Metodo del simplesso

Algoritmo algebrico.
Tempo di calcolo in media **lineare** rispetto al numero delle variabili.
Ispeziona solo le soluzioni ammissibili che corrispondono a vertici. Il numero di soluzioni ammissibili può essere infinito.

Componenti geometriche

Frontiera del vincolo

Problema di programmazione lineare = **linea che delimita la regione ammissibile**

Vertice

Punto che si trova all'intersezione di due frontiere di vincoli.

- **Ammissibile**: intersezione che si trova all'interno della regione ammissibile, giace all'intersezione di n equazioni di frontiera
- **Non ammissibile**: intersezione che si trova al di fuori della regione ammissibile.
- **Adiacenti**: due vertici che condividono n-1 frontiere di vincoli (n variabili decisionali), e stanno sullo stesso spigolo della regione ammissibile

Spigolo

Segmento che collega due vertici adiacenti.
Adiacenti se condividono n-1 frontiere di vincoli, con *n* il numero di variabili decisionali del problema.

Test di ottimalità

Per un problema di PL che ha almeno una soluzione ottimale, se un vertice non ha vertici adiacenti con un valore della funzione obiettivo migliore, allora *quel vertice è la* ***soluzione ottimale***.

Soluzioni di base

Due soluzioni di base ammissibili sono adiacenti se tutte le variabili di base e non di base sono uguali tranne una, e se sono collegati da uno spigolo come interpretazione geometrica (poichè ogni soluzione di base ammissibile corrisponde a un vertice della regione ammissibile).

Variabile di slack

Serve a convertire i vincoli di disuguaglianza in uguaglianza; **è la quantità che manca affinchè la disuguaglianza sia verificata con l'uguaglianza**. Se è:

- Zero: soluzione vincolo su frontiera
- Positivo: soluzione vincolo è nella regione ammissibile
- Negativo: soluzione vincolo è nella regione non ammissibile

Procedura

Procedura iterativa

A partire da una soluzione base ammissibile (vertice del poliedro), si sposta su un **vertice adiacente** che migliora il valore della funzione obiettivo.
Continua fino a quando non si raggiunge un vertice dal quale non è più possibile spostarsi per migliorare la funzione obiettivo; tale vertice è la **soluzione ottimale**. 4 fasi:

1. **Forma standard**: deve essere convertito in forma specifica
2. **Soluzione di base ammissibile iniziale**: trovare un vertice di partenza
3. **Iterazione del simplesso**
4. **Test di ottimalità**

Modello standard

Un problema è in forma standard se ha le seguenti condizioni:

- **È un problema di massimizzazione**
- **Tutti i vincoli sono di uguaglianza**
- **Tutte le variabili decisionali sono non negative**

Per trasformare bisogna trasformare **da min a max**: basta moltiplicare la funzione obiettivo per -1.
Min z = cTx —> max -z = -cTx

Poi bisogna trasformare i vincoli:

- Per ogni vincolo del tipo **ax ≤ b**, si aggiunge una variabile **snack** per trasformarlo in un'uguaglianza: ax+s=b.
- Per ogni vincolo del tipo **ax ≥ b**, si sottrae una variabile **surplus** per renderlo un'uguaglianza: ax - s = b.
- Se una variabile x non è vincolata in segno, si può esprimerla come la **differenza di due variabili non negative**: x = x′ - x′′

Matrice dei vincoli

Il sistema di vincoli può essere rappresentato in forma matriciale come Ax=b

- A è la matrice dei coefficienti dei vincoli
- X è il vettore delle variabili
- B è il vettore dei termini noti

Soluzione di base

Punto di intersezione delle frontiere dei vincoli. Si ottiene impostando a zero n-m variabili (**variabili non di base**), e risolvendo il sistema di equazioni per le restanti m variabili (**variabili di base**).

Soluzione di base ammissibile: soluzione di base in cui tutte le variabili di base hanno un valore non negativo.

Matrice di base A

Può essere divisa in due sottomatrici:

- **B**, la matrice di base composta dalle colonne relative alle variabili di base
- **N**, composta dalle colonne relative alle variabili non di base.

