PREREQUISITI

Es. 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & 1/2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 1 \\ 2 & 11 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & 1/2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 8 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 1 \\ 2 & 11 & -4 \end{pmatrix}$$

SOMMA MATRICI $= A+B \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

MOLT. MATRICI $= A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad C_{11} = (1\cdot 2) + (2 \cdot 1) = 4$ (1° riga A + 1° colonna B)

$C_{12} = (1\cdot 0) + (2\cdot 3) = 6$

$$\begin{aligned}
= \; & C_{11} = (2\cdot 9) + (3\cdot 8) + (0\cdot 0) = 18+24 = 42 + (-2) = 43 \\
& C_{12} = (2\cdot 0) + (3\cdot -7) + (0\cdot 0) = -21+0 = -21 \\
& C_{13} = (2\cdot 1) + (3\cdot -6) + (0\cdot -4) = 2-18 = -16+0 = -16 \\
& C_{21} = (-2\cdot 9) + (5\cdot 8) + (-1\cdot 0) = -18+40 = 22+10 = 32 \\
& C_{22} = (-2\cdot 0) + (5\cdot -7) + (-1\cdot 0) = -35 + (-2) = -37 \\
& C_{23} = (-2\cdot 1) + (5\cdot -6) + (-1\cdot -4) = -2-30+4 = -24+1 = -23 \\
& C_{31} = (1\cdot 9) + (1/2\cdot 8) + (4\cdot 0) = 13+2 = 15 \\
& C_{32} = (1\cdot 0) + (1/2\cdot -7) + (4\cdot 0) = -7/2 + 11 = \frac{15}{2} \\
& C_{33} = (1\cdot 1) + (1/2\cdot -6) + (4\cdot -4) = 1-3-16 = -18 + (-4) = -22
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 43 & -21 & -16 \\ 32 & -37 & -27 \\ 15 & 15/2 & -22 \end{bmatrix}$$

Es. 2

$$-3 \begin{pmatrix} 2/9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}^T + (-3 \;\; 5 \;\; -8) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{pmatrix} = -3 \cdot (2/9 \;\; 4 \;\; 1) = (-\cancel{6}^{2}/\cancel{9}_{3} \;\; -12 \;\; -3) = (-2/3 \;\; -12 \;\; -3)$$

$$(-3 \;\; 5 \;\; -8) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{pmatrix} = \begin{aligned} & C_{11} = (-3\cdot -2) + (5\cdot 10) + (-8\cdot 2) = 6+50-16 = 40 \\ & C_{12} = (-3\cdot 0) + (5\cdot -2) + (-8\cdot 11) = -10-88 = -98 \\ & C_{13} = (-3\cdot 0) + (5\cdot 1) + (-8\cdot -1) = 5+8 = \end{aligned}$$

$$\text{TOT.} = (-2/3 \;\; -12 \;\; -3) + (40 \;\; -98 \;\; 13) = \left(\frac{-2+12}{} \quad -1\,-98 \quad +13\right) =$$

$$= \left(\frac{118}{3} \quad -110 \quad 10\right)$$

Es. 2

$$\det\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&4\\-3&5&-1\end{pmatrix}=(-1)^{1+1}\,1\,\det\begin{pmatrix}1&4\\5&-1\end{pmatrix}+(-1)^{\cdots2}\,2\det\begin{pmatrix}\cdot&4\\\cdot&\cdot\end{pmatrix}+(-1\ \ 4\ \ \cdots\begin{matrix}1\\-3\ 5\end{matrix})=$$

$$=((1\cdot-1)-(4\cdot5))-2(-3+12)+(15\cdots)=\cdots-20-\cancel{18}+\cancel{8}=\cdots2$$

$$\det\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&8\\0&15&-1\end{pmatrix}=(-1)^{1+1}(-1)\det\begin{pmatrix}1&8\\15&-1\end{pmatrix}=\cdots120)=-(\cdots1)=21$$

$$\det\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&1/18\end{pmatrix}=(-1)^{3+3}\,1/18\,\det\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{8}(-9)=-1/2$$

$$\det\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}=-1-6=-5\qquad \det\begin{pmatrix}6&-3\\-2&1\end{pmatrix}=6-6=0\qquad \det(4)=4$$

