Kapitel 2, Übung 1: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 2, Seiten 1-29

2.1. Berechnen Sie das Taylor-Polynom zu folgenden Funktionen:

a) $f(x)=x^3$ bei $x_0=3$.

b) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ bei $x_0=0$.

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$ bei $x_0=0$.

d) $f(x)=\ln((1+x)^2)$ bei $x_0=0$.

e) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ bei $x_0=0$.

f) $f(x)=\sinh(x)$ bei $x_0=0$. (Sprich: Sinus hyperbolicus)

Hinweis: $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

g) $f(x)=\cosh(x)$ bei $x_0=0$. (Sprich: Cosinus hyperbolicus)

Hinweis: $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Hinweis zu f) und g): $(\sinh(x))'=\cosh(x)$ und $(\cosh(x))'=\sinh(x)$

2.2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Funktionen in Aufgabe 1.
Hinweis: Für das kubische Polynom gibt es nichts zu rechnen, nur zu überlegen.

2.3. Für die Funktionen in Aufgabe 1, wie groß wird der Betrag des Restglieds der Ordnung 4 höchstens im Intervall $[x_0-1/2, x_0+1/2]$?
Hinweis: Dies braucht man für Fehlerabschätzungen. Wenn ein Term 4.Ordnung nicht vorhanden ist, wie verfährt man dann sinnvollerweise?

2.4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Einmal mit der Regel von l'Hospital und einmal mit einer Reihenentwicklung.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{e^x-1-x-x^2/2}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4}-1}{(1-\cos(x))^2}$

Kapitel 2, Übung 1: Lösungen

2.1. Die Formel zur Berechnung eines Taylor-Polynoms am Entwicklungspunkt x_0 lautet:

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (*)$$

Es gibt wirklich viel zu tun ...

a)

$f(x)=x^3$ bei $x_0=3$. Es ist $f(x_0)=f(3)=27$.

Aufstellen der Ableitungen und berechnen der Funktionwerte bei x_0:

$f^{(1)}(x)=3x^2 \quad f^{(1)}(3)=27$
$f^{(2)}(x)=6x \quad f^{(2)}(3)=18$
$f^{(3)}(x)=6 \quad f^{(3)}(3)=6$
$f^{(4)}(x)=0 \quad f^{(4)}(3)=0$

Alle weiteren Ableitungen sind ebenfalls 0. Einsetzen in $(*)$:

$$T(x)=\frac{f^{(0)}(3)}{0!}(x-3)^0+\frac{f^{(1)}(3)}{1!}(x-3)^1+\frac{f^{(2)}(3)}{2!}(x-3)^2+\frac{f^{(3)}(3)}{3!}(x-3)^3$$

$$T(x)=27+27(x-3)+9(x-3)^2+1(x-3)^3$$
$$=27+27(x-3)+9(x-3)^2+(x-3)^3$$

Dies ist also eine sehr komplizierte Art, x^3 zu schreiben (mal alles ausmultiplizieren und zusammenfassen). Das Taylor-Polynom ist hier exakt die Funktion selbst.

b)

$f(x)=\frac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}$ bei $x_0=0$. Es ist $f(x_0)=f(0)=1$.

Aufstellen der Ableitungen und berechnen der Funktionwerte bei x_0:

$f^{(1)}(x)= -1(x+1)^{-2} \quad f^{(1)}(0)=-1$
$f^{(2)}(x)= (-1)\cdot(-2)(x+1)^{-3}= 1\cdot 2(x+1)^{-3} \quad f^{(2)}(0)=2$
$f^{(3)}(x)= 1\cdot 2\cdot(-3)(x+1)^{-4}= -1\cdot 2\cdot 3(x+1)^{-4} \quad f^{(3)}(0)=-6$
$f^{(4)}(x)=-1\cdot 2\cdot 3\cdot(-4)(x+1)^{-5}= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(x+1)^{-5} \quad f^{(4)}(0)=24$
$f^{(5)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot(-5)(x+1)^{-6}=-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(x+1)^{-6} \quad f^{(5)}(0)=-120$

Einsetzen in $(*)$:

$$T(x)=1x^0-\frac{1}{1!}x^1+\frac{2}{2!}x^2-\frac{6}{3!}x^3+\frac{24}{4!}x^4-\frac{120}{5!}x^5\pm\ldots$$
$$=1-x^1+x^2-x^3+x^4-x^5\pm\ldots = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^i$$

Erinnerung an ein Beispiel aus der Vorlesung: Für Potenzfunktionen der Form $(1+x)^m$, lässt sich auch für nicht ganzzahlige m die Taylorreihe als Binomialreihe formulieren. Hier also für $m=-1$:

$$T(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{-1}{i}x^i=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\pm\ldots$$

Erinnerung Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots\cdot k}$

c)

$f(x)=\sqrt{x+1}=(x+1)^{1/2}$ bei $x_0=0$. Es ist $f(x_0)=f(0)=1$.

