,dx \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

Fourier-Reihe: Periode P = 2π

- Beispiel:

$$f(x)=\begin{cases} +1 & 0\le x<\pi \\ -1 & \pi\le x<2\pi \end{cases}$$



Fourier-Reihe: Periode P = T

- Betrachte allg. periodische Bewegung mit Periode T.
  - Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ (… der Grundschwingung)
  - ersetze in der vorherigen Darstellung: $x \rightarrow \omega_0 t$
  - Integration für die Koeffizienten erfolgt nun über ein (beliebiges) Periodenintervall T.
- Damit erhält man diese Darstellung der Fourier-Reihe

$$g(t) = f(\omega_0 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

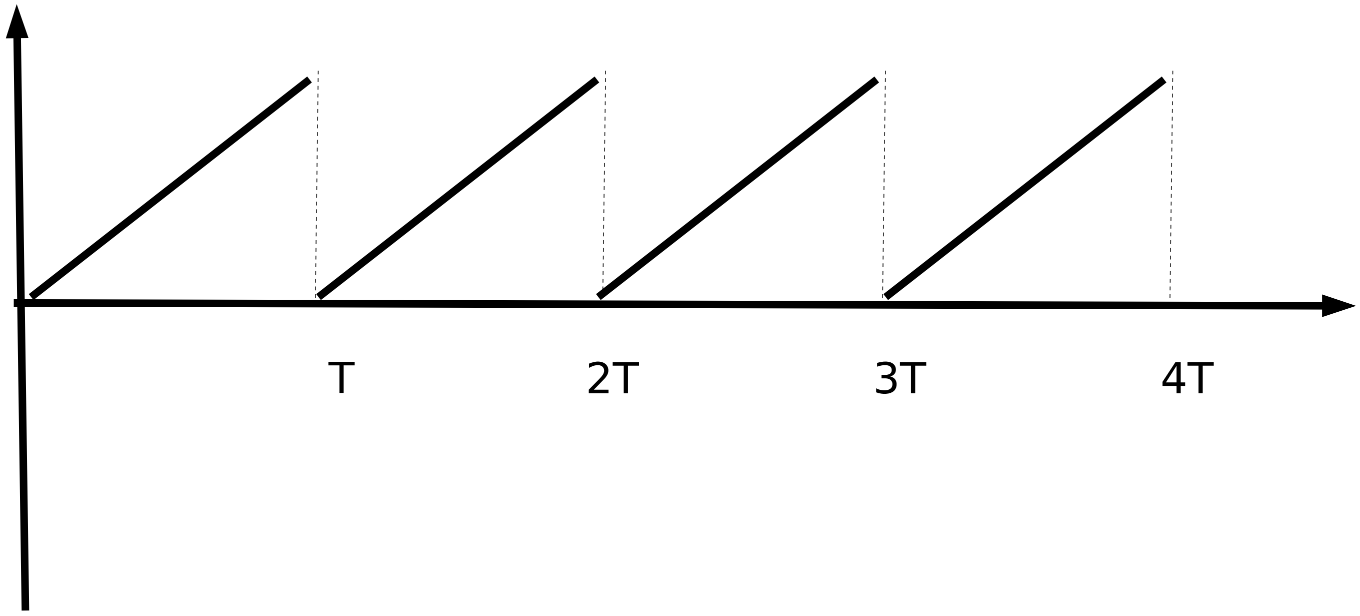
$$a_m = \frac{2}{T} \int_{(T)} g(t) \cos(m\omega_0 t)\, dt \quad m = 0,1,2,3,\ldots$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{(T)} g(t) \sin(m\omega_0 t)\, dt \quad m = 1,2,3,\ldots$$

Fourier-Reihe: Periode P = T

- Beispiel:

$$g(t) = \frac{G}{T}t \quad 0 \le t \le T$$ (G ist Amplitude)



Fourier-Reihe

- MATLAB-Beispiele aus

  `Fourierreihen_v0.m`

Fourier-Reihe: Approximation von g(t)

