Logica

Una proposizione, o enunciato, è un'affermazione vera o falsa. Possiamo quindi fare operazioni su queste proposizioni:

- Negazione: sia P una proposizione, allora $\neg P$ = "non P"

P	**V**	**F**
$\neg$P	F	V

Siano P e Q due proposizioni:

- **Congiunzione**: $P \wedge Q$ = "P e Q"
- **Disgiunzione**: $P \vee Q$ = "P o Q"
- **Implicazione**: $P \Rightarrow Q$ = "se P allora Q"
    - **Transitività**: se $P \Rightarrow Q$, e $Q \Rightarrow R$, allora $P \Rightarrow R$
    - $Q \Rightarrow P$ ha un significato diverso da $P \Rightarrow Q$
- **Equivalenza**: $P \Leftrightarrow Q$ = "se e solo se", il che significa che $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$

P	**V**	**V**	**F**	**F**
Q	V	F	V	F
$P \wedge Q$	V	F	F	F
$P \vee Q$	V	V	V	F
$P \Rightarrow Q$	V	F	V	V
$P \Leftrightarrow Q$	V	F	F	V

I termini **teorema/proposizione/lemma** si riferiscono ad affermazioni dimostrabili:

- **Teorema**: risultato matematico significativo e centrale, che spesso richiede una dimostrazione
- **Proposizione**: un'affermazione vera e dimostrabile, ma di importanza minore rispetto a un teorema
- **Lemma**: un risultato ausiliario, spesso utilizzato per dimostrare un teorema più importante

📝 Un esempio di proposizione è il seguente: siano P, Q proposizioni:

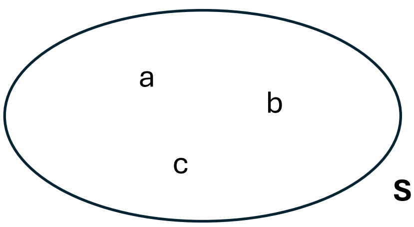
1. $(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$
2. $(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$

La 📚 dimostrazione di questo si trova nella tabella a fianco.

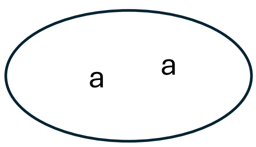
P	**V**	**V**	**F**	**F**
Q	V	F	V	F
$P \Rightarrow Q$	V	F	V	V
$\neg$P	F	F	V	V
$(\neg P) \vee Q$	V	F	V	V
$\neg$Q	F	V	F	V
$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$	V	F	V	V

Insiemi

Un insieme è una collezione, o gruppo, di elementi. *Non c'è un insieme di tutti gli elementi*. Gli elementi sono distinguibili l'uno dall'altro, ovvero non si possono ripetere elementi.



Si



No

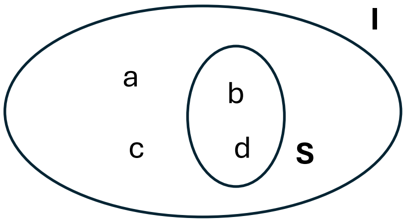
S = {a,b,c}
Se a=b=c allora S ha un solo elemento

{1,1} = {1}
Ø = {}, insieme vuoto

Un insieme è determinato dai suoi elementi. Se è **non ordinato**, un elemento non ha una posizione in un insieme.

Con $x \in A$ significa che x è un elemento di A, A contiene x, o x appartiene ad A.
Se $x \notin A$ significa che x non appartiene ad A.
Con $x,y \in A$ significa $x \in A$, e $y \in A$.

Sottoinsieme



$S \subset I$, o $S \subseteq I$
$I \subset I$ è sempre un sottoinsieme
$\emptyset \subset I$

Abbiamo i seguenti insiemi:
- N = numeri naturali = $\{0, 1, 2, \ldots\}$
- Z = numeri interi = $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Q = numeri razionali
- R = numeri reali (ha la radice, ed è ordinato)
- C = numeri complessi

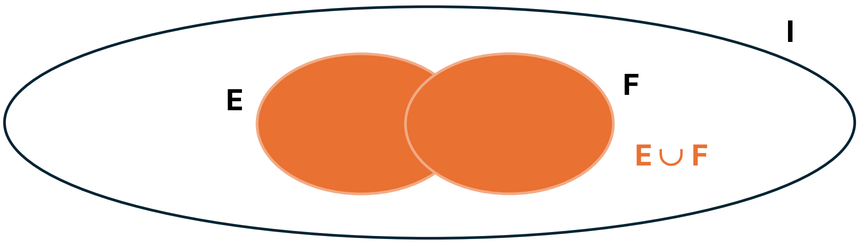
Un insieme può essere definito dando la **lista** dei suoi elementi; **ricorsivamente**; usando delle **condizioni**.

Operazioni sugli insiemi

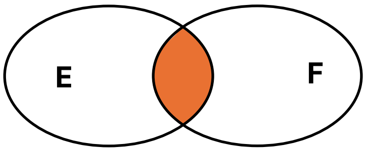
Sia I un insieme. Abbiamo le seguenti operazioni.

Riunione/unione

Se $E \subset I$, $F \subset I$, $E \cup F$ è l'insieme degli elementi di I che sono in E, oppure in F.



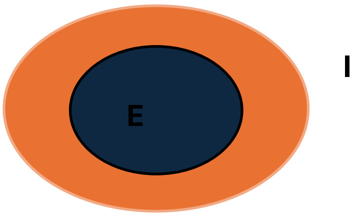
Intersezione



L'intersezione è $(E \cap F) \subset I$, che è l'insieme degli elementi di I che *sono in E ed in F*.

Complementare

Avendo $E \subset I$, $I \setminus E$ è l'insieme degli *elementi di I che non sono in E*.



Proposizioni

Siano A,B,C sottoinsiemi di E, con:

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $A \cap (E \setminus A) = \emptyset$
- $A \cup (E \setminus A) = E$
- $E \setminus (E \setminus A) = A$

Cardinalità

Sia A un insieme. La **cardinalità** di A, indicata da $\#A$ oppure $|A|$ è il *numero di elementi di A*. è un numero naturale o un infinito.
A è **finito** quando $|A| \in \mathbb{N}$.

Prodotto cartesiano

Siano A,B due insiemi. $A \times B$ è l'**insieme delle coppie fornite di un elemento di A e un elemento di B**.

$$A\ x\ B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Avendo $A_1, \ldots, A_n$ insiemi:

$$A_1\ x\ A_2\ x \ldots x\ A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A, \ldots, a_n \in A_n\}$$
$$A_1 x \ldots x\ A_n = A_1\ x\ (A_2\ x \ldots x\ A_n)$$

Dato un insieme E, con n $\in$ N \ {0}:

$$E^n = E \; x \ldots x \; E = \{(e_1, \ldots, e_n) \mid e_1, \ldots, e_n \in E\}$$

Quantificatori

∀	∃	∃!
Per ogni	Esiste	Esiste un unico

Es: Sia P ⊂ N il sottoinsieme dei numeri pari.

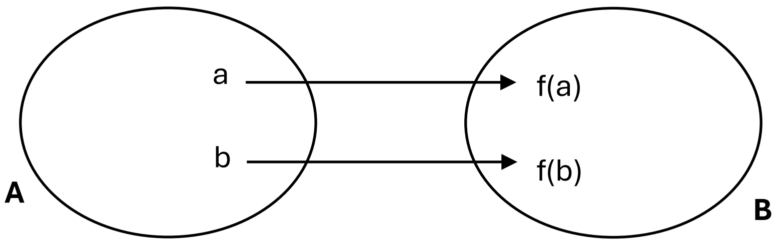
"Per ogni numero naturale pari n, esiste un unico numero naturale k tale che n = 2k"

∀n ∈ P, ∃! K ∈ N tale che n = 2k

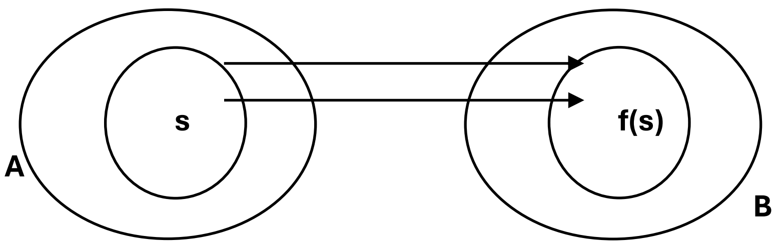
L'ordine dei quantificatori è importante.

Funzioni

Sia A, B insiemi. Una **funzione** (mappa o applicazione) f: A → B, è una legge che associa ad ogni elemento a ∈ A un unico elemento f(a) ∈ B. A è il **dominio** della funzione f, B è il **codominio** della funzione f.



Quando S ⊂ A, si scrive f(S) = {f(x) | x ∈ S} ⊂ B, f(A) = im(f) ⊂ B è **l'immagine** di f. È l'insieme dei **valori assunti dalla funzione**, ovvero l'insieme dei valori f(x) per tutti gli x nel dominio.



Quando T ⊂ B è un sottoinsieme, f^{-1}T = {a ∈ A | f(a) ∈ T} ⊂ A è la **controimmagine di T**.
La controimmagine, anche di un insieme con un unico elemento, è un insieme, e non un elemento. È quindi **l'insieme degli elementi del dominio che la funzione manda in quell'insieme**.
f^{-1}T = Ø quando non esistono elementi di T portati su T.

Il **grafo** di f: A → B è il sottoinsieme ⅂y = {(a, f(a)) | a ∈ A} ⊂ A x B. Rappresenta i punti della funzione in un sistema di coordinate.
Esiste un'unica funzione Ø → E per ogni insieme di E.

Se $E \neq \emptyset$, non esiste una funzione $E \rightarrow \emptyset$. Se E è un insieme, $id_E : E \rightarrow E$ è la funzione identità.

La funzione $f : A \rightarrow B$ è **costante** quando $f(a) \in B$ non dipende di $a \in A$, cioè $f(A) = \{b\}$.

Funzione composta

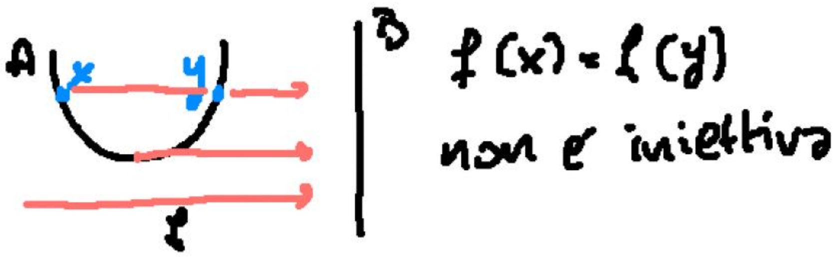
Siano $a \xrightarrow{(f)} B \xrightarrow{(g)} C$ funzioni. Allora $G \bullet F = A \rightarrow C$ è la **funzione composta**, data da

$$(g \bullet f)(\alpha) = g(f(a)) \ \forall \ a \in A.$$

Tipi di funzione

La funzione $f: A \rightarrow B$ si chiama

- **Iniettiva** se $\forall a, a' \in A$ si ha $f(a) = (a') \Rightarrow a = a'$
  - Se ogni elemento di A è determinato dalla sua immagine
- **Suriettiva** se $im(f) = B$
- **Biettiva** se iniettiva e suriettiva



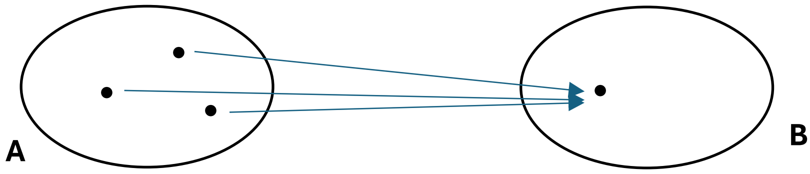
-

Una **biezione** $f: A \rightarrow B$ fornisce un'identificazione degli elementi di A e di B. $A \approx B$ se esiste una biezione $A \rightarrow B$. Solo i nomi degli elementi cambia.

$f: A \rightarrow B$ è una **biezione** se e solo se $\forall b \in B, \exists! \ a \in A$ tale che $f(a) = b$.
Se una funzione è biettiva, si può definire la funzione **inversa** di f con $f^{-1}: B \rightarrow A$

$$f \bullet f^{-1} = id_B, \ f^{-1} \bullet f = id_A$$

Sia f: A → B una funzione (non valgono al contrario):
- F è **iniettiva** $\Rightarrow |A| \leq |B|$
- F è **suriettiva** $\Rightarrow |A| \geq |B|$
- F è **biettiva** $\Rightarrow |A| = |B|$



f non è suriettiva

Funzioni e vettori

Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$, e sia la funzione ∂: $K^n \to V$ con $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Allora:
1. ∂ **iniettiva** $\Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n$ **linearmente indipendenti**
   a. Ogni combinazione lineare ha un risultato unico, quindi i vettori sono linearmente indipendenti
   b. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$
2. ∂ **suriettiva** $\Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n$ sono **generatori**
   a. Ogni vettore $v \in V$ è raggiungibile come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$. Quindi, i vettori generano tutto lo spazio V.
3. ∂ **biettiva** $\Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n$ è una **base**
   a. I vettori sono quindi linearmente indipendenti e generano tutto lo spazio

📚 **Dimostrazione**

$$im(\partial) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K = Span(v_1, \ldots, v_n)$$

∂ è suriettiva $\Leftrightarrow V = Span(v_1,\ldots,v_n) \Leftrightarrow v_1,\ldots,v_n$ generatori.
- **Iniettiva ⇒ linearmente indipendenti**
  - Supponiamo che ∂ sia iniettiva. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tali che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$.
    Dobbiamo dimostrare che $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$
    $$\partial((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \qquad \partial((0, \ldots, 0)) = \sum_{i=1}^{n} 0 v_i = 0$$
    Ovvero che l'unico modo per cui la sommatoria faccia zero, è che tutti gli scalari siano uguali a zero.
    Siccome ∂ è iniettiva, si ha $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$
- **Linearmente indipendenti ⇒ iniettiva**
  - Supponiamo $v_1, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti. Siano $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$, $(u_1, \ldots, u_n) \in K^n$ tali che $\partial((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \partial((u_1, \ldots, u_n))$
    $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - u_i) v_i = 0$$
    Poiché $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, $\lambda_i - u_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$, quindi $\lambda_i = u_i$. pertanto, ∂ è iniettiva

Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di V, allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$. Cioè:

$$\forall v \in V, \nexists(\lambda_1, .., \lambda_n) \in K^n \ tale\ che\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ si chiamano le **coordinate del vettore v rispetto alla base** $v_1, \ldots, v_n$. Cambiare l'ordine dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ cambia le coordinate. Quando si parla di coordinate, si deve specificare una famiglia ordinata $v_1, \ldots, v_n$, invece di un insieme.

Monoide

Un monoide è una struttura algebrica (M, *) dotato di una **funzione "legge"** $E \times E \rightarrow E$, $(x,y) \mapsto x * y$, e di un elemento $e \in E$ chiamato **elemento neutro** tale che:

- $\forall x \in E, e * x = x = x * e$
- Associatività: $\forall x, y, z \in E, (x * y) * z = x * (y * z)$

Sia (E, *, e) un monoide. Un elemento $x \in E$ si chiama **invertibile** se esiste $y \in E$ tale che $y * x = e$, $x * y = e$. y si chiama l'inverso di x. Per questo, *y è unico*.

Gruppo

Un **gruppo** è un monoide in cui **ogni elemento è invertibile**.
(N, +, •) non è un gruppo, (Z, +, •) è un gruppo.

Se l'insieme S(E) delle biezioni di un insieme E in sé stesso, munito della composizione delle funzioni come operatore, forma un **gruppo non necessariamente commutativo**, poiché la composizione di funzioni non è commutativa quando $|E| \geq 3$.

Anello

Un anello è un gruppo commutativo (A, +, •) dotato di un prodotto $A \times A \rightarrow A$, $(a,b) \mapsto a \bullet b = ab$, e di un elemento $1 \in A$ tale che:

- $\forall a \in A, a1 = 1a = a$
- $\forall a,b,c \in A, a(bc) = (ab)c$
- $\forall a,b,c \in A, a(b+c) = ab + ac$
- $\forall a,b,c \in A, (b+c)a = ba + ca$

Soddisfa le seguenti proprietà:

- (A, +) è un **gruppo abeliano**
  - + è **associativo**: $(a+b)+c = a+(b+c)$
  - **Elemento neutro per la somma**, zero: $a+0=0+a=a$
  - Ogni elemento ha un **opposto**: $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ t.c. $a + (-a) = 0$
  - La somma è **commutativa**: $a+b=b+a$
- (A,•) è un **monoide**
  - Il prodotto è **associativo**: $(a*b)*c = a*(b*c)$
  - Esiste un elemento neutro per il prodotto, **unità** (1), se l'anello è unitario
- **Distributività**

- $a*(b+c) = a*b + a*c$
- $(a+b)*c = a*c + b*c$

Campo

Un anello A è un **campo** se per ogni a $\in$ A non nullo, esiste un $b \in A$ tale che $ab=1$, e se $\forall x,y \in$ a si ha $xy=yx$, e se $A \neq \{0\}$. Ovvero, quando ogni elemento non nullo ha un inverso rispetto alla moltiplicazione.

📝 *Es. Z non è un campo:*
- *Q è un campo, R, C*
- *{0} non è un campo per definizione*
- *$F_2 = \{0,1\}$ => 10=0, 11=1, 1+1=0*
- *Z non è un campo perché non ha un inverso moltiplicativo, non c'è un x $\in$ Z tale che 2x=1 ($0 \leq x \leq 1$, $0 < x < 1$)*

Spazi vettoriali

Sia K ($K = R$) un campo, uno spazio vettoriale è un gruppo commutativo dotato di una **funzione** "prodotto per scalare".

$$(V, +, 0)$$

Spazio, legge, elemento neutro

$$K \; x \; V \rightarrow V$$
$$(\lambda, v) \rightarrow \lambda v = \lambda * v$$

Abbiamo le seguenti proprietà:
- $\forall \lambda \in K, \forall v, w \in V, \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
  - Moltiplicare uno scalare per la somma di due vettori è lo stesso che moltiplicare lo scalare per ciascun vettore separatamente e poi sommare i risultati
- $\forall \lambda, u \in K, \forall v \in V, (\lambda+u)v = \lambda v + uv$
  - Se sommiamo due scalari e poi li moltiplichiamo per un vettore, è lo stesso che moltiplicare ciascun scalare separatamente per il vettore, e poi sommare i risultati
- $\forall v \in V, 1v = v$
  - Il numero 1, dello spazio scalare K, agisce come elemento neutro rispetto al prodotto per scalare
- $\forall \lambda, u \in K, \forall v \in V, (\lambda u)v = \lambda(uv)$, ovvero il prodotto in K e il prodotto per scalare.
  - Il prodotto tra due scalari e un vettore può essere fatto in due modi equivalenti: prima moltiplicare i due scalari tra loro, e poi applicare il risultato al vettore, oppure possiamo applicare il primo scalare al vettore, e poi moltiplicare il risultato per il secondo scalare.

Gli elementi di V si chiamano **vettori**, mentre gli elementi di K si chiamano **scalari**.

📝 **Es**. 0 = {0} è uno spazio vettoriale

- K è uno spazio vettoriale su se stesso
- Se V e W sono spazi vettoriali, allora il prodotto cartesiano $V \times W$ è uno **spazio vettoriale con le operazioni definite componente per componente**
    - $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$
    - $\lambda(v,w) = (\lambda v, \lambda w)$
- $K^n = K \times K \times \dots \times K$ (n volte) $= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$ è uno spazio vettoriale con le operazioni:
    - $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
    - $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$
- $R^2 = \{(x,y) \mid x, y \in R\}$ è lo spazio vettoriale dei vettori nel piano cartesiano. Un esempio numerico è:
    - $u = (1,2)$, $v = (2,1)$
    - $u+v=(1+2, 2+1) = (3,3)$

L'insieme dei polinomi con coefficienti in K, denotato da $K[x]$ è uno spazio vettoriale. Un **polinomio** è un'espressione della forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, dove $a_i \in K$, e n è un intero non negativo. Le operazioni sono definite come:

$$(x + 1) + (x^2 + 2x - 2) = x^2 + 3x - 1$$

$$\left(\sum a_i x^i\right) + \left(\sum b_i x^i\right) = \sum (a_i + b_i) x^i$$
$$\lambda\left(\sum a_i x^i\right) = \sum (\lambda a_i) x^i$$

L'insieme delle **funzioni** da un insieme A a K, denotato da K^A, è uno **spazio vettoriale**. Se f, g: A → K sono funzioni, allora:
- $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$
- $(\lambda f)(a) = \lambda f(a)$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, con $\dim V < \infty$. Sia $U \subseteq V$ un sottospazio, e gode delle seguenti proprietà:
- $\dim U < \dim V$
- Se $\dim U = \dim V$, allora $U = V$
- Se $\dim U = 0$, allora $U = \{0\}$, ovvero è il sottospazio nullo

📝 *Es.*
- Se $U \subset V$, e $U \neq V$, allora U è un **sottospazio proprio** di V
- In R^2, se $\dim V = 2$, allora $\dim U = 1$, ovvero una *retta*. Non esiste un sottospazio U di R^2 con $\dim U = 0{,}5$
- In R^3, se $\dim V = 3$, allora $\dim U = 1$ è una *retta*, mentre $\dim U = 2$ è un *piano*
- **Relazioni di inclusione**: $\{0\} \subset R \subset P \subset V$, dove R rappresenta una retta, e P un piano

Proprietà fondamentali

Sia V uno spazio vettoriale. Allora:
- $\forall \lambda \in K, \lambda 0_v = 0_v$, dove 0_v è il vettore nullo di V
- $\forall v \in V, 0_k v = 0_v$, dove 0_k è lo zero di K
- $\forall v \in V, (-1)v = -v$
    - *Dimostrazione*: $0_v = (\lambda 0_v) - (\lambda 0_v) = \lambda(0_v + 0_v) - \lambda 0_v = (\lambda 0_v) + (\lambda 0_v) - \lambda 0_v = \lambda 0_v$

Vettori collineari

Due vettori $u, v \in V$ sono **collineari** se esiste un $\lambda \in K$ tale che $u = \lambda v$ ($v = \lambda u$).
Il vettore nullo 0_v è sempre collineare con qualsiasi vettore u ($0_v = 0_k u$).
Un esempio è che in R^2, i vettori (1,0) e (0,1) non sono collineari.

Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottoinsieme $U \subseteq V$ è un **sottospazio** di V se soddisfa le seguenti condizioni:

- U è **non vuoto**
- $\forall u, v \in U, u+v \in U$
- $\forall u \in U, \forall \lambda \in K, \lambda u \in U$

Osservazioni

- Se U è un sottospazio di V, allora U è uno spazio vettoriale a sua volta
- V e $\{0\}$ sono sempre sottospazi di V
- Se U è un sottospazio, allora $\forall u \in U$, $-u \in U$ *($-u = (-1)\, u \in U$)*
- Se U è un sottospazio, allora $0 \in U$, poiché U è non vuoto, esiste un $x \in U$, $0 = x - x = x + (-x) \in U$

Esempi

- In K^n, l'insieme dei vettori con una coordinata specifica uguale a zero è un sottospazio. *In R^2, l'insieme $\{(x,0) \mid x \in R\}$ è un sottospazio*
- In $K[x]$, l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a d è un sottospazio
- L'insieme delle funzioni continue da R^n a R è un sottospazio dello spazio di tutte le funzioni da R^n a R

Proposizione

Siano U e U' due sottospazi di uno spazio vettoriale V, e vogliamo analizzare le proprietà dell'intersezione e dell'unione di questi sottospazi.

- **L'intersezione di due sottospazi è ancora un sottospazio**
  - L'insieme $U \cap U'$ è un sottospazio di V perché soddisfa queste proprietà:
    - *Contiene lo zero*: poiché 0 appartiene sia ad U che a U', allora $0 \in U \cap U'$
    - *È chiuso rispetto alla somma*: se $v, v' \in U \cap U'$, allora v, v' appartengono sia ad U che a U'
      - Poiché sia U che U' sono sottospazi, allora anche $v + v'$ appartiene sia ad U che a U', quindi $v + v' \in U \cap U'$
    - *È chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare*: se $v \in U \cap U'$, e λ è uno scalare, allora $v \in U$, e $v \in U'$
      - Poiché entrambi sono sottospazi, allora $\lambda v \in U$, $\lambda v \in U' \rightarrow \lambda v \in U \cap U'$

  Quindi, $U \cap U'$ è un sottospazio di V.

- **L'unione di due sottospazi in generale non è un sottospazio**

- L'unione di $U \cup U'$ non è garantito che sia un sottospazio. Per esserlo, dovrebbe essere chiusa rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalari, cosa che in generale non accade.
- Consideriamo un **controesempio**:
    - Abbiamo i sottospazi $U = \{(x, 0) \mid x \in R\}$, cioè l'asse x, e $U' = \{(0,y) \mid y \in R\}$
    - Il vettore (1,0) e il vettore (0,1) appartengono entrambi a $U \cup U'$
    - La loro somma, $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ non appartiene a $U \cup U'$, poiché non è né sulla retta x-asse né sulla retta y-asse
    - Poiché $U \cup U'$ non è chiuso rispetto alla somma, non è un sottospazio di R^2

Somma di sottospazi

Siano U e U' sottospazi di V.
La somma di U e U', denotata da $U + U'$, è l'insieme $\{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$.
U + U' è un **sottospazio** di V. È il più piccolo sottospazio contenente la riunione $U \cup U'$.

Formula di Grassmann

Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$, sia $V \in \text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$. Allora $\text{Span}(v_1, \ldots, v_n, v) = \text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$.
Se abbiamo quindi un insieme di vettori $v_1, \ldots, v_n$, e un altro vettore v, che è già una combinazione lineare di questi, cioè appartiene allo Span, allora *aggiungere v all'insieme non cambia lo Span*.

Abbiamo questa seguente 📚 dimostrazione:
- $\supseteq$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + 0\, v \in Span(v_1, \ldots, v_n, v)$
- $\subseteq$: Sia $x \in \text{Span}(v_1, \ldots, v_n, v)$. Allora, esistono scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in K$ tali che $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda v$
    - Si mostra che ogni elemento di $\text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$ è anche un elemento di $\text{Span}(v_1, \ldots, v_n, v)$. Questo perché una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ si può vedere come una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n, v$, dove il coefficiente di v è zero.
    - Poiché $v \in \text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$, esistono $u_1, \ldots, u_n \in K$ tali che $v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$
        - Siccome v appartiene allo Span di $v_1, \ldots, v_n$, possiamo esprimere v come una combinazione lineare di questi vettori
    - Quindi
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda u_i) v_i \in Span(v_1, \ldots, v_n)$$
      Sostituendo l'espressione di v nella formula per x, otteniamo che x è in realtà una combinazione lineare solo di $v_1, \ldots, v_n$, e quindi appartiene a $\text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$.