Fase di spostamento

Passa da una soluzione base ammissibile all'altra in un'unica iterazione.

1. **Test di ottimalità**: si verifica se la soluzione di base corrente è ottimale. Per un problema di massimizzazione, l'ottimalità è raggiunta quando tutti i costi ridotti zj - cj sono non positivi. I **costi ridotti** indicano di quanto il valore della fz obiettivo migliora per ogni unità di variabile non di base introdotta.
2. **Scelta di variabile che entra in base**: se la soluzione non è ottimale, si sceglie una variabile non di base con un costo ridotto positivo
3. **Scelta della variabile che esce dalla base**: per mantenere un numero fisso di variabili di base, una delle variabili di base attuali deve uscire dalla base (**deve diventare zero**). Si sceglie la variabile che limita di più l'aumento della nuova variabile di base per evitare di uscire dalla regione ammissibile

Problema originale

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 \qquad x_1 \leq 4 \qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$2x_2 \leq 12 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

① Conversione in forma standard

Trasformo i vincoli in vincoli di uguaglianza

$$x_1 + S_1 = 4 \qquad 2x_2 + S_2 = 12 \qquad x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$
$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

Aggiungo queste variabili alla forma originale

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

② Trovare la soluzione di base iniziale

Si pongano x_1 e x_2 a zero - metodo più facile é assumere che le variabili originali del problema sono uguali a zero

x_1, x_2: variabili non di base
S_1, S_2, S_3: variabili di base

$$\begin{cases} x_1 + S_1 = 4 \\ x_2 + S_2 = 12 \\ x_3 + S_3 = 18 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} S_1 = 4 \\ S_2 = 12 \\ S_3 = 18 \end{cases} \rightarrow$$ AMMISSIBILE perché i valori sono non negativi

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 = 3(0) + 5(0) = 0$$

③ Iterazione del simplesso - tableau

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
z	-3	-5	0	0	0	0
S_1	1	0	1	0	0	4
S_2	0	2	0	1	0	12
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$\rightarrow \max z \rightarrow z - 3x_1 - 5x_2 = 0$
$\rightarrow x_1 + S_2 =$
$\rightarrow 2x_2 + S_2 = 12$
[illegible]

$s_3 |\ 3\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ |\ 18 \quad 3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$

Guardando la riga z, possiamo vedere che ci sono valori negativi - soluzione non ottimale

↳ per verificare se la soluzione è ottimale, devo vedere i valori nella riga z

Scegliamo -5 che è la più negativa - quindi x_2 entra in base.

Adesso, per ogni riga della colonna della variabile di base, facciamo $\frac{\text{soluzione}}{\text{coeff. colonna}}$; il rapporto minimo rappresenterà la variabile uscente.

base	x_2	Soluzione	
z	-5	0	→ non si fa perché è f.z. ottimale
s_1	0	4	→ 4/0 = non applicabile
x_2 ~~s_2~~	2	12	→ 12/2 = 6 → variabile uscente
s_3	2	18	→ 18/2 = 9

pivot = intersezione

La variabile uscente viene sostituita da variabile entrante, ora bisogna trasformare la colonna in: pivot = 1
gli altri = 0

Formula generica: $\text{Nuova riga} = \text{vecchia riga} - \left[\left(\begin{array}{c} \text{vecchio coefficiente} \\ \text{colonna pivot in quella riga} \end{array} \right) \cdot \text{nuova riga pivot} \right]$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sol.	
z	-3	-5	0	0	0	0	→ $z' = z + 5 \cdot (x_2')$
s_1	1	0	1	0	0	4	→ niente
x_2	0	2	0	1	0	12	→ $\frac{x_2}{2} = 0; 1; 0; \frac{1}{2}; 0; 6 = x_2'$
s_3	3	2	0	0	1	18	→ $s_3' = s_3 - 2 \cdot (x_2')$

