

Teoria ROPR

Problema di ottimizzazione formulabile con una funzione obiettivo, la **regione ammissibile** (insieme delle soluzioni ammissibili), **variabili decisionali** (variabili numeriche i cui valori identificano una soluzione del problema).

Ottimizzazione non vincolata: la ricerca del punto di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su tutto lo spazio di definizione.

Ottimizzazione vincolata: la ricerca del punto di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su un sottoinsieme proprio dello spazio di definizione della variabile di decisione

Ottimizzazione intera: le variabili assumono solo valori interi

Ottimizzazione binaria: le variabili assumono solo valore 0 o 1

Ottimizzazione mista: alcune variabili assumono valori interi mentre altre hanno solo variabili binarie.

Regione ammissibile: definita dall'insieme dei vincoli del problema. Se x appartiene a questa regione, allora è una soluzione ammissibile. Altrimenti, è inammissibile.

Un problema può essere illimitato, soluzione ottima unica o più di una soluzione ottima (anche infinite).

Risoluzione di un problema di Programmazione Matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia un **ottimo globale**, vale a dire un minimo e locale t.c.

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X \quad \text{se opt} = \min$$

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in X \quad \text{se opt} = \max$$

Un problema di ottimizzazione può avere più di un ottimo locale e più di un ottimo globale. Un punto di ottimo globale è anche di ottimo locale.

Vincoli funzionali di \leq : generalizzando al caso con n variabili decisionali ed m vincoli, si ottiene f_z obiettivo, vincoli funzionali, vincoli di non negatività:

- Z : valore della misura di prestazione
- x_j : livello dell'attività j
- c_j : incremento del valore della misura di prestazione Z corrispondente all'incremento di un'unità del valore dell'attività x_j
- b_i : quantità di risorsa i allocabile alle attività x_j
- a_{ij} : quantità di risorsa i consumata da ogni unità di attività

La regione ammissibile da un punto di vista geometrico corrisponde ad un **poliedro convesso**. La regione ammissibile può essere limitata (politopo) o illimitata.

- Il problema PL **ammette un'unica soluzione ottima in un vertice del poligono convesso** che delimita la regione ammissibile
- Il problema PL **ammette infinite soluzioni ottime in un lato del poligono convesso** che delimita la regione ammissibile se la direzione di decrescita è perpendicolare ad un lato del poligono
- Il problema PL **non ammette soluzione** perché la regione ammissibile è illimitata, e la funzione obiettivo è illimitata superiormente (massimizzazione) o illimitata inferiormente (minimizzazione).
- Il problema PL **non ammette soluzione** perché la regione ammissibile è vuota

Assunzioni implicite:

- **Proporzionalità**: il contributo di ogni variabile decisionale, al valore della funzione obiettivo, è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa
- **Additività**: ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali
- **Continuità/divisibilità**: qualunque valore delle variabili decisionali in R^n è accettabile, inclusi valori non interi che soddisfino i vincoli funzionali e i vincoli di non negatività
- **Certezza**: il valore assegnato ad ogni parametro è assunto essere noto o costante.

Metodo del simplesso

Procedura algebrica.

Vertici si trovano all'intersezione di coppie di frontiere di vincoli.

Per ogni problema di PL con n variabili decisionali, due **vertici** sono detti **adiacenti** se condividono $n-1$ frontiere di vincoli.

Due vertici **adiacenti** sono collegati da un segmento che giace sull'intersezione delle frontiere dei vincoli condivisi. Il segmento è chiamato **spigolo**.

Vertici adiacenti - proprietà del test di ottimalità: si consideri ogni problema di PL tale da ammettere almeno una soluzione ottimale. Se una soluzione vertice non ammette soluzioni vertice a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo Z migliore, allora la soluzione in questione è ottimale.

- **Inizializzazione**: scegliere il vertice $(0,0)$ come soluzione iniziale
- **Test di ottimalità**: si valuta lo spostamento nei due vertici adiacenti. Se esiste un vertice ammissibile con valore della funzione obiettivo Z migliore di quello di partenza, ci muoviamo a quel vertice.
- Il metodo del simplesso ispeziona soltanto soluzioni ammissibili corrispondenti a vertici

- Per ogni problema di PL che ammetta almeno una soluzione ottimale, trovarne una richiede di trovare solamente il vertice ammissibile cui compete il miglior valore della funzione obiettivo
- Dato che il numero di soluzioni ammissibili è generalmente infinito, ridurre il numero di soluzioni da ispezionare ad un numero finito e piccolo è una semplificazione notevole.
- Quando sia possibile, l'inizializzazione del metodo del simplesso seleziona l'origine (valori di tutte le variabili di decisione poste uguali a 0) come soluzione iniziale
- Se vi sono molte variabili decisionali, tali da rendere difficile usare il metodo grafico per scegliere la soluzione iniziale, scegliere l'origine evita di ricorrere a procedure algebriche per determinare la soluzione iniziale del metodo del simplesso
- Dato un vertice, è più vantaggioso in termini computazionali acquisire informazioni sui vertici a lui adiacenti di quanto non sia per i vertici a lui non adiacenti
- Ad ogni iterazione, se l'algoritmo si sposta dal vertice corrente verso un vertice con valore migliore della funzione obiettivo, lo fa per muoversi in un vertice a lui adiacente. Nessun'altra soluzione viene considerata
- L'intero cammino, partendo dalla soluzione soluzione raggiunge quella ottimale, attraversa **spigoli** della regione ammissibile
- A partire dal vertice corrente, il metodo del simplesso valuta i vertici ad esso adiacenti, ma non lo fa calcolando il valore della funzione obiettivo per ognuno di essi.
- Il metodo del simplesso valuta e compara i tassi di miglioramento della funzione obiettivo Z lungo la direzione degli spigoli che conducono dal vertice corrente ai vertici adiacenti.
- Tra i vertici adiacenti con un tasso di miglioramento positivo per la funzione obiettivo Z , il metodo del simplesso sceglie di muoversi lungo lo spigolo cui compete il massimo valore di incremento. **Il vertice selezionato diviene il nuovo vertice corrente.**
- L'ispezione di uno spigolo consente di identificare rapidamente il tasso di miglioramento di Z che si otterrebbe muovendosi lungo di esso verso la soluzione adiacente all'altro estremo.
- Un tasso di miglioramento positivo per Z significa che il vertice adiacente è una soluzione migliore della soluzione corrente. Un tasso negativo implica che il vertice adiacente è una soluzione peggiore della soluzione corrente.
- Il test di ottimalità consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale

Struttura dell'algoritmo iterativo:

- inizializzazione: scelta di una soluzione

- Test di ottimalità: la soluzione è ottimale?
- no: torna ad 1) per trovare una soluzione migliore di quella corrente (vedendo i vertici adiacenti)
- Si: termina l'algoritmo

Procedura algebrica

Per tradurre la procedura geometrica in procedura algebrica richiede di tradurre i vincoli funzionali di disequaglianza in vincoli funzionali di uguaglianza. I vincoli di non negatività vengono mantenuti invariati in quanto la loro trattazione viene effettuata in maniera separata.

Convertire i vincoli di **disequaglianza** in vincoli di **uguaglianza** viene effettuato introducendo la **variabile slack**, la quantità che manca al termine sinistro della disequaglianza affinché questa sia verificata con il segno di uguaglianza.

Quindi, quando si introducono questi, si fa il *modello in forma aumentata*.

Se la variabile slack di un vincolo assume valore **zero**, allora la soluzione corrispondente giace sulla **frontiera del vincolo della forma originale**, e il vincolo corrispondente della forma originale è verificato come uguaglianza.

Se la variabile slack di un vincolo assume valore **positivo**, la soluzione corrispondente appartiene al semipiano ammissibile individuato dalla frontiera del vincolo della forma originale, vale a dire la soluzione appartiene alla regione ammissibile.

Se la variabile slack di un vincolo assume valore **negativo**, la soluzione corrispondente appartiene al semipiano non ammissibile della frontiera del vincolo della forma originale, ovvero la soluzione non appartiene alla regione ammissibile.

Si definisce **soluzione aumentata** una soluzione del modello in forma originale (valori delle variabili di decisione) che viene aumentata tramite i corrispondenti valori delle variabili slack.

Si definisce **soluzione di base** un vertice del modello in forma aumentata. Una soluzione di base può essere **ammissibile** (associata a un vertice ammissibile che venga aumentata) o **non ammissibile**.

Due variabili poste a zero vengono dette **variabili non di base**. La soluzione del sistema lineare, quindi con le variabili non a zero, vengono dette **variabili di base** che porta alla **soluzione di base**.

