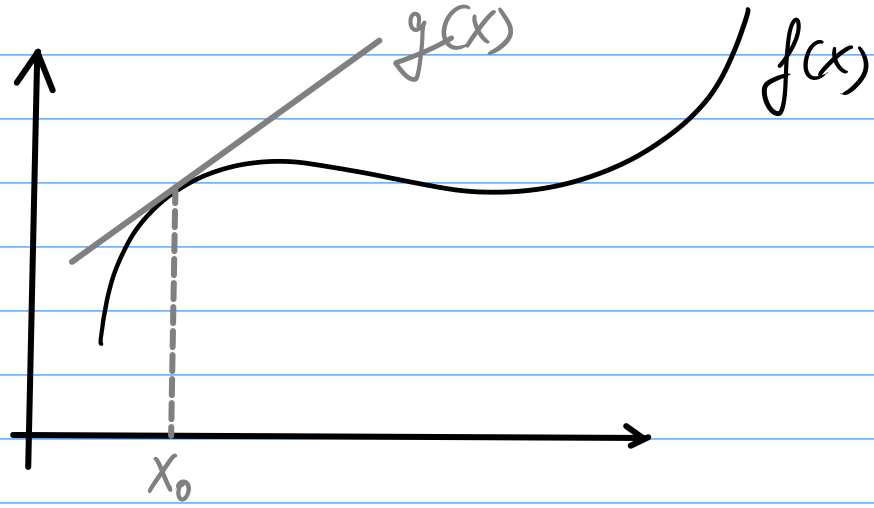
Kap 3, p. 46



$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Tangente}$$

$$g'(x) = 0 + f'(x_0)(1 - 0) = f'(x_0)$$

p. 47, Bsp.

$$\underline{a}_0 = (10, -10)$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f(\underline{a}_0) = f(10,-10) = 100 + 100 = 200$$

$$\operatorname{grad} f = (\partial_x f \quad \partial_y f) = (2x \quad 2y)$$

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}_0) = \operatorname{grad} f(\underset{x}{10}, \underset{y}{-10}) = (20 \quad -20)$$

Tangentialebene

$$T(x,y) = f(\underline{a}_0) + \operatorname{grad} f(\underline{a}_0) \cdot \overbrace{(\underline{a} - \underline{a}_0)}^{\binom{x}{y} - \binom{10}{-10}}$$

$$= 200 + (20 \quad -20) \cdot \begin{pmatrix} x - 10 \\ y + 10 \end{pmatrix}$$

b.w.

Kap. 3, p. 47 (cont'd)

