

Esercizi semplice 1

$$\max z = 40x + 50y$$

$$1x + 2y \leq 60$$

$$4x + 3y \leq 120$$

$$x, y \geq 0$$

$$-60x - 50y = 0$$

$$1x + 2y + 5z = 60$$

$$4x + 3y + 5z = 120$$

	x	y	s ₁	s ₂	sol.
z	-40	-50	0	0	0
s ₁	1	2	1	0	60
s ₂	4	3	0	1	120

$\Rightarrow 60/2 = 30$
 $\Rightarrow 120/3 = 40$

pivot

sol
abundant

$$\text{Nuova riga pivot} = \frac{\text{vecchia riga pivot}}{\text{elemento pivot}} \Rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, 20 \right]$$

Nuova : vecchia - $\left[\begin{array}{cc} \text{vecchio} & \text{coefficiente} \\ \text{colonna} & \text{pivot} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} \text{nuova} & \text{riga} \\ & \text{pivot} \end{array} \right]$

$$z' = -40 - (-50) \cdot 0.5, -50 - (-50) \cdot 1, 0 - (-50) \cdot 0.5, 0 - (-50) \cdot 0, \\ 0 - (-50) \cdot 20 = [-15, 0, 25, 0, 1000]$$

vecchio
coeff. = 50

$$S_2 = 6-3 \cdot 0.5, 3-3 \cdot 1, 0-3 \cdot 0.5, 1-3 \cdot 0, 20-3 \cdot 20 \quad \text{wechlo}$$

$$= (2.5, 0, -1.5, 1, 60) \quad \text{coeff.} = 3$$

	x	y	S ₁	S ₂	Sol.
z	-15	0	25	0	1000
y	0.5	1	0.5	0	20
S ₂	2.5	0	-1.5	1	60

$20 / 0.5 = 40$
 $60 / 2.5 = 24$

$$x' = \frac{2.5}{2.5}, \frac{0}{2.5}, \frac{-1.5}{2.5}, \frac{1}{2.5}, \frac{60}{2.5} = 1, 0, -0.6, 0.4, 24$$

$$z' = -15 - (-15) \cdot 1, 0 - (-15) \cdot 0, 25 - (-15) \cdot (-0,6),$$

$$0 - (-15) \cdot (0,4), 1000 - (-15) \cdot 24 =$$

$$= 0, 0, 16, 6, 1360$$

vecchio coeff.
= 15

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

$$y = 0.5 - 0.5 \cdot 1, 1 - 0.5 \cdot 1, 0.5 - 0.5 \cdot (-4, 0), \\ 0 - 0.5 \cdot 0.4, 20 - 0.5 \cdot 24 = \\ [0, 1, 0.8, -0.2, 8]$$

vecchio coeff.
0.5

| | x | y | s ₁ | s ₂ | sol. |
|---|---|---|----------------|----------------|-------------------------|
| z | 0 | 0 | 16 | 6 | 1360 ⇒ 1360 sol. ottima |
| y | 0 | 1 | 0.8 | -0.2 | 8 |
| x | 1 | 0 | -0.6 | 0.4 | 24 |

PROBLEMA 2

$$\begin{aligned} \text{Max } 3x + 5y & \quad z - 3x - 5y = 0 \\ x - y \leq 1 & \quad x - y + s_1 = 0 \\ 2x - y \leq 4 & \quad 2x - y + s_2 = 4 \\ -2x + y \leq 1 & \quad -2x + y + s_3 = 1 \\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$

| | x | y | s ₁ | s ₂ | s ₃ | sol. |
|----------------------------|----|----|----------------|----------------|----------------|------|
| z | -3 | -5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| s ₁ | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| s ₂ | 2 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| y ^{s₃} | -2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

$$0/-1 = 0$$

$$4/-1 = -4 \Rightarrow \text{È NEGATIVO QUINDI NON SI PUÒ}$$

$$1/1 = 1$$

$$y' = \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = [-2, 1, 0, 0, 1, 1]$$

$$\text{Nuova riga} = \text{vecchia riga} - \left(\begin{matrix} \text{vecchio coeff.} \\ \text{columna pivot} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{nuova riga} \\ \text{pivot} \end{matrix} \right)$$

$$z' = -3 - (-5 \cdot -2), -5 - (-5 \cdot 1), 0 - (-5 \cdot 0), \\ 0 - (-5 \cdot 0), 0 - (-5 \cdot 1), 0 - (-5 \cdot 1) = \\ = [-13, 0, 0, 0, 5, 5]$$

vecchio
coeff. = -5

$$s_1' = 1 - (-1 \cdot -2), -1 - (-1 \cdot 1), 1 - (-1 \cdot 0), 0 - (-1 \cdot 0), \\ 0 - (-1 \cdot 1), 0 - (-1 \cdot 1) = [-1, 0, 1, 0, 1, 2]$$

