Problemi ROPR

Nel caso di problemi di Programmazione Lineare, la regione ammissibile è un poliedro convesso. In generale, può avere forme diverse.

I vincoli definiscono la regione ammissibili. Le soluzioni ammissibile sono i punti che si trovano all'interno della regione ammissibile. La soluzione ottima è un singolo o insieme di punti che all'interno di quella regione che massimizza o minimizza la funzione.

Regione ammissibile = insieme di soluzioni che rispettano i vincoli del problema.

Un problema può avere un solo valore di ottimo globale, ma può avere più punti di ottimo globale se questi punti raggiungono tutti lo stesso valore di massimo o minimo.

In un problema di programmazione lineare, sia la funzione obiettivo che i vincoli devono essere lineari.

In 2D la regione ammissibile è un poligono convesso, ma in generale è un poliedro convesso.

I vincoli lineari definiscono degli iperpiani (rette in 2D, piani in 3 ecc…) e la regione ammissibile è l'intersezione di questi iperpiani. l'intersezione di iperpiani genera un poliedro.

I vertici sono fondamentali perché, se esiste una soluzione ottima, la si può trovare in almeno uno di essi.

Il metodo del simplesso parte dall'origine quando possibile, e si sposta da un vertice all'altro adiacente solo se questo movimento migliora il valore della funzione obiettivo.

Una coppia di vincoli è detta **adiacente** se sono collegati da un segmento che giace sull'intersezione delle frontiere dei vincoli condivisi

Assunzioni implicite:
- Proporzionalità: il contributo di ciascuna variabile decisionale è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa
- Ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali
- Qualunque valore delle variabili decisionali sono accettati
- Il valore assegnato ad ogni parametro è certo che sia **noto e costante**

Proprietà delle soluzioni di base complementari
Ogni soluzione di base di P ha una soluzione di base complementare in D in modo tale che i rispettivi valori delle funzioni obiettivo siano uguali.

Proprietà delle soluzioni complementari
Il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione vertice ammissibile x per P e una soluzione complementare y per D dove cx=yb.

Soluzioni ottimali complementari aumentate
All'iterazione finale, il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione ottimale x' per P e una soluzione ottimale complementare y' per D dove cx' = y'b

Alternative multiple per la variabile entrante in base:
- Se abbiamo più minimi uguali da scegliere

Alternative multiple per la variabile uscente:
- Se due o più variabili competono per uscire di base. Quando il valore della variabile entrante viene aumentato, le variabili di base che sono selezionabili come variabili uscenti dalla base raggiungono contemporaneamente il valore zero. Le variabili non selezionate come uscenti avranno comunque un valore nullo nella soluzione di base, e queste sono chiamate degeneri
- Se una variabile degenere mantiene il proprio valore nullo sino ad un'iterazione successiva dove viene selezionata come variabile uscente la corrispondente variabile entrante deve essere nulla dato che non può essere aumentata senza far assumere un valore negativo alla variabile uscente
- Se il valore della funzione obiettivo resta costante ad ogni iterazione entra in loop

Molteplici soluzioni ottimali: ogni problema di PL che ammette soluzioni ottimali multiple ha almeno due vertici ammissibili ottimali. Ogni soluzione ottimale è una combinazione convessa dei vertici.

Complementary slackness
Se nel primale abbiamo una variabile di decisione x_j, nel duale associato avremo la variabile surplus z_j - c_j
Se nella variabile primale abbiamo una variabile slack x_n+1 avremo che nella variabile duale associata avremo una variabile di decisione y_i
Una variabile primale di base avrà associata una non di base nel duale associato, e che le variabili non di base del primale sono di base nel duale associato.

Test di ottimalità
Se una soluzione vertice non ammette soluzioni vertice a lei adiacenti con

valore della funzione obiettivo migliore allora la soluzione in questione è ottimale.

Grande M
Trasformare tipi di vincoli logici se-allora o o-questo-o-quello in vincoli lineari. Si usa una variabile binaria per attivare o disattivare un vincolo, e si aggiunge al vincolo una parte che contiene la variabile binaria e il grande M, in modo che, a seconda del valore della variabile, il vincolo diventa inattivo (sempre soddisfatto) o attivo (necessario da rispettare)

Classificazione soluzioni di base
- **Ammissibilità**: tutte le variabili della soluzione aumentata sono non negative
- **Ottimalità**: i coefficienti della riga Z sono non negativi

Soluzione aumentata
Include anche le variabili slack e surplus che sono state introdotte per convertire i vincoli di disuguaglianza in vincoli di uguaglianza.

