Teoria della dualità

Ogni problema di programmazione lineare, chiamato **problema primale**, ha associato un altro problema di programmazione lineare chiamato **problema duale**.

Problema primale (max Z)

Problema originale, con l'obiettivo di **massimizzare** una funzione Z, soggetto a una serie di **vincoli ≤** e vincoli di non negatività.

Problema duale (min W)

Problema associato al primale. Ha un obiettivo di **minimizzazione** una funzione W, e una serie di **vincoli ≥**. Per passare dal problema primale a quello duale, ci sono varie trasformazioni:

- i **termini noti** del **primale** diventano i **coefficienti della funzione obiettivo** nel **duale**
- I **coefficienti della funzione obiettivo** del **primale** diventano i **termini noti** dei vincoli nel **duale**
- La **matrice dei coefficienti dei vincoli** viene **trasposta**; le righe della matrice primale diventano le colonne della matrice duale e viceversa
- Il numero di **vincoli del primale** (m) diventa il **numero di variabili del duale**
- Il numero di **variabili del primale** (n) diventa il **numero di vincoli del duale**

Primale

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{3 vincoli}\left\{\begin{array}{l} x_1 \le 4 \\ 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \end{array}\right.$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Duale

$$\min W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \rightarrow \text{3 variabili}$$

$$y_1 + 3y_3 \ge 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \ge 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

$\ge \;\rightarrow\; \le$

$\le \;\rightarrow\; \ge$

$= \;\rightarrow$ libera

↓

matrice coefficienti vincoli:

	x_1	x_2
vincolo 1	1	0
vincolo 2	0	2
vincolo 3	3	2

trasposta →

y_1	y_2	y_3	
1	0	3	vincolo 1
0	2	2	vincolo 2

Teorema della dualità forte

Stabilisce una relazione diretta tra la soluzione ottima del problema primale e quella del problema duale.

Il problema duale ammette una soluzione ottima se e solo se il problema primale ammette una soluzione ottima.

Il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale è uguale al valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale.

Questo vuol dire che non è necessario risolvere entrambi i problemi: se si risolve uno e si trova il valore ottimo di esso, allora si conosce automaticamente il valore ottimo dell'altro.

- Prendiamo come esempio il **problema primale** con la soluzione ottimale (x1,x2)=(4,3) con **valore Z = 36**
- In base al teorema, la soluzione ottimale del problema duale deve essere **W = 36**

Prezzi ombra

Le **variabili** della soluzione **ottima** del problema primale sono i **prezzi ombra** dei vincoli del primale.
Rappresenta il **cambiamento marginale** nel valore ottimo della funzione obiettivo (Z) se il termine noto di quel vincolo viene aumentato di una unità, mantenendo tutto il resto costante.
Il prezzo ombra di un vincolo i del problema primale è il valore della variabile duale y_i nella soluzione ottima del duale.

Duale : y_1, y_2, y_3 => valore ottimale di questi diranno quanto aumenterebbe il profitto totale se la disponibilità delle risorse fosse aumentata di una unità

↳ Vincolo 1 : $x_1 \leq 4$ → quanto aumenterebbe il profitto totale se avessi un'ora in più di capacità in quello stabilimento

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

STESSA COSA

Teorema degli scarti complementari

Si basa sulla relazione tra le variabili e i vincoli di entrambi i problemi.

1. **Regola per le variabili primari**
   1. Se una variabile primale x_j è **positiva** nella soluzione ottimale (x_j > 0), allora il vincolo duale j corrispondente deve essere un'**uguaglianza stretta** nella soluzione ottimale del duale
   2. Se un **vincolo duale j** non è un'uguaglianza stretta (>), allora la variabile primale x_j deve essere **zero**
2. **Regola per le variabili duali**
   1. Se una variabile duale y_i è positiva nella soluzione ottimale (y_i > 0), allora il vincolo primale i corrispondente deve essere un'**uguaglianza stretta** nella soluzione ottimale del primale
   2. Se un vincolo primale i non è un'uguaglianza stretta (<), allora la variabile duale y_i deve essere **zero**

