

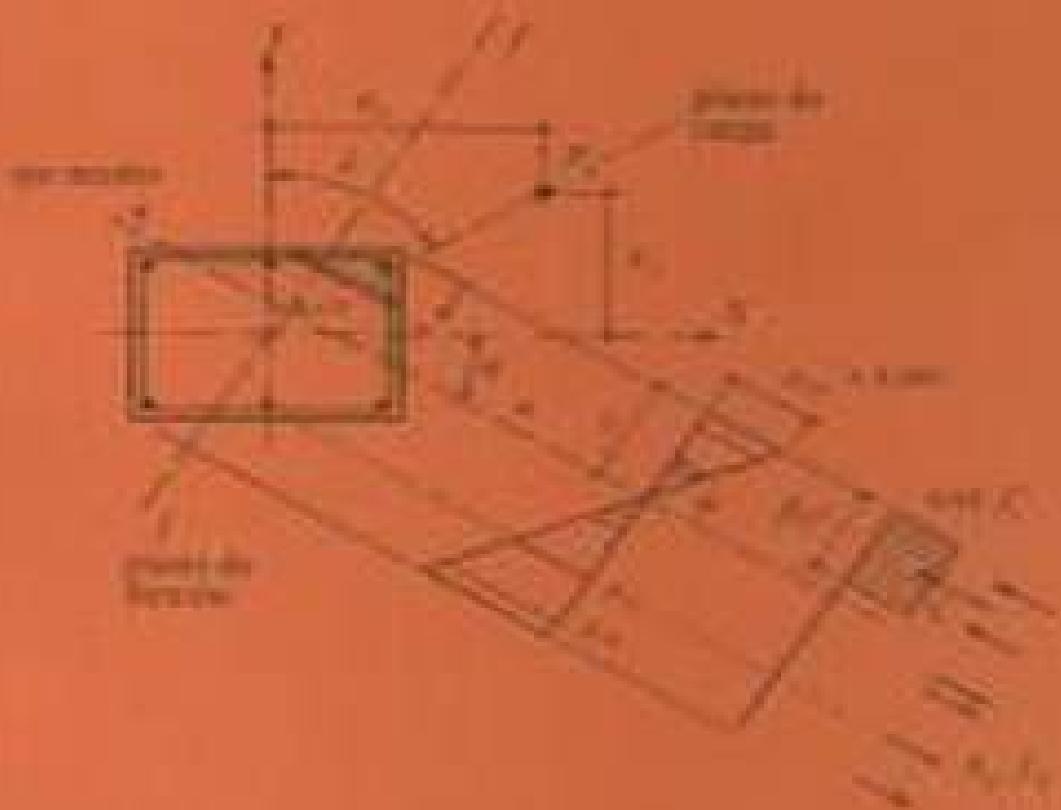


unae

Universidad Nacional  
de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas,  
Ingeniería y Agronomía

Sociedad de  
Investigación en  
Ingeniería Civil - Asociación de  
Estudiantes



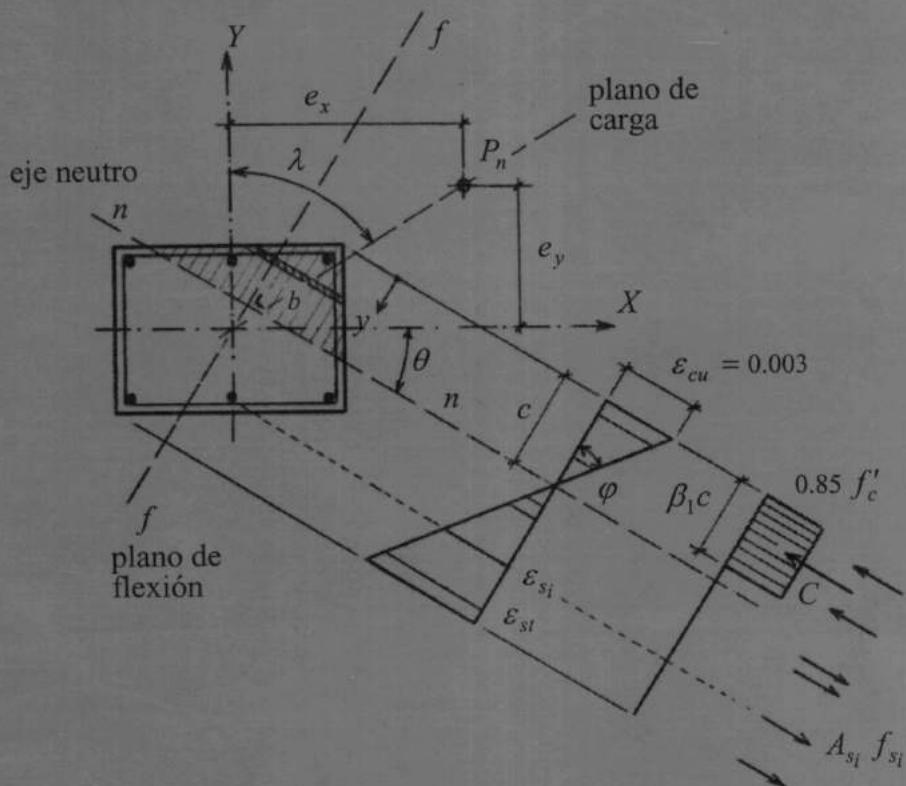
# HORMIGÓN ARMADO

Conceptos básicos y diseño de elementos  
con aplicación del reglamento CIRSOC 201-2005

CUADERNOS

OSCAR MÖLLER

UNI  
EDICIONES  
COLECCIÓN  
ACADEMICA



# **HORMIGÓN ARMADO**

# **Conceptos básicos y diseño de elementos con aplicación del reglamento CIRSOC 201-2005**

**CUARTA EDICIÓN**

**OSCAR MÖLLER**





# **HORMIGÓN ARMADO**

**Conceptos básicos y diseño de elementos  
con aplicación del reglamento CIRSOC 201-2005**

**Oscar Möller**

Profesor Titular de Hormigón Armado de la Carrera de Ingeniería Civil  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario  
Investigador del Consejo de Investigaciones, UNR.

Ingeniero Civil, UNR, 1981.  
Magister en Ingeniería Estructural, UNR, 1989.  
Doctor en Ingeniería, UNR, 2001.

Möller, Oscar

Hormigón armado - 4<sup>a</sup> ed. - Rosario: UNR Editora. Editorial de la Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura 2010.

308 p. : il.; 29 x 20 cm.

ISBN 978-950-673-856-3

1. Ingeniería. 2. Hormigón. I. Título

CDD 620.13

Diseño interior y de tapa: Oscar Möller

ISBN 978-950-673-856-3



**REUN**  
RED DE EDITORIALES  
DE UNIVERSIDADES  
NACIONALES



Impreso en Argentina - Printed in Argentina  
**UNR EDITORA** - Editorial de la Universidad Nacional de Rosario

## PRÓLOGO

La actualización de los Reglamentos Nacionales de Seguridad Estructural impulsados por el Comité Ejecutivo del CIRSOC incluye el Reglamento Argentino de Estructuras de Hormigón CIRSOC 201-2005, el cual ha sido desarrollado principalmente en base a la edición 2005 del “Building Code Requirements for Structural Concrete” (ACI 318-05), y representa un cambio significativo con respecto a la versión anterior basada en la escuela alemana a través de las normas DIN.

Si bien el comportamiento de los elementos estructurales de hormigón armado es independiente del reglamento en vigencia, los criterios de verificación de la seguridad, las hipótesis, simplificaciones prácticas y prescripciones mínimas que contienen los códigos, orientan la enseñanza del diseño de elementos de hormigón armado en cursos de grado, de posgrado y de actualización profesional.

Este texto presenta la mecánica básica del hormigón armado y los métodos para el diseño de elementos estructurales solicitados a flexión, corte, torsión y fuerzas axiales. También expone las prescripciones reglamentarias más significativas contenidas en el CIRSOC 201-2005, y ejemplos de aplicación práctica.

El capítulo 1 es de introducción al hormigón armado y sus usos estructurales. El capítulo 2 contiene un breve resumen de los materiales componentes y los fundamentos del comportamiento conjunto del acero con el hormigón.

El capítulo 3 describe las incertidumbres presentes en las variables, el concepto de probabilidad de falla e índice de confiabilidad, y su relación directa con los factores parciales que intervienen en el formato determinístico de verificación de la seguridad.

El capítulo 4 expone las hipótesis generales utilizadas en el diseño a flexión, se describen las distintas etapas del comportamiento de una viga, y las disposiciones reglamentarias para vigas rectangulares y vigas placa solicitadas a flexión y flexión compuesta con gran excentricidad.

En el capítulo 5 se estudia el efecto del esfuerzo de corte en vigas y los mecanismos de resistencia con la contribución del hormigón y las armaduras. Se presentan también las disposiciones reglamentarias para la verificación de la resistencia al corte y cálculo de armaduras, y finalmente un ejemplo de diseño de una viga a flexión y corte. El capítulo 6 trata del diseño a torsión de vigas y el efecto combinado con el esfuerzo de corte.

Los capítulos 7 y 8 están dedicados a columnas solicitadas a compresión y a flexocompresión recta y oblicua. El capítulo 7 se refiere a columnas cortas y los métodos para calcular la resistencia. El capítulo 8 describe la influencia de la esbeltez y los métodos de análisis para tener en cuenta los efectos no lineales geométricos, o de “segundo orden”.

El capítulo 9 expone el diseño por resistencia a flexotracción con pequeña excentricidad con aplicación a tensores. El capítulo 10 trata la verificación de estados límites de servicio en cuanto al control de fisuración y el control de flechas en elementos flexados.

Finalmente el capítulo 11 describe los diferentes tipos de losas de hormigón armado con un tratamiento unificado desde lasos apoyadas en vigas rígidas a losas apoyadas directamente sobre columnas, pasando por los casos intermedios de sistemas de losas con vigas flexibles.

La primera edición fue preparada para el dictado de la asignatura Hormigón Armado de la Carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. También está destinada a la actualización, en los temas aquí tratados, de los profesionales de la ingeniería civil, y es una contribución a la difusión del CIRSOC 201-2005.

La segunda edición incluye correcciones y ampliaciones, e incorpora como ejemplo algunas tablas y ábacos de diseño.

La tercera edición actualiza los contenidos de acuerdo a la redacción final del CIRSOC 201-2005 y el ACI 318 M – 05.

Esta cuarta edición considera actualizaciones del ACI 318 M – 08, e incorpora mejoras como resultado de la experiencia realizada en los cursos dictados, y de las observaciones, críticas y comentarios de los lectores, que siempre son bienvenidos y de gran utilidad para enriquecer y mejorar las sucesivas ediciones.

Dr. Ing. Oscar Möller

## ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN AL HORMIGÓN ARMADO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Fundamentos de la construcción compuesta .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Algo de historia .....</b>	<b>2</b>
<b>1.3 Usos estructurales .....</b>	<b>3</b>
 <b>CAPÍTULO 2 MATERIALES .....</b>	 <b>17</b>
<b>2.1 Hormigón .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1.1 Componentes .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1.2 Dosificación, preparación y colocación en obra del hormigón .....</b>	<b>18</b>
<b>2.1.3 Propiedades del hormigón .....</b>	<b>19</b>
<b>2.1.4 Características mecánicas del hormigón .....</b>	<b>21</b>
<b>2.1.4.1 Resistencia del hormigón .....</b>	<b>21</b>
<b>2.1.4.2 Deformación del hormigón .....</b>	<b>26</b>
<b>2.2 Aceros para hormigón .....</b>	<b>28</b>
<b>2.2.1 Tipos de acero .....</b>	<b>28</b>
<b>2.2.2 Resistencia y deformación de los aceros .....</b>	<b>29</b>
<b>2.2.3 Otras características .....</b>	<b>30</b>
<b>2.3 Material combinado: hormigón armado .....</b>	<b>31</b>
<b>2.3.1 Comportamiento conjunto del acero con el hormigón .....</b>	<b>31</b>
<b>2.3.2 Adherencia en una barra traccionada de hormigón armado .....</b>	<b>31</b>
<b>2.3.3 Adherencia en vigas a flexión de hormigón armado .....</b>	<b>33</b>
<b>2.3.4 Orígenes de las tensiones de adherencia .....</b>	<b>35</b>
<b>2.3.5 Forma de actuar de la adherencia .....</b>	<b>35</b>
<b>2.3.6 Ley tensión de adherencia – deslizamiento relativo .....</b>	<b>37</b>
<b>2.3.7 Resistencia última de adherencia y longitud de anclaje .....</b>	<b>37</b>
<b>Ejemplo 2.1 .....</b>	<b>39</b>
<b>2.3.8 Empalmes de armaduras .....</b>	<b>41</b>
 <b>CAPÍTULO 3 BASES PARA LA VERIFICACIÓN DE LA SEGURIDAD .....</b>	 <b>43</b>
<b>3.1 Objetivo – Estados límites .....</b>	<b>43</b>
<b>3.2 Incertidumbres .....</b>	<b>44</b>
<b>3.3 Cálculo de la probabilidad de falla. Índice de confiabilidad .....</b>	<b>45</b>
<b>3.4 Formato determinístico de los códigos de diseño .....</b>	<b>47</b>
<b>3.5 Relación entre los factores parciales y el índice de confiabilidad .....</b>	<b>51</b>

<b>CAPÍTULO 4 DISEÑO POR RESISTENCIA A FLEXIÓN - VIGAS .....</b>	53
4.1 Introducción .....	53
4.2 Hipótesis de diseño .....	53
4.3 Comportamiento de una viga a flexión .....	56
Ejemplo 4.1 .....	62
Ejemplo 4.2 .....	65
4.4 Diseño de vigas rectangulares con armadura de tracción .....	68
Ejemplo 4.3 .....	73
4.5 Flexión con fuerza axial de gran excentricidad .....	74
Ejemplo 4.4 .....	75
Ejemplo 4.5 .....	76
4.6 Diseño de vigas rectangulares con armadura a tracción y a compresión (doble armadura) .....	77
Ejemplo 4.6 .....	80
4.7 Vigas placa o vigas T .....	81
4.7.1 Generalidades .....	81
4.7.2 Ancho de colaboración .....	82
4.7.3 Resistencia de vigas placa .....	84
Ejemplo 4.7 .....	88
Ejemplo 4.8 .....	89
4.8 Armadura mínima en elementos solicitados a flexión .....	92
4.9 Tablas .....	93
<b>CAPÍTULO 5 DISEÑO POR RESISTENCIA A ESFUERZOS DE CORTE - VIGAS .....</b>	99
5.1 Introducción .....	99
5.2 Comportamiento de vigas elásticas (Estado I) .....	100
5.3 Comportamiento de vigas fisuradas (Estado II) .....	102
5.3.1 Clases de rotura posibles en una viga esbelta .....	103
5.3.2 Valor de cálculo de la tensión tangencial .....	104
5.4 Vigas sin armadura de corte .....	105
5.4.1 Evidencias experimentales .....	105
5.4.2 Mecanismo de resistencia – Contribución del hormigón .....	106
5.5 Vigas con armadura de corte .....	108
5.5.1 Tipos de armadura de corte .....	108
5.5.2 Influencia de la armadura de corte .....	109
5.5.3 Analogía del reticulado – Contribución de la armadura .....	110
5.6 Influencia del esfuerzo normal .....	113
5.6.1 Compresión axial .....	113
5.6.2 Tracción axial .....	114
5.7 Casos especiales de diseño al corte .....	115
5.7.1 Vigas de altura variable .....	115

5.7.2 Secciones en T y doble T .....	116
5.7.3 Apoyos directos e indirectos – Cargas cercanas a los apoyos – Cargas suspendidas .....	118
<b>5.8 Verificación de la resistencia al corte – Cálculo de armaduras – Disposiciones reglamentarias .....</b>	<b>120</b>
5.8.1 Contribución del hormigón .....	120
5.8.2 Contribución de la armadura .....	121
<b>5.9 Influencia del esfuerzo de corte en el punto de corte y longitud de anclaje de la armadura longitudinal .....</b>	<b>125</b>
<b>5.10 Corte por fricción .....</b>	<b>128</b>
<b>5.11 Redistribución de momentos flectores .....</b>	<b>131</b>
<b>5.12 Diseño por resistencia a flexión y a corte de una viga continua de dos tramos. Ejemplo 5.1 .....</b>	<b>132</b>
 <b>CAPÍTULO 6 DISEÑO A TORSIÓN .....</b>	 143
<b>6.1 Introducción .....</b>	<b>143</b>
<b>6.2 Comportamiento a torsión de secciones de hormigón armado .....</b>	<b>144</b>
<b>6.3 Esfuerzos combinados de torsión y corte .....</b>	<b>148</b>
<b>6.4 Verificación de la resistencia a torsión – Cálculo de armaduras – Disposiciones reglamentarias .....</b>	<b>149</b>
6.4.1 Resistencia .....	149
6.4.2 Consideración del momento torsor .....	149
6.4.3 Límites de la tensión tangencial .....	150
6.4.4 Armadura para torsión .....	151
<b>6.5 Diseño de una viga con torsión de equilibrio. Ejemplo 6.1 .....</b>	<b>152</b>
 <b>CAPÍTULO 7 DISEÑO POR RESISTENCIA A FLEXOCOMPRESIÓN - COLUMNAS CORTAS .....</b>	 157
<b>7.1 Introducción .....</b>	<b>157</b>
<b>7.2 Compresión axial .....</b>	<b>158</b>
7.2.1 Comportamiento elástico .....	158
7.2.2 Resistencia .....	159
7.2.3 Columnas con estribos .....	159
7.2.4 Columnas zunchadas .....	161
7.2.5 Ejemplos .....	162
Ejemplo 7.1 .....	162
Ejemplo 7.2 .....	163
<b>7.3 Flexo-compresión recta .....</b>	<b>164</b>
7.3.1 Resistencia .....	164
7.3.2 Ayudas de diseño – Diagramas de interacción .....	165
7.3.3 Ejemplo 7.3 .....	167
<b>7.4 Flexo-compresión oblicua .....</b>	<b>170</b>

7.4.1 Resistencia .....	170
7.4.2 Métodos simplificados .....	172
7.4.3 Ejemplo 7.4 .....	174
<b>7.5 Diagramas de interacción .....</b>	<b>176</b>
 <b>CAPÍTULO 8 COMPORTAMIENTO Y DISEÑO DE COLUMNAS ESBELTAS .....</b> 183	
<b>8.1 Introducción .....</b>	<b>183</b>
<b>8.2 Columna con carga axial centrada .....</b>	<b>183</b>
<b>8.3 Columnas con compresión y flexión .....</b>	<b>188</b>
<b>8.4 Métodos de análisis .....</b>	<b>194</b>
8.4.1 Análisis no lineal .....	194
8.4.2 Método de los momentos amplificados .....	194
8.4.2.1 Criterios para considerar sistemas indesplazables o desplazables lateralmente .....	194
8.4.2.2 Rígidez de los elementos .....	195
8.4.2.3 Esbeltez de las columnas .....	197
8.4.2.4 Momentos amplificados para sistemas indesplazables .....	198
8.4.2.5 Momentos amplificados para sistemas desplazables .....	200
8.4.2.6 Otros criterios para verificar la estabilidad .....	203
<b>8.5 Ejemplos .....</b>	<b>204</b>
8.5.1 Ejemplo 8.1. Columna esbelta de pórtico indesplazable .....	204
8.5.2 Ejemplo 8.2. Columna esbelta de pórtico desplazable .....	210
 <b>CAPÍTULO 9 DISEÑO POR RESISTENCIA A FLEXOTRACCIÓN CON PEQUEÑA EXCENTRICIDAD - TENSORES .....</b> 219	
<b>9.1 Introducción .....</b>	<b>219</b>
<b>9.2 Comportamiento elástico .....</b>	<b>220</b>
<b>9.3 Resistencia .....</b>	<b>221</b>
<b>9.4 Ejemplo 9.1 .....</b>	<b>223</b>
 <b>CAPÍTULO 10 VERIFICACIÓN DE ESTADOS LÍMITES DE SERVICIO .....</b> 225	
<b>10.1 Introducción .....</b>	<b>225</b>
<b>10.2 Control de fisuración por flexión .....</b>	<b>225</b>
10.2.1 Proceso de fisuración .....	225
10.2.2 Variables que afectan el ancho de fisuras .....	226
10.2.3 Ancho de fisuras .....	226
10.2.4 Disposiciones del código .....	227
10.2.5 Ejemplo 10.1 .....	229
<b>10.3 Control de flechas .....</b>	<b>230</b>
10.3.1 Generalidades .....	230
10.3.2 Esbelteces límites .....	230

10.3.3 Cálculo de flechas .....	234
10.3.4 Flechas máximas admisibles .....	238
10.3.5 Ejemplo 10.2 .....	238
<b>10.4 Requerimientos de durabilidad .....</b>	<b>244</b>
<b>CAPÍTULO 11 LOSAS DE HORMIGÓN ARMADO .....</b>	<b>245</b>
<b>11.1 Tipos de losas .....</b>	<b>245</b>
<b>11.2 Losas macizas que trabajan en una dirección .....</b>	<b>249</b>
11.2.1 Análisis estructural .....	249
11.2.2 Dimensionamiento .....	251
11.2.3 Armaduras .....	252
11.2.4 Ejemplo 11.1 .....	253
<b>11.3 Sistemas de losas que trabajan en dos direcciones apoyadas en vigas rígidas .....</b>	<b>257</b>
11.3.1 Análisis estructural .....	257
11.3.2 Dimensionamiento .....	260
11.3.3 Armaduras .....	261
11.3.4 Ejemplo 11.2 .....	265
<b>11.4 Losas nervuradas .....</b>	<b>270</b>
<b>11.5 Sistemas de losas que trabajan en dos direcciones apoyadas directamente sobre columnas .....</b>	<b>271</b>
11.5.1 Análisis estructural .....	271
11.5.1.1 Método de diseño directo .....	273
11.5.1.2 Método del pórtico equivalente .....	279
11.5.2 Dimensionamiento .....	281
11.5.3 Armaduras .....	282
11.5.4 Diseño a corte en placas y losas planas (punzonado) .....	283
11.5.4.1 Tipos de falla .....	283
11.5.4.2 Contribución del hormigón .....	284
11.5.4.3 Refuerzos para corte .....	285
11.5.5 Transferencia de momentos a las columnas .....	290
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>293</b>



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN AL HORMIGÓN ARMADO

### 1.1. FUNDAMENTOS DE LA CONSTRUCCIÓN COMPUESTA

Se define como “*hormigón armado*” al hormigón que incluye en su interior barras de acero, actuando ambos materiales en forma conjunta cuando la pieza está solicitada por acciones exteriores.

El fundamento para el efecto compuesto son las siguientes propiedades de ambos materiales:

- a) El hormigón tiene elevada resistencia a compresión y muy reducida resistencia a tracción. El hormigón es un material barato, y por lo tanto es conveniente construir estructuras de hormigón. El acero, material relativamente mucho más caro que el hormigón tiene elevada resistencia a tracción y a compresión (si se elimina el problema del pandeo). Por lo tanto, se lo debe aprovechar en suplir sólo la deficiencia del hormigón, es decir absorber los esfuerzos de tracción.
- b) El trabajo conjunto de ambos materiales se debe manifestar en que ambos se deforman en igual grado cuando están sometidos a solicitudes externas, y esto ocurre gracias a la adherencia y rozamiento entre el acero y el hormigón. Se consigue así que los esfuerzos de un material puedan ser transmitidos al otro, y a eso se lo llama efecto de colaboración.
- c) El coeficiente de dilatación térmica es aproximadamente el mismo para ambos materiales ( $10^{-5}$   $^{\circ}\text{C}$ ). Luego, en general, no aparecen tensiones perjudiciales debidas a los cambios de temperatura.
- d) El hormigón protege al acero contra la oxidación. La oxidación es un proceso electroquímico, es decir una reacción química que ocurre en un electrolito cuando existe una diferencia de potencial. La corrosión sólo puede suceder cuando existen iones de hierro para la reacción, cuya formación queda impedida por las propiedades químicas del hormigón. Sin embargo, para brindar esa protección, el hormigón debe ser compacto, con adecuada cantidad de cemento, sin aditivos que contengan materiales perjudiciales, y con un recubrimiento suficientemente grueso.

- e) Las armaduras, de acuerdo a su cantidad y disposición, suministran ductilidad a la pieza de hormigón armado, es decir capacidad de deformarse en régimen anelástico, propiedad que el hormigón no posee en sí mismo.

## 1.2. ALGO DE HISTORIA

El hormigón, en el que se utiliza como material ligante cal hidráulica o cemento puzzolánico (de origen volcánico natural) ya era conocido por los romanos. El descubrimiento de la llamada “tierra romana” en 1796 por el inglés J. Parker y del cemento Pórtland por el francés J Aspdin en 1824, condujo al desarrollo de las construcciones de hormigón.

A mediados del siglo XIX, por primera vez se utilizaron en Francia armaduras de acero. En 1855 J. L. Lambot construyó un bote de mortero de cemento reforzado con barras de hierro. En 1861 J. Monier construyó macetas para flores, de hormigón armadas con alambres. También en 1861 F. Coignet publicó las bases para construir con hormigón armado y expuso en la Exposición Mundial de París vigas y caños de hormigón armado.

En 1873 W. E. Ward construyó en Nueva York una casa de hormigón armado que aún existe, el Ward's Castle. En 1877 Hyatt, en Estados Unidos, publica sus trabajos sobre ensayos en la construcción de hormigón armado, y conocía ya con claridad el efecto de unión de ambos materiales.

Hacia principios del siglo XX la construcción de hormigón armado estaba caracterizada por diversos sistemas patentados que surgieron unos junto a otros. Se extiende rápidamente el conocimiento sobre la forma como se produce la colaboración entre el hormigón y el acero, y se aprende a utilizarlos según la distribución de esfuerzos que se presenta.

En 1902 E. Mörsh, en Stuttgart, desarrolla una teoría del comportamiento del hormigón armado, sobre bases científicas y numerosos ensayos, por encargo de las firmas Wayss y Freytag. Los conceptos desarrollados por Mörsh constituyen a lo largo de decenios y en casi todo el mundo, los fundamentos de la teoría del hormigón armado, y son válidos todavía hoy por lo menos en sus rasgos fundamentales.

La aparición de fisuras en el hormigón se consideró durante mucho tiempo peligrosas y retrasó la utilización del hormigón armado. Hoy se conoce que las fisuras capilares se mantienen como tales si las barras de armaduras están bien repartidas y no se utilizan diámetros demasiados grandes. Se evitan así las grietas grandes y el peligro de corrosión.

En 1907 M. Koenen propuso someter al hormigón a tensiones de compresión elevadas, tensando las armaduras, de modo que al producirse la tracción por flexión, no se originaran fisuras. Los primeros ensayos fallaron porque no se conocía que debido a la retracción y fluencia lenta del hormigón, se perdía la tensión previa del acero. En 1928 E. Freyssinet desarrolló métodos de pretensado duradero utilizando aceros especiales de muy alta resistencia dando origen al “hormigón pretensado”.

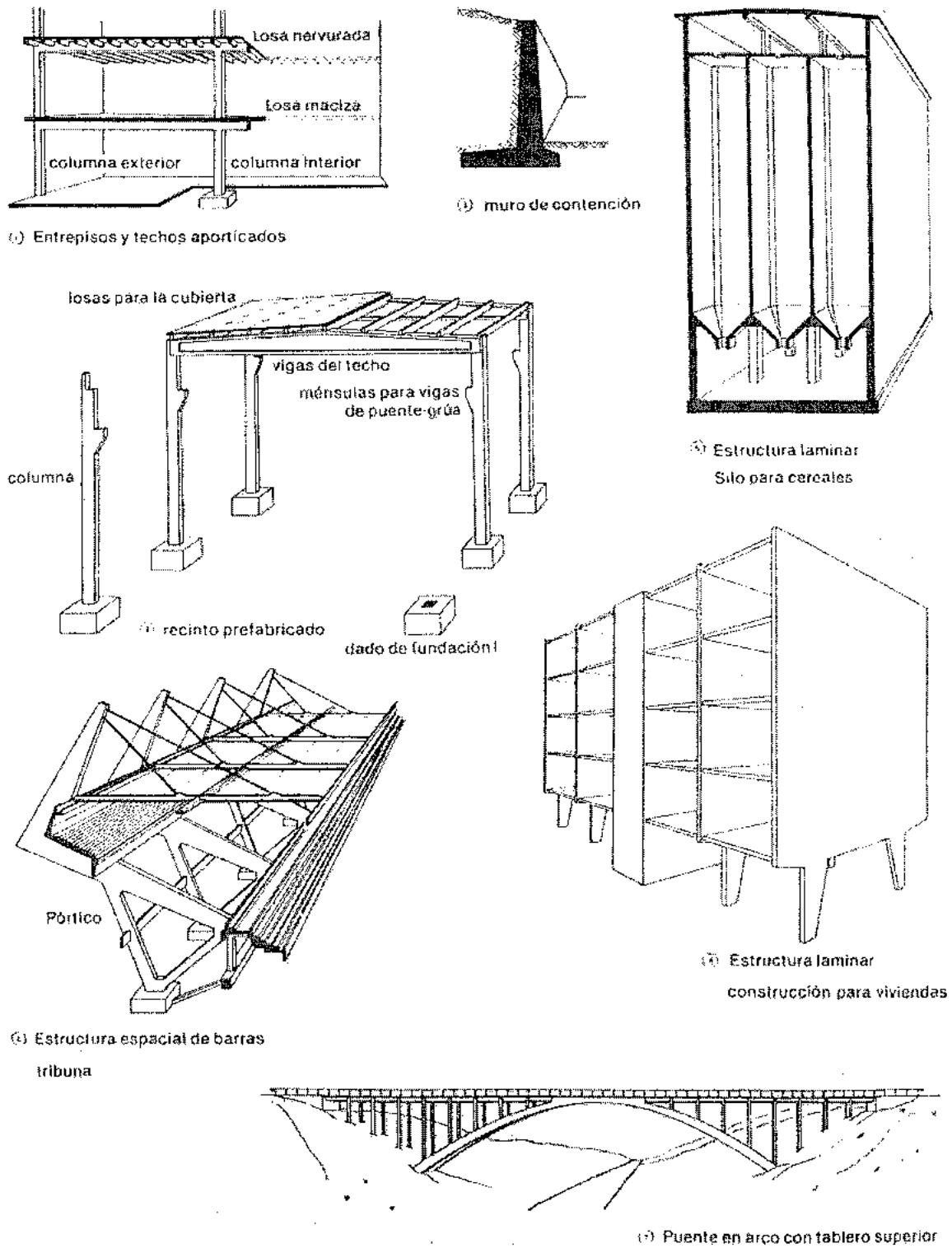
### 1.3. USOS ESTRUCTURALES

El hormigón se utiliza para todo tipo de estructuras, y sus ventajas fundamentales son:

- a) *Trabajabilidad*: es fácilmente moldeable, se adapta a cualquier forma de encofrado, y las armaduras pueden disponerse siguiendo la trayectoria de los esfuerzos internos.
- b) *Monolitismo*: construcciones monolíticas, sin juntas, constituyen estructuras de múltiple indeterminación estática, poseen una gran reserva de capacidad portante y un elevado grado de seguridad.
- c) *Economía*: los materiales inertes, como el agregado grueso y la arena, son baratos. Además, en general, el costo de mantenimiento es reducido.
- d) *Resistencia al fuego*, efectos climáticos y desgaste mecánico

Se reconocen como inconvenientes el elevado peso propio de la estructura, la reducida aislación térmica, y son difíciles las modificaciones y demolición.

En las figs.1.1 a 1.10 se muestran ejemplos de estructuras de hormigón armado.



**Figura 1.1:** Estructuras portantes de hormigón armado

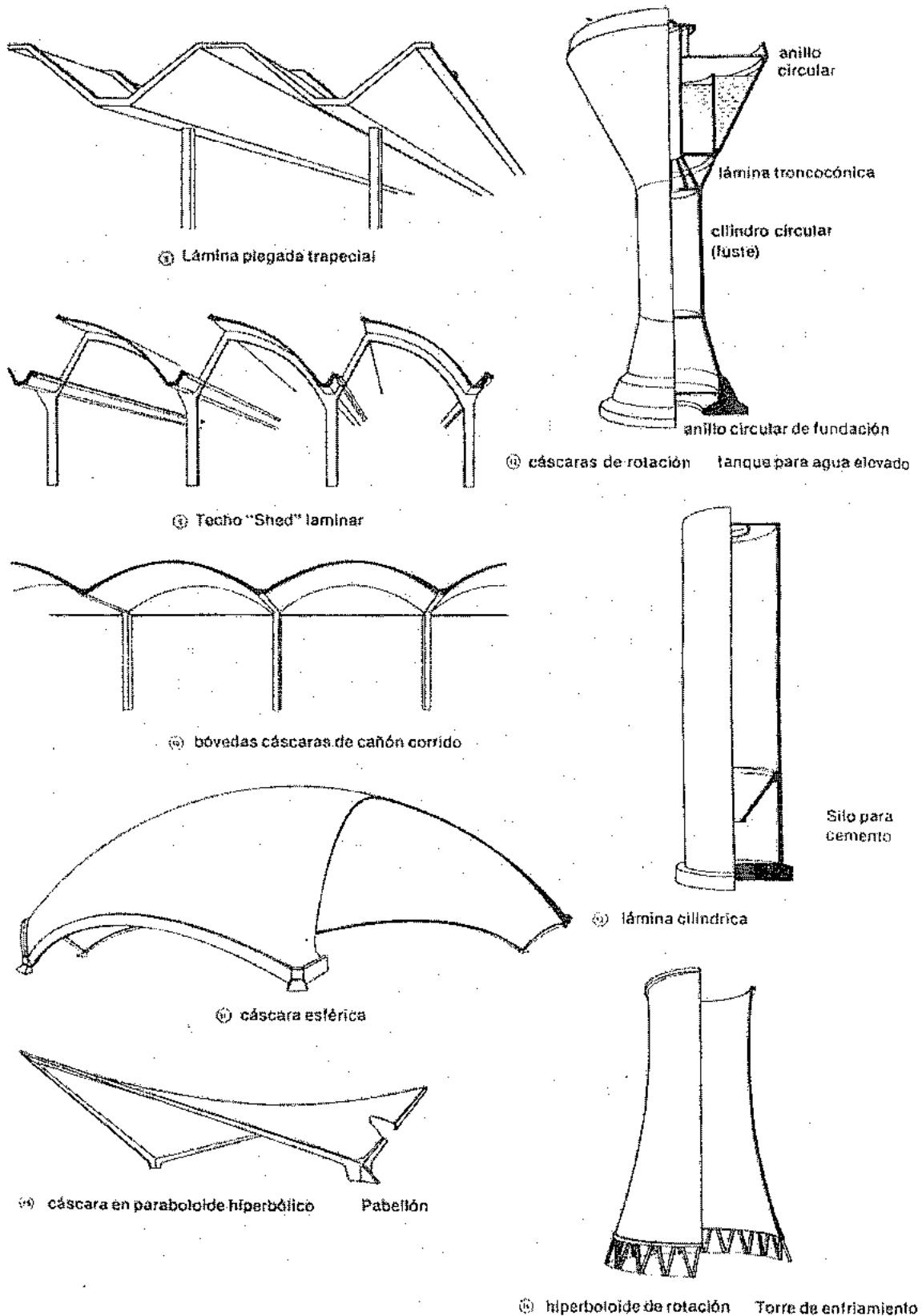
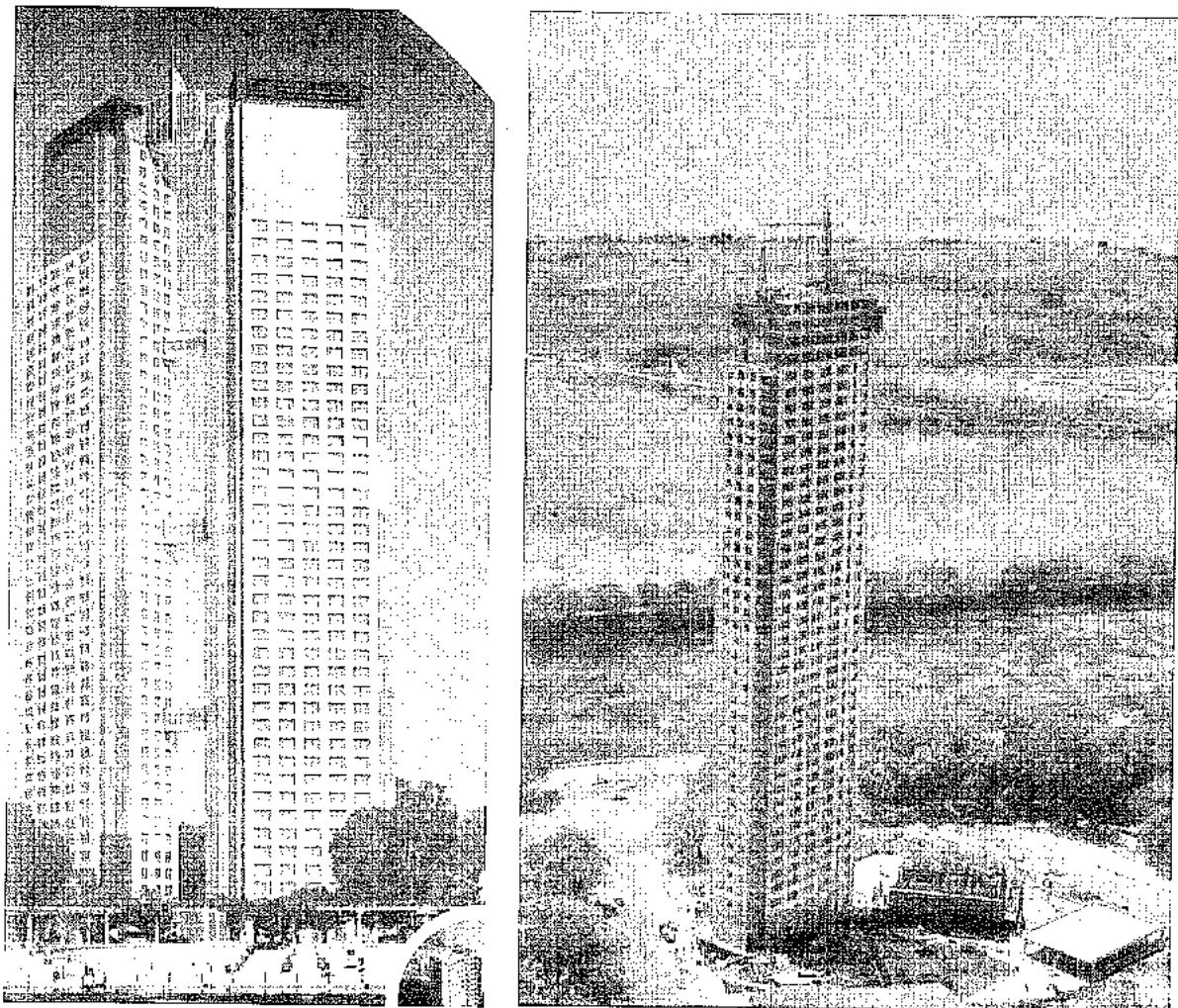
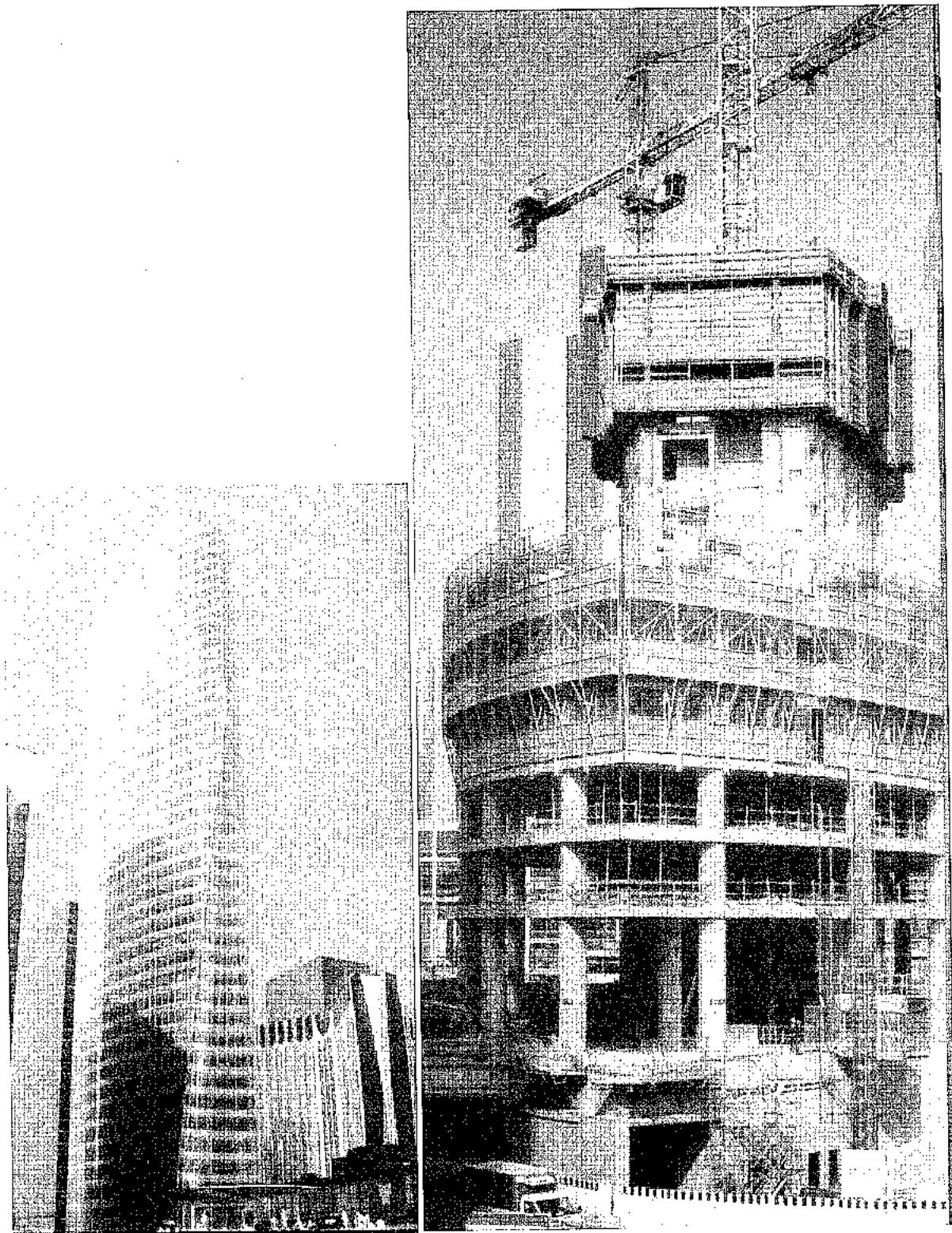


Figura 1.2: Estructuras portantes de hormigón armado



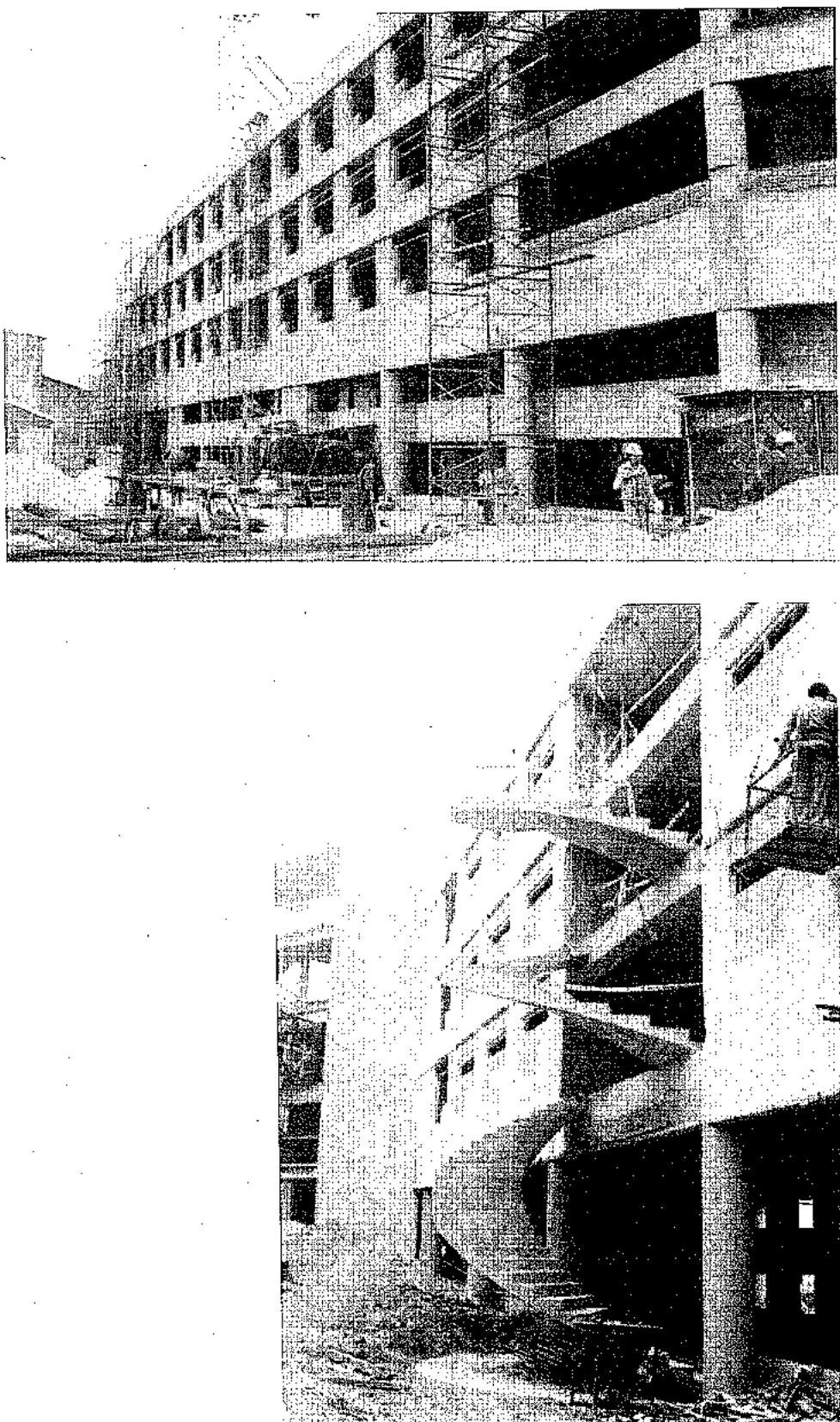
**Figura 1.3:** Torres "El Faro", 46 pisos, 150m de altura, Puerto Madero, Buenos Aires



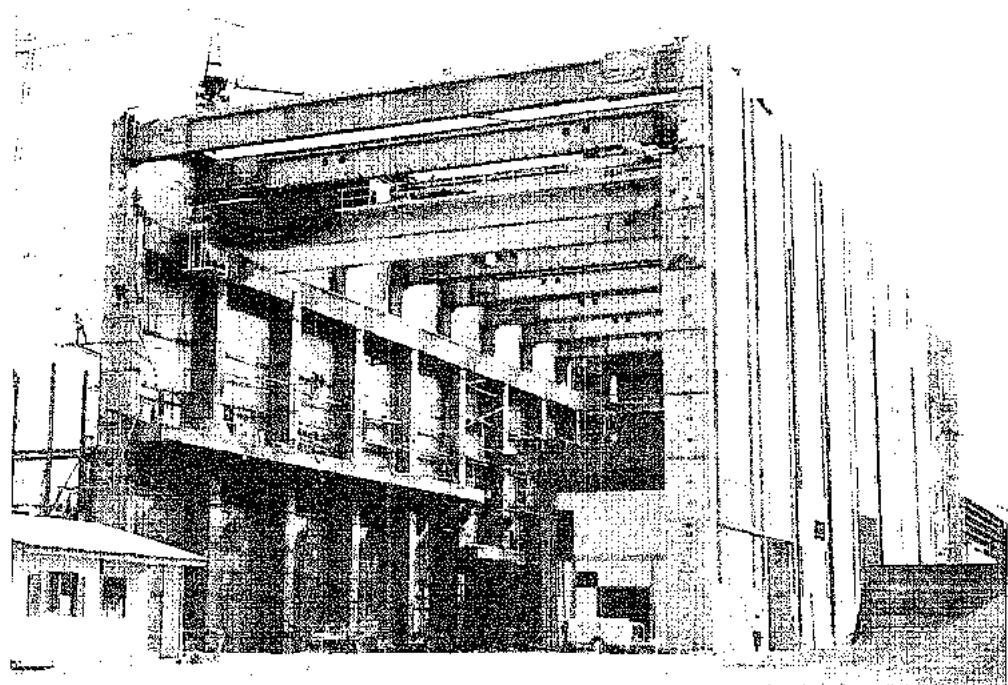
**Figura 1.4:** Torre “La Défense”, 40 pisos, 148m de altura, Paris, Francia



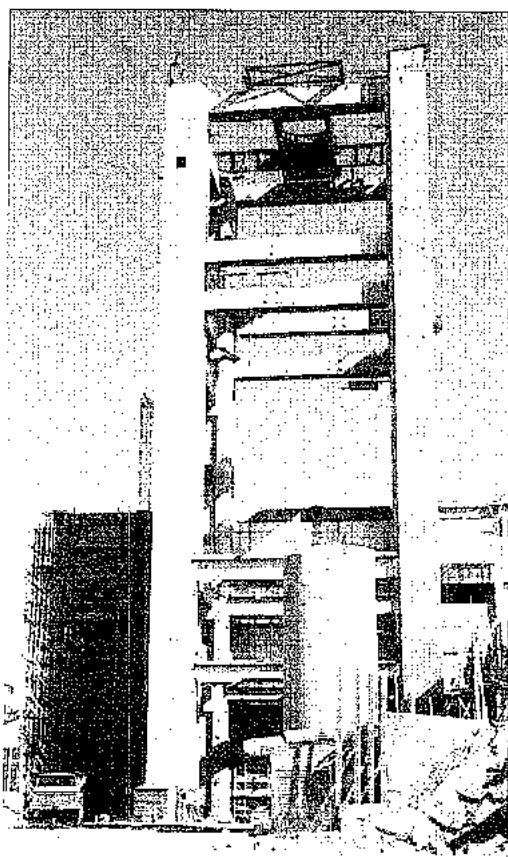
**Figura 1.5:** Torre “Nationsbank Corporate Center”, 60 pisos, 252m de altura, Charlotte, North Carolina, USA.



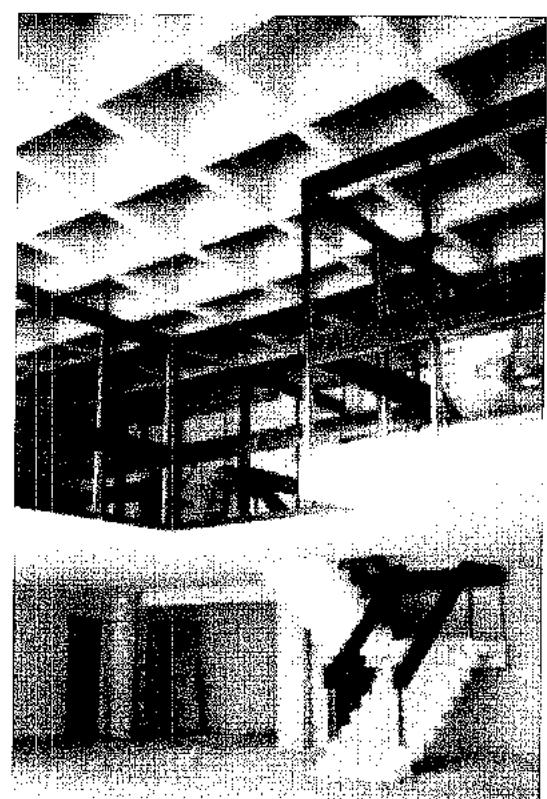
**Figura 1.6:** Complejo Cultural Parque de España, Rosario.  
Proyecto y cálculo de estructura: Ings. Rubinstein y Yuffe



Central Térmica Luján de Cuyo, Mendoza

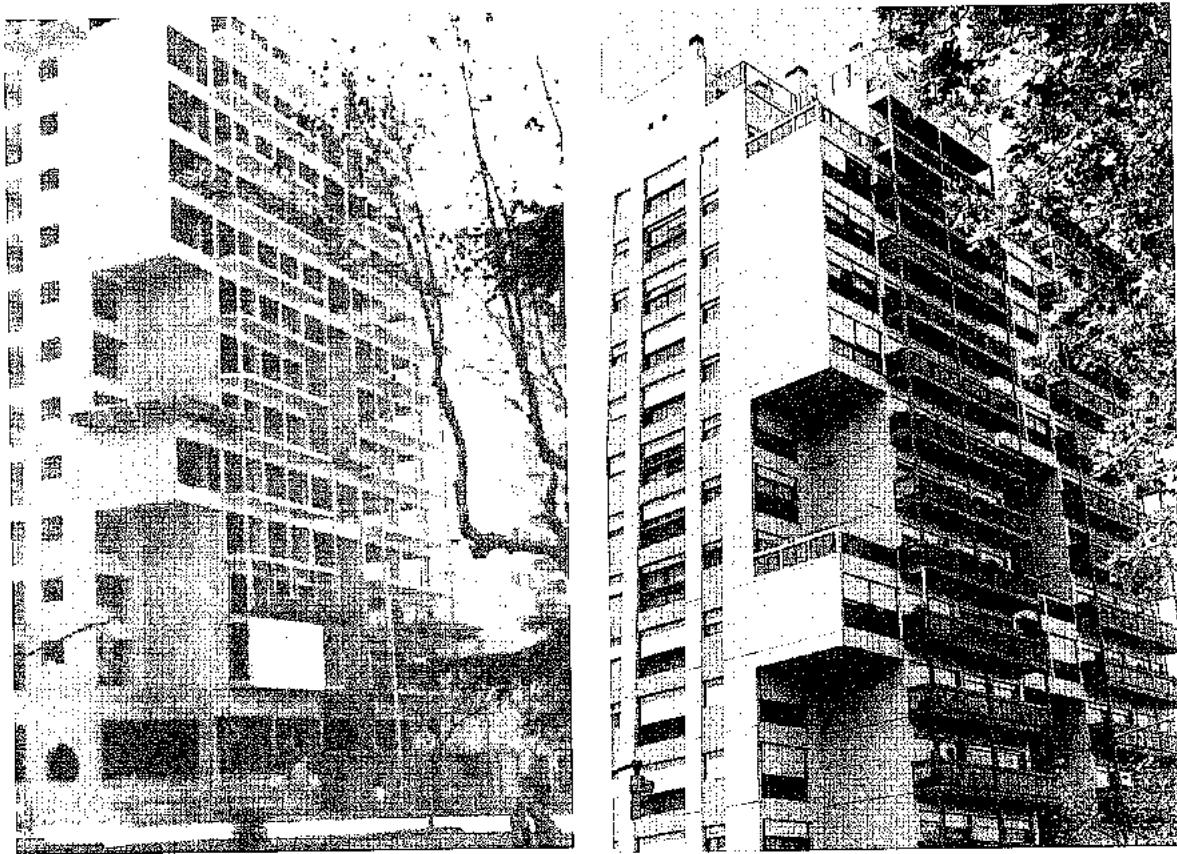


Estación Transformadora Sorrento, Rosario

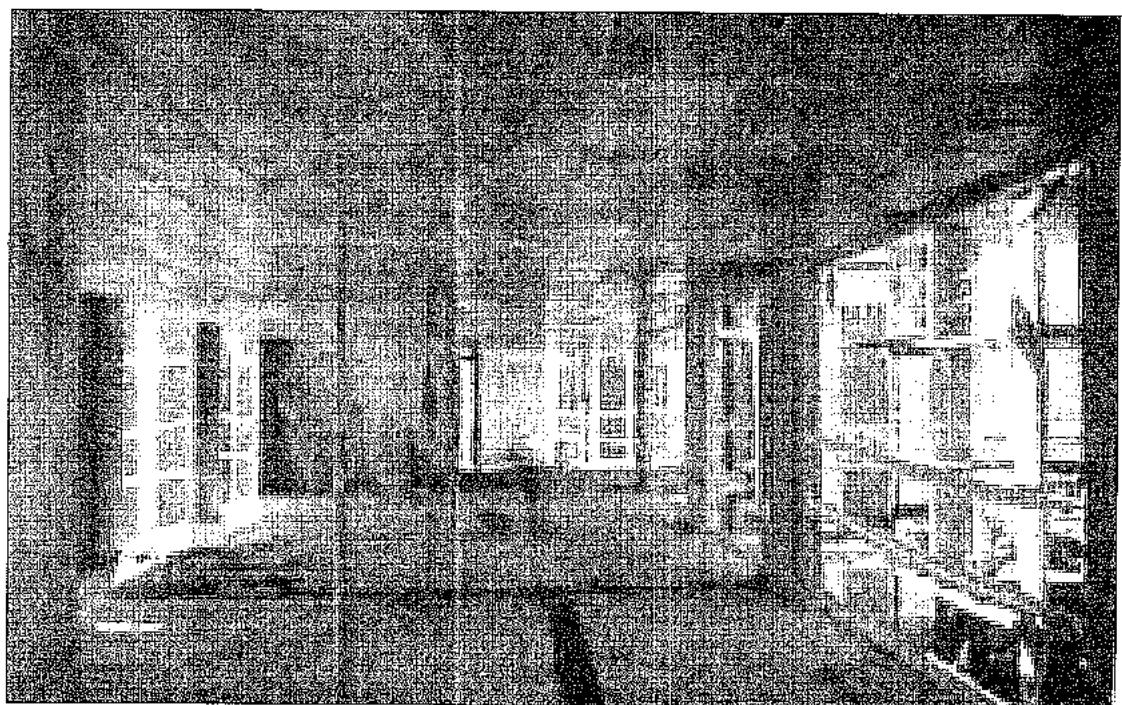


Edificio Planta Decaroli

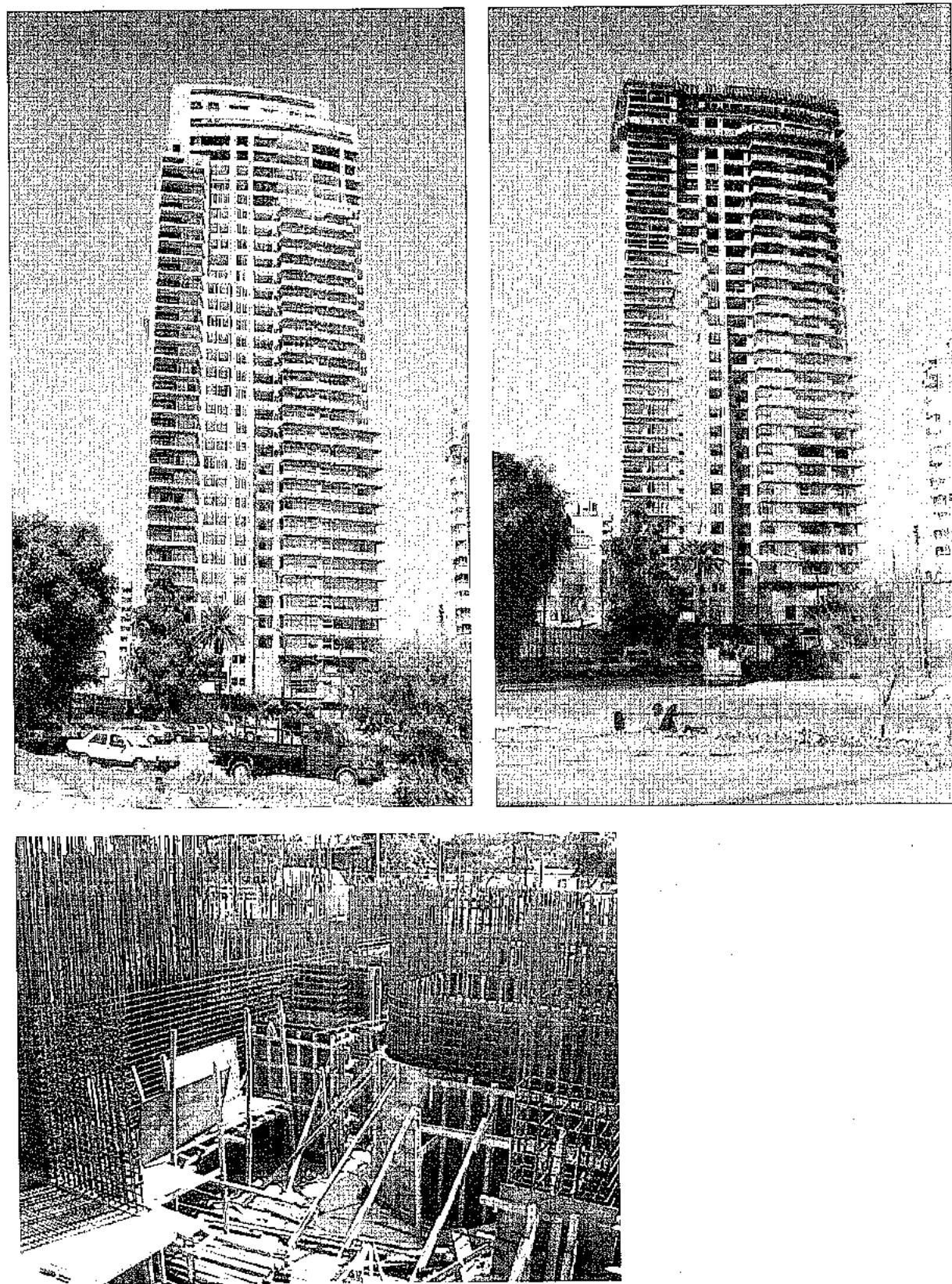
**Figura 1.7:** Estructuras de hormigón armado  
Proyecto y cálculo: Ings Kaufmann y Adue



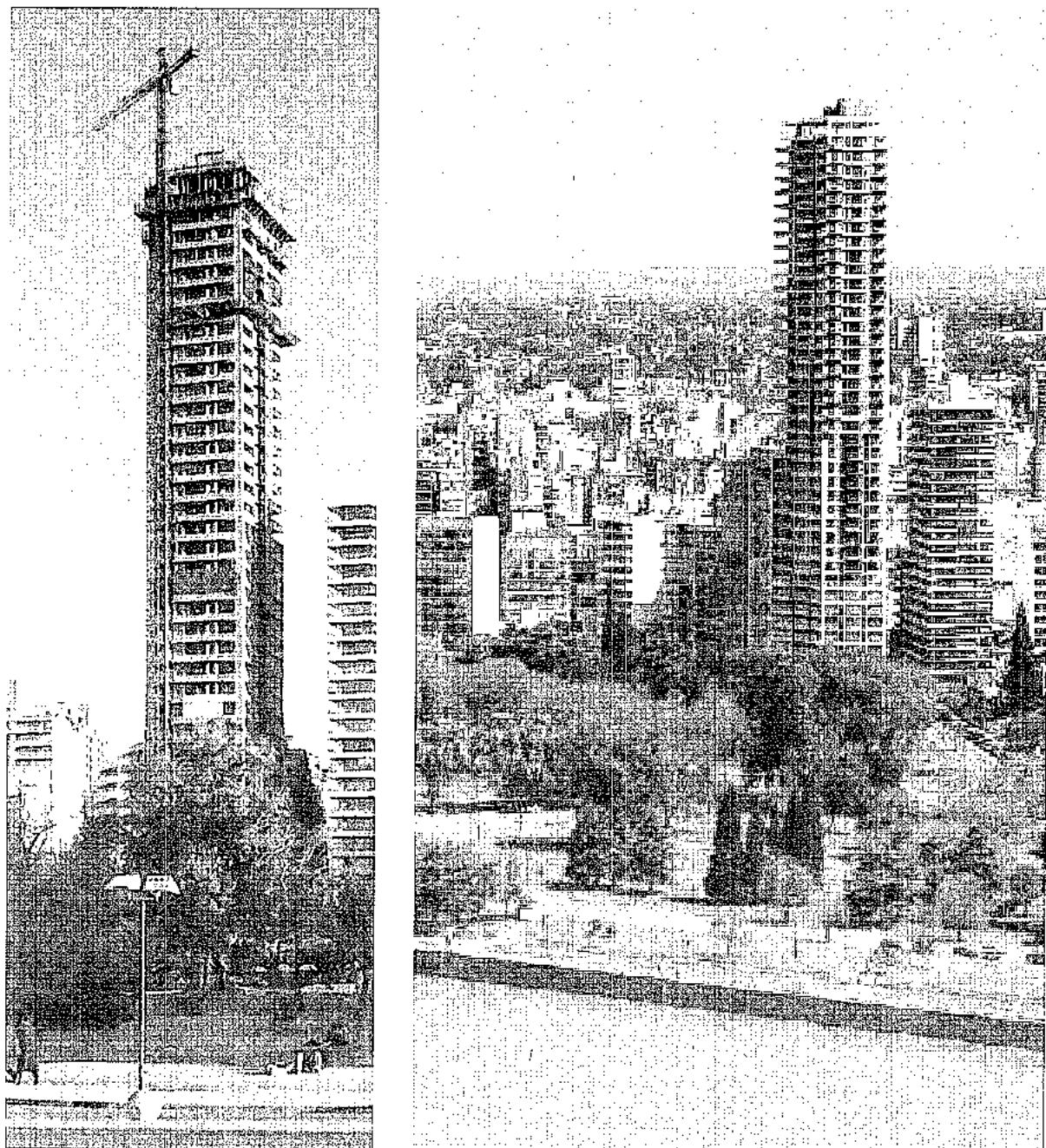
**Figura 1.8:** Edificio “Galeón”, 13 pisos, Av. Pellegrini y Buenos Aires, Rosario  
Proyecto y cálculo de estructura: Ings. Kaufmann y Adue



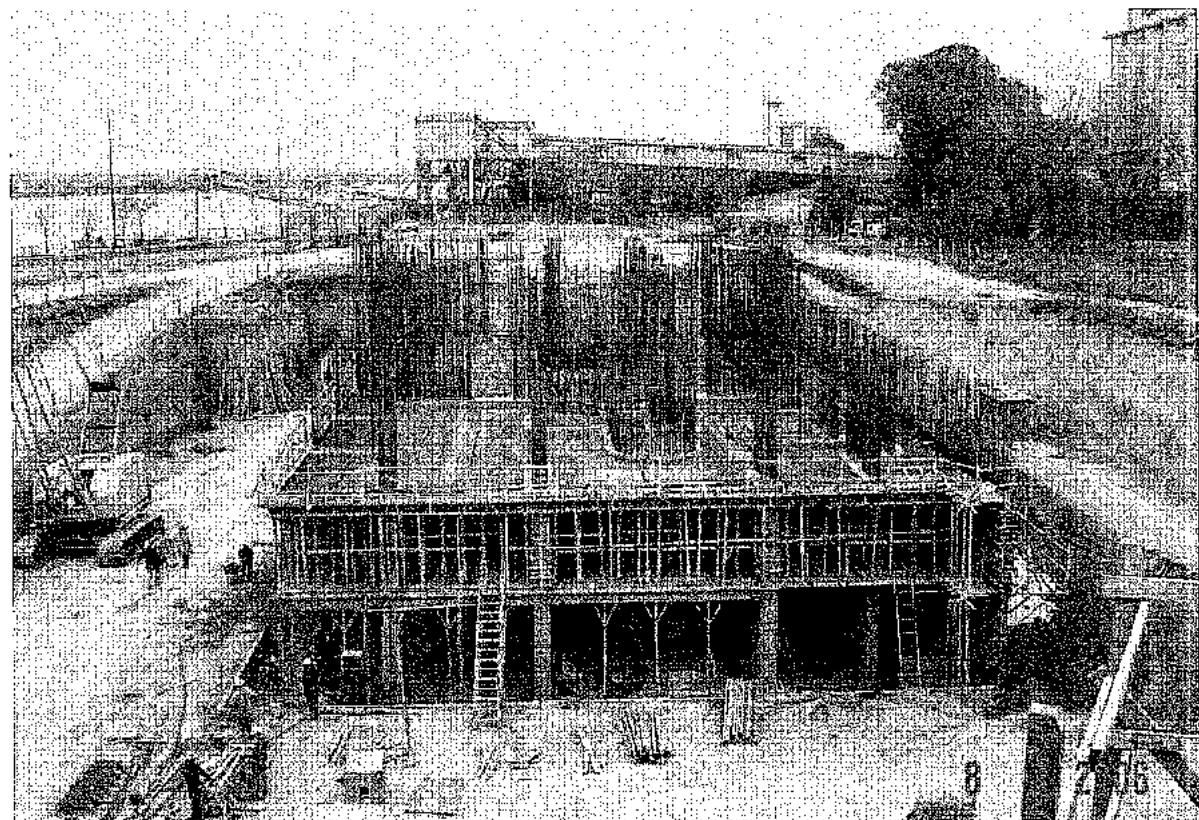
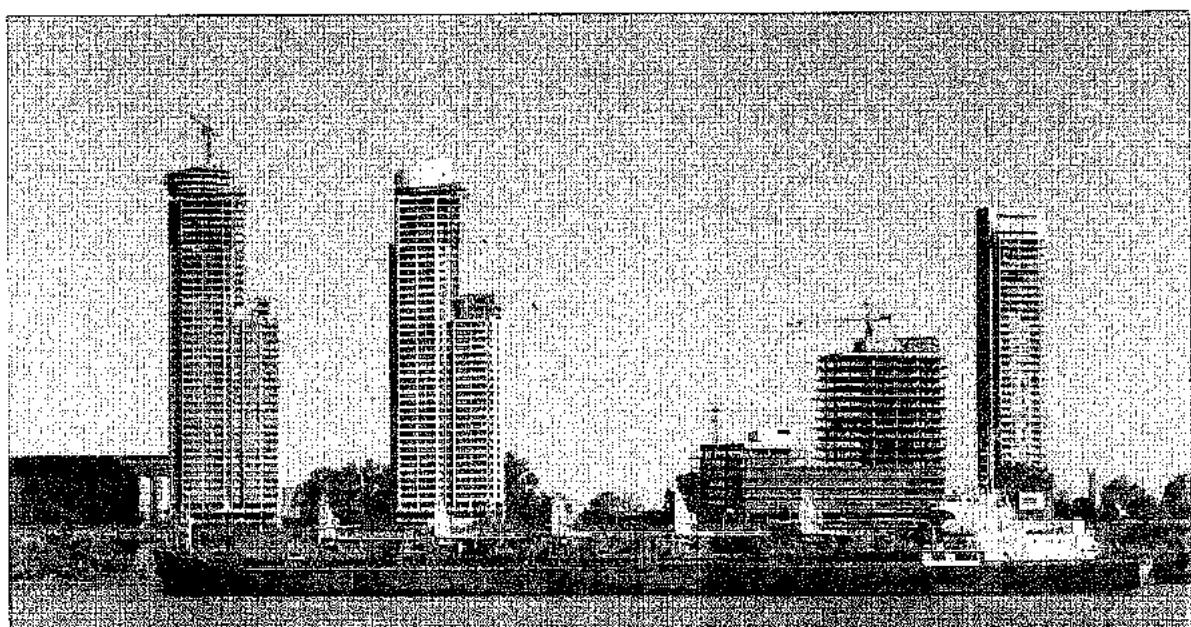
**Figura 1.9:** Edificio “Torres San José”, 10 pisos, Salta y Pte. Roca, Rosario  
Proyecto y cálculo de estructura: Ings. Orengo y Cisaruk



**Figura 1.10:** Edificios “Buenaventura Guarani” y “Punta Divisadero”  
38 pisos, altura 115m, Corrientes y Wheelright, Rosario  
Proyecto y cálculo de estructura: Ings. Orengo y Cisaruk



**Figura 1.11:** Edificio “Torre Aqualina”, 39 pisos, Alem y San Luis, Rosario  
Proyecto y cálculo de estructura: Ing. Orengo



**Figura 1.12:** Torres “Dolfinés Guarani, Embarcadero y Nordlink”  
Av. de la Costa y Av. Francia, Rosario  
Proyecto y cálculo de estructura: Ing. Orengo



**Figura 1.13:** Torres “Dolfinés Guarani”, 45 pisos  
Av. de la Costa y Av. Francia, Rosario  
Proyecto y cálculo de estructura: Ing. Orengo

# CAPÍTULO 2

## MATERIALES

Los materiales componentes del hormigón, los métodos de dosificación y preparación, las propiedades y características del hormigón fresco y del hormigón endurecido, y los ensayos a realizar para su control de calidad, además de la composición y características de las barras de acero que constituyen la armadura, han sido estudiadas en extenso en la asignatura previa: Materiales.

En este capítulo solamente se recordarán algunos aspectos especiales que interesan para el desarrollo de los temas siguientes.

### 2.1. HORMIGÓN

#### 2.1.1. Componentes

a) **Cemento:** Consta esencialmente de combinaciones de óxido de calcio (cal), óxido de silicio (silice), óxido de aluminio (alúmina) y óxido férrico. Para la fabricación se emplea piedra caliza y arcilla, o bien marga caliza de composición adecuada. La mezcla molida en bruto se calienta hasta la temperatura de sinterización, obteniéndose el clinker, que luego es molido finamente produciéndose así el cemento.

Es el material conglomerante que reacciona con el agua, fragua y endurece expuesto al aire y bajo el agua.

Los tipos de cemento más usuales son: cemento portland normal (CPN), portland con filler calcáreo (CPF), de alta resistencia inicial (ARI), portland puzzolánico (CPP), portland con escoria (CPE), portland compuesto (CPC), blanco (B) y de alto horno (CAH).

Hay cementos que cumplen requisitos especiales como los cementos moderadamente resistente a los sulfatos (MRS), altamente resistente a los sulfatos (ARS), de bajo calor de hidratación (BCH), resistente a la reacción alcali-agregado, de alta resistencia inicial (ARI) y cemento blanco (B).

En el Reglamento CIRSOC 201, punto 3.1 se señalan las normas IRAM a cumplir en cada caso.

b) *Áridos*: se utilizan agregados inertes procedentes de la desintegración natural o de la trituración de rocas. También hay agregados artificiales obtenidos como subproductos industriales o por fabricación.

El agregado fino, hasta 4.75 mm, y el agregado grueso desde 4.75 mm, deben cumplir con requisitos granulométricos, tamaño máximo, módulo de finura y cantidades máximas de sustancias que pueden ser perjudiciales o nocivas para el hormigón y las armaduras. Ver Reglamento CIRSOC 201, punto 3.2 y normas IRAM correspondientes.

c) *Agua de amasado*: casi la totalidad de las aguas naturales son aptas para ser utilizadas como aguas de amasado, incluida el agua potable. Se recomienda tener cuidado con las aguas de pantanos y afluentes industriales. El agua de mar no es apta por el peligro de corrosión a causa de su contenido de sales.

d) *Aditivos para hormigón*: para poder influir favorablemente en determinadas propiedades del hormigón, se emplean aditivos químicos o adiciones minerales pulverulentas como colorantes minerales, polvo de piedra caliza (filler), cenizas volantes o adiciones minerales con hidraulicidad. Deben estar aprobadas por normas y solo deben usarse luego de ensayos de aptitud.

Se utilizan aceleradores de endurecimiento, aceleradores de fraguado, retardadores de fraguado, impermeabilizantes, anticongelantes, plastificantes, incorporadores de aire para mejorar la resistencia a las heladas y otros.

### 2.1.2. Dosificación, preparación y colocación en obra del hormigón

La dosificación del hormigón consiste en determinar las cantidades de cada material componente que integra la mezcla, para asegurar:

- La trabajabilidad necesaria para su adecuado escurrimiento entre las armaduras y para el llenado completo de los encofrados, con la terminación requerida y en las condiciones de colocación a ser empleado en obra, sin que se produzca segregación o exudación perjudicial para el hormigón.
- La resistencia mecánica y demás características especificadas para el hormigón endurecido.
- Las condiciones necesarias para la protección de las armaduras contra la corrosión.
- La durabilidad requerida para resistir las condiciones de agresividad del medio ambiente en el lugar de emplazamiento de la estructura.

La dosificación se debe establecer en forma racional en base a información de experiencias previas y/o mediante la preparación de mezclas de prueba en el laboratorio o en la obra.

Se podrá adoptar una dosificación empírica sólo para hormigones de baja resistencia (H-15) y asegurando una cantidad mínima de cemento (ver CIRSOC 201, punto 5.2.5.3).

Los factores más importantes a tener en cuenta son: la relación agua / cemento y la calidad de cemento para determinar la resistencia; la composición granulométrica y cantidad de pasta de

cemento para obtener la trabajabilidad deseada; además los aditivos para alcanzar propiedades especiales.

En la preparación del hormigón se deben respetar los protocolos de medición de los materiales intervinientes, la forma y tiempo de mezclado, de manera tal que el hormigón se pueda transportar y colocar en obra adecuadamente.

Los métodos de compactación serán los más apropiados para los elementos a hormigonar, consistencia del hormigón a colocar y tipo encofrado.

Una vez colocado, el hormigón debe ser protegido contra las acciones que puedan agredirlo, como secado prematuro, contacto directo con lluvia o nieve, agua en movimiento, acciones mecánicas, temperaturas extremas, etc.

Finalmente se debe efectuar el proceso de curado, es decir mantener al hormigón endurecido en sus primeros días con un grado satisfactorio de humedad y temperatura a fin de que pueda desarrollar sus propiedades deseables.

### 2.1.3. Propiedades del hormigón

a) *Propiedades del hormigón fresco:* entre las más importantes están la consistencia, la trabajabilidad, la homogeneidad y el peso específico.

- **Consistencia:** es la menor o mayor facilidad que tiene el hormigón fresco para deformarse. Depende de la cantidad de agua de amasado, tamaño máximo, granulometría, y forma de los áridos, y además de los aditivos incorporados.

Los rangos de consistencia se definen como muy seca, seca, plástica, muy plástica, fluida y muy fluida.

Se miden con el tiempo de remoldeo para consistencia muy seca, asentamiento del cono de Abrams para consistencias seca a fluida, y con el extendido en mesa para consistencias muy plástica a muy fluida. Los valores numéricos se presentan en CIRSOC 201 tablas 5.1 y 5.2.

La frecuencia de realización del ensayo y los criterios de conformidad se especifican en CIRSOC 201, punto 4.6.

El hormigón se proyectará con una consistencia de acuerdo con las características de los elementos estructurales a hormigonar, y con los medios disponibles para su transporte, colocación y correcta compactación, sin que se produzca segregación ni exudación perjudicial.

- **Trabajabilidad:** es la aptitud del hormigón para ser puesto en obra con los medios de compactación de que se dispone. Está directamente relacionada con la consistencia, con la homogeneidad, con la trabazón de sus distintos componentes, y con la mayor o menor facilidad que la masa presenta para eliminar los huecos de la misma, alcanzando una compacidad máxima.

Aumenta con la cantidad de agua de amasado, con la cantidad de arena, con áridos redondeados, con el contenido y finura del cemento, y con el agregado de plastificantes e incorporadores de aire.

- **Homogeneidad:** distribución uniforme de todos los componentes. Se consigue con buen amasado y se mantiene con un transporte cuidadoso y colocación adecuada. Sino, pueden aparecer los fenómenos de segregación o decantación.

**b) Propiedades del hormigón endurecido:**

- **Peso específico:** depende de la naturaleza de los áridos, de su granulometría y del método de compactación empleado.

Hormigón normal:  $\gamma = 23 \text{ a } 25 \text{ KN/m}^3$ .

Hormigón pesado:  $\gamma = 30 \text{ a } 35 \text{ KN/m}^3$ .

Hormigón liviano:  $\gamma = 13 \text{ KN/m}^3$  o menos.

El CIRSOC 201 se aplica a hormigones normales únicamente.

- **Compacidad:** está directamente relacionado al peso específico. Una buena compacidad proporciona mayor resistencia mecánica, física y química.

- **Permeabilidad:** cuando el hormigón ha sido correctamente dosificado, preparado y colocado, resulta en general impermeable en sí mismo, tanto más cuanto menor sea su red capilar, es decir cuando mayor sea su compacidad. Con menor relación agua cemento, menor es la permeabilidad. El agregado de aditivos puede mejorar esta propiedad al cerrar poros y capilares.

- **Resistencia al desgaste:** interesa en pavimentos de carreteras o de interiores de edificios industriales. Conviene emplear hormigón seco, con arena silicea, y mayores garantías se obtienen con un revestimiento delgado de alta resistencia al desgaste.

**c) Retracción:**

Durante el proceso de fraguado y endurecimiento en el aire, se produce la evaporación de parte del agua capilar y la consiguiente retracción.

La retracción aumenta con el menor grado de humedad ambiente, con la mayor finura del cemento, con la presencia de finos, con la cantidad de agua de amasado, con la relación agua/cemento, y cuando disminuye el espesor del elemento en contacto con el medio ambiente.

La retracción es una deformación impuesta que provoca tensiones de tracción y por consiguiente fisuras, cuando se encuentra impedido el libre acortamiento del hormigón. Luego, depende de la rigidez y grado de hiperestaticidad de la estructura.

Para disminuir los efectos de la retracción se deberá: disponer juntas (caso de muros y pavimentos); proteger y curar las superficies, especialmente en tiempo seco; y colocar armaduras repartidas de pequeño diámetro en forma de malla superficial con cuantías mínimas según CIRSOC 201, punto 7.12, para distribuir las fisuras y disminuir su ancho.

**d) Efectos Térmicos:**

- **Bajas temperaturas** (heladas): el agua en los capilares, cuando se congela, se expande y ejerce un efecto de cuña que fisura el hormigón. Se mejora la situación con un hormigón compacto y con el empleo de aireantes, ya que las pequeñas burbujas de aire ocluido actúan como cámaras de expansión y disminuyen la presión interna ejercida por el hielo.

- **Altas temperaturas:** desde 100 °C hacia arriba se va perdiendo el agua, entre 300 y 500 °C la resistencia a compresión disminuye un 20%, y llegando a 900 – 1000 °C la deshidratación es total y provoca la destrucción del hormigón.

- **Variaciones térmicas** diarias y estacionales: a partir del coeficiente de dilatación térmica  $\alpha = 10^{-5}$  para el hormigón y el acero, se puede evaluar la deformación impuesta al elemento  $\varepsilon = \alpha \Delta t$ . Los esfuerzos introducidos en la estructura dependerán de la restricción a esa deformación. Se aconseja colocar juntas en la estructura aproximadamente cada 30 m.

## 2.1.4. Características mecánicas del hormigón

### 2.1.4.1. Resistencia del hormigón

La resistencia del hormigón se determina en probetas moldeadas conjuntamente con los elementos estructurales. No solo depende del tipo de solicitud, sino también de la forma de las probetas y el método de ensayo, los que deben estar normalizados a efectos comparativos.

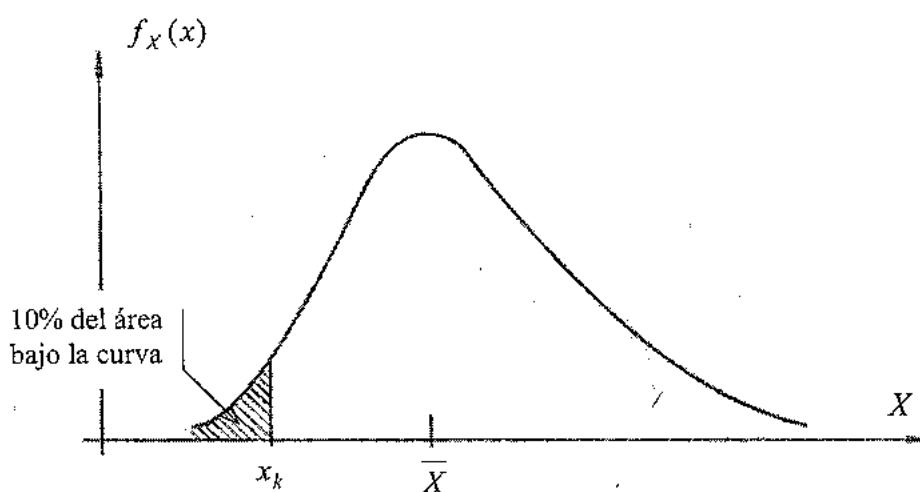
En la obra, el hormigón está sometido a solicitudes que dependen de circunstancias e influencias muy variables, que no es posible reproducir exactamente en los ensayos.

También hay que tener en cuenta que las propiedades de los materiales están sujetos a dispersiones por las variaciones fortuitas de la composición, de las condiciones de elaboración y del tratamiento posterior, además de la influencia del origen de los materiales y la variabilidad del trabajo humano.

Por lo tanto, para caracterizar la “resistencia” del hormigón hay que seleccionar unos pocos tipos de ensayos, sobre probetas normalizadas, y con procedimientos estandarizados.

Para cada tipo de ensayo, los resultados se consideran como una muestra de una variable aleatoria, la cual queda representada por su función de densidad de probabilidades, ver fig. 2.1, caracterizada por dos parámetros:  $\bar{X}$  valor medio y  $\sigma_x$  desvío standard. Para un número suficientemente grande de ensayos  $N \rightarrow \infty$  resulta:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2}{N-1}} \quad (2.1)$$



**Figura 2.1:** Función de densidad de probabilidades

La función de densidad de probabilidades que mejor se ajusta a los resultados de ensayos es la distribución Lognormal, aunque con bastante aproximación se puede utilizar la distribución Normal (Gauss).

El desvío standard es una medida de la dispersión e indica el cuidado con que se ha elaborado y colocado el hormigón. Es conveniente referirse al coeficiente de variación  $\delta = \sigma_X / \bar{X}$  y los valores usuales para un control razonable es  $\delta = 0.15$ .

Se define como valor característico  $x_k$  al que tiene una probabilidad del 90% de ser superado, o dicho de otra manera se espera que el 10 % de los resultados de ensayos estén por debajo de  $x_k$ . Este valor característico es el *valor nominal o especificado por el reglamento* para realizar los cálculos de resistencia.

#### a) Resistencia a compresión

Se evalúa sobre resultados de ensayos de resistencia de rotura a la compresión utilizando probetas cilíndricas normales de 15 cm de diámetro y 30 cm de altura, las que deben ser moldeadas y curadas según normas IRAM 1534-85 ó 1524-82, y ensayadas según normas IRAM 1546-92.

Se reconocen dos modos de producción, puesta en obra y control de producción del hormigón:

- Modo 1: el hormigón es producido en una planta hormigonera que opera con un sistema de calidad.
- Modo 2: el hormigón es producido en condiciones que no satisfacen los requisitos establecidos para el modo 1.

De acuerdo al modo de trabajo será la cantidad y frecuencia de extracción de probeta para verificar en obra la resistencia especificada, ver CIRSOC 201, punto 4.2.

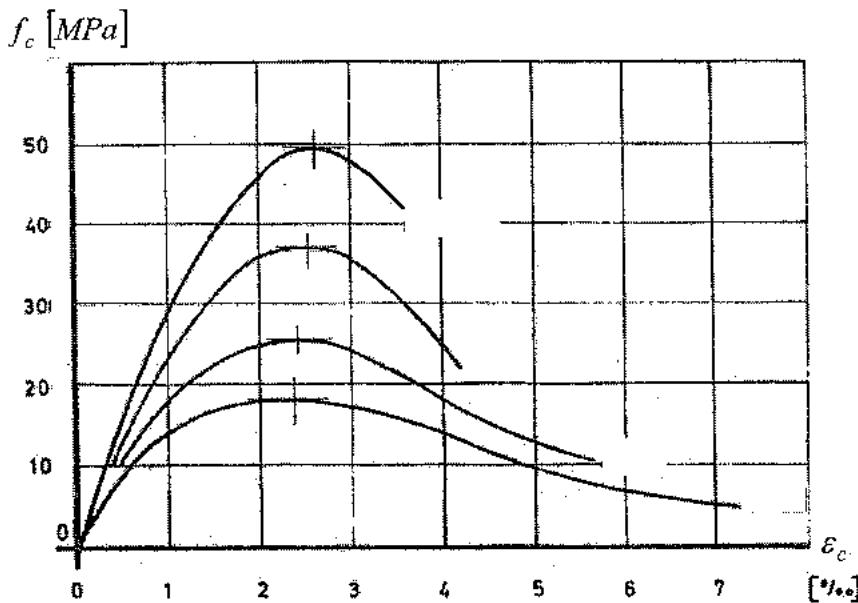
La resistencia característica a compresión del hormigón  $f'_c$  es el valor utilizado como base para los cálculos y se lo denomina *valor nominal o especificado*. El CIRSOC 201 clasifica los hormigones de la siguiente manera:

**Tabla 2.1:** Resistencia a compresión de los hormigones

Clase de hormigón	Resistencia especificada $f'_c$ [Mpa]	A utilizar en Hormigones
H-15	15	simples
H-20	20	simples y armados
H-25	25	
H-30	30	
H-35	35	
H-40	40	
H-45	45	
H-50	50	
H-60	60	

Se hace notar que, para un mismo hormigón, la resistencia especificada según el nuevo CIRSOC 201-2005 (cuantil 10%) es entre 3 y 5 MPa mayor que el valor de resistencia característico definida según la versión CIRSOC 201-1982 (cuantil 5%). Por ejemplo un H-17 del CIRSOC 201-1982 equivale a un H- 20 ó mayor del actual CIRSOC 201.

Se representan en la fig.2.2 curvas tipos de ensayos a compresión



**Figura 2.2:** Curvas de tensión - deformación para probetas de hormigón en compresión

### b) Resistencia a tracción

El hormigón a tracción es mucho menos resistente que a compresión, y los resultados de ensayos muestran gran dispersión por la presencia de tensiones residuales debido a efectos de temperatura y contracción de fraguado.

En general no se considera la colaboración del hormigón a tracción para resistir flexión, pero es necesario conocer sus valores porque está relacionada con la capacidad resistente a esfuerzos de corte, con la adherencia y deslizamiento de las armaduras, y con el fenómeno de fisuración.

Existen tres formas de obtener la resistencia a tracción: por flexo tracción, por ensayo directo a tracción pura y por tracción indirecta (hendimiento), ver fig.2.3.