Guardiamo i seguenti 📝 esempi:
- In R^2, siano $L, L' \subseteq R^2$ tali che $\dim(L) = \dim(L') = 1$, $L \neq L'$.
    - Quindi, $L + L' \subseteq R^2 \Rightarrow L + L' = R^2$
    - $\dim(L \cap L') = \dim(L) + \dim(L') - \dim(L + L') = 1 + 1 - 2 = 0$
    - Quindi $L \cap L' = \{0\}$
- Siano $P, P' \subseteq R^3$, con $\dim(P) = \dim(P') = 2$, $P \neq P'$.
    - Quindi $P + P' \subseteq R^3$
    - Se $P = P + P'$, allora $P' \subseteq P + P' = P \Rightarrow P' \subseteq P$
        - Poiché $\dim(P) = \dim(P') = 2$, allora $P = P'$

- $P \subset P + P' \Rightarrow \dim(P) < \dim(P + P') = 2 + 2 - 3 = 1$. Quindi, $P \cap P'$ è una **retta**

- In R^3, siano L una retta e P un piano. Supponiamo $L \not\subset P$. Allora, $P \subset P + L$
  - Perché, se $P = P + L$, allora $L \subseteq P + L = P \Rightarrow L \subseteq P$, il che è una contraddizione
  - $P \subset P + L \subseteq R^3$. Quindi, $\dim(P) < \dim(P+L) \leq \dim(R^3) = 3$.
    - Quindi, $\dim(P+L) = 3 \Rightarrow P + L = R^3$
  - $\dim(P \cap L) = \dim(L) + \dim(P) - \dim(P+L) = 1 + 2 - 3 = 0$. $P \cap L = \{0\}$

Teorema di Grassmann

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e siano $U, U' \subset V$ sottospazi. Allora:

$$\dim(U) + \dim(U') = \dim(U + U') + \dim(U \cap U')$$
$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$$

La dimensione di un sottospazio vettoriale è uguale al **numero di vettori in una sua base**.

Abbiamo questa 📚 **dimostrazione**:
Sia $x_1, \ldots, x_k$ una base di $U \cap U'$, $k = \dim(U \cap U')$. $x_1, \ldots, x_k$ sono linearmente indipendenti in $U \cap U'$, quindi anche in U.
💡*Base: insieme minimo di vettori tali che qualsiasi vettore dello spazio possa essere scritto come combinazione lineare di questi vettori.*

Applichiamo quindi il **teorema della base incompleta**.
$\exists u_{k+1},\ldots,u_n \in U$ tali che $x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ sia una base di u, con $n = \dim u$.

Similarmente, $\exists\, u'_{k+1}, \ldots, u'_m \in U'$ tali che $x_1, \ldots, x_k, u'_{k+1}, \ldots, u'_m$ sia una base di u', con $m = \dim U'$.

Si crea una famiglia T di vettori prendendo la base dell'intersezione, i vettori aggiuntivi di U. e quelli di U'.
Sia T la famiglia $x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n, u'_{k+1}, \ldots, u'_m$.

Verifichiamo quindi che **T è una base di U + U'** (perché in T, abbiamo prima gli u, poi gli u').

$$U + U' = Span(x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n, u'_{k+1}, \ldots, u'_m) = Span(T). T \text{ è } generatrice.$$

Verifichiamo che T è **linearmente indipendente**. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, n_{k+1},\ldots,n_m, n'_{k+1},\ldots,n'_m \in K$ t.c.

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} v_i u_i + \sum_{i=k+1}^{m} v'_i u'_i = x \in U \cap U', u \in U, u' \in U'$$

Abbiamo quindi $u = -x - u' \in U' \Rightarrow u \in U \cap U'$.
Esistono $\Theta_1, \ldots, \Theta_k \in K$ tali che $u = \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i$

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i = \sum_{i=k+1}^{n} v_i u_i \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-v_i) u_i$$

Ma $x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \Theta_1 = \ldots = \Theta_k = 0 = -v_{k+1} = \ldots = -v_n$, quindi $v_{k+1} = \ldots = v_n = 0$.

Si ha $u' = -x-u \in u \cap u' \ldots \Rightarrow v'_{k+1} = \ldots = v'_m = 0$. $u = u' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$. $x_1, \ldots, x_k$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. Quindi, la famiglia T è **linearmente indipendente**, e **T è una base di u + u'**.
T è la famiglia $x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n, u'_{k+1}, u'_m \Rightarrow \dim(u+u') = n + m - k = \dim(u) + \dim(u') - \dim(u \cap u')$.

Combinazione lineare

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Un vettore $v \in V$ è una **combinazione lineare** di $v_1, \ldots, v_n$ se esistono scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tali che:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Una combinazione lineare di un insieme di vettori è un'espressione ottenuta moltiplicando ciascun vettore per uno scalare, e sommando i risultati.

0 è sempre una combinazione lineare di qualsiasi insieme di vettori, anche quando n = 0.
Se v è una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ allora λv è anche una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ per ogni $\lambda \in K$.
Se v è una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ e $w_1, \ldots, w_k \in V$, allora v è una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k$.

In R^2 il vettore (1,1) è una combinazione lineare di (1, 0) e (0,1) : (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)
In R^2 il vettore (1,1) non è una combinazione lineare del solo vettore (1,0).

Per verificare che un vettore sia la **combinazione lineare di altri vettori**, si eseguono i seguenti passaggi:

- lo si mette in un'equazione dove il vettore risultante è uguale alla somma degli altri due vettori, ciascuno moltiplicato per un coefficiente diverso
- si risolve il sistema di equazioni cercando di trovare un risultato

Di seguito, un esempio dove *V_4 = (-1,1,0,3) non è combinazione lineare di V_1 = (1,0,2,0) e V_2 = (0,1,0,-1).*

risultati coeff. α coeff. β

$$(-1,1,0,3) = \alpha(1,0,2,0) + \beta(0,1,0,-1) = \begin{cases} 1 * \alpha + 0 * \beta = -1 \\ 0 * \alpha + 1 * \beta = 1 \\ 2 * \alpha + 0 * \beta = 0 \\ 0 * \alpha + (-1) * \beta = 3 \end{cases}$$

Span (sottospazio generato)

Sia V uno spazio vettoriale. Lo **span** di $v_1, \ldots, v_n$, o di un insieme di vettori, è **l'insieme di tutte le combinazioni lineari** di $v_1, \ldots, v_m$. Si denota con

$$Span(v_1, \ldots, v_n) \ o \ \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$$

È l'insieme quindi di

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \middle| \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \right\}$$

$\mathrm{Span}(v_1, ..., v_n)$ è un sottospazio di V. È chiamato il sottospazio generato dai vettori $v_1, ..., v_n$, o dall'insieme $\{v_1, ..., v_n\}$.

Insieme di generatori

La famiglia $v_1, ..., v_n$, o l'insieme $\{v_1, ..., v_n\}$ è un **insieme di generatori** di V, se $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_n) = V$. Cioè, ogni vettore di V può essere scritto come una combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$ (quindi una combinazione lineare dei vettori dell'insieme di generatori).

📝 *Es.*

- In K^n, i vettori $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ formano un insieme di generatori, e_i ha un 1 nella i-esima posizione e 0 altrove. Questi vettori sono chiamati i **vettori della base canonica** di K^n
  - In R^2, $e_1 = (1, 0)$, ed $e_2 = (0, 1)$ formano la base canonica
  - In R^3, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ formano la base canonica
- In R^3, i vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ non generano tutto R^3, ma generano un sottospazio di R^3
  - L'insieme delle combinazioni lineari di $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ è $\{a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) \mid a, b \in R\} = \{(a, a + b, b) \mid a, b \in R\}$

$\partial_i j$ è il **delta di Kronecker**, definito come $\partial_i j = 0$ se $i \neq j$, $\partial_i j = 1$ se $i = j$.

Dipendenza lineare

I vettori $v_1, ..., v_n \in V$ sono **linearmente indipendenti** se $\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in K$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Altrimenti $v_1, ..., v_n$ sono **linearmente dipendenti**. Osserviamo che $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, quindi $v_1, ..., v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti.

Possiamo calcolare se sono linearmente dipendenti calcolando il determinante della matrice associata.

$$\begin{matrix} v_1^x & v_2^x & v_3^x \\ v_1^y & v_2^y & v_3^y \\ v_1^z & v_2^z & v_3^z \end{matrix} \qquad \det(A) = v_1^x(v_2^y v_3^z - v_2^z v_3^y) - v_2^x(v_1^y v_3^z - v_1^z v_3^y) + v_3^x(v_1^y v_2^z - v_1^z v_2^y)$$

Se $\det(a) = 0$ i vettori sono linearmente dipendenti, altrimenti sono indipendenti.

La famiglia vuota, $n = 0$, è linearmente indipendente.
0 è linearmente dipendente, poiché $1*0 = 0$.
$e_1, ..., e_n \in K^n$ è linearmente indipendente.

📚 **Dimostrazione**: siano $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tali che: $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$. Dimostriamo che $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Quindi ogni $\lambda_n = 0$.

Se u,v sono linearmente dipendenti, allora sono anche **colineari**, e vale anche il viceversa. In $K = K^1$, $u, v \in K$ sono sempre linearmente dipendenti.

📝 *Es.*

$$\binom{2}{1}, \binom{1}{1}, \binom{-1}{1} \in R^2 \ linearmente\ dipendenti$$

$$\binom{2}{1} - \binom{1}{1} = \binom{1}{0}, \qquad \frac{1}{2}\binom{1}{1} + \frac{1}{2}\binom{-1}{1} = \binom{0}{1}$$

$$\binom{2}{1} - \binom{1}{1} + \frac{1}{2}\binom{1}{1} + \frac{1}{2}\binom{-1}{1} = \binom{1}{1} \qquad 1\binom{2}{1} - \frac{3}{2}\binom{1}{1} + \frac{1}{2}\binom{-1}{1} = \binom{0}{0}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{3}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente indipendenti. Sia $v \in V$, allora se $v, v_1, \dots, v_n$ è linearmente dipendente $\Leftrightarrow v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

📚 **Dimostrazione**: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $\exists u \in K$ tali che:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + uv = 0, e\ uno\ degli\ scalari\ \lambda_n\ non\ è\ nuilo$$

$$Se\ n = 0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$$Se\ n \neq 0\ v = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{u}\right) v_i \in Span(v_1, \dots, v_n)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + (-1)v = 0$

↳ $\neq 0$ in k

$\Rightarrow 0$ é comb. lineare non banale di $v_1, \dots, v_n, v$

$\Rightarrow v, v_1, \dots, v_n$ é lin. dip.

Dimensione finita

Uno spazio vettoriale V ha **dimensione finita** se esistono $v_1, \dots, v_n \in V$ tali che $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

Questo vuol dire quindi che *ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare di* $v_1, \ldots, v_n$.
Esempi:

- R^n, $n \in N$, ha dimensione finita, perché è generato dai vettori canonici $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
- $R[x]_d$, $d \in N$ ha dimensione finita (base: $1, x, \ldots, x^d$)
- $R[x]^+$ non ha dimensione finita, perché non esiste un numero finito di polinomi che può generare tutti i polinomi.

Teorema della base incompleta

Siano $g_1, \ldots, g_k \in V$ generatori. Allora, esistono $v_1, \ldots, v_n \in \{g_1, \ldots, g_k\}$ tali che $v_1, \ldots, v_n$ è una base di V.
Se abbiamo un insieme di generatori, possiamo estrarre da esso un sottoinsieme che sia una base di V. Nel caso in cui $k = 0$, ovvero nessun generatore, il teorema si riduce al caso banale in cui $V = \{0\}$.

Esistenza di una base finita

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora, esiste una base finita di V.

Completamento di una base

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$ linearmente indipendenti. Allora, esistono $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$ tali che $v_1, \ldots, v_n$ sia una base di V. Quindi, si può completare ogni famiglia linearmente indipendente in una base.

📝 *Es*. abbiamo $v_1 = (1,0,0)$, e $v_2 = (0,1,0)$. Questi due vettori sono *linearmente indipendenti* in R^3, ma non formano una base perché manca un vettore per generare tutto lo spazio.
Secondo il teorema, possiamo aggiungere un altro vettore $v_3 = (0,0,1)$, e ottenere la base completa $\{v_1, v_2, v_3\}$, che genera tutto R^3.

Proprietà fondamentali

Proposizione:
Sia V uno spazio vettoriale. Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$ linearmente indipendenti. Siano $w_1, \ldots, w_k \in V$ generatori. Allora $k \leq n$.

Teorema:
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora, tutte le basi di V hanno lo stesso numero di vettori.

📚 **Dimostrazione**:
Siano $B = (e_1, \ldots, e_n)$, e $F = (f_1, \ldots, f_m)$ due basi di V.

$$\begin{cases} B\ lin.indip. \\ F\ generatrice \end{cases} \overset{Prop.}{\Longrightarrow} n \leq m$$

$$\begin{cases} F\ lin.indip. \\ B\ generatrice \end{cases} \overset{Prop.}{\Longrightarrow} m \leq n$$

Quindi, $n = m$.

Definizione:
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. La dimensione di V è il **numero di vettori in una qualsiasi base di V**, con $\dim V \in N$.
Scriviamo $\dim V = \infty$ quando V **non ha dimensione finita**.

Uno spazio vettoriale può avere una dimensione finita senza essere finito come insieme.

L'insieme vuoto è una base dello spazio 0 = {0}. $\dim V = 0 \Leftrightarrow V = 0$.

Osservazione:
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, $\dim V = n$. Siano $v_1, \ldots, v_m \in V$.
- Se $m > n$, allora $v_1, \ldots, v_m$ è linearmente dipendente
- Se $m < n$, allora $v_1, \ldots, v_m$ non sono generatori.

Proposizione:
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $U \subset V$ un sottospazio. Allora U ha dimensione finita, $\dim U \leq \dim V$, e se $\dim U = \dim V$, allora $U = V$.

Dimostrazione:
- Sia $v_1, \ldots, v_k \in U$ una famiglia linearmente indipendente. Allora $v_1, \ldots, v_k \in V$ è linearmente indipendente. Quindi, $k \leq n = \dim V$.
  - Quindi, esistono $v_1, \ldots, v_k \in U$ linearmente indipendenti, con k massimale ($k \leq n$).
  - Allora, $v_1, \ldots, v_k$ è una base di U
- $Span(v_1, \ldots, v_k) \neq U \implies \exists v_{k+1} \in U \setminus Span(v_1, \ldots, v_k) \implies v_1, \ldots, v_{k+1}\ lin.indip.$
  - Contraddizione con il fatto che k sia massimale.
  - Quindi, $v_1, \ldots, v_k$ è una base di U.
  - U ha dimensione finita e $\dim U = k \leq n = \dim V$
- Supponiamo $k = n$. Se $U \neq V$, allora $\exists\, v \in V \setminus U$
  - $Span(v_1, \ldots, v_k) \implies v, v_1, \ldots, v_k\ lin.indip.$
  - $K + 1 = n + 1$, quindi non è possibile trovare $n+1$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione n.

Inoltre, la **dimensione di V** è il *massimo numero di vettori linearmente indipendenti*, od il *minimo numero di generatori*.

Base

La famiglia $v_1, \ldots, v_n \in V$ è una **base** di V se $v_1, \ldots, v_n$ è **linearmente indipendente**, e $v_1, \ldots, v_n$ è **generatrice** di V.

Es. $e_1, \ldots, e_n$ è una base di K^n, ovvero **base canonica**. $1, x, x^2, \ldots, x^d$ è una base di $K[x]_d$.

Es. in R^3 → $u = (2, 0, 0)$, $v = (1, -1, 0)$, $w = (-1, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti?

Siano a, b, c ∈ R tali che 0 = au + bv + cw. Abbiamo quindi

$$0 = a\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+b-c\\-b\\c\end{pmatrix}$$

Dove c = 0, -b = 0 => b = 0, con 2a+b-c= 0 => 2a = 0 => a = 0.
Quindi u,v,w sono linearmente indipendenti perché *tutti i valori di a,b,c devono essere = 0*.

Base generatrice

Per determinare se un insieme di vettori costituisce una base **generatrice**, dobbiamo verificare che siano **linearmente indipendenti**, e che ogni vettore dello spazio può essere scritto come combinazione lineare dei vettori dell'insieme. Possiamo seguire anche questo criterio:

- Se un insieme di vettori in uno spazio vettoriale di dimensione n è composto esattamente da n vettori linearmente indipendenti, allora esso è una **base** e quindi genera lo spazio
- Se il numero di vettori è **maggiore** di n, l'insieme è **dipendente**, e non è una base.
- Se il numero di vettori è **minore** di n, l'insieme non può generare tutto lo spazio, e quindi non è una base.

Vediamo un 📝 *esempio*:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x,y,z \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{cerco } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = au + bv + cw$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+b-c\\-b\\c\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x = 2a+b-c\\y = -b\\z = c\end{cases}$$

$$\Rightarrow b = -y,\ z = c,\ x = 2a+b-c \Rightarrow 2a = x-b+c = x+y+z \Rightarrow a = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

$$u = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(x+y+z)u + (-y)v + zw =$$

$$= \begin{pmatrix}x+y+z\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-y\\y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow$$

u,v,w sono generatori di $\mathbb{R}^3$
u,v,w é una base di $\mathbb{R}^3$

Proviamo con dei numeri: $u = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow u+v-2w = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

combinazione lineare non banale
u,v,w non lin. indip. => non é una base

u,v,w non sono generatori di $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}(u,v,w)$:

Siano a,b,c ∈ $\mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = au+bv+cw \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a\\0\\2a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2b\\-2b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c\\c\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2a+c=1 & (1)\\2b+c=0 & (2)\\2a-2b=0 & (3)\end{cases}$

(3) => a = b (2) -> 2a + c = 0
(3) : 2a + c = 1 => CONTRADDIZIONE

Teorema della base incompleta

Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ linearmente indipendenti, e siano $w_1, \dots, w_l \in V$ tali che V sia generato dai vettori $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l$. Allora, esistono $v_{k+1}, \dots, v_n \in \{w_1, \dots, w_l\}$ tali che $v_1, \dots, v_n$ sia una base di V.

📚 **Dimostrazione**:
Sia $F = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

- Se $F = V$, allora $v_1, \dots, v_k$ è una base
- Se $F \neq V$ allora $\exists j \in \{1, \dots, l\}$ tale che $w_j \notin F$. Allora $(v_1, \dots, v_k) \rightarrow (v_1, \dots, v_k, w_j)$ con $k \rightarrow k+1$; sono linearmente indipendenti
- L'algoritmo finisce quando $l = 0$, al più dopo l passi.

Basi di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale di una dimensione finita, e sia $\dim V = n$, $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (a) $v_1, \dots, v_n$ è una *base* di V
- (b) $v_1, \dots, v_n$ sono *linearmente indipendenti*
- (c) $v_1, \dots, v_n$ sono *generatori* di V

Abbiamo le seguenti 📚 dimostrazioni:

- **(a) ⇒ (b) con teorema della base incompleta**
    - $\exists\, w_{n+1}, \dots, w_m \in V$ tali che $v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_m$ è una base di V.
    - Poiché $\dim V = n = m$, allora $m-n = 0$, quindi $\{w_{n+1}, \dots, w_m\} = \emptyset$
    - Pertanto, $v_1, \dots, v_n$ è una **base**
- **(b) ⇒ (a)**
    - $\exists w_1, \dots, w_k \in \{v_1, \dots, v_n\}$ t.c. $w_1, \dots, w_k$ sia una base di V, quindi $k = n$
    - Poiché gli elementi sono a due a due diversi, $\{w_1, \dots, w_k\} = \{v_1, \dots, v_n\}$
    - Quindi, $v_1, \dots, v_n$ è una **base**
- **(a) ⇔ (c)**: per definizione

Abbiamo questo 📝 esempio: *dimostrare che $v_1 = (1,0)$, e $v_2 = (-1, 1)$ siano una base di R^2.*

1. **Prima dimostrazione**:
    a. **Indipendenza lineare**: siano $\lambda, u \in R$ t.c. $\lambda(1,0) + u(-1,1) = (0,0)$. Abbiamo quindi questo sistema: $\begin{cases} \lambda - u = 0 \\ u = 0 \end{cases}$
    b. La soluzione è $\lambda = u = 0$. Quindi, v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti
    c. $|\{v_1, v_2\}| = 2 = \dim R^2$. Quindi, v_1 e v_2 sono una base di R^2
2. **Seconda dimostrazione**:
    a. Sia $(x,y) \in R^2$. Cerchiamo $\alpha, \beta \in R$ t.c. $(x,y) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(1,0) + \beta(-1,1) = (\alpha-\beta, \beta)$

b. Abbiamo quindi il sistema $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \beta \end{cases}$
c. La soluzione è $\beta = y$, $\alpha = x + y$. La verifichiamo con $(x+y)v_1 + yv_2 = (x+y)(1,0) + y(-1,1) = (x+y-y, y) = (x,y)$
d. Quindi, (x,y) è una **combinazione lineare** di v_1 e v_2. Pertanto, v_1 e v_2 generano $\mathbb{R}^2$, e v_1, v_2 sono una base di $\mathbb{R}^2$

Sistema lineare

Un'equazione lineare a coefficienti in K è del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \quad a_1, \ldots, a_n, b \in k \; fissati, x_1, \ldots, x_n \in K \; variabili$$

Un sistema di equazioni lineari è un insieme di m equazioni in n variabili con

$$\{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \ldots a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\}$$

$$a_{ij} \in K \; per \; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n; \; b_1, \ldots, b_m \; sono \; i \; termini \; noti$$

Per ogni sistema lineare, il problema che dobbiamo risolvere è che **dati a_{ij} e b_i, trovare l'insieme delle n-uple $(x_1,\ldots,x_n) \in K^n$, tali che tutte le righe del sistema siano verificate**.

Abbiamo quindi $\sum_S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n | (x_1, \ldots, x_n \text{ è } soluzione \; di \; S\} \subseteq K^n$ come insieme delle soluzioni del sistema.

Sistemi omogenei

Due sistemi (S) e (T) sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni, cioè $\sum_s = \sum_t$.

(S) si chiama **omogeneo** se $b_1 = \ldots = b_n = 0$. In generale, quindi, il sistema S_0 è il sistema omogeneo associato a (S).

$$(S_0) = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Supponiamo $\sum_s \neq \emptyset$, e sia $v \in \sum_s$. Abbiamo quindi $\Sigma_S = \{v + k \mid x \,\epsilon \sum_{S_0}\}$. Abbiamo le seguenti Dimostrazioni:

- $\supset$: sia $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \sum_{S_0} \subset \mathbb{K}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$ con:

$$(1) = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_{11} + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}, \quad (2) = \begin{cases} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = b \\ \ldots \\ a_{n1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n = b_n \end{cases}$$

$$(1) + (2) = \begin{cases} a_{11}(x_1 + v_1) + \cdots + a_{1n}(x_n + v_n) = b_1 \\ \ldots \\ a_{n1}(x_1 + v_1) + \cdots + a_{mn}(x_n + v_n) = b_n \end{cases} \Longrightarrow x + v = (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n) \in \sum_S$$

Quindi, $\{x + v \mid x \,\epsilon \sum_{s_0}\} \subset \sum_S$.

- $\subset$: sia $y = (y_1, \dots, y_n) \in \sum_S$. Si scrive $y = v + x$, con $x \in \sum_{s_0}$.
    - $x = y - v \in K^n$. Sia $i \in \{1, \dots, m\}$. Allora:

$$a_{i1}(y_1 - v_1) + \cdots + a_{in}(y_n - v_n) = (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n) - (a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n) = b_i - b_i = 0$$

Quindi abbiamo trovato che $x \in \sum_{s_0}$.
Quindi, per risolvere il sistema (S) dobbiamo *trovare una soluzione particolare v (se esiste)*, e *risolvere il sistema (S_0)* con $\Sigma_S = \{v + k \mid x \in \sum_{s_0}\}$.

Matrici

Una matrice $m \times n$, dove $m,n \in N$ a coefficienti in K è una tabella ordinata:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, dove\ a_{ij} \in K, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

Con $\mathbf{m}$ righe ed $\mathbf{n}$ colonne, dove $\mathbf{i}$ è il numero della riga e $\mathbf{j}$ è il numero della colonna.

Matrice elementare

Una matrice elementare $E(i,j)$ di dimensione $m \times n$ su un campo K è una matrice che **ha tutti gli elementi uguali a zero**, eccetto l'elemento nella posizione **(i,j) che è uguale a 1**.

$$E(i,j) \in Mm,n(K), dove\ E(i,j)kl = \begin{cases} 1\ se\ (k,l) = (i,j) \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$

Queste matrici formano una **base canonica** dello spazio vettoriale delle **matrici $\mathbf{m \times n}$**.
Qualsiasi matrice $A = (a_{ij})$ può essere scritta come combinazione lineare delle matrici elementari.

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E(i,j)$$

Guardiamo un 📝 **esempio**: $m = n = 2$, $K = R$, $m_{2,2}$ (R). Abbiamo $E(i,j)$, con $1 \le i \le 2$ e $1 \le j \le 2$.

$$E(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matrice generica in $u_{2,2}$ (R) è del tipo $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in K$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= a\ E(1,1) + b\ E(2,1) + c\ E(1,2) + d\ E(2,2)$$

Operazioni

$u_{m,n}$ (K) è uno spazio vettoriale su K. Abbiamo le seguenti **operazioni**:

Somma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{n} \end{pmatrix}, (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Moltiplicazione con uno scalare

$$Per\ \lambda \in K, \qquad \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

Prodotto tra matrice e vettore

Sia $A \in M_{m,m}(K)$, cioè una matrice quadrata $m \times m$ con elementi in K. Sia $X \in K^m$ un vettore colonna con m componenti. Abbiamo quindi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m \end{pmatrix}$$

Se vogliamo vederla con una **forma generale**, possiamo definire ogni elemento del vettore risultante come

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \ per\ ogni\ i \in \{1, \dots, m\}$$

Il prodotto quindi può essere visto come una funzione:

$$M_{m,m}(K) \times K^m \to K^m \qquad (A, x) \mapsto AX$$

Operazioni elementari

Le operazioni elementari sulle righe o colonne di una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ sono *scambiare l'ordine delle righe (o colonne)*, *moltiplicare una riga (o colonna) per uno scalare non nullo* ($\lambda \in K \setminus \{0\}$), *aggiungere a una riga (o colonna) della matrice un'altra moltiplicata per uno scalare*.

Sia $Ax=B$ un sistema lineare, allora il sistema $A'x = B'$ è equivalente al sistema $Ax=B$. Quindi, le operazioni elementari possono essere usate per risolvere un sistema lineare.

Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{R1 \leftarrow R1+R2} \begin{cases} 2x = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{R1 \leftarrow \frac{1}{2}R1} \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x - y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{R3 \leftarrow R3+R2} \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x - y = 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow{R3 \leftarrow \frac{1}{3}R3} \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x - y = 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

X = 1/3 = 3/2 è impossibile, quindi il sistema non ha soluzioni.

Prodotto tra matrici

Il prodotto tra matrici solo se **il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B**.

Siano $A \in M_{m,n}$. Se $X \in K^n = M_{n,1}$, $Ax \in K^m = M_{m,1}$ è definito. $B \in M_{n,l}$.
Il prodotto $\mathbf{AB} \in \mathbf{M_{m,l}}$ è definito da $(AB)^{ij} = \sum_{k=1}^{n} A^{ik}B^{kj}$.

L'elemento nella riga i e colonna j della matrice C si ottiene moltiplicando gli elementi della riga i di A per gli elementi della colonna j di B, e sommando i prodotti. Di seguito, un 📝 esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x*1 + 0x*0 & 1x*1 + (-1)x*0 \\ 3x*2 + 0x*1 & 1x*2 + (-1)x*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ((-1)x1 + 0x2 + 1x3 = (2)$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3} = \begin{pmatrix} 1x(-1) & 2x(-1) & 3x(-1) \\ 1x0 & 2x0 & 3x0 \\ 1x1 & 2x1 & 3x1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Il prodotto non è **commutativo**: $AB \neq BA$ in generale, anche quando entrambi hanno senso e le stesse dimensioni.

Il prodotto tra due matrici è possibile solo se il numero di **colonne** della **prima** matrice **coincide** con il numero di **righe** della **seconda**.
Il risultato è una matrice con lo **stesso** numero di **righe** della **prima** matrice, e lo **stesso** numero di **colonne** della **seconda** matrice.

