KKT

Si applica a un problema min f(x) soggetto g(i)(x) ≤ 0 dove:

- f(x) è la funzione obiettivo da minimizzare
- Vincoli di disuguaglianza
- X è il vettore delle variabili decisionali

Per un punto x essere candidato a una soluzione ottima deve soddisfare le seguenti condizioni:

- **Condizione di stazionarietà:** il gradiente della funzione obiettivo deve essere una combinazione lineare dei gradienti dei vincoli.
- **Condizione di ammissibilità**: il punto x deve rispettare tutti i vincoli del problema
- **Condizioni di complementarità**: se un vincolo non è attivo, il moltiplicatore associato deve essere zero
- **Condizioni di non negatività dei moltiplicatori**: i moltiplicatori associati ai vincoli di disuguaglianza devono essere non negativi.

$$\nabla f(x') + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$ STAZIONARIETÀ

$$g_i(x^*) \leq 0$$ AMMISSIBILITÀ

$$\mu_i g_i(x^*) = 0$$ COMPLEMENTARITÀ

$$\mu_i \geq 0$$ NON NEGATIVITÀ MOLTIPLICATORI

Strategia

- **Caso 1**: nessun vincolo attivo, con tutti i moltiplicatori uguale a 0 per tutti gli i. Questo riduce il problema a uno non vincolato
- **Caso 2**: solo alcuni vincoli sono attivi, e bisogna analizzare tutte le combinazioni possibili. Si pongono i **vincoli attivi** uguali a zero, e per quelli **non attivi** si pone il moltiplicatore a zero
- **Caso 3**: tutti i vincoli sono attivi

ES. $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2 \rightarrow f(x)$

$x^2 + 4y^2 - 4 \leq 0 \rightarrow g(x)$

Lagrangiana: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) =$
$(x+1)^2 + y^2 + \lambda(x^2+4y^2-4)$

Derivate parziali: $\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x+1) + 2\lambda x = 0$

$x+1+\lambda x = 0$

$x + \lambda x = -1$

$x(\cancel{1+\lambda}) = \frac{-1}{1+\lambda}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 8\lambda y = 0$

$y(2+8\lambda) = 0$

$\cancel{2}y(1+4\lambda) = 0$

$\overline{\quad 2 \quad}$

Condizione KKT: $x^2 + 4y^2 - 4 \leq 0$ → VINCOLO
$\lambda(x^2+4y^2-4) = 0$ → complementarità
$\lambda \geq 0$ → non negatività

Hessiana: usata per capire se un punto é minimo, massimo o sella

↳ CONVESSA: matrice semidefinita positiva nel dominio
minori principali sono non negativi

Se il problema e' di min, qualsiasi punto che soddisfa le condizioni KKT é un minimo glo

↳ STRETTAMENTE CONVESSA: positiva nel dominio. Minori principali sono strettamente positivi

Se esiste un'unica soluzione KKT, é il minimo globale

↳ CONCAVA: minori principali sono non positivi
(o autovalori)

Se il problema é di massimizzazione, qualsiasi punto che soddisfa le condizioni é un massimo globale

↳ NÉ CONVESSA : indefinita, autovalori positivi e negativi
NÉ CONCAVA

NE CONCAVA

AUTOVALORI $\det(A-\lambda I)=0$ → radici sono gli autovalori della matrice

Matrice hessiana $\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2$ $\frac{\partial f}{\partial y}=2y-2$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$

prima si deriva per x poi per y ← $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=0$ $H(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}=\dots$

Minori → 1^o minore: $M_1(2)\geq 0$

2^o minore: $M_2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}:\det(H)=(2)(2)-(0)(0)=4\geq 0$

Quindi essendo ≥ 0 e min,

Analisi dei casi

1^o CASO: $\lambda=0$ → non ci sono vincoli attivi

Adesso prendo le derivate parziali e ci sostituisco $\lambda=0$ per trovare un punto candidato

$x=\frac{-1}{1+0}=-1$ $y(1+4\lambda)=0=0$ $P(-1,0)$

Poi bisogna verificare che il punto soddisfi il vincolo, anche se non attivo

$(-1)^2+4(0^2)-4\leq 0 \rightarrow -3\leq 0$ ✓

Visto che è soddisfatto, sostituisco nella fz obiettivo

$f(-1,0)=(-1+1)^2+0^2=0$

Visto che la fz è convessa (dalla matrice hessiana), può essere un minimo globale

→ $x^2+4y^2-4=0$ ⟶ vincolo attivo

$2y(1+4y)=0$ come equazione di primo ordine, perché è più semplice

↓

$y=0 \quad x^2+4(0)^2-4=0 \to x^2-4=0 \to x^2=4$
$x=\pm 2$

Quindi abbiamo i punti $(2,0)$ e $(-2,0)$, e sostituisco i punti all'interno della prima equazione

↓ $(2,0)$: $x=\frac{-1}{1+\lambda} \longrightarrow 2=\frac{-1}{\cancel{1+\lambda}}\cdot\cancel{1+\lambda}$

Non soddisfa la condizione $\lambda \geq 0$, quindi non è valido

$(1+\lambda)2=-1$
$2+2\lambda=-1$
$\cancel{2}\lambda=\frac{-3}{2}$

↓ $(-2,0)$: $x=\frac{-1}{1+\lambda} \longrightarrow -2=\frac{-1}{\cancel{1+\lambda}}\cdot\cancel{1+\lambda}$

Non soddisfa la condizione $\lambda \geq 0$, quindi non è valido

$(1+\lambda)-2=-1$
$-2-2\lambda=-1$
$-2\lambda=-1+2$
$\frac{-2\lambda}{-2}=\frac{1}{-2}$

QUESTI PUNTI POSSONO NON ESSERE VALIDI PER IL MINIMO, MA PER IL MASSIMO SI

↓

$1+4\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1/4$

$x=\frac{-1}{1-1/4}=\frac{-1}{\frac{4-1}{4}}=\frac{-1}{3/4}=-4/3$

Sostituisco il punto all'interno del vincolo per trovare y

$x^2+4y^2-4=0 \to (-4/3)^2+4y^2-4=0$

$16/9 + 4y^2 - 4 = 0$

$\frac{16-36}{9} + 4y^2 = 0 \qquad \frac{\cancel{4}y^2}{4} = \frac{\cancel{20}^{5}}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Quindi tutti i punti candidati da confrontare sono:

$(x+1)^2 + y^2$

$(-1, 0), \; f(-1,0) = 0$ → Caso 1: $\lambda = 0$
minimo perché ≥ 0

Massimi, poiché $\lambda < 0$:

$(2, 0), \; f(2,0) = (2+1)^2 + 0^2 = 9$

$(-2, 0), \; f(-2,0) = (-2+1)^2 + 0^2 = 1$

$\left(-\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}+1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \left(\frac{-4+3}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} =$

$= \left(\frac{1}{9}\right) + \frac{5}{9} = \frac{\cancel{6}^2}{\cancel{9}_3} = \frac{2}{3}$

$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$ uguale quindi $\frac{2}{3}$

Quindi minimo in $(-1, 0)$ con 0
massimo in $(2, 0)$ con 9