**Figura 2.3:** Resistencias del hormigón a tracción

Se admite que la resistencia a tracción está relacionada con la resistencia a compresión aproximadamente con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \text{Resistencia a flexotracción (modulo de rotura): } f_r &= 0.66 \text{ a } 1.00 \sqrt{f'_c} \text{ en Mpa} \\ \text{Resistencia directa a tracción: } f'_t &= 0.25 \text{ a } 0.42 \sqrt{f'_c} \\ \text{Resistencia indirecta a tracción: } f''_t &= 0.50 \text{ a } 0.66 \sqrt{f'_c} \end{aligned} \quad (2.2)$$

El CIRSOC 201 establece la siguiente relación:

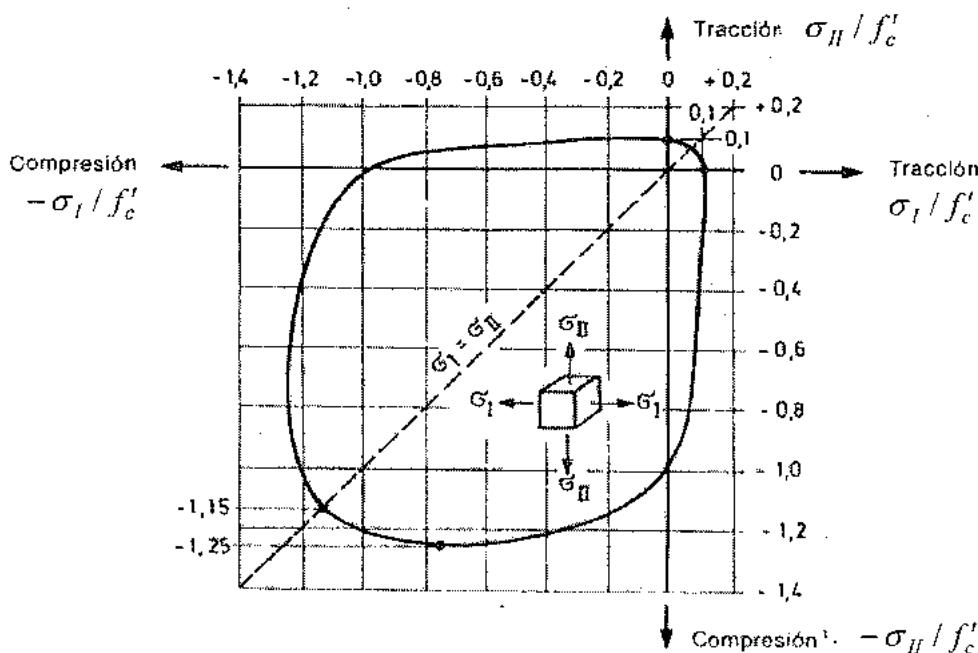
$$\text{Resistencia a flexotracción: } f_r = 0.625 \sqrt{f'_c} \quad (2.3)$$

### c) Resistencia para solicitudes en más de una dirección

La fig.2.4 reproduce los resultados obtenidos por Rüsch y Kupfer (1969) para hormigón con solicitudación biaxial. Para compresión biaxial, la resistencia a compresión crece, mientras que con pequeñas tracciones en una dirección, la resistencia a compresión en la otra dirección disminuye apreciablemente.

El aumento de la resistencia a compresión se origina también en el caso de expansiones transversales impedidas, que por efecto de Poisson generan tensiones de compresión transversal de confinamiento, como es el caso típico de columnas zunchadas.

La reducción de la resistencia a compresión por tracción transversal puede aparecer en las fibras superiores de una viga placa, donde la flexión transversal de la losa origina tracción y la flexión de la viga produce compresión. Para evitar este efecto hay que cuidar los detalles de armaduras.



**Figura 2.4:** Hormigón bajo solicitudación biaxial

Otros autores (Mander, Priestly y Park, 1988) obtuvieron por regresión numérica de resultados experimentales, expresiones para la resistencia del hormigón confinado  $f'_{cc}$  por una presión transversal  $f'_t$  originada por armadura transversal.

$$K_{cc} = \frac{f'_{cc}}{f'_c} = -1.254 + 2.254 \sqrt{1 + \frac{7.94 f'_t}{f'_c}} - \frac{2 f'_t}{f'_c} \quad (2.4)$$

También obtuvieron la expresión para la deformación  $\varepsilon_{cc}$  al alcanzarse la resistencia  $f'_{cc}$ :

$$\varepsilon_{cc} = 0.002 [1 + 5(K_{cc} - 1)] \quad (2.5)$$

Para estados triples de tensiones son aplicables las teorías de rotura basadas en las teorías de plasticidad no asociada para materiales cohesivos – friccionables.

#### d) Resistencia al corte, punzonado y torsión

Para los esfuerzos de corte, torsión o punzonado, se origina un sistema de tensiones de compresión y tracción inclinadas, las tensiones principales. La falla ocurre por alcanzarse la resistencia a tracción en la dirección principal de tracción. Esto muestra que la capacidad de resistir estos esfuerzos de corte, punzonado y torsión está vinculada a la resistencia a tracción.

#### e) Resistencia a fatiga

Para cargas de compresión repetidas se produce una disminución de resistencia, como muestra el diagrama de Smith reproducido en la fig.2.5, el que fue obtenido de ensayos de probetas prismáticas de hormigón sometidas a dos millones de ciclos con carga variable entre  $\sigma_{max}$  y  $\sigma_{min}$ . La resistencia disminuye en forma aproximadamente lineal al crecer la amplitud dinámica  $(\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ , llegándose a una resistencia de pulsación  $\sigma_u = 0.6 f'_{cp}$ , donde  $f'_{cp}$  es la resistencia en probeta prismática en un ensayo a compresión de corta duración  $f'_{cp} \cong f'_c$ .

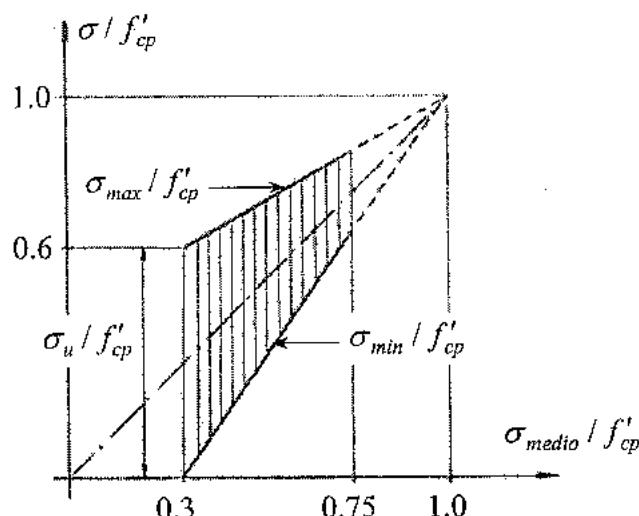


Figura 2.5: Resistencia del hormigón a fatiga

En general las cargas variables son de muy poca significación, por lo que la pérdida de resistencia por fatiga es despreciable. Sin embargo, en estructuras de puentes, con cargas del tráfico, puede ser necesario tener en cuenta estos efectos. También es importante su consideración en el caso de hormigón pretensado.

#### 2.1.4.2. Deformación del hormigón

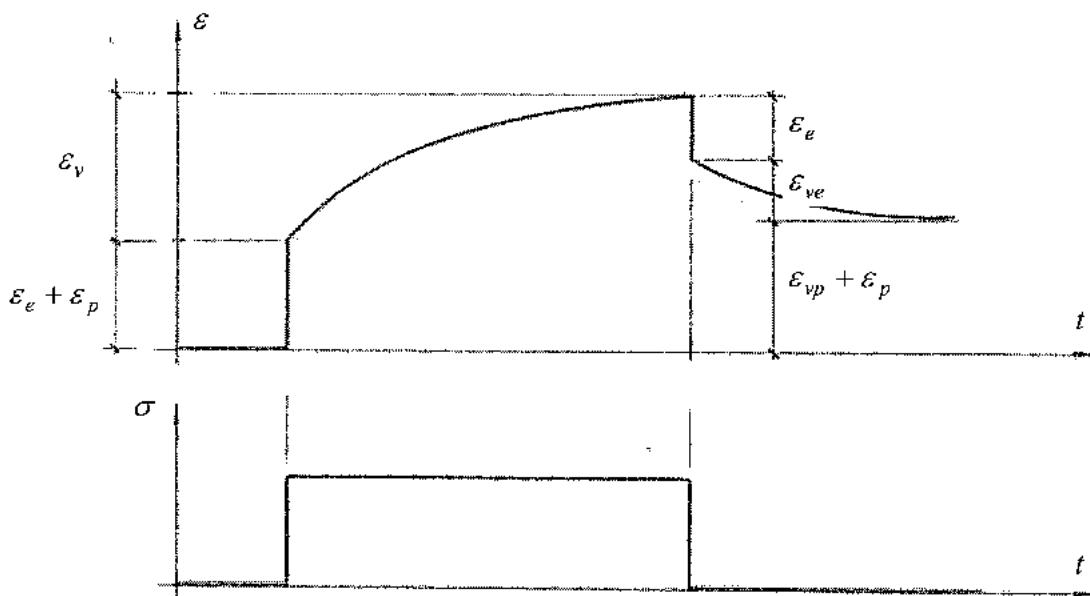
En un ensayo se miden cambios de forma, o desplazamientos relativos  $\Delta l$  que luego permiten calcular deformaciones como  $\varepsilon = \Delta l / l_0$ . Para obtener las tensiones es necesaria una ley constitutiva que las relacione con las deformaciones.

La relación constitutiva elástica lineal, o ley de Hooke,  $\sigma = E\varepsilon$ , solo se admite en el hormigón para tensiones reducidas originadas por cargas de corta duración. Para tensiones más elevadas aparecen deformaciones no lineales que no pueden despreciarse.

En forma general se distinguen las siguientes deformaciones:

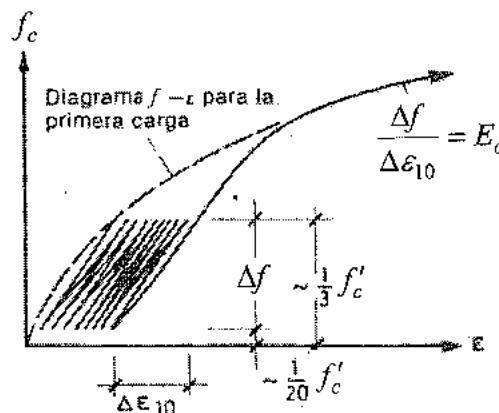
- Deformaciones independientes de las cargas:
  - Retracción e hinchamiento
  - Efectos de temperatura
- Deformaciones dependientes de las cargas:
  - Deformación elástica instantánea  $\varepsilon_e$ .
  - Deformación inelástica o fluencia plástica independiente del tiempo  $\varepsilon_p$ .
  - Fluencia lenta o creep  $\varepsilon_v$ : son las deformaciones dependientes del tiempo e involucran componentes viscoelásticos  $\varepsilon_{ve}$  y viscoplásticos  $\varepsilon_{vp}$ .

Las deformaciones impuestas por retracción (secado al aire), hinchamiento (cuerpo colocado bajo agua), y efectos térmicos fueron señaladas en el punto 2.1.3 c) y d). Si las deformaciones están impedidas se producen tensiones que, con el tiempo, resultan parcialmente compensadas por la fluencia. La evolución de las deformaciones dependientes de las cargas se muestra en la fig.2.6.



**Figura 2.6:** Evolución de las deformaciones con el tiempo

El hormigón tiene un comportamiento elástico  $f_c = E_c \varepsilon$  solo para tensiones reducidas. La determinación del módulo  $E_c$  del hormigón se efectúa de acuerdo con la fig.2.7, con 10 repeticiones de carga  $\Delta f \cong 1/3 f'_c$  con velocidad de 0.5 Mpa/seg, eliminando así las componentes plásticos iniciales.



**Figura 2.7:** Determinación del módulo  $E_c$  del hormigón

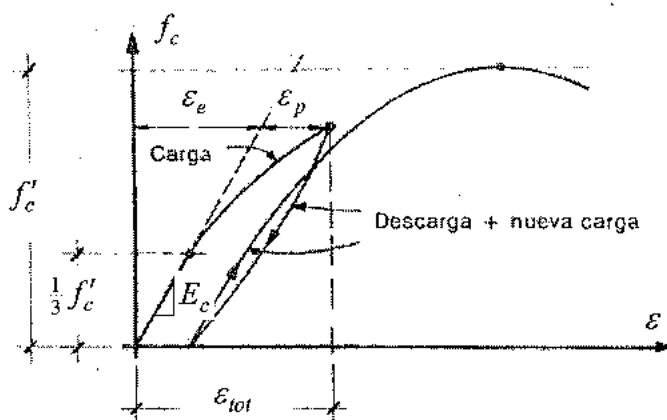
El CIRSOC 201, punto 8.5 establece la siguiente expresión para el módulo de elasticidad:

$$E_c = 4700 \sqrt{f'_c} \quad (2.6)$$

La relación entre la deformación específica transversal y la longitudinal, es decir el coeficiente de Poisson, se toma como valor promedio:

$$\mu = 0.20 \quad (2.7)$$

La deformación inelástica, o de cedencia plástica del material, independiente del tiempo, se pone de manifiesto en la descarga con la deformación remanente, ver fig.2.8



**Figura 2.8:** Deformación plástica

La magnitud de esta deformación inelástica depende de la composición y elaboración del hormigón, es decir de la calidad medida con  $f'_c$ , y principalmente del nivel de tensión alcanzada.

Los modelos de elasticidad y plasticidad no concuerdan exactamente con la realidad, ya que en los ensayos se observan que los resultados dependen de la velocidad de carga. Los materiales en general, y el hormigón en particular, tienen un comportamiento viscoso es decir con deformaciones que evolucionan en el tiempo bajo carga constante como se muestra en la fig.2.6. Cuando se produce la descarga, la deformación elástica  $\varepsilon_e$  se recupera instantáneamente, la deformación viscoelástica  $\varepsilon_{ve}$  se recupera con el tiempo, y queda como remanente la deformación plástica  $\varepsilon_p$  y la componente viscoplastica  $\varepsilon_{vp}$  que es la deformación plástica irreversible que se produce con el tiempo.

Existen modelos matemáticos que representan con bastante aproximación estos fenómenos, ajustados con ensayos experimentales, y orientados a su implementación numérica mediante el método de los elementos finitos.

Los libros clásicos de hormigón armado ( Rüsch, Leonhardt, Jiménez Montoya ) desarrollan expresiones simplificadas para evaluar las deformaciones por retracción y fluencia.

El reglamento CIRSOC 201, da una expresión para calcular la flecha adicional a largo plazo resultante de la fluencia lenta y de la contracción en elementos flexionados. Este tema será tratado en el Cap.10.

## 2.2. ACEROS PARA HORMIGÓN

### 2.2.1. Tipos de acero

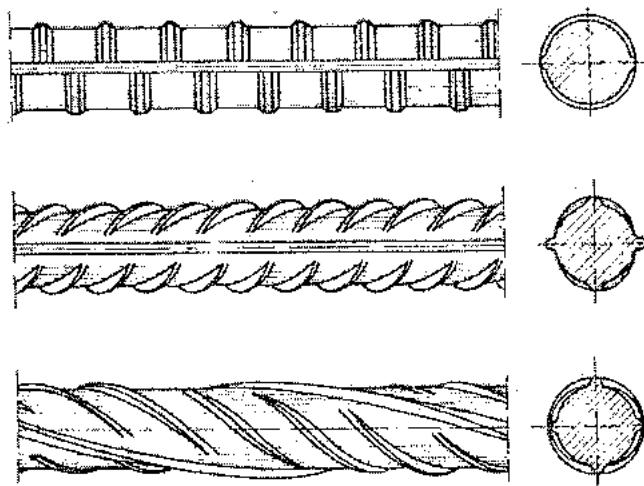
En las primeras construcciones de hormigón armado se empleaba acero en barras redondas lisas con tensión de trabajo de 100 a 200 MPa. Se anclaban en los extremos mediante ganchos, y para las bajas tensiones de trabajo, las propiedades de adherencia de la superficie lisa eran suficientes.

Los avances tecnológicos mejoraron las propiedades de los aceros en especial su capacidad resistente, que significa también un aumento de las deformaciones (con un módulo de elasticidad constante), produciendo la aparición de fisuras más anchas. Para mantener los anchos de fisuras dentro de límites tolerables, se mejoraron las propiedades de adherencia, logrando que se produzcan muchas fisuras pequeñas en lugar de pocas y anchas.

La mejor adherencia se logra con el conformado superficial: muescas, resaltos laminados, nervurado, torsionado con nervios longitudinales, como se muestra en la fig.2.9.

El aumento de la resistencia de los aceros para hormigón se logra mediante dos formas:

- *Aceros de dureza natural:* se laminan en caliente y sus propiedades se basan únicamente en la composición química.
- *Aceros deformados en frío:* luego del laminado en caliente se produce un trabajo en frío como el trafilado, torsionado o estiramiento. Debido a esto se logra un aumento de resistencia, que puede perderse si el acero es sometido a un calentamiento posterior (soldadura).



**Figura 2.9:** Ejemplos de barras nervuradas

Los tipos de aceros, según CIRSOC 201 punto 3.6, y sus características principales son las siguientes:

- Acero liso **AL 220**: solo se pueden utilizar para la ejecución de espirales, estribos y zunchos.
- Acero de dureza natural **ADN 420** con conformación superficial nervurada. Barras de diámetro 6 a 40 mm para armaduras en general. Cuando es necesario soldarlas se deben usar métodos de soldadura especiales.
- Acero de dureza natural soldable **ADN 420 S**, también nervurada. Es más apropiado cuando se requieren uniones soldadas. Igual utilización anterior.
- Acero para alambres y mallas soldadas **ATR 500 N** y **AM 500 N** de 5 a 12 mm de diámetro.

Las Tablas 3.8 y 3.9 del CIRSOC 201 indican las principales características físicas y mecánicas de los diferentes tipos de acero. En cada caso la tensión de fluencia especificada, ó la tensión convencional de fluencia especificada, a utilizar en los cálculos, es el valor correspondiente a la tensión de fluencia característica indicada en las tablas.

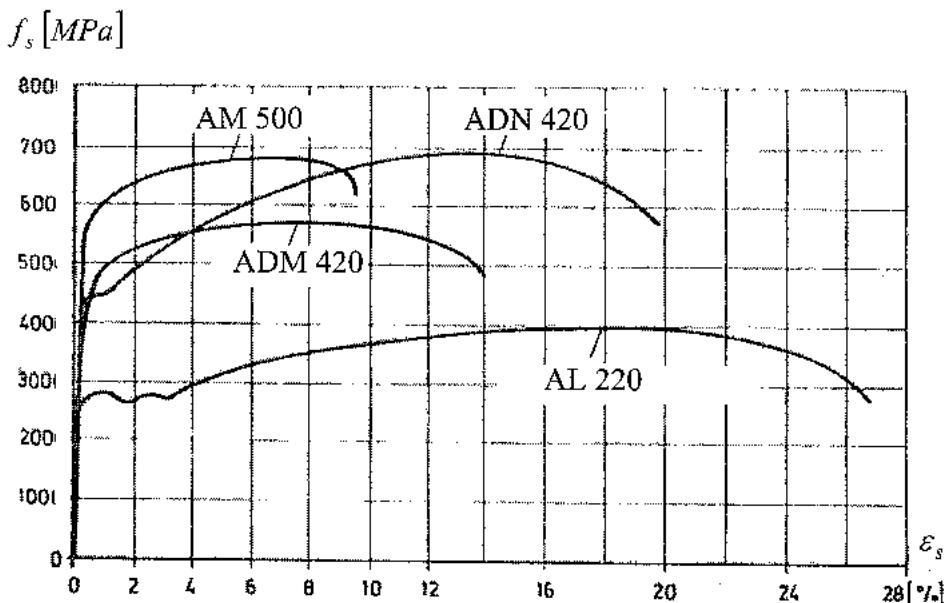
### 2.2.2. Resistencia y deformación de los aceros

Las curvas tensión-deformación de los aceros para hormigón armado presentan un comportamiento elástico lineal en la primera etapa de carga, caracterizado por su módulo de elasticidad  $E_s = 200000 \text{ MPa}$ .

Se llega al límite de proporcionalidad, tensión que produce el primer alargamiento permanente de 0,01%. El límite elástico es el punto anterior a la aparición del escalón de fluencia. En los aceros estirados en frío, sin escalón de fluencia, este punto es convencional y corresponde a una deformación permanente de 0,2 % después de la descarga.

Luego del escalón de fluencia, que en aceros de dureza natural termina en deformaciones entre 1,5 y 2 %, comienza un re-endurecimiento con deformaciones crecientes hasta alcanzar la tensión de rotura con deformaciones del orden del 12 al 18 % dependiendo del tipo de acero.

La fig.2.10 muestra curvas típicas para distintos tipos de acero.



**Figura 2.10:** Relación tensión-deformación de los aceros para hormigón

### 2.2.3. Otras características

- a) **Resistencia y aptitud de doblado:** deben poder doblarse en un ángulo hasta 180° con un diámetro del mandril según el tipo de acero, sin que se produzcan fisuras o rotura de la barra.
- b) **Resistencia a la fatiga:** por efecto de solicitudes frecuentemente repetidas, la resistencia del acero disminuye y puede producirse una rotura en la zona elástica. Se determina con la variación de tensión (amplitud del pulso)  $\Delta f_s$ , que es capaz de soportar con  $2 \times 10^6$  ciclos. Los valores de la amplitud del pulso dependen de la tensión inferior. Además influye si la probeta de acero está hormigonada o no, si la barra es recta o está doblada.
- c) **Resistencia al fuego:** el acero sufre cambios en sus propiedades mecánicas con la temperatura. Para temperaturas muy bajas se vuelve frágil. La resistencia aumenta con la temperatura hasta 250° C, y el límite de fluencia lo hace hasta 100° C. Cuando la temperatura supera los 350° C la resistencia disminuye muy rápidamente, hecho que debe ser tenido en cuenta en el proyecto de estructuras que deben resistir el fuego. Se recurre a la protección del acero mediante un recubrimiento de hormigón adecuado.

El CIRSOC 201, punto 7.7.6 especifica el aumento en el recubrimiento para protección de las armaduras contra el fuego: por cada 30 minutos de resistencia al fuego, los recubrimientos normales se incrementan en 10 mm para tabiques, vigas y columnas, y 5 mm para losas.

### 2.3. MATERIAL COMBINADO: HORMIGÓN ARMADO

### 2.3.1. Comportamiento conjunto del acero con el hormigón

En los fundamentos de la construcción compuesta (ver 1.1.b) se señaló que el trabajo conjunto de ambos materiales se basa en la adherencia. Las deformaciones que experimenta el acero son aproximadamente las mismas que las fibras vecinas de hormigón.

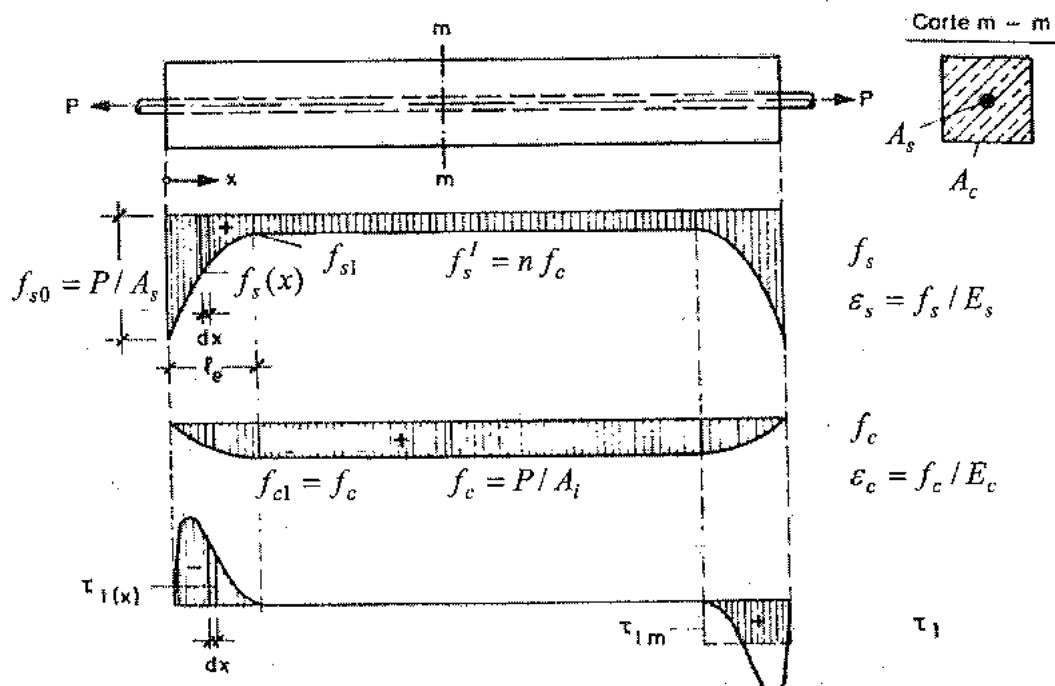
La resistencia a tracción del hormigón es reducida. Para solicitudes elevadas se fisura y entonces la armadura debe absorber todos los esfuerzos de tracción. La adherencia permite que el ancho de fisuras permanezca pequeño.

Se distinguen dos estados en el hormigón armado

- **Estado I:** la zona de tracción del hormigón no se encuentra fisurada, es decir el hormigón también absorbe tracción.
  - **Estado II:** la zona de tracción del hormigón presenta numerosas fisuras, y los esfuerzos de tracción deben ser absorbidos en su totalidad por la armadura.

### 2.3.2. Adherencia en una barra traccionada de hormigón armado

Se analizan las tensiones y deformaciones en un prisma de hormigón armado mostrado en la fig.2.11. La fuerza  $P$  se aplica sobre la barra de acero que se encuentra en el eje del prisma.



**Figura 2.11:** Distribución cualitativa de tensiones  $f_{s0}$ ,  $f_c$ ,  $\tau_1$  en Estado I

En las secciones de acero que están fuera del hormigón las tensiones y deformaciones son:

$$f_{s0} = P / A_s \quad \varepsilon_{s0} = f_{s0} / E_s \quad (2.9)$$

Cuando el acero se introduce en el hormigón, sus deformaciones son restringidas por éste, y se produce una transferencia de carga, reduciéndose las tensiones en el acero y aumentando las del hormigón. Esto se produce debido a las tensiones tangenciales entre el acero y el hormigón (adherencia), las cuales se anulan luego de una distancia  $l_e$  llamada longitud de transferencia, cuando las deformaciones de ambos materiales se igualan.

En la zona de transferencia la condición de equilibrio en una tajada  $dx$  es:

$$-dT_s = dT_c = \tau_1(x) u \, dx \quad (2.10)$$

donde  $T_s$ : fuerza de tracción en el acero;  $T_c$ : fuerza de tracción en el hormigón;  $u$ : perímetro de la barra de acero,  $u = \pi \phi$

Entre las zonas de transferencia se cumplen las siguientes ecuaciones:

- Equilibrio:  $P = T_s + T_c = f_s A_s + f_c A_{cn}$
- Deformación:  $\varepsilon_s = \varepsilon_c$
- Constitutivas:  $f_s = E_s \varepsilon_s \quad f_c = E_c \varepsilon_c$

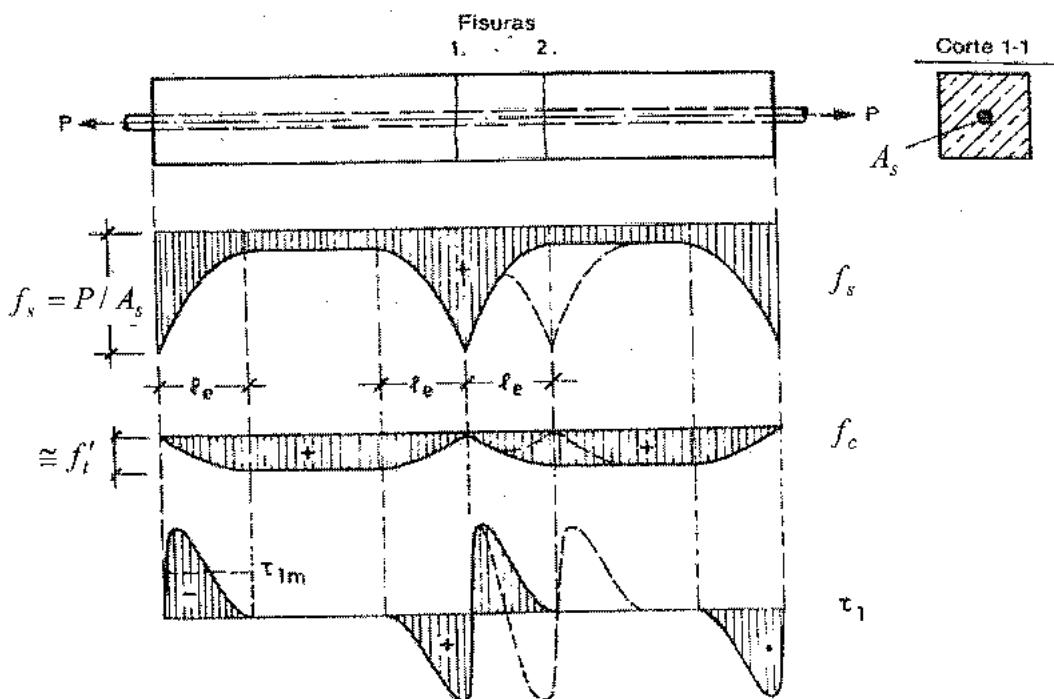
En las relaciones constitutivas se ha supuesto la validez de la ley de Hooke, teniendo en cuenta que el hormigón está en Estado I. En la primera ecuación (2.11) es  $A_{cn} = A_c - A_s$  sección neta de hormigón.

Resolviendo se obtiene:

$$f_s^I = \frac{E_s}{E_c} f_c^I = n f_c^I \quad f_c^I = \frac{P}{A_{cn} + n A_s} = \frac{P}{A_i} \quad (2.12)$$

Ahora se aumenta la carga hasta que  $f_c^I = P / A_i$  alcance la resistencia a tracción directa del hormigón  $f_t'$ . En la sección más debilitada, aleatoria, se produce la primera fisura y la fuerza que absorbió el hormigón en esa sección se transfiere nuevamente al acero en una longitud  $l_e$  como se indica en la fig.2.12. En la sección de la fisura la pieza trabaja en Estado II.

Si la carga continúa aumentando, se originan nuevas fisuras, cuya separación depende del grado de adherencia, ya que se requiere por lo menos una distancia  $l_e$  para que la tensión en el hormigón alcance una tensión de tracción  $f_c = f_t'$ .



**Figura 2.12:** Distribución cualitativa de tensiones  $f_s$ ,  $f_c$ ,  $\tau_1$  en Estado II

### 2.3.3. Adherencia en vigas a flexión de hormigón armado

Cuando se carga una viga, ver fig.2.13, el hormigón colabora en la zona de tracción hasta que la tensión por flexión en el borde alcance el valor de la rotura  $f_r$ .

Las tensiones por flexión en Estado I se calculan como en el caso de una viga de material homogéneo, pero utilizando el momento de inercia ideal  $J_i$  de la sección ideal u homogeneizada  $A_i = A_c + (n-1)A_s$ :

$$f_{cu}^I = \frac{M}{J_i} y_u \quad f_s^I = n \frac{M}{J_i} y_s \quad (2.13)$$

Al aumentar el momento flector  $M$  se supera la resistencia a tracción del hormigón y aparecen fisuras, pasando al Estado II en correspondencia con la fisura. La tensión en el acero se calcula con:

$$f_s^{II} = \frac{M}{z A_s} \quad (2.14)$$

A ambos lados de la fisura actúan tensiones de adherencia  $\tau_1$ , sobre longitudes de transferencia  $l_e$ , análogamente a lo que ocurre en la pieza traccionada.

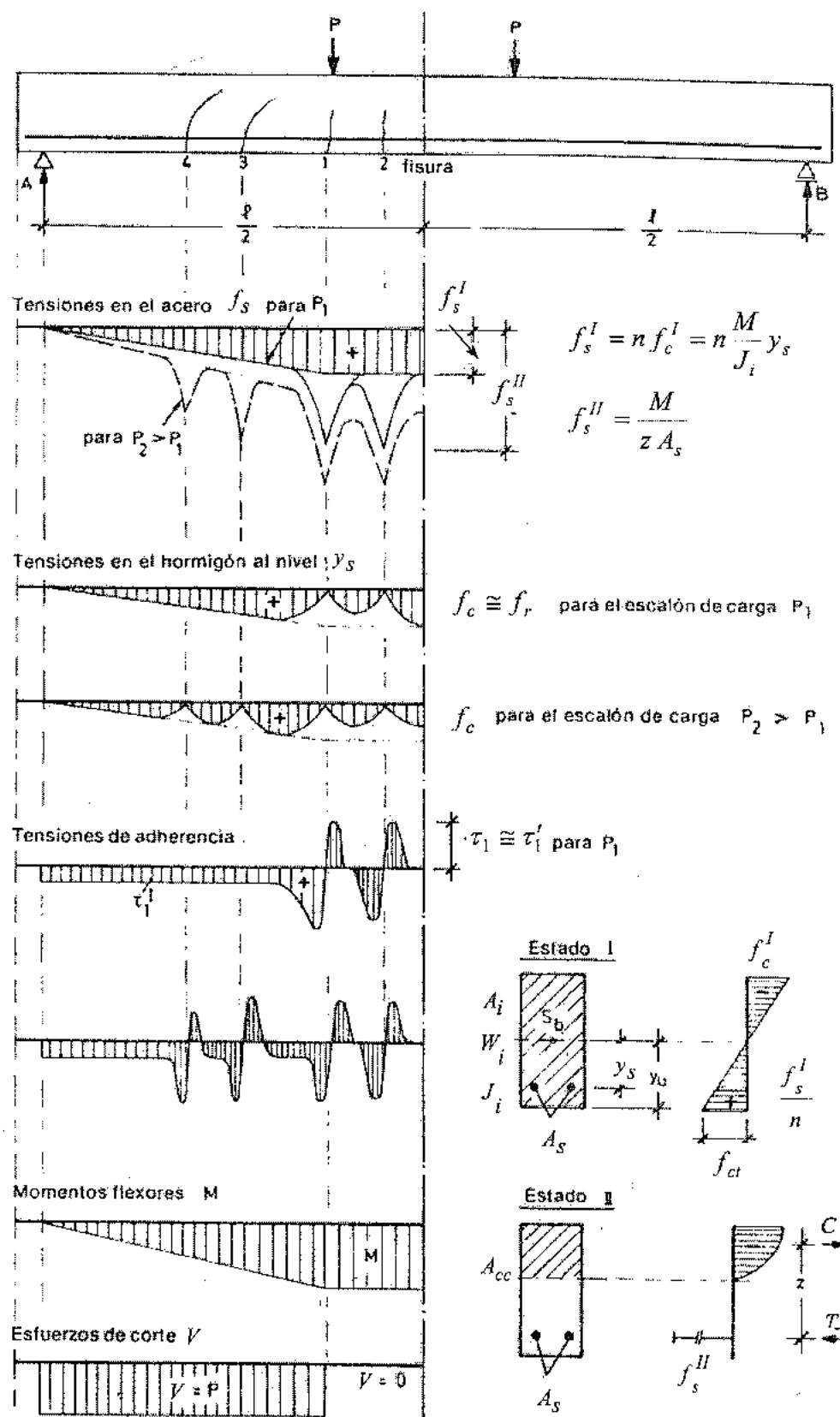
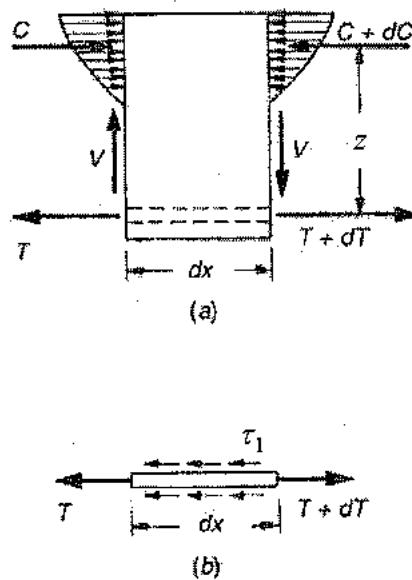


Figura 2.13: Distribución de tensiones  $f_s$ ,  $f_c$ ,  $\tau_1$  en una viga de hormigón armado para Estados I y II

Hay que considerar que en el caso de piezas a flexión existen además tensiones de adherencia debido a la variación de la fuerza de tracción en la armadura originadas por la variación del momento flector, como se muestran en la fig.2.14.



**Figura 2.14:** Fuerzas y tensiones que actúan en una longitud diferencial de viga

#### 2.3.4. Orígenes de las tensiones de adherencia

Las tensiones de adherencia aparecen cuando, en un determinado entorno, varían las tensiones en el acero. Las causas pueden ser:

- Las cargas: que producen variaciones de tracción o compresión en el acero.
- Las fisuras: altos picos localizados de tensiones de adherencia.
- Los esfuerzos de anclaje en los extremos de las barras.
- Variaciones de temperatura importante como en el caso de incendios.
- Contracción de fraguado del hormigón, que resulta restringida por la armadura.
- Fluencia lenta del hormigón en elementos comprimidos (columnas), el hormigón se acorta y por adherencia transfiere carga al acero.

#### 2.3.5. Formas de actuar de la adherencia

##### a) Adherencia por contacto

Entre el acero y el mortero endurecido de cemento existen fuerzas de adhesión, las cuales dependen de la rugosidad y estado de limpieza de las armaduras. Este efecto no es suficiente para asegurar una buena adherencia y se destruye con pequeños movimientos.

##### b) Adherencia por rozamiento

Desaparecida la adherencia por contacto, el mínimo desplazamiento relativo entre acero y hormigón origina una resistencia por rozamiento, siempre que existan presiones normales a la

armadura. Estas presiones pueden provenir de las tensiones de compresión debido a las cargas, a la contracción por fragüe o del hinchamiento del hormigón.

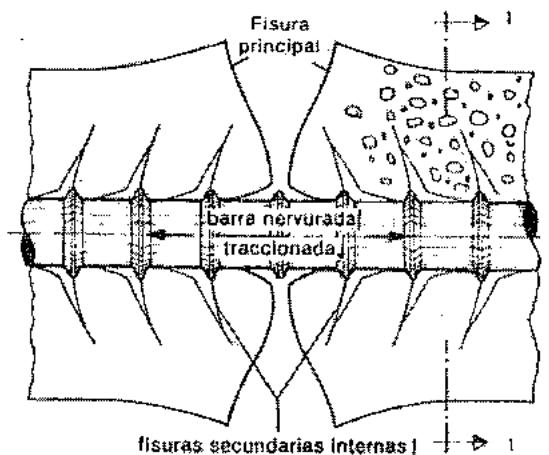
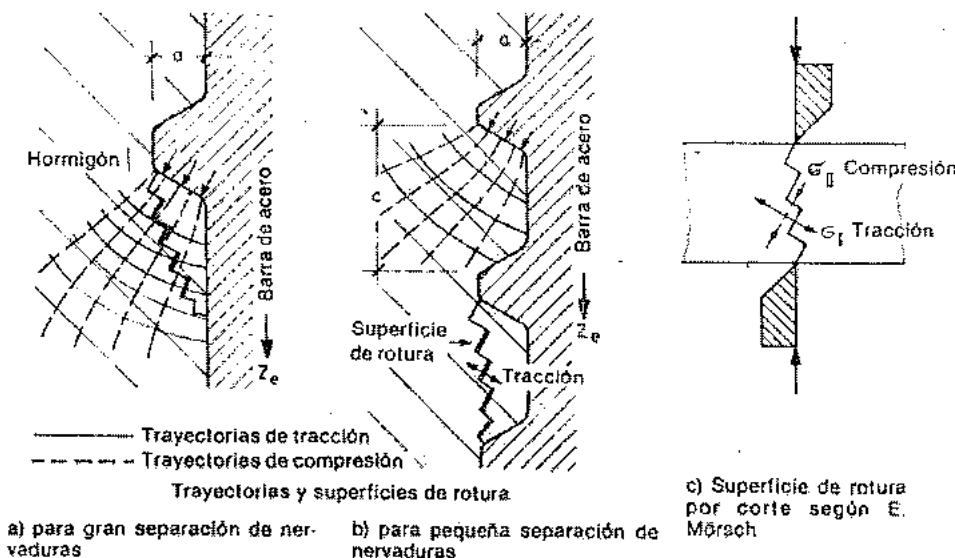
El coeficiente de rozamiento como consecuencia de la rugosidad superficial del acero varía de  $\mu = 0.30$  a  $0.60$ .

Este efecto es aceptable solo cuando la presión transversal actúa en forma permanente.

### c) Adherencia por corte

En barras conformadas, con nervaduras, para que pueda existir un deslizamiento entre el acero y el hormigón deben romperse las "ménulas de hormigón" que se forman entre las salientes de las barras. Este tipo de resistencia por corte es el más significativo cuando se quieren aprovechar las tensiones elevadas del acero.

En la fig.2.15 se muestran las superficies de rotura por corte siguiendo las direcciones principales de tracción, continuando con un desplazamiento transversal con fisuración del hormigón vecino, hasta que se establece un deslizamiento relativo entre los dientes.



**Figura 2.15:** Tensiones principales y superficies de rotura en las ménulas de hormigón entre nervaduras.

### 2.3.6. Ley tensión de adherencia – deslizamiento relativo

En la teoría utilizada para el dimensionamiento del hormigón armado se admite la validez de  $\varepsilon_s = \varepsilon_c$  aún para el Estado II, es decir que no existen deslizamientos relativos entre acero y hormigón. Esto es correcto para muchos tramos entre fisuras, pero alrededor de la fisura sí se producen desplazamientos relativos  $\Delta$  porque se pierde la adherencia por contacto, y la adherencia por rozamiento y corte de las ménsulas de hormigón se manifiesta con un deslizamiento.

De todas maneras el alargamiento total del acero y del hormigón serán iguales, en una determinada longitud de la pieza, luego  $\varepsilon_s = \varepsilon_c$  se cumple en promedio, pero no punto a punto.

Una relación típica  $\tau_1 - \Delta$  se muestra en la fig.2.16 para barras lisas y nervuradas, obtenida de ensayos de arrancamiento de barras de acero embutidas en el hormigón.

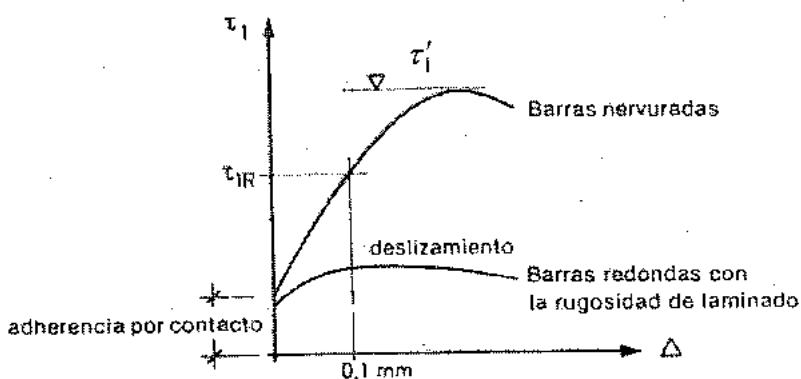


Figura 2.16: Diagramas cualitativos de la relación  $\tau_1 - \Delta$

La forma y dimensiones de las probetas, como así también la ubicación y longitud del tramo empotrado de la barra, influyen considerablemente sobre los resultados obtenidos. En general se adopta el valor medio sobre una longitud  $l_v \cong 5\phi$ , siendo:

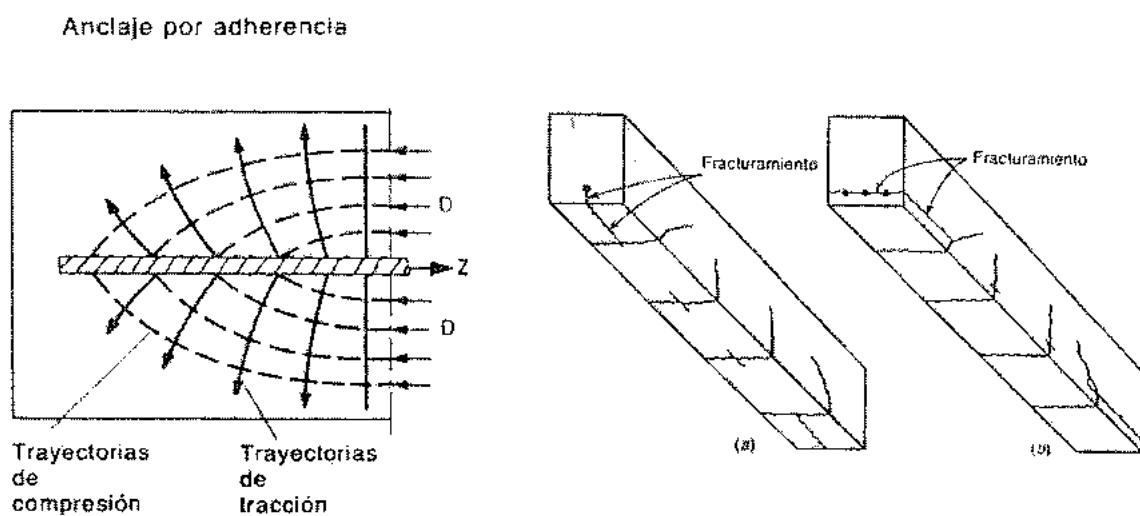
$$\tau_{1m} = \frac{P}{\pi \phi l_v} \quad (2.15)$$

### 2.3.7. Resistencia última de adherencia y longitud de anclaje

En los ensayos se observan dos tipos de falla por adherencia.

- Desprendimiento directo de la barra: ocurre cuando existe un buen confinamiento dado por el hormigón, caso típico con barras de pequeño diámetro, espaciadas, y con buen recubrimiento.
- Hendimiento o fractura del hormigón a lo largo de la barra: ocurre cuando el recubrimiento, el espaciamiento, o el confinamiento son insuficiente para resistir la tracción lateral en el hormigón producido por el efecto de cuña cuando las nervaduras de las barras presionan contra el hormigón.

La falla por fractura o hendimiento del hormigón es más común en vigas que la falla por desprendimiento directo, ver fig.2.17.



**Figura 2.17:** Fractura del hormigón a lo largo de la armadura

Cuando se supera la resistencia de adherencia, o cuando el hendimiento se extiende a todo lo largo hasta el extremo de la barra no anclada, se presenta una falla completa de adherencia, y el deslizamiento del acero con respecto al hormigón produce el colapso de la viga.

Se define “*longitud de anclaje*” como la longitud de empotramiento necesaria para desarrollar toda la resistencia a tracción de la barra. Dicho de otro modo, en una viga no habrá falla prematura por adherencia si la longitud medida desde el punto donde es necesario la fuerza en la barra  $A_b f_y$  ( $A_b$ : sección de la barra;  $f_y$ : tensión de fluencia) hasta su extremo libre más cercano, es por lo menos igual a la “*longitud de anclaje*”.

#### a) Anclaje de barras conformadas, solicitados a tracción

Investigaciones experimentales han identificado los factores que afectan la longitud de anclaje y se han obtenido ecuaciones empíricas que se utilizan en la práctica del diseño.

La longitud de anclaje  $l_d$ , según CIRSOC 201, punto 12.2, es:

$$l_d = \left[ \frac{9}{10} \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \left[ \frac{\psi_t \psi_e \psi_s \lambda}{\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}} \right] \right] d_b \geq 300mm \quad (2.16)$$

Los factores que influyen son:

- La resistencia a tracción del hormigón, reflejado en  $\sqrt{f'_c}$ , debido a que el tipo de falla por adherencia más común es del tipo de hendimiento o fractura a lo largo de la barra por tracción en el hormigón.

- El recubrimiento, o la separación entre barras,  $c_b$ , medida entre ejes de barras, o de eje de barra a la superficie del hormigón, la que sea menor.
- El confinamiento dado por la armadura transversal,  $K_{tr} = A_{tr} f_{yt} / (10 s n)$  donde  $A_{tr}$  es el área de toda la armadura transversal ubicada dentro de una distancia o separación  $s$ ,  $f_{yt}$  es la tensión de fluencia de la armadura transversal y  $n$  es el número de barras que se anclan.
- Se deberá adoptar  $(c_b + K_{tr})/d_b \leq 2.5$  porque sino se puede presentar una falla por arrancamiento y es poco probable que un aumento de recubrimiento, o de la armadura transversal, incremente la capacidad de anclaje.
- Factor por ubicación de la armadura  $\psi_t$ : en las barras horizontales la resistencia por adherencia es menor porque el hormigón fresco se asienta por debajo de las barras dejando oquedades y zonas más porosas que reducen la superficie de adherencia. Para barras horizontales, con 300 mm o más de hormigón debajo del anclaje resulta  $\psi_t = 1.3$ . Otros casos, de buena adherencia,  $\psi_t = 1.0$ .
- Factor por diámetro de la armadura  $\psi_s$ : refleja el comportamiento más favorable de los diámetros pequeños. Para  $d_b \leq 16\text{mm}$ , es  $\psi_s = 0.8$ . Para  $d_b > 16\text{mm}$ , es  $\psi_s = 1.0$ .
- Factor por revestimiento de las barras  $\psi_e$ : en condiciones ambientales corrosivas, se utiliza ya frecuentemente barras de armaduras recubiertas con productos epoxi que reduce la adherencia. Para barras revestidas con recubrimientos menores a 3  $d_b$  o separación libre menor a 6  $d_b$ , es  $\psi_e = 1.5$ . Para las demás barras revestidas es  $\psi_e = 1.2$ . Sin revestimiento es  $\psi_e = 1.0$ .
- Factor  $\lambda$  para hormigón con agregado liviano, es  $\lambda = 1.3$  que contempla la menor resistencia a tracción.

Si la armadura que se dispone excede el valor de la armadura requerida determinada por calculo, se puede reducir la longitud de anclaje por el factor  $A_{s(\text{requerida})} / A_{s(\text{disponible})}$ .

## □ Ejemplo 2.1

Calcular la longitud de anclaje con los siguientes datos:

$f_y = 420 \text{ MPa}$ ,  $f'_c = 30 \text{ MPa}$ ,  $d_b = 16\text{mm}$ ,  $c_b = 1.5 d_b$ ,  $K_{tr} = 0$ , zona de buena adherencia, armadura no revestida y hormigón de peso normal.

Los factores resultan:  $\psi_t = 1.0$ ,  $\psi_e = 1.0$ ,  $\psi_s = 0.8$ ,  $\lambda = 1.0$ .

Aplicando ec.(2.16) se obtiene  $I_d = 37 d_b$ .

Si se agregan estribos transversales tal que  $(c_b + K_{tr})/d_b = 2.5$ , se obtiene  $I_d = 22 d_b$ .

Si al caso inicial se modifica  $d_b = 20\text{mm}$  y barra horizontal con mala adherencia, los factores son:  $\psi_t = 1.3$ ,  $\psi_s = 1.0$ , y aplicando ec.(2.16) se obtiene  $I_d = 60 d_b$ .

### b) Anclaje de barras conformadas, solicitados a compresión

Puede ser necesario que la armadura desarrolle su resistencia a compresión en el anclaje, por ejemplo en columnas.

La longitud de anclaje será la mayor de

$$l_d = \left[ \frac{0.24 f_y}{\sqrt{f'_c}} \right] d_b \quad \text{ó} \quad [0.04 f_y] d_b \quad \text{ó} \quad 200 \text{ mm} \quad (2.17)$$

donde la constante 0.04 se expresa en  $1 / MPa$ .

Se puede reducir por armadura en exceso por el factor  $A_s(\text{requerida}) / A_s(\text{disponible})$ , y por un factor 0.75 si la armadura está encerrada por un zuncho.

Los ganchos (ver apartado siguiente) no son efectivos para transmitir fuerzas de compresión y no deben ser considerados.

### c) Anclaje de barras conformadas, traccionadas, con ganchos normales

Cuando el esfuerzo de tracción no pueda anclarse únicamente por adherencia, es necesario suministrar un anclaje especial en el extremo de la barra por ejemplo con ganchos con las siguientes características.

El gancho normal a  $180^\circ$  tiene un radio externo de doblado de  $4 d_b$  para  $6 \text{ mm} \leq d_b \leq 25 \text{ mm}$ ;  $5 d_b$  para  $25 \text{ mm} < d_b \leq 32 \text{ mm}$ ; y  $6 d_b$  para  $d_b > 32 \text{ mm}$ ; termina con un extremo recto de longitud  $4 d_b$  pero como mínimo 60 mm.

El gancho normal a  $90^\circ$  tiene los mismos radios de doblado y termina con extremo recto de longitud mayor o igual a  $12 d_b$ , ver fig.2.18.

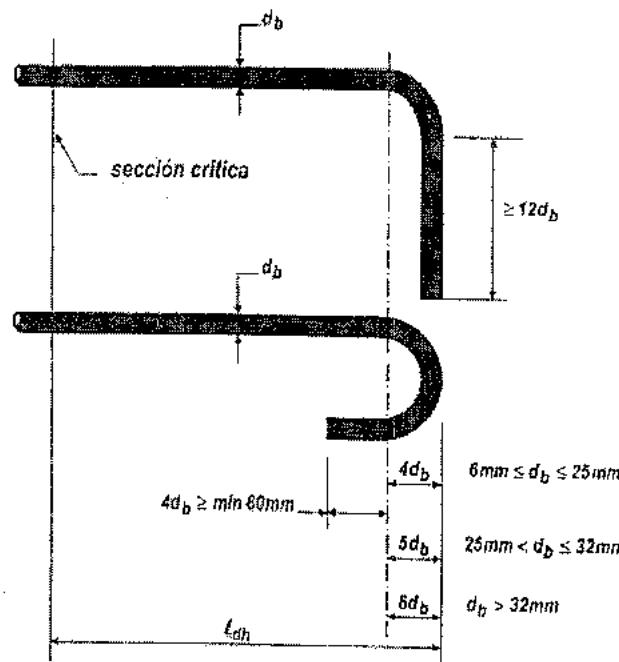


Figura 2.18: Detalles de los ganchos para anclaje

Los ensayos indican que la falla se produce por hendimiento del hormigón en el plano del gancho, debido a las presiones muy altas sobre el hormigón dentro del gancho.

La longitud de anclaje  $l_{dh}$ , medida como muestra la fig.2.18 es

$$l_{dh} = \left[ 0.24 \psi_e \lambda \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \right] d_b \geq \begin{cases} 8d_b \\ 150 \text{ mm} \end{cases} \quad (2.18)$$

donde  $\psi_e = 1.2$  para armadura revestida, sino  $\psi_e = 1.0$ ;  $\lambda = 1.3$  para hormigón con agregado liviano, sino  $\lambda = 1.0$ .

La longitud  $l_{dh}$  calculada con (2.18) se puede reducir con el factor  $A_s$  (requerida) /  $A_s$  (disponible); por recubrimientos laterales importantes, con un factor 0.7; y por estribos cerrados de confinamiento, con un factor 0.8. Ver punto 12.5.3 del CIRSOC 201.

Otros casos de anclaje como: paquetes de barras; anclajes mecánicos; anclaje de mallas soldadas, pueden verse directamente en el CIRSOC 201.

### 2.3.8. Empalmes de armaduras

Las barras de armadura están disponibles en longitudes comerciales standard de 12 m. Para cantidades grandes se pueden pedir longitudes mayores. Este hecho, además de consideraciones prácticas de ejecución de la obra, hace que en ciertos casos sea necesario empalmar barras de la armadura.

Se deben tratar de evitar los empalmes en los puntos de esfuerzos máximos, y cuando se utilicen, se deben escalaronar.

Los empalmes se pueden realizar por:

- **Yuxtaposición:** El esfuerzo de tracción se transmite de una barra a la otra por diagonales ideales comprimidas, ver fig.2.19, para la cual solo puede colaborar parte del perímetro de la barra. Por esa razón no es suficiente la longitud de anclaje  $l_d$ . Las barras deben estar yuxtapuestas o poco separadas.

Las diagonales comprimidas originan esfuerzos transversales de tracción que aumenta el peligro que salte el recubrimiento de hormigón, con respecto al anclaje simple de una barra.

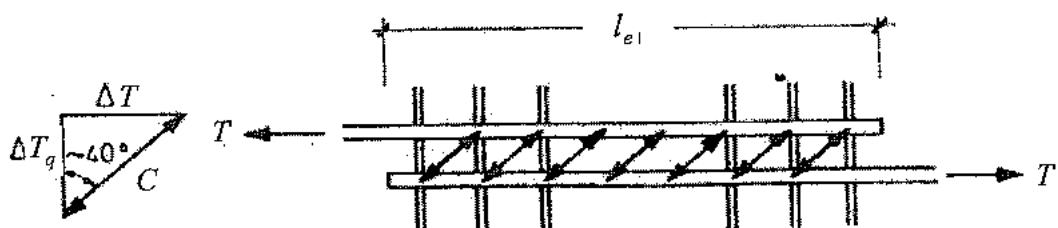


Figura 2.19: Transmisión de esfuerzos en el empalme por juxtaposición

Este tipo de empalme se puede utilizar en barras con  $d_b \leq 32 \text{ mm}$  porque para diámetros mayores no hay suficiente información experimental. Las barras que constituyen un paquete no pueden empalmarse en la misma sección.

En elementos solicitados a flexión, las barras que se empalman pueden estar separadas hasta 1/5 de la longitud de empalme ó 150 mm, debido a que queda un espacio no armado que puede fallar.

- **Dispositivos mecánicos y soldaduras:** los empalmes soldados deben colocarse a tope y soldarse de manera que la conexión desarrolle 125% de la resistencia a fluencia de la barra. El mismo requisito se exige a las conexiones mecánicas. Esto asegura que una barra empalmada y sobrecargada falle por fluencia dúctil en una región alejada del empalme donde es posible una falla frágil.

### a) Empalmes de barras conformadas, solicitadas a tracción

La longitud de empalme por yuxtaposición, es decir la longitud donde por adherencia se transmite la fuerza de una barra a la otra, determinada por ensayos, se puede expresar en función de la longitud de anclaje  $l_d$ .

Los empalmes se clasifican en:

- *Clase A:* Cuando la armadura disponible es el doble que la requerida, y está empalmada la mitad o menos de la armadura total dentro de la longitud de empalme.
- *Clase B:* otras situaciones.

La longitud de empalme deberá ser:

- Empalme *Clase A*:  $l_e = 1.0 l_d$
  - Empalme *Clase B*:  $l_e = 1.3 l_d$
  - Mínimo:  $l_e = 300 \text{ mm}$
- (2.19)

En (2.19), la longitud  $l_e$  no debe incluir el factor de reducción por mayor armadura disponible que la requerida; ese hecho ya está contemplado en la clasificación de empalmes.

### b) Empalmes de barras conformadas, solicitadas a compresión

En empalmes por yuxtaposición en barras a compresión, el comportamiento no se ve afectado por el problema de la fisuración originado por la tracción transversal que se genera, y por lo tanto no se requieren disposiciones tan estrictas.

La longitud de empalme deberá ser:

- Para  $f_y \leq 420 \text{ MPa}$ :  $l_e = 0.07 f_y d_b$
  - Para  $f_y > 420 \text{ MPa}$ :  $l_e = (0.13 f_y - 24) d_b$
  - Mínimo:  $l_e = 300 \text{ mm}$
- (2.20)

Si la calidad del hormigón es  $f'_c < 20 \text{ MPa}$  las longitudes dadas en (2.20) se deben incrementar en 1/3.

En barras solicitadas exclusivamente a compresión, se permite transmitir el esfuerzo de compresión entre las barras por apoyo directo de unas sobre otras, siempre que se garantice que las superficies estarán en contacto mediante algún elemento de guía, y que las superficies de contacto son planas y forman un ángulo recto con el eje de la barra. Se deben proveer estribos cerrados o zunchos. La experiencia disponible se refiere a empalmes de barra verticales de columna.

# CAPÍTULO 3

## BASES PARA LA VERIFICACIÓN DE LA SEGURIDAD

### 3.1. OBJETIVO – ESTADOS LÍMITES

La ingeniería estructural ha tenido siempre como objetivo fundamental lograr niveles de seguridad que correspondan a probabilidades extremadamente bajas de ocurrencia de eventos de consecuencias significativas.

La forma de alcanzar este objetivo ha variado enormemente a través de los siglos, desde amenazas de penas severas al constructor y sus propiedades según la ley de "ojo por ojo" de Hammurabi en el reino de Babilonia, hasta las modernas prescripciones de los códigos basados en probabilidades, y análisis de confiabilidad para sistemas específicos.

La respuesta de una estructura a las acciones que actúan sobre ella dependerá de la magnitud de dichas acciones y de las propiedades de la estructura. El comportamiento es considerado satisfactorio sino se superan, durante la vida útil, ciertos requerimientos llamados "estados límites" o "niveles de performance" que en general están referidos a condiciones de colapso, o a condiciones de utilización en servicio. Por ejemplo:

#### a) *Estados límites últimos (de colapso o rotura)*

- Colapso de la estructura por rotura en lugar crítico.
- Colapso de la estructura por grandes deformaciones localizadas en varios lugares críticos, es decir formación de un mecanismo de colapso.
- Pérdida de equilibrio estático: vuelco, deslizamiento, levantamiento por subpresión, falla de anclajes.
- Pandeo global de la estructura o local de algún elemento.
- Inestabilidad debido a grandes desplazamientos o deformaciones.
- Rotura por fatiga o solicitudes dinámicas.

#### b) *Estados límites de utilización en servicio*

- Deformaciones excesivas, en especial por flexión, que impiden el uso normal de la estructura u originan daños en parte de la misma.

- Fisuración excesiva.
- Oscilaciones inadmisibles.
- Filtraciones de agua o humedad.
- Corrosión del hormigón o del acero.

### 3.2. INCERTIDUMBRES

Si las variables que intervienen en el comportamiento estructural, esto es las cargas y sus efectos internos, y la resistencia de la estructura, pudieran conocerse con precisión, la seguridad podría garantizarse suministrando una capacidad portante ligeramente superior a la requerida por las cargas conocidas. Sin embargo existen diversas fuentes de incertidumbre en el análisis, diseño y construcción de las estructuras, que brevemente se pueden señalar:

- Incertidumbres *fenomenológicas*: presentes en proyectos novedosos que avanzan sobre el estado del arte y donde no hay experiencia previa, pudiendo aparecer eventos "inimaginables".
- Incertidumbre *de decisión*: referido a si un estado límite ha sido superado o no, en función de lo que se considere tolerable.
- Incertidumbres en el *modelo*: tiene en cuenta la relación entre el comportamiento experimental observado y las predicciones del modelo matemático que representa a la estructura.
- Incertidumbres en la *predicción*: la real variabilidad de la resistencia de los materiales y de las cargas que se van a producir durante la vida útil, sólo pueden ser estimaciones en función de la estadística disponible y la experiencia.
- Incertidumbres *físicas*: referidas a la naturaleza aleatoria de las variables físicas, por ejemplo propiedades de los materiales, dimensiones, etc. Este tipo de incertidumbre puede ser reducida pero no eliminada.
- Incertidumbres *estadísticas*: sobre los datos observados de una muestra se debe estimar una función matemática que describe su distribución, el valor medio, desvío estándar, etc. Como la muestra es siempre finita, existe incertidumbre sobre los parámetros calculados.
- Incertidumbre debido a *factores humanos*: por la variación natural en el desempeño de las tareas, y errores gruesos por ignorancia y negligencia.

La existencia de estas incertidumbres tiene como consecuencia que no se puede pensar en la seguridad absoluta, sino que *el objetivo del diseño es lograr que la probabilidad de falla, esto es, la probabilidad que los estados límites sean superados, sea menor que un valor tolerable*.

Los valores de probabilidad de falla tolerables dependen del tipo de falla, y de las consecuencias a las personas y a los bienes que la sociedad admite, siendo en definitiva un problema de optimización económica.

### 3.3. CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE FALLA ÍNDICE DE CONFIABILIDAD

Si se considera que una sola variable aleatoria  $S$  representa el efecto de las cargas, caracterizada por su función de densidad de probabilidades  $f_S(s)$ , y que una variable aleatoria  $R$ , independiente de la anterior, representa la resistencia caracterizada por  $f_R(r)$ , la probabilidad de falla es la probabilidad que la resistencia sea menor que la solicitud, y se calcula con:

$$P_f = P(R \leq S) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i f_S(x_i) \Delta x \int_{-\infty}^{x_i} f_R(r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_S(x) dx \quad (3.1)$$

donde  $F_R(x)$  es la función de distribución de probabilidades de  $R$ . La interpretación gráfica de (3.1) se muestra en la fig.3.1.

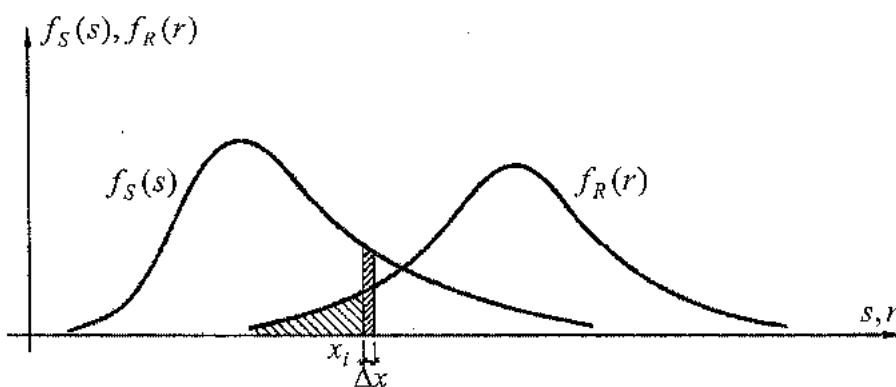


Figura 3.1: Representación del problema básico

Si las variables  $R$  y  $S$  tienen distribución normal (Gaussiana), son no correlacionadas y la función de estado límite, o función de falla, es lineal,

$$M = R - S \quad (3.2)$$

se define como el índice de confiabilidad  $\beta$  como:

$$\beta = \frac{\bar{M}}{\sigma_M} = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3.3)$$

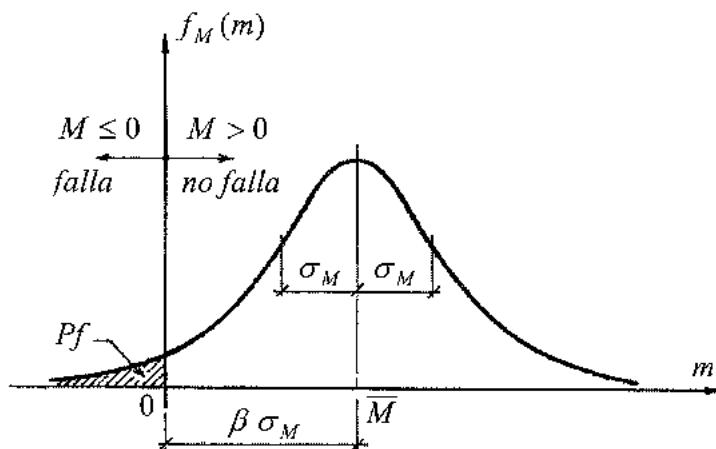
donde  $M$  es el margen de seguridad con  $\bar{M} = \bar{R} - \bar{S}$  y  $\sigma_M^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$ .

La probabilidad de falla en este caso resulta:

$$P_f = P[M \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = F_M(0) = \Phi\left(\frac{0 - \bar{M}}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta) \quad (3.4)$$

donde  $F_M(m)$  es la función de distribución del margen de seguridad y  $\Phi$  es la función de distribución normal standard que se encuentra tabulada.

El significado geométrico de  $\beta$  está representado en la fig.3.2, y es una medida de la distancia del valor medio a la superficie de falla  $M = 0$ .

Figura 3.2: Indice de seguridad  $\beta$ 

La transformación de una variable aleatoria  $X$  a una variable  $Z$  con distribución normal standard se realiza de la siguiente manera:

$$x = \bar{X} + z\sigma_X \rightarrow z = \frac{x - \bar{X}}{\sigma_X}$$

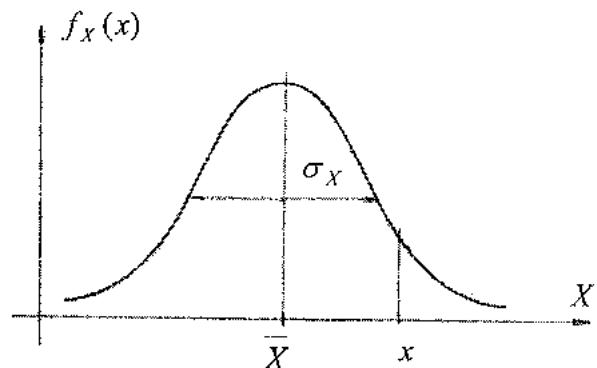
Valor medio:

$$\bar{Z} = E[Z] = \frac{1}{\sigma_X} [E[X] - \bar{X}] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_X} [\bar{X} - \bar{X}] = 0$$

Variancia:

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= E[(Z - \bar{Z})^2] = E[Z^2] - \bar{Z}^2 = \\ &= E\left[\left(\frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}\right)^2\right] - 0 = \frac{1}{\sigma_X^2} E[(X - \bar{X})^2] = \frac{1}{\sigma_X^2} \sigma_X^2 = 1 \end{aligned}$$



Luego la variable  $Z$  tiene valor medio  $\bar{Z} = 0$  y desvío standard  $\sigma_Z = 1$ , es decir es una variable normal standard, y su función de distribución es  $\Phi$ .

Para un caso general cuando la función de falla  $G(\mathbf{X})$ , o función de estado límite, depende de un conjunto de variables aleatorias  $\mathbf{X}$ , que pueden tener cualquier distribución (no necesariamente Gaussiana), que pueden estar correlacionadas, y que además la función puede ser no lineal, entonces la probabilidad de falla resulta

$$P_f = P[G(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{G(\mathbf{X}) \leq 0} \dots \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.5)$$

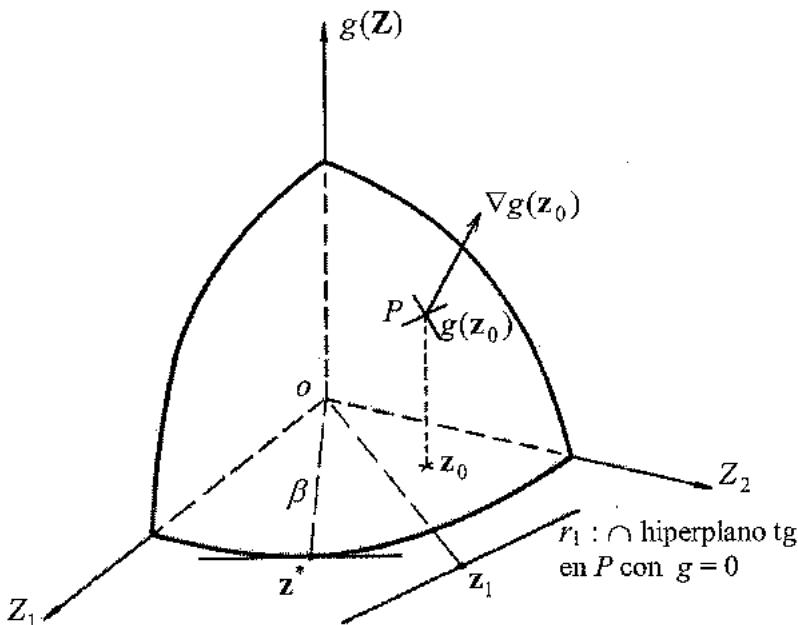
donde  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  es la función de densidad de probabilidades conjunta de las variables básicas.

El índice de confiabilidad  $\beta$  se define como la mínima distancia desde el origen a la superficie de falla  $G(\mathbf{X}) = 0$  en el espacio de variables normales standard no correlacionadas  $\mathbf{Z}$ .

Se realizan las transformaciones  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $G(\mathbf{X}) \rightarrow g(\mathbf{Z})$ , y resulta

$$\beta = \min_{\mathbf{z} \in g(\mathbf{Z})=0} \left( \sum_{i=1}^N z_i^2 \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

siendo  $N$  el número de variables aleatorias. La representación gráfica se muestra en la fig.3.3



**Figura 3.3:** Proceso iterativo para calcular  $\beta$ .

Existen varios algoritmos iterativos para resolver el problema de minimización (3.6). El punto más cercano al origen es  $\mathbf{z}^*$  llamado punto de diseño.

Mediante transformación inversa se recuperan las coordenadas del punto de diseño en el espacio de las variables originales  $\mathbf{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*\}$ .

Se prueba que la probabilidad de falla es, aproximadamente:

$$P_f \cong \Phi(-\beta) \quad (3.7)$$

### 3.4. FORMATO DETERMINÍSTICO DE LOS CÓDIGOS DE DISEÑO

Un código (reglamento) de diseño estructural contiene un conjunto de reglas y prescripciones que utilizadas por el proyectista, dentro de los límites de aplicabilidad, se espera que produzcan estructuras suficientemente seguras tanto para condiciones de servicio como para estados límites últimos durante el periodo de su vida útil. Además debe considerar los intereses de constructores y propietarios desde el punto de vista económico.

Presentan un formato determinístico de verificación de la seguridad, donde se incluyen factores parciales de mayoración de cargas y de reducción de resistencias que tienen por objetivo asegurar el cumplimiento de las condiciones establecidas, teniendo en cuenta las incertidumbres presentes en demandas y capacidades (cargas y resistencias).

La forma histórica de asignar valores a los dichos factores, o "coeficientes de seguridad", fue empírica a través del "juicio ingenieril". El comportamiento satisfactorio de las construcciones indicaba que los valores asignados eran correctos. Intereses económicos podían hacerlos disminuir, y malas performances obligaban a un incremento. Así se fue reflejando la experiencia acumulada a través de los años.

El desarrollo de la teoría de la confiabilidad, desde la década del 70, con el tratamiento racional de las incertidumbres a través de la teoría de probabilidades y los métodos para evaluar la probabilidad de falla mediante el índice de confiabilidad  $\beta$ , ha permitido establecer un proceso de calibración, es decir de optimización de los factores parciales relacionados directamente con la probabilidad de falla objetivo.

Se introdujo desde entonces la tendencia de establecer en forma realista y explícita los estados límites de diseño, bajo la forma de ecuaciones determinísticas con factores parciales que afectan a valores de cargas y resistencias especificadas para el diseño, y calibrados para asegurar una probabilidad de falla requerida.

En general se trabaja con valores de  $\beta$  entre 3 y 4 que corresponden a probabilidades de falla del orden de  $10^{-3}$  a  $10^{-5}$ . El proceso consiste en calcular  $\beta$  para las estructuras que han tenido buen comportamiento, y luego usar un valor promedio como valor objetivo para calibrar los factores parciales.

El formato determinístico de verificación de la seguridad que presenta el reglamento CIRSOC 201 es:

$$\text{Resistencia de diseño} \geq \text{Resistencia requerida}$$

$$\phi R_n \geq U$$

(3.8)

- $\phi$  es el factor de reducción de resistencia, menor que la unidad. Considera las incertidumbres en los cálculos de dimensionamiento y la importancia relativa de los elementos en la estructura. Tiene en cuenta también las variaciones en la resistencia del material, en la mano de obra y en las dimensiones.
- $R_n$  es la resistencia nominal, o valor especificado, que se calcula de acuerdo a los procedimientos del código, suponiendo que el elemento tendrá las dimensiones exactas y las propiedades de los materiales especificadas para ser utilizadas en los cálculos, como por ejemplo  $f'_c$  para la resistencia del hormigón (cuantil 10%),  $f_y$  para la tensión de fluencia del acero, 420 MPa para ADN 420, es decir los valores característicos.

En tabla 3.1 se indican los valores de  $\phi$  prescriptos por el CIRSOC 201, donde  $\varepsilon_t$  es la deformación de tracción en el acero más traccionado para la resistencia nominal, ver fig.3.4.

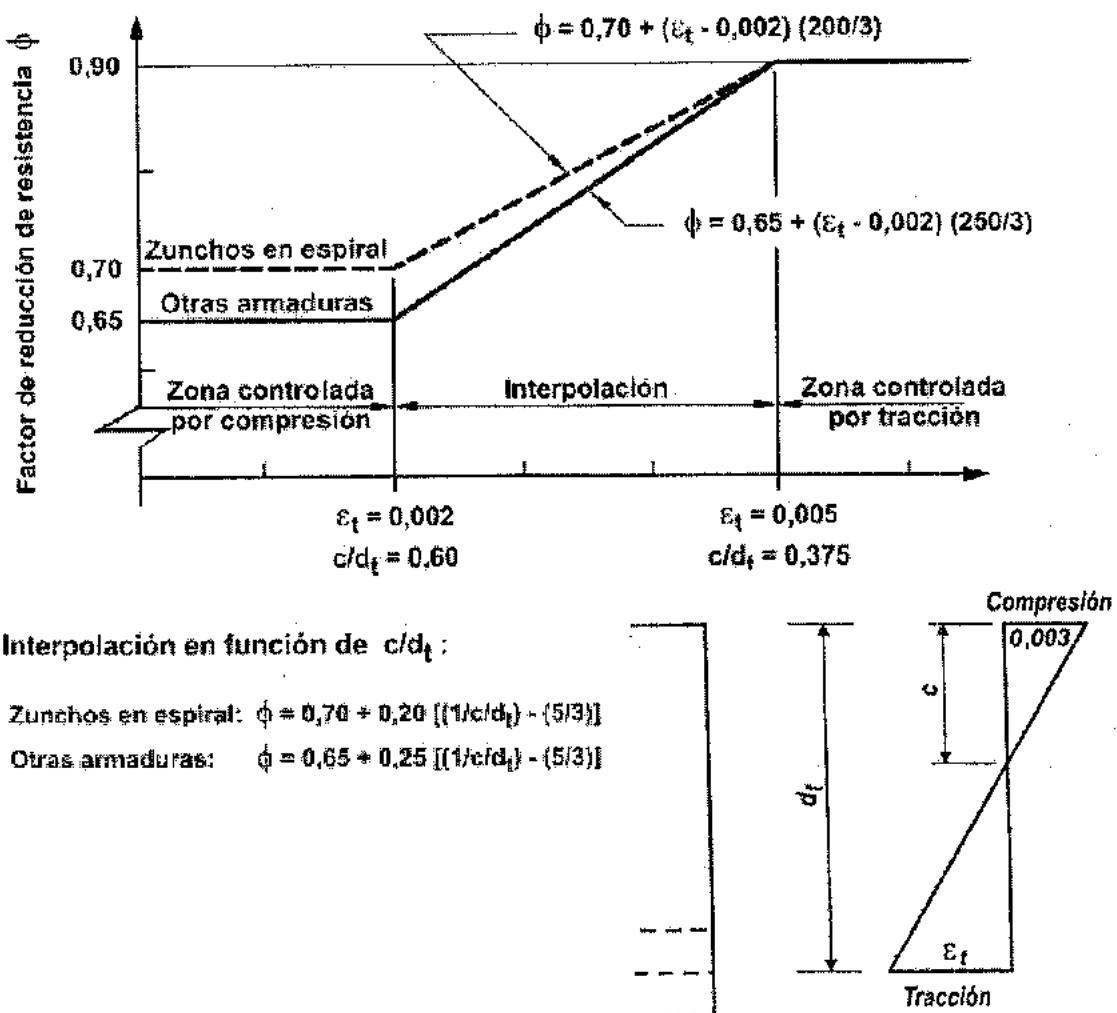


Figura 3.4: Variación de  $\phi$  en función de  $\varepsilon_t$  y de la relación  $c/d_t$ .

- $U$  es la resistencia requerida que se calcula aplicando los factores de mayoración de carga apropiados a las cargas especificadas en el código (CIRSOC 101), ec (3.9). Denominando  $D$ : carga permanente,  $L$ : sobrecarga,  $W$ : carga de viento,  $E$ : carga sísmica,  $H$ : presión de tierra,  $F$ : presión de fluido,  $I$ : impacto,  $T$ : efectos ambientales T (asesentamientos, fluencia lenta, contracción de fragüe, cambios de temperatura),  $R$ : cargas de lluvia,  $S$ : carga de nieve,  $L_r$ : sobrecarga sobre cubierta, las combinaciones que especifica el CIRSOC 201 son:

$$U = \sum_i \gamma_i S_i \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
 U &= 1.4(D + F) \\
 U &= 1.2(D + F + T) + 1.6(L + H) + 0.5(L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) \\
 U &= 1.2D + 1.6(L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) + (f_1 L + 0.8W) \\
 U &= 1.2D + 1.6W + f_1 L + 0.5(L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) \\
 U &= 1.2D + 1.0E + f_1(L + L_r) + f_2 S \\
 U &= 0.9D + 1.6W + 1.6H \\
 U &= 0.9D + 1.0E + 1.6H
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Siendo  $f_1 = 1.0$  lugares de concentración de público con sobrecarga mayor a  $5KN/m^2$ , playas de estacionamiento y garages.  
 $f_1 = 0.5$  para otras sobrecargas.  
 $f_2 = 0.7$  para configuraciones particulares de cubierta que no permiten evacuar la nieve acumulada.  
 $f_2 = 0.2$  para otras configuraciones de cubierta.

Para las combinaciones que contienen efectos sísmicos E, ver CIRSOC 103 Parte II. El factor asignado a cada carga está influenciado por el grado de precisión con el que se puede calcular el efecto de la carga, con las variaciones esperables para dicha carga durante la vida útil de la estructura y con el índice de confiabilidad para el que se desea diseñar la estructura, y también considera la incertidumbre en el análisis estructural para calcular esfuerzos internos (momentos, esfuerzo normal, corte, etc.).

**Tabla 3.1:** Factores de reducción de resistencia  $\phi$

Tipo de solicitud	$\phi$
1- <b>Flexión compuesta:</b> ver fig.3.4 a) Secciones controladas por tracción $\varepsilon_t \geq 0.005$ b) Secciones controladas por compresión $\varepsilon_t \leq 0.002$ - Elementos armados con zunchos - Elementos armados con otro tipo de armadura c) Secciones intermedias $0.002 < \varepsilon_t < 0.005$	0.90 0.70 0.65 interpolación
2- <b>Corte y torsión</b>	0.75
3- <b>Aplastamiento del hormigón</b> (excepto en zona de anclaje de postesado y modelo de bielas).	0.65
4- <b>Zonas de anclaje</b> de postesado	0.85
5- <b>Modelo de bielas</b> (puntales, tensores, nodos)	0.75
6- <b>Flexión sin carga axial en elementos pretesados</b> (longitud embebida del cordón es menor que la longitud de anclaje)	0.75
7- <b>Flexión, compresión, corte y aplastamiento en hormigón simple</b> (sin armar).	0.55

Además de las prescripciones indicadas en el CIRSOC 201, la ecuación (3.8) debe considerarse en sentido generalizado, es decir puede estar formulada en el espacio de los esfuerzos internos y externos (momentos flector, normal, corte, etc), en el espacio de acciones (capacidad de carga), en el espacio de las tensiones, o en el espacio de cantidades geométricas (desplazamientos, flechas, anchos de fisuras, etc).

### 3.5. RELACIÓN ENTRE LOS FACTORES PARCIALES Y EL ÍNDICE DE CONFIABILIDAD

De acuerdo a los conceptos explicados en el punto 3.3, se puede expresar la condición de no falla como:

$$G(X_1, X_2, \dots, X_N) = G(\mathbf{X}) > 0 \quad (3.11)$$

donde  $G(\mathbf{X})$  es la función de falla, ó de estado límite, y  $\mathbf{X}$  son las  $N$  variables básicas aleatorias. Para los propósitos del código, el criterio determinístico equivalente para verificar la seguridad es:

$$G(x_{d_1}, x_{d_2}, \dots, x_{d_N}) > 0 \quad (3.12)$$

donde  $x_{d_i}$  se denomina valor de diseño de la variable  $X_i$ .

Para variables de capacidad (resistencia) se expresa:

$$x_{d_i} = \frac{x_{sp_i}}{\gamma_i} \quad \text{Nota: } \frac{1}{\gamma_i} = \phi \text{ en (3.8)} \quad (3.13)$$

Para variables de demanda (acciones) se expresa:

$$x_{d_i} = \gamma_i x_{sp_i} \quad (3.14)$$

donde  $x_{sp_i}$  es el valor especificado por el código, también llamado valor nominal, para la variable  $X_i$ , y  $\gamma_i$  es el coeficiente parcial correspondiente.

En general  $x_{sp_i}$  es un valor característico de la variable  $X_i$ . Por ejemplo la resistencia del hormigón  $f'_c$  es el valor característico con cuantil 10%, ver punto 2.1.4.1.

Observar que lo importante es el valor de  $x_{d_i}$ . Se pueden elegir otros valores especificados  $x_{sp_i}$  y cambiar en consecuencia los  $\gamma_i$ . Por ejemplo en versiones anteriores del CIRSOC 201, la resistencia característica del hormigón correspondía a un cuantil 5%.

Ahora, si las coordenadas del punto de diseño  $x_i^*$ , ver punto 3.3, son utilizadas como los valores de diseño  $x_{d_i}$  en el formato de cálculo determinístico (3.12) y (3.8), para el caso límite de  $G(\mathbf{x}_d) = 0$  la estructura resultante tendrá un índice de confiabilidad  $\beta$  y una probabilidad de falla dada por (3.7).

Luego a partir de (3.13) y (3.14) resulta:

$$\gamma_i = \frac{x_{sp_i}}{x_{d_i}} = \frac{x_{sp_i}}{x_i^*} \quad x_i : \text{variable de "resistencia"} \quad (3.15)$$

$$\gamma_i = \frac{x_{d_i}}{x_{sp_i}} = \frac{x_i^*}{x_{sp_i}} \quad x_i : \text{variable de "carga"} \quad (3.16)$$

- ***Inconvenientes:***

- Para conocer los coeficientes parciales es necesario obtener las coordenadas del punto de diseño  $x_i^*$ , es decir hacer un análisis de confiabilidad. Entonces no tendría sentido luego utilizar un formato determinístico.
- Este procedimiento produce un factor parcial por cada variable del problema, lo que es una cantidad excesiva.
- Los factores parciales son válidos sólo para la estructura analizada, y no tienen validez general.

- ***Solución:***

- En los códigos se define un formato determinístico que incluye unos pocos factores parciales, válidos para un amplio rango de situaciones de diseño, calculados mediante un proceso de optimización para satisfacer aproximadamente, y en promedio, índices de confiabilidad objetivo.

# CAPÍTULO 4

## DISEÑO POR RESISTENCIA A FLEXIÓN VIGAS

### 4.1. INTRODUCCIÓN

El *diseño* significa la determinación de la forma general y de todas las dimensiones y armaduras de los elementos de una estructura, de manera que cumpla con las funciones para las cuales ha sido proyectada y resista los efectos que actuarán sobre ella a través de su vida útil, con niveles aceptables de probabilidad de falla (probabilidad de superar los estados límites).

La mecánica estructural es una de las herramientas principales en el proceso de diseño, que permite predecir cómo se comportará una estructura cuando esté sometida a fuerzas externas y otros efectos mecánicos. Los principales aspectos del comportamiento estructural son: (1) La resistencia de la estructura, es decir la magnitud de las cargas que, con una distribución dada, causarán la falla (estados límites últimos); (2) Las deformaciones, es decir deflexiones y agrietamientos, que se producen en la estructura bajo cargas de servicio (estados límites de utilización en servicio).

En este capítulo se desarrollan los conceptos para el diseño por resistencia a flexión, dejando para los capítulos siguientes el diseño por resistencia a otros esfuerzos internos y la verificación de estados límites de servicio.

### 4.2. HIPÓTESIS DE DISEÑO

El cálculo de la resistencia de un elemento o sección recta requiere que se cumplan dos condiciones:

- **Equilibrio estático:** las fuerzas internas, tales como momentos flectores y torsores, esfuerzos de corte y normales, de una sección cualquiera del elemento, deben estar en equilibrio con los efectos de las cargas externas.

- **Compatibilidad de deformaciones:** entre las deformaciones en el hormigón y en el acero, para las condiciones "últimas"

Nota: el término "último" es usado frecuentemente en referencia al método de diseño por resistencia. Sin embargo, bajo las prescripciones del código se calcula la resistencia "nominal" ( $R_n$  en (3.8)), que no necesariamente es el valor último real observado en un ensayo. Esto es debido a las hipótesis simplificativas, a los límites conservativos establecidos para el diseño práctico, y a la naturaleza aleatoria de las variables.

Para calcular la resistencia nominal se adoptan las siguientes hipótesis:

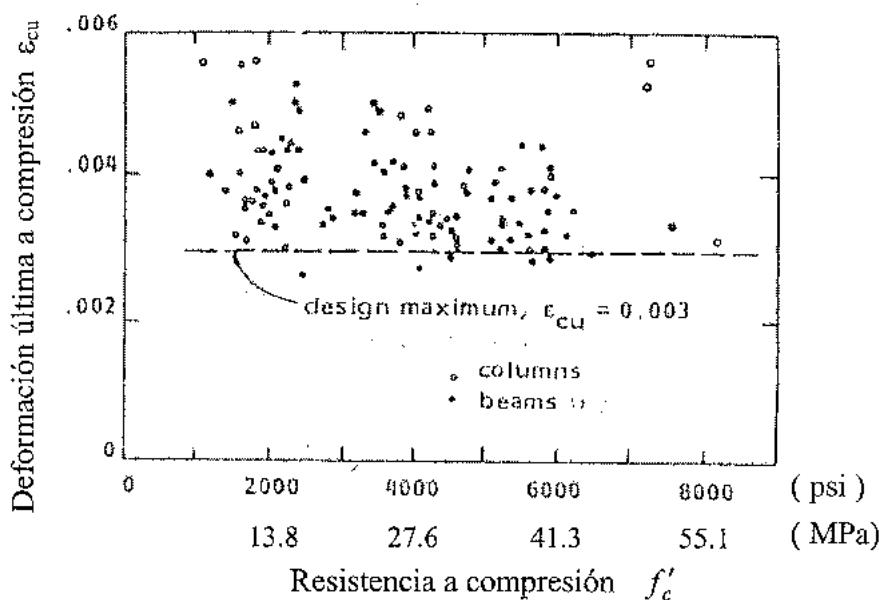
- Las deformaciones en el hormigón y el acero son directamente proporcionales a la distancia desde el eje neutro.** Es decir las secciones planas normales al eje de flexión, se mantienen planas después de la flexión.

