Es. 2

$$\max z = 130x_c + 100x_p$$
$$1.5x_c + x_p \le 27$$
$$x_c + x_p \le 21$$
$$0.3x_c + 0.5x_p \le 9$$
$$x_c \le 15$$
$$x_p \le 16$$
$$x_c, x_p \ge 0$$

$$-130x_c - 100x_p$$
$$1.5x_c + x_p + s_1 = 27$$
$$x_c + x_p + s_2 = 21$$
$$0.3x_c + 0.5x_p + s_3 = 9$$
$$x_c + s_4 = 15$$
$$x_p + s_5 = 16$$

	x_c	x_p	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	TN	
z	-130	-100	0	0	0	0	0	0	
s_1	1.5	1	1	0	0	0	0	27	→ 18
s_2	1	1	0	1	0	0	0	21	→ 21
s_3	0.3	0.5	0	0	1	0	0	9	→ 30
s_4	1	0	0	0	0	1	0	15	→ 15 → rapporto + piccolo
s_5	0	1	0	0	0	0	1	16	→ 0

$$S_4 = [1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 15]$$

$$z = [-130-(-130\cdot 1), -100, 0, 0, 0, 0-(-130\cdot 1), 0, 0-(-130\cdot 15)] =$$
$$[0, -100, 0, 0, 0, +130, 0, 1950]$$ coeff -130

$$S_1 = [1.5-(1.5\cdot 1), 1, 1, 0, 0, -1.5, 0, 27-(1.5\cdot 15)] = [0, 1, 1, 0, 0, -1.5, 0, 4.5]$$ coeff 1.5

$$S_2 = [1-(1\cdot 1), 1-(1\cdot 0), 0, 1, 0, -1, 0, 21-(1\cdot 15)] = [0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, 6]$$ coeff 1

$$S_3 = [0, 0, -0.5, 0, 1, 0.45, 0, 4.05]$$ coeff 0.3

$$S_5 = [0, 0, -1, 0, 0, 1.5, 1, 11.5]$$ coeff 0

	x_c	x_p	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	TN	
z	0	-100	0	0	0	130	0	1850	
x_p ~~s_1~~	0	1	1	0	0	-1.5	0	4.5	→ 4.5
s_2	0	1	0	1	0	-1	0	6	→ 6
s_3	0	0.5	-0.5	0	1	0.45	0	4.5	→ 12.6
x_c	1	0	0	0	0	1	0	15	→ 0
s_5	0	1	-1	0	0	1.5	1	16	→ 16

	X_c	X_p	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	TN		
z	0	0	100	0	0	-20	0	2400	$\to -100$	
X_p	0	1	1	0	0	-1.5	0	4.5	$\to 1$	$\to 3$ NO
S_2	0	0	-1	0	0	0.5	0	1.5	$\to 1$	$\to 3$
S_3	0	0	-1	0	0.5	2,45	0	2.25	$\to 0.5$	$\to 0,918$
X_c	1	0	0	0	0	1	0	15	$\to 0$	$\to 15$
S_5	0	0	-1	0	0	1.5	1	11.5	$\to 1$	$\to 7.66$

	X_c	X_p	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	TN
z								
X_p								
S_2								
S_4	0	0	-0.41	0	0.20	1	0	0.92
X_c								
S_5								

Duale

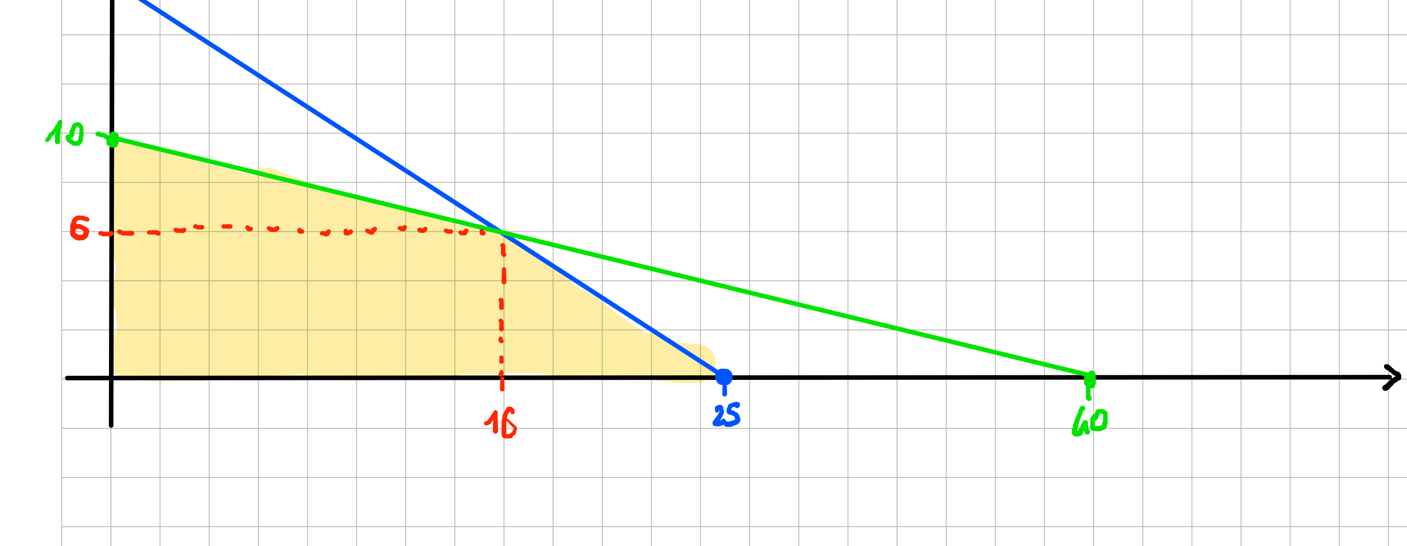
$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$
$$1x_1 + 2x_2 \le 40$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 120$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\min w = 40y_1 + 120y_2$$
$$1y_1 + 4y_2 \le 40$$
$$2y_1 + 3y_2 \le 50$$

$$\downarrow$$

$$w(16,6) = 40(16) + 120(6) = 1360$$
$$\downarrow$$
$$z_{max} = 1360$$

Adesso vediamo teorema complementarietà debole
- se $y_1 > 0$: 1° vincolo primale attivo
- se $y_2 > 0$: 2° vincolo primale attivo



$y_1 + 4y_2 \leq 40 \rightarrow$

$y_1 = 0$
$\frac{4y_2}{4} = \frac{40}{4}$
$y_2 = 10$
$(0, 10)$

$y_2 = 0$
$y_1 = 40$
$(0, 40)$

$2y_1 + 3y_2 \leq 50 \rightarrow$

$y_1 = 0$
$3y_2 \leq 50$
$y_2 = 16.67$
$(0, 16.67)$

$y_2 = 0$
$2y_1 \leq 50$
$y_1 = 25$
$(25, 0)$

Dopo aver trovato i valori con il teorema della complementarietà duale, risolviamo il problema primale per trovare x_1 e x_2

$\max z = 40x_1 + 50x_2 = 1360 \rightarrow$ dal duale, perché entrambi hanno la stessa soluzione

$x_1 + 2x_2 = 40$
$4x_1 + 3x_2 = 120$

$x_1 = 40 - 2x_2$
$4(40 - 2x_2) + 3x_2 = 120$
$160 - 8x_2 + 3x_2 = 120$
$-5x_2 = -40$
$x_2 = 8$

$40 - 16 = 24$

$x_1 = 24$
$x_2 = 8$
$z_{max} = 1360$

$\max\ 130x_c + 100x_p$
$1.5x_c + x_p \leq 27$
$x_c + x_p \leq 21$
$0.3x_c + 0.5x_p \leq 9$
$x_c \leq 15$
$x_p \leq 16$

