Programmazione non lineare

Problema di ottimizzazione in cui la funzione f(x) o uno o più dei vincoli non sono lineari. A differenza della PL, dove sia la funzione obiettivo che i vincoli sono lineari, è pi ùadatta a modellare situazioni reali dove l'ipotesi di linearità non è valida.

Le proprietà geometriche e le soluzione cambiano drasticamente tra due tipi di problemi. A differenza della programmazione lineare, dove la soluzione ottimale si trova sempre in un vertice della regione ammissibile, in un problema non lineare:

- la soluzione ottimale potrebbe trovarsi su una parte non-vertice della frontiera
- La soluzione ottimale potrebbe anche essere un punto all'interno della regione ammissibile, e non per forza sulla frontiera stessa
- L'algoritmo del Simplesso non può essere utilizzato per risolvere i problemi non lineari in generale

Concetti di analisi

Servono per risolvere i problemi di PNL:

- **Continuità**: continua se non ha salti o interruzioni. La somma e il prodotto di funzioni continue sono anch'esse continue
- **Convessità e concavità**: funzione convessa ha la proprietà che *un segmento che unisce due punti qualsiasi del suo grafico si trova sempre sopra o sulla funzione stessa*. Funzione concava ha la proprietà opposta.
  - Se una funzione è convessa, *un minimo locale è anche un minimo globale*.
  - Se è concava, un massimo locale è anche un massimo globale
- **Derivabilità**: la derivata di una funzione in un punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto
  - La **derivata prima** ti aiuta a trovare i punti stazionari dove il **coefficiente angolare è zero**
  - La **derivata seconda** ti dice se un punto stazionario è un **minimo** o un **massimo**. O altrimenti se una funzione è **convessa** ($f'' > 0$) o **concava** ($f'' < 0$) in un intervallo
- **Ottimo locale vs globale**: un problema non lineare può avere più minimi (o massimi) dove alcuni sono solo locali (migliori in un piccolo intorno) e solo uno è globale (il migliore in assoluto)

Soluzione analitica

Se la funzione obiettivo è derivabile, la condizione sufficiente per trovare un punto di ottimo è che la **derivata prima in quel punto sia zero**.
Se questa equazione può essere risolta algebricamente, si può trovare la soluzione esatta.

Soluzione numerica

Se l'equazione della derivata prima non può essere risolta analiticamente, si ricorre ad algoritmi numerici. L'idea è quella di generare una sequenza di punti {xk} che, ad ogni iterazione, si avvicina sempre più al punto di ottimo (x*). La sequenza non sempre converge in un numero finito di iterazioni, quindi è necessario definire dei **criteri di arresto**. I criteri includono quando la derivata prima è sufficientemente vicina a zero, quando il processo tra le iterazioni è minimo, o quando viene raggiunto un numero massimo di iterazioni.

Metodo di bisezione

è un algoritmo dicotomico intuitivo e semplice, applicabile a funzioni continue e concave (o convesse) su un intervallo [a,b]. L'idea è di utilizzare il segno della derivata prima per ridurre progressivamente l'intervallo di ricerca.

Se la derivata in un punto xk è positiva, il punto ottimo si trova a destra di xk. Si sposta quindi il limite inferiore dell'intervallo a xk.
Se la derivata è negativa, il punto ottimo si trova a sinistra di xk. Si sposta il limite superiore dell'intervallo a xk.

In ogni iterazione, il nuovo punto x(k+1) viene calcolato come il punto medio del nuovo intervallo di ricerca ridotto. Il processo si ferma quando l'ampiezza dell'intervallo diventa sufficientemente piccola. Il principale svantaggio è la sua **lentezza di convergenza**.

Metodo di Newton

È un algoritmo di **approssimazione** che supera la lentezza considerando non solo la derivata prima, ma anche la derivata seconda.
Si usa un'**approssimazione quadratica** della funzione, data dalla formula di Taylor, per stimare il punto di ottimo.

ogni iterazione, il nuovo punto

x_{k+1} viene calcolato con la seguente formula:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Questo metodo converge più velocemente rispetto alla bisezione, ma ha i suoi svantaggi:

- richiede il calcolo della derivata seconda
- - potrebbe non convergere o addirittura divergere se il punto iniziale è troppo lontano dall'ottimo o se la derivata seconda è vicina a zero.

