1) Dati i vettori $v_1=(1,0,2,0)$, $v_2=(0,1,0,-1)$, $v_3=(0,-1,2,5)$, $v_4=(-1,1,0,3)$

↳ $\vec{v_4}$ è comb. lineare di v_1 e v_2

$$a(1,0,2,0)+b(0,1,0,-1)=(-1,1,0,3)$$

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\2a=0\\-b=3\end{cases}\quad //$$

↳ v_3 comb lineare di v_1, v_2 e v_4

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\5\end{pmatrix}\qquad \checkmark \text{ B}$$

$$\begin{cases}a-c=0\\b+c=-1\\2a=2\\-b+3c=5\end{cases}\qquad\begin{cases}a=1\\c=1\\b=-2\\\cancel{+2+3=5}\end{cases}$$

2) $R[x]$ spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali, sia V_n il sottoinsieme di $R[x]$ formato dai polinomi di grado $2n$.

Per quanti valori di n si ha che V_n è sottospazio vettoriale di $R[x]$?

Visto che si ha che V_n e deve essere il sottoinsieme di $R[x]$ formato esattamente da grado $2n$, allora questo è possibile solo con un valore di n.

↳ $V_n=\{0\}$, che succede in $n=0$, che così è chiuso rispetto alla somma

3) Sia $V=\langle(3,0,-1,1)\rangle\cup\langle(-2,0,1,-1)\rangle$. Per quale dei seguenti W si ha che $V\cup W$ è sottospazio vettoriale di R^4?

L'unione di due sottospazi non è quasi mai un sottospazio, a meno che uno sia contenuto nell'altro. Visto che la c ha già un vettore che appartiene già a V, l'unione non aggiunge nulla a V, quindi rimane un sottospazio.

Bisogna vedere gli insiemi dove ci sono vettori già presenti in V.

4) Siano $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\sum_{i=1}^{4} (-1)^i V_i = (0,1,0)$

$\hookrightarrow (-1)^1 V_1 + (-1)^2 V_2 + (-1)^3 V_3 + (-1)^4 V_4 = -V_1 + V_2 - V_3 + V_4 = (0,1,0)$

É semplicemente una combinazione lineare con $a=-1, b=2, c=-1, d=4$

5) Dati $A_1 = \left\{\begin{pmatrix} s & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right\}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\}$ quale tra i seguenti insiemi é sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$

Per un'intersezione e un'unione, entrambi gli insiemi prima devono essere sottoinsiemi. L'intersezione di essi, o l'unione, sarà essa stessa un sottoinsiemi.

Visto che A e B non sono mai sottoinsiemi, allora non é mai valida intersezione e unione.

Per quanto riguarda la somma, dobbiamo verificare se la somma é valida per le 3 condizioni:

$\hookrightarrow$ contiene il vettore nullo

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ $\to$ non contiene il vettore nullo quindi non é sottoinsieme

6) Sia A una matrice con 4 righe e 4 colonne. Quale tra le seguenti operazioni può aumentare il rango di A, se non é massimo.

Ridurre a scala una matrice serve per scoprire il rango di una matrice. Ogni operazione elementare su righe o colonne non cambia il rango, quindi l'unica possibile e' l'unica che non é un'operazione elementare, quindi sommare ad una riga di A una colonna di A.

7) Sia $A \in M_{n,n}$. Quando é possibile trovare $D \in M_{n,n}$ diagonale tale che $A + D = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

D é diagonale, quindi vuol dire che tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono degli 0.

Visto che deve essere I_n, allora tutti gli elementi di A al di fuori della diagonale devono essere uguali a 0, mentre quelli di diagonale devono essere inversi della diagonale di D. Quindi, A é diagonale

(8) Dato il sistema lineare $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ kx+y-z=0 \\ x+ky+2z=0 \end{cases}$, quale tra le seguenti affermazioni é falsa?

Essendo un sistema lineare omogeneo, ammette sempre la soluzione banale.

(9) Siano $A, B \in M_{6,6}$ tali che $rg(A)=4$ e $rg(B)=5$. Quale tra le affermazioni é corretta?

Essendo $rg(A)=4$, allora vuol dire che esiste almeno una sottomatrice di ordine 4 con determinante nullo; questo non vuol dire che non possono esistere con determinante nullo

Per quanto riguarda la somma e il prodotto, dovremmo sapere il det. delle due matrici, non lo si può sapere dal rango.

Quindi l'unica che é valida é la d, dove possono esistere A' e B' di ordine 3 t.c. $\det(A' \cdot B') \neq 0$, ovvero come prima, una sottomatrice può avere det. non nullo

(10) Sia $A \in M_{n,n}$. Quando é possibile trovare $D \in M_{n,n}$ matrice diagonale tale che $A+D=I_n$?

Visto che la somma é I_n, e D é diagonale, anche A deve essere diagonale per mantenere che tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sia zero

11) Sia $f_t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ t.c. $f_t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $f_t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f_t\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-2t\\-3t\end{pmatrix}$. Per quanti valori di t, f_t é un omomorfismo?

Una funzione é un omomorfismo se e solo se: $f(u+v)=f(u)+f(v)$
$f(\lambda u)=\lambda f(u)$

verifichiamo se $f(-1,2,2)=f((0,1,1)-(1,0,0))=f(0,1,1)-f(1,0,0)=$
$=(1,0,0)-(1,2,3)=(0,-2,-3)$

$\hookrightarrow f(-1,2,2)=(t,-2t,-3t)$

$(t,-2t,-3t)=(0,-2,-3)$

$\hookrightarrow \begin{cases} t=0 \\ -2t=-2 \to t=1 \\ -3t=-3 \to t=1 \end{cases}$ per un unico valore, $t=1$

13) Quale tra le seguenti funzioni é un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che manda il piano di equazione $x+y=0$ nella retta $\begin{cases} x-3y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$

Un endomorfismo é una funzione lineare, quindi senza costanti o altro.

