INSIEMI LIMITATI

Superiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M \ \forall x \in X$

Inferiormente se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq m \ \forall x \in X$

Limitato se é limitato superiormente ed inferiormente

MAGGIORANTE E MASSIMO

$M \in \mathbb{R}$ é **maggiorante** per X se $x \leq M \ \forall x \in X$

M é il **massimo** di X, se M é un maggiorante ed appartiene all'insieme

ESTREMO SUPERIORE ED INFERIORE

Dato $X \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente, detto M_X l'insieme dei suoi maggioranti, **estremo superiore** di X il più piccolo dei maggioranti, ovvero $\sup X = \min M_X$

Si dice **estremo inferiore** di X il più grande dei minoranti, cioé $\inf X = \max M'_X$

MONOTONIA SUCCESSIONI

$\{a_n\}$ crescente $\{a_n\} < \{a_{n+1}\}$ $\{a_n\}$ decrescente $\{a_n\} > \{a_{n+1}\}$

MONOTONIA FUNZIONI

$f(x)$ crescente $x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$; $f(x)$ decrescente $x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)$

SUCCESSIONE CONVERGENTE

$\lim a_n = a$ $\forall \varepsilon > 0$ si ha $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ definitivamente

SUCCESSIONE DIVERGENTE

$\lim a_n = +\infty$ $\forall k \subset \mathbb{R}$ si ha $a_n > k$ definitivamente

UNICITÀ DEL LIMITE
$\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ tenda ad a, a' per n che tende a $+\infty$. Allora $a = a'$

PERMANENZA DEL SEGNO
$a_n \to a$. Valgono i risultati:
- se $a > 0$ o $a = +\infty$ allora $a_n > 0$ definitivamente
- se $a_n > 0$ definitivamente allora $a \geq 0$, o $a = +\infty$

OPERAZIONI SUI LIMITI
$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali tali che $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$
- $\lim a_n \pm b_n = a \pm b$
- $\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- $\lim a_n / b_n = a/b$ purché $b != 0$

ESISTENZA DEL LIMITE PER SUCCESSIONI MONOTONE
Ogni successione monotona è regolare.
- a_n crescente $\to \lim_{n \to +\infty} a_n = \sup a_n$
- a_n decrescente $\to \lim_{n \to +\infty} a_n = \inf a_n$
- a_n monotona e limitata $\Rightarrow a_n$ convergente

PRIMO TEOREMA DEL CONFRONTO
$a_n \to a$, $b_n \to b$ due successioni regolari
- se $a > b$ allora $a_n > b_n$ definitivamente
- se $a_n \geq b_n$ allora $a \geq b$ definitivamente

SECONDO TEOREMA DEL CONFRONTO
Date $a_n, b_n, c_n \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente
$\lim a_n = \lim c_n = \ell$, allora $\lim b_n = \ell$

CRITERIO DEL RAPPORTO
a_n a valori reali definitivamente positiva

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \; [0; +\infty) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{se } \ell < 1 \text{ allora } a_n \to 0 \\ \text{se } \ell > 1 \text{ allora } a_n \to +\infty \\ \text{se } \ell = 1 \text{ non definiamo nulla} \end{array}$$

CRITERIO DELLA RADICE
a_n a valori reali definitivamente positiva

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell \; [0; +\infty] \Rightarrow \begin{array}{l} \text{se } \ell < 1 \text{ allora } a_n \to 0 \\ \text{se } \ell > 1 \text{ allora } a_n \to +\infty \\ \text{se } \ell = 1 \text{ non definiamo nulla} \end{array}$$

PRINCIPIO D'INDUZIONE

$P(n)$ una proprietà che dipende dalla variabile n. Se:

- esiste $n_0 \geq 0$ t.c. $P(n_0)$ sia vera
- per ogni $n \geq n_0$ vale $P(n)$ vera $\Leftrightarrow$ $P(n+1)$ vera

allora P_n è vera per ogni $n \geq n_0$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ \nexists & \text{se } a\leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \end{cases}$$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI $P_n = (1+x)^n \geq 1+nx$

LIMITE NOTEVOLE $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $\quad\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

