# Kapitel 1, Übung 2: Aufgaben

## Voraussetzung: Kapitel 1, Seiten 13-23

**1.5.** Berechne die Fläche A zwischen dem Graph der Funktion und der x-Achse. Wenn kein Intervall angegeben ist, ist der Integrationsbereich für die eingeschlossene Fläche zu bestimmen.

a) $f(x)=x^2-x$

b) $f(x)=x(x-1)(x-3)$

c) $f(x)=\frac{2x}{(1+x^2)}$ im Intervall [-1,+1]

d) $f(x)=(3x^2+8x+3)\sqrt{(x(x+1)(x+3))}$ im Intervall [0,3]

**1.6.** Berechne die Fläche A zwischen den Graphen der beiden Funktionen. Wenn kein Intervall angegeben ist, ist der Integrationsbereich für die eingeschlossene Fläche zu bestimmen.

a) $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=x^4$ im Intervall [-1,+1]

b) $f(x)=x(x-1)(x-3)$ $\quad g(x)=x^4-4x^3+3x^2$

c) $f(x)=2\sin x$ $\quad g(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}x$

Hinweis: Die Lösung der transzendenten Gleichung für den Integrationsbereich kann man durch Probieren bestimmen. Siehe Tabelle unten.

d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad g(x)=x^2$

**1.7.** Berechne die Bogenlänge der folgenden Kurven.

a) $f(x)=x$ im Intervall [0,1]

b) $f(x)=x^{3/2}$ im Intervall [0,1]

c) $f(x)=x^2$ im Intervall [0,1] (Hinweis: Integraltafel verwenden.)

**1.8.** Berechne die Volumen der folgenden Rotationskörper.

a) $g(x)=4-x^2$ im Intervall [-2,+2], Rotationsachse = x-Achse

b) $g(x)=4-x^2$ im Intervall [-2,+2], Rotationsachse = y-Achse

c) $g(x)=1+\sin x$ im Intervall [0, 3π/2], Rotationsachse = x-Achse

**b.w.**

1.9. Freiwillige Zusatzaufgabe zu numerischen Methoden. Verwenden Sie dazu ein Tabellenkalkulationsprogramm (z.B. Excel oder LibreOffice Calc) oder programmieren Sie die Lösung in MATLAB, Python, usw.

Berechne die folgenden Integrale mit der Trapezregel und mit der Simpson-Regel für jeweils 4 und 8 äquidistante Teilintervalle.

a) Berechne die Bogenlänge zu $f(x)=x(x-1)(x-3)$ im Intervall [0,4]

b) Berechne die Bogenlänge zu $f(x)=\sin(x)$ im Intervall $[0, \pi/2]$ .

Tabelle einiger Sinuswerte

| Winkel x | | sin(x) | Winkel x | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0° | $\frac{1}{2}\sqrt{0}$ | π | 180° |
| π/6 | 30° | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | 5π/6 | 150° |
| π/4 | 45° | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 3π/4 | 135° |
| π/3 | 60° | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 2π/3 | 120° |
| π/2 | 90° | $\frac{1}{2}\sqrt{4}$ | | |

# Kapitel 1, Übung 2: Lösungen

1.5. Fläche A zwischen Graph und x-Achse

a) Nullstellen 0 und 1. Dazwischen f negativ. $A=-\int_0^1 x^2-x\,dx=1/6$

b) Nullstellen 0, 1 und 3. f positiv zwischen 0 und 1, negativ zwischen 1 und 3.

$$\int x(x-1)(x-3)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+C=F(x)$$

$$A=\int_0^1 x(x-1)(x-3)\,dx-\int_1^3 x(x-1)(x-3)\,dx=F(1)-F(0)-(F(3)-F(1))=\frac{37}{12}$$

c) f negativ zwischen -1 und 0, positiv zwischen 0 und 1.

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx=\ln(1+x^2)=F(x)$$

$$A=-\int_{-1}^0 \frac{2x}{1+x^2}\,dx+\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx=-(F(0)-F(-1))+F(1)-F(0)=2\ln 2\approx 1.3863$$

d) f positiv in $[0,3]$ .

$$A=\int_0^3 (3x^2+8x+3)\sqrt{x(x+1)(x+3)}\,dx=\int_0^3 (3x^2+8x+3)\sqrt{x^3+4x^2+3x}\,dx$$

Beachte: $f(x)=x^3+4x^2+3x \;\Rightarrow\; f'(x)=3x^2+8x+3$

Damit:

$$=\int_0^3 f'(x)(f(x))^{\frac{1}{2}}\,dx \qquad \text{jetzt Kap.1, S. 9 mit } \alpha=\frac{1}{2}$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x^3+4x^2+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=407.2935$$

1.6. Fläche A zwischen 2 Graphen.

a) $g(x)\le f(x)$ für $x\in[-1,1]$ . Also

$$A=\int_{-1}^1 f(x)-g(x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}$$

b) $g(x)=x\,f(x).\Rightarrow$ Gleiche Nullstellen: $0,1,3$. Das sind auch die Stellen, an denen die Funktionswerte gleich sind. $g(x)\le f(x)$ für $x\in[0,3]$ Damit:

$$A=\int_0^3 f(x)-g(x)\,dx=\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{5x^4}{4}-\frac{7x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3=\frac{63}{20}$$

c) Die Funktionswerte stimmen überein bei $x=-2\pi/3$ , x=0 und $x=+2\pi/3$ (120°). Es ist $g(x)\le f(x)$ für $x\in[0,2\pi/3]$ . Damit

$$A_1=\int_0^{2\pi/3} 2\sin x-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}x\,dx=2[-\cos x]_0^{2\pi/3}-\left[\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}x^2\right]_0^{2\pi/3}$$

$$=2\left(-\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)\right)-\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2\right)=3-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\approx 1.1862$$