Resultados de ensayos confirman la validez de esta hipótesis, con alguna desviación para deformaciones cercanas a la falla, pero sin importancia práctica.

Esta hipótesis es de fundamental importancia para determinar la deformación y en consecuencia la tensión en la armadura.

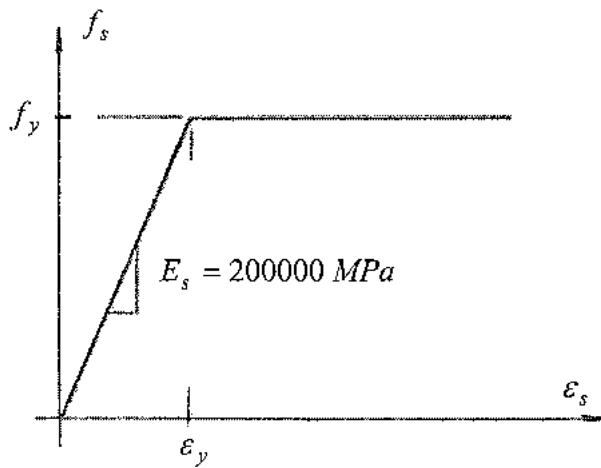
- La máxima deformación utilizable en la fibra de hormigón extrema comprimida es  $\epsilon_{cu} = 0.003$ .**

Los resultados de ensayos de vigas y columnas de hormigón armado muestran que la máxima deformación específica de compresión del hormigón varía desde 0.003 hasta valores de 0.008 en condiciones especiales, ver fig.4.1, pero para casos prácticos es 0.003 a 0.004.



**Figura 4.1:** Deformación máxima a compresión del hormigón. Resultados de ensayos.

- c) La relación constitutiva tensión - deformación del acero para armadura es una relación bilineal mostrada en la fig.4.2.



**Figura 4.2:** Relación constitutiva  $f_s - \varepsilon_s$  para la armadura

Para el diseño práctico no se considera el incremento de resistencia por endurecimiento a deformaciones más allá del escalón de fluencia.

- d) **No se considera la resistencia a tracción del hormigón.** La resistencia a tracción del hormigón solicitada a flexión es una pequeña fracción de la resistencia a compresión, y normalmente el hormigón estará fisurado en las zonas tensionadas para condiciones últimas.

Esta hipótesis es una simplificación de la situación real debido a que el hormigón antes de la fisuración y el hormigón entre fisuras, sí resiste esfuerzos de tracción de pequeña magnitud. Es por eso que se la tiene en cuenta para la evaluación de las condiciones de fisuración y deformaciones bajo cargas de servicio.

- e) **La relación constitutiva tensión - deformación del hormigón en compresión puede ser rectangular, trapezoidal, parabólica, o de cualquier otra forma que resulte en una predicción de la resistencia que coincida en forma sustancial con los resultados de ensayos.**

Esta hipótesis reconoce la distribución inelástica de tensiones en el hormigón, que está de acuerdo con el comportamiento observado, ver fig.2.2, donde la relación deja de ser lineal para tensiones mayores a  $0.5 f'_c$ . Se alcanza la resistencia máxima para deformaciones cercanas a 0.002, y luego la curva desciende hasta la deformación última entre 0.003 y 0.004.

La real distribución de tensiones de compresión, en los casos prácticos, es compleja y en general no se la conoce en forma explícita. Es por eso que se adoptan formas simplificadas con la condición de obtener una resultante de compresión y punto de aplicación que permitan predecir el valor de la resistencia a flexión de acuerdo con resultados experimentales.

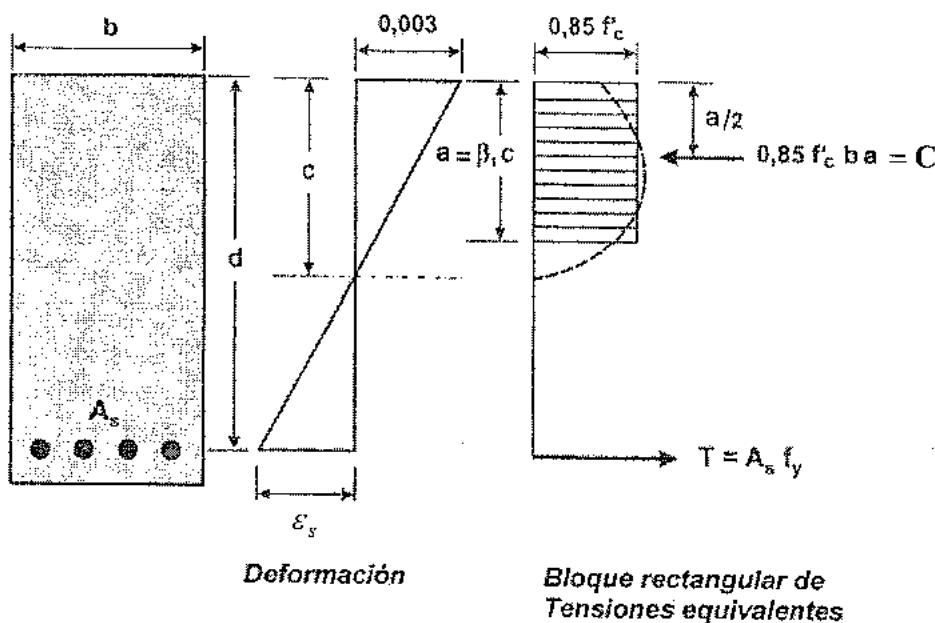
- f) **Para el reglamento CIRSOC 201, el requerimiento anterior se considera satisfecho por una distribución rectangular de tensiones de compresión en el hormigón de valor  $0.85 f'_c$ , sobre una zona limitada por los extremos de la sección y por una línea recta paralela al eje neutro a distancia  $a = \beta_1 c$  a partir de la fibra comprimida con deformación máxima.**

La distancia  $c$  entre la fibra comprimida con deformación máxima y el eje neutro se debe medir en dirección perpendicular a dicho eje.

El valor del factor  $\beta_1$  se debe adoptar:

- Para  $f'_c \leq 30 \text{ MPa} \rightarrow \beta_1 = 0.85$
- Para  $f'_c > 30 \text{ MPa} \rightarrow \beta_1 = 0.85 - 0.05(f'_c - 30)/7$ , pero  $\beta_1 \geq 0.65$

Esta hipótesis se representa en la fig. 4.3



**Figura 4.3:** Distribución rectangular de tensiones equivalentes en el hormigón

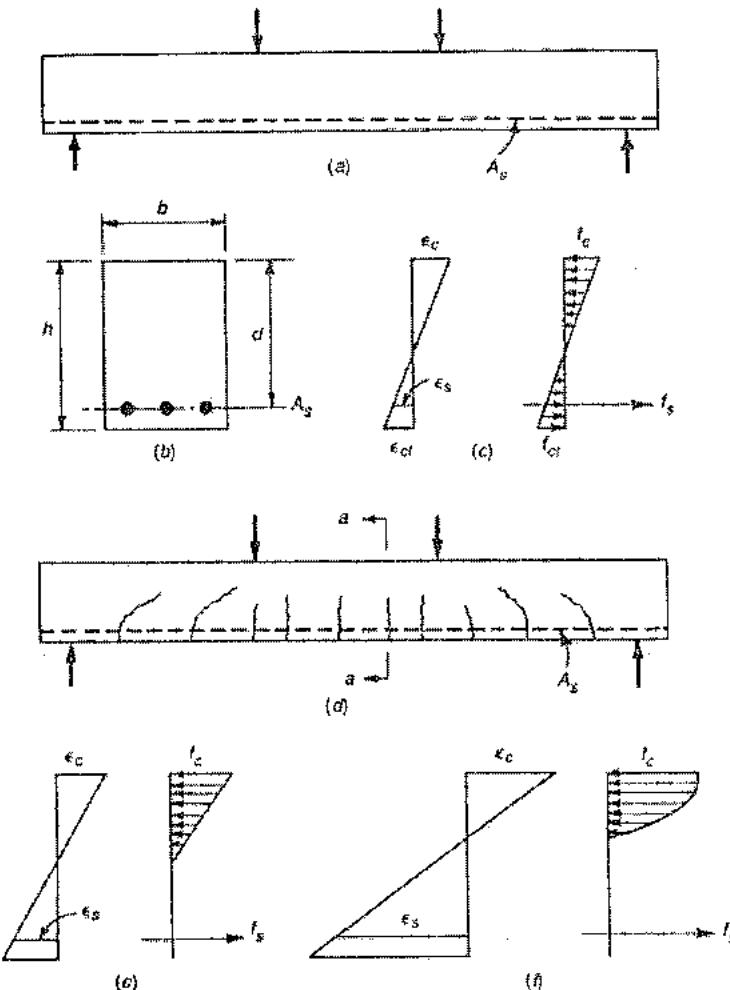
### 4.3. COMPORTAMIENTO DE UNA VIGA A FLEXIÓN

Cuando la carga en una viga se incrementa gradualmente desde cero hasta la magnitud que producirá la falla, se pueden distinguir diferentes estados en su comportamiento, como se muestra en la fig. 4.4.

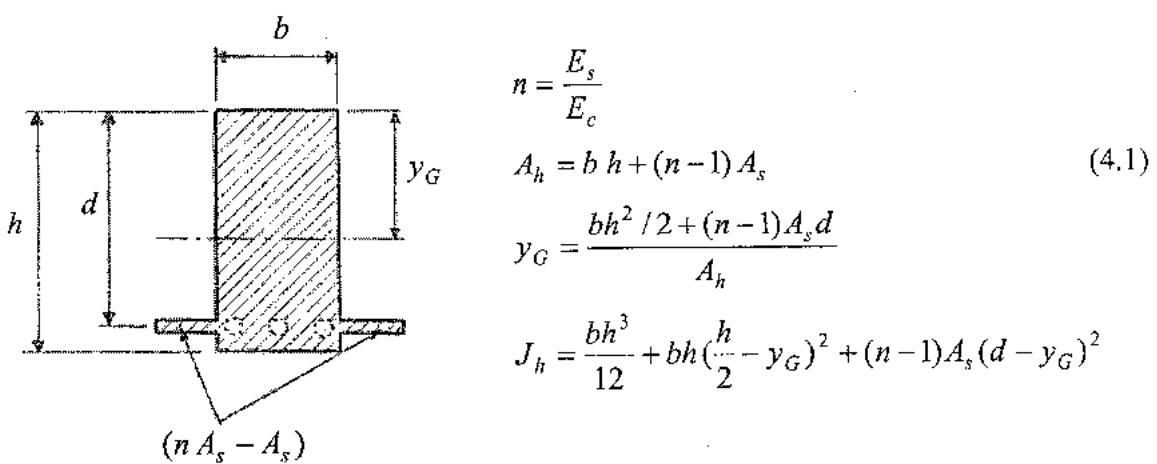
#### a) Estado elástico: Estado I

Para cargas bajas, mientras la máxima tensión de tracción en el hormigón sea menor que el módulo de rotura, todo el hormigón resulta efectivo tanto a compresión como a tracción. La armadura se deforma la misma cantidad que el hormigón circundante, debido a las propiedades de adherencia, y entonces también está sometido a tracción. En esta etapa las tensiones en el hormigón son pequeñas y proporcionales a las deformaciones, es decir los materiales están en régimen elástico lineal, fig. 4.4(c).

El análisis de tensiones normales para una sección, por ejemplo la sección central de la viga, se realiza aplicando la teoría de flexión para una pieza de material compuesto, es decir aplicando los conceptos de sección homogeneizada, en general en hormigón.



**Figura 4.4:** Comportamiento de vigas de hormigón armado para carga creciente



**Figura 4.5:** Características de la sección no fisurada

Las deformaciones y tensiones resultan:

Curvatura

$$\varphi = \frac{M}{E_c J_h}$$

$$\varepsilon_c = -\varphi y_G \rightarrow f_c = E_c \varepsilon_c = -\frac{M}{J_h} y_G \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{ct} = \varphi (h - y_G) \rightarrow f_{ct} = E_c \varepsilon_{ct} = \frac{M}{J_h} (h - y_G)$$

$$\varepsilon_s = \varphi (d - y_G) \rightarrow f_s = E_s \varepsilon_s = n \frac{M}{J_h} (d - y_G)$$

Estas ecuaciones son válidas hasta que se alcanza la resistencia a tracción por flexión en el hormigón, es decir  $f_{ct} = f_r$ , definiéndose el momento y la curvatura de fisuración:

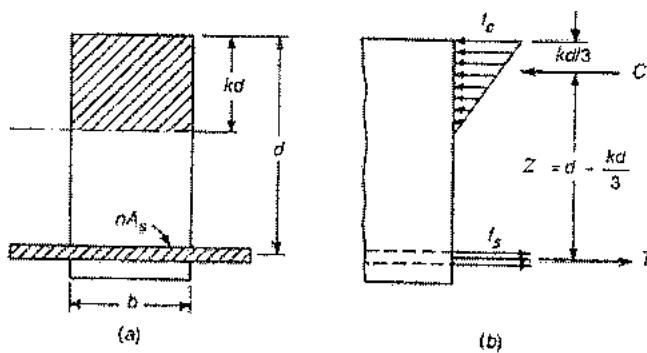
$$M_{cr} = \frac{f_r J_h}{(h - y_G)} \quad \varphi_{cr} = \frac{M_{cr}}{E_c J_h} \quad (4.3)$$

### b) Estado de fisuración: Estado II

Cuando la carga aumenta se origina un cuadro de fisuras como el representado en la fig.4.4(d). En vigas bien diseñadas el ancho de fisuras es tan pequeño (fisuras capilares) que prácticamente no afectan ni la protección contra la corrosión, ni la apariencia.

Evidentemente, en una sección fisurada, como la sección a-a de la fig.4.4(d), el hormigón no transmite ningún esfuerzo de tracción, y es la armadura la que debe absorberlo.

Para cargas moderadas, mientras la tensión de compresión en el hormigón no supere el valor  $0.5 f'_c$ , la relación constitutiva tensión - deformación se la puede considerar lineal, como se indica en la fig.4.4(e).



**Figura 4.6:** Sección fisurada y esfuerzos internos

Se supone, con buena aproximación, que la fisura se propaga hasta el eje neutro. Para calcular las deformaciones y tensiones se pueden aplicar todavía los conceptos clásicos de flexión con sección homogeneizada, porque se mantiene la relación lineal  $f_c - \varepsilon_c$ , pero teniendo en cuenta que el hormigón en tracción no colabora, ver fig.4.6.

Para determinar la posición del eje neutro se iguala el momento estático del área en tracción con el área en compresión (teoría de flexión en régimen elástico).

$$\frac{b(kd)^2}{2} = n A_s (d - kd) \rightarrow k \quad (4.4)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática (4.4) se obtiene  $k$ , y entonces se puede calcular el momento de inercia de la sección homogeneizada  $J_{hf}$ .

A partir del momento de fisuración (4.3) los incrementos de deformaciones y tensiones con la nueva rigidez a flexión  $E_c J_{hf}$  resultan:

$$\begin{aligned} \Delta M &= M - M_{cr} & \Delta\varphi &= \frac{\Delta M}{E_c J_{hf}} \\ \Delta\varphi &= \varphi - \varphi_{cr} & \\ \Delta\varepsilon_c &= -\Delta\varphi kd & \Delta f_c &= E_c \Delta\varepsilon_c = -\frac{\Delta M}{J_{hf}} kd \quad (4.5) \\ \Delta\varepsilon_s &= \Delta\varphi (d - kd) & \Delta f_s &= E_s \Delta\varepsilon_s = n \frac{\Delta M}{J_{hf}} (d - kd) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones (4.5) son válidas siempre que el acero no llegue a la tensión de fluencia, es decir también se mantenga en régimen elástico.

Para cargas que producen tensiones de compresión en el hormigón mayores a  $0.5 f'_c$ , o en el acero mayores a  $f_y$ , las relaciones constitutivas dejan de ser lineal y entonces ya no se pueden aplicar las ecuaciones clásicas de la flexión basadas en  $f = E\varepsilon$ .

Si se conoce la relación constitutiva del hormigón  $f_c - \varepsilon_c$  en forma analítica, además de la correspondiente del acero  $f_s - \varepsilon_s$ , es posible aplicar un procedimiento general para encontrar la relación momento - curvatura  $M - \varphi$  para todas las etapas del comportamiento de la sección.

### c) Resistencia a flexión

Se alcanza la resistencia a flexión cuando la máxima deformación a compresión del hormigón llega a  $\varepsilon_{cu} = 0.003$ , ver hipótesis b) del punto 4.2.

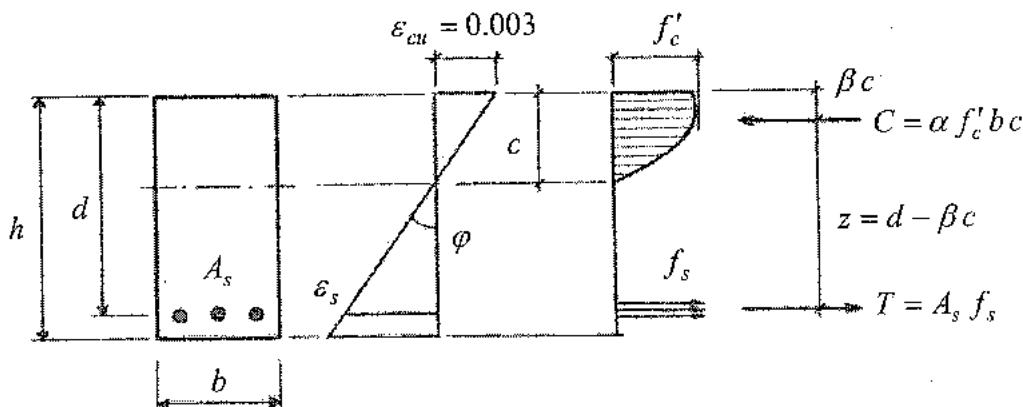


Figura 4.7: Resistencia a flexión

Como en todo problema de la mecánica del continuo, se utilizan ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y constitutivas.

■ **Ecuaciones de equilibrio:**

$$\sum N = 0 \rightarrow T + C = 0 \rightarrow A_s f_s = \alpha f'_c b c \quad (4.6)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_n = T z = -C z \quad (4.7)$$

■ **Ecuaciones de compatibilidad**

$$\varepsilon_{cu} = -\varphi c = -0.003 \rightarrow \varphi = \frac{0.003}{c} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_s = \varphi (d - c) \quad (4.9)$$

■ **Ecuaciones constitutivas**

- **Hormigón:** recordando que la relación  $f_c - \varepsilon_c$  depende de numerosas variables, forma de hacer el ensayo, etc, como se describió en 2.1.4.1, en lugar de intentar expresar la relación  $f_c - \varepsilon_c$  con una función analítica, se utiliza la resistencia a compresión  $f'_c$  y dos parámetros  $\alpha, \beta$  que se obtienen directamente de información experimental.

La resultante de compresión es:

$$C = \alpha f'_c b c \quad (4.10)$$

donde  $\alpha f'_c$  es una tensión "promedio" sobre toda el área comprimida  $b c$ , y la posición de dicha resultante se ubica a una distancia  $\beta c$  desde la fibra más comprimida, ver fig.4.7.

Los valores de los parámetros  $\alpha, \beta$  se muestran en la fig.4.8 en función de la resistencia  $f'_c$ .

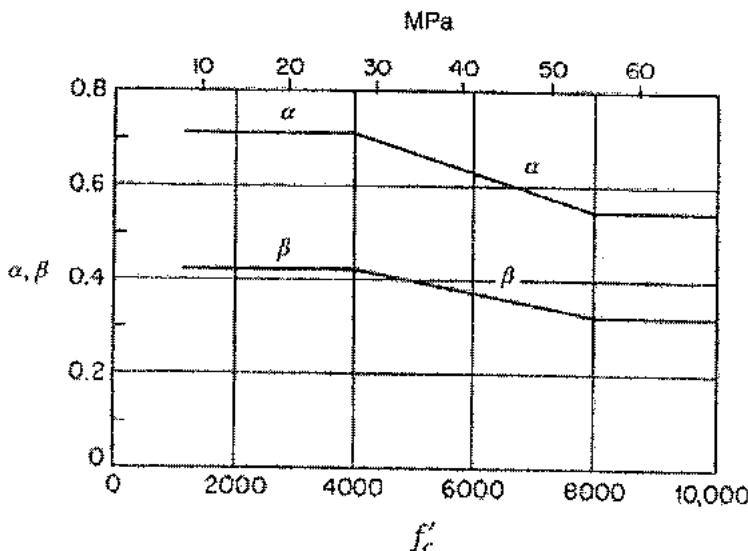


Figura 4.8: Valores de los parámetros  $\alpha, \beta$ .

- **Acero:** se utiliza la relación bilineal descripta en 4.2 c), es decir:

$$\begin{aligned} f_s &= E_s \varepsilon_s && \text{para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ f_s &= f_y && \text{para } \varepsilon_s > \varepsilon_y \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para resolver el problema se tiene:

- *Incógnitas:*  $c, \varphi, \varepsilon_s, f_s, M_n$
- *Ecuaciones:* (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.11)

Son 5 ecuaciones con 5 incógnitas y entonces hay solución. Como son ecuaciones no lineales, por la relación constitutiva del acero, se resuelve en forma iterativa de la siguiente manera:

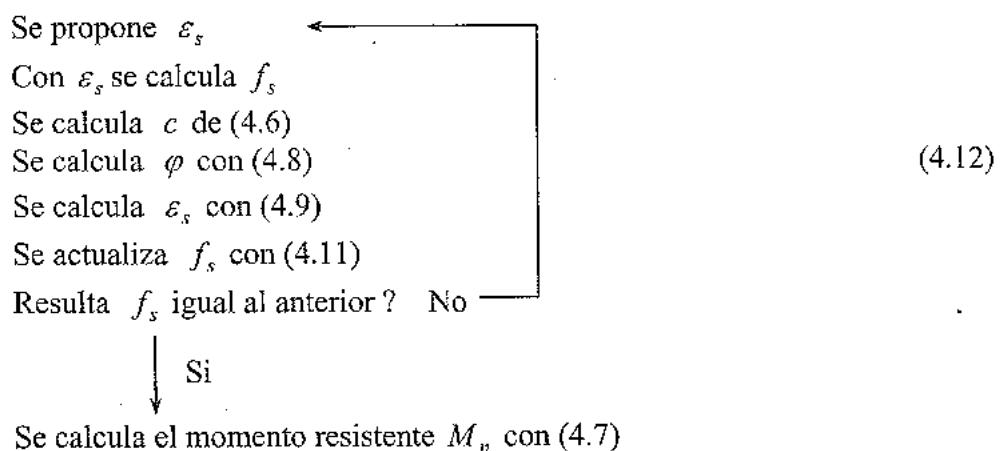
Datos:

hormigón:  $f'_c, \alpha, \beta, \varepsilon_{cu} = -0.003$

acero:  $A_s$ , relación  $f_s - \varepsilon_s$  (4.14),  $E_s, f_y, \varepsilon_y = f_y / E_s$

sección:  $b, h, d$

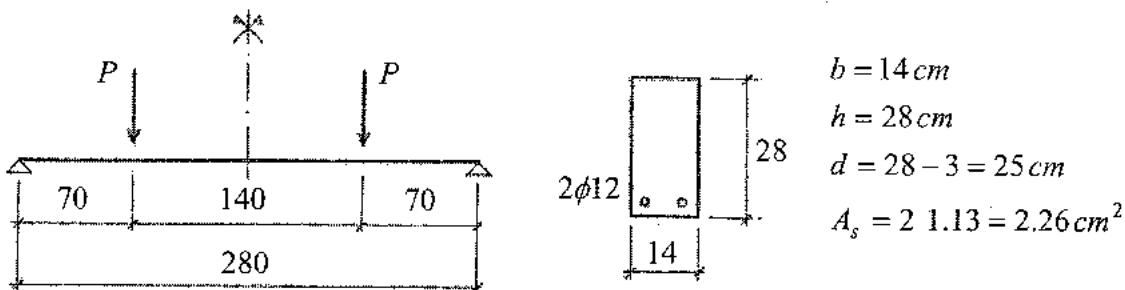
Esquema iterativo:



Se recuerda que  $M_n$  es el momento resistente nominal, o resistencia nominal a flexión, debido a que se han utilizado valores nominales o especificados por el código (valores característicos) para hacer los cálculos.

□ **Ejemplo 4.1**

Estudiar el comportamiento hasta la resistencia a flexión de la sección recta del sector central de la viga de hormigón armado siguiente:



Hormigón H-25       $f'_c = 25\text{ MPa}$

Acero ADN 420       $f_y = 420\text{ MPa}$

■ **Estado elástico (Estado I)**

$$\begin{aligned} E_s &= 200000\text{ MPa} \\ E_c &= 4700 \sqrt{f'_c} = 23500\text{ MPa} \end{aligned} \rightarrow n = \frac{E_s}{E_c} = 8.51$$

Sección homogeneizada en hormigón:

$$A_h = b h + (n-1) A_s = 14 \cdot 28 + (8.51-1) \cdot 2.26 = 392 + 17 = 409\text{ cm}^2$$

$$y_G = [14 \cdot 28^2 / 2 + (8.51-1) \cdot 2.26 \cdot 25] / 409 = 14.46\text{ cm}$$

$$\begin{aligned} J_h &= \frac{14 \cdot 28^3}{12} + 14 \cdot 28 \left( \frac{28}{2} - 14.46 \right)^2 + (8.51-1) \cdot 2.26 \cdot (25 - 14.46)^2 \\ &= 25694 + 1886 = 27580\text{ cm}^4 \end{aligned}$$

El estado elástico es válido hasta:

$$\begin{aligned} M_{cr} &= \frac{f_r J_h}{(h - y_G)} & f_r &= 0.625 \sqrt{f'_c} = 3.13\text{ MPa} = 0.313\text{ KN/cm}^2 \\ &= \frac{0.313 \cdot 27580}{28 - 14.46} = 638\text{ KNcm} & \rightarrow P_{cr} &= M_{cr} / 70 = 9.11\text{ KN} \end{aligned}$$

$$\varphi_{cr} = \frac{M_{cr}}{E_c J_h} = \frac{638\text{ KNcm}}{2350\text{ KN/cm}^2 \cdot 27580\text{ cm}^4} = 0.984 \cdot 10^{-5}\text{ rad/cm}$$

Las deformaciones y tensiones son:

$$\varepsilon_c = -\varphi y_G = -0.984 \cdot 10^{-5} \cdot 14.46 = -0.000142 \rightarrow f_c = -3.344\text{ MPa}$$

$$\varepsilon_s = \varphi (d - y_G) = 0.984 \cdot 10^{-5} (25 - 14.46) = 0.000104 \rightarrow f_s = 20.74\text{ MPa}$$

- **Estado de fisuración** (Estado II)

Posición del eje neutro:

$$b \frac{(kd)^2}{2} = n A_s (d - kd)$$

$$14 \frac{k^2 25^2}{2} = 8.51 2.26 (25 - k 25) \rightarrow k = 0.281, \quad kd = 7.025 \text{ cm}$$

Sección homogeneizada en hormigón:

$$J_{hf} = \frac{b (kd)^3}{12} + b kd \left( \frac{kd}{2} \right)^2 + n A_s (d - kd)^2$$

$$= \frac{14 \cdot 7.025^3}{12} + 14 \cdot 7.025 \left( \frac{7.025}{2} \right)^2 + 8.51 2.26 (25 - 7.025)^2 = 7832 \text{ cm}^4$$

Las ecuaciones lineales tienen validez hasta  $f_c = f'_c / 2 = 12.5 \text{ MPa}$

$$\Delta f_c = 12.5 - 3.344 = 9.16 \text{ MPa} = 0.916 \text{ KN/cm}^2$$

$$\Delta M = \frac{\Delta f_c J_{hf}}{kd} = \frac{0.916 \cdot 7832}{7.025} = 1021 \text{ KNcm}$$

$$M = M_{cr} + \Delta M = 638 + 1021 = 1659 \text{ KNcm} \rightarrow P = M / 70 = 23.70 \text{ KN}$$

$$E_c J_{hf} = 2350 \cdot 7832 = 18.405 \cdot 10^6 \text{ KN/cm}^2$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta M}{E_c J_{hf}} = \frac{1021}{18.405 \cdot 10^6} = 5.547 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

$$\varphi = \varphi_{cr} + \Delta \varphi = 0.984 \cdot 10^{-5} + 5.547 \cdot 10^{-5} = 6.531 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

Las deformaciones y tensiones son:

$$\Delta \varepsilon_c = -\Delta \varphi kd = -5.547 \cdot 10^{-5} \cdot 7.025 = -0.0003897$$

$$\varepsilon_c = -0.000142 - 0.0003897 = -0.0005317 \rightarrow f_c = 12.5 \text{ MPa} \checkmark$$

$$\Delta \varepsilon_s = \Delta \varphi (d - kd) = 5.547 \cdot 10^{-5} (25 - 7.025) = 0.000997$$

$$\varepsilon_s = 0.000104 + 0.000997 = 0.001101 \rightarrow f_s = 220.2 \text{ MPa} \leq 420 \checkmark$$

- **Resistencia a flexión**

$$f'_c = 25 \text{ MPa} \rightarrow \alpha = 0.72, \quad \beta = 0.425$$

$$f_y = 420 \text{ MPa} \rightarrow \varepsilon_y = 420 / 200000 = 0.0021$$

Siguiendo el proceso iterativo (4.12), resulta

$$\text{Se propone } \varepsilon_s > \varepsilon_y \rightarrow f_s = f_y = 420 \text{ MPa}$$

$$(4.6) \rightarrow c = \frac{A_s f_s}{\alpha f'_c b} = \frac{2.26 \cdot 42.0}{0.72 \cdot 2.5 \cdot 14} = 3.767 \text{ cm}$$

$$(4.8) \rightarrow \varphi = \frac{0.003}{c} = \frac{0.003}{3.767} = 79.6 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

$$(4.9) \rightarrow \varepsilon_s = \varphi(d - c) = 79.6 \cdot 10^{-5} (25 - 3.767) = 0.0169$$

$$(4.11) \rightarrow \varepsilon_s > \varepsilon_y \rightarrow f_s = 420 \text{ MPa} \text{ igual al valor inicial } \checkmark$$

Momento resistente nominal:

$$z = d - \beta c = 25 - 0.425 \cdot 3.767 = 23.4 \text{ cm}$$

$$C = \alpha f'_c b c = 0.72 (-2.5) 14 \cdot 3.767 = -94.93 \text{ KN}$$

$$T = A_s f_s = 2.26 \cdot 42 = 94.92 \text{ KN } \checkmark$$

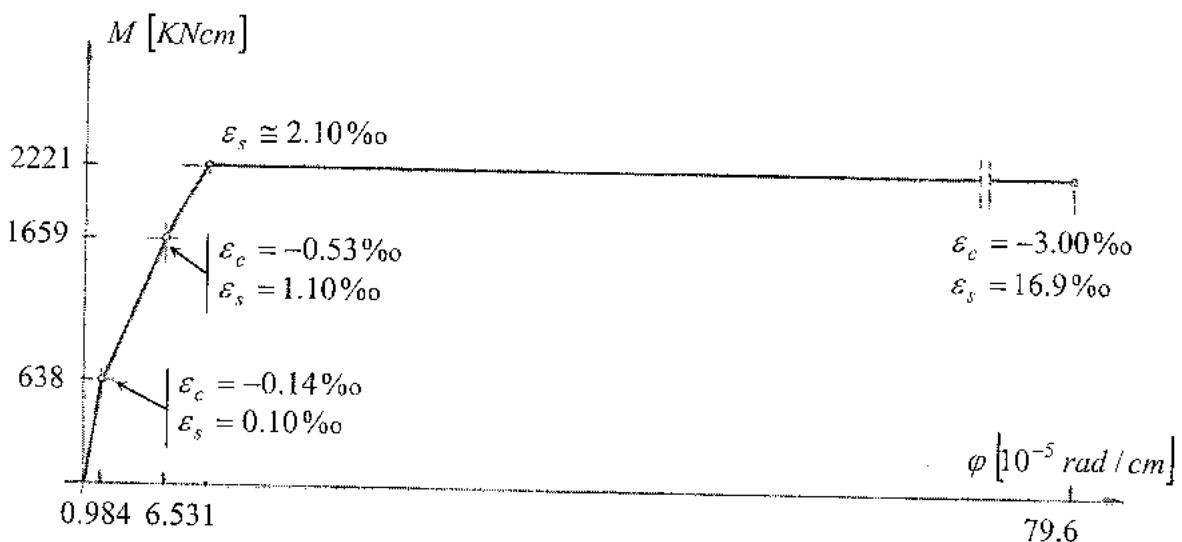
$$M_n = 94.93 \cdot 23.4 = 2221 \text{ KNcm} = 22.21 \text{ KNm}$$

#### ■ Diagrama momento curvatura de la sección:

Comienza con la rigidez  $E_c J_h$  de la sección homogeneizada sin fisurar hasta el momento de fisuración  $M_{cr}$ , luego la rigidez disminuye apreciablemente a  $E_c J_{hf}$  y la relación sigue lineal hasta que la tensión en el hormigón alcanza el valor  $0.5 f'_c$ .

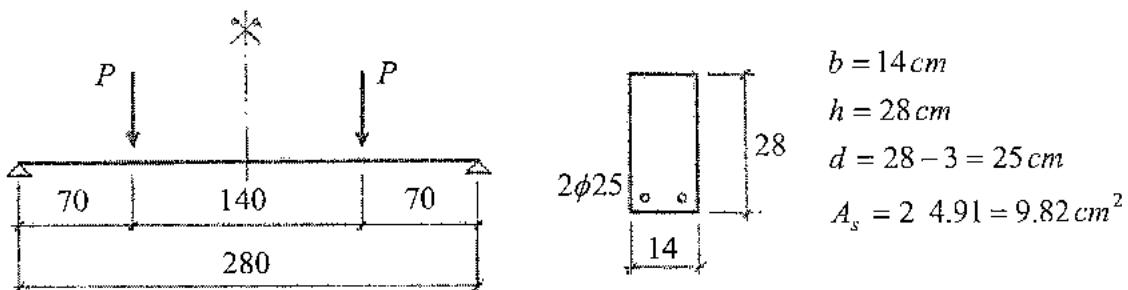
Luego la rigidez disminuye gradualmente por la no linealidad del hormigón hasta que la armadura entra en fluencia. A partir de ahí la tensión en la armadura se mantiene constante y por lo tanto también la fuerza de tracción. Por equilibrio tampoco se incrementa la resultante de compresión, y el momento se mantiene constante, igual al momento resistente, mientras la curvatura aumenta hasta que la deformación del hormigón alcanza su valor límite de 0.003.

Para el ejemplo, el gráfico resulta:



### □ Ejemplo 4.2

Estudiar el comportamiento hasta la resistencia a flexión de la sección recta del sector central de la viga de hormigón armado siguiente:



Hormigón H-25       $f'_c = 25 \text{ MPa}$   
 Acero ADN 420       $f_y = 420 \text{ MPa}$

Es similar al ejemplo 4.1, con la diferencia de la sección de armadura: 2φ25.

Siguiendo el mismo desarrollo los resultados son:

#### ▪ Estado elástico (Estado I)

$$A_h = b h + (n-1) A_s = 14 \cdot 28 + (8.51-1) \cdot 9.82 = 465.7 \text{ cm}^2$$

$$y_G = [14 \cdot 28^2 / 2 + (8.51-1) \cdot 9.82 \cdot 25] / 465.7 = 15.74 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} J_h &= \frac{14 \cdot 28^3}{12} + 14 \cdot 28 \left( \frac{28}{2} - 15.74 \right)^2 + (8.51-1) \cdot 9.82 \cdot (25 - 15.74)^2 \\ &= 26797 + 6324 = 33121 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$M_{cr} = \frac{f_r J_h}{(h - y_G)} = \frac{0.313 \cdot 33121}{28 - 15.74} = 845.5 \text{ KNcm} \rightarrow P_{cr} = 12.08 \text{ KN}$$

$$\varphi_{cr} = \frac{M_{cr}}{E_c J_h} = \frac{845.5 \text{ KNcm}}{2350 \text{ KN/cm}^2 \cdot 33121 \text{ cm}^4} = 1.086 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

$$\varepsilon_c = -\varphi y_G = -1.086 \cdot 10^{-5} \cdot 15.74 = -0.0001709 \rightarrow f_c = -4.017 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_s = \varphi (d - y_G) = 1.086 \cdot 10^{-5} \cdot (25 - 15.74) = 0.0001006 \rightarrow f_s = 20.11 \text{ MPa}$$

#### ▪ Estado de fisuración (Estado II)

$$b \frac{(kd)^2}{2} = n A_s (d - kd)$$

$$14 \frac{k^2 \cdot 25^2}{2} = 8.51 \cdot 9.82 \cdot (25 - k \cdot 25) \rightarrow k = 0.492, \quad kd = 12.31 \text{ cm}$$

$$J_{hf} = \frac{b(kd)^3}{12} + b kd \left(\frac{kd}{2}\right)^2 + n A_s (d - kd)^2$$

$$= \frac{14 \cdot 12.31^3}{12} + 14 \cdot 12.31 \left(\frac{12.31}{2}\right)^2 + 8.51 \cdot 9.82 (25 - 12.31)^2 = 22163 \text{ cm}^4$$

Las ecuaciones lineales tienen validez hasta  $f_c = f'_c / 2 = 12.5 \text{ MPa}$

$$\Delta f_c = 12.5 - 4.02 = 8.48 \text{ MPa} = 0.848 \text{ KN/cm}^2$$

$$\Delta M = \frac{\Delta f_c J_{hf}}{kd} = \frac{0.848 \cdot 22163}{12.31} = 1527 \text{ KNcm}$$

$$M = M_{cr} + \Delta M = 846 + 1527 = 2372 \text{ KNcm} \rightarrow P = M / 70 = 33.89 \text{ KN}$$

$$E_c J_{hf} = 2350 \cdot 22163 = 52.083 \cdot 10^6 \text{ KN/cm}^2$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta M}{E_c J_{hf}} = \frac{1527}{52.083 \cdot 10^6} = 2.932 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

$$\varphi = \varphi_{cr} + \Delta \varphi = 1.086 \cdot 10^{-5} + 2.932 \cdot 10^{-5} = 4.018 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

$$\Delta \varepsilon_c = -\Delta \varphi \cdot kd = -2.932 \cdot 10^{-5} \cdot 12.31 = -0.0003609$$

$$\varepsilon_c = -0.0001709 - 0.0003609 = -0.0005318 \rightarrow f_c = 12.5 \text{ MPa} \checkmark$$

$$\Delta \varepsilon_y = \Delta \varphi (d - kd) = 2.932 \cdot 10^{-5} (25 - 12.31) = 0.0003721$$

$$\varepsilon_s = 0.0001006 + 0.0003721 = 0.0004727 \rightarrow f_s = 94.54 \text{ MPa} \leq 420 \checkmark$$

### ▪ Resistencia a flexión

$$f'_c = 25 \text{ MPa} \rightarrow \alpha = 0.72, \beta = 0.425$$

$$f_y = 420 \text{ MPa} \rightarrow \varepsilon_y = 420 / 200000 = 0.0021$$

Siguiendo el proceso (4.12), luego de algunas iteraciones se llega a:

$$\text{Se propone } \varepsilon_s = 0.001945 \rightarrow f_s = 389 \text{ MPa}$$

$$(4.6) \rightarrow c = \frac{A_s f_s}{\alpha f'_c b} = \frac{9.82 \cdot 38.9}{0.72 \cdot 2.5 \cdot 14} = 15.159 \text{ cm}$$

$$(4.8) \rightarrow \varphi = \frac{0.003}{c} = \frac{0.003}{15.159} = 19.79 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

$$(4.9) \rightarrow \varepsilon_s = \varphi (d - c) = 19.79 \cdot 10^{-5} (25 - 15.159) = 0.001947$$

$$(4.11) \rightarrow \varepsilon_s = 0.001947 \rightarrow f_s = 389 \text{ MPa} \text{ igual al valor inicial} \checkmark$$

Momento resistente nominal:

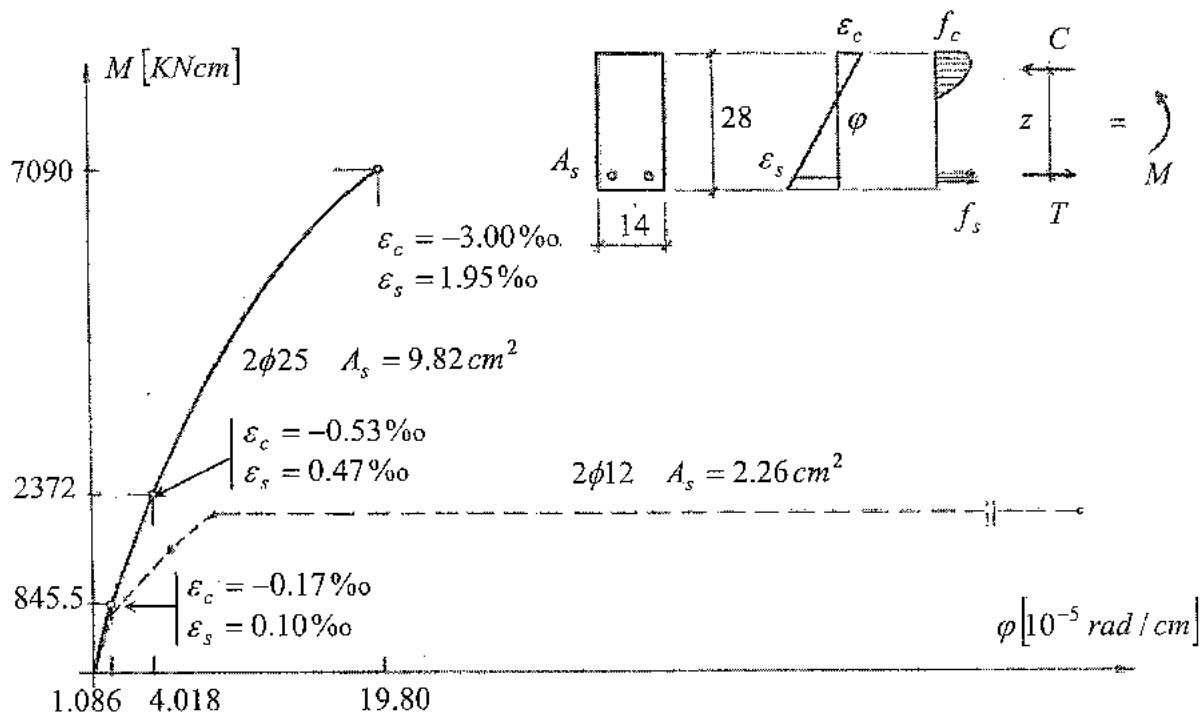
$$z = d - \beta c = 25 - 0.425 \cdot 15.159 = 18.56 \text{ cm}$$

$$C = \alpha f'_c b c = 0.72 (-2.5) 14 \cdot 15.159 = -382 \text{ KN}$$

$$T = A_s f_s = 9.82 \cdot 38.9 = 382 \text{ KN} \checkmark$$

$$M_n = 382 \cdot 18.56 = 7090 \text{ KNcm} = 70.90 \text{ KNm}$$

■ **Diagrama momento curvatura de la sección:**



En este ejemplo el estado límite  $\varepsilon_{cu} = -0.003$  se alcanza sin que la armadura llegue a fluencia, es decir la falla está controlada por compresión.

La diferencia entre ambos ejemplos es una mayor resistencia de la sección más armada, pero sin el periodo de deformación inelástica a momento constante que posee la sección menos armada, con  $2\phi 12$ , como se observa en el gráfico anterior.

La sección con  $2\phi 12$  rompe con "preaviso", es decir alcanzado su momento máximo se deforma inelásticamente permitiendo la visualización de fisuras, y también la redistribución de esfuerzos hacia otros elementos en casos de estructuras hiperestáticas. Se dice que la sección tiene *ductilidad*, la cual se define como:  $\mu_\phi = \varphi_u / \varphi_y$ , donde  $\varphi_u$  es la curvatura límite y  $\varphi_y$  la curvatura de fluencia. Para la sección con  $2\phi 12$  resulta  $\mu_\phi \cong 79.6 / 8.5 \cong 9.4$ , mientras que la sección con  $2\phi 25$  prácticamente no tiene ductilidad, produciéndose una falla "frágil".

Justamente, el CIRSOC 201 punto 8.4, permite la redistribución de los momentos negativos en elementos continuos solicitados a flexión sólo cuando  $\varepsilon_s \geq 0.0075$  en la sección en la cual se reduce el momento, es decir en secciones "dúctiles". Dicha redistribución no debe superar  $1000 \varepsilon_s$  (%) pero menor a 20 %.

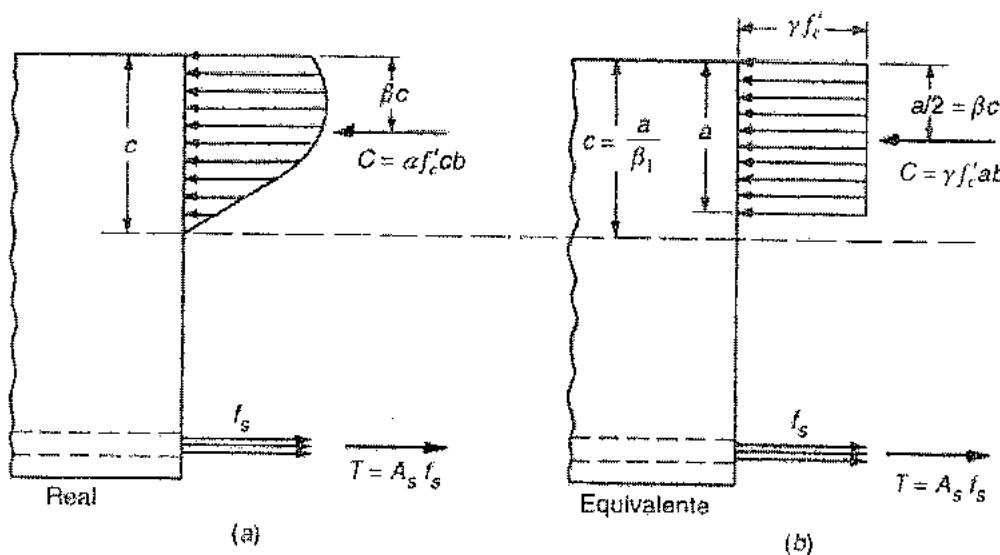
*Observación importante:* notar que dada una sección, no es necesario evaluar toda la historia momento curvatura para calcular el momento resistente. Se puede aplicar directamente el apartado c), expresiones (4.6) a (4.12).

#### 4.4. DISEÑO DE VIGAS RECTANGULARES CON ARMADURA DE TRACCIÓN

El método presentado en el apartado anterior, para calcular la resistencia a flexión de vigas de hormigón armado se basa en conceptos básicos de la mecánica estructural y de información pertinente de investigación experimentales.

Se explicó que la forma geométrica real de la distribución de tensiones de compresión en el hormigón varía considerablemente, y que en realidad no se requiere conocer la forma exacta, sino la magnitud  $C$  de la resultante y la ubicación de dicha resultante. A partir de resultados experimentales se obtuvo información expresada en los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

En el código CIRSOC 201, ver 4.2 f), la distribución real de tensiones se reemplaza por una distribución equivalente con forma rectangular simple, como se puede observar en la fig.4.9.



**Figura 4.9:** Distribución de esfuerzos para resistencia última.  
(a) Real, (b) Rectangular equivalente

La distribución equivalente debe dar la misma magnitud de resultante de compresión  $C$  y su ubicación, que la distribución real, luego:

$$C = \alpha f'_c' c b = \gamma f'_c' a b \rightarrow \gamma = \alpha \frac{c}{a} = \alpha \frac{c}{\beta_1 c} = \frac{\alpha}{\beta_1} \quad (4.13)$$

$$\beta c = \frac{a}{2} = \frac{\beta_1 c}{2} \rightarrow \beta_1 = 2\beta \quad (4.14)$$

Los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta_1$  y  $\gamma$  se resumen en la tabla 4.1 para diferentes tipos de hormigón. Se observa que el factor de intensidad de tensiones  $\gamma$  es prácticamente independiente de  $f'_c'$  y se puede tomar igual a 0.85. Luego, para una viga de ancho  $b$  resulta:

$$C = 0.85 f'_c' a b \quad (4.15)$$

Los valores de  $\beta_1$  dados por el CIRSOC 201, y señalados en 4.2 f) son muy similares a los de tabla 4.1. Las pequeñas diferencias se deben a las aproximaciones del código en la conversión de unidades inglesas al sistema internacional.

**Tabla 4.1:** Parámetros del bloque de tensiones en el hormigón

$f'_c [MPa]$	$\leq 25$	30	35	40	45	50	60
$\alpha$	0.720	0.706	0.677	0.648	0.619	0.590	0.560
$\beta$	0.425	0.416	0.398	0.380	0.362	0.344	0.325
$\beta_1 = 2 \beta$	0.850	0.832	0.796	0.760	0.724	0.688	0.650
$\gamma = \alpha / \beta_1$	0.857	0.848	0.850	0.853	0.855	0.857	0.861

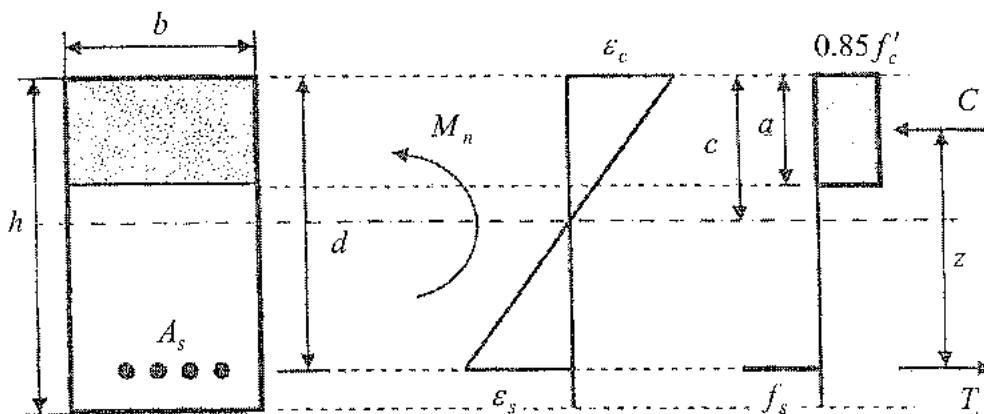
En el diseño de las secciones transversales de una viga solicitada a flexión se debe cumplir la ec.(3.8) que particularizada para este caso resulta

$$\phi M_n \geq M_u \quad (4.16)$$

Las incógnitas del problema son  $b$ ,  $d$  y  $A_s$ , habiendo elegido la calidad de los materiales. Es un problema matemático de una ecuación con tres incógnitas, por lo tanto no hay solución única. La pregunta es: ¿cuál es la solución más conveniente?. Respuesta: la solución de menor costo, sujeta a restricciones impuestas por consideraciones arquitectónicas, constructivas y verificación de estados límites de servicio.

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.6) a (4.11) se presentan tablas de ayuda para el dimensionamiento que se explican a continuación, referidos a la nomenclatura de la fig. 4.10.

➤ Una posibilidad es utilizar las tablas FLEXIÓN, algunas de las cuales se reproducen al final de este capítulo. Se basan en un conjunto de relaciones entre las variables del problema, que se describen a continuación.



**Figura 4.10:** Sección rectangular con armadura de tracción

$$\frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} = \frac{\varepsilon_c}{c} \rightarrow c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \cdot d = k_c d \quad (4.17)$$

$$z = d - \frac{a}{2} = d - \frac{\beta_1 c}{2} = d - \frac{\beta_1 k_c d}{2} = \left(1 - \frac{\beta_1 k_c}{2}\right) d = k_z d \quad (4.18)$$

$$M_n = C z = 0.85 f'_c a b z = 0.85 f'_c \beta_1 k_c d b k_z d = 0.85 f'_c \beta_1 k_c k_z b d^2 \quad (4.19)$$

De (4.19) se despeja  $d$  y resulta:

$$d = \sqrt{\frac{1}{0.85 f'_c \beta_1 k_c k_z}} \sqrt{\frac{M_n}{b}} = k_d \sqrt{\frac{M_n}{b}} \quad (4.20)$$

De (4.20) se puede despejar  $k_c$  en función de  $k_d$ :

$$k_c = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{\beta_1} - \sqrt{\left(\frac{2}{\beta_1}\right)^2 - 4 \frac{2}{0.85 f'_c \beta_1^2 k_d^2}} \right] \quad (4.21)$$

Además:

$$C = \frac{M_n}{z} = T = A_s f_s \rightarrow A_s = \frac{M_n}{z f_s} = \frac{1}{k_z f_s} \frac{M_n}{d} = k_e \frac{M_n}{d} \quad (4.22)$$

El cálculo se efectúa de la siguiente manera:

- Con las cargas mayoradas se realiza el análisis estructural y se obtiene el momento requerido  $M_u$ .
- Se debe cumplir (4.16), es decir:  $\phi M_n \geq M_u$
- Se elige el factor de reducción de resistencia  $\phi$  de tabla 3.1 en función del tipo de solicitación, que para flexión y sección controlada por tracción (ver también fig.3.4), es decir  $\varepsilon_s \geq 0.005$ , resulta  $\phi = 0.90$ .
- Luego se obtiene el momento resistente nominal  $M_n \geq \frac{M_u}{\phi}$
- Se conocen los materiales a utilizar y sus valores especificados:  $f'_c$ ,  $f_y$ . Se presentan dos posibilidades:
  - a) Se conocen las dimensiones  $b$ ,  $d$ : se verifica la sección y se calcula la armadura necesaria.

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b}}} \rightarrow \text{tablas FLEXION, en función de } f'_c \text{ y } f_y \text{ se obtiene } k_e, k_c, k_z, \varepsilon_s.$$

El renglón inferior de la tabla corresponde a  $k_d^*$  asociado a  $\varepsilon_s = 0.005$ .

Si  $k_d < k_d^*$  se recomienda aumentar la altura de la viga  $h$  y en consecuencia la profundidad de la armadura  $d$ .

Si  $k_d$  resulta mayor que el del renglón superior de la tabla, se recomienda disminuir  $d$ , o utilizar ese renglón superior para seguir el cálculo si es que la altura de la viga está impuesta por otras consideraciones.

Como **criterio** inicial, se obtienen soluciones óptimas para vigas de edificios comunes, cuando  $0.010 \leq \varepsilon_s \leq 0.020$ .

La profundidad del eje neutro es:  $c = k_c d$

El brazo de palanca interno es:  $z = k_z d$

La armadura necesaria se obtiene con:  $A_s = k_e \frac{M_n}{d}$

b) No se conocen las dimensiones: se adopta el ancho  $b$ , la deformación en el acero  $\varepsilon_s$ , y se calcula la profundidad de la armadura  $d$  y la armadura necesaria.

Se elige la deformación del acero  $\varepsilon_s \geq 0.005$  con el criterio señalado en el caso a), es decir  $0.010 \leq \varepsilon_s \leq 0.020$

Con las tablas FLEXION, en función de  $f'_c$  y  $f_y$  se ingresa con el  $\varepsilon_s$  elegido, y del mismo renglón se obtiene  $k_d, k_e, k_c, k_z$ .

La profundidad de la armadura se calcula con:  $d = k_d \sqrt{\frac{M_n}{b}}$

La profundidad del eje neutro es:  $c = k_c d$

El brazo de palanca interno es:  $z = k_z d$

La armadura necesaria se obtiene con:  $A_s = k_e \frac{M_n}{d}$

#### Observaciones:

- Las unidades de las tablas son  $MN, m$  y la sección de armadura se obtiene en  $cm^2$ .
- Las tablas están construidas sólo para los casos de  $\varepsilon_s \geq 0.005$ , es decir secciones controladas por tracción. Aplicando las ecuaciones vistas se pueden considerar situaciones con  $\varepsilon_s < 0.005$ . Sin embargo la sección va perdiendo ductilidad, como se señaló en el apartado 4.3, Ejemplo 4.2, y más aún si  $\varepsilon_s < \varepsilon_y$  se necesita mayor cantidad de armadura.

En esos casos es recomendable utilizar una sección mayor de hormigón, o recurrir a la armadura de compresión, ver punto 4.6.

El CIRSOC 201 prescribe para elementos solicitados a flexión, con carga axial mayorada menor que  $0.10 f'_c A_g$ , una deformación a tracción  $\varepsilon_s \geq 0.004$ .

➤ Otra forma equivalente es trabajar con momentos reducidos o adimensionales. A partir de (4.19) se define:

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{M_n}{bd^2 f'_c} = 0.85 \beta_1 k_c k_z = 0.85 \beta_1 k_c \left(1 - \frac{\beta_1 k_c}{2}\right) = \\ &= 0.85 \beta_1 k_c - \frac{0.85}{2} \beta_1^2 k_c^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Se resuelve la ecuación cuadrática en  $k_c$ :

$$-0.425 \beta_1^2 k_c^2 + 0.85 \beta_1 k_c - m_n = 0 \rightarrow k_c = \frac{1}{\beta_1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_n}{0.425}}\right) \quad (4.24)$$

Reemplazando en (4.18), se obtiene

$$k_z = 0.5 + 0.5 \sqrt{1 - \frac{m_n}{0.425}} \quad (4.25)$$

Al final de este capítulo se presenta la tabla con valores numéricos de  $m_n, k_c, \varepsilon_s, k_z$  para diferentes clases de hormigón. Los valores de  $\beta_1$  corresponden a los señalados en 4.2 f) y dados por el CIRSOC 201. Se indican también los valores de  $k_z^*$  que corresponde a  $\varepsilon_s = 0.005$ , límite de sección controlada por tracción.

- Las dos posibilidades descriptas, y utilizando la tabla de momentos adimensionales, se resuelven con:

- a) Se conocen las dimensiones  $b, d$ : se verifica la sección y se calcula la armadura necesaria.

$$m_n = \frac{M_n}{bd^2 f'_c} \rightarrow \text{tabla, en función de } f'_c \text{ se obtiene } k_c, \varepsilon_s, k_z.$$

Se verifica si  $\varepsilon_s \geq 0.005$ , o que  $k_c \leq 0.375$ , caso contrario habría que modificar  $\phi$  y recalcular  $M_n$ , o disponer armadura de compresión, ver punto 4.6..

El renglón inferior de la tabla corresponde a  $m_n^*$  asociado a  $\varepsilon_s = 0.005$ .

Si  $m_n > m_n^*$  se recomienda aumentar la altura de la viga  $h$  y en consecuencia la profundidad de la armadura  $d$ .

Si  $m_n$  resulta menor que el del renglón superior de la tabla, se recomienda disminuir  $d$ , o utilizar ese renglón superior para seguir el cálculo si es que la altura de la viga está impuesta por otras consideraciones.

Como **criterio** inicial, se obtienen soluciones óptimas para vigas de edificios comunes, cuando  $0.010 \leq \varepsilon_s \leq 0.020$ .

La profundidad del eje neutro es:  $c = k_c d$

El brazo de palanca interno es:  $z = k_z d$

Con  $\varepsilon_s$  se obtiene  $f_s$  de la ecuación constitutiva (4.11).

La armadura necesaria se obtiene con:  $A_s = \frac{M_n}{z f_s}$

b) No se conocen las dimensiones: se adopta el ancho  $b$ , la deformación en el acero  $\varepsilon_s$ , y se calcula la altura  $d$  y la armadura necesaria.

Se elige la deformación del acero  $\varepsilon_s \geq 0.005$  con el criterio señalado en el caso a), es decir  $0.010 \leq \varepsilon_s \leq 0.020$

Con la tabla de momentos adimensionales, en función de  $f'_c$  se ingresa con el  $\varepsilon_s$  elegido, y del mismo renglón se obtiene  $k_c, k_z, m_n$ .

La profundidad de la armadura se calcula con:  $d = \sqrt{\frac{M_n}{m_n b f'_c}}$

La profundidad del eje neutro es:  $c = k_c d$

El brazo de palanca interno es:  $z = k_z d$

Con  $\varepsilon_s$  se obtiene  $f_s$  de la ecuación constitutiva (4.11).

La armadura necesaria se obtiene con:  $A_s = \frac{M_n}{z f_s}$

#### □ Ejemplo 4.3

Calcular la armadura necesaria para la sección del Ejemplo 4.1, cuando la carga es  $P_u = 28.57 \text{ KN}$ .

- Análisis estructural:  $M_u = P_u \cdot 70 \text{ cm} = 28.57 \cdot 70 = 2000 \text{ KNcm}$
- Momento nominal:  $M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{2000}{0.9} = 2222 \text{ KNcm} = 0.0222 \text{ MNm}$
- Sección:  $b = 0.14 \text{ m}, h = 0.28 \text{ m} \rightarrow d = 0.25 \text{ m}$
- Con tablas de  $k_d$ :
- $k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b}}} = \frac{0.25}{\sqrt{\frac{0.0222}{0.14}}} = 0.6278$
- Para  $f'_c = 25 \text{ MPa}, f_y = 420 \text{ MPa} \rightarrow$  tabla FLEXION 3:  $k_e = 25.45, k_z = 0.9356, k_c = 0.1517, \varepsilon_s = 0.0168 > 0.005 \checkmark$  (valores obtenidos por interpolación lineal).

- La profundidad del eje neutro es:  $c = k_c d = 0.1517 \cdot 25 = 3.79 \text{ cm}$
- El brazo de palanca interno es:  $z = k_z d = 0.9356 \cdot 25 = 23.4 \text{ cm}$
- La armadura necesaria es:  $A_{s \text{ nec}} = k_e \frac{M_n}{d} = 25.45 \frac{0.0222}{0.25} = 2.26 \text{ cm}^2$
  
- Con tabla de  $m_n$ :
- Momento adimensional:  $m_n = \frac{M_n}{bd^2 f'_c} = \frac{0.0222}{0.14 \cdot 0.25^2 \cdot 25} = 0.1015$
- Para  $f'_c = 25 \text{ MPa} \rightarrow$  tabla:  $k_c = 0.150 \quad k_z = 0.9362, \varepsilon_s = 0.017 > 0.005 \checkmark$
- La profundidad del eje neutro es:  $c = k_c d = 0.150 \cdot 25 = 3.75 \text{ cm}$
- El brazo de palanca interno es:  $z = k_z d = 0.9362 \cdot 25 = 23.4 \text{ cm}$
- La tensión en la armadura es:  $\varepsilon_s = 0.017 \rightarrow f_s = 420 \text{ MPa}$
- La armadura necesaria es:  $A_{s \text{ nec}} = \frac{M_n}{z f_s} = \frac{0.0222}{0.234 \cdot 420} \cdot 10^4 = 2.26 \text{ cm}^2$

Resultados que coinciden entre las dos tablas y con los cálculos en el ejemplo 4.1  $\checkmark$

#### 4.5. FLEXIÓN CON FUERZA AXIAL DE GRAN EXCENTRICIDAD

El tema de flexión compuesta será tratado en los capítulos 7 y 8. Sin embargo es conveniente analizar acá el caso de flexión compuesta con gran excentricidad, es decir con el eje neutro dentro de la sección.

Las hipótesis de diseño, descriptas en 4.2, siguen siendo válidas como lo demuestran numerosas investigaciones experimentales. El dimensionamiento se simplifica si el momento se refiere a la armadura traccionada como se indica en la fig.4.11.

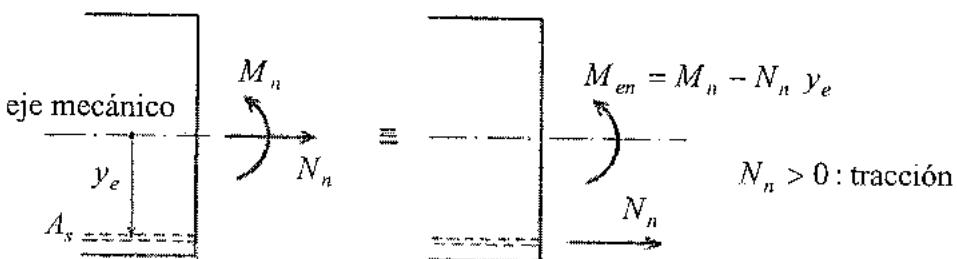


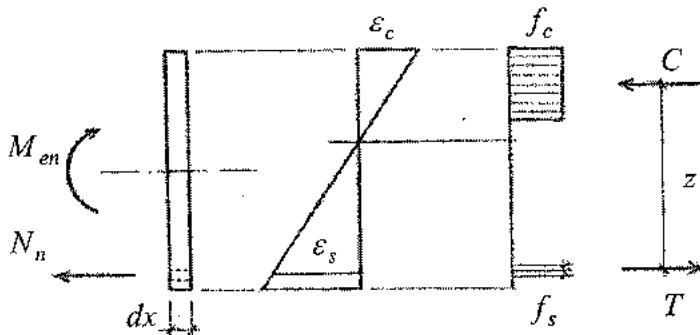
Figura 4.11: Esfuerzos internos referidos a la armadura traccionada

Las ecuaciones de compatibilidad (4.8), (4.9) y las constitutivas (4.10), (4.11) no se modifican, mientras que las ecuaciones de equilibrio (4.6), (4.7), ver fig.4.12, resultan:

$$\sum N = 0 \rightarrow N_n = T + C \rightarrow A_s f_s - N_n = \alpha f'_c b c \quad (4.26)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_{en} = M_n - N_n y_e = -C z \quad (4.27)$$

donde  $M_{en}$  es el momento referido a la armadura traccionada.



**Figura 4.12:** Equilibrio de una sección con flexión compuesta

Utilizando este sistema estáticamente equivalente, el normal  $N_n$  lo absorbe directamente la armadura, y para el momento  $M_{en}$  se pueden aprovechar las tablas de ayuda desarrolladas para flexión pura, solamente reemplazando  $M_n$  por  $M_{en}$  en (4.19), y (4.22) se transforma en:

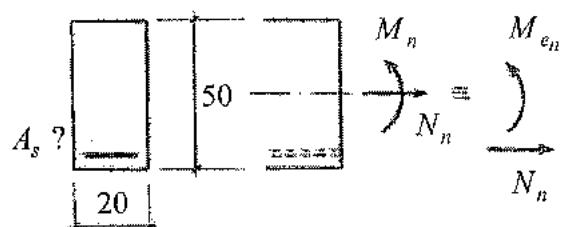
$$-C = \frac{M_{en}}{z} = T - N_n = A_s f_s - N_n \rightarrow A_s = \frac{M_{en}}{z f_s} + \frac{N_n}{f_s} = k_e \frac{M_{en}}{d} + \frac{N_n}{f_s} \quad (4.28)$$

#### □ Ejemplo 4.4

Calcular la armadura de tracción de una sección rectangular con  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $h = 50 \text{ cm}$  solicitada por  $N_u = 100 \text{ KN}$ ,  $M_u = 10000 \text{ KNcm}$ . Utilizar hormigón H-25 y acero ADN 420. Recubrimiento al eje de la armadura  $3.5 \text{ cm}$ .

$$N_n = \frac{N_u}{\phi} = \frac{100}{0.9} = 111 \text{ KN} = 0.111 \text{ MN}$$

$$M_n = \frac{M_u}{\phi} = \frac{10000}{0.9} = 11110 \text{ KNcm} \\ = 0.1111 \text{ MNm}$$



$$h = 50 \quad d = 46.5 \quad y_e = 25 - 3.5 = 21.5 \text{ cm}$$

$$M_{en} = M_n - N_n y_e = 0.1111 - 0.111 \cdot 0.215 = 0.0872 \text{ MNm}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{en}}{b}}} = \frac{0.465}{\sqrt{\frac{0.0872}{0.20}}} = 0.704 \rightarrow \text{tabla FLEXION 3: } k_e = 25.09, k_c = 0.1195,$$

$$\varepsilon_s = 0.0221 > 0.005 \quad \checkmark$$

$$A_{s\text{ nec}} = k_e \frac{M_{e_n}}{d} + \frac{N_n}{f_s} = 25.09 \frac{0.0872}{0.465} + \frac{0.111}{420} 10000 = 4.705 + 2.643 = 7.35 \text{ cm}^2$$

Para conversión de  
unidades  $\text{m}^2 \rightarrow \text{cm}^2$

$2\phi 20 + 1\phi 12$

Utilizando la tabla de momentos adimensionales:

$$m_{e_n} = \frac{M_{e_n}}{bd^2 f_c'} = \frac{0.0872}{0.20 \cdot 0.465^2 \cdot 25} = 0.08066 \rightarrow \text{tabla adimensional} \rightarrow$$

$$k_e = 0.1175, \quad \varepsilon_s = 0.0228 > 0.005 \checkmark, \quad k_z = 0.950$$

$$\varepsilon_s = 0.0228 \rightarrow f_s = 420 \text{ MPa}$$

$$A_{s\text{ nec}} = \frac{M_{e_n}}{z f_s} + \frac{N_n}{f_s} = \frac{0.0872}{0.95 \cdot 0.465 \cdot 420} 10^4 + \frac{0.111}{420} 10^4 = 7.34 \text{ cm}^2 \checkmark$$

#### □ Ejemplo 4.5

La sección del ejemplo 4.4 ahora está solicitada por una fuerza normal de compresión  $N_u = -100 \text{ KN}$ . Los otros datos son iguales.

$$N_n = \frac{N_u}{\phi} = \frac{-100}{0.9} = -111 \text{ KN} = -0.111 \text{ MN}$$

$$M_n = \frac{M_u}{\phi} = \frac{10000}{0.9} = 11110 \text{ KNcm} = 0.1111 \text{ MNm}$$

$$M_{e_n} = M_n - N_n \text{ y } e = 0.1111 - (-0.111) 0.215 = 0.1350 \text{ MNm}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{e_n}}{b}}} = \frac{0.465}{\sqrt{\frac{0.135}{0.20}}} = 0.566 \rightarrow \text{tabla FLEXION 3: } k_e = 25.889, \quad k_c = 0.189,$$

$$\varepsilon_s = 0.0129 > 0.005 \checkmark$$

$$A_{s\text{ nec}} = k_e \frac{M_{e_n}}{d} + \frac{N_n}{f_s} = 25.889 \frac{0.135}{0.465} - \frac{0.111}{420} 10000 = 7.516 - 2.643 = 4.87 \text{ cm}^2$$

$$2\phi 16 + 1\phi 12$$

Utilizando la tabla de momentos adimensionales:

$$m_{e_n} = \frac{M_{e_n}}{bd^2 f_c'} = \frac{0.1350}{0.20 \cdot 0.465^2 \cdot 25} = 0.1249 \rightarrow \text{tabla adimensional} \rightarrow$$

$$k_e = 0.1879, \quad \varepsilon_s = 0.0129 > 0.005 \checkmark, \quad k_z = 0.9202$$

$$\varepsilon_s = 0.0129 \rightarrow f_s = 420 \text{ MPa}$$

$$A_{s\ nec} = \frac{M_{e_n}}{z f_s} + \frac{N_n}{f_s} = \frac{0.1350}{0.9202 \cdot 0.465 \cdot 420} 10^4 - \frac{0.111}{420} 10^4 = 4.87 \text{ cm}^2 \checkmark$$

#### 4.6. DISEÑO DE VIGAS RECTANGULARES CON ARMADURA A TRACCIÓN Y A COMPRESIÓN (doble armadura)

Si la sección transversal de una viga se limita por consideraciones arquitectónicas u otras restricciones, puede ocurrir que el hormigón no sea capaz de desarrollar la fuerza de compresión para resistir el momento actuante.

Puede suceder también que, para lograr el equilibrio interno, la armadura traccionada no se aproveche completamente porque:

- (a)  $\varepsilon_s < 0.005$ : significa que el factor de reducción de resistencia  $\phi$  disminuye, con el consiguiente incremento del momento nominal necesario.
- (b)  $\varepsilon_s < \varepsilon_y$ : donde, además de la disminución de  $\phi$ , la tensión  $f_s < f_y$ , es decir el acero trabaja por debajo de la tensión de fluencia.

Por otra parte, como se discutió en apartados anteriores, es conveniente que la sección esté controlada por tracción, con falla dúctil con preaviso,  $\varepsilon_s \geq 0.005$ .

La solución es incorporar armadura  $A'_s$  en la zona comprimida como se muestra en la fig.4.13.

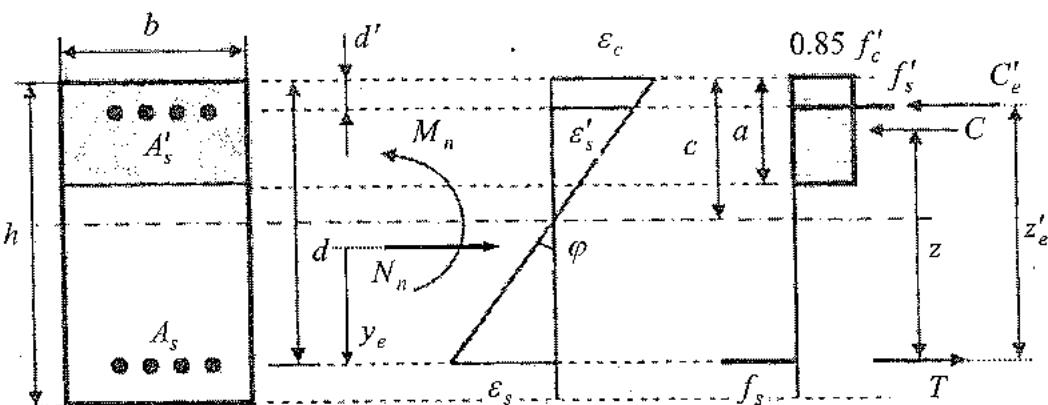


Figura 4.13: Sección rectangular con doble armadura

Llamando  $M_{e_n} = M_n - N_n y_e$  al momento referido a la armadura traccionada, las ecuaciones resultan:

- **Ecuaciones de equilibrio:**

$$\sum N = 0 \rightarrow N_n = T + C + C'_e \quad (4.29)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_{e_n} = -(Cz + C'_e z'_e) \quad (4.30)$$

■ Ecuaciones de compatibilidad

$$\varepsilon_{cu} = -\phi c = -0.003 \quad (\text{estado límite}) \quad (4.31)$$

$$\varepsilon'_s = -\phi(c - d') \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_s = \phi(d - c) \quad (4.33)$$

■ Ecuaciones constitutivas

- *Acero:*  $f_s = E_s \varepsilon_s \quad \text{para} \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_y$  (4.34)

$$f_s = f_y \quad \text{para} \quad \varepsilon_s > \varepsilon_y$$

$$T = A_s f_s \quad (4.35)$$

$$C'_e = A'_s f'_s \quad (4.36)$$

- *Hormigón:*  $f'_c \rightarrow \beta_1 \quad C = 0.85 f'_c b \beta_1 c$  (4.37)

■ Relaciones geométricas

$$z = d - \frac{\beta_1 c}{2} \quad z'_e = d - d' \quad (4.38)$$

Incógnitas del problema:  $A_s, A'_s, \varepsilon_s, \varepsilon'_s, C, C'_e, c, \phi, T, z$

Ecuaciones: de (4.29) a (4.38)

Son 10 ecuaciones con 10 incógnitas que resuelven el problema, considerando como datos las dimensiones de la sección, la resistencia de los materiales, y obviamente las solicitudes externas.

Por los motivos enunciados en los párrafos iniciales de este apartado, es conveniente que  $\varepsilon_s \geq 0.005$ , y para aprovechar al máximo la compresión en el hormigón minimizando la cantidad de armadura comprimida, es conveniente maximizar la profundidad del eje neutro, entonces se elige  $\varepsilon_s = 0.005$ .

Con relación al problema de diseño de vigas rectangulares con armadura a tracción solamente, ahora se agrega una incógnita que es  $A'_s$  y una ecuación  $\varepsilon_s = 0.005$ . Luego resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \varepsilon_{cu} = -0.003 && (\text{estado límite}) \\ \varepsilon_s &= 0.005 && (\text{límite sección controlada por tracción}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Con estas deformaciones se calcula el momento que resiste el hormigón comprimido con parte de la armadura traccionada  $M^*$ :

$$\text{De (4.39) y condición de compatibilidad: } c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} d = \frac{0.003}{0.003 + 0.005} d = 0.375 d$$

$$\text{Con (4.37)} \rightarrow C = 0.85 f'_c b \beta_1 c$$

$$\text{Con (4.38)} \rightarrow z = d - \frac{\beta_1 c}{2}$$

$$\text{Luego} \quad M^* = C z \quad (4.40)$$

La diferencia entre el momento nominal necesario y  $M^*$  se absorbe con una cupla formada por la armadura comprimida y otra parte de la armadura traccionada:

$$\Delta M = M_{e_n} - M^* = C'_e z'_e \quad (4.41)$$

La armadura comprimida se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Con (4.32)} \rightarrow \varepsilon'_s = -\varphi(c - d'), \quad \text{con (4.30)} \rightarrow f'_s$$

$$\text{De (4.36) y (4.41)} \rightarrow A'_s = \frac{C'_e}{f'_s} = \frac{\Delta M}{z'_e f'_s} \quad (4.42)$$

Finalmente se calcula la sección de armadura traccionada:

$$\text{De (4.29)} \rightarrow T = C + C'_e + N_n, \quad \text{con } N_n < 0 \text{ de compresión}$$

$$A_s f_s = \frac{M^*}{z} + \frac{\Delta M}{z'_e} + N_n$$

$$\text{Luego: } A_s = \frac{M^*}{z f_s} + \frac{\Delta M}{z'_e f_s} + \frac{N_n}{f_s} \quad (4.43)$$

➤ Con las tablas de ayuda para el dimensionamiento FLEXION, los cálculos se organizan de la siguiente manera:

Se denomina:

$$\xi = \frac{d'}{d} \quad z = k_z^* d \quad k_d = \sqrt{\frac{d}{\frac{M_{e_n}}{b}}} \quad k_d^* = \sqrt{\frac{d}{\frac{M^*}{b}}} \quad (4.44)$$

Utilizando las ecuaciones (4.39) a (4.43) y operando algebraicamente, resultan las siguientes expresiones para el cálculo de las armaduras:

$$A_s = k_e \frac{M_{e_n}}{d} + \frac{N_n}{f_y} \quad (4.45)$$

$$A'_s = k'_e \frac{M_{e_n}}{d} \quad (4.46)$$

$$\text{donde: } k_e = \frac{k_z^* + (1 - \xi - k_z^*) (k_d / k_d^*)^2}{k_z^* f_y (1 - \xi)} \quad k'_e = \frac{1 - (k_d / k_d^*)^2}{f'_s (1 - \xi)}$$

Los coeficientes  $k_e, k'_e$  son los que se obtienen de las tablas FLEXIÓN (continuación).

□ **Ejemplo 4.6**

Calcular las armaduras necesarias para que la sección rectangular con  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $h = 50 \text{ cm}$ , resista las acciones mayoradas  $N_u = -135 \text{ KN}$ ,  $M_u = 27000 \text{ KNcm}$ . Los materiales son hormigón H-25 y acero ADN 420. El recubrimiento al eje de la armadura es 3.5 cm.

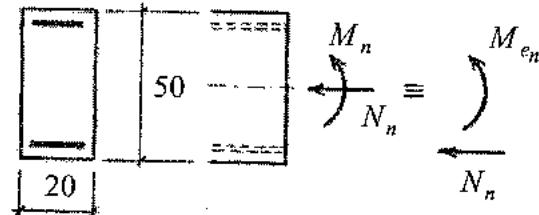
Sección controlada por tracción:

$$\varepsilon_s \geq 0.005 \rightarrow \phi = 0.9$$

$$N_n = \frac{N_u}{\phi} = \frac{-135}{0.9} = -150 \text{ KN} = -0.15 \text{ MN}$$

$$M_n = \frac{M_u}{\phi} = \frac{27000}{0.9} = 30000 \text{ KNcm} = 0.30 \text{ MNm}$$

$$M_{e_n} = M_n - N_n \gamma_e = 0.30 - (-0.15) 0.215 = 0.3323 \text{ MNm}$$



Si inicialmente se supone necesaria sólo armadura traccionada:

$$k_d = \sqrt{\frac{d}{\frac{M_{e_n}}{b}}} = \sqrt{\frac{0.465}{\frac{0.3323}{0.20}}} = 0.361 < k_d^* = 0.419 \text{ tabla FLEXION 3.}$$

$$\text{ó } m_{e_n} = \frac{M_{e_n}}{b d^2 f'_c} = \frac{0.3323}{0.20 \cdot 0.465^2 \cdot 25} = 0.3074 \rightarrow \text{tabla adimensional}$$

$$k_c = 0.5576 > 0.375, \varepsilon_s = 0.00238 < 0.005$$

Luego es necesaria armadura de compresión.

$$\varepsilon_c = 0.003 \text{ (estado límite)}, \varepsilon_s = 0.005 \text{ (adoptado)} \rightarrow f_s = 420 \text{ MPa} \rightarrow$$

$$c = 0.375 \text{ } d = 0.375 \cdot 0.465 = 0.1744 \text{ m}$$

$$C = 0.85 f'_c b \beta_1 c = 0.85 \cdot 25 \cdot 0.20 \cdot 0.85 \cdot 0.1744 = 0.63 \text{ MN}$$

$$z = d - \frac{\beta_1 c}{2} = 0.465 - \frac{0.85 \cdot 0.1744}{2} = 0.3909 \text{ m}$$

$$M^* = C z = 0.63 \cdot 0.3909 = 0.2463 \text{ MNm} < M_{e_n} = 0.3323 \rightarrow \text{es necesaria armadura de compresión}$$

$$\Delta M = M_{e_n} - M^* = 0.3323 - 0.2463 = 0.086 \text{ MNm}$$

$$\text{curvatura } \varphi = \frac{0.003}{c} = \frac{0.003}{0.1744} = 0.0172$$

$$\varepsilon'_s = -\varphi (c - d') = -0.0172 (0.1744 - 0.035) = -0.0024 \rightarrow f'_s = f_y = 420 \text{ MPa}$$

$$A'_s = \frac{\Delta M}{z'_e f'_s} = \frac{0.086}{0.43420} 10000 = 4.76 \text{ cm}^2 \rightarrow 2\phi 16 + 1\phi 10$$

$$A_s = \frac{M^*}{z f_s} + \frac{\Delta M}{z'_e f_s} + \frac{N_n}{f_s} = \left[ \frac{0.2463}{0.3909420} + \frac{0.086}{0.43420} + \frac{-0.15}{420} \right] 10000 = 16.19 \text{ cm}^2$$

$\rightarrow 4\phi 20 + 2\phi 16$

Con las tablas de FLEXIÓN:

Tabla FLEXION 3: para  $f'_c = 25 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_s = 0.005$ ,  $\varepsilon_c = 0.003 \rightarrow k_d^* = 0.419$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{e_n}}{b}}} = \frac{0.465}{\sqrt{\frac{0.3323}{0.20}}} = 0.361$$

$$\frac{k_d}{k_d^*} = \frac{0.361}{0.419} = 0.862$$

$$\xi = \frac{d'}{d} = \frac{0.035}{0.465} = 0.075$$

continuación tabla FLEXION 3

$$k_e = 27.661 \quad k'_e = 6.602$$

$$A'_s = k'_e \frac{M_{e_n}}{d} = 6.602 \frac{0.3323}{0.465} = 4.72 \text{ cm}^2$$

$$A_s = k_e \frac{M_{e_n}}{d} + \frac{N_n}{f_y} = 27.661 \frac{0.3323}{0.465} + \frac{-0.15}{420} 10000 = 19.77 - 3.57 = 16.20 \text{ cm}^2$$

Resultados que coinciden con los obtenidos de las expresiones generales.

## 4.7. VIGAS PLACA o VIGAS T

### 4.7.1. Generalidades

La forma T es óptima para su utilización como viga de hormigón armado porque, donde el hormigón es necesario por estar fuertemente comprimido, presenta un ancho  $b$  abundante, mientras que donde está traccionado o débilmente comprimido, se reduce a un pequeño nervio de ancho  $b_w$  que conecta la armadura de tracción con la zona comprimida.

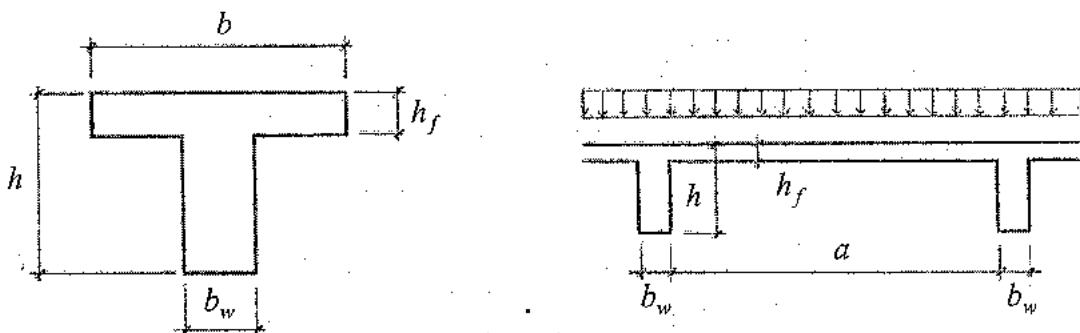


Figura 4.14: Vigas - placa

Esta configuración aparece naturalmente en entrepisos de edificios, puentes, plateas de fundación, etc., donde el ala superior cumple a su vez la función de losa o placa para resistir

las cargas perpendiculares a su plano. Por su doble función se la conoce con el nombre de viga - placa, ver fig.4.14.

#### 4.7.2. Ancho de colaboración

Debido a la compatibilidad de deformaciones, el ala, en la superficie de contacto con el nervio, debe tener las mismas deformaciones longitudinales y flexiones que la viga, ver fig.4.15. Se producen tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  que transmiten una parte de la fuerza de compresión por flexión desde la viga a la placa, resultando la placa con estado doble de tensiones.

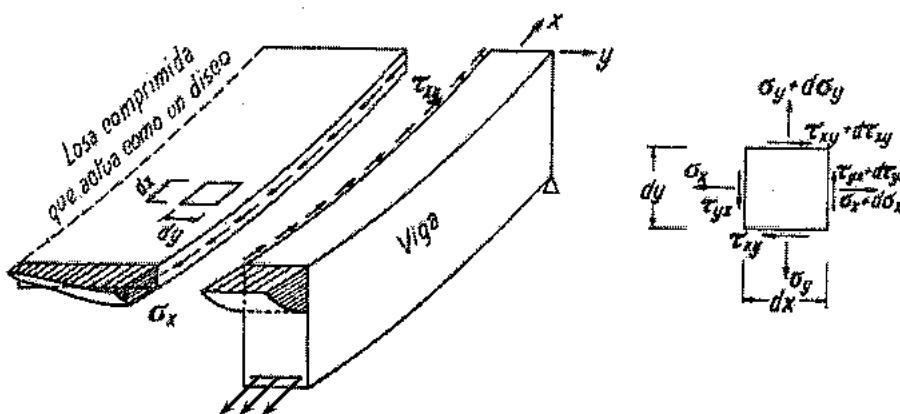


Figura 4.15: Tensiones entre nervio y placa

Resolviendo el estado plano de tensiones y analizando la repartición de las tensiones normales longitudinales  $\sigma_x$  en el ancho del ala, en un corte perpendicular a las vigas, y en una zona de momentos máximos, se observa que estas tensiones presentan valores altos en las zonas de mayor rigidez en correspondencia con los nervios, y valores reducidos en lugares alejados de los nervios.

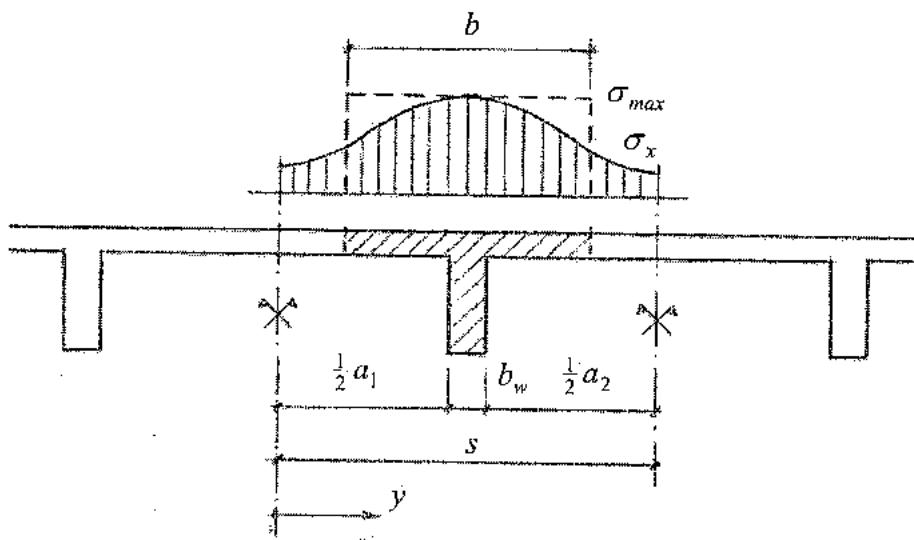


Figura 4.16: Ancho de colaboración en una viga - placa

Para evaluar la resultante de compresión habría que integrar las tensiones  $\sigma_x$  en sentido vertical entre el eje neutro y el borde superior de acuerdo a la relación constitutiva del hormigón, y en sentido horizontal con la variación explicada en el párrafo anterior y mostrado en la fig.4.16.