GERARCHIA INFINITI $\ln n < n^a < a^n < n! < n^n$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ se $a \leq 1$ diverge, se $a>1$ converge | $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln^b}$ se $a=1$ $b>1$ converge, se $a>1$ $b\in\mathbb{R}$ converge

SERIE GEOMETRICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } q>1 \\ \text{converge} & \text{se } 0<q<1,\ S=\frac{1}{1-q} \\ \text{irregolare} & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$$

si deve partire da 0

SERIE TELESCOPICHE (Mengoli)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

SERIE A TERMINE GENERALE NON NEGATIVO

Sia $\sum a_n$ una serie tale che $a_n \geq 0$, $\sum a_n$ è regolare

TEOREMA DEL CONFRONTO

Sia $\sum a_n$ e $\sum b_n$: a_n e $b_n \geq 0$, con $a_n \leq b_n$

se $\sum a_n$ diverge anche $\sum b_n$ diverge

se $\sum b_n$ converge anche $\sum a_n$ converge

CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA

Sia $\sum a_n$ una serie convergente allora $\lim a_n = 0$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n > 0$. Se esiste

Se esiste $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in [0, +\infty]$

1. se c é finito, $0 < c < +\infty$, le due serie hanno lo stesso carattere
2. se $c = 0$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge
3. se $c = 0$ e $\sum a_n$ diverge allora $\sum b_n$ diverge
4. se $c = +\infty$ $\sum a_n$ converge allora $\sum b_n$ converge
5. se $c = +\infty$ $\sum b_n$ diverge allora $\sum a_n$ diverge

CRITERIO DEL RAPPORTO

Serie $\sum a_n$ con $a_n > 0$. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora:
- se $l < 1$ serie convergente
- se $l > 1$ serie divergente
- se $l = 1$ non definiamo nulla

CRITERIO DELLA RADICE

Serie $\sum a_n$ con $a_n > 0$. $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$
- se $l < 1$ serie convergente
- se $l > 1$ serie divergente
- se $l = 1$ non definiamo nulla

CRITERIO DI CONDENSAZIONE

Serie $\sum a_n$ con $a_n > 0$ e decrescente; allora $\sum a_n$ e $\sum 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere

TEOREMA DI ASSOLUTA CONVERGENZA

Se $\sum |a_n|$ converge allora $\sum a_n$ converge assolutamente

CRITERIO DI LEIBNITZ

Serie $\sum -1^n a_n$ se:
- $a_n \geq 0$
- a_n decrescente definitivamente
- a_n tende a 0

allora $\sum -1^n a_n$ converge

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

lo é x_0 di X se $\forall \varepsilon > 0 \quad X \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

PUNTO ISOLATO

lo é x_0 di X se $\forall \varepsilon > 0 \quad X \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) = \{x_0\}$

PUNTO INTERNO AD X

lo é x_0 ad X se $\forall \varepsilon > 0 \quad (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq X$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \; \forall x \geq k$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \; \forall x \geq k$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $(\ell-\varepsilon) \leq f(x) \leq (\ell+\varepsilon) \; \forall x \geq k$

$-\infty \quad \forall x \leq k$

CONTINUITÁ continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

CARATTERIZZAZIONE LIMITI CON SUCCESSIONI $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ pto di accumulazione di X e $f: X \to \mathbb{R}$ una fz. Allora:

- $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$
- $\forall x_n \subset X \setminus \{x_0\}$

UNICITÁ DEL LIMITE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ estesa, allora il limite é unico

OPERAZIONI ALGEBRICHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ $\Rightarrow$
1. $\lim f(x) \pm g(x) = a \pm b$
2. $\lim f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$
3. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$

LIMITE FUNZIONE COMPOSTA

$X, Y \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ pto di accumulazione di X e $y_0 \in \mathbb{R}$ pto di accumulazione di Y t.c. $\exists r > 0$, con

$f(x) \neq y_0 \quad \forall x \in X \cap (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$

Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l$, allora $\exists \lim g(f(x)) = l$

PROPRIETÁ DEI LIMITI

$X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ pto di accumulazione di X, $f: X \to \mathbb{R}$ t.c. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

» Permanenza del segno

Se $l > 0$, $l = +\infty$, allora $\exists r > 0$ t.c.
$\forall x \in X \cap (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ risulta $f(x) > 0$