Es. 3

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&4\\-3&5&-1\end{pmatrix}\text{ inversa }\rightarrow$$ Si scrive $[A|I]$ e si fanno op. di riga fino a trovare $[I|A^{-1}]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\3&1&4&0&1&0\\-3&5&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1=R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-5&0&-7&1&-2&\cdot\\3&1&4&0&1&\cdot\\-3&5&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-5&0&-7&1&-2&\cdot\\\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&0\\0&6&3&0&1&1\end{array}\right)=$$

$$\xrightarrow{R_3=1/3R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-5&0&-7&1&-2&0\\3&1&4&0&1&0\\0&2&1&0&1/3&1/3\end{array}\right)\xrightarrow{R_1=-1/5R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&7/5&-1/5&+2/5&0\\3&1&4&0&1&0\\0&2&1&0&1/3&1/3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=R_2-3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&7/5&-1/5&2/5&0\\0&1&-1/5&3/5&-1/5&0\\0&2&1&0&1/3&1/3\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&7/5&-1/5&2/5&0\\0&1&-1/5&3/5&-1/5&0\\0&0&&&&\end{array}\right)$$

$$1-2/5=\frac{\ }{5}$$

Es. 4

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 1/2\, x_3 = 1/3 \end{cases}$$

→ FORMA MATRICIALE

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = 3 - 3x_1 \\ 2x_2 + 1/2(3 - 3x_1) = 1/3 \\ 2x_1 - x_2 + 3 - 3x_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 3 - 3x_1 \\ 2x_2 + 3/2 - 3/2\, x_1 - 1/3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$$x_2 = -x_1$$

$$\begin{cases} x_3 = 3 - 3x_1 \\ -2x_1 + \frac{9-2}{6} - 3/2\, x_1 = 0 \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 3 - 3x_1 \\ -2x_1 + 7/6 = 0 \\ x_2 = -x_1,\ x_1 = -x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} +2x_1 = +7/6^3 \cdot 1/2^1 = 1/3 \\ x_2 = -1/3 \\ x_3 = 3 - 3 \cdot -1/3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 - x_3 \\ 2(4 - 2x_2 - x_3) + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3(4 - 2x_2 - x_3) + 4x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 - x_3 \\ 8 - 4x_2 - \cancel{2x_3} + 3x_2 + \cancel{2x_3} - 7 = 0 \\ 12 - 6x_2 + 3x_3 + 4x_2 + 3x_3 - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 - x_3 \\ 1 - x_2 = 0 \rightarrow +x_2 = +1 \\ 12 - 6 + 3x_3 + 4 + 3x_3 - 11 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 2 - x_3 \qquad x_2 = 1 \qquad 6x_3 = -1$$

$$x_3 = -1/6 \qquad x_2 = 1 \qquad x_1 = \frac{12+2}{6} = \frac{14}{6} = 7/3$$

GRADIENTE $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

PUNTI CANDIDATI → $\nabla f(x,y) = (0,0)$

DERIVATE

$$x^n = nx^{n-1}$$
$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$(f:g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Es. 7

$f(x) = x^3 - 3x + 7$

ⓐ DOMINIO E CODOMINIO
$\forall x \in \mathbb{R}$ ↳ Per convenzione $\forall x \in \mathbb{R}$

ⓑ IMMAGINE -1 → si sostituisce il valore dato all'interno della funzione

$(-1)^3 + 3 + 7 = 9$

ⓒ FUNZIONE LINEARE → di solito è del tipo $f(x) = ax$
↳ passare per $f(0) = 0$
↳ non avere potenze superiori a 1

Quindi non è lineare perché è x^3

ⓓ GRAFICO FUNZIONE:
↳ f è crescente/decrescente concava/convessa in
[-2,0]: né crescente né decrescente, concava
[1,2]: crescente

↳ massimo e minimo relativo
Visto che è una funzione che è illimitata sopra e sotto, il massimo e minimo assoluto non esiste, mentre esiste solo il relativo
↳ massimo relativo: $[-1, 9]$
↳ minimo relativo: $[1, 5]$

Es. 8 $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$
↳ f è crescente o decrescente in $x = 2$, $x = 1/3$, $x = -2$

$f'(x) = -4x^3 + 4x$

Per verificare se la funzione è crescente o no, si sostituisce il punto dato e si calcola la funzione → se <0: decrescente
>0: crescente

$x = 2 \rightarrow -4(2)^3 + 4(2) = -4(8) + 4(2) = -32 + 8 = -24 < 0$
decrescente

$x = 1/3 \rightarrow -4\left(1/3\right)^3 + 4(1/3) = -4\left(1/3^3\right) + 4/3 = -4/27 + 4/3 = \frac{-4+36}{27} = \frac{32}{27} > 0$

crescente

$x = -2 \rightarrow -4(-2)^3 + 4(-2) = -4(-8) + 4(-2) = 32 - 8 = 24 > 0$

crescente

↳ f é concava in $x = -5$, $x = 1/9$

Bisogna quindi prima fare la derivata seconda, e si sostituisce il punto
Se <0 concava, se >0 convessa