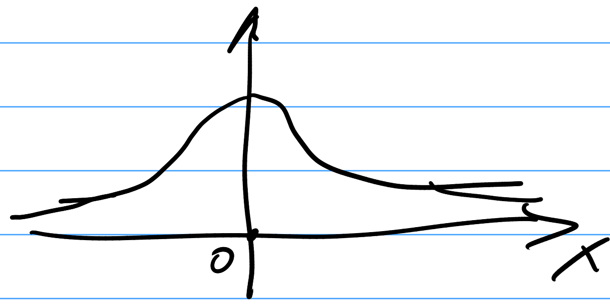
$$= 200 + 20(x-10) + (-20)(y+10)$$

$$= \cancel{200} + 20x - \cancel{200} - 20y - 200$$

$$\Rightarrow T(x,y) = 20x - 20y - 200$$

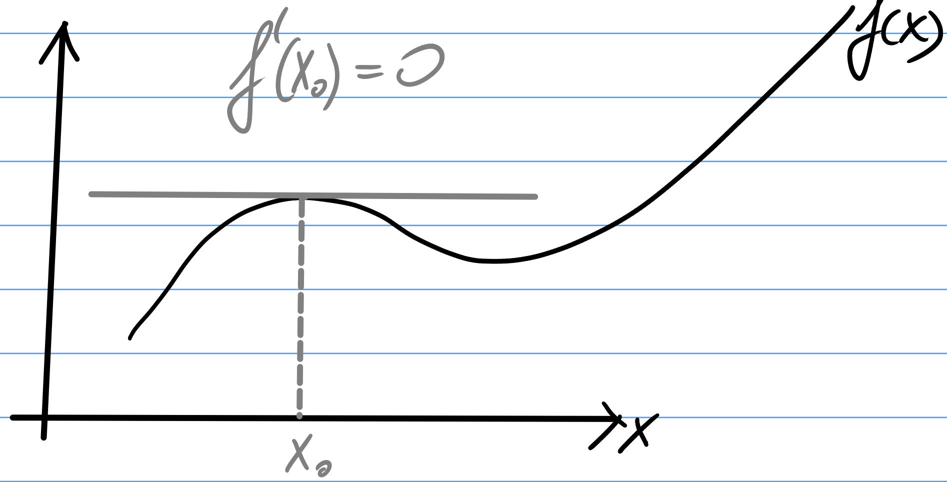
Matlab-Bsp:

früher $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



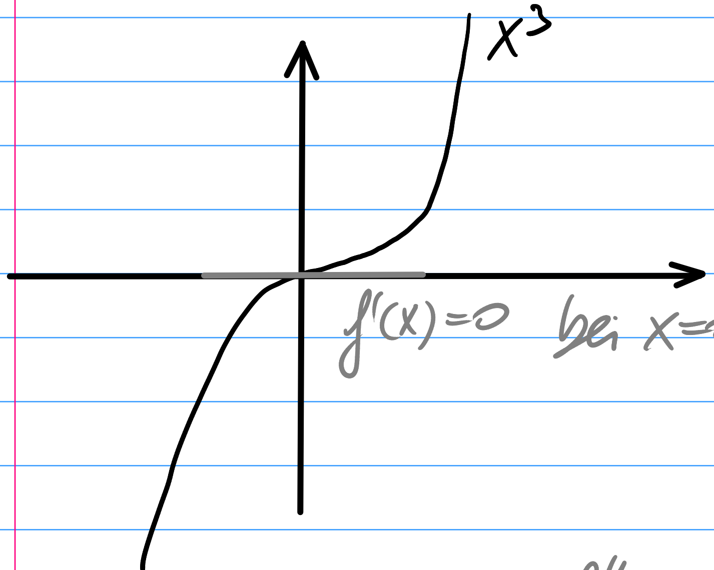
$\Rightarrow$ jetzt: $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

Kap 3, p. 48



Steigung $= 0$ bedeutet (ggf.) Extremum

$\Rightarrow$ übertragen auf $f(x,y)$



$f'(x) = 0$ bei $x = 0$ aber kein Extremum!

$\Rightarrow$ Deshalb z.B. $f'' \neq 0$! für Extremum

$\Rightarrow$ Frage: Wie überträgt sich das auf $f(x,y)$?

2. Abl. hier ist Hesse-Matrix!

Kap. 3, p. 49

Beispiele

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underset{1\times 2}{\underline{x}^T} \cdot \underset{2\times 2}{\underline{\underline{M}}} \cdot \underset{2\times 1}{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wenn $x, y \neq 0$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 > 0$$

1×1 Matrix = Zahl!

$\Rightarrow \underline{\underline{M}}$ ist positiv definit

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3x + y & x - 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= -3x^2 + xy + xy - 3y^2$$

$$= -3x^2 - 3y^2 + 2xy$$

$$= -2x^2 - 2y^2 - x^2 + 2xy - y^2$$

$$= -2(x^2 + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= \underbrace{-2}_{\text{negativ}} \underbrace{(x^2+y^2)}_{>0} - \underbrace{(x-y)^2}_{>0} < 0 \quad \text{für } x,y \neq 0$$

negativ

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{M}}$ ist <u>negativ</u> definit.