Proprietà soluzione di base:

- Una variabile può essere o una variabile di base o non di base
- Il numero delle variabili di base eguaglia il numero dei vincoli funzionali (equazioni). Il numero delle variabili non di base eguaglia il numero totale delle variabili meno il numero dei vincoli funzionali
- Le variabili non di base vengono poste a zero
- I valori delle variabili di base sono ottenuti come risoluzione simultanea del sistema di equazioni lineari
- Se la variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, la soluzione di base è una **soluzione ammissibile di base**

Le corrispondenti coppie di soluzioni di base ammissibili sono tra loro adiacenti. Due soluzioni di base ammissibili sono adiacenti se sono caratterizzate dal condividere le stesse **variabili non di base** eccetto uno. Questo implica che **tutte le loro variabili di base** sono uguali eccetto una, anche se esse possono assumere valori differenti.

Muoversi dalla soluzione base ammissibile corrente ad una soluzione ad essa adiacente implica che **una variabile non di base divenga una variabile di base**, e che una **variabile di base divenga una variabile non di base**, il che richiede di aggiustare i valori delle variabili di base per garantire che il sistema lineare di equazioni sia ancora soddisfatto.

Determinazione della direzione di spostamento: aumentare il valore di una variabile non di base a partire da zero, modificando i valori delle variabili di base correnti per soddisfare le equazioni, equivale a spostarsi lungo uno degli spigoli che emanano dal corrente vertice ammissibile.

Il passo 1 dell'algoritmo del simplesso sceglie una variabile non di base da incrementare, modificando i valori delle variabili di base correnti per soddisfare le equazioni. L'incremento del valore di questa variabile non di base la fa divenire una variabile di base nella nuova soluzione di base, **variabile entrante**.

Determinazione dell'incremento: determina di quanto aumentare il valore della variabile entrante in base. Incrementare il valore di una variabile fa incrementare il valore della funzione obiettivo, evitando però di abbandonare la regione ammissibile. Determina quale variabile di base diminuisce a zero per prima quando si incrementa il valore della variabile entrante in base. Diminuire il valore della variabile di base fino a raggiungere il valore zero trasforma questa variabile da variabile di base in variabile non di base nella nuova soluzione di base ammissibile. Questa variabile si chiama **variabile uscente** dalla base all'iterazione corrente.

Determinazione della nuova soluzione di base: convertire il sistema lineare in una forma maggiormente vantaggiosa, forma adatta all'applicazione dell'eliminazione gaussiana, al fine di applicare il test di ottimalità e, se necessario, di ottenere una nuova soluzione di base ammissibile.

- **Inizializzazione:** assumendo che il problema sia in forma standard, si procede:
 - Aggiungere le variabili slack
 - Selezionare le variabili di decisione da porre a 0 (non di base)
 - Selezionare le variabili slack come variabili di base
- **Test di ottimalità:** soluzione di base ammissibile corrente è ottimale solo se tutti i coefficienti della riga Z sono non negativo
- Se questo è il caso ci si arresta, altrimenti si effettua un'iterazione per ottenere una nuova soluzione di base ammissibile, il che implica che una variabile non di base venga trasformata in una variabile di base e viceversa, per poi ottenere una nuova soluzione
- **Iterazione**
 - Identificare la variabile entrante, selezionandola tra quelle non di

base, come quella cui corrisponde il minimo coefficiente negativo nell'equazione Z

- La colonna corrispondente viene identificata tramite un rettangolo e viene denominata **colonna pivot**
- Determinare la variabile di base **uscente** tramite il **test del rapporto minimo**
- Selezionare i coefficienti strettamente positivi della colonna pivot
- Dividere i termini noti per questi coefficienti (riga omologa)
- Selezionare la riga cui corrisponde il più piccolo rapporto calcolato al punto 2
- La variabile di base di quella riga è la variabile di base uscente, rimpiazzarla con la variabile entrante
- Determinare la nuova **soluzione di base** applicando operazioni che consentano l'uso dell'**eliminazione gaussiana**
- Dividere la riga pivot per il numero pivot, ottenendo un nuovo numero pivot ed una nuova riga pivot
 - Ad ogni altra riga che abbia coefficiente **negativo nella colonna pivot**, sommare a questa riga il prodotto del valore assoluto del coefficiente per la nuova riga pivot
 - Ad ogni altra riga che abbia coefficiente **positivo nella colonna pivot**, sottrarre a questa riga il prodotto del valore assoluto del coefficiente per la nuova riga pivot

Variabile entrante

Passo 1 di ogni iterazione del metodo del simplesso sceglie come variabile entrante in base la variabile non di base cui corrisponde il minimo valore negativo del coefficiente nell'equazione Z.

Supponiamo che **due o più variabili non di base abbiano lo stesso valore minimo** per i rispettivi coefficienti dell'equazione Z. La scelta di quale variabile debba entrare in base può essere effettuata **arbitrariamente**.

La soluzione ottimale è comunque ottenuta indipendentemente dalla variabile scelta come variabile entrante in base, e non sono disponibili metodi per prevedere quale scelta condurrà più rapidamente alla soluzione ottimale.

Variabile uscente

Al passo dell'algoritmo del simplesso due o più variabili di base competano per uscire di base. Fa differenza quale delle due viene scelta per uscire di base.

- Quando il valore della variabile entrante viene aumentato, le variabili di base che sono selezionabili come variabili uscenti dalla base raggiungono contemporaneamente il valore zero. Pertanto, le variabili non selezionate come variabili uscenti avranno comunque un valore nullo nella nuova soluzione di base. Una variabile di base che assume valore nullo è detta **variabile degenera**.
- Se una **variabile degenera** mantiene il proprio valore nullo sino ad

un'iterazione successiva, dove viene selezionata come variabile uscente, la corrispondente variabile entrante in base deve rimanere nulla, dato che non può essere aumentata senza far assumere un valore negativo alla variabile uscente. Il valore della funzione obiettivo Z resta invariato.

- Se il valore della funzione obiettivo Z **resta costante** invece di aumentare ad ogni iterazione, il metodo del simplesso potrebbe entrare in **loop**, ripetendo la medesima sequenza di soluzioni senza raggiungere la soluzione ottimale.

Nessuna variabile uscente

Il passo 2 di ogni iterazione del metodo del simplesso può portare ad un ulteriore esito, **nessuna variabile di base si qualifica come variabile uscente di base**. Si verifica se il valore della variabile entrante può essere aumentato illimitatamente senza implicare che il valore di almeno una variabile di base divenga negativo.

Nella forma tabellare significa che ogni coefficiente della colonna pivot assume valore non positivo.

Molteplici soluzioni ottimali

Ogni media pesata di due o più soluzioni con pesi non negativi che sommano ad uno è detta **combinazione convessa** delle soluzioni in questione.

Ogni problema di PL che ammetta soluzioni ottimali multiple, con regione ammissibile limitata, ha almeno **due vertici ammissibili che sono ottimali**.

Ogni soluzione ottimale è una combinazione convessa di questi vertici ammissibili ottimali. Nella forma aumentata del problema di PL, **ogni soluzione ottimale risulta essere una combinazione convessa delle soluzioni di base ammissibili ottimali**.

Il metodo del simplesso si arresta automaticamente non appena individua una soluzione di base ottimale. Una volta che il metodo del simplesso ha individuato una soluzione di base ottimale, è possibile identificare se ne esistono altre:

Se un problema ha più di una soluzione di base ottimale, almeno una delle variabili non di base ha un coefficiente nullo nella riga Z , il che implica che incrementare il valore di una qualsiasi di tali variabili non cambia il valore della funzione obiettivo Z . Queste altre soluzioni di base ottimali sono identificabili effettuando ulteriori iterazioni del metodo del simplesso, scegliendo ogni volta una variabile non di base con coefficiente nullo come variabile entrante.

Forme alternative:

- $\text{Min } Z = -\text{max}(-Z)$
- C'è solo un vincolo di negatività con due variabili: la seconda viene rimpiazzata con $-x' + x''$
- Un vincolo di $=$ viene rimpiazzato con due vincoli, uno di \leq e uno di \geq
- Se un vincolo è \geq , nella forma aumentata si **sottrae una variabile surplus**.

Teoria del simplesso

L'EQUAZIONE DELLA FRONTIERA DI UN VINCOLO

viene ricavata con le seguenti sostituzioni:

$$\blacksquare \leq \rightarrow =$$

$$\blacksquare \geq \rightarrow =$$

L'EQUAZIONE DELLA FRONTIERA DI UN VINCOLO FUNZIONALE è

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n = b_i$$

mentre per un **VINCOLO DI NON NEGATIVITÀ**
abbiamo

$$x_j = 0$$

Ogni equazione definisce una figura geometrica piatta che prende il nome di **iperpiano nello spazio n-dimensionale**, l'analogo di una retta nello spazio 2-dimensionale e di un piano nello spazio 3-dimensionale.

Quando il vincolo è di \leq o \geq , l'iperpiano separa i punti che verificano il vincolo da quelli che lo violano. Quando il vincolo è di $=$, solo i punti che giacciono sull'iperpiano verificano il vincolo.

La **frontiera della regione ammissibile** contiene solo quelle soluzioni ammissibili che soddisfano *una o più equazioni di frontiera*. Ogni punto sulla frontiera della regione ammissibile giace su uno o più iperpiani definiti dalla rispettive equazioni di frontiera.