$\min\ 27y_1 + 21y_2 + 9y_3 + 15x_4 + 16x_5$
$1{,}5y_1 + 1y_2 + 0.3y_3 + y_4 + \cancel{0y_5} = 130$
$y_1 + y_2 + 0.5y_3 + \cancel{0y_4} + y_5 = 100$
$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$

$\max\ 3x + 5y$
$x - y \leq 1 \rightarrow u_1$
$2x - y \geq 4 \rightarrow u_2$
$-2x + y = 1 \rightarrow u_3$
$x, y \geq 0$

$\min\ y_1 + 4y_2 + y_3$
$y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 3$
$-y_1 - y_2 + y_3 \geq 5$
$y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3$ free

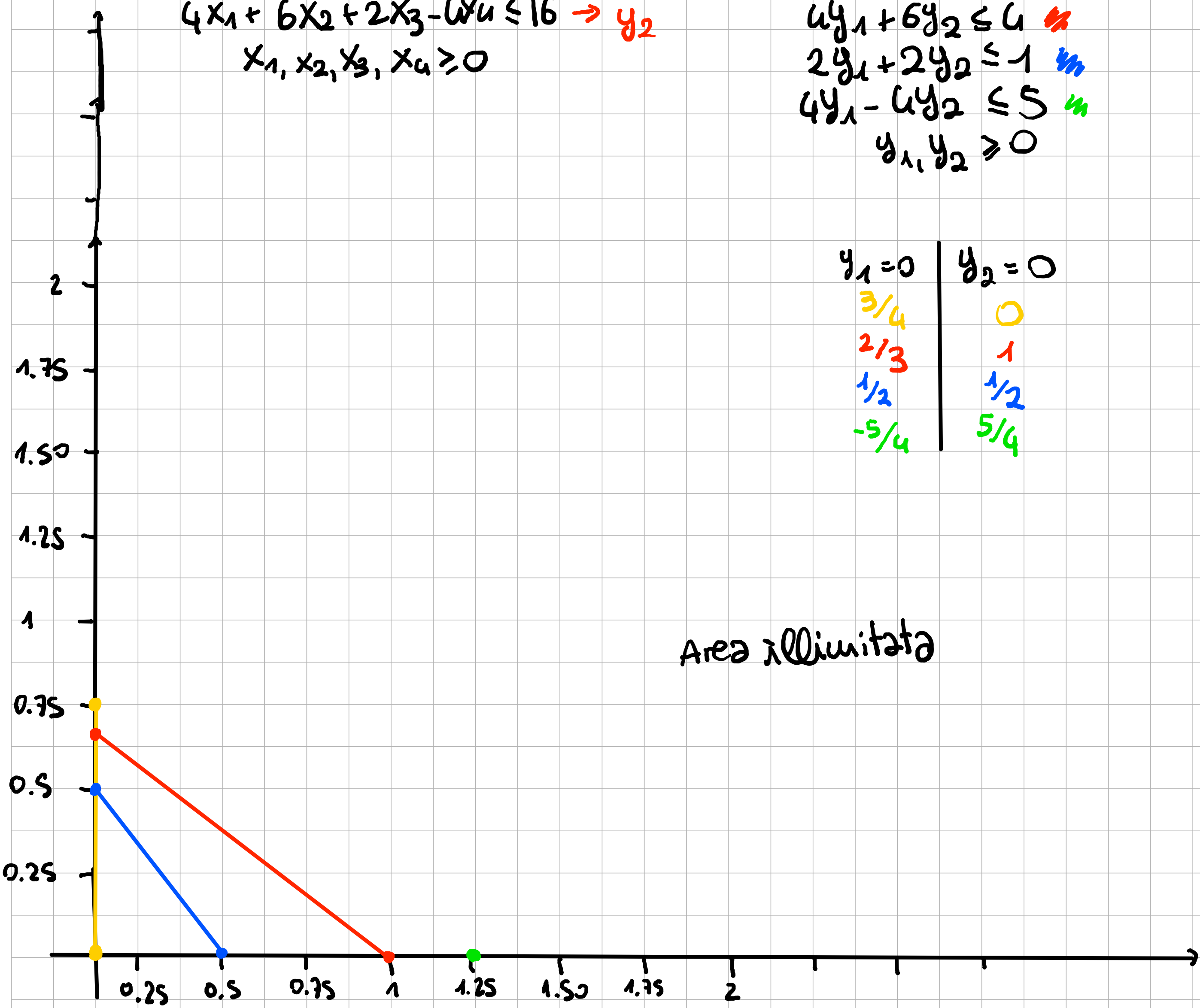
$$\min\ x_1+2x_2-9x_3+5x_4+6x_5$$
$$x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5=30 \rightarrow y_1$$
$$x_1+3x_2+5x_3+2x_4-x_5\leq 10 \rightarrow y_2$$
$$x_1,x_2\geq 0,\ x_3\leq 0,\ x_4 \text{ free},\ x_5\geq 0$$

$$\max\ 30y_1+10y_2 \qquad y_1 \text{ free},\ y_2\leq 0$$
$$y_1+y_2\leq 1$$
$$-2y_1+3y_2\leq 2$$
$$3y_1+5y_2\geq -9$$
$$-y_1+2y_2=5$$
$$2y_1-y_2\leq 6$$

Calcolare soluzione ottima problema primale senza il simplesso

$$\max\ 3x_1+4x_2+x_3+5x_4$$
$$4x_2+2x_3+4x_4\leq 10 \rightarrow y_1$$
$$4x_1+6x_2+2x_3-4x_4\leq 16 \rightarrow y_2$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

$$\min\ 10y_1+16y_2$$
$$4y_2\leq 3$$
$$4y_1+6y_2\leq 4$$
$$2y_1+2y_2\leq 1$$
$$4y_1-4y_2\leq 5$$
$$y_1,y_2\geq 0$$



$y_1=0$	$y_2=0$
$3/4$	0
$2/3$	1
$1/2$	$1/2$
$-5/4$	$5/4$

Area illimitata

Visto che la regione é illimitata, adesso dobbiamo trovare la soluzione con le condizioni di complementarietà

primi due: colonne verticali, tutti per la y_1 i vincoli per x

$$\begin{cases} y_1(10 - 0x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 4x_4) = 0 \\ y_2(16 - 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 4x_4) = 0 \end{cases}$$

cambiati di segno.

se $y_1 > 0$: 1° vincolo primale attivo

se $y_2 > 0$: 2° vincolo primale attivo

vincoli, moltiplicati per la x del vincolo, con il termine noto cambiato di segno

$$\begin{cases} x_1(4y_2 - 3) = 0 \\ x_2(4y_1 + 6y_2 - 4) = 0 \\ x_3(2y_1 + 2y_2 - 1) = 0 \\ x_4(4y_1 - 4y_2 - 5) = 0 \end{cases}$$

$10 = 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to 10 = 4x_4 \to x_4 = \frac{10}{4} = 5/2$

$16 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 \to 16 = 4x_1 - \cancel{4}^{2}(5/\cancel{2})$

$x_1 = 26/4 = 13/2$

$y_1 = 2$
$y_2 = 3/4$

soluzione ottima

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_1 &= 13/2 \\ x_4 &= 5/2 \end{aligned}}$$