Prima, capiamo quale siano i vettori direttori della retta.

$$v=n_1\times n_2=\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=(-1)^{1+3}(2)\det\begin{pmatrix} e_2 & e_3 \\ -3 & -1\end{pmatrix}+(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} e_1 & e_3 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ 1 & -3\end{pmatrix}=2(-e_2+3e_3)-(-e_1-e_3)+(-3e_1-e_2)=$$

$$=-2e_2+6e_3+e_1+e_3-3e_1-e_2=-2e_1-3e_2+7e_3=$$

$$=(-2,-3,7)$$

Consideriamo il punto c

$P(t,s) = (t, -t, s) \rightarrow (-2/3\,t, -t, 7/3\,t)$, e adesso verifichiamo se soddisfa le rette

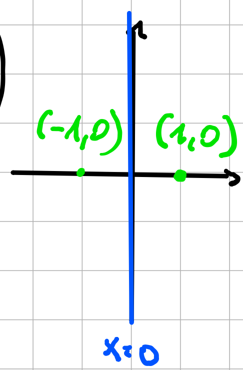
$\hookrightarrow x - 3y - z = 0 \rightarrow (-2/3\,t) - 3(-t) - (7/3\,t) = -2/3\,t + 3t - 7/3\,t = \frac{-2+9-7}{3}t = 0$

$\hookrightarrow 2x + y + z = 0 \rightarrow 2(-2/3\,t) + (-t) + 7/3\,t = -4/3\,t - t + 7/3\,t = 0$

14 Determinare quale dei seguenti endomorfismi è la scrittura in coordinate dell'omomorfismo che manda $\binom{1}{0}$ in $\binom{-1}{0}$ e $\binom{0}{1}$ in sé con la corretta descrizione.

a) $f(x,y) = (-x, y) \rightarrow$ manda ogni punto di $\mathbb{R}^2$ nel suo simmetrico rispetto alla retta di equazione $x=0$

$\binom{1}{0} : \binom{-x}{y} \rightarrow \binom{-1}{0}$; $\binom{0}{1} : \binom{-x}{y} \rightarrow \binom{0}{1}$



Allora è verificato

15 $A \in M_{n,n}$ con $rg(A) = m < n$, quale tra le seguenti affermazioni è corretta?

Il polinomio caratteristico è definito come $\det(XI - A)$, ed è un polinomio di grado n.

Se $m < n$, allora il nucleo ha dimensione almeno 1, e il det. di A è zero, $x = 0$ è autovalore quindi radice del polinomio

Una matrice può essere rango $< n$ ed essere diagonalizzabile: dipende da m_A e m_g degli autovalori

Il polinomio caratteristico ha sempre grado n, non m

(16) Stabilire quale tra i seguenti sottoinsiemi è autospazio della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Troviamo gli autovalori risolvendo $\det(A-\lambda I)=0$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}(2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)((2-\lambda)(-\lambda)-4)-(-8) = (2-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2-4+8) =$$

$$= (2-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2+4) = \lambda^2(4-\lambda) \to \lambda = 0 \ (m_a = 2)$$
$$\lambda = 4 \ (m_a = 1)$$

(1) Si consideri il piano k $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+2s-1 \\ z = s-1 \end{cases}$. Stabilire se esiste un numero reale a che renda l'insieme $\begin{cases} -x+2y+az=3 \\ y-z=a \\ x+y-z=-9 \end{cases}$ ortogonale a k

Ricavo i coefficienti dei direttori del piano, ovvero i coefficienti di t e s

$V_1(t) = (1,-1,0)$; $V_2(s) = (0,2,1)$

Adesso si ricava i coefficienti della normale al piano, con il prodotto vettoriale

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to (-1)^{3+2}(2)\det\begin{pmatrix} a & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -2(-c)+(-a-b) = 2c-a-b = (-1,-1,2)$$

Adesso sostituisco i parametri nel sistema delle rette, e trovo

$$\begin{cases} 1-2+2a=3 \\ -1-2=a \\ -1-1-2 \neq 9 \end{cases} \to \text{quindi non esiste A}$$

2) $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$ $\begin{cases} 1+r \\ 2-3r \\ k+kr \end{cases}$ stabilire se esistono dei valori di k per cui sono sghembe

$V_1=(1,2,1)$ $P_1=(0,0,0)$, $V_2=(1,-3,k)$, $P_2=(1,2,k)$

$$\begin{pmatrix} P_{1x}-P_{2x} & P_{1y}-P_{2y} & P_{1z}-P_{2z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 0-2 & 0-k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & k \end{pmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}(-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & k \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}(-k)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$=(-1)(2k+3)+2(k-1)-k(-3-2) = -\cancel{2k}-3+2k-1+3k+\cancel{2k} = 5k-4 \Rightarrow k \neq 1$$

3) Data la funzione $f(x,y)=(x+2y,\ 18x+y)$ determinare

↳ matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio

Sostituisco $x=1$ per il dominio e $y=1$ per il codominio

$f(1,0)=(1+0,\ 18+0)=(1,18)=a(1,0)+b(0,1)$

$f(0,1)=(0+2,\ 0+1)=(2,1)=a_1(1,0)+b_1(0,1)$

$\Rightarrow$ $a=1$, $b=18$, $a_1=2$, $b_1=1$

↳ Autovalori ed autovettori

Per calcolare (autovalori) eseguo $\text{Det}(A-\lambda I)$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 18 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)^2-36=0 \Rightarrow \lambda_1=-5,\ \lambda_2=7$$

Per $\lambda=5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=-5x \\ 18x+y=-5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=-y \\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow (x,-3x) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Per $\lambda=7 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=7x \\ 18x+y=7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=6x \\ y=3x \end{cases} \Rightarrow (x,3x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

A ha tutti gli autovalori distinti, è diagonalizzabile

4 I vettori $(1,0,2), (0,-1,1), (1,1,1)$ giacciono sul medesimo piano H

$$\det\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix} + (-1)^{1+3}(2)\det\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix} =$$
$$= (-1-1)+2(+1) = -2+2=0$$

Quindi sono complanari

Equazione parametrica e cartesiana:

$$t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\y=-s\\z=2t+s\end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix}i&j&k\\1&0&2\\0&-1&1\end{pmatrix}=(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}j&k\\-1&1\end{pmatrix}+(-1)^{2+3}(2)\det\begin{pmatrix}i&j\\0&-1\end{pmatrix} = -(j+k)-(-2i) = 2i-j-k =$$
$$= 2x-y-z$$

Per determinare se esiste in H una retta sghemba con r, innanzitutto scegliamo un punto P su H non appartenente a r

$$A=(1,0,2) \to \begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases} \to \begin{cases}1=1+t\\0=1-t\\2=1+t\end{cases} \begin{cases}t=0\\0=1\end{cases} \times$$

A non appartiene ad R

Adesso definiamo la retta passante per A e con una certa direzione-
Calcoliamo la direzione con i due punti del piano

$P=A=(1,0,2)$ $\qquad d=B-A=(0,-1,1)-(1,0,2)=(-1,-1,-1)$

$$s=\begin{cases}1-t\\0-t\\2-t\end{cases}$$ $\to$ Bisogna verificare che s sia sghemba a r:

>> verificare che non è parallela: se i vettori direzione sono proporzionali

$d_r=(1,-1,1)$; $d_s=(-1,-1,-1)$ $\to$ non sono paralleli

E verifichiamo poi che le due rette non abbiano punti di intersezione

$$x \to \cancel{1}+t=\cancel{1}-s \qquad \begin{cases} t=-s \\ 1+s=-s \\ 1-s=2-s \end{cases} \qquad \begin{cases} t=-s \to t \\ 1=-2s \to s=-1/2 \\ 1+1/2=2+1/2 \quad \times \end{cases} \quad \text{non sono intersecati}$$
$$y \to 1-t=-s$$
$$z \to 1+t=2-s$$

5. Determinare la dimensione e base di $T=\{y-x=2z\}$

$$\begin{cases} y=2z+x \\ x=s \\ z=t \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2t+s \\ x=s \\ z=t \end{cases} \to s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}. \quad \text{dim. } 2 \quad \text{base } \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Completare la base ad una base di $\mathbb{R}^3$ con vettore v ortogonale a T

Per trovarlo, faccio il prodotto vettoriale tra i due vettori

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} \det\begin{pmatrix} y & z \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \det\begin{pmatrix} x & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -(y-2z)+(x)$$

$$= x-y+2z = (1,-1,2)$$

6) Determinare tutti i valori t per cui la funzione g_t possa essere un'app. lineare, sapendo che $g_t(1,2)=(0,1,0)$ e $g_t(t,1)=(1,-1,0)$

$$g_t(1,2)=(0,1,0) \quad ; \quad g_t(t,1)=(1,-1,0)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix} = (1\cdot 1)-(2t) \neq 0 \to 1-2t\neq 0$$
$$1\neq 2t \to t\neq 1/2$$

Scrivere applicazione lineare suriettiva $f(x,y)=(f_1(x,y), f_2(x,y))$
- ▷ f manda la retta $r_1: 3x+2y=0$ nella retta $r_2: x=2y$
- ▷ f è suriettiva

Primo, troviamo un punto non nullo su r_1 per trovare un vettore sulla retta

$\hookrightarrow x=2 \to 3(2)+2y=0 \quad 2y=-6 \quad y=-3 \quad v_1=(2,-3)$

Troviamo un vettore sulla retta r_2: $y=1 \to x=2$; $v_2=(2,1)$

Definiamo un'app. lineare che mandi $v_1 \to v_2$, base di $\mathbb{R}^2$ completando v_1

$\hookrightarrow v_1=(2,-3)$. Troviamo w_1 lin. indip. da $v_1 \to (3,2)$

$f(\underset{v_1}{(2,-3)})=\underset{v_2}{(2,1)}$; $f(3,2)=(0,1) \to$ l'importante è che le immagini siano lin. indipendenti

$f(2,-3)=(2,1) \quad f(3,2)=(0,1)$

Vogliamo trovare la matrice A t.c. $f(x,y)=A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Allora: $A\cdot(2,-3)=(2,1)$ $\to$ $2a-3b=2 \quad 3a+2b=0$
$A\cdot(3,2)=(0,1)$ $\quad 2c-3d=1 \quad 3c+2d=1$

$\frac{3a}{3}=\frac{-2b}{3} \to a=-\frac{2}{3}b \;\Big|\; 2\cdot-\frac{2}{3}b-3b=2$

$-4/3\,b-3b=2 \to \cancel{3}\cdot\frac{-4-9b}{\cancel{3}}=2\cdot3$

$-\cancel{4}-9b=6+4 \quad b=-\frac{10}{9}$
$\frac{-9b}{-9}=\frac{10}{-9}$

7. Verificare che i punti $(1,0)$, $(\frac{1}{2},1)$ e $(1,2)$ non siano allineati, e determinare la rett. di regressione lineare semplice

ALLINEAMENTO: se l'area del triangolo che formano è uguale a zero

$A=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$

$=\frac{1}{2}|1(1-2)+\frac{1}{2}(2-0)+1(0-1)|=\frac{1}{2}|(-1)+\frac{1}{2}(2)-1|=$

$=\frac{1}{2}|-1+1-1|=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}\neq0$ quindi non sono allineati

Per determinare la retta di regressione lineare dobbiamo prima:

Media dei valori $x = \frac{1+\frac{1}{2}+1}{3} = \frac{\frac{2+1+2}{2}}{3} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$$y = \frac{0+1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Coefficiente angolare $a = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$ → Σ: si fa per ogni punto

$\boxed{\begin{matrix}\bar{x} = 5/6 \\ \bar{y} = 1\end{matrix}}$

(A) $x = 1$, $y = 0$ $\quad (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (1 - 5/6)(0-1) = \left(\frac{6-5}{6}\right)(-1) = -\frac{1}{6}$

$(x_i - \bar{x})^2 = (1 - 5/6)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

(B) $x = 1/2$, $y = 1$ $\quad (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (1/2 - 5/6)(1-1) = 0$

$(x_i - \bar{x})^2 = (1/2 - 5/6)^2 = \left(\frac{3-5}{6}\right)^2 = \left(-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_3}\right)^2 = 1/9$

(C) $x = 1$, $y = 2$ $\quad (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (1 - 5/6)(2-1) = 1/6$

$(x_i - \bar{x})^2 = 1/36$

$\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -1/6 + 0 + 1/6 = 0 \qquad \Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 1/36 + 1/9 + 1/36 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$a = \frac{0}{1/6} = 0$

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 1 - 0 \cdot 5/6 = 1$

8. Determina matrice A di dim. 3x3 con determinante 3x3

$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (-1)^{2+2}(1) \det\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -3$ ✓

Determinare tutti i valori reali k tali che $\det(B)=k$ per una matrice B invertibile di dimensioni 4×4:

Una matrice e' invertibile se il suo determinante é diverso da zero quindi $k\neq 0$

Determinare una matrice C di dimensioni 2x2 t.c. $\det(C^{12})=2$

$$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt[12]{2}\end{pmatrix} \qquad C^{12}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \to \det=2$$

9. Area regione triangolare T con $a=(1,1,1)$, $b=(-1,2,0)$, $c=(3,2,2)$?

$A=\frac{1}{2}\|(b-a)\times(c-a)\|$

$$b-a=(-1,2,0)-(1,1,1)=(-2,1,-1)$$
$$c-a=(3,2,2)+(-1,-1,-1)=(2,1,1)$$

$$(b-a)\times(c-a)=\begin{vmatrix}e_1&e_2&e_3\\-2&1&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}e_1\det\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}+(-1)^{1+2}e_2\det\begin{pmatrix}-2&-1\\2&1\end{pmatrix}+$$
$$+(-1)^{1+3}e_3\det\begin{pmatrix}-2&1\\2&1\end{pmatrix}=$$

$$=e_1(1+1)-e_2(-2+2)+e_3(-2-2)=2e_1+0-4e_3=(2,0,-4)$$

$$A=\frac{1}{2}\|(2,0,-4)\|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+4^2}=\sqrt{4+0+16}=\sqrt{20}=\sqrt{5\cdot 2^2}=2\sqrt{5}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

- Determinare la retta perpendicolare a T passante per a

Essendo T un piano, troviamo due vettori direzione

$$b-a=(-1,2,0)-(1,1,1)=(-2,1,-1)$$
$$c-a=(3,2,2)+(-1,-1,-1)=(2,1,1)$$

calcolo il vettore normale: $(b-a)\times(c-a)=(2,0,-4)$

Adesso scrivo la retta passante per il punto $a = (1,1,1)$ con direzione $(2,0,-4)$

$$r = a + t(n) = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 0 \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

1) Se devo verificare che n vettori V_i siano linearmente indipendenti, cosa posso fare?