Associatività del prodotto tra matrici

Siano $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,r}$, $C \in M_{r,s}$, allora (AB)*C = A*(BC).
Posso prima eseguire prima il prodotto AB, e poi moltiplicare per C, oppure fare prima BC e poi moltiplicare A per quel risultato

Questa è la 📚 *dimostrazione*.

$$
\begin{aligned}
((AB)C)^{ij} &= \sum_{k=1}^{r} (AB)^{ik} C^{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{l=1}^{n} A^{il} B^{lk} \right) C^{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{n} \left(A^{il} B^{lk} \right) C^{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{n} A^{il} \left(B^{lk} C^{kj} \right) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} A^{il} \left(B^{lk} C^{kj} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} A^{il} \sum_{k=1}^{r} \left(B^{lk} C^{kj} \right) = \sum_{l=1}^{n} A^{il} (BC)^{lj} = (A(BC))^{ij}
\end{aligned}
$$

$M_{n,n}$, matrici quadrati $n \times n$, è uno spazio vettoriale, con $M_{n,n} \times M_{n,n} \to M_{n,n}$; $(A,B) \mapsto AB$

- $A(BC) = (AB)C \ \forall A,B,C \in M_{n,n}$
- $Im\, A = A\, Im \ \forall A \in M_{n,n}$
- $A(B+C) = AB+AC$; $(A+B)C = AC+BC$, $\forall A,B,C \in M_{n,n}$, quindi $M_{n,n}$ è un anello, e non è commutativo

Matrice identità

La matrice identità è $Im = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \in M_{m,n}(K), cioè\ (Im)^{ij} = \begin{cases} 1\ se\ i = j \\ 0\ se\ i \neq j \end{cases}$.

- $A * Im = A \ \forall A \in M_{m,n}(K)$
  - 📚 *Dimostrazione*: $(A*Im)^{ij} = \sum_{k=1}^{n} A^{ik} Im^{kj} = A^{ij}$, quindi $A * Im = A$
- $Im * B = B \ \forall B \in M_{n,l}(K)$
  - 📚 *Dimostrazione*: $(Im * B)^{ij} = \sum_{k=1}^{n} (Im)^{ik} B^{kj} = B^{ij} \Rightarrow Im * B = B$

Sistemi a gradini

Una matrice si chiama **a scala** per righe, o a gradini se:

- Ogni riga non nulla, dopo la prima, inizia con almeno uno zero di più della riga soprastante
- Se una riga è nulla, allora ogni riga sottostante è nulla

Il primo elemento diverso da zero in una riga di una matrice a scala si chiama **pivot**.

A scala ridotta

Una matrice si chiama a **scala ridotta** per righe se è a scala, e inoltre *i pivot sono tutti uguali a 1*, e *in ogni colonna contenente il pivot di una riga, tutti gli altri elementi sono uguali a zero*.

$$
\begin{matrix} \neq 0 & \dots & \dots \\ 0 & \neq 0 & \dots \\ 0 & 0 & \neq 0 \end{matrix} \quad a\ scala, \quad \begin{matrix} 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad a\ scala\ ridotttta
$$

Guardiamo un 📝 esempio:

$$A = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}, D = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}, E = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

B a scala, **C** a scala, **E** a scala e a scala ridotta

Algoritmo di Gauss

L'algoritmo di eliminazione di Gauss è un metodo per trasformare un sistema lineare in una forma più semplice detta **forma a scala ridotta per righe**, utilizzando *operazioni elementari sulle righe* della matrice associata.

$$Sistema\ (S) \xrightarrow{op.elementari} Sistema\ (S')\ a\ scala\ ridotta\ con\ (S) = (S')$$

Dato un sistema lineare nella forma $Ax=B$, possiamo rappresentarlo con la matrice aumentata $(A|B)$.

L'obiettivo è quindi di **trasformare questa matrice in una forma a scala ridotta per righe**, cioè una matrice in cui:

- Le righe non nulle hanno il primo elemento non nullo, **pivot**, spostato verso destra rispetto alla riga precedente
- Ogni colonna contenente un pivot ha tutti gli altri elementi nulli
- Se una riga è composta solo da zeri, si trova in fondo alla matrice

Si usano operazioni elementari come lo **scambio di due righe**, **moltiplicazione di una riga per un numero diverso da zero**, e **sostituzione di una riga con la somma di se stessa e un multiplo di un'altra riga**.

Bisogna avere alla fine una matrice dove la parte sinistra diventa la **matrice identità I**, mentre la parte destra conterrà il vettore delle soluzioni.

📝 Esempio:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xLeftrightarrow{R1 \leftarrow \frac{1}{2}R1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xLeftrightarrow{R2 \leftarrow R2+R1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right) \xLeftrightarrow{R2 \leftarrow \frac{2}{3}R2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xLeftrightarrow{R1 \in R, -\frac{1}{2}R2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to x = 1, y = 2$$

Trasposta di una matrice

Sia $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$. La **trasposta** di A è la matrice ${}^tA = (b_{ij}) \in M_{n,m}$, dove $b_{ij} = a_{ji}\ \forall\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Quindi, **l'elemento nella posizione (i,j) di A diventa l'elemento nella posizione (j,i) di ${}^tA$.**

Le righe di ${}^tA$ sono le colonne di A, mentre le colonne di ${}^tA$ sono le righe di A. Di seguito un esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Per ogni $A \in M_{m,n}$ (K), $B \in M_{n,l}$, si ha ${}^t(AB) = ({}^tB)*({}^tA)$, con questa **dimostrazione**:

$$({}^t(AB))^{ij} = (AB)^{ji} = \sum_{k=1}^{n} A^{jk}B^{ki} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)^{kj}({}^tB)^{ik} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)^{ik}({}^tA)^{kj} = ({}^tB * {}^tA)^{ij}$$

Rango

Sia $A \in M_{m,n}$, con $A = (A^1A^2...A^n)$, dove $A^j = \begin{matrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix} \in K^m$ sono le colonne di A.

Il **rango** di A è la dimensione del sottospazio di K^M generato dalle colonne di A. È **uguale al numero di righe (o colonne)** non nulle in una qualsiasi matrice a scala per righe (o colonne), ottenuta da A con delle operazioni elementari. È il **numero massimo di righe** (**o colonne**) **linearmente indipendenti** della matrice.

Sia $S = \text{Span}(A^1, ..., A^n) \subset K^m$, il rango di A è $rg(A) = \dim S \in N$.
Abbiamo quindi che $rg(A) = \dim S \leq \dim K^m = m$, S è generato da $A^1, ..., A^n$ n vettori, con quindi $\dim S \leq n$. Il rango è inferiore sia al numero di righe che di colonne.

Se $x = (x_1, ..., x_n) \in K^n$, $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_jA^j$, $S = Span(A^1, \dots, A^n) = \{\sum_{j=1}^{n} x_jA^j | x_1, \dots, x_n \in K\} = \{Ax | x \in K^n\}$. S è l'immagine della moltiplicazione per A.

Per $A \in M_{m,n}$ si ha $rg(A) = rg({}^tA)$, cioè **il rango di A è la dimensione del sottospazio di K^n generato dalle righe di A**. Di seguito, alcuni 📝 esempi:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = 1, rg\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = r \in \{0,1,2\}$$

Il rango di una matrice **non cambia** applicando delle **operazioni elementari** sulle colonne o righe.
Non cambia il sottospazio generato dalle righe applicando delle operazioni elementari sulle righe.

In una matrice a scala per righe, il rango è il numero di **pivot**, cioè il numero di righe non nulle. Di seguito, un 📝 esempio:

$$c = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b & c & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & g \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \in M_{3,6}, le\ righe\ sono\ lin.indip.?$$

$\alpha, \beta, \gamma \in R\ t.c.\ \alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3 = 0, 0 = (0, \alpha, a\alpha, \beta\alpha + \beta, c\alpha + \alpha\beta + 2\gamma, ea + f\beta + g\gamma)$
$con\ \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, le\ tre\ linee\ sono\ \boldsymbol{lin. indip.}, quindi\ \dim Span(R_1, R_2, R_3) = 3$

Il rango può essere calcolato anche con l'**algoritmo di Gauss**, e di seguito un 📝 esempio:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con l'algoritmo, bisogna contare **quante righe non nulle si hanno**; in questo caso, le righe non nulle sono due, quindi **rg(B)** = **2**.

Siano $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,l}$. Allora: $\begin{cases} rg(AB) \le rg(A) \\ rg(AB) \le rgB) \end{cases}$. Abbiamo la seguente 📚 **dimostrazione**:

Sia $j \in \{1, \dots, l\}$, $(AB)^j = A(B^j) = \sum_{i=1}^{n} B^{ij} A^i \in Span(A^1, \dots, A^n)$.
$Span\big((AB)^1, \dots, (AB)^j\big) \subset Span(A^1, \dots, A^n) \Longrightarrow \dim\ (Span\big((AB)^1, \dots, (AB)^j\big) \le$
$\dim\big(Span(A^1, \dots, A^n)\big) \Longrightarrow rg(AB) \le rg(A)$, quindi è dimostrato.
Abbiamo poi $rg(AB) = rg({}^t(AB)) = rg(({}^tB)({}^tA)) \le rg(({}^tB))$ (secondo (i)) $= rg(B)$.

Rango e sistemi lineari

Sia $A \in M_{m,n}$, $B \in K^m$; sia S il sistema Ax=B, con $x \in K^n$:
- Se **rg(A)** = **m** allora il sistema S ha delle soluzioni, cioè $\sum_s \neq \emptyset : |\sum_s| \ge 1$, con $m \le n$
- Se **rg(A)** = **n** allora una soluzione del sistema, se esiste, è unica: $|\sum_s| \le 1$, con $n \le m$
- Se **m** = **n** = **rg(A)** allora il sistema ha un'unica soluzione.

Sia $A = (A^1, \dots, A^n)$, con $A^j \in K^m$, $\gamma: K^n \to K^m$, con: $\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j A^j\ , x \longmapsto Ax$, vediamo i casi:

1. **rg(A)** = **m**, con $Span(A^1, \dots, A^n) \subset K^m \Rightarrow Span(A^1, \dots, A^n) = K^m \Rightarrow \{Ax | x \in K^n\} = K^m$
    a. B=Ax per un certo $x \in K^n$, quindi (S) ha delle soluzioni
2. **rg(A)** = **n**, con $S = Span(A^1, \dots, A^n)$ ha dimensione n.
    a. $A^1, \dots, A^n$ è **generatrice** di S, e ha n elementi. $A^1, \dots, A^n$ è una base di S, è linearmente indipendente, e f è iniettiva
    b. Se $x, x' \in K^n$ sono tali che Ax = Ax', si avrà che x = x'.
    c. Quindi, c'è **al massimo un x ∈ K**$^{\mathbf{n}}$ tale che Ax = b. La soluzione, se esiste, è unica.

Teorema di Rouchè-Capelli

Sia $A \in M_{m,n}$, $B \in K^m$. Sia S il sistema Ax=B, dove $X \in K^n$. Allora, S ammette delle soluzioni se e solo se *rg(A)* = *rg(A|B)*, dove $(A|B) = (A^1 \dots A^n B) \in M_{m,n+1}$ è la matrice completa associata al sistema.

Quindi, **un sistema lineare ha almeno una soluzione** se e solo se il **rango** della matrice dei **coefficienti** è **uguale** al rango della **matrice completa**, ovvero con la colonna dei termini noti aggiunta a destra.

La 📚 **dimostrazione** è la seguente: $\exists x \in K^n$ tale che $Ax=B = \exists \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \in K^n \text{ tale che } \sum_{j=1}^{n} x_j A^j = B = B \in Span(A^1, \dots, A^n) = Span(A^1, \dots, A^n) = Span(A^1, \dots, A^n, B) = \dim\big(Span(A^1, \dots, A^n)\big) \, (=) \, \dim\big(Span(A^1, \dots, A^n, B)\big) \, (=) \, rg(A) = rg(A|B)$

Abbiamo sempre $\mathbf{rg(A) \leq rg(A|B) \leq rg(A)+1}$, quindi se $rg(A) = rg(A|B)$ si ha *soluzioni*, altrimenti se $rg(A)+1=rg(A|B)$ non si ha soluzioni.

Di seguito, un 📝 esempio: determinare se questi sistemi hanno delle soluzioni.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}, rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2, rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2, \qquad \boldsymbol{ha\ delle\ soluzioni}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=0 \end{cases}, rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1, rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2\,, \boldsymbol{non\ ha\ delle\ soluzioni}$$

Vediamo in dettaglio il primo sistema, e applichiamo la riduzione di Gauss: facciamo $R_2 - R_1$, e troviamo $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Questa matrice ha due righe non nulle, quindi $rg(A) = 2$. Per la matrice completa, è la stessa cosa, quindi troviamo $rg(A') = 2$.

Matrici invertibili

Una matrice **quadrata** $A \in M_{n,n}$ si chiama **invertibile** se esistono $B,C \in M_{n,n}$ tali che $BA = I_n$, e $AC = I_n$. La matrice deve essere quadrata, e il determinante di A deve essere diverso da zero.

Una matrice è quindi **invertibile** se esiste un'altra matrice che, moltiplicata per essa, dà la **matrice identità**. Solo le matrici con determinante diverso da zero sono invertibili.

Siano $A,B,C \in M_{n,n}$ tali che $BA=AC=In$; allora $B = C$.
📚 *Dimostrazione*: $B=B*I_n = B(AC) = (BA)C = I_n * C = C$.

Sia $A \in M_{n,n}$ invertibile; allora:

- Se $B, B' \in M_{n,n}$ sono tali che $BA = B'A$, allora $B = B'$
    - Sia $M \in M_{n,n}$ tale che $AM = I_n$.
    - Abbiamo $B = B*I_n = B\,(AM) = (BA)\,M = (B'A)\,M = B'\,(AM) = B'\,I_n = B'$
- Se $C, C' \in M_{n,n}$ sono tali che $AC = AC'$, allora $C = C'$
    - Sia $N \in M_{n,n}$ tale che $NA = I_n$
    - $C = I_n * C = (NA)\,C = N\,(AC) = N\,(AC') = (NA)\,C' = I_n\,C' = C'$

Siano $A,B \in M_{n\text{-},n}$ tali che $AB=I_n$. Allora, A e B sono invertibili, e inoltre $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$.
📚 *Dimostrazione*:
$n = rg(I_n) = rg(AB) \leq rg(A)$, ma $rg(A) \leq n$, quindi $rg(A) = n$.

Matrice inversa

Quando $A \in M_{n,n}$ è invertibile, l'unica $B \in M_{n,n}$ tale che $BA = I_n$ si chiama l'**inversa** di A, e si scrive $B = A^{-1}$. A^{-1} **non esiste** se **A non è invertibile**.

È la matrice che, moltiplicata a sinistra o a destra per la matrice originale, restituisce la matrice identità.

Per una matrice 2 x 2, il calcolo è il seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \ se\ ad - bc \neq 0$$

Se $A, B \in M_{n,n}$ invertibili, allora AB è invertibile, e la sua inversa è $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

📚 *Dimostrazione*:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\, I_n\, B = B^{-1}\, B = I_n$$
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A * I_n\, A^{-1} = A\, A^{-1} = I_n$$

Se $A \in M_{n,n}$, allora A^{-1} è invertibile e $(A^{-1})^{-1} = A$.

📚 *Dimostrazione*: $A * A^{-1} = I_n,\ A^{-1} * A = I_n$

$I_n \in M_{n,n}$ è **invertibile**, e $I_n^{-1} = I_n$. $GL_n = \{\text{matrici invertibili in } M_{n,n}\} \subset M_{n,n}$, $(GL_n, I_n, \text{prodotto matriciale})$ è un gruppo, con divisione *insieme, elemento neutro, legge*; questo si chiama **gruppo lineare**.

Vediamo un 📝 esempio:

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ | \ \neq \ B * A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \ | \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \ \Rightarrow A \in GL_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \ | \ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow B \in GL_2 \Rightarrow AB \neq BA$$

Se $A \in GL_n$, allora ${}^tA \in GL_n$ e $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. Abbiamo la seguente 📚 *dimostrazione*:

$$A^{-1} * A = I_n \rightarrow {}^t(A^{-1} * A) = {}^tI_n \rightarrow {}^tA * {}^t(A^{-1}) = I_n$$

$$A * A^{-1} = I_n \rightarrow {}^t(A * A^{-1}) = {}^tI_n = I_n \rightarrow {}^t(A^{-1}) * {}^tA = I_n$$

Vediamo i seguenti 📝 esempi:

- $0 \in M_{n,n}$ non è invertibile, quando $n \geq 1$
- $0 = (0) \in M_{1,1}$ non è invertibile
- $(a) \in M_{1,1}$ con $a \in K$
  - (a) è invertibile $\Leftrightarrow a \neq 0$
  - In questo caso, (a^{-1}) è l'inversa di (a)
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *non* è *invertibile*: *Se* $a, b, c, d \in K$ *allora* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ è *invertibile, la sua inversa* è $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se $A \in M_{n.n}$ è **invertibile**, allora $rg(A) = n$. Di seguito, la 📚 *dimostrazione*:

$$n = rg(I_n) = rg(A * A^{-1}) \leq rg(A), ma\ n \geq rg(A) perchè\ A\ ha\ solo\ n\ colonne$$

Legame con i sistemi lineari

Sia $A \in M_{n,n}$, e $B \in K^n$. Se A è **invertibile**, allora il sistema $Ax=B$ ammette **un'unica soluzione** $X \in K^n$. Questa è $X = A^{-1}*B$.

Questo vale solo per i sistemi "quadrati", con un numero di equazioni uguale al numero di incognite.

📚 *Dimostrazione:* per $X \in K^n$ abbiamo: $Ax = B \Rightarrow A^{-1} B = A^{-1} (AX) = (A A^{-1}) X = I_n X = X$
Se $X = A^{-1}B$, $AX = A(A^{-1} B) = (A A^{-1}) B = I_n B = B$

Calcolare A^{-1} può essere lungo, mentre dati A^{-1}, B, **calcolare $A^{-1}B$ è facile**. Se bisogna risolvere più sistemi dove solo i termini noti cambiano, serve calcolare solo una volta l'inversa.

Calcolare l'inversa/determinare se è invertibile

Per fare questo, le operazioni elementari sono moltiplicazioni per matrici opportune.
Sia $A \in M_{m,n}$. Allora:

- Se T è un'operazione elementare sulle righe allora $T(A) = T(I_m) * A$
- Se T è un'operazione elementare sulle colonne allora $T(A) = A * T(I_n)$
- $T: M_{m,n} \rightarrow M_{m,n}$; $A \mapsto T(A)$

Di seguito, un 📝 *esempio*:

- Sia T: moltiplicare la prima riga per $\lambda \in R \setminus \{0\}$
  - $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow T(A) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ b & d \end{pmatrix}$
  - $T(I_2)A = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) * A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ b & d \end{pmatrix}$
- Sia T: moltiplicare la prima colonna per $\lambda \in R - \{0\}$
  - $T(A) = \begin{pmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{pmatrix}$
  - $A * T(I_2) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{pmatrix} = T(A)$
- Sia T: $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2$, $\lambda \in R$
  - $A * T(I_2) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & c \\ b + \lambda d & d \end{pmatrix} = T(A)$

Matrici elementari

Le matrici elementari derivano da operazioni elementari **su righe della matrice identità**.
Ogni matrice elementare è invertibile, e la sua inversa è anch'essa una matrice elementare.

Sono matrici ottenute applicando **una singola operazione elementare** (scambio, moltiplicazione per scalare, o somma di righe). Ogni matrice elementare è invertibile, e il loro uso serve a eseguire la **riduzione** di matrici.

Le matrici $T(I_n)$ si chiamano **matrici elementari**:

1. $S_{ij} = T(I_n)$ dove $T: R_i \Leftrightarrow R_j$
    a. $S_{ij} = T(I_n)$ dove $T: C_i \Leftrightarrow C_j$
2. $M_i(\lambda) = T(I_n)$ dove $T: R_i \Leftarrow \lambda R_i,\ \lambda \in K \setminus \{0\}$
    a. $M_i(\lambda) = T(I_n)$ dove $T: C_i \Leftarrow \lambda C_i,\ \lambda \neq 0$
3. $E_{ij}(\lambda) = T(I_n)$ dove $T: R_i \Leftarrow R_i + \lambda R_j,\ i \neq j$
    a. $E_{ij}(\lambda) = T(I_n)$ dove $T: C_j \Leftarrow C_j + \lambda C_i,\ i \neq j$
    b. $E_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda\, E(i,j)$
    c. ${}^t(E_{ij}(\lambda)) = E_{ji}(\lambda)$

Vediamo un 📝 *esempio*: $n = 2$:

1. $S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $M_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
3. $E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$

Le matrici elementari sono **invertibili**, e le loro inverse sono anch'esse *matrici elementari*.

Sia $A \in M_{n,n}$; allora **A è invertibile $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$**. Vediamo la 📚 dimostrazione:

- $\Rightarrow$: già visto
- $\Leftarrow$: **Algoritmo di Gauss**: $\exists\, T_1, \ldots, T_k$ operazioni elementari sulle righe di A tali che $B = T_k(\ldots(T_2(T_1(A))\ldots)$ sia **a scala ridotta per righe**
    - L'unica matrice B a scala ridotta per righe tale che $rg(B) = n$ è $B = I_n$
    - $rg(A) = n \Rightarrow rg(B) = n \Rightarrow B = I_n$
    - Se $E_i = T_i(I_n)$ per $i = 1, \ldots, k$ abbiamo $I_n = B = E_k(\ldots(E_2(E,A))\ldots)\ )\ E_k \ldots E,A \Rightarrow E_k^{-1} = E_{k-1},\ldots,E_1A \Rightarrow \ldots \Rightarrow E_1^{-1},\ldots, E_k^{-1} = A$; quindi A è invertibile

Inverse e basi

Sia $A \in M_{n,n}$; allora A è invertibile **se e solo se**:

- Il rango di A è uguale al numero di righe/colonne; $rg(A) = n$
- Le colonne di A formano una base di K^n
- Le righe di A formano una base di K^n
- $\det(A) \neq 0$

In questo caso, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Vediamo qualche 📚 dimostrazione:

- A è invertibile $\Rightarrow \det(A) \neq 0$
    - Supponiamo A invertibile; $1 = \det(I_n) = \det(A\,A^{-1}) = \det(A) * \det(A^{-1})$
    - In particolare, $\det(A) \neq 0$, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = n$
    - Supponimo $\det(A) \neq 0$

- ○ *Algoritmo di Gauss*: esistono delle matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ tali che $E_k, \dots, E_1 A = B$ a scala per righe
  - ○ $\det(B) = \det(E_k)\dots\det(E_1)\det(A)$
  - ○ $\det B \neq 0 \Rightarrow \text{rg } B = n \Rightarrow \text{rg}(A) = n$
-

Algoritmo di Gauss

L'inversa di una matrice può essere calcolato con l'algoritmo di Gauss.

Innanzitutto, bisogna scrivere la **matrice aumentata** $[A|I]$, dove I è la matrice identità della stessa dimensione.
Poi, si usano operazioni elementari sulle righe per **trasformare la parte sinistra della matrice aumentata in una matrice identità**. Possiamo seguire poi questa procedura:
- **Pivota la matrice**: trova il primo elemento non nullo della prima colonna, che si chiama *pivot*. Se necessario, scambia le righe per portare il pivot in posizione a_{11}
- **Riduci** il pivot a 1, dividendo l'intera riga per il valore del pivot
- Per ogni altra riga i, **sottrai un multiplo della riga pivot** per annullare il valore nella colonna del pivot
- Passa alla colonna successiva, e ripeti il processo, finché l'intera parte sinistra non diventa la matrice identità

La parte destra della matrice aumentata diverrà quindi l'inversa. Di seguito, un 📝 esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{2}{3}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Formula di Cramer

Sia $A \in M_{n,n}$ invertibile, sia $B \in K^n$. Allora **l'unica soluzione del sistema $Ax = B$** è $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, con

$x_i = \dfrac{\det(A^{(i)})}{\det(A)}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ dove $A^i = (A^1 | \dots | A^{i-1} | B | A^i | \dots | A^n) \in M_{n,n}$.

A^i è la matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di A con il vettore dei termini noti b, e vale solo se det(A) ≠ 0.

Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:
Sappiamo che c'è un'unica soluzione $x = A^{-1}B$.

$$B = Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A^j = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n$$

$$\begin{aligned} det A^{(i)} &= \det\left(A^1, \dots, A^{i-1}, x_1 A^1 + \dots + x_n A^n, A^{i+1}, \dots, A^n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det\left(A^1, \dots, A^{i-1}, A^j, A^{i+1}, \dots, A^n\right) = x_i \det(A^1, \dots, A^n) \to \det\left(A^{(i)}\right) \\ &= x_i \det(A) \end{aligned}$$

Vediamo il seguente 📝 esempio: risolvere 2x+y+z=1, -x+z=2, x+2y+2z=0.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \det(A) = 0 + (-1) * 2 * 1 + 1 * 1 * 1 - 2 * 2 * 1 - (-1) * 1 * 2$$

$$= -2 + 1 - 4 + 2 = -3 \neq 0$$

$$x = \frac{\det(A^{(1)})}{\det(A)} = -\frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(0 + 4 + 0 - 0 - 4 - 2) = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\det(A^{(2)})}{\det(A)} = -\frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\big(8 + 0 + 1 - 2 - (-2)\big) = -\frac{9}{3} = -3$$

$$z = \frac{\det(A^{(3)})}{\det(A)} = -\frac{1}{3}\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(0 - 2 + 2 - 0 - 0 - 8) = \frac{8}{3}$$

Sia $A \in M_{n,n}$ invertibile. Allora $A^{-1} = (c_{ij})$ dove, per ogni i, $j \in \{1, \dots, n\}$, $c_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$.

L'inversa di A = $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}$, se invertibile, cioè $ad\text{-}bc \neq 0$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \; dove \; c_{11} = (-1)^{1+1} \frac{\det(A_{11})}{\det(A)} = \frac{d}{ad - bc}$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \frac{\det(A_{21})}{\det(A)} = \frac{-c}{ad - bc}; \quad c_{21} = (-1)^{2+1} \frac{\det(A_{12})}{\det(A)} = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \frac{\det(A_{22})}{\det(A)} = \frac{a}{ad - bc}; \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Vediamo un 📝 esempio:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}, \det(A) = 0 + 0 + 0 - (-1) - 0 - (-2) = 3 \neq 0$$

Determinante

È un valore scalare associato a una matrice quadrata, e si calcola tramite formule specifiche in base alla dimensione della matrice.

det: $M_{n,n} \rightarrow K$, $A \mapsto \det(A)$. $M_{n,n}(K) = K^n \times \dots \times K^n$, $A \mapsto (A^1, \dots, A^n)$ colonne di A.
det $K^n \times \dots \times K^n = (K^n)^n \rightarrow K$, $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$.

Gode delle seguenti proprietà:

1. $\det(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + w, v_{i+1}, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)$
2. $\det(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_n)$
3. $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$ se $v_i = v_j$ per un $i \neq j$
4. $\det(e_1,, \dots, e_n) = 1$
5. $\det(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_n) = 0$
6. $\det(v_1, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$, $i \neq j$

$\forall\, v_1, \dots, v_n, w \in K^n, \lambda \in K$.

Si può calcolare nei seguenti modi:

Dimensione	Determinante
1 x 1	det(a) = a
2 x 2	$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
3 x 3	$det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

Esiste un'unica funzione det: $K^n \times \dots \times K^n \rightarrow K$ che verifica questi quattro punti.
Vediamo le seguenti osservazioni:

2. se $v_i = 0$ allora $\det(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_{i-1}, o_{ik} * o_{ik}^n, v_{i+1}, \dots, v_n) = o_k * \det(v_1, \dots, v_{i-1}, o_{ik}^n, v_{i+1}, \dots, v_n) = 0$
3. $0 = \det(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n),\ i \neq j$
2. $0 = \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots., v_n) + \det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n)$

   Scambiare 2 vettori cambia il segno del determinante.
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

   $\det(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) = \lambda \det(v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n) = \dots = \lambda^n \det(v_1, \dots, v_n)$

   $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Il determinante di una matrice 1x1 è **l'unico elemento presente**, mentre il determinante di una matrice 2x2 è **ad-bc**.