Beide Integranden sind ungerade Funktionen. Die Fläche für $x\in[-2\pi/3,0]$ wird die gleiche sein. Es sind lediglich die Vorzeichen zu klären.
Nun ist $g(x)\ge f(x)$ für $x\in[-2\pi/3,0]$ Zusammen mit der Substitution x = -y

folgt:

$$A_2=\int_{-2\pi/3}^{0} g(x)-f(x)\,dx=-\int_{2\pi/3}^{0} g(-y)-f(-y)\,dy=\int_{0}^{2\pi/3} g(-y)-f(-y)\,dy$$
$$=\int_{0}^{2\pi/3} -g(y)+f(y)\,dy=A_1$$

Zusammen ergibt sich $A=2A_1\approx 2.3724$ .

d) Die Stellen f=g sind gegeben durch x=0 und x=1. In diesem Bereich ist $g(x)\leq f(x)$ .

Also: $A=\int_0^1 \sqrt[3]{x}-x^2\,dx=[\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4-\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$

1.7. Bogenlänge

a)

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+(1)^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}$$

b) $L=\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\left[\frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^1\approx 1.4397$

c)

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\left[\frac{\operatorname{arcsinh}(2x)}{4}+x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right]_0^1\approx 1.4789$$

Tipp: Integral mit MATLAB o.ä. berechnen oder in Integraltafel nachschlagen, z.B. in Formelsammlung von Papula.

1.8. Rotationskörper

a) $V=\pi\int_{-2}^{+2}(4-x^2)^2\,dx=\pi\int_{-2}^{+2}16-8x^2+x^4\,dx=\pi\left[16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{+2}=2\pi\frac{256}{15}\approx 107{,}23$

b) Weil die y-Achse die Rotationsachse sein soll, müssen wir umstellen.

Es gilt: $y=f(x)=4-x^2 \Rightarrow x=\sqrt{4-y}$ für $y\in[0,4]$ .

Damit: $V=\pi\int_0^4(\sqrt{4-y})^2\,dy=\pi\int_0^4 4-y\,dy=\pi[4y-y^2/2]_0^4=8\pi$

c)

$$V=\pi\int_0^{3\pi/2}(1+\sin x)^2\,dx=\pi\int_0^{3\pi/2}1+2\sin x+\sin^2 x\,dx=\pi\left[x-2\cos x+\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)\right]_0^{3\pi/2}$$
$$=\pi\left[(\frac{3}{2}\pi-0+\frac{3}{4}\pi)-(0-2+0)\right]\approx 28.4898$$

**b.w.**

## 1.9. Numerische Integration. Anzahl der Teilintervalle sei NT.

a) Bogenlänge soll nicht analytisch berechnet werden, sondern numerisch.

$$f(x)=x(x-1)(x-3)=x^3-4x^2+3x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2-8x+3$$

$$L=\int_0^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^4 \sqrt{9x^4-48x^3+82x^2-48x+10}\,dx=\int_0^4 g(x)\,dx$$

mit $g(x)=\sqrt{9x^4-48x^3+82x^2-48x+10}$

NT = 4, h=1

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 3.1623 | 2.2361 | 1.4142 | 6.0828 | 19.0263 |

LTrapez4= 20.8273
LSimpson4= 19.4308

NT=8, h=1/2

| x | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 3.1623 | 1.0308 | 2.2361 | 2.4622 | 1.4142 | 2.0156 | 6.0828 | 11.7925 | 19.0263 |

LTrapez8= 19.0642
LSimpson8= 18.4765

Für große NT: L = 18.5588.
Beobachtung: Simpson-Formel geht erheblich schneller gegen den exakten Wert.

b) Bogenlänge soll nicht analytisch berechnet werden, sondern numerisch.

$$f(x)=\sin x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\cos x$$

$$L=\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx$$

mit $g(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$

NT=4, h=π/8 (Der Lesbarkeit halber Werte gerundet ...)

| x | 0 | 0.3927 | 0.7854 | 1.1781 | 1.5708 |
|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 1.4142 | 1.3615 | 1.2247 | 1.0707 | 1.0000 |

LTrapez4= 1.910098857692641
LSimpson4= 1.910141203060216

NT=8, h=π/16 (Der Lesbarkeit halber Werte gerundet ...)

| x | 0 | 0.1963 | 0.3927 | 0.5890 | 0.7854 | 0.9817 | 1.1781 | 1.3744 | 1.5708 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 1.4142 | 1.4007 | 1.3615 | 1.3005 | 1.2247 | 1.1440 | 1.0707 | 1.0189 | 1.0000 |

LTrapez8= 1.910098894513847
LSimpson8= 1.910098906787581

Beobachtung: Schon die erste grobe Näherung ist sehr gut!