Aufstellen der Ableitungen und erechnen der Funktionwerte bei x_0:

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \qquad f^{(1)}(0)=\frac{1}{2}$$
$$f^{(2)}(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} \qquad f^{(2)}(0)=-\frac{1}{4}$$
$$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(x+1)^{-5/2} \qquad f^{(3)}(0)=\frac{3}{8}$$
$$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2} \qquad f^{(4)}(0)=-\frac{15}{16}$$
$$f^{(5)}(x)=\frac{105}{32}(x+1)^{-9/2} \qquad f^{(5)}(0)=\frac{105}{32}$$

Einsetzen in $(*)$:

$$T(x)=1x^0+\frac{1}{2\cdot 1!}x^1-\frac{1}{4\cdot 2!}x^2+\frac{3}{8\cdot 3!}x^3-\frac{15}{16\cdot 4!}x^4+\frac{105}{32\cdot 5!}x^5\mp\ldots$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5\mp\ldots$$

Auch hier ist die Bildung über den Binomialansatz möglich:

$$T(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{1/2}{i}x^i=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5\mp\ldots$$

d)

$f(x)=\ln((1+x)^2)$ bei $x_0=0$. Es ist $f(x_0)=f(0)=0$.

Es ist $f(x)=\ln((1+x)^2)=2\ln(1+x)$.
Die Taylor-Reihe für $\ln(1+x)$ hatten wir in der Vorlesung. Damit:

$$T(x)=2\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}x^i=2x-\frac{2}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{4}x^4+\frac{2}{5}x^5\mp\ldots$$

Wenn man gerade die Vorlesungsmitschrift nicht zur Hand hat, geht's auch direkt.
Aufstellen der Ableitungen und berechnen der Funktionwerte bei x_0:

$$f^{(1)}(x)=\frac{2}{1+x}=2(1+x)^{-1} \qquad f^{(1)}(0)=2$$
$$f^{(2)}(x)=-2(x+1)^{-2} \qquad f^{(2)}(0)=-2$$
$$f^{(3)}(x)=4(x+1)^{-3} \qquad f^{(3)}(0)=4$$
$$f^{(4)}(x)=-12(x+1)^{-4} \qquad f^{(4)}(0)=-12$$
$$f^{(5)}(x)=48(x+1)^{-5} \qquad f^{(5)}(0)=48$$

Einsetzen in $(*)$:

$$T(x)=0+\frac{2}{1!}x^1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3-\frac{12}{4!}x^4+\frac{48}{5!}x^5\mp\ldots$$
$$=2x-x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{4}x^4+\frac{2}{5}x^5\mp\ldots$$

e) Gesucht ist das Taylor-Polynom zu $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ bei $x_0=0$.

Erster Weg:

Man formt um: $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=g(x)-h(x)$.

Wie in der Vorlesung das Taylor-Polynom für $g(x)=\ln(1+x)$ bei $x_0=0$:

$g(x)=\ln(1+x)$ $\quad g(0)=\ln(1)=0$

$g^{(1)}(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$ $\quad g^{(1)}(0)=1$

$g^{(2)}(x)=(-1)(1+x)^{-2}=(-1)^1 1(1+x)^{-2}$ $\quad g^{(2)}(0)=-1$

$g^{(3)}(x)=(-1)(-2)(1+x)^{-3}=(-1)^2 1\cdot 2(1+x)^{-3}$ $\quad g^{(3)}(0)=2$

$g^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}=(-1)^3 1\cdot 2\cdot 3(1+x)^{-4}$ $\quad g^{(4)}(0)=-6$

Und damit für die k-te Ableitung für $k\ge 1$:

$g^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$ $\quad g^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$

Damit das Taylor-Poynon $G_n(x)$ für $g(x)$ bei $x_0=0$ (wieder einmal $k!=(k-1)!\cdot k$):

$$G_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(k-1)!\cdot k}x^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

Jetzt das Ganze für $h(x)=\ln(1-x)$. Alles, was sich ändert, ist, dass von der inneren Ableitung jedesmal ein Faktor -1 hinzukommt.

$h(x)=\ln(1-x)$ $\quad h(0)=\ln(1)=0$

$h^{(1)}(x)=\frac{1}{1-x}\cdot(-1)=(1-x)^{-1}\cdot(-1)=-(1+x)^{-1}$

$h^{(2)}(x)=(-1)(1-x)^{-2}\cdot(-1)^2=(-1)^1 1(1-x)^{-2}\cdot(-1)^2=-(1+x)^{-2}$

$h^{(3)}(x)=(-1)(-2)(1-x)^{-3}\cdot(-1)^3=(-1)^2 1\cdot 2(1-x)^{-3}\cdot(-1)^3=-1\cdot 2(1+x)^{-3}$

$h^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)(1-x)^{-4}\cdot(-1)^4=(-1)^3 1\cdot 2\cdot 3(1-x)^{-4}\cdot(-1)^4=-1\cdot 2\cdot 3(1+x)^{-4}$

M.a.W., alle Ableitungen sind negativ. Und damit gilt für die k-te Ableitung für $k\ge 1$:

$h^{(k)}(x)=(-1)(k-1)!(1-x)^{-k}$ $\quad h^{(k)}(0)=(-1)(k-1)!$

Hier die ersten vier Werte: $h^{(1)}(0)=-1$ $\quad h^{(2)}(0)=-1$ $\quad h^{(3)}(0)=-2$ $\quad h^{(4)}(0)=-6$

Damit das Taylor-Poynon $H_n(x)$ für $h(x)$ bei $x_0=0$ (wieder einmal $k!=(k-1)!\cdot k$):

$$H_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)(k-1)!}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{n}-\frac{1}{k}x^k$$

Für das Taylor-Polynom $T_n(x)$ für die Funktion $f(x)=g(x)-h(x)$ folgt dann:

$$T_n(x)=G_n(x)-H_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k-\sum_{k=1}^{n}-\frac{1}{k}x^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}+1}{k}x^k$$

Zähler des Bruchs $(-1)^{k-1}+1$:

k ungerade $\Rightarrow$ k-1 gerade. Dann ist $(-1)^{k-1}=1$ und der Zähler des Bruches ist 2.

k gerade $\Rightarrow$ k-1 ungerade. Dann ist $(-1)^{k-1}=-1$ und der Zähler des Bruches ist 0.