- An Beispielen gesehen:
  - An Sprüngen haben Fourier-Reihen den Wert

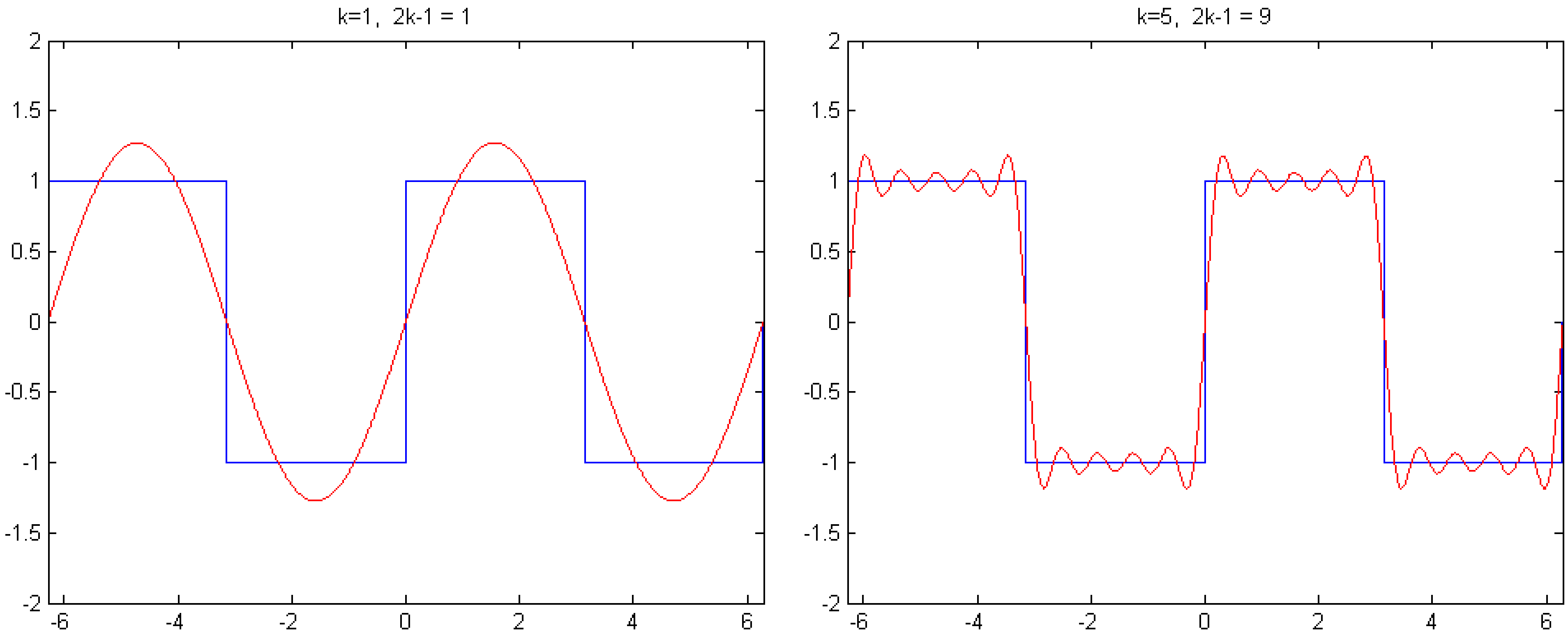
$$\frac{g^{+}(t_0)+g^{-}(t_0)}{2}$$

mit $g^{+}(t_0)=\lim_{t\downarrow t_0} g(t)$ $\qquad$ $g^{-}(t_0)=\lim_{t\uparrow t_0} g(t)$

  - Fourier-Reihen produzieren „Überschwinger“ links und rechts dieser Unstetigkeitsstellen.
  - Sind (endliche) Fourier-Reihen eigentlich eine gute Approximation?