$f'(x) = -4x^3 + 4x \qquad f''(x) = -12x^2 + 4$

$x = 5 \rightarrow -12(5)^2 + 4 = -12(25) + 4 = -296$ concava

$x = 1/9 \rightarrow -12(1/9)^2 + 4 = -12/81 + 4 = \frac{-12+324}{81} = \frac{312}{81} > 0$ convessa

Es. 9 massimo e minimo relativo

ⓐ $f(x) = \log(2x) - 1/2\, x^2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x} - x = 1/x - x =$

$\log(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

PUNTI CRITICI: $f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{x} - x = 0 \rightarrow \frac{1-x^2}{x} = 0$

$1 - x^2 = 0 \qquad x = 0$

$+x^2 = +1$

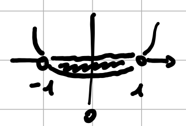
$x = \pm 1 \qquad \rightarrow x = 1$

$\log(2x) \rightarrow x > 0$, quindi scartiamo $x = 0$, $x = -1$

Adesso per il segno: $\frac{1-x^2}{x} > 0 \rightarrow 1 - x^2 > 0 \qquad -x^2 > -1$

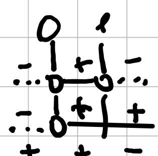
$x^2 < 1$

$x < \pm 1$



$0 < x < 1$

$x > 0$



$x = 1$ massimo relativo
perche' passa da + a -
Sostituisci -1 nella fz per trovare la y

(b) $f(x) = \frac{e^x}{x+5}$ $\quad f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f'(x) = \frac{e^x(x+5) - e^x}{(x+5)^2} > 0$

$g(x) = x+5 \quad g'(x) = 1$

N. $e^x(x+5) - e^x > 0$

$e^x(x+5-1) > 0$

$\hookrightarrow e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow x+4 > 0 \rightarrow x > -4$

D. $(x+5)^2 > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Minimo relativo in $x = -4$

$y = e^{-4}$

y Minimo $= \frac{e^{-4}}{-4+5} = \frac{e^{-4}}{1} = e^{-4}$

(c) $f(x) = 8x - 2$

$f'(x) = 1 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$ perché non ha massimi o minimi

Es. 10

(a) $f(x,y,z) = x^6 - 4^{2yz}$

Il gradiente é il vettore delle derivate parziali di ciascuna variabile

$\frac{\partial f}{\partial x}(x^6 - 4^{2yz}) = 6x^5 - 0 = 6x^5$

$\frac{d}{du} a^u = a^u \ln(a) \frac{du}{dy}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 4^{2yz} \ln(4)\, 2z = -2z \ln(4) \cdot 4^{2yz}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -2y \ln(4) \cdot 4^{2yz}$

(b) $f(x,y) = 3x^2 + 6x^3y + 2y^3 - 5xy$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 18x^2y - 5y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3 + 6y^2 - 5x$

(c) $f(x,y) = 4x - y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1$

Es. 11 matrice Hessiana

$f(x) = 2x^3 + 2y^3 + 96/x + 96/y$

Prima si calcola il gradiente per trovare i punti critici

$$\frac{\partial}{\partial x} = 6x^2 - \frac{96}{x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = 6y^2 - \frac{96}{y^2}$$

Per trovare i punti critici, poniamo le due derivate = 0

$$6x^2 - \frac{96}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{6x^4 - 96}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{6x^4}{6} = \frac{96}{6}^{16} \rightarrow x^4 = 16 \quad x = \pm 2$$

$$6y^2 - \frac{96}{y^2} = 0 \rightarrow \frac{6y^4 - 96}{y^2} = 0 \rightarrow y = \pm 2$$

Se uno dei punti critici trovati fosse = 0, allora non sarebbe valido

$(2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$ → tutte le combinazioni possibili

Adesso dobbiamo fare le derivate seconde

$$f''(x) = 12x + \frac{192}{x^3} \qquad f''(y) = 12y + \frac{192}{y^3}$$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$ perché le due variabili non si mescolano nella funzione

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & 0 \\ 0 & f_{yy} \end{pmatrix} \qquad D = f_{xx} f_{yy}$$

sostituendoci i punti a uno a uno e valutando

TEST HESSIANA → si fa poi il determinante
$D(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$