Nel caso il numero di vettori sia uguale alla dimensione dello spazio, quindi quadrata. Se non è quadrata, non posso calcolarne il determinante

La più generale è che creo una matrice con V_i come vettori riga e cerco una sottomatrice quadrata di ordine n invertibile

2) $Ax=b$ sistema con più incognite che equazioni. Allora:

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Un sistema lineare $Ax=B$ ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|B$

n. soluzioni

- se $rg(A) = rg(A|B) = n$ il sistema ammette un'unica soluzione
- se $rg(A) = rg(A|B) = r < n$ → più incognite che eq. linearmente indip. → INFINITE SOLUZIONI, con ∞^{n-r} soluzioni
- se $rg(A) \neq rg(A|B)$, il sistema non ammette soluzioni

se $m<n$ e $rg(A) =$ rg. massimo per A, allora $rg(A|b) = m$, e il sistema ha soluzione

(3) Sia $Ax = b$ un sistema che non ammette soluzione. Scegliendo un vettore c è possibile che $Ax = b + c$ abbia infinite soluzioni?

Se A fosse di rango massimo, allora ammetterebbe un'unica soluzione.

Se non lo fosse quindi, si potrebbe fare che il sistema abbia infinite soluzioni

(4) Se la somma di tre numeri positivi è 120, qual'è il massimo valore possibile tra il loro prodotto?

$x+y+z=120 \rightarrow x=40,\ y=40,\ z=40$

TEOREMA DELLE MEDIE $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$

$(xyz) \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \rightarrow (xyz) \leq \left(\frac{120}{3}\right)^2 = 40 \cdot 40 \cdot 40$

(5) Sia A matrice quadrata e v, w due suoi vettori colonna. Se B è la matrice ottenuta da A rimpiazzando il vettore v con il vettore $v + \alpha \cdot w$, che informazione abbiamo su B?

Essendo quella un'operazione elementare, non altera il determinante. Quindi $\det(A) = \det(B)$

(6) Sia $Ax = b$ un sistema di equazioni lineari con più equazioni che incognite. Allora:

Avendo soluzione, il rango della matrice completa $A|b$ non può essere massimo

(7) Sia A matrice $n \times m$ di rango $r > 0$. Affermazione corretta?

Con il rango, si possono calcolare gli ordini delle sottomatrici quadrate. Ovvero esiste sempre una sottomatrice quadrata di ordine r-1 con determinante non nullo

8) Sia A matrice quadrata, v e w colonne. Se B è la matrice ottenuta da A rimpiazzando il vettore v con $(\alpha)v + \beta(w)$, che info abbiamo?

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \alpha a+\beta b & b \\ \alpha c+\beta d & d \end{pmatrix}$$

$$\det B=(\alpha a+\beta b)(d)-(\alpha c+\beta d)b=\alpha ad+\cancel{\beta bd}-\alpha bc-\cancel{\beta bd}=$$
$$=\alpha ad-\alpha bc=\alpha(ad-bc)=\alpha\det(A)$$

9) Sia A(t) matrici quadrate dipendenti da t. Supponiamo $\mathrm{Det}(A(1))=5$, e $\mathrm{Det}(A(-1))=-5$.

Essendo il determinante non nullo, possiamo dire che i vettori riga sono lin. indipendenti. Se i vettori riga di una matrice quadrata sono lin. indip., rg = num. righe = massimo
Non possiamo concludere niente con il rango perché ci servirebbe sapere la dimensione della matrice.

Non abbiamo informazioni su come sia fatta la matrice quindi non possiamo concludere niente per det(0), e neanche per l'ultima.

10) A matrice quadrata n×n t.c. la somma delle delle righe è uguale ad una colonna c di A.

Non possiamo dedurre niente sul rango e determinante di A perché non sappiamo come sono fatte le righe e colonne.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=0$, quindi la B la scartiamo
$rg(A)<n$ dipende da come impostiamo la matrice
Possiamo fare anche con una matrice 1×1 con [1]

11) A di dim. 4×6 abbia nulli i determinanti di tutti i minori di ordine 3. Falsa.

Essendo che tutti i minori di ordine 3 son det. nulli, allora $rg(A)\leq 2$. È impossibile che le righe siano linearmente indipendenti, perché altrimenti il rango sarebbe uguale a 4

(12) Sia $Ax=b$ sistema di equazioni lineari con un numero di equazioni uguale al numero di incognite.

Se il sistema $Ax=B$ non ha soluzione, allora $\text{rank}(A) < \text{rank}(A|B)$
$\text{rank}(A|B) < n$, quindi $\text{rank}(A) < n$. Se questo é vero, allora non e' invertibile

(13) Sia A, B due matrici 5×5 tali che $\text{rank}(A)=3$ e $\text{rank}(B)=2$.

Vuol dire che esiste minori di A di ordine 3 con determinante non nullo.
Matrici con determinante non nullo sono invertibili. Lo stesso per B:
vuol dire che esistono minori di ordine 2 di B con determinante non nullo, quindi sono invertibili.

Il prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine e invertibili produce esso stesso una matrice invertibile.