M.a.W., alle Terme mit geradem k verschwinden und alle Terme mit ungeradem k haben eine 2 im Zähler. Ungerade $k\ge 1$ schreibt man als $k=2i+1$ für $i=0,1,2,3,\ldots$

Zusammen: $T_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{2i+1}x^{2i+1}=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\ldots$

Zweiter Weg.

$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ bei $x_0=0.$

Aufstellen der Ableitungen und berechnen der Funktionwerte bei x_0:

$$f^{(1)}(x)=\underbrace{\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}}_{\text{innere Ableitung}}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{2}{1-x^2}=2(1-x^2)^{-1}$$

$f^{(1)}(0)=2$

$$f^{(2)}(x)=\underbrace{2\cdot(-1)(1-x^2)^{-2}}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{(-2x)}_{\text{innere Ableitung}}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$f^{(2)}(0)=0$

$$f^{(3)}(x)=\frac{4\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot\left(2(1-x^2)\cdot(-2x)\right)}{(1-x^2)^4}=\frac{4\cdot(1-x^2)-4x\cdot\left(2\cdot(-2x)\right)}{(1-x^2)^3}$$

$$=\frac{4-4x^2+16x^2}{(1-x^2)^3}=\frac{4+12x^2}{(1-x^2)^3}$$

$f^{(3)}(0)=4$

$$f^{(4)}(x)=\frac{24x\cdot(1-x^2)^3-(4+12x^2)\cdot 3(1-x^2)^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^6}$$

$$=\frac{24x\cdot(1-x^2)-(4+12x^2)\cdot 3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{24x-48x^3+24x+72x^3}{(1-x^2)^4}=\frac{48x+48x^3}{(1-x^2)^4}$$

$f^{(4)}(0)=0$

$$f^{(5)}(x)=\frac{(48+144x^2)\cdot(1-x^2)^4-(48x+48x^3)\cdot 4(1-x^2)^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^8}$$

$$=\frac{(48+144x^2)\cdot(1-x^2)-(48x+48x^3)\cdot 4\cdot(-2x)}{(1-x^2)^5}$$

$$=\frac{48+144x^2-48x^2-144x^4+384x^2+384x^4}{(1-x^2)^5}=\frac{48+480x^2+240x^4}{(1-x^2)^5}$$

$f^{(5)}(0)=48$

Einsetzen in $(*)$:

$$T(x)=0+\frac{2}{1!}x^1+\frac{0}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{48}{5!}x^5+\ldots=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\ldots$$

Die Formel für die allgemeine Reihe muss man sich nun daraus überlegen, was schwieriger ist, weil man die allg. Formel für die n-te Ableitung nicht hat.

Wiederum folgt:

$$T(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{2i+1}x^{2i+1}$$

f) Gesucht ist das Taylor-Polynom zu $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ bei $x_0 = 0$.

Erster Weg wie bei Aufgabe 2.1e: Man nimmt das Taylor-Polynom für e^x , berechnet analog das Taylor-Polynom für e^{-x} und zieht die beiden Taylor-Polynome voneinander ab. Hier ist der zweite Weg aber nicht so mühsam wie bei 2.1e:

$f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ bei $x_0 = 0$. Es ist $f(0) = 0$

Aufstellen der Ableitungen und berechnen der Funktionwerte bei x_0:

$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ $f^{(1)}(0) = 1$

$f^{(2)}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ $f^{(2)}(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ $f^{(3)}(0) = 1$

$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ $f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ $f^{(5)}(0) = 1$ usw.

M.a.W., alle geraden Ableitungen sind Null, die ungeraden sind 1.

Einsetzen in $(*)$:

$$T(x) = 0x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + 0x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots$$

Im Taylor-Polynom stehen deshalb nur Potenzen x^k mit ungeraden Werten von k.
Ungerade $k \geq 1$ kann man schreiben als $k = 2i+1$ für $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$
Damit lässt sich das Taylor-Polynom auch aufschreiben als:

$T(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$ ist Taylor-Polynom zu $f(x) = \sinh(x)$.

g) Gesucht ist das Taylor-Polynom zu $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ bei $x_0 = 0$.

Ganz analog zu 2.1f: Erster Weg aus Summe der Taylor-Polynome für e^x und e^{-x} .
Zweiter Weg auch ganz analog, nur dass diesmal die geraden Ableitungen 1 sind und die ungeraden Ableitungen 0 sind.

$f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ bei $x_0 = 0$. Es ist $f(0) = 1$.

Aufstellen der Ableitungen und berechnen der Funktionwerte bei x_0:

$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ $f^{(1)}(0) = 0$

$f^{(2)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ $f^{(2)}(0) = 1$

$f^{(3)}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ $f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ $f^{(4)}(0) = 1$

$f^{(5)}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ $f^{(5)}(0) = 0$

Einsetzen in $(*)$:

$$T(x)=1x^0+0x^1+\frac{1}{2!}x^2+0x^3+\frac{1}{4!}x^4+0x^5+...=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+...$$

Im Taylor-Polynom stehen deshalb nur Potenzen x^k mit geraden Werten von k.
Gerade $k\geq 0$ kann man schreiben als $k=2i$ für $i=0,1,2,3,...$
Damit lässt sich das Taylor-Polynom auch aufschreiben als:

$$T(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{2i}}{(2i)!}$$ ist Taylor-Polynom zu $f(x)=\cosh(x)$.