- se $D > 0$ e $f_{xx} > 0$ → minimo relativo
- se $D > 0$ e $f_{xx} < 0$ → massimo relativo
- se $D < 0$ → punto sella
- se $D = 0$ → niente

$$f_{xx} = 12x + \frac{192}{x^3} \qquad f_{yy} = 12y + \frac{192}{y^3}$$

ⓐ $(2,2)$

$$f_{xx} = 12 \cdot 2 + \frac{192}{2^3} = 48 \qquad f_{yy} = 48$$

$D = 48 \cdot 48 > 0$ e $f_{xx} > 0 \rightarrow$ minimo relativo

ⓑ $(2,-2)$

$f_{xx} = 48 > 0 \qquad f_{yy} = -48 < 0 \qquad D = 48 \cdot -48 < 0$

↓ pto sella

ⓒ $(-2,2) \rightarrow$ punto sella

ⓓ $(-2,-2) \rightarrow D < 0 \rightarrow$ massimo relativo

PROBLEMI

① Azienda produce pinze e chiavi, richiede

acciaio, materia prima

fase di lavorazione

fase di assemblaggio

	per una chiave	per una pinza	Disponibilità giornaliera
Acciaio	1,5	1	27000
Macchine lav	1	1	21000
Macchine ass.	0.3	0,5	9000

Domanda

	chiavi	pinze
max giornaliera	15000	16000
guadagno x 1000	\$130	\$100

Funzione obiettivo: $130X_c + 100X_p \rightarrow$ guadagno totale x 1000 unità

X_c = chiavi

X_p = pinze

Adesso bisogna scrivere i vincoli per l'assemblaggio visto che il guadagno è in 1000, allora anche la disponibilità giornaliera lo sarà

$1{,}5X_c + 1X_p \leq 27$ acciaio

$1X_c + 1X_p \leq 21$ macchina lavorazione

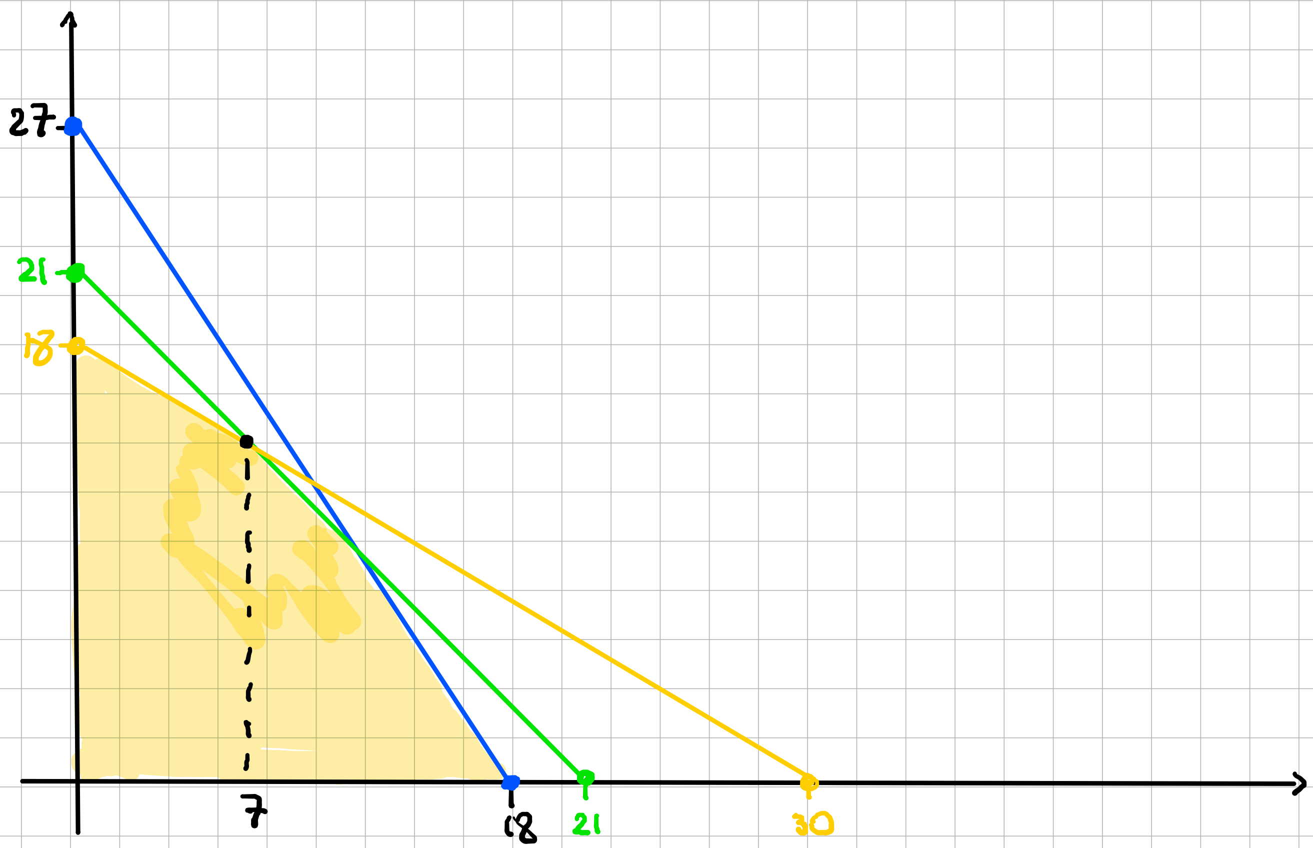
$0.3X_c + 0.5X_p \leq 9$ macchina acciaio