(15) Nel sistema composto da $\begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ ax+y+z=0 \\ x+ay-z=0 \end{cases}$

Per farlo, bisogna calcolare il rango della matrice completa e confrontare

$\rightarrow a=-1$ $\begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(y+z)-2y-z=0 \\ \cancel{-y-z+y+z=0} \\ x=y+z \end{cases}$ $\begin{cases} 3y+3z-2y-z=0 \\ x=y+z \\ 0=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y+2z=0 \rightarrow y=-2z \\ x=-2z+z=-z \\ 0=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ non c'é soluzione per z quindi non c'é soluzione

$\rightarrow a=6$ $\begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ 6x+y+z=0 \\ x+6y-z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(z-6y)-2y-z=0 \\ 6(z-6y)+y+z=0 \\ x=z-6y \end{cases}$ $\begin{cases} 3z-18y-2y-z=0 \\ 6z-36y+y+z=0 \\ x=z-6y \end{cases}$

$\begin{cases} 2z-20y=0 \\ 7z-35y=0 \\ x=z-6y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2z=20y \rightarrow z=10y \\ 7(10y)-35y=0 \\ x=10y-6y \end{cases}$ $\begin{cases} z=10y=0 \\ 70y-35y=0 \rightarrow y=0 \\ x=0 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

il sistema ha una sola soluzione

$\rightarrow$ il sistema ammette soluzioni

$$\begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ ax+y+z=0 \\ x+ay-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(z-ay)-2y-z=0 \\ a(z-ay)+y+z=0 \\ x=z-ay \end{cases} \quad \begin{cases} 2z-3ay-2y=0 \\ az-a^2y+y+z=0 \\ x=z-ay \end{cases} \quad y(-3a-2)=\frac{+2z}{3a+2}$$

quindi la giusta é la c.

16 V spazio di tutte le funzioni continue su $[-1,1]$ a valori reali. S_λ sotto insieme costituito da tutte le funzioni tali che $f(-1)=f(1)=\lambda$.

Per essere un sottospazio, deve essere chiuso rispetto alla somma e moltiplicazione per scalare.

Allora dobbiamo controllare che:

$$(f+g)(-1)=\lambda \qquad (f+g)(1)=\lambda$$
$$f(-1)+g(-1)=2\lambda \qquad f(1)+g(1)=2\lambda$$

$\rightarrow$ Affinché $(f+g)$ appartenga, deve essere $2\lambda=\lambda$
$\Downarrow$
$\lambda=0$

$$(c\cdot f)(-1)=\lambda \qquad (c\cdot f)(1)=\lambda$$
$$c\cdot f(-1)=c\cdot\lambda \qquad c\cdot f(1)=c\cdot\lambda$$

$\rightarrow$ Affinché appartenga dobbiamo avere che $\lambda\cdot c=\lambda$
$\Downarrow$
$\lambda=0$

Quindi per un solo valore é sottospazio vettoriale

18
$$\begin{cases} -x-y-z=b_1 \\ 3x-9y-6z=b_2 \\ 5x-7y-4z=b_3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & b_1 \\ 3 & -9 & -6 & b_2 \\ 5 & -7 & -4 & b_3 \end{array}\right)$$

il sistema ha soluzione se e solo se $rg(A)=rg(A|b)$

$$\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & -12 & -9 & b_2+3b_1 \\ 5 & 7 & -4 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & -12 & -9 & b_2+3b_1 \\ 0 & \boxed{-12} & -9 & b_3+5b_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & -12 & -9 & b_2+3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3+5b_1-b_2-3b_1 \end{array}\right) \qquad b_3+2b_1-b_2$$

Affinché abbia una soluzione, $rg(A) = rg(A|B)$ deve essere uguale, quindi anche l'ultima deve essere $= 0$

$$b_3 + 2b_1 - b_2 = 0 \qquad -b_2 = -b_3 - 2b_1 \rightarrow b_2 = b_3 + 2b_1$$

19 Quali di queste affermazioni equivale al fatto che n vettori v_i siano linearmente indipendenti

→ la matrice v_i come vettori riga ha determinante non nullo
falso perché questo è vero soltanto se sono quadrate

→ la matrice v_i come vettori riga possiede una sottomatrice $n \times n$ invertibile
se esiste una sottomatrice $n \times n$ invertibile, le n righe della sottomatrice sono linearmente indipendenti

---

1 Sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ contenente $(1,0,1,1)$ e $(a,b,0,b)$. Qual è la dimensione ed una base S di V.

Dovremmo verificare se ciascuno dei vettori che sarebbero una base con una combinazione lineare

La dimensione deve essere 2 per forza.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c = a \rightarrow a = 0 \\ d = b \\ c = 0 \\ \cancel{c} + d = b \\ b = d \end{cases}$$

Quindi questi vettori possono generare se $a = 0$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} c + d = a \rightarrow a = c \\ b = 0 \\ d = 0 \\ d = b \rightarrow 0 = 0 \end{matrix}$$

① Quali degli insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

Ⓐ $U_2 = y = z = 0$

Per essere un sottoinsieme, deve: contenere il vettore nullo
chiuso rispetto a somma due elementi
moltiplicazione vettore x scalare

Visto che x non c'è, sarà scritto come la variabile libera

→ zero: $(x,0,0) \to$ se $x=0$: $(0,0,0)$ ✓

→ chiuso rispetto alla somma

$(x_1,0,0)+(x_2,0,0)=(x_1+x_2,0,0)\in U_2$ ✓

→ chiuso rispetto a prodotto per scalari

$\lambda(x,0,0)=(\lambda x,0,0)\in U_2$ ✓

Ⓑ $U_3=\{-2x+y-z=0\}$ → devo spostare una variabile (es. y), quindi viene $(x, 2x+z, z)$

→ vettore nullo: $0+0-0=0 \to (0,0,0)$ ✓

$y=2x+z$
$+z=-2x+y$ $\to (x,2x+z,-2x+y)+(x_2,2x_2+z_2,-2x_2+y_2)=$
$=(x_1+x_2, 2x+z+2x_2+z_2, -2x+y-2x_2+y_2)$ ✓

→ prodotto per scalare

$\lambda(x,2x+z,-2x+y)=(\lambda x,\lambda 2x+\lambda z,-2\lambda x+\lambda y)$ ✓

Ⓒ $U_4=\{3x-z=0\} = 3x=z \to (x,y,3x)$

→ vettore nullo: $(0,0,0)$ ✓

→ chiusura per somma: $(x,y,3x)+(x_1,y_1,3x_1)=(x+x_1,y+y_1,3x+3x_1)$

→ prodotto scalare: $\lambda(x,y,3x)=(\lambda x,\lambda y,3\lambda x)$

② Per quale valore di k i vettori sono linearmente indipendenti?