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & +3 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{x} = (x \quad y) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x \quad y) \begin{pmatrix} -3x+y \\ x+3y \end{pmatrix} = -3x^2 + xy + xy + 3y^2$$

$$= \underbrace{-3x^2}_{\text{immer negativ}} + \underbrace{3y^2}_{\text{immer positiv}} + 2xy$$

wähle $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\underline{x}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{x} = -3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 < 0$

wähle $\underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\underline{y}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{y} = -3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0 > 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{M}}$ ist indefinit

versch. Vorzeichen möglich

Kap 3, p. 50

Kriterium von Hurwitz f. 2x2-Matrix.

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det \underline{\underline{M}} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 > 0 \\ \det((1)) = 1 \qquad\qquad > 0 \end{array}\right\} \underline{\underline{M}} \text{ positiv definit}$$

$\Rightarrow$ geht so nicht f. andere Matrizen!
(negativ definit oder indefinit)

Papula: für 2x2 (ausschließlich!)

1. $\det \underline{\underline{M}} > 0$

2. $\begin{cases} m_{11} > 0 & \Rightarrow \underline{\underline{M}} \text{ positiv definit} \\ m_{11} < 0 & \Rightarrow \underline{\underline{M}} \text{ negativ definit} \end{cases}$

Kap 3, p. 58

$$f(x,y) = x^2+y^2$$

$$\partial_x f = 2x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x=0$$

$$\partial_y f = 2y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y=0$$

mögl. Extr. bei $\underline{x}_0=(0,0)$

$$\Rightarrow \text{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{konstant}$$

$$= \text{Hess} f(0,0) = \underline{\underline{M}} \qquad \underline{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} = (u \;\; v)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= (u \;\; v)\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \end{pmatrix} = 2u^2+2v^2 > 0$$

f. $\underline{u} \neq 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{M}}$ ist positiv definit

$\Rightarrow$ Minimum bei $\underline{x}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Kap 3, p. 59

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} = (1+x^2+y^2)^{-1}$$

$$\partial_x f = -(1+x^2+y^2)^{-2} \cdot 2x$$

$$\partial_y f = -(1+x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y$$

$$\partial_x f = 0 = -(1+x^2+y^2)^{-2} \cdot 2x \quad \Big| \cdot \underbrace{(1+x^2+y^2)^2}_{\neq 0 \ \forall x,y}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -2x$$

$$\Rightarrow \quad x = 0$$

$$\partial_y f = 0 = -(1+x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y \quad \Big| \cdot \underbrace{(1+x^2+y^2)^2}_{\neq 0 \ \forall x,y}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -2y$$

$$\Rightarrow \quad y = 0$$

$\Rightarrow$ mögl. Extremstelle bei $x_0 = (0,0)$

$\Rightarrow$ Hess f überprüfen

$$\partial_{xx} f = \partial_x(\partial_x f) = (-1)(-2)(1+x^2+y^2)^{-3} 2x \cdot 2x + \left(-(1+x^2+y^2)^{-2} \cdot 2\right)$$

$$= 8(1+x^2+y^2)^{-3} x^2 - 2(1+x^2+y^2)^{-2}$$

Kap 3, p. 59

$$= \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} \frac{(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)}$$

$$= \frac{6x^2-2y^2-2}{(1+x^2+y^2)^3} = \partial_{xx} f$$

$$\partial_{yy} f = \partial_y(\partial_y f) = (-1)(-2)(1+x^2+y^2)^{-3} \cdot 2y \cdot 2y$$
$$+ (-(1+x^2+y^2)^{-2} \cdot 2)$$

$$= 8y^2 (1+x^2+y^2)^{-3} - 2(1+x^2+y^2)^{-2}$$

$$= \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} \frac{(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)}$$

$$= \frac{6y^2-2x^2-2}{(1+x^2+y^2)^3} = \partial_{yy} f$$

$$\partial_{xy} f = \partial_x(\partial_y f) = (-1)(-2)(1+x^2+y^2)^{-3}\, 2x\, 2y$$
$$= \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3} = \partial_{yx} f$$

$$\Rightarrow \operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{6x^2-2y^2-2}{(1+x^2+y^2)^3} & \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3} \\ \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3} & \frac{6y^2-2x^2-2}{(1+x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}$$