En la práctica, en lugar de considerar la verdadera variación de las tensiones  $\sigma_x$  en el ancho del ala, se define un "ancho de colaboración"  $b$  con un diagrama uniforme de tensiones igual a la tensión máxima y que produzca la misma resultante de compresión, es decir:

$$\int_0^s \sigma_x(y) dy = b \sigma_{max} \rightarrow b = \frac{\int_0^s \sigma_x(y) dy}{\sigma_{max}} \quad (4.47)$$

Luego se puede aislar, de la estructura, la viga T con ancho de ala  $b$  y considerar tensión uniforme en el sentido horizontal.

El ancho de colaboración, o ancho efectivo, de la placa o ala depende principalmente los siguientes factores:

- La clase de carga: uniforme, puntual, directa, indirecta.
- Las condiciones de apoyos: viga simple, viga continua, voladizos.
- La forma de la sección: vigas T simétricas o asimétricas, relación entre espesor del ala y altura del nervio.
- Las condiciones de borde de la placa: empotramiento perfecto o no.
- La luz de la viga ( $l$ ).
- La distancia entre nervios ( $a$ ).

El reglamento CIRSOC 201 establece los siguientes límites para el ancho de colaboración de vigas - placa

a) Para vigas T simétricas, es decir con losa a ambos lados

$$\begin{aligned} b &\leq l/4 && \text{un cuarto de la luz de la viga} \\ b &\leq b_w + 2 \times 8 h_f && \text{ocho veces el espesor de la losa a cada lado de la viga} \quad (4.48) \\ b &\leq b_w + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 && \text{mitad de la distancia libre a la viga siguiente} \end{aligned}$$

b) Para vigas  $\Gamma$  con losa de un solo lado

$$\begin{aligned} b &\leq b_w + l/12 \\ b &\leq b_w + 6 h_f \\ b &\leq b_w + \frac{1}{2} a \end{aligned} \quad (4.49)$$

c) Para vigas T aisladas, con ala sólo para incrementar el área comprimida

$$\begin{aligned} h_f &\geq \frac{1}{2} b_w \\ b &\leq 4 b_w \end{aligned} \quad (4.50)$$

### 4.7.3. Resistencia de las vigas - placa

En el análisis de la resistencia de una viga placa se presentan diferentes situaciones según la posición que ocupe el eje neutro.

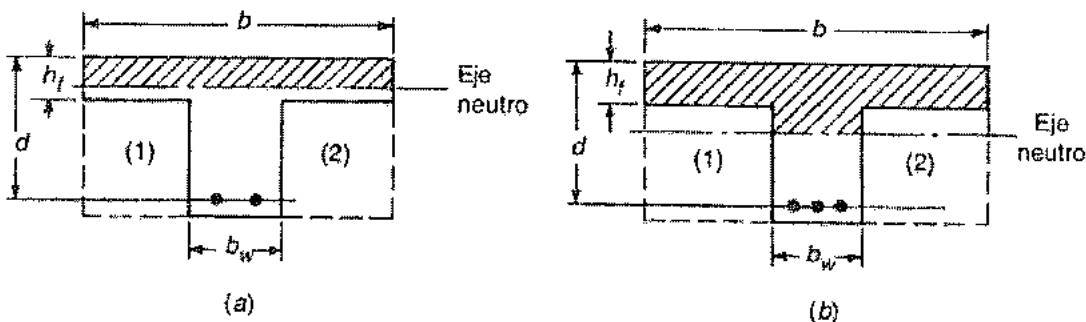
#### a) Eje neutro dentro del ala, es decir $c \leq h_f$

En este caso la viga T puede analizarse como si fuera una viga rectangular de ancho  $b$  que es el ancho efectivo del ala. Esta situación se representa en la fig.4.17 (a), donde se observa que si las áreas (1) y (2) hubiesen sido hormigonadas, resultaría una viga rectangular de ancho  $b$  pero, como estas áreas se encuentran en la zona traccionada, no aportan resistencia a flexión. Luego, la viga T original y la viga rectangular de ancho  $b$  tienen la misma resistencia a flexión, y entonces puede aplicarse el análisis de vigas rectangulares.

#### b) Eje neutro en el alma de la viga, es decir $c > h_f$

Cuando el eje neutro está en el alma, como se representa en la fig.4.17 (b) debe aplicarse algún método que tenga en cuenta la forma real de la viga T en la zona de compresión, como por ejemplo un método general de análisis de secciones de hormigón armado con forma cualquiera.

Se puede simplificar el problema utilizando el bloque rectangular de tensiones, equivalente al real, como se describió en 4.2.f), que si bien fue desarrollado originalmente con base en ensayos de vigas rectangulares, muchos cálculos basados en relaciones  $f'_c - \varepsilon_c$  reales indican que su uso para vigas T, al igual que para vigas de sección transversal circular o triangular, presenta apenas pequeños errores y se justifica plenamente.



**Figura 4.17:** Secciones transversales efectivas para vigas - placa

Se presentan dos posibilidades:

**b-1)** La altura bloque equivalente de tensiones de compresión es igual o menor que el espesor del ala:  $a = \beta_1 c \leq h_f$ .

En este caso también puede tratarse como una viga rectangular de ancho  $b$ , ya que la resultante de compresión será  $C = 0.85 f'_c a b$

**b-2)** La altura del bloque equivalente de tensiones de compresión es mayor que el espesor del ala:  $a = \beta_1 c > h_f$ .

En este caso el análisis se realiza como se indica a continuación, con la notación de la fig.4.18.

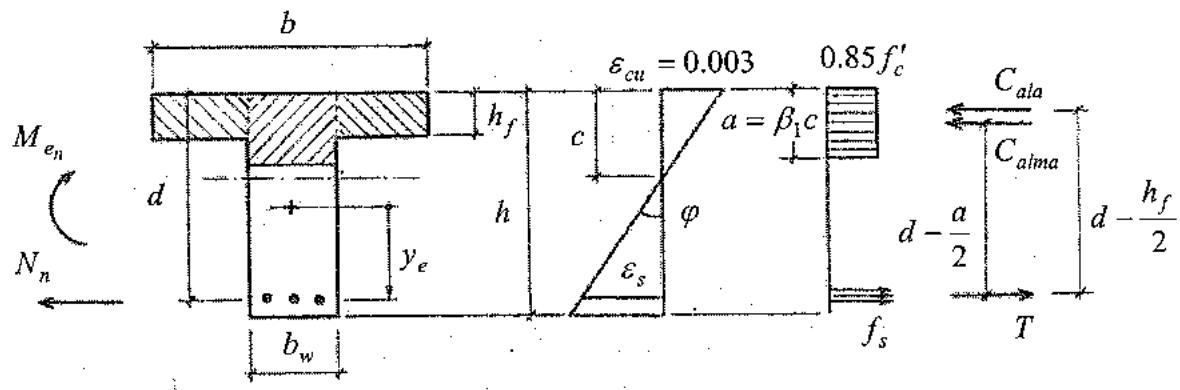


Figura 4.18: Sección de viga T con  $a > h_f$

#### Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum N = 0 \rightarrow N_n = T + C_{ala} + C_{alma} \quad (4.51)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_{en} = - \left[ C_{ala} \left( d - \frac{h_f}{2} \right) + C_{alma} \left( d - \frac{\beta_1 c}{2} \right) \right] \quad (4.52)$$

#### Ecuaciones de compatibilidad

$$\epsilon_{cu} = -\phi c = -0.003 \quad (\text{estado límite}) \quad (4.53)$$

$$\epsilon_s = \phi (d - c) \quad (4.54)$$

#### Ecuaciones constitutivas

$$- \text{Aceros: } f_s = E_s \epsilon_s \quad \text{para } \epsilon_s \leq \epsilon_y \quad (4.55)$$

$$f_s = f_y \quad \text{para } \epsilon_s > \epsilon_y$$

$$T = A_s f_s \quad (4.56)$$

$$- \text{Hormigón: } f'_c \rightarrow \beta_1 C_{ala} = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f \quad (4.57)$$

$$C_{alma} = 0.85 f'_c b_w \beta_1 c \quad (4.58)$$

Incógnitas del problema:  $T, C_{ala}, C_{alma}, \phi, c, \epsilon_s, f_s, A_s$

Ecuaciones: de (4.51) a (4.58)

Son 8 ecuaciones con 8 incógnitas que resuelven el problema, considerando como datos las dimensiones de la sección, la resistencia de los materiales, y obviamente las solicitudes externas.

Reemplazando (4.57) y (4.58) en (4.52) resulta una ecuación cuadrática en  $c$ , de donde se obtiene  $c$  con la resolvente de ecuaciones de segundo grado,

Con (4.53) se obtiene la curvatura  $\phi$  y con (4.54) la deformación  $\varepsilon_s$  en el acero, que es conveniente que sea  $\varepsilon_s \geq 0.005$  es decir sección controlada por tracción. Caso contrario es conveniente aumentar las dimensiones de la sección.

Con (4.51) se calcula la resultante de tracción T

Con  $\varepsilon_s$  y (4.55) se obtiene la tensión en la armadura  $f_s$ .

Finalmente se calcula la sección necesaria de armadura con (4.56).

El proceso de diseño se puede organizar de la siguiente manera:

Se calcula el momento nominal que resisten las alas

$$M_{n_f} = C_{ala} \left( d - \frac{h_f}{2} \right) = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \quad (4.59)$$

El momento que debe resistir el alma se calcula por diferencia

$$M_{n_w} = M_{e_n} - M_{n_f} \quad (4.60)$$

➤ Utilizando las tablas de FLEXION:

$$k_d = \sqrt{\frac{d}{\frac{M_{n_w}}{b_w}}} \rightarrow \text{tablas FLEXION 2 a 7, en función de } f'_c \text{ y } f_y \text{ se obtiene } k_e, k_c, k_z, \varepsilon_s.$$

Se verifica si  $\varepsilon_s \geq 0.005$ , ó  $k_c \leq 0.375$ , caso contrario habría que modificar  $\phi$  y recalcular  $M_n$ , ó colocar armadura de compresión, ver punto 4.6.

$$\text{La armadura necesaria: } A_s = k_e \frac{M_{n_w}}{d} + \frac{M_{n_f}}{(d - \frac{h_f}{2}) f_s} + \frac{N_n}{f_s} \quad (4.61)$$

➤ Utilizando la tabla de momentos adimensionales:

$$m_{n_w} = \frac{M_{n_w}}{b_w d^2 f'_c} \rightarrow \text{tabla, en función de } f'_c \text{ se obtiene } k_c, \varepsilon_s, k_z.$$

Se verifica si  $\varepsilon_s \geq 0.005$ , o que  $k_c \leq 0.375$ , caso contrario habría que modificar  $\phi$  y recalcular  $M_n$ , o disponer armadura de compresión, ver punto 4.6..

El brazo de palanca interno es:  $z = k_z d$

$$\text{La armadura necesaria: } A_s = \frac{M_{n_w}}{z f_s} + \frac{M_{n_f}}{(d - \frac{h_f}{2}) f_s} + \frac{N_n}{f_s} \quad (4.62)$$

Para simplificar los cálculos prácticos se pueden utilizar, en forma aproximada, las fórmulas desarrolladas para la sección rectangular transformando la sección en forma de T de la zona comprimida por encima del eje neutro, en un rectángulo de ancho ficticio  $b_i$  con sección equivalente, como se muestra en la fig.4.19.

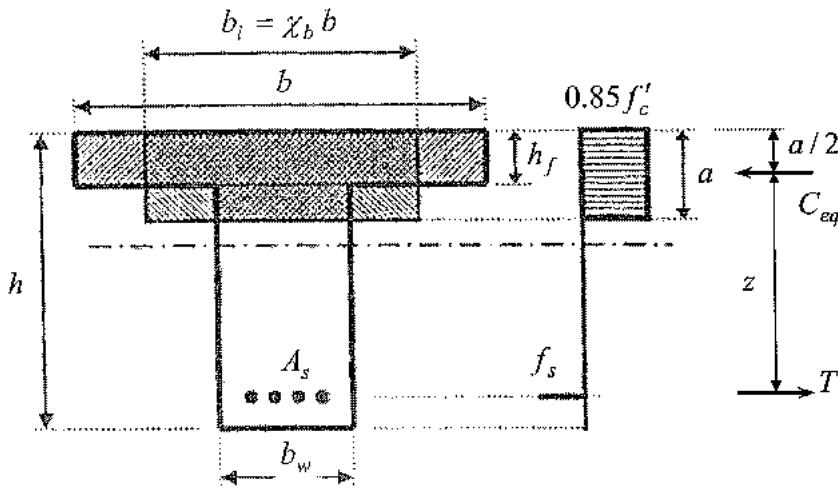


Figura 4.19: Ancho equivalente para el área comprimida

$$b_i = \chi_b b \quad (4.63)$$

En esta transformación el brazo de palanca elástico  $z$  resulta ligeramente menor, luego el cálculo resulta del lado de la seguridad.

Igualando las resultantes de compresión y utilizando (4.57) y (4.58) se tiene:

$$\begin{aligned} C_{ala} + C_{alma} &= C_{eq} \\ 0.85 f'_c (b - b_w) h_f + 0.85 f'_c b_w \beta_1 c &= 0.85 f'_c b_i \beta_1 c \end{aligned} \quad (4.64)$$

y siendo  $c = k_c d$  resulta:

$$\frac{b_i}{b} = \chi_b = \frac{h_f}{d} \frac{1}{\beta_1 k_c} \left(1 - \frac{b_w}{b}\right) + \frac{b_w}{b} \quad (4.65)$$

Se observa que depende de los valores  $b_w/b$ ,  $h_f/d$  y de la posición del eje neutro caracterizado por  $k_c$ .

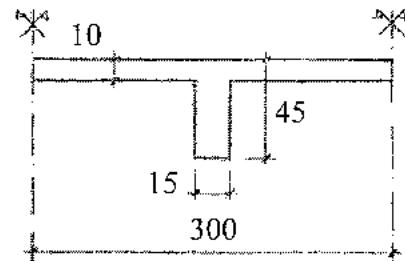
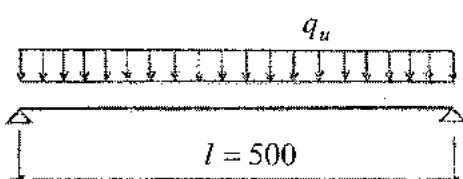
El cálculo comienza proponiendo  $k_c$ , se evalúa  $\chi_b$  con (4.65) y  $b_i$  con (4.63). Con las tablas para sección rectangular se calcula  $k_d$  y se verifica  $k_c$ , sino coincide con el propuesto, se itera. Finalmente se obtiene  $k_e$  y  $A_s$ .

**□ Ejemplo 4.7**

Calcular la armadura necesaria para la sección central de la siguiente viga placa de un entrepiso de edificio para viviendas.

**a) Datos:**

Esquema estático



Cargas: peso propio + cargas permanentes  $q_D = 30 \text{ KN/m}$   
Sobrecarga de utilización  $q_L = 10 \text{ KN/m}$

Materiales: Hormigón H-25  
Acero ADN 420

Recubrimiento: 20 mm libre  
35 mm al eje de la armadura

**b) Análisis estructural**

$$q_u = 1.2 q_D + 1.6 q_L = 1.2 \cdot 30 + 1.6 \cdot 10 = 52 \text{ KN/m}$$

$$M_u = \frac{52 \cdot 5^2}{8} = 162.5 \text{ KNm} = 0.1625 \text{ MNm}$$

**c) Dimensionamiento**

- Ancho de colaboración

$$b \leq l/4 = \frac{5.00}{4} = 1.25 \text{ m} \quad (\text{determinante})$$

$$b \leq b_w + 2 \times 8 h_f = 0.15 + 2 \cdot 8 \cdot 0.10 = 1.75 \text{ m}$$

$$b \leq b_w + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 = 0.15 + \frac{1}{2} (3 - 0.15) + \frac{1}{2} (3 - 0.15) = 3.00 \text{ m}$$

- Resistencia nominal

Se supone sección controlada por tracción:  $\varepsilon_s \geq 0.005 \rightarrow \phi = 0.9$

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{162.5}{0.9} = 180.6 \text{ KNm} = 0.1806 \text{ MNm}$$

- Con tabla FLEXION 3 para:  $f'_c = 25 \text{ MPa} \rightarrow \beta_1 = 0.85, f_y = 420 \text{ MPa}$

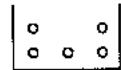
$$d = 45 - 3.5 = 41.5 \text{ cm}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b}}} = \frac{0.415}{\sqrt{\frac{0.1806}{1.25}}} = 1.092 \rightarrow k_c = 0.048 \rightarrow c = k_c d = 0.048 \cdot 41.5 = 2 \text{ cm}$$

$c \leq h_f \rightarrow$  eje neutro dentro de la losa, luego se puede analizar como viga rectangular de ancho  $b$ .

$$k_e = 24.520, \varepsilon_s = 0.060 > 0.005 \checkmark$$

$$A_s = k_e \frac{M_n}{d} = 24.520 \frac{0.1806}{0.415} = 10.67 \text{ cm}^2 \rightarrow 4\phi 16 + 1\phi 20$$



Observación: se debería ajustar la altura  $d$  hasta el baricentro de las armaduras. De todas maneras  $A_s = 4 \cdot 2.01 + 3.14 = 11.18 \text{ cm}^2$  y resulta:

$$A_s = k_e M_n / d = 24.6 \cdot 0.1806 / 0.40 = 11.11 \text{ cm}^2 \checkmark$$

- Con tabla de momentos adimensionales

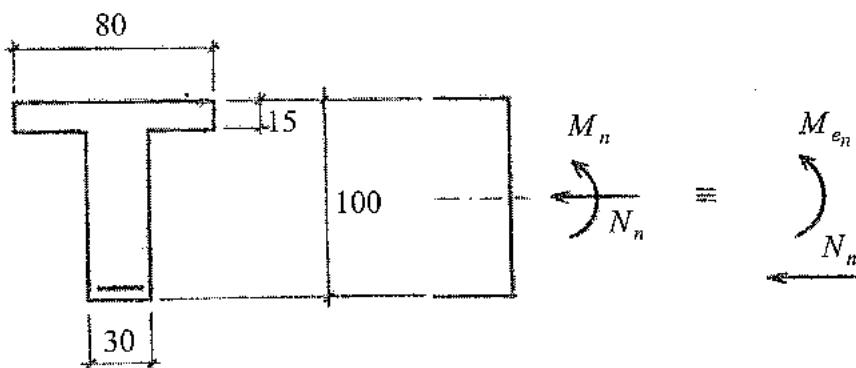
$$m_n = \frac{M_n}{b d^2 f'_c} = \frac{0.1806}{1.25 \cdot 0.415^2 \cdot 25} = 0.03356 \rightarrow \text{tabla adimensional} \rightarrow$$

$$k_c = 0.0474 < 0.375 \checkmark, \varepsilon_s = 0.060 > 0.005 \checkmark, k_z = 0.980$$

$$A_s = \frac{M_n}{z f_s} = \frac{0.1806}{0.98 \cdot 0.415 \cdot 420} \cdot 10^4 = 10.57 \text{ cm}^2 \checkmark$$

#### □ Ejemplo 4.8

Calcular la armadura necesaria para la sección T de la figura.



Del análisis estructural resulta:  $M_u = 2.331 \text{ MNm}, N_u = -0.18 \text{ MN}$

Suponiendo sección controlada por tracción  $\varepsilon_s \geq 0.005 \rightarrow \phi = 0.9$  la resistencia nominal necesaria es:

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{2.331}{0.9} = 2.59 \text{ MNm}$$

$$N_n \geq \frac{N_u}{\phi} = \frac{-0.18}{0.9} = -0.20 \text{ MN}$$

Suponiendo 2 capas de armaduras:  $d = 100 - 6 = 94 \text{ cm}$ ,  $y_e = (d/2) - 6 = 44 \text{ cm}$

Luego:  $M_{e_n} = M_n - N_n$  y  $e = 2.59 - (-0.20) 0.44 = 2.678 \text{ MNm}$

$$C_{ala} = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f = 0.85 (-25) (0.80 - 0.30) 0.15 = -1.5938 \text{ MN}$$

$$C_{alma} = 0.85 f'_c b_w \beta_1 c = 0.85 (-25) 0.30 0.85 c = -5.4188 c$$

$$M_{e_n} = - \left[ C_{ala} \left( d - \frac{h_f}{2} \right) + C_{alma} \left( d - \frac{\beta_1 c}{2} \right) \right]$$

Reemplazando resulta:

$$2.678 = 1.5938 (0.94 - 0.075) + 5.4188 c (0.94 - \frac{0.85 c}{2}) \rightarrow c = 0.2942 \text{ m}$$

Observar que  $a = \beta_1 c = 0.85 0.2942 = 0.25 \text{ m} > h_f = 0.15 \text{ m}$ , es decir el eje neutro se encuentra en el alma de la viga, caso contrario se dimensionaría como viga rectangular de ancho  $b$ .

$$\text{La curvatura } \phi = \frac{0.003}{c} = \frac{0.003}{0.2942} = 1.0197 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$$

$$\text{Luego: } \varepsilon_s = \phi (d - c) = 1.0197 \cdot 10^{-2} (0.94 - 0.2942) = 0.00659 > 0.005 \quad \checkmark$$

$$N_n = T + C_{ala} + C_{alma} \rightarrow T = -0.20 + 1.5938 + 5.4188 \cdot 0.2942 = 2.988 \text{ MN}$$

$$\varepsilon_s = 0.00659 \rightarrow f_s = 420 \text{ MPa}$$

Finalmente la armadura traccionada resulta:

$$A_s = \frac{T}{f_s} = \frac{2.988}{420} 10000 = 71.14 \text{ cm}^2 \rightarrow 15 \phi 25$$

- Utilizando las tablas de ayuda para el dimensionamiento:

$$\begin{aligned} M_{n_f} &= C_{ala} \left( d - \frac{h_f}{2} \right) = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \\ &= 0.85 \cdot 25 \cdot 0.15 (0.80 - 0.30) (0.94 - 0.15/2) = 1.379 \text{ MNm} \end{aligned}$$

$$M_{n_w} = M_{e_n} - M_{n_f} = 2.678 - 1.379 = 1.299 \text{ MNm}$$

- Con tabla FLEXION 3 para:  $f'_c = 25 \text{ MPa} \rightarrow \beta_1 = 0.85, f_y = 420 \text{ MPa}$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{n_w}}{b_w}}} = \frac{0.94}{\sqrt{\frac{1.299}{0.30}}} = 0.452 \rightarrow k_e = 27.408, \varepsilon_s = 0.0067 > 0.005 \checkmark$$

$$A_s = k_e \frac{M_{n_w}}{d} + \frac{M_{n_f}}{(d - \frac{h_f}{2}) f_s} + \frac{N_n}{f_s}$$

$$= 27.408 \frac{1.299}{0.94} + \frac{1.379}{(0.94 - \frac{0.15}{2}) 420} 10^4 - \frac{0.20}{420} 10^4 = 71.07 \text{ cm}^2 \quad \checkmark$$

- Con tabla de momentos adimensionales

$$m_{n_w} = \frac{M_{n_w}}{b_w d^2 f_c'} = \frac{1.299}{0.30 0.94^2 25} = 0.1960 \rightarrow \text{tabla adimensional} \rightarrow$$

$$k_c = 0.3129 < 0.375 \checkmark, \varepsilon_s = 0.0066 > 0.005 \checkmark, k_z = 0.867$$

$$z = k_z d = 0.867 \cdot 0.94 = 0.815$$

$$A_s = \frac{M_{n_w}}{z f_s} + \frac{M_{n_f}}{(d - \frac{h_f}{2}) f_s} + \frac{N_n}{f_s}$$

$$= (\frac{1.299}{0.815 \cdot 420} + \frac{1.379}{(0.94 - \frac{0.15}{2}) 420} - \frac{0.20}{420}) 10^4 = 71.14 \text{ cm}^2 \quad \checkmark$$

- Utilizando el concepto de sección rectangular de ancho equivalente, y tablas de ayuda para el dimensionamiento FLEXIÓN, se obtiene:

Se elige:  $k_c = 0.35 \rightarrow$

$$\chi_b = \frac{h_f}{d} \frac{1}{\beta_1 k_c} (1 - \frac{b_w}{b}) + \frac{b_w}{b} = \frac{0.15}{0.94} \frac{1}{0.85, 0.35} (1 - \frac{0.30}{0.80}) + \frac{0.30}{0.80} = 0.71$$

$$b_i = \chi_b b = 0.71 \cdot 0.80 = 0.568 \text{ m}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b}}} = \frac{0.94}{\sqrt{\frac{2.678}{0.568}}} = 0.433 \rightarrow k_e = 0.347 \cong 0.35 \text{ elegido} \checkmark$$

$$k_e = 27.929$$

$$A_s = k_e \frac{M_n}{d} + \frac{N_n}{f_s} 10000 = 27.929 \frac{2.678}{0.94} - \frac{0.20}{420} 10000 = 74.81 \text{ cm}^2 \checkmark$$

Resulta un valor 5% mayor que el calculado con las ecuaciones exactas. Se debe a la aproximación en la posición de la resultante de compresión, pero del lado de la seguridad.

#### 4.8. ARMADURA MÍNIMA EN ELEMENTOS SOLICITADOS A FLEXIÓN

Si la resistencia a flexión de la sección fisurada es menor que el momento que produce el agrietamiento de la sección no fisurada (cuando todavía el hormigón colabora a tracción), la viga falla inmediatamente de producida la fisura y sin ningún aviso previo.

Para protegerse de este tipo de falla se establece un límite inferior para la armadura, igualando el momento de fisuración calculado a partir del módulo de rotura del hormigón, ver 2.1.4.1.b), con la resistencia de la sección fisurada.

Sección rectangular:

$$\left. \begin{array}{l} M = f_r W = 0.7 \sqrt{f'_c} \frac{b}{6} h^2 \\ M = T z = A_{s \min} f_y 0.95 d \end{array} \right\} \longrightarrow A_{s \min} = \frac{\sqrt{f'_c}}{6.73 f_y} b d \quad (4.66)$$

con  $h/d = 1.1$

Viga T de dimensión típicas, con el ala comprimida:

$$A_{s \min} = \frac{\sqrt{f'_c}}{4.49 f_y} b_w d \quad (4.67)$$

Viga T con ala traccionada:

$$A_{s \min} = \frac{\sqrt{f'_c}}{1.95 f_y} b_w d \quad (4.68)$$

El reglamento CIRSOC 201 prescribe como armadura mínima

$$A_{s \min} = \frac{\sqrt{f'_c}}{4 f_y} b_w d \geq \frac{1.40}{f_y} b_w d \quad (4.69)$$

que resulta aproximada a (4.67). Para vigas rectangulares  $b_w$  se reemplaza por  $b$  y la sección mínima resulta del lado de la seguridad. También especifica que para vigas T con ala traccionada se debe reemplazar  $b_w$  por  $2 b_w$  es decir que resulta casi idéntico a (4.68).

La ec.(4.69) no necesita ser aplicada si la armadura colocada es al menos un tercio mayor que la requerida por el análisis.

Para losas no es necesario aplicar (4.69), ver CIRSOC 201, 10.5.4. La armadura mínima en la dirección de la flexión es la especificada para retracción y temperatura, ver CIRSOC 201, 7.12, y se indicará en el Cap.11.

## 4.9. TABLAS

FLEXION 3.
 $M_i = M_{n,w} + M_{n,f}$  (En viga rectangular  $M_{n,f}$  es igual a cero)

Hormigón:	$f_c = 20 \text{ MPa}$
	$f_s = 25 \text{ MPa}$
	$f_s' = 30 \text{ MPa}$
Acero:	$f_y = 420 \text{ MPa}$

Diagrama de la sección:

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{M_{n,f}}}}$$

$$k_e = k_d \cdot \frac{M_{n,w}}{d} + \frac{M_{n,f}}{f_y \cdot \left( d - \frac{h_f}{2} \right)} \cdot 10000$$

$$\text{cm}^2 = \frac{\text{cm}^2}{\text{MN}} \cdot \frac{\text{MN.m}}{\text{m}} + \frac{\text{MN.m}}{\text{MPa.m}} \cdot 10000$$

Ver Nota.

Nota: En el caso que sea Viga Placa, si la altura $a$ supera la altura del ala $h_f$ de dicha viga, se determinará un nuevo $M_{n,w}$ pero utilizando el momento nominal $M_{n,f}$ y el ancho $b_w$ , ambos correspondientes al alma de la viga.
$M_n = M_{n,w} + M_{n,f}$
$M_{n,f} = 0,95 \cdot f'_s \cdot h_f \cdot (b - b_w) \cdot \left( d - \frac{h_f}{2} \right)$

$\beta_1$	H20		H25		H30		$f_y (\text{MPa}=\text{MN/m}^2)$	$E_s (\text{MPa}=\text{MN/m}^2)$	420 200000
	$k_d$	$\text{MPa} = \text{MN/m}^2$	$k_d$	$\text{MPa} = \text{MN/m}^2$	$k_d$	$\text{MPa} = \text{MN/m}^2$			
0,218	1,089	0,994	24,301	3,00	60,00	0,048	0,980		
0,890	0,796	0,727	24,766	3,00	30,00	0,091	0,961		
0,749	0,670	0,612	25,207	3,00	20,00	0,130	0,945		
0,668	0,598	0,546	25,625	3,00	15,00	0,167	0,929		
0,615	0,550	0,502	26,021	3,00	12,00	0,200	0,915		
0,577	0,516	0,471	26,399	3,00	10,00	0,231	0,902		
0,548	0,490	0,447	26,758	3,00	8,57	0,259	0,890		
0,525	0,470	0,429	27,100	3,00	7,50	0,286	0,879		
0,507	0,453	0,414	27,427	3,00	6,67	0,310	0,868		
0,492	0,440	0,402	27,739	3,00	6,00	0,333	0,858		
0,479	0,429	0,391	28,038	3,00	5,45	0,355	0,849		
0,469	0,419	0,363	28,324	3,00	5,00	0,375	0,841		

Continuación de Tabla FLEXION 3.

Tablas de cálculo para secciones con zona comprimida rectangular con armadura compuesta.

Hormigón:	$f'_c = 20 \text{ MPa}$
	$f'_c = 25 \text{ MPa}$
	$f'_c = 30 \text{ MPa}$
	$f'_c = 420 \text{ MPa}$
Acaro:	

$M_h = M_{w_1} + M_{w_2}$  (En viga rectangular  $M_h$  es igual a cero)

$$[k_d] = \frac{\frac{d}{Mn}}{1 - \frac{d}{Mn}}$$

$$A_s = k_e \cdot \frac{M_{nw}}{d} + \frac{M_{nf}}{f} \cdot \left( d - h_f \right) \cdot 10\,000$$

$$\text{cm}^2 = \frac{\text{mN}}{\text{MN}} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} + \frac{\text{MNm}}{\text{MPa} \cdot \text{m}} \cdot 10.000 \quad \text{cm}^2 = \frac{\text{cm}^2}{\frac{\text{mN}}{\text{MN}}} \cdot \frac{\text{MNm}}{\text{m}}$$

$f_y = 420 \text{ MPa}$

$\zeta = d'/d$										0.22			
0.07		0.08		0.10		0.12		0.14		0.16		0.20	
$k_x/k_z$	$k_y$	$k_x$	$k_y$										
0.00	0.000	28.324	0.000	28.324	0.000	28.324	0.000	28.324	0.000	28.324	0.000	28.324	0.000
0.05	2.654	28.358	2.654	28.036	2.679	28.141	2.716	28.230	3.015	28.261	3.374	25.326	3.311
0.10	4.554	27.500	4.917	27.859	5.026	27.989	5.202	28.053	5.675	28.192	6.575	26.322	7.427
0.15	7.164	27.558	7.182	27.845	7.341	27.805	7.728	27.972	8.552	28.147	9.003	25.329	10.547
0.20	9.217	27.344	9.317	27.444	9.524	27.051	10.027	27.667	11.133	28.764	12.559	26.331	14.071
0.25	11.201	27.133	11.322	27.254	11.574	27.506	12.135	27.709	13.630	28.044	15.141	26.335	17.101
0.30	13.067	26.336	12.189	27.077	13.482	27.371	14.205	27.617	15.772	27.925	17.856	26.334	19.934
0.35	14.821	25.539	13.672	26.777	14.977	27.071	15.705	27.325	17.877	27.683	19.884	26.333	22.763
0.40	16.575	24.742	14.515	27.977	15.819	28.271	16.453	28.595	18.625	28.925	20.574	26.332	24.446
0.45	18.329	23.945	15.358	28.177	16.662	28.471	17.596	28.805	19.757	29.135	21.705	26.331	26.446
0.50	20.083	23.148	16.191	28.377	17.495	28.669	18.430	29.035	20.627	29.365	22.775	26.330	27.446
0.55	21.837	22.351	17.024	28.577	18.328	28.863	19.364	29.365	21.820	29.695	24.005	26.329	28.446
0.60	23.591	21.554	17.857	28.777	19.181	29.157	20.398	29.705	23.113	30.035	25.275	26.328	29.446
0.65	25.345	20.757	18.690	28.977	19.984	29.441	21.531	30.255	24.525	30.585	26.555	26.327	30.446
0.70	27.099	19.960	19.523	29.177	20.790	29.709	22.671	30.585	25.917	31.115	28.835	26.326	31.446
0.75	28.853	19.163	20.386	29.377	21.593	29.942	23.753	31.415	27.317	32.045	30.115	26.325	32.446
0.80	30.607	18.366	21.249	29.577	22.799	30.506	24.864	32.255	28.217	32.915	31.385	26.324	33.446
0.85	32.361	17.569	22.112	29.777	23.932	31.271	25.975	33.115	29.277	33.885	32.755	26.323	34.446
0.90	34.115	16.772	23.975	29.977	25.085	32.034	27.086	34.015	30.337	34.855	33.625	26.322	35.446
0.95	35.869	15.975	24.838	30.177	26.238	32.797	28.197	34.915	31.457	35.815	34.495	26.321	36.446
1.00	37.623	15.178	25.701	30.377	27.391	33.560	29.308	35.815	32.997	36.775	35.365	26.320	37.446



Continuación de Tabla FLEXION 6.

Tablas de cálculo para secciones con zona comprimida rectangular con armadura comprimida.

Hormigón:	$f_c = 35 \text{ MPa}$
	$f_c' = 40 \text{ MPa}$
	$f_c' = 50 \text{ MPa}$
Acero:	$f_y = 420 \text{ MPa}$

$$M_n = M_{n_w} + M_{n_f} \quad (\text{En viga rectangular } M_{n_t} \text{ es igual a cero})$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b}}} \quad [k_d] = \frac{m}{\sqrt{\frac{MNm}{m}}}$$

$$A_s = k_e \cdot \frac{M_{n_w}}{d} + \frac{M_{n_f}}{f_y \cdot \left( d - \frac{h_f}{2} \right)} \cdot 10.000$$

$$\text{cm}^2 = \frac{\text{cm}^2}{\text{MN}} \cdot \frac{\text{MNm}}{\text{m}} + \frac{\text{MNm}}{\text{MPa} \cdot \text{m}} \cdot 10.000 \quad \text{cm}^2 = \frac{\text{cm}^2}{\text{MN}} \cdot \frac{\text{MNm}}{\text{m}}$$

**H35 - H40 - H50**       $f_y = 420 \text{ MPa}$

$k_e/k_e'$	$\delta = d/16$										$\delta = d/22$									
	0.07	0.09	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.07	0.09	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	
0.00	$k_e$ cm <sup>2</sup> /MN	$k_e'$ cm <sup>2</sup> /MN	$k_e$ cm <sup>2</sup> /MN	$k_e$ cm <sup>2</sup> /MN	$k_e'$ cm <sup>2</sup> /MN	$k_e$ cm <sup>2</sup> /MN														
4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	3.76	3.76	3.44	3.44	3.44	3.44	3.44	3.44	3.44	3.44	
1.00	0.000	28.073	0.000	28.073	0.000	28.073	0.000	28.073	0.000	26.073	0.000	26.073	0.000	26.073	0.000	26.073	0.000	26.073	0.000	
0.85	2.493	27.832	2.523	27.859	2.579	27.915	2.716	27.974	3.015	28.035	3.374	26.100	3.811	25.167	4.353	24.236	5.040	23.312		
0.80	4.264	27.604	4.017	27.656	5.026	27.706	5.202	27.760	5.505	27.929	6.575	28.125	7.427	28.266	9.482	28.394	9.822	28.539		
0.75	7.194	27.387	7.182	27.485	7.341	27.624	7.729	27.791	8.682	27.982	9.633	26.148	10.547	28.340	13.398	22.542	14.346	23.754		
0.70	9.217	27.183	9.317	27.284	9.524	27.491	10.027	27.707	11.133	27.824	12.456	26.171	14.071	26.420	16.671	23.681	15.610	28.266		
0.65	11.201	26.922	11.322	27.114	11.574	27.305	12.185	27.526	13.530	27.524	15.141	26.192	17.101	22.494	19.531	23.612	22.617	22.146		
0.70	13.057	26.613	13.106	26.855	13.492	27.246	14.205	27.555	15.772	27.875	17.850	26.212	19.834	26.604	22.759	26.034	26.395	29.324		

Continuación de Tabla FLEXION 6.

Tablas de cálculo para secciones con zona comprimida rectangular con armadura comprimida.

H35 - H40 - H50		$f_y = 420 \text{ MPa}$		$\frac{k}{k_a} = 1.00$										$\frac{k}{k_a} = 0.22$									
				0.08		0.10		0.12		0.14		0.16		0.18		0.20		0.22					
$k_a/k_e$	$k_w$	$k'_w$	$k_e$	$k'_e$	$k_u$	$k'_u$	$k_a$	$k'_a$	$k_u$	$k'_u$	$k_a$	$k'_a$	$k_u$	$k'_u$	$k_a$	$k'_a$	$k_u$	$k'_u$					
dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$					
	420,00		420,00		420,00		420,00		420,00		376,00		344,00		312,00		280,00		248,00				
1.00	0.000	27.827	0.000	27.827	0.000	27.827	0.000	27.827	0.000	27.827	0.000	27.827	0.000	27.827	0.000	27.827	0.000	27.827	0.000				
0.95	2.428	27.810	2.523	27.837	2.570	27.883	2.716	27.752	3.015	27.813	3.374	27.878	3.811	27.945	4.353	28.016	5.040	28.020					
0.90	4.264	27.424	4.817	27.457	5.026	27.586	5.292	27.881	6.678	27.905	8.575	27.925	11.427	28.057	28.422	28.195	6.522	28.340					
0.85	7.124	27.210	7.182	27.287	7.341	27.446	7.720	27.613	8.592	27.782	9.503	27.871	10.647	28.183	12.359	28.364	14.346	28.578					
0.80	9.217	27.026	9.317	27.126	9.524	27.333	10.027	27.580	11.133	27.778	12.455	26.013	14.071	26.262	16.071	26.524	16.810	28.798					
0.75	11.201	26.853	11.522	26.675	11.574	27.227	12.125	27.493	13.530	27.765	15.441	28.054	17.101	28.356	19.531	28.674	22.617	28.927					
0.70	13.057	26.622	13.192	26.834	13.492	27.127	14.203	27.434	15.772	27.755	17.655	28.061	19.824	28.444	22.728	28.814	26.355	29.203					

				$\frac{k}{k_a} = 1.00$										$\frac{k}{k_a} = 0.22$									
				0.08		0.10		0.12		0.14		0.16		0.18		0.20		0.22					
$k_a/k_e$	$k_w$	$k'_w$	$k_e$	$k'_e$	$k_u$	$k'_u$	$k_a$	$k'_a$	$k_u$	$k'_u$	$k_a$	$k'_a$	$k_u$	$k'_u$	$k_a$	$k'_a$	$k_u$	$k'_u$					
dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$	dim. $\text{mm}$						
	420,00		420,00		420,00		420,00		376,00		344,00		312,00		280,00		248,00						
1.00	0.020	27.348	0.000	27.348	0.000	27.368	0.000	27.546	0.000	27.348	0.000	27.348	0.000	27.348	0.000	27.348	0.000	27.348	0.000	27.348	0.000	27.348	
0.95	2.428	27.177	2.623	27.205	2.670	27.291	2.716	27.319	3.015	27.385	3.374	27.445	3.811	27.512	4.253	27.583	5.040	27.657					
0.90	4.254	27.018	4.917	27.069	5.026	27.178	5.292	27.292	5.572	27.412	6.575	27.537	7.427	27.668	8.482	27.746	9.522	27.851					
0.85	7.104	26.823	7.182	26.940	7.341	27.100	7.736	27.265	8.652	27.441	9.803	27.624	10.547	27.816	12.223	28.016	14.346	28.229					
0.80	9.217	26.718	9.317	26.819	9.524	27.036	10.027	27.243	11.133	27.422	12.455	27.707	14.037	27.935	16.071	28.217	16.610	28.451					
0.75	11.201	26.554	11.322	26.706	11.574	26.957	12.185	27.220	13.580	27.495	15.141	27.784	17.101	28.086	18.531	28.404	22.617	28.736					
0.70	13.057	26.457	13.192	26.599	13.452	26.882	14.205	27.182	15.772	27.520	17.050	27.850	18.854	28.209	22.758	28.579	26.356	28.858					

**DISEÑO POR RESISTENCIA DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO  
SOLICITADAS A FLEXIÓN Y FLEXIÓN COMPUESTA**

Tabla de momentos adimensionales

m <sub>n</sub>	<= H-30 ( β₁ = 0.850 )		H-35 ( β₁ = 0.814 )		H-40 ( β₁ = 0.779 )		H-45 ( β₁ = 0.743 )		H-50 ( β₁ = 0.707 )		H-60 ( β₁ = 0.650 )		k <sub>z</sub>
	k <sub>c</sub>	ε <sub>s</sub>	k <sub>c</sub>	ε <sub>s</sub>	k <sub>c</sub>	ε <sub>s</sub>	k <sub>c</sub>	ε <sub>s</sub>	k <sub>c</sub>	ε <sub>s</sub>	k <sub>c</sub>	ε <sub>s</sub>	
0.02	0.028	104.08	0.029	99.55	0.031	95.14	0.032	90.60	0.034	86.07	0.037	78.89	0.988
0.03	0.042	67.95	0.044	64.95	0.046	62.03	0.048	59.02	0.051	56.02	0.055	51.26	0.982
0.04	0.057	49.88	0.059	47.64	0.062	45.46	0.065	43.22	0.068	40.98	0.074	37.44	0.976
0.05	0.071	39.04	0.075	37.25	0.078	35.52	0.082	33.74	0.086	31.96	0.093	29.14	0.970
0.06	0.086	31.80	0.090	30.33	0.094	28.89	0.099	27.42	0.104	25.95	0.113	23.61	0.963
0.07	0.101	26.63	0.106	25.38	0.110	24.16	0.116	22.90	0.122	21.65	0.132	19.66	0.957
0.08	0.116	22.75	0.122	21.66	0.127	20.60	0.133	19.51	0.140	18.42	0.152	16.69	0.950
0.09	0.132	19.73	0.138	18.77	0.144	17.83	0.151	16.87	0.159	15.91	0.173	14.38	0.944
0.10	0.148	17.31	0.154	16.45	0.161	15.62	0.169	14.76	0.178	13.90	0.193	12.53	0.937
0.11	0.164	15.33	0.171	14.56	0.179	13.80	0.187	13.03	0.197	12.25	0.214	11.02	0.930
0.12	0.180	13.68	0.188	12.98	0.196	12.29	0.206	11.58	0.216	10.88	0.235	9.76	0.924
0.13	0.196	12.28	0.205	11.63	0.214	11.01	0.225	10.36	0.236	9.71	0.257	8.69	0.917
0.14	0.213	11.08	0.222	10.48	0.232	9.90	0.244	9.31	0.256	8.71	0.279	7.77	0.909
0.15	0.230	10.04	0.240	9.48	0.251	8.95	0.263	8.40	0.277	7.84	0.301	6.97	0.902
0.16	0.247	9.12	0.258	8.61	0.270	8.11	0.283	7.60	0.298	7.08	0.324	6.27	0.895
0.17	0.265	8.31	0.277	7.83	0.289	7.37	0.303	6.89	0.319	6.41	0.347	5.65	0.887
0.18	0.283	7.59	0.296	7.14	0.309	6.71	0.324	6.26	0.341	5.81	0.370	5.10	0.880
0.19	0.302	6.95	0.315	6.52	0.329	6.11	0.345	5.69	0.363	5.27	0.394	4.61	0.872
0.20	0.320	6.36	0.335	5.96	0.350	5.58	0.367	5.18	0.385	4.79			0.864
0.21	0.340	5.83	0.355	5.46	0.371	5.09	0.389	4.72					0.856
0.22	0.359	5.35	0.375	4.99	0.392	4.65							0.847
0.23	0.380	4.90											0.839
k <sub>z</sub> *	0.841		0.847		0.854		0.861		0.867		0.878		

Los coeficientes de la tabla tienen las siguientes expresiones:

$$k_c = \frac{1}{\beta_1} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{m_n}{0.425}} \right), \quad \varepsilon_s = \frac{3(1-k_c)}{k_c} \%,$$

$$k_z = 0.5 + 0.5 \sqrt{1 - \frac{m_n}{0.425}}, \quad k_z^* = 1 - \beta_1 \cdot 0.1875$$

## CAPÍTULO 5

### DISEÑO POR RESISTENCIA A ESFUERZOS DE CORTE VIGAS

#### 5.1. INTRODUCCIÓN

Un elemento de hormigón armado solicitado por acciones externas, como el caso típico de vigas, además de los esfuerzos internos axiales y flexión, también está solicitado por esfuerzo de corte  $V = dM / dx$ , cuyo efecto se debe analizar.

La combinación de tensiones de corte con tensiones normales, producidas por  $M$  y  $N$ , configuran un estado biaxial de tensiones con tensiones principales de tracción y compresión oblicuas. Estas tensiones de tracción son las que pueden producir una falla frágil debido a la baja resistencia del hormigón en tracción. Para mejorar esta situación es que se colocan armaduras de corte o armadura transversal, cuyo diseño se tratará en este capítulo.

Es importante considerar que *el diseño por corte no está, en general, referido directamente a las tensiones tangenciales sino a las tensiones de tracción diagonal*. No obstante hay casos especiales en que el diseño sí se realiza sobre las tensiones de corte directamente, tema analizado en el apartado corte por fricción.

La fig.5.1 ilustra el cuadro de fisuración de la mitad de una viga placa que está simplemente apoyada con dos cargas concentradas en los tercios de la luz.



Figura 5.1: Fisuración y rotura de una viga placa con armadura de corte

Observar las fisuras verticales por flexión en la zona central y las fisuras inclinadas por combinación de flexión y corte en la zona cercana al apoyo.

## 5.2. COMPORTAMIENTO DE VIGAS ELÁSTICAS (Estado I)

Se analiza una sección de hormigón armado de una viga sin fisurar, solicitada por los esfuerzos internos  $N, M, V$ , ver fig.5.2.

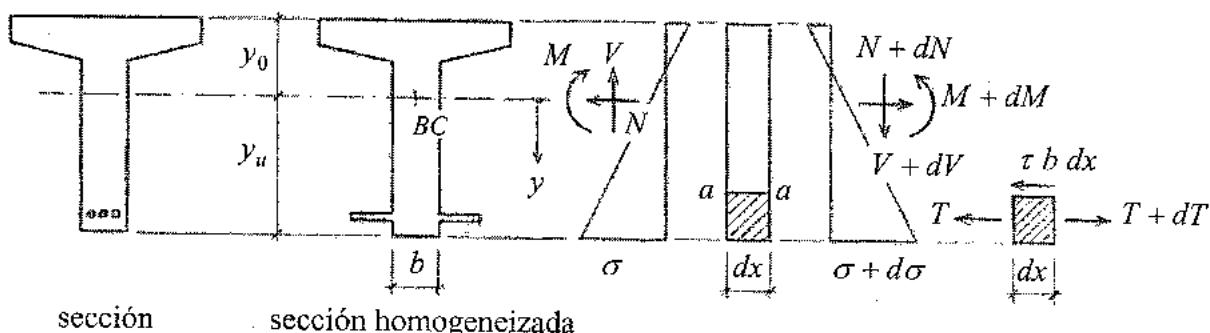


Figura 5.2: Equilibrio de una tajada y de un sector de la misma

Por equilibrio de la tajada resulta:

$$V \, dx = dM \quad (5.1)$$

Por equilibrio del sector hasta  $a-a$  es:

$$dT = \tau \, b \, dx \quad (5.2)$$

Aceptando la relación lineal entre tensiones y deformaciones, más la ecuación de compatibilidad de las secciones planas se obtiene:

$$\sigma(y) = \frac{N}{A_h} + \frac{M}{J_h} y \quad (5.3)$$

Luego:

$$T = \frac{N}{A_h} \int_{y_a}^{y_u} b(y) \, dy + \frac{M}{J_h} \int_{y_a}^{y_u} y \, b(y) \, dy = \frac{N}{A_h} A_a + \frac{M}{J_h} S_a \quad (5.4)$$

donde  $A_a$  es el área de la sección hasta  $a-a$  y  $S_a$  el correspondiente momento estático con respecto al eje baricéntrico.

Reemplazando en (5.2) se obtiene:

$$\tau = \frac{1}{b} \frac{d}{dx} \left( \frac{N}{A_h} A_a + \frac{M}{J_h} S_a \right) \quad (5.5)$$

En los casos generales  $N$  es constante a lo largo de la viga, y entonces se llega a la conocida fórmula de Colignon para las tensiones tangenciales:

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{S}{b J} = \frac{V S}{b J} \quad (5.6)$$

A veces es conveniente trabajar con el esfuerzo tangencial por unidad de longitud

$$t = \tau b = \frac{V S}{J} \quad (5.7)$$

En la fig.5.3 se representa la variación de  $\tau$  en la altura de la sección.

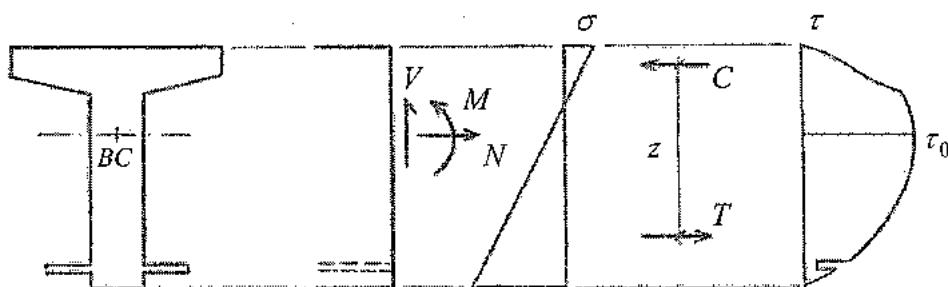


Figura 5.3: Distribución de tensiones normales y tangenciales

La tensión tangencial a la altura del eje baricéntrico se designa con  $\tau_0$  y recordando que  $J/S_0 = z$  brazo de palanca interno, se obtiene:

$$\tau_0 = \frac{V}{b_0 z} \quad (5.8)$$

Para un elemento diferencial con tensiones normales y tangenciales, es posible hallar direcciones en las cuales se anulan las tensiones tangenciales y las tensiones normales alcanzan sus valores máximos y mínimos, ver fig.5.4.

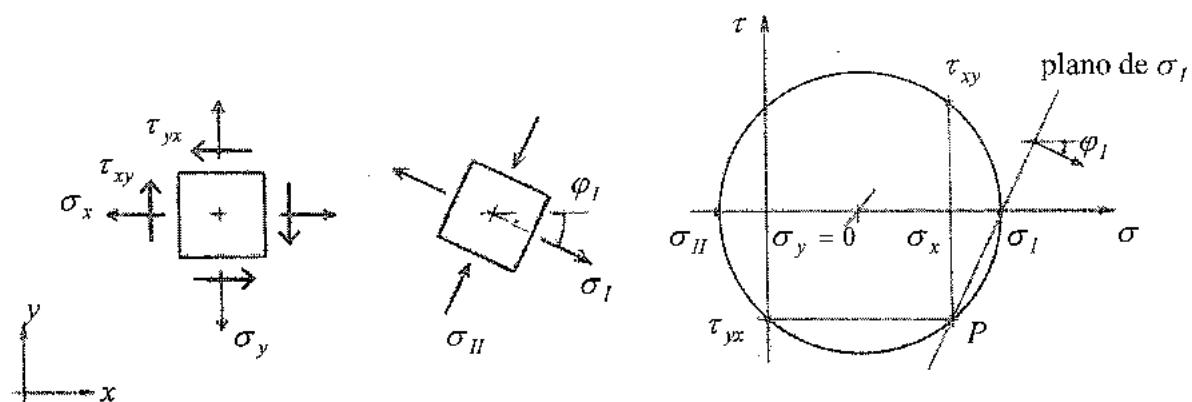


Figura 5.4: Tensiones principales

Resulta:

$$\sigma_{I,H} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \operatorname{tg} 2\varphi_I = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5.9)$$

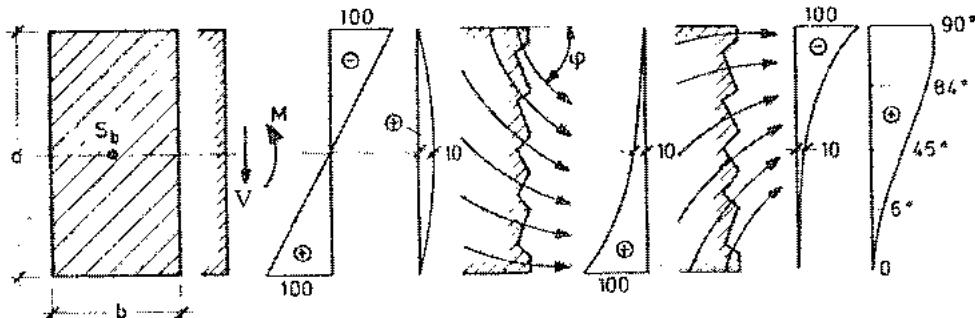
siendo por Cauchy  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Para el caso de vigas en general  $\sigma_y = 0$ , entonces:

$$\sigma_{I,H} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + 4\tau^2} \quad \operatorname{tg} 2\varphi_I = \frac{2\tau}{\sigma_x} \quad (5.10)$$

En el eje neutro  $\sigma_x = 0$ ,  $\operatorname{tg} 2\varphi_I = \infty \rightarrow 2\varphi_I = 90^\circ \rightarrow \varphi_I = 45^\circ$

Para otras posiciones, el ángulo de inclinación de las tensiones principales va cambiando como se muestra en la fig.5.5. Se observa la influencia del esfuerzo de corte en la dirección de  $\sigma_I$ , es decir su influencia en la dirección de las primeras fisuras que aparecerán cuando  $\sigma_I$  alcance la resistencia a tracción del hormigón.



**Figura 5.5:** Tensiones principales  $\sigma_I, \sigma_H$  y sus direcciones  $\varphi$ , en una sección rectangular

Una probable fisura comenzaría verticalmente en la fibra inferior,  $\varphi_I = 0^\circ$ , y a medida que se profundiza en la viga variaría de inclinación como se observa en la fig.5.1.

### 5.3. COMPORTAMIENTO DE VIGAS FISURADAS (Estado II)

El análisis del estado de tensiones en el Estado II no se puede realizar sobre una sección determinada, sino que, debido al estado de fisuración oblicua de la pieza, se debe recurrir a un estudio integral del elemento estructural.

Para ello es necesario información experimental sobre los modos de rotura de dichos elementos. Se analizará en este Capítulo el caso de vigas esbeltas (la luz es varias veces su altura).

### 5.3.1. Clases de rotura posibles en una viga esbelta

En la fig.5.6 se representan todas las clases de rotura que se pueden presentar en una viga esbelta solicitada por dos cargas concentradas. El momento flector es constante en la parte central y varía linealmente hasta anularse en los apoyos. El corte es constante en los tramos extremos y nulos en el sector central. El peso propio se considera despreciable.

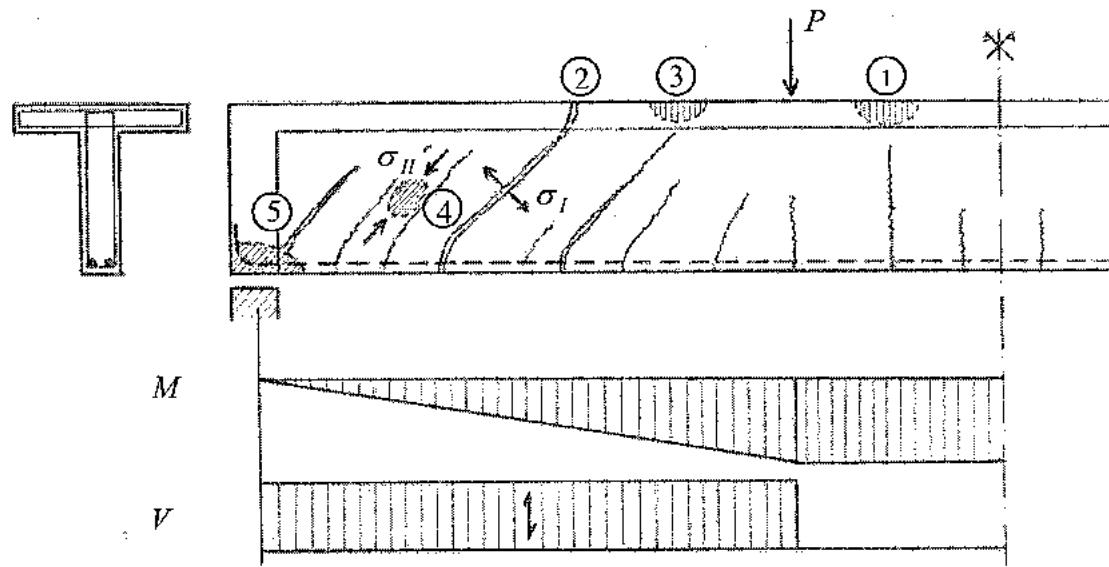
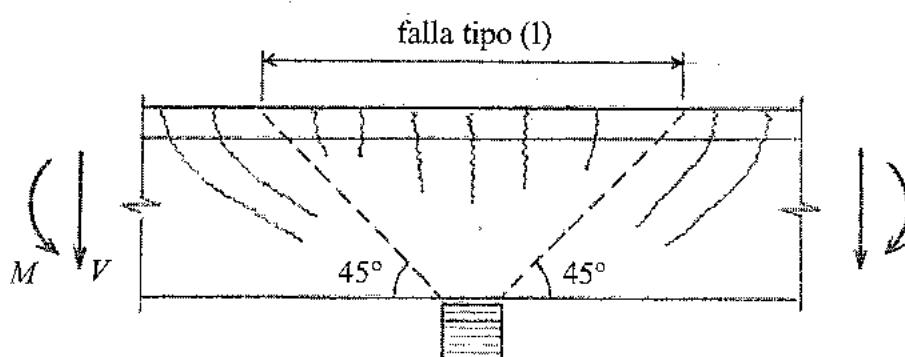


Figura 5.6: Clases de rotura en una viga esbelta

- 1) *Rotura por flexión pura*: en vigas armadas normalmente, la rotura se inicia al alcanzarse el límite de elasticidad del acero; hay gran deformación del acero, la fisura vertical crece, se reduce la zona comprimida que da lugar a la rotura por compresión del hormigón (estallido del hormigón). Cuando la armadura es muy grande, esto se produce antes de llegar al límite de elasticidad del acero.
- 2) *Rotura por tracción por esfuerzo de corte*: la tensión principal  $\sigma_I$ , inicia una fisura oblicua. Si la armadura transversal es escasa o nula, la pequeña zona comprimida superior no es capaz de resistir por si misma, la fisura la atraviesa y las dos partes se separan. Para evitar este tipo de rotura es necesario "coser" la fisura probable con adecuada armadura transversal.
- 3) *Rotura por compresión por esfuerzo de corte*: si la rotura tipo (2) no puede producirse porque se ha colocado la armadura de costura necesaria, pero si esta armadura se ha deformado considerablemente, incluso por encima de su límite de fluencia, la fisura oblicua penetra profundamente en la sección reduciendo la zona comprimida superior. Donde coexisten elevados valores de  $V$  y  $M$ , la rotura puede producirse por compresión del hormigón (estallido del hormigón) en forma prematura con respecto a la zona de momento máximo. Para evitar este tipo de rotura es necesario impedir la excesiva abertura de la fisura oblicua, para lo cual la armadura transversal se debe dimensionar adecuadamente.
- 4) *Rotura por compresión en el alma*: con almas muy delgadas en vigas T, I, las tensiones principales de compresión  $\sigma_{II}$ , en las bielas que quedan formadas entre fisuras, pueden provocar el estallido del alma por compresión. Para evitar este tipo de rotura frágil es necesario dimensionar adecuadamente el ancho del alma para reducir la tensión  $\sigma_{II}$ .

5) *Rotura en el apoyo:* la fuerza de tracción en la armadura longitudinal es máxima en la parte central y mínima en los apoyos. La disminución gradual de esta fuerza se produce por transferencia de esfuerzos al hormigón a través de las tensiones de adherencia, ver 2.3.2. Si estas tensiones de adherencia no pueden desarrollarse adecuadamente debido a la fisuración, las barras llegan al apoyo con una fuerza mucho mayor que la prevista en el diseño del anclaje extremo, pudiéndose producir la rotura de esta zona. Se disloca el bloque de apoyo desvinculándose la armadura traccionada de la última biela comprimida. Este tipo de rotura se soluciona con una adecuada armadura transversal que mejore las condiciones de adherencia y un cuidadoso detalle de la armadura en el apoyo.

Para vigas continuas, en las zonas de apoyo coexisten grandes momentos con grandes esfuerzos de corte por lo que pueden producirse los casos de rotura (2), (3) y (4). Sobre el apoyo propiamente dicho, ver fig.5.7, se comprueba que el esfuerzo de corte no influye notablemente y la rotura a esperar es tipo (1).



**Figura 5.7:** Rotura tipo (1) sobre apoyos de vigas continuas

### 5.3.2. Valor de cálculo de la tensión tangencial

Los métodos de cálculo están basados en modelos físicos que tienen comprobación en ensayos de laboratorio. Para que estos resultados experimentales puedan extrapolarse a la práctica corriente del cálculo del hormigón armado, hace falta definir un parámetro de comparación que establezca el campo de validez donde la teoría desarrollada esté avalada por los resultados de ensayos.

El parámetro utilizado es el llamado "*valor de cálculo de la tensión tangencial en Estado II*" o simplemente "*tensión tangencial*", y se calcula con:

$$\tau_v = \frac{V}{b d} \quad (5.11)$$

La distribución exacta de las tensiones tangenciales sobre la altura de la sección no se conoce, y no puede calcularse con la ec.(5.6) porque esa ecuación no tiene en cuenta la influencia de la armadura y porque el hormigón, en Estado II, no se comporta como material elástico homogéneo.

El valor calculado a partir de (5.11) debe tomarse sólo como una medida de la intensidad promedio de los esfuerzos cortantes en la sección. El valor máximo, que ocurre en el eje neutro, excederá este promedio en una cantidad desconocida pero moderada.

## 5.4. VIGAS SIN ARMADURAS DE CORTE

### 5.4.1. Evidencias experimentales

De acuerdo a la configuración, las condiciones de apoyo y distribución de la carga, una sección de una viga puede tener un momento flector grande combinado con un esfuerzo de corte pequeño, o viceversa, o ambos esfuerzos grandes. Los valores relativos de  $M$  y  $V$  afectarán la magnitud y dirección de la tensión principal de tracción como se analizó en 5.2. Luego, también define el cuadro de fisuración y tipo de rotura, ver descripción en 5.3.1

Cuando en una sección el momento flector es despreciable, la tensión principal de tracción tiene una inclinación de  $45^\circ$  y de valor igual a la tensión de corte. Como no hay armadura transversal, luego de alcanzada la resistencia a tracción del hormigón, la fisuración se propaga y ocurre la falla.

Los resultados de gran cantidad de ensayos experimentales indican como tensión promedio de fisuración, aproximadamente:

$$\tau_{cr} = \frac{V_{cr}}{b d} = 0.30 \sqrt{f'_c} \quad (5.12)$$

La situación es diferente cuando ambos esfuerzos  $M$  y  $V$  son importantes. Las fisuras por flexión se presentan primero y se mantienen controladas por la armadura longitudinal. Cuando la tensión principal de tracción diagonal en la parte superior de una fisura por flexión supera la resistencia a tracción, la fisura se inclina y se propaga hacia arriba, produciéndose la rotura.

Debido a que el área no fisurada ya está reducida por la fisura de flexión, la tensión promedio (5.11), calculada con toda el área  $b.d$ , será menor que (5.12) cuando se produce la fisuración y falla por tracción diagonal. Como esa área reducida depende de la longitud no predecible de la fisura por flexión, no hay un método analítico preciso para determinar el valor de rotura y entonces se recurre a ensayos experimentales que dan como resultado conservador:

$$\tau_{cr} = \frac{V_{cr}}{b d} = 0.16 \sqrt{f'_c} \quad (5.13)$$

La comparación de (5.13) con (5.12) indica que grandes momentos flectores pueden reducir la fuerza de corte necesaria para la formación de fisuras diagonales, hasta casi la mitad del valor que si el momento fuera nulo.

Resulta así evidente que el corte necesario para el desarrollo de fisuras diagonales depende de la relación entre  $M$  y  $V$ , o más precisamente entre  $\sigma$  y  $\tau$  en la parte superior de la fisura por flexión.

Se puede expresar  $\tau = k_1 V / (bd)$  donde  $k_1$  depende de la profundidad de la fisura a flexión y  $\sigma = k_2 M / (bd^2)$ , ver (4.5), depende también de la fisuración por flexión. Luego la relación:

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{k_1}{k_2} \frac{V d}{M} \quad (5.14)$$

afectará la carga necesaria para que la fisura por flexión se convierta en fisura por corte y flexión que conduzca a la falla.

Las ecuaciones (5.12) y (5.13) corresponden a dos casos extremos: (a)  $V \neq 0, M = 0$ ; (b)  $V$  y  $M$  grandes. Para cubrir las situaciones intermedias, y nuevamente de la evaluación experimental, se llega a la siguiente expresión conservadora:

$$\tau_{cr} = \frac{V_{cr}}{b d} = 0.16 \sqrt{f'_c} + 17.2 \rho_w \frac{V d}{M} \leq 0.30 \sqrt{f'_c} \quad (5.15)$$

donde  $\rho_w = A_s / (b_w d)$  es la cuantía geométrica de la armadura por flexión. Un aumento de la cuantía  $\rho_w$  es beneficioso porque reduce las fisuras por flexión y dejan un área mayor de hormigón no fisurado disponible para resistir el corte.

Las fallas observadas corresponden al tipo (2) en vigas esbeltas, relación luz - altura mayor o igual a 8. Como no hay armadura, la falla se produce sin preaviso. Entonces es buena práctica proveer una armadura mínima de corte aunque el cálculo demuestre que no es necesario. Sólo en los casos en que el esfuerzo de corte es muy pequeño en comparación con  $\tau_{cr}$ , como en algunas losas y zapatas, se permite suprimir el refuerzo de corte.

Para vigas de mayor altura relativa, la falla tiende al tipo (3) donde, luego de la fisuración inclinada, la viga admite una carga algo mayor hasta que falla la zona comprimida superior.

#### 5.4.2. Mecanismo de resistencia – Contribución del hormigón

El mecanismo de resistencia se muestra en la fig.5.8.

Producida la fisura diagonal, no se puede transmitir fuerza de tracción en dirección normal, pero sí fuerzas  $V_i$  en el propio plano debido a la rugosidad de la superficie. También existe el efecto "pasador" o efecto "perno" de la armadura longitudinal inferior que aporta una fuerza  $V_d$ , y el corte transmitido en la zona no fisurada de hormigón  $V_{cz}$ . Entonces la fuerza interna de corte  $V_{int}$ , también llamada "*contribución del hormigón*", es:

$$V_{int} = V_{cz} + V_d + V_{iy} \quad (5.16)$$

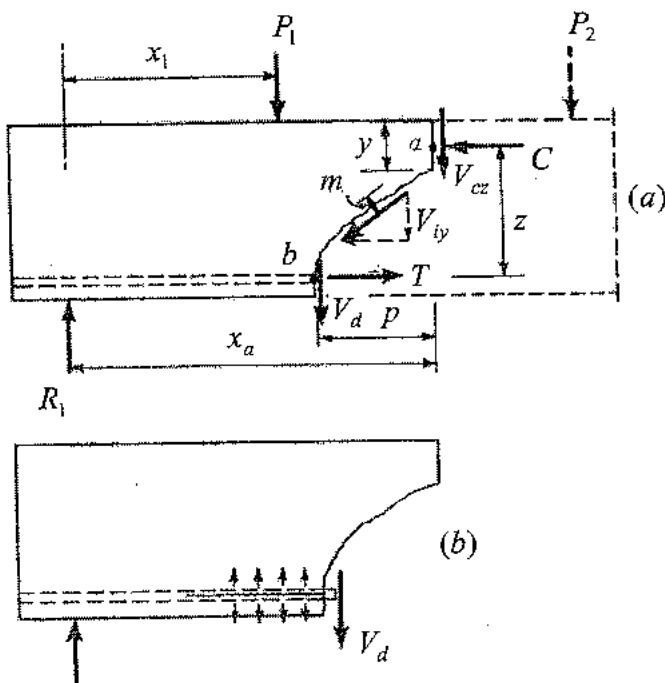
Debe estar en equilibrio con el corte externo  $V_{ext}$ :

$$V_{ext} = R_1 - P_1 \quad (5.17)$$

de donde el corte que resiste el hormigón comprimido no fisurado es:

$$V_{cz} = V_{ext} - V_d - V_{iy} \quad (5.18)$$

La acción de pasador  $V_d$  está resistida por la delgada capa inferior de recubrimiento de la armadura longitudinal, produciéndose tensiones de tracción transversal que fisuran el hormigón a lo largo de la armadura. Esto reduce la fuerza  $V_d$  y permite que la grieta diagonal se ensanche, reduciendo a su vez  $V_i$ .



**Figura 5.8:** Fuerzas en una viga fisurada sin armadura de corte

La otra condición de equilibrio se plantea tomando momentos con respecto al punto *a*, ver fig.5.8

$$\left. \begin{array}{l} M_{ext,a} = R_1 x_a - P_1 (x_a - x_1) \\ M_{int,a} = T_b z + V_d p - V_i m \end{array} \right\} \rightarrow M_{int,a} = M_{ext,a} \quad (5.19)$$

donde el esfuerzo de tracción en la armadura, en el punto *b*, resulta

$$T_b = \frac{M_{ext,a} - V_d p + V_i m}{z} \quad (5.20)$$

Se observa que el esfuerzo de tracción en la armadura en la sección *b* depende ahora del momento flector actuante en la sección *a*, hecho debido a la formación de la fisura diagonal.

Si en forma aproximada se desprecia la resistencia  $V_d$  y  $V_i$ , y teniendo en cuenta que  $M_{ext,b} < M_{ext,a}$  y que la armadura a flexión fue dimensionada para  $M_{ext,b}$ , resulta que la armadura está solicitada a una fuerza de tracción mayor que la prevista. Esta situación es considerada por el reglamento en la longitud de anclaje de la armadura de flexión.

## 5.5. VIGAS CON ARMADURAS DE CORTE

El criterio de diseño conveniente desde el punto de vista del comportamiento estructural y económico indica que la falla debe producirse por flexión antes que se alcance la resistencia al corte. La falla por corte (tracción diagonal) es frágil sin aviso previo.

Entonces, si no existe un amplio margen de seguridad con respecto a la resistencia al corte dada por (5.15), se utiliza armadura de corte para aumentar la resistencia de la viga.

### 5.5.1. Tipos de armadura de corte

Principalmente se utilizan estribos y/o barras dobladas como refuerzo de corte, presentadas en la fig.5.9.

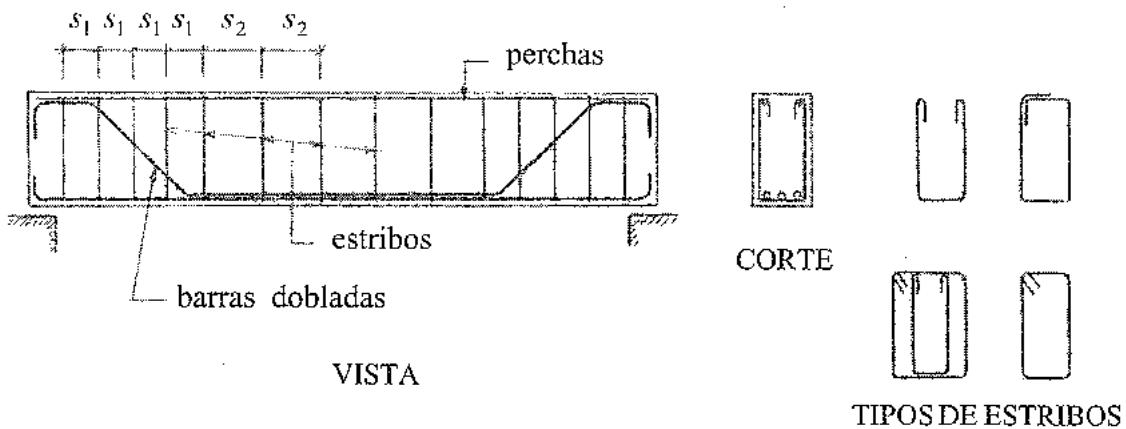


Figura 5.9: Tipos de armadura de corte

Los estribos pueden ser abiertos o cerrados, de diámetro pequeños: 6, 8 o 10 mm, con separaciones que pueden ser uniformes en toda la viga, o variable por tramos, más cercanos donde el esfuerzo de corte es mayor. Se colocan envolviendo las barras longitudinales de tracción. En caso de vigas anchas se utilizan estribos dobles (4 ramas).

Debido a su longitud relativamente corta debe cuidarse el anclaje en la zona de compresión de la viga. Para ello se usan ganchos o escuadras con formas y dimensiones adecuadas. Otro elemento que favorece el anclaje, y sirve además como soporte durante la construcción, son las "perchas", que son barras longitudinales de pequeño diámetro.

En general los estribos se colocan a  $90^\circ$  con respecto al eje de la viga, y excepcionalmente con otra inclinación  $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Las barras dobladas, usualmente a  $45^\circ$ , provienen de la armadura a flexión que ya no es necesaria en la parte inferior de la viga, colaboran al corte, y luego forman parte de la armadura superior por ejemplo sobre un apoyo de viga continua. Economizan armadura aunque tienen un mayor costo de mano de obra.

Finalmente se pueden combinar ambos casos aprovechando las ventajas de cada uno de ellos.

### 5.5.2. Influencia de la armadura de corte

La armadura de corte no tiene un efecto perceptible previo a la formación de las fisuras diagonales, demostrado por mediciones experimentales. Después que se forman las fisuras diagonales, la armadura de corte aumenta la resistencia de la viga cuatro maneras diferentes.

- Las barras que atraviesan la fisura diagonal resisten parte de la fuerza de corte, como se describe en el mecanismo de reticulado en 5.5.3.
- Restringen el crecimiento de las fisuras diagonales y reduce su penetración en la zona de compresión, dejando una mayor zona de hormigón no fisurado para resistir la acción combinada de corte y compresión como se señaló anteriormente.
- Se oponen al ensanchamiento de las fisuras diagonales, manteniendo en contacto las dos caras de la fisura. Esto produce una fuerza de interfaz  $V_i$  significativa y confiable.
- Los estribos sostienen la armadura longitudinal de flexión al resto de la sección de hormigón, restringiendo la fisuración a lo largo de dichas barras y aumentando el efecto "pasador"  $V_d$ .

La falla ahora se producirá cuando los estribos (y/o barras dobladas) entren en el periodo de fluencia. Si a la ecuación (5.16) se agrega un término que representa la colaboración de la armadura  $V_s$ , la resistencia es:

$$V_{int} = V_{cz} + V_d + V_{iy} + V_s \quad (5.20)$$

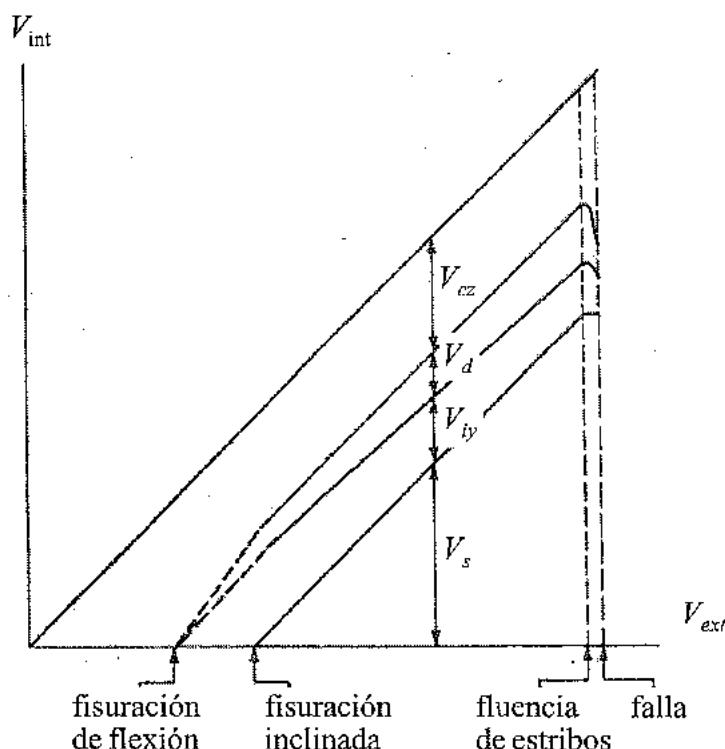


Figura 5.10: Redistribución de fuerzas internas de corte en una viga con estribos

En la fig.5.10 se representa esquemáticamente la variación de la distribución aproximada de las cuatro componentes con el aumento del esfuerzo de corte externo  $V_{ext}$ . Se observa que una vez producida la fisuración diagonal, la fuerza resistida por la armadura de corte crece en forma lineal mientras que  $V_{cz} + V_d + V_{iy}$  se mantiene constante, aunque sin conocer la variación de cada una. Por eso se llama genéricamente "*contribución del hormigón*" a:

$$V_c = V_{cz} + V_d + V_{iy} \quad (5.21)$$

y entonces la resistencia nominal al corte será la suma de la contribución del hormigón más la contribución de la armadura:

$$V_n = V_c + V_s \quad (5.22)$$

### 5.5.3. Analogía del reticulado – Contribución de la armadura

Para evaluar la resistencia aportada por la armadura se puede utilizar un modelo físico, llamado analogía del reticulado, propuesto en 1900 por Ritter y Mörsh.

Teniendo presente el esquema de fisuración de una viga esbelta, ésta se puede idealizar como un reticulado donde el cordón superior es la zona comprimida de hormigón, el cordón inferior es la armadura traccionada, las diagonales comprimidas son las franjas de hormigón limitadas por las fisuras, y las diagonales y montantes traccionados son las armaduras transversales ya sea en forma de barras dobladas o de estribos, como se muestra en la fig.5.11.

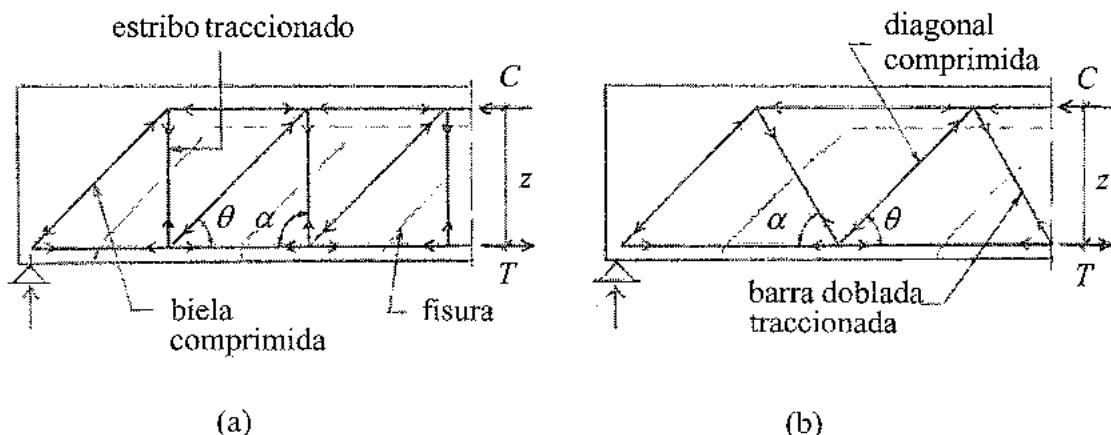


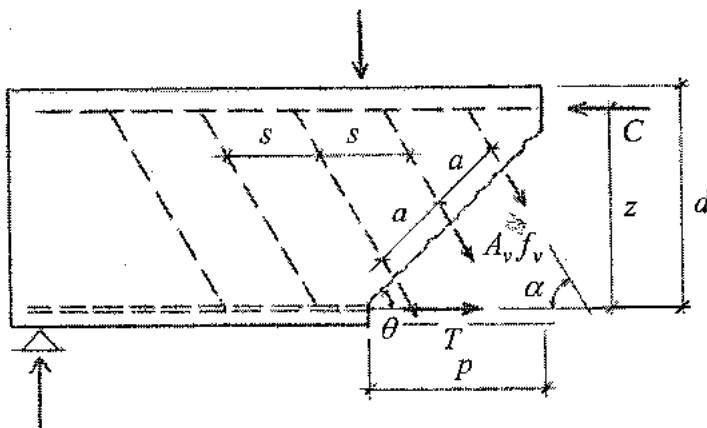
Figura 5.11: Esquema de reticulado. (a) Con estribos. (b) Con barras dobladas

En la práctica los estribos están más cerca unos de otros, pudiéndose representar por la yuxtaposición de reticulados simples (fig.5.11(a)), dando origen a un modelo de reticulado múltiple. En forma similar se superponen los reticulados con estribos y con barras dobladas.

Originalmente, en la analogía propuesta por Mörsh, las bielas comprimidas de hormigón tenían un ángulo  $\theta = 45^\circ$ . Ensayos posteriores indicaron que este ángulo puede acomodarse en  $30^\circ < \theta < 60^\circ$ , de acuerdo a cómo es dimensionada la armadura, y de forma tal que se cumplan las ecuaciones de equilibrio.

La inclinación de la armadura transversal es  $30^\circ < \alpha < 90^\circ$ , para barras dobladas y  $45^\circ < \alpha < 90^\circ$  para estribos.

Para ángulos  $\alpha$  y  $\theta$  cualquiera, con las limitaciones mencionadas, se pueden deducir, a partir de ecuaciones de equilibrio, las fórmulas de dimensionamiento de la armadura transversal.



**Figura 5.12:** Fuerzas en una fisura diagonal debido a la armadura de corte

La fig. 5.12 muestra las fuerzas que actúan sobre un s diagonal. Por claridad no se incluyen las fuerzas de cort  $V_d$ .

Siendo  $s$  la separación de la armadura transversal correspondiente separación en la dirección de la fisura es

$$a = \frac{s}{\operatorname{sen} \theta (\operatorname{cotg} \theta + \operatorname{cotg} \alpha)} \quad (5.23)$$

La longitud de la fisura resulta:

$$i = \frac{p}{\cos \theta} \quad (5.24)$$

Luego, la cantidad de barras que atraviesan la fisura es

$$n = \frac{i}{a} = \frac{p}{s} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} (\operatorname{cotg} \theta + \operatorname{cotg} \alpha) = \frac{p}{s} (1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{cotg} \alpha) \quad (5.25)$$

Siendo la fuerza en cada barra de armadura transversal  $A_v f_v$ , la componente total vertical de las fuerzas en todas las barras que atraviesan la fisura resulta:

$$V_s = n A_v f_v \operatorname{sen} \alpha = A_v f_v \frac{p}{s} (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \theta \cos \alpha) \quad (5.26)$$

Se puede aproximar:

$$p \approx \frac{d}{\operatorname{tg} \theta} \quad (5.27)$$

obteniéndose la contribución de la armadura a la resistencia al corte:

$$V_s = A_v f_v \frac{d}{s} \frac{(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \theta \cos \alpha)}{\operatorname{tg} \theta} \quad (5.28)$$

Hay que tener en cuenta que esta expresión es válida sólo si la armadura transversal se encuentra espaciada de forma tal que cualquier fisura diagonal posible se encuentre atravesada al menos por un estribo o barra doblada. Se imponen límites superiores a la separación  $s$ .

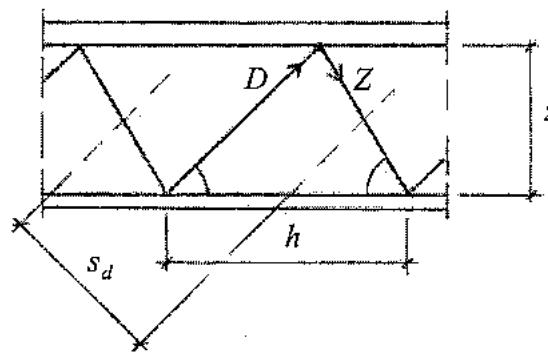
En la ec.(5.28), si la inclinación de las bielas comprimidas  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{tg} \theta \rightarrow 0$ , la contribución de la armadura para resistir el corte  $V_s \rightarrow \infty$ , por lo que la adopción de un modelo de reticulado con diagonales comprimidas muy aplanadas conduce a un ahorro de armadura de corte.

Sin embargo hay que considerar la tensión de compresión en las bielas. Por equilibrio de nudo del reticulado de fig.5.11, se obtiene:

$$D = \frac{V_s}{\operatorname{sen} \theta} \quad (5.29)$$

que actúa sobre una sección:  $b s_d$ , ver fig.5.13. Resulta:

$$s_d = h \operatorname{sen} \theta = z (\cot \operatorname{tg} \theta + \cot \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{sen} \theta \cong d (\cot \operatorname{tg} \theta + \cot \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{sen} \theta \quad (5.30)$$



**Figura 5.13:** Acción sobre la biela comprimida

La tensión de compresión  $f_D$  es:

$$f_D = \frac{D}{b s_d} = \frac{V_s}{\operatorname{sen} \theta b d (\cot \operatorname{tg} \theta + \cot \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{sen} \theta} = \frac{\tau_s}{\operatorname{sen}^2 \theta (\cot \operatorname{tg} \theta + \cot \operatorname{tg} \alpha)} \quad (5.31)$$

Se observa que para  $\theta \rightarrow 0$ ,  $f_D \rightarrow \infty$ , por lo que la adopción de una menor inclinación, si bien economiza armadura, puede producir la rotura de las bielas comprimidas.

Para una inclinación de bielas comprimidas  $\theta = 45^\circ$ , original en el reticulado de Mörsch, y adoptado por el CIRSOC 201, resulta:

$$V_s = \frac{A_v f_v (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) d}{s} \quad (5.32)$$

$$f_D = \frac{2 \tau_s}{1 + \cot \operatorname{tg} \alpha} \quad (5.33)$$

Cuando la armadura transversal está formada por estribos normales,  $\alpha = 90^\circ$ , se obtiene:

$$V_s = \frac{A_v f_v d}{s} \quad f_D = 2 \tau_s \quad (5.34)$$

Para barras dobladas con  $\alpha = 45^\circ$ :

$$V_s = \frac{A_v f_v \sqrt{2} d}{s} \quad f_D = \tau_s \quad (5.35)$$

Puede observarse que barras dobladas (o estribos) a  $45^\circ$  aportan, para la misma sección, una resistencia a corte  $\sqrt{2}$  veces mayor que estribos a  $90^\circ$ , pero como la longitud es a su vez  $\sqrt{2}$  mayor, resultan económicamente comparables.

La tensión en las bielas comprimidas para  $\alpha = 90^\circ$  es el doble que para  $\alpha = 45^\circ$ . Sin embargo hay que considerar que estas bielas están atravesadas por la armadura transversal traccionada. Ensayos experimentales han mostrado una menor resistencia de elementos comprimidos para la configuración con barras traccionadas como en el caso de  $\alpha = 45^\circ$ , por lo que los efectos se compensan.

En resumen no hay ventajas comparativas para uno u otro caso. Los estribos a  $90^\circ$  son más sencillos de ejecutar. Las barras dobladas aprovechan armadura longitudinal no necesaria para flexión, pero no siempre en la ubicación apropiada para corte.

El análisis de cada caso particular, desde el punto de vista técnico y económico, indicará cual sistema de armadura transversal es más conveniente.

## 5.6. INFLUENCIA DEL ESFUERZO NORMAL

Se ha analizado hasta ahora elementos solicitados a flexión y corte. La presencia de una fuerza axial, de compresión o tracción, modifica la magnitud y dirección de la tensión principal de tracción, y por lo tanto la carga de fisuración diagonal, es decir la contribución del hormigón a la resistencia al corte.

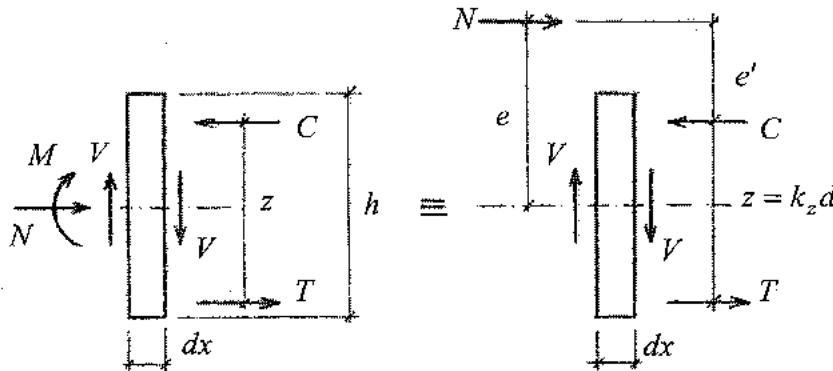
De la expresión de las tensiones principales (5.10), y observando el círculo de Mohr, fig.5.4, una fuerza axial de compresión aumentará la carga de fisuración diagonal y una fuerza de tracción la disminuirá.