2.2. Formel und Bezeichnungen siehe **Kap.2, S. 27**.

a)

$$f(x)=x^3 \quad \text{bei } x_0=3. \quad \Rightarrow \quad T(x)=27+27(x-3)+9(x-3)^2+(x-3)^3$$

Ausmultiplizieren führt zu:

$$T(x)=27+27x-27\cdot 3+9(x^2-6x+9)+x^3-9x^2+27x-27$$
$$=27+27x-81+9x^2-54x+81+x^3-9x^2+27x-27=x^3$$

D.h., das Polynom ist identisch zu x^3. Die Reihe bricht ab! D.h., das Polynom gültig für alle $x\in\mathbb{R}$. Also ist der „Konvergenzradius“ gleich ∞.

b)

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad \text{bei } x_0=0. \quad \Rightarrow \quad T(x)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(-1)^i}_{b_i}x^i$$

Also:

$$r=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{b_i}{b_{i+1}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{(-1)^i}{(-1)^{i+1}}\right|=\left|\frac{1}{-1^1}\right|=1$$

Der Konvergenradius ist $r=1$. Also konvergiert die Reihe im Bereich $-1<x<1$.

c)

$$f(x)=\sqrt{x+1} \quad \text{bei } x_0=0. \quad \Rightarrow \quad T(x)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\binom{1/2}{i}}_{b_i}x^i$$

mit $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2).....(n-k+1)}{1\cdot 2......\cdot k}$. Also folgt mit $n=\frac{1}{2}$ und $k=i$ bzw. $k=i+1$:

$$r=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{b_i}{b_{i+1}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right).....\left(\frac{1}{2}-i+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3............\cdot i}}{\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right).....\left(\frac{1}{2}-i+1\right)\left(\frac{1}{2}-(i+1)+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3.....\cdot i\cdot(i+1)}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{i+1}{\frac{1}{2}-i}\right|$$

$$=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{i\left(1+\frac{1}{i}\right)}{i\left(\frac{1}{2i}-1\right)}\right|=\left|\frac{1}{-1}\right|=1$$

Der Konvergenradius ist $r=1$. Also konvergiert die Reihe im Bereich $-1<x<1$.

d)

$$f(x)=\ln\left((1+x)^2\right) \quad \text{bei } x_0=0. \quad \Rightarrow \quad T(x)=2\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{(-1)^{i-1}}{i}}_{b_i}x^i$$

Also:

$$r=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{b_i}{b_{i+1}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{i-1}}{i}}{\frac{(-1)^{i+1-1}}{i+1}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{(-1)^{i-1}(i+1)}{(-1)^i(i)}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{(-1)^{-1}(i+1)}{(i)}\right|$$

$$=\lim_{i\to\infty}\left|-1-\frac{1}{i}\right|=|-1-0|=1$$

Der Konvergenradius ist $r=1$. Also konvergiert die Reihe im Bereich $-1<x<1$.

e)

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{bei } x_0=0. \quad \Rightarrow \quad T(x)=2\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{2i+1}}_{b_i}x^{2i+1}$$

Also:

$$r=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{b_i}{b_{i+1}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2i+1}}{\frac{1}{2(i+1)+1}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{2(i+1)+1}{2i+1}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{i\left(2+\frac{3}{i}\right)}{i\left(2+\frac{1}{i}\right)}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{2+\frac{3}{i}}{2+\frac{1}{i}}\right|=\left|\frac{2}{2}\right|=1$$

Der Konvergenradius ist $r=1$. Also konvergiert die Reihe im Bereich $-1<x<1$.

f)

$$f(x)=\sinh(x) \quad \text{bei } x_0=0. \quad \Rightarrow \quad T(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}=\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{(2i+1)!}}_{b_i}x^{2i+1}$$

Also:

$$r=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{b_i}{b_{i+1}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2i+1)!}}{\frac{1}{(2(i+1)+1)!}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{(2(i+1)+1)!}{(2i+1)!}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{(2i+3)!}{(2i+1)!}\right|$$

$$=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{(2i+1)!(2i+2)(2i+3)}{(2i+1)!}\right|=\lim_{i\to\infty}|(2i+2)(2i+3)|=\infty$$

Der Konvergenradius ist $r=\infty$. Also konvergiert die Reihe in ganz $\mathbb{R}$.

g)

$$f(x)=\cosh(x) \quad \text{bei } x_0=0. \quad \Rightarrow \quad T(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{2i}}{(2i)!}=\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{(2i)!}}_{b_i}x^{2i}$$

Also:

$$r=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{b_i}{b_{i+1}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2i)!}}{\frac{1}{(2(i+1))!}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{(2i+2)!}{(2i)!}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{(2i)!\cdot(2i+1)\cdot(2i+2)}{(2i)!}\right|$$

$$=\lim_{i\to\infty}|(2i+1)\cdot(2i+2)|=\infty$$

Der Konvergenradius ist $r=\infty$. Also konvergiert die Reihe in ganz $\mathbb{R}$.