Sol. ottima $\Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 3$

vincolo primale 1 : $x_1 \leq 4 \Rightarrow$ sostituisco la soluzione ottima $\quad 4 \leq 4$ SI UGUAGLIANZA STRETTA

$\hookrightarrow$ variabile y_1 positiva

vincolo primale 2 : $2x_2 \leq 12 \Rightarrow$ sostituisco $\quad 6 \leq 12$ NO UGUAGLIANZA STRETTA

$\hookrightarrow$ variabile y_2 zero

vincolo primale 3 : $3x_1 + 2x_2 \leq 18 \Rightarrow$ sostituisco $\quad 3(4)+2(3) = 18 \leq 18$

SI UGUAGLIANZA STRETTA

$\downarrow$

variabile y_3 positiva

Come trovare la soluzione duale dal tableau primale

Per un problema primale in forma standard (tutti vincoli di tipo ≤), la soluzione ottima del duale si trova nella **riga z del tableau finale del primale**.

- I valori delle **variabili duali** (y_i) sono i **costi ridotti delle variabili di scarto** (s_i) che si trovano nella riga z
- Le variabili duali che corrispondono a vincoli primari che sono **uguaglianze strette** nella soluzione ottima avranno un valore positivo
- Le variabili duali che corrispondono a vincoli primari che **non sono uguaglianze strette** avranno un valore zero

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	soluzione
z	0	0	0	3/2	1	36

$\rightarrow$ valore ottimo W = 36

variabili scarto (s_1, s_2, s_3)

$s_1 = 0$
$s_2 = 3/2$
$s_3 = 1$

$\Rightarrow$ sol. ottima problema duale

$y_1 = 0$
$y_2 = 3/2$
$y_3 = 1$

Dualità debole (soluzioni ammissibili)

Se x è ammissibile per il primale, y è ammissibile per il problema duale, C e B sono le matrici dei

coefficienti delle fz obiettivo, allora **Cx ≤ By**
Il valore della funzione obiettivo del primale (massimizzazione) è sempre minore o uguale al valore della funzione obiettivo del duale (minimizzazione).

Se invece il primale è di minimizzazione, il duale è di massimizzazione, quindi la dualità debole sarà **Cx ≥ By**

Dualità forte (soluzione ottimale)
(Stessa cosa del debole ma con **Cx = By**)
Quando entrambi i problemi hanno soluzioni ottimali, i valori coincidono.
Quindi è la spiegazione di risolvere il duale.

Soluzione complementare
Ad ogni iterazione del simplesso, il metodo costruisce una coppia (x,y):
- x: soluzione del vertice ammissibile del primale
  - y: soluzione complementare del duale, non necessariamente ammissibile perché potrebbe essere al di fuori della regione ammissibile (dualità debole)

Quando il primale diventa ottimo, anche il duale diventa ammissibile ed ottimo perché hanno lo stesso valore (dualità forte)

Prezzi ombra: componenti della soluzione ottimale del duale, indicano il valore marginale di ciascun vincolo nel primale. Ovvero, sono i valori delle variabili di base nel duale.
Valore aggiuntivo che si otterrebbe nel profitto totale se disponessimo di una unità in più della risorsa *i*, mantenendo fisse le altre condizioni del problema.
- y > 0: avere un'unità in più della risorsa i aumenterebbe il profitto
- Y = 0: avere più risorsa non cambia il profitto
- Y < 0: avere più risorsa ridurrebbe il profitto

Teorema di dualità

Entrambi ammissibili e fz obiettivo limitata
Se P ha almeno una soluzione ammissibile e la fz obiettivo è limitata, anche D ha una soluzione ammissibile. Si applica la proprietà debole e forte (in corrispondenza delle soluzioni ottime).

Primale ammissibile ma fz obiettivo illimitata
Se P ha soluzioni ammissibili ma la funzione obiettivo può crescere all'infinito (per massimizzazione), allora D non ha soluzioni ammissibili

Primale non ammissibile
P non ha soluzioni ammissibili, D può non avere soluzioni ammissibili o avere una fz obiettivo illimitata. Senza punti ammissibili nel primale, il duale può essere anch'esso vuoto oppure avere soluzioni che crescono all'infinito