Estensione al caso n-dimensionale

Nel caso di una singola variabile, la derivata prima fornisce informazioni sulla stazionarietà di un

punto, e la derivata seconda informa sulla convessità della funzione.
Nel caso di funzioni con più variabili, questi concetti vengono estesi:

- la **derivata prima** diventa il **gradiente**
- La **derivata seconda** diventa l'**hessiano**
- Il concetto di **convessità** rimane lo stesso

Gradiente
Il gradiente è il vettore che estende il concetto di derivata a funzioni con più variabili. È un vettore composto da tutte le derivate parziali della funzione.

$$f = 15x_1 + 2(x_2)^3 - 3x_1(x_3)^2$$

Gradiente $\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]$

Derivata parziale rispetto a x_1

↳ considerando x_2 e x_3 come costanti

$\frac{\partial}{\partial x_1}(15x_1) = 15$ | $\frac{\partial}{\partial x_1}(2(x_2)^3) = 0$ perché x_2 é costante

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(-3x_1(x_3)^2) = -3(x_3)^2 \Rightarrow x^3 \text{ é costante}$$

$\rightarrow$ derivata: $15 - 3(x_3)^2$

Derivata parziale rispetto a x_2

↳ considerando x_1 e x_3 come costanti

$\frac{\partial}{\partial x_2}(15x_1) = 0$ | $\frac{\partial}{\partial x_2}(2(x_2)^3) = 2 \cdot 3(x_2)^2 = 6(x_2)^2$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(-3x_1(x_3)^2) = 0$$

$\rightarrow$ derivata: $6(x_2)^2$

Derivata parziale rispetto a x_3

↳ considerando x_1 e x_2 come costanti

$\frac{\partial}{\partial x_3}(15x_1) = 0$ | $\frac{\partial}{\partial x_3}(2(x_2)^3) = 2 \cdot 3(x_2)^2 = 6(x_2)^2$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(-3x_1(x_3)^2\right) = -3x_1 \cdot 2x_3 = -6x_1 x_3$$

$\rightarrow$ derivata: $-6x_1 x_3$

vettore gradiente $\quad \nabla f = [15 - 3(x_3)^2,\ 6(x_2)^2,\ -6x_1x_3]$

Hessiano

L'hessiano, rappresentato come delta^2f o Hf, è una matrice quadrata che estende il concetto di derivata seconda a funzioni con più variabili.
La matrice Hessiana di una funzione f in n variabili è una matrice n x n in cui l'elemento nella riga i e nella colonna j è la *derivata parziale seconda di F rispetto a xi e xj*.
Se le derivate seconde sono continue, la matrice Hessiana è **simmetrica**, ovvero l'ordine di derivazione non ha importanza.

Se l'hessiano è **definita positiva** (tutti gli autovalori sono positivi), la funzione è **convessa**.
Se l'hessiano è **definita negativa** (tutti gli autovalori sono negativi), la funzione è **concava**.
Se gli autovalori hanno segni diversi, la matrice è **indefinita**.

Ogni elemento matrice : $H_f(i,j) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

se le derivate parziali seconde sono continue, matrice simmetrica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2, x_3) = 15x_1 + 2(x_2)^3 - 3x_1(x_3)^2$$

$$\nabla f = [15 - 3x_3^2,\ 6x_2^2,\ -6x_1 x_3]$$

→ Prima colonna: derivate rispetto a x_1

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(15 - 3x_3^2) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}(6x_2^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(-6x_1 x_3) = -6x_3$$

→ Seconda colonna: derivate rispetto a x_2

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(15 - 3x_3^2) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}(6x_2^2) = 12x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(-6x_1 x_3) = 0$$