### 5.6.1. Compresión axial

En el desarrollo de la ec.(5.15) intervinieron las tensiones  $\sigma$  y  $\tau$  en la parte superior de la fisura por flexión:  $\tau = k_1 V / (bd)$ ,  $\sigma = k_2 M / (bd^2)$ . La tensión normal también puede expresarse en función de la tensión en la armadura  $f_s$ :

$$\sigma = k_0 \frac{f_s}{n} = k_0 \frac{M}{n A_s z} = k_0 \frac{M}{n \rho k_z b d^2} \quad (5.36)$$

con  $n = E_s / E_c$ , la cuantía  $\rho = A_s / (bd)$ , y  $z = k_z d$ . Luego  $k_2 = k_0 / (n \rho k_z)$ . Ahora se reemplaza  $M, N$  en el baricentro de la sección por su equivalente  $N$  ubicado con una excentricidad  $e = M/N$ , ver fig.5.14.



**Figura 5.14:** Vigas con esfuerzo normal, además de flexión y corte

Siendo  $e' = e + d - h/2 - k_z d$ , la tensión en la armadura se puede calcular tomando momentos con respecto al punto de aplicación de  $C$ :

$$f'_s = \frac{Ne'}{A_s k_z d} = \frac{M + N(d - h/2 - k_z d)}{A_s k_z d} \quad (5.37)$$

El valor de  $k_z$  es cercano a 7/8 hasta la carga que produce la fisuración diagonal, luego:

$$\sigma = k_0 \frac{M - N(4h - d)/8}{n \rho k_z bd^2} = k_2 \frac{M - N(4h - d)/8}{bd^2} \quad (5.38)$$

Comparando (5.38) con (5.36), resulta que la deducción de  $\sigma$  sigue siendo válida si se sustituye  $M$  por el valor modificado  $M_m$

$$M_m = M - N \frac{4h - d}{8} \quad (5.39)$$

La misma sustitución se hace en la ec.(5.15) donde, además, el límite superior se reemplaza por:

$$\tau_{cr} \leq 0.30 \sqrt{f'_c} \sqrt{1 + \frac{0.30 N}{A_g}} \quad (5.40)$$

con  $A_g = b h$  área bruta de hormigón, y  $N$  positiva para compresión.

### 5.6.1. Tracción axial

La metodología anterior para compresión axial, no se correlaciona bien con resultados experimentales para vigas con tracción axial y predice resistencias  $\tau_{cr}$ , o  $V_c = \tau_{cr} bd$ , mayores que las realmente medidas.

Por eso se recomienda, cuando existe un esfuerzo de tracción significativo, que:

$$\tau_{cr} \leq \left(1 + \frac{0.30 N}{A_g}\right) \frac{1}{6} \sqrt{f_c'} \quad (5.41)$$

con  $N$  negativo para tracción.

En forma simplificada se sugiere despreciar completamente la contribución del hormigón cuando exista incertidumbre sobre la magnitud de la tracción, y resistir todo el corte con el mecanismo de armadura transversal.

## 5.7. CASOS ESPECIALES DE DISEÑO AL CORTE

### 5.7.1. Vigas de altura variable

Elementos de hormigón armado con altura variable se utilizan con frecuencia en vigas continuas acarteladas, en los nudos de pórticos, en voladizos, o en vigas simples prefabricadas, ver fig.5.15.

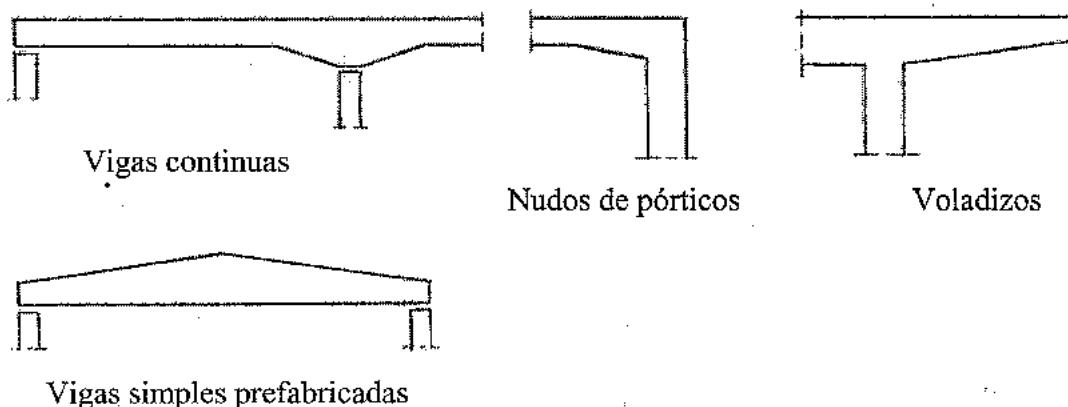


Figura 5.15: Ejemplo de vigas con altura variable

En el dimensionamiento a flexión se siguen utilizando las expresiones para vigas de altura constante con la aproximación que  $\cos\alpha_C \approx \cos\alpha_T \approx 1$ , ver fig.5.16, con las que no se comete un error significativo hasta pendientes de  $30^\circ$ .

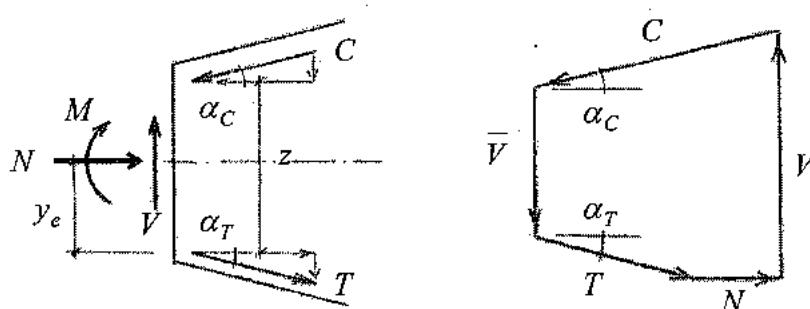


Figura 5.16: Fuerzas en una sección de viga de altura variable

Observando el polígono de fuerzas, el corte neto para el cual debe diseñarse la viga es:

$$\bar{V} = V - C \operatorname{tg} \alpha_C - T \operatorname{tg} \alpha_T \quad (5.42)$$

Recordado que  $M_e = M - N y_e$ ,  $C = M_e / z$ ,  $T = M_e / z + N$ , resulta

$$\bar{V} = V - \frac{M_e}{z} (\operatorname{tg} \alpha_C + \operatorname{tg} \alpha_T) - N \operatorname{tg} \alpha_T \quad (5.43)$$

Esta situación corresponde al caso en que la sección aumenta en la dirección en que aumenta el momento flector  $M$ . En el caso poco frecuente que la sección disminuya en dirección al incremento de momento, el efecto es inverso:

$$\bar{V} = V + \frac{M_e}{z} (\operatorname{tg} \alpha_C + \operatorname{tg} \alpha_T) + N \operatorname{tg} \alpha_T \quad (5.44)$$

Resultados experimentales no indican un cambio significativo en la carga que produce la fisuración diagonal en comparación con elementos prismáticos. Por lo tanto se pueden utilizar las ecuaciones para  $V_c$  y  $V_s$  desarrolladas para elementos de altura constante, con la precaución de considerar en los cálculos la altura  $d$  de la sección que se analiza.

### 5.7.2. Secciones en T y doble T

En el caso de secciones T o I, las alas deben vincularse al alma en forma resistente al corte que se produce como resultado de la colaboración del ala a compresión o tracción, ver 4.7.2.

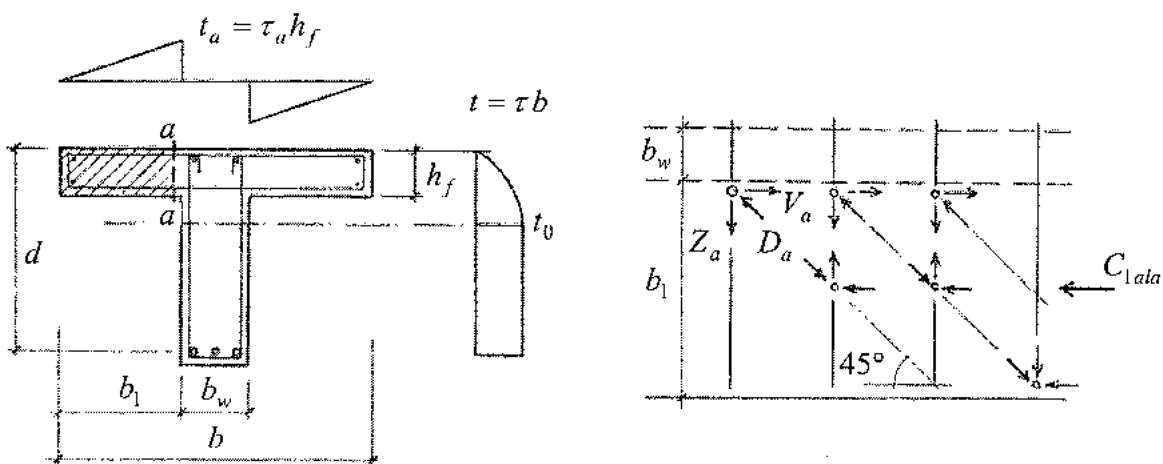


Figura 5.17: Fuerzas en la unión ala-alma

La tensión tangencial en la sección  $a-a$  se calcula con la fórmula general de Colignon para la etapa de comportamiento elástico.

$$\tau = \frac{V S_a}{h_f J} \quad (5.45)$$

donde  $S_a$  es el momento estático de la sección rayada de la fig.5.17 con respecto al eje neutro;  $h_f$  es el ancho de la sección  $a-a$ ;  $J$  es el momento de inercia de la sección T. Esta tensión combinada con la tensión de compresión debida a la flexión origina un estado doble de tensiones, ver fig.4.15, a partir del cual se calculan las tensiones principales de compresión y tracción inclinada.

La tensión de tracción diagonal es la que produce fisuración y posibilidad de falla, similar al caso del esfuerzo de corte en el plano vertical de la viga, ya estudiado.

La fuerza de compresión en el ala a un lado de la sección  $a-a$ , despreciando las tensiones de compresión en el alma de la viga, de acuerdo a la fig.5.17 es:

$$C_{1ala} = C \frac{b_1}{b} = \frac{M}{z} \frac{b_1}{b} = \frac{V \Delta x}{z} \frac{b_1}{b} \quad (5.46)$$

La fuerza por unidad de longitud se obtiene con:

$$\frac{C_{1ala}}{\Delta x} = \frac{V}{z} \frac{b_1}{b} = V_a \quad (5.47)$$

que por equilibrio debe ser igual a la fuerza transmitida, por unidad de longitud, entre el ala y el alma:  $V_a$ .

Llamando a la tensión tangencial en dicha sección  $\tau_a$ , resulta en relación a  $\tau_0$ :

$$\tau_a = \frac{V_a}{h_f 1} = \frac{V}{h_f z} \frac{b_1}{b} \frac{b_w}{b_w} \cong \tau_0 \frac{b_w}{h_f} \frac{b_1}{b} \quad (5.48)$$

Con esta tensión  $\tau_a$  se puede hacer una verificación al corte en forma análoga al caso del alma de la viga, es decir con una contribución del hormigón  $V_{ca}$  y una contribución de armadura  $V_{sa}$  con el mecanismo de reticulado mostrado en la fig.5.17. Entonces:

$$V_a = V_{ca} + V_{sa} = \tau_a h_f = \tau_0 b_w \frac{b_1}{b} \quad (5.49)$$

con:

$$V_{ca} = 0.16 \sqrt{f'_c} h_f 1 \quad (5.50)$$

obtenida de (5.13), y con bielas a compresión a  $45^\circ$  resulta

$$Z_a = V_{sa} = V_a - V_{ca} \quad (5.51)$$

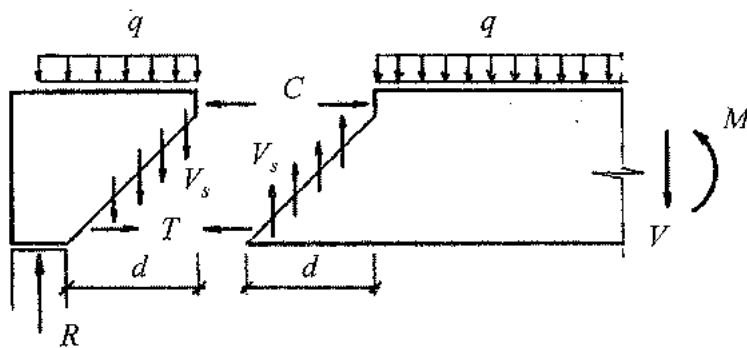
Adoptando una separación  $s_a$ , la sección necesaria de armadura se obtiene con:

$$A_{sa} = \frac{Z_a s_a}{f_y} \quad (5.52)$$

En los casos usuales de vigas placa de entepiso de edificios, la propia armadura de la losa cubre holgadamente esta situación. La verificación es necesaria en vigas importantes como el caso de puentes.

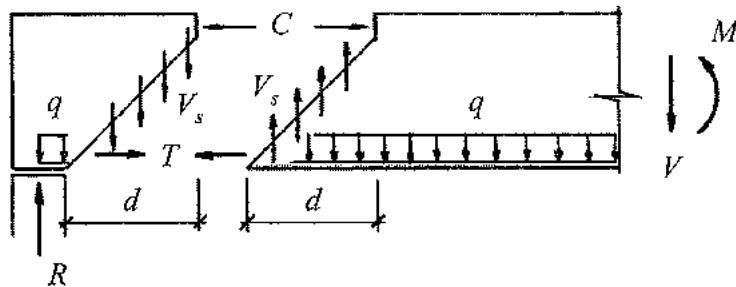
### 5.7.3. Apoyos directos e indirectos – Cargas cercanas a los apoyos – Cargas suspendidas

- Cuando la carga se aplica en la parte superior de la viga y el apoyo de ubica en la cara inferior, la parte de la carga hasta una distancia  $d$  del filo del apoyo se transmite directamente al apoyo por compresión, sin intervenir en la fuerza de los estribos  $V_s$ , como se observa en los diagramas de cuerpo libre de la fig.5.18. Por limpieza de la figura no se han representado las componentes de la contribución del hormigón  $V_c$ .



**Figura 5.18:** Apoyo directo: Carga en la parte superior y apoyo en la cara inferior

Si en cambio la carga está aplicada en la parte inferior de la viga, los estribos estarán solicitados por toda la carga, como se muestra en la fig.5.19.



**Figura 5.19:** Apoyo indirecto: Carga y apoyo en la cara inferior

Al primer caso, fig.5.18, se lo denomina **apoyo directo**, y se permite realizar el diseño para el esfuerzo de corte que se produce a una distancia  $d$  del filo del apoyo. La situación de la fig.5.19 se la denomina **apoyo indirecto**, y el diseño debe hacerse para el esfuerzo de corte en la cara del apoyo.

- Otra es la situación de una **carga concentrada aplicada cerca del apoyo** como se presenta en la fig.5.20. Si bien se trata de un caso de apoyo directo, se deberá verificar la tensión de compresión en la biela de hormigón y el anclaje de la armadura inferior con la fuerza  $T$ . Como la verificación de la biela comprimida está implícita en la limitación de  $V_s$ , ec.(5.62), el reglamento prescribe diseñar para la fuerza de corte en el filo del apoyo y así asegurar la verificación de la biela comprimida.

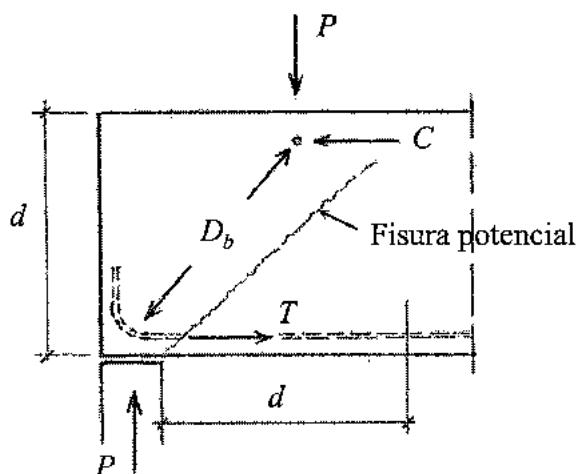


Figura 5.20: Transmisión directa de carga concentrada cercana al apoyo

Un resumen de las secciones críticas para el diseño al corte indicadas por el CIRSOC 201 se presenta en la fig.5.21.

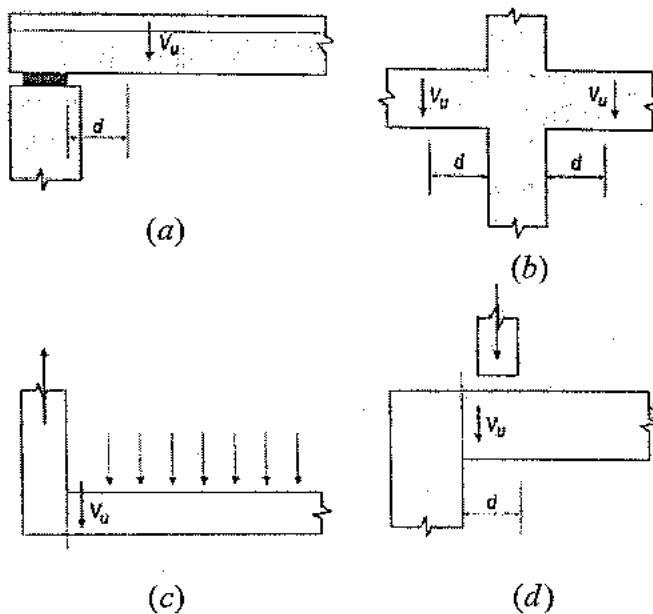
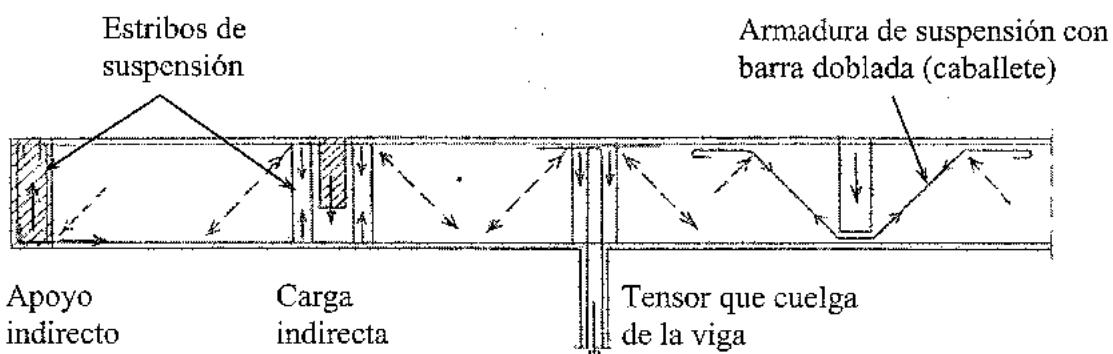


Figura 5.21: Secciones críticas para el diseño a corte

- En el caso de **cargas indirectas** se debe disponer una armadura de suspensión formada por estribos o barras dobladas (caballetes) cuidadosamente ancladas, para "colgar" la carga de la zona comprimida y así puedan suponerse efectivamente aplicadas sobre el reticulado ideal. La armadura de corte existente en la zona de aplicación de la carga indirecta puede considerarse formando parte la armadura de suspensión, ver fig.5.22.

Especial cuidado debe tenerse con las **cargas suspendidas**, por ejemplo tensores para escaleras. Se debe prolongar la armadura de suspensión hasta la cara superior de la viga y ahí anclarla con una pata a 90° hacia el lado opuesto, de manera de confinar el nudo de hormigón.



**Figura 5.22:** Introducción de cargas indirectas y suspendidas

## 5.8. VERIFICACIÓN DE LA RESISTENCIA AL CORTE CÁLCULO DE ARMADURAS – DISPOSICIONES REGLAMENTARIAS

En el diseño de las secciones transversales de los elementos estructurales, sometidas a esfuerzos de corte, se debe cumplir la ec.(3.8) que particularizada en este caso resulta:

$$\phi V_n \geq V_u \quad (5.53)$$

donde  $V_u$  es el esfuerzo de corte producido por las cargas externas mayoradas,  $\phi$  el factor de reducción de resistencia, ver tabla 3.1:  $\phi = 0.75$ , y  $V_n$  la resistencia nominal calculada con:

$$V_n = V_c + V_s \quad (5.54)$$

en la que  $V_c$  es la resistencia nominal a corte proporcionada por el hormigón y  $V_s$  es la resistencia nominal aportada por la armadura.

### 5.8.1. Contribución del hormigón

A partir de las explicaciones dadas en 5.4, con un ligero cambio en la nomenclatura de corte y flexión para hacer notar que son esfuerzos mayorados,  $V_u$ ,  $M_u$ , la contribución del hormigón se calcula con:

- *Elementos con esfuerzos de flexión y corte:*

$$V_c = \left( \sqrt{f'_c} + 120 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) \frac{1}{7} b_w d \leq 0.30 \sqrt{f'_c} b_w d \quad (5.55)$$

donde  $\rho_w = A_s / (b_w d)$  es la cuantía geométrica de la armadura longitudinal traccionada y  $b_w$  es el ancho del alma en vigas placa, o directamente  $b$  en secciones rectangulares. Las unidades en  $MN$ ,  $m$ , y  $MPa = MN/m^2$  para  $f'_c$ .

El cociente  $V_u d / M_u$  se debe adoptar siempre  $\leq 1.0$  para limitar el valor de  $V_c$  cerca de los puntos de inflexión ( $M_u = 0$ ).

Debido a que  $\rho_w$ ,  $V_u$ ,  $M_u$  cambian a lo largo de la luz, la aplicación de (5.55) puede resultar tediosa en cálculos manuales. Se admite una expresión más simple y conservadora:

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d \quad \tau_c = \frac{V_c}{b_w d} = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} \quad (5.56)$$

En estas expresiones, y en las siguientes, se debe tomar  $\sqrt{f'_c} \leq 8.3 \text{ MPa}$  debido a que ensayos experimentales muestran que para hormigones de alta resistencia, la contribución del hormigón es menor que la estimada por estas ecuaciones. Solo se pueden utilizar valores  $\sqrt{f'_c} > 8.3 \text{ MPa}$  si se dispone una armadura mínima de corte.

■ *Elementos sometidos también a compresión axial:* se utiliza (5.55) reemplazando  $M_u$  por  $M_m$  dado por (ver 5.6, ec.(5.39)):

$$M_m = M_u - N_u \frac{4h-d}{8} \quad (5.57)$$

y con un límite superior dado por:

$$V_c \leq 0.30 \sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{0.3 N_u}{A_g}} \quad \tau_c \leq 0.30 \sqrt{f'_c} \sqrt{1 + \frac{0.3 N_u}{A_g}} \quad (5.58)$$

Si  $M_m$  resulta negativo en (5.57), con  $N_u > 0$  de compresión, se debe utilizar la expresión (5.58).

■ *Elementos con tracción axial significativa:* de acuerdo a 5.6.2 se debe determinar la resistencia con:

$$V_c = \left(1 + \frac{0.3 N_u}{A_g}\right) \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d > 0 \quad \tau_c = \left(1 + \frac{0.3 N_u}{A_g}\right) \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} > 0 \quad (5.59)$$

donde  $N_u$  es negativo de tracción y  $N_u / A_g$  expresado en MPa.

Nota: para secciones circulares de diámetro  $D$  se adopta  $b_w = D$  y  $d = 0.8D$ .

### 5.8.2. Contribución de la armadura

Una vez calculada la contribución del hormigón, la contribución de la armadura de corte se obtiene a partir de (5.53) y (5.54) con:

$$V_s = V_n - V_c \quad \tau_s = \frac{V_s}{b_w d} = \tau_n - \tau_c \quad (5.60)$$

Se prescriben las siguientes limitaciones para la armadura de corte:

- Para controlar el ancho de las fisuras diagonales en el alma de la viga, la resistencia a la fluencia de la armadura se limita a:

$$f_y \leq \begin{cases} 420 \text{ MPa} & \text{en general} \\ 500 \text{ MPa} & \text{para mallas de acero soldada con alambres conformados} \end{cases} \quad (5.61)$$

- Para evitar la falla de la biela comprimida se debe cumplir que:

$$V_s \leq \frac{2}{3} \sqrt{f'_c} b_w d \quad \tau_s \leq \frac{2}{3} \sqrt{f'_c} \quad (5.62)$$

Entonces debe ser

$$\tau_n = \frac{V_n}{b_w d} = \tau_c + \tau_s \leq \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} + \frac{2}{3} \sqrt{f'_c} = \frac{5}{6} \sqrt{f'_c} = \tau_{\lim} \quad (5.62a)$$

sino, se debe redimensionar  $b_w d$  con el factor  $\tau_n / \tau_{\lim}$ .

- Armadura mínima de corte: cuando se verifique la condición:

$$\frac{V_u}{\phi} = V_n \geq \frac{1}{2} V_c \quad \tau_n \geq \frac{1}{2} \tau_c \quad (5.63)$$

se debe disponer una armadura mínima para prevenir una falla súbita (frágil) por tracción diagonal, la cual está dada por:

$$A_v = \frac{1}{16} \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_y} \geq 0.33 \frac{b_w s}{f_y} \quad (5.64)$$

Debido a la capacidad para redistribuir las fuerzas internas antes de la falla por tensión diagonal, comprobado con ensayos experimentales, se exceptúan de este requisito a losas, zapatas, losas nervuradas de hormigón, y vigas de altura con  $h \leq 25\text{cm}$  o  $h \leq 2.5 h_f$  o  $h \leq 0.5 b_w$ , el que sea mayor.

Para elementos sometidos a cargas repetidas, se pueden formar fisuras diagonales para tensiones de tracción mucho menores que bajo cargas estáticas. Se recomienda en estos casos colocar siempre, al menos, la armadura mínima, independiente de (5.63).

- Separación de la armadura de corte: las expresiones desarrolladas en 5.5.3 son válidas si cualquier fisura diagonal posible está atravesada al menos por un estribo o barra doblada. De otra manera la resistencia al corte sería sólo la proporcionada por el hormigón. Es por eso que se limita la separación máxima  $s$  a los siguientes valores:

- Estribos verticales,  $\alpha = 90^\circ$

$$s \leq \begin{cases} d / 2 \\ 40 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.65)$$

- Estribos inclinados, o barras dobladas.

$$s \leq \frac{3}{8} d + \frac{3}{8} d \cot g\alpha \quad (5.66)$$

Para el caso usual de  $\alpha = 45^\circ$ , resulta  $s \leq 3/4 d$ . De esta manera se garantiza que una fisura inclinada a  $45^\circ$ , desde la armadura traccionada longitudinal hasta la mitad de la altura de la viga, esté cruzada al menor por una barra transversal.

Cuando  $V_s > \frac{1}{3} \sqrt{f_c'} b_w d$  las separaciones (5.65) (5.66) se deben reducir a la mitad.

El dimensionamiento, para los casos más frecuentes de la armadura de corte, se realiza de la siguiente manera:

#### a) Estribos a $90^\circ$

Los tipos de estribos se describieron en 5.5.1, y a partir de (5.34) y (5.60) es

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} 10000 \left[ \text{cm}^2 / \text{m} \right] \quad a_v = \frac{\tau_s b_w}{f_y} 100 \left[ \text{cm}^2 / \text{m} \right] \quad (5.67)$$

donde la tensión de diseño  $f_v$  de (5.34) es la tensión de fluencia  $f_y$  y se multiplica por 10000 para expresar el resultado en unidades convenientes de  $\text{cm}^2/\text{m}$  para  $V_s$  en  $MN$ ,  $f_y$  en  $MPa$  y  $d$  en  $m$ . En la expresión de  $a_v$ , el ancho  $b_w$  se debe expresar en  $cm$ .

Luego se elige un diámetro de estribo, se calcula  $A_v = \pi \phi_{est}^2 / 4 \times N_r$ , siendo  $N_r$  el número de ramas, y se obtiene la separación  $s$ . Otra manera es elegir la separación  $s$  y calcular el diámetro del estribo. Conviene la primera de las alternativas para aprovechar los diámetros comerciales.

La separación se mantiene constante por tramos, de acuerdo al diagrama de esfuerzos de corte, ver ejemplos.

#### b) Barras dobladas a $45^\circ$

Para diagramas de  $V_u$  no constante, en lugar de colocar estribos a distintas separaciones por tramos, puede ser conveniente adoptar estribos con separación uniforme y cubrir los "picos" de  $V_u$  con barras dobladas que ya no son necesarias a flexión, por ejemplo en los extremos de una viga donde justamente el corte tiene valores máximos, ver fig.5.23.

El esfuerzo de corte total que deben absorber las barras dobladas entre A y B resulta:

$$V_{s_{bd}}(x) = V_s - V_{s_{est}} \rightarrow V_{s_{bd\ total}} = \int_A^B V_{s_{bd}}(x) dx = \Omega_{bd} \quad (5.68)$$

La colaboración de la armadura en la longitud A B, a partir de (5.35) es:

$$V_{s_{bd\ total}} = \frac{A_v f_y \sqrt{2} d}{s} l_{AB} \quad (5.69)$$

Igualando (5.68) con (5.69), se obtiene la cantidad total de barras dobladas:

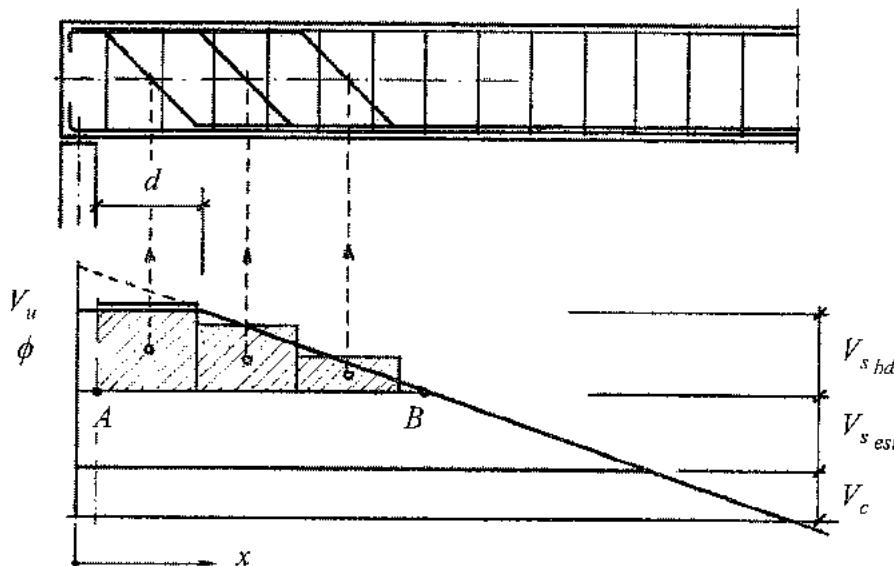
$$\sum A_v = \frac{A_v l_{AB}}{s} = \frac{\Omega_{bd}}{f_y \sqrt{2} d} \quad (5.70)$$

de donde se elige la cantidad y diámetro, que debe ser compatible con la armadura longitudinal de flexión que se dobla. El área  $\Omega_{bd}$  se divide en áreas proporcionales a las secciones de las barras levantadas y en la vertical del centro de gravedad de cada área se encontrará el punto donde la barra correspondiente corta al eje de la pieza, quedando así determinada su posición.

De otra manera, el área del diagrama que cubre una barra doblada de sección  $A_v$  se obtiene de (5.70):

$$\Omega_1 = A_v f_y \sqrt{2} d \quad (5.71)$$

con las cuales se va cubriendo el diagrama y encontrando la posición de cada barra.



**Figura 5.23:** Distribución de armadura de corte formada por estribos y barras dobladas

Cuando la armadura de corte está constituida por solo una barra doblada, o un grupo de barras todas dobladas con ángulo  $\alpha$  a la misma distancia del apoyo, debe ser:

$$V_s = A_v f_y \operatorname{sen} \alpha \leq \frac{1}{4} \sqrt{f'_c} b_w d \quad (5.72)$$

En estos casos es necesario realizar el análisis de cuerpo libre del sector de viga que queda hacia el apoyo, para diferentes posiciones posibles de potenciales fisuras, y verificar el equilibrio en cada caso.

## 5.9. INFLUENCIA DEL ESFUERZO DE CORTE EN EL PUNTO DE CORTE Y LONGITUD DE ANCLAJE DE LA ARMADURA LONGITUDINAL

Mientras no se produzca la fisuración del hormigón, el esfuerzo en la armadura en un punto depende de las solicitudes  $M, N$  de la sección recta que contiene a dicho punto.

$$T = A_s f_s = \frac{M_e}{z} + N \quad (5.73)$$

Si el esfuerzo normal  $N$  es nulo a lo largo de la barra, luego la variación de  $T$  es proporcional a la variación de  $M$ , y puede utilizarse el diagrama de momentos para determinar los puntos de corte de la armadura longitudinal, donde ya no es necesaria para resistir flexión. Si  $N \neq 0$ , se debe utilizar directamente el diagrama de tracciones  $T$ .

Sin embargo, una vez producida la fisuración diagonal debido al esfuerzo de corte, la fuerza de tracción en la armadura es controlada por un momento flector mayor correspondiente a una sección a distancia  $p$  del punto considerado en la dirección en que se incrementan los momentos flectores, ver 5.4.2 ec.(5.20) y 5.5.3.

Una alternativa para considerar este efecto es trabajar con el diagrama de momentos (o de tracciones) desplazado en una cantidad  $v$  llamada "decalaje", ver fig.5.24. Si se supone que todo el esfuerzo de corte lo absorbe la armadura con el modelo de reticulado, se demuestra que  $v$  depende del tipo de variación de momento (lineal, parabólica, etc.) y del tipo de armadura transversal.

Por ejemplo, viga simple y carga uniforme: estribos  $\alpha = 90^\circ \rightarrow v = 0.75 z$

$$\begin{aligned} \text{barras dobladas } \alpha = 45^\circ &\rightarrow v = 0.25 z \\ \text{estribos y barras dobladas} &\rightarrow v = 0.50 z \end{aligned}$$

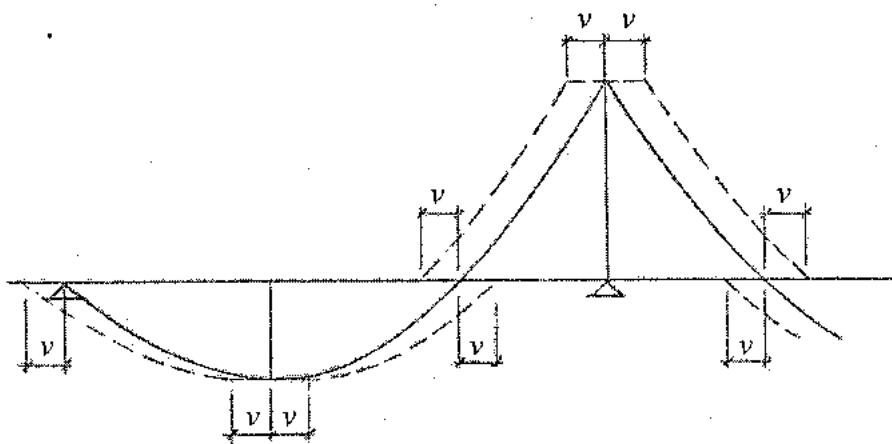
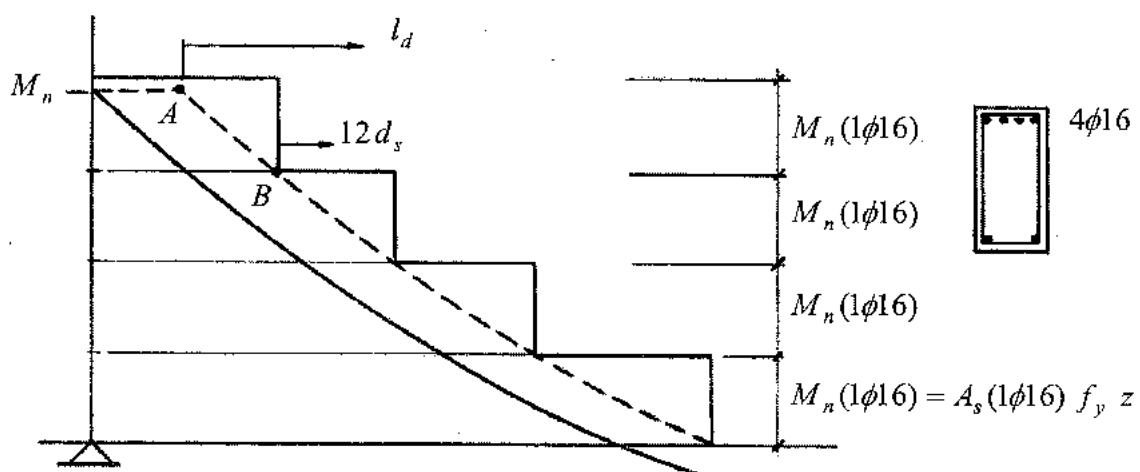


Figura 5.24: Diagrama de momentos desplazado con "decalaje"  $v$

Además el diagrama real puede diferir del utilizado como base para el diseño por la aproximación en las cargas reales, por las aproximaciones analíticas, o por el efecto superpuesto de asentamientos o acciones laterales no consideradas.

La armadura longitudinal debe cubrir estas situaciones y tener suficiente longitud de anclaje como se muestra en la fig.5.25.



**Figura 5.25:** Anclaje de la armadura de flexión en una viga continua típica

Como ejemplo, la barra que cubre la parte superior del diagrama de momentos debe tener una longitud de anclaje  $l_d$  desde el punto A donde se necesita toda la capacidad resistente, y una longitud mínima estimada en  $12 d_b$  (diámetro de la armadura long.) desde el punto B donde ya no se requiere para resistir el momento flector.

Si se supone que desde A hacia B la barra disminuye linealmente su resistencia debido a la transferencia por tensiones de adherencia, la longitud mínima desde B es para cubrir diagramas de momentos que sigan otra variación que la lineal en esa zona entre A y B.

Finalmente la barra se prolongará hasta cubrir las dos situaciones:  $l_d$  desde el punto A y  $12 d_b$  desde el punto B, la que resulte determinante.

El mismo criterio se aplica para las otras barras de la fig.5.25.

▪ ***Requisitos especiales cerca del punto de momento nulo:***

Aunque el requisito básico es que la barra tenga una longitud de anclaje completa  $l_d$  a partir de la sección donde está solicitada por el esfuerzo máximo ( $f_s = f_y$ ), esto puede no ser suficiente para mantener la seguridad contra falla por adherencia.

La fig.5.26 muestra el diagrama de momentos de un tramo de viga continua. Desde la sección  $c$  se requiere una longitud de anclaje  $l_d$ , y se supone que llega justo hasta  $a$ . En  $b$ , en la mitad entre  $a$  y  $c$ , la barra desarrolla la mitad de su resistencia, adoptando una tensión de adherencia uniforme, pero la solicitud extrema es  $3/4$  del valor máximo.

La fuerza de adherencia  $U$  por unidad de longitud requerido por flexión es, por equilibrio, igual al cambio del esfuerzo de tracción en la barra:

$$U = \frac{dT}{dx} = \frac{dM}{z dx} = \frac{V}{z} \quad (5.74)$$

es decir proporcional a la pendiente del diagrama de momentos  $dM/dx = V$  esfuerzo de corte. La mayor pendiente corresponde al punto de inflexión (para los momentos positivos), y si  $M_n$  es la resistencia nominal a flexión suministrada por las barras que llegan al punto de inflexión, entonces a una distancia  $a$  la armadura tendrá que desarrollar la resistencia  $M_n$ . De la fig.5.26 resulta:

$$a = \frac{M_n}{V} \quad (5.75)$$

La barra estaría en buenas condiciones de adherencia si la longitud de anclaje fuera menor que la distancia  $a$ . Como las barras se extienden más allá del punto de inflexión como se exige en todos los casos, entonces esta extensión puede contarse para cumplir con este requisito. El CIRSOC 201 considera efectiva una longitud  $d$  o  $12 d_b$  más allá del punto de inflexión.

Entonces el requisito para las barras traccionadas en los puntos de inflexión es:

$$l_d \leq \frac{M_n}{V} + l_a \quad (5.76)$$

donde  $V$  es el corte requerido en el punto de inflexión y  $l_a$  el mayor de  $d$  o  $12 d_b$ .

Una situación similar se presenta cerca de los apoyos de vigas simplemente apoyadas con cargas uniforme. Debido a la compresión de la biela inclinada de hormigón en el extremo, que es beneficiosa para la adherencia, se permite aumentar un 30%, resultando:

$$l_d \leq 1.30 \frac{M_n}{V} + l_a \quad (5.77)$$

La consecuencia de este requisito es que, en algunos casos, deben utilizarse barras con diámetros menores para cumplir con (5.74) o (5.75).

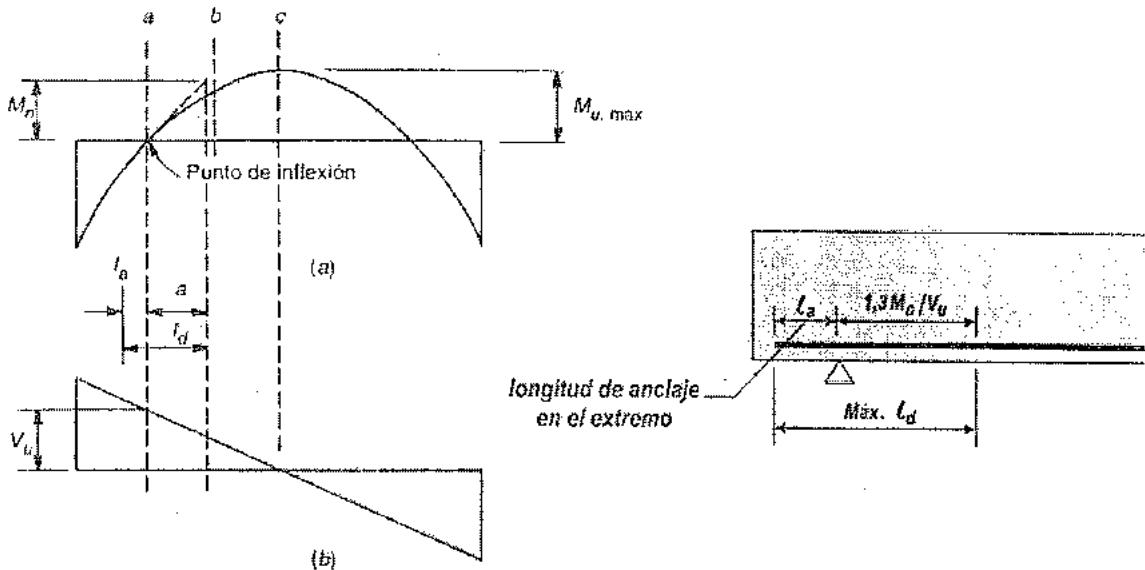
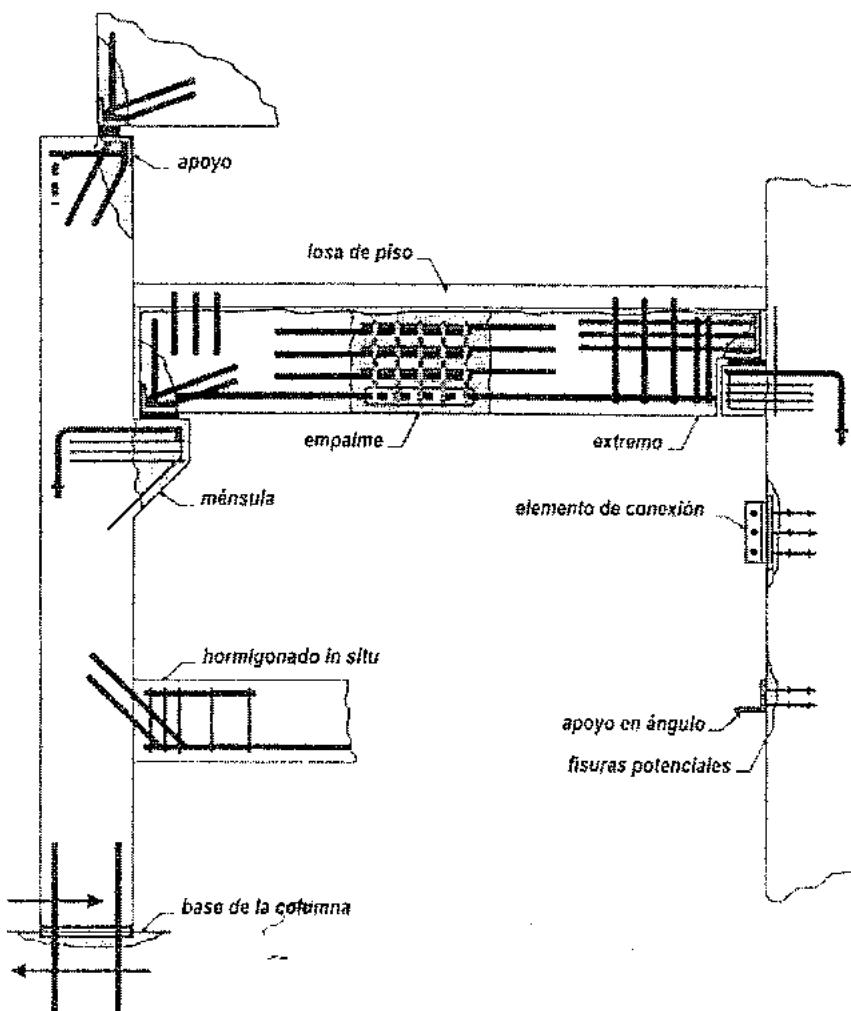


Figura 5.26: Longitud de anclaje requerida en puntos de inflexión y extremos

## 5.10. CORTE POR FRICTION

Hasta ahora el diseño por resistencia al corte ha tenido por finalidad evitar la falla por tracción diagonal. Sin embargo hay casos donde resulta necesario considerar la transmisión del esfuerzo de corte a través de un plano dado, como por ejemplo una fisura existente o potencial, una superficie de contacto entre materiales diferentes, o entre dos hormigones colocados en distintas etapas. Algunos casos típicos se presentan en la fig.5.27.



**Figura 5.27:** Aplicaciones del concepto de corte por fricción

Se debe cumplir la ec.(5.53) general, es decir

$$\phi V_n \geq V_u \quad (5.53)$$

donde  $V_u$  es el corte producido, en el plano considerado, por las acciones externas mayoradas,  $\phi = 0.75$  (tabla 3.1) factor de reducción de resistencia y  $V_n$  la resistencia nominal.

El mecanismo de corte por fricción se presenta en la fig.5.28, donde se muestra un plano de corte, de potencial formación de una fisura, solicitado por la acción  $V_u$  paralelo a la fisura. El bloque superior tiende a deslizarse con relación al inferior. La resistencia está dada por la fricción entre las caras. Además, la superficie irregular producirá una ligera separación entre

los dos bloques de hormigón. Si existe una armadura que atraviese la fisura, la separación entre las caras de la fisura traccionará las barras de acero, que en estado último llegarán a la fluencia.

La armadura suministra una fuerza de sujeción  $A_{vf} f_y$  entre las partes que se deslizan, y el corte aplicado es entonces resistido por la fricción que se produce entre las caras de la fisura, por la resistencia al corte de las protuberancias (rugosidad), y por la acción de pasador de la armadura que cruza la fisura. A partir de ensayos experimentales se ha llegado a la siguiente expresión:

$$V_n = 0.8 A_{vf} f_y + A_c k_1 \quad (5.78)$$

donde el primer término representa la contribución por fricción ( $\mu = 0.8$  cociciente de fricción), y el segundo término considera el corte por las rugosidades (protuberancias) y la acción de pasador, con  $k_1 = 2.8 \text{ MPa}$  para hormigón normal, y  $A_c$  área de la sección de hormigón que resiste el desplazamiento.

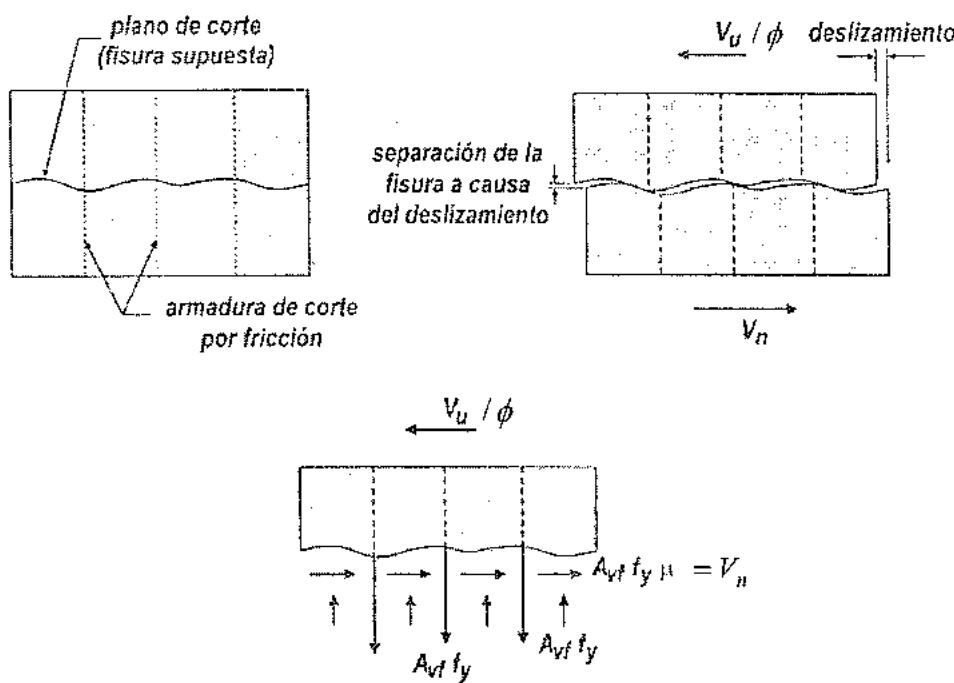


Figura 5.28: Mecanismo de corte por fricción

El CIRSOC 201 simplifica la ec.(5.78) teniendo en cuenta todos los efectos en el coeficiente de fricción  $\mu$ , resultando:

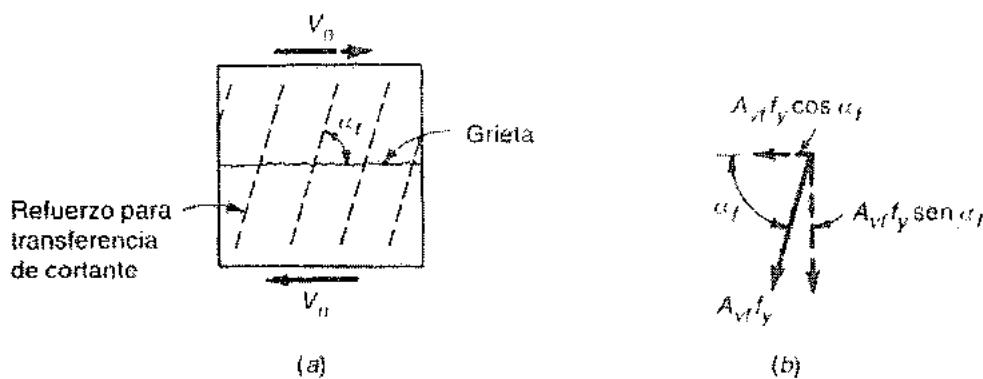
$$V_n = \mu A_{vf} f_y \quad (5.79)$$

con los siguientes valores de coeficiente de fricción equivalente:

- Hormigón colocado monolíticamente:  $\mu = 1.4$ .
- Hormigón colocado sobre hormigón endurecido (hormigonado en otra etapa) con la superficie intencionalmente rugosa (profundidad de la rugosidad 5 mm):  $\mu = 1.0$ .

- Hormigón colocado sobre hormigón endurecido con la superficie no intencionalmente rugosa:  $\mu = 0.6$ .
- Hormigón anclado a placas o perfiles de acero estructural mediante pasadores con cabeza o barras de armaduras:  $\mu = 0.7$ .

Si la armadura está inclinada con respecto al plano de deslizamiento, de manera que la fuerza de corte se aplique en la dirección es que se aumenta la tracción en el acero, entonces la componente de esta tracción paralela al plano de corte contribuye a la resistencia al deslizamiento, ver fig.5.29.



**Figura 5.29:** Armadura de corte por fricción inclinada con  $\alpha_f$

En este caso la resistencia al corte se calcula con:

$$V_n = A_{vf} f_y \cos \alpha_f + A_{vf} f_y \mu \sin \alpha_f \quad (5.80)$$

Si  $\alpha_f > 90^\circ$ , es decir que la tracción en la armadura disminuye, ya no se puede suponer que la tensión alcance  $f_y$  y las expresiones anteriores no son válidas. Se recomienda re-orientar la armadura.

La armadura de corte por fricción debe estar bien anclada a ambos lados del plano de corte, o fisura potencial, para poder desarrollar la resistencia a fluencia  $f_y$ .

Los ensayos dan validez a las ec.(5.79), (5.80) hasta el siguiente límite

$$V_n \leq 0.2 f'_c A_c \quad , \quad \text{con } 0.2 f'_c \leq 5.5 \text{ MPa} \quad (5.81)$$

Para limitar el ancho de la fisura, o separación entre los bloques de hormigón, se limita  $f_y \leq 420 \text{ MPa}$ .

Si actúa un esfuerzo normal de tracción, perpendicular al plano de corte, se deberá disponer una armadura adicional para resistir ese efecto, es decir sumar a  $A_{vf}$ .

Si actúa un esfuerzo normal de compresión, perpendicular al plano de corte, se puede considerar en la resistencia al corte por fricción siempre que se garantice que este esfuerzo es permanente.

$$V_n = \mu \left( A_{vf} f_y + \frac{N_u}{\phi} \right) \quad (5.82)$$

Si actúa un momento flector sobre el plano de corte, no se produce una resultante normal porque hay equilibrio entre la compresión y la tracción por flexión. Sin embargo se recomienda distribuir la armadura de corte por fricción de manera que la mayor parte se ubique en la zona de tracción por flexión.

### 5.11. REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS FLECTORES

Se presenta como ejemplo el caso de una viga continua de dos tramos de igual longitud  $l$  y con carga uniforme  $q$ . La solución con análisis elástico indica un momento de apoyo  $M_{ap} = -ql^2/8$  y un momento máximo de tramo  $M_{max,tr} = ql^2/14.22$ , es decir solo el 56% del apoyo.

También hay que considerar que en el apoyo, en general, la sección trabaja como rectangular, mientras que en el tramo trabaja como viga placa con la posibilidad de desarrollar una capacidad resistente mayor debido a la mayor área comprimida de hormigón. De esta manera, las dimensiones de la viga estarán gobernadas por la sección de apoyo.

Con el objetivo de optimizar el uso de los recursos y no desperdiciar material en todo el tramo, resulta conveniente disminuir el momento de apoyo y aumentar en consecuencia el momento de tramo para mantener las condiciones de equilibrio estático, ver fig.5.30. Es decir, significa utilizar los conceptos del cálculo plástico de estructuras.

Para la carga  $q$  creciente y diagrama de momentos en régimen elástico, cuando en el apoyo se alcanza el momento resistente de esa sección, se forma ahí la "rótula plástica". La carga puede seguir aumentando hasta  $q_u$  cuando en el tramo también se alcanza el momento resistente. En esta última etapa la sección de apoyo no puede incrementar el momento, pero debe tener la suficiente ductilidad para permitir el giro plástico.

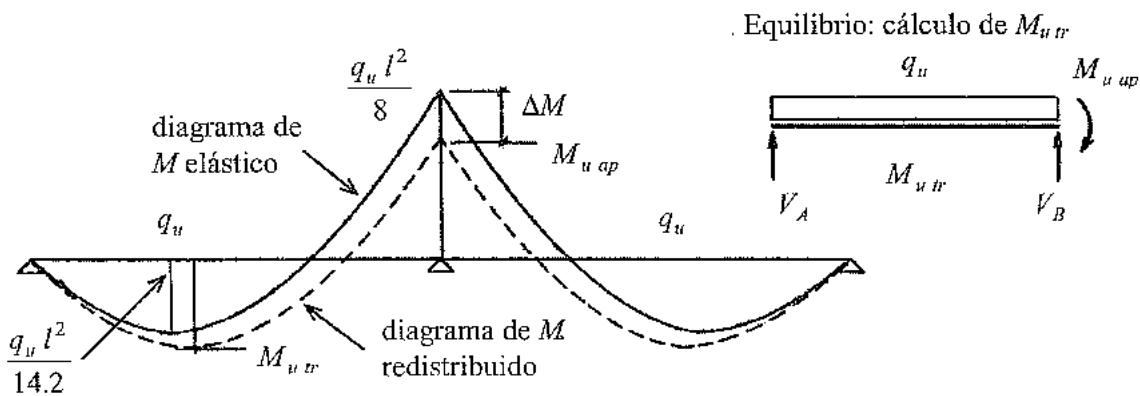


Figura 5.30: Redistribución de momentos en una viga continua

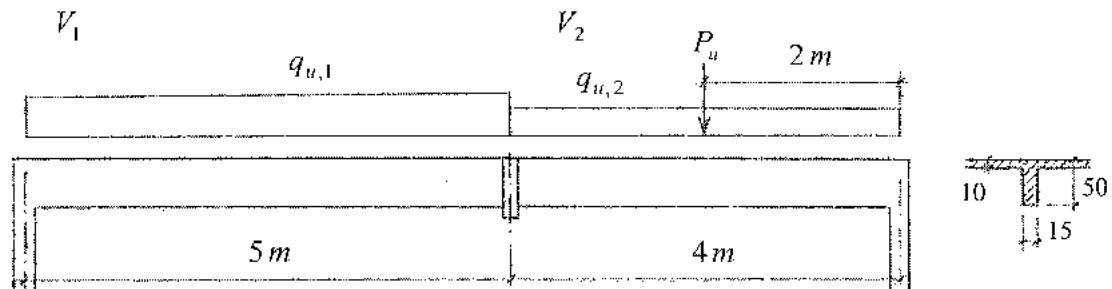
La ductilidad depende de la deformación de la armadura en el estado límite de resistencia. El CIRSOC 201 establece como porcentaje del momento de apoyo que se puede redistribuir a:

$$\Delta M = 1000 \varepsilon_s (\%) \leq 20\% \quad (5.83)$$

Para poder utilizar la redistribución debe ser  $\varepsilon_s \geq 0.0075$ , para garantizar una ductilidad mínima, y el límite del 20% se debe a la ductilidad máxima que puede desarrollar.

## 5.12. DISEÑO POR RESISTENCIA A FLEXIÓN Y CORTE DE UNA VIGA CONTÍNUA DE DOS TRAMOS. Ejemplo 5.1

Dimensionar la siguiente viga continua típica de un edificio para viviendas.



### Cargas:

V<sub>1</sub>: cargas permanentes  $q_D = 25 \text{ KN} / \text{m}$

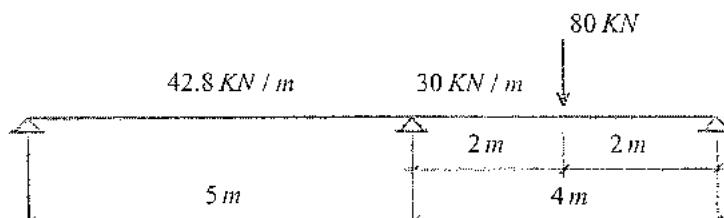
sobrecarga repartida  $q_L = 8 \text{ KN} / \text{m}$

$$q_{u,1} = 1.2 q_D + 1.6 q_L = 42.8 \text{ KN} / \text{m}$$

V<sub>2</sub>: cargas permanentes  $q_D = 25 \text{ KN} / \text{m}$   $\rightarrow q_{u,2} = 1.2 q_D = 30 \text{ KN} / \text{m}$

sobrecarga concentrada  $P_L = 50 \text{ KN}$   $\rightarrow P_u = 1.6 P_L = 80 \text{ KN}$

### Análisis estructural:



$M_u(\text{ap}) [\text{KNm}]$	-127.6	127.6		
	Redistribución de momento de apoyo: $\Delta M = 1000 \varepsilon_t (\%) \leq 20\%$			
	Se supone $\varepsilon_t \cong 0.015 \rightarrow \Delta M = 15\%$			
$M_u(\text{ap}) [\text{KNm}]$		-108.5		
$V_q [\text{KN}]$	107	107	60	60
$V_P [\text{KN}]$			40	40
$V_M [\text{KN}]$	-21.7	21.7	27.1	-27.1
$V_u [\text{KN}]$	85.3	128.7	127.1	72.9
$\chi [m]$	$\rightarrow 2.00$		2.00	$\leftarrow$
$M_u(\text{tr}) [\text{KNm}]$	85.00		85.80	
			Distancia al punto de corte nulo	

■ **Dimensionamiento por resistencia a flexión**

- **Sección apoyo:** rectangular 15/50

Hormigón H-25  
Acero ADN 420

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{108.5}{0.9} = 120.5 \text{ KNm} = 0.1205 \text{ MNm}$$

$$h = 50 \text{ cm} \rightarrow d = 50 - 2 - 0.6 - 0.6 \cong 46.5 \text{ cm}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b_w}}} = \frac{0.465}{\sqrt{\frac{0.1205}{0.15}}} = 0.519 \rightarrow \text{tabla FLEXIÓN 3 : } k_e = 26.366, k_z = 0.903, k_c = 0.228, \varepsilon_s = 0.0102$$

$$A_s = k_e \frac{M_n}{d} = 26.366 \frac{0.1205}{0.465} = 6.83 \text{ cm}^2$$

Otra forma:  $z = k_z d = 0.903 \cdot 0.465 = 0.420 \text{ m}$

$$A_s = \frac{M_n}{z f_y} = \frac{0.1205}{0.420 \cdot 420} 10000 = 6.83 \text{ cm}^2 \quad \checkmark \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\phi 12 \text{ (doblados de V}_1\text{)} \\ 2\phi 12 \text{ (doblados de V}_2\text{)} \\ 2\phi 12 \text{ (adicional)} \end{array} \right.$$

$\varepsilon_s = 0.0102 < 0.015$  supuesto para redistribuir momentos,  
luego habría que ajustar  $\Delta M$  en apoyo

$$> 0.005 \rightarrow \phi = 0.9 \quad \checkmark$$

- **Sección tramo V<sub>1</sub>:** sección T

Ancho de colaboración:  $b = L/4 = 1.25 \text{ m}$

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{85.00}{0.9} = 94.40 \text{ KNm} = 0.0944 \text{ MNm}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b}}} = \frac{0.465}{\sqrt{\frac{0.0944}{1.25}}} = 1.692 \rightarrow \text{tabla FLEXIÓN 3 : } k_e < 24.30, k_z > 0.98, k_c < 0.048, \varepsilon_s > 0.060$$

$c = k_c d = 0.048 \cdot 0.465 = 0.022 < h_f = 0.10 \rightarrow$  eje neutro dentro de la losa,  
sección rectangular de ancho  $b$

$$z = k_z d = 0.98 \cdot 0.465 = 0.456 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{M_n}{z f_y} = \frac{0.0944}{0.456 \cdot 420} 10000 = 4.93 \text{ cm}^2 \rightarrow 5\phi 12$$

$$\varepsilon_s > 0.005 \rightarrow \phi = 0.9 \quad \checkmark$$

- **Sección tramo V<sub>2</sub>:** sección T

Ancho de colaboración:  $b = L/4 = 1.00 \text{ m}$

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{85.80}{0.9} = 95.3 \text{ KNm} = 0.0953 \text{ MNm}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b}}} = \frac{0.465}{\sqrt{\frac{0.0953}{1.00}}} = 1.506 \rightarrow \text{tabla FLEXIÓN 3 : } k_e < 24.30, k_z > 0.98, k_c < 0.048, \varepsilon_s > 0.060$$

$c = k_c d = 0.048 \cdot 0.465 = 0.022 < h_f = 0.10 \rightarrow$  eje neutro dentro de la losa,  
sección rectangular de ancho  $b$

$$z = k_z d = 0.98 \cdot 0.465 = 0.456 m$$

$$A_s = \frac{M_n}{z f_y} = \frac{0.0953}{0.456 \cdot 420} 10000 = 4.98 cm^2 \rightarrow 5\phi 12$$

$$\varepsilon_s > 0.005 \rightarrow \phi = 0.9 \checkmark$$

- Verificación armadura mínima:

$$A_{s,min} = \frac{1.4 b_w d}{f_y} = \frac{1.4 \cdot 0.15 \cdot 0.465}{420} 10000 = 2.33 cm^2 \checkmark$$

#### ■ Dimensionamiento por resistencia a corte

-  $V_1$

Extremo izquierdo: apoyo directo

$$V_u(x=d) = 85.30 - 42.8(0.10 + 0.45) = 61.76 KN$$

$$V_n \geq \frac{V_u}{\phi} = \frac{61.76}{0.75} = 82.35 KN$$

$$\tau_n = \frac{V_n}{b_w d} = \frac{0.08235}{0.15 \cdot 0.465} = 1.18 MPa \leq \tau_{lim} = \frac{5}{6} \sqrt{f'_c} = 4.17 MPa \checkmark$$

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d = \frac{1}{6} \sqrt{25 \cdot 0.15 \cdot 0.465} = 0.0581 MN = 58.1 KN$$

$$V_s = V_n - V_c = 82.35 - 58.1 = 24.25 KN$$

Estríbos: se elige  $\phi 6$  2 ramas,  $s_{max} = d/2 \cong 0.25 m$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} 10^4 = \frac{0.02425}{420 \cdot 0.465} 10^4 = 1.24 cm^2/m \rightarrow s = \frac{2 \cdot 0.28}{1.24} = 0.45 m > s_{max}$$

se adopta 1 $\phi 6$  c/25 2 ramas

Extremo derecho: apoyo indirecto

$$V_u = 128.7 KN$$

$$V_n \geq \frac{V_u}{\phi} = \frac{128.7}{0.75} = 171.6 KN$$

$$\tau_n = \frac{V_n}{b_w d} = \frac{0.1716}{0.15 \cdot 0.465} = 2.46 MPa \leq \tau_{lim} = \frac{5}{6} \sqrt{f'_c} = 4.17 MPa \checkmark$$

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d = \frac{1}{6} \sqrt{25} 0.15 0.465 = 0.0581 MN = 58.1 KN$$

$$V_s = V_n - V_c = 171.6 - 58.1 = 113.5 KN$$

Estriplos: se adopta 1φ6 c/25 2 ramas, igual que en la zona izquierda:

$$V_{s\ est} = \frac{A_v f_y d}{s} = \frac{2 0.28 10^{-4} 420 0.465}{0.25} 10^3 = 43.7 KN$$

Barras dobladas:

$$V_{s\ bd} = V_s - V_{s\ est} = 113.5 - 43.7 = 69.80 KN$$

$$l_{bd} = \frac{\phi V_{s\ bd}}{q_u} = \frac{0.75 69.8}{42.8} = 1.22 m \text{ ver diagrama de } V_u$$

$$\Omega_{bd} = \frac{69.80 1.22}{2} = 42.58 KNm$$

$$\sum A_v = \frac{\Omega_{bd}}{f_y \sqrt{2} d} = \frac{42.58 10^{-3}}{420 \sqrt{2} 0.465} 10000 = 1.54 cm^2 \rightarrow 2\phi 12$$

## - V<sub>2</sub>

*Extremo izquierdo:* apoyo indirecto

$$V_u = 127.1 KN$$

$$V_n \geq \frac{V_u}{\phi} = \frac{127.1}{0.75} = 169.47 KN$$

$$\tau_n = \frac{V_n}{b_w d} = \frac{0.1695}{0.15 0.465} = 2.43 MPa \leq \tau_{lim} = \frac{5}{6} \sqrt{f'_c} = 4.17 MPa \checkmark$$

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d = \frac{1}{6} \sqrt{25} 0.15 0.465 = 0.0581 MN = 58.1 KN$$

$$V_s = V_n - V_c = 169.47 - 58.1 = 111.37 KN$$

Estriplos: se adopta 1φ6 c/25 2 ramas:

$$V_{s\ est} = \frac{A_v f_y d}{s} = \frac{2 0.28 10^{-4} 420 0.465}{0.25} 10^3 = 43.7 KN$$

Barras dobladas:

$$V_{s\ bd} = V_s - V_{s\ est} = 111.37 - 43.7 = 67.67 KN$$

$$l_{bd} = \frac{\phi V_{s\ bd}}{q_u} = \frac{0.75 67.67}{30} = 1.69 m \text{ ver diagrama de } V_u$$

$$\Omega_{bd} = \frac{67.67 1.69}{2} = 57.18 KNm$$

$$\sum A_v = \frac{\Omega_{bd}}{f_y \sqrt{2} d} = \frac{57.18 10^{-3}}{420 \sqrt{2} 0.465} 10000 = 2.07 cm^2 \rightarrow 2\phi 12$$

*Extremo derecho:* apoyo directo

$$V_u(x=d) = 72.9 - 30(0.10 + 0.45) = 56.4 \text{ KN}$$

$$V_n \geq \frac{V_u}{\phi} = \frac{56.4}{0.75} = 75.2 \text{ KN}$$

$$\tau_n = \frac{V_n}{b_w d} = \frac{0.0752}{0.15 \cdot 0.465} = 1.08 \text{ MPa} \leq \tau_{lim} = \frac{5}{6} \sqrt{f'_c} = 4.17 \text{ MPa} \quad \checkmark$$

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d = \frac{1}{6} \sqrt{25 \cdot 0.15 \cdot 0.465} = 0.0581 \text{ MN} = 58.1 \text{ KN}$$

$$V_s = V_n - V_c = 75.2 - 58.1 = 17.1 \text{ KN}$$

Estríbos: se adopta 1φ6 c/25 2 ramas, igual que en la zona izquierda:

$$V_{s,est} = \frac{A_v f_y d}{s} = \frac{2 \cdot 0.28 \cdot 10^{-4} \cdot 420 \cdot 0.465}{0.25} \cdot 10^3 = 43.7 \text{ KN} > 17.1 \text{ KN} \quad \checkmark$$

*Caballlete bajo carga concentrada*

$$A_{cab} = \frac{P_u}{\phi} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{f_y} = \frac{0.080 \sqrt{2}}{0.9 \cdot 2 \cdot 420} \cdot 10^4 = 1.50 \text{ cm}^2 \rightarrow 1\phi 16$$

### - Unión ala-alma

*Apoyo:* toda la armadura de tracción arriba dentro del nervio.  $\checkmark$

*Tramo:*

$$\tau_{0,u,max} = 0.885 \text{ MPa}$$

$$\tau_0 = \tau_n = \frac{\tau_{0,u}}{\phi} = \frac{0.885}{0.75} = 1.18 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = \tau_0 \frac{b_w}{h_f} \frac{b_1}{b} = 1.18 \frac{0.15}{0.10} \frac{0.425}{1.00} = 0.752 \text{ MPa}$$

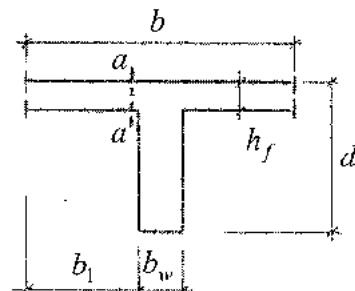
$$V_a = \tau_a h_f l = 0.0752 \text{ MN} = 75.2 \text{ KN}$$

$$V_{ca} = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} h_f l = 0.083 \text{ MN} = 83 \text{ KN}$$

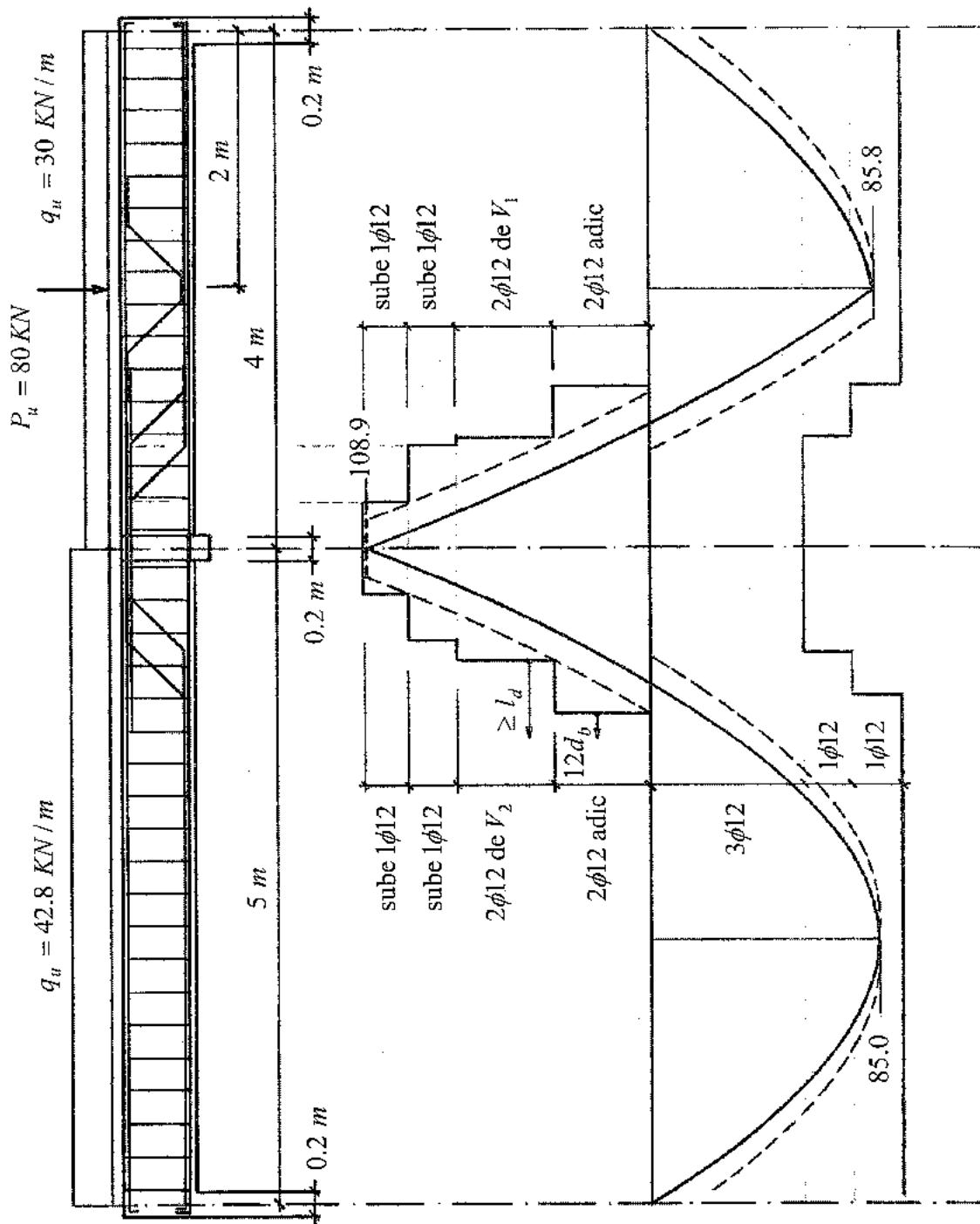
$$V_a > \frac{1}{2} V_{ca} \rightarrow \text{armadura mínima de corte: } A_{v,min} = 0.33 \frac{h_f s}{f_y}$$

$$\frac{A_v}{s} = 0.33 \text{ MPa} \frac{0.10 \text{ m}}{420 \text{ MPa}} \cdot 10^4 = 0.78 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

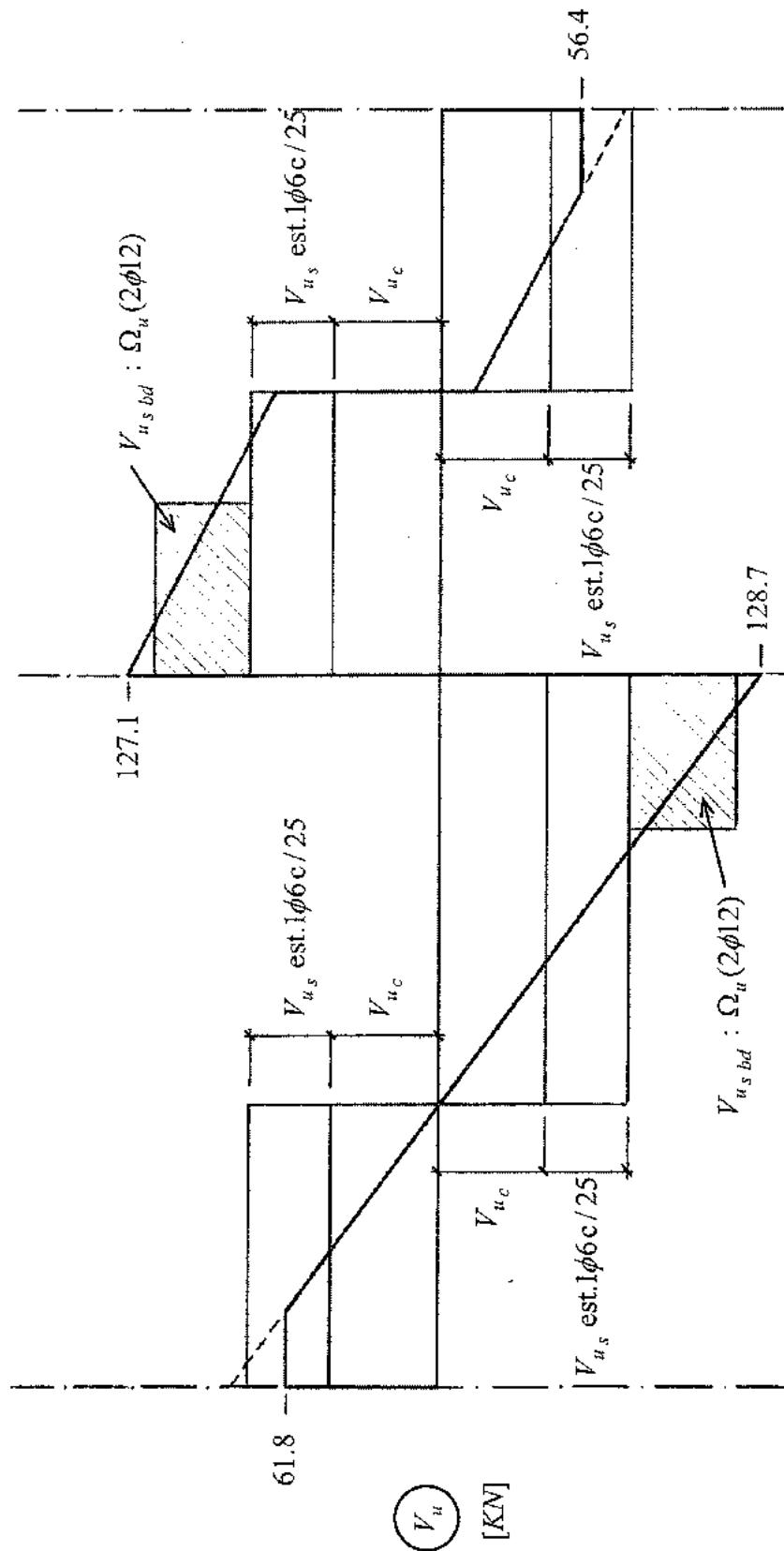
1φ6 c/25:  $0.28 \cdot 4 = 1.12 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad \checkmark$ , o cubierto con la armadura de la losa



#### **■ Cobertura de los diagramas de flexión y corte**



$M_u$



Flexión:  $M_u(1\phi 12)$ : tramo  $= 1.13 \cdot 10^{-4} \cdot 0.456 \cdot 420 \cdot 10^3 \cdot 0.9 = 19.4 \text{ KNm}$   
 apoyo  $= 1.13 \cdot 10^{-4} \cdot 0.426 \cdot 420 \cdot 10^3 \cdot 0.9 = 18.2 \text{ KNm}$

Corte:  $V_{u_c} = 58.1 \cdot 0.75 = 43.5 \text{ KN}$   
 $V_{u_s} (\text{est. } 1\phi 6c / 25) = 43.7 \cdot 0.75 = 32.8 \text{ KN}$   
 $\Omega_{hd}(1\phi 12) = 1.13 \cdot 10^{-4} \sqrt{2} \cdot 420 \cdot 10^3 \cdot 0.465 \cdot 0.75 = 23.4 \text{ KNm}$

Observaciones:

- Esta superficie (23.4 KNm) se representa con un rectángulo en el diagrama de corte, o bien podría ser un trapecio u otra superficie que "cubra" el diagrama de  $V_u$ , y se debe controlar que la posición de las barras dobladas coincida con dicha superficie.
- Se debe observar, además, que una primera fisura que pueda formarse desde el borde del apoyo resulte atravesada por alguna de estas barras dobladas
- Las barras dobladas no se doblan cubriendo exactamente el diagrama de  $M$ , sino que se deja una longitud de "decalaje" que aproximadamente se hace  $v \approx 0.5 z$  (ver 5.9), representado con una línea de trazos en el diagrama de momentos.
- Si bien el reglamento considera no colocar estribos en la zona donde  $V_u / \phi \leq 0.5 V_c$ , en este ejemplo se han dispuestos estribos en toda la viga.

• **Anclajes:**

De acuerdo a ec. (2.16):  $l_d = \left[ \frac{9}{10} \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \left[ \frac{\psi_t \psi_e \psi_s \lambda}{c_b + K_{tr}} \right] \right] d_b \geq 300 \text{ mm}, \quad 12.10 \text{ CIRSOC 201}$

- 2  $\phi 12$  arriba:

$c_b = 32 \text{ mm}$  distancia desde el eje de la barra a la superficie del hormigón

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} f_{yt}}{10 s n} = \frac{0.56 \text{ cm}^2 \cdot 420 \text{ MPa}}{10 \text{ MPa} \cdot 25 \text{ cm} \cdot 2} = 0.47 \text{ cm}$$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{3.2 + 0.47}{1.2} = 3.06 \quad \text{pero debe ser} \leq 2.5 \rightarrow \frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = 2.5$$

$\psi_t = 1.3$  hay 300 mm de hormigón debajo del anclaje

$\psi_e = 1.0$  armadura no revestida

$\psi_s = 0.8$   $d_b = 12 \text{ mm} \leq 16$

$\lambda = 1.0$  hormigón de densidad normal

resulta:

$$l_d = \left[ \frac{9}{10} \frac{420}{\sqrt{25}} \frac{1.3}{2.5} \frac{1.0}{0.8} \frac{0.8}{1.0} \right] d_b = 31.4 \quad d_b = 38 \text{ cm}$$

$$12 d_b = 12 \cdot 1.2 = 14.4 \text{ cm} \approx 15 \text{ cm}$$

- **Armadura de flexión interrumpida en zona de compresión** (arriba)

Se verifica la disposición 12.10.5 CIRSOC 201

- **Disposiciones para armadura para momentos positivos** 12.11 CIRSOC 201

- Armadura que llega al apoyo

Extremo simplemente apoyado:  $A_s > 1/3 A_s$  ✓

Extremo continuo:  $3/5 A_s > 1/4 A_s$  ✓

- Diámetro máximo para anclaje en puntos de momento nulo

Apojos extremos: no es necesaria la verificación porque la armadura termina con gancho normal a  $90^\circ$

$$\text{Punto de inflexión: } l_d \leq \frac{M_n}{V_u} + l_a$$

$$M_n (A_s = 3\phi 12) = A_s f_y z = 3 \times 1.13 \cdot 10^{-4} \cdot 420 \cdot 10^3 \cdot 0.456 = 64.9 \text{ KNm}$$

$$V_u \approx 100 \text{ KN}$$

$$l_a = d = 0.465 \text{ m}$$

$$l_d = \frac{31.4}{1.3} d_b = 24 d_b = 29 \text{ cm} \quad (\alpha=1.0 \text{ para anclaje de barras inferiores})$$

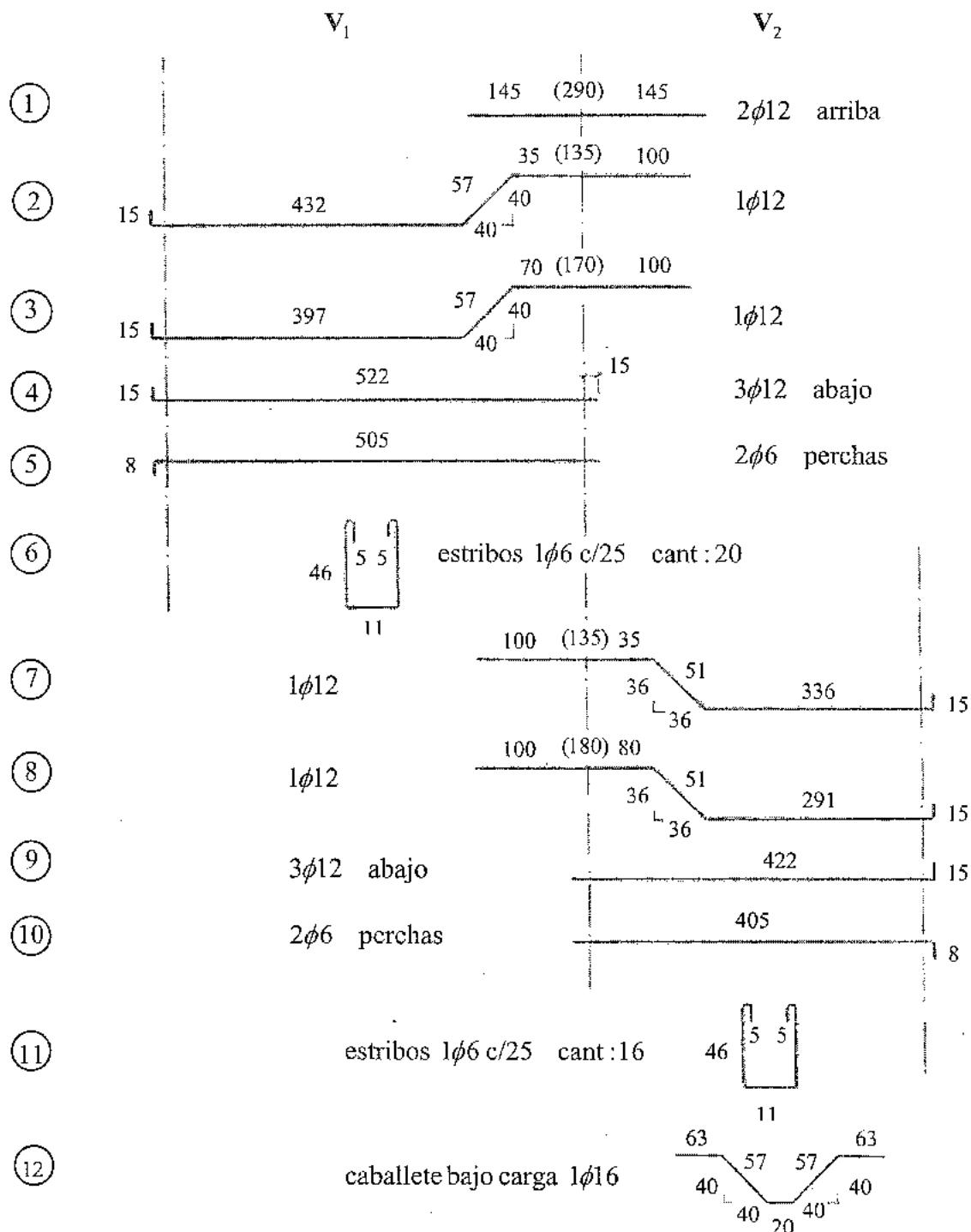
$$l_d \leq \frac{64.9}{100} + 0.465 = 1.11 \text{ m} = 111 \text{ cm} \quad \checkmark$$

- **Disposiciones para armadura para momentos negativo** 12.12 CIRSOC 201

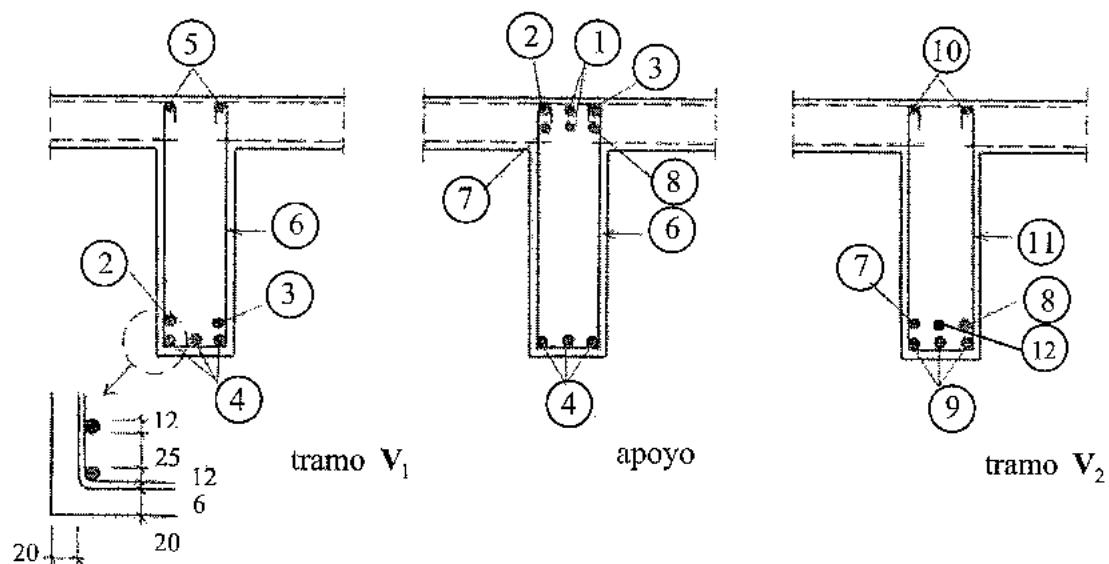
- 1/3 armadura total se debe prolongar, más allá del punto de momento nulo (sin desplazar), una longitud  $l_e = d, 12d_b$  o  $(1/16)l$ , la mayor.

$$l_e = d = 46.5 \text{ cm} \quad 2\phi 12 = 2.26 \text{ cm}^2 \quad \frac{2.26}{A_s} = \frac{2.26}{6.83} = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

■ **Detalles de hierros:**



Nota: posiciones 4 y 9 se empalman con empalme clase A s/CIRSOC 201, 7.13: integridad estructural. Longitud de empalme:  $l_{em} = 1.0 l_d = 29 \text{ cm} \cong 30 \text{ cm}$



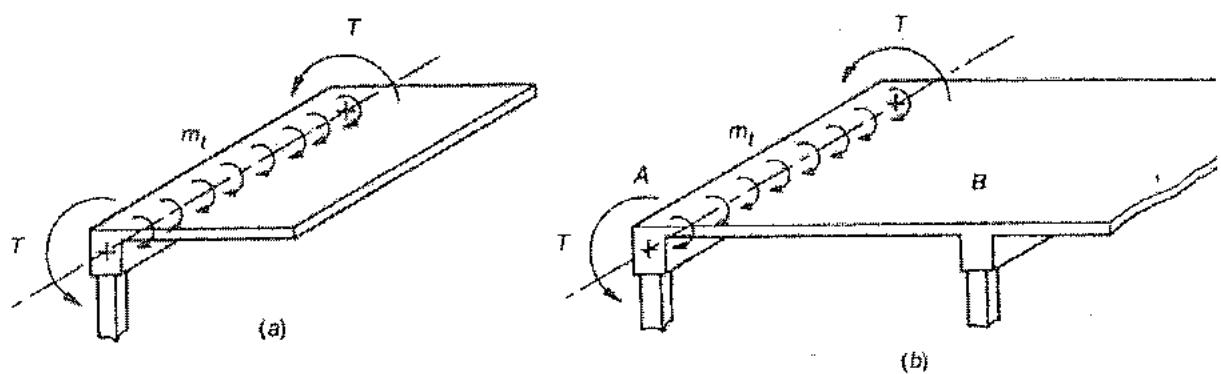
# CAPÍTULO 6

## DISEÑO A TORSIÓN

### 6.1. INTRODUCCIÓN

La solicitud de torsión se presenta frecuentemente en las construcciones de hormigón armado. Sin embargo hay que distinguir dos situaciones:

- La *torsión primaria* ó torsión de "equilibrio", cuando los momentos torsores son necesarios para el equilibrio de la carga externa, ver fig.6.1(a).
- La *torsión secundaria* o de "compatibilidad", que se genera por condiciones de compatibilidad de deformaciones entre elementos estructurales que conforman un sistema hiperestático. Estos momentos de torsión no son necesarios para el equilibrio, y si no se considera la continuidad, habrá fisuración y redistribución de esfuerzos internos, pero en general no se producirá colapso. Un ejemplo de esta situación se presenta en la fig.6.1(b).