Un **vertice ammissibile** è una soluzione ammissibile che non giace su un segmento che connette altre due soluzioni ammissibili. Una soluzione che giace su un segmento che collega altre due soluzioni ammissibili non è un vertice ammissibile.

In ogni problema di programmazione lineare con n variabili di decisione, ogni vertice ammissibile giace all'intersezione di n frontiere di altrettanti vincoli; ogni vertice è la soluzione simultanea di un sistema di n equazioni, ognuna rappresentante la frontiera di uno degli n vincoli.

Questo non significa che ogni insieme di n equazioni di frontiera comunque scelte tra gli n+m vincoli determini un vertice ammissibile.

La soluzione simultanea di un tale sistema lineare potrebbe violare uno o più degli m vincoli che non sono stati selezionati per definire il sistema lineare, nel qual caso il vertice individuato sarebbe un **vertice non ammissibile**.

Un sistema di n equazioni potrebbe non ammettere alcuna soluzione. Ultima possibilità è che esistono soluzioni multiple dovute a equazioni ridondanti.

È anche possibile che più di un sistema costituito da n equazioni abbia il medesimo vertice come soluzione- **situazioni degeneri**.

La **frontiera della regione ammissibile** è determinata da **spigoli**. Da ogni vertice ammissibile emanano due spigoli che conducono ai vertici a lui adiacenti. Ogni movimento porta ad un vertice ammissibile adiacente, implicando un solo cambio nel sistema di equazioni.

Nel caso di $n=2$ la regione ammissibile è un poligono, nel caso di $n=3$ è un poliedro. Le equazioni di frontiera sono piani e non più rette. Ogni vertice ammissibile giace all'intersezione di tre equazioni di frontiera, verificando anche i vincoli restanti. Le intersezioni che non soddisfano uno o più dei restanti vincoli individuano *vertici non ammissibili*.

Per $n=3$ tutti gli **spigoli della regione ammissibile** sono formati analogamente come intersezione di coppie di equazioni di frontiera.

Se $n > 3$, i concetti si generalizzano, eccezione per le frontiere dei vincoli che ora sono **iperpiani** al posto di piani come nel caso di $n=3$. Dato un problema con n variabili decisionali e regione ammissibile limitata abbiamo che:

- Un vertice ammissibile giace all'intersezione di n equazioni di frontiera, e soddisfa anche i restanti vincoli
 - Uno spigolo della regione ammissibile è un segmento che giace all'intersezione di $n-1$ equazioni di frontiera, dove ogni vertice estremo giace su un'equazione di frontiera addizionale
 - Due vertici ammissibili sono adiacenti se il segmento che li collega è uno spigolo della regione ammissibile
 - Da ogni vertice ammissibile emanano n spigoli, ognuno conduce ad uno degli n vertici ammissibili adiacenti
 - Ogni iterazione del metodo del simplesso si sposta dal corrente vertice ammissibile ad un vertice ammissibile adiacente muovendosi su questi spigoli
 - L'intersezione delle equazioni di frontiera equivale alla loro risoluzione simultanea in termini del corrispondente sistema lineare
- Implicazioni:
- Quando il metodo del simplesso sceglie la variabile entrante in base, l'interpretazione geometrica è che il metodo del simplesso stia **scegliendo uno degli spigoli che emanano dal vertice ammissibile corrente**
 - Aumentare il valore della variabile entrante in base, a partire dal valore zero, e contemporaneamente variare il valore delle restanti variabili di base, corrisponde a muoversi lungo lo spigolo scelto
 - Il valore di una delle variabili di base correnti, in particolare la **variabile uscente dalla base**, viene ridotto fino a raggiungere il valore zero, che significa il raggiungimento della frontiera del vincolo che si trova all'altro estremo dello spigolo della regione ammissibile

Proprietà vertici ammissibili

1. Se esiste solo una soluzione ottimale, allora questa è un vertice ammissibile
1. Se esistono soluzioni ottime multiple, e la regione ammissibile è limitata, allora almeno due di queste soluzioni sono vertici ammissibili tra loro adiacenti.
 2. Esiste un numero finito di vertici ammissibili. Ogni vertice ammissibile è soluzione di un sistema lineare formato da n equazioni scelte tra m vincoli funzionali + n vincoli di non negatività. rappresenta limite superiore al numero di vertici ammissibili.
3.
$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$
4. Se un vertice ammissibile non ammette vertici ammissibili a lui adiacenti che coincidono con soluzioni con valore migliore della funzione obiettivo Z, allora non esistono soluzioni ottimali migliori di quella che coincide con il vertice ammissibile. Per un tal vertice è garantito coincidere con una soluzione ottimale, assumendo che il problema di PL considerato ammetta almeno una soluzione ottimale, il che è garantito se si assume che il problema di PL abbia soluzione ammissibile e la sua regione ammissibile sia limitata.

La regione ammissibile è sempre un **insieme convesso**. Se è una collezione di punti tali che, per ogni coppia di punti appartenenti alla collezione, l'intero segmento che collega la coppia di punti appartiene anch'esso alla collezione. Nel caso di un problema di PL con due variabili decisionali, la **proprietà di convessità** significa che l'angolo interno alla regione ammissibile misurato in ogni vertice ammissibile è minore di 180°.

Teoria della dualità

Analisi di sensitività: necessario studiare quale sia l'effetto sulla condizione ottimale nel caso in cui alla prova dei fatti si realizzino condizioni differenti da quelle ipotizzate. I valori di alcuni parametri dipendono da decisioni manageriali.

Problema Primale	Problema Duale
$\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ $\begin{aligned} 1 \cdot x_1 &\leq 4 \\ 2 \cdot x_2 &\leq 12 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 18 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$	$\min W = 4 \cdot y_1 + 12 \cdot y_2 + 18 \cdot y_3$ $\begin{aligned} 1 \cdot y_1 &\geq 3 \\ 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 &\geq 5 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \end{aligned}$
$\max Z = [3, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\min W = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ $[y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $[y_1, y_2, y_3] \geq [0, 0, 0]$

Nel simplesso applicato al problema primale, i coefficienti di x_1, \dots, x_n con $z = (z_1, \dots, z_n)$ indichiamo che il vettore che il metodo del simplesso ha sommato ai coefficienti iniziali $-c$ per ottenere il tableau corrente.

Il problema duale può essere visto come una diversa formulazione, in termini di programmazione lineare, di quello che è l'obiettivo del metodo del simplesso, ovvero ottenere una soluzione del problema primale che soddisfi il test di ottimalità. Prima di ottenere una soluzione del problema primale che soddisfi il test di ottimalità:

- Il vettore y della riga Z (coefficienti delle variabili slack) del tableau corrente deve essere inammissibile per il problema duale
 - Ottenuta una soluzione del problema primale che soddisfi il test di ottimalità, il corrispondente vettore y della riga Z deve essere una soluzione ottimale y' per il problema duale, in quanto soluzione ammissibile che ottiene il minimo valore della funzione obiettivo W .
 - La soluzione ottimale y^* fornisce i **prezzi ombra** del problema primale. Inoltre, il valore ottimale di W è il valore ottimale di Z , pertanto i valori ottimali delle due funzioni obiettivo, primale e duale, sono uguali.
 - Quindi $\mathbf{cx} \leq \mathbf{yb}$ per ogni x ed y , che siano ammissibili rispettivamente per il primale e il duale.

Dualità debole: se x è una soluzione ammissibile per il problema primale, e y è una soluzione ammissibile per il corrispondente problema duale, allora vale $\mathbf{cx} \leq \mathbf{yb}$. Relazione esistente tra ogni coppia di soluzioni, una del primale ed una del duale, nel caso in cui entrambe siano ammissibili per i rispettivi problemi. Ad ogni iterazione, il metodo del simplesso trova una specifica coppia di soluzioni per i due problemi, dove la soluzione del primale è ammissibile, mentre quella del duale non è ammissibile, fatta eccezione per l'ultima iterazione.

Dualità forte: se x^* è una soluzione ottimale per il problema primale, e y^* è una soluzione ottimale per il corrispondente problema duale, allora vale $\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^* \mathbf{b}$. Queste due proprietà se considerate insieme implicano che la disuguaglianza

vale per soluzioni ammissibili se una o entrambe non sono ottimali per i corrispondenti problemi, l'uguaglianza vale solo se entrambe le soluzioni sono ottimali.

Soluzioni complementari: ad ogni iterazione, il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione vertice ammissibile x per il problema primale, e una soluzione complementare y per il problema duale, dove $cx = yb$

Soluzioni ottimali complementari: all'iterazione finale, il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione ottimale x^* per il problema primale, e una soluzione ottimale complementare y^* per il problema duale dove $cx^* = y^*b$. Le componenti y^* sono i prezzi ombra del primale.

Simmetria: per ogni problema primale e relativo problema duale, tutte le relazioni tra loro debbono essere simmetriche in quanto il problema duale del problema duale è il problema primale.