2.3. Formel und Bezeichnungen siehe **Kap.2, S. 6**.

a) Siehe 2.2a. Das Taylorpolynom ist exakt und besitzt kein Restglied 4.Ordnung oder höher! Das Restglied ist also null.

b)

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad \text{bei } x_0=0. \quad \Rightarrow \quad T(x)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i x^i$$

Das Taylorpolynom mit Restglied 4. Ordnung lautet:

$$T(x)= T(x)=1x^0-\frac{1}{1!}x^1+\frac{2}{2!}x^2-\frac{6}{3!}x^3+\underbrace{\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4}_{\text{Restglied}}$$

Das Restglied $\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4$ soll nun abgeschätzt werden im Intervall $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$.

Mit $f^{(4)}(x)=4!(x+1)^{-5}$ (s. 2.1b) ist für ein unbekanntes, beliebiges z aus dem Intervall :

$$\frac{f^{(4)}(z)}{4!}=\frac{4!(z+1)^{-5}}{4!}=(z+1)^{-5}=\frac{1}{(z+1)^5}=:g(z)$$

Es wird ein Wert z im Intervall gesucht, der den Fehler maximiert.

$|g(z)|$ wird maximal, wenn der Nenner minimal wird, also für $z=-\frac{1}{2}$.

$$|g(-1/2)|=\frac{1}{(1/2)^5}=32$$

Anschließend muss berechnet werden, wie groß das Restglied insgesamt maximal werden kann, wenn ein vom Entwicklungspunkt abweichender Wert x in diesen Term des Taylorpolynoms eingesetzt wird. Dieser Term wird maximal für den größtmöglichen Wert von x im Intervall, also $x=1/2 \quad \Rightarrow \quad |x^4|=|(1/2)^4|=\frac{1}{16}$

Zusammen: $max\left|f^{(4)}\frac{(z)}{4!}x^4\right|=\frac{32}{16}=2$

Diese Abschätzung ist sehr grob. Sie bedeutet, dass man potentiell einen großen Fehler macht, wenn man Terme 4.Ordnung vernachlässigt. Dann besser Funktion und Taylor-Polynom plotten und vergleichen

c)

$f(x)=\sqrt{x+1}$ bei $x_0=0$. $\Rightarrow$ $T(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{1/2}{i}x^i=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4\pm\ldots$

Das Taylorpolynom mit Restglied 4. Ordnung lautet damit:

$$T(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\underbrace{\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4}_{\text{Restglied}}$$

Das Restglied $\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4$ soll nun abgeschätzt werden im Intervall $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$.

Mit $f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2}$ (s. 2.1c) ist für ein unbekanntes, beliebiges z aus dem Intervall:

$$\frac{f^{(4)}(z)}{4!}=\frac{-\frac{15}{16}(z+1)^{-7/2}}{4!}=-\frac{15}{16\cdot(4!)}\frac{1}{(z+1)^{7/2}}=-\frac{3\cdot 5}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{1}{(z+1)^{7/2}}=-\frac{5}{2^7}\frac{1}{(z+1)^{7/2}}$$

Es wird ein Wert z im Intervall gesucht, der den Fehler maximiert.

$\frac{f^{(4)}(z)}{4!}$ wird maximal, wenn der Nenner minimal wird, also für $z=-\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{f^{(4)}(-1/2)}{4!}\right|=\frac{5}{2^7}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{7/2}}=5\cdot 2^{-7}\cdot 2^{7/2}=5\cdot 2^{-7+7/2}=5\cdot 2^{-7/2}=\frac{5}{\sqrt{2^7}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2^4}=\frac{5\sqrt{2}}{16}$$

Der Term x^4 wird maximal für den größen Wert im Intervall, also $x=1/2$. Zusammen :

$$max\left|\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4\right|=\frac{5\sqrt{2}}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{1}{16}=\frac{5\sqrt{2}}{256}\approx 0{,}0276$$

Der maximale Fehler beim Vernachlässigen von Termen 4.Ordnung ist also schon klein.

b.w.

d)

$f(x)=\ln((1+x)^2)$ bei $x_0=0$. $\Rightarrow$ $T(x)=2\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}x^i=2x-\frac{2}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{4}x^4\pm...$

Das Taylorpolynom mit Restglied 4. Ordnung lautet damit:

$$T(x)=2x-\frac{2}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\underbrace{\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4}_{\text{Restglied}}$$

Das Restglied $\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4$ soll nun abgeschätzt werden im Intervall $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$.

Mit $f^{(4)}(x)=-12(x+1)^{-4}$ (s. 2.1d) ist für ein unbekanntes, beliebiges z aus dem Intervall:

$$\frac{f^{(4)}(z)}{4!}=\frac{-12(z+1)^{-4}}{4!}=-\frac{1}{2}(z+1)^{-4}$$

Es wird ein Wert z im Intervall gesucht, der den Fehler maximiert.

$\frac{f^{(4)}(z)}{4!}$ wird maximal, wenn der Nenner minimal wird, also für $z=-\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{f^{(4)}(-1/2)}{4!}\right|=\frac{1}{2}(1/2)^{-4}=\frac{1}{2}2^4=8$$

Der Term x^4 wird maximal für den größen Wert im Intervall, also $x=1/2$. Zusammen :

$$max\left|\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4\right|=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

Der maximale Fehler beim Vernachlässigen von Termen 4.Ordnung ist also nicht wirklich klein.

e)

$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ bei $x_0=0$. $\Rightarrow$ $T_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{2i+1}x^{2i+1}=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+...$

Das Taylorpolynom hat nur ungerade Potenzen. Ein Restglied 4. Ordnung gibt es nicht! Also nehmen wir das nächste, was kommt, also 5.Ordnung. Wir erhalten:

$$T(x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\underbrace{\frac{f^{(5)}(z)}{5!}x^5}_{\text{Restglied}}$$

Das Restglied $\frac{f^{(5)}(z)}{5!}x^5$ soll nun abgeschätzt werden im Intervall $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$.