→ Terza colonna: derivate rispetto a x_3

$$\frac{\partial}{\cdot}(15 - 3x_3^2) = -6x_3 \qquad \frac{\partial}{\cdot}(6x_2^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(-6x_1 x_3) = -6x_1$$

Quindi si mettono tutti assieme per la matrice

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6x_3 \\ 0 & 12x_2 & 0 \\ -6x_3 & 0 & -6x_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

simmetrica perché gli elementi fuori dalla diagonale sono uguali

Soluzione analitica

Se possibile, il metodo più diretto per trovare i punti di ottimo, massimo o minimo, è la **soluzione analitica**. Si basa su due passaggi principali:

- **Condizione di stazionarietà**: si calcola il **gradiente** della funzione, e lo si pone uguale a zero
    - Questo porta a un sistema di *n* equazioni con *n* incognite che, se risolvibile, fornisce i **punti candidati** (o punti stazionari) che possono essere *massimi*, *minimi* o *punti di sella*.
- **Valutazione dell'hessiana**: una volta trovati i punti candidati, si valuta la **matrice Hessiana** della funzione in ciascuno di essi.
    - Il segno degli autovalori dell'hessiana in quel punto determina la natura del punto stazionario
        - Se l'hessiana è **definita positiva** (tutti gli autovalori sono positivi), il punto candidato è un **minimo locale**
        - Se l'hessiana è **definita negativa** (tutti gli autovalori sono negativi), il punto candidato è un **massimo locale**
        - Se l'hessiana è indefinita (gli autovalori hanno segni misti), il punto è un **punto di sella**

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \underset{1^\circ}{x_1^2} + \underset{2^\circ}{x_1(1-x_2)} + \underset{3^\circ}{x_2^2} - \underset{4^\circ}{x_2 x_3} + \underset{5^\circ}{x_3^2} + \underset{6^\circ}{x_3}$$

CALCOLO GRADIENTE

Derivate

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
$x_1 \rightarrow$	$2x_1$	$1-x_2$	0	0	0	0
$x_2 \rightarrow$	0	$-x_1$	$2x_2$	$-x_3$	0	0
x_3	0	0	0	$-x_2$	$2x_3$	1

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 1 - x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = -x_2 + 2x_3 + 1$$

PUNTI STAZIONARI

→ Si pone il gradiente uguale a zero
Risolvendo si trova il punto stazionario candidato

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} +x_2 = +2x_1 + 1 \\ -x_1 + 2(2x_1+1) - x_3 = 0 \\ -(2x_1+1) + 2x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 1 \\ -x_1 + 4x_1 + 2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - \cancel{1} + 2x_3 + \cancel{1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x_1 + 1 \\ 3x_1 + 2 - x_3 = 0 \\ -\cancel{2}x_1 + \cancel{2}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x_1 + 1 \\ +x_1 = +x_3 \\ 3x_3 + 2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 1 \\ x_1 = x_3 \\ 2x_3 + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{2}x_3 = -\cancel{2}1 \\ x_1 = -1 \\ x_2 = (-2) + 1 = -1 \end{cases} \quad \rightarrow (-1, -1, -1)$$

: punto candidato dove andiamo a valutare l'Hessiana

MATRICE HESSIANA

colonne = coefficienti $\overset{1^\circ\text{ colonna}}{x_1},\ \underset{2^\circ\text{ colonna}}{x_2},\ \overset{3^\circ\text{ colonna}}{x_3}$

$$\nabla f = \begin{matrix} 2x_1 - x_2 + 0 + 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 \\ 0 - x_2 + 2x_3 + 1 \end{matrix} \qquad H_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Autovalore} = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \det (-1)^{1+1}(2\lambda) \det \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 2\lambda \end{pmatrix} +$$

$$+ \det (-1)^{2+1}(-1) \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= 2\lambda(4\lambda^2 - 1) + (-2\lambda) = (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 2] = 0 \rightarrow 2-\lambda = 0 \quad \lambda_1 = 2$$

$$2-\lambda = \pm\sqrt{2} \rightarrow \lambda_2 = 0.5858$$

$$\rightarrow \lambda_3 = 3.4142$$

Tutti gli autovalori sono positivi → Hessiana positiva → punto minimo

Metodo di Newton per più variabili

Se la soluzione analitica non è possibile, si utilizzano algoritmi numerici, come il **metodo di newton**.