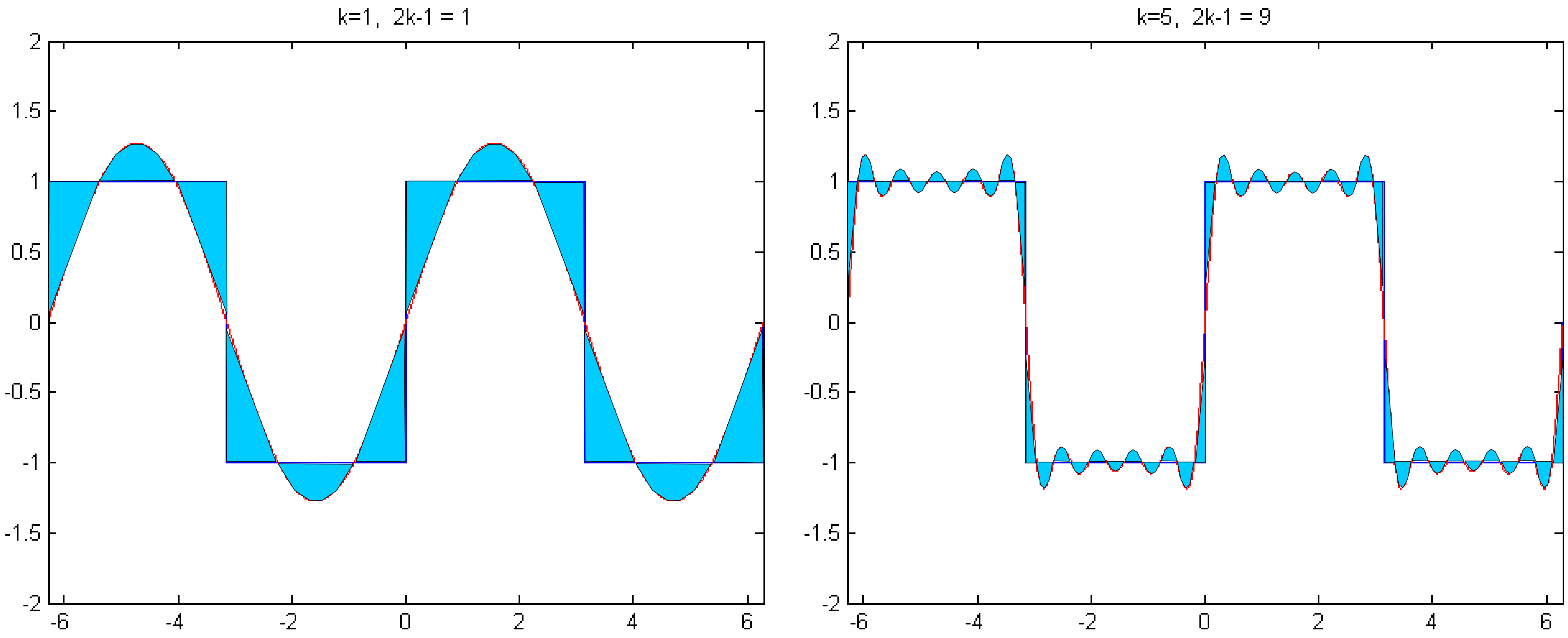
Fourier-Reihe: Approximation von g(t)

- Punktweise Konvergenz nicht überall gut!
  - An manchen Stellen gar nicht! (Sprungstellen)
- Trotzdem approximieren sie die urspr. Kurve!



Fourier-Reihe: Approximation von g(t)

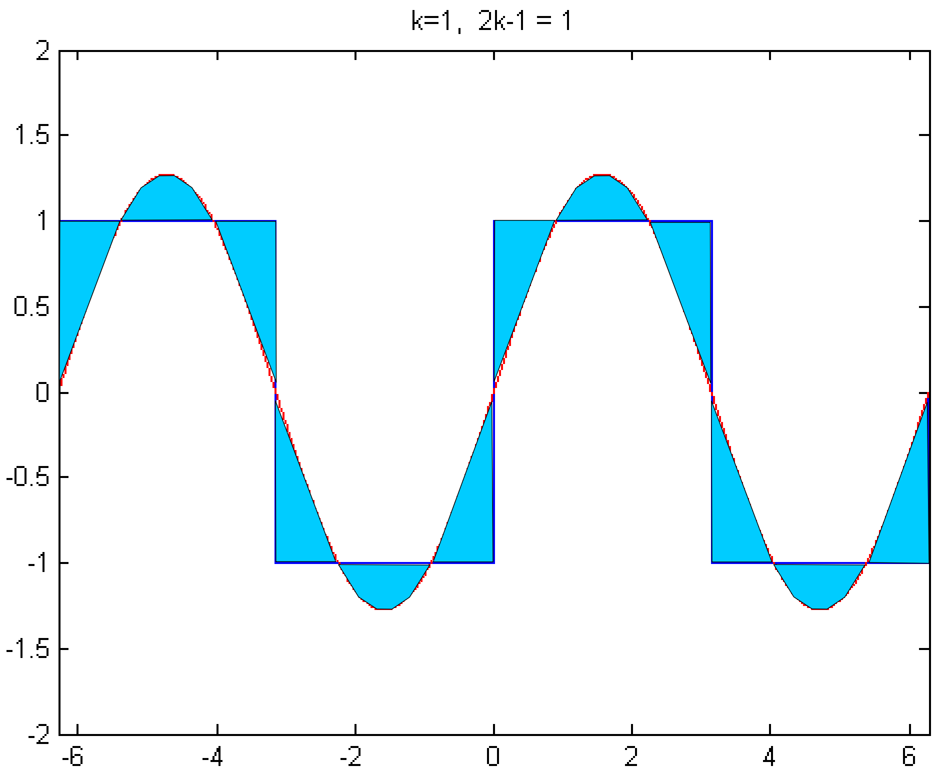
- Wie kann man die Approximation messen?
- Die Fläche zw. den Kurven wird kleiner!