Vediamo la **dimostrazione di come si calcola il determinante di una matrice 1 x 1 e 2 x 2.**
Vediamo il seguente 📝 esempio, con $n = 1$: ogni $v \in K'$ è della forma $ae_1 = (a)$

$$\det(v) = \det(ae_1) = (2)\ a \det(e_1) = (4)\ a, \det: K \to K, a \longmapsto a$$

Con $n = 2$: $v_1, v_2 \in K^2$, $v_1 = (a,b) = ae_1 + be_2$, $v_2 = (c,d) = ce_1 + de_2$
$\det(v_1, v_2) = \det(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)$

1. $\det(ae_1, ce_1) + \det(ae_1, de_2) + \det(be_2, ce_1) + \det(be_2, de_2)$
2. $ae * \det(e_1, e_1) + ad * \det(e_1, e_2) + bc * \det(e_2, e_1) + bd * \det(e_2, e_2)$
3. $ad * \det(e_1, e_2) + bc * \det(e_2, e_1)$
4. ad-bc
5. $ad * \det(e_1, e_2) - bc * \det(e_1, e_2) = (ad - bc) \det(e_1, e_2)$

Formula di Laplace

Sia $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n,n}$. Siano $i,j \in \{1, \dots, n\}$, con $A_{ij} \in M_{n-1,n-1}$ ottenuta da A togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna.

Per ogni j $\in \{1, \dots, n\}$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A^{ij} \det(A_{ij})$.
Per ogni i $\in \{1, \dots, n\}$, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A^{ij} \det(A_{ij})$

Il teorema fornisce una definizione ricorsiva del determinante. Definiamo $\det(A) = \det({}^tA)$.

Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

$$\det({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} ({}^tA)^{i1} \det({}^tA)_{i1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}$$

Con $n = 3$ invece, il calcolo del **determinante** è a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg).

Guardiamo un 📝 esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante lungo la **prima riga**, i = 1, e poi calcoliamo i **minori**:

$$\det(A) = (+1) * 1 * det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - 1 * 2 * det \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + 1 * 3 * det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 22$$

$$det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 24, det \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = -5, det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -4$$

Teorema di Binet

Siano $A, B \in M_{n,n}$. Allora det(AB) = det(A)*det(B). Abbiamo quindi det(AB) = det(A)det(B) = det(B)det(A) = det(BA) anche se $AB \neq BA$.

Quindi, det(AB) = det(A)det(B) per matrici **quadrate dello stesso ordine**; è utile per dimostrare proprietà legate all'invertibilità.

Abbiamo le seguenti osservazioni:

- $[R_i \Leftrightarrow R_j, i \neq j]$, $S_{ij} \in M_{m,n}$.
  - $\det(S_{ij}) = \det(e_1, \ldots, e_j, \ldots, e_i, \ldots, e_n) = -\det(e_1, \ldots, e_n) = -1 = \det(S_{ij})$
- $[R_i \Leftarrow \lambda R_i, \lambda \neq 0]$, $M_i(\lambda) \in M_{n,n}$
  - $\det M_i(\lambda) = \det(e_1, \ldots, \lambda e_i, \ldots, e_n) = \lambda \det(e_1, \ldots, e_n) = \lambda \det(e_1, \ldots, e_n) = \lambda$; $\det M_i(\lambda) = \lambda$
- $[R_i \Leftarrow R_i + \lambda R_j, i \neq j]$
  - $\text{Det } E_{ij}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ . & . & 0 & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix} = \det E_{ij}(\lambda) = 1$

Quindi $R_i \Leftrightarrow R_j$, $i \neq j$, cambia il segno del determinante:

- $R_i \Leftarrow \lambda R_i$ $(\lambda \neq 0)$ moltiplica il determinante per λ
- $R_i \Leftarrow R_i + \lambda R_j$ $(i \neq j)$ non cambia il determinante

Se $B \in M_{n,n}$ è a scala per righe, allora B è triangolare superiore, e il determinante è il *prodotto dei coefficienti diagonali*. Si può usare l'algoritmo di Gauss per calcolare il determinante.

Vediamo il seguente 📝 esempio:

$$det\begin{pmatrix}2&0&1\\4&0&1\\0&4&3\end{pmatrix} = R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 det\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&-1\\0&4&3\end{pmatrix} = R_2 \leftrightarrow R_3 - \det\begin{pmatrix}2&0&1\\0&4&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$$
$$= -(2*4*(-1)) = 8$$

Determinante e rango

Sia A ∈ $M_{m,n}$, una **sottomatrice** di A è una matrice ottenuta da A togliendo delle righe e colonne; anche toglierne nessuna va bene lo stesso.

Sia B una sottomatrice di A, allora rg(B) ≤ rg(A). Abbiamo la seguente 📚dimostrazione:

$$A \xrightarrow{rimuovere\ solo\ colonne} C \xrightarrow{rimuovere\ solo\ righe} B$$

Il rango è la dimensione dello span delle colonne.

{colonne di C} ⊂ {colonne di A} → Span(colonne di C) ⊂ Span(colonne di A) → dim(C) ≤ dim(A) → rg(C) ≤ rg(A)

Rango = dim Span(righe) → ... → rg(B) ≤ rg(C)

Si può calcolare il rango considerando delle sottomatrici opportune.

Minore

Un minore di ordine n di A è il determinante di una sottomatrice quadrata r x r di A. Un minore di A è un minore di ordine r, per un r ∈ N.

Un minore è il **determinante** di una sottomatrice ottenuta **eliminando una riga e una colonna** da una matrice.

Sia A ∈ $M_{m,n}$, allora rg(A) = max{r | A ha un minore di ordine r non nullo} = max {ordini dei minori non nulli}.
Ovvero rg(A) = max{r | A ha un minore di ordine r non nullo}.
Sia M ∈ $M_{r,r}$ una sottomatrice quadrata di A. Abbiamo quindi rg(M) ≤ rg(A). Se det M ≠ 0 → r = rg(M) → r ≤ rg(A) → rg(A) ≥ S.

Sia t = rg(A); esistono t colonne linearmente indipendenti. Togliendo le altre colonne di A otteniamo una sottomatrice B ∈ $M_{m,t}$ di A, con rg(B) = t. Esistono t righe in B linearmente indipendenti.

Togliendo le altre righe di B, otteniamo una sottomatrice C ∈ $M_{t,t}$ di B, e anche di A, tale che rg(C) = t. C è invertibile, quindi det C ≠ 0. Det C è un minore non nullo di ordine T, con S ≥ t = rg(A).

Vediamo un 📝 esempio: A = $\begin{pmatrix}1&2&1&0&1\\0&-1&3&0&2\\0&1&2&3&0\end{pmatrix} \in M_{3,5}(R); rg(A)?\ 3\ righe \rightarrow rg(A) \leq 3$

$$B = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\\0&3&0\end{pmatrix}\ sottomatrice\ di\ A. \det(B) = (C_2 \leftrightarrow C_3) - \det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} = -6$$
$$\det(B) = -6 \neq 0 \rightarrow rg(A) \geq 3 \rightarrow rg(A) = 3$$

Matrici speciali

$A=(a_{ij}) \in M_{n,n}$ si dice:

- **diagonale** se $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$
- **triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$, $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$
- **triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$, $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$

Se $A \in M_{n,n}$ è triangolare superiore, o inferiore, allora il suo determinante è il prodotto dei coefficienti diagonali, ovvero

$$se\ A = (a_{ij}), \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} * a_{22} * \dots * a_{nn}$$

Sia $B \in M_{n,n}$ a scala per righe, se $\det B \neq 0$ allora $\mathrm{rg}\, B = n$. Abbiamo la seguente dimostrazione:
$B = (b_{ij})$ triangolare superiore o inferiore, $b_{11} \dots b_{n,n} = \det B$. Se $\det B \neq 0$, allora $b_{ii} \neq 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Ogni riga non è nulla, e $\mathrm{rg}(B) = n$, ovvero il massimo.

Matrice ortogonale

Una matrice quadrata $P \in M_{n,n}$ si chiama ortogonale se $({}^tP)*P = I_n$. Abbiamo le seguenti proprietà:

- P è invertibile e $P^{-1} = {}^tP$
- $P * ({}^tP) = I_n$
- ${}^tP = P^{-1}$ è ortogonale
- Le colonne di P formano una base ortonormale
- Le righe di P formano una base ortonormale

Abbiamo questa dimostrazione: sia l_p: $R^n \rightarrow R^n$, $X \mapsto Px$. L_p ortogonale $\Leftrightarrow$ P ortogonale, cioè $({}^tP)P = In$. L_p ortogonale $\Leftrightarrow$ $l_p(e_1), \dots, l_p(e_n)$ una base ortonormale.

Abbiamo I_n ortogonale; Siano P, Q $\in M_{n,n}$ ortogonali. Allora:

$${}^t(PQ)PQ = ({}^tQ)({}^tP)PQ = ({}^tQ)InQ = ({}^tQ)Q = In$$

Ovvero il prodotto PQ $\in M_{n,n}$ è ortogonale.
Quindi, ({matrici n x n ortogonali}, In, prodotto matriciale) è un gruppo chiamato **gruppo ortogonale O_n (R)**.

Sia P $\in O_n$ ®, allora det P $\in$ {-1, 1}. Abbiamo questa dimostrazione con il **teorema di Binet**:

$$1 = \det(In) = \det\left(({}^tP)P\right) = \det({}^tP) * \det(P) = det(P)^2 \rightarrow \det(P) \in \{-1,1\}$$

Guardiamo un esempio:

- n=1 $\rightarrow$ P(a) $\in O_1$(R) $\Leftrightarrow$ a $\in$ {-1,1}

- n=2 → $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sono ortogonali. Con detP = -1 acmbia l'orientazione

Applicazioni lineari

Siano u, v spazi vettoriali su K. Una mappa f: u → v è un'**applicazione lineare**, o un **omormorfismo**, scritto se f(u + λu') = f(u) + λ f(u') per ogni u, u' ∈ U, λ ∈ K.
Sono funzioni tra spazi vettoriali che **preservano somma e moltiplicazione scalare**; ogni applicazione lineare può essere rappresentata da una matrice rispetto a basi fissate.

Valgono le seguenti proposizioni con le seguenti 📚 dimostrazioni:

1. f(u + u') = f(u) + f(u') ∀ u, u' ∈ U
   a. λ = 1 nella definizione
2. f(0) = 0
   a. f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)
   b. 0 = f(0) – f(0) = (f(0) + f(0)) – f(0) = f(0)
3. f(λu) = λ f(u)
   a. f(λu) = f(0 + λu) = f(0) + λ f(u) = 0 + λ f(u) = λ f(u)

Vediamo i seguenti 📝 esempi:

- U → V è sempre lineare, è l'*applicazione nulla*
- f: R → R, x |→ 2x è lineare
- f: R → R, x |→x+1 non è lineare, perché f(0) = 1
- f: R → R, x |→x^2 non è lineare: f(1+1) ≠ f(1) + f(1)
- f: R^2 → R, (x,y) |→ 2xy non è lineare: f((0,1) + (1,0)) = 2 ≠ f((0,1)) + f((1,0)) = 0

Sia A ∈ $M_{m,n}$ (K), allora l'applicazione l_A : K^n → K^m, x |→ Ax è lineare.
Prendiamo una matrice A con m righe ed n colonne, i cui elementi appartengono a un campo K.
Consideriamo una funzione l_a che prende un vettore x con n componenti e restituisce il prodotto Ax, che è un vettore con m componenti.
Se sommi due vettori e poi applichi l_a, ottieni lo stesso risultato che otterresti applicando l_a separatamente ai due vettori, e poi sommando i risultati.
Se moltiplichi un vettore per un numero, e poi applichi l_a, è lo stesso che moltiplicare il risultato di l_a per quello stesso numero.

Sia V uno spazio vettoriale, e v_1, ..., v_n ∈ V. Allora l'applicazione K^n → V $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ è lineare.
Definiamo una funzione che prende n numeri e restituisce una combinazione lineare dei vettori. Questa funzione è lineare, ovvero:

- *se sommi due insiemi di coefficienti, il risultato della funzione è la somma delle due combinazioni lineari*
- *se moltiplichi tutti i coefficienti per un numero, il risultato è la combinazione lineare moltiplicata per quel numero*

Siano U, V spazi vettoriali su K. Sia Hom(u,v) l'insieme delle applicazioni lineari U → V.

$$Hom(U,V) = \{f: U \to V \mid f \ lineare\}$$

è uno spazio vettoriale su K.

$$\left.\begin{array}{l} f: U \to V \ lineare \\ g: U \to V \ lineare \end{array}\right\} f+g: U \to V, u \ \mapsto f(u)+g(u), (f+g)(u) = f(u)+g(u)$$

Se λ e K, $\lambda f: U \to V$, $u \mapsto \lambda f(u)$ cioè $(\lambda f)(u) = \lambda * f(u)$.
Lo zero di $Hom(u,v)$ è l'applicazione nulla.
Hom ha un insieme di funzioni lineari che trasformano vettori da U a V. Le funzioni da uno spazio vettoriale a un altro possono essere trattate come se fossero vettori: le puoi sommare, moltiplicare per numeri, hanno uno zero. Tutte queste funzioni formano uno spazio vettoriale, chiamato Hom(U, V).

Siano $f: U \to V$ e $g: V \to W$ applicazioni lineari, allora $g \circ f : U \to W$ è lineare. *Composizione di funzioni.*
Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

$$(g \circ f)(u + \lambda u') = g\big(f(u+\lambda u')\big) = g\big(f(u)+\lambda f(u')\big) = g\big(f(u)\big) + \lambda g\big(f(u')\big)$$
$$= (g \circ f)(u) + \lambda (g \circ f)(u')$$

Sia $f: U \to V$ lineare, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, $n_1, \ldots, n_n \in U$. Allora $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(n_i)$

Siano U, V spazi vettoriali su K, e $(u_1, \ldots, u_n)$ base di U. Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$, che non può essere una base.
Allora esiste un'unica applicazione lineare $f: U \to V$ tale che $f(u_i) = v_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Sia $A \in M_{m,n}$ (K), allora l'insieme delle soluzioni $x \in K^n$ del sistema **omogeneo** $Ax=0$ è un sottospazio vettoriale di K^n.
Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione: $\{x | Ax = 0\} = \ker(l_A: K^n \to K^m), x \ \mapsto Ax$.
Vediamo i seguenti 📝 esempi:

$$f: R^2 \to R^2, \binom{x}{y} \mapsto \binom{x+y}{x}, \binom{x}{y} \in \ker(f) \Leftrightarrow f\left(\binom{x}{y}\right) = \binom{0}{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0, \ker(f) = 0$$

Unicità

Siano $f, g: U \to V$ applicazioni lineari tali che $f(u_i) = v_i = g(u_i)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Sia $u \in U$.
Verifichiamo che $f(u) = g(u)$.
$(u_1, \ldots, u_n)$ base di $U \to \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tali che $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Allora

$$f(u) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(u_i) = g(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = g(n) \to f = g$$

Mostrare che due applicazioni lineari sono uguali se danno lo stesso risultato su tutti i vettori di una base dello spazio U. Se due applicazioni lienari coincidono sui vettori di una base, allora coincidono su tutto lo spazio. Basta sapere cosa fanno su una base per sapere tutto di loro.

Esistenza

Sia $u \in U$. Cos'è $f(n) \in V$?

Siano $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ le coordinate di u rispetto alla base $(u_1, \dots, u_n)$. Poniamo $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V, f: U \to V, u \mapsto f(u)$ *è una funzione.*

Se $u = u_1$ per un $i \in \{1, \dots, n\}$. Allora $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 1, \dots, 0) \rightarrow f(u_i) = v_i$.
f lineare? Sia $u, u' \in U, \lambda \in K$. Siano $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ le coordinate di U rispetto alla base $(u_1, \dots, u_n)$. Siano $(\lambda_1', \dots, \lambda_n') \in K^n$ la stessa cosa, ma di u'.
Quali sono le coordinate del vettore $u + \lambda u'$?

$$u + \lambda u' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' u_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda \lambda_i') u_i$$

Le coordinate di $u + \lambda u'$ sono $(\lambda, +\lambda\lambda', \dots, \lambda_n + \lambda\lambda'_n)$

$$f(u + \lambda u') = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda \lambda_i') v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' v_i = f(u) + \lambda f(u'). f \text{ è } lineare$$

Nucleo

Sia $f: U \rightarrow V$ un'applicazione, $im(f) = f(U) = \{f(u) \mid u \in U\} \subset V$, il **nucleo** di f è l'insieme $ker(f) = \{u \in U \mid f(u) = 0\} = f^{-1}\{0\} \subset U$.
È l'insieme dei **vettori** che vengono mandati in 0.

$im(f) \subset V$ e $ker(f) \subset U$ sono sottospazi vettoriali.

Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:
Im(f) non è vuoto, perché $0 = f(0) \in im(f)$.
Siano $v, v' \in im(f)$: $\exists u, u' \in U$ tali che $v = f(u), v' = f(u') \rightarrow f(u+u') = f(u) + f(u') = v + v' \rightarrow v + v' \in im(f)$.
Sia $\lambda \in K$: $\lambda v \in im(f) = \lambda v = \lambda * f(u) = f(\lambda u) \in im(f)$. Quindi $im(f)$ è un sottospazio di V.

$ker(f) : f(0) = 0 \rightarrow 0 \in ker(f)$, $ker(f)$ non è vuoto.
Siano $u, u' \in ker(f)$. $f(u + u') = f(u) + f(u') = 0 + 0 = 0$, $u + u' \in ker(f)$.
Sia $u \in ker(f)$, $\lambda \in K$, $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda * 0 = 0$, $\lambda u \in ker(f)$.

Suriettività e iniettività

Sia $f: U \rightarrow V$ un'applicazione lineare. Allora:

1. $im(f) = V \Leftrightarrow$ f è suriettiva
   a. Ovvero riempie tutto V. Per ogni vettore v, esiste almeno un vettore u tale che f(u) = v

2. $\ker(f) = 0 \Leftrightarrow$ f è iniettiva.
    a. Il nucleo è l'insieme di tutti i vettori u tali che f(u) = 0. Se l'unico vettore che va in 0 è proprio lo 0 di U, allora $f(u_1) = f(u_2) \rightarrow u_1 = u_2$, cioè f non è iniettiva.

Vediamo le seguenti dimostrazioni per il punto 2.
- $\Leftarrow$: supponiamo f iniettiva. Sia $u \in \ker(f)$. Allora $f(u) = 0 = f(0)$. f iniettiva $\Rightarrow u = 0$. Quindi $\ker(f) = 0$
- $\Rightarrow$: supponiamo $\ker(f) = 0$. Siano $u, u' \in U$ tali che $f(u') = f(u)$. Verifichiamo che $u = u'$.
  $$f(u-u') = f(u) - f(u') = 0 \rightarrow u - u' \in \ker(f) = 0 \rightarrow u - u' = 0 \rightarrow u = u'$$
  f è quindi iniettiva.

Sia $v \in V$. Se esiste $u_0 \in U$ tale che $f(u_0) = v$ allora $f^{-1}\{v\} = \{u_0 + u \mid u \in \ker(f)\}$, cioè l'applicazione $\ker(f) \rightarrow f^{-1}\{v\}$, $u \mapsto u_0 + u$ è una **biezione**.
Se ho un'equazione e trovo una soluzione u_0, ci possono essere altre soluzioni? Si, ovvero tutte le altre che si ottengono aggiungendo a u_0 i vettori che vanno in zero, ovvero i vettori di ker(f).

Abbiamo le seguenti dimostrazioni:
- $\supset$: se $u \in \ker(f)$ allora $f(u_0 + u) = f(u_0) + f(u) = v \rightarrow u_0 + u \in f^{-1}\{v\}$
- $\subset$: sia $x \in f^{-1}\{v\}$. Allora $f(x) = v$, $f(x - u_0) = f(x) - f(u_0) = v - v = 0 \rightarrow x - u_0 \in \ker(f)$. Sia $u = x - u_0 \in \ker(f)$, allora $x = u + u_0$.
- $f^{-1}\{v\} = \emptyset$ è possibile se $v \neq 0$.

Sia $f: U \rightarrow V$ un'applicazione lineare, sia $b_1, \dots, b_n$ una base di U. Allora:
1. f iniettiva $\Leftrightarrow f(b_1), \dots, f(b_n)$ linearmente indipendente
    a. $\Rightarrow$: supponiamo f iniettiva. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) = 0 \rightarrow 0 = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in \ker(f)$.
        i. Ma $\ker(f) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0$
        ii. $b_1, \dots, b_n$ base $\rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Quindi **$f(b_1), \dots, f(b_n)$ è lin. Indip.**
    b. $\Leftarrow$: supponiamo che $f(b_1), \dots, f(b_n)$ sia linearmente indipendente
        i. Sia $v \in \ker(f)$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ le coordinate di v rispetto alla base $b_1, \dots, b_n$
        ii. $0 = f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i)$
        iii. $f(b_1), \dots, f(b_n)$ lin. Indip. $\rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0 \rightarrow \ker(f) = 0 \rightarrow f$ *è iniettiva*
2. $\mathrm{im}(f) = \{f(u) | u \in U\} = \{f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) | \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) | \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} = Span(f(b_1), \dots, f(b_n))$
    a. Quindi f è suriettiva $\Leftrightarrow \mathrm{im}(f) = V \Leftrightarrow Span(f(b_1), \dots, f(b_n)) = V \Leftrightarrow f(b_1), \dots, f(b_n)$ generatrice

Sia $f: U \rightarrow V$ applicazione lineare, con $\dim U < \infty$. Allora:
1. f iniettiva $\Rightarrow \dim U \leq \dim V$
2. f suriettiva $\Rightarrow \dim U \geq \dim V$
3. f biettiva $\Rightarrow \dim U = \dim V$

Sia $f: U \rightarrow V$ lineare con $\dim U = \dim V < \infty$. Allora f suriettiva $\Leftrightarrow$ f iniettiva $\Leftrightarrow$ f biettiva.

Abbiamo la seguente dimostrazione: se $\dim V = n$, una famiglia $v_1, \ldots, v_n$ è linearmente indipendente se e solo se è generatrice se e solo se è una base.

Isomorfismo

Un'applicazione lineare **biettiva** si chiama un **isomorfismo**.
Un isomorfismo porta ogni base su una base.
Per verificare che un'applicazione lineare è un isomorfismo, basta scegliere una base del dominio, e verificare che la sua immagine è una base del codominio.

Sia V uno spazio vettoriale, con $\dim V = n < \infty$. Allora *{basi di V}* $\Leftrightarrow$ *{isomorfismi* $K^n \to V$*)*, $(b_1, \ldots, b_n) \mapsto K^n \to V$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, $\left(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\right) \leftarrow\!\shortmid \ \varphi: K^n \to V \ isom$

Sia $f: U \to V$ un isomorfismo. Allora $f^{-1}: V \to U$ è lineare. Abbiamo la seguente dimostrazione:
Sia $v, v' \in V, \lambda \in K$. Sia $u = f^{-1}(v)$, $u' = f^{-1}(v')$, $f^{-1}(v+\lambda v') = f^{-1}(f(u) + \lambda f(u')) = f^{-1}(f(u+\lambda u')) = u + \lambda u' = f^{-1}(v) + \lambda f^{-1}(v')$.

L'**inversa** di un isomorfismo è un isomorfismo.

Siano $f: U \to V$, $g: V \to W$ isomorfismi. Allora $g \circ f : U \to W$ è un isomorfismo. Abbiamo la seguente dimostrazione:
Una composta di un'applicazione lineare è lineare, e una composta di biezioni è una biezione.

Inoltre:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}, quindi\ \{isomorfismi\ V \to V\}, id_v, \circ) \text{ è } un\ gruppo\ EL(v)$$

Rango

Sia $f: U \to V$ un'applicazione lineare. Il **rango** di f è $rg(f) = \dim im(f) \in N \cup \{\infty\}$. Sia $A \in M_{m,n}(K)$, e $l_A: K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$, allora $rg(l_A) = rg(A)$.
Formalmente, è la dimensione dell'immagine di quell'applicazione, cioè quanti vettori indipendenti può produrre.
Infatti:

$$rg(l_A) = \dim\left(im(l_A)\right) = \dim\{Ax \mid x \in K^n\} = \dim \{A\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_1, \ldots, x_n \in K\}$$

$$= \dim \{\sum_{i=1}^{n} x_i A^i | x_1, \ldots, x_n \in K\} = \dim Span(A^1, \ldots, A^n) = rg(A)$$

Teorema del rango

Sia $f: U \to V$ un'applicazione lineare, con $\dim U < \infty$. Allora $rg(f) < \infty$, e $rg(f) + \dim \ker(f) = \dim U$.

Abbiamo la seguente dimostrazione:
Sia $u_1, \ldots, u_s$ una base di $\ker(f) \subset U \to S = \dim \ker(f)$.

In base al *teorema della base incompleta*, si può completare in una base di u avendo quindi:

$$\exists u_{s+1}, \dots, u_n\} \in U \ tali\ che\ u_1, \dots, u_n\ base\ di\ U \rightarrow n = \dim\ U$$

$$\begin{aligned} im(f) &= \{f(u) | u \ \in U\} \\ &= \{f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} \\ &= \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) | \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} \\ &= \{\sum_{i=s+1}^{n} \lambda_i f(u_i) | \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n \in K\} \\ &= Span(f(u_{s+1}), \dots, f(u_n))\ generatrice\ di\ im(f) \end{aligned}$$

Questo è una base, ovvero è linearmente indipendente?

$$Siano\ \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n \in K\ tali\ che\ 0 = \sum_{i=s+1}^{n} \lambda_i u_i \in \ker(f)$$

Ma ker(f) è generato da $u_1, \dots, u_s$.

$$\sum_{i=s+1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{s} n_i u_i\ per\ n_1, \dots, n_s \in K \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{s} (-n_i) u_i + \sum_{i=s+1}^{n} \lambda_i n_i$$

$$u_1, \dots, u_n\ lin. indip. \rightarrow\ -n_1 = \dots = -n_s = \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_n = 0-$$

$$\rightarrow f(b_{s+1}), \dots, f(b_n) \text{è } lin. indip. \rightarrow \text{è } una\ base\ di\ im(f)$$

$$> \dim im(f) = rg(f) = n - s = \dim U - \dim \ker(f)$$

Vediamo due 📝 esempi:

- f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y - z \end{pmatrix}, \ker(f) = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \rightarrow \dim \ker(f) = 1 \rightarrow rg(f) = dim\ R^3 - \dim \ker(f) = 3 - 1 = 2 \rightarrow \dim im(f) = 2\ ma\ im(f) = R^2 \rightarrow im(f) = R^2 \rightarrow f \text{ è } suriettiva$
  - Stiamo cercando il **nucleo**, quindi i vettori (x,y,z) tali che $\begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - Risolviamo il sistema con: 2x-y = 0 → y = 2x ; x + y – z = 0 → z = 3x
  - $\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} = x * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
    - Visto che è generato da un solo vettore, allora è uno spazio vettoriale di dimensione 1
    - dim(ker(f)) = 1
  - Applichiamo il teorema con dim(R^3) = dim(ker f) + dim (im f)
    - 3 = 1 + dim(im f) → dim (im f) = 2
    - Il rango di f è 2, ovvero la dimensione dell'immagine di f
- g: $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y - t \\ -2x - 2y + 2t \end{pmatrix} \text{è } lineare$

- $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = (x+y-t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \to im(f) = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \to$
  $rg(f) = \dim im(f) = 1$
- Teorema del rango → $\dim \ker(f) = \dim R^4 - rg(f) = 4 - 1 = 3$

Conseguenze per i sistemi lineari

Sia $A \in M_{m,n}$ (K), $B \in K^m$, sia (S) il sistema lineare $Ax = B$ con $x \in K^n$, $l_A: K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$.
L'insieme delle soluzioni è $\sum_s = \{x \in K^n \mid Ax = B\} = l_A^{-1}\{B\}$ può essere vuoto.
Altrimenti, sia $x_0 \in \sum_S$. Allora $\ker(l_A) \to \sum_s$ è una biezione, $Y \mapsto X_0 + Y$).
L'inversa è $\sum_S \to \ker(l_A)$, $x \mapsto x - x_0$.

