Esercitazione 1

Nell'impianto di Lambrate la TOOL spa produce unicamente pinze e chiavi il cui processo di produzione richiede:

1. Acciaio (materia prima), 2. Una fase di lavorazione dei singoli pezzi in acciaio, 3. Una fase di assemblaggio dei pezzi lavorati (macchina per l'assemblaggio)

Variabili di decisione

↳ x_c: numero di chiavi da produrre in un giorno (in migliaia)
↳ x_p: numero di pinze da produrre in un giorno (in migliaia)

Funzione obiettivo

Obiettivo: massimizzare guadagno totale giornaliero

Guadagni: 130\$ per 1000 unità di chiavi
100\$ per 1000 unità di pinze

$$\max z = 130x_c + 100x_p$$

Vincoli

Acciaio: prod. richiede: 1,5 libbre per ogni chiave
1 libbra per ogni pinza
27000: disp. giornaliera NON IN MIGLIAIA

$$\Downarrow$$

$$1{,}5\,x_c + 1x_p \le 27$$

Macchina lavorazione: ogni chiave e pinza richiedono un'ora di lavorazione.
21000: disp. giornaliera NON IN MIGLIAIA

$$\Downarrow$$

$$1x_c + 1x_1 \le 21$$

Macchina assemblaggio: 0.3 ore per chiave, 0.5 per pinza, 9000 ore disponibili

$$\Downarrow$$

$$0.3x_c + 0.5x_p \le 9$$

Domanda massima: 15000 chiavi, 16000 pinze $\Rightarrow x_c \le 15,\ x_p \le 16$

soluzione $x_c = 12$

ottima $x_p = y$

PROBLEMA

$$z - 130x_c - 100x_p = 0$$
$$1{,}5x_c + x_p + S_1 = 27$$
$$x_c + x_p + S_2 = 21$$
$$0.3x_c + 0.5x_p + S_3 = 9$$
$$x_c + S_4 = 15$$
$$x_p + S_5 = 16$$

La prima soluzione di base ammissibile si ottiene impostando le variabili decisionali a zero

	x_c	x_p	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	sol.
z	-130	-100	0	0	0	0	0	0
s_1	1.5	1	1	0	0	0	0	27
s_2	1	1	0	1	0	0	0	21
s_3	0.3	0.5	0	0	1	0	0	9
s_4	1	0	0	0	0	1	0	15
s_5	0	1	0	0	0	0	1	16

Scelgo la variabile più negativa

$27/1.5 = 18$

$21/1 = 21$

$9/0.3 = 30$

$15/1 = 15 \Rightarrow$ esce

$16/0 = NaN$

	x_c	x_p	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	sol.
z	-130	-100	0	0	0	0	0	0
s_1	1.5	1	1	0	0	0	0	27
s_2	1	1	0	1	0	0	0	21
s_3	0.3	0.5	0	0	1	0	0	9
x_c	1	0	0	0	0	1	0	15
s_5	0	1	0	0	0	0	1	16

Nuova riga = vecchia riga − [(vecchio coefficiente colonna pivot) · nuova riga pivot]

$$z' = -130-(-130)\cdot 1, -100-(-130)\cdot 0, 0, 0, 0, 0-(-130)\cdot 1, 0, 0-(-130\cdot 15)$$
$$= [0, -100, 0, 0, 0, 130, 0, 1950]$$

$$s_1' = 1{,}5-1{,}5\cdot 1, 1-1{,}5\cdot 0, 1-1.5\cdot 0, 0, 0, 0-1{,}5\cdot 1, 0, 27-1.5\cdot 15$$
$$= [0, 1, 1, 0, 0, -1.5, 0, 4.5]$$

Esercizio 2

Obiettivo: minimizzare il costo di un pasto rispettando i vincoli nutrizionali.