Die 5.Ableitung an der Stelle z kann man sich entweder aus der Zerlegung

$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ verschaffen ("Erster Weg", ohne Rechnung):

$$f^{(5)}(z)=1\cdot2\cdot3\cdot4\left(\frac{1}{(z+1)^5}+\frac{1}{(z-1)^5}\right)$$

Oder man nimmt das direkte Ergebnis aus dem "Zweiten Weg":

$$f^{(5)}(z)=\frac{48+480z^2+240z^4}{(1-z^2)^5}$$

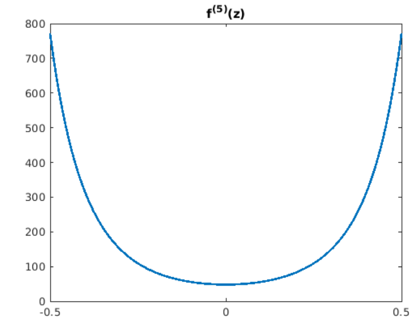
Für die Abschätzung nehmen wir nun eine praktische Abkürzung: Wir plotten $f^{(5)}(z)$.

b.w.

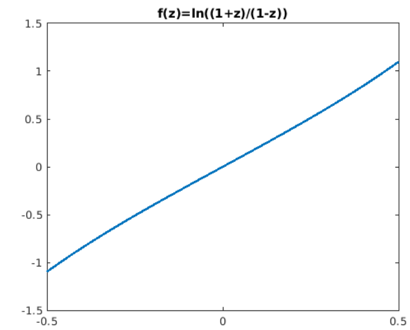
Die maximalen Werte liegen an den Rändern vor.
Es ist $f^{(5)}(1/2) \approx 771.1605 < 772$
Der Term x^5 wird maximal für den größen Wert im Intervall, also $x=1/2$. Zusammen :

$$max\left|\frac{f^{(5)}(z)}{5!}x^5\right|=\frac{772}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{772}{120}\cdot\frac{1}{32}=0{,}201$$

Der maximale Fehler beim Vernachlässigen von Termen 5.Ordnung aus dieser Abschätzung ist also nicht wirklich klein.

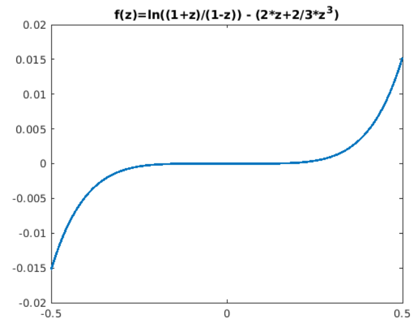


Wie sieht f(x) eigentlich aus? So:



Und die tatsächliche Differenz zw. Funktion

und Taylor-Polynom (2 Terme!) ist nur so groß:



Die obige Abschätzung ist also sehr pessimistisch. Die eigentliche Approximation ist besser.

f)

$$f(x)=\sinh(x) \quad \text{bei } x_0=0. \quad \Rightarrow \quad T(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\ldots$$

Das Taylorpolynom hat nur ungerade Potenzen. Ein Restglied 4. Ordnung gibt es nicht! Also nehmen wir das nächste, was kommt, also 5.Ordnung. Wir erhalten:

$$T(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\underbrace{\frac{f^{(5)}(z)}{5!}x^5}_{\text{Restglied}}$$

Das Restglied $\frac{f^{(5)}(z)}{5!}x^5$ soll nun abgeschätzt werden im Intervall $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$.

Die 5.Ableitung an der Stelle z steht in Aufg. 2.1f: $f^{(5)}(z)=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=\cosh(z)$

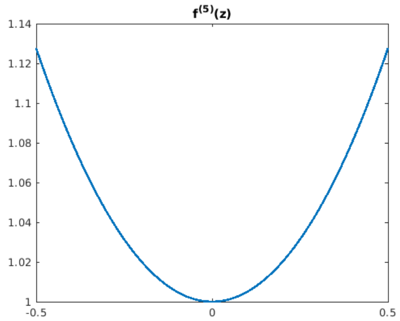
Auch hier bestimmen wir das Maximum aus einem Plot.

b.w.

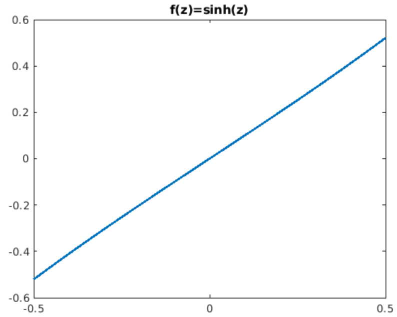
Die maximalen Werte liegen an den Rändern vor.
Es ist $f^{(5)}(1/2)\ \approx\ 1{,}1276\ <\ 1{,}13$
Der Term x^5 wird maximal für den größen Wert im Intervall, also $x=1/2$. Zusammen :

$$max\left|\frac{f^{(5)}(z)}{5!}x^5\right|=\frac{1{,}13}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1{,}13}{120}\cdot\frac{1}{32}=0{,}000294$$

Der maximale Fehler beim Vernachlässigen von Termen 5.Ordnung aus dieser Abschätzung ist also wirklich klein.