L'insieme delle soluzioni del sistema Ax = B è l'insieme di tutti i vettori x che vengono mandati in B dall'applicazione ^{l}A. Questo insieme può essere:

- **Vuoto** se il sistema non ha soluzioni
- Contenere una **sola soluzione**
  - Se x_0 è una soluzione del sistema, ogni soluzione è ottenuta aggiungendo a x_0 un vettore del nucleo (ker)
  - Se dim ker(^{l}A) = 0 c'è solo una soluzione, cioè x = x_0
- Contenere **infinitamente molte soluzioni**
  - Se dim ker(^{l}A) > 0 ci sono infinite soluzioni

Se $K = R$ allora il numero di soluzioni del sistema S può solo essere $0,1$, oppure ∞.
Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione: se c'è una soluzione, allora l'esistenza della biezione $\mathrm{len}(l_A) \dashv \sum_S$ implica che $|\ker(l_A)| = |\sum_S|$.

Sia $b_1, \ldots, b_s$ una base di $\ker(l_A)$. Allora $R^s \to \ker(l_A)$ è una biezione, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \mapsto \sum_{i=1}^{s} \lambda_i b_i \to$
$|\ker\,(l_A)| = |R^S| = \begin{cases} 0 \; se \; s = 0 \\ \infty \; se \; s > 0 \end{cases}$

Se $rg(A) < n$, allora il sistema $Ax=B$ **non ha un'unica soluzione**, ovvero può avere solo 0 soluzioni oppure ∞ soluzioni.
Abbiamo la seguente dimostrazione: $l_A : R^n \to R^m$, $A \mapsto Ax$. Supponiamo che il sistema abbia almeno una soluzione. Allora, il numero di soluzioni vale $|\ker\,(l_A)| = \begin{cases} 0 \; se \dim\ker(l_A) = 0 \\ \infty \; se \dim\ker(l_A) > 0 \end{cases}$.
$\dim \ker(f) = n - rg(l_A) = n - rg(A) > 0$ → il numero di soluzioni è infinito.

Supponiamo che per un certo $B \in K^m$ il sistema $Ax=B$ abbia un'unica soluzione. Allora $rg(A)=n$. E inoltre:

- Per $c \in K^m$, il sistema $Ax = c$ non può avere infinite soluzioni
- Se $m = n$, allora A è invertibile, e quindi per ogni $c \in K^m$ il sistema $Ax=c$ ha un'unica soluzione

Quindi:

- La dimensione del nucleo controlla il numero di soluzioni

- Più il rango di A si avvicina a n, meno libertà hai, meno soluzioni
- Se il rango è massimo (rg(A) = n), e il sistema è compatibile, c'è una sola soluzione
- Se il rango è minore di n, e il sistema è compatibile, allora ci sono infinite soluzioni
- Se il sistema è incompatibile, allora nessuna soluzione

Matrici

Sia $A \in M_{m,n}$ (K) → app. lin. $l_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$. Sia f: U → V un'applicazione lineare, con $\dim U < \infty$, $\dim V < \infty$.
Sia $B = (b_1, \dots, b_n)$ una base di U, e $C = (c_1, \dots, c_m)$ una base di V.

Per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ siano $(a_{ij}, \dots, a_{mj})$ le coordinate del vettore $f(b_j)$ rispetto alla base C con $f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * c_i,\ j\ fissato$

La matrice di f rispetto alle basi B e C è $M_c^b(f) = (a_{ij}) \in M_{m,n}$.

Per ogni vettore della base b_j di U, si calcola l'immagine tramite f, con $f(b_j) \in V$. Lo si riscrive rispetto alla base C di V, ovvero $f(b_j) = a_{1j}c_1 + a_{2j}c_2 + \dots + a_{mj}c_m$.
Questi coefficienti a_{ij} sono le coordinate del vettore $f(b_j)$ rispetto alla base C. Si mettono in colonna, e si ottiene la matrice associata a f:

Vediamo il seguente 📝 esempio:
Sia g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y + 2z \end{pmatrix}$, Sia $E = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, $D = (d_1, d_2)$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Cos'è quindi $M_D^C(g)$?

$$g(e_1) = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = d_1, g(e_2) = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -d_1 + d_2, g(e_3) = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2d_2, M_D^C(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

$A \in M_{m,n}$ (K) → applicazione lineare $l_A : K^n \to K^m$. Sia $A_s = (e_1, \dots, e_s)$ la base canonica di K^S $\forall s$. Abbiamo quindi $M_{A_m}^{A_n}(l_A) = M \in M_{m,n}$. La j-esima colonna di M è formata dalle coordinate di l_A (e_j) rispetto alla base A_m con $l_A(e_j) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = A^j\ la\ j - esima\ colonna\ di\ A, M_{A_m}^{A_n}(l_A) = A$

Sia $B = (b_1, \dots, b_n)$ una base di U, $C = (c_1, \dots, c_n)$ base di V. L'applicazione lineare f: U → V è determinata dalla matrice $M^B{}_C$ (f) = A = (a_{ij}). Sia $u \in U$, come calcolo f(u)?

Siano $u_1, \dots, u_n$ le coordinate di U rispetto alla base B, e siano $v_1, \dots, v_m$ le coordinate di f(u) rispetto alla base C. Allora:

$$f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{n} u_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j\, f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} u_j) c_i$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \text{ è } la\ i - esima\ coordinata\ del\ prodotto, A = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} dove\ A = (a_{ij})$$

$$M_C^B(f) * \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_m \end{pmatrix}, matrice\ di\ f, coordinate\ di\ u, coordinate\ di\ f(u)$$

Sia B una base di U, B = $(b_1, \dots, b_n)$, C una base di V, C = $(c_1, \dots, c_m)$, n = dim U, m = dim V

$$\{App.\ lineari\ U \to V\} \leftrightarrow M_{m,n}(K), f \ \longmapsto M_C^B(f), f_A \longleftarrow A$$

Dove f_A: U → V è l'unica applicazione lineare tale che $f_A(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i\ dove\ A = (a_{ij}), M_C^B(f_A) = (a_{ij}) = A$

Infatti, è un isomorfismo Hom(U, V) → $M_{m,n}$ (K). Vediamo il seguente 📝 esempio:

$$g: R^3 \to R^2; E, D\ basi\ di\ R^3, R^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y + 2z \end{pmatrix}, M_D^E(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + 2z \end{pmatrix} = g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})$$

Siano f: U → V, g: V → W applicazioni lineari, e siano B, C, D basi finite di U, V, W. Allora:

$$M_D^B(g \circ f) = M_D^C(g) M_C^B(f)$$

Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione: sia B = $(b_1, \dots, b_n)$, C = $(c_1, \dots, c_m)$, D = $(d_1, \dots, d_l)$. Sia M^B_C (f) = F ∈ $M_{m,n}$ (K), e M^C_D (g) = G ∈ $M_{l,m}$ (K). Sia j ∈ {1, …, n}. Allora abbiamo:

$$(g \circ f)(b_j) = g\left(f(b_j)\right) = g\left(\sum_{i=1}^{m} F^{ij} c_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} F^{ij} g(c_i) = \sum_{i=1}^{m} F^{ij} \sum_{k=1}^{l} G^{ki} d_k = \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} G^{ki} F^{ij}\right) d_k = \sum_{k=1}^{l} (GF)^{kj} d_k$$

Se H = M^B_D (g ∘ f) ∈ $M_{l,n}$:

$$(g \circ f)(b_j) = \sum_{k=1}^{l} H^{kj} d_k \to \sum_{k=1}^{l} (GF)^{kj} d_k = \sum_{k=1}^{l} H^{kj} d_k$$

$d_1, \dots, d_l$ base → $(GF)^{kj} = H^{kj}$ per ogni k, j, cioè GF=H, ragione per la definizione del prodotto matriciale.

Cambiamento di basi

Sia V uno spazio vettoriale, dim V = n < ∞. Siano B = $(b_1, \dots, b_n)$, B' = $(b_1, \dots, b_n)$ basi di V. Allora id_v : V → V, v |→ v è un'applicazione lineare.

$M^B_{B'}$ (id_v) ∈ $M_{n,n}$ è la **matrice passaggio** da B a B'. La j-esima colonna è la coordinata di b_j rispetto alla base B'.

Sia $v \in V$. Siano $(v_1, \ldots, v_n)$ le coordinate di v rispetto a B, $(v_1', \ldots, v_m')$ le coordinate di v' rispetto a B'. Allora $\begin{pmatrix} v_1' \\ \ldots \\ v_n' \end{pmatrix} =$
$M_{B'}^{B}(id_V)\begin{pmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}$, *con nuove coordinate, matrice di passaggio, vecchie coordinate*

Le colonne della matrice di passaggio sono le coordinate dei vettori della vecchia base B rispetto alla nuova base B'.

La matrice di passaggio $M^{B}_{B'}(id_V)$ è invertibile, e la sua inversa è $M^{B'}_{B}(id_V)$. Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

$$M_{B'}^{B}(id_V) * M_{B}^{B'}(id_V) = M_{B'}^{B'}(id_V \circ id_V) = M_{B'}^{B'}(id_V) = I_n$$

Se $B' = (b_1', \ldots, b_n')$ le coordinate di b_j' rispetto a B sono $(0, \ldots, 1, \ldots, 0))$

$$M_{B}^{B'}(id_V) M_{B'}^{B}(id_V) = M_{B}^{B}(id_V \circ id_V) = I_n$$

Cambiamento di base

$f: U \rightarrow V$ app. lineare, $\dim U < \infty$, $\dim V < \infty$. Siano B, B' basi di U, e siano C, C' basi di V. Allora

$$M_{C'}^{B'}(f) = M_{C'}^{C}(id_V) M_{C}^{B}(f) M_{B}^{B'}(id_U)$$

Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

$$u\ (B') \xrightarrow{id_U} u\ (B) \xrightarrow{f} V(C) \xrightarrow{id_V} V\ (C') \text{ è } f$$

$$M_{C'}^{B'}(f) = M_{C'}^{C}(id_V) * M_{C}^{B'}(f) = M_{C'}^{C}(id_V) * M_{C}^{B}(f) = M_{C'}^{C}(id_V) * M_{C}^{B}(f) * M_{B}^{B'}(id_U)$$

Endomorfismo

Un endomorfismo di U è un'applicazione lineare $f: U \rightarrow U$.
B base di U → $A = M^{B}_{B}(f) \in M_{n,n}(K)$, n = dim U. B' base di U. Sia $P = M^{B'}_{B}(id_U)$. Allora:

$$A' = M_{B'}^{B'}(f) = M_{B'}^{B}(id_U) M_{B}^{B}(f) M_{B}^{B'}(id_U) \text{ per il teorema del cambiamento di base}$$

$$A' = P^{-1} A\, P, \text{dove le colonne di } P \text{ sono le coordinate dei vettori di } B' \text{ rispetto a } B$$

È un'applicazione **da uno spazio vettoriale in sé stesso che rispetta le operazioni algebriche**, somma e moltiplicazione scalare.
Un endomorfismo potrebbe essere una trasformazione $f: V \rightarrow V$ che prende un vettore di V, lo trasforma in un altro vettore dello stesso spazio.

Abbiamo il seguente 📝 esempio, con $f: R^3 \rightarrow R^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + y - z \\ 2y + z \\ x + z \end{pmatrix}, E = (e_1, e_2, e_3) \text{ base canonica di } R^3$$

Come primo passo, applichiamo f ai vettori della base, ottenendo così la matrice dell'endomorfismo.
Ogni colonna della matrice rappresenta l'immagine di un vettore della base.
Es. $f(e_1) = f(1,0,0) = (-1+0-0, 2*0+0, 1+0) = (-1,0,1)$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, con\ A = M_E^E(f) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\0 & 2 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Sia\ b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow B = (b_1, b_2, b_3)\ base$$

Vogliamo scrivere i vettori della nuova base B in termini della base canonica E. Ogni colonna di M è uno dei b_i scritto come colonna nella base canonica.

$$Calcolare\ B = M_E^B(id_{R^3}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}. Troviamo\ P^{-1}:$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_3; R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$B = M_B^B(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\0 & 2 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\2 & 3 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 1 & 1\\-1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$
$$= M_B^B(f)\ con\ f(b_1), f(b_2), f(b_3)$$

Matrici simili

Due matrici $A, A' \in M_{n,n}(K)$ si chiamano **simili** se esiste $P \in M_{n,n}(K)$ invertibile tale che $\mathbf{A^{-1} = P^{-1}AP}$.

Due matrici simili hanno **lo stesso determinante**, e abbiamo questa 📚 dimostrazione:
$\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(P^{-1}) \det(P) \det(A) = \det(A) * (\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1})$

Determinante

Se f: U → U endomorfismo; B, B' basi di U, allora $\det M_B^B(f) = \det M_{B'}^{B'}$ è il **determinante** di f, e si indica con $\det(f) \in K$.

Siano f, g: U → U endomorfismi, dim U < ∞. Allora det(f • g) = det(f) * det(g), con la seguente 📚 dimostrazione:
Sia B una base di U, $A = M_B^B(f), B = M_B^B(g)$

$$M_B^B(f \bullet g) = M_B^B(f) * M_B^B(g) = AB; \det(f \circ g) = \det\left(M_B^B(f \circ g)\right) = \det(AB)$$
$$= \det(A) * \det(B) = \det(f) * \det(g)$$

Dato f: U → U un isomorfismo ⇔ det(f) ≠ 0, con la seguente 📚 dimostrazione:

- ⇒: 1 = det(id_U) = det(f • f^{-1}) = det(f) * det(f^{-1}) → det(f) ≠ 0
- ⇐: Supponiamo det(f) ≠ 0. Sia B una base di U, con n = dim U. Sia A = M_B^B (f), con det(A) = det(f) ≠ 0, quindi A è invertibile
    - Sia g: U → U l'unico endomorfismo tale che $M_B^B(g) = A^{-1}$
    - $M_B^B(f \circ g) = M_B^B(f) * M_B^B(g) = A * A^{-1} = I_n = M_B^B(id_U) \implies f \circ g = id_U$
    - $M_B^B(g \circ f) = M_B^B(g) * M_B^B(f) = A^{-1} * A = I_n = M_B^B(id_U) \implies g \circ f = id_U$
    - g è $l'applicazione\ inversa\ di\ f, quindi\ f$ è $un\ isomorfismo$

Diagonalizzazione

Il problema da risolvere è: dato un endomorfismo f: V → V, con dimV < ∞, trovare una base B di V adattata a f, cioè tale che $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$ diagonale.
Allora, è facile calcolare f(v) per v ∈ V, ovvero *basta moltiplicare la i-esima coordinata di v per a_i*, ovvero diagonalizzare l'endomorfismo f.

Non è sempre possibile diagonalizzare un endomorfismo; dipende da com'è fatto.
Data una matrice quadrata A ∈ $M_{n,n}$, diagonalizzare A significa diagonalizzare l_A: K^n → K^n, x |→ Ax, cioè trovare una matrice P ∈ $M_{n,n}$ invertibile tale che **$P^{-1}AP = D$** diagonale.
Se è possibile, A si chiama **diagonalizzabile**, quindi una matrice lo è se e solo se è **simile** ad una matrice diagonale.

Autovalore e autovettore

Sia f: V → V un endomorfismo, ovvero una funzione da uno spazio vettoriale in se stesso.
Uno scalare a ∈ K si chiama **autovalore** di f se ∃v ∈ V **non nullo** tale che f(v) = av.
Un vettore v ∈ V si chiama **autovettore** di f se v ≠ 0 e ∃a ∈ K tale che f(v) = av.
Diciamo che l'autovalore a è associato all'autovettore v.

L'autovalore associato ad un autovettore è unico: infatti, se a, a' ∈ K sono tali che f(v) = av = a'v, con v ≠ 0 → (a – a') v = 0.
Se a ≠ a' allora 0 = $(a – a')^{-1}$ (a-a')v = v, ovvero una contraddizione.

Diagonalizzare f vuol dire **trovare una base di V formata di autovettori**. Vediamo il seguente 📝 esempio:
sia a ∈ K, f = a * id_V, cioè f(v) = av ∀ V. Allora, ogni vettore non nullo di V è un autovettore, e a è l'unico autovalore di f.

Supponi che f(x,y) = (2x, 2y). Se noi prendiamo v = (1,1), f(v) = (2,2) = 2(1,1) = 2v. quindi **v** è un **autovettore**, e **2** è il suo **autovalore**.

Gli elementi non nulli di ker(f) sono gli autovettori con autovalore associato a 0. In particolare:

$$0 \text{ autovalore} \Leftrightarrow \ker(f) \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ non è un isomorfismo}$$

Gli autovalori/autovettori di una matrice $A \in M_{n,n}(K)$ sono gli autovalori/autovettori di $l_A: K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$.

$$0 \text{ autovalore di } A \Leftrightarrow A \text{ non è invertibile} \Leftrightarrow rg(A) < n$$

Guardiamo il seguente 📝 esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, allora\ 2\ è\ autovalore\ perchè\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un autovalore è (1,0) per l'autovalore 2. Questo perché A*(0,1) = (2,3) non è un multiplo di (0,1), quindi (0,1) non è un autovettore.

Teorema

Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo, e siano $v_1, \ldots, v_k \in V$ autovettori corrispondenti ad autovalori due a due distinti $a_1, \ldots, a_k$, cioè per ogni $i \neq j$ si ha $a_i \neq a_j$. Allora, $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

k=1: autovettore non è nullo => v_1 è linearmente indipendente

k=2: $a_1 \neq a_2 \in K$, e $v_1, v_2 \in V$ non nulli tale che $f(v_1) = a_1 v_1$, $f(v_2) = a_2 v_2$.

Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ tali che $(E_1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$.

$$f(E_1) \rightarrow \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2 = 0$$

$$(E_2) - a_1(E_1): \lambda_2(a_2 - a_1)v_2 = 0;\ a_2 - a_1 \neq 0 \rightarrow \lambda_2 v_2 = 0;\ v_2 \neq 0 \rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$(E_1) \rightarrow \lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 = 0;\ v_1 \neq 0 \rightarrow \lambda_1 = 0;\ \text{quindi } v_1 \text{ e } v_2 \text{ sono linearmente indipendenti.}$$

$k \geq 2$ per induzione:

per $r < k$ supponiamo $v_1, \ldots, v_r$ linearmente indipendenti; dobbiamo dimostrare che $v_1, \ldots, v_{r+1}$ siano linearmente indipendenti.

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1} \in K$ tali che:

$$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i v_i = 0\ (E_1)$$

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i a_i v_i\ (E_2)$$

$$(E_2) - a_{r+1}(E_1): 0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (a_i - a_{r+1}) v_i + \lambda_{r+1}(a_{r+1} - a_{r+1}) v_{r+1},$$

$v_1, \ldots, v_r$ linearmente indipendenti $\rightarrow \lambda_1(a_1 - a_{r+1}) = \ldots = \lambda_r(a_r - a_{r+1}) = 0 \rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$

$$\lambda_{r+1} v_{r+1} = -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0;\ v_{r+1} \neq 0 \rightarrow \lambda_{r+1} = 0$$

Quindi, $v_1, \ldots, v_{r+1}$ sono linearmente indipendenti.

Sia n = dim V, f: V → V endomorfismo. Se f ha n autovalori distinti, allora f è diagonalizzabile, ma è una *condizione sufficiente ma non necessaria*.
Abbiamo questo 📝 esempio:
id_U : U → U è sempre diagonalizzabile, ma ha x |→ x un unico autovalore: 1 se dimU = n ≥ 1.
Se n ≥ 2, non ha n autovalori distinti se n ≥ 2: (1,0;0,1) ha un solo autovalore, 1, ed è diagonalizzabile.

Come si trovano gli autovalori?

Sia f: V → V endomorfismo, con dimV < ∞.
a ∈ K autovalore se e solo se:

- ∃v ∈V, v ≠ 0 tale che f(v) = av
- ∃v ≠ 0 tale che (f – a id_v) (v) = 0
- Ker(f – a id_v) ≠ 0
- Det(f – a id_v) = 0

Sia n = dim V. Allora det(f – x id_v) è un polinomio in x di grado n. Inoltre:

$$\det(f - x\, id_v) = (-1)^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + \det(f), \text{ con } a_1, \dots, a_{n-1} \in K.$$

a autovalore di f ⇔ $x_f(a) = 0$, cioè gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.
Abbiamo il seguente 📝 esempio:

$$Sia\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}\ (R), x_A(x) = \det(A - xI_2) = det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)(1-x) - 4$$
$$= (1-x)^2 - 4 = (1-x-2)(1-x+2) = (-x-1)(3-x) = (x+1)(x-3)$$

Le radici di x f(x) sono -**1** e **3**, quindi gli autovalori di f sono -1 e 3.

Spiegazione di ChatGPT

Si calcolano risolvendo l'equazione det(A - λI) = 0, un'**equazione caratteristica** dove:

- λ è uno scalare, ovvero l'autovalore che si sta cercando
- I è la matrice identità della stessa dimensione di A

I passaggi sono i seguenti:

1. Sottrai λ dalla diagonale principale della matrice A
2. Calcolo det(A - λI)
3. Risolvo come un polinomio in λ di grado n
4. Trovo le radici del polinomio, il che saranno gli autovettori della matrice.

Abbiamo il seguente 📝 esempio: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}; \det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda) - (2)(1) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Adesso risolviamo l'equazione mettendola uguale a 0, e troviamo $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$.

Polinomio caratteristico

$X_f(x)$ = det(f – x id_v) ∈ K[x] si chiama **polinomio caratteristico** di f.
Per A ∈ $M_{m,n}$ (K), $x_A(x)$ = det(A – x id_v) si chiama **polinomio caratteristico** di A.

Molteplicità

Sia f: V → V, con n = dim V < ∞. Sia $\alpha \in K$ un autovalore di f.
La **molteplicità algebrica** di α è il maggiore a $\in$N tale che $(x-\alpha)^a$ divida x f(x). Questa indica *quante volte* α *è radice del polinomio caratteristico.*
La **molteplicità geometrica** di α è g = dim(ker(f - α id_v)) = n – rg(f- α id_v)) per il teorema del rango. Questo indica la *dimensione dello spazio degli autovettori associati ad* α.
Ker(f - α id_v) si chiama **autospazio** associato ad α = {autovettori per α} ∪ {0}.

Abbiamo sempre che 1 ≤ g ≤ a.

Teorema:

$$f \ diagonalizzabile \ \Leftrightarrow n = \sum_{i=1}^{k} g_i \, , dove \ g_1, \dots, g_k \ sono \ le \ molteplicità \ geometriche \ degli \ autovalori \ di \ f$$

Quindi, f è diagonalizzabile se e solo se quando la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è uguale a n, ovvero la dimensione dello spazio.
Quindi:

Se $a_1, \dots, a_k$ sono le molteplicità algebriche, $n \geq a_1 + \dots + a_k$. Quindi abbiamo che f è diagonalizzabile se e solo se:

- $X_f(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (x-\alpha_i)^{a_i}, dove \ \alpha_i \neq \alpha_j \ per \ i \neq j$
- $g_i = a_i$ per ogni i = 1, ..., k

In altre parole, f è diagonalizzabile se e solo se:

- x f(x) è prodotto di polinomi di grado 1
- le molteplicità algebriche e geometriche sono uguali per ogni autovalori

Abbiamo il seguente 📝 esempio:
se K = R, $x^2 + 1$ non è prodotto di polinomio di grado 1, perché non ha radici. Quindi la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(R) \ non \ è \ diagonalizzabile: x_A(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$, poiché non ha radici reali, quindi in R non ci sono autovalori. Non è dunque diagonalizzabile su R.

Come **controesempio** abbiamo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2} \ (C) è \ diagonalizzabile: X_B(x) = x^2 + 1$=(x+i)(x-i) con i ≠ -i .
Quindi B ha 2 autovalori complessi i e -i, diversi, con molteplicità algebriche 1 ciascuno. Gli spazi propri associati a i e -i hanno dimensione 1 ⇒ molteplicità geometriche = 1. Quindi 1 + 1 = 2 = dim V, quindi **B è diagonalizzabile su C.**

Sia A = (a_{ij}) $\in M_{n,n}$(K) tale che a_{ij} = 0 per i > j, a_{ii} = $\alpha \in$ K non dipende da i $\in$ {1, ..., n}. Cioè abbiamo $A = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Se A è diagonalizzabile, allora a_{ij} = 0 per j ≠ i, cioè A = αI_n = $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

$$x_A(x) = \det(A - xI_n) = \det\begin{pmatrix} \alpha - x & * \\ 0 & \alpha - x \end{pmatrix} = (\alpha - x)^n$$

α è l'unica radice di x_A (n), con molteplicità n, e α è l'unico autovalore, con molteplicità algebrica. Quindi a = n.

Per quanto la **molteplicità geometrica**: g = ker(A - αI_n) = n – rk(A - αI_n).
Quindi A è diagonalizzabile se e solo se:
- a = g
- rk(A - αI_n) = 0
- A - αI_n $\Leftrightarrow$ A = αI_n

Invece che supporre a_{ij} = 0 per i > j, si può supporre a_{ij} = 0 per i < j, e avere quindi A = $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ * & \alpha \end{pmatrix}$.

Come determinare se una matrice è diagonalizzabile

Abbiamo gli seguenti step:
1. Calcolare il polinomio x_A (x)
2. Fattorizzare x_A (x)
3. Calcolare le molteplicità geometriche
4. Comparare molteplicità geometrica e algebrica:
   a. Se sono uguali per ogni autovalore: A è diagonalizzabile
   b. Se sono diverse per almeno un autovalore: A non è diagonalizzabile

Abbiamo il seguente 📝 esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(R), x_A(r) = \det(A - xI_2) = det\begin{pmatrix} 3 - x & 4 \\ -2 & -3 - x \end{pmatrix}$$
$$= (3 - x)(-3 - x) + 8 = x^2 - 3x + 3x - 9 + 8 = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Le radici sono 1 e -1, abbiamo 2 autovalori quindi A è diagonalizzabile.
Verifichiamo prima per l'autovettore per α = 1, cioè elemento non nullo di ker(A – I_2):

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, (A - I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -2x_2$$

Le soluzioni sono: {(-2t, t) | t $\in$ R} = ker(A – I_2), autospazio per l'autovalore 1. Ad esempio, u_1 = (-2, 1) è un autovettore per α = 1 (ovvero, è un vettore che soddisfa la soluzione trovata).

Verifichiamo prima per l'autovettore per α = -1.

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}; (A + I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

Quindi l'autospazio è ker(A + I_2) = {(-t, t) | t $\in$ R). Ad esempio, u_2 = (-1, 1) è un autovettore per α = -1.

Ad esempio, una P potrebbe essere $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, AP = PD$. Verifichiamo:

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

det P = -2 + 1 = -1 ≠ 0 ⇒ P è invertibile.

Prodotto scalare

Una **forma bilineare** è una funzione che prende due vettori, e restituisce un numero (scalare), ed è lineare in entrambi gli argomenti.