vecchio
coeff. = -1

$$s_2' = 2 - (-1 \cdot -2), -1 - (-1 \cdot 1), 0 - (-1 \cdot 0),$$

vecchio

$$-2 \quad 1 - (-1 \cdot 0) \quad 0 - (-1 \cdot 1) \quad 1 - (-1 \cdot 1) =$$

$$[0, 0, 0, 1, 1, 5]$$

coeff.: -1

| | x | y | s ₁ | s ₂ | s ₃ | sol |
|----------------|-----|---|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|
| z | -13 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| s ₁ | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 $2/-1 = \text{NO NEGATIVO}$ |
| s ₂ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 $5/0 = 0$ |
| y | -2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 $-2/1 = \text{NO NEGATIVO}$ |

ILLIMITATO perché non ci sono coeff. positivi nella colonna 1

PROBLEMA 3

$$\begin{aligned} \text{Min } -3x + 2y \\ x + y &\geq 1 \\ -x + y &\leq 2 \\ x - 3y &\leq 3 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Max } -3x + 2y = 0 \\ x + y - s_1 + A_1 &= 1 \\ -x + y + s_2 &= 2 \\ x - 3y + s_3 &= 3 \\ x, y, s_1, s_2, s_3, A_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

se è maggiore, devo togliere una surplus e mettere una artificiale

Visto che abbiamo una variabile artificiale, METODO DELLE DUE FASI

$$\text{Min } w = A_1 \Rightarrow \text{Max } w' = -A_1$$

$$\text{Prendo } A_1 \text{ dal vincolo: } A_1 = 1 - x - y + s_1$$

$$w' = -1 + x + y - s_1$$

$$\begin{aligned} w' - x - y + s_1 &= -1 \\ x + y - s_1 + A_1 &= 1 \\ -x + 2y + s_2 &= 1 \end{aligned}$$

| | x | y | s ₁ | s ₂ | A ₁ | sol |
|------------------|----|----|----------------|----------------|----------------|--------------------------------|
| w' | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| A ₁ | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 $1/1 = 1$ |
| y s ₂ | -1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 $1/2 \rightarrow \checkmark$ |

Nuova riga pivot:

$$\left[-\frac{1}{2}, 1, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right]$$

$$w' = -1 - (-1) \cdot (-\frac{1}{2}), -1 - (-1) \cdot 1, 1 - (-1 \cdot 0), \\ 0 - (-1) \cdot 0, -1 - (-1) \cdot 0.5] = [-1.5, 0, 1, 0.5, 0, -0.5]$$

vecchio coeff.
-1

$$A_1' = 1 - (1 \cdot -\frac{1}{2}), 1 - (1 \cdot 1), -1 - (-1 \cdot 0), \\ 0 - (1 \cdot \frac{1}{2}), 1 - (1 \cdot 0), 1 - (1 \cdot \frac{1}{2}) = [1.5, 0, -1, -0.5, 1, 0.5]$$

vecchio coeff.
1

| | x | y | s ₁ | s ₂ | A ₁ | sol. |
|----|------|---|----------------|----------------|----------------|------|
| w' | -1.5 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | -0.5 |
| x | 1.5 | 0 | -1 | -0.5 | 1 | 0.5 |
| y | -1/2 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 1/2 |

$$x = \frac{1.5}{1.5}, 0, \frac{-1}{1.5}, \frac{-0.5}{1.5}, \frac{1}{1.5}, \frac{0.5}{1.5} = [1, 0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$$

$$w' = -1.5 - (-1.5 \cdot 1), 0 - (-1.5 \cdot 0), 1 - (-1.5 \cdot -\frac{2}{3}), \\ 0.5 - (-1.5 \cdot -\frac{1}{3}), 0 - (-1.5 \cdot \frac{2}{3}), -0.5 - (-1.5 \cdot \frac{1}{3}) = [0, 0, 0, 0, 1, 0]$$

coeff.

$$y = -0.5 - (-0.5 \cdot 1), 1 - (-0.5 \cdot 0), 0 - (-0.5 \cdot -\frac{2}{3}), \\ \frac{1}{2} - (-0.5 \cdot -\frac{1}{3}), 0 - (-0.5 \cdot \frac{2}{3}), \frac{1}{2} - (-0.5 \cdot \frac{1}{3}) = [0, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$$

coeff.
-0.5

| | x | y | s ₁ | s ₂ | A ₁ | sol. |
|----|---|---|----------------|----------------|----------------|------|
| w' | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x | 1 | 0 | -2/3 | -1/3 | 2/3 | 1/3 |
| y | 0 | 1 | -1/3 | 1/3 | 1/3 | 2/3 |

visto che la riga ha coeff.
non negativi e la sol. è 0,
possiamo passare alla fase due