Adesso dobbiamo scrivere i vincoli di domanda giornaliera per chiavi e pinze

$X_C \leq 15$, $X_C \leq 16$ → sempre /1000 perché il guadagno è in 1000

$X_C \geq 0$, $X_P \geq 0$ → non negatività perché quella c'è sempre

Vertice iniziale: (0,0)



- $1{,}5X_C + X_P \leq 27$ → $X_C = 0$, $X_P = 27$ → (0,27); $X_P = 0$, $\frac{1.5X_C}{1.5} = \frac{27}{1.5} = 18$ → (18,0)

- $X_C + X_P \leq 21$ → $X_C = 0$, $X_P = 21$ → (0,21); $X_P = 0$, $X_C = 21$ → (21,0)

- $0.3X_C + 0.5X_P \leq 9$ → $X_C = 0$, $X_P = 0.5X_P = 9$, $= 18$ → (0,18); $X_P = 0$, $X_C = \frac{0{,}3X_C}{0.3} = \frac{9}{0.3} = 30$ → (30,0)

Es. 2

Pasto deve contenere almeno 2hg proteine
4hg carboidrati
3hg grasso

Ingredienti	Proteine	Carboidrati	Grassi	Costo
1	1	4	3	3
2	3	4	2	6
3	2	3	3	5
4	3	2	4	6
ALMENO	2	4	3	//
	vincolo 1	vincolo 2	vincolo 3	

x_1, x_2, x_3, x_4 : quantitativi in hg di ciascun ingrediente

Fz obiettivo: minimizzare il costo
Vincoli: quantitativi di ciascun componente

$$\min 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 2$$
$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 4$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Es. 3 Turni di lavoro

n. dipendenti necessari:

Day	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
No.	14	13	15	16	19	18	11

Ogni dipendente: 5 giorni consecutivi + 2 giorni di riposo
minimizzare il numero totale dipendenti

Mo → Mo-Tu-We-Th-Fr ; Tu → Tu-We-Th-Fr-Sa; We → We-Th-Fr-Sa-Su
Th → Th-Fr-Sa-Su-Mo; Fr → Fr-Sa-Su-Mo-Tu ; Sa → Su-Mo-Tu-We-Th
Su → Su-Mo-Tu-We-Th
Si prende poi il valore di dipendenti necessari per l'ultimo giorno dei turni

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 18$$
$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$$
$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 14$$
$$x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 13$$
$$x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$$

$x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 16$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

Es. 4 massimizzare

100.000.000$, cinque categorie di prestiti

		Return	Risk
x_1	First	9	3
x_2	Second	12	6
x_3	Personal	15	8
x_4	Commercial	8	2
x_5	Govt.	6	1

Non investiti: no rischi, 3%

→ rischio medio ≤ 5 solo soldi investiti

→ almeno il 20% in debiti comm.

→ 2° mutuo + debiti personale < 1° mutuo

b budget = 100.000.000$; I = investimenti; r_i return; v_i rischio

x_i: quantità denaro investito

conto sicuro = $(b - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \cdot 0.03$

f.z. obiettivo: $\max \; r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + r_4 x_4 + r_5 x_5 + (b - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \cdot 0.03$

rischio medio: $\dfrac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 + v_5 x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 5$

investire debiti: $x_4 \leq 0.2b$ → $0.2 = 20\%$ → vuol dire quindi il 20% del buget
b = budget

2° mutuo: $x_3 + x_2 \leq x_1$

Investimenti totali non superano il budget: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq b$

Non negatività: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Es. 5 minimizzare i costi

	Boys	Women	Men	cost
Tv	5	1	3	600
Mag	2	6	3	500
Target	24	18	24	

X_1: pubblicità TV; X_2: pubblicità

$$\min\ 600X_1 + 500X_2$$
$$5X_1 + 2X_2 \geq 24 \rightarrow \text{boys}$$
$$X_1 + 6X_2 \geq 18 \rightarrow \text{women}$$
$$3X_1 + 3X_2 \geq 24 \rightarrow \text{men}$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Es.6 massimizzare i ricavi