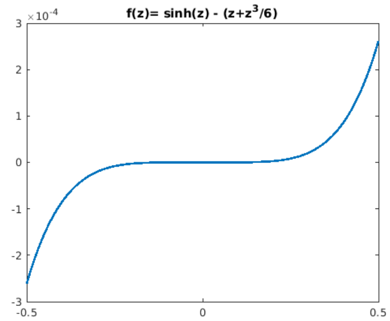


Wie sieht f(x) eigentlich aus? So:



Und die tatsächliche Differenz zw. Funktion

und Taylor-Polynom (2 Terme!) ist nur so groß:



Man beachte die Achsenskalierung: 10^{-4} ! In diesem Fall ist unsere Abschätzung also **sehr gut** !

g)

$$f(x)=\cosh(x)\quad \text{bei } x_0=0. \quad\Rightarrow\quad T(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{2i}}{(2i)!}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots$$

Hier gibt es wieder eine 4. Ordnung. Das Taylorpolynom mit Restglied 4. Ordnung lautet damit:

$$T(x)=1+\frac{x^2}{2}+\underbrace{\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4}_{\text{Restglied}}$$

Das Restglied $\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4$ soll nun abgeschätzt werden im Intervall $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$.

Mit $f^{(4)}(x)=\cosh(x)$ (s. 2.1g) ist für ein unbekanntes, belibiges z aus dem Intervall:

$$\frac{f^{(4)}(z)}{4!}=\frac{\cosh(z)}{4!}$$

Auch hier bestimmen wir das Maximum aus einem Plot von $f^{(4)}(z)$. Tatsächlich ist es der gleiche Plot wie für $f^{(5)}(z)=\cosh(z)$ in Aufgabe 2.3f ! Auch hier ist deshalb das Maximum $f^{(4)}(1/2)\ \approx\ 1{,}1276\ <\ 1{,}13$

Der Term x^4 wird maximal für den größen Wert im Intervall, also $x=1/2$.

Zusammen :

$$max\left|\frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4\right|=\frac{1{,}13}{4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1{,}13}{24}\cdot\frac{1}{16}=0{,}0029$$

Der maximale Fehler beim Vernachlässigen von Termen 4.Ordnung aus dieser Abschätzung ist also auch noch recht klein bei Funktionswerten von ≥ 1.

2.4.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{e^x-1-x-x^2/2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Regel von l'Hospital: Falls $\lim_{x\to 0} f(x)=0=\lim_{x\to 0} g(x)$, dann ist

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, wenn der Limes existiert. Es ist

$f'(x)=1-\cos(x)$

$g'(x)=e^x-1-x$

Da aber $\lim_{x\to 0} f'(x)=0=\lim_{x\to 0} g'(x)$ $(*)$, ist $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ so nicht berechenbar.

Wegen $(*)$ kann aber l'Hospital erneut angewandt werden mit

$f''(x)=\sin(x)$

$g''(x)=e^x-1$

Da aber $\lim_{x\to 0} f''(x)=0=\lim_{x\to 0} g''(x)$ $(*)$, ist $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ so nicht berechenbar.

Wegen $(*)$ kann aber l'Hospital erneut angewandt werden mit

$f'''(x)=\cos(x)$

$g'''(x)=e^x$

Damit ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{e^x}=\frac{1}{1}=1$$

Die Bestimmung des Grenzwertes mithilfe der Taylor-Reihen kann hier angewandt werden, wenn die Taylor-Reihe für die Grenzstelle, hier $x_0=0$, aufgestellt wurde, da sie die jeweilige Funktion genau an diesem Entwicklungspunkt approximieren.

Es werden eben komplizierte Terme durch einige wenige Terme ihrer Taylor-Reihe ersetzt.

$$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3 \quad , \quad e^x\approx 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3$$

Eingesetzt in den Limes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{e^x-1-x-x^2/2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3\right)}{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3-1-x-\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}x^3}{\frac{1}{3!}x^3}=\frac{1}{1}=1$$

b.w.

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Regel von l'Hospital: Falls $\lim_{x\to 0} f(x)=0=\lim_{x\to 0} g(x)$, dann ist

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, wenn der Limes existiert. Es ist

$$f'(x)=3x^2\sin(x)+x^3\cos(x)$$
$$g'(x)=2(1-\cos(x))\sin(x)$$

Da aber $\lim_{x\to 0} f'(x)=0=\lim_{x\to 0} g'(x)$ $(*)$, ist $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ so nicht berechenbar.

Wegen $(*)$ kann aber l'Hospital erneut angewandt werden mit

$$f''(x)=6x\sin(x)+3x^2\cos(x)+3x^2\cos(x)-x^3\sin(x)=6x\sin(x)+6x^2\cos(x)-x^3\sin(x)$$
$$g''(x)=2\sin(x)\sin(x)+2(1-\cos(x))\cos(x)=2\sin^2(x)+2\cos(x)-2\cos^2(x)$$

Da aber $\lim_{x\to 0} f''(x)=0=\lim_{x\to 0} g''(x)$ $(*)$, ist $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ so nicht berechenbar.