Sia V uno spazio vettoriale su K. Una forma bilineare su v è un'applicazione f: V x V → K tale che:

- ∀ u, u', v ∈ V, ∀λ ∈K si ha f(u + λu', v) = f(u,v) + λf(u', v) – lineare nella prima variabile
- ∀ u, v, v' ∈ V, ∀λ ∈ K si ha f(u, v + λv') = f(u, v) + λf(u, v') – lineare nella seconda variabile

Questo significa che:

- ∀ v ∈ V, V → R, u |→ f(u,v) è lineare
- ∀ u ∈ V, V → R, v |→f(u,v) è lineare

Il **prodotto scalare** è un caso particolare di forma bilineare, ma con proprietà aggiuntive, che deve soddisfare le seguenti:

- Bilinearità, come sopra
- Simmetria: <x,y> = <y,x>
- Positività: <x,x> ≥ 0 ∀ x, e <x,x> = 0 ⇔ x = 0

Attenzione! f(u + v, u' + v') ≠ f(u,v) + f(u', v') = f(u') + f(u', v') + f(u, v') + f(u', v).

Vediamo un 📝 esempio:
V = K^n, f(x,y) = (^{t}x) * y è bilineare.

$$Se\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\, ; V = K^n, A \in M_{n,n\,(K)}, f_A: K^n\ x\ K^n \to K^n, (x,y) \mapsto (\,{}^tX)Ay \text{ è } bilineare$$

$$con\ n = 2\ abbiamo\ K^2\ x\ K^2 \to K^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1y_2 - x_2y_1 \text{ è } bilineare$$

Sia B = (b_1, ..., b_n) una base di V, f una forma bilineare su V. Allora la matrice di f rispetto alla base B è

$$M = M_B(f) = \left(f(b_i, b_j)\right) = \begin{pmatrix} f(b_1,b_1) & \cdots & f(b_1,b_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(b_n,b_1) & \cdots & f(b_n,b_n) \end{pmatrix}$$

Siano x, y ∈ V, e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $le\ loro\ coordinate\ rispetto\ alla\ base\ B, cioè$

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i\, , y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$ allora f(x,y) = (^{t}X)*M_B(f) * Y

Quindi, all'inizio, se x = (x_1, ..., x_n) e y = (y_1, ..., y_n) allora f(x,y) = ∑ x_i y_i, cioè i prodotto scalare classico, che è una forma bilineare.
Supponendo di avere una base B = (b_1, ..., b_n) dello spazio vettoriale V, allora si può costruire la matrice della forma bilineare f rispetto a quella base come $M_{B(f)}$ = (f(b_i, b_j)), cioè una matrice dove ogni elemento è il valore della forma f applicata a due vettori base.

Se x e y sono vettori in V, allora:

- Puoi scriverli come combinazione della base come x = ∑ x_i * b_i, y = ∑ y_j * b_j
- Le coordinate X = (x_1, ..., x_n), Y = (y_1, ..., y_n) sono i coefficienti rispetto alla base B

Grazie alla linearità della forma bilineare abbiamo f(x,y) = (X^t) * $M_{B(f)}$ * Y, dove:

- X è un vettore colonna
- X^t è il vettore riga trasposto
- $M_{B(f)}$ è la matrice della forma bilineare
- Y è il vettore colonna delle coordinate di y

Il risultato sarà uno scalare.

Guardiamo di nuovo un altro 📝 esempio:

- Base standard: b_1 = (1,0), b_2 = (0,1)
- Forma bilineare: f(x, y) = x_1y_1 + $2x_2y_2$
- Matrice: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Se x = (3, 4), y = (1, 2), allora X^t = (3, 4), Y = $(1, 2)^t$.

$$f(x,y) = (3 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(3 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 31 + 44 = 3 + 16 = 9$$

Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

$$f(x,y) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(b_i, b_j) =$$

$$({}^tX) * M_B(f)\, Y = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} f(b_1, b_1) & \dots & f(b_1, b_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(b_n, b_1) & \dots & f(b_n, b_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)(\begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} f(b_1, b_j) y_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} f(b_n, b_j) y_j \end{matrix})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} f(b_i, b_j) y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, f(b_i, b_j)$$

Forma simmetrica

Sia f una forma bilineare su V, la forma f si chiama simmetrica se f(u, v) = f(v, u) ∀ u, v ∈ V.
Come 📝 esempio possiamo avere f(x,y) = x^t * y è simmetrica, perché x^t * y = y^t * x

Sia B una base finita di V, sia $M \subset M_B(f)$, allora f simmetrica $\Leftrightarrow M = {}^tM$. Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

- $\Rightarrow$: f simmetrica → $\forall$ i,j $f(b_i, b_j)$ ($=M^{ij}$) $= f(b_j, b_i)$ ($= M^{ji} = ({}^tM)^{ij}$), quindi $M = {}^tM$
- $\Leftarrow$: Supponiamo che $M = {}^tM$. Siano u, v $\in$ V. Siano $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $e\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ le coordinate id u,v rispetto alla base B.

$$f(u,v) = ({}^tX) * M * Y = {}^t(({}^tX)\, M\, Y) = ({}^tY)({}^tM)({}^t({}^tX)) = ({}^tY)*M*X = f(v, u)$$

Forma definita positiva

Sia V uno spazio vettoriale su R, una forma bilineare si chiama definita positiva se $f(u,u) > 0$ $\forall$ $u \in V \setminus \{0\}$, con $f(0,0) = 0$.

Un prodotto scalare su V è una forma bilineare simmetrica definita positiva. Abbiamo questo 📝 esempio:

det: $R^2 \times R^2$ → R, (x,y) |→ det(x,y) non è un prodotto scalare perché non è simmetrica:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \quad \neq \quad \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1. f: R^2\ x\ R^2 \to R, \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1$$

È bilineare simmetrica. Non è un prodotto scalare, perché non è definita posiitva.

Spazio euclideo

Uno spazio euclideo è uno spazio vettoriale V su R, di dimensione finita, con un prodotto scalare V x V → R, (u,v) |→ <u,v>. Per ogni coppia di vettori u, v $\in$ V, il prodotto scalare <u,v> è:

- Bilineare
- Simmetrico: <u,v> = <v,u>
- Definito positivo: <u, v> $\geq$ 0, e vale 0 solo se v = 0

Sia V uno spazio euclideo, i vettori u, v $\in$ V si chiamano **ortogonali** (o perpendicolari) se <u,v> = 0.

Sia $E \subset V$ un sottoinsieme; lo **spazio ortogonale** a E è $E^T = \{v \in V \mid \langle v, e\rangle = 0\ \forall\ e \in E\} \subset V$. E quindi è l'insieme di tutti i vettori ortogonali ad ogni elemento di E.

E è un sottospazio di V, e abbiamo questa 📚 dimostrazione: $0 \in E^T$, <0,e> = 0.
Siano u, v $\in E^T$, $\lambda \in R$. Verifichiamo che $u + \lambda v \in E^T$.
Sia e $\in$E, allora $\langle u + \lambda v, e\rangle = \langle u,e\rangle + \lambda\langle v,e\rangle = 0$ → $u + \lambda v \in E^T$.

Sia $E = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$, e sia $U = Span(x_1, \ldots, x_n)$. Allora $U^T = E^T$, e con questa 📚 dimostrazione:
$E \subset U$ → $U^T \subset E^T$. Sia $x \in E^T$, verifichiamo che $x \in U^T$, sia $u \in U$. Allora esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ < u, x \geq < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x_i, x > = 0 \to x \in U^T \to E^T \subset U^T$

Sia $U \subset V$ un sottospazio. Allora $U \cap (U^T) = 0$, con la seguente 📚 dimostrazione:
U spazio vettoriale, U^T spazio vettoriale, quindi $U \cap (U^T)$ è uno spazio vettoriale. Sia $x \in U \cap (U^T)$.
$x \in U$, $x \in U^T \rightarrow \langle x,x \rangle = 0 \rightarrow x = 0$, il prodotto scalare è definito positivo. Quindi, u = v, con $V^T = 0$, ovvero lo "zero è l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori".

Vettori ortogonali

Sia $A \in M_{m,n}(R)$. Allora $\{x \mid Ax = 0\} = \{\text{righe di } A\}^T$, ovvero *soluzioni del sistema omogeneo Ax = 0 sono lo spazio ortogonale alle righe di A*.
Ovvero, le soluzioni $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad sono\ i\ vettori\ ortogonali\ a \begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Questo vale solo per i sistemi omogenei.

Vediamo un 📝 esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Questa matrice ha 2 righe in R^3. Le soluzioni di Ax = 0 sono tutti i vettori $x \in R^3$ che sono ortogonali sia a (1,2,-1) che a (0,1,3).
Il nucleo di A è quindi un sottospazio di R^3 ortogonale al sottospazio generato da quelle due righe: un piano ortogonale a quei due vettori, quindi una retta.

Famiglia ortonormale

Una famiglia $v_1, \ldots, v_n \in V$ si chiama **ortonormale** se $\forall\, i,j \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = 1$ se i=j, 0 se i≠j.

Ogni famiglia ortonormale è linearmente indipendente secondo questa 📚 dimostrazione:
Sia $v_1, \ldots, v_n$ una famiglia ortonormale. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$ tali che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. $\forall j=1,\ldots,n$ si ha:

$$0 = < 0, v_j > = < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_j > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < v_i, v_j > = \lambda_j \rightarrow v_n \text{ è } lin. indipendente$$

Normalizzazione di un vettore

Avendo un vettore $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, lo si normalizza con:

$$v\ normale = \frac{v}{||v||} = \left(\frac{v_1}{||v||}, \frac{v_2}{||v||}, \ldots, \frac{v_n}{||v||}\right), ||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Sia $v_1, \ldots, v_n$ una famiglia linearmente indipendente. Allora esiste $w_1, \ldots, w_n$ famiglia ortonormale tale che $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\text{Span}(v_1, \ldots, v_i) = \text{Span}(w_1, \ldots, w_i)$.
Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

$$v_i \neq 0 \rightarrow < v_i, v_i > = \alpha > 0. Sia\ w_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} v, allora < w_i, w_i > = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < v_i, v_i > = 1$$

Sia k ≥ 1, e supponiamo $w_1, \ldots, w_k$ costruiti tali che:

- $w_1, \ldots, w_k$ è ortogonale
- $\text{Span}(w_1, \ldots, w_i) = \text{Span}(v_1, \ldots, v_i)$ per $1 \leq i \leq k$.

Sia $w'_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} < v_{k+1}, w_j > w_j \ \forall i = 1, \ldots, k$

$$< w'_{k+1}, w_i > = < v_{k+1}, w_i > - \sum_{j=1}^{k} < v_{k+1}, w_j > < w_j, w_i > = < v_{k+1}, w_i > - < v_{k+1}, w_i > = 0$$

$$\rightarrow \ w'_{k+1} \in \{w_1, \ldots, w_k\}.$$

$$Sia \ \alpha = < w'_{k+1}, w'_{k+1} > \in R, sia \ w_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} w'_{k+1}. \ Allora < w_{k+1}, w_{k+1} > = 1$$

$$Per \ i \ \in \{1, \ldots, k\} < w_{k+1}, w_i > = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < w'_{k+1}, w_i > = 0$$

La famiglia $w_1, \ldots, w_{k+1}$ è ortonormale. Ci domandiamo: $\text{Span}(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \text{Span}(w_1, \ldots, w_{k+1})$?

$$w_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} v_{k+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{< v_{k+1}, w_j >}{\sqrt{\alpha}} w_j \ \in Span(v_1, \ldots, v_{k+1})$$

$$v_{k+1} = \sqrt{\alpha}\, w_{k+1} + \sum_{j=1}^{n} < v_{k+1}, w_j > \ w_j \ \in Span(w_1, \ldots, w_{k+1})$$

Siccome $\text{Span}(v_1, \ldots, v_k) = \text{Span}(w_1, \ldots, w_k)$ → $\text{Span}(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \text{Span}(w_1, \ldots, w_{k+1})$.

Abbiamo un 📝 esempio:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \in \ R^3 \ con \ il \ prodotto \ scalare \ standard$$

Abbiamo visto che v_1, v_2, v_3 è linearmente indipendente con $< v_1, v_1 > = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = 1 * 1 + 1 * 1 = 2; \ w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Sia \ w_2 = v_2 - < w_1, v_2 > w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - < \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(1 * 0 + 1 * 1 + 0 * 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$< w'_2, w'_2 > = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = w_2$$

$$w'_3 = v_3 - < v_3, w_2 > w_2 - < v_3, w_1 > w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - < \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} -$$

$$< \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6-1-3\\0+1-3\\0+2+0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$< w'_3, w'_3 > = \frac{1}{9} < \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} > = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \rightarrow w_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = w_3$$

Spiegazione di ChatGPT

Abbiamo un insieme di vettori linearmente indipendenti $\{v_1, ..., v_n\}$ in uno spazio vettoriale, e dobbiamo trovare un insieme di vettori ortogonali $\{u_1, ..., u_n\}$ che generano lo stesso spazio, avendo quindi Span($v_1, ..., v_n$) = Span($u_1, ..., u_n$).

Prendiamo il primo vettore così com'è. Poi, ogni nuovo vettore viene reso ortogonale ai precedenti, togliendo le componenti proiettate su di essi.
Avendo $v_1, ..., v_n \in R^n$:

- Impostiamo il primo vettore ortogonale
  - $u_1 = v_1$
- Costruisci u_2 togliendo a v_2 la parte parallela a u_1:
  - $u_2 = v_2 - \frac{<v_2,u_1>}{<u_1,u_1>} u_1$
- Costruisci u_3 togliendo le componenti su u_1 e u_2:
  - $u_3 = v_3 - \frac{<v_3,u_1>}{<u_1,u_1>} u_1 - \frac{<v_3,u_2>}{<u_2,u_2>} u_2$
- Passo k, in generale:
  - $u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{<v_k,u_j>}{<u_j,u_j>} u_j$

Se si vuole ottenere una base ortonormale, cioè con vettori di lunghezza 1, allora poi bisogna normalizzare ogni vettore ottenuto con: $e_k = \frac{u_k}{||u_k||}$

Guardiamo un 📝 esempio: sia $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$.

1. $u_1 = v_1 = (1,1,0)$
2. $< v_2, u_1 > = 1 * 1 + 0 * 1 + 1 * 0 = 1$
   a. $< u_1, u_1 > = 1^2 + 1^2 = 2$
   b. $Proiezione = \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$
   c. $u_2 = v_2 - proiezione = (1,0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

Ora u_1 e u_2 sono ortagonali.

Base ortonormale

Una base ($b_1, ..., b_n$) di v si chiama **base ortonormale** se la famiglia $b_1, ..., b_n$ è ortonormale, cioè la matrice del prodotto scalare rispetto alla ($b_1, ..., b_n$) è ($<b_i, b_j>$) = I_n.

Se n = dim V, una famiglia $(b_1, \dots, b_n)$ è una base ortonormale se e solo se

$$< b_i, b_j > = \begin{cases} 0 \; se \; i \neq j \\ 1 \; se \; i = j \end{cases} per \; ogni \; i, j$$

Ogni spazio euclideo ammette una base ortonormale. Abbiamo questa 📚 dimostrazione:
Sia $(v_1, \dots, v_n)$ una base. Usando Grand-Schmidt, creiamo una base ortonormale $(w_1, \dots, w_n)$.

Sia $U \subset V$ sottospazio. Allora $V = U + (U^T) = \{u + v \mid u \in U, v \in U^T\}$. Abbiamo questa 📚 dimostrazione:
Sia $(v_1, \dots, v_\alpha)$ base di U. In base al teorema della base incompleta abbiamo che $\exists \, v_{\alpha+1}, \dots, v_n \in V$ tali che $(v_1, \dots, v_n)$ una base di V.
Usando Grand-Schmidt, abbiamo una famiglia ortonormale $w_1, \dots, w_n \in V$ tale che per ogni i, $U = Span(v_1, \dots, v_i) = Span(w_1, \dots, w_i)$. In particolare, abbiamo:

- (i = d) $U = Span(v_1, \dots, v_d) = Span(w_1, \dots, w_d)$
- (i = n) $V = Span(v_1, \dots, v_n) = Span(w_1, \dots, w_n)$

Quindi abbiamo $w_1, \dots, w_n$ una base ortonormale di V. Per $j \in \{d + 1, \dots, n\}$ $w_j \in \{w_1, \dots, w_d\}^T = Span(w_1, \dots, w_d)^T = U^T \rightarrow w_{d+1}, \dots, w_n \in U^T$.
Sia $y \in V$, e siano y_i le sue coordinate rispetto alla base:

$$(w_1, \dots, w_n) \rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i \rightarrow y = \sum_{i=1}^{d} y_i w_i + \sum_{i=d+1}^{n} y_i w_i$$

$\dim(U^T) = \dim(V) - \dim(U)$. Abbiamo questa 📚 dimostrazione:
Usando la formula di Grassmann, abbiamo $\begin{cases} V = U + U^T \\ 0 = U \cap (U^T) \end{cases} \rightarrow \dim V = \dim U + \dim(U^T)$

$(U^T)^T = U$. Abbiamo questa 📚 dimostrazione:
$U \subset (U^T)^T$, sia $u \in U$. $\forall \, v \in U^T$ si ha $<u,v> = 0$, quindi $u \in (U^T)^T$.

$$\dim(U^T)^T = \dim(V) - \dim(U^T) = \dim(v) - (\dim(v) - \dim(u)) = \dim(U) \rightarrow U = (U^T)^T$$

Sia $U \subset V$ un sottospazio, e sia $x \in V$. Allora esistono unici vettori $u \in U$, $v \in U^T$ tali che $x = u + v$.
Abbiamo questa 📚 dimostrazione:
u, v esistono perché $V = U + (U^T)$. Siano $u, u' \in U$; $v, v' \in U^T$ tali che $u + v = x = u' + v'$. Abbiamo:
$u - u' = v' - v \in U \cap (U^T) = 0 \rightarrow u = u'$ e $v = v'$. Quindi, u e v sono unici

Prodotto scalare

Come calcolo il prodotto scalare data una base ortonormale?
Se $B = (b_1, \dots, b_n)$ una base ortonormale di V, siano $x, y \in V$.
Siano $x_1, \dots, x_n$ le coordinate di x rispetto a B. Siano $y_1, \dots, y_n$ le coordinate di y rispetto a B.

$$< x, y > = < \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < b_i, b_j > \rightarrow < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Sia (b_1, ..., b_n) una base ortonormale di V. Sia x ∈ V. Allora $x = \sum_{i=1}^{n} < x, b_i > b_i$. In altre parole, le coordinate di x sono <x, b_1>, ..., <x, b_n>. Abbiamo la seguente dimostrazione:
Siano x_1, ..., x_n ∈ R le coordinate di x rispetto alla base (b_1, ..., b_n). Per i ∈ {1, ..., n} abbiamo

$$< x, b_i > = < \sum_{j=1}^{n} x_j b_j, b_i > = \sum_{j=1}^{n} x_j < b_j, b_i > = x_i$$

Guardiamo un esempio:

w_1, w_2, w_3 è una base ortonormale di R^3. La base canonica e_1, ..., e_n, dove e_j = $\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 1 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$ di R^n è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

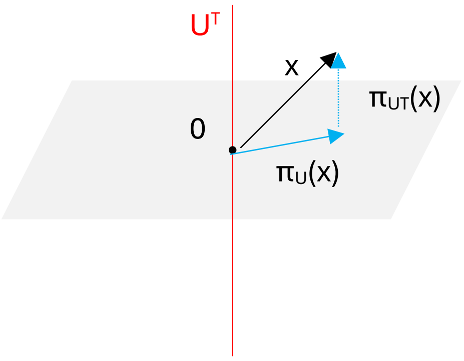
Proiezione ortogonale

Sia V uno spazio euclideo (ovvero dotato di prodotto scalare), e sia U ⊆ V un sottospazio. La proiezione ortogonale di un vettore x ∈ V su U è il vettore di U che sta "più vicino" a x.

Il vettore u si chiama la proiezione ortogonale di x su U, definita come π_n: V → U, x |→ u.

Quindi, π_u(x) è l'unico vettore di U tale che x – π_n(x) ∈ U^T.

x – π_n (x) = π_{UT} (x) proiezione ortogonale su U^T. π_n: V → U è un'applicazione lineare.



$$x = \pi_u (x) + \pi_{UT} (x), \in U + \in U^T$$

Come calcolare $\pi_u(x)$

Caso generale

Sia U ⊂ V un sottospazio, sia x ∈ V. Sia (b_1, ..., b_d) una base ortonormale di U. Allora

$$\pi_u(x) = \sum_{i=1}^{d} < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_i} > \boldsymbol{b_i}; b_1, \dots, b_d \in U \rightarrow y \in U\, ; x - y \in U^T?$$

$$Per\ j \in \{1, \dots, d\}: < x - y, b_j > = < x, b_j > - < \sum_{i=1}^{d} < x, b_i > b_i, b_j > = < x, b_j > - \sum_{i=1}^{d} < x, b_i > < b_i, b_j > \rightarrow < x - y, b_j > = < x, b_j > - < x, b_j > = 0.$$

Quindi x – y ∈ {b_1, ..., b_d}^{T} = Span(b_1, ..., b_d)^T = U^T. Quindi y = π_n(x).

d = dim U, non di V. Non serve una base ortonormale di V, ma solo una di U.

Caso di una retta: dimU = 1.
Sia u ∈ U non nullo, e sia α = <u, u>. Allora α > 0, e $\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} u$ è *una base ortonormale di U*.
Per ogni u ∈ V si ha

$$\pi_u(x) = < x, \tilde{u} > \tilde{u} = < x, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} u > \frac{1}{\sqrt{\alpha}} u = \frac{1}{\alpha} < x, u >; \ \pi_u(x) = \frac{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} >}{< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} >} \boldsymbol{u} \ \ \forall u \in U \setminus \{0\}$$

Guardiamo un 📝 esempio: sia V = R^3, U ⊂ R^3 la retta generata da $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. Sia\ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Calcolare la proiezione ortogonale di x su U.

$$\pi_u(x) = \frac{< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \pi_u(x)$$

Eccolo spiegato più facilmente:
1. Calcolo il prodotto scalare: <x,u> = 0*1 + 1*0 + 0*0 = 0
2. Calcolo <u,u> = $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$
3. Applico la formula: $\pi_U(x) = \frac{0}{1} * (1,0,0) = (0,0,0)$

La proiezione è quindi il vettore nullo, perché x è perpendicolare a u.

Ecco un altro 📝 esempio: sia P ⊂ R^3 il piano generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia x = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calcolare $\pi_p(x)$.

Base ortonormale di P? Facciamo Gram-Schmidt da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = 2 \to b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} > = 3 \to b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \ (b_1, b_2)\ base\ ortonormale\ di\ P$$

$$\boldsymbol{\pi_p(x)} =< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1} > \boldsymbol{b_1} + < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2} > \boldsymbol{b_2} = < \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + < \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3-2\\3+2\\0-2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}, \pi_p(x) = \begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{5}{6}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \in P^{\perp}: \dim P^{\perp} = \dim R^3 - \dim P = 3 - 2 = 1$$

$$P^{\perp} = Span\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right); \pi_{P^{\perp}}(x) = x - \pi_P(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \pi_{P^{\perp}}(x)$$

Endomorfismo ortogonale

Sia V uno spazio euclideo. Un endomorfismo f: V → V si chiama ortogonale se <u,v> = <f(u), f(v)> ∀ u,v ∈ V, ovvero funzioni che rispettano la struttura di spazio euclideo.

L'angolo, e quindi anche la lunghezza, tra i vettori rimane invariato dopo l'applicazione di f.

Sia V uno spazio euclideo, f: V → V un endomorfismo. Sia B = (b_1, ..., b_n) una base ortonormale di V. Sia P = $M^B_B(f) \in M_{n,n}$ (R). Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. f è ortogonale
2. f(b_1), ..., f(b_n) è una base ortonormale di V
3. (^tP) * P = I_n

Abbiamo questa 📚 dimostrazione:

- 1 → 2: prendiamo u = b_i, v = b_j
  - $< f(b_i), f(b_j) > = < b_i, b_j > = \begin{cases} 0\ se\ i \neq j \\ 1\ se\ i = j \end{cases} \rightarrow f(b_1), \dots, f(b_n)\ \text{è}\ una\ b.o.n$
- 2 → 3: P = (a_{ij}), allora per ogni j = 1, ..., n
  - $f(b_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} b_k,\ cio\grave{e}\ a_{1j}, \dots, a_{nj}\ cos\grave{\imath}\ di\ f(b_j)\ rispetto\ a\ (b_1, \dots, b_n)$
  - $\begin{cases} 0\ se\ i \neq j \\ 1\ se\ i = j \end{cases} \rightarrow < f(b_i), f(b_j) > = < \sum_{l=1}^{n} a_{li} b_l, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} b_k > = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{li} * a_{kj} < b_l, b_k > = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} * a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tP)^{ik} P^{kj} = \left(({}^tP)P\right)^{ij}$
  - Quindi (^tP) P = In
    - Supponiamo che f(b_1), ..., f(b_n) sia ortonormale. Esprimiamo ciascun f(b_j) come combinazione lineare dei b_k. Quindi, le colonne della matrice P sono i coefficienti a_{kj}. Per verificare se i f(b_i) sono ortonormali, calcoliamo i prodotti scalari tra loro. Se i f(b_i) sono ortonormali, allora questo deve valere $P^TP = I_n$
- 3 → 1: supponiamo (^tP) P = In

- Siano u, v ∈ V: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *coordinate di u rispetto a B*, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *coordinate di v rispetto a B.*
- $< u, v > = ({}^tX)Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (*perchè B è una base ortonormale*)
- Le coordinate di f(u) rispetto a B sono PX, e le coordinate di f(v) rispetto a B sono PY
- $< f(u), f(v) > = {}^t(PX) * PY = ({}^tX) * ({}^tP)PY = ({}^tX)Y = < u, v >$
- Quindi f è ortogonale

Se f è ortogonale, allora f è un isomorfismo, cioè un endomorfismo biettivo. Ovvero:
- f preserva il prodotto scalare
- La matrice P soddisfa $P^TP = I$, quindi è invertibile
- Quindi f è invertibile, cioè è un isomorfismo, una corrispondenza biunivoca lineare

Spazio euclideo

Sia V uno spazio euclideo, un endomorfismo f: V → V si chiama **simmetrico** se per ogni x, y ∈ V abbiamo <f(x), y> = <x, f(y)>.

Sia B una base ortonormale di V, f: V → V endomorfismo, $A = M_B^B(f)$. F simmetrico ⇔ A = ^tA.
Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:
- ⇐: siano x, y ∈ V. Sia X = $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ coordinate di x rispetto a B. Y = $(y_1, \ldots, y_n)$ coordinate di y rispetto alla base B
  - $< f(x), y \geq {}^t(AX)Y = ({}^tX) * ({}^tA)Y = ({}^tX)AY =< x, f(y) >$
- ⇒: sia B = $(b_1, \ldots, b_n)$
  - $<f(b_i), b_j> = {}^t(A\, e_i)\, e_j = {}^t(A^i)\, e_j = A^{ji}$
  - $<b_i, f(b_j) = {}^te_i\, A\, e_j = {}^t(e_i)\, A^j = A^{ij}$
  - per ogni i,j $A^{ij} = A^{ji}$, cioè A = ^tA

Teorema spettrale

Sia f: V → V un endomorfismo simmetrico, allora esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di f.

Versione matriciale

Sia A ∈ $M_{n,n}$ (R) una matrice tale che A = ^tA. Allora esiste una matrice ortogonale P ∈ $M_{n,n}$ tale che $(^tP)*AP$ sia diagonale.
Quindi, le matrici simmetriche sono diagonalizzabili. Inoltre, la matrice di passaggio P può essere scelta ortogonale, con P^{-1} facile da calcolare; $P^{-1} = {}^tP$.
Vediamo un 📝 esempio:
A ∈ $M_{3,3}$ è diagonalizzabile, perché A = ^tA.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = {}^{t}A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Norma

Sia V uno spazio euclideo. Per u $\in$ V scriviamo $||u|| = \sqrt{<u,u>} \in R$ è la **norma** di u, o la lunghezza del vettore u.
Abbiamo queste proprietà:

- $||u|| \geq 0$
- $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- Per $\lambda \in R$, $||\lambda u|| = |\lambda| * ||u||$

Vediamo un 📝 esempio: Sia V = R^n con il prodotto scalare standard. Sia u = $(u_1, \ldots, u_n) \in R$. Allora $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = ||u||$.