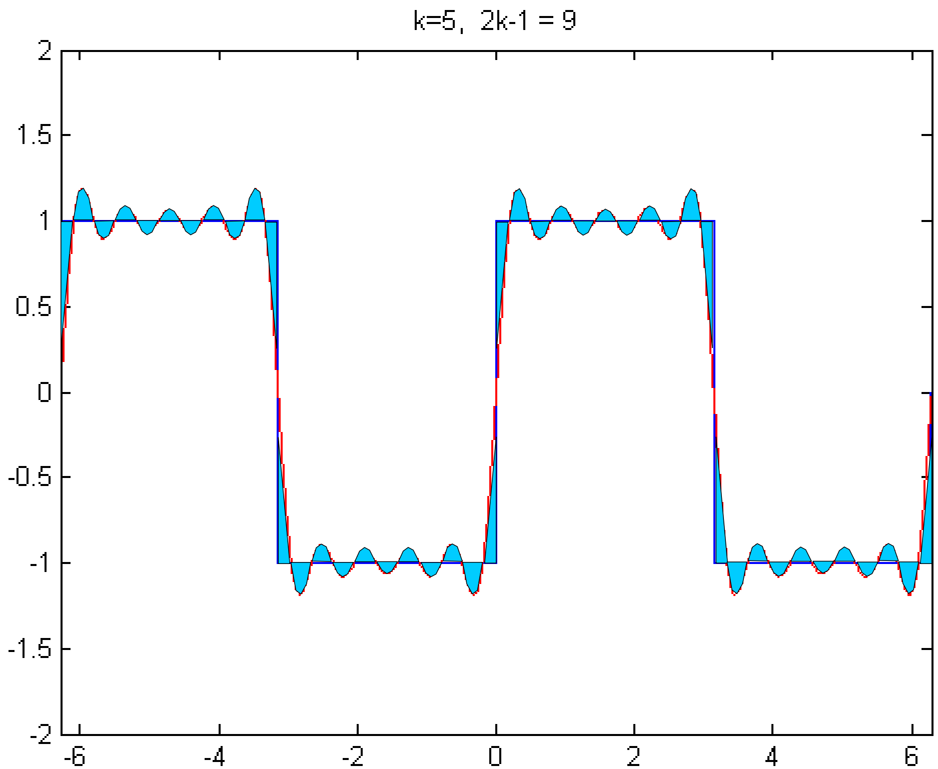


Fourier-Reihe: Approximation von g(t)