Teorema di dualità

- Se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo limitata, tale da avere soluzione ottimale, allora la stessa cosa vale per l'altro problema, per cui sia la proprietà debole della dualità che la proprietà forte della dualità sono applicabili
 - Se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo illimitata, tale da non avere soluzione ottimale, allora l'altro problema non ha soluzioni ammissibili
 - Se un problema non ha soluzioni ammissibili, allora l'altro problema o non ha soluzioni ammissibili o ha una funzione obiettivo illimitata.

La variabile duale y_i è interpretata come il contributo al profitto per unità di risorsa i quando il corrente insieme di variabili di base viene utilizzato per ricavare la soluzione del primale.

Proprietà delle soluzioni di base complementari: ogni soluzione di base del primale ha una soluzione di base complementare nel problema duale, in modo tale che i rispettivi valori delle funzioni obiettivo sia uguali.

Proprietà delle soluzioni ottimali complementari: una soluzione di base ottimale x^* del problema primale ha una soluzione di base ottimale complementare del duale tale che i valori delle rispettive funzioni obiettivo sono identici. La soluzione duale deve essere ammissibile per il duale in quanto la condizione di ottimalità di x^* per il primale impone che tutte le variabili duali siano non negative.

Proprietà di complementary slackness: data l'associazione tra variabili nella tabella

	Variabile Primale	Variabile Duale Associata
ogni problema	(Variabile di Decisione) x_j	$z_j - c_j$ (Variabile Surplus) ($j=1, 2, \dots, n$)
	(Variabile Slack) x_{n+i}	y_i (Variabile di Decisione) ($i=1, 2, \dots, m$)

, le variabili della soluzione di base del primale e la soluzione di base complementare del duale soddisfano la relazione di complementary slackness della tabella

Variabile Primale	Variabile Duale Associata
di base	non di base (m variabili)
non di base	base (n variabili)

Soluzioni di base classificabili in base al fatto che soddisfino o meno ciascuna delle due condizioni:

Condizione di ammissibilità: se tutte le variabili, incluse le slack della soluzione aumentata sono non negative

Condizione di ottimalità: se i coefficienti nella riga Z sono non negativi.

Primale ammissibile: se la soluzione di base primale è ammissibile per il primale

Duale ammissibile: se la soluzione di base complementare del duale è ammissibile per il duale. Il metodo del simplesso visita soluzioni primale ammissibili, cercando di ottenere l'ammissibilità duale.

Il duale del problema duale è il problema primale. Tutte le relazioni esistenti tra un problema primale ed il relativo problema duale devono essere simmetriche (proprietà di simmetria).

Metodo SOB:

- Se il problema primale è formulato i termini di massimizzazione o minimizzazione, il problema duale sarà automaticamente nell'altra forma
 - Per ogni vincolo su una variabile di decisione del problema duale, utilizzare la forma che ha medesima etichetta del vincolo funzionale per il problema primale
 - Per ogni vincolo funzionale del problema duale utilizzare la forma che ha la stessa etichetta del vincolo della corrispondente variabile di decisione del problema primale
 - Se nel primale abbiamo un vincolo \leq , nel duale sarà una variabile ≥ 0 , se nel primale abbiamo un vincolo $=$ nel duale sarà una variabile non vincolata, se nel primale abbiamo un vincolo \geq nel duale abbiamo una variabile \leq .
 - Se nel primale abbiamo una variabile \geq allora nel duale sarà un vincolo \geq , se nel primale abbiamo una variabile non vincolata allora nel duale sarà un vincolo $=$, se nel primale abbiamo una variabile \leq nel duale sarà un vincolo \leq

Programmazione lineare intera

Se si richiede che le variabili di decisione assumano valori interi allora si parla di **Programmazione lineare intera**. Se solo alcune delle variabili di decisione devono essere intere allora si parla di **Programmazione Lineare Mista**.

Se $X \in \mathbb{Z}^n$ abbiamo un problema di programmazione lineare intera. Se $x \in \{0,1\}$

^n abbiamo un problema di Programmazione Lineare Binaria. Se altro abbiamo Programmazione Lineare Mista

Uso delle variabili binarie

- Analisi di investimenti, bisogna investire o no in un progetto?
 - Selezioni di siti: una specifica località deve esser scelta per un determinato nuovo servizio?
 - Spedizioni di beni: uno specifico percorso deve essere selezionato per un autoveicolo?
 - Either-or? Con M un numero positivo molto grande

Nel caso di un PLI con variabili binarie, ho 2^n soluzioni possibili da considerare, ovvero il numero di soluzioni *cresce esponenzialmente* con il numero di variabili da considerare. Per qualsiasi problema PLI è possibile formulare il corrispettivo problema PL, ovvero lo stesso problema senza i vincoli di interezza. Tale problema prende il nome di **rilassamento lineare**.

Rilassamento lineare

Comune partire risolvendo il suo rilassamento lineare allo scopo di verificare se la soluzione ottima trovata sia intera, nel qual caso abbiamo trovato la soluzione ottima. In caso contrario, si ottiene un upper (lower) bound per problemi di max (min).

In generale, la soluzione ottima di un problema PLI può non corrispondere ad una delle sue soluzioni intere ottenute arrotondando le variabili non intere, per esempio all'intero più vicino.

Branch and Bound

Tecnica di enumerazione implicita, ovvero

- Valuta le soluzioni possibili fino a trovare quella ottima
 - Scarta alcune di queste soluzioni a priori, dimostrando la loro non ottimalità
 - Concetto di dividi et impera

Avendo un problema PLI con funzione obiettivo lineare e vincoli lineari indichiamo tale problema come **problema completo**. Un problema PLI rappresenta un sotto-problema del problema completo se *presenta la medesima funzione obiettivo* ma ha un sottoinsieme proprio di X come regione ammissibile.

Sia $z^* = f(x^*)$ la soluzione ottima del completo, e $z' = f(x')$ la soluzione ottima di un sottoproblema, allora si ha che $f(x') \leq f(x^*)$. Per un problema di minimo vale il contrario.

Branching: nel caso di problemi a variabili binarie, il modo più semplice per dividere l'insieme delle soluzioni ammissibili in sottoinsiemi è fissare il valore di una delle variabili per un sottoinsieme (es. $x_1=0$ e $x_1=1$). La variabile che viene utilizzata per questa suddivisione ad ogni iterazione è **variabile di branching**. Per selezionare ad ogni iterazione la variabile di branching si può utilizzare

l'ordinamento naturale delle variabili.

Implica la selezione di un sottoproblema da analizzare e la divisione di questo in sottoproblemi più piccoli. Vi sono diverse regole e posso scegliere:

- Il sottoproblema creato più recente: tale regola ha il vantaggio che è efficiente per ripartire con l'ottimizzazione del rilassamento LP dal precedente problema poichè devo solo aggiungere un vincolo
 - Depth first
 - Ottenere presto soluzioni ammissibili perché ci si avvicina più rapidamente alle foglie, limita la memoria necessaria per memorizzare l'albero delle soluzioni
 - Rischia di esplorare completamente sottoalberi con soluzioni scadenti
- Il sottoproblema con il miglior bound: in genere conduce a soluzioni incombenti più velocemente, quindi permette di effettuare un fathoming più efficiente
 - Best bound first: si sceglie il nodo più promettente, ossia il nodo con il bound migliore
 - Best bound first
 - Lower bound più basso per problemi di minimo, upper bound più alto per problemi di massimo
 - Limita i nodi visitati esplicitamente tende ad essere più efficiente
 - L'esplorazione tende a rimanere a livelli poco profondi, i problemi sono meno vincolati e quindi i bound sono più promettenti ma difficilmente si ottengono presto soluzioni ammissibili che migliorano la soluzione incombente corrente.
 - Maggiore richiesta di memoria per i nodi aperti contemporaneamente

Bounding: per ognuno dei sotto-problemi dobbiamo ricavare un limite superiore (per problema di massimo, altrimenti limite inferiore) che ci indichi quanto promettente è il sotto-problema.

Per ottenere questo limite si risolve il problema rilassato,

Fathoming: un sottoproblema può essere eliminato dalla lista dei problemi da considerare per tre possibili ragioni:

- La soluzione ottima soddisfa i vincoli di interesse. Questa soluzione può essere considerata come la soluzione intera migliore trovata fino a questo momento (soluzione incombente X^*). La soluzione incombente cambierà ogni volta che un sottoproblema otterrà una soluzione intera. Migliore della soluzione incombente corrente
 - La soluzione incombente può essere utilizzata per un'altra possibilità di fathoming: se il bound di un sotto-problema, che rappresenta la soluzione ottima migliore che si potrà trovare continuando a considerare il sotto-problema, è peggiore della soluzione incombente

(migliore soluzione ammissibile intera già trovata), allora non vale la pena continuare a considerare il sottoproblema che quindi può essere chiuso

- Il sottoproblema non ammette soluzioni ammissibili

Rilassamento lagrangiano

L'intero insieme di vincoli funzionali $Ax \leq b$ viene cancellato e la funzione obiettivo

Obiettivo	
$Max Z = cx$	
Viene sostituita da	
$Max Z = cx - \lambda(Ax - b)$	
Il problema	$Max Z = cx - \lambda(Ax - b)$ $s.t. x \geq 0$

Questo è detto problema Lagrangiano, e ha la proprietà che per ogni gamma \geq o fissato la sua soluzione ottima costituisce un upper bound sull'ottimo del problema originario, lower bound se il problema è di min.