$z' = [-3+5\cdot 0; -5+5\cdot 1; 0+5\cdot 0; 0+5\cdot \frac{1}{2}; 0+5\cdot 0; 0+5\cdot 6] = [-3; 0; 0; \frac{5}{2}; 0; 30]$

$s_3' = [3-2\cdot 0; 2-2\cdot 1; 0-2\cdot 0; 0-2\cdot \frac{1}{2}; 1-2\cdot 0; 18-2\cdot 6] = [3, 0, 0, -1, 1, 6]$

Nuovo entra in base →

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sol.

	x_1	Sol.

tableau

z	-3	0	0	5/2	0	30
S_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6
S_3	3	0	0	-1	1	6

z	-3	30	
S_1	1	4	$\rightarrow 4/1 = 4$
x_2	0	6	$\rightarrow 6/0 = NaN$
S_3	3	6	$\rightarrow 6/3 = 2$

esce dalla base

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sol.	
z	-3	0	0	5/2	0	30	$\rightarrow z' = z + 3 \cdot (x_2)'$
S_1	1	0	1	0	0	4	$\rightarrow S_1' = S_1 - 1 \cdot (x_1')$
x_2	0	1	0	1/2	0	6	$\rightarrow$ niente perché è già zero
x_1	3	0	0	-1	1	6	$\rightarrow x_1' = \frac{x_1}{3} = [1; 0; 0; -1/3; 1/3; 2]$

$$S_1' = [1-1\cdot1;\ 0-1\cdot0;\ 1-1\cdot0;\ 0-1\cdot -1/3;\ 0-1\cdot 1/3;\ 4-1\cdot2] =$$
$$[0;\ 0;\ 1;\ 1/3;\ -1/3;\ 2]$$

$$z' = [-3+3\cdot1;\ 0+3\cdot0;\ 0+3\cdot0;\ 5/2+\cancel{3}\cdot -1/\cancel{3};\ 0+3\cdot 1/3;\ 30+3\cdot2] =$$
$$= [0;\ 0;\ 0;\ 3/2;\ 1;\ 36]$$

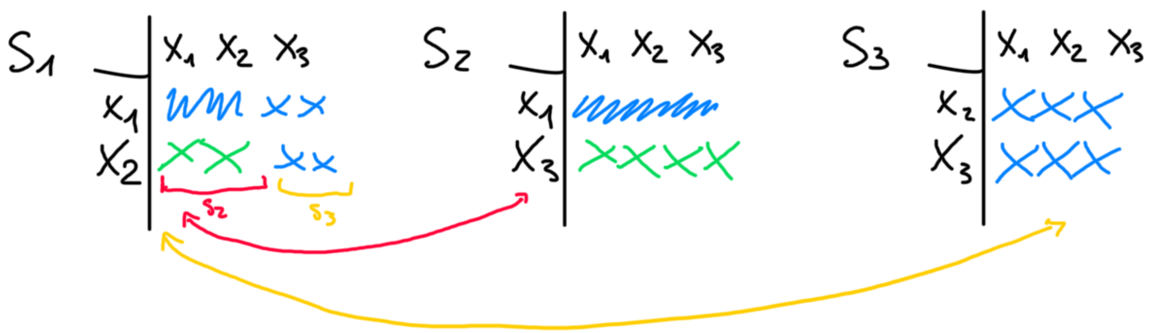
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sol
z	0	0	0	3/2	1	36
S_1	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

Non abbiamo altri valori negativi, quindi max $Z = 36$

variabili di base: $S_1 = 2$; $x_1 = 2$; $x_2 = 6$

variabili non di base: $S_2 = 0$; $S_3 = 0$

SOLUZIONI BASE AMMISSIBILE ADIACENTE



Vedo quali sono le righe con variabile diversa
se sono più di uno, allora non adiacenti

Soluzione degenere

Una soluzione di base è degenere se almeno una delle variabili di base ha valore 0, invece che essere positivo.
Durante un pivot nel simplesso, una variabile entra in base e una esce dalla base. Se più di una variabile può uscire raggiungendo zero allo stesso tempo, ci sono alternative multiple.