Se $\exists r > 0$ t.c. $\forall x \in X \cap (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) > 0 \Rightarrow l \geq 0$

» Limitatezza locale

Se $l \in \mathbb{R}$, allora $\exists r > 0$ e $H > 0$ t.c.
$\forall x \in X \cap (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ risulta $|f(x)| \leq H$

1° DEL CONFRONTO

$X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. $f, g: X \to \mathbb{R}$ t.c. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$

1. Se $a > b$, allora $\exists r > 0$ t.c.
$\forall x \in X \cap (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > g(x)$

2. Se $\exists r > 0$ t.c. $\forall x \in X \cap (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) > g(x)$, allora $a \geq b$

2° DEL CONFRONTO

$X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ pto di accumulazione. $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ t.c.

① $\exists r > 0$ t.c. $\forall x \in X \cap (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ abbia $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

② $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$. Allora $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ | $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ | $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ | $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ | $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{arctg(x)}{x} = 1$ | $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ | $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$ | $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$

DISCONTINUITÀ

$f : X \to \mathbb{R}$ f2, $x_0 \in X$ pto di accumulazione di X

f è di continua in x_0, se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, con $\ell \neq f(x_0)$, o se $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

1. 3° SPECIE ELIMINABILE se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, con $\ell \neq f(x_0)$)

2. 1° SPECIE se $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$, x_0 è un pto di accumulazione sia a dx sia a sx,

   $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, $\ell_1 \neq \ell_2$

   $\ell_2 - \ell_1$ è il salto di f in x_0

3. 2° SPECIE in tutti gli altri casi.

PROPRIETÀ FZ CONTINUE

CARATTERIZZAZIONE DELLA CONTINUITÀ CON LE SUCCESSIONI

f è continua in x_0 sse $\forall$ successione $x_n \subset X$, con $\lim_{x \to +\infty} x_n = x_0$

risulta $\lim_{x \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$

PERMANENZA DEL SEGNO

$f, g: X \to \mathbb{R}$ fz continue in $x_0 \in X$. Se $f(x_0) > 0$, allora $\exists r > 0$ t.c.

$\forall x \in X \cap (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ $f(x) > 0$

OPERAZIONI

$f, g: X \to \mathbb{R}$ due fz continue in $x_0 \in X$. Allora $|f|, f \pm g, f \cdot g$ sono continue in x_0

se $g(\{x_0\}) \neq 0$, allora anche f/g è continua in x_0

CONTINUITÀ DELLA FZ COMPOSTA

$f: X \to \mathbb{R}$ fz continua in $x_0 \in X$, $g: Y \to \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$ fz continue in $y_0 = f(x_0) \in Y$. Allora $g \circ f$ è continua in x_0

WEIERSTRASS

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora:

$$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] \text{ t.c. } \forall x \in [a,b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

TEOREMA DEGLI ZERI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fz continua in $[a,b]$ t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$. $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) = 0$

f è strett. monotona in $[a,b]$, allora $\exists$ unico $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) = 0$

TEOREMA VALORI INTERMEDI

I un intervallo $f: I \to \mathbb{R}$ fz continua in I. f assume in I tutti i valori compresi tra $m = \inf\{f(x) : x \in I\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in I\}$

$\forall y_0 \in (m, M)\ \exists x_0 \in I$ t.c. $f(x_0) = y_0$

CONTINUITÀ FZ MONOTONE

$f: I \to \mathbb{R}$ fz monotona nell'intervallo I. Proprietà equivalenti:

f è continua in I ; $f(I)$ è un intervallo

CONTINUITÀ FZ INVERSA

$f: I \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona in I.

Allora $f^{-1}: f(I) \to I$ è continua in $f(I)$

DERIVATA

Se $\exists$ finito $\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)$, $f(x)$ è derivabile in x_0

RETTA TANGENTE

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $\qquad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

DERIVAZIONE FZ COMPOSTA

$I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ t.c. $f(I) \subset J$

Se f è derivabile in $x_0 \in I$, g derivabile in $y_0 = f(x_0) \in J$, allora la fz $g \circ f$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x_0)}$