Kap 5, p. 28

Anmerkungen zu den Konstanten.

... am Bsp,

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int k\,dt$$

$$\ln x + C_1 = kt + C_2 \qquad \Big| -C_1$$

$$\ln x = kt + \underbrace{C_2 - C_1}$$

eine effektive Konstante

$\Rightarrow$ nur die Differenz zählt

$\Rightarrow$ Das ist die eine Konstante die man braucht: $C_2 - C_1 = C$

$$\ln x = kt + C \qquad \Big| e^{(\dots)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{kt+C}$$

An dieser Stelle ist man offiziell fertig.

weniger praktisch.

z.B. RB: $x(0) = 5$

$$5 = x(0) = e^{k\cdot 0 + C} = e^{C} \Rightarrow C = \ln 5$$

Taschenrechner

(Fortsetzg.)

Was passiert, wenn man $x(t)$ anders aufschreibt?

$$x(t) = e^{kt+c} = e^{kt} \cdot \underbrace{e^{c}}_{D} = \underline{D e^{kt}}$$ praktisch

$$5 = x(0) = D e^{k \cdot 0} = D$$

ich brauche keinen Taschenrechner

$\Rightarrow$ Das ist sehr viel lesbarer und einfacher zu kontrollieren auf Fehler.

Kap. 5, p. 31

$$\underbrace{2xt}_{p(x,t)}\frac{dx}{dt}+\underbrace{x^2-2t}_{q(x,t)}=0$$

Beachte: In $q(x,t)$ darf kein $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ mehr vorkommen!

Gesucht ist ein $h(t,x)$, so daß

(I) $\frac{\partial h}{\partial x}=p(x,t)=2xt$

$\Rightarrow\ h_1(t,x)=x^2t+C_1(t)$

(II) $\frac{\partial h}{\partial t}=q(x,t)=x^2-2t$

$\Rightarrow\ h_2(t,x)=x^2t-t^2+C_2(x)$

$\Rightarrow$ Es soll gelten: $h_1=h_2$

$\Rightarrow$ Wähle $C_1(t)=-t^2$, $C_2(x)=0$ durch Vergleich

$\Rightarrow\ h(t,x)=x^2t-t^2$ erfüllt (I) & (II)

$\Rightarrow\ C=h(t,x)=x^2t-t^2\quad\Big|$ Auflösen nach x

$\Rightarrow\ C+t^2=x^2t\quad\Big|:t$

$\Rightarrow\ x^2=\frac{C}{t}+t\quad\Big|\sqrt{\ }$

$$\boxed{x(t)=\pm\sqrt{\frac{C}{t}+t}}$$ Lösungsfkt

Kap 5, p. 31 (Fortsetzg.)

Probe:

$$x(t) = \sqrt{\frac{c}{t} + t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{c}{t} + t}} \cdot \left(-\frac{c}{t^2} + 1\right)$$

In DGL einsetzen

$$2xt = 2t\sqrt{\frac{c}{t} + t}$$

$$2xt \cdot \frac{dx}{dt} = \cancel{2}t\cancel{\sqrt{\frac{c}{t} + t}} \; \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{\frac{c}{t} + t}}}\left(-\frac{c}{t^2} + 1\right)$$

$$= -\frac{c}{t} + t \qquad \text{ist 1. Term d. DGL}$$

$$x^2 - 2t = \left(\sqrt{\frac{c}{t} + t}\right)^2 - 2t$$

$$= \frac{c}{t} + t - 2t = \frac{c}{t} - t$$

$$\Rightarrow 2xt\frac{dx}{dt} + x^2 - 2t = -\frac{c}{t} + t + \frac{c}{t} - t = 0$$

✓

Kap. 5, p. 32

Bsp. von p. 31

$$\left.\begin{array}{l} p(x,t) = 2xt \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = 2x \\ q(x,t) = x^2 - 2t \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = 2x \end{array}\right\} \text{"="}$$

$\Rightarrow \exists\, h(x,t)$ mit $p = \frac{\partial h}{\partial x}$ & $q = \frac{\partial h}{\partial t}$

Kap 5, p. 34

$$\underbrace{\frac{t}{x+t}}_{p(x,t)}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{t}{x+t} + \ln(x+t)}_{q(x,t)} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x+t}\right) = \frac{(x+t)-t(1)}{(x+t)^2} = \frac{x}{(x+t)^2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x+t} + \ln(x+t)\right)$$

$$= \frac{0\cdot(x+t)-t(1)}{(x+t)^2} + \frac{1}{x+t}\cdot(1)$$

$$= -\frac{t}{(x+t)^2} + \frac{1}{x+t}\,\frac{x+t}{(x+t)} = \frac{x}{(x+t)^2}$$

„="

$\Rightarrow$ Es macht Sinn, sich auf die Suche nach einem $h(x,t)$ zu begeben.