$x_1(4y_2 - 3) = 0 \to x_1 = 0$

$4y_2 - 3 = 0$

$4y_2 = 3/4 \to y_2 = 3/4$

$x_2(4y_1 + 6y_2 - 4) = 0 \to x_2 = 0 \longrightarrow$ ALLORA QUESTO É VALIDO

$4y_1 + 6y_2 - 4 = 0$

$4y_1 + \cancel{6}^{3} \cdot 3/\cancel{4}_{2} - 4 = 0$

$4y_1 + 9/2 - 4 = 0$

$4y_1 + \frac{9-8}{2} = 0 \to 4y_1 + 1/2 = 0$

$\frac{4y_1}{4} = -1/2 : 4 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -1/8$

$y_1 = -1/8$

NON VALIDO quindi $x_2 = 0$

$x_3(2y_1 + 2y_2 - 1) = 0 \to x_3 = 0$

$2y_1 + \cancel{2}^{1} \cdot 3/\cancel{4}_{2} - 1 = 0$

$2y_1 + 3/2 - 1 = 0$

$2y_1 + \frac{3-2}{2} = 0$

$2y_1 + 1/2 = 0$

$\frac{\cancel{2}y_1}{\cancel{2}} = -1/2 : 2 = -1/2 \cdot 1/2 = -1/4$

NON VALIDO quindi $x_3 = 0$

$x_4(4y_1 - 4y_2 - 5) = 0 \to x_4 = 0$

$4y_1 - \cancel{4} \cdot 3/\cancel{4} - 5 = 0$

$4y_1 - 3 - 5 = 4y_1 - 8 = 0 \quad 4y_1 = 8/4 = 2$

Quindi $y_1 = 2$ e $y_2 = 0.75$

Es. 2

$$\max z = 4x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 7$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Sol. ottima problema duale: $(y_1, y_2)^* = (0, 2)$
ricava soluzione problema primale

$\downarrow$

$$\min 3y_1 + 7y_2$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 4 \quad \rightarrow x_1(y_1 + 2y_2 - 4) = 0$$
$$y_1 + 3y_2 \ge 6 \quad \rightarrow x_2(y_1 + 3y_2 - 6) = 0$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

$$y_1(3 - x_1 - x_2) = 0 \qquad y_2(7 - 2y_2 - 3x_2) = 0$$

→ orizzontale: cambi segno termine noto
verticale: cambi segno vincoli

Assignment

$$\max 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4$$
$$4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 10$$
$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 \le 16$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

$$\max -3x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4$$
$$4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + s_1 = 10$$
$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 + s_2 = 16$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	TN	
z	-3	-4	-1	-5	0	0	0	
x_4 ~~s_1~~	0	4	2	4	1	0	10	$\to 10/4 = 2.5$
s_2	4	6	2	-4	0	1	16	$\to$ NaN

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	TN	
z	-3	1	3/2	0	5/4	0	25/2	
x_4	0	1	1/2	1	1/4	0	5/2	$\to$ NaN
x_1 ~~s_2~~	4	22	10	0	4	1	26	$\to 26/4 = 13/2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	TN	
z	0	35/2	9	0	17/4	3/4	32	$\to -3$
x_4	0	1	1/2	1	1/4	0	5/2	$\to 0$
x_1	1	11/2	5/2	0	1	1/4	13/2	

$x_1 = 13/2$
$x_4 = 5/2$
$z = 32$

$$\max \; 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$$
$$x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Essendo $\geq$, allora bisogna fare le due fasi

$$\downarrow$$

$$x_2 + x_3 - s_1 + a_1 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 - s_2 + a_2 = 1$$

F2 obiettivo fase 1 $\quad \min \; w = a_1 + a_2$

↳ invertire quello che c'è all'inizio

Se il valore minimo di w é 0, esiste una soluzione di base ammissibile, si puó passare alla fase II

Se il valore minimo di w é > 0, il problema originale non ha soluzioni ammissibili

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	TN	
w	-1	1	-2	1	1	0	0	-3	
a_1	0	1	1	-1	0	1	0	2	$\to 2/1 = 2$
x_3 ~~a_2~~	1	-2	1	0	-1	0	1	1	$\to 1/1 = 1$

$$w = a_1 + a_2 = (2 - x_2 - x_3 + s_1) + (1 - x_1 + 2x_2 - x_3 + s_2) =$$
$$= 3 - x_1 + x_2 - 2x_3 + s_1 + s_2$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + s_1 + s_2 = -3$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	TN	
w	1	-3	0	1	-1	0	2	-1	
x_2 ~~a_1~~	-1	3	0	-1	1	1	-1	1	$\to 1/3$
x_3	1	-2	1	0	-1	0	1	1	$\to 1/-2$ NaN

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	TN	
w	0	0	0	0	0	1	1	0	$\to -3$
x_2	$-1/3$	1	0	$-1/3$	$1/3$	$1/3$	$-1/3$	$1/3$	
x_3	$1/3$	0	1	$-2/3$	$-1/3$	$2/3$	$1/3$	$5/3$	$\to -2$

Visto che il valore di w é 0, e tutti i coefficienti nella riga w sono non-negativi, la fase I é conclusa.

Fase II: rimuovi colonne a_1 e a_2, e riga w del tableau finale sostituisci riga w con la riga f2 obiettivo originale

$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$ → Le variabili di base trovate nella fase II, x_2 e x_3, non devono avere coefficienti

Quindi per aggiornarlo devo fare 0 per ciascuna delle variabili di base

$$R_z = R_{z\,iniziale} + \underset{\text{coeff. della riga } z}{\underbrace{2}} \cdot R_{x_2} + 2 \cdot R_{x_3}$$

$x_1 = -2 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot -\frac{1}{3} = -2 + \cancel{2/3} - \cancel{2/3} = -2$
$x_2 = -2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$
$x_3 = -2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -2 + 2 = 0$
$S_1 = 0 + 2 \cdot -\frac{2}{3} + 2 \cdot -\frac{1}{3} = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{6}{3} = -2$
$S_2 = 0 + 2 \cdot -\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = -\cancel{2/3} + \cancel{2/3} = 0$
$TN = 0 + 2 \cdot (\frac{1}{3}) + 2 \cdot (\frac{5}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = \frac{12}{3} = 4$

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	TN
z	-2	0	0	-2	0	4
x_2	$-1/3$	1	0	$-1/3$	$1/3$	$1/3$
x_3	$1/3$	0	1	$-2/3$	$-1/3$	$5/3$

e poi si fa il simplesso

---

max $x_1 + 3x_2$ **Branch & Bound**
$x_1 + 5x_2 \leq 21$
$8x_1 + 2x_2 \leq 35$

Per prima cosa, risolviamo il problema - in questo caso, troviamo i valori di x_1 e x_2, trovando l'intersezione tra i due vincoli

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 21 \\ 8x_1 + 2x_2 = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 21 - 5x_2 \\ 8(21 - 5x_2) + 2x_2 = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} 133 - 38x_2 = 0 \\ x_1 = 21 - 5x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 133/38 = 3.5 \\ x_1 = 21 - 5 \cdot 3.5 = 3.5 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 3.5 \\ x_2 = 3.5 \end{matrix}$$