	Vapor pressure	Octane Number	selling price
Regular	≤ 7	≥ 80	\$ 9.80
Premium	≤ 6	≥ 100	\$12.00

Benzina regular
Benzina premium

	Vapor Pressure	octane Number	Availability
A	8	83	2700
B	20	109	1350
C	4	74	4100

Miscele non utilizzate: vendute a 8\$/Barile

$C = \{A, B, C\}$ insieme costituenti
P_c = pressione costituente
O_c = numero ottanei costituente
d_c = disponibilità costituente

$M = \{R, P\}$ insieme miscele
rP_m = requisito pressione miscela
rO_m = requisito numero ottani
r_m = prezzo miscela

X_{cm} = percentuale costituente c nella miscela m

Fz obiettivo: devo fare per benzina regolare, premium e inutilizzata. Ogni miscela deve avere ovviamente un prezzo

$$\text{Max } v_R(d_A X_{AR} + d_B X_{BR} + d_C X_{CR}) + \quad \rightarrow \text{regolare}$$
$$v_P(d_A X_{AP} + d_B X_{BP} + d_C X_{CP}) + \quad \rightarrow \text{premium}$$
$$8(d_A X_{AS} + d_B X_{BS} + d_C X_{CS}$$

↓ prezzo dato dal problema

PL grafico

$$\max\ z = 40x + 50y$$
$$x + 2y \leq 40$$
$$4x + 3y \leq 120$$
$$x, y \geq 0$$

$x+2y \le 40 \rightarrow$

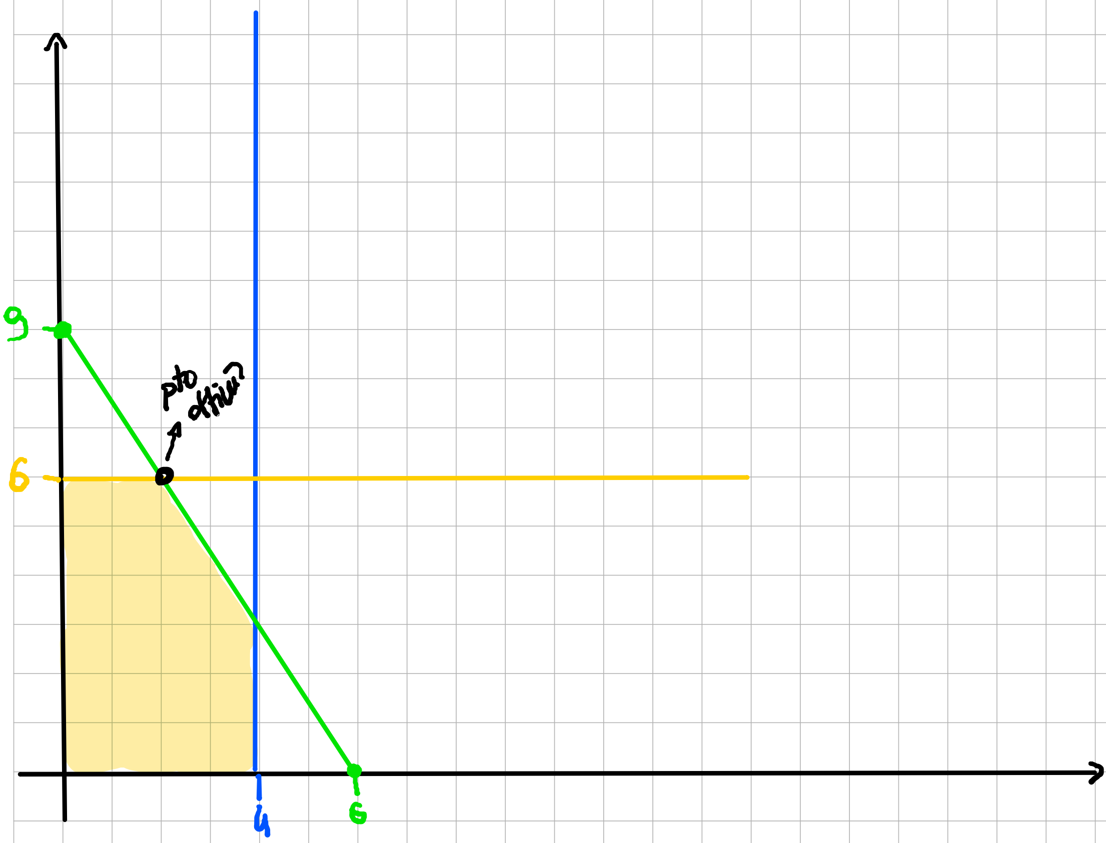
$x=0$	$y=0$
$2y=40$ $y=20$	$x=40$
$(0,20)$	$(40,0)$