**Figura 6.1:** Efectos de torsión en elementos de hormigón armado  
 (a) Torsión primaria o de "equilibrio"  
 (b) Torsión secundaria o de "compatibilidad"

Usualmente los momentos torsores secundarios o de "compatibilidad" se desprecian en los cálculos. La fisuración que se produce es "cosida" por los estribos del dimensionamiento para el esfuerzo de corte en la viga. Cuando estos momentos quieren ser tenidos en cuenta en el cálculo estructural, se debe considerar la disminución significativa de la rigidez a torsión cuando el elemento pasa del estado I al estado II fisurado.

## 6.2. COMPORTAMIENTO A TORSIÓN DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

La teoría de Saint Venant (1855) para torsión libre es válida para barras cuyas secciones extremas puedan girar libremente, y además el giro de la sección recta es constante a lo largo de la barra, que se cumple cuando el momento torsor es constante. Estas condiciones en general no se satisfacen y las restricciones al giro en los apoyos originan tensiones normales por alabeo impedido. Son importantes en secciones abiertas y delgadas (perfiles metálicos de chapa plegada), pero pueden despreciarse en secciones macizas o secciones cerradas, casos usuales en hormigón armado.

La solución de la ecuación diferencial de la torsión de Saint Venant da el giro por unidad de longitud  $\phi$ , y la tensión tangencial  $\tau$ .

$$\phi = \frac{T}{G I_p} \quad \tau = \frac{T}{I_p} \rho \quad (6.1)$$

donde  $G = E/(2(1+\nu))$  es el módulo de deformación transversal,  $T$  el momento torsor,  $I_p$  el momento de inercia polar y  $\rho$  la distancia desde el centro de giro al punto considerado.  $GI_p$  es la rigidez a torsión.

En el caso de una sección rectangular las tensiones se distribuyen como se presenta en la fig.6.2.

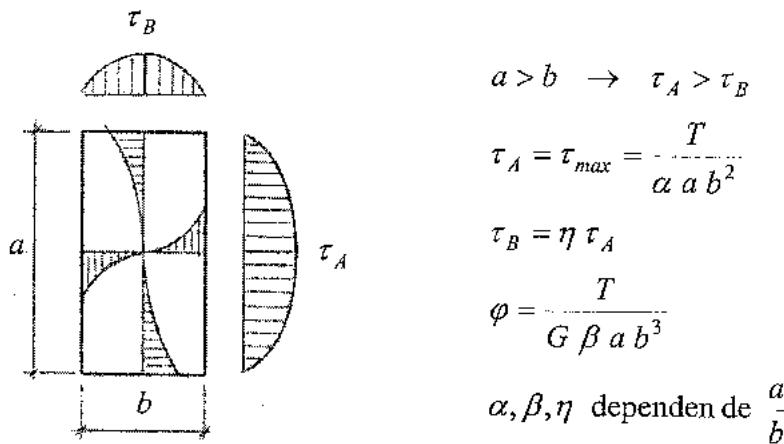
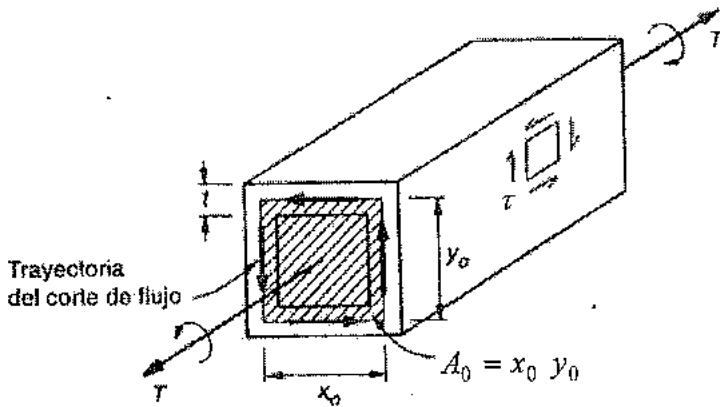


Figura 6.2: Tensiones tangenciales en sección rectangular

Si se comparan los ensayos de una sección rectangular llena y de otra rectangular hueca de iguales dimensiones exteriores, se observa que una vez iniciada la fisuración (Estado II), ambas secciones presentan rigideces análogas. Se produce una redistribución de esfuerzos

hacia la periferia, de forma tal que sólo participa la parte de hormigón que se encuentra en la "cáscara" de la sección.

Se puede utilizar entonces la analogía del tubo de pared delgada, o de la sección hueca, para la cual Bredt, en 1896, dedujo una ecuación muy simple. Dentro de las paredes del tubo, el momento torsor  $T$  genera un flujo constante de esfuerzo rasante  $q$ , ver fig.6.3.



**Figura 6.3:** Tubo de pared delgada bajo torsión

Resulta:

$$q = \tau t \quad (6.2)$$

y por equilibrio:

$$T = 2 q x_0 \frac{y_0}{2} + 2 q y_0 \frac{x_0}{2} = 2 q x_0 y_0 = 2 q A_0 \quad (6.3)$$

donde  $A_0$  es el área total encerrada por el flujo de corte. A partir de (6.2) y (6.3) la tensión de corte resulta:

$$\tau_T = \frac{T}{2 A_0 t} \quad (6.4)$$

Observando un elemento diferencial en la cara de la viga de la fig.6.3 solicitada por un estado de corte puro  $\tau$ , las tensiones principales serán  $\sigma_I = -\sigma_{II} = \tau$  inclinadas a  $45^\circ$ .

Cuando la tensión principal de tracción alcance la resistencia directa del hormigón a tracción  $\sigma = f'_t$ , se habrá alcanzado el momento torsor de fisuración  $T_{cr}$ . De acuerdo con la ec.(2.2) se toma  $f'_t = 1/3 \sqrt{f'_c}$ .

Reemplazando  $\tau_{cr} = \sigma = f'_t = 1/3 \sqrt{f'_c}$  en (6.4) se despeja el momento torsor de fisuración:

$$T_{cr} = \frac{\sqrt{f'_c}}{3} 2 A_0 t \quad (6.5)$$

Recordando que  $A_0$  es el área encerrada por el flujo de corte, luego debe ser una fracción del área encerrada por el perímetro exterior de la sección  $A_{cp}$ . Además el espesor  $t$  puede aproximarse como una fracción de  $A_{cp} / P_{cp}$ , con  $P_{cp}$  perímetro de la sección. Para secciones

rectangulares sólidas se puede tomar  $t$  como  $1/6$  a  $1/4$  del ancho mínimo. Con el valor de  $1/4$  y una relación ancho-altura de la sección igual a  $0.5$  resulta:

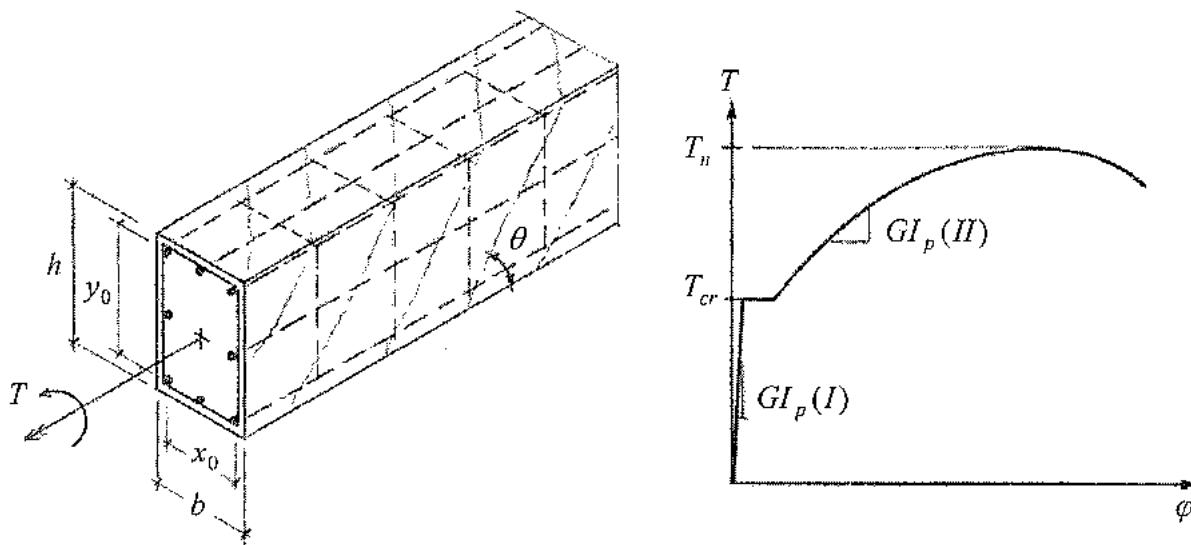
$$A_0 = \frac{2}{3} A_{cp} \quad t = \frac{3}{4} \frac{A_{cp}}{P_{cp}} \quad (6.6)$$

Reemplazando en (6.5) se obtiene finalmente:

$$T_{cr} = \frac{\sqrt{f_c}}{3} 2 \left( \frac{2}{3} A_{cp} \right) \left( \frac{3}{4} \frac{A_{cp}}{P_{cp}} \right) = \frac{\sqrt{f_c}}{3} \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \quad (6.7)$$

La ec.(6.7) permite estimar razonablemente el momento torsor de fisuración para elementos de hormigón armado independientemente de la forma de su sección transversal.

Para resistir momentos torsores  $T > T_{cr}$  se debe armar la sección con barras longitudinales y estribos poco espaciados. Cuando se alcanza  $T_{cr}$ , el elemento se fisura como se muestra en la fig.6.4, y se produce una redistribución de esfuerzos del hormigón al acero mientras ocurre una rotación plástica significativa. Finalmente cuando la sección se approxima a la resistencia última  $T_n$ , el recubrimiento se desprende y ya no contribuye a la capacidad a torsión del elemento.



**Figura 6.4:** Viga de hormigón armado solicitada a torsión

Cuando en el análisis estructural quieran considerarse los momentos torsores secundarios o de "compatibilidad", debe tenerse en cuenta la significativa reducción de la rigidez torsional en estado II fisurado:  $GI_p(II)$ . Una expresión aproximada es:

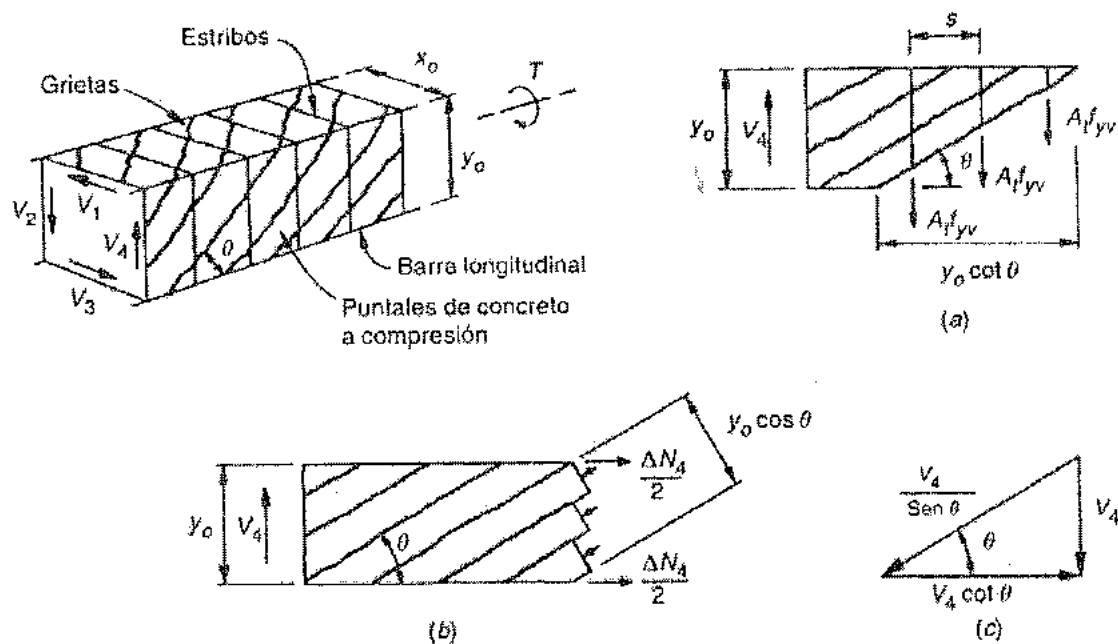
$$GI_p(II) = 0.15 (1 + 100 \rho) \frac{1}{1 + M/M_n} GI_p(I) \quad (6.8)$$

donde  $\rho$  es la cuantía de armadura longitudinal, no menor que  $0.5\%$ ,  $M$  es el momento flector que actúa conjuntamente con el torsor  $T$ , y  $M_n$  el momento resistente nominal de la sección con flexión pura.

Los ensayos experimentales han demostrado que luego de la fisuración el área encerrada por el flujo de corte queda definida por las dimensiones  $x_0$ ,  $y_0$ , ver fig.6.4, hasta el eje de los estribos, definiéndose:

$$A_{0h} = x_0 y_0 \quad p_h = 2(x_0 + y_0) \quad (6.9)$$

El análisis de la resistencia a torsión puede estimarse a partir de un modelo de reticulado espacial con cordones longitudinales traccionados, diagonales de hormigón comprimidas con inclinación  $\theta$ , y montantes traccionados formados por los estribos perpendiculares al eje del elemento, ver fig.6.5.



**Figura 6.5:** Modelo de reticulado espacial

La contribución a la resistencia a torsión del corte  $V_4$  que actúa en una de las paredes es:

$$T_4 = V_4 \frac{x_0}{2} = \frac{A_t f_{yv} y_0 \cot \theta}{s} \frac{x_0}{2} \quad (6.10)$$

con  $A_t$  área de una rama del estribo,  $f_{yv}$  su tensión de fluencia,  $s$  separación de los estribos. Sumando la contribución de las cuatro paredes se obtiene el momento torsor nominal:

$$T_n = \sum_{i=1}^4 T_i = 4 \frac{A_t f_{yv} x_0 y_0}{2 s} \cot \theta = \frac{2 A_{0h} A_t f_{yv}}{s} \cot \theta \quad (6.11)$$

Los puntales diagonales a compresión generan fuerzas longitudinales de tracción para obtener el equilibrio de fuerzas, ver fig.6.5. Resulta:

$$\Delta N_4 = V_4 \cot \theta = \frac{A_t f_{yv} y_0}{s} \cot^2 \theta \quad (6.12)$$

Sumando para las cuatro caras, el incremento del esfuerzo axial en el elemento es:

$$\Delta N = \sum_{i=1}^4 \Delta N_i = \frac{A_t f_{yw}}{s} 2 (x_0 + y_0) \cot^2 \theta = \frac{A_t f_{yw} p_h}{s} \cot^2 \theta \quad (6.12)$$

Se debe colocar armadura longitudinal  $A_l$  para absorber  $\Delta N$ . Si se diseña para que trabaje con tensión de fluencia  $f_{yl}$ , resulta:

$$\Delta N = A_l f_{yl} \quad (6.13)$$

de donde

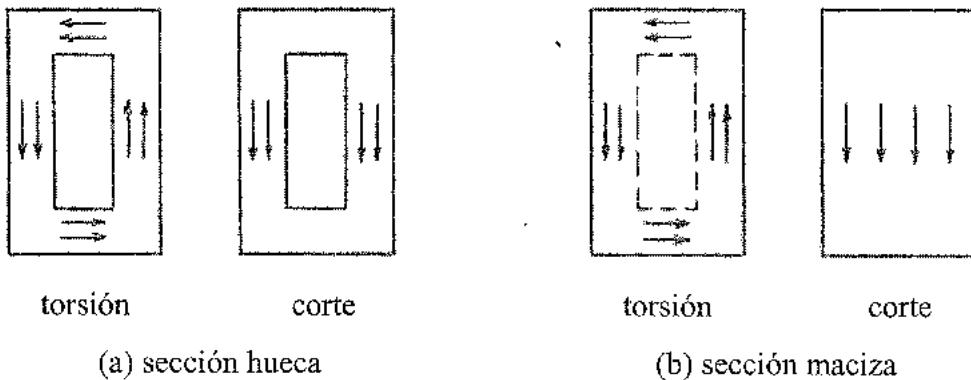
$$A_l = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yw}}{f_{yl}} \cot^2 \theta \quad (6.14)$$

Resultados experimentales indican que para aproximar mejor la resistencia a torsión dada en ec.(6.11), se debe reducir  $A_{0h}$  con un factor 0.85, es decir que  $A_0 = 0.85 A_{0h}$ , resultando:

$$T_n = \frac{2 (0.85 A_{0h}) A_t f_{yw}}{s} \cot \theta \quad (6.15)$$

### 6.3. ESFUERZOS COMBINADOS DE TORSIÓN Y CORTE

En pocos casos un elemento estructural está sometido a torsión pura. La situación usual corresponde a la acción simultánea de flexión y corte más torsión. El corte y la torsión producen tensiones tangenciales que se superponen. La tensión por corte  $\tau_V = V/b_w d$  (5.11) y la debida a torsión  $\tau_T = T/2A_0 t$  (6.4).



**Figura 6.6:** Suma de tensiones de corte y torsión

En secciones huecas, estas tensiones se suman en una de las paredes del cajón como se muestra en la fig.6.6(a). Para sección fisurada con  $A_0 = 0.85 A_{0h}$  y  $t = A_{0h} / p_h$ , la tensión tangencial máxima resulta.

$$\tau_{max} = \tau_V + \tau_T = \frac{V}{b_w d} + \frac{T p_h}{1.7 A_{0h}^2} \quad (6.16)$$

Si el espesor de la pared es tal que  $t < A_{0h} / p_h$  se reemplaza el segundo término por  $T / (1.7 A_{0h} t)$ .

En secciones macizas,  $\tau_T$  se distribuye alrededor del perímetro como lo describe el modelo del tubo de pared delgada, pero toda la sección contribuye a soportar  $\tau_V$  como se muestra en la fig.6.6(b). La comparación con resultados experimentales indica que la ec.(6.16) es algo conservadora y se obtiene una mejor representación de la tensión máxima con:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{V}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T}{1.7 A_{0h}^2}\right)^2} \quad (6.17)$$

## 6.4. VERIFICACIÓN DE LA RESISTENCIA A TORSIÓN – CÁLCULO DE ARMADURAS – DISPOSICIONES REGLAMENTARIAS

### 6.4.1. Resistencia

En el diseño de las secciones transversales, de los elementos estructurales, sometidas a esfuerzos de torsión, se debe cumplir la ec.(3.8) que particularizada en este caso resulta:

$$\phi T_n \geq T_u \quad (6.18)$$

donde  $T_u$  es el momento torsor producido por las cargas externas mayoradas,  $\phi$  el factor de reducción de resistencia, ver tabla 3.1:  $\phi = 0.75$ , y  $T_n$  la resistencia nominal a torsión calculada con (6.15) :

$$T_n = \frac{2 (0.85 A_{0h}) A_t f_{yv}}{s} \cotg \theta \quad (6.19)$$

con  $A_{0h}$  área encerrada por las líneas centrales de la armadura transversal para torsión según se indica en la fig.6.7.

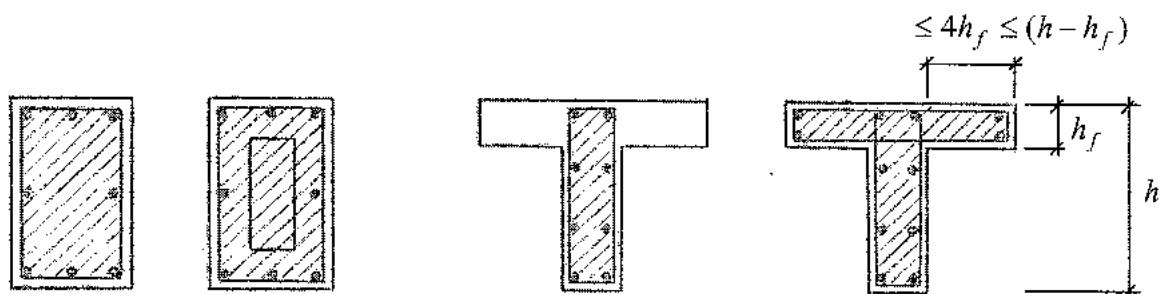


Figura 6.7: Definición de  $A_{0h}$  (área sombreada)

### 6.4.2. Consideración del momento torsor

- Si el momento torsor es menor que el 25% del momento de fisuración ec.(6.7), no se afectará en forma significativa la resistencia a flexión o a corte del elemento y entonces directamente la torsión puede ignorarse, es decir cuando:

$$\frac{T_u}{\phi} \leq 0.25 \frac{\sqrt{f'_c}}{3} \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \quad (6.20)$$

b) Cuando se supere el límite dado por (6.20), se debe dimensionar el elemento y las armaduras necesarias para soportar el momento torsor considerando que:

- Torsión primaria o de "equilibrio": se debe resistir el momento requerido por equilibrio estático.
- Torsión secundaria o de "compatibilidad": debido a las grandes rotaciones plásticas y redistribución de esfuerzos internos que ocurre cuando se produce la fisuración, se justifica utilizar un valor reducido en el diseño del elemento a torsión y los elementos de soporte.

Cuando  $T_u / \phi$  supera el momento torsor de fisuración  $T_{cr}$ , ec.(6.7), se puede reducir justamente al valor de  $T_{cr}$ , es decir:

$$\frac{T_u}{\phi} = \frac{\sqrt{f'_c}}{3} \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \quad (6.21)$$

con  $A_{cp}$  y  $P_{cp}$  área y perímetro de la sección de hormigón.

Lógicamente si  $T_u$  está comprendido entre los valores de (6.20) y (6.21), se deberá dimensionar para  $T_u$ .

Tener en cuenta que si se reduce el torsor al valor dado por (6.21), se deberán recalcular los esfuerzos internos en los otros elementos estructurales para mantener el equilibrio.

Si además actúa un esfuerzo normal, la expresión (6.21) resulta

$$\frac{T_u}{\phi} = \frac{\sqrt{f'_c}}{3} \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \sqrt{1 + \frac{3N_g}{A_g \sqrt{f'_c}}} \quad (6.22)$$

c) Las secciones ubicadas dentro de una distancia  $d$  desde la cara del apoyo se pueden dimensionar para  $T_u$  a una distancia  $d$ , reconociendo los efectos benéficos de la compresión generada en el apoyo. Sin embargo si existe un momento concentrado aplicado dentro de esa distancia, la sección crítica debe tomarse en la cara del apoyo.

#### 6.4.3. Límite de la tensión tangencial

Las dimensiones de la sección transversal deben ser tales que se limite la fisuración diagonal y que se evite la falla por compresión en las diagonales del modelo de reticulado, producido por los esfuerzos de corte y torsión.

A partir de comprobaciones experimentales se prescribe en el CIRSOC 201 que la máxima tensión tangencial calculada con ec.(6.16) o (6.17) no supere el siguiente límite:

$$\tau_{max} \leq \phi \left[ \frac{V_c}{b_w d} + \frac{2}{3} \sqrt{f'_c} \right] = \phi \left[ \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} + \frac{2}{3} \sqrt{f'_c} \right] = \phi \frac{5}{6} \sqrt{f'_c} = \phi \tau_{lim} \quad (6.23)$$

que es la tensión que produce la fisuración por corte más la resistencia máxima permitida para la armadura transversal, ver ec.(5.62)

#### 6.4.4. Armadura para torsión

La armadura para torsión está formada generalmente por estribos a 90° con respecto al eje del elemento y barras longitudinales.

Para controlar el ancho de fisuras diagonales, la resistencia a la fluencia de la armadura se limita a:

$$f_{yv} \leq 420 \text{ MPa} \quad (6.24)$$

- **Estribos:**

El área requerida para la sección transversal de una rama del estribo, obtenida de (6.18) y (6.19), resulta:

$$A_t = \frac{(T_u / \phi) s}{2 (0.85 A_{0h}) f_{yv} \cot \theta} \quad (6.25)$$

donde el ángulo  $\theta$  se puede tomar entre 30° y 60°, sugiriéndose adoptar  $\theta = 45^\circ$ .

Se deben combinar con los estribos para esfuerzos de corte. Para el caso típico de estribos de dos ramas será:

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{A_v}{s} + 2 \frac{A_t}{s} \quad (6.26)$$

se suma en  $\text{cm}^2 / \text{m}$ , luego se elige el diámetro y se despeja la separación  $s$ . Se deben cumplir los siguientes valores mínimos

$$\left( \frac{A_v + 2A_t}{s} \right)_{\min} = \frac{1}{16} \sqrt{f'_c} \frac{b_w}{f_{yv}} \geq \frac{0.33 b_w}{f_{yv}} \quad (6.27)$$

para prevenir una falla súbita (frágil) por tracción diagonal. Además para controlar la fisuración, los estribos deben cumplir con la separación máxima:

$$s \leq \begin{cases} p_h / 8 \\ 30 \text{ cm} \end{cases} \quad (6.28)$$

- **Armadura longitudinal**

La armadura longitudinal adicional para torsión se calcula con (6.14), es decir

$$A_l = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{yl}} \cot^2 \theta \quad (6.14)$$

donde  $\theta$  debe ser el mismo que en (6.25) y el cociente  $A_t / s$  el que se obtiene de (6.25) sin modificaciones posteriores por valores mínimos. Además debe satisfacer el mínimo, que a partir de resultados de ensayos es:

$$A_{t\min} = 5 \frac{\sqrt{f'_c}}{12} \frac{A_{cp}}{f_{yl}} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yw}}{f_{yl}} \quad (6.29)$$

donde:

$$\frac{A_t}{s} \geq \frac{1}{6} \frac{b_w}{f_{yw}} \quad (6.30)$$

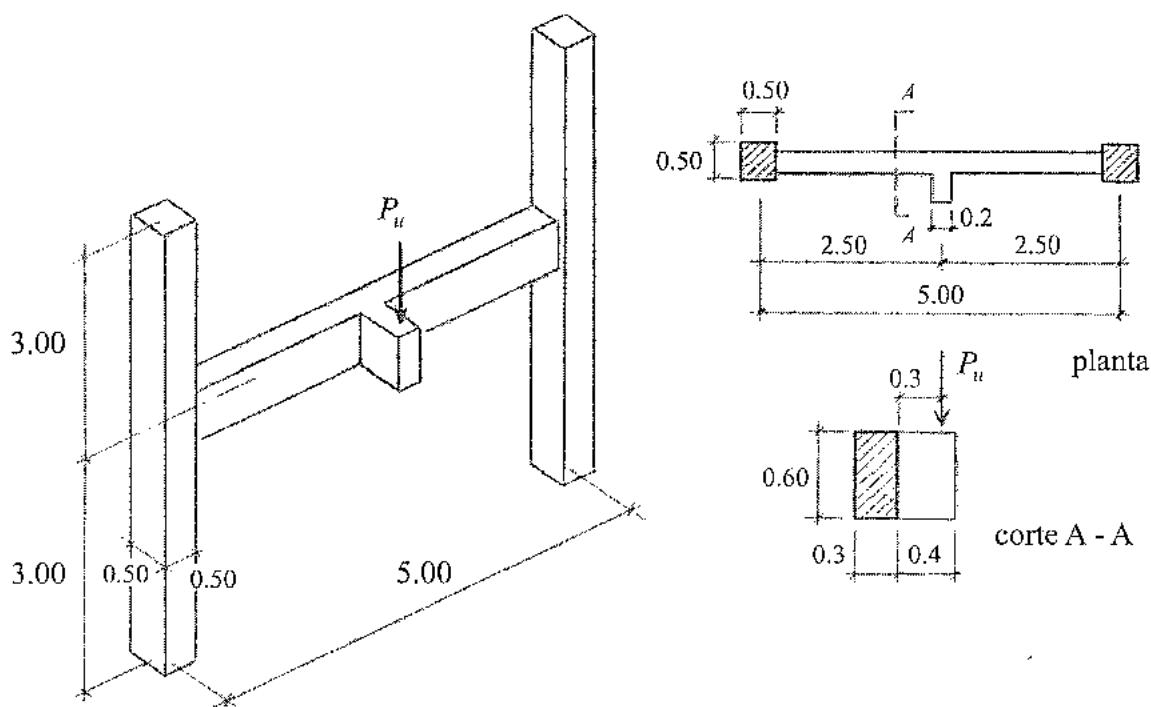
Las barras deben estar distribuidas alrededor del perímetro del estribo cerrado, con un máximo de 30 cm, y con un diámetro que cumpla con:

$$d_i \geq \begin{cases} s/24 \\ 10 \text{ mm} \end{cases} \quad (6.31)$$

Se debe cuidar el anclaje de las barras longitudinales para tener la resistencia completa en la cara del apoyo donde  $T_u$  es máximo en general. Para considerar el "decalaje", similar al análisis realizado para esfuerzos de corte, se debe prolongar la armadura una distancia ( $b_t + d$ ) más allá del punto donde ya no es teóricamente necesario.

## 6.5. DISEÑO DE UNA VIGA CON TORSIÓN DE EQUILIBRIO. Ejemplo 6.1

Dimensionar la siguiente viga:



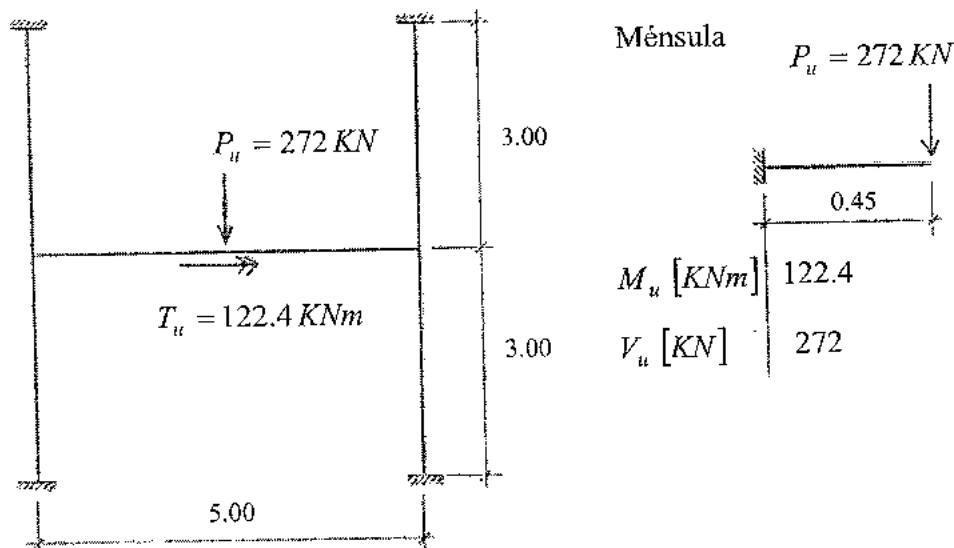
### Cargas:

Se considera solo la carga concentrada  $P_u$ , despreciándose el peso propio de la viga frente a  $P_u$ .

$$\left. \begin{array}{l} P_D = 120 \text{ KN} \\ P_L = 80 \text{ KN} \end{array} \right\} \quad P_u = 1.2 P_D + 1.6 P_L = 1.2 \cdot 120 + 1.6 \cdot 80 = 272 \text{ KN}$$

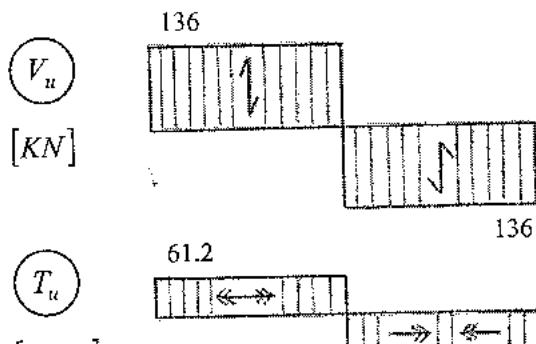
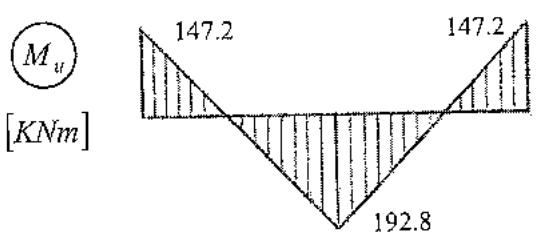
■ **Materiales:** Hormigón: H-25, Acero DN 420

■ **Análisis estructural:**



$$E = 4700 \sqrt{f'_c} = 4700 \sqrt{25} = 23500 \text{ MPa}$$

$$\text{Viga: } I = \frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12} = 0.0054 \text{ m}^4 \quad \text{Columna: } I = \frac{0.5 \cdot 0.5^3}{12} = 0.0052083 \text{ m}^4$$



■ **Dimensionamiento a flexión**

- Sección tramo: rectangular 30/60

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{192.8}{0.9} = 214.2 \text{ KNm} = 0.2142 \text{ MNm}$$

$$h = 60 \text{ cm} \rightarrow d = 60 - 2 - 1.0 - 1.0 = 56 \text{ cm}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{|M_n|}{b_w}}} = \frac{0.56}{\sqrt{\frac{0.2142}{0.30}}} = 0.663 \rightarrow \text{tabla FLEXIÓN 3 : } k_e = 25.247, k_c = 0.1336, \varepsilon_s = 0.0195$$

$$A_s = k_e \frac{M_u}{d} = 25.247 \frac{0.2142}{0.56} = 9.66 \text{ cm}^2 \text{ (abajo)}$$

$$\varepsilon_s = 0.0195 > 0.005 \rightarrow \phi = 0.9 \checkmark \text{ sección controlada por tracción.}$$

- Sección apoyo: rectangular 30/60

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{147.2}{0.9} = 163.6 \text{ KNm} = 0.1636 \text{ MNm}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{|M_n|}{b_w}}} = \frac{0.56}{\sqrt{\frac{0.1636}{0.30}}} = 0.758 \rightarrow \text{tabla FLEXIÓN 3 : } k_e = 24.899, k_c = 0.1028, \varepsilon_s = 0.0262$$

$$A_s = k_e \frac{M_u}{d} = 24.899 \frac{0.1636}{0.56} = 6.54 \text{ cm}^2 \text{ (arriba)}$$

$$\varepsilon_s = 0.0262 > 0.005 \rightarrow \phi = 0.9 \checkmark$$

■ **Dimensionamiento a corte:**

- Todas las secciones: corte es constante

$$V_n \geq \frac{V_u}{\phi} = \frac{136}{0.75} = 181.3 \text{ KN}$$

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d = \frac{1}{6} \sqrt{25} 0.30 0.56 = 0.140 \text{ MN} = 140 \text{ KN}$$

$$V_s = V_n - V_c = 181.3 - 140 = 41.3 \text{ KN}$$

$$\text{Estripos: } \frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_{yy} d} = \frac{0.0413}{420 0.56} 10^4 = 1.76 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

• **Dimensionamiento a torsión:**

- Todas las secciones: torsión es constante

- Valor nominal de la resistencia a torsión requerida

$$T_n \geq \frac{T_u}{\phi} = \frac{61.2}{0.75} = 81.6 \text{ KNm}$$

- Consideración del momento torsor

$$A_{cp} = 0.30 \cdot 0.60 = 0.18 \text{ m}^2$$

$$P_{cp} = 2(0.30 + 0.60) = 1.80 \text{ m}$$

$$T_{cr} = \frac{\sqrt{f'_c} \cdot A_{cp}^2}{3 \cdot P_{cp}} = \frac{\sqrt{25} \cdot 0.18^2}{3 \cdot 1.80} = 0.030 \text{ MNm} = 30 \text{ KNm}$$

$T_n > 0.25 T_{cr} \rightarrow$  es necesario considerar la torsión

Torsión de equilibrio  $\rightarrow$  dimensionar para  $T_n$  sin redistribución.

- Límite de la tensión tangencial: se debe cumplir:

$$\tau_{max} \leq \phi \tau_{lim}$$

$$\therefore 0.75 \cdot \frac{5}{6} \sqrt{f'_c} = 0.75 \cdot \frac{5}{6} \sqrt{25} = 3.125 \text{ MPa}$$

$$A_{0h} = x_0 \cdot y_0 = 0.26 \cdot 0.56 = 0.1456 \text{ m}^2$$

$$p_h = 2(x_0 + y_0) = 2(0.26 + 0.56) = 1.64 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{0h}^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.136}{0.30 \cdot 0.56}\right)^2 + \left(\frac{0.0612 \cdot 1.64}{1.7 \cdot 0.1456^2}\right)^2} = \sqrt{0.809^2 + 2.785^2} = 2.90 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Luego:  $2.90 < 3.125 \checkmark$

- Armaduras:

$$\text{Estríbos: } \frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2(0.85 A_{0h}) f_{yv} \cotg \theta}$$

$$A_{0h} = x_0 \cdot y_0 = 0.26 \cdot 0.56 = 0.1456 \text{ m}^2$$

$$\theta = 45^\circ \rightarrow \cotg \theta = 1$$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{0.0816}{2(0.85 \cdot 0.1456) \cdot 420} \cdot 10^4 = 7.85 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Barras longitudinales:  $A_l = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yw}}{f_{yl}} \cot^2 \theta = 7.85 \cdot 1.64 \frac{420}{420} 1 = 12.87 \text{ cm}^2$   
distribuidos en el perímetro.

\* **Combinación de armaduras:**

- Barras longitudinales:

- Tramo: armadura inferior:  $A_s + \frac{1}{3} A_l = 9.66 + \frac{1}{3} 12.87 = 13.95 \text{ cm}^2 \rightarrow 3\phi 25$

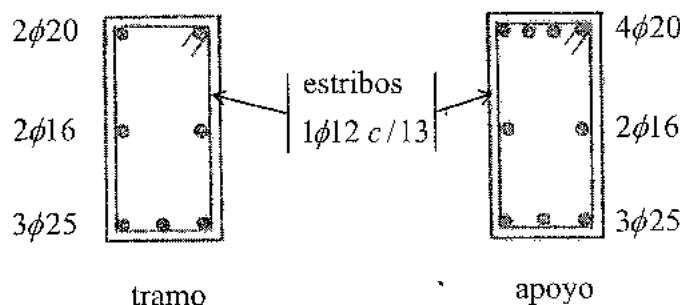
- Apoyo: armadura superior:  $A_s + \frac{1}{3} A_l = 6.55 + \frac{1}{3} 12.87 = 10.84 \text{ cm}^2 \rightarrow 4\phi 20$

- A mitad de altura:  $\frac{1}{3} A_l = \frac{1}{3} 12.87 = 4.29 \text{ cm}^2 \rightarrow 2\phi 16$

- Estribos:

$$\frac{A_{v+r}}{s} = \frac{A_v}{s} + 2 \frac{A_t}{s} = 1.76 + 2 \cdot 7.85 = 17.46 \text{ cm}^2 / \text{m} \rightarrow 1\phi 12c/13 \text{ (2 ramas)}$$

cumple con el límite  $\geq 0.33 \frac{b_w}{f_{yw}} = 0.33 \frac{0.30}{420} 10^4 = 7.93 \text{ cm}^2 / \text{m}$  ✓



## CAPÍTULO 7

### DISEÑO POR RESISTENCIA A FLEXO-COMPRESIÓN COLUMNAS CORTAS

#### 7.1. INTRODUCCIÓN

Las columnas son elementos que tienen principalmente cargas a compresión. Además, en general, también están sometidos a momentos flectores en uno o los dos ejes de la sección transversal, sin embargo la compresión domina su comportamiento.

El ejemplo más común se refiere a los elementos verticales de estructuras, pero también se incluyen los elementos principales de arcos, de pórticos inclinados o no, elementos a compresión en reticulados, cáscaras, etc.

Se utilizan tres tipos de elementos a compresión de hormigón armado:

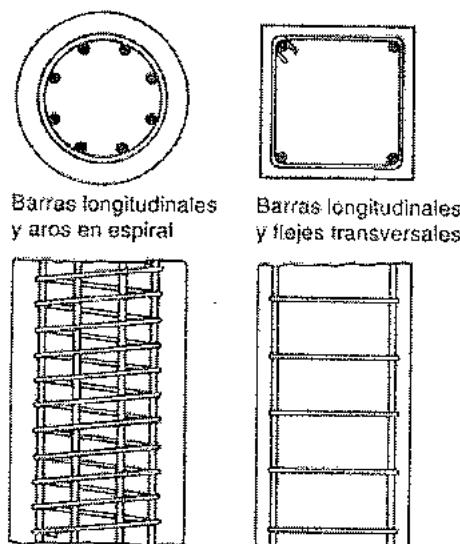
- Elementos reforzados con barras longitudinales y estribos transversales.
- Elementos reforzados con barras longitudinales y espirales continuas (zunchada).
- Elementos compuestos reforzados longitudinalmente con perfiles de acero estructural, o con tubos, con o sin barras adicionales, además de diferentes tipos de refuerzo transversal.

Se analizan, en este texto, los dos primeros casos que se muestran en la fig.7.1.

Las columnas pueden dividirse en dos grandes categorías:

- a) *Columnas cortas*: la resistencia depende solo de la resistencia de los materiales y de la geometría de la sección transversal.
- b) *Columnas esbeltas*: la resistencia puede reducirse en forma significativa por las deflexiones laterales, es decir influyen los efectos de segundo orden y los problemas de inestabilidad del equilibrio.

Se tratan en este capítulo las columnas “cortas”, y en el capítulo 8 las columnas “esbeltas”.



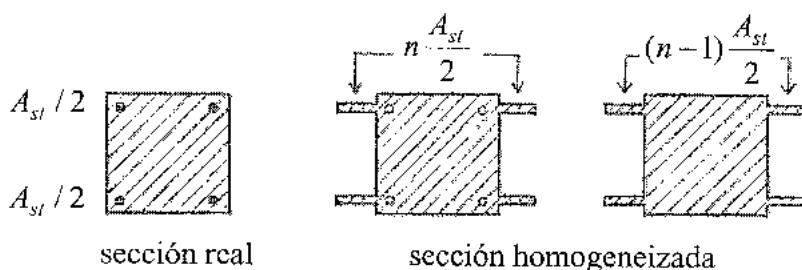
**Figura 7.1:** Columnas de hormigón armado

## 7.2. COMPRESIÓN AXIAL

### 7.2.1. Comportamiento elástico

Para tensiones inferiores a  $f'_c/2$  el hormigón se comporta prácticamente elástico. Debido a la adherencia entre hormigón y acero, la deformación es la misma para ambos materiales, y utilizando los conceptos de sección homogeneizada resulta:

$$\varepsilon_c = \frac{f_c}{E_c} = \varepsilon_s = \frac{f_s}{E_s} \rightarrow f_s = \frac{E_s}{E_c} f_c = n f_c \quad (7.1)$$



**Figura 7.2:** Sección homogeneizada para compresión axial

La condición de equilibrio es:

$$P = f_c (A_g + (n-1) A_{st}) \quad (7.2)$$

donde  $P$  es la carga axial,  $A_g$  el área bruta de hormigón y  $A_{st}$  el área total de armadura.

### 7.2.2. Resistencia

Para determinar la capacidad portante, o la resistencia de la columna, se debe considerar que en el rango de tensiones y deformaciones elevadas previas a la carga última no pueden utilizarse las relaciones elásticas, ver fig.2.2 y 2.10, y que el hormigón no se comporta igual con cargas rápidas que con cargas lentas.

Con cargas lentas, representativas de cargas permanentes, los ensayos han demostrado que la resistencia a compresión máxima confiable del hormigón es aproximadamente  $0.85 f'_c$ .

La deformación última a compresión del hormigón es  $\varepsilon_{cu} = 0.003$  (ver punto 4.2.b.)), para lo cual el acero, en general, está en el período de fluencia, ya que:

$$\varepsilon_y = f_y / E_s = 420 / 200000 = 0.0021.$$

Entonces para la deformación última de 0.003, igual para ambos materiales, la resistencia nominal es:

$$P_n = 0.85 f'_c A_c + f_y A_{st} = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \quad (7.3)$$

Luego la resistencia nominal debe afectarse por el coeficiente de minoración de resistencia para cumplir con la ec. (3.8), que en este caso es:

$$\phi P_n \geq P_u \quad (7.4)$$

donde  $P_u$  es el esfuerzo normal último obtenido de las cargas mayoradas,  $\phi = 0.65$  para columnas con estribos y  $\phi = 0.70$  para columnas zunchadas (ver tabla 3.1).

El reglamento CIRSOC 201 establece una limitación adicional en la resistencia de columnas, para tener en cuenta excentricidades accidentales de las cargas no consideradas en el modelo de análisis. Se especifica para columnas zunchadas y para elementos compuestos (no tratados en este texto):

$$\phi P_{n(\max)} = 0.85 \phi (0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}) \quad (7.5)$$

y para columnas con estribos:

$$\phi P_{n(\max)} = 0.80 \phi (0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}) \quad (7.6)$$

### 7.2.3. Columnas con estribos

Los estribos en columnas cumplen las siguientes funciones:

- Evitar el pandeo de las armaduras longitudinales comprimidas.
- Facilitar el armado y el mantenimiento en la posición adecuada de las barras durante el hormigonado.

Para ello se especifica que todas las barras estén restringidas con una rama de estribo, a menos que esté ubicada a una distancia  $\leq 15 d_{be}$  de otra arriostrada. La separación entre estribos debe ser:

$$s \leq \begin{cases} 12 d_b & (d_b : \text{diámetro de la barra longitudinal}) \\ 48 d_{be} & (d_{be} : \text{diámetro del estribo}) \\ b & (\text{lado menor de la columna}) \end{cases}$$

Además, como mínimo, deber ser  $d_{be} = 6 \text{ mm}$  para  $d_b \leq 16 \text{ mm}$ ;  $d_{be} = 8 \text{ mm}$  para  $16 < d_b \leq 25 \text{ mm}$ ;  $d_{be} = 10 \text{ mm}$  para  $25 < d_b \leq 32 \text{ mm}$ ;  $d_{be} = 12 \text{ mm}$  para  $d_b > 32 \text{ mm}$ .

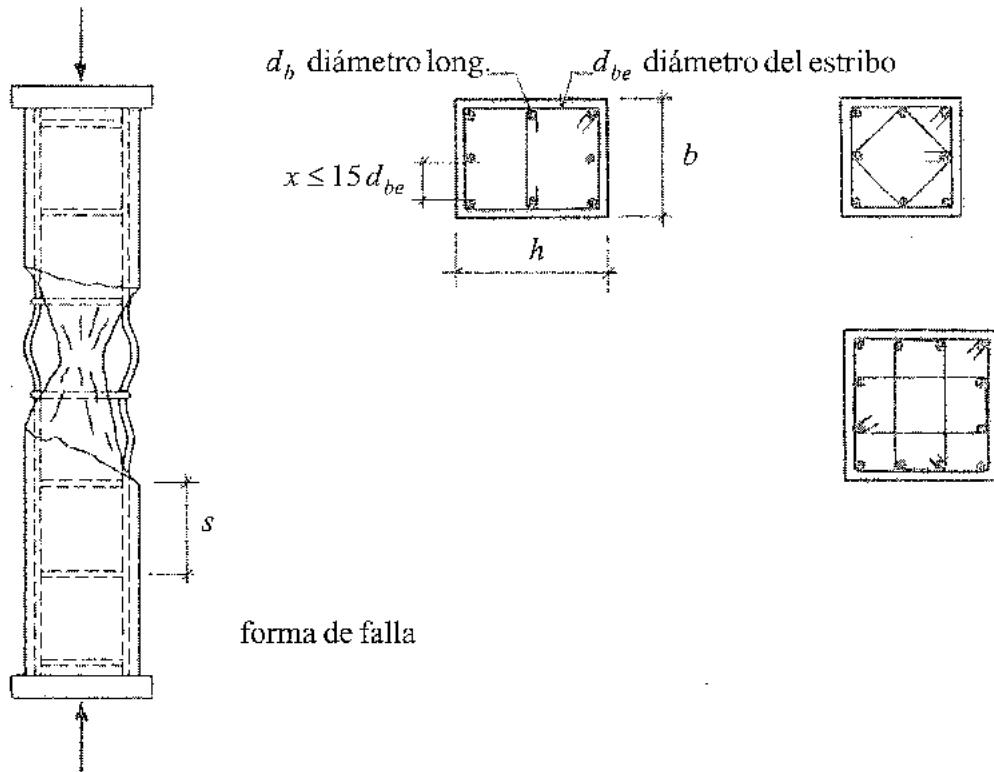


Figura 7.3: Columnas con estribos

- **Armadura mínima:** se especifica  $A_{st} \geq 0.01 A_g$  para considerar una resistencia mínima a flexión, aunque el modelo de diseño no lo indique, y para reducir los efectos de la fluencia lenta. El hormigón aumenta su deformación en el tiempo bajo carga constante, ver 2.1.4.2, transfiriéndole carga al acero longitudinal para que éste acompañe la deformación. La presencia de una armadura mínima evita que ésta llegue a fluencia. La transferencia de carga disminuye la tensión en el hormigón, atenuando el aumento de deformación, llegándose a un estado final de equilibrio.
- **Armadura máxima:** se especifica  $A_{st} \leq 0.08 A_g$ , que es un índice de carácter práctico que contempla razones de economía y facilidades de colocación.

Cuando la sección transversal es mayor que la necesaria por carga, se puede utilizar un área efectiva reducida, necesaria y suficiente para resistir la carga mayorada,  $A_{g\ nec} \geq 0.50 A_g$  para determinar la armadura mínima y la resistencia de diseño.

### 7.2.4. Columnas zunchadas

Cuando el hormigón es comprimido longitudinalmente, por efecto de Poisson se expande lateralmente. Si esa deformación está impedida, o al menos limitada, por la armadura transversal poco espaciada, el hormigón aumenta su resistencia y su ductilidad, es decir falla a una carga y deformación mayor, función de la presión de confinamiento.

Sin embargo, debido a que el recubrimiento no está “zunchado”, éste se desprende para la carga  $P_n$  (7.3). La capacidad de carga por encima de la carga que produce el desprendimiento del recubrimiento, no se utiliza porque se considera que la columna ya no es funcional. Por ese motivo el CIRSOC 201 provee un refuerzo mínimo en espiral sólo para que la resistencia de la columna zunchada sea apenas mayor que aquella que produce el descascaramiento.

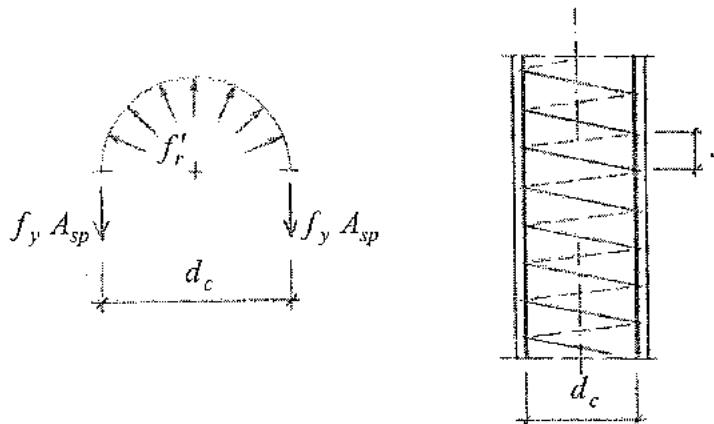
La falla real se producirá para una carga un poco mayor, pero fundamentalmente con mayores deformaciones, es decir una falla más dúctil, tenido en cuenta en el factor de reducción de resistencia  $\phi$ .

Llamando  $f'_{cc}$  la resistencia del hormigón confinado y  $f'_r$  la presión de confinamiento lateral, se ha encontrado experimentalmente la siguiente relación:

$$f'_{cc} - 0.85 f'_r = 4 f'_r \quad (7.7)$$

La presión de confinamiento dada por una espiral de diámetro  $d_c$ , sección  $A_{sp}$  y separación  $s$ , ver fig. 7.4, resulta:

$$f'_r d_c = \frac{2 f_y A_{sp}}{s} \quad (7.8)$$



**Figura 7.4:** Confinamiento del núcleo de hormigón

Llamando  $\rho_s$  cuantía volumétrica de armadura transversal:

$$\rho_s = \frac{\pi d_c A_{sp}}{s \frac{\pi d_c^2}{4}} \rightarrow A_{sp} = \frac{\rho_s d_c s}{4} \quad (7.9)$$

se obtiene:

$$f'_r = \frac{\rho_s f_y}{2} \quad (7.10)$$

Se busca igualar la pérdida de resistencia por el desprendimiento del recubrimiento con la ganancia en el núcleo debido a la mayor resistencia del hormigón  $f'_{cc}$ . Utilizando (7.7) y sustituyendo  $f'_r$  por (7.10) resulta:

$$0.85 f'_c (A_g - A_c) = 4 \frac{\rho_s f_y}{2} A_c \quad (7.11)$$

donde  $A_c = \pi d_c^2 / 4$  es el área del núcleo confinado. A partir de (7.11) se calcula

$$\rho_s = 0.425 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \quad (7.12)$$

El CIRSOC 201 aproxima el factor 0.425 por 0.45 para obtener una resistencia algo mayor.

El CIRSOC 201, art. 7.10.4, especifica un diámetro mínimo de la armadura del zuncho de 10 mm con separación entre 25 y 80 mm. Debe ser una espiral continua.

### 7.2.5. Ejemplos

#### a) Ejemplo 7.1

Diseñar una columna corta, cuadrada, con armadura longitudinal mínima y estribos, para soportar las cargas  $P_D = 1200 \text{ KN}$ ,  $P_L = 410 \text{ KN}$ . Utilizar hormigón H-25 y acero ADN 420.

- Resistencia requerida por las cargas mayoradas:

$$P_u = 1.2 P_D + 1.6 P_L = 1.2 \cdot 1200 + 1.6 \cdot 410 = 2096 \text{ KN}$$

- Resistencia nominal:

$$\phi P_n \geq P_u \rightarrow P_n \geq \frac{P_u}{\phi} = \frac{2096}{0.65} = 3225 \text{ KN} = 3.225 \text{ MN}$$

- Sección necesaria: llamando cuantía de armadura longitudinal  $\rho_g = \frac{A_{st}}{A_g}$ , con (7.6) resulta

$$P_{n(\max)} = 0.80 A_g (0.85 f'_c (1 - \rho_g) + f_y \rho_g)$$

Para  $f'_c = 25 \text{ MPa}$ ,  $f_y = 420 \text{ MPa}$ ,  $\rho_g(\min) = 0.01$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} A_g &= \frac{P_{n(\max)}}{0.80 (0.85 f'_c (1 - \rho_g) + f_y \rho_g)} = \frac{3.225}{0.80 (0.85 \cdot 25 (1 - 0.01) + 420 \cdot 0.01)} \\ &= \frac{3.225 \text{ MN}}{20.19 \text{ MPa}} = 0.1597 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

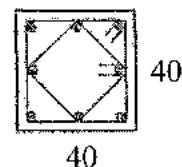
Se adopta una sección de 40 x 40 cm con  $A_g = 1600 \text{ cm}^2$

- Armaduras:

$$\text{Longitudinal: } A_{st} = \rho_g A_g = 0.01 \cdot 1597 = 15.97 \text{ cm}^2 \rightarrow 8\phi 16$$

$$\text{Estripos: de acuerdo a 7.2.3: } d_{be} = 6 \text{ mm}$$

$$s = 12 \quad d_b = 12 \cdot 1.6 = 19 \text{ cm}$$



b) *Ejemplo 7.2*

Diseñar una columna circular zunchada para soportar las mismas cargas que en el ejemplo 7.1. Considerar también columna “corta” y utilizar cuantía mínima.

$$P_u = 1.2 P_D + 1.6 P_L = 1.2 \cdot 1200 + 1.6 \cdot 410 = 2096 \text{ KN}$$

$$\phi P_n \geq P_u \rightarrow P_n \geq \frac{P_u}{\phi} = \frac{2096}{0.70} = 2994 \text{ KN} = 2.994 \text{ MN}$$

$$A_g = \frac{P_n (\text{máx})}{0.85 (0.85 f'_c (1 - \rho_g) + f_y \rho_g)} = \frac{2.994}{0.85 (0.85 \cdot 25 (1 - 0.01) + 420 \cdot 0.01)} \\ = \frac{2.994 \text{ MN}}{21.45 \text{ MPa}} = 0.1396 \text{ m}^2 = 1396 \text{ cm}^2$$

- Diámetro de la columna:  $d = \sqrt{\frac{4 A_g}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1396}{\pi}} = 42 \text{ cm}$

- Armadura longitudinal:  $A_{st} = 0.01 A_g = 0.01 \cdot 1396 = 13.96 \text{ cm}^2 \rightarrow 7\phi 16$

- Armadura transversal: zunchos  $\rho_s = 0.425 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y}$

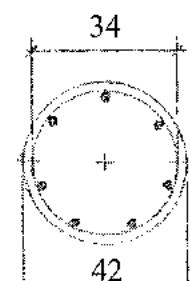
Considerando el recubrimiento para zunchos de 40 mm según CIRSOC 201, art. 7.7,

$$A_c = \frac{\pi 34^2}{4} = 908 \text{ cm}^2$$

$$\rho_s = 0.425 \left( \frac{1385}{908} - 1 \right) \frac{25}{420} = 0.01407$$

$$\frac{A_{sp}}{s} = \frac{\rho_s d_e}{4} = \frac{0.01407 \cdot 34}{4} \cdot 100 = 11.96 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$\rightarrow$  espiral  $\phi 10 \text{ c/ 6.5 cm}$



Comparando ambas soluciones, el consumo de materiales por *metro* de columna es:

Columna	Hormigón ( $m^3$ )	Acero (Kgf)
Con estribos	0.16	15.7
Zunchada	0.139	21.3

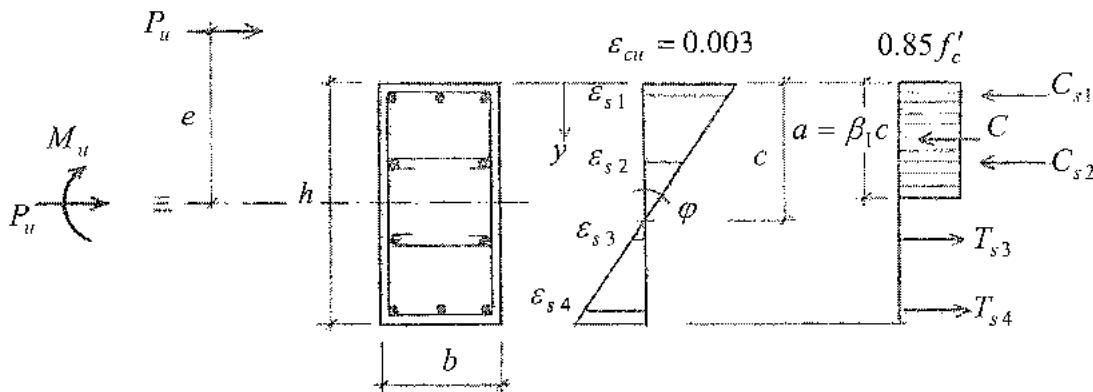
### 7.3. FLEXO - COMPRESIÓN RECTA

En edificios y otras estructuras es frecuente encontrar elementos cargados axialmente acompañados de flexión recta u oblicua, debido al aporticamiento de vigas con columnas (construcción monolítica) para resistir acciones verticales gravitacionales y horizontales como por ejemplo cargas de viento. También es el caso de columnas cargadas excéntricamente a través de ménsulas como se presenta en la construcción prefabricada.

#### 7.3.1. Resistencia

Se analiza ahora la flexo-compresión recta, es decir con excentricidad en un solo plano principal, mientras que la flexo-compresión oblicua se tratará en el apartado 7.4.

La fig.7.5 muestra una sección rectangular, con una disposición de armadura, solicitada por una carga axial  $P_u$  y un momento flector  $M_u$  a partir de las cargas mayoradas.



**Figura 7.5:** Sección de columna con carga excéntrica

La condición de resistencia ec.(3.8) en este caso es:

$$\begin{aligned} \phi M_n &\geq M_u \\ \phi P_n &\geq P_u \end{aligned} \quad (7.13)$$

El factor de reducción de resistencia  $\phi$  dependerá de la deformación de la armadura más traccionada (o menos comprimida)  $\epsilon_{s4}$  de la fig.7.5, ver tabla 3.1 y fig.3.4.

Son válidas todas las hipótesis descriptas en 4.2, que se utilizan en las siguientes ecuaciones que resuelven el problema:

- **Ecuaciones de equilibrio:**

$$\sum N = 0 \rightarrow P_n = 0.85 f'_c \beta_1 c b + \sum_{i=1}^N A_{s_i} f_{s_i} \quad (7.14)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_n = P_n e = (0.85 f'_c \beta_1 c b) \left( \frac{\beta_1 c}{2} - \frac{h}{2} \right) + \sum_{i=1}^N A_{s_i} f_{s_i} \left( y_i - \frac{h}{2} \right) \quad (7.15)$$

teniendo en cuenta que tensiones de compresión intervienen con (-) y de tracción con (+).

▪ **Ecuaciones de compatibilidad**

$$\varepsilon_{cu} = -\varphi c = -0.003 \quad \text{estado límite último} \quad (7.16)$$

$$\varepsilon_{si} = \varphi (y_i - c) \quad (7.17)$$

▪ **Ecuaciones constitutivas**

- **Hormigón:**  $C = 0.85 f'_c \beta_1 c b$  (ver ecas.(4.10) y (4.15)) (7.18)

- **Acerro:**  $f_s = E_s \varepsilon_s \quad \text{para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_y$  (7.19)

$$f_s = f_y \quad \text{para } \varepsilon_s > \varepsilon_y$$

El proceso de solución de (7.13) a (7.19), en general, consiste en proponer una curvatura  $\varphi$ , calcular  $c$  con (7.16),  $\varepsilon_{si}$  con (7.17),  $C$  con (7.18),  $f_{si}$  con (7.19), y reemplazar en (7.14) para obtener  $P_n$ . Luego con (7.15) se calcula  $M_n$  y se despeja  $e = M_n / P_n$  que debe coincidir con la excentricidad dado  $e = M_u / P_u$ . Repitiendo iterativamente se busca  $\varphi$  que produzca la excentricidad  $e$ .

Finalmente se verifica (7.13), y en el caso que no cumpla con estas condiciones se debe rediseñar la sección modificando las dimensiones y/o la cuantía de armadura.

El proceso numérico iterativo es conveniente implementarlo en un programa de computación. Los datos de ingreso son las dimensiones  $b$ ,  $h$ , las armaduras y su posición  $A_{si}$ ,  $y_i$ , los materiales  $f'_c$ ,  $\beta_1$ ,  $\varepsilon_{cu} = 0.003$  (límite), y la excentricidad  $e$  objetivo del proceso iterativo. Como resultado se obtiene  $P_n$ ,  $M_n$ .

Observar que este proceso es general, abarcando desde  $e \rightarrow \infty$  que corresponde a flexión pura, coincidiendo con los casos vistos en el capítulo 4, hasta  $e = 0$  que corresponde al caso de compresión axial.

### 7.3.2. Ayudas de diseño. Diagramas de interacción

Como alternativa a proponer una sección y armaduras, aplicar el proceso iterativo descripto en el apartado anterior, y verificar si la resistencia disponible es mayor que la requerida, ec.(7.13), es de utilidad construir gráficos de interacción de resistencia  $m$ ,  $n$  que permiten para una sección dada, calcular en forma directa la cuantía de armadura.

Dada una forma de sección (rectangular, circular, etc.), una disposición de armadura (distribuida uniformemente, concentrada en los extremos, simétrica o asimétrica), tipo de materiales y recubrimiento, se puede construir una curva, para cada cuantía de armadura  $\rho_g = A_{si} / A_g$ , que representa las cantidades adimensionales:

$$m = \frac{M_n}{A_g h f'_c} = \frac{P_n e}{A_g h f'_c} \quad (7.20)$$

$$n = \frac{P_n}{A_g f'_c} \quad (7.21)$$

Para encontrar un punto de la curva, dado  $e$ , se aplica el procedimiento descripto en 7.3.1.

Una curva típica se muestra en la fig.7.6. En este diagrama cualquier línea radial representa una excentricidad particular  $e$ . Para esta excentricidad, al aumentar gradualmente la carga se definirá una trayectoria de carga como se ilustra, y cuando alcance la curva límite se presentará la falla. El eje vertical corresponde a  $e = 0$  y  $n_0$  es la capacidad de la columna para carga centrada que puede determinarse con ec.(7.3). El eje horizontal corresponde a  $e \rightarrow \infty$  es decir flexión pura con una capacidad  $m_0$ .

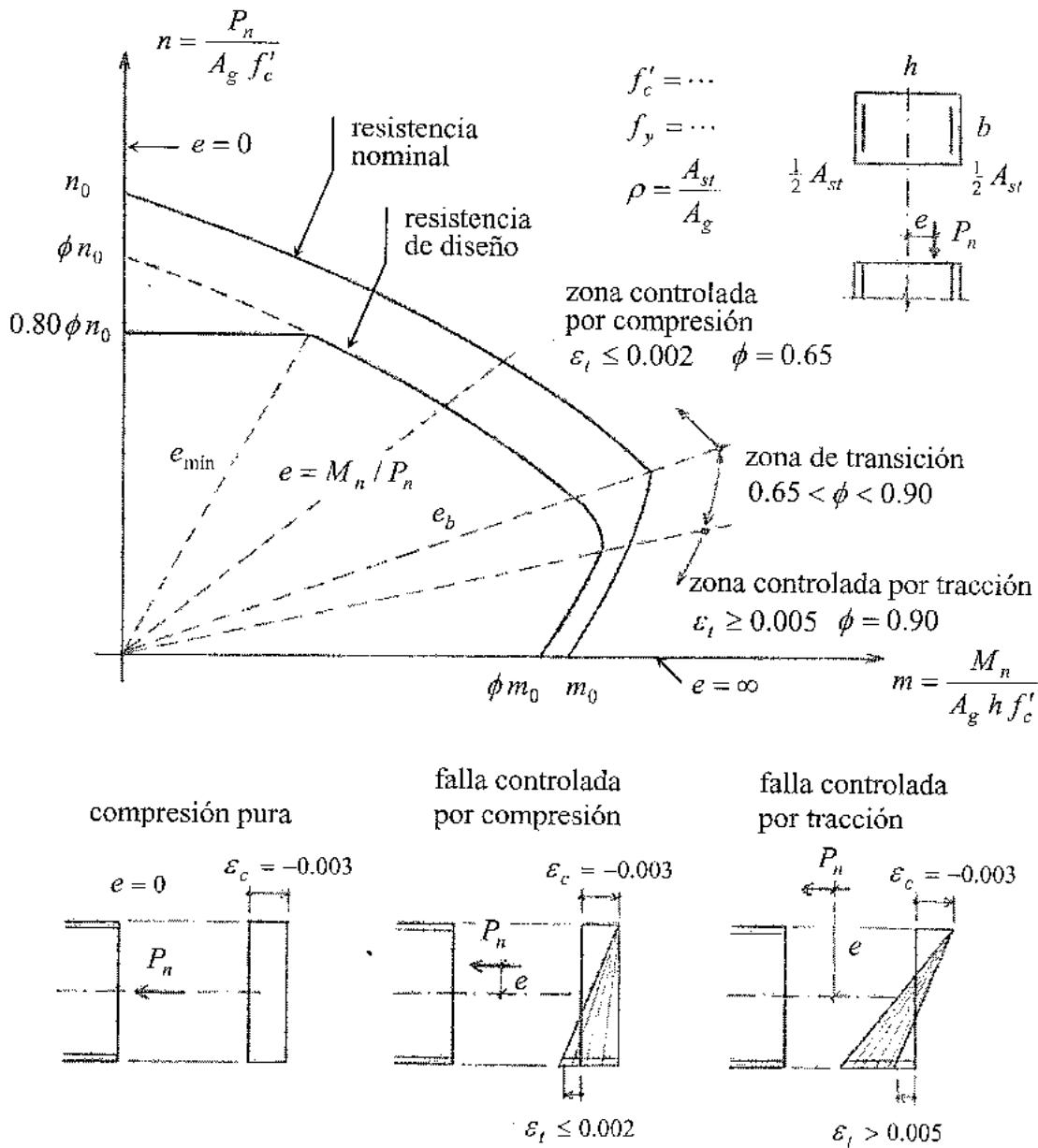


Figura 7.6: Diagrama de interacción de resistencia de una columna

Para excentricidades pequeñas la falla estará controlada por compresión, es decir con la deformación de la armadura más traccionada (o menos comprimida)  $\varepsilon_t \leq 0.002$ , mientras que para excentricidades grandes la falla estará controlada por tracción, es decir  $\varepsilon_t \geq 0.005$  (ver 3.4, tabla 3.1 y fig.3.4). Recordar que siempre el estado límite es  $\varepsilon_{cu} = -0.003$ .

Se define como “falla balanceada” al punto correspondiente a  $\varepsilon_{cu} = -0.003$  y  $\varepsilon_t = \varepsilon_y$  y produce la excentricidad  $e_b$ . En la zona controlada por compresión, a mayor carga axial,

mayor zona agotada de hormigón a compresión y menor margen para resistir flexión. En la zona controlada por tracción, la carga axial de compresión disminuye la tracción permitiendo un mayor momento para alcanzar el estado límite.

La curva descripta hasta ahora corresponde a la resistencia nominal. Es conveniente para el cálculo la curva de resistencia de diseño  $\phi n$ ,  $\phi m$ , donde  $\phi$  es el factor de reducción de resistencia variable con  $\varepsilon_t$  (tabla 3.1 y fig.3.4), ya que permite trabajar directamente con  $P_u$ ,  $M_u$  obtenidos del análisis estructural bajo cargas mayoradas. Además, como no se conoce  $\varepsilon_t$  no se conoce  $\phi$ , y para utilizar las curvas de resistencia nominal hay que elegir  $\phi$  y luego verificar su valor, iterando hasta lograr el acuerdo.

En la fig.7.6 se muestra también esta curva, incluyendo la limitación  $\phi P_{n(max)}$  de ec. (7.5) y (7.6) que tiene en cuenta excentricidad mínima accidental.

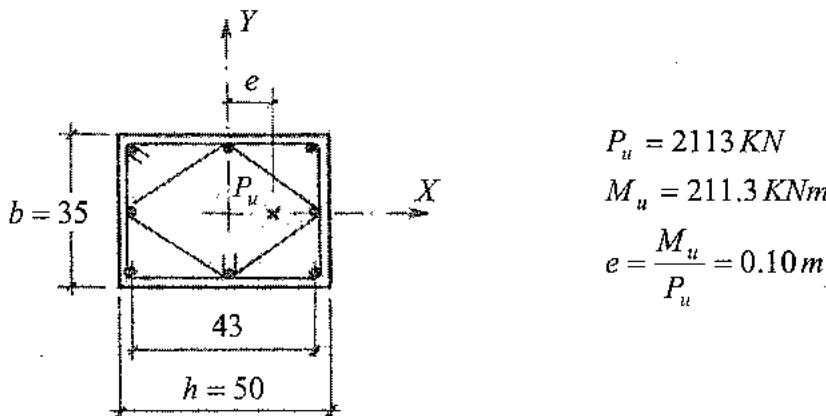
Como ejemplo, al final de este capítulo, se reproducen algunos diagramas de interacción de resistencia de diseño para secciones rectangulares con armadura en caras extremas y armadura distribuida en las cuatro caras, como así también para secciones circulares, hormigón H-25 y diferentes recubrimientos.

Se observa que estos diagramas de interacción también se pueden utilizar para esfuerzo axial de tracción, en la zona de  $\phi P_n / A_g$  negativos, desde los casos de gran excentricidad cercanos al eje horizontal ( $m$ ) ya tratados en el Cap.4 con armadura en la cara de tracción solamente, hasta pequeña excentricidad y tracción centrada sobre el eje vertical ( $n$ ), tema que se tratará en el Cap.9.

Estos diagramas no están adimensionalizados porque no están divididos por  $f'_c$ . Se utilizan entrando por el eje vertical con  $\phi P_n / A_g$  y por el eje horizontal con  $\phi P_n e / (A_g h)$ , leyéndose la cuantía de armadura en la intersección. Ambas cantidades deben estar en unidades de MPa.

### 7.3.3. Ejemplo 7.3

Diseñar una sección de columna rectangular solicitada a flexo-compresión recta. Del análisis estructural bajo cargas mayoradas se obtuvo  $P_u = 2113 \text{ KN}$ ,  $M_u = 211.3 \text{ KNm}$ . Proponer una sección de  $35 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$  y determinar la armadura necesaria. Utilizar hormigón H-25 y acero ADN 420.



➤ Se utiliza el diagrama de interacción para sección rectangular, disposición de armadura como la indicada,  $f'_c = 25 \text{ MPa}$ ,  $f_y = 420 \text{ MPa}$ ,  $\gamma = 43/50 = 0.86$ , resulta:

DIAGRAMA DE INTERACCIÓN II.9,  $\gamma = 0.80$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi P_n}{A_g} &= \frac{P_u}{A_g} = \frac{2.113}{0.35 \cdot 0.50} = 12.074 \text{ MPa} \\ \text{para } \frac{\phi M_n}{A_g h} &= \frac{M_u}{A_g h} = \frac{0.2113}{0.35 \cdot 0.50^2} = 2.415 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \rightarrow \rho_g = 0.022$$

DIAGRAMA DE INTERACCIÓN II.10,  $\gamma = 0.90$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi P_n}{A_g} &= \frac{P_u}{A_g} = \frac{2.113}{0.35 \cdot 0.50} = 12.074 \text{ MPa} \\ \text{para } \frac{\phi M_n}{A_g h} &= \frac{M_u}{A_g h} = \frac{0.2113}{0.35 \cdot 0.50^2} = 2.415 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \rightarrow \rho_g = 0.021$$

luego para  $\gamma = 0.86$  resulta por interpolación  $\rho_g = 0.0216$

- Armadura: longitudinal

$$A_{st} = \rho_g A_g = 0.0216 \cdot 35 \cdot 50 = 37.8 \text{ cm}^2 \rightarrow 8\phi 25 (39.28 \text{ cm}^2)$$

- Estripos:

$$\left. \begin{aligned} d_b &= 25 \text{ mm} \rightarrow d_{be} = 8 \text{ mm} \\ s &= 12 d_b = 12 \cdot 2.5 = 30 \text{ cm} \\ &= 48 d_{be} = 48 \cdot 0.8 = 38.4 \text{ cm} \\ &= b = 35 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \rightarrow \phi 8 c / 30 \text{ cm}$$

Observación: los estribos deben verificar la resistencia al esfuerzo de corte, que en general acompaña a la flexión, de acuerdo a 5.6.1.

■ Verificación con ec.(7.6)

$$\begin{aligned} \phi P_{n(\max)} &= 0.80 \phi (0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}) \\ &= 0.80 \cdot 0.65 (0.85 \cdot 25 (35 \cdot 50 - 39.28) 10^{-4} + 420 \cdot 39.28 10^{-4}) \\ &= 0.80 \cdot 0.65 \cdot 5.286 = 2.749 \text{ MN} > P_u = 2.113 \text{ MN} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Esta verificación se realiza sólo para mostrar la influencia de la excentricidad de aplicación de la carga  $e = 0.10 \text{ m}$  en la capacidad de la sección de la columna.

- Verificación con ec.(7.14) a (7.19): utilizando las ecuaciones generales, con el proceso iterativo descripto en 7.3.1, se obtiene (luego de algunas iteraciones):

Para  $\phi = 7.13 \cdot 10^{-3}$

de (7.16) y (7.18) :

$$c = \frac{-0.003}{-0.00713} = 0.4208 \text{ m} \rightarrow C = 0.85(-25)0.85 0.4208 0.35 = -2.6602 \text{ MN}$$

de (7.17) y (7.19) :

$$\varepsilon_{s1} = -0.003 + 7.13 \cdot 10^{-3} 0.035 = -2.75 \cdot 10^{-3} \rightarrow f_{s1} = -420 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{s2} = -0.003 + 7.13 \cdot 10^{-3} 0.25 = -1.2175 \cdot 10^{-3} \rightarrow f_{s2} = -243.5 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{s3} = -0.003 + 7.13 \cdot 10^{-3} 0.465 = 3.1545 \cdot 10^{-4} \rightarrow f_{s3} = 63.09 \text{ MPa}$$

de (7.14) :

$$P_n = -2.6602 - 420 3 4.91 \cdot 10^{-4} - 243.5 2 4.91 \cdot 10^{-4} + 63.09 3 4.91 \cdot 10^{-4} \\ = 2.6602 - 0.6187 - 0.2391 + 0.09293 = -3.4251 \text{ MN}$$

de (7.15) :

$$M_n = 2.6602 \left( \frac{0.85 \cdot 0.4208}{2} - 0.25 \right) - 0.6187 (0.035 - 0.25) - 0.2391 (0.25 - 0.25) \\ + 0.0929 (0.465 - 0.25) = 0.1893 + 0.1330 + 0 + 0.0200 = 0.3423 \text{ MNm}$$

Luego  $e = M_n / P_n = 0.3423 / 3.4251 = 0.10 \text{ m } \checkmark$

La deformación de la armadura más traccionada es  $\varepsilon_{s3} = 0.000315 < 0.002 \rightarrow$  sección controlada por compresión (ver tabla 3.1 y fig.3.4) resulta  $\phi = 0.65 \checkmark$

Finalmente se verifica (7.13)

$$\phi M_n = 0.65 \cdot 0.3423 = 0.2225 \text{ MNm} = 222.5 \text{ KNm} > M_u = 211.3 \text{ KNm} \checkmark$$

$$\phi P_n = 0.65 \cdot 3.4251 = 2.226 \text{ MN} = 2226 \text{ KN} > P_u = 2113 \text{ KN} \checkmark$$

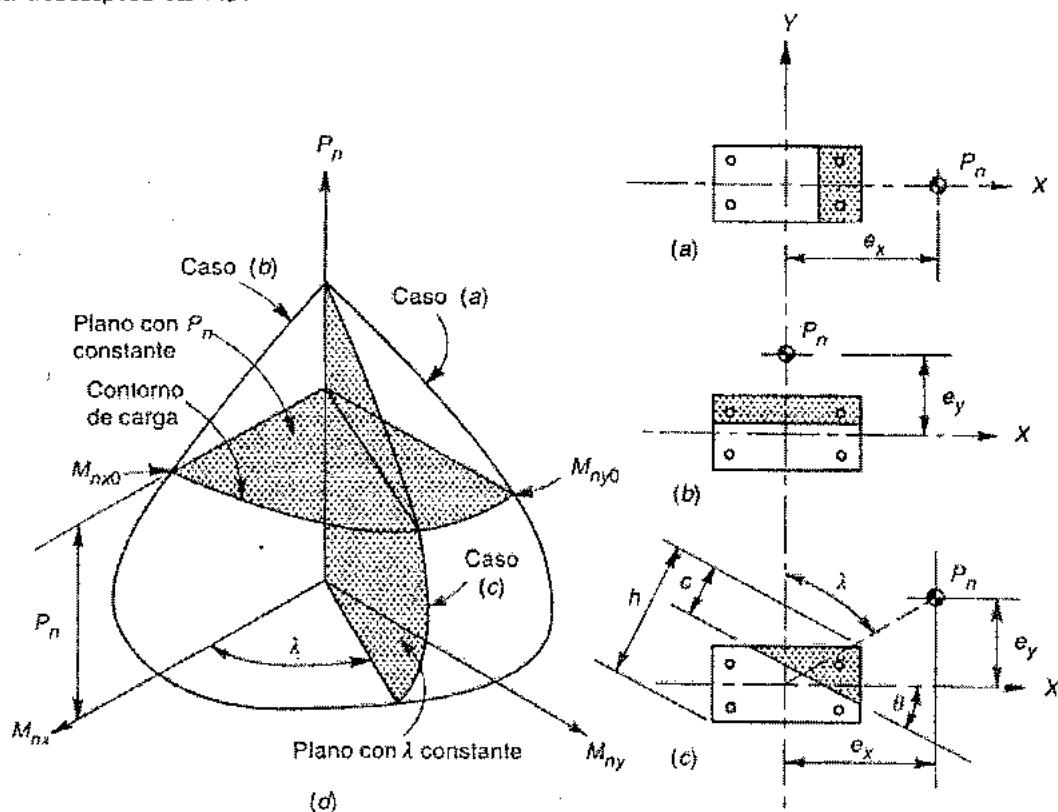
Observar que el diseño obtenido con los diagramas de interacción de resistencia verifica las ecuaciones generales, y que el pequeño exceso de resistencia se debe al redondeo de la sección de armadura  $A_{st}$  a los diámetros comerciales.

## 7.4. FLEXO-COMPRESIÓN OBLICUA

También es frecuente el caso en que la compresión axial está acompañada por flexión simultánea con respecto a los dos ejes principales de la sección, por ejemplo las columnas de esquina de un edificio donde las vigas transfieren momento a la columna en dos planos perpendiculares.

### 7.4.1. Resistencia

La situación con respecto a la resistencia se ilustra en la fig. 7.7. En la fig. 7.7(a) la sección está solicitada por flexión sólo respecto al eje  $Y$ , con excentricidad  $e_x$  y la curva de interacción de resistencia nominal aparece como el Caso (a) en el esquema tridimensional de la fig. 7.7(d) representada en el plano  $P_n - M_{ny}$ . Esta curva puede determinarse con los métodos para flexión recta descriptos en 7.3.



**Figura 7.7:** Diagrama de interacción para flexo-compresión oblicua

De la misma manera, la fig. 7.7 (b) muestra la flexión con respecto al eje  $X$  únicamente, con excentricidad  $e_y$ . La curva de interacción corresponde al Caso (b) de la fig. 7.7(d) representada en el plano  $P_n - M_{nx}$ .

En la fig. 7.7(c) se combina la flexión en  $X$  e  $Y$ , donde la orientación de la excentricidad resultante se define con el ángulo:

$$\lambda = \arctg \frac{e_x}{e_y} = \arctg \frac{M_{ny}}{M_{nx}} \quad (7.22)$$

En este plano la resistencia de la columna se define con la curva de interacción marcada como Caso (c) en la fig. 7.7 (d).

Para otros valores de  $\lambda$  se obtienen curvas similares que definen la "superficie de falla". Las combinaciones  $P_u / \phi$ ,  $M_{ux} / \phi$ ,  $M_{uy} / \phi$  que definan puntos interiores a la superficie de falla pueden aplicarse sobre la columna en forma segura.

Dado el plano de carga, con el ángulo  $\lambda$ , la construcción de la curva de interacción se realiza en forma análoga a la flexión recta. Sin embargo el proceso es más complejo porque el eje neutro no va a ser, en general, perpendicular al plano de carga, o dicho de otro modo el plano de la flexión no coincide con el plano de carga. Se recuerda que el eje neutro es perpendicular al plano de flexión. Ver fig. 7.8

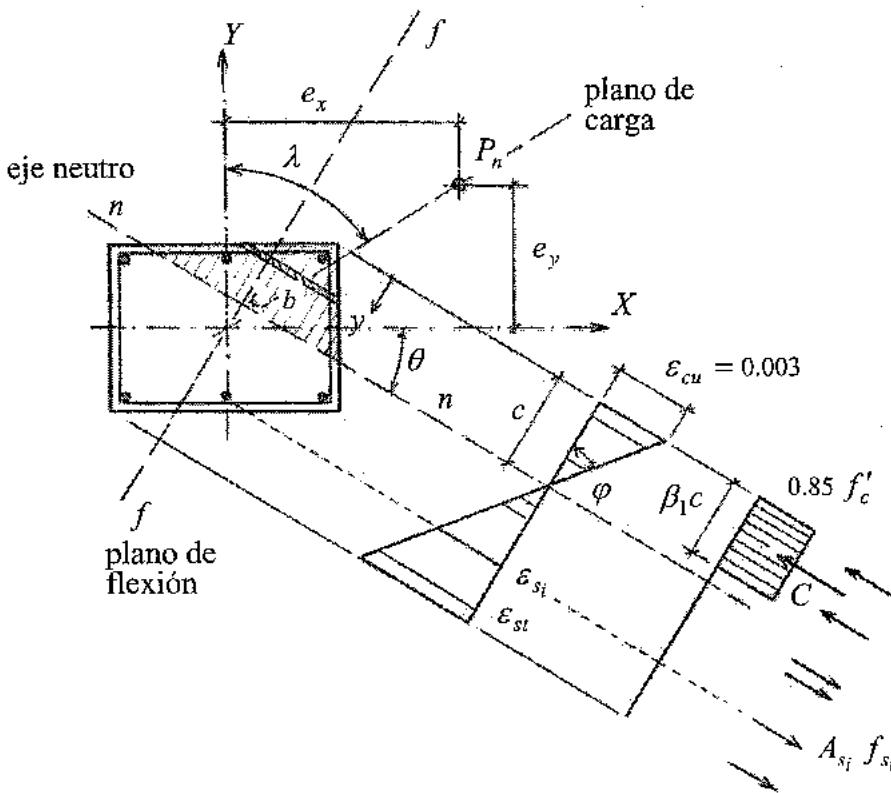


Figura 7.8: Sección de columna con carga excéntrica en ambos ejes

Las ecuaciones a utilizar son similares a (7.13) a (7.19) con las siguientes diferencias:

- El área comprimida no es rectangular, sino de forma genérica. No obstante, los ensayos demuestran que utilizar un bloque de tensiones rectangular de valor  $0.85 f'_c$  sobre una altura  $\beta_1 c$ , produce resultados suficientemente aproximados.
- La ec.(7.15) tiene dos componentes, según los dos ejes  $X$ ,  $Y$ . Luego, las ecuaciones de equilibrio se escriben:

$$\sum N = 0 \rightarrow P_n = 0.85 f'_c \int_0^{\beta_1 c} b(y) dy + \sum_{i=1}^N A_{si} f_{si} \quad (7.23)$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_{nx} = P_n e_y = 0.85 f'_c \int_0^{\beta_1 c} b(y) dy Y_C + \sum_{i=1}^N A_{si} f_{si} Y_i \quad (7.24)$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow M_{ny} = P_n e_x = 0.85 f'_c \int_0^{\beta_1 c} b(y) dy X_C + \sum_{i=1}^N A_{si} f_{si} X_i \quad (7.25)$$

donde  $X_C, Y_C$  ubican la posición de la resultante de compresión  $C$  en el hormigón y  $X_i, Y_i$  la posición de cada barra de armadura.

El proceso de solución ahora consiste en proponer una curvatura  $\phi$  y una orientación del eje neutro  $\theta$ , calcular  $c$  con (7.16),  $\varepsilon_{si}$  con (7.17),  $f_{si}$  con (7.19), y reemplazar en (7.23) para obtener  $P_n$ . Luego con (7.24) se calcula  $M_{nx}$  y se despeja  $e_y = M_{nx} / P_n$ . Con (7.25) se calcula  $M_{ny}$  y se despeja  $e_x = M_{ny} / P_n$ .

Iterando con  $\phi$  y  $\theta$  se ajusta  $e_y, e_x$  a los datos de la solicitud externa. Finalmente se verifica la condición de resistencia (7.13), y en el caso que no satisfaga estas condiciones se debe rediseñar la sección.

Análogamente al caso de flexión recta, este proceso iterativo se implementa en un programa de computación. Observar que este caso es el más general, abarcando como casos particulares la flexo-compresión recta, la flexión pura y la compresión simple.

#### 7.4.2. Métodos simplificados

Existen métodos simplificados que permiten realizar una verificación rápida de la sección propuesta.