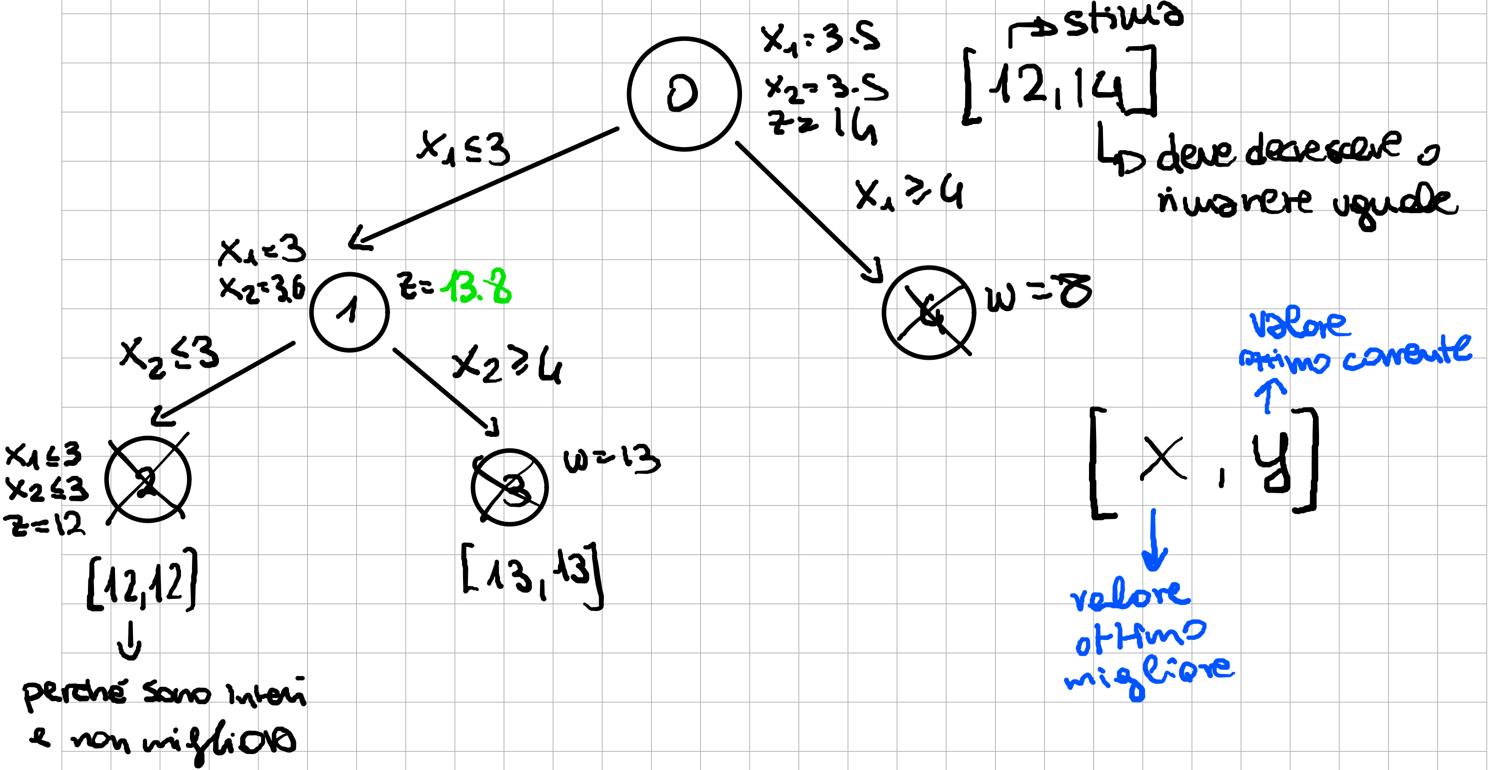
Adesso che abbiamo i valori di x_1 e x_2, li mettiamo nella fz obiettivo per trovare il valore ottimo

$x_1 + 3x_2 = 3.5 + 3 \cdot 3.5 = 14$

NODO 0

$x_1 = 3,5$ → $x \leq 3$, $x \geq 4$
$x_2 = 3.5$ → $x \leq 3$, $x \geq 4$
$z = 14$

→ vediamo lower bound arrotondando perché siamo in un problema di max
$x_1 + 3x_2 = 3 + 3 \cdot 3 = 12$



Nodo 1
$x_1 = 3$

$x_1 + 5x_2 = 21$
$3 + 5x_2 = 21$
$5x_2 = \frac{18}{5} = 3.6$ → non è intero quindi branch

$x_1 + 3x_2 = 3 + 3 \cdot 3.6 = 13,8$ → stima realistica

Nodo 2
$x_1 \leq 3$
$x_2 = 3$

$x_1 + 5x_2 = 21$
$x_1 + 5 \cdot 3 = 21$
$x_1 = 21 - 15 = 6$ → visto che $x_1 \leq 3$ allora $x_1 = 3$

$w = x_1 + 3x_2 = 3 + 3(3) = 12$

Nodo 3
$x_1 \leq 3$
$x_2 = 4$

$x_1 + 5x_2 = 21$
$x_1 + 5 \cdot 4 = 21$
$x_1 = 1$

⇒ SOLUZIONE OTTIMA

$w = x_1 + 3(x_2) = 1 + 3(4) = 12 + 1 = 13$

Visto che la soluzione ottima è migliore di quella prima, allora la si aggiorna e la si chiude perché le soluzioni sono intere

Nodo 4

$x_1 \geq 4$
$x_1 = 4$

$x_1 + 5x_2 = 21$
$4 + 5x_2 = 21 - 4$
$5x_2 = \frac{17}{5} = 3.4$

$8(4) + 2x_2 \leq 35$
$2x_2 \leq 3$
$x_2 \leq 3/2 = 1.5$

$$w = x_1 + 3x_2 = 4 + 3(1,5) = 8,5$$

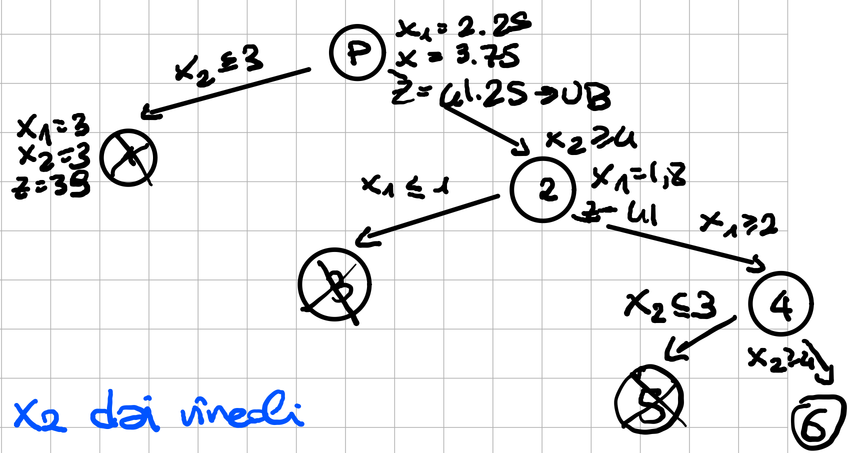
Non é migliore quindi lo si chiude.

SOLUZIONE OTTIMA $P(1,4)$, valore ottimo $= 13$

Ricordati di fare il calcolo di x_1 o x_2 in entrambi i vincoli e non solo uno. Bisogna sempre prendere il valore più stretto in modo che vada bene per entrambi i vincoli

---

Branch & Bound



$\max 5x_1 + 8x_2$
$x_1 + x_2 \leq 6$
$5x_1 + 9x_2 \leq 45$
$x_1, x_2 \geq 0$

1. Trovare i valori di x_1 e x_2 dai vincoli

$x_1 + x_2 = 6$
$x_1 = 6 - x_2$
$x_1 = 6 - 3.75 = 2.25$

$5(6 - x_2) + 9x_2 = 45$
$30 - 5x_2 + 9x_2 = 45$
$\frac{4x_2}{4} = 15/4 = 3.75$

$z = 5(2.25) + 8(3.75) = 41,25 \to$ upper bound perché é un problema di massimizzazione

Poiché non é intero, dobbiamo fare branch.