Sia V uno spazio euclideo, B una base ortonormale di V. Sia u $\in$ V, con coordinate $(u_1, \ldots, u_n)$ rispetto a B. Allora $||u|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.

Una norma è V → R. Siano u, v $\in$ V. Allora:
$$||u+v||^2 = <u+v, u+v> = <u,u> + <u,v> + <v,u> + <v,v> = ||u||^2 + ||v||^2 + 2 <u,v>$$
Il prodotto scalare è determinato dalla norma.

Teorema di Pitagora

Siano u, v $\in$ V. Allora **u,v ortogonale ⇔ $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$**. Abbiamo questa 📚 dimostrazione:

$$<u,v> = \frac{||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2}{2}$$

Teorema di Cauchy-Schwarz

Siano u,v $\in$ V. Allora $|<u,v>| \leq ||u|| * ||v||$. Abbiamo questa 📚 dimostrazione:
se v = 0 allora è ok.
Sia w $\in$ V la proiezione ortogonale di u sulla retta Span(v).

$$w = \frac{<w,v>}{||v||^2} v, u - w \in \{v\}^{\perp} \to <u-w, v> = 0 \to <u-w, w> = 0 \to u - w \in \{v\}^{\perp}$$

$$||u||^2 = ||w + (u-w)||^2 = ||w||^2 + ||u-w||^2 \geq ||w||^2 = \frac{<w,v>^2}{||v||^2} \to ||u||^2 * ||v||^2 \geq <w,v>^2$$

Prendendo le radici, abbiamo $||u|| * ||v|| \geq |<w,v>|$.

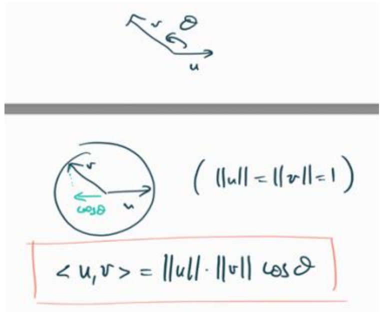
||u+v|| ≤ ||u|| + v||. Abbiamo questa 📚 dimostrazione:

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2 < u,v > \leq \left||u|\right|^2 + \left||v|\right|^2 + 2\left||u|\right| * \left||v|\right| = (\left||u|\right| + \left||v|\right|)^2$$
Se prendiamo le radici, abbiamo ||u+v|| ≤ ||u|| + ||v||.

Angoli

Siano u,v ∊ V \ {0}. Secondo Cauchy-Schwarz:

$$-1 \leq \frac{< u,v >}{||u||||v||} \leq 1, \nexists\theta$$
$$\in [0,\pi]\ tale\ che \cos\theta = \frac{< u,v >}{\left||u|\right| * \left||v|\right|}, \theta$$
$$= \arccos\left(\frac{< u,v >}{\left||u|\right| * \left||v|\right|}\right) \in [0,\pi]$$



θ è l'angolo tra u e v, e tra v e u, non orientato.

Siano u,v ∊V \ {0}, e ∂ ∊ [0,π] l'angolo tra u e v. Allora ||u ∧ v|| = ||u|| * ||v|| sen∂. Lo dimostriamo con <u,v> = ||u|| ||v|| cos∂.

Proposizione: $||u \wedge v||^2 = ||u||^2 * ||v||^2 - <u,v>^2 = ||u||^2 * ||v||^2 (1 – (\cos\partial)^2) = ||u||^2 * ||v||^2 * (\text{sen}\partial)^2$
Prendendo le radici abbiamo ||u ∧ v|| = ||u|| * ||v|| * sen∂.

Sia L ⊂ R^3 una retta, e v ∊ L non nullo. Sia x ∊ R^3. Chiamiamo $\pi_L(x)$ la proiezione ortogonale di x sulla retta L, mentre $\pi_P(x)$ la proiezione ortogonale di x sul piano P = L^T. Quindi abbiamo

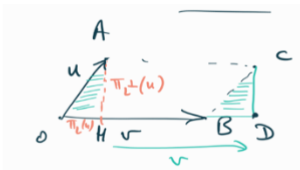
$$\left||\pi_P(x)|\right| = \left||x - \pi_L(x)|\right| = \frac{||x \wedge v||}{||v||}$$

Abbiamo la seguente 📚dimostrazione:
Sia y = $\pi_L(x)$, z = $\pi_P(x)$.
$y = \frac{<x,v>}{||v||^2} v \rightarrow ||y||^2 = \frac{<x,v>^2}{||v||^2}$, e con il teorema di pitagora abbiamo $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$

$$||z||^2 = ||x||^2 - \left||y|\right|^2 = \frac{\left||x|\right|^2\left||v|\right|^2 - < x,v >^2}{\left||v|\right|^2} = \frac{||u \wedge v||^2}{||v||^2}$$

Prendendo le radici abbiamo $\left||z|\right| = \frac{||u \wedge v||}{||v||}$

Osserviamo che l'area del parallelogramma OACB = area del rettangolo HACD = AH * HD = $||\pi_L^T(u)||$ * ||v|| = ||u ∧ v|| .



$$\left||u \wedge v|\right| = area\ del\ parallelogramma$$
$$\frac{||u \wedge v||}{2} = area\ del\ triangolo$$

Guardiamo un 📝 esempio: calcoliamo l'area del triangolo OAB dove

$$O \in (0,0);\ A = (2,1);\ B = (1,2) \in R^2,\ u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u \wedge v = \det\begin{pmatrix} e_1 & 2 & 1 \\ e_2 & 1 & 2 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}||u \wedge v|| = \frac{3}{2} = area\ del\ triangolo\ OAB$$

Prodotto vettoriale

Il prodotto scalare è definito come V x V → R, 2 vettori → 1 scalare.
Il prrodotto vettoriale è definito come V x V → V, 2 vettori → 1 vettore, solo se dim V = 3.

Sia V uno spazio euclideo, sia f: V → R un'applicazione lineare. Allora esiste un unico z ∈ V tale che f(u) = <z,x> per ogni x ∈ V.
Abbiamo questa 📚 dimostrazione: se z, z' ∈ V sono tali che
$< z, x > = f(n) = < z', x > per\ ogni\ x \in V$, allora $< z - z', x > = < z, x > - < z', x > = 0$

$$z - z' \in V^{\perp} = \{0\} \rightarrow z - z' = 0 \rightarrow z = z' = OK$$

Esistenza

Sia B = (b_1, ..., b_n) una base ortonormale di V. Sia E = (e_1) la base canonica di R = R', con e_1 = (1).
Sia A = $M_E^B(f) \in M_{1,n}(R)$. A = (a_1, ..., a_n) con $a_i \in R$.
Sia z = $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \in V$. Sia x ∈ V, ($x_1$, ..., x_n) le sue coordinate rispetto a B.
Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} < z, x > &= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_ix_i, F(n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ \cdots \\ n_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \rightarrow < z, x > \\ &= f(n)\ per\ ogni\ x\ \in V. \end{aligned}$$

Supponiamo ora dimV = 3. Per u,v ∈ V, l'applicazione lineare V → R, x → det(x,u,v) è lineare.
Abbiamo infatti che ∃! Z ∈ V tale che <z,x> = det(x,u,v) per ogni x ∈ V.

Definiamo quindi z = u ∧ v, oppure u x v ∈ V, è definito come il prodotto vettoriale di u e v.

Formula esplicita in R^3

Sia (e_1, e_2, e_3) la base canonica ortonormale di R^3.
Sia $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Cos'è quindi z = u ∧ v = $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$?

$$z_1 = < z, e_1 > = \det(e_1, u, v) = \det\begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 0 & u_2 & v_2 \\ 0 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = u_2v_3 - u_3v_2$$

$$< z, e_2 > = \det(e_2, u, v) = \det\begin{pmatrix} 0 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 0 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = -u_1v_3 + u_3v_1$$

$$< z, e_3 > = \det(e_3, u, v) = \det\begin{pmatrix} 0 & u_1 & v_1 \\ 0 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = -u_1v_2 + u_2v_1$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} e_1 & u_1 & v_1 \\ e_2 & u_2 & v_2 \\ e_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} e_1 - \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} e_2 + \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} e_3 \in R^3$$

Guardiamo un 📝 esempio: siano u = (1, 2, 1), v = (-1, 1, 1). Calcolare u ∧ v.

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & -1 \\ e_2 & 2 & 1 \\ e_3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e_1 - \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e_2 + \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} e_3 = e_1 - 2e_2 + 3e_3$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sia V uno spazio euclideo di dimensione 3, siano u, v ∈ V. Allora abbiamo queste proprietà con le relative 📚 dimostrazioni:

1. <u ∧ v, x> = det(x, u, v) ∀x ∈ V
2. u ∧ v = -v ∧ u
   a. ∀x ∈ V, <v ∧ u,x> = det(x, v, u) = -det(x, u, v) = < -u ∧ v, x>
3. u ∧ v = 0 ⇔ u,v sono collineari
   a. ⇐: siano u, v collineari. Allora ∀x ∈V la famiglia u, v, x è linearmente dipendente
      i. Det(x, u, v) = 0 → <u ∧ v, x> = 0 → u ∧ v ∈ V^T = 0 → u ∧ v = 0
   b. ⇒: supponiamo u ∧ v = 0. Se u, v fossero linearmente indipendenti, allora si può completare (u,v) in una base (u, v, y) di V, con il teorema della base incompleta
      i. Det(u, v, y) ≠ 0 → <u ∧ v, y> ≠ 0 → u ∧ v ≠ 0, il che è una contraddizione
4. (u + λu') ∧ v = (u ∧ v) + λ(u' ∧ v) ∀λ ∈ R, u' ∈ V
   a. Proprietà del determinante
5. u ∧ (v + λv') = (u ∧ v) + λ(u ∧ v') ∀λ ∈ R, v' ∈ V
   a. proprietà del determinante
6. u ∧ v ∈ $\{u,v\}^T$ = $Span(u,v)^T$
   a. <u ∧ v, u> = det(u, u, v) = 0
   b. <u ∧ v, v> = det(v, u, v) = 0

Norma

$||u \wedge v||^2 = ||u||^2 * ||v||^2 - <u,v>^2$. Abbiamo questa 📚 dimostrazione:

1. **u = 0**, allora $||u \wedge v||^2 = 0$, $||u||^2 ||v||^2 - <u,v>^2 = 0 – 0 = 0$ **OK**
2. **u ≠ 0 e u,v linearmente indipendenti**. Allora v = ∂u per un ∂ ∈ R
   a. Per la proprietà n. 3, abbiamo u ∧ v = 0 → $||u \wedge v||^2 = 0$
   b. u ∧ v = 0 → $||u \wedge v||^2 = 0$
   c. $||u||^2 * ||v||^2 - <u,v>^2 = ∂^2 ||u||^4 - ∂^2 <u,u>^2 = 0$ **OK**
3. **u,v sono linearmente indipendenti**.
   a. Per la proprietà n. 3 abbiamo u ∧ v ≠ 0
   b. Sia y ∈ V tale che (u, v, u) una base di V
   c. Usando Gram-Schmidt → base ortonormale (f,g,h) di V con f = 1/||u|| * u
   d. Span(f,g) = Span(u,v) = u (ovvero un piano)

e. Per la proprietà n. 5 abbiamo $u \wedge v \in U^T = Span(f,g)^T = Span(h) \rightarrow \exists\lambda \in R$ tale che $u \wedge v = \lambda h$. $\lambda \neq 0$ perché $u \wedge v \neq 0$
f. $v \in U$, e (f,g) è una base ortonormale di U. $v = \langle v,f\rangle f + \langle v,g\rangle g \rightarrow ||v||^2 = \langle v,f\rangle^2 + \langle v,g\rangle^2 \rightarrow \lambda^2 = ||u \wedge v||^2 = ||u||^2(||v||^2 - \langle v,f\rangle^2)$
g. $u = ||u||f \rightarrow ||u \wedge v||^2 = ||u||^2\, ||v||^2 - \langle v,u\rangle^2$
h. Allora $\lambda^2 = ||u \wedge v||^2 = \langle u \wedge v, u \wedge v\rangle = \det(u \wedge v, u, v) = \lambda * ||u|| * \det(h, f, \langle v,f\rangle f + \langle v,g\rangle g) = \lambda||u||\, (\langle v,f\rangle \det(h,f,g) + \langle v,g\rangle \det(h,f,g))$
i. $\lambda^2 = \sum\lambda\, ||u||\, \langle v,g\rangle \rightarrow \lambda = \sum\, ||u||\, \langle v,g\rangle$

Spazi affini

Se consideriamo un sistema lineare omogeneo $Ax=0$, le **soluzioni** formano un **sottospazio vettoriale**, cioè chiuso per somma e moltiplicazione scalare.

Ora invece consideriamo un sistema lineare non omogeneo $Ax=B$ con $A \in M_{m,n}(R)$, $B \in R^m$.
Le soluzioni di questo sistema sono date da $X_0 + kerA = \{X_0 + Y | Y \in kerA \subset R^n\}$, dove $X_0 \in R^n$ è una soluzione particolare.

Questo insieme non è uno spazio vettoriale, se $B \neq 0$, perché lo zero (vettore nullo) non è una soluzione.
Se X_1, X_2 sono soluzioni, la loro somma $X_1 + X_2$ non è in generale una soluzione. Tuttavia, se X_1, X_2, $X_3 \in R^n$ sono soluzioni di $Ax=B$, allora anche $X_1 + (X_2 – X_3)$ è una soluzione.

Quindi l'insieme delle soluzioni di $Ax=B$ è uno **spazio affine**, ovvero uno spazio vettoriale che ha "dimenticato l'origine". Ovvero è una traslazione di uno spazio vettoriale. Le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo formano uno spazio affine, non vettoriale.

Uno spazio affine sul campo K è $(A, \vec{A},+)$ dove:
- A è un insieme non-vuoto
- $\vec{A}$ è uno spazio vettoriale su K
- + è una funzione $A\ x\ \vec{A} \rightarrow A, (a, v) \longmapsto a + v$

Tale che:
$$\forall a \in A, \forall u,w \in \vec{A}, (a + v) + w = a + (v + w);\ \forall a,b \in A, \exists!\, v \in \vec{A}\ tale\ che\ a + v = b$$

Per la seconda proposizione, scriviamo $v=\overrightarrow{ab}$ "vettore applicato", con una funzione $A \times A \rightarrow \vec{A}$, $(a,b) \mapsto \overrightarrow{ab}$ tale che $a+\overrightarrow{ab}=b$.

Sia $a_0 \in A$ fissato. Allora, la funzione $\vec{A} \rightarrow A$, $v \mapsto a_0+v$ è biettiva. L'inversa è $A \rightarrow \vec{A}$, $b \mapsto \overrightarrow{a_0 b}$.

Vediamo un 📝 esempio: sia V uno spazio vettoriale, allora (V, V, +) è uno spazio affine.
Sia $x \in R^n$, allora $A = \{x\}$, $\vec{A} = \{0\}$ è uno spazio affine.
Siano $(x_0, y_0) \in R^2$, e $(u,v) \in R^2$. Sia
$$R = \{(x_0 + ut, y_0 + vt | t \in R\} \subset R^2, \vec{R} = Span\big((u, v)\big) = \{(ut, vt) | t \in R\} \subset R^2$$

Sia A uno spazio affine, e siano a,b,c $\in$ A. Allora abbiamo le seguenti proprietà, con le seguenti 📚 dimostrazioni:

1. $\overrightarrow{aa} = 0$
   a. Sia $v = \overrightarrow{aa} \in \vec{A}$. Allora $a = a + \overrightarrow{aa} = a + v = a + (v + 0) = (a + v) + 0 = a + 0$
   b. Quindi a = a + 0. Per l'unicità di v è $\overrightarrow{a0} = v = 0$
2. $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$
   a. $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} = \overrightarrow{aa} = 0 \in \vec{A} \to \overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$
3. $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$ – relazione di Charles
   a. Sia $v = \overrightarrow{ab}, w = \overrightarrow{bc}$. Allora a + (v+w) = (a+v)+w = b+w = c
   b. Per l'unicità abbiamo $\overrightarrow{ac} = v + w = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}$
4. $\forall u, w \in \vec{A}\ \overrightarrow{(a + v)(a + w)} = w - v$
   a. a + w = a + (v + w – v) = (a + v) + (w – v) → $\overrightarrow{(a + v)(a + w)} = w - v$

Dimensione

La dimensione di uno spazio affine A è la dimensione dello spazio vettoriale $\vec{A}$. Abbiamo quindi:

- dimA = 0 → A = {a}, **punto**
- dimA = 1 → **retta** affine
- dimA = 2 → **piano** affine

Sottospazi affini

Sia A uno spazio affine. Un sottospazio affine di A è un sottoinsieme B $\subset$ A tale che il sottoinsieme **(a)** $\vec{B} = \{\overrightarrow{b_1 b_2} | b_1, b_2 \in B\} \subset \vec{A}$ è un sottospazio vettoriale.
(b) $\forall$b $\in$ B, $\forall$v $\in \vec{B}$ si ha b + v $\in$ B $\subset$ A.

(B, $\vec{B}$, +) è uno spazio affine. Abbiamo questa 📚 dimostrazione:

- partiamo dal punto (a), e abbiamo 0 $\in \vec{B} \to \exists b_1, b_2 \in B\ tali\ che\ 0 = \overrightarrow{b_1 b_2} \to B \neq 0$
- $\vec{B}$ è uno spazio vettoriale
- Partiamo dal punto (b), la funzione $A\ x\ \vec{A}, (a, v) \longmapsto a + v$ indica una funzione $B\ x\ \vec{B} \to B$
- Siano b_1, b_2 $\in$ R, allora $\overrightarrow{b_1 b_2} \in B$, e verifica $b_1 + \overrightarrow{b_1 b_2} = b_2$ per l'esistenza
  - In base all'unicità, siano $v, v' \in \vec{B}$ tali che b_1+v = b_2= b_1+v'
  - All'unicità in A abbiamo v = v' $\in \vec{B} \subset \vec{A}$

Vediamo questo primo 📝 esempio: per ogni a $\in$ A, B = {a} $\subset$ A è un sottospazio affine, con $\vec{B} = 0$ è uno spazio nullo.

E poi abbiamo questo secondo 📝 esempio: siano sottospazi di K = K^1. Sia B $\subset$ K un sottospazio affine.
Definiamo $\vec{B} \subset K$ sottospazio vettoriale di $\vec{B} \in \{0,1\}$. Se:

- dimB = 0 : punti {x} $\subset$ K, dove x $\in$ K
- dimB = 1 : $\vec{B} = K$, ma B ≠ 0 → $\exists$b $\in$B

Sia x ∈ K. Se B è un sottospazio affine, allora esistono un punto b ∈ B, un vettore $\vec{v} \in V$, dove v è un sottospazio vettoriale, tali che

$$x = b + \vec{v} \in B \ con \ b \in B, \vec{v} \in V = B - b$$

Per quanto riguarda le rette in R^2, negli sottospazi vettoriali sono rette che passano per l'origine; nei sottospazi affini, sono rette parallele a quelle vettoriali ma spostate, quindi non passano per l'origine.

Sia B ⊂ A un sottospazio affine, allora dimB ≤ dim A, e se dimB = dimA allora A = B.

Sia A uno spazio affine, e W ⊂ $\vec{A}$ un sottospazio vettoriale. Sia a ∈ A; allora $B = a + W = \{a + w | w \in W\} = \{b \in A | \overrightarrow{ab} \in W\}$ è un sottospazio affine di A, e $\vec{B} = W$. Vediamo la seguente dimostrazione:

$$\vec{B} = \{\overrightarrow{b_1 b_2} \mid b_1 b_2 \in B\} = \{\overrightarrow{(a + w_1)(a + w_2)} \mid w_1, w_2 \in W\} = \{w_2 - w_1 \mid w_1, w_2 \in W\} = W$$

$\vec{B} = W$ è quindi un sottospazio vettoriale di $\vec{A}$.

Sia b ∈ B, v ∈ $\vec{B}$ = W. b + v ∈ B?

$$\exists w \in W \ tale \ che \ b = a + w; b + v = (a + w) + v = a + (w + v) \in B$$

Se B ⊂ A è un sottospazio affine, e se a ∈ B, allora $B = a + \vec{B}$. Abbiamo questa dimostrazione:

$\forall u \in \vec{B}, a + u \in B \rightarrow a + \vec{B} \subset B$. Invece, sia b ∈ B, allora $\overrightarrow{ab} \in \vec{B}, e \ quindi \ b = a + \overrightarrow{ab} \in a + \vec{B}. Quindi \ B \subset a + \vec{B}$.

Tutti i sottospazi affini di A sono della forma a + W, a ∈ A, W ⊂ V è un sottospazio vettoriale.

Sia Ax=B un sistema lineare, con A ∈ $M_{m,n}$ (K), B ∈ K^m. Sia S = {X ∈ K^n | Ax=B} ⊂ K^n l'insieme delle soluzioni. Se S ≠ 0 allora S ⊂ K^n è un sottospazio affine, e $\vec{S} = kerA = \{righe \ di \ A\}^{\perp}$.
Questo può essere dimostrato vedendo che S = B_0 + kerA, dove B_0 ∈ S.

Passante

Sia B ⊂ A un sottospazio affine, e a ∈ A. B è **passante** per a se a ∈ B.
Siano p_1, ..., p_s ∈ A, e sia V=Span$(\overrightarrow{p_i p_j}, 1 \leq i, j \leq s)$. Allora il sottospazio affine p_i + v = B non dipende dalla scelta di i ∈ {1, ..., s}.
B è il sottospazio affine generato dai punti p_1, ..., p_s. Se E ⊂ A è un sottospazio affine passante per p_1, ..., p_s allora:
$\substack{V=\vec{B}\subset E \\ p_i \in E} \rightarrow B = p_i + V \subset E$. B è il più piccolo sottospazio affine passante per p_1, ..., p_s.
V = $\vec{B}$ è generato da $\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_s} \rightarrow dimB \leq s - 1$.

Sia $B \subset A$ un sottospazio affine, con $n = \dim B < \infty$. Allora B è generato da n+1 punti. Vediamo questa 📚 dimostrazione:

Sia $(b_1, \ldots, b_n)$ una base di $\vec{B}$, e sia $b \in B$. Sia $p_0=b$, $p_1=b + b_1$, ..., $p_n = b + b_n$. Sia $E \subset A$ il sottospazio generato da $p_0, \ldots, p_n$.

$p_0, \ldots, p_n \in B \rightarrow E \subset B$, perché E è il più piccolo sottospazio passante per $p_0, \ldots, p_n$.

$\vec{E} = Span(\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}) = Span(b_1, \ldots, b_n) = \vec{B} \rightarrow dimE = dimB$. Siccome $E \subset B$, si ha che E = B.

Quindi dimB + 1 è il minimo numero di punti che generano B.

Punti

I punti $p_1, \ldots, p_s \in A$ sono **allineati** se $\exists$ retta $L \subset A$ passante per $p_1, \ldots, p_s$, cioè dim Span$(\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_s})$ **≤ 1**.

I punti $p_1, \ldots, p_s \in A$ sono **complanari** se $\exists$ piano $P \subset A$ passante per $p_1, \ldots, p_s$, cioè dim Span$(\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_s})$ **≤ 2**.

Se $p_1 \neq p_2$ allora $\exists!$ retta passante per p_1, p_2.

Se p_1, p_2, p_3 non sono allineati, allora $\exists!$ piano passante per p_1, p_2, p_3-

Vediamo un 📝 esempio in R^3: determinare la retta R passante per (1,3,0), (1,0,2).

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{R}, \vec{R} = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = Span\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Quindi\ R = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| t \in R\right\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3+3t \\ -2t \end{pmatrix} | \, t \in R\}$$

Rappresentazione parametrica e cartesiana

Un sottospazio affine $B \subset R^n$ può essere dato in due modi:

- **Parametrico**: B = a + W, con *a come punto, $W \subset R^n$ come sottospazio vettoriale*
  - B è quindi il **sottospazio affine passante per il punto A di direzione W**
- **Cartesiano**: in equazioni
  - $B = \{soluzioni\ del\ sistema\ Ax = B\}$
  - $\vec{B} = \{soluzione\ del\ sistema\ Ax = 0\}$ non è $dato\ esplicitamente$
  - $\vec{B}^{\perp} = \{spazio\ generato\ dalle\ righe\ di\ A\}$ è $dato$

Risolvere un sistema lineare significa trovare una rappresentazione parametrica di un sottospazio dato in modo cartesiano.

Guardiamo un 📝 esempio in R^3:

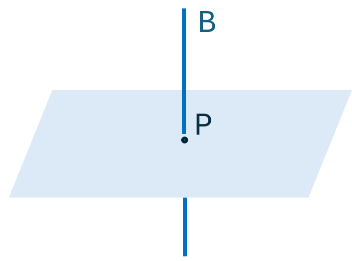
dim 0: punto $p = (p_1, p_2, p_3) \in R^3$

- **Parametrica**: B = {p}, $\vec{B} = 0$

- **Cartesiana**: $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\}$ dove $\begin{cases} A \in M_{3,3} \text{ è } invertibile \\ A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{cases}$, $\vec{B} = \{righe\ di\ A\}^{\perp} = (R^3)^{\perp} = 0$

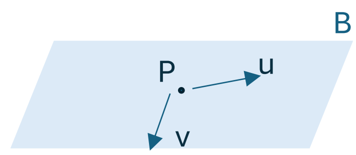
Dim 1: B è una retta

- **Parametrica**: $B = \left\{\begin{pmatrix} p_1 + u_1 t \\ p_2 + u_2 t \\ p_3 + u_3 t \end{pmatrix} | t \in R\right\}\ dove \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B} = Span\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right)$
- **Cartesiana**: $B = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}\right\}\ dove\ A = (a_{ij}) \in M_{2,3}(R), b_1, b_2 \in R, e\ 2 = rg(A) = rg\left(A \middle| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right)$
  - $\vec{B}^{\perp} = Span\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right)$. Abbiamo un piano vettoriale da cui passa B, e la retta è perpendicolare ad esso
- **Come si passa da cartesiana a parametrica**?
  - $\vec{B} = Span\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right)$, per ottenere una descrizione parametrica di B basta trovare un punto p ∈ B. Allora B = p + $\vec{B}$

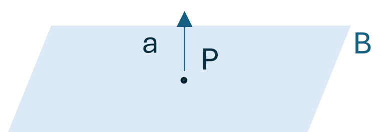


Dim 2: è un piano

- **Parametrica**: $B = \left\{\begin{pmatrix} p_1 + u_1 s + v_1 t \\ p_2 + u_2 s + v_2 t \\ p_3 + u_3 s + v_3 t \end{pmatrix} | s, t \in R^2\right\}, rg\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 2$
  - $\vec{B} = Span\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)$



- **Cartesiana**: $B = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\right\}\ dove\ a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B}^{\perp} = Span(a)$
  - Se $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in B, cioè\ a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = b$



- **Come si passa da parametrica a cartesiana?**
  - B = {p + su + tv | s, t ∈ R}, u,v ∈ R^3. Sia a = u ∧ v ∈R^3, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$
    - b = $a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$ = “<a,p>”
    - $B = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\right\}$

Sia $Q = \left\{ \begin{pmatrix} -1+s \\ -1-s \\ 1+t \end{pmatrix} | s, t \in R \right\}$. Qual è la descrizione cartesiana di Q?

$$p = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a = u \wedge v = \text{"det"} \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & -1 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{"}det\text{"}\left(\begin{matrix} e_1 & 1 \\ e_2 & -1 \end{matrix}\right)$$

$$= -e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | -x_1 - x_2 = 2 \right\}$$

Spazi incidenti

Sia A uno spazio affine, B ⊂ A, B_2 ⊂ A sottospazi affini. B_1 e B_2 sono incidenti se $B_1 \cap B_2 \neq 0$.
Siano $p_1 \in B_1$, $p_2 \in B_2$. Allora B_1 e B_2 incidenti ⇔ $\overrightarrow{P_1P_2} \in \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2} \subset \vec{A}$
Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

- ⇒: sia $p \in B_1 \cap B_2$. Allora $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P} + \overrightarrow{PP_2} = -\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} \in \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2}$
- ⇐: supponiamo $\overrightarrow{P_1P_2} = v_1 + v_2$, dove $v_1 \in B_1$, $v_2 \in B_2$ → $P_2 = P_1 + (v_1 + v_2)$
  - $p = P_2 + (-v_2) = (p_1 + (v_1 + v_2)) + (-v_2) = P_1 + (v_1 + v_2 - v_2) = p_1 + v_1 \in B_1$; $P \in B_1 \cap B_2$.