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} a+2b=0 \\ -a-3b+c=0 \\ 0=0 \\ a+kc=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2b \\ 2b-3b+c=0 \\ -2b+kc=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2b \\ -b+c=0 \\ -2b+kc=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2c \\ +b=+c \\ -2c+kc=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2c \\ b=c \\ c(k-2)=0 \end{cases} \to$$

se $k=2 \to c(2-2)=0$
$0=0$

Quindi c può assumere qualsiasi valore perché diventa una variabile libera

se $k=2$ sono linearmente dipendenti, altrimenti sono linearmente indipendenti

③ $3x-z=0$ sottospazio vettoriale, determinare una base di $\mathbb{R}^3$

$3x-z=0 \to z=3x$. Le variabili che non sono presenti sono libere, quindi:

$$(x,y,3x) \to x(1,0,3)+y(0,1,0) = \langle(1,0,3),(0,1,0)\rangle \text{ base}$$

Verifichiamo se sono linearmente indipendenti:

$$a(1,0,3)+b(0,1,0)=(0,0,0) = \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ 3a=0 \end{cases} \to \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix} \text{ lin. indip.}$$

Completiamo la base in modo che sia $\mathbb{R}^3$. Prendiamo le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$, e vediamo quali sono lin. indip. con la base originale

$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$

e_1 $a(1,0,3)+b(0,1,0)+c(1,0,0)=(0,0,0) \to$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

quindi sono lin. indip., quindi $\{V_1, V_2, e_1\}$ è una base

4 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$, sia $V = \mathrm{Span}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$

Trovare una base di V. Allora dobbiamo vedere se sono in combinazione lineare o no

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 1/2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 1/2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} +\lambda_3 = +2\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 1/2 \cdot 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2\lambda_2 = 2$$ non sono soluzione nulla, quindi non sono linearmente indipendenti

Verifichiamo se v_1 e v_2 sono lin. indip.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$ allora sono lin. indip. $\dim V = 2$

Verifico che $\{v_1, v_2, e_3\}$ sia una base. Quindi devo verificare che siano linearmente indipendenti

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Sono lin. indip. quindi sono una base

5 $\mathbb{R}_3[x]$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado ≤ 3.

$P(x) = 1 + x + x^2$, $q(x) = $ [illegible], [illegible]$(x) = 2 - 3x + 2x^2$. Trovare una base di V, dimensione e completare la base

Per iniziare, verifichiamo se i vettori [illegible] possano essere una base, quindi se sono lin. indip.

$\lambda_1(1+x+x^2)+\lambda_2(-1+x^2)+\lambda_3(2-3x+2x^2)=(0,0,0)$

$\lambda_1+\lambda_1 x+\lambda_1 x^2-\lambda_2+\lambda_2 x^2+2\lambda_3-3\lambda_3 x+2\lambda_3 x^2=(0,0,0)$

$x^2(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)+x(\lambda_1-3\lambda_3)+(\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3)=(0,0,0)$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_1-3\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_1=3\lambda_3\\ 3\lambda_3+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ 3\lambda_3-\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_1=3\lambda_3\\ 5\lambda_3+\lambda_2=0\\ -\lambda_2+5\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1=3\lambda_3\\ +\lambda_2=+5\lambda_3\\ 5\lambda_3+5\lambda_3=0\end{cases}\rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=0$$

Visto che abbiamo $\underset{\text{grado } 0}{\lambda_1}$, $\underset{\text{grado } 1}{\lambda_2}$, $\underset{\text{grado } 2}{\lambda_3}$, ci manca qualcosa per il grado 3, quindi completiamo con $x^3 \rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,x^3)$

6) V_1, V_2, V_3 t.c. $\sum_{i=1}^{3} \vec{V_i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Visto che tutti e tre i vettori sono una somma $1V_1$, non possiamo dire che i tre vettori siano lin. indip., e quindi neanche una base (dovrebbero essere lin. indip. se no)

② V_1, V_2 son lin. indip.?

1) Calcolare il rango delle matrici con il metodo dei minori.

Con il metodo dei minori, provo a togliere una riga o colonna, e vedo se ha un determinante diverso da zero o no

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-4\\2&3&5&-1\\0&1&1&0\\0&1&1&-2\end{pmatrix}\rightarrow \det\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&5\\0&1&1\end{pmatrix}=(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}+(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}=$$

$=-5+(3+2)=-5+5=0$

$$\det\begin{pmatrix}3&5&-1\\1&1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}=(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}5&-1\\1&-2\end{pmatrix}+(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}3&-1\\1&-2\end{pmatrix}=$$

$$=-(-10+1)+(-5+1)=-(-9)+(-4)=9-4=5$$

Quindi $rg(A)\leq 3$, e visto che esiste un minore non nullo di ordine 3 allora $rg(A)=3$

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&2&5\\4&-1&2\\3&3&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&2&5\\4&-1&2\\3&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&5\\4&-1&2\\3&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-4R_1}$$

il pivot deve essere sempre necessariamente 1

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&5\\0&-5&2\\3&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\leftarrow R_5-3R_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&5\\0&-5&2\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&5\\0&0&1\\0&-5&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4+5R_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&5\\0&0&1\\0&0&27\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&5\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=rg(B)=3$$

2) Matrici invertibili sse $\det(M)\neq 0$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=-(-1)=1\neq 0$$

$$A|I=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\2&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\2&0&1&1&0&0\end{array}\right)-$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2} R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

1 Stabilire se esiste app. lineare $\ker(f) = \{2x_2 - x_4 = 0,\ x_1 - 2x_3 + x_4 = [illegible]\}$

$\operatorname{Im}(f) = \{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

Poiché $\ker(f) \supseteq K$, abbiamo che $\dim(\ker f) \geq \dim K$
$\dim(\operatorname{Im} f) \geq \dim(A)$

$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) \geq \dim(A) + \dim([illegible]) \leq 4$

Per trovare una base, isoliamo una delle [illegible]

$$\begin{cases} x_4 = 2x_2 \\ x_1 = 2x_3 - x_4 \to 2x_3 - 2x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 2x_2 \\ x_1 = 2x_3 - 2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_3 - 2x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 1 \\ 0 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

verifichiamo che sono linearmente indipendenti

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

sono lin. indip.

Adesso trovo una base dell'immagine $\to x_3 = x_1 + x_2 \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Verifichiamo che siano lin. indip. $\rightarrow a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ ✓

2) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sia $B = v_1, v_2, v_3$. Verificare che è base di $\mathbb{R}^3$

Per verificare che sia una base, dobbiamo verificare che siano lin. indip.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1+1) = 2 \neq 0$$

Dalla definizione di matrice di cambiamento di coordinate

$$M^B_B(id) = M^E_E(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adesso riscriviamo ogni vettore usando i vettori delle basi canoniche:

$$v_1 = e_1 + 2e_2 + 0e_3 \mid v_2 = 0e_1 + e_2 + e_3, \; v_3 = 0e_1 + (-1)e_2 + e_3$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare $M^E_B(id)$, inverto $M^B_E(id)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Per calcolare rispetto a $\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}$, moltiplico la matrice data

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1/2 & 1/2\\ 1 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2+6\cdot 0+2\cdot 0\\ -1\cdot 2+6\cdot 1/2+2\cdot 1/2\\ 1\cdot 2-1/2\cdot 2+1/2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

3 $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}z-x\\y-x\\z\end{pmatrix}$

M_E^E? Per calcolarla, applico la funzione data a ciascuna base canonica

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1\\0-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix};\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-0\\1-0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0\\0-0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Le immagini delle basi formano $M_E^E(f)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

f è un isomorfismo?

