Kap 2, p. 22

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})} = 1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n}\frac{n+1}{n+1} + \frac{B}{n+1}\frac{n}{n} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(A+B)n + A\cdot 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Koeffizientenvergl.

$$\Rightarrow A+B = 0 \quad \Rightarrow B = -A = -1$$

$$A = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \overbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}^{n=1} + \overbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^{n=2} + \overbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}^{n=3} + \overbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}^{n=4} + \dots$$

$$\underbrace{\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}}_{n=m-1} + \underbrace{\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}}_{n=m}$$

Nur die blauen bleiben übrig.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{m+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1$$

---

Kap 2, p. 24

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \dots$$

$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + \dots$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^1$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \qquad p = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{geometrische Reihe}$$

$\Rightarrow$ geometrische Reihe konvergiert

$\Rightarrow$ also auch die „kleinere" Reihe

Kap. 2, p. 25

harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

divergiert (vgl. Whiteboard vom 2024-04-23)

alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \mp$$

$$a_n = \frac{1}{n} > 0$$

$$\Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow$ Leibnitz-Kriterium erfüllt

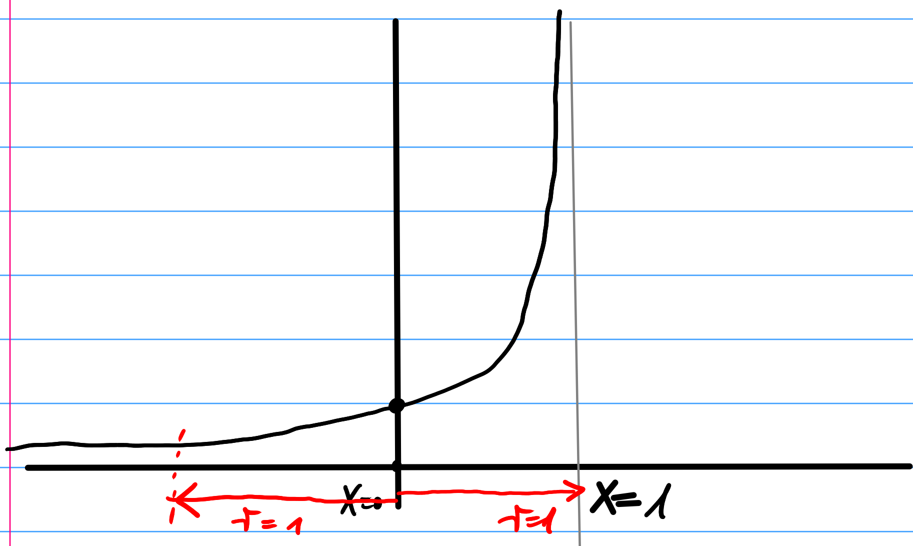
$\Rightarrow$ alternierende harmonische Reihe konvergiert.

Kap. 2, p. 28

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Rightarrow \quad b_n = 1 = b_{n+1} \Rightarrow \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \quad r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = 1$$




$$f(x) = e^x \Rightarrow T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{n!}}$$

$$\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

Erinnerung:

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\cdot(n-1)}_{(n-1)!}\,n &= n! \\ (n-1)! \cdot n &= n! \end{aligned}\right\} (n+1)! = n!(n+1)$$

Kap. 2, p. 28

$f(x) = \cos x \Rightarrow T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Formel f. Konvergenzradius <u>nicht</u> anwendbar, weil ungerade Potenzen fehlen!
$\Rightarrow$ Jedes 2. $b_n$ ist Null.
Bruch f. $r$ kann man gar nicht aufschreiben.

Trick: $t = x^2 \qquad x^{2n} = (x^2)^n = t^n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(2n)!}$ : alle Potenzen von $t$ vorhanden!

$\Rightarrow$ Jetzt können wir rechnen!

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} \Rightarrow b_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{1}{(2(n+1))!}$$

$$\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}$$

$$= \frac{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)}{\cancel{(2n)!}}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ " " auch für alle $x = \sqrt{t}$.

$\Rightarrow$ <u>" " !</u>

Kap. 2, p. 28

$$f(x) = \sin x \Rightarrow T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\Rightarrow$ Wieder $r$ nicht direkt berechenbar.

$t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}$

$$x^{2n+1} = x^{2n} \cdot x = (x^2)^n \cdot x = t^n \cdot \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n \sqrt{t}}{(2n+1)!}$$

$$= \sqrt{t} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(2n+1)!}}$$

$\Rightarrow$ wie zuvor bei cos ...

$\Rightarrow$ $r = \infty$ für $\sin x$ bzw seine Taylor-Reihe.

---

Matlab-Beispiele

$e^x$, $\sin x$, $\frac{1}{1-x}$, $\sqrt{1+x}$, $x^2 e^{-x}$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x) = +\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Vgl. mit Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \underline{e}_x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0$$

$$= a \quad \text{(die x-Komponente)}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\underline{e}_x + b\underline{e}_y + c\underline{e}_z$$

Vektor als Linearkombination der Basisvektoren

Hier: $\int f(x) \cos(nx)\, dx$

$$= \pi a_n$$

ist vergleichbar mit dem Skalarprodukt.

gibt Koeffizient für $\cos nx$
ähnlich für $\sin nx$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} 1 + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Linearkombination mit Basisvektoren in einem Funktionenvektorraum

PS: Nein. Das ist nicht klausurrelevant.