Se $A = B_1 + B_2$, allora B_1 e B_2 sono incidenti. Se B_1 e B_2 sono incidenti, allora $B_1 \cap B_2 \subset A$ è un sottospazio affine, e $\overrightarrow{B_1 \cap B_2} = \overrightarrow{B_1} \cap \overrightarrow{B_2}$. Vediamo questa 📚 dimostrazione:
Sia $B = B_1 \cap B_2$. Sia W = {bc | b, c ∈ B}. W ⊂ {bc | b, c ∈ B_1} ∩ {bc | b,c ∈ B_2} = $B_1 \cap B_2$

$\overrightarrow{B_1 \cap B_2} \subset W$? Sia $v \in B_1 \cap B_2$. Sia $b_0 \in B_1 \wedge B_2$ ($\neq 0$), allora:

$$\begin{cases} v \in B_1 \\ b_0 \in B_1 \end{cases} \to b_0 + v \in B_1, \begin{cases} v \in B_2 \\ b_0 \in B_2 \end{cases} \to b_0 + v \in B_2 \quad \to b_0 + v \in B \to r = \overrightarrow{b_0(b_0 + v)}$$

Quindi $B_1 \cap B_2$ = W sottospazio vettoriale di A.

Inoltre, se $v \in W = B_1 \cap B_2$, e $b \in B = B_1 \cap B_2$ abbiamo $\begin{cases} b \in B_1, v \in B_1 \to b + v \in B_1 \\ b \in B_2, v \in B_2 \to b + v \in B_2 \end{cases} \to b + v \in B$
Quindi $B_1 \cap B_2$ è un sottospazio affine, B = W = $B_1 \cap B_2$.

Se B_1 e B_2 sono incidenti, allora $\dim(B_1 \cap B_2) = \dim(B_1 \cap B_2)$

$$\dim(B_1 \cap B_2) = \dim(B_1) + \dim(B_2) - \dim\,(B_1 + B_2)$$

Posizioni reciproche nel piano

Siano R_1, R_2 rette affini in R^2. R_1 e R_2 sono **paralleli** se $R_1 = R_2 \subset R^2$. Altrimenti, sono **perpendicolari** (ortogonali) se $R_1 \perp R_2$. Abbiamo 3 possibilità:

1. **paralleli ed incidenti**: se $p \in R_1 \cap R_2$ abbiamo $R_1 = p + R_1 = p + R_2 = R_2$
2. **Paralleli e non incidenti**: non si toccano mai
3. **Non paralleli**: $R_1 \neq R_2$ → $R_1 + R_2 = R^2$, R_1 e R_2 sono incidenti

Posizioni reciproche nello spazio

Retta-retta

Siano L, R $\subset$ R[3] rette affini definite come

$$L = \{p + ut \mid t \in R\}, u \in R^3 \setminus \{0\}, R = \{q + vt \mid t \in R\}, v \in R^3 \setminus \{0\}$$

Le rette sono **parallele** se L = R, cioè se u,v sono colineari, cioè rg(u,v) ≤ 1.
Le rette sono **incidenti** se L $\cap$ R ≠ 0, cioè pq $\in$ Span(u,v).
Le rette sono **perpendicolari** se L $\perp$ R, cioè <u,v> = 0.
Le rette sono **sghembe** se non incidenti e non paralleli, ovvero: $\begin{cases} u, v\ non\ colineari \\ pq\ !\in Span(u,v) \end{cases} \rightarrow$ $\det(pq, u, v) \neq 0$

Vediamo un 📝 esempio: L = $\left\{\begin{pmatrix} 1+2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} | t \in R\right\}, R = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} | s \in R\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(pq, u, v) = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Le rette L e R sono sghembe, con $< u, v > = < \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = \ -1 \neq 0$, L e R non sono perpendicolari.

Retta-piano

$$R = \{p + ut \mid t \in R\}; p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad P = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid a_1x + a_2y + a_3z = b\}; a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

R e P sono **paralleli** se R $\subset$ P, cioè <u,a> = 0.
Per essere **incidenti e paralleli**, se x $\in$ P $\cap$ R, allora R = x + R $\subset$ x + P = P, cioè
$\begin{cases} a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 \\ a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = b \end{cases}$.
P e R **non paralleli**: P + R = R[3], R e P sono incidenti

Dim (P $\cap$ R) = dimP + dimR – dim(R + P) = 2 + 1 – 3 = 0, P $\cap$ R è un punto.

R e P sono **perpendicolari** se R $\perp$ P, cioè *a,u colineari*.

Vediamo un 📝 esempio: Sia $P = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - y = 1\right\}, R = \left\{\begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 3t \end{pmatrix} | t \in R\right\}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. < a, u > = < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} > = 0$. R e P sono paralleli.

p $\in$ P? "<a,p>" = 0 ≠ 1 → p $\notin$ P, non sono incidenti.

Vediamo un altro 📝 esempio: $P = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - y = 1\right\}, R = \left\{\begin{pmatrix} t \\ 1+2t \\ -t \end{pmatrix} | t \in R\right\}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. < a, u > = < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} > = -1 \neq 0$. P e R non sono paralleli, sono incidenti con P ∩ R = {q}.

Cos'è q?

$$q \in R \rightarrow q = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ -t \end{pmatrix} \text{ per un certo } t \in R. q \in P \rightarrow 1 = t - (2t+1) = -t - 1 \rightarrow t = -2 \rightarrow q = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Piano-piano

$$P = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | a_1x + a_2y + a_3z = b\right\}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq 0$$
$$Q = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | c_1x + c_2y + c_3z = d\right\}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

P e Q sono **paralleli** se P = Q, cioè a,c sono collineari ⇔ a ∧ c = 0 ⇔ $rg\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} = 1$

Paralleli + incidenti: sia e ∈ P ∩ Q. Allora P = e + P = e + Q = Q, con P = Q.

Non paralleli: P + Q = R^3, P e Q incidenti
Dim(P ∩ Q) = dimP + dimQ – dim(P+Q) = 2+2-3=1 → P∩Q è una retta. a e c non devono essere colineari.

Perpendicolari: $(P)^\perp \perp (Q)^\perp$ cioè <a,c>=0 ⇔ $(P)^\perp \subset Q$ ⇔ $(Q)^\perp \subset P$).

Vediamo un 📝 esempio: $P = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - y = 1\right\}, Q = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 2x - 2y = 0\right\}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. a e c colineari ⇒ P e Q paralleli. Quindi P = Q oppure P ∩ Q = Ø

Trovare p ∈ P: ad esempio y = 0 = z, x = 1, p = (1,0,0) ∈ P.
p ∈ Q? 2x1 -2x0 = 2 ≠ 0 → p ∉ Q. Quindi P ∩ Q ≠ Ø, non incidenti.

Vediamo un altro 📝 esempio: $P = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - y = 1\right\}, Q = \left\{\begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ t \end{pmatrix} | s, t \in R\right\}. P \cap Q = ?$
Sia p ∈ Q. Allora ∃s,t ∈ R tali che p = (s, s+1, t). s – (s+1) = -1 ≠ 1 → p ∉ P → P ∩ Q = Ø → non incidenti → paralleli.

Vediamo un altro 📝 esempio: $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - y = 1 \right\}, Q = \left\{ \begin{pmatrix} -1+s \\ -1-s \\ 1+t \end{pmatrix} | s,t \in R \right\}, P \cap Q = ?$

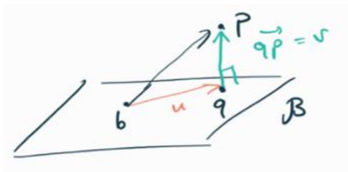
Sia p ∈ Q, p = $\begin{pmatrix} -1+s \\ -1-s \\ 1+t \end{pmatrix}, p \in P? (-1+s) - 1 - s = 2s$

$$p \in P \Leftrightarrow 2s = 1 \Leftrightarrow s = \frac{1}{2}, P \cap Q = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1+t \end{pmatrix} | t \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ t' \end{pmatrix} | t' \in R \right\}$$

Forma cartesiana di Q: Q = -x-y = 2 → a = (1, -1, 0), c = (-1, -1, 0) → <a,c> = <(1,-1,0), (-1,-1,0)> = 0. P e Q sono perpendicolari

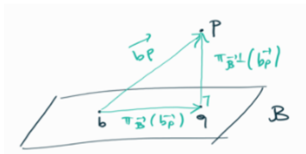
Proiezione ortogonale

Sia A uno spazio affine. A è **euclideo** se A è uno spazio vettoriale euclideo.
Sia A uno spazio euclideo, B ⊂ A sottospazio affine.



Sia p ∈ A. Allora ∃! q ∈ B t.c. qp ∈ $B^\perp$.
Abbiamo la seguente 📚 dimostrazione:

- **Unicità**: se q, q' ∈ B tali che qp ∈ $B^\perp$, qp' ∈ $B^\perp$ allora
  - $\begin{cases} qq' = qp - (qp') \in B^\perp \\ q \in B \\ q' \in B, qq' \in B \end{cases} \rightarrow qq' \in B^\perp \cap B = 0 \rightarrow qq' = 0 \; e \; q = q'$
- **Esistenza**: sia b ∈ B, B ≠ 0
  - bp = u+v dove u ∈ B, v ∈ $B^\perp$
  - Sia q =b+u ∈ B. allora bq=u → qp=qb+bp = -u+u+v = v ∈ $B^\perp$.



La funzione π_B: A → B, p |→q è la proiezione ortogonale su B.
Per q = π_B (p), qp = $\pi_{B\perp}$(bp), bq = π_B (bp) per ogni b ∈ B.

Vediamo un 📝 esempio: Sia $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 1 \right\} \subset R^3$. Calcolare π_H(p) dove p = (1,1,0) ∈ R^3.

Trovare b ∈ H? b = (b_1, b_2, b_3) con $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ → b_2=b_3=0 → b_1 = 1, b = (1,0,0) ∈ H

$$bp = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, H^\perp = Span(a), dove \; a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^5$$

$$\pi_{H^\perp}(bp) = \frac{< bp, a >}{< a, a >} a = \frac{< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \pi_{H^\perp}(bp) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to q = \pi_H(p)$$

$$= p + \left(-\pi_{H^\perp}(bp)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \pi_H(p)$$

Distanza

Sia A uno spazio affine euclideo. Siano p, q ∈ A. La distanza da p a q è d(p,q) = ||pq|| ∈ R.
Sia p ∈ A, e B ⊂ A un sottospazio affine. La **distanza** da p a B è d(p, B) = min{d(p,b) | b ∈ R} ∈ R.

d(p,B) = d(p,q) = ||pq| dove q = π_B(p). Abbiamo questa 📚 dimostrazione:
q ∈ B → d(p,q) ≥ d(p,B). Sia b ∈ B. Allora d(p,b)^2 = ||pb||^2 = ||pq||^2 + ||qb||^2 ≥ d(p,q)^2 → d(p,b) ≥ d(p,q).

Quindi d(p,B) = ||$\pi_B^\perp$(bp)|| per ogni b ∈ B

Distanza tra punto e piano

Sia $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in R^3, H \subset R^3\ piano\ affine; H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | a_1 x + a_2 y + a_3 z = c \right\}. calcolare\ d(p, H).$

Sia $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, H^\perp = span(a), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in H. Allora\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c$

$$d(p, H) = \left\| \pi_{H^{-\perp}}\left(b^{-1}{}_p\right) \right\| = \left\| \frac{< b\vec{p}, a >}{< a, a >} a \right\| = \frac{|< b\vec{p}, a >|}{||a||}$$

$$< b\vec{p}, a > = \sum_{i=1}^{3} a_1 (p_i - b_i) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i p_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i p_i \right) - c$$

$$d(p, H) = \frac{|(\sum_{i=1}^{3} a_i p_i) - c|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i{}^2}}$$

Ecco un 📝 esempio: sia $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + y - 2z = 1 \right\}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3. Calcolare\ d(p, H).$

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$, $c = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$.

$$d(p,H) = \frac{|1*0+1*1+(-2)*1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Distanza tra punto e retta in R^3

Sia $L = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 + a_1 t \\ b_2 + a_2 t \\ b_3 + a_3 t \end{pmatrix} \mid t \in R \right\} \subset R^3$ *una retta*, p ∈ R^3. b = (b_1, b_2, b_3) ∈ L. Sia a = (a_1, a_2, a_3)

$$d(p,L) = \left|\left|\pi_{L^{-\perp}}(\overrightarrow{bp})\right|\right| = \frac{||b\vec{p} \wedge a||}{||a||}$$

Vediamo un 📝 esempio: sia p = (1, -1, 0) ∈ R^3, e $L = \left\{ \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ 2t-1 \end{pmatrix} | t \in R \right\}$. Calcolare d(p,L)

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in L, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, ||a|| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}; b\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b\vec{p} \cap a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 \\ e_3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} e_1 + \det \begin{pmatrix} e_2 & -1 \\ e_3 & 1 \end{pmatrix} = -3e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$||b\vec{p} \cap a|| = \sqrt{(-3)^2+1^2+1^2} = \sqrt{11}; d(p,L) = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{66}}{6}$$

Applicazioni affini

Siano A, B spazio affini sul campo K. Una **mappa** f: A → B si chiama **applicazione affine** se esiste un'applicazione lineare f: A → B tale che f(a)f(b) = f(ab) per ogni a, b ∈ A

f: A → B affine se e solo se per ogni c ∈ A la funzione f_C: A → B, v |→ f(c) f(c+v) è lineare. In questo caso, f_c non dipende da e, e f = Y_c per ogni c ∈C.

Abbiamo questa 📚 dimostrazione:

- ⇒: supponiamo f affine
  - f_c(v) = f(c) f(c+v) = f(c(c+v)) = f(v) → f(c) è lineare
- ⇐: supponiamo f_c lineare per ogni c ∈ A. A affine → A ≠ Ø. Fissiamo c ∈ A.

Siano a,b ∈ A. Allora

f(a)f(b) = -f(c)f(a) + f(c)f(b) = -f(c)f(c+ca) + f(c)f(c+cb) = -f_c(ca) + f_c(cb) = f_c(-ca+cb) = f_c(ab)

Quindi possiamo prendere f = f_c, che è lineare.

Quindi, f è determinata da f_l per f affine, e ∀a,b ∈ A f(b) = f(a) + f(ab).

Vediamo un 📝 esempio: B ⊂ A sottospazio, con A euclideo. π_B : A → B proiezione ortogonale su B. Siano p ∈ B, p ∈ A. Sia q = π_B(p), con

$$bq = \pi_B(bp) \to \pi_B(p) = b + \pi_{B^{-1}}\left(b_p^{-1}\right) = \pi_B(b)$$

Quindi π_B : A → B è affine, e π_B = π_B.

Riferimenti affini

Sia A uno spazio affine. Un riferimento affine di A è una coppia (p, R) dove p $\in$ A, e R è una base finita di A.

Vediamo un 📝 esempio: K^n, ((0,0,1,0), e_1, ..., e_n) riferimento affine.
Le **coordinate** di un punto a $\in$ A, rispetto al riferimento affine (p,r) sono le coordinate di $p_a \in$ A rispetto alla base R.

Sia f: A → B affine. Sia (p,R) riferimento affine di A, (q, J) riferimento affine di B. Per a $\in$ A abbiamo:

q f(a) = q f(p) = f(p) f(a) = q f(p) + f(pa)

Sia M = $M^R_G(f) \in M_{m,n}$ (K), m = dim(B), n = dim(A). Siano x $\in R^n$ coordinate di a rispetto a (p,R), B $\in R^m$ coordinate di f(p) rispetto a (q, G), y $\in R^m$ coordinate di f(a) rispetto a (q, G). Allora y = b + mx.

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{m+1}$$

Isometrie

Sia A uno spazio affine euclideo. Una mappa f: A → A si chiama isometria se $\forall$ a,b $\in$ A, d(f(a), f(b)) = d(a,b). f conserva le distanze.
Una mappa f: A → A è un'isometria se e solo se f è affine, e f è ortogonale. Ogni isometria è una biezione, e abbiamo questa 📚 dimostrazione:
Siano x,y $\in$ A tali che f(x) = f(y). Allora

$$0 = d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y) = \big||xy|\big| \rightarrow \overrightarrow{xy} = 0 \rightarrow x = y$$

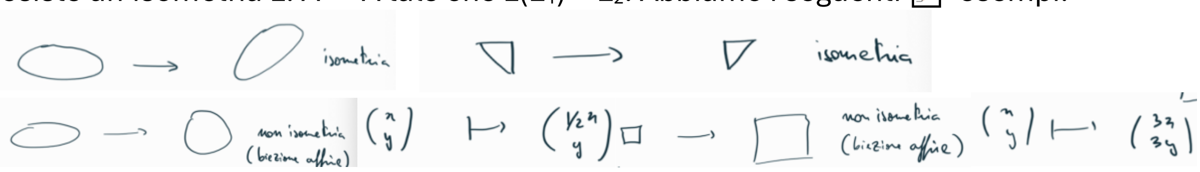
Quindi f è iniettiva. Fissiamo a $\in$ A (A ≠ Ø), sia b $\in$ A. Allora, siccome f è ortogonale, f è suriettiva, allora $\exists$v $\in$ A tale che f(a)b= f(v), con b = f(a) + f(a)b = f(a) + f(v) = f(a+v). Quindi, f è suriettiva.

Se f: A → A isometria, allora f è biettiva. f^{-1}: A → A è anche un'isometria

[d(f^{-1}(a), f^{-1}(b))=d(f(f^{-1}(a)), f(f^{-1}(b)))=d(a,b)

Sottoinsiemi equivalenti

Sia A uno spazio affine euclideo. I sottoinsiemi E_1, E_2 di A sono equivalenti, o congruenti, se esiste un'isometria L: A -> A tale che L(E_1) = E_2. Abbiamo i seguenti 📝 esempi:



Isometrie del piano affine R^L: L: R^2 → R^2

Abbiamo tre tipologie:

- **Traslazione**: L(a) = a + v per ogni a $\in$ A, v $\in$ A fissato
- **Rotazione**: L data da $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$

- **Simmetrie**: L data da $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Ogni isometria del piano è composta da isometrie del tipo a), b) e c). Vediamo un 📝 esempio:

Siano A, B $\subset K^n$ sottospazi affini.

- Se A e B sono congruenti, ∃ isometrie L: R^n → R^n tale che L(A) = B. Allora L(A) = B, e L è biettiva. $dim\vec{A} = dim\vec{B} \to \dim A = \dim B$
- Supponiamo che dimA = dimB = d. Sono congruenti?
  - Siano a ∈ A, b ∈ B. Sia a_{11}, ..., a_d b.a.n. di A, completata in una b.o.n. a_1, ..., a_m di R^n. Sia b_1, ..., b_d b.o.n. di di B, completata in una b.o.n. b_1, ..., $b_n \in R^n$.

∃! Applicazione lineare g: R^n → R^m tale che $g(a_i) = b_i$ per ogni i, allora g è ortogonale.

$$g(A) = g(Span(a_1, ..., a_d)) = Span(g(a_1), ..., g(a_d)) = Span(b_1, ..., b_d) = B.$$

∃! Applicazione affine L: R^m → R^n tale che L(a) = b, u = g

$$L(x) = b+g(ax) \to L(A) = b+g(A) = b + B = B$$

Inoltre L è affine + L = g ortogonale, quindi L è un'isometria. Quindi A e B congruenti ⇔ dimA = dimB.

Coniche sul piano

Un iperpiano in R^n è un sottospazio affine di dimensioni n – 1 = {soluzioni di 1 equazione lineare} da un polinomio di grado 1; son tutti congruenti.

Una quadrica in R^n = {soluzioni di 1 equazione quadratica}, da un polinomio di grado 2.

Una **conica** è una quadrica in R^2, data dall'equazione $f(x_1, x_2) = 0$ dove

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c$$

$$C = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\} \subset R^2, \text{ con } a_{11} \neq 0 \text{ oppure } a_{22} \neq 0 \text{ oppure } a_{12} \neq 0$$

Sia $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} \in M_{2,2}, B = (b_1 \quad b_2). Sia\ \bar{A} = \begin{pmatrix}A & {}^tB\\ B & C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{12} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{pmatrix}$. Sia $X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \bar{X} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}, allora\ {}^t(\bar{X})\bar{A}\bar{X} = (x_1 \quad x_2 \quad 1)\begin{pmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1\\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + b_2\\ b_1x_1 + b_2x_2 + c\end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + b_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_2x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 = f(x_1, x_2) \to {}^t(\bar{X})\bar{A}\bar{X} = f(x_1, x_2)$

$$L_{\bar{A}} = \{(x_1, x_2) | f(x_1, x_2) = 0\} = \{ {}^t(\bar{X})\bar{A}\bar{X} = 0$$

Sia L: R^2 → R^2 un'isometria. X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) tali che $L(y_1, y_2) = (x_1, x_2)$.

Sia P = M(L) rispetto alla base canonica di R^2. D = L(0,0) ∈ R^2, allora X = D + PY.

$$\bar{X} = \begin{pmatrix}X\\ 1\end{pmatrix}, \bar{Y} = \begin{pmatrix}Y\\ 1\end{pmatrix} \in R^3 \to \bar{X} = \begin{pmatrix}P & D\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y\\ 1\end{pmatrix} = \bar{P}\bar{Y}$$

${}^t(X)AX = {}^t(PY)A\,PY = {}^tY\,({}^tP\,AP)Y = {}^tY\,A'\,Y$ dove $A' = {}^tP\,AP = \begin{pmatrix}{}^tP & 0\\ {}^tD & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & {}^tB\\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & D\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^tP & 0\\ {}^tD & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AP & AD + {}^tB\\ BP & BD + C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^tP\,AP & *\\ * & *\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A' & *\\ * & *\end{pmatrix}$, con $A' = {}^tP * AP$

Quindi ${}^tX * AX = 0 \Leftrightarrow {}^tY * A'Y$, cioè ƒ(L(A')) = L(A).
P = M(Q) $\in O_2$, cioè $P^{-1} = {}^tP$. $A' = {}^tP * AP = P^{-1} AP$ → A e A' sono similari. Ma invece ~~A~~ e ~~A'~~ non sono similari, perché $P \notin O_3$ (R).

Ogni conica **non vuota** $E \subset R^2$ è equivalente ad una e solo una delle seguenti (a > 0, b > 0):
- **Non degenere** (cioè $det\ \bar{A} \neq 0$)
    - **Ellisse**: $ax^2 + by^2 = 1$; detA > 0, $(a_{11} + a_{22}) \det \bar{A} < 0$
        - $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
    - **Iperbola**: $ax^2 - by^2 = 1$; detA < 0
        - $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
    - **Parabola**: $ax^2 = y$; detA = 0
        - $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
- **Degenere**: $det\ \bar{A} = 0$
    - **det A = 0**
        - **2 rette parallele**: $x^2 = q$
        - **1 retta**: $x^2 = 0$
    - **det A < 0**
        - **2 rette incidenti**: $x^2 = y^2$
    - **det A > 0**
        - **1 punto**: $x^2 + y^2$

La 📚 dimostrazione di queste avviene tramite il **teorema spettrale**.
Se $\det \bar{A} \neq 0, \det A > 0, (a_{11} + a_{22}) \det \bar{A} > 0$ allora abbiamo una conica vuota non degenere.
Se $a_{11} + a_{22} = 0$ → det A = $-a_{11}^2 - a_{12}^2 \leq 0$. La conica vuota può essere degenere.

L'ellisse $ax^2 + by^2 = 1$ è una circonferenza quando a = b. a e b sono gli autovalori di A.
$x_A(x) = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + \det A = (\det(xI_2 - A)$; $\Delta = b^2 - 4ac = (a_{11} + a_{22})^2 - 4 * \det A$
L'ellisse è quindi una **circonferenza** sse $(a_{11} + a_{22})^2 = 4 * \det A$.

Come faccio a distinguere 2 rette parallele e una retta? Sia $\partial = -a_{11}c - a_{22}c + b_1^2 + b_2^2$. Quindi se **$\partial > 0$** allora sono 2 rette parallele, e se **$\partial = 0$** allora è un punto. Se abbiamo **$\partial < 0$** allora la conica non esiste.

La conica è vuota se e solo se:
- $\det \bar{A} \neq 0, \det A > 0, (a_{11} + a_{22}) \det \bar{A} > 0$
- $\det \bar{A}, \det A = 0, -a_{11}c - a_{22}c + b_1^2 + b_2^2 < 0$

Abbiamo una **iperbole equilatera** sse $x^2 - y^2 = 1$, con una matrice simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, con la condizione che $a_{11} + a_{22} = 0$, e $\det \bar{A} \neq 0, \det A < 0$.

Guardiamo degli 📝 esempi: il primo esempio è C = {$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$}, con $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \det \bar{A} = 8 - 1 - 1 - 2 + 2 = -12 \neq 0$

L è una conica non degenere, det A = 4 – 1 = 3 > 0. Abbiamo anche $(a_{11} + a_{22}) \det \bar{A} = 4(-12) = -48 < 0$, quindi C è un'elisse.
Verifichiamo anche che $(a_{11} + a_{22})^2 = 4^2 = 16$, e 4 detA = 4*3 = 12 ≠ 16, quindi non è una circonferenza.

Vediamo un altro 📝 esempio: C = {$x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y = 0$}, con $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}. \det \bar{A} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 1 = 0$, C è una conica degenere. det A = $2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} < 0$, allora C sono due rette incidenti.

Vediamo un altro 📝 esempio: C = {$x^2 + 2xy + 2y^2 + 1 = 0$}, con $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \det \bar{A} = \det A = 1 > 0 \ \textit{non degenere}; (a_{11} + a_{22}) \det \bar{A} = 1 + 2 = 3 > 0, C \text{ è } \textit{vuota}.$

Vediamo un altro 📝 esempio: C = {$x^2 + 2xy + y^2 + 2y + 1$}, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \det \bar{A} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \ \textit{non è degenere}. \det A = 0 \ \textit{ed è una parabola}.$

Vediamo un altro 📝 esempio: C = $x^2 + 4xy - y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \textit{con} \det \bar{A} = -1 + 2 + 2 + 1 - 4 - 1 = -1 \neq 0, \ \textit{non degenere}. \det A = -1 - 4 = -5 < 0, \textit{quindi } C \text{ è } \textit{un iperbole}.$

Invarianti

a. det A' = detA (similari)
b. $det\bar{A} = \det({}^t\bar{P}\bar{A}\bar{P}) = \det ({}^t\bar{P}) * \det(\bar{A}) * \det(\bar{P}) = \det(\bar{A}) * \det(\bar{P})^2, \bar{P} = \begin{pmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
    a. Sviluppo di det P rispetto all'ultima riga: $\det \bar{P} = \det P \in \{1, -1\} \rightarrow (\det \bar{P})^2 = 1 \rightarrow \det(\bar{A}') = \det(\bar{A})$
c. $a_{11}' + a_{22}' = a_{11} + a_{22}$ (Traccia(A') = Traccia(A))

Le isometrie rispettano a, b e c.