Forma standard
Problema di massimizzazione con vincoli ≤ e vincoli di non negatività per i valori delle variabili.

Metodo SOB
Usato per passare da problema primale a duale
1. Se il vincolo primale è max, il duale è min e viceversa
2. **Sensible**: vincolo funzionale i ≤ -> variabile decisionale i ≥ 0
3. **Odd**: vincolo funzionale i = -> variabile decisionale i free
4. **Bizarre**: vincolo funzionale i ≥ -> variabile decisionale i ≤ 0
5. Per ogni vincolo su variabile decisione duale si usa la stessa etichetta del vincolo funzionale del primale
6. Per ogni vincolo su vincolo funzionale del duale si usa la stessa etichetta variabile decisionale primale

I vincoli del primale sono inversi, le variabili rimangono:
- **Primale: variabile non negativa (≥0) → Duale: vincolo ≥** (se minimizzazione) o **≤** (se massimizzazione) -> si inverte rispetto al problema
- **Primale: variabile non positiva (≤0) → Duale: vincolo ≤** (se minimizzazione) o **≥** (se massimizzazione) -> si mantiene uguale al problema, FORMA STANDARD
- **Primale: variabile libera in segno → Duale: vincolo =**

Tie breaking
1. Alternative multiple per la variabile entrante in base: se hanno lo stesso minimo, non cambia cosa entri

2. Alternative multiple per la variabile uscente dalla base (degenerazione): se più di una variabile di base uscente raggiunge lo zero. A questo punto, anche le variabili di base non selezionate come uscenti hanno valore zero, e queste si chiamano **degeneri**
3. Mancanza di una variabile uscente per funzione obiettivo illimitata: si può verificare nel metodo del simplesso con il test del rapporto
4. Molteplici soluzioni ottimali: una o più variabile non di base hanno un coefficiente di costo ridotto uguale a zero; questo perché essendo ≠ 0, non cambia la funzione obiettivo ma fa spostare il simplesso in un vertice adiacente che comunque ha lo stesso valore ottimale

Problema di programmazione binaria generica

1. **Variabili binarie**
2. **Vincoli di budget**
3. **Vincoli di mutua esclusione tra le variabili**: $x1 + x2 \leq 1$
4. **Condizione di contingenza**: $xi \leq xj$
5. **Funzione obiettivo**

Spigolo

Segmento che collega due vertici adiacenti e giace sull'intersezione delle frontiere dei vincoli condivisi.

Condizioni logiche

1. **Implicazione**: se… allora —> Grande M
2. **O uno o l'altro o entrambi**: $x1 + x2 \geq 1$
3. **O uno o l'altro, mutua esclusione**: $x1 + x2 = 1$
4. **Insieme di vincoli o un altro** —> Grande M

6 concetti chiave

1. **Vertici**: metodo simplesso ispeziona solo soluzioni ammissibili su vertici
2. **Iterativo**: algoritmo iterativo con inizializzazione e test di ottimalità
3. **Zero iniziale**: se possibile, il simplesso inizia dall'origine ponendo tutte le variabili decisionali a 0
4. **Adiacente**: ad ogni iterazione, se l'algoritmo si sposta dal vertice corrente verso un vertice con un valore migliore della funzione obiettivo, si muove ad un vertice adiacente. Nessuna altra soluzione viene considerata
5. **Miglioramento**: il metodo valuta e compara i tassi di miglioramento della funzione obiettivo lungo la direzione degli spigoli che conducono dal vertice corrente ai vettori adiacenti
6. **Ottimale**: test ottimalità verifica se esiste spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale.

Rappresentazione binaria di variabili intere generiche

$$x = \sum_{k=0}^{n} 2^k y_k$$

X è la variabile intera che vogliamo rappresentare, yk sono le variabili binarie che possono assumere solo 0 o 1, e n è l'indice massimo delle potenze di 2

Rilassamento lineare
Per qualsiasi problema PLI è possibile formulare il corrispettivo Problem PL ovvero senza vincoli di interezza. Tale problema si chiama rilassamento lineare
- Se xi appartiene a Z allora nel problema rilassato presenta il vincolo di non negatività
- Se xi è binaria allora nel problema rilassato è vincolata tra 0 e 1

