Prerequisiti di algebra :(

Matrici

Matrice è una tabella di numeri organizzati in righe e colonne.
Una matrice con *m* righe e *n* colonne si chiama *matrice m x n*. Se m=n, la matrice è detta **quadrata**.
Un vettore **riga** è una matrice con sola riga.
Un vettore **colonna** è una matrice con una sola colonna.
La matrice **trasposta** A^T di una matrice A si ottiene *scambiando le righe con le colonne*.

Operazioni con le matrici

- **Somma e sottrazioni**: solo se hanno le stesse dimensioni, sommando (o sottraendo) gli elementi corrispondenti
- **Prodotto**: definito solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda
- **Moltiplicazione per uno scalare**: moltiplicare una matrice per un numero significa moltiplicare ogni singolo elemento della matrice per quel numero

Matrici speciali

- **Matrice singolare e non singolare**: matrice quadrata è **singolare** se i suoi vettori riga (o colonna) sono *linearmente dipendenti*. Se sono *linearmente indipendenti*, la matrice è **non singolare**.
- **Matrice diagonale**: quadrata in cui tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono zero
- **Matrice identità**: matrice diagonale in cui tutti gli elementi sulla diagonale principale sono uguali a 1
- **Matrice inversa**: per ogni matrice non singolare A, esiste una matrice inversa A^-1 tale che *il loro prodotto è la matrice identità*

Determinante

Matrice quadrata - numero che può essere calcolato con formule specifiche. Determinante è **zero** se e solo se la matrice è singolare.

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1 \cdot -1) = 2 - (1) = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 5 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2-4) - 3(4-8) + 5(2-2) =$$
$$= -2 - 3(-4) + 0 = 10$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (-1)^{1+5} \cdot \begin{pmatrix} \text{elemento} \\ \text{scelto} \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \text{matrice} - \text{riga e} \\ \text{colonna di el. scelto} \end{pmatrix}$$

Indipendenza lineare

- **Vettori linearmente indipendenti**: se l'unica combinazione lineare di questi vettori che dà come risultato il vettore nullo è quella in cui tutti i coefficienti sono zero. Se esiste almeno un coefficiente non nullo per cui la combinazione lineare è uguale a zero, i vettori sono **linearmente dipendenti**.
- **Base**: un insieme di n vettori linearmente indipendenti in uno spazio a n dimensione costituisce una *base* per quello spazio. Ogni altro vettore in quello spazio è una combinazione lineare dei vettori della base.

Sistema di equazioni

Può essere

- **Consistente** se almeno una soluzione, altrimenti è **inconsistente**
- **Determinato** se costituito da un numero di equazioni uguale al numero di incognite $m = n$. Ha una sola soluzione
- **Sovradeterminato** se costituito da più equazioni che incognite $m > n$. Tale sistema è spesso inconsistente
- **Sottodeterminato** se costituito da meno equazioni che incognite $m < n$. Tale sistema ha *infinite soluzioni*

Rango

- **Rango di riga**: numero massimo di righe linearmente indipendenti
- **Rango di colonna**: numero massimo di colonne linearmente indipendenti

Se rango di riga = rango di colonna allora $rango(A) \leq min(m,n)$.

Se $rango(A) = min(m,n)$, allora la matrice A viene detta a rango pieno.

Altro metodo: **metodo delle sottomatrici**

1. Scegli una sottomatrice quadrata, partendo da dimensione 1x1, quindi un singolo elemento
2. Se il determinante è diverso da zero, passa a una sottomatrice più grande. Se il determinante è zero, prova un'altra sottomatrice della stessa dimensione
3. Aumenta le dimensioni della sottomatrice quadrata, finchè non trovi una sottomatrice il cui determinante è non nullo
4. Il rango della matrice è la **dimensione della più grande sottomatrice quadrata** con determinante non nullo. Se tutti i determinanti delle sottomatrici di una certa dimensione sono zero, il rango è la dimensione immediatamente inferiore.

Matrice dei coefficienti A -> **matrice aumentata** = matrice C=A,b ottenuta dalla matrice A aggiungendo come colonna aggiuntiva il *vettore dei termini noti b*.

- rango(C) > rango(A) = sistema lineare non ammette soluzioni
- Rango(C) = rango(A) = sistema lineare ammette soluzione
    - M > n:
        - Se rango(A) = n il sistema ha soluzione unica
        - Se rango(A) < n il sistema ha infinite soluzioni
    - M < n:
        - Se rango(A) ≤ m il sistema ha infinite soluzioni
    - M = n:
        - Se rango(A) = n il sistema ha soluzione unica
        - Se rango(A) < n il sistema ha infinite soluzioni

Eliminazione di Gauss

1. Scegli un pivot non nullo, inizia dalla prima riga e dalla prima colonna
2. Applica operazioni elementari sulle righe: scambia due righe tra loro, moltiplica una riga per un numero non nullo, somma una riga moltiplicata per uno scalare a un'altra riga
3. Elimina gli elementi: annullare gli elementi al di sotto del primo pivot, per avere una colonna di zeri sotto il primo elemento non nullo
4. Procedi per la riga successiva: sposta il pivot sulla riga successiva, e sulla colonna successiva, e ripeti il processo per annullare gli elementi sottostanti
5. Una volta che la matrice è nella sua forma a scalini, il rango è il numero di righe che non sono interamente zeri

Funzioni

Relazione tra due insiemi, un **dominio** (insieme di partenza) ed un **codominio** (insieme di arrivo), che *associa ad ogni elemento del dominio uno e uno solo elemento del codominio*.

- Una funzione è **crescente** se all'aumentare di x anche f(x) aumenta, **decrescente** se f(x) diminuisce
- Una funzione è **convessa** se il segmento che unisce due punti qualsiasi del suo grafico si trova sempre sopra o sul grafico stesso. Una funzione è **concava** se il segmento si trova sempre sotto o sul grafico.

Derivate

Derivata prima: misura la sua pendenza

- **Positiva —>** *crescente*
- **Negativa —>** *decrescente*
- **Zero —>** *punto stazionario*, candidato quindi ad essere minimo, massimo o punti di sella

Derivata seconda: classificare i punti stazionari

- **Positiva —>** minimo relativo
- **Negativa —>** massimo relativo
- **Zero —>** non si può dire nulla, punto può essere minimo, massimo o punto di sella

Gradiente: vettore che contiene tutte le derivate parziali prime della funzione. Punta nella direzione di *massima crescita* della funzione.

Matrice Hessiana: matrice quadrata di derivate parziali seconde.

- **Punti critici con hessiana**. Si pone il gradiente uguale a zero, e per classificare questi punti, si utilizza la matrice hessiana. Un punto critico è un…
    - **Minimo relativo** se la matrice Hessiana in quel punto è *definita positiva*
    - **Massimo relativo** se la matrice Hessiana in quel punto è *definita negativa*
    - **Punto di sella** se la matrice Hessiana in quel punto è *indefinita*

- **Minimo (o massimo) locale**: valore minimo (o massimo) in una piccola regione attorno al punto
- **Minimo (o massimo) globale**: valore minimo (o massimo) sull'intero dominio della funzione. Per le funzioni convesse (o concave), ogni minimo locale è un minimo globale.
- **Ottimo stretto**: unico punto di minimo (o massimo) locale nella sua regione