Nodo $P_1 = x_2 \leq 3$
Nodo $P_2 = x_2 \geq 4$

P_1: $x_1 + 3 \leq 6 \to x_1 \leq 3$
$5x_1 + 27 \leq 45 \to 5x_1 \leq 18 \to x_1 \leq 3.6$

Prendiamo il vincolo più stretto che possa soddisfare entrambi.
Poi metti le variabili all'interno della fz obiettivo.
Essendo il lower bound, diventa il nuovo lower bound.
$x_1 \leq 3, x_2 \leq 3 \to z = 5(3) + 8(3) = 15 + 24 = 39 \to$ primo lower bound

P2 $x_2 \geq 4$ $\rightarrow x_1 + 4 \leq 6 \rightarrow x_1 \leq 2$

$5x_1 + 9 \cdot 4 \leq 45$

$5x_1 = 45 - 36 = 9/5 = 1{,}8$ → allora si prende q

$z = 5 \cdot 1{,}8 + 8 \cdot 4 = 41$

P3 $x_2 \geq 4$, $x_1 \leq 1$

Visto che ho entrambi i vincoli, uso sia $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$

$1 + 4 = 5 \leq 6$ soddisfatto

$5(1) + 9(4) = 41 \leq 45$ soddisfatto

Quindi calcoliamo il valore di $z = 5(1) + 8(4) = 37$

Visto che $37 < 39$, non aggiorno il LB

P4 $x_2 \geq 4$, $x_1 \geq 2$

$2 + 4 = 6 \leq 6$ soddisfatto

$5(2) + 9(4) = 10 + 36 = 46 \not\leq 45$ NON SODDISFATTO

Troviamo quindi valore di x_2 nel secondo vincolo

$5(2) + 9x_2 = 45 \rightarrow 10 + 9x_2 = 45 \rightarrow 9x_2 = 35/9 \simeq 3.88$

$z = 5(2) + 8(3.88) = 41{,}11$

P5

$x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$\underbrace{x_2 \geq 4,\ x_1 \geq 2,\ x_2 \leq 3}$ → sono in conflitto, quindi non ammissibile

P6

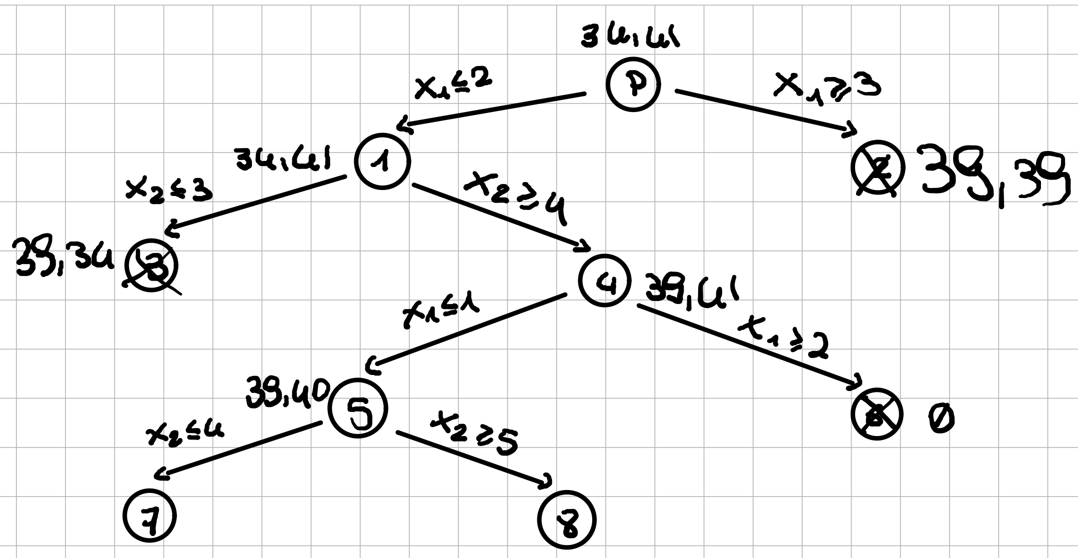
$x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \geq 4,\ x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 4$

→ $x_1 + x_2 \leq 6 \rightarrow 2 + 4 = 6 \leq 6$ ✓

$5(2) + 9(4) = 46 \not\leq 45$ ✗



(P) $\max z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \le 6$

$5x_1 + 9x_2 \le 45$

→ intersezione $x_1 = 6 - x_2 = 6 - 3{,}75 = 2{,}25$

$5(6 - x_2) + 9x_2 = 45$

$\cancel{30} - 5x_2 + 9x_2 = 45 - 30$

$4x_2 = 15/4 \Rightarrow 3{,}75$

$z = 5(2{,}25) + 8(3{,}75) = 41{,}25$ → UB

Arrotondo x_1 e x_2 in modo da trovare il LB:

$z = 5(2) + 8(3) = 34$

(1) $\max z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \le 6$

$5x_1 + 9x_2 \le 45$

$x_1 \le 2$

→ $2 + x_2 \le 6$

$x_2 \le 4$

| $5(2) + 9x_2 \le 45$

$10 + 9x_2 \le 45$

$9x_2 \le 35/9 = 3{,}88$

$z = 5(2) + 8(3{,}88) = 41{,}04$

(3) $\max z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \le 6$

$5x_1 + 9x_2 \le 45$

$x_1 \le 2, x_2 \le 3$

$2 + 3 \le 6 \Rightarrow 5 \le 6$ SODDISFATTO

$5(2) + 9(3) \le 45$

↳ $10 + 27 \le 45 \Rightarrow 37 \le 45$ ✓

$z = 5(2) + 8(3) = 24 + 10 = 34 < 39$ quindi chiudo

② $\max z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 3$

$3 + x_2 \leq 6$

$x_2 \leq 3$

$5(3) + 9x_2 \leq 45$

$15 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \leq 30/9 = 3,33$

$z = 5(3) + 8(3) = 39$

④ $\max z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_1 \leq 2, x_2 \geq 4$

$2 + 4 \leq 6$ soddisfatto

$5(2) + 9(4) = 46 \geq 45$ NO

quindi calcolo un x_1 diverso, tenendo $x_2 \geq 4$

$x_1 + 4 \leq 6 - 4 = 2 \quad x_1 = 2$

$5x_1 + 9(4) = 45 \rightarrow 5x_1 = 9/5 = 1,8$

$z = 5(1,8) + 8(4) = 41$

⑤ $\max z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_1 \leq 1$

$1 + x_2 \leq 6 \rightarrow x_2 \leq 5$

$5 + 9x_2 \leq 45$

$9x_2 \leq \frac{40}{9} = 4,44$

$z = 5(1) + 8(4.44) = 40$

⑥ $\max z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 2, x_2 \leq 4$

$5x_1 + 9(4) = 45 \rightarrow 9/5 = 1,8$

ma $x_1 \geq 2$ quindi non é ammissibile

⑦ $\max z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_1 \leq 1, x_2 \leq 4$