Soluzione ottima per difetto per problemi di massimizzazione e soluzione ottima per eccesso per problemi di minimizzazione

Branch and Bound
- Massimizzazione: **UB** soluzione rilassamento lineare corrente, **maggiore o uguale alla corrente**. **LB** migliore soluzione intera ammissibile trovata al momento
  - Minimizzazione: **LB** soluzione rilassamento lineare corrente, **minore o uguale alla corrente**. UB migliore soluzione intera ammissibile trovata al momento

Soluzioni grafiche PL
- **Unica soluzione ottima**: vertice della regione ammissibile
  - **Infinite soluzioni ottime**: in uno spigolo della regione ammissibile
- **Non ammette soluzioni** se la regione ammissibile è vuota, o se è illimitata e
- **La funzione obiettivo è illimitata verso l'alto** se di massimo
- **La funzione obiettivo è illimitata verso il basso** se di minimo

Bounding
Per ottenere il limite si risolve il problema rilassato - risolvere i problemi ignorando i vincoli di integrità. **Massimizzazione**: UB per soluzione ottima intera del sottoproblema. **Minimizzazione**: LB limite per soluzione ottima intera del sottoproblema
Miglior valore intero ammissibile - **soluzione incombente - LB per max, UB per min**

Fathoming
- Soluzione soddisfa i **vincoli di interezza -** soluzione incombente cambierà ogni volta che si trova una soluzione intera migliore di questa
- Bound sottoproblema peggiore della soluzione incombente allora non vale continuare
- Sottoproblema non ammette soluzioni ammissibili

Proprietà di simmetria
Per ogni P e relativo D, tutte le relazioni tra loro devono essere simmetriche in quanto il problema duale del duale è il problema primale.

Metodo di bisezione
Se funzione è continua e concava in un intervallo chiuso, considerato un punto generico (problema di **massimo**):

- Se derivata < 0 allora ottimo è a sinistra del punto generico. Estremo inferiore
- Se derivata > 0 allora ottimo è a destra del punto generico. Estremo superiore
- Se derivata vicina a 0 tale punto sarà vicino al punto ottimo

Ogni iterazione posso identificare un **sottointervallo di ricerca** per ridurre lo spazio di ricerca, cambio uno tra i miei due estremi.

Vantaggi: richiede derivata prima, converge sempre
Svantaggi: lento

Metodo di Newton
Aumentare la velocità di convergenza considerando la derivata seconda.
Usare l'ottimo dell'approssimazione quadratica di f(x). Se f(x) è concava allora x converge verso un punto di massimo, se convessa allora k verso un punto di minimo (questo perché concava sale e convessa scende)

Vantaggi: velocità di convergenza quadratica
Svantaggi: richiede calcolo della derivata seconda, potrebbe divergere, può fallire se il punto iniziale è lontano dal punto di ottimo

Inizializzazione PER UNA SOLA DIMENSIONE: E, k = 0

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Se |x_k+1 - x_k| ≤ E allora x_k+1=x* è la soluzione ottima, altrimenti si esegue una nuova iterazione ponendo k=k+1. E: soglia di tolleranza molto piccola, quindi è considerata la soluzione ottima approssimata poi

PER PIÙ DIMENSIONI: la derivata prima è sostituita dal gradiente, la derivata seconda è sostituita dalla matrice hessiana, e invertiamo l'hessiana perché è al denominatore.

Si approssima nell'intorno del punto corrente con una **funzione quadratica** per approssimare la funzione con una parabola. La parabola costruita ha un solo punto di ottimo, e il metodo calcola questo punto di ottimo per l'iterazione successiva. Questo lo si fa usando l'Hessiana che fornisce informazioni sulla curvatura della funzione.

Vantaggi: velocità di convergenza quadratica, più efficiente
Svantaggi: sforzo computazionale maggiore

Concetti legati al problema di PL

1. **Vertice ammissibile**: intersezione n equazioni di frontiera
2. **Spigolo**: segmento che giace all'intersezione di n-1 equazioni di frontiera, segmento che collega due vertici adiacenti sulla frontiera della regione ammissibile
3. **Adiacenti**: se il segmento che li collega è uno spigolo
4. Da ogni vertice ammissibile emanano spigoli
5. Ogni iterazione del metodo del simplesso si sposta dal corrente vertice ammissibile a un vertice adiacente muovendosi su questi spigoli

Dualità debole
Se x è ammissibile per P, y è soluzione ammissibile per D, allora cx ≤ yb

Dualità forte
Se x è ottimale per P, y è ottimale per D, allora cx = yb

Hessiana: matrice quadrata di tutte le derivate seconde parziali per una funzione in più dimensioni

Metodo del gradiente
Si usa il gradiente come direzione di crescita per problemi di massimo, -gradiente come direzione di decrescita per problemi di minimo.