##### a) Método del contorno de carga:

Este método se basa en representar la superficie de falla de la fig.7.7(d) mediante una familia de curvas correspondientes a valores constantes de  $P_n$ . La forma general de estas curvas puede aproximarse mediante una ecuación de interacción adimensional

$$\left( \frac{M_{nx}}{M_{nx0}} \right)^{\alpha_1} + \left( \frac{M_{ny}}{M_{ny0}} \right)^{\alpha_2} = 1.0 \quad (7.26)$$

donde:  $M_{nx} = P_n e_y, M_{ny} = P_n e_x$

$M_{nx0} = M_{nx}$  cuando  $e_x = 0$ , es decir flexión recta en el eje  $Y$ .

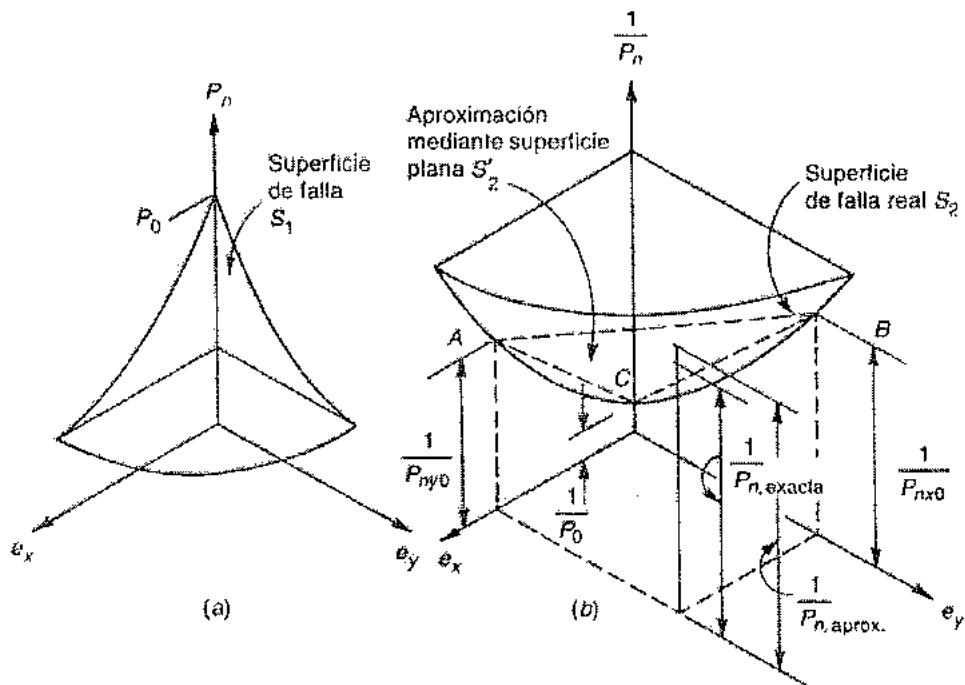
$M_{ny0} = M_{ny}$  cuando  $e_y = 0$ , es decir flexión recta en el eje  $X$ .

Los exponentes  $\alpha_1, \alpha_2$  dependen de la forma de la columna, de la cuantía y disposición de la armadura, y de las características del acero y hormigón. En general se utiliza  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  que varía entre 1.15 y 1.55 para columnas cuadradas y rectangulares.

Dado  $P_u, M_{ux}, M_{uy}$  se calcula  $e_x = M_{uy} / P_u, e_y = M_{ux} / P_u$ . Se estima  $\phi$  y se calcula  $P_n = P_u / \phi, M_{nx} = M_{ux} / \phi, M_{ny} = M_{uy} / \phi$ . Con  $P_n$  y  $P_n e_y$  se calcula  $M_{nx0}$  utilizando diagramas de interacción para flexión recta. Similarmente se determina  $M_{ny0}$  a partir de  $P_n$  y  $P_n e_x$ . Se verifica que (7.26) resulte  $\leq 1.0$  significando que el diseño es seguro. Si el resultado es  $> 1.0$  la sección falla y hay que rediseñar la sección.

**b) Método de la carga inversa**

La superficie de falla de la fig.7.7(d) puede dibujarse alternativamente como una función de  $P_n$  y de las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$  como se muestra en la fig.7.9(a). Esta superficie  $S_1$  puede transformarse en una superficie de falla equivalente  $S_2$  como se ilustra en la fig.7.9(b) donde  $e_x$ ,  $e_y$  se dibuja contra  $1/P_n$ .



**Figura 7.9:** Superficies de interacción para el método de la carga inversa.

Un plano oblicuo  $S'_2$  se define mediante tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , el cual se utiliza como una aproximación de la superficie de falla real  $S_2$ . A partir de la geometría de la superficie aproximada  $S'_2$  se demuestra que:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{nx0}} + \frac{1}{P_{ny0}} - \frac{1}{P_0} \quad (7.27)$$

donde

$P_n$  : valor aproximado de la carga nominal con excentricidad  $e_x$ ,  $e_y$ .

$P_{ny0}$  : resistencia nominal cuando solo está presente la excentricidad  $e_x$ , es decir  $e_y = 0$ . Se obtiene con los diagramas de interacción para flexión recta.

$P_{nx0}$  : resistencia nominal cuando solo está presente la excentricidad  $e_y$ , es decir  $e_x = 0$ . Similarmente se obtiene con diagramas de interacción para flexión recta.

$P_0$  : resistencia nominal para carga centrada, ec.(7.3).

Esta aproximación es aplicable cuando  $P_n \geq 0.10 P_0$ . Caso contrario hay que utilizar el otro método aproximado, o directamente las ecuaciones generales.

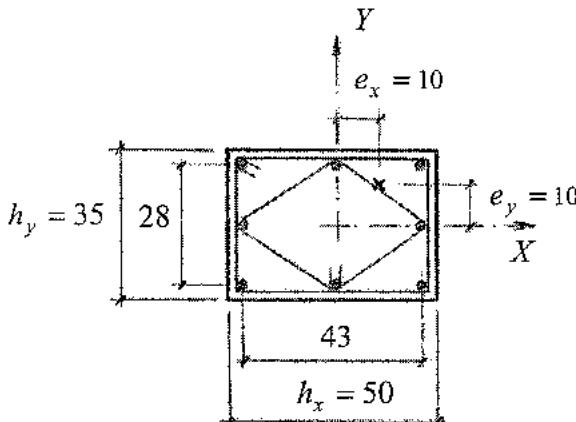
Dada una sección con dimensiones, armaduras y las acciones exteriores  $P_u$ ,  $M_{ux}$ ,  $M_{uy}$  se calculan las excentricidades  $e_x = M_{uy} / P_u$ ,  $e_y = M_{ux} / P_u$ . Se calcula  $P_n$  con (7.27) y finalmente se verifica que

$$\phi P_n \geq P_u \quad (7.28)$$

En caso de no cumplir esta condición, se debe proponer otra sección y/o cuantía de armadura.

#### 7.4.3. Ejemplo 7.4

Calcular la carga última  $P_u$  que resiste la sección del ejemplo 7.3 para las excentricidades  $e_x = 0.10 \text{ m}$ ,  $e_y = 0.10 \text{ m}$ . Utilizar el método aproximado de la carga reciproca.



Hormigón H - 25 Acero ADN 420

$$A_{st} = 8 \cdot 4.91 = 39.28 \text{ cm}^2 \quad (8\phi 25)$$

$$\rho_g = \frac{A_{st}}{A_g} = \frac{39.28}{1750} = 0.0224$$

Método de la carga reciproca, ec.(7.27):  $\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{nx0}} + \frac{1}{P_{ny0}} - \frac{1}{P_0}$

- $P_0$ : resistencia nominal para carga centrada  $e_x = 0$ ,  $e_y = 0$ . Con ec.(7.3):

$$\begin{aligned} P_0 &= 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \\ &= 0.85 \cdot 25 (1750 - 39.28) 10^{-4} + 420 \cdot 39.28 \cdot 10^{-4} = 5.285 \text{ MN} = 5285 \text{ KN} \end{aligned}$$

- $P_{nx0}$ : resistencia nominal para  $e_x = 0$ ,  $e_y = 0.10 \text{ m}$ .

Se utiliza el diagrama de interacción para flexo-compresión recta, para sección rectangular, disposición de armadura indicada,  $f'_c = 25 \text{ MPa}$ ,  $f_y = 420 \text{ MPa}$ ,  $\gamma = 28/35 = 0.80 \rightarrow$  DIAGRAMA DE INTERACCIÓN II.9.

Se debe encontrar valores de  $n$ ,  $m$  que produzcan una excentricidad  $e = 0.10 \text{ m}$  para una cuantía  $\rho_g = 0.0224$

$$\tan \alpha = \frac{n}{m} = \frac{\phi P_n}{A_g} \cdot \frac{A_g h_y}{\phi P_n e_y} = \frac{h_y}{e_y} = 3.5$$

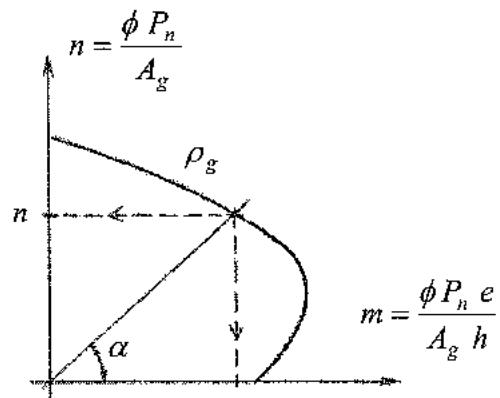
Con esta pendiente se intersecta la curva de  $\rho_g$  correspondiente y se lee  $n$ ,  $m$ , y la zona de  $\phi$ .

Observar la diferencia de escalas en la representación de los ejes de  $n$  y  $m$ . Los gráficos presentan líneas de  $e/h$  que sirven de guía.

Resulta zona de  $\phi = 0.65$ , y además:

$$\begin{aligned} m = 2.80 &\rightarrow M_{nx} = m A_g h / \phi \\ &= 2.80 \cdot 0.1750 \cdot 0.35 / 0.65 = 0.264 MNm = 264 KNm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 9.75 &\rightarrow P_{nx0} = n A_g / \phi \\ &= 9.75 \cdot 0.1750 / 0.65 = 2.625 MN = 2625 KN \end{aligned}$$



- $P_{ny0}$ : resistencia nominal para  $e_x = 0.10 \text{ m}$ ,  $e_y = 0$ .

El cálculo es similar al descripto para  $P_{nx0}$ . En este caso  $\gamma = 43/50 = 0.86$ , luego se debe interpolar entre los diagramas para  $\gamma = 0.80$  y  $\gamma = 0.90$ .

Se utilizan los resultados del ejemplo 7.3, donde:

$$\begin{aligned} m = 2.415 &\rightarrow M_{ny} = m A_g h / \phi \\ &= 2.415 \cdot 0.1750 \cdot 0.50 / 0.65 = 0.3251 MNm = 325.1 KNm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 12.074 &\rightarrow P_{ny0} = n A_g / \phi \\ &= 12.074 \cdot 0.1750 / 0.65 = 3.251 MN = 3251 KN \end{aligned}$$

- Finalmente resulta:

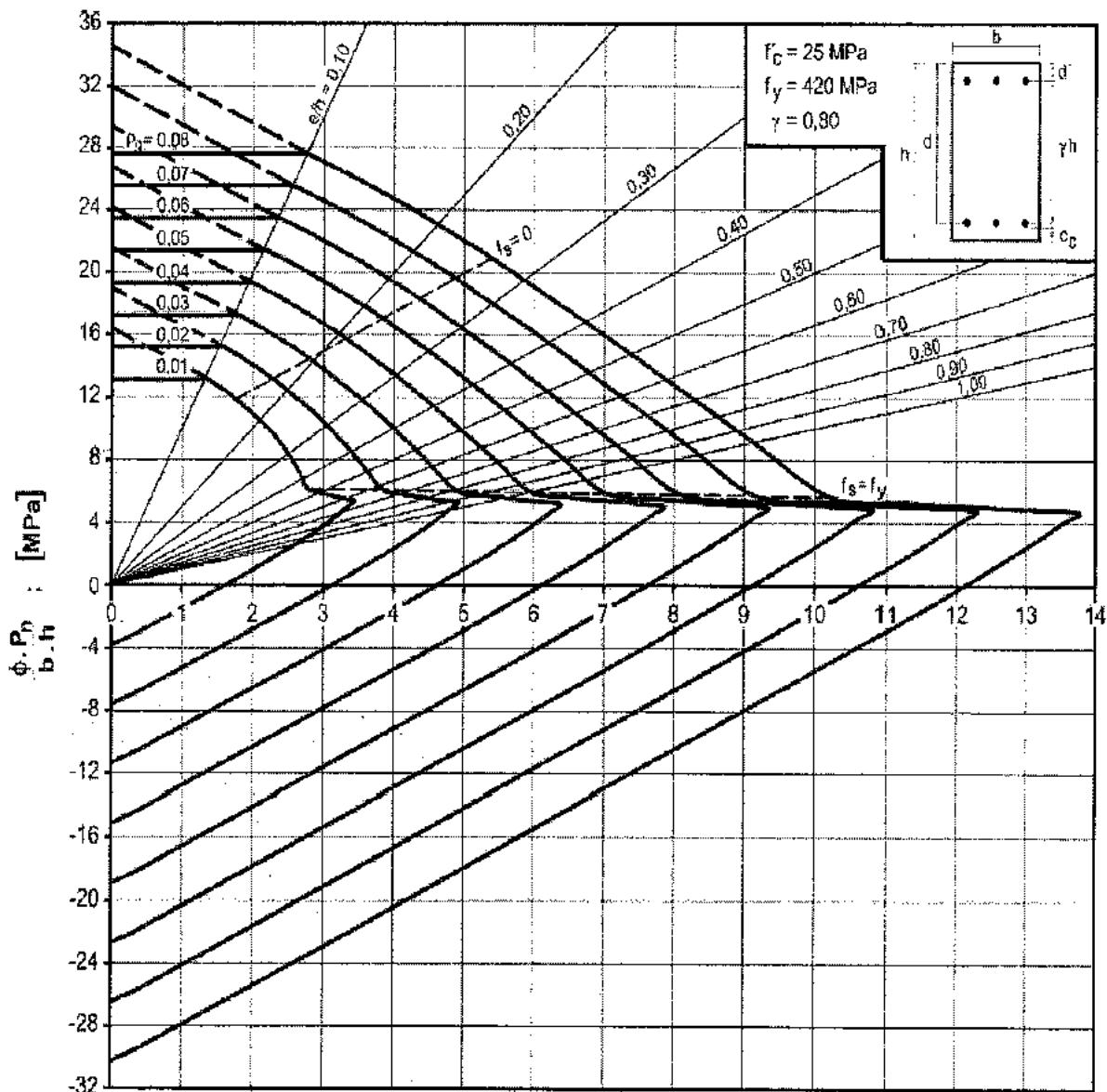
$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{nx0}} + \frac{1}{P_{ny0}} - \frac{1}{P_0} = \frac{1}{2625} + \frac{1}{3251} - \frac{1}{5285} = 4.9934 \cdot 10^{-4}$$

$$P_n = \frac{1}{4.9934 \cdot 10^{-4}} = 2003 KN \rightarrow P_u = \phi P_n = 0.65 \cdot 2003 = 1302 KN$$

Se verifica que  $P_n \geq 0.10 P_0 = 0.10 \cdot 5285 = 528.5 KN \checkmark \rightarrow$  es válido el método aproximado.

## 7.5. DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN ( Ejemplos del CIRSOC 201 )

### DIAGRAMA DE INTERACCIÓN

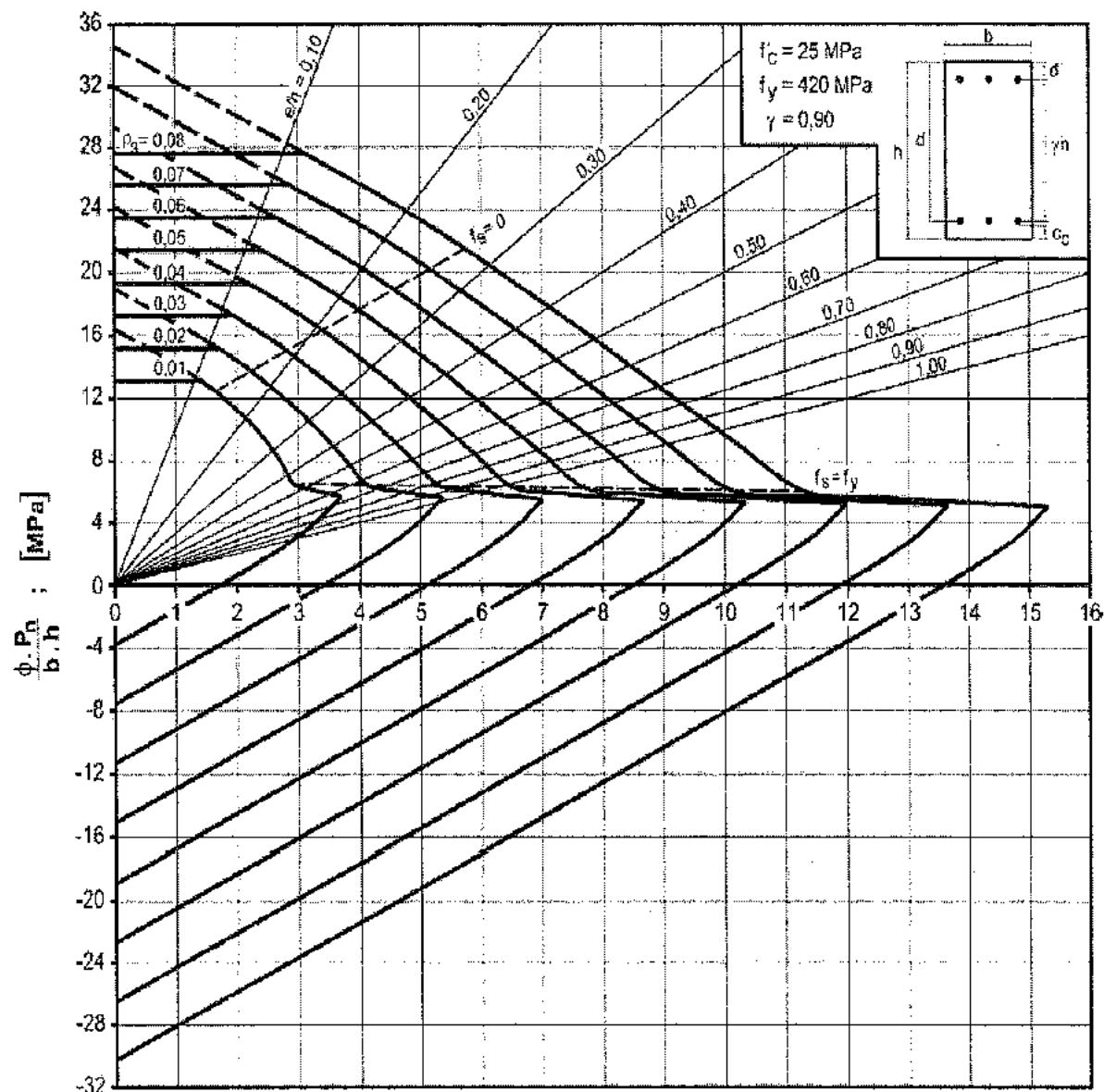


$$\frac{\phi \cdot P_n}{A_g} \cdot \frac{e}{h} = \frac{\phi \cdot M_n}{b \cdot h^2} ; \text{ [MPa]}$$

### DIAGRAMA I.9

Diagrama de interacción de la resistencia de secciones rectangulares con barras en las caras extremas.  $f_c = 25 \text{ MPa}$  y  $\gamma = 0,80$ .

## DIAGRAMA DE INTERACCIÓN

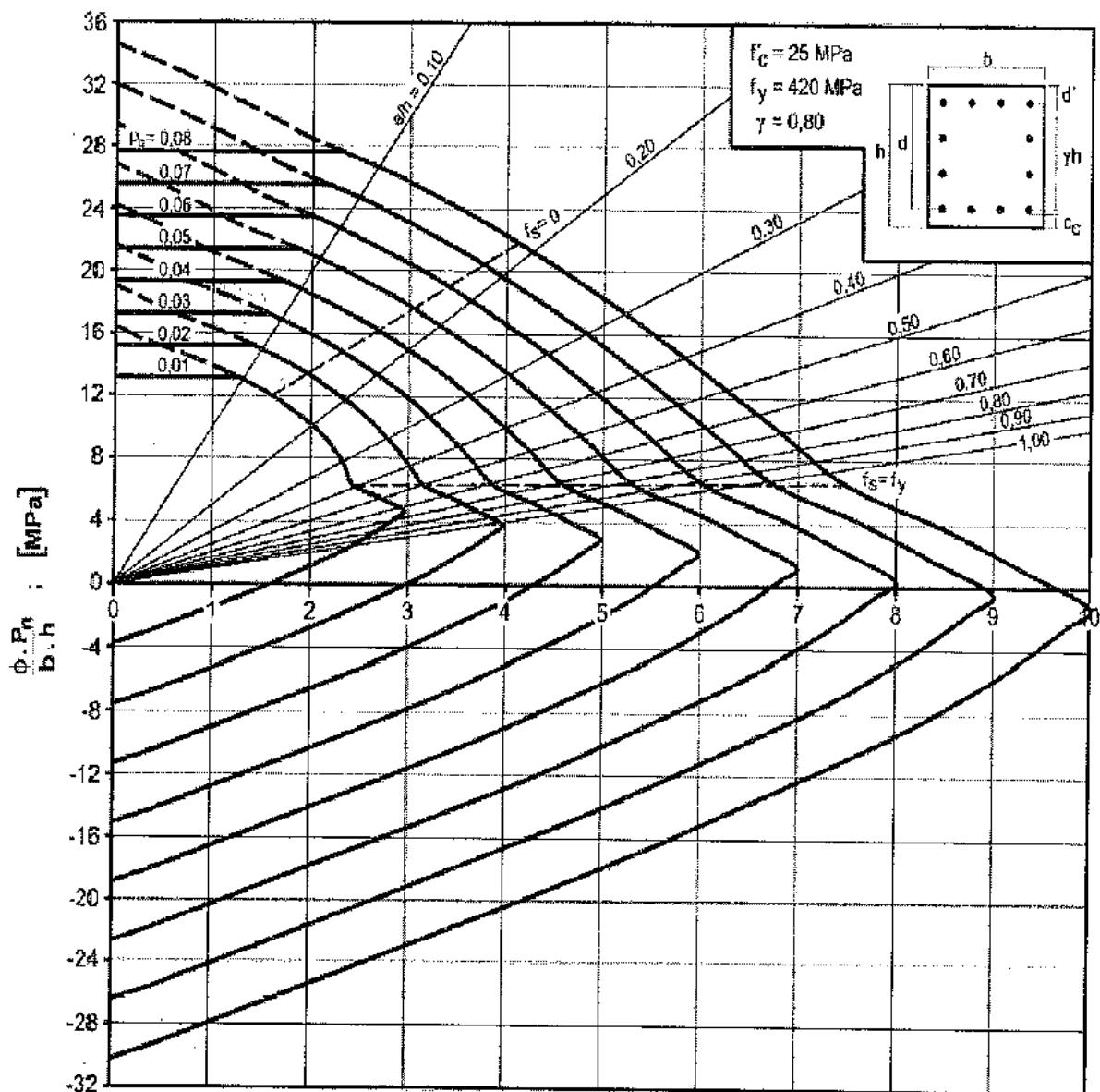


$$\frac{\phi P_n \cdot e}{A_g \cdot h} = \frac{\phi M_n}{b \cdot h^2} ; [\text{MPa}]$$

## DIAGRAMA I.10

Diagrama de interacción de la resistencia de secciones rectangulares con barras en las caras extremas.  $f'_c = 25 \text{ MPa}$  y  $\gamma = 0,90$ .

## DIAGRAMA DE INTERACCIÓN

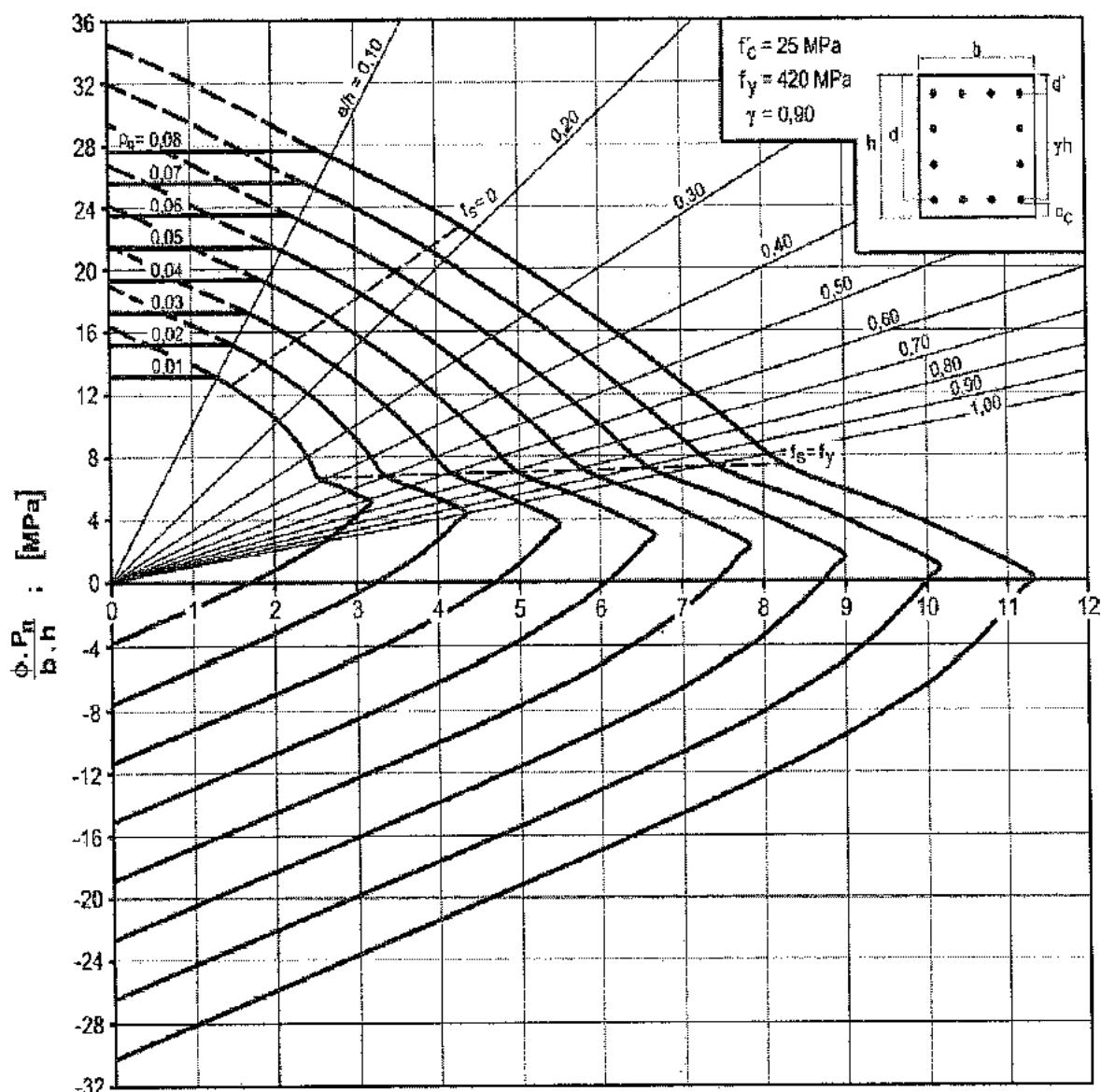


$$\frac{\phi \cdot P_n}{A_g} \cdot \frac{e}{h} = \frac{\phi \cdot M_n}{b \cdot h^2} : [\text{MPa}]$$

## DIAGRAMA II.9

Diagrama de interacción de la resistencia de secciones rectangulares con barras en sus cuatro lados.  $f'_c = 25 \text{ MPa}$  y  $\gamma = 0,80$ .

DIAGRAMA DE INTERACCIÓN

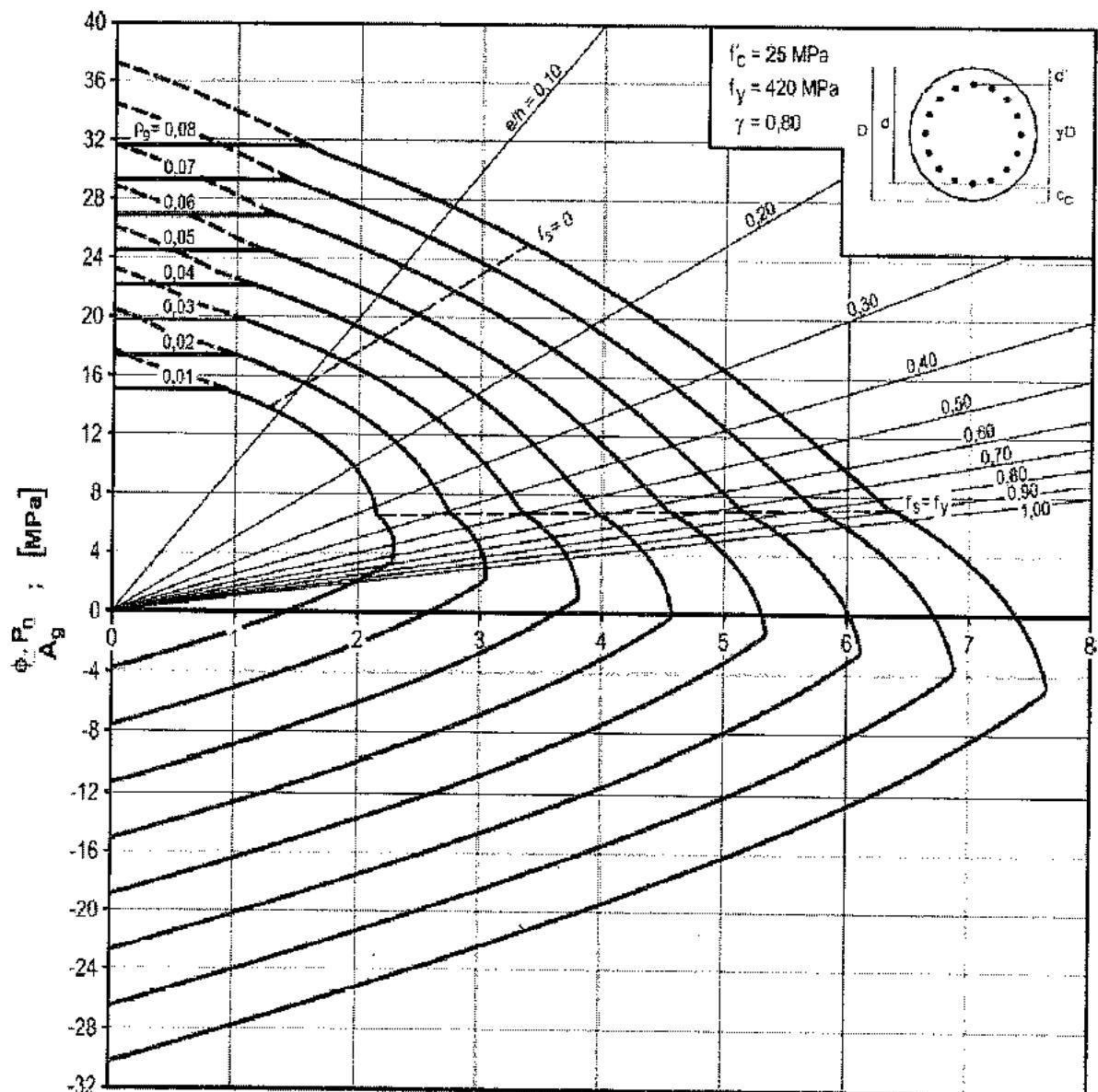


$$\frac{\phi \cdot P_n}{A_s}, \frac{e}{h} = \frac{\phi \cdot M_n}{b \cdot h^2}; [MPa]$$

DIAGRAMA II.10

Diagrama de interacción de la resistencia de secciones rectangulares con barras en sus cuatro lados.  $f'_c = 25 \text{ MPa}$  y  $\gamma = 0.90$ .

## DIAGRAMA DE INTERACCIÓN

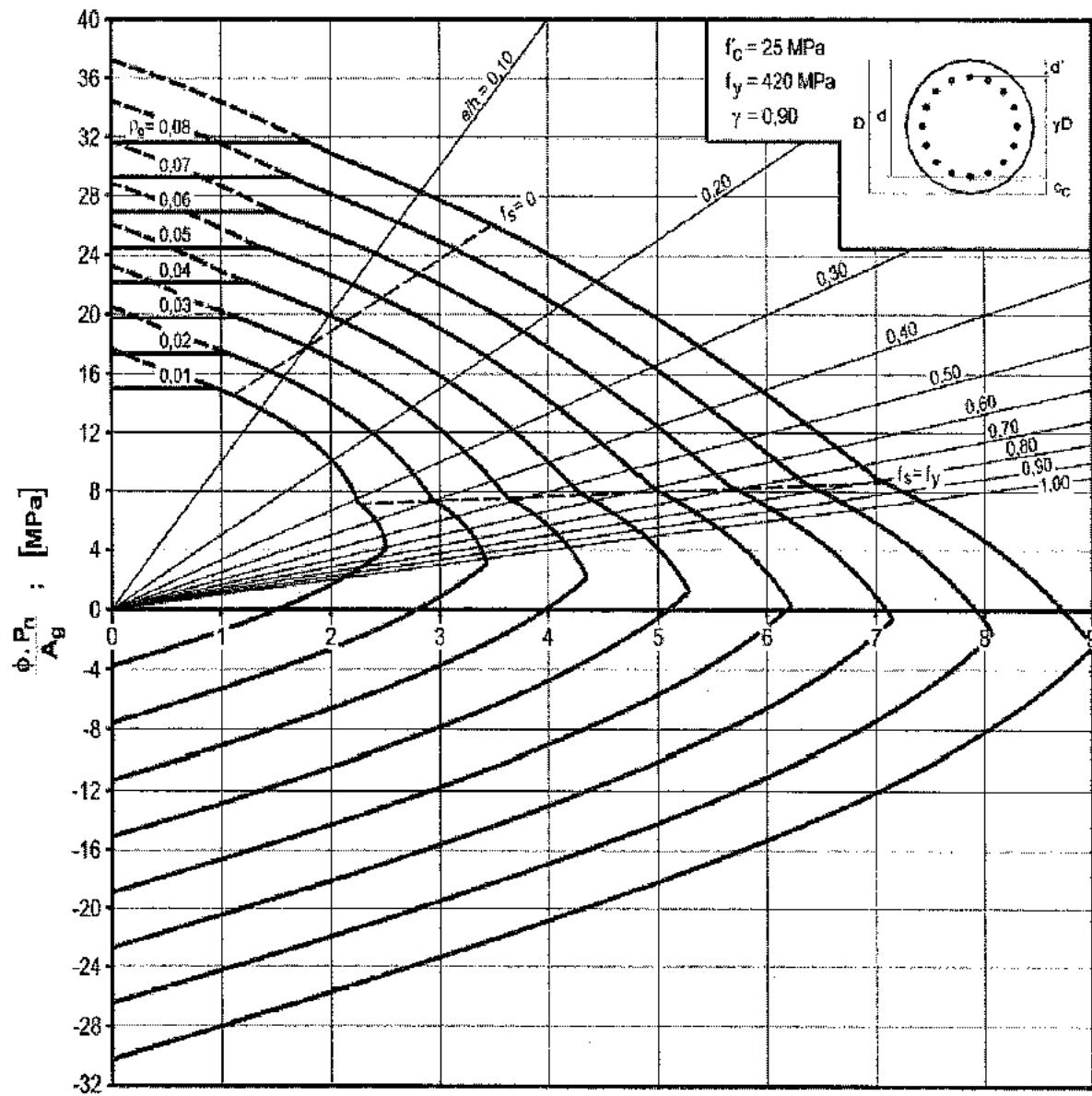


$$\frac{\phi P_n}{A_g} \cdot \frac{e}{D} = \frac{\phi M_n}{A_g \cdot D} ; \quad [\text{MPa}]$$

## DIAGRAMA III.9

Diagrama de interacción de la resistencia de secciones circulares.  
 $f'_c = 25 \text{ MPa}$  y  $\gamma = 0,80$ .

## DIAGRAMA DE INTERACCIÓN



$$\frac{\phi \cdot P_n}{A_g} : \frac{e}{D} = \frac{\phi \cdot M_n}{A_g \cdot D} ; [\text{MPa}]$$

## DIAGRAMA III.10

Diagrama de interacción de la resistencia de secciones circulares.

$$f'_c = 25 \text{ MPa} \quad y \quad \gamma = 0.90$$



# CAPÍTULO 8

## COMPORTAMIENTO Y DISEÑO DE COLUMNAS ESBELTAS

### 8.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se analizaron las “columnas cortas” en las cuales la resistencia es controlada totalmente por la resistencia de los materiales y la geometría de la sección transversal. En la práctica la mayor parte de las columnas pertenecen a esta categoría.

Sin embargo, con el incremento en la utilización de materiales de alta resistencia, modelos y procedimientos de análisis y diseño más racionales y confiables, se proyectan secciones transversales más pequeñas que antes, es decir elementos estructurales más esbeltos.

En el estudio del comportamiento de elementos esbeltos hay que considerar que la resistencia a compresión  $P_n$  no sólo depende de los materiales, geometría, excentricidades de aplicación de la carga  $e_x, e_y$ , sino que también de los efectos de “segundo orden” que pueden conducir a un problema de inestabilidad del equilibrio.

### 8.2. COLUMNAS CON CARGA AXIAL CENTRADA

Se considera el caso de una barra idealmente recta, de material perfectamente elástico con carga axial centrada, ver fig.8.1. Este problema fue resuelto por Euler hace más de 200 años.

A la barra cargada axialmente se introduce una perturbación infinitésima lateral que produce una deformación como la mostrada en la fig.8.1(a). El equilibrio de un elemento  $dx$  se presenta en la fig.8.1(b). Aplicando las ecuaciones de equilibrio para un elemento en el plano, y considerando  $\cos\theta = 1$ ,  $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{sen}\theta = \theta$  y despreciando infinitésimos de 2º orden, se llega a:

$$\sum N = 0 \rightarrow N + dN = P(1 - \theta d\theta) \rightarrow N = P \quad (8.1)$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V + dV = P(\theta + d\theta) \rightarrow dV = P d\theta = P y'' dx \quad (8.2)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = y' = \theta \rightarrow d\theta = y'' dx$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M - (M + dM) + V dx + \cancel{dV dx} = 0$$

$$-dM + V dx = 0 \rightarrow V = \frac{dM}{dx} \rightarrow \frac{dV}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (8.3)$$

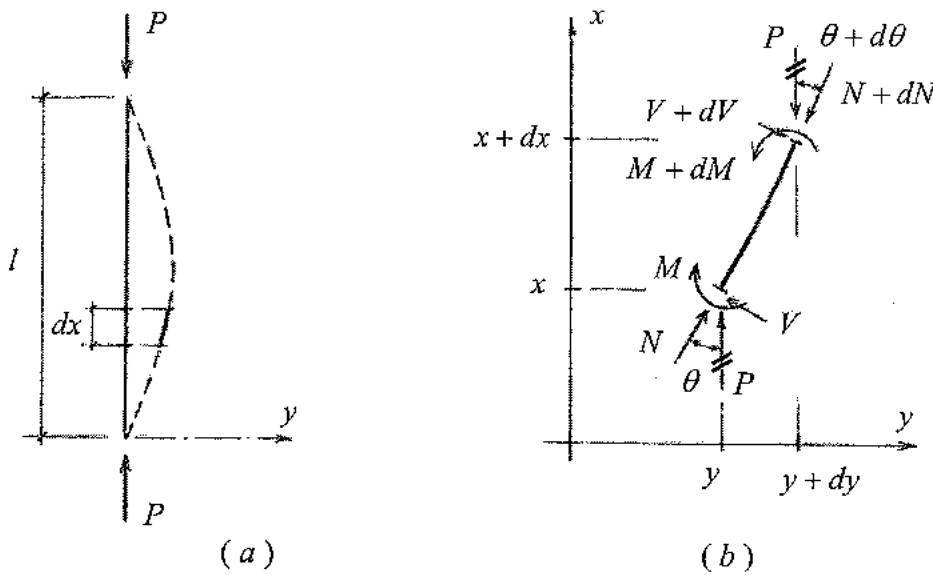


Figura 8.1: Barra recta con carga axial centrada

Reemplazando (8.3) en (8.2) se obtiene:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = P y'' \quad (8.4)$$

Se observa que el momento externo es:

$$M_{ext} = P y \quad (8.5)$$

de donde derivando dos veces con respecto a  $x$  se obtiene nuevamente (8.4). Por otra parte el momento interno, utilizando la teoría de la flexión de materiales elástico es:

$$M_{int} = -EI y'' \quad (8.6)$$

Entonces, dada una perturbación, si  $M_{int} > M_{ext}$  la pieza volverá a su posición inicial, reconociéndose un caso de equilibrio estable. Si se aumenta  $P$ , se llegará a una situación de equilibrio indiferente cuando  $M_{int} = M_{ext}$ . Para cargas mayores el equilibrio será inestable  $M_{int} < M_{ext}$  y la pieza no retorna a su posición de equilibrio, sino que continua aumentando su desplazamiento  $y$ , hasta que falla la sección más solicitada.

Se define como carga crítica de pandeo  $P_c$  la que produce el fin del equilibrio estable, es decir  $M_{int} = M_{ext}$ . Reemplazando en (8.4) resulta:

$$\frac{d^2(-EIy'')}{dx^2} = P_c y'' \rightarrow EIy'''' + P_c y'' = 0 \rightarrow y'''' + t^2 y'' = 0 \quad (8.7)$$

con  $t^2 = P_c / EI$

La solución de la ecuación diferencial (8.7) es:

$$y = C_1 \cos(tx) + C_2 \operatorname{sen}(tx) + C_3 \frac{x}{l} + C_4 \quad (8.8)$$

que depende de las constantes  $C_1$  a  $C_4$  obtenidas de las condiciones de borde, dos para cada extremo de la barra. Por ejemplo para el caso articulado-articulado con desplazamiento y momento nulo en los extremos:  $y(0) = 0$ ,  $y''(0) = 0$ ,  $y(l) = 0$ ,  $y''(l) = 0$ .

Resulta un sistema de ecuaciones homogéneo (términos independientes nulos), y para que exista solución no trivial ( $C_1 \neq C_2 \neq C_3 \neq C_4 \neq 0$ ), el determinante de la matriz del sistema debe ser nulo, es decir es un problema de valores y vectores propios, de donde se obtiene:

$$\operatorname{sen}(tl) = 0 \rightarrow tl = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.9)$$

La carga crítica que interesa es para  $n = 1$ , la de menor valor, y resulta

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (8.10)$$

Para otras condiciones de borde se puede expresar en forma genérica

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2} \quad (8.11)$$

Los valores de la "longitud efectiva"  $l_e = kl$  para distintas situaciones se presentan en la fig.8.2.

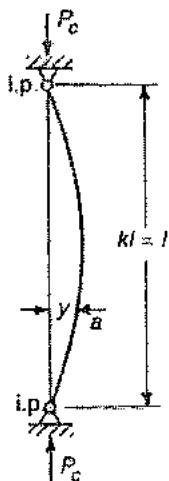
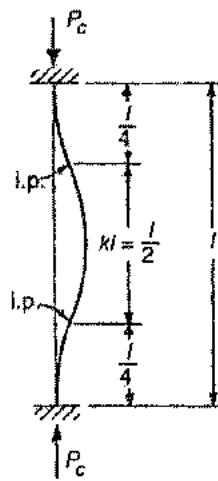
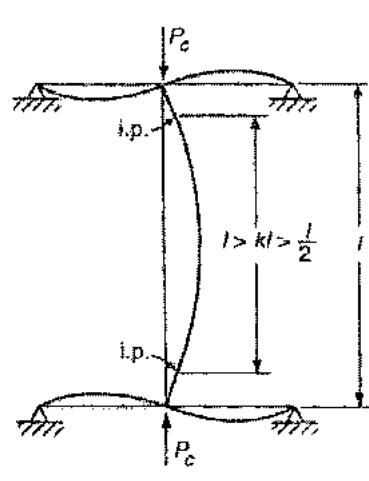
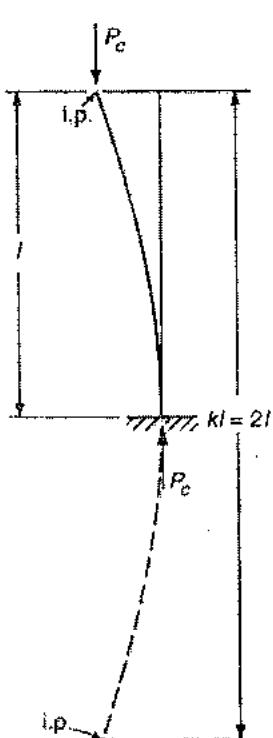
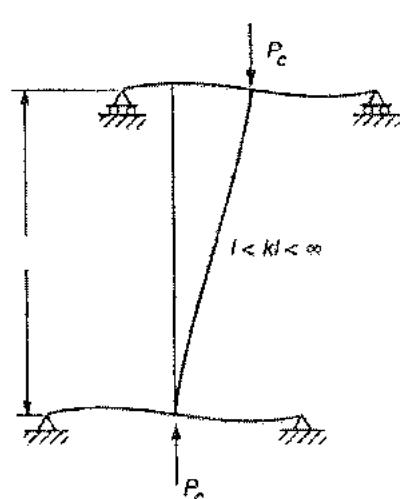
Se puede obtener la tensión crítica de pandeo dividiendo  $P_c$  por el área  $A$  de la sección:

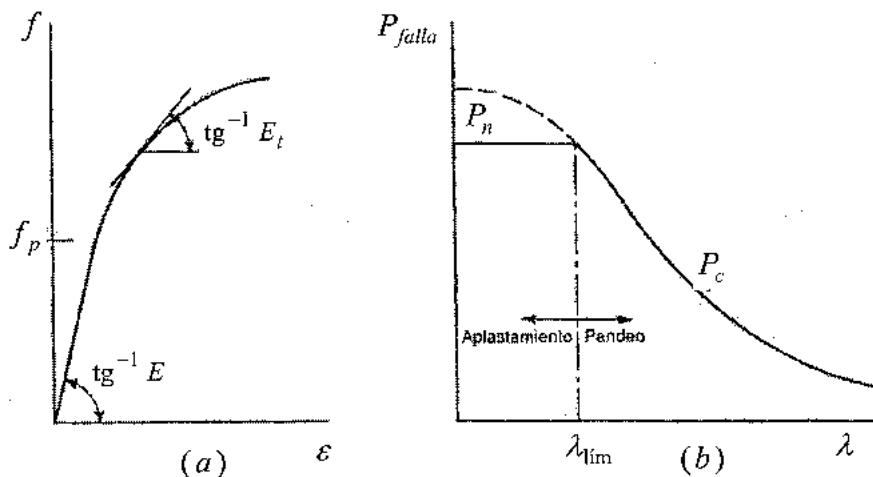
$$f_k = \frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 EI/A}{(kl)^2} = \frac{\pi^2 E r^2}{(kl)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{kl}{r})^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (8.12)$$

donde  $r = \sqrt{I/A}$  es el radio de giro de la sección y  $\lambda = kl/r$  es el grado de esbeltez de la columna.

En la fig.8.3 se representa la carga crítica en función de la esbeltez de la columna que señala la reducción de la resistencia al pandeo con el aumento de la esbeltez.

En ec.(8.12)  $E$  es el módulo de elasticidad tangente, que disminuye de valor para tensiones crecientes cercadas a  $f'_c$ . Además para columnas muy poco esbeltas (columnas cortas) el valor obtenido en ec.(8.11) excede la resistencia directa a compresión dada por (7.3).

(a)  $k = 1$ (b)  $k = \frac{l}{2}$ (c)  $\frac{l}{2} < k < 1$ (d)  $k = 2$ (e)  $k = 1$ (f)  $1 < k < \infty$ **Figura 8.2:** Pandeo y longitud efectiva de columnas cargadas axialmente

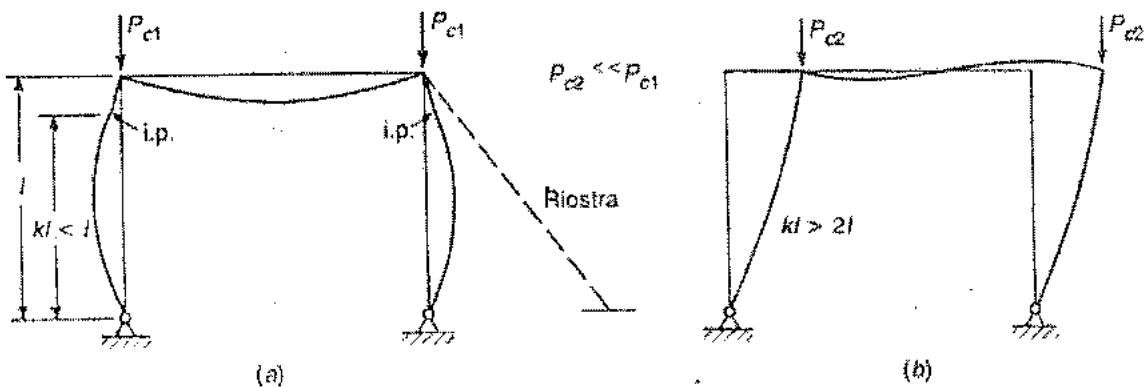


**Figura 8.3:** Efecto de la esbeltez sobre la resistencia de columnas cargadas axialmente

- **Sistemas arriostrados contra desplazamiento lateral (indesplazables) vs. sistemas no arriostrados (desplazables):**

Observar en la fig.8.2 la diferencia en la longitud efectiva de pandeo entre los casos desplazables e indesplazables, casos (e) vs. (b), y (f) vs. (c). En estos últimos casos (f) y (c), el valor de  $k$  depende de la rigidez a flexión de las vigas; vigas muy rígidas aproximarán (c) a (b) y (f) a (e); vigas muy flexibles aproximarán (c) a (a) y (f) a un elemento articulado-articulado desplazable, es decir inestable. Luego, la carga crítica en elementos desplazables es mucho menor que en elementos similares pero indesplazables.

En estructuras de hormigón armado pocas veces se trabaja con elementos individuales, siendo más frecuentes los pórticos de variadas configuraciones. En la fig. 8.4 se presenta el caso de un pórtico simple con las dos variantes arriostrado y no arriostrado contra el desplazamiento horizontal. Observar que en el primer caso (a)  $k l < l$ , mientras que en el segundo caso (b)  $k l > l$  y consecuentemente  $P_{c2} \ll P_{c1}$ .



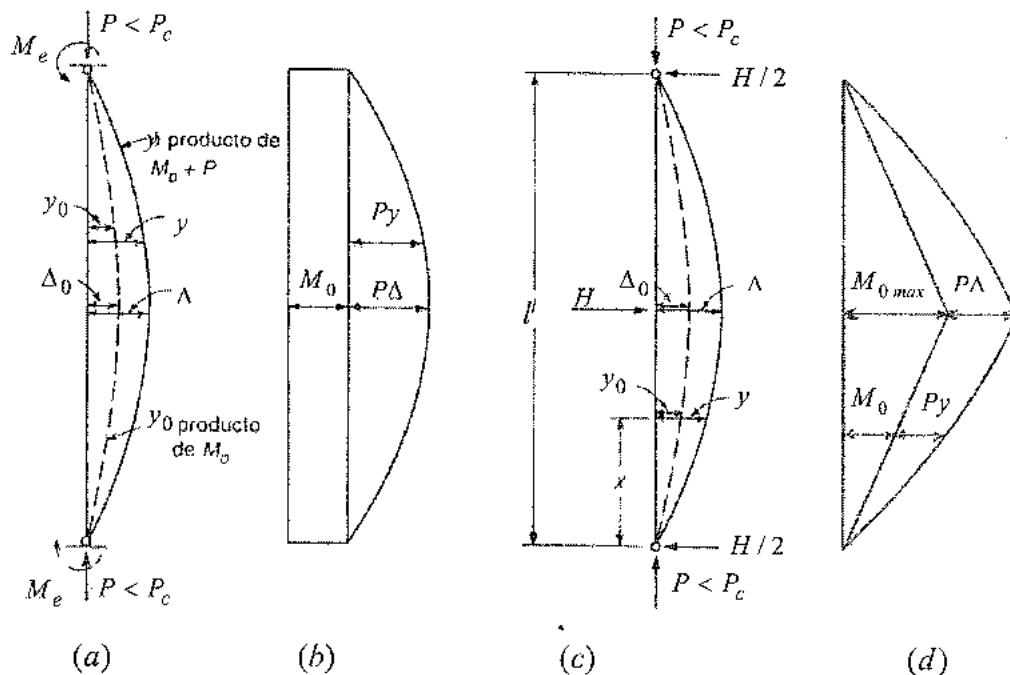
**Figura 8.4:** Pandeo de un pórtico. (a) Indesplazable. (b) Desplazable

### 8.3. COLUMNAS CON COMPRESIÓN Y FLEXIÓN

La mayor parte de las columnas de hormigón armado solicitadas a compresión también están sujetas a flexión simultáneamente, debido a que las condiciones ideales planteadas en 8.2 no se satisfacen ya que:

- Las cargas axiales no están centradas, siempre existe una excentricidad inicial prevista o no prevista.
- Pueden existir cargas transversales al elemento.
- Existen momentos en los extremos debido a la continuidad, por más que en el modelo de cálculo se considere articulado.
- El eje no es exactamente recto por imperfecciones constructivas, armaduras no simétricas, hormigón heterogéneo.

La fig.8.5(a) presenta un elemento cargado axialmente con  $P$  y solicitado por momentos deflectores en los extremos  $M_e$ . Si sólo actuaran los momentos  $M_e$  se produciría la elástica  $y_0$ , con valor  $\Delta_0$  en el centro, y un diagrama de momentos constantes  $M_0$  mostrado en la fig.8.5 (b).



**Figura 8.5:** Columna esbelta solicitada por flexocompresión, deflectada con curvatura simple

Cuando actúa la carga  $P$ , el momento en cualquier sección aumenta en  $P$  veces el brazo de palanca, y en consecuencia se producen deflexiones adicionales obteniéndose la elástica  $y$  de la fig.8.5(a). El momento total es:

$$M = M_0 + P y \quad (8.13)$$

- **Análisis de primer orden:** las ecuaciones de equilibrio se plantean en la configuración inicial indeformada. Significa, en la fig.8.5, elástica  $y_0$  y momento constante  $M_0$ .
- **Análisis de segundo orden:** las ecuaciones de equilibrio se plantean en la configuración deformada actualizada. Significa, en la fig.8.5, elástica  $y$  y momento  $M_0 + P y$ ; en la sección central  $M_0 + P \Delta$ , ahí el nombre de “efecto  $P \Delta$ ”.

La fig.8.5 (d), (e) presentan una situación similar donde la flexión es producida por la carga transversal  $H$ . Similarmente al caso anterior el momento flector en cualquier sección tiene una componente de primer orden  $M_0(x)$  y momentos adicionales  $P y(x)$ .

La solución de la elástica  $y(x)$  se obtiene cuando se iguala el momento externo con el momento interno en cada sección. Previamente al estudio de la solución analítica se presenta el comportamiento de columnas con diferente grado de esbeltez.

El comportamiento se muestra esquemáticamente en la fig.8.6 para reducida, moderada y elevada esbeltez. En el eje de las abscisas se representa el desplazamiento lateral  $y$  en el centro de la columna. En el eje de las ordenadas se representa el momento flector  $M$  en la misma sección central.

En líneas de trazo se grafica el momento externo  $M_u = P_u(e + y)$  para dos valores de carga axial  $P_{u1}$  y  $P_{u2}$ , con  $P_{u1} < P_{u2}$ , observándose la variación lineal del momento con el desplazamiento lateral  $y$ . Esta recta se prolonga hacia las  $y$  negativas para mostrar que para  $y = -e$  resulta nulo el momento independientemente del valor de  $P_u$ .

En línea llena se grafica el momento interno  $M_{int}$  que es función de la curvatura  $\varphi \cong y''$ , y por lo tanto función de  $y$ . El momento resistente  $M_n$  depende del nivel de carga axial, tal como se analizó en 7.3, ver fig.7.6: diagramas de interacción  $m - n$ . En la fig.8.6 se presentan las funciones  $M_{int} - y$  para los mismos dos valores de carga axial  $P_{u1} < P_{u2}$ . Son curvas porque como  $M_{int} = -EI y''$ , si la elástica  $y(x)$  fuera una función polinómica de tercer grado y el comportamiento del hormigón fuera elástico lineal ( $EI$  constante), entonces sería una función lineal. Como ninguna de estas condiciones se cumple, luego la relación  $M_{int} - y$  es una curva.

La solución del desplazamiento lateral  $y$ , para cada nivel de carga axial, se encuentra donde se cruzan las trayectorias de momento externo y momento interno, es decir  $M_u = M_{int}$  que es la condición de equilibrio.

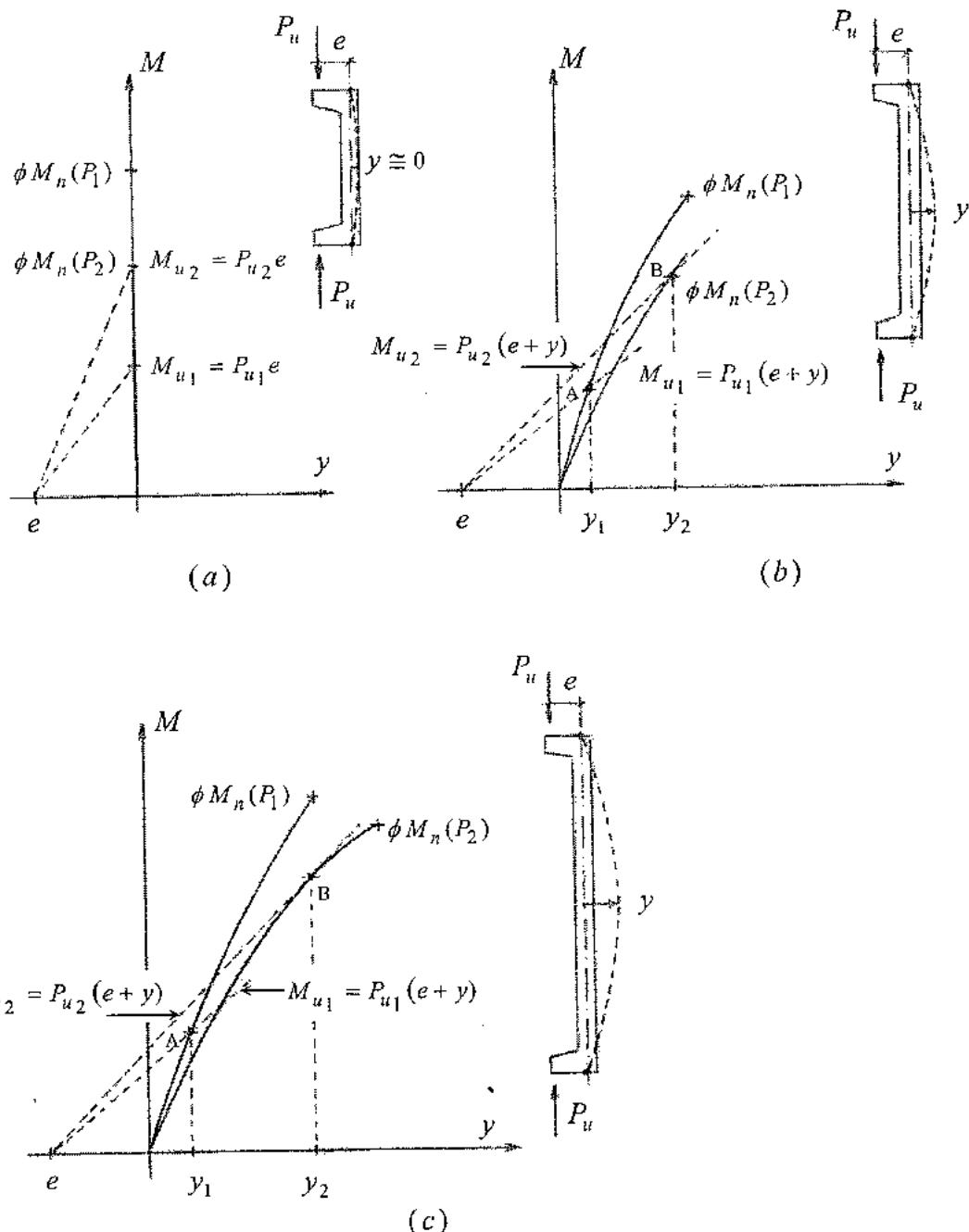
Las particularidades para cada grado de esbeltez son las siguientes:

- a) **Columna de reducida esbeltez:** se muestra en la fig.8.6(a) donde el momento externo es  $M_u = P_u e$ . Los momentos de segundo orden  $P y(x)$  son despreciables ya que  $y(x)$  es muy pequeño y en consecuencia el gráfico se contrae sobre el eje de las ordenadas. Mientras el momento externo sea menor que el momento interno resistente se obtiene equilibrio con  $y(x) \cong 0$  y se trata de un problema de resistencia con teoría de primer orden.

$$P_u e \leq \phi M_n \quad (8.14)$$

- b) **Columna de moderada esbeltez:** se muestra en la fig.8.6(b). Para una carga  $P_{u1}$  el equilibrio se obtiene para  $y_1$  en el punto  $A$ , pero con influencia de los momentos de segundo orden. De todas maneras la falla se produce por resistencia para  $P_{u2}$  al alcanzar el momento interno resistente  $M_{n2}$  en  $y_2$ , punto  $B$ . Observar que para  $P_{u2} > P_{u1}$  el momento resistente

nominal  $M_{n2}$  es menor que  $M_{n1}$ , como se describió en 7.3.2. Es un problema de resistencia con teoría de segundo orden.



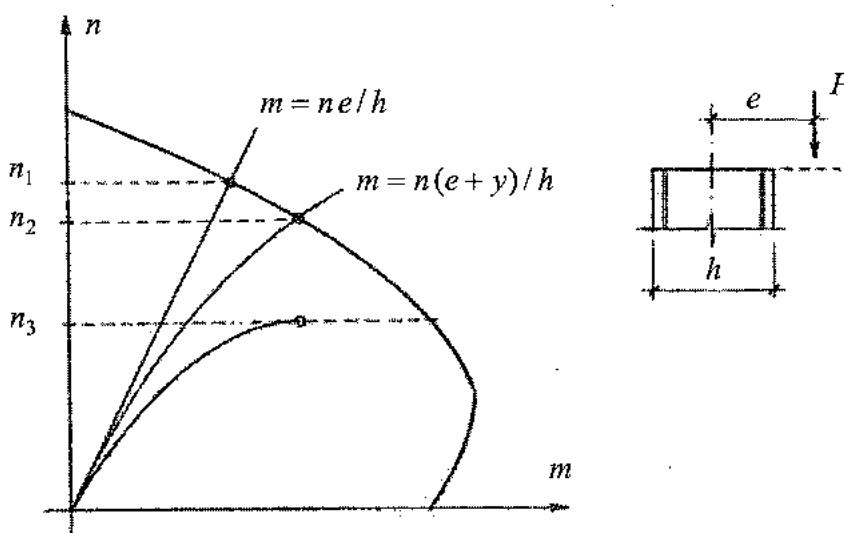
**Figura 8.6:** Comportamiento de columnas esbeltas

- Ebeltez reducida: problema de resistencia con teoría de 1º orden.
- Ebeltez moderada: problema de resistencia con teoría de 2º orden.
- Ebeltez elevada: problema de inestabilidad del equilibrio en flexocompresión.

c) **Columna con elevada esbeltez:** se muestra en la fig.8.6.(c). Para carga axial creciente, la recta de momento externo considerando efectos de segundo orden se hace tangente a la curva de resistencia interna, y se produce un estado de equilibrio indiferente, punto  $B$ . Significa que para una carga mayor, la recta de momento externo  $P_n(e+y)$  ya no intersecta a la curva de momento interno  $\phi M_n$ , es decir no se obtiene equilibrio. Significa que la columna continúa deformándose hasta romper. Es un problema de inestabilidad del equilibrio (pandeo) en flexo-compresión.

Si se analizan estos tres casos en la curva de interacción  $n, m$ , ver fig.8.7 se observa que:

- *Columna de reducida esbeltez:* solo efectos de primer orden, es decir  $n, m = n e/h$  y la columna falla para un nivel de carga axial  $n_1 = P_{n1}/(f'_c A_g)$ .
- *Columna de moderada esbeltez:* tienen influencia los efectos de segundo orden, y la falla se alcanza por resistencia para  $n_2 < n_1, m_2 = n_2(e+y)/h$ .
- *Columna de elevada esbeltez:* los momentos de segundo orden son considerablemente mayores y se produce inestabilidad del equilibrio (pandeo) para un nivel de carga axial  $n_3$  marcadamente inferior, y sin alcanzar la curva de interacción de resistencia.



**Figura 8.7:** Diagrama de interacción – columnas con diferente grado de esbeltez

➤ **La solución analítica** para el caso planteado en la fig.8.5(a), (b), es decir columna articulada-articulada con momento constante de primer orden, y carga axial, se obtiene de la siguiente manera

$$M_{\text{int}} = M_{\text{ext}} \rightarrow -EI y''(x) = M_0(x) + P y(x) \quad (8.15)$$

Como la columna se deforma con simple curvatura (momento flector del mismo signo en toda la columna) se puede aproximar la elástica  $y(x)$  con:

$$y(x) = y \sin \frac{\pi x}{l} \quad (8.16)$$

con  $y$  el desplazamiento máximo en la sección central  $x = l/2$ . Resulta

$$y'(x) = \frac{\pi}{l} y \cos \frac{\pi x}{l} \rightarrow y''(x) = -\frac{\pi^2}{l^2} y \sin \frac{\pi x}{l} \quad (8.17)$$

Además, como  $M_0(x)$  es constante, se aproxima con

$$M_0(x) = -EI y''(x) = \frac{EI\pi^2}{l^2} y_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (8.18)$$

Reemplazando (8.16), (8.17) y (8.18) en (8.15) se obtiene

$$\frac{EI\pi^2}{l^2} y \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{EI\pi^2}{l^2} y_0 \sin \frac{\pi x}{l} + P y \sin \frac{\pi x}{l} \quad (8.19)$$

Simplificando y recordando (8.10)  $P_c = EI\pi^2/l^2$ , resulta

$$P_c y = P_c y_0 + P y \rightarrow y = y_0 \frac{1}{1 - P/P_c} \quad (8.20)$$

El momento máximo es, a partir de (8.13) y fig.8.5(b)

$$M_{max} = M_0 + P \Delta = M_0 + P \Delta_0 \frac{1}{1 - P/P_c} \cong M_0 \left( \frac{1 + \psi P/P_c}{1 - P/P_c} \right) \quad (8.21)$$

donde  $\psi$  es un coeficiente que depende del tipo de carga y varía aproximadamente entre  $\pm 0.20$  para la mayor parte de los casos prácticos.

Si se tiene en cuenta que en general es  $P/P_c \ll 1$ , el segundo término del numerador de (8.21) se puede despreciar frente a 1, y finalmente resulta

$$M_{max} = M_0 \frac{1}{1 - P/P_c} \quad (8.22)$$

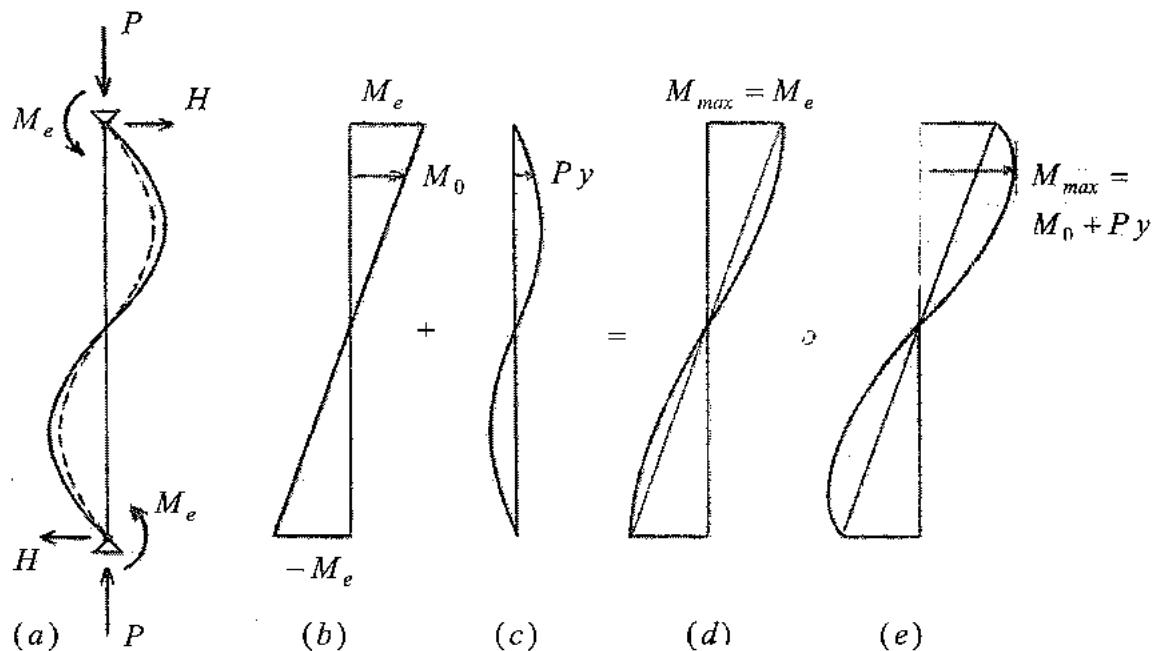
donde  $1/(1 - P/P_c)$  se denomina factor de amplificación de momento.

La suma directa de los momentos de primer orden  $M_0$  con los producidos por  $P$ , no se presenta en todos los casos. La fig.8.8(a) muestra el caso de una columna articulada-articulada con momentos de igual magnitud pero sentido opuesto en los extremos. Las deflexiones  $y_0$  producidas por  $M_0$  se ven amplificadas para la carga axial  $P$ . Resulta:

$$y(x) = y \sin \frac{2\pi x}{l} \rightarrow y = y_0 \frac{1}{1 - P/(4P_c)} \quad (8.23)$$

comparando (8.20) se observa que en este caso la amplificación en la deflexión es mucho menor.

Los momentos de primer orden  $M_0$  y los adicionales  $P y$  se muestran en las figs.8.8(b) y (c). La suma puede ser máxima en el extremo o a cierta distancia pero con un valor apenas mayor que  $M_e$ .



**Figura 8.8:** Columna esbelta solicitada a flexocompresión, deflectada con curvatura doble

Se demuestra que los casos mostrados en las figs. 8.5 y 8.8 se pueden generalizar con

$$M_{max} = M_0 \frac{C_m}{1 - P/P_c} \quad (8.24)$$

donde

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \quad (8.25)$$

$M_1$  y  $M_2$  son los momentos en los extremos, menor y mayor respectivamente. El cociente  $M_1 / M_2$  es positivo si los momentos producen curvatura simple. Cuando  $M_1 = M_2 = M_0$  resulta  $C_m = 1$  y se reproduce (8.22). Para el caso en que hay cargas transversales en la columna, fig.8.5 (d), se debe adoptar  $C_m = 1$ . El cociente  $M_1 / M_2$  es negativo si se produce curvatura doble.

Hay que observar que la ec.(8.25) es aplicable únicamente a elementos arriostrados contra desplazamiento lateral. Si la columna pertenece a un pórtico desplazable, como el de la fig.8.4(b), el momento máximo se producirá siempre en el extremo de la columna y entonces debe ser  $C_m = 1$ .

## 8.4. MÉTODOS DE ANÁLISIS

El análisis de estructuras considerando la esbeltez en los elementos comprimidos se puede realizar de varias formas dependiendo de la exactitud requerida y de las características de la estructura.

### 8.4.1. Análisis no lineal

En el caso más general se realiza el análisis estructural considerando:

- No linealidad geométrica: se tienen en cuenta grandes desplazamientos, es decir las ecuaciones de equilibrio se plantean sobre la geometría desplazada (efectos de segundo orden), y relaciones no lineales entre desplazamientos y deformaciones.
- No linealidad física: se debe considerar el comportamiento no lineal del material y la fisuración, los efectos de la duración de las cargas, contracción de fragüe, fluencia lenta y la interacción suelo-estructura.

El procedimiento utilizado debe demostrar que predice niveles de resistencia que estén de acuerdo con resultados de ensayos experimentales.

Las propiedades de los elementos se deberán multiplicar por un factor de reducción de rigidez  $\phi_k = 0.80$ .

Este tipo de análisis es bastante complejo y se recurre a él cuando los métodos simplificados no son de aplicación. En general, se requiere de un método de avance por incrementos de carga y procesos iterativos para ajustar el equilibrio en cada incremento, y se utilizan programas de computación.

### 8.4.2. Método de los momentos amplificados

Como alternativa al procedimiento general descrito en 8.4.1, se permite utilizar un método aproximado llamado el “método de los momentos amplificados” que consiste en calcular los esfuerzos internos mayorados  $P_u$ ,  $M_{u1}$ ,  $M_{u2}$  en los extremos de la columna, y los desplazamientos laterales de piso  $\Delta_0$ , con análisis elástico de primer orden. Luego los momentos son “amplificados” convenientemente para considerar los efectos de segundo orden, y finalmente verificar la resistencia de las secciones y estabilidad de los elementos.

#### 8.4.2.1. Criterio para considerar sistemas indesplazables o desplazables lateralmente

De acuerdo con los apartados 8.2 y 8.3, existen diferencias significativas entre el comportamiento de columnas esbeltas en pórticos arriostrados (sin desplazamiento lateral) y el de columnas de pórticos no arriostrados (con desplazamiento lateral). Estas diferencias se manifiestan principalmente en la longitud efectiva  $l_e = k l$  y en los factores de amplificación de momentos.

El criterio para considerar una columna como arriostrada o “indesplazable” es que su resistencia no se vea afectada en forma apreciable por los efectos del desplazamiento lateral. Esto significa que el aumento en los momentos por efectos de segundo orden, debido al desplazamiento lateral, no exceda el 5 % de los momentos de primer orden.

Se consideran miembros a compresión arriostrados contra el desplazamiento lateral cuando los elementos de arriostramiento tienen una rigidez lateral al menos 12 veces la suma de las rigideces de todas las columnas de ese piso. Elementos de arriostramiento típicos en edificios son los tabiques y los reticulados verticales.

Si la rigidización no resulta evidente, se puede determinar con análisis no lineal que incluya efectos de segundo orden (también llamado efecto  $P\Delta$ ), o alternativamente calculando el valor del "índice de estabilidad"  $Q$  de un entrepiso.

Se considera que un entrepiso está arriostrado cuando

$$Q = \frac{\sum P_u}{V_u l_c} \Delta_0 \leq 0.05 \quad (8.26)$$

donde  $\sum P_u$  es la carga vertical mayorada total del entrepiso,  $V_u$  el esfuerzo de corte total del piso,  $\Delta_0$  el desplazamiento de primer orden entre la parte superior e inferior del entrepiso debido a  $V_u$ , y  $l_c$  la longitud del elemento comprimido medida de centro a centro de los nudos del pórtico.

Se debe basar en combinaciones de cargas laterales que maximicen  $\sum P_u$ . Esta verificación no es aplicable cuando  $V_u = 0$ . Entonces, si no hay carga lateral aplicada, se puede calcular el índice de estabilidad para una carga horizontal arbitraria, porque el valor de la carga lateral influye de igual manera en el numerador (en el cálculo de  $\Delta_0$ ) y en el denominador ( $V_u$ ).

Este índice de estabilidad se calcula por piso, pudiendo coexistir algunos entrepisos indesplazables y otros desplazables en un mismo pórtico.

Para valores de  $Q \leq 0.6$  resulta aproximadamente  $Q \cong P / P_c$  utilizada en el factor de amplificación de momentos, ec.(8.22), de manera que  $1/(1 - P/P_c)$  se puede reemplazar por  $1/(1-Q)$ . Luego, para  $Q = 0.05$  resulta  $M_{max} \cong 1.05 M_0$  que es el valor límite para considerar a la columna como indesplazable.

#### 8.4.2.2. Rigididad de los elementos

Las rigideces  $EI$  utilizadas en un análisis elástico para el diseño por resistencia de elementos comprimidos, y específicamente para calcular el índice de estabilidad  $Q$  ec.(8.26), deben representar las rigideces de dichos elementos inmediatamente antes de producirse la rotura y así obtener desplazamientos laterales reales para cargas cercanas a la carga última, ver fig.8.9.

Los valores de  $EI$  no se deben obtener solamente a partir de la relación momento - curvatura de la sección más solicitada, sino que deben corresponder a la relación momento - rotación en el extremo del elemento considerado en su totalidad.

Se deben tener en cuenta los efectos de las cargas axiales, las zonas fisuradas a lo largo del elemento y la duración de las cargas.

Como alternativa, las propiedades de la sección, consideradas constantes en todo el elemento, se pueden representar con el módulo de elasticidad  $E$  de ec.(2.6) y las siguientes propiedades:

- Momentos de inercia:      vigas                           $0.35 I_g$   
                                   columnas                         $0.70 I_g$   
                                   tabiques no fisurados         $0.70 I_g$   
                                   tabiques fisurados             $0.35 I_g$   
                                   placas y losas planas      $0.25 I_g$
- Área:  $1.0 A_g$

donde  $I_g$ ,  $A_g$  son el momento de inercia y el área de la sección bruta de hormigón.

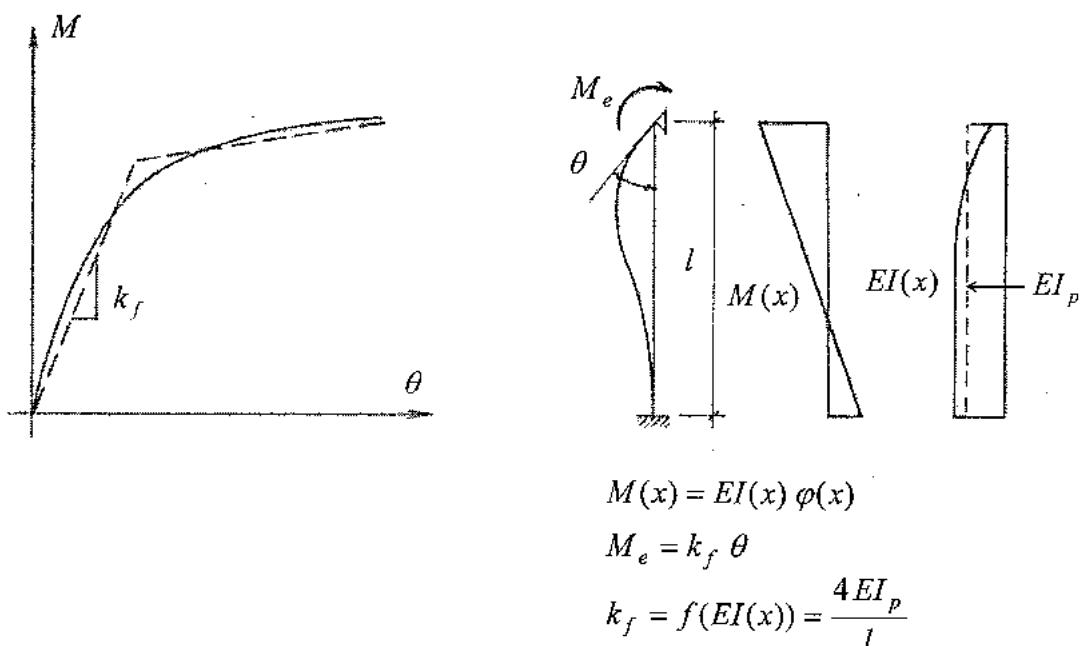


Figura 8.9: Rígidez  $EI$  a considerar en los elementos

Los momentos de inercia se deben dividir por  $(1 + \beta_d)$  cuando actúen cargas horizontales de larga duración, o en los casos de verificación de estabilidad de la estructura en su conjunto, en sistemas desplazables.  $\beta_d$  considera los efectos de fluencia lenta y se calcula de diferente forma según el caso de sistema desplazable o indesplazable.

Los valores dados para el momento de inercia (8.27) subestiman los verdaderos momentos de inercia y entonces sobreestiman de manera conservadora los efectos de segundo orden entre el 20 al 25 % para pórticos de hormigón armado. Esto corresponde a un factor implícito de reducción de la rigidez  $\phi_k \approx 0.80$  a 0.85 con respecto a los cálculos de estabilidad.

Cuando sea necesario estudiar el comportamiento para cargas de servicio, los momentos de inercia deben ser representativos del grado de fisuración alcanzado para ese nivel de carga. Resulta aceptable utilizar el valor 1.43 ( $= 1 / 0.70$ ) veces los momentos de inercia señalados para cargas últimas (8.27).

Si las deformaciones del pórtico producidas por cargas laterales han sido determinadas utilizando cargas de servicio y los momentos de inercia (8.27), se permite calcular  $Q$  con (8.26) utilizando el valor del corte del entrepiso para cargas de servicio, 1,2 veces la suma de

las cargas gravitatorias de servicio ( 1,2 D ) y 1,43 veces la deformación de primer orden del entrepiso para cargas de servicio ( 1.43  $\Delta_0$  ).

#### 8.4.2.3. Esbeltez de las columnas

Los desarrollos presentados en 8.2 y 8.3 muestran la importancia de la esbeltez  $\lambda = k l / r$  en el comportamiento de las columnas. En las figs.8.2 y 8.4 se observa que el factor de longitud efectiva  $k$  varía de 0,5 a 1 para pórticos indesplazables, mientras que para pórticos desplazables  $k$  varía de 1 a  $\infty$ . El radio de giro  $r$  se calcula con las dimensiones totales de la sección, sin ninguna reducción por fisuración.

La longitud efectiva  $l_e = k l$  es función de la rigidez relativa  $\psi$  en cada extremo del elemento comprimido, además de si el pórtico es desplazable o indesplazable, siendo

$$\psi = \frac{\sum EI/l_e \text{ (columnas)}}{\sum EI/l \text{ (vigas)}} \quad (8.28)$$

$\psi$  se calcula en cada extremo de la columna y las sumatorias se extienden sobre los elementos que concurren a ese extremo que actúan en el plano en el que se analiza el pandeo. La rigidez  $EI$  debe calcularse con base a  $E_c$  de ec.(2.6) e  $I$  dados en (8.27). Las longitudes se deben medir de centro a centro de nudos.

Se presentan dos alternativas para evaluar  $k$ , conociendo  $\psi$  en los extremos:

a) **Nomogramas:** se muestran en la fig.8.8 (a) para pórticos indesplazables y fig.8.8 (b) para pórticos desplazables. Calculados  $\psi_A$  y  $\psi_B$  en los extremos de la columna, se unen con una línea recta y donde corta el eje central se lee el factor de longitud efectiva  $k$ .

b) **Expresiones simplificadas:**

- **Pórticos indesplazables:** se puede adoptar como límite superior de  $k$  al menor valor entre:

$$\begin{aligned} k &= 0.7 + 0.05 (\psi_A + \psi_B) \leq 1.0 \\ k &= 0.85 + 0.05 \psi_{\min} \end{aligned} \quad (8.29)$$

donde  $\psi_{\min}$  es el menor entre  $\psi_A$  y  $\psi_B$

- **Pórticos desplazables:**

- Con restricciones al giro en ambos extremos:

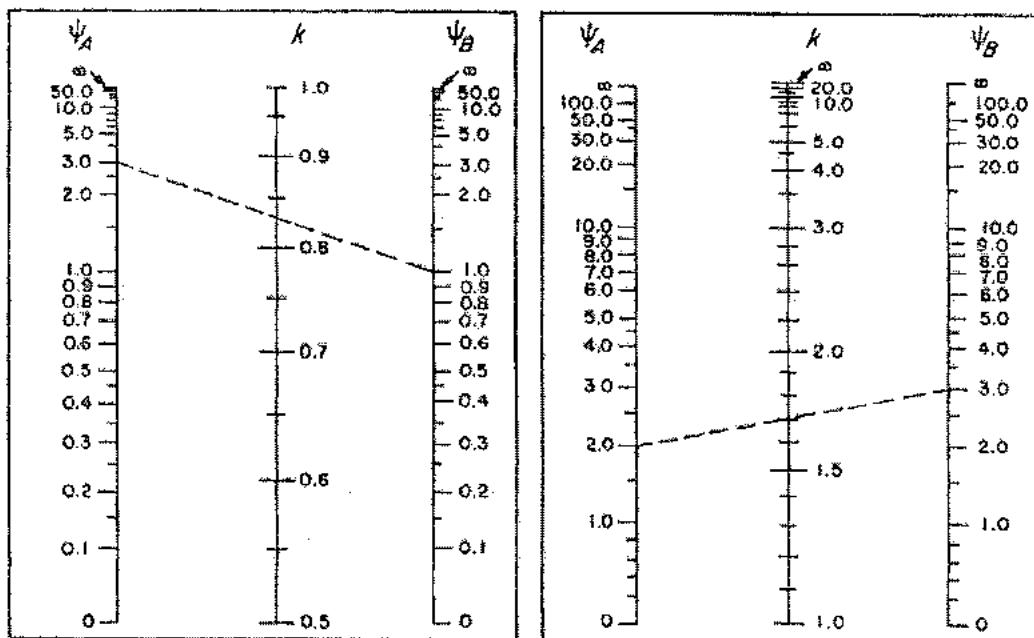
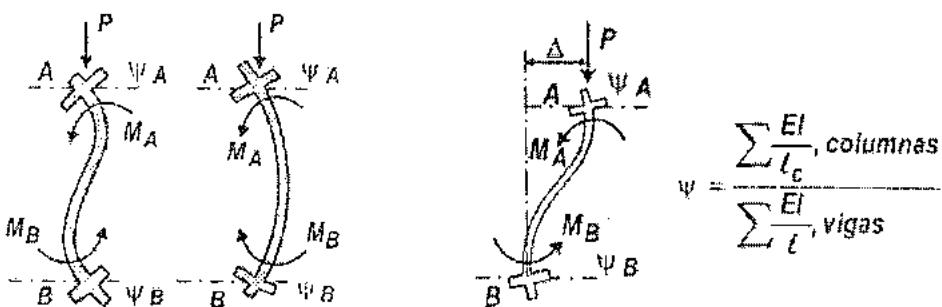
$$\begin{aligned} \text{para } \psi_m < 2 : \quad k &= \frac{20 - \psi_m}{20} \sqrt{1 + \psi_m} \\ \text{para } \psi_m \geq 2 : \quad k &= 0.9 \sqrt{1 + \psi_m} \end{aligned} \quad (8.30)$$

donde:  $\psi_m = (\psi_A + \psi_B) / 2$

- Con restricción al giro en un solo extremo:

$$k = 2.0 + 0.3 \psi \quad (8.31)$$

donde  $\psi$  es el valor en el extremo restringido.



(a) Pórticos indesplazables

(b) Pórticos desplazables

**Figura 8.10:** Nomogramas para calcular los factores de longitud efectiva**8.4.2.4. Momentos amplificados para sistemas indesplazables**

- Considerando como no significativo el incremento de un 5% en los momentos debidos a la esbeltez, se pueden ignorar los efectos de la esbeltez cuando:

$$\lambda = \frac{k l_u}{r} \leq \lambda_{\lim} = 34 - 12 \frac{M_1}{M_2} \quad (8.32)$$

con  $\lambda_{\lim}$  no mayor que 40, es decir que si  $\lambda > 40$  siempre hay que considerar el efecto de la esbeltez.  $l_u$  es la longitud no soportada lateralmente, que se toma como la distancia libre entre losas de entrepisos, vigas u otros elementos que proporcionen apoyo lateral.

- Cuando la esbeltez es  $\lambda = k l_u / r > 100$  de un elemento comprimido del pórtico, el análisis debe realizarse según 8.4.1, es decir no es aplicable este método aproximado de momentos amplificados.

- Cuando la esbeltez es  $\lambda_{\text{lim}} < \lambda < 100$ , y una vez calculadas las cargas axiales y los momentos en los extremos de las columnas mediante un análisis convencional elástico del pórtico (con teoría de primer orden), bajo las cargas mayoradas y utilizando las propiedades de la sección transversal dadas en 8.4.2.2, cada columna se diseña para la combinación de la carga axial mayorada  $P_u$  y el momento amplificado por efectos de segundo orden  $M_c$ .

De acuerdo con (8.24) y (8.25) resulta:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad (8.33)$$

donde  $\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \geq 1.0$  (8.34)

$M_2$  : el mayor momento entre los dos extremos

Recordando la expresión (8.11) para la carga crítica

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k l)^2} \quad (8.11)$$

donde la rigidez  $EI$  debe ser precisa y a su vez conservadora para considerar la mayor variabilidad en las propiedades de columnas aisladas en comparación con las propiedades del pórtico en su conjunto. Los valores de  $EI$  dados en 8.4.2.2 son adecuados para el análisis general de pórticos, pero no para determinar el valor de  $P_c$  para columnas aisladas. Considerando la fisuración, la no linealidad en la relación tensión-deformación del hormigón, y la fluencia lenta, los estudios analíticos y experimentales indican que  $EI$  para calcular  $P_c$  se puede obtener con:

$$EI = \frac{0.2 E_c I_g + E_s I_{se}}{1 + \beta_d} \quad (8.35)$$

o simplificadamente

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad (8.36)$$

con  $E_c$  módulo de elasticidad de hormigón (2.6),  $I_g$  momento de inercia de la sección bruta,  $E_s$  módulo de elasticidad del acero,  $I_{se}$  momento de inercia de la armadura con respecto al centroide de la sección transversal, y  $\beta_d$  el factor que tiene en cuenta la fluencia lenta, y es la relación entre la máxima carga axial mayorada que actúa en forma permanente (carga de larga duración) y la máxima carga axial mayorada asociada a la misma combinación de cargas.

El factor 0.75 que afecta a  $P_c$  en (8.34) es el factor de reducción de rigidez  $\phi_k$  para obtener una estimación conservadora de  $P_c$ .