Allora, innanzitutto verifichiamo il nucleo uguagliando le componenti della funzione a 0.

$$\begin{pmatrix}-x+z\\ y-x\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x+z=0\\ y-x=0\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ allora è iniettiva

Adesso calcoliamo dim Im f, che in questo caso deve essere uguale a 3 per essere suriettiva, ovvero la dimensione dell'insieme

$$3=\dim\mathbb{R}^3=\dim\ker f+\dim \mathrm{Im} f=0+\dim\mathrm{Im} f$$

1 Trovare gli autovalori reali

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ → per autovalore si fa il polinomio caratteristico

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 2 & -1-x & 1 \\ 3 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}(1-x)\det\begin{pmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$= (1-x)((2-x)(-1-x) - 1) =$$
$$= (1-x)(2+x-2x+x^2-1) =$$
$$= -(x-1)(x^2-x-1)$$

$$-(x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

$a = 1 \quad b = -1 \quad c = -1$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3+2 = 5$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 2 & 1 & 3-x \end{pmatrix} = (-1)^{2+2}(1-x)\det\begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ 2 & 3-x \end{pmatrix} = (1-x)((1-x)(3-x)+2) =$$
$$= (1-x)(3-3x-x+x^2+2) =$$
$$= (1-x)(5-4x+x^2) =$$
$$= (1-x)(x^2-4x+5)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 5 = -4$$

② Trovare autovalori, autospazi.

$$\chi_A(x) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-x & -1 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 2 & -1 & -x \end{pmatrix} = (-1)^{2+2}(1-x)\det\begin{pmatrix} 3-x & -1 \\ 2 & -x \end{pmatrix} =$$

$$= (1-x)((3-x)(-x)+2) = (1-x)(-3x+x^2+2) = (1-x)(x-1)(x-2) = -(x-1)^2(x-2)$$

$\alpha_1 = 1 \quad m(\alpha_1) = 2$

$\alpha_2 = 2 \quad m(\alpha_2) = 1$

$$V_1 = \ker(A - I_3) = \ker\begin{pmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \to z = 2x - y$$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Adesso calcoliamo con il secondo autovalore

$$V_2 = \ker(A - I_3) = \ker\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & -1 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x-y-z=0 \\ -y=0 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ -y=0 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x-z=0 \to x=z \\ 2z-2z=0 \end{cases} \to \begin{cases} z=x \\ y=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Nel caso in cui sono diagonalizzabili, calcolarle

$mg(\lambda_1) = \dim(V_{\lambda_1}) = 2 = ma(\lambda_1)$ quindi $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$, ovvero A é diagonalizzabile

$$D = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}; \quad A = P^{-1}DP \text{ con } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1 $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; U = \text{Span}(u, v)$

$\to$ Trovare $V = U^\perp = \{\langle x, w \rangle = 0\}$

Non abbiamo w, quindi lo definiamo come vettore generico $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$V = \left\{\langle u, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\rangle = 0 = \langle v, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\rangle\right\}$ = calcoliamo i due prodotti scalari

$$\langle u, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\rangle = \langle\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\rangle = (-1)(x) + (-1)(y) = x + y = 0$$

$$\langle v, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\rangle = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\rangle = x + z = 0$$

Adesso isoliamo l'unica variabile simile tra le due

$$y = -x \quad z = -x \quad \to (x, -x, -x) = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2 Trovare una base B di $\mathbb{R}^3$ t.c. $B = B_U \cup B_V$

Innanzitutto, avendo $U = \text{Span}(u, v)$, dobbiamo verificare che siano linearmente indipendenti

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -a+b=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \quad ✓$$

Quindi $B_U = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $B_V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Per $B_U \cup B_V = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -a+b+c=0 \\ +a+c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = c = 0 \\ b = c = 0 \\ -c+c+c=0 \end{cases}$$

$\to$ Calcolare proiezioni ortogonali $\pi_U(x)$ e $\pi_V(x) \to \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per farlo, dobbiamo usare la formula di Gram-Schmidt

$$e_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(-1,-1,0)}{\sqrt{1^2+1^2}} \sim \frac{(-1,-1,0)}{\sqrt{2}}$$

$$\text{proj}_{e_1}(v) = \langle v, e_1 \rangle e_1 = (1,0,1)\frac{(-1,-1,0)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(-1,-1,0)}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}(-1,-1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$v_2 = v - \text{proj}_{e_1}(v) = (1,0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$e_2 = \|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{1+1+4}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Quindi la base ortonormale è formata da e_1 e e_2

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0) \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$$

Calcoliamo adesso la proiezione ortogonale $\pi_U(x)$

$$\pi_U(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2$$

$$\langle x, e_1 \rangle = (2,3,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(-2-3) = -\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\to -\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = -\frac{5}{2}(-1,-1,0) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\langle X, e_2\rangle = (2,3,0), \frac{1}{\sqrt6}(1,-1,2) = \frac{1}{\sqrt6}(2-3+0) = -\frac{1}{\sqrt6}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{1}{\sqrt6}(1,-1,2) = -\frac{1}{6}(1,-1,2) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right)$$

$$\pi_U(X) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right) + \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right) = \left(\frac{15-1}{6}, \frac{15+1}{6}, -\frac{2}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Adesso per calcolare $\pi_V(x)$ possiamo usare $x = \pi_U(X) + \pi_V(X)$

$$\Downarrow$$

$$\pi_V(x) = x - \pi_U(x)$$

$$(2,3,0) - \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{6-7}{3}, \frac{9-8}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

2) Esistono u, v appartenenti alla sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$ t.c. $\langle u, v\rangle = -\frac{1}{2}$?

a) Si
b) No, vale sempre $\langle u, v\rangle \geq 0$
c) É possibile solo se u, v sono ortogonali
d) É possibile solo se u, v sono colineari

Sfera unitaria: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

La sfera unitaria e' l'insieme dei vettori con norma 1 $\|u\| = \|v\| = 1$

Il prodotto scalare tra due vettori unitari é $\langle u, v\rangle = \|u\| = \|v\| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$

$$\Downarrow$$

$$\|u\| = \|v\| = 1$$

É possibile avere $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$? $\rightarrow \cos(120°) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

→ il prodotto scalare puó essere negativo, dipende dall'angolo
→ se fossero ortogonali, sarebbe $\langle u, v\rangle = 0$
→ se fossero colineari: stesse direzioni = 1
direzioni opposte = -1

④ $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, w\in\mathbb{R}^3$ t.c. $v\wedge w=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Il prodotto vettoriale tra due vettori è nullo se e solo se i vettori sono colineari

① $\pi=\{2x-y+3z=0\}$ piano di $\mathbb{R}^3$, sia $v\in\mathbb{R}^3$ t.c. $v\perp\pi$. base ortogonale?