$4x+3y \le 120 \rightarrow$

$x=0$	$y=0$
$3y=120$ $y=40$	$4x=120$ $x=30$
$(0,40)$	$(30,0)$

$40x+50y \rightarrow x=24 \quad y=8 \qquad 40\cdot 24+50\cdot 8=1360$

$$\max \ 3x_1 + 5x_2$$
$$x_1 \leq 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$x_1 \leq 4 \rightarrow (4,0)$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \rightarrow$ $x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = 0$

$2x_2 = 18$ $\quad$ $3x_1 = 18$

$x_2 = 9$ $\quad$ $x_1 = 6$

$(0,9)$ $\quad$ $(6,0)$

$2x_2 \leq 12 \rightarrow (0,6)$

max z = 4 +5 y

$x + 2y \leq 40$

$x + y \ 20$

$x_i \geq 0$

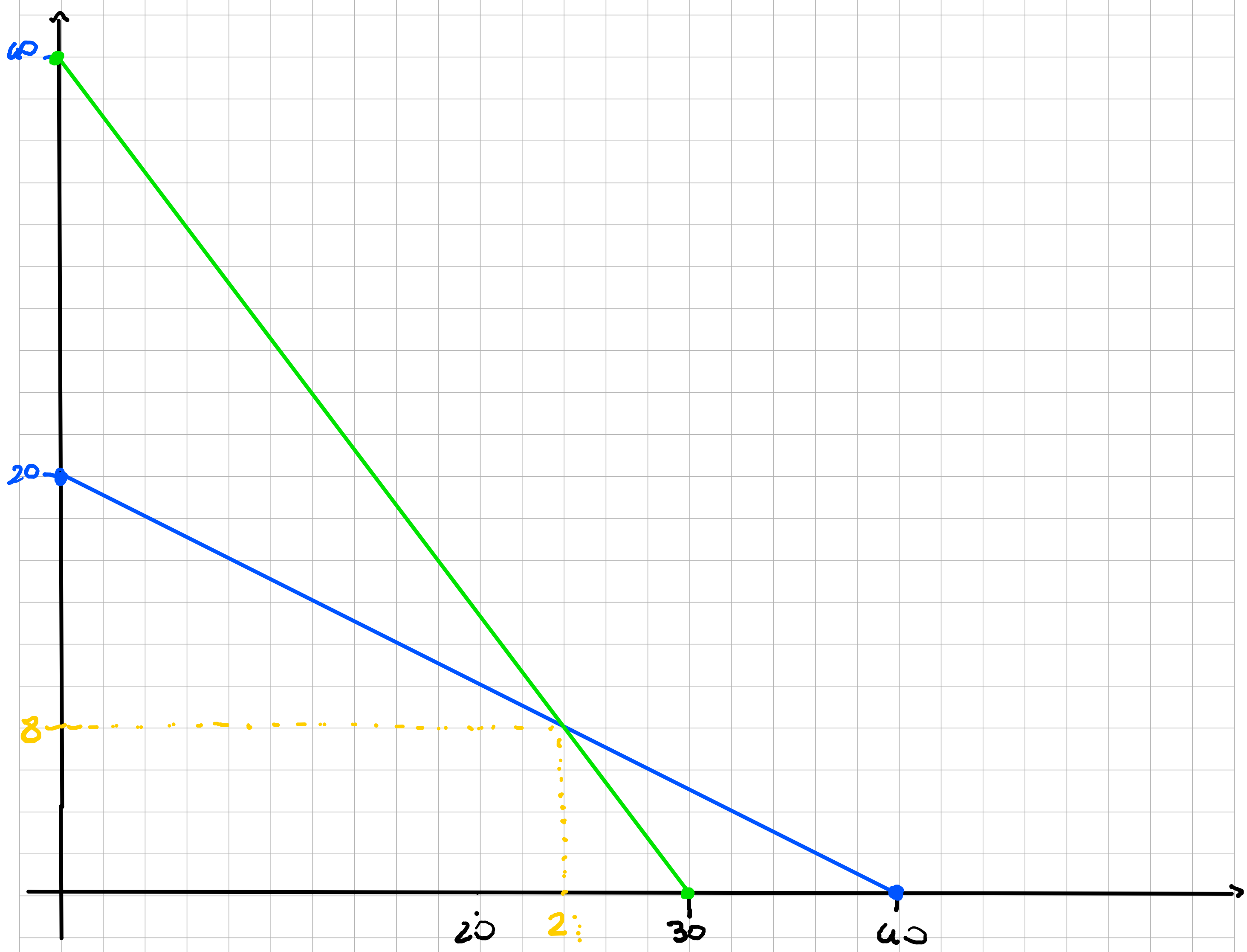
→ a ico

$x + 2y \leq 40 \rightarrow$

$x = 0$	$y = 0$
$2y = 40$	$x = 40$
$y = 20$	
$(0,20)$	$(40,0)$

$4x + 3y \leq 120$

$x = 0$	$y = 0$
$3y = 120$	$4x = 120$
$y = 40$	$x = 30$
$(0,40)$	$(30,0)$



→ ta ellare

$\max z = 40x + 50y$

$x + 2y + S_1 = 40$

$x + y + S \ \ 2$

	x	y	S_1	S_2	TN	
z	-40	-50	0	0	0	
S	1	2	1	0	40	$\rightarrow \frac{40}{2} = 20$
S	4	3	0	1	120	$\rightarrow \frac{120}{3} = 40$

$1 = \frac{\dots}{\text{pivot}} = \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, 20\right]$

nuo..o ... ve ... v... ...ttu $-$ (coeff co... m... pivot × nuova riga pivot)

$z = \left[\dots 0 - \left(- \dots 0 \cdot \frac{1}{\dots}\right), \dots 0 \cdot (50 \dots), 0 - \left(-50 \cdot \frac{1}{2}\right), 0 - (-50 \cdot 0), 0 - (-50 \cdot 20) \right] =$ coeff -50

$= \left[\dots 0 + 25, -50 : 50, 5, \ , 1000 \right] = \left[-15, 0, 25, 0, 1000 \right]$

$s_2 = \left[4 \dots \left(\dots \frac{1}{2}, \dots (\dots), 0 \dots \left(3 \cdot \frac{\dots}{2}\right), 1 - (3 \cdot 0), 120 - (3 \cdot 20) \right] =$ coeff. 3