- Statt der Fläche betrachtet man $\int_{(T)} \left(g(t) - g_n(t)\right)^2 dx$

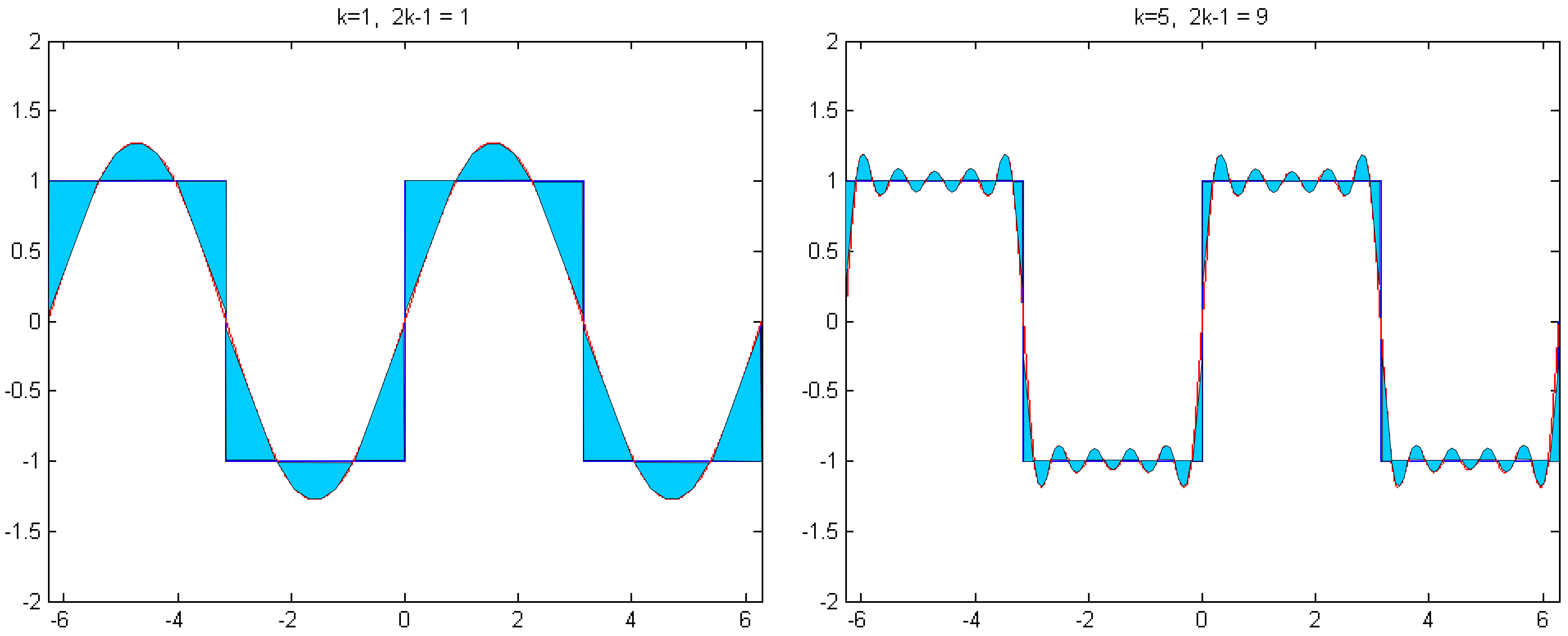
  mit $g_n(t)$: Fourier-Reihe bis Term n





Fourier-Reihe: Approximation von g(t)

- Man nennt dies
  Konvergenz im quadratischen Mittel.



Fourier-Reihe: Differenzieren

- Betrachte Fourier-Reihe zu einer Funktion:

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos(n\omega_0 t)+b_n\cdot\sin(n\omega_0 t)$$

$$a_m=\frac{2}{T}\int_{(T)} g(t)\cos(m\omega_0 t)\,dt \quad m=0,1,2,3,\ldots$$

$$b_m=\frac{2}{T}\int_{(T)} g(t)\sin(m\omega_0 t)\,dt \quad m=1,2,3,\ldots$$

- **Dann ist die Ableitung nach t ...**

$$g'(t)=0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n n\omega_0(-\sin(n\omega_0 t))+b_n n\omega_0\cos(n\omega_0 t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\cos(n\omega_0 t)+\beta_n\sin(n\omega_0 t)$$

$$\alpha_n=b_n n\omega_0 \qquad \beta_n=-a_n n\omega_0$$

wieder eine Fourier-Reihe.

Fourier-Reihe: Differenzieren

- Ausblick:
  Man kann eine Fourier-Reihe in eine Differential-Gleichung einsetzen und erhält dann ein rein algebraisches Problem für die Fourier-Koeffizienten.
- Bei bestimmten Typen von Differentialgleichungen ist dann die Lösung sehr einfach!
  - z.B. Gleichungen, die Schwingungen beschreiben.