Ingredienti	Proteine	Carboidrati	Grassi	Costo
1	1	4	3	3
2	3	4	2	6
3	2	3	3	5
4	3	2	4	6

Variabili decisionali

Quattro diversi ingredienti: $x1$, $x2$, $x3$, $x4$

Funzione obiettivo (colonna nella tabella)

Minimizzare costo totale: $\min Z = 3x1 + 6x2 + 5x3 + 6x4$

Vincoli (ovvero in verticale nella tabella)

- Proteine: almeno *2hg*
  - $1x1+3x2+2x3+3x4 \geq 2$
- Carboidrati: almeno *4hg*
  - $4x1+4x2+3x3+2x4 \geq 4$
- Grasso: almeno *3hg*
  - $3x1+6x2+5x3+6x4 \geq 3$
- $X1,x2,x3,x4 \geq 0$

Esercizio 3

Problema dei trasporti - minimizzare il costo totale per trasportare un prodotto da diverse fonti (stabilimenti) a diverse destinazioni (centri di distribuzione), rispettando la capacità produttiva delle fonti e la domanda delle destinazioni.

Variabili decisionali

- x_{ij}: quantità di computer spediti dallo stabilimento i (i=1,2,3) al centro di distribuzione j (j=1,2,3,4). 3x4=12 —> 12 variabili decisionali

Funzione obiettivo

Minimizzare il costo totale del trasporto.

$\min z = \sum_i \sum_j C_{ij} \cdot x_{ij}$ ⇒ tutte le 12 variabili

vincoli capacità: quantità totale da ogni stabilimento non può superare capacità

$\sum_j x_{ij} \leq S_i$

stab. 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq Cs_1$
stab. 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq Cs_2$
stab. 3: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq Cs_3$

vincoli domanda: quantità totale che arriva a ogni centro di distrib. almeno pari alla domanda

$\sum_i x_{ij} \geq d_j$

centro 1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq dc_1$
centro 2: $x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq dc_2$
centro 3: $x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq dc_3$
centro 4: $x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq dc_4$

Turni di lavoro

Minimizzare il numero totale di dipendenti necessari per un ristorante, rispettando il fabbisogno minimo di personale per ogni giorno della settimana.
Numero: lunedì=14, martedì=13, mercoledì=15, giovedì=16, venerdì=19, sabato=18, domenica=11
Ogni dipendente lavora 5 giorni consecutivi, e ha 2 giorni di riposo.

Variabili decisionali

Numero di dipendenti il cui turno di 5 giorni consecutivi inizia in un giorno specifico della settimana.

- x1: numero di lunedì
- X2: numero di martedì
- X3, x4, x5, x6, x7: fino a domenica

Funzione obiettivo

Minimizzare la somma di tutti i dipendenti che iniziano un turno, che rappresenta il numero totale di dipendenti
Min Z = x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7

Vincoli

Fabbisogno minimo di dipendenti per un giorno specifico. *I dipendenti che lavorano un dato*

giorno sono quelli il cui turno è iniziato nei 5 giorni precedenti, incluso il giorno stesso.
Lunedì: da lunedì a venerdì
Martedì: da martedì a sabato
Mercoledì: da mercoledì a domenica
Giovedì: da giovedì a lunedì
Venerdì: da venerdì a martedì
Sabato: da sabato a mercoledì
Domenica: da domenica a giovedì

Per i vincoli, dobbiamo vedere quali sono i turni che coprono il giorno dato.

		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Lunedì	X_1	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓
Martedì	X_2	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✓
Mercoledì	X_3	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓
Giovedì	X_4	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓
Venerdì	X_5	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗
Sabato	X_6	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✗
Domenica	X_7	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓
		L→V	M→S	M→D	G→L	V→M	S→M	D→G

vincoli:

Turno lun: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 19$ prendo l'ultimo giorno come vincolo

mar: $X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 18$

mer: $X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 11$

gio: $X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_1 \geq 14$

ven: $X_5 + X_6 + X_7 + X_1 + X_2 \geq 13$

sab: $X_6 + X_7 + X_1 + X_2 + X_3 \geq 15$

dom: $X_7 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 16$