$= \left[\dots.5, \ , -1{,}5, 1, 60 \right]$

	x	y		s_2	TN	
z	−...	0	25	0	10.0	
y	1/...			0	...0	$\rightarrow \frac{20}{2} = 10$
s_2	2.5	0	−...5		60	÷ 24

$s_2 = [\dots, 0, \dots .6, 0.4, \dots 4]$

$z = \left[\dots 15 - \dots 5 \cdot 1), 0 - (\dots 15 \cdot 0), 25 \dots (\dots 15 \cdot -0.6), 0 - (-15 \cdot 0.4), 1000 - (-15 \cdot 24) \right] =$ coeff -15

$= [\dots, 0, .6, 6, \dots 0$

$y = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{\dots}{2} \cdot 1\right), 1 \dots \frac{\dots}{2} \cdot 0), \frac{1}{\dots} - \left(\frac{1}{2} \cdot 0.6\right), 0 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0.4\right), 20 - \left(\frac{1}{2} \cdot 24\right) \right] =$ coeff $1/2$

$= [0, \dots, \dots, \dots, \dots 1]$

	x	y	s_1	s_2	TN
z	.	0	.6	.	1.60
y	.	1	..	−0.2	..
x	.	.	...6	0.4	.4

$x = 24, y = 8$, max $z = 1360$

Es. 2

$\max\ 30X_c + 100X_p$ | $-130X_c - 100X_p$

$1.5X_c + X_p \le 27$ | $1.5X_c + X_p + S_1 = 27$

$X_c + X_p \le 21$ | $X_c + X_p + S_2 = 21$

$0.3X_c + 0.5X_p \le 9$ | $0.3X_c + 0.5X_p + S_3 = 9$

$X_c \le 15,\ X_p \le 16$ | $X_c + S_4 = 15$

$X_p + S_5 = 16$

	X_c	X_p	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	TN	
z	-130	-100			0		0	0	
S_1	1.5		1				0	27	→ 18
S_2			0	1	0	0	0	21	→ 21
S_3	0.	0.5			1	0	0	9	→ 30
S_4	1	0					0	15	→ 15
S_5	0	1	0		0		1	16	→ 0

$S_3 = [1,\ 1.6,\ 0,\ 3.33,\ 0,\ 0,\ 30]$

$z = [-130 - (-130 \cdot 1),\ -100 - (-130 \cdot 1.66),\ 0,\ ,\ 0 - (-130 \cdot 3.33),\ 0,\ 0,\ 0 - (-130 \cdot 30)]$ coeff -130

$= [0,\ 115.8,\ 0,\ 0,\ 432.9,\ 0,\ 0,\ 3900]$

...