Kap 3, p. 59 $\qquad \underline{x}_0 = (0,0)$!

$$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}} \qquad \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} = (u \;\; v) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= (u \;\; v) \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \end{pmatrix} = -2u^2 - 2v^2$$

$$= -2(u^2 + v^2) < 0 \quad \forall\, \underline{u} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{M}}$ ist negativ definit

$\Rightarrow$ f hat bei $\underline{x}_0 = (0,0)$ ein Maximum.

Kap. 3, p. 60

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\partial_x f = 2x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\partial_y f = -2y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$\Rightarrow$ mögl. Extremstelle ist bei $\underline{x}_0 = (0,0)$.

$$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{yx} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{konst.}$$

$$= \text{Hess} f(0,0) = \underline{\underline{M}}$$

Kap 3, p. 6 (cont'd)

$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\underline{u}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \end{pmatrix} = 2u^2 - 2v^2$

wähle $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} = 2 \cdot 1 - 0 > 0$

$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} = 0 - 2 \cdot 1 < 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{M}}$ ist indefinit $\Rightarrow$ kein Extremum!

Kap 3, p. 61

$$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$$

$$\partial_x f = 3y - 3x^2 \quad , \quad \partial_y f = 3x - 3y^2$$

$$\partial_x f = 0 = 3y - 3x^2$$
$$\partial_y f = 0 = 3x - 3y^2$$

Gleichungssystem lösen!

$\Rightarrow \quad 3y - 3x^2 = 0 \Rightarrow y = x^2$

$3x - 3y^2 = 0 \Rightarrow x - y^2 = 0$ | Einsetz.

$$x - (x^2)^2 = 0$$

$$x - x^4 = 0$$

$$\Rightarrow x(1 - x^3) = 0$$

$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$y = x^2 \quad \Rightarrow y = 0 \qquad \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow$ 2 mögl. Punkte für Extrema:

$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ beide überprüfen

Kap 3, p. 61

$$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{yx} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix}$$

$$\partial_{xx} f = \partial_x (\partial_x f) = -6x$$

$$\partial_{yy} f = \partial_y (\partial_y f) = -6y$$

$$\partial_{yx} f = \partial_y (\partial_x f) = 3 = \partial_{xy} f$$

$$\Rightarrow \text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

1. Punkt: $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{u}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} = (u \;\; v) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= (u \;\; v) \begin{pmatrix} 3v \\ 3u \end{pmatrix} = 3uv + 3uv = 6uv$$

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} = 6 > 0$$

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} = -6 < 0$$

$\Rightarrow$ bei $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\underline{\underline{M}} = \text{Hess} f$ indefinit

$\Rightarrow$ <u>kein Extremum!</u>

Kap 3, p. 61 (cont'd)

$\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\underline{u}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{u} = (u \quad v) \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= (u \quad v) \begin{pmatrix} -6u + 3v \\ 3u - 6v \end{pmatrix} = -6u^2 + 3uv + 3uv - 6v^2$$

$$= -6u^2 - 6v^2 + 6uv$$

$$= 3\left(-2u^2 - 2v^2 + 2uv\right)$$

$$= 3\left(-u^2 - v^2 \quad -u^2 + 2uv - v^2\right)$$

$$= 3\left(-u^2 - v^2 - (u^2 - 2uv + v^2)\right)$$

$$= 3\left(-u^2 - v^2 - (u-v)^2\right)$$

$$= \underbrace{-3(\underbrace{u^2+v^2}_{>0})}_{<0} \underbrace{- 3\underbrace{(u-v)^2}_{>0}}_{<0} \qquad \text{für } \underline{u} \neq 0$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{M}}$ ist negativ definit

$\Rightarrow \quad f$ hat Maximum bei $\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.