Il bound ottenibile con il rilassamento Lagrangiano è quindi almeno tanto buono quanto quello ottenibile con il rilassamento lineare.

Il Branch & Bound può essere utilizzato anche per trovare soluzioni buone anche se non necessariamente ottime che in genere richiedono uno sforzo computazionale molto minore. Soluzione quasi-ottima quando la sua soluzione Z è abbastanza vicina al valore di una soluzione ottima Z^{**} , ovvero $Z^{**} - K \leq Z$. Per identificare Z^{**} noi sappiamo che se esistesse una soluzione ammissibile con valore Z^{**} allora si avrebbe $Z^{**} \leq \text{Bound}$, dove Bound è la soluzione migliore tra quelle dei problemi rilassati ancora persi. Quindi si ottiene $\text{Bound} - K \leq Z^*$. Anche se la soluzione corrispondente a Bound non è ammissibile (intera) costituisce comunque un limite superiore valido.

Criteri di arresto

Il metodo del Branch and Bound si arresta quando tutti i nodi sono dichiarati fathomed. La soluzione ammissibile corrente corrisponde ad una soluzione ottima.

Si possono usare anche soluzioni quasi-ottime e fermarci non appena troviamo una soluzione quasi ottima.

Per l variabili è richiesta l'interezza mentre $n-l$ variabili possono essere continue. Per un problema di Programmazione Lineare Mista La soluzione dei problemi rilassati è ancora alla base delle fasi di bounding e fathoming.

Il primo cambiamento riguarda la scelta della variabile di branching:

- Nel B&B per PB la scelta è effettuata seguendo l'indice delle variabili: non è più possibile perché sulle variabili continue non può essere effettuato il branching.

- La regola deve essere modificata scegliendo la prima variabile non continua seguendo l'ordine naturale degli indici

Secondo cambiamento riguarda i valori assegnati per generare i sottoproblemi

- Nel caso generale, assegniamo $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ e $x_j \geq \lceil x_j^* \rceil + 1$

Il terzo cambiamento riguarda la fase di Bounding, nel caso PB se i coefficienti della funzione obiettivo erano tutti interi, il valore della soluzione del problema rilassato Z poteva essere arrotondato l'intero inferiore. Adesso no.

Il quarto cambiamento riguarda le condizioni di fathoming. Nel caso PB ci si ferma se la soluzione del problema era intera. Nel caso generale, basta che la soluzione soddisfi la condizione di interezza per le variabili che non possono essere continue.

Valutazione di soluzioni ammissibili

Per applicare efficacemente le regole di fathoming, è necessario disporre di soluzioni ammissibili di buona qualità. Nella predisposizione di un algoritmo di B&B, bisogna stabilire come e quando calcolare le soluzioni ammissibili. Ci sono:

- Aspettare semplicemente che l'enumerazione generi un nodo foglia ammissibile
 - Implementare un algoritmo euristico che valuti una buona soluzione all'inizio, prima dell'esplorazione
 - Sfruttare, con frequenza da valutare, l'informazione raccolta durante l'esplorazione dell'albero per costruire soluzioni ammissibili sempre migliori

Problema di minimo perché i valori contrassegnati come LB sono crescenti di padre in figlio nell'albero, possono essere associati a valutazioni ottimistiche di problemi di minimo via via più vincolati.

I valori contrassegnati come UB non sono decrescenti di padre in figlio, e non possono essere associati a valutazioni ottimistiche di problemi di massimo via via più vincolati. I valori UB sono quindi le valutazioni della fz obiettivo di minimo in corrispondenza di soluzioni ammissibili.

Programmazione non lineare

Può essere formulato come $\text{opt } f(x)$ soggetto ai vincoli $g_j(x) \leq 0$, $x_i \geq 0$ dove con $\text{opt} = \{\min, \max\}$ intendiamo che può essere $\text{opt}=\min$ oppure $\text{opt}=\max$, in cui $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni note di x .

Nel caso della Programmazione Lineare si assume che f e g_j siano lineari.

L'assunzione di linearità non è valida per molte applicazioni, ed esistono diversi tipi di modelli non lineari a seconda delle caratteristiche delle funzioni f e g_i

Tipologie

Ottimizzazione non vincolata: i problemi di ottimizzazione non vincolata non hanno vincoli sulla regione ammissibile. Quindi l'obiettivo è soltanto $\max f(x)$ o $\min f(x)$

Ottimizzazione con vincoli lineari: i problemi di ottimizzazione con vincoli lineari sono caratterizzati da tutte le funzioni $g_i(x)$ lineari, ma dalla funzione

obiettivo non-lineare. Un caso particolare è la programmazione quadratica, in cui la funzione obiettivo è una funzione quadratica.

Ottimizzazione convessa: in cui $f(x)$ è una funzione *concava* o *convessa*, e ogni funzione $g_i(x)$ è *convessa*.

Ottimizzazione non convessa: i problemi di programmazione non convessa comprendono tutti i problemi che non soddisfano le ipotesi di convessità. Un punto di ottimo non è più un vertice, e quindi l'ottimo del problema non appartenerà necessariamente all'insieme dei vertici ammissibili, e quindi l'algoritmo del simpleso non si può più usare.

Il punto di ottimo non è più sulla frontiera della regione ammissibile, quindi la ricerca del punto di ottimo non è più ristretta in generale alla frontiera del problema. La soluzione quindi potrebbe essere in un qualunque punto della regione ammissibile.

Continuità

Sia x un punto del dominio della funzione. Diciamo che f è una funzione continua in x_0 (intorno del punto) se

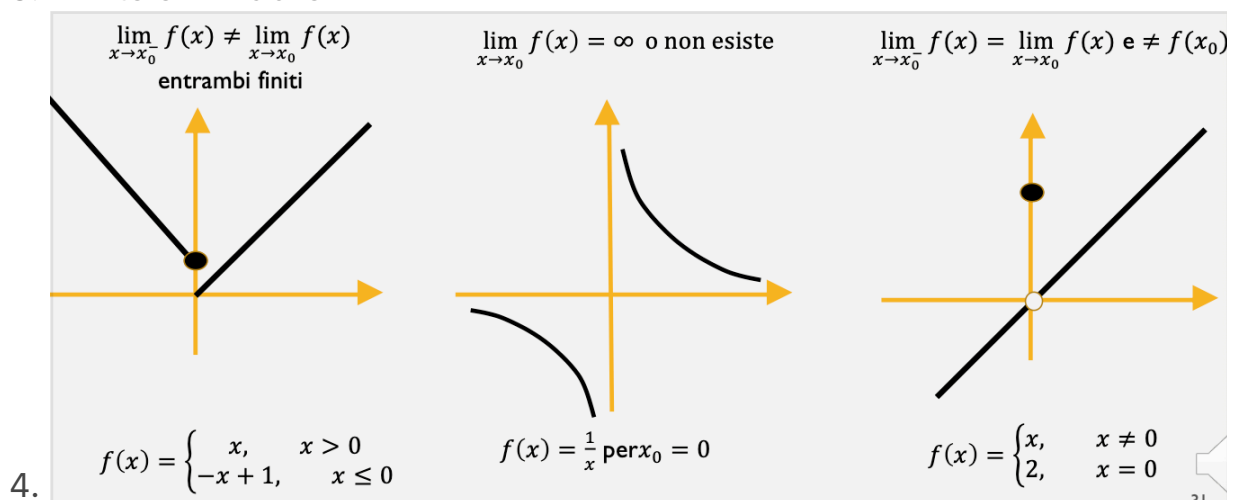
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La continuità di una funzione gode di alcune importanti proprietà:

- La somma algebrica di funzioni continue è ancora una funzione continua
 - Il prodotto di funzioni continue è ancora una funzione continua
 - La composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua

Discontinuità: tre tipi di discontinuità

1. Limiti entrambi finiti ma diversi
2. Limite infinito o non esiste
3. Limite eliminabile



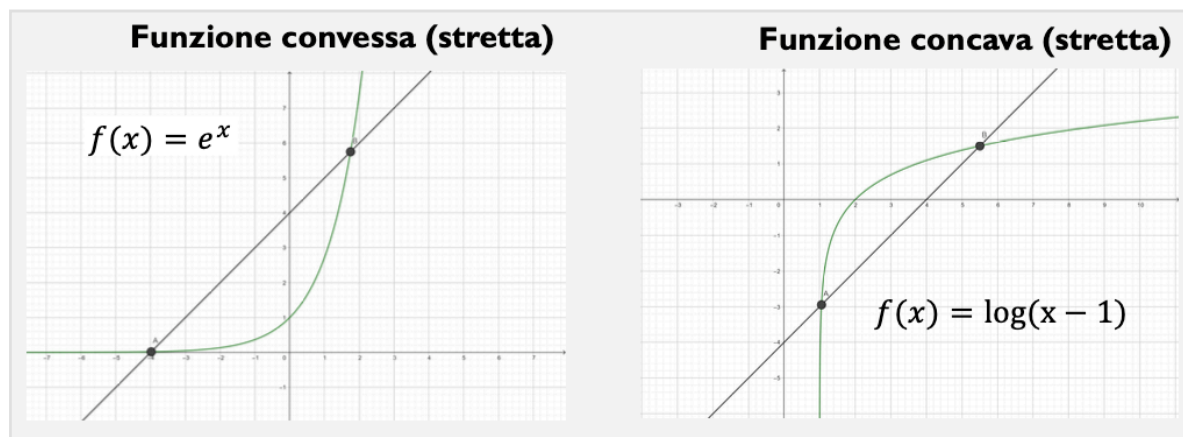
Convessità e concavità

Una funzione è convessa nell'intervallo $[a, b]$ se, comunque considerati due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ si ha che

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \forall t \in [0,1]$$

Una funzione è **concava** nell'intervallo $[a,b]$ se, comunque considerati due punti $x_a, x_b \in [a,b]$ si ha che

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \forall t \in [0,1]$$



Nel caso della convessità significa che tutti i punti del segmento che va da $x_1, f(x_1)$ a $x_2, f(x_2)$ stanno sopra la funzione $f(x)$ nell'intervallo $x \in [x_1, x_2]$

Nel caso della concavità significa che tutti i punti del segmento che va da $x_1, f(x_1)$ a $x_2, f(x_2)$ stanno sotto la funzione $f(x)$ nell'intervallo $x \in [x_1, x_2]$.

Una funzione è **convessa** se e solo se $-f(x)$ è concava e viceversa. La somma di funzioni convesse/concave è ancora una funzione convessa/concava.

Se $f(x)$ è convessa allora se x^* è un minimo locale è anche un minimo globale.

Se $f(x)$ è concava, allora se x^* è un massimo locale, è anche un massimo globale.

Derivabilità

Rapporto incrementale di f nel punto x_0 nel modo seguente:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definiamo **derivata** di f nel punto x_0 il limite (se esiste) del rapporto incrementale al tendere di h a 0.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata può essere interpretata come il **coefficiente angolare** della retta tangente alla funzione in x_0 . Se $f(x)$ è derivabile per tutti i punti dell'intervallo (a,b) si dice che f è differenziabile su (a,b) .

derivata di una costante per una funzione

$$\frac{d(a \cdot f(x))}{dx} = a \frac{df(x)}{dx}$$

derivata della somma di funzioni

$$\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} + \frac{d(g(x))}{dx}$$

derivata del prodotto di funzioni

$$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

derivata di una funzione composta

$$\frac{d(g(f(x)))}{dx} = \frac{dg(f(x))}{d(f(x))} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = \{f(x)\}^n$	$y' = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} f'(x)$
$y = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y = \sqrt[n]{\{f(x)\}^m}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{\{f(x)\}^{n-m}}} f'(x)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin f(x)$	$y' = \cos f(x) f'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos f(x)$	$y' = -\sin f(x) f'(x)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \operatorname{ctg} f(x)$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 f(x)} f'(x)$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin f(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\{f(x)\}^2}} f'(x)$

Derivata seconda

Sia f una funzione differenziabile nell'intervallo (a,b) . La derivata seconda di f in un punto x_0 è definita come la derivata della derivata prima.

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \frac{df'(x_0)}{dx} = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$$

Se $f'(x)$ è derivabile Per tutti i punti dell'intervallo (a,b) si dice che f è due volte differenziabile su (a,b) .

Sia f una funzione due volte differenziabile in tutto \mathbb{R} .

- Se $f''(x) > 0$ in un sottointervallo $[a,b]$ allora $f(x)$ è **convessa** in quell'intervallo
 - Se $f''(x) < 0$ in un sottointervallo $[a,b]$ allora $f(x)$ è **concava** in quell'intervallo

Punto di minimo/massimo

Condizione sufficiente affinché un punto sia di minimo/massimo è che

$$\frac{df(x_0)}{dx} = 0 \text{ (condizione di stazionarietà)}$$

$$\frac{d^2f(x_0)}{dx^2} > 0 \text{ (per un punto di minimo)}$$

$$\frac{d^2f(x_0)}{dx^2} < 0 \text{ (per un punto di massimo)}$$

Consideriamo un punto x' stazionario ovvero con la condizione di stazionarietà. Se la prima derivata diversa da zero è **dispari** allora x' è un punto di flesso. Se la prima derivata diversa da zero è **pari** allora se

Se la prima derivata diversa da zero è pari allora se

- $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n} > 0$ dove $n \in \{4, 6, \dots\}$ allora x_0 è un punto di minimo
- $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n} < 0$ dove $n \in \{4, 6, \dots\}$ allora x_0 è un punto di massimo

Il punto in cui la derivata si annulla può essere un minimo/massimo globale e non necessariamente un minimo/massimo globale.

Sviluppo in serie di Taylor

Sia f continua su $[a,b]$, sia x' , supponiamo che esistano le derivate $f^{(n)}(x_0)$. Preso $h > 0$ tale che la funzione sia definita in $[x_0-h, x_0+h]$ allora vale la seguente formula di approssimazione

verrà...

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} h^i + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + O(h^n)$$

Formula di Taylor, permette di approssimare una funzione nell'intorno del punto

x' tramite un polinomio di ordine n . Se si considera $x_0=0$ prende il nome di formula McLaurin e si pone $x=x_0+h=h$

Polinomio di ordine uno

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + O(h)$$

Polinomio di ordine due (approssimazione quadratica)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + O(h^2)$$

Massimizzazione di funzioni concave

Considerando un problema di massimizzazione con una funzione obiettivo concava da massimizzare. Condizione sufficiente affinché x^* sia punto di massimo è che

$$\frac{df(x^*)}{dx} = 0$$

Se tale equazione può essere risolta analiticamente allora il procedimento per trovare l'ottimo termina.

Un discorso equivalente si può fare per problemi di **minimizzazione** di funzioni **convesse**.

Criteri di arresto

DOMANDA: Quando conviene fermare la sequenza di punti?

- La soluzione è sufficientemente accurata ovvero $\frac{df(x_k)}{dx} \approx 0$
- Quando si è raggiunto un numero massimo di iterazioni N o un tempo computazionale massimo
- I progressi sono «lenti» ovvero $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon_x$ o $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \epsilon_f$
- La soluzione diverge ($|x_k| \rightarrow +\infty$)
- Si verificano cicli

Due tipi di algoritmi:

- **Dicotomici:** algoritmi di ricerca per individuare un determinato valore per il quale la funzione derivata si annulla all'interno di un intervallo che ad ogni iterazione viene ridotto
 - Metodo di bisezione
- **Di approssimazione:** utilizzano approssimazioni locali della funzione
 - Metodo di Newton

Se $f(x)$ è continua e concava in un intervallo chiuso $[a,b]$, allora, considerando un punto generico x_k :

- se $\frac{df(x_k)}{dx} < 0$ allora il punto ottimo x^* si trova a sinistra di x_k
- se $\frac{df(x_k)}{dx} > 0$ allora il punto ottimo x^* si trova a destra di x_k
- se $\frac{df(x_k)}{dx} \approx 0$ allora $x_k \approx x^*$

Metodo di bisezione

Applicata quando $f(x)$ è una funzione convessa/concava continua su un intervallo $[a,b]$ e derivabile su (a,b) .

La pendenza (derivata) di f per un punto x_k fornisce informazioni su dove cercare il punto di ottimo.

- Se $f'(x_k) > 0$ allora si può ottenere il nuovo punto x_{k+1} spostandosi verso destra
 - Se $f'(x_k) < 0$ allora si può ottenere il nuovo punto x_{k+1} spostandosi verso sinistra
 - Nel caso convesso si può fare un ragionamento simile per problemi di minimo.
 - Se $f'(x_k) > 0$ allora x_k rappresenta un estremo inferiore per il punto x^*
 - Se $f'(x_k) < 0$ allora x_k rappresenta un estremo superiore per il punto x^*
- Ad ogni iterazione k posso identificare un sottointervallo di ricerca a_k, b_k per ridurre lo spazio di ricerca in modo da identificare un'iterazione k per cui $|b_k - a_k| < 2E$ con $|a_k - x^*| < E$ e $|x^* - b_k| < E$.

Bisezione per problemi di massimo

Inizializzazione: $k = 0$ e E piccolo a piacere.