El factor de corrección del momento  $C_m$  se calcula con (8.25):

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \quad (8.25)$$

con  $M_1, M_2$  el menor y mayor momento último en los extremos de la columna. El cociente  $M_1 / M_2$  es positivo si la columna se deforma con curvatura simple (tracción del mismo lado en toda la columna), y negativo si la columna se deforma con doble curvatura. Es  $C_m = 1$  cuando hay cargas transversales en el tramo de la columna, es decir el momento máximo de primer orden no ocurre en los extremos sino en el tramo.

Si los momentos mayorados en los extremos  $M_1, M_2$  son muy pequeños o nulos, el diseño de columnas esbeltas se debe realizar en función a una excentricidad mínima, resultando

$$M_{2\min} = P_u (15 + 0.03 h) \quad (8.37)$$

donde 15 y  $h$  expresan en mm ( $h$ : altura de la sección en el plano del pandeo). Cuando  $M_{2\min} > M_2$  se debe adoptar  $C_m = 1$  o calcularlo con (8.25) utilizando los momentos calculados en los extremos  $M_1, M_2$ .

- Para elementos comprimidos solicitados a flexión en ambos ejes principales (flexión oblicua), los momentos respecto a cada eje se deberán amplificar independientemente, sobre la base de las condiciones de restricción correspondientes a dicho eje.

#### **8.4.2.5. Momentos amplificados para sistemas desplazables**

La carga crítica  $P_c$  de una columna depende del grado de esbeltez  $\lambda = k l_u / r$ , y como se describió en 8.2, ver figura 8.2, el factor de longitud efectiva  $k$  es mayor para columnas no arriostradas y por lo tanto presentarán pandeo para una carga bastante menor que columnas idénticas pero arriostradas (indesplazables).

- En pórticos desplazables se pueden ignorar los efectos de la esbeltez cuando

$$\lambda = \frac{k l_u}{r} \leq \lambda_{lim} = 22 \quad (8.38)$$

- Cuando la esbeltez es  $\lambda > 100$  de un elemento comprimido del pórtico, el análisis debe realizarse según 8.4.1, es decir no es aplicable este método aproximado de momentos amplificados.
- Cuando la esbeltez es  $\lambda_{lim} < \lambda < 100$ , se deben considerar los efectos de segundo orden producidos por la carga vertical sobre el desplazamiento lateral del piso, y también los originados por la acción de las cargas verticales solamente sin desplazamiento lateral.

#### **➤ Efectos de segundo orden por desplazamiento lateral de piso**

Las columnas que presentan desplazamiento lateral, en general, no están aisladas sino que son parte de un sistema estructural con losas rígidas en su plano. Por lo tanto el desplazamiento lateral de un piso involucra a todas las columnas, que deben tratarse en forma conjunta para la evaluación de los efectos de esbeltez relacionados con el desplazamiento lateral.

Entonces, es necesario analizar la estructura con dos categorías de cargas en forma separada: (a) Cargas que no producen desplazamientos laterales considerables, como las cargas gravitacionales verticales, y (b) Cargas que generan desplazamientos laterales considerables como por ejemplo la acción del viento.

Debido a que los momentos gravitacionales amplificados y los momentos por desplazamiento lateral amplificados, en la mayoría de los casos, no ocurren en la misma sección de la columna, puede establecerse que no debe aplicarse amplificación a los momentos gravitacionales cuando se consideran momentos por desplazamiento lateral. En consecuencia, para casos que incluyen desplazamientos laterales, la ec.(8.33) se reemplaza por:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{1,ns} + \delta_s M_{1,s} \\ M_2 &= M_{2,ns} + \delta_s M_{2,s} \end{aligned} \quad (8.39)$$

donde  $M_1, M_2$  son el menor y mayor momento mayorado en los extremos del elemento comprimido;  $M_{1,ns}, M_{2,ns}$ , son los momentos mayorados en los extremos donde actúan  $M_1, M_2$  debido a cargas que no producen desplazamiento lateral apreciable obtenidos de un análisis elástico con teoría de primer orden;  $M_{1,s}, M_{2,s}$  son los momentos mayorados en los extremos, debido a cargas que sí producen desplazamiento lateral apreciable, obtenidos de un análisis elástico con teoría de primer orden;  $\delta_s$  es el factor de amplificación de momentos en pórticos desplazables, para reflejar el desplazamiento lateral que resulta de las cargas horizontales.

Se presentan tres alternativas para calcular  $\delta_s M_s$ :

- a) Los momentos en los extremos de la columna se calculan utilizando un análisis elástico de segundo orden, con las rigideces de los elementos dadas en 8.4.2.2.

Para pórticos desplazables el factor que tiene en cuenta la fluencia lenta  $\beta_d$  se define como la relación entre el máximo corte mayorado que actúa en forma permanente (carga de larga duración) en un entrepiso y el corte máximo mayorado en ese entrepiso. Para cargas de corta duración como viento, sismo, resulta  $\beta_d = 0$ .

- b) Como alternativa aproximada al análisis de segundo orden se puede utilizar

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1-Q} \geq M_s \quad (8.40)$$

Se prescribe como limitación al uso de (8.40) que  $\delta_s = 1/(1-Q) \leq 1.5$ . En caso contrario se debe recurrir a los casos a) ó c).

Se recuerda que  $Q$  es el índice de estabilidad calculado con ec.(8.26) utilizando las rigideces dadas en 8.4.2.2.

- c) En la tercera alternativa se permite calcular los momentos por desplazamiento lateral amplificados mediante:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq M_s \quad (8.41)$$

donde  $\sum P_u$  es la carga axial de todas las columnas del piso,  $\sum P_c$  es la suma de las cargas críticas de pandeo de todas las columnas. Similarmente a (8.34), el factor 0.75 es un factor de reducción de rigidez que permite obtener un valor conservador de  $P_c$ . Los valores individuales de  $P_c$  se calculan con (8.11) con los factores  $k$  de longitud efectiva para pórticos desplazables y los valores de  $EI$  dados en (8.35) u (8.36).

Cuando las cargas laterales producen desplazamientos torsionales significativos, la amplificación de momentos en las columnas más apartadas del centro de rotación puede resultar subestimada con este procedimiento. En estos casos se debe realizar un análisis tridimensional de segundo orden.

Las ec.(8.39) suponen que los momentos máximos en columnas de pórticos desplazables ocurren en los extremos. Sin embargo, puede suceder que dicho momento máximo tenga lugar en otra sección, situación que puede presentarse en alguna columna cuando:

$$\frac{l_u}{r} > \sqrt{\frac{35}{f'_c A_g}} \quad (8.42)$$

En estos casos se debe diseñar la sección de la columna para  $P_u$  y el momento  $M_c$  calculado como se describió en 8.4.2.4, ec.(8.33), utilizando los valores de  $M_1$  y  $M_2$  obtenidos con (8.39), el factor  $\beta_d$  de acuerdo con la combinación de cargas consideradas, y el factor  $k$  calculado para pórtico indesplazable.

#### **> Efectos de segundo orden por cargas verticales sin desplazamiento lateral de piso**

También hay que considerar la posibilidad que alguna columna dentro del sistema desplazable tenga deformaciones importantes en la altura de la columna. Esta posibilidad genera amplificaciones de momentos ocasionados por cargas gravitacionales sin desplazamiento lateral. Entonces, la columna debe ser verificada utilizando ec.(8.33) y siguientes del apartado 8.4.2.4.

Adicionalmente se establecen restricciones para pórticos desplazables con el objetivo de protegerlos del pandeo lateral de todo un piso bajo cargas gravitacionales solas. Las restricciones dependen del método utilizado para evaluar  $\delta_s M_s$ :

- Cuando  $\delta_s M_s$  se calcula con análisis elástico de segundo orden, la relación entre los desplazamientos laterales de segundo orden y los desplazamientos laterales de primer orden para la carga permanente y las sobrecargas mayoradas, más la carga lateral mayorada aplicada a la estructura, debe ser igual o menor que 2.5, es decir que se debe cumplir:  $\Delta / \Delta_0 \leq 2.5$ .
- Cuando  $\delta_s M_s$  se calcula con (8.40), el valor de  $Q$  calculado usando la  $\Sigma P_u$  para la carga permanente y las sobrecargas mayoradas, debe ser igual o menor que 0.60, es decir que se debe cumplir:  $Q \leq 0.60$ . Esto corresponde a  $\delta_s = 1/(1 - Q) = 2.5$ .
- Cuando  $\delta_s M_s$  se calcula con (8.41), el valor de  $\delta_s$  calculado con  $\Sigma P_u$  y  $\Sigma P_c$  correspondiente a la carga permanente y a las sobrecargas mayoradas, debe ser positivo y no debe exceder 2.5, es decir que se debe cumplir  $\delta_s \leq 2.5$ .

En cualquiera de estas alternativas  $\beta_d$  será la relación entre la máxima carga axial mayorada de larga duración y la máxima carga axial mayorada total. La selección de cuál de los tres métodos alternativos se debe utilizar para calcular  $\delta_s M_s$  depende del nivel deseado de precisión y de las herramientas de análisis disponible.

- Es importante señalar que en los pórticos desplazables las vigas deben diseñarse para los momentos amplificados totales en los extremos de los elementos a compresión que concurren al nudo. Aunque las columnas sean muy rígidas, si se forman rótulas plásticas en las vigas que restringen el giro de los nudos, la longitud efectiva de las columnas aumentaría y las cargas críticas se reducirían.
- Para elementos comprimidos solicitados a flexión en ambos ejes principales (flexión oblicua), los momentos respecto a cada eje se deberán amplificar independientemente, en base a las condiciones de vínculo correspondiente a cada eje.

#### **8.4.2.6. *Otros criterios para verificar la estabilidad***

Las investigaciones analíticas sobre pórticos de hormigón armado muestran que la probabilidad de falla por inestabilidad crece rápidamente cuando el índice de estabilidad  $Q$  excede de 0.25, que corresponde a una relación entre momentos de segundo orden a momentos de primer orden de 1.33.

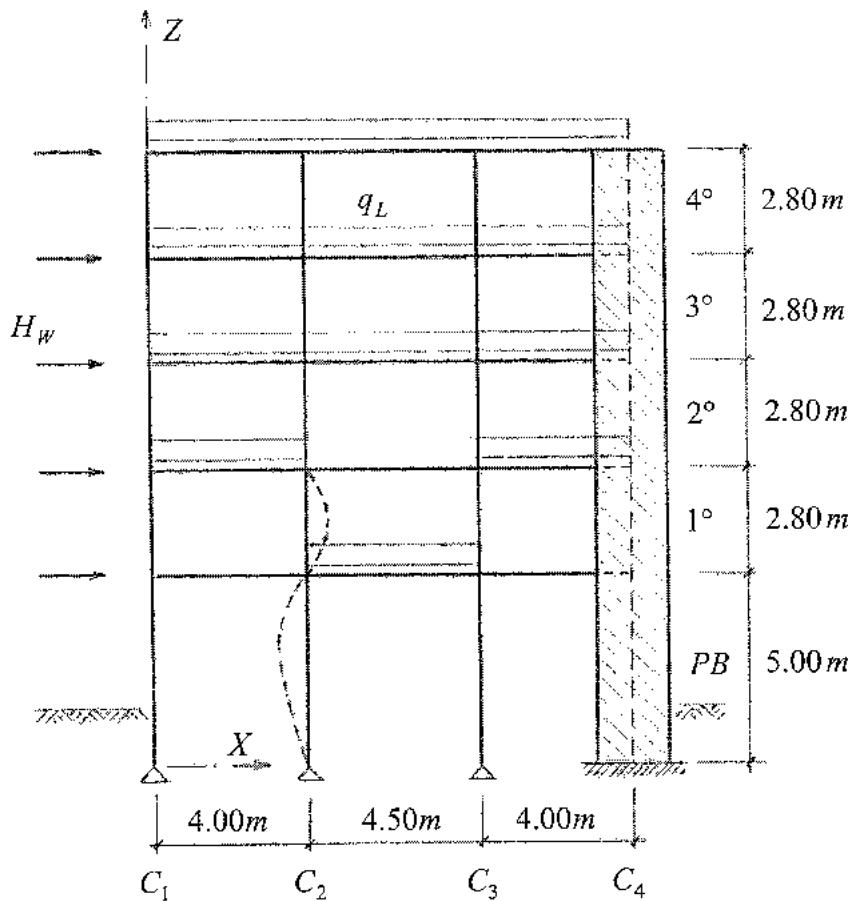
El ACI 318-08 (2008) indica que los momentos flectores incluyendo efectos de segundo orden no deben exceder 1.4 veces los momentos de primer orden, es decir adopta 1.40 como límite, y siendo entonces innecesario utilizar otras verificaciones de estabilidad como se indicaba en anteriores versiones del código.

## 8.5. EJEMPLOS

En el tomo de Comentarios al Reglamento CIRSOC 201 se presenta un diagrama de flujo de ayuda para el diseño de columnas considerando los efectos de la esbeltez.

### 8.5.1. Ejemplo 8.1. Columna esbelta de pórtico indesplazable.

Diseñar los tramos de planta baja y primer piso de la columna  $C_2$  del siguiente pórtico



#### a) Datos

Materiales: Hormigón H-25  
Acero ADN 420

Cargas: Permanentes:  $w_D = 5 \text{ KN/m}^2$   
pared + pp viga:  $q_{D2} = 8 \text{ KN/m}$

Sobrecarga:  $w_L = 2.50 \text{ KN/m}^2$

Viento:  $w_W = 1.26 \text{ KN/m}^2$

Separación entre pórticos: 6 m

b) Análisis de cargas

Cargas permanentes:  $q_{D1} = 5 \text{ KN/m}^2 \cdot 6 \text{ m} = 30 \text{ KN/m}$

pared + pp viga:  $q_{D2} = \underline{8 \text{ KN/m}}$

$$q_D = 38 \text{ KN/m}$$

Sobrecarga:  $q_L = 2.50 \text{ KN/m}^2 \cdot 6 \text{ m} = 15 \text{ KN/m}$

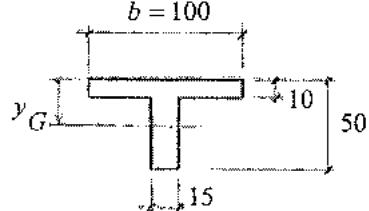
Viento:  $H_W = 1.26 \text{ KN/m}^2 \cdot 6 \text{ m} \cdot 2.80 \text{ m} = 21.2 \text{ KN}$

c) Dimensiones y rigideces de los elementos

El proceso de dimensionamiento es, en esencia, iterativo. Se deben proponer dimensiones iniciales a los elementos, o al menos relaciones de rigidez entre ellos, para realizar el análisis de la estructura. Luego con los esfuerzos internos obtenidos se verifican dichas dimensiones y se calculan las armaduras. Si es necesario modificar dimensiones apreciablemente, se deberá rehacer el análisis estructural y re-evaluar el grado de esbeltez de las columnas, así como el carácter de desplazable o indesplazable del sistema.

Para este ejemplo se estiman las siguientes dimensiones:

- Vigas:



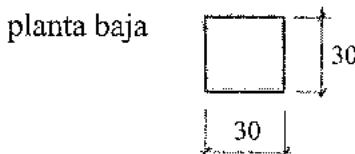
$$A = 0.1600 \text{ m}^2$$

$$y_G = 0.1464 \text{ m}$$

$$I_g = 31.484 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\rightarrow \text{ec.(8.27)} \rightarrow I = 0.35 I_g = 11.020 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

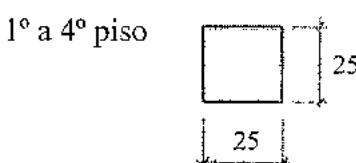
- Columnas:



$$A = 0.0900 \text{ m}^2$$

$$I_g = 6.75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\rightarrow \text{ec.(8.27)} \rightarrow I = 0.70 I_g = 4.725 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

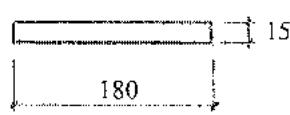


$$A = 0.0625 \text{ m}^2$$

$$I_g = 3.255 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\rightarrow \text{ec.(8.27)} \rightarrow I = 0.70 I_g = 2.279 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

- Tabique:



$$A = 0.0625 \text{ m}^2$$

$$I_g = 729 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\rightarrow \text{ec.(8.27)} \rightarrow I = 0.70 I_g = 510.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

El módulo de elasticidad del hormigón es:  $E_c = 4700 \sqrt{f'_c} = 4700 \sqrt{25} = 23500 \text{ MPa}$

No hay cargas horizontales permanentes, luego  $\beta_d = 0$  y entonces no se reducen las inercias de los elementos por efectos de fluencia lenta, ver 8.4.2.2.

**d) Análisis de la estructura**

Con las dimensiones y rigideces establecidas, se realiza el análisis elástico de primer orden de la estructura para los siguientes estados de carga en forma individual:

E1: cargas permanentes:  $D$

E2: sobrecargas de utilización,  $L$

E3: acción del viento:  $W$

La disposición de la sobrecarga de utilización  $q_L$  es como la indicada en la figura, para obtener una deformada con simple curvatura en la columna y así considerar la mayor influencia del efecto de esbeltez.

El análisis se realiza con cualquier programa de computación standard.

Los resultados de interés para este ejemplo son:

PISO	E1	E2	E3			
	$\sum P$ (KN)	$\sum P$ (KN)	$\sum P$ (KN)	$u_x$ (cm)	$\Delta_0$ (cm)	$V$ (KN)
PB	2375	750	0	0.4570	0.4570	106
1°	1900	682.5	0	0.8948	0.4378	84.8

PISO	Carga	$P$ (KN)	$M_{SUP}$ (KNm)	$M_{INF}$ (KNm)
PB	E1	844.3	1.764	0
	E2	266.1	4.300	0
	E3	16.93	-4.549	0
1°	E1	672.8	5.905	-5.612
	E2	230.4	-0.323	-3.942
	E3	13.07	-14.13	14.50

Los sentidos positivos para los esfuerzos internos son:



Combinaciones de cargas mayoradas, ec. (3.10):

$$U_1 = 1.2 D + 1.6 L$$

$$U_2 = 1.2 D + 0.5 L \pm 1.6 W$$

$$U_3 = 0.9 D \pm 1.6 W$$

**e) Verificación de condición de desplazable o indesplazable:**

Se debe realizar para la combinación de cargas que, incluyendo la acción horizontal, maximice la suma de cargas verticales:

$$U = 1.2 D + 0.5 L \pm 1.6 W$$

Se debe evaluar el índice de estabilidad, ec. (8.26),  $Q = \frac{\sum P_u \Delta_0}{V_u l_c}$

- Planta Baja:

$$\left. \begin{array}{l} \sum P_u = 1.2 \cdot 2375 + 0.5 \cdot 750 + 1.6 \cdot 0 = 3225 \text{ KN} \\ \Delta_0 = 1.6 \cdot 0.457 = 0.7312 \text{ cm} \\ V_u = 1.6 \cdot 106 = 169.6 \text{ KN} \\ l_c = 500 \text{ cm} \end{array} \right\} Q = \frac{3225 \cdot 0.7312}{169.6 \cdot 500} = 0.028 < 0.05 \quad \text{indesplazable}$$

- 1º Piso:

$$\left. \begin{array}{l} \sum P_u = 1.2 \cdot 1900 + 0.5 \cdot 682.5 + 1.6 \cdot 0 = 2621.3 \text{ KN} \\ \Delta_0 = 1.6 \cdot 0.4378 = 0.7005 \text{ cm} \\ V_u = 1.6 \cdot 84.8 = 135.7 \text{ KN} \\ l_c = 280 \text{ cm} \end{array} \right\} Q = \frac{2621 \cdot 0.7005}{135.7 \cdot 280} = 0.048 < 0.05 \quad \text{indesplazable}$$

### f) Grado de esbeltez de las columnas:

Se calcula el grado de restricción en los extremos con (8.28):

- Planta Baja:

$$\left. \begin{array}{l} \psi_A = \frac{\sum EI/l_c \text{ (columnas)}}{\sum EI/l \text{ (vigas)}} = \frac{47250/500 + 22786/280}{110194/450 + 110194/400} = 0.34 \\ \psi_B = \infty \quad (\text{articulado}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nomograma :} \\ k = 0.79 \end{array}$$

Con fórmulas aproximadas (8.29):  $k = 0.85 + 0.05 \cdot 0.34 = 0.867$  (del lado de la seg.) ✓

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{h}{12}} = \sqrt{\frac{30}{12}} = 8.66 \text{ cm}$$

$$l_u = 500 - 50/2 = 475 \text{ cm}$$

$$\text{Luego: } \lambda = \frac{k l_u}{r} = \frac{0.79 \cdot 475}{8.66} = 43.3$$

- 1º Piso:

$$\left. \begin{array}{l} \psi_A = \frac{\sum EI/l_c \text{ (columnas)}}{\sum EI/l \text{ (vigas)}} = \frac{2 \cdot 22786/280}{110194/450 + 110194/400} = 0.31 \\ \psi_B = \psi_A \quad (\text{P.Baja}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nomograma :} \\ k = 0.64 \end{array}$$

Con fórmulas aproximadas (8.29):  $k = 0.7 + 0.05 \cdot (0.31 + 0.34) = 0.73$  ✓

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{25}{\sqrt{12}} = 7.21 \text{ cm}$$

$$l_u = 280 - 50 = 230 \text{ cm}$$

$$\text{Luego: } \lambda = \frac{k l_u}{r} = \frac{0.64 \cdot 230}{7.21} = 20.4$$

**g) Límite para considerar efectos de esbeltez:**

$$\text{Para pórticos indesplazables, ec. (8.32): } \lambda_{\text{lim}} = 34 - 12 \frac{M_1}{M_2}$$

Se utiliza la combinación con la que se obtiene mayor esfuerzo normal:  $U = 1.2 D + 1.6 L$

- Planta Baja:

$$\lambda_{\text{lim}} = 34 - 12 \frac{0}{1.2 \cdot 1.764 + 1.6 \cdot 4.30} = 34$$

$$\lambda = 43.3 > \lambda_{\text{lim}} = 34 \rightarrow \text{se deben considerar efectos de esbeltez}$$

$$\lambda < 100 \rightarrow \text{se puede utilizar método de amplificación de momentos}$$

- 1º Piso

$$\lambda_{\text{lim}} = 34 - 12 \left( \frac{1.2 \cdot 5.905 - 1.6 \cdot 0.323}{1.2 \cdot 5.612 + 1.6 \cdot 3.942} \right) = 34 - 12 \cdot 0.50 = 28$$

$$\lambda = 20.4 < \lambda_{\text{lim}} = 28 \rightarrow \text{no es necesario considerar efectos de esbeltez,}$$

luego la columna se dimensiona como columna corta según Cap.7, para las distintas combinaciones dadas en (3.10).

**h) Momentos amplificados para el tramo de Planta Baja:**

Se debe realizar el análisis para todas las combinaciones de cargas mayoradas  $U$  indicadas en el punto d). Se comienza por  $U_1$  que produce la mayor carga axial y es la situación crítica de verificación a pandeo para pórticos indesplazables.

$$M_c = \delta_{ns} M_2$$

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} : \text{factor de amplificación de momentos}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k l_u)^2} : \text{carga crítica}$$

La rigidez  $EI$  se calcula con ec.(8.36) debido a que todavía no se conoce la armadura. Si se hace un predimensionamiento con el análisis de primer orden, entonces se podría usar la ec. (8.35).  $\beta_d$  es la relación entre la máxima carga axial mayorada que actúa en forma permanente y la máxima carga axial mayorada de la misma combinación de cargas.

$$\beta_d = \frac{1.2 P_D}{1.2 P_D + 1.6 P_L} = \frac{1.2 \cdot 844.3}{1.2 \cdot 844.3 + 1.6 \cdot 266.1} = \frac{1013}{1439} = 0.70$$

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{1 + \beta_d} = \frac{0.4 \cdot 23500 \cdot 6.7510^{-4}}{1 + 0.70} = 3.732 MNm^2$$

Luego:  $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0.79 \cdot 4.75)^2} = 2.616 MN = 2616 KN$

$$P_u = 1.2 P_D + 1.6 P_L = 1439 KN$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 : \text{factor de corrección de momento}$$

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 1.2 \cdot 1.764 + 1.6 \cdot 4.30 = 9.00 KNm$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{0}{9.00} = 0.60 \geq 0.4 \quad \checkmark$$

Entonces:  $\delta_{ns} = \frac{0.60}{1 - \frac{1439}{0.75 \cdot 2616}} = 2.25$

$$M_{2,min} = P_u (0.015 + 0.03 h) = 1439 (0.015 + 0.03 \cdot 0.30) = 34.51 KNm > M_2 = 9.00$$

Luego se utiliza  $M_{2,min}$  para el dimensionamiento de la columna.

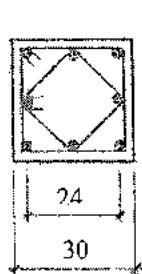
$$M_c = \delta_{ns} M_{2,min} = 2.25 \cdot 34.51 = 77.65 KNm$$

Las otras combinaciones de cargas mayoradas producen menor factor de amplificación  $\delta_{ns}$ , y además  $M_2$  no supera  $M_{2,min}$ .

#### i) Cálculo de armaduras:

Se diseña la columna para:  $P_u = 1439 KN = 1.439 MN$   
 $M_u = 77.65 KNm = 0.07765 MNm$

con  $\gamma = 24/30 = 0.8$ , se utiliza el DIAGRAMA DE INTERACCIÓN II.9



$$\left. \begin{aligned} \phi P_n &= \frac{P_u}{A_g} = \frac{1.439}{0.30 \cdot 0.30} = 15.99 MPa \\ \phi M_n &= \frac{M_u}{A_g h} = \frac{0.07765}{0.09 \cdot 0.30} = 2.88 MPa \end{aligned} \right\} \rightarrow \rho_g = 0.043$$

Armadura longitudinal  $A_{st} = \rho_g A_g = 0.043 \cdot 30 \cdot 30 = 38.7 cm^2$   
 $8\phi 25 (39.28 cm^2)$

Estríbos:  $d_{be} = 8 mm, s = 30 cm$

j) **Comentarios:**

El factor de amplificación de momentos  $\delta_{ns} = 2.25$  está indicando que la relación entre los momentos considerando segundo orden y los momentos de primer orden excede el límite señalado en 8.4.2.6.

La cuantía de armadura longitudinal  $\rho_g = 0.043$  es considerablemente mayor que la cuantía mínima, si bien menor que la cuantía máxima. Se ha señalado que las cuantías económicamente más convenientes están más cerca de la cuantía mínima.

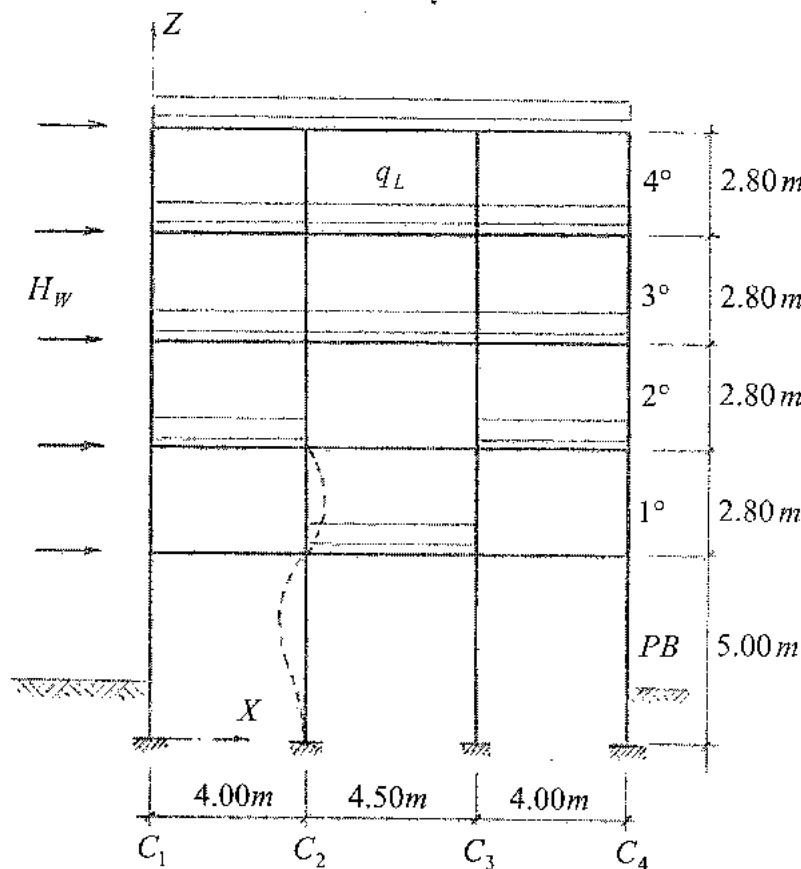
Entonces, un diseño más racional indica aumentar la sección de la columna para disminuir los efectos de segundo orden y la cuantía de armadura.

### 8.5.2. Ejemplo 8.2. Columna esbelta de pórtico desplazable.

Diseñar los tramos de planta baja y primer piso de la columna  $C_2$  del pórtico del ejemplo anterior con las siguientes modificaciones:

- Se reemplaza el tabique ( $C_4$ ) por una columna igual a  $C_1, C_2$  y  $C_3$ .
- Se incrementan las dimensiones de las columnas, según se detalla en c)
- Se empotran todas las columnas en sus respectivas bases.

El pórtico resulta como se muestra en la siguiente figura:



**a) Datos**

Materiales: Hormigón H-25 Acero ADN 420

Cargas: Permanentes:  $w_D = 5 \text{ KN/m}^2$   
pared + pp viga:  $q_{D2} = 8 \text{ KN/m}$

Sobrecarga:  $w_L = 2.50 \text{ KN/m}^2$

Viento:  $w_W = 1.26 \text{ KN/m}^2$

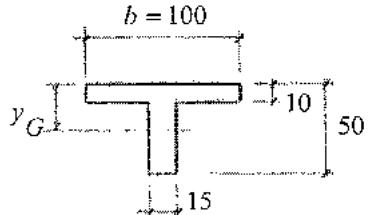
Separación entre pórticos: 6 m

**b) Análisis de cargas:**

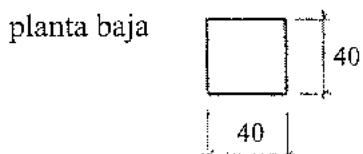
Cargas permanentes:  $q_{D1} = 5 \text{ KN/m}^2 \cdot 6 \text{ m} = 30 \text{ KN/m}$   
pared + pp viga:  $q_{D2} = 8 \text{ KN/m}$   
 $q_D = 38 \text{ KN/m}$

Sobrecarga:  $q_L = 2.50 \text{ KN/m}^2 \cdot 6 \text{ m} = 15 \text{ KN/m}$

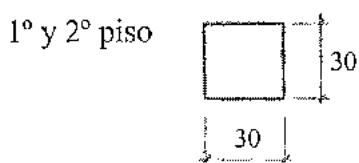
Viento:  $H_W = 1.26 \text{ KN/m}^2 \cdot 6 \text{ m} \cdot 2.80 \text{ m} = 21.2 \text{ KN}$

**c) Dimensiones y rigideces de los elementos:****- Vigas:**

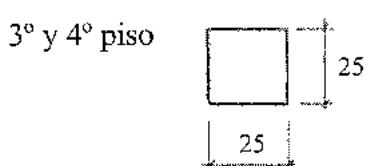
$$\begin{aligned} A &= 0.1600 \text{ m}^2 \\ y_G &= 0.1464 \text{ m} \\ I_g &= 31.484 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ &\rightarrow \text{ec.(8.27)} \rightarrow I = 0.35 I_g = 11.020 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

**- Columnas:**

$$\begin{aligned} A &= 0.1600 \text{ m}^2 \\ I_g &= 21.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ &\rightarrow \text{ec.(8.27)} \rightarrow I = 0.70 I_g = 14.933 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= 0.0900 \text{ m}^2 \\ I_g &= 6.75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ &\rightarrow \text{ec.(8.27)} \rightarrow I = 0.70 I_g = 4.725 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= 0.0625 \text{ m}^2 \\ I_g &= 3.255 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ &\rightarrow \text{ec.(8.27)} \rightarrow I = 0.70 I_g = 2.279 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

El módulo de elasticidad del hormigón es:  $E_c = 4700 \sqrt{f'_c} = 4700 \sqrt{25} = 23500 \text{ MPa}$

No hay cargas horizontales permanentes, luego  $\beta_d = 0$  y entonces no se reducen las inercias de los elementos por efectos de fluencia lenta, ver 8.4.2.2.

**d) Análisis de la estructura:**

Se realiza el análisis elástico de primer orden para los estados de cargas

E1: cargas permanentes:  $D$

E2: sobrecargas de utilización:  $L$

E3: acción del viento:  $W$

Los resultados de interés para este ejemplo son:

PISO	E1	E2	E3		
	$\sum P$ (KN)	$\sum P$ (KN)	$\sum P$ (KN)	$u_x$ (cm)	$\Delta_0$ (cm)
PB	2375	750	0	1.1764	1.1764
1°	1900	682.5	0	1.8878	0.7114
					84.8

PISO	Carga	$P$ (KN)	$M_{SUP}$ (KNm)	$M_{INF}$ (KNm)
PB	E1	836.1	3.194	-1.618
	E2	264.8	10.80	-5.40
	E3	25.48	-65.12	85.12
1°	E1	670.6	3.591	-3.120
	E2	229.2	-2.969	-3.091
	E3	14.31	-38.16	34.83

Los sentidos positivos para los esfuerzos internos son:



Combinaciones de cargas mayoradas, ec. (3.10):

$$U_1 = 1.2 D + 1.6 L$$

$$U_2 = 1.2 D + 0.5 L \pm 1.6 W$$

$$U_3 = 0.9 D \pm 1.6 W$$

**e) Verificación de condición de desplazable o indesplazable:**

Se debe realizar para la combinación de cargas que, incluyendo la acción horizontal, maximice la suma de cargas verticales:

$$U = 1.2 D + 0.5 L \pm 1.6 W$$

Se debe evaluar el índice de estabilidad, ec. (8.26),  $Q = \frac{\sum P_u \Delta_0}{V_u l_c}$

- Planta Baja:

$$\left. \begin{array}{l} \sum P_u = 1.2 \cdot 2375 + 0.5 \cdot 750 + 1.6 \cdot 0 = 3225 \text{ KN} \\ \Delta_0 = 1.6 \cdot 1.1764 = 1.882 \text{ cm} \\ V_u = 1.6 \cdot 106 = 169.6 \text{ KN} \\ l_c = 500 \text{ cm} \end{array} \right\} Q = \frac{3225 \cdot 1.882}{169.6 \cdot 500} = 0.072 > 0.05 \quad \text{desplazable}$$

- 1º Piso:

$$\left. \begin{array}{l} \sum P_u = 1.2 \cdot 1900 + 0.5 \cdot 682.5 + 1.6 \cdot 0 = 2621.3 \text{ KN} \\ \Delta_0 = 1.6 \cdot 0.7114 = 1.138 \text{ cm} \\ V_u = 1.6 \cdot 84.8 = 135.7 \text{ KN} \\ l_c = 280 \text{ cm} \end{array} \right\} Q = \frac{2621 \cdot 1.138}{135.7 \cdot 280} = 0.079 > 0.05 \quad \text{desplazable}$$

### f) Grado de esbeltez de las columnas:

Se calcula el grado de restricción en los extremos con (8.28):

- Planta Baja:

$$\left. \begin{array}{l} \psi_A = \frac{\sum EI/l_c \text{ (columnas)}}{\sum EI/l \text{ (vigas)}} = \frac{149333/500 + 47250/280}{110194/450 + 110194/400} = 0.90 \\ \psi_B = 0 \quad (\text{empotrado}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nomograma :} \\ k = 1.15 \end{array}$$

$$\text{Con ec.(8.30): } \psi_m = \frac{0.90 + 0}{2} = 0.45, \quad k = \frac{20 - 0.45}{20} \sqrt{1 + 0.45} = 1.18 \quad \checkmark$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{h}{12}} = \sqrt{\frac{40}{12}} = 11.5 \text{ cm}$$

$$l_u = 500 - 50/2 = 475 \text{ cm}$$

$$\text{Luego: } \lambda = \frac{k l_u}{r} = \frac{1.15 \cdot 475}{11.5} = 47.5$$

- 1º Piso:

$$\left. \begin{array}{l} \psi_A = \frac{\sum EI/l_c \text{ (columnas)}}{\sum EI/l \text{ (vigas)}} = \frac{2 \cdot 47250/280}{110194/450 + 110194/400} = 0.65 \\ \psi_B = \psi_A \quad (\text{P.Baja}) = 0.90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nomograma :} \\ k = 1.25 \end{array}$$

$$\text{Con ec.(8.30): } \psi_m = \frac{0.65 + 0.90}{2} = 0.775, \quad k = \frac{20 - 0.775}{20} = \sqrt{1 + 0.775} = 1.33 \checkmark$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{30}{\sqrt{12}} = 8.66 \text{ cm}$$

$$l_u = 280 - 50 = 230 \text{ cm}$$

$$\text{Luego: } \lambda = \frac{k l_u}{r} = \frac{1.25 \cdot 230}{8.66} = 33.2$$

**g) Límite para considerar efectos de esbeltez:**

Para pórticos desplazables, ec. (8.38):  $\lambda_{lim} = 22$

- Planta Baja:

$$\lambda = 47.5 > \lambda_{lim} = 22 \rightarrow \text{se deben considerar efectos de esbeltez}$$

- 1º Piso

$$\lambda = 33.2 > \lambda_{lim} = 22 \rightarrow \text{se deben considerar efectos de esbeltez}$$

**h) Momentos amplificados:**

**Efectos de segundo orden por desplazamiento lateral de piso**

Para considerar los efectos de esbeltez con desplazamiento lateral de piso en pórticos desplazables, se debe analizar la combinación que incluya carga lateral:

$$U_2 = 1.2 D + 0.5 L \pm 1.6 W$$

Para calcular el factor de amplificación de momentos  $\delta_s$  se utiliza la alternativa (b) descripta en 8.4.2.5, ec. (8.40):  $\delta_s = 1/(1-Q)$

- Planta Baja:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - 0.072} = 1.08$$

$$M_{1,ns} = 1.2 \cdot 3.194 + 0.5 \cdot 10.80 = 9.23$$

$$M_{1,s} = -1.6 \cdot (-65.12) = 104.19$$

$$M_1 = M_{1,ns} + \delta_s M_{1,s} = 9.23 + 1.08 \cdot 104.19 = 121.8 \text{ KNm}$$

$$M_{2,ns} = 1.2 \cdot (-1.618) + 0.5 \cdot (-5.40) = -4.64$$

$$M_{2,s} = -1.6 \cdot 82.12 = -131.49$$

$$M_2 = M_{2,ns} + \delta_s M_{2,s} = -4.64 - 1.08 \cdot 131.49 = -146.7 \text{ KNm}$$

$$P_u = 1.2 \cdot 836.9 + 0.5 \cdot 264.8 + 1.6 \cdot 25.5 = 1178 \text{ KN}$$

- 1º Piso:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - 0.079} = 1.09$$

$$M_{1,ns} = 1.2 (-3.12) + 0.5 (-3.09) = -5.29$$

$$M_{1,s} = -1.6 \cdot 34.83 = -55.73$$

$$M_1 = M_{1,ns} + \delta_s M_{1,s} = -5.29 - 1.09 \cdot 55.73 = -66.03 \text{ KNm}$$

$$M_{2,ns} = 1.2 \cdot 3.59 + 0.5 (-2.97) = 2.82$$

$$M_{2,s} = -1.6 (-38.16) = 61.06$$

$$M_2 = M_{2,ns} + \delta_s M_{2,s} = 2.82 + 1.09 \cdot 61.06 = 69.38 \text{ KNm}$$

$$P_u = 1.2 \cdot 670.6 + 0.5 \cdot 229.2 + 1.6 \cdot 14.3 = 942.2 \text{ KN}$$

Verificación de la condición que el momento máximo no se produzca en los extremos, ec. (8.42).

- Planta Baja:

$$P_u = 1.2 D + 1.6 L = 1.2 \cdot 836.9 + 1.6 \cdot 264.8 = 1428 \text{ KN}$$

$$\frac{l_u}{r} = \frac{475}{11.5} = 41.3 > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f'_c A_g}}} = \frac{35}{\sqrt{\frac{1.428}{25 \cdot 0.16}}} = 58.6 \rightarrow \text{no se cumple esta condición,}$$

significa que son determinantes los momentos en los extremos.

- 1º Piso:

$$P_u = 1.2 D + 1.6 L = 1.2 \cdot 670.6 + 1.6 \cdot 229.2 = 1171 \text{ KN}$$

$$\frac{l_u}{r} = \frac{280}{8.66} = 26.6 > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f'_c A_g}}} = \frac{35}{\sqrt{\frac{1.171}{25 \cdot 0.09}}} = 48.5 \rightarrow \text{no se cumple esta condición,}$$

significa que son determinantes los momentos en los extremos.

**Efectos de segundo orden por cargas verticales sin desplazamiento lateral de piso**

- Planta Baja:

$$\psi_A = 0.90, \psi_B = 0 \rightarrow k = 0.62, \text{ luego: } \lambda = \frac{k l_u}{r} = \frac{0.62 \cdot 475}{11.5} = 25.6$$

$$\lambda_{lim} = 34 - 12 \frac{1.2 \cdot 1.618 + 1.6 \cdot 5.40}{1.2 \cdot 3.194 + 1.6 \cdot 10.80} = 28$$

$\lambda = 25.6 < \lambda_{lim} = 28 \rightarrow$  no es necesario considerar efectos de esbeltez. ✓

- 1º Piso:

$$\psi_A = 0.65, \psi_B = 0.90 \rightarrow k = 0.74, \text{ luego: } \lambda = \frac{k l_u}{r} = \frac{0.74 \cdot 230}{8.66} = 19.7$$

$$\lambda_{lim} = 34 - 12 \frac{1.2 \cdot 3.591 - 1.6 \cdot 2.969}{1.2 \cdot 3.12 + 1.6 \cdot 3.091} = 34.6$$

$$\lambda = 19.7 < \lambda_{lim} = 34.6 \rightarrow \text{no es necesario considerar efectos de esbeltez} \quad \checkmark$$

Verificación de la inestabilidad de todo el piso bajo cargas gravitacionales solas.

Debido a que  $\delta_s M_s$  se calculó con ec.(8.40), es suficiente que  $Q \leq 0.60$  para satisfacer esta verificación:

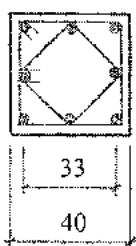
- Planta Baja:  $Q = 0.072 < 0.60 \quad \checkmark$
- 1º Piso:  $Q = 0.079 < 0.60 \quad \checkmark$

#### i) Cálculo de armaduras:

- Planta Baja:

Se diseña la columna para:  $P_u = 1178 \text{ KN} = 1.178 \text{ MN}$   
 $M_u = 146.6 \text{ KNm} = 0.1466 \text{ MNm}$

con  $\gamma = 33/40 = 0.825$ , se utiliza el DIAGRAMA DE INTERACCIÓN II.9



$$\left. \begin{aligned} \phi P_n &= \frac{P_u}{A_g} = \frac{1.178}{0.40 \cdot 0.40} = 7.36 \text{ MPa} \\ \phi M_n &= \frac{M_u}{A_g h} = \frac{0.1466}{0.16 \cdot 0.40} = 2.29 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \rightarrow \rho_g = 0.010$$

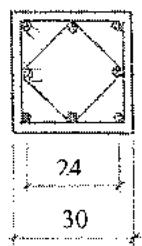
$$\text{Armadura longitudinal } A_{st} = \rho_g A_g = 0.010 \cdot 40 \cdot 40 = 16.00 \text{ cm}^2 \\ 8\phi 16 (16.08 \text{ cm}^2)$$

$$\text{Estripos: } d_{be} = 6 \text{ mm}, s = 12 \cdot 1.6 = 19 \text{ cm}$$

- 1º Piso:

Se diseña la columna para:  $P_u = 942.2 \text{ KN} = 0.942 \text{ MN}$   
 $M_u = 69.38 \text{ KNm} = 0.0694 \text{ MNm}$

con  $\gamma = 24/30 = 0.8$ , se utiliza el DIAGRAMA DE INTERACCIÓN II.9



$$\left. \begin{aligned} \phi P_n &= \frac{P_u}{A_g} = \frac{0.942}{0.30 \cdot 0.30} = 10.47 \text{ MPa} \\ \phi M_n &= \frac{M_u}{A_g h} = \frac{0.0694}{0.09 \cdot 0.30} = 2.57 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \rightarrow \rho_g = 0.020$$

$$\text{Armadura longitudinal } A_{sl} = \rho_g A_g = 0.020 \cdot 30 \cdot 30 = 18.00 \text{ cm}^2$$

$$4\phi 20 + 4\phi 16 (20.6 \text{ cm}^2)$$

$$\text{Estripos: } d_{be} = 6 \text{ mm}, s = 12 \cdot 1.6 = 19 \text{ cm}$$



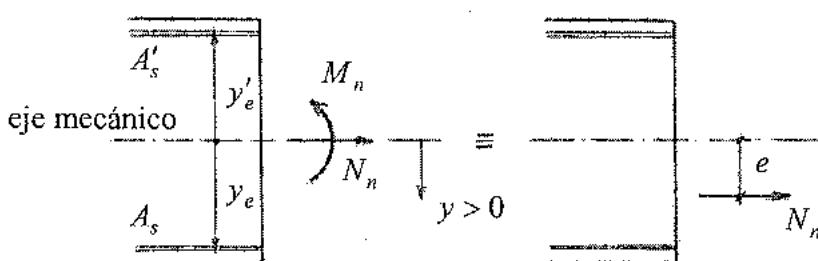
## CAPÍTULO 9

### DISEÑO POR RESISTENCIA A FLEXOTRACCIÓN CON PEQUEÑA EXCENTRICIDAD - TENSORES

#### 9.1. INTRODUCCIÓN

En el Cap.4, apartado 4.5, se estudió la situación de flexión con fuerza axial con gran excentricidad, es decir con el eje neutro dentro de la sección. La fuerza axial podía ser de compresión o de tracción.

Ahora se considera el caso de flexión con fuerza axial de tracción, pero con el eje neutro fuera de la sección, o dicho de otra manera la resultante de tracción se ubica dentro de las armaduras, ver fig.9.1.



**Figura 9.1:** Sección con flexo-tracción de pequeña excentricidad

Resulta entonces:

$$y'_e \leq e \leq y_e \quad (9.1)$$

La ec.(9.1) incluye el caso particular de  $e = 0$  que corresponde a tracción pura.

Ejemplos de solicitudación con esfuerzo de tracción centrado se presentan en paredes de recipientes cilíndricos, tubos sometidos a presión, barras de suspensión (tensores), barras de tracción en estructuras esbeltas.

Ejemplos de tracción excéntrica (flexo-tracción) se encuentran en elementos a tracción en bóvedas y pórticos, barras de tracción en estructuras rígidas, paredes de recipientes rectangulares.

## 9.2. COMPORTAMIENTO ELÁSTICO

Para tensiones pequeñas, menores a la resistencia directa a tracción  $f'_t$ , ec.(2.2), el elemento se comporta elásticamente. Debido a la adherencia entre hormigón y acero, la deformación es la misma para ambos materiales, y utilizando los conceptos de sección homogeneizada, como se muestra en la fig.9.2, resulta:

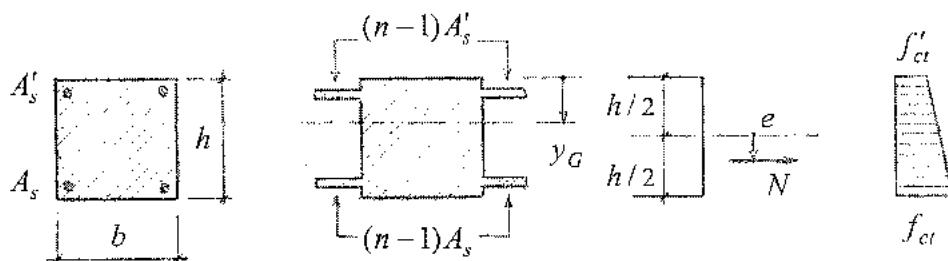


Figura 9.2: Sección homogeneizada

$$f'_{ct} = \frac{N}{A_h} - \frac{N}{J_h} e y_G \quad f_{ct} = \frac{N}{A_h} + \frac{N}{J_h} e (h - y_G) \quad (9.2)$$

donde  $A_h$  es el área de la sección homogeneizada,  $J_h$  el momento de inercia de la sección homogeneizada,  $n = E_s / E_c$  la relación de módulos de elasticidad.

Igualando  $f_{ct}$  con la resistencia directa a tracción  $f'_t = 1/3 \sqrt{f'_c}$  se obtiene el esfuerzo normal nominal que produce la fisuración:

$$N_{n,fis} = \frac{f'_t}{\frac{1}{A_h} + \frac{e}{J_h} (h - y_G)} \quad (9.3)$$

Esta situación se podría utilizar cuando se deben evitar las fisuras. Sin embargo hay una incertidumbre muy grande contra la aparición de fisuras, ya que no se pueden evitar puntos de menor resistencia a tracción, tensiones iniciales por retracción, etc.

Si se utiliza para el diseño se debe aplicar la ec.(3.8), sugiriéndose  $\phi = 0.55$  como en el caso de flexión en elementos sin armar (tabla 3.1 (7)) con falla por tracción del hormigón.

Se prefieren soluciones alternativas:

- En el caso de depósitos de agua (ejemplo: tanque de agua prismático de edificios) se diseña por resistencia, es decir permitiendo la fisuración, y luego se ejecuta un revestimiento impermeable interior.
- Se evitan las fisuras mediante el empleo de hormigón pretensado.

### 9.3. RESISTENCIA

Cuando se supera la resistencia a tracción del hormigón, éste se fisura y ya no colabora. Luego, la armadura debe absorber todo el esfuerzo de tracción, la cual se reparte siguiendo la ley de la palanca para cumplir con las ecuaciones de equilibrio.

#### Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum N = 0 \rightarrow N_n = A_s f_y + A'_s f_y \quad (9.4)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_n = N_n e = A'_s f_y (-y'_e) + A_s f_y y_e \quad (9.5)$$

En (9.4) y (9.5) se ha considerado como relación constitutiva  $f_s = f_y$ , es decir la armadura trabajando a su resistencia de fluencia  $f_y$ . Ver también fig.9.1 para la nomenclatura.

De las dos ecuaciones (9.4) y (9.5) se obtienen las dos incógnitas  $A'_s$ ,  $A_s$ :

$$A_s = \frac{N_n}{f_y} \frac{y'_e + e}{y'_e + y_e} \quad (9.6)$$

$$A'_s = \frac{N_n}{f_y} \frac{y_e - e}{y'_e + y_e} \quad (9.7)$$

La condición de resistencia ec.(3.8) en este caso es:

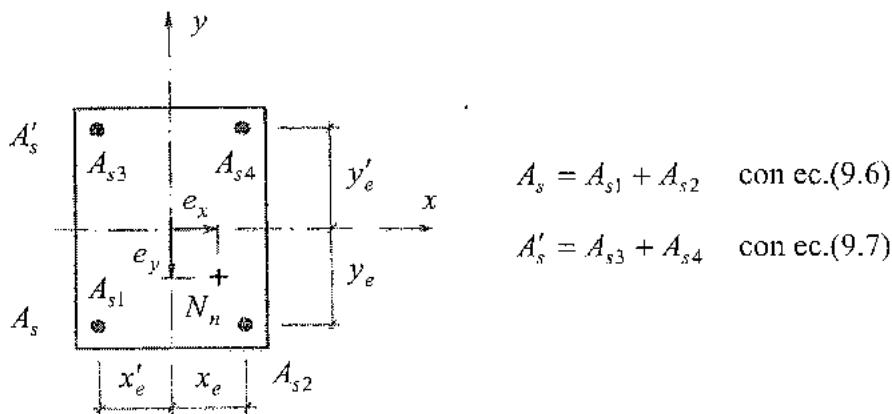
$$\phi N_n \geq N_u \quad (9.8)$$

donde  $N_u$  se obtiene de los estados de cargas mayoradas, y  $\phi = 0.9$  porque es una sección controlada por tracción (tabla3.1 (1)).

Para el caso de flexo-tracción oblicua de pequeña excentricidad, ver fig.9.3, se aplica la ley de la palanca para la excentricidad  $e_y$ , tal como se explicó arriba, ec.(9.6) y (9.7), y luego  $A_s$  y  $A'_s$  se reparten aplicando nuevamente la ley de la palanca para la excentricidad  $e_x$ , resultando

$$A_{s1} = \frac{x_e - e_x}{x_e + x'_e} A_s \quad A_{s2} = \frac{x'_e + e_x}{x_e + x'_e} A_s \quad (9.9)$$

$$A_{s3} = \frac{x_e - e_x}{x_e + x'_e} A'_s \quad A_{s4} = \frac{x'_e + e_x}{x_e + x'_e} A'_s \quad (9.10)$$



**Figura 9.3:** Flexo-tracción oblicua con pequeña excentricidad

Las ecuaciones con la que se obtiene  $A'_s$ , y en el caso de flexo-tracción oblicua, las ecuaciones que permiten calcular  $A_{s1}$  y  $A_{s3}$ , son muy sensibles a pequeños errores de la excentricidad  $e$  y la posición  $y_e$  (o  $x_e$ ). Por ese motivo cuando  $y_e - e_y$  o  $x_e - e_x$  es pequeño, conviene sobredimensionar  $A'_s$  o  $A_{s1}$ ,  $A_{s3}$ .

Con el mismo criterio explicado en el punto 4.8, se requiere que la resistencia de la sección fisurada sea por lo menos igual a la fuerza que produce la fisuración del hormigón, obteniéndose así la armadura mínima. A partir de (9.3) resulta:

$$A_{s\min} f_y = N_{n,\text{fis}} \quad (9.11)$$

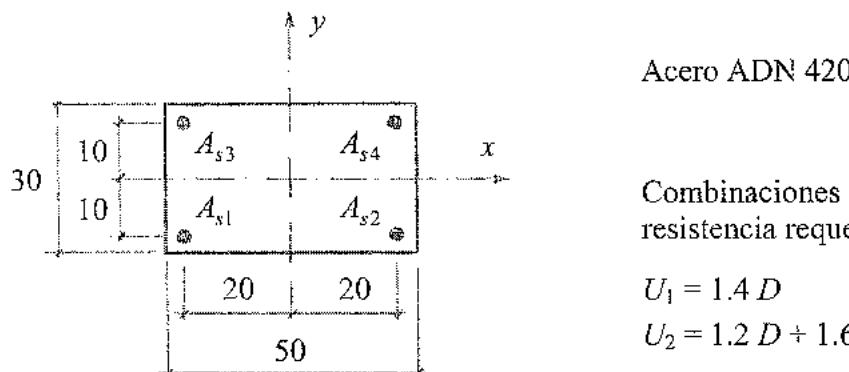
- Otra alternativa para calcular la cuantía de armadura, dadas las dimensiones de la sección, es utilizar los diagramas de interacción desarrollados en el Cap.7, ver comentario al final de la sección 7.3.2. Están disponibles diagramas de flexión compuesta recta, para secciones rectangulares con armadura simétrica en las caras extremas y armadura uniformemente distribuida en todo el perímetro, como así también para secciones circulares.

Como se describió en el Cap.7, se utilizan entrando por el eje vertical con  $\phi P_n / A_g$  y por el eje horizontal con  $\phi P_n e / (A_g h)$ , leyéndose la cuantía de armadura en la intersección. Ambas cantidades deben estar en unidades de MPa. El esfuerzo normal de tracción es negativo.

#### 9.4. EJEMPLO 9.1

El tensor de una cubierta en bóveda está solicitado en la fachada de la puerta principal por:

- Efecto de cargas permanentes:  $N_D = 1000 \text{ KN}$ ,  $M_{D(\text{vert})} = 30 \text{ KNm}$
- Efecto de viento horizontal:  $M_{W(\text{horiz})} = 80 \text{ KNm}$



Combinaciones de carga, para obtener la resistencia requerida, ec.(3.10):

$$U_1 = 1.4 D$$

$$U_2 = 1.2 D + 1.6 W$$

##### ■ Combinación $U_1$

$$\left. \begin{aligned} N_u &= 1.4 \cdot 1000 = 1400 \text{ KN} = 1.4 \text{ MN} \\ M_{u(\text{vert})} &= 1.4 \cdot 30 = 42 \text{ KNm} = 0.042 \text{ MNm} \end{aligned} \right\} e_y = 3 \text{ cm}$$

$$N_n = \frac{N_u}{\phi} = \frac{1.40}{0.90} = 1.556 \text{ MN}$$

$$A_s = \frac{N_n}{f_y} \frac{y'_e + e}{y'_e + y_e} = \frac{1.556}{420} \frac{0.10 + 0.03}{0.10 + 0.10} 10^4 = 24.08 \text{ cm}^2 \rightarrow$$

$$A_{s1} = A_{s2} = \frac{24.08}{2} = 12.04 \text{ cm}^2$$

$$A'_s = \frac{N_n}{f_y} \frac{y_e - e}{y'_e + y_e} = \frac{1.556}{420} \frac{0.10 - 0.03}{0.10 + 0.10} 10^4 = 12.97 \text{ cm}^2 \rightarrow$$

$$A_{s3} = A_{s4} = \frac{12.97}{2} = 6.49 \text{ cm}^2$$

##### ■ Combinación $U_2$

$$\left. \begin{aligned} N_u &= 1.2 \cdot 1000 = 1200 \text{ KN} = 1.2 \text{ MN} \\ M_{u(\text{vert})} &= 1.2 \cdot 30 = 36 \text{ KNm} = 0.036 \text{ MNm} \\ M_{u(\text{horiz})} &= 1.6 \cdot 80 = 128 \text{ KNm} = 0.128 \text{ MNm} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} e_y &= 3 \text{ cm} \\ e_x &= 10.7 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$N_n = \frac{N_u}{\phi} = \frac{1.20}{0.90} = 1.333 \text{ MN}$$

$$A_s = \frac{N_n}{f_y} \frac{y'_e + e}{y'_e + y_e} = \frac{1.333}{420} \frac{0.10 + 0.03}{0.10 + 0.10} 10^4 = 20.63 \text{ cm}^2 \rightarrow$$

$$A_{s1} = \frac{x_e - e_x}{x_e + x'_e} A_s = \frac{0.20 - 0.107}{0.20 + 0.20} 20.63 = 4.80 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{x'_e + e_x}{x_e + x'_e} A_s = \frac{0.20 + 0.107}{0.20 + 0.20} 20.63 = 15.83 \text{ cm}^2$$

$$A'_s = \frac{N_n}{f_y} \frac{y_e - e}{y'_e + y_e} = \frac{1.333}{420} \frac{0.10 - 0.03}{0.10 + 0.10} 10^4 = 11.11 \text{ cm}^2 \rightarrow$$

$$A'_{s3} = \frac{x_e - e_x}{x_e + x'_e} A'_s = \frac{0.20 - 0.107}{0.20 + 0.20} 11.11 = 2.58 \text{ cm}^2$$

$$A'_{s4} = \frac{x'_e + e_x}{x_e + x'_e} A'_s = \frac{0.20 + 0.107}{0.20 + 0.20} 11.11 = 8.53 \text{ cm}^2$$

Considerando la envolvente de las dos situaciones resulta:

$$A_{s1} = 12.04 \text{ cm}^2 : 4 \phi 20$$

$$A_{s2} = 15.83 \text{ cm}^2 : 5 \phi 20$$

$$A_{s3} = 6.49 \text{ cm}^2 : 3 \phi 20$$

$$A_{s4} = 8.53 \text{ cm}^2 : 3 \phi 20$$

Es conveniente repartir esta armadura en la periferia de la sección para limitar la fisuración, sin variar de momento interno. Para ello puede ser conveniente agregar armadura, de piel, constructiva.

■ Armadura mínima:

$$A = 0.50 \cdot 0.30 = 0.15 \text{ m}^2 \quad f'_{ct} = 1/3 \sqrt{f'_c} = 1.667 \text{ MPa}$$

$$W_x = \frac{0.50 \cdot 0.30^2}{6} = 0.0075 \text{ m}^3 \quad W_y = \frac{0.30 \cdot 0.50^2}{6} = 0.0125 \text{ m}^3$$

$$f_{ct} = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{W_x} + \frac{N e_x}{W_y} = f'_{ct} \rightarrow N_{n,fis}$$

Combinación  $U_1$ :  $e_y = 3 \text{ cm}$   $e_x = 0$

$$N \left( \frac{1}{0.15} + \frac{0.03}{0.0075} \right) = 1.667 \text{ MPa} \rightarrow N_{n,fis} = 0.156 \text{ MN} \leq 1.556 \text{ MN} \checkmark$$

Combinación  $U_2$ :  $e_y = 3 \text{ cm}$   $e_x = 10.7 \text{ cm}$

$$N \left( \frac{1}{0.15} + \frac{0.03}{0.0075} + \frac{0.107}{0.0125} \right) = 1.667 \text{ MPa} \rightarrow N_{n,fis} = 0.087 \text{ MN} \leq 1.333 \text{ MN} \checkmark$$

En ambos casos el esfuerzo normal de fisuración es menor que el utilizado para calcular las armaduras.

# CAPÍTULO 10

## VERIFICACIÓN DE ESTADOS LÍMITES DE SERVICIO

### 10.1. INTRODUCCIÓN

En el Cap.3, que establece las bases para la verificación de la seguridad, se definió como objetivo de diseño que la estructura no supere, durante su vida útil, ciertos requerimientos llamados “estados límites”. Debido a las incertidumbres presentes, en realidad se pretende que la probabilidad de exceder los estados límites se encuentre por debajo de probabilidades de falla tolerables.

Se definieron dos categorías de estados límites: estados límites *últimos* y estados límites *de utilización en servicio*.

En los Cap.4 a 9 se establecieron los conceptos y prescripciones para el diseño por resistencia frente a diferentes tipos de solicitudes, es decir, controlando los estados límites últimos.

En este capítulo se desarrollarán los criterios para cumplir con los estados límites de utilización en servicio de los elementos estructurales ya dimensionados por resistencia, en particular el control de fisuración y el control de deflexiones o “flechas” en elementos sometidos a flexión.

### 10.2. CONTROL DE FISURACIÓN POR FLEXIÓN

#### 10.2.1. Proceso de fisuración

Todas las vigas de hormigón armado se fisuran, iniciándose el proceso para cargas muy por debajo de las cargas de servicio, y posiblemente antes que actúen las cargas debido a las tensiones iniciales por retracción de fragüé impedido.

Las fisuras producidas por las cargas no sólo son inevitables, sino que son necesarias para que la armadura trabaje de manera efectiva. De acuerdo a los desarrollos presentados en 4.3, la sección se fisura cuando la tensión de tracción en el hormigón alcanza su resistencia a flexo-

tracción  $f_r = 0.625 \sqrt{f'_c}$ , ec.(2.3). Para  $f'_c = 25 MPa$  resulta  $f_r = 3.13 MPa$ . La tensión en el acero en ese momento es  $f_s = n f_r \cong 8.5 \cdot 3.13 \cong 27 MPa$ , valor muy por debajo de su tensión de fluencia  $f_y = 420 MPa$ , para la cual se debe diseñar la armadura.

El proceso de formación de fisuras se describió en 2.3.2, y específicamente para vigas a flexión en 2.3.3.

En una viga bien diseñada las fisuras son finas, llamadas fisuras “capilares”, casi invisibles al observador usual y garantizan muy poca o ninguna corrosión de la armadura. En general para el nivel de cargas de servicio se pueden encontrar fisuras del orden de 0.25 mm de ancho.

La fisuración en el hormigón es un proceso aleatorio, altamente variable e influenciado por muchos factores. A causa de la complejidad del problema los métodos para predecir el ancho de fisuras se basan en observaciones experimentales y estiman el ancho máximo probable con una probabilidad del 90 % de no ser excedido.

### 10.2.2. Variables que afectan el ancho de fisuras

- Conformación superficial de las barras de armadura: como se describió en 2.3 sobre adherencia acero-hormigón, la distancia  $l_e$  de transferencia de esfuerzos entre acero y hormigón, y de la cual depende la separación entre fisuras, es función de la conformación superficial de las barras. Elementos con barras conformadas presentarán fisuras más cercanas que en elementos con barras lisas. Para el mismo alargamiento total del acero, mayor cantidad de fisuras significa un menor ancho de cada una de ellas.
- Tensión en la armadura: se ha comprobado experimentalmente que el ancho de fisura es función de  $f_s$ . Para condiciones de servicio la tensión en el acero se puede calcular en base a un análisis elástico de la sección fisurada. Como opción se permite tomar  $f_s = 2/3 f_y$ .
- Recubrimiento: el ancho de fisuras depende también del recubrimiento  $d_c$  medido desde el centro de la barra hasta la cara de hormigón. En general al aumentar el recubrimiento aumenta el espaciamiento y ancho de fisuras.
- Distribución de la armadura: para controlar la fisuración es mejor utilizar mayor cantidad de barras de menor diámetro para suministrar el área requerida  $A_s$ , que pocas barras de mayor diámetro. Las barras deben estar bien distribuidas en la zona de tracción el hormigón.

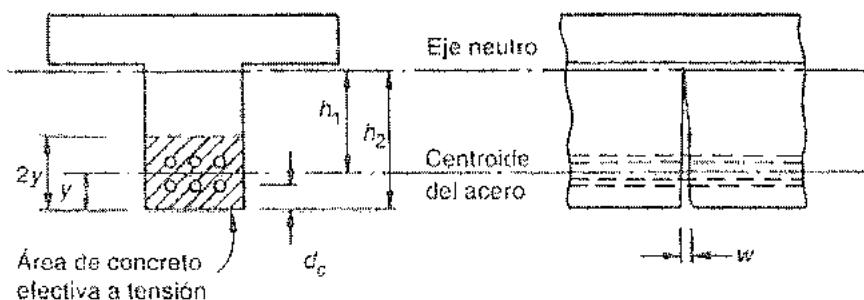
### 10.2.3. Ancho de fisuras

Se han propuesto muchas expresiones semiempíricas para calcular el ancho de fisuras en la cara traccionada de una viga. Gergely y Lutz llegaron a:

$$w = 0.011 \beta f_s^{3/4} d_c A \quad (10.1)$$

donde:  $w$  es el ancho de fisuras en milésima de milímetro ( $mm/1000$ );  $f_s$  es la tensión en la armadura, en  $MPa$ ;  $d_c$  es el espesor de recubrimiento desde el centro de la armadura más cercana a la cara del hormigón, en  $mm$ ;  $\beta = h_2 / h_1$  es la relación de distancias entre la cara traccionada y el centroide de armadura hasta el eje neutro;  $A$  es el área de hormigón que

rodea una barra, calculada como el área total efectiva de hormigón que rodea la armadura dividido por el número de barras, ver fig.10.1



**Figura 10.1:** Parámetros geométricos para el cálculo del ancho de fisuras

La expresión (10.1) es aplicable a vigas con barras de acero conformadas. Como valores promedio para  $\beta$  se puede suponer  $\beta = 1.2$  para vigas y  $\beta = 1.35$  para losas.

El ancho aceptable depende de las condiciones de exposición y debe establecerse con relación a la posibilidad de corrosión de la armadura. Algunas recomendaciones se resumen en la tabla 10.1.

**Tabla 10.1:** Anchos de fisuras tolerables

<i>Condición de exposición</i>	$w_{adm}$ (mm)
Aire seco o membrana protectora	0.41
Humedad, aire húmedo, suelo	0.30
Químicos para deshielo	0.18
Agua de mar y rocío de agua de mar: humedad y secado	0.15
Estructuras de contención de agua: se excluyen conductos a presión	0.10

Se debe tener en cuenta que un aumento de recubrimiento, aunque aumenta el ancho de fisura en la superficie, puede ser beneficioso para evitar la corrosión.

Las cargas cíclicas, como las permanentes, producen un incremento del ancho de fisuras. Con una gran dispersión, puede esperarse que el ancho se duplique.

#### 10.2.4. Disposiciones del código

Debido a que las pruebas de exposición indican que la calidad del hormigón, la compactación adecuada, y un recubrimiento de hormigón apropiado son también factores muy significativos para la protección de la armadura contra la corrosión, además del ancho de fisuras en la superficie del hormigón, el código (reglamento CIRSOC 201), en lugar de establecer prescripciones directas sobre el ancho de fisuras, establece especificaciones para la distribución de armaduras a flexión.

- La separación entre barras de armaduras de tracción por flexión debe ser:

$$s \left\{ \begin{array}{l} \leq 380 \text{ mm} \left( \frac{280}{f_s} \right) - 2.5 c_c \\ \leq 300 \text{ mm} \left( \frac{252}{f_s} \right) \end{array} \right. \quad (10.2)$$

dónde  $f_s$ , en MPa, es la tensión en la armadura para cargas de servicio que se puede estimar como  $f_s = 2/3 f_y$ ;  $c_c$  es el espesor del recubrimiento libre, en mm, desde la cara de hormigón hasta la superficie de la armadura.

La expresión (10.2) no es suficiente para medios agresivos o cuando se diseña para ser impermeable. En esos casos se deben aplicar las limitaciones recomendadas en 10.2.3.

- También para controlar el ancho de fisuras se limita la máxima tensión de diseño de la armadura a  $f_y \leq 500 \text{ MPa}$ .
- Para vigas placas, con el ala traccionada (por ejemplo en apoyos de vigas continuas), la concentración de la armadura sólo en el ancho del alma puede originar fisuras de ancho excesivo en las zona de las alas. Para evitar ésto, la armadura se debería distribuir en todo el ancho del ala. Sin embargo, debido a la pérdida de eficiencia en la transmisión de fuerzas de corte, las armaduras más alejadas del alma estarán menos tensionadas (ver distribución de  $\sigma_x$  en figs.4.15 y 4.16) y el diseño será entonces antieconómico.

Como solución de compromiso se establece que la armadura se distribuya sobre un ancho de  $1/10 l$ , o en el ancho efectivo del ala, la que sea menor, y disponer armadura longitudinal adicional en el resto de las alas, ver fig.10.2

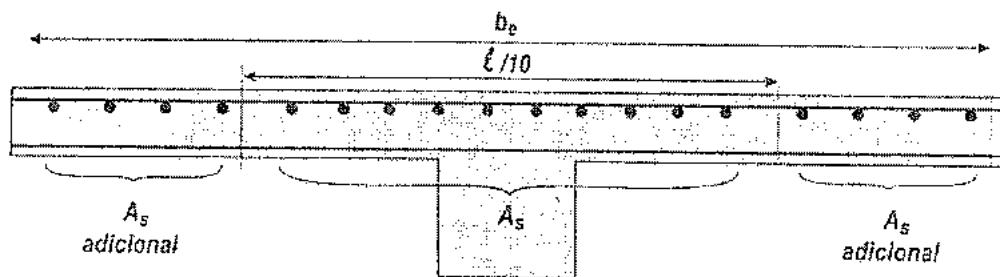


Figura 10.2: Distribución de armaduras en alas traccionadas de vigas placas

- Para vigas con alma relativamente alta,  $d > 0.90 \text{ m}$ , se debe colocar armadura de refuerzo en las caras verticales para controlar el ancho de fisuras en la zona traccionada de hormigón por encima de la armadura principal, hasta una altura  $h/2$ .

La separación  $s$  entre las barras debe cumplir con (10.2). El CIRSOC 201 no especifica la sección  $A_b$  de cada barra porque investigaciones han indicado que el espaciamiento más que la sección de las barras es de primordial importancia para controlar la fisuración. Típicamente se dispone un área mínima de  $2.10 \text{ cm}^2/\text{m}$  de altura.

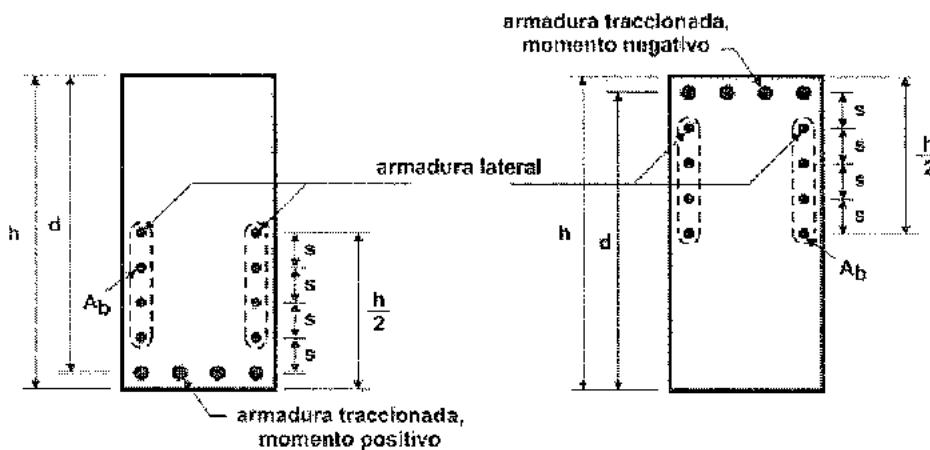
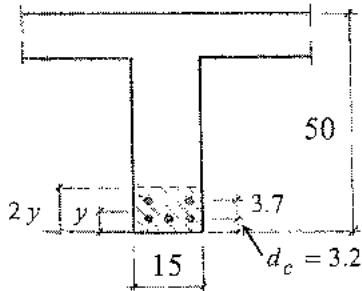


Figura 10.3: Armadura en caras laterales

#### 10.2.5. Ejemplo 10.1

Calcular el ancho de fisuras en el tramo de la viga  $V_1$  del ejemplo desarrollado en 5.11.

De acuerdo al cálculo efectuado resulta:



$$A_s : 5 \phi 12$$

$$d_c = 32 \text{ mm}$$

$$y = 32 + \frac{2}{5} 37 = 47 \text{ mm}$$

$$A_{tot} = 150 \cdot 94 = 14100 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{A_{tot}}{5} = \frac{14100}{5} = 2820 \text{ mm}^2$$

Utilizando:  $\beta = 1.2$  para vigas

$$f_s = 2/3 f_y = 0.667 \cdot 420 = 280 \text{ MPa}$$

$$\text{Se obtiene: } w = 0.011 \beta f_s \sqrt[3]{d_c A} = 0.011 \cdot 1.2 \cdot 280 \sqrt[3]{32 \cdot 2820} = 165 \mu\text{m} = 0.165 \text{ mm}$$

Este valor está por debajo de los límites recomendados en la tabla 6.1, que para el caso usual de vigas interiores es  $w_{adm} = 0.41 \text{ mm}$ .

Si se utiliza la limitación (10.2): la separación máxima entre barras resulta  $s_{max} = 300 \text{ mm}$ , mientras que la separación existente es:  $s = (150 - 2 \cdot 32) / 2 = 43 \text{ mm}$ , buenas condiciones.

## 10.3. CONTROL DE FLECHAS

### 10.3.1. Generalidades

Los elementos de hormigón armado solicitados a flexión se deben diseñar con una rigidez adecuada que permita limitar las flechas o cualquier deformación que pudiera afectar en forma negativa tanto a la resistencia como al comportamiento en servicio.

Las deflexiones excesivas pueden producir fisuras en paredes que sostienen o que se encuentran debajo del elemento estructural, descuadre de marcos de puertas y ventanas, problemas de drenaje en cubiertas, desalineación de máquinas, y deformaciones visualmente desagradables.

Se debe reconocer que sólo se puede lograr una estimación de los valores probables de la flecha real, debido a las incertidumbres en las propiedades de los materiales, en la influencia de la fisuración a lo largo del elemento estructural, y en los complejos fenómenos que gobiernan las deformaciones, especialmente la evolución en el tiempo de las deformaciones en el hormigón como se describió en 2.1.4.2, todo esto interactuando con la historia de aplicación de las cargas.

Los criterios aceptados por los códigos para controlar las flechas son:

- Esbelteces límites.
- Cálculo de las flechas.

### 10.3.2. Esbelteces límites

Es un método indirecto de control de flechas y consiste en establecer límites superiores adecuados a la relación luz-espesor (o altura). Es satisfactorio en muchos casos donde las luces, las cargas y su distribución, tamaños y proporciones de los elementos, están en los intervalos usuales. En otros casos es imprescindible el cálculo de la flecha, ver 10.3.3.

#### a) Elementos que trabajan en una dirección:

En la tabla 10.2 se reproducen las prescripciones del CIRSOC 201, 9.5.2 para elementos de hormigón armado que trabajan en una dirección, para hormigón de peso normal y armadura con  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . Para  $f_y \neq 420 \text{ MPa}$ , los valores de la tabla se deben multiplicar por  $(0.4 + f_y / 700)$ .

Además estas limitaciones son válidas únicamente para elementos que no soporten o que no estén vinculados a tabiques divisorios u otro tipo de elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes flechas, a menos que el cálculo de la flecha indique que se puede utilizar un espesor menor sin provocar efectos inadmisibles.

Los espesores que resultan de utilizar la tabla 10.2 son adecuados para sobrecargas mayores a  $5 \text{ KN/m}^2$ , como puede ser el caso de un edificio industrial, depósito, biblioteca, o lugares de concentración masiva de público en general.

**Tabla 10.2:** Ebelteces límites para clementos armados en una dirección

Elementos	Altura o espesor mínimo : $h$			
	simplemente apoyados	con un extremo continuo	ambos extremos continuos	en voladizo
Losas macizas armadas en una dirección	$l / 20$	$l / 24$	$l / 28$	$l / 10$
Vigas o losas nervuradas en una dirección	$l / 16$	$l / 18.5$	$l / 21$	$l / 8$

Para sobrecargas de uso o cargas vivas típicas en edificios comunes, se recomienda utilizar la siguiente expresión para la relación luz-espesor, publicada por B-S. Choi, B.H. Oh and A. Scanlon (2002)

$$\frac{l}{h} = \left[ \frac{(\Delta_{inc})_{adm}}{l} - \frac{19500 E_c}{\kappa (\lambda W_s + W_{l-var})} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (10.3)$$

$(\Delta_{inc})_{adm}$  = deflexión incremental admisible. Se toma  $l / 240$  para losas que no estén vinculadas a elementos susceptibles de sufrir daños por grandes flechas, caso contrario, se adopta  $l / 480$ .

$l$  = luz de la losa derecha.

$h$  = espesor de la losa derecha.

$E_c$  = módulo de elasticidad del hormigón [MPa]

$\kappa$  = coeficiente de deflexión que depende de la condición de apoyo:

$\kappa = 5$  losa simplemente apoyada en ambos extremos.

$\kappa = 1.4$  losa continua en ambos extremos.

$\kappa = 2$  losa simplemente apoyada en un extremo y continua en el otro.

$\kappa = 48$  losa en voladizo.

$\lambda$  = multiplicador de deflexión a largo plazo =  $\xi / (1+50 \rho^2)$ , ver sección 10.3.3-b).

$\xi$  = factor dependiente del tiempo, ver fig.10.5.

$W_s$  = total carga permanente: peso propio, carga muerta superpuesta y sobrecarga de utilización sostenida o de larga duración [ $KN/m^2$  ]

$W_{l-var}$  = sobrecarga de utilización variable [ $KN/m^2$  ]

## □ Ejemplo

Calcular el espesor de una losa derecha simplemente apoyada en ambos extremos que tiene carga permanente  $W_s = 4 KN/m^2$  y sobrecarga de utilización variable  $W_{l-var} = 2 KN/m^2$ :

Se considera que la losa derecha no tiene carga de paredes, ni está vinculada a elementos que pueden dañarse por la deformación de la losa, luego  $(\Delta_{inc})_{adm} = l/240$ .

Aplicando la ec.(10.3) resulta

$$\frac{l}{h} = \left[ \frac{(\Delta_{inc})_{adm}}{l} \cdot \kappa \left( \lambda W_s + W_{I, \text{var}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} = \left[ \frac{l/240}{l} \cdot \frac{19500}{5} \frac{4700\sqrt{25}}{(2 \cdot 4.0 + 2.0)} \right]^{\frac{1}{3}} = 33.7 \rightarrow h = \frac{l}{33.7}$$

**b) Elementos que trabajan en dos direcciones:**

- El espesor mínimo para losas **con vigas en todos sus lados** debe ser:

- para  $\alpha_m \leq 0.2$

aplicar los límites para losas sin vigas

- para  $0.2 < \alpha_m \leq 2.0$

$$h \geq \frac{l_n (0.8 + f_y / 1400)}{36 + 5 \beta (\alpha_m - 0.2)}, \quad h \geq 12 \text{ cm} \quad (10.4)$$

- para  $\alpha_m > 2.0$

$$h \geq \frac{l_n (0.8 + f_y / 1400)}{36 + 9 \beta}, \quad h \geq 9 \text{ cm} \quad (10.5)$$

donde:  $l_n$ : luz libre en el sentido del lado mayor

$\beta$ : relación entre luces libres mayor y menor de la losa

$$\alpha = \frac{E_{cb} I_b}{E_{cs} I_s}$$

con:  $E_{cb}$ ,  $E_{cs}$  módulos de elasticidad de viga y losa respectivamente

$I_b$  momento de inercia de la viga efectiva según fig.10.4

$$I_s = \frac{l_2 h_f^3}{12} \quad \text{momento de inercia de la losa según fig.10.4}$$

Luego:  $\alpha_m$  valor promedio de  $\alpha$  para todas las vigas de borde en un panel de losa.

Para relación de lados  $\beta > 2$ , las ec.(10.4) y (10.5), basadas en la longitud del lado mayor, conducen a resultados poco razonables. En esos casos emplear las disposiciones para losas derechas, armadas en una dirección.

En función de la experiencia obtenida en estructuras similares construidas en nuestro país, los **espesores mínimos** que surgen de la aplicación de las ecs.(10.4) y (10.5) pueden resultar excesivamente conservadores. En los Comentarios del CIRSOC 201 se recomienda utilizar las relaciones dadas en la tabla 10.3 siguiente.

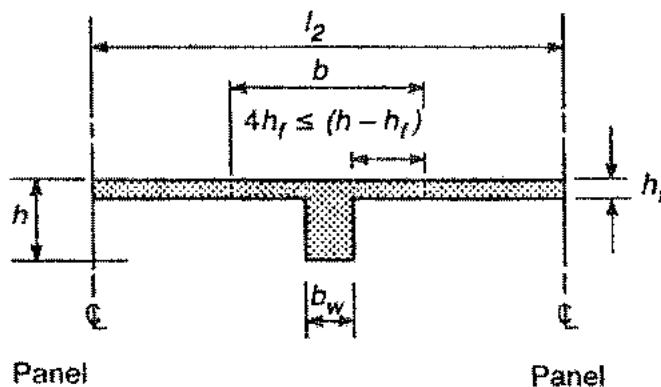


Figura 10.4: Sección transversal de losa y viga efectiva

Tabla 10.3: Coeficientes  $\gamma$  para el cálculo de espesores mínimos en lasos cruzadas

		Sin Mampostería		Con Mampostería	
Sobrecarga:		30 MN/mm²	50 MN/mm²	30 MN/mm²	50 MN/mm²
Condición de vínculo	Rel. de lados				
	$\beta = 2$	40	35	25	23
	$\beta = 1$	45	40	35	33
	$\beta = 2$	45	38	30	28
	$\beta = 1$	50	45	38	36
	$\beta = 2$	48	42	35	33
	$\beta = 1$	55	50	42	40

Altura total = luz menor /  $\gamma$

- El espesor mínimo de las losas *sin vigas interiores entre apoyos*, para relación de lados  $\beta < 2$ , con  $f_y = 420 \text{ MPa}$ , debe ser:

- losas sin ábacos

losas exteriores	sin vigas de borde	$h \geq l_n / 30$
	con vigas de borde	$h \geq l_n / 33$
losas interiores		$h \geq l_n / 33$
mínimo		$h \geq 12 \text{ cm}$

- losas con ábacos

losas exteriores	sin vigas de borde	$h \geq l_n / 33$
	con vigas de borde	$h \geq l_n / 36$
losas interiores		$h \geq l_n / 36$
mínimo		$h \geq 10 \text{ cm}$

(10.7)

donde  $l_n$  es la luz libre entre caras internas de los apoyos y en el sentido del lado mayor. Viga de borde se refiere al borde exterior y debe ser  $\alpha \geq 0.8$ .

### 10.3.3. Cálculo de flechas

#### a) Flechas instantáneas:

Las flechas elásticas pueden expresarse en forma general con

$$\Delta_i = \frac{f(\text{cargas, luces, apoyos})}{EI} \quad (10.8)$$

Por ejemplo para el caso de una viga simplemente apoyada de luz  $l$ , con carga uniforme  $q$ , la expresión (10.8) resulta:

$$\Delta_i = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} \quad (10.9)$$

existiendo soluciones para variadas condiciones de carga y vinculación. Son aplicables los métodos generales como el de la carga virtual unitaria, o el método de desplazamientos implementado en los programas de computación.

El problema consiste en determinar la rigidez a flexión apropiada  $EI$ , para un elemento formado por dos materiales con propiedades y comportamientos tan diferentes como el hormigón y el acero.

Si el momento máximo en un elemento a flexión es tan pequeño que la tensión de tracción en el hormigón no supera su resistencia a tracción por flexión  $f_r$ , significa que todo el elemento trabaja en Estado I, ver 4.3.a), sin fisuración, y entonces el momento de inercia efectivo es el correspondiente a la sección homogeneizada total. Luego la rigidez es  $E_c J_h$  de acuerdo a ec. (4.1).

Para cargas mayores se produce un cuadro de fisuras de tracción por flexión y de corte, ver fig.4.4, con sectores del elemento en Estado II. En las secciones adyacentes a las fisuras, la inercia efectiva corresponde a la sección fisurada homogeneizada  $J_{hf}$ , ver fig.4.6. Entre las fisuras se aproxima a  $J_h$ .

Entonces el momento de inercia local varía en aquellas partes de la viga donde el momento excede el momento de fisuración, ec. (4.3)

$$M_{cr} = \frac{f_r J_h}{(h - y_G)} \quad f_r = 0.625 \sqrt{f'_c} \quad (4.3)$$

La variación exacta de la inercia depende de la forma del diagrama de momentos y del patrón de fisuración que es difícil de determinar. Esto hace que el cálculo exacto de la flecha sea casi imposible.

Sin embargo, los estudios experimentales demuestran que las deflexiones que ocurren en una viga después que el momento máximo  $M_a$  alcanza y supera el momento de fisuración  $M_{cr}$ , pueden calcularse utilizando un momento de inercia efectivo  $I_e$  dado por:

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 J_h + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] J_{hf} \leq J_h \quad (10.10)$$

Para  $M_a \leq M_{cr}$  es  $I_e = J_h$ . Para  $M_a > 3M_{cr}$  resulta que  $I_e \rightarrow J_{hf}$ .

Hay que tener en cuenta que con  $I_e$  se calcula una rigidez secante, es decir si se quiere calcular el incremento de flecha causada por una sobrecarga que ocasiona un incremento de momento desde  $M_1$  a  $M_2$ , se requiere un cálculo en dos etapas: (a) primero se calcula  $\Delta_1$  con la rigidez calculada con  $I_{el}$  para  $M_a = M_1$  asociada a la carga permanente; (b) luego se calcula  $\Delta_2$  con  $I_{e2}$  para  $M_a = M_2$  asociada a la carga permanente más la sobrecarga. Finalmente el incremento se calcula por diferencia  $\Delta_2 - \Delta_1$ .

Como simplificación se permite en el CIRSOC 201 reemplazar  $J_h$  por  $I_g$ : momento de inercia de la sección bruta de hormigón.

Para tramos continuos se propone un promedio entre los valores calculados en el tramo  $I_{em}$  y en los apoyos  $I_{el}, I_{e2}$ :

$$I_e = 0.50 I_{em} + 0.25(I_{el} + I_{e2}) \quad (10.11)$$

Para elementos prismáticos continuos, una mejor aproximación es

$$I_e = 0.70 I_{em} + 0.15(I_{el} + I_{e2}) \quad (10.12)$$

y para vigas con un extremo continuo y otro simplemente apoyado:

$$I_e = 0.85 I_{em} + 0.15 I_{el} \quad (10.13)$$

En los voladizos se debe utilizar el valor de  $I_e$  en el apoyo.

Un problema adicional en elementos continuos, pórticos, es que la distribución de momentos depende de las rigideces relativas entre los elementos. Se podría utilizar un proceso de ajustes iterativos, o directamente utilizar valores sugeridos para realizar el análisis estructural y obtener la distribución de momentos. Ver recomendaciones en 8.4.2.2, considerando que para cargas de servicio se utilizan los valores de ec.(8.27) divididos por 0.70, como se indicó en dicho apartado.

Para losas armadas en dos direcciones, el CIRSOC 201 indica que se debe utilizar la ec.(10.10) para la inercia efectiva. Sin embargo también permite el uso de otros valores de  $I_e$  mientras el cálculo de flechas acuerde con resultados de ensayos. Debido a que para cargas de servicio la fisuración en losas cruzadas es poco extensa, no se introduce error significativo si se utiliza directamente  $I_g$ .

### b) Flechas a largo plazo

Las flechas iniciales se incrementan significativamente si las cargas permanecen en el tiempo, debido a los efectos de retracción y fluencia lenta en el hormigón como se describió en 2.1.4.2.

En una sección de una viga a flexión, la deformación a compresión del hormigón se incrementa con el tiempo, pero la deformación del acero a tracción permanece sin cambio. Luego crece la profundidad del eje neutro y el área comprimida de hormigón. Para mantener el equilibrio disminuye la tensión en el hormigón y entonces se atenúa el efecto de la fluencia lenta.

La presencia de armadura comprimida produce un efecto similar al de columnas, es decir cuando el hormigón se sigue deformando por fluencia lenta, transfiere carga a la armadura comprimida y así disminuye la tensión en el hormigón, atenuando aún más el efecto de la fluencia lenta.

Debido a la complejidad del problema, y con base de resultados experimentales, las flechas adicionales a largo plazo  $\Delta_t$ , ocasionadas por los efectos combinados de retracción de fragüe y fluencia lenta, se pueden calcular con