$\rightarrow 5 + 9x_2 \leq 45$

$9x_2 \leq 40/9 = 4,44$

↓

il più stretto é 4

$z = 5 + 8(4) = 37 < 39$ quindi lo si chiude

(8) max $z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \le 6$

$5x_1 + 9x_2 \le 45$

$x_1 \le 2, x_2 \ge 4, \; x_1 \le 1, x_2 \ge 5$

$1 + x_2 \le 6 \rightarrow x_2 \le 5$

$5 \cdot 1 + 9x_2 \le 45 - 40 = 4,44$

$x_1 + 5 \le 6 \rightarrow x_1 \le 1$

$5x_1 + 9 \cdot 5 = 45 - 45 = 0$

$x_1 = 0$

$z = 5(0) + 8(5) = 40 > 39$

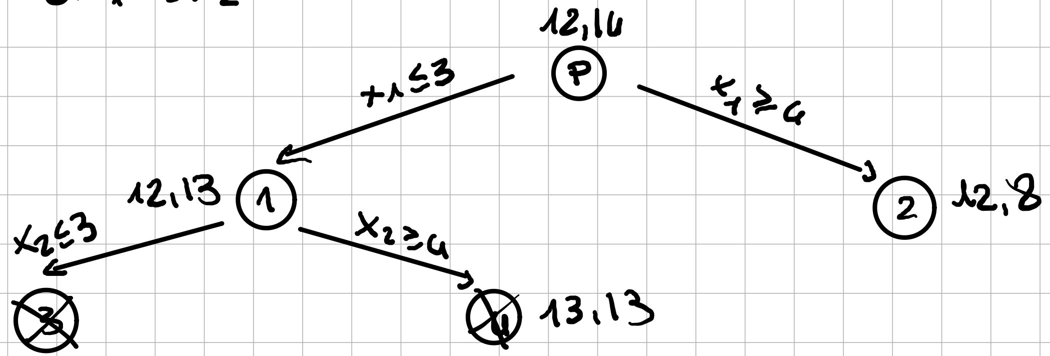
quindi (0,5), 39 è la soluzione ottimale

---

max $x_1 + 3x_2$

$x_1 + 5x_2 \le 21$

$8x_1 + 2x_2 \le 35$



(P) max $x_1 + 3x_2$

$x_1 + 5x_2 \le 21$

$8x_1 + 2x_2 \le 35$

$x_1 + 5x_2 \le 21$

$x_1 = 21 - 5x_2 = 21 - 5 \cdot 3,5 = 3,5$

$8(21 - 5x_2) + 2x_2 \le 35$

$168 - 38x_2 \le 35$

$\frac{-38x_2}{-38} = \frac{-133}{-38} = 3,5$

$z = 3,5 + 3 \cdot 3,5 = 14$

$z = 3 + 3 \cdot 3 = 12$

(1) max $x_1 + 3x_2$

$x_1 + 5x_2 \le 21$

$8x_1 + 2x_2 \le 35$

$x_1 \le 3$

$3 + 5x_2 \le 21 - 3 = \frac{18}{5} = 3,6$

$24 + 2x_2 \le 35 - 24 = \frac{11}{2} = 5,5$

$z = 3 + 3 \cdot 3,6 = 13,8$

(2) max $x_1 + 3x_2$, $x_1 \ge 4$

$x_1 + 5x_2 \le 21$

$8x_1 + 2x_2 \le 35$

$4 + 5x_2 \le 21 - 4 = \frac{17}{5} = 3,4$

$8 \cdot 4 + 2x_2 \le 35 - 32 = \frac{3}{2} = 1,5$

$z = 4 + 3 \cdot 1{,}5 = 8{,}5$

③ $\max x_1 + 3x_2$

$x_1 + 5x_2 \leq 21$

$8x_1 + 2x_2 \leq 35$

$x_1 \leq 3,\ x_2 \leq 3$

visto che nessuna dei vincoli va bene, allora uso ≤ 3

$x_1 + 15 \leq 21 - 15 = 6$

$8x_1 + 2 \cdot 3 \leq 35 - 6 = 29/8 = 3{,}625$

$3 + 5x_2 \leq 21 \rightarrow 21 - 3 = \frac{18}{5} = 3{,}6$

$24 + 2x_2 \leq 35 - 24 = \frac{11}{2} = 5{,}5$

$z = 3 + 3 \cdot 3 = 12 \rightarrow$ NON MIGLIORA QUINDI CHIUDO

④ $\max x_1 + 3x_2$

$x_1 + 5x_2 \leq 21$

$8x_1 + 2x_2 \leq 35$

$x_1 \leq 3,\ x_2 \geq 4$

$x_1 + 5 \cdot 4 \leq 21 \rightarrow 21 - 20 = 1$

$8x_1 + 8 \leq 35 - 8 = \frac{27}{8} = 3{,}375$

$z = 1 + 4 \cdot 3 = 13 \rightarrow$ quindi $((1,4), 13)$

Es 12

	x_1	x_2	x_3	x_4
valori	15	11	20	10
peso	5	2	3	4

capacità = 8

	x_1	x_2	x_3	x_4
rendimento	3	$11/2$ = 5,5	$20/3$ = 6,6	$10/4$ = 2,5

ordino dal più alto al più basso: x_3, x_2, x_1, x_4

$\rightarrow 8 - 3 = 5$

$5 - 2 = 3$

non posso prendere x_1 e x_4, quindi prendo $3/5$

Rilassamento = $(3/5, 1, 1, 0)$

Greedy: $(0, 1, 1, 0)$

Es. 1 $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 2x - 3y$

1. Punto stazionario = gradiente è zero.

1. Derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(2x) - \frac{\partial}{\partial x}(3y) =$$

$$= 4x - y - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(2x) - \frac{\partial}{\partial y}(3y) =$$

$$= 2y - x - 3$$

2. Derivate = 0

$$\begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 2y - x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} +y = +4x \cancel{+}2 = 4 - 2 = 2 \\ 2(4x-2) - x - 3 = 0 \\ 8x - 4 - x - 3 = 0 \\ 7x = 7 \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

pto stazionario $(1,2)$

Per determinare f2 convessa o concava, matrice Hessiana = derivate parziali seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4x - y - 2) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y}(4x - y - 2) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2y - x - 3) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x}(2y - x - 3) = -1$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Criterio di Sylvester = se i det di tutti i minori sono definiti positivi, allora la matrice Hessiana é definita positivamente quindi la funzione é convessa

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \det(H_1) = 4 > 0 \\ \det(H_2) = (4)(2) - (-1)(-1) = 8 - 1 = 7 > 0 \end{array}$$

Poiché la f2 é strettamente convessa, qualsiasi punto stazionario é minimo locale → globale

minimo globale $(1,2) = 2(1)^2 + (2)^2 - (1)(2) - 2(1) - 3(2) = 2 + 4 - 2 - 2 - 6 = -4$

KKT

$$\min \; x^2 + (y-5)^2$$

$x^2 - y \leq 0 \rightarrow g_1$

$x + y - 2 \leq 0 \rightarrow g_2$

Gradiente fz obiettivo: derivate prima

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-5) \end{pmatrix} \qquad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Equazione: $\nabla f(x,y) + \mu_1 \nabla g_1(x,y) + \mu_2 \nabla g_2(x,y) = 0$

$\mu_1 g_1(x,y) = 0, \ \mu_2 g_2(x,y) = 0$

$2x + \mu_1(2x) + \mu_2(1) = 0 \rightarrow 2x(1+\mu_1) + \mu_2 = 0$

$2(y-5) + \mu_1(-1) + \mu_2(1) = 0 \rightarrow 2y - 10 - \mu_1 + \mu_2 = 0$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \mu_1 \nabla g_1(x,y) + \mu_2 \nabla g_2(x,y) = 0 \\ \mu_1 g_1(x,y) = 0 \\ \mu_2 g_2(x,y) = 0 \\ g_1(x,y) \leq 0 \\ g_2(x,y) \leq 0 \\ \mu_1 \geq 0, \ \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ dividi tra il primo caso del gradiente e il secondo

$$\begin{cases} 2x(1+\mu_1) + \mu_2 = 0 \\ 2y - 10 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \end{cases}$$