Si determinano i valori x_- e x_+ alto cercano dei valori di x per cui la derivata sia rispettivamente positiva e negativa, e si seleziona il punto iniziale.

$$x_0 = \frac{x + \bar{x}}{2}$$

Iterazione

- Calcolare $f'(x_k)$
 - If $f'(x_k) = 0$ allora $x_k = x^*$
 - Else if $f'(x_k) < 0$ alto = x_k
 - Else $x_- = x_k$
- Pongo

$$x_{k+1} = \frac{x + \bar{x}}{2} \text{ e } k = k + 1$$

Criterio di arresto

Se $x_{\text{alto}} - x_{\text{basso}} \leq 2E$ allora il punto di ottimo x^* avrà una distanza minore di E da x_{basso} o x_{alto} , altrimenti eseguo una nuova iterazione del metodo di bisezione.

Approssimazione quadratica

Svantaggio di convergere molto lentamente. Dovuto al fatto che esso considera solo l'informazione relativa alla derivata prima. Un modo per aumentare la velocità di convergenza è quello di considerare anche la derivata seconda.

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2$$

L'idea del metodo di Newton diventa quella di usare l'ottimo dell'approssimazione quadratica di $f(x)$ dato da

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Se $f(x)$ è concava allora x_k converge verso un punto di massimo. Perché?

- Se $f(x)$ è concava allora se x_k è a sinistra del punto di massimo allora $x_{k+1} > x_k$
 - Se $f(x)$ è concava allora se x_k è a destra del punto di massimo allora $x_{k+1} < x_k$
- Se $f(x)$ è convessa allora x_k converge verso un punto di minimo

Algoritmo di Newton

Inizializzazione

Si fissa E e $k = 0$

Iterazione

Calcolo la prima e la seconda derivata

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Criterio di arresto

Se $|x_{k+1} - x_k| \leq E$ allora il $x_{k+1} = x^*$ è la soluzione ottima, altrimenti eseguo una nuova iterazione del metodo di Newton e pongo $k = k+1$

Bisezione vs Newton

Vantaggi Bisezione:

- Richiede solo il calcolo della derivata prima
 - Converge sempre

Svantaggi bisezione:

- È lento
- Vantaggi Newton:**
- La velocità di convergenza è quadratica
- Svantaggi Newton:**
- Richiede il calcolo della derivata seconda
 - Potrebbe divergere
 - Può fallire se il punto iniziale è lontano dal punto di ottimo

Estensione al caso n-dimensionale

Nel caso unidimensionale si utilizzano la derivata prima e seconda della funzione obiettivo:

- Derivata prima informazione sulla stazionarietà o meno di un punto
 - Derivata seconda fornisce informazioni sulla convessità della funzione

Nella n-dimensionale **derivata prima** → **gradiente**, **derivata seconda** → **Hessiano**, **convessità** → **convessità**.

Derivata direzionale

Sia f una funzione continua e v un vettore direzionale $\|v\| = 1$ di \mathbb{R}^n . Allora il limite

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

È la derivata direzionale di f in x nella direzione v . Per le direzioni della base canonica vengono chiamate **derivate parziali**.

Gradiente

Estensione del concetto di derivabilità per una funzione in più dimensioni. Il gradiente di f in x corrisponde al vettore delle derivate parziali.

Hessiano

Estensione del concetto di derivata seconda per una funzione in più dimensioni. Matrice Hessiana quadrata di dimensione $n \times n$. Se le derivate seconde sono continue allora l'hessiana è simmetrica.

$$\nabla^2 f = H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Matrice definite positive e negative (quadrate)

- **Definita positiva** se tutti gli autovalori della matrice sono positivi
 - **Definita negativa** se tutti gli autovalori della matrice sono negativi
 - **Semi-definita positiva** se tutti gli autovalori della matrice sono non negativi
 - **Semi-definita negativa** se tutti gli autovalori della matrice sono non positivi

Se l'hessiana è definita positiva allora la funzione è convessa, altrimenti concava.

Cercare i punti di massimo/minimo

Soluzione analitica

Poniamo il gradiente della funzione uguale a zero per cercare i punti stazionari ovvero i punti candidati ad essere massimo o minimo.

Una volta trovati i punti candidati, valutiamo la matrice Hessiana della funzione in quei punti:

- Se la matrice è definita positiva allora il punto candidato è minimo
 - Se la matrice è definita negativa allora il punto candidato è di massimo

Se non abbiamo informazioni globali riguardo la convessità o meno di una funzione non possiamo stabilire se un punto di minimo/massimo locale è anche globale.

Nel caso generale, le equazioni che otteniamo non sono lineari, e possono risultare particolarmente difficili da risolvere analiticamente.

Vari algoritmi: gradiente, Newton.

Appartengono all'insieme delle strategie di tipo line-search, le quali generano una successione di punti x_k all'interno dello spazio R^n in modo che il punto x_{k+1} è ottenuto a partire dal punto x_k muovendosi lungo una direzione di salita (massimo) o di discesa (minimo) le quali generano una successione di punti x_k all'interno dello spazio R^n in modo che il punto x_{k+1} è ottenuto a partire dal punto x_k muovendosi lungo una direzione di salita (massimo) o discesa (minimo).

Metodo gradiente

Consideriamo una generica funzione ed un generico punto x in cui la funzione risulta differenziabile. Se vogliamo cercare un punto di minimo della funzione f , si:

- Pone $k = 0$ e consideriamo un generico punto x_k e determinare una direzione di discesa d_k
 - Cerchiamo un nuovo punto x_{k+1} lungo la direzione d_k
 - $$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$$
 - K generica iterazione, α^k quantità scalare chiamata stepsize

Step size

Dati il punto di partenza x_k e la direzione di ricerca d_k , come si calcola?

- Vogliamo minimizzare/massimizzare il valore della funzione ovvero la restrizione della funzione $f(x)$ lungo la direzione d_k
 - x_k (punto corrente) e d_k (direzione corrente) sono fissate, e la sola variabile risulta essere α_k
 - Poniamo quindi

$$\frac{df(x^k + \alpha^k d^k)}{d\alpha^k} = 0$$

E si usa un metodo di minimizzazione/massimizzazione per funzioni in una variabile per trovare α_k ottimale.

- Direzione di crescita $d_k = \text{gradiente } f(x_k)$ per problemi di massimo
 - Direzione di decrescita $d_k = -\text{gradiente } f(x_k)$ per problemi di minimo

1. Poniamo $k = 0$ e consideriamo un generico punto x^k

2. Calcoliamo il gradiente di $f(x^k)$

$$\nabla f(x^k)$$

3. Poniamo $d^k = -\nabla f(x^k)$ per problemi di minimo e $d^k = +\nabla f(x^k)$ per problemi di massimo

4. Poniamo $x^{k+1} = x^k + \alpha^k \nabla f(x^k)$

5. Calcoliamo $\alpha^k > 0$ come soluzione di

$$f'(x^k + \alpha^k \nabla f(x^k)) = 0$$

utilizzando un metodo di ottimizzazione per funzioni in una variabile

6. **Criterio di arresto:**

se $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \epsilon_1$ o $\|\nabla f(x^{k+1})\| < \epsilon_2$ allora STOP,

- altrimenti eseguiamo una nuova iterazione del metodo, poniamo $k = k + 1$ e torniamo al punto 2

Metodo di Newton

Approssimiamo nell'intorno del punto corrente la funzione $f(x)$ con una funzione quadratica che viene ottimizzata per ottenere un nuovo punto.

$$f(x^k + \Delta x) = f(x^k) + \nabla f(x^k) \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x H_f(x^k) \Delta x$$

Cerco una direzione di miglioramento che ottimizza la funzione nel nuovo punto ($x_k + \Delta x$)

$$\Delta x = x^{k+1} - x^k$$

1. $K = 0$, scegliamo un punto iniziale x_k

2. Calcoliamo $\nabla f(x^k)$ e $H_f(x^k)^{-1}$

3. Calcoliamo il nuovo punto usando

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - H_f(\mathbf{x}^k)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k)$$

- 4.
5. Usiamo i criteri di convergenza visti prima per il metodo del gradiente (criteri di arresto). Se non vengono superati, $k=k+1$ e si torna al punto 2

Il metodo di Newton utilizza sia il gradiente che la matrice Hessiana ad ogni iterazione. Il metodo di Newton se converge converge molto più velocemente del metodo del gradiente, ma ogni iterazione richiede uno sforzo computazionale maggiore. Nel caso di funzioni quadratiche, il metodo converge in una iterazione. In funzioni complesse, la matrice Hessiana risulta complessa.

Programmazione lineare vincolata

Consideriamo un generico problema di programmazione non lineare vincolata. Per affrontare tale problema abbiamo tre approcci: riduzione del numero di variabili libere, metodo dei moltiplicatori di Lagrange, condizioni di KKT

Riduzione del numero di variabili libere

Supponiamo di avere un problema di ottimizzazione soggetto ad un certo numero l di vincoli di uguaglianza.

Nel caso in cui sia possibile l variabili in funzione delle restanti $n - l$ variabili utilizzando i vincoli di uguaglianza del problema, allora possiamo trasformare tale problema in un problema di ottimizzazione non vincolata con $n-l$ variabili. Tale metodo, molto spesso non è possibile applicarlo.