Kap 5, p. 34

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{t}{x+t} \qquad \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{t}{x+t} + \ln(x+t)$$

$h_2(t,x) = t \cdot \ln(x+t) + D$ (aus Probe geraten wg. Produktregel)

ist erlaubt aber: ... s.u.

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = 1 \cdot \ln(x+t) + t \cdot \frac{1}{x+t} = q(x,t)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \partial_x\left(t \cdot \ln(x+t) + D\right) = t \cdot \frac{1}{x+t} \cdot 1 = \frac{t}{x+t} = p(x,t)$$

$\Rightarrow$ h_2 auch sofort h_1 : ✓

$\Rightarrow$ <u>Additive Konstante</u> D mitnehmen ... ?

$$\Rightarrow \quad h(t,x) = t \ln(x+t) + D$$

$$\Rightarrow \quad h(t,x) = C$$

$$\Rightarrow \quad t \ln(x+t) + D = C$$

$$\Rightarrow \quad t \ln(x+t) = \underbrace{C - D}_{\text{effektive Konstante ist die Differenz!}}$$

$\Rightarrow$ Man kann D weglassen!
Ist erlaubt, aber nicht nötig an dieser Stelle!

Kap 5, p.34

$$t \ln(x+t) = C \quad | \text{ Auflösen nach } x$$

$$\Rightarrow \ln(x+t) = \frac{C}{t} \quad | e^{(\dots)}$$

$$x+t = e^{\frac{C}{t}}$$

$$\boxed{x(t) = e^{\frac{C}{t}} - t}$$

Ist die Lösungsfkt.

Aufg. p.34

$$x\frac{dx}{dt} \underset{-}{+} t = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} p(x,t) = x \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \\ q(x,t) = -t \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{matrix} \Big\} = \checkmark$$

L f. 2. Aufg.

$\Rightarrow$ exakte DGL

$$\frac{\partial h}{\partial x} = x \Rightarrow h_1(x,t) = \frac{1}{2}x^2 + C_1(t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -t \Rightarrow h_2(x,t) = -\frac{1}{2}t^2 + C_2(x)$$

Wähle: $C_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\quad C_1(t) = -\frac{1}{2}t^2$

$$\Rightarrow h(x,t) = \frac{1}{2}x^2 \underset{-}{+} \frac{1}{2}t^2 \stackrel{!}{=} C \quad | \text{ Auflösen nach } x$$

$$\frac{1}{2}x^2 = C \underset{+}{-} \frac{1}{2}t^2$$

$$x(t) = \pm\sqrt{2C \underset{+}{-} t^2}$$

L f. 2. Aufg.

Kap 5, p. 34

$$x\frac{dx}{dt} \pm t = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dx}{dt} = \mp t$$

separable DGL
$\Rightarrow$ entsprechend lösen.
$\Rightarrow$ legitim, zu nutzen

$$(x-t^2)\frac{dx}{dt} - 2xt = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = x - t^2 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -2t$$

$$\Rightarrow \quad q = -2xt \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = -2t$$

„="

$\Rightarrow$ exakte DGL
$\Rightarrow$ h suchen.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = p = x - t^2 \Rightarrow h_1(x,t) = \frac{1}{2}x^2 - t^2x + C_1(t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = q = -2xt \Rightarrow h_2(x,t) = -xt^2 + C_2(x)$$

nix, was nur von t abhängt

$$\Rightarrow \quad C_2(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$C_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad h(t,x) = -xt^2 + \frac{1}{2}x^2 = c \quad \Big| \text{ Auflösen}$$

b.w.

Kap 5, p. 34 (Fortsetzg)

$$h(t,x) = -xt^2 + \frac{1}{2}x^2 = C \quad | \cdot 2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2xt^2 + t^4 = 2C + t^4 \quad | \text{ Quadrat. Ergänzung}$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow \quad (x - t^2)^2 = 2C + t^4 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = t^2 \pm \sqrt{2C + t^4}$$