Formula iterativa:

$$X_{k+1} = X_k - H_f^{-1}(X_k)\nabla f(X_k)$$ Riguarda poi l'esercizio

STEP SIZE: $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

obiettivo: minimizzare/massimizzare $f(x^{k+1}) = f(x^k + \alpha^k d^k)$

= restrizione $f(x)$ lungo direzione d^k

Trovo α^k (variabile): $\dfrac{df(x^k + \alpha^k d^k)}{d\alpha^k} = 0$

METODO DEL GRADIENTE: direzione di crescita $d^k = \nabla f(x^k)$ per massimo

direzione di decrescita $d^k = -\nabla f(x^k)$ per minimo

$$x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \nabla f(x^k)$$

ALGORITMO DEL GRADIENTE

1. Poniamo $k=0$, consideriamo un punto x^k
2. Calcoliamo $\nabla f(x^k)$
3. $d^k = -\nabla f(x^k)$ per minimo
   $d^k = \nabla f(x^k)$ per massimo
4. $x^{k+1} = x^k + \alpha^k \nabla f(x^k)$
5. $\alpha^k > 0$ come soluzione di $f'(x^k + \alpha^k \nabla f(x^k)) = 0$ con metodo di ottimizzazioni fz in una variabile
6. CRITERIO DI ARRESTO
   se $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \epsilon_1$ o
   $\|\nabla f(x^{k+1})\| < \epsilon_2$ allora STOP

   Altrimenti $k = k+1$, si torna al punto 2

Es. $\min f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1(1-x_2) + x_2^2 - x_2 x_3 + x_3^2 + x_3$

limiti criteri arresto

$k = 0,\ e_1 = 0.01,\ \epsilon_2 = 0.1$ → dati dal problema

Si considera come punto iniziale l'origine $x^0 = [0\ 0\ 0]$

Calcoliamo il gradiente

$$\nabla f(x) = [2x_1 + (1-x_2),\ -x_1 + 2x_2 - x_3,\ -x_2 + 2x_3 + 1$$

PRIMA ITERAZIONE

Gradiente nel punto iniziale per direzione di discesa

$[0\ 0\ 0]$ perché è un problema di minimo

$$d^0 = -\nabla f(x^0) = -[2(0)+1-0,\ -0+0-0,\ -0+0+1] = -[1\ 0\ 1] = [-1\ 0\ -1]$$

Punto $x^1 = [0\ 0\ 0] + \alpha^0 \cdot [-1\ 0\ -1] = [-\alpha^0, 0, -\alpha^0]$

SOSTITUISCO IL PUNTO TROVATO ALL'INTERNO DELLA FUNZIONE

$$f(x^1) = (-\alpha^0)^2 + (-\alpha^0)(1-0) + 0 - 0 + (-\alpha^0)^2 + (-\alpha^0) = 2(\alpha^0)^2 - 2(\alpha^0)$$

$df(x^1) = 4\alpha^0 - 2$ → derivata prima

$$\frac{df(x^1)}{d\alpha^0} = 4(\alpha^0) - 2 \xrightarrow{\text{PTO MINIMO}} 4(\alpha^0) = 2 \rightarrow \alpha^0 = 1/2$$

IL NUOVO PUNTO È QUINDI DATO DA

$$x^1 = [0\ 0\ 0] + \alpha^0[-1\ 0\ -1] = [-1/2\ 0\ -1/2]$$

CRITERIO DI ARRESTO: si verifica se uno dei criteri di convergenza è soddisfatto

PRIMO CRITERIO: $|f(x^1) - f(x^0)|$

$$f(x^0) = 0$$
$$f(x^1) = -1/2$$
$$|f(x^1) - f(x^0)| = 0.5 > \epsilon_1$$

SECONDO CRITERIO: $\|\nabla f(x^1)\|$

$$\nabla f(x^1) = [0 \quad 1 \quad 0]$$
$$\|\nabla f(x^1)\| = \sqrt{0^2 + (1)^2 + 0^2} = 1 > \epsilon_2$$