Wegen $(*)$ kann aber l'Hospital erneut angewandt werden mit

$$\begin{aligned}f'''(x)&=6\sin(x)+6x\cos(x)+12x\cos(x)-6x^2\sin(x)-3x^2\sin(x)-x^3\cos(x)\\&=6\sin(x)+18x\cos(x)-9x^2\sin(x)-x^3\cos(x)\end{aligned}$$
$$g'''(x)=4\sin(x)\cos(x)-2\sin(x)+4\cos(x)\sin(x)=-2\sin(x)+8\sin(x)\cos(x)$$

Da aber $\lim_{x\to 0} f'''(x)=0=\lim_{x\to 0} g'''(x)$ $(*)$, ist $\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}$ so nicht berechenbar.

Wegen $(*)$ kann aber l'Hospital erneut angewandt werden mit

$$\begin{aligned}f^{(4)}(x)&=6\cos(x)+18\cos(x)-18x\sin(x)-18x\sin(x)-9x^2\cos(x)-3x^2\cos(x)+x^3\sin(x)\\&=24\cos(x)-36x\sin(x)-12x^2\cos(x)+x^3\sin(x)\end{aligned}$$
$$g^{(4)}(x)=-2\cos(x)+8\cos^2(x)-8\sin^2(x)$$

Damit ergibt sich (endlich):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{g^{(4)}(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{24\cos(x)-36x\sin(x)-12x^2\cos(x)+x^3\sin(x)}{-2\cos(x)+8\cos^2(x)-8\sin^2(x)}=\frac{24}{-2+8}=4\end{aligned}$$

Die Regel von l'Hospital macht in diesem Fall also richtig Stress.

Die Bestimmung des Grenzwertes mithilfe der Taylor-Reihen kann hier angewandt werden, wenn die Taylor-Reihe für die Grenzstelle, hier $x_0=0$, aufgestellt wurde, da sie die jeweilige Funktion genau an diesem Entwicklungspunkt approximieren.
Es werden eben komplizierte Terme durch einige wenige Terme ihrer Taylor-Reihe ersetzt.

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}\quad,\quad \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$$

Eingesetzt in den Limes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)}{\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{3!}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4}-1}{(1-\cos(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Regel von l'Hospital: Falls $\lim_{x\to 0} f(x)=0=\lim_{x\to 0} g(x)$, dann ist

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, wenn der Limes existiert. Es ist

$f'(x)=e^{x^4}\cdot 4x^3$ und $g'(x)=2(1-\cos(x))\sin(x)$

Da aber $\lim_{x\to 0} f'(x)=0=\lim_{x\to 0} g'(x)$ $(*)$, ist $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ so nicht berechenbar.

Wegen $(*)$ kann aber l'Hospital erneut angewandt werden mit

$f''(x)=(e^{x^4}\cdot 4x^3)\cdot 4x^3+e^{x^4}\cdot 12x^2=e^{x^4}(16x^6+12x^2)$

$g''(x)=2\sin(x)\sin(x)+2(1-\cos(x))\cos(x)=2\sin^2(x)+2\cos(x)-2\cos^2(x)$

Da aber $\lim_{x\to 0} f''(x)=0=\lim_{x\to 0} g''(x)$ $(*)$, ist $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ so nicht berechenbar.

Wegen $(*)$ kann aber l'Hospital erneut angewandt werden mit

$f'''(x)=(e^{x^4}\cdot 4x^3)(16x^6+12x^2)+e^{x^4}(96x^5+24x)=e^{x^4}(64x^9+144x^5+24x)$

$g'''(x)=4\sin(x)\cos(x)-2\sin(x)+4\cos(x)\sin(x)=-2\sin(x)+8\sin(x)\cos(x)$

Da aber $\lim_{x\to 0} f'''(x)=0=\lim_{x\to 0} g'''(x)$ $(*)$, ist $\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}$ so nicht berechenbar.

Wegen $(*)$ kann aber l'Hospital erneut angewandt werden mit

$$f^{(4)}(x)=(e^{x^4}\cdot 4x^3)(64x^9+144x^5+24x)+e^{x^4}(576x^8+720x^4+24)$$
$$=e^{x^4}(256x^{12}+1152x^8+816x^4+24)$$

$$g^{(4)}(x)=-2\cos(x)+8\cos^2(x)-8\sin^2(x)$$

Damit ergibt sich (endlich):

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{g^{(4)}(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4}(256x^{12}+1152x^8+816x^4+24)}{-2\cos(x)+8\cos^2(x)-8\sin^2(x)}=\frac{24}{-2+8}=4$$

Die Regel von l'Hospital macht in diesem Fall also richtig Stress.

Taylor-Reihe für $h(x)=e^{x^4}$ bei $x_0=0$: Ableitungen gerade schon ausgerechnet! Abschreiben.

$h(x)=e^{x^4}$ $h(0)=1$

$h'(x)=f'(x)=e^{x^4}\cdot 4x^3$ $h'(0)=0$

$h''(x)=f''(x)=e^{x^4}(16x^6+12x^2)$ $h''(0)=0$

$h'''(x)=f'''(x)=e^{x^4}(64x^9+144x^5+24x)$ $h'''(0)=0$

$h^{(4)}(x)=f^{(4)}(x)=e^{x^4}(256x^{12}+1152x^8+816x^4+24)$ $h^{(4)}(0)=24$

$\Rightarrow e^{x^4}\approx 1+\frac{24}{4!}x^4=1+x^4$ und wie zuvor $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$

Eingesetzt in den Limes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4}-1}{(1-\cos(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^4-1}{\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$