Analisi dei casi

↳ nessun vincolo attivo, $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$

↳ Faccio $= 0$ a $\nabla f \rightarrow 2x = 0$, $y = 5$ Quindi é un punto candidato $(0,5)$

Verifico i vincoli $\rightarrow g_1(0,5) = 0^2 - 5 \leq 0$ valido

$g_2(0,5) = 0 + 5 - 2 = 3 \leq 0$ non valido

↳ solo il primo vincolo é attivo, $\mu_1 > 0, \mu_2 = 0 \Rightarrow x^2 - y = 0$

$y = x^2$

↳ $2x(1+\mu_1) = 0 \rightarrow 2x = 0 \quad 1+\mu_1 \neq 0$

$2(y-5) - \mu_1 = 0$ quindi sostituisco $y = x^2 \Rightarrow y = 0$

Punto candidato $(0,0)$

Sostituisco il punto trovato nella seconda

$2(0-5) - \mu_1 = 0 \rightarrow -10 - \mu_1 = 0$

$\mu_1 = -10$

Visto che una delle condizioni é ≥ 0, non é valida

↳ solo il vincolo g_2 é attivo, $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$

$x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x$

$$\begin{cases} 2x(1+\cancel{\mu_1}) + \mu_2 = 0 \\ 2y - 10 - \cancel{\mu_1} + \mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \mu_2 = 0 \\ 2y - 10 + \mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_2 = -2x \\ 2(2-x-5) - 2x = 0 \end{cases}$$

$4-2x-10-2x=0 \to \frac{-4x}{-4}=\frac{6^{3}}{-4_2} \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ $\quad y=2-\left(-\frac{3}{2}\right)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

Verifica l'altra equazione: $-2\left(-\frac{3}{2}\right)=+3>0$ verificata

$\begin{cases} x^2-y\le 0 \to g_1 \\ x+y-2\le 0 \to g_2 \end{cases} \to \left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}=+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\le 0 \to \frac{9-14}{4}\le 0$ valido

$-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}-2\le 0 \to \frac{-3+7-4}{2}\le 0 \to 0\le 0$ valido

$(x,y)=\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$

↳ entrambi i vincoli sono attivi

$x^2-y=0 \to y=x^2$

$x+y-2=0 \to x^2+x-2=0 \quad a=1\ b=1\ c=-2$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$ ↗ $\frac{-1+3}{2}=1$ ↘ $\frac{-4}{2}=-2$

Trovo y con i due punti x: $x=1 \quad y=(1)^2=1 \quad (1,1)$

$x=-2 \quad y=(-2)^2=4 \quad (-2,4)$

$(1,1)$ $\begin{cases} 2x(1+\mu_1)+\mu_2=0 \\ 2y-10-\mu_1+\mu_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2+2\mu_1+\mu_2=0 \\ 2-10-\mu_1+\mu_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \mu_2=\mu_1+8 \\ 2+2\mu_1+\mu_1+8=0 \end{cases}$

$\frac{3\mu_1}{3}=-\frac{10}{3}$ NON VALIDO perché negativo

$(-2,4)$ $2(-2)(1+\mu_1)+\mu_2=0$

$-4(1+\mu_1)+\mu_2=0$

$-4-4\mu_1+\mu_2=0$

$\mu_2=4+4\mu_1$

$2(4)-10-\mu_1+4+4\mu_1=0$

$8-10+3\mu_1+4=0$

$2+3\mu_1=0$

$3\mu_1=-\frac{2}{3}$ NON VALIDO perché negativo

SOLUZIONE $=\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$

ESAME

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 1 \\ 2 & 11 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 8 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & 1/2 & 4 \end{pmatrix}$$

C_{11} = prima riga A × colonna di B
$= 9 \cdot 2 + 0 \cdot -2 + 1 \cdot 1 = 18 + 1 = 19$

C_{12} = prima riga A × colonna 2 di B
$= 9 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1/2 = 27 + 1/2 = \frac{54+1}{2} = 55/2 = 27{,}5$

C_{13} = ~~prima riga A~~ × colonna 3 di B
$= 9 \cdot 0 + 0 \cdot -1 + 1 \cdot 4 = 4$

C_{21} = 2 riga A × colonna 1 di B
$= -.$

somma: sommi tutti gli elementi

INVERSA DI UNA MATRICE

$$2 \times 2 : \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

inverto posizione diagonale principale
~~inverto~~ segni diagonale secondaria

Per le altre: $(A \mid I)$

Per capire se è invertibile, solo perché il determinante è diverso da zero

$$(-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \cdot \end{pmatrix} =$$

$(-1)(0) + (-3)(0) = 0$ quindi non si può fare

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1)(1) - (3)(2) = 1 - 6 = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE SISTEMA MATRICIALE: soluzioni sse $rg(A) = rg(A \mid B)$

↳ una soluzione unica: $rg(A) = rg(A \mid B) = n$ — n = incognite sistema
↳ infinite soluzioni: $rg(A) = rg(A \mid B) < n$
↳ soluzioni: ∞^{n-r}, r: rango comune

DERIVATE PRIME E SECONDE

- massimo e minimo
  - derivata prima
  - trova i punti stazionari
    - se $f(x)$ cambia da + a −, x_0 è un massimo
    - se $f(x)$ cambia da − a +, x_0 è un minimo
- concava e convessa
  - derivata seconda
  - $f''(x)=0 \rightarrow$ punti di flesso
    - se $f(x)>0$ è convessa $\cup$
    - se $f(x)<0$ è concava $\cap$

GRADIENTE: componenti = derivate parziali prime
direzione di massima crescita in un dato punto
se il gradiente è nullo, il punto è un punto critico

HESSIANA: derivate parziali seconde

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{matrix}$$

→ positiva (tutti gli autovalori sono positivi): minimo locale
→ negativa (autovalori negativi): massimo locale
→ indefinita: punto di sella

AUTOVALORI: $\det(A-\lambda I)=0$

1) $\max\ 3x_1+4x_2+x_3+5x_4$
$4x_2+2x_3+4x_4 \le 10$
$4x_1+6x_2+2x_3-4x_4 \le 16$
$x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$

$-3x_1-4x_2-x_3-5x_4$
$4x_2+2x_3+4x_4+S_1=10$
$4x_1+6x_2+2x_3-4x_4+S_2=16$

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	TN
z	−3	−4	−1	−5	0	0	0
x_4 ~~S_1~~	0	4	2	4	1	0	10
S_2	4	6	2	−4	0	1	16

$\rightarrow \frac{10^5}{4_2} = 5/2 = 2{,}5$
$\rightarrow \frac{16^8}{6_3} = 8/3 = 2{,}677$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	TN	
z	-3	1	3/2	0	5/4	0	25/2	$\to -5$
x_4	0	1	1/2	1	1/4	0	5/2	$\to 5/2 / 0 = NaN$
x_1 ~~s_2~~	4	10	4	0	1	1	26	$\to -4 \to 6/4 = 3/2$ $\quad 16-(4)\cdot 10$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	TN	
z	0	17/2	9/2	0	2	3/4	17	$\to -3$
x_4	0	1	1/2	1	1/4	0	5/2	$\to 0$
x_1	1	5/2	1	0	1/4	1/4	6/5	

$26 - (4 \cdot 0)$

$x_1 = 3/2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 5/2,\ z = 17$

$3(3/2) + 5(5/2) = 9/2 + 25/2 = \frac{34}{2} = 17 \ \checkmark$ ...