Non si può terminare, quindi dobbiamo eseguire una nuova iterazione

---

SECONDA ITERAZIONE

$$d^1 = -\nabla f(x^1) = -[-1+1+0,\ 1/2 + 0 + 1/2,\ 0-1+1] =$$
$$= [0 \quad -1 \quad 0]$$

Nuovo punto $x^2 = [-1/2 \quad 0 \quad -1/2] + \alpha^1 \cdot [0 \quad -1 \quad 0]$

$$= [-1/2 \quad -\alpha^1 \quad -1/2]$$

Adesso si calcola α^1, e per farlo:

→ pto minimo fz lungo direzione di discesa

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1(1 - x_2) + x_2^2 - x_2 x_3 + x_3^2 + x_3$$

$$1/4 + \left(-\frac{1}{2}\right)(1 + \alpha^1) + (\alpha^1)^2 - (\alpha^1)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha^1 + (\alpha^1)^2 - \frac{1}{2}\alpha^1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \alpha^1 + (\alpha^1)^2 \rightarrow \frac{df(x^2)}{d\alpha^1} = 2(\alpha^1) - 1$$

$2\alpha^{1} = 1 \rightarrow \alpha = 1/2$

→ Adesso si sostituisce α^1 nel punto x^2

$$x^2 = \left[-\frac{1}{2} \quad -\alpha^1 \quad -\frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right]$$

CRITERIO DI ARRESTO

→ Primo criterio: $|f(x^2) - f(x^1)|$

$f(x^1) = -1/2$

$f(x^2) = -0.75$

$= 0.25 > \epsilon_1$

→ Secondo criterio: $\|\nabla f(x^2)\|$

$$\nabla f(x^2) = \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right]$$

$$\|\nabla f(x^2)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0.7071 > \epsilon_2$$

TERZA ITERAZIONE

$$d^2 = -\nabla f(x^2) =$$

$$-\left[-1+1+\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}-1+1\right] =$$

$$\left[-\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2}\right]$$

$$x^3 = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right] + \alpha^2 \cdot \left[-\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(\alpha^2+1) \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}(\alpha^2+1)\right]$$

$\min f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1(1-x_2) + x_2^2 - x_2 x_3 + x_3^2 + x_3$

$$\left(-\frac{1}{2}(\alpha^2+1)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}(\alpha^2+1)\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\alpha^2+1) +$$

$$+ \frac{1}{4}(\alpha^2+1)^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2+1) = \frac{1}{4}(\alpha^2+1)^2 - \frac{3}{4}(\alpha^2+1) + \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}(\alpha^2+1) + \frac{1}{4}(\alpha^2+1)^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha^2+1)^2 + \frac{-3-1-2}{4}(\alpha^2+1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(\alpha^2+1)^2 - \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}}(\alpha^2+1) + \frac{1}{4}$$

$$\frac{df(x^3)}{d\alpha^2} = (\alpha^2+1) - \frac{3}{2} \rightarrow (\alpha^2+1) = \frac{3}{2} \rightarrow \alpha^2 = 1/2$$

$$x^3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\alpha^2+1) & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(\alpha^2+1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right) & -1/2 & -1/2\left(\frac{1}{4}+1\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right) & -\frac{1}{2} & -1/2\left(5/4\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 & -1/2 & -3/4 \end{bmatrix}$$

CRITERIO DI ARRESTO $\rightarrow |f(x^3) - f(x^2)| \rightarrow f(x^2) = -0.75$

$f(x^3) = -0.875$

$= 0.125 > \epsilon_1$

$\rightarrow \|\nabla f(x^3)\| \rightarrow \nabla f(x^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^3)\| = 0.5 > \epsilon_2$

Dobbiamo quindi fare una nuova iterazione ...e così via fino a quando non abbiamo uno dei due a $<\epsilon_1$ o ϵ_2