Casi speciali del metodo del simplesso

Soluzioni ottime alternative

Si verifica quando esiste più di una soluzione ottimale per un problema di programmazione lineare.
Geometricamente, l'insieme delle soluzioni ottime forma un intero spigolo del **poliedro ammissibile**.

Come si riconosce dal tableau?

- Il test di ottimalità è superato, cioè *tutti i coefficienti nella riga z sono non negativi*.
- Se nella riga z è presente un **costo ridotto nullo** ($z_j - c_j = 0$) che corrisponde a una *variabile non di base*.

Se questa condizione si verifica, significa che *la variabile non di base può entrare in base senza alterare il valore della funzione obiettivo*.

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Soluzione
z	0	0	2	1	12
x_1	1	0	1	-1	4
x_2	0	1	-1	2	2

Soluzione ottimale ✓

Problema illimitato

Se la funzione obiettivo può essere migliorata all'infinito, senza mai raggiungere un valore massimo.
La regione ammissibile non è limitata in almeno una direzione e la funzione obiettivo aumenta lungo quella direzione.

Durante un'interazione, dopo aver scelto la variabile che deve entrare in base (*costo ridotto negativo*), si esegue il test del rapporto minimo per determinare quale variabile uscirà dalla base.
Un problema è illimitato se **tutti i coefficienti nella colonna della variabile entrante sono negativi o zero**.

$\max z = 3x_1 + x_2 \qquad -x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

	x_1	x_2	s_1	soluzione	
z	-4	0	-1	1	$\rightarrow 1/_{-4} = -4$
x_2	-1	1	1	1	$\rightarrow 1/_{-1} = -1$

Costo ridotto di x_1 é -4

Visto che non ci sono valori positivi nella colonna di x_1, il test del rapporto minimo non può essere eseguito

Problemi non ammissibili

Se non esiste alcuna soluzione che soddisfi tutti i vincoli contemporaneamente. Questo significa che la regione ammissibile è un insieme vuoto.

Per i problemi con vincoli di tipo ≥ o **=**, non è sempre possibile trovare una soluzione di base ammissibile iniziale.

$\min z = 2x_1 + 3x_2 \qquad x_1 + x_2 = 1$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Non può esistere un valore che soddisfi sia il primo che il secondo

Il metodo delle due fasi

Quando i vincoli sono di tipo ≥ o =, la soluzione all'origine (x1=0, x2=0,...) non è ammissibile. Per risolverlo si usa una procedura a due fasi.

Trovare una soluzione di base ammissibile

Si introducono delle **variabili artificiali**.

- Per ogni vincolo di tipo ≥ o =, aggiungiamo una variabile artificiale non negativa
  - X1 + x2 ≥ 10 —> x1 + x2 - s1 + **a1** = 10, s1 = variabile di avanzo, a1 = variabile artificiale
  - X1 + x2 = 5 —> x1+x2+a2 = 5

Quindi formuliamo un nuovo problema ausiliario di **minimizzazione** dove l'obiettivo è *minimizzare la somma di tutte le variabili artificiali*.

Se riusciamo a portare il valore minimo di W a zero, significa che tutte le variabili artificiali sono uscite dalla base, e la soluzione trovata è una soluzione di base ammissibile per il problema originale.

Se il valore minimo di W è maggiore di zero, vuol dire che non è stato possibile portare tutte le variabili artificiali a zero. *Non esiste alcuna soluzione ammissibile per il problema originale*, e quindi il problema è non ammissibile.

Risoluzione del problema originale

1. Si parte dal tableau finale della Fase 1, che contiene una soluzione di base ammissibile
2. Si rimuove la riga della funzione obiettivo ausiliaria W, e si eliminano tutte le colonne relative alle variabili artificiali
3. Si reinserisce la riga della funzione obiettivo originale del problema. Necessario aggiornarla in modo che i coefficienti delle variabili di base siano zero.
4. Si applica il normale algoritmo del simplesso per risolvere il problema, e trovare la soluzione ottimale.

Frontiera della regione ammissibile

Le soluzioni ottimali di un problema di programmazione lineare si trovano sempre su questa frontiera.
Si prende ogni vincolo e si sostituisce il simbolo di disuguaglianza con il **simbolo di uguaglianza** - crea un'equazione di frontiera. Si dividono per il numero di variabili decisionali:

- **Due variabili decisionali**: equazioni di frontiera rappresentano delle rette
- **Tre variabili decisionali**: le equazioni di frontiera sono dei piani
- **N variabili**: equazioni di frontiera definiscono degli iperpiani

Vertici ammissibili

Geometricamente, è un punto che **non** si trova su un segmento che connette altri due punti ammissibili.
Un punto come (2,3) non è un vertice ammissibile perchè giace sul segmento che collega (0,3) e (4,3).

Un vertice ammissibile è la soluzione di un sistema di equazioni lineari ottenuto dall'intersezione di n equazioni di frontiera, dove n è il numero di variabili decisionali del problema.