2) $\max\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$

$x_2 + x_3 \leq 2$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0$ → NON VINCOLATA perché per il simplesso tutte le variabili devono essere ≥ 0

Quindi metto $x_3 = -x_3$ e sostituisco

$\max\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3$ → $-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + Ma_1$

$x_2 - x_3 \leq 2$ → $x_2 - x_3 + s_1 = 2$

$x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 1$ → $x_1 - 2x_2 - x_3 - s_2 + a_1 = 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ -x_3 \geq 0$ → $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_1 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	TN
z	-2	-2	2	0	0	M	0
s_1	0	1	-1	1	0	0	2
a_1	1	-2	-1	0	-1	1	1

Dobbiamo fare in modo che i coefficienti delle variabili di base nella riga z siano zero

$z' = z - M \cdot a_1 = [-2, -2, 2, 0, 0, M, 0] - M \cdot [1, -2, -1, 0, -1, 1, 1] =$

$= +[-M, 2M, M, 0, M, -M, -M]$

$= [-2-M, -2+2M, 2+M, 0, 0+M, 0, -M]$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	TN	
z	$-2-M$	$-2+2M$	$2+M$	0	M	0	$-M$	
s_1	0	1	-1	1	0	0	2	$\rightarrow 2/0$ NaN
a_1	1	-2	-1	0	-1	1	1	$\rightarrow 1/1$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	TN	
z	0	-6	0	0	-2	$2+M$	2	
s_1	0	1	-1	1	0	0	2	$\rightarrow 2/1 = 2$
x_1	1	-2	-1	0	-1	1	1	$\rightarrow 1/-2 =$ NaN

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	TN	
z	0	0	-6	6	-2	$2+M$	16	
x_2	0	1	-1	1	0	0	2	$\rightarrow 2/-1 = -1/2$ NaN
x_1	1	0	-3	2	-1	1	5	$\rightarrow 5/-3$ NaN

Se non ci sono rapporti positivi, il problema è illimitato, o illimitato superiore

③ DUALE

$$\max z = 4x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3 \rightarrow y_1$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 7 \rightarrow y_2$$

$$\min w = 3y_1 + 7y_2$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 4$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 6$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

RISOLVO IL PROBLEMA DUALE GRAFICAMENTE

↳ devo risolvere il problema duale graficamente

1. Vincoli come equazioni

$y_1 + 2y_2 = 4$

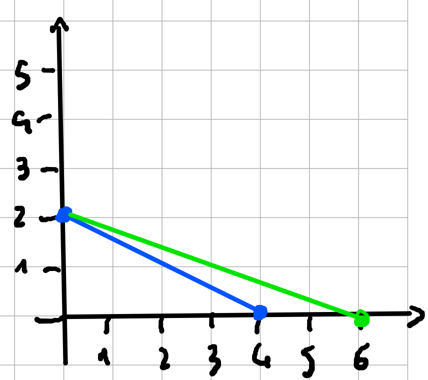
$(y_1 = 0)$ $2y_2 = 4/2 = 2$ $(0, 2)$

$(y_2 = 0)$ $y_1 = 4$ $(4, 0)$

$y_1 + 3y_2 = 6$

$(y_1 = 0)$ $3y_2 = 6/3 = 2$ $(0, 2)$

$(y_2 = 0)$ $y_1 = 6$ $(6, 0)$



$x_1 + x_2 \leq 3$

$2x_1 + 3x_2 \leq 7$

Il vertice più alto comune ad entrambi è $(0,2)$, quindi la soluzione del duale è la seguente:

$(y_1, y_2) = (0, 2) \quad \min W = 3(0) + 7(2) = 14$

CALCOLO SOLUZIONE OTTIMA PRIMALE

Per la dualità forte, $Z_{max} = W_{min} = 14$

TEOREMA SCARTI COMPLEMENTARI: se una variabile del primale è maggiore di zero, il vincolo duale ha uguaglianza
se una variabile del duale è maggiore di zero, il vincolo primale ha uguaglianza

→ $y_1 = 0$, quindi il primo vincolo non è uguaglianza
→ $y_2 = 2 > 0$, quindi il secondo vincolo ha uguaglianza

Adesso sostituiamo y_1 e y_2 del punto ottimo per trovare come le variabili del primale saranno

↳ 1° vincolo: $y_1 + 2y_2 \geq 4 \rightarrow 0 + 2(2) = 4 \geq 4$ ✓
x_1 può essere $\neq 0$

↳ 2° vincolo: $y_1 + 3y_2 \geq 6 \rightarrow 0 + 3(2) = 6 \geq 6$ ✓
x_2 può essere $\neq 0$

RISOLUZIONE GRAFICA PRIMALE

			$x_1 = 0$	$x_2 = 0$
$x_1 + x_2 \leq 3$	$x_1 + x_2 = 3$	→	$x_2 = 3$	$x_1 = 3$
$2x_1 + 3x_2 \leq 7$	$2x_1 + 3x_2 = 7$		$x_2 = 7/3$	$x_1 = 7/2$

1° vincolo → $(0,3), (0,0)$
2° vincolo → $(0, 7/3), (7/2, 0)$

METODO DEL GRADIENTE

$f2: f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$, a partire da $A: (2,0)$, $B = (1,2)$

Visto che facciamo il metodo del gradiente e Newton, calcoliamo:

Gradiente: $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \end{bmatrix}$

Hessiana: $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

ITERAZIONE DA (2,0)

$\nabla f(A) = \nabla f(2,0) = \begin{bmatrix} 2(2) \\ 8(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Line search: $g(\alpha) = f(A - \alpha \nabla f(A)) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 2-4\alpha \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$g(\alpha) = (2-4\alpha)^2 + 4(0)^2 = (2-4\alpha)^2$

Adesso derivata rispetto ad α: $(2)(2-4\alpha)(-4) =$
$= -8(2-4\alpha) = -16 + 32\alpha$

E poi lo si pone uguale a 0

$-16 + 32\alpha = 0 \rightarrow \frac{32\alpha}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

Quindi adesso sostituisco nel punto A

$\begin{bmatrix} 2-4\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ OTTIMO GLOBALE FUNZIONE

ITERAZIONE DA (1,2)

$\nabla f(B) = \nabla f(1,2) = \begin{bmatrix} 2(1) \\ 8(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Line search: $g(\alpha) = f(B - \alpha \nabla f(B)) =$

$$= f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \alpha\begin{bmatrix}2\\16\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1-2\alpha\\2-16\alpha\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1-2\cdot 0.126\\2-16\cdot 0.126\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,748\\-0,016\end{bmatrix}$$

A questo sostituisco nella funzione:

$$x_1^2 + 4x_2^2 = (1-2\alpha)^2 + 4(2-16\alpha)^2$$

e faccio la derivata della funzione, ponendo poi $=0$

$$2(1-2\alpha)(-2) + 8(2-16\alpha)(-16) = -4(1-2\alpha) - 128(2-16\alpha) =$$

$$= -4 + 8\alpha - 256 + 2048\alpha = 2056\alpha - 260 = 0$$

$$\frac{2056}{2056} = \frac{260}{2056} = 0,126$$

METODO DI NEWTON

Formula: $x_{k+1} = x_k - \underbrace{[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}}_{\text{hessiana invertita}} \underbrace{\nabla f(x_k)}_{\text{gradiente nel punto}}$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-\lambda & 0\\0 & 8-\lambda\end{bmatrix} \overset{det}{=} (2-\lambda)(8-\lambda) =$$

$$16 - 8\lambda - 2\lambda + \lambda^2$$

MATRICE INVERTIBILE se $det \neq 0$ e lo è quindi è invertibile

Invertiamo l'hessiana $= \begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/8\end{bmatrix}$

calcolo il nuovo punto A $\qquad \nabla f(A) = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$

$$A' = A - [\nabla^2 f(A)]^{-1} f(A) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$