- Consideriamo il seguente problema di ottimizzazione non lineare vincolato

$$\min (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$$

soggetto al seguente vincolo

$$x_1 + 4x_2 = 3$$

- Possiamo esplicitare la variabile x_1 nel vincolo in funzione di x_2

$$x_1 = 3 - 4x_2$$

e sostituire nella funzione obiettivo ottenendo un problema di ottimizzazione in una variabile

$$\min (3 - 4x_2 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad \min (1 - 4x_2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$$

$$\Rightarrow \min 18x_2^2 - 12x_2 + 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

- Da cui possiamo ottenere anche il valore di x_1

$$x_1 = 3 - 4x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5}{3}$$

- è generalizzabile tale metodo?

La regione ammissibile è un cerchio di raggio unitario. Le curve di livello della funzione obiettivo sono rette con pendenza -1. Il punto di minimo corrisponde a quel punto del cerchio tangente alla curva di livello avente valore più basso.

Lagrangiana

Consideriamo un generico problema di programmazione non lineare vincolata con solo vincoli di uguaglianza. Consideriamo la funzione

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x_1, \dots, x_n)$$

Tale funzione si chiama **lagrangiana**, mentre il simbolo strano (tante quanti sono i vincoli) prendono il nome di **moltiplicatori di Lagrange**. I punti stazionari della lagrangiana sono fortemente legati ai punti di minimo/massimo della funzione.

Consideriamo un generico problema di programmazione non lineare soggetto ai vincoli di uguaglianza. Sia x^* il punto stazionario di f , allora esistono m moltiplicatori di Lagrange L^* tali che (x^*, L^*) è un punto stazionario della Lagrangiana associata.

$$L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot g_i(x^*)$$

I punti x^* e (x^*, L^*) possono essere punti stazionari di tipo diverso. Tale condizione fornisce una condizione necessaria ma non sufficiente per l'ottimizzazione del problema vincolato.

Condizioni del primo ordine

Consideriamo un generico problema di ottimizzazione non lineare soggetto ai vincoli di uguaglianza. Sia x^* il punto stazionario di f , allora esistono m moltiplicatori di Lagrange L^* tali che nel punto (x^*, L^*) il gradiente della funzione lagrangiana è nullo.

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0 \text{ con } i = 1, \dots, n$$
$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ con } i = 1, \dots, m$$

I punti che annullano il gradiente rappresentano i punti candidati ad essere di massimo/minimo della funzione.

Se la funzione f è convessa allora i punti stazionari sono punti di minimo. Se la funzione f è concava allora i punti stazionari sono punti di massimo.

L'insieme dei vincoli restringe lo spazio delle soluzioni ammissibili del problema al sottospazio intersezione dato dall'intersezione dei vari vincoli. Il gradiente della funzione nel punto di ottimo x^* deve risultare ortogonale a tale sottospazio, e il vettore ortogonale a tale sottospazio è dato da

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*)$$

➤ Dobbiamo quindi avere che

$$\nabla f(x^*) = - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*)$$

Nel punto di ottimo il gradiente della funzione f può essere riscritto come combinazione lineare dei gradienti dei vincoli.

Condizioni del secondo ordine

Ci sono condizioni sufficienti per garantire che i punti stazionari della Lagrangiana siano punti di massimo/minimo della funzione f . Sia J , jacobiana, la matrice dei gradienti dei vincoli. Consideriamo l'insieme dei vettori y tali che $J(x^*) \cdot y = 0$, tale sottospazio rappresenta l'insieme dei vettori perpendicolari ai gradienti dei vari vincoli.

➤ Consideriamo la matrice Hessiana della funzione Lagrangiana ristretta alle variabili iniziali x_1, \dots, x_n

$$H_L(x^*, \lambda^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

- Condizione sufficiente affinché x^* sia un punto di minimo è che $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y > 0$
- Condizione sufficiente affinché x^* sia un punto di massimo è che $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y < 0$
- Condizione necessaria affinché x^* sia un punto di minimo è che $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y \geq 0$
- Condizione necessaria affinché x^* sia un punto di massimo è che $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y \leq 0$

- Si cercano i punti stazionari della Lagrangiana per ottenere i punti candidati ad essere punti di massimo e minimo
 - Uso le condizioni del secondo ordine per eliminare i punti stazionari che di sicuro non sono né di minimo né di massimo ovvero i **punti di sella**
 - Cerco y tali che $J(x^*) \cdot y = 0$
 - Se esistono y_1 e y_2 tali che $y_1^T \cdot H_L(x^*) \cdot y_1 > 0$ o $y_2^T \cdot H_L(x^*) \cdot y_2 < 0$ allora possiamo classificarlo come punto di sella.
- Per gli altri punti:

➤ Per i rimanenti punti:

- se $y^T \cdot H_L(x^*) \cdot y > 0$ o $y^T \cdot H_L(x^*) \cdot y < 0$ allora possiamo classificarlo come punto di minimo o massimo
- se $y^T \cdot H_L(x^*) \cdot y \geq 0$ o $y^T \cdot H_L(x^*) \cdot y \leq 0$ allora non possiamo sapere se tale punto è di minimo o massimo

Consideriamo un generico problema di programmazione non lineare vincolata soggetto a vincoli di uguaglianza e disuguaglianza. Un punto di minimo/massimo x^* è tale che:

- Vincoli di uguaglianza $x^* = 0$
- Vincoli di disuguaglianza $x^* = 0$, se vincolo attivo, o < 0 se vincolo non attivo
- Se $h_j(x^*) < 0$ allora significa che un piccolo cambiamento non viola il vincolo

Si definisce la Lagrangiana come... in $n+m+p$ variabili

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^p \mu_j \cdot h_j(x_1, \dots, x_n)$$

Condizioni KKT

Consideriamo un generico problema di programmazione non lineare vincolata soggetto a vincoli di disuguaglianza e di uguaglianza.

Sia x^* un punto di ottimo f , allora un vincolo di disuguaglianza a quel punto può essere attivo se $= 0$ o inattivo se < 0 . Si indica con $I(x^*)$ l'insieme degli indici dei vincoli attivi.

Allora esistono m moltiplicatori L^* e p moltiplicatori U^* tali che valgono le seguenti condizioni:

Condizione di stazionarietà

$$\nabla f(x^*, \lambda^*, \mu^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*) - \sum_{j=1}^p \mu_j^* \cdot \nabla h_j(x^*) = 0 \quad (\text{per problemi di max})$$

$$\nabla f(x^*, \lambda^*, \mu^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \cdot \nabla h_j(x^*) = 0 \quad (\text{per problemi di min})$$

Ammissibilità primale

$$g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$h_j(x^*) \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Ammissibilità duale

$$\mu_j^* \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Condizioni di complementarietà

$$\mu_j^* \cdot h_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Ovvero gradiente - sommatoria di L^* * gradiente vincoli uguaglianza - sommatoria di U^* * gradiente vincoli disuguaglianza

Ammissibilità primale

$$g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Ammissibilità duale

$$\mu_j^* \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Condizioni di complementarietà

$$\mu_i^* \cdot h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Implicano che:

- Nel caso dei vincoli di disuguaglianza abbiamo che se $h_j(\mathbf{x}^*) < 0$ (vincolo non attivo) allora $\mu_j^* = 0$
- Se $h_j(\mathbf{x}^*) = 0$ (vincolo attivo) allora $\mu_j^* \geq 0$

Condizioni del secondo ordine

Condizioni sufficienti per garantire che i punti stazionari della Lagrangiana siano punti di massimo o minimo della funzione f . Considerando l'insieme dei vettori \mathbf{y} tali che $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{y} = 0$ dove in questo caso $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ è una matrice di dimensione $l(\mathbf{x}^*) \times n$ contenente tutti i gradienti dei vincoli attivi, ovvero:

- Vincoli di uguaglianza
- Vincoli di disuguaglianza attivi

➤ Consideriamo la matrice Hessiana della funzione Lagrangiana ristretta alle variabili iniziali x_1, \dots, x_n

$$H_L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

- Condizione sufficiente affinché \mathbf{x}^* sia un punto di minimo è che $\mathbf{y}^T \cdot H_L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \mathbf{y} > 0$
- Condizione sufficiente affinché \mathbf{x}^* sia un punto di massimo è che $\mathbf{y}^T \cdot H_L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \mathbf{y} < 0$
- Condizione necessaria affinché \mathbf{x}^* sia un punto di minimo è che $\mathbf{y}^T \cdot H_L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \mathbf{y} \geq 0$
- Condizione necessaria affinché \mathbf{x}^* sia un punto di massimo è che $\mathbf{y}^T \cdot H_L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \mathbf{y} \leq 0$

Le condizioni di KKT rappresentano le condizioni necessarie ma non sufficienti che caratterizzano i punti di ottimo. I punti di ottimo devono soddisfare le condizioni di KKT. Le condizioni KKT mi consentono di limitare la ricerca del punto di ottimo tra i punti che soddisfano le condizioni, e non sono un algoritmo.