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$x_1 \leq 4$
$2x_2 \leq 12$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1, x_2 \geq 0$

n variabili = 2

① Identificare tutte le equazioni di frontiera del problema

Vincolo	Valore
$x_1 \geq 0$	$x_1 = 0$
$x_2 \geq 0$	$x_2 = 0$
$x_1 \leq 4$	$x_1 = 4$
$2x_2 \leq 12$	$2x_2 = 12$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	$3x_1 + 2x_2 = 18$

② Selezionare i punti in coppie

1. $x_1 = 0,\ x_2 = 0$
2. $x_1 = 0,\ 2x_2 = 12 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 6$
3. $x_1 = 0,\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \rightarrow x_2 = 9$
4. $x_1 = 4,\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \rightarrow 12 + 2x_2 = 18 - 12\ \frac{6}{2} = 3$
5. $x_1 = 4,\ 2x_2 = 12 \rightarrow x_2 = 6$
6. $x_1 = 4,\ x_2 = 0$

Bisogna verificare se tutti i vincoli sono validi

	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_1 \leq 4$	$x_2 \leq 6$	$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	
✓ 1	✓	✓	✓	✓	✓	
✓ 2	✓	✓	✓	✓	✓	$0 + 2(6) = 12$
✗ 3	✓	✓	✓	✗	...	$2x_2 = 18/2 = 9$
✓ 4	✓	✓	✓	✓	...✓	
✗ 5	✓	✓	✓	✓	✗	$3(4) + 2(6) = 24$
✓ 6	✓	✓	✓	✓	✓	$12 \leq 18$

Vertici ammissibili adiacenti

Ogni iterazione del metodo del simplesso equivale a uno spostamento da un vertice ammissibile a un vertice adiacente. Il movimento avviene lungo uno degli spigoli della regione ammissibile.

Geometria del movimento

Per un problema con **due variabili**, n=2, la regione ammissibile è un poligono, e gli spigoli sono *segmenti di retta*. Da ogni vertice partono due spigoli che portano ai vertici ammissibili adiacenti.

Per un problema con più variabili, la regione ammissibile diventa un **poliedro** e le equazioni di frontiera sono **piani**. Un vertice ammissibile si trova all'intersezione di tre equazioni di frontiera.

Proprietà fondamentali

- **La soluzione ottimale è sempre un vertice ammissibile**
    - **Soluzione unica**: se esiste una sola soluzione ottimale, questa è sempre un vertice ammissibile
    - **Soluzioni multiple**: almeno due di esse saranno vertici ammissibili adiacenti. La soluzione ottima si trova lungo uno spigolo che li unisce
- **Esiste un numero finito di vertici**
    - Garantito dal fatto che ogni vertice è l'intersezione di n equazioni di frontiera
    - Il numero di possibili combinazioni di vincoli è un numero finito
- **Test di ottimalità**
    - Se un vertice ammissibile non ha vertici adiacenti con un valore migliore per la funzione obiettivo, allora quel vertice è la soluzione ottimale
    - La regione ammissibile è un **insieme convesso**
        - Un insieme convesso è una collezione di punti tale che, per ogni coppia di punti all'interno dell'insieme, l'intero segmento che li collega appartiene anch'esso all'insieme
        - L'**angolo** interno della regione ammissibile, misurato in ogni vertice, è sempre **minore** di 180°

Vertici non ammissibili

Se la soluzione di un sistema di equazioni **viola** uno o più **vincoli** non inclusi in quel sistema, allora l'intersezione è un vertice non ammissibile.

Interpretazione algebrica

- **Scelta della variabile entrante**: quando il metodo del simplesso sceglie la variabile che deve entrare in base, sta scegliendo uno degli spigoli che partono dal vertice ammissibile attuale
- **Movimento lungo lo spigolo**: aumentare il valore della variabile che sta entrando in base, partendo da zero, corrisponde a muoversi lungo lo spigolo selezionato
- **Raggiungimento del nuovo vertice**: movimento si ferma quando una delle variabili di base attuali raggiunge il valore zero, diventando la variabile uscente dalla base. Quindi corrisponde a un **nuovo vertice ammissibile**.

Concetto di base

Per un problema in forma standard con m vincoli e n variabili, una **base** è una matrice quadrata B di dimensione m x m che si ottiene selezionando m colonne linearmente indipendenti della matrice completa dei vincoli A.

- **Di base**: m variabili associate alle colonne della matrice B
- **Non di base**: restanti n-m variabili che non sono incluse nella base

Soluzione di base

Si impostano le variabili non di base a zero (xN=0), e risolvendo il sistema di equazioni per trovare i valori delle variabili di base

- A può essere divisa in B (matrice di base) e N (matrice non di base)
- Il sistema di vincoli Ax=b diventa Bx_B+Nx_N=b
- Impostando x_N=0, si ottiene Bx_B=b; x_B = B^(-1)b

Un punto è un vertice ammissibile della regione ammissibile se e solo se è una soluzione di base ammissibile del problema in forma standard. Ogni passo corrisponde a un movimento geometrico su un vertice della regione ammissibile.
Il numero di soluzioni di base (vertici) è limitato, e corrisponde al **numero di combinazioni possibili di m variabili prese da n variabili totali** (n su m), numero finito.

Un vertice adiacente è un vertice che può essere raggiunto da un altro con un singolo passo dell’algoritmo del simplesso.
Due vertici ammissibili sono adiacenti se e solo se le loro corrispondenti basi differiscono di una sola variabile.