- Si pone k = 0 e si considera un generico punto
- Si calcola il gradiente e impostiamo la direzione
- Calcoliamo il nuovo punto come punto corrente + a^k * gradiente in punto corrente
- Calcoliamo a^k come derivata prima della funzione usando un metodo di ottimizzazione per funzioni in variabile
- Se |f(x_k+1) - f(x_k)| < e1 o ||gradiente f(x_k+1)|| < E2 allora STOP. Se quanto è cambiato il valore della fz obiettivo è minore della soglia, o se quanto è ripida la salita in quella direzione è minore della soglia, allora si interrompe

Vantaggi: convergenza garantita, facile da calcolare
Svantaggi: lenta convergenza, meno efficiente per trovare l'ottimo

Proprietà vertici ammissibili

- **Esistenza**: se esiste solo una soluzione ottimale, allora questa è un vertice ammissibile. Se ne esistono multiple (regione ammissibile limitata), allora almeno due di queste sono vertici ammissibili adiacenti
- **Finito**: numero finito di vertici ammissibili
- **Ottimale**: se un vertice ammissibile non ammette vertici adiacenti che

coincidono con soluzioni con valore migliore della fz obiettivo, allora non esistono soluzioni ottimali migliori di quella che coincide con il vertice ammissibile in esame

Riduzione dimensionali
Un vincolo di uguaglianza tra due variabili è riscrivibile come una in funzione dell'altro, e quindi sostituibile in funzione. Solo che a volte non è facile, potrebbe assumere più valori, ed è applicabile solo a vincoli di uguaglianza.

Prezzo ombra
Contributo al prodotto per unita di risorsa i quando il corrente insieme di variabili di base viene utilizzato per ricavare la soluzione del primale.
Di quanto il valore della funzione obiettivo cambia se un vincolo viene allentato o stretto di una singola unità.

Moltiplicatori di Lagrange
Generico problema di programmazione non lineare vincolata con solo vincoli di uguaglianza.

Primo ordine: x* punto stazionario di f, esistono m moltiplicatori di Lagrange L* tali che in (x*, L*) il gradiente è nullo; questi punti sono candidati ad essere punti di massimo/minimo della funzione:

- Se convessa allora punti stazionari minimo
- Se concava allora punti stazionari massimo

Secondo ordine: Hessiana di funzione lagrangiana, e vettore y tale che annulla la matrice Jacobiana.

- Se l'hessiana della lagrangiana è definita positiva per tutti questi vettori y, il punto è un **minimo locale**
- Se l'hessiana della lagrangiana è definita negativa per tutti questi vettori y, il punto è un **massimo locale**

Teorema di dualità

- Se un problema ha **soluzioni ammissibili** e **funzione obiettivo limitata**, allora la stessa cosa vale per l'altro problema, per cui sia la proprietà debole della dualità che la proprietà forte della dualità sono applicabili;
- Se un problema ha **soluzioni ammissibili** e **funzione obiettivo illimitata**, allora l'altro problema non ha soluzioni ammissibili.
- Se un problema **non ha soluzioni ammissibili**, allora l'altro problema o non ha soluzioni ammissibili o ha una funzione obiettivo illimitata.

Condizioni KKT
Ottimizzazione non lineare vincolata, con vincoli di disuguaglianza.

- **Stazionarietà**: il gradente di f deve essere una combinazione lineare dei gradienti dei vincoli attivi nel punto di ottimo. **In quel punto, la direzione di massimo miglioramento della funzione obiettivo è vincolata dalla direzione dei vincoli**. Ponderata dai moltiplicatori di Lagrange.

- **Ammissibilità primale**: la soluzione candidata deve soddisfare tutti i vincoli originali del problema
- **Ammissibilità duale**: i moltiplicatori dei vincoli di disuguaglianza siano non negativi
- **Complementarietà**:
- Se un vincolo di disuguaglianza è **inattivo** il suo moltiplicatore è **nullo**
- Se un vincolo di disuguaglianza è **attivo** il suo moltiplicatore può essere **positivo**

  Consentono di limitare la ricerca.