Innanzitutto, prima si calcola una base di π:

$$\pi=\{y=2x+3z\}\to\left\{\begin{pmatrix}x\\2x+3z\\z\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}x\\2x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3z\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Adesso calcoliamo un vettore ortogonale a questi due con il prodotto vettoriale

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\\1&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}=(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}e_2&e_3\\3&1\end{pmatrix}+(-1)^{2+2}2\det\begin{pmatrix}e_1&e_3\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=(-1)(e_2-3e_3)+2(e_1)=-e_2+3e_3+2e_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Visto che $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ è perpendicolare, allora vuol dire che $v=\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

Adesso dobbiamo verificare se i vettori dati sono ortogonali. Solo se il prodotto scalare tra essi è uguale a zero.

$$\to\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=(1\cdot-1)+(2\cdot1)+(0\cdot1)=-1+2=1$$

$$\to\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-3\\-5\end{pmatrix}\right\rangle=(1\cdot6)+(2\cdot-3)+(0\cdot-5)=6-6=0\to\text{ortogonali}$$

$$\to\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=(1\cdot1)+(0\cdot1)+(0\cdot1)=0$$

Quindi $\left\langle\begin{pmatrix}2\lambda\\-\lambda\\3\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-3\\-5\end{pmatrix}\right\rangle$ potrebbe essere una base. Verifichiamo se esistono dei valori per cui sono lin. indip.

$$\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 6 \\ -\lambda & 2 & -3 \\ 3\lambda & 0 & -5 \end{pmatrix} = (-1)^{3+1}(3\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}(-5)\det\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\lambda(-3-12) - 5(4\lambda+\lambda) = 3\lambda(-15) - 5(5\lambda) = -45\lambda - 25\lambda \neq 0$$

2) $r = \begin{cases} x = -1 \\ y = t+1 \\ z = t-1 \end{cases}$ Per verificare se passa dall'origine devo trasformare la retta in forma parametrica

$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{termini noti}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{vettore direzionale}}$$

Può essere perpendicolare a $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

per verificarlo, verifichiamo che $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$= (0\cdot 1) + (1\cdot -1) + (1\cdot 1) = 0$ quindi sono ortogonali, quindi é vero

3) Siano r una retta, e π un piano di $\mathbb{R}^3$. Quando é possibile trovare una retta $s \subseteq \pi$ t.c. s sia sghemba a r?

Innanzitutto, iniziamo a definire una possibile equazione per il piano $\rightarrow \pi = p + \text{Span}(u,v)$.

E scriviamo anche le possibili rette $\rightarrow r = q + \text{Span}(w)$
$s = q' + \text{Span}(w')$

Visto che $s \subseteq \pi$, abbiamo che $q' \in \pi$, $w' \in \text{Span}(u,v)$. Dividiamo i casi:

Se $r \not\subseteq \pi$, allora $r \parallel \pi$, o $r \cap \pi = \{\text{punto}\}$, ovvero si intersecano
Se $r \subseteq \pi$, allora $q \in \pi$, e $w \in \text{Span}(u,v)$.

Per essere sghembe, devono essere per forza colineari.

$w, w' \in Span(v, u) \Rightarrow Span(w, w') = Span(u, v)$.

Dobbiamo quindi determinare se $\vec{qq'} = q' - q \notin Span(w, w')$.

$\vec{qq'} = (\cancel{p} + \lambda_1 u + \mu_1 v) - (\cancel{p} + \lambda_2 u + \mu_2 v) = u(\lambda_1 - \lambda_2) + v(\mu_1 - \mu_2) \in Span(w,w')$

Quindi, le rette sono sghembe solo se $r \notin \pi$

4) $Q_\alpha = \{x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0\}$ quadrica in $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

Visto che abbiamo un parametro reale, dividiamo i casi in due: dove questo parametro si può annullare, e dove invece non si annulla

↳ $\alpha = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 0 \rightarrow$ retta, quindi non va bene

↳ $\alpha \neq 0 \quad x^2 + y^2 = \alpha^2 x^2$

Un cono è una superficie generata da rette passanti per un vertice, ed intersecanti una curva direttrice non degenere

Coniche non vuote, $\det(\bar{A}) \neq 0$

Ellisse: $ax^2 + by^2 = 1 \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A) > 0$, $\det(\bar{A}) < 0$
circonferenza se $a = b$

Iperbole: $ax^2 - by^2 = 1 \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A) < 0$
equilatera se $\det(A) < 0$, $a_{11} = -a_{22}$

Parabola: $ax^2 = y \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = 0$

Coniche non vuote degeneri, $\det(\bar{A}) = 0$

se $\det(A) = 0 \rightarrow$ 2 rette parallele: $x^2 = a$
↳ ! retta: $x^2 = 0$

se $\det(A) < 0 \to 2$ rette incidenti: $x^2 = y^2$

se $\det(A) > 0 \to !$ punto: $x^2 + y^2 = 0$

① Quale conica rappresenta l'insieme delle soluzioni reali di $f(x,y)=0$

$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y - 8$

Rispetto a $f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c$.

$a_{11} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_{12} = \frac{-4}{2} = -2,\ b_1 = \frac{2}{2} = 1,\ b_2 = -\frac{4}{2} = -2,\ c = -8$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 4 - (-2)(-2) = 0$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \\ b_1\ b_2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -8 \end{pmatrix} = \det = 0$$

Quindi è una conica degenere, e per capire se sono 2 rette parallele o una retta, calcoliamo

$\alpha = -a_{11}c - a_{12}c + b_1^2 + b_2^2 = 8 + 32 + 1 + 4 = 45$

$\hookrightarrow$ 2 rette parallele

Per determinarle:

$$\underbrace{x^2 + 4y^2 - 4xy}_{(x-2y)^2}\ \underbrace{+2x - 4y - 8}_{2(x-2y)} = \left[(x-2y)^2 - 4\right] + \left(2(x-2y) - 4\right] =$$

$$= \left[(x-2y-2)(x-2y+2)\right] + 2(x-2y-2) =$$

$$= (x-2y-2)\left[x-2y+2+2\right] = (x-2y-2)(x-2y+4) = 0$$

Allora $e_1 = x - 2y - 2 = 0$ e $e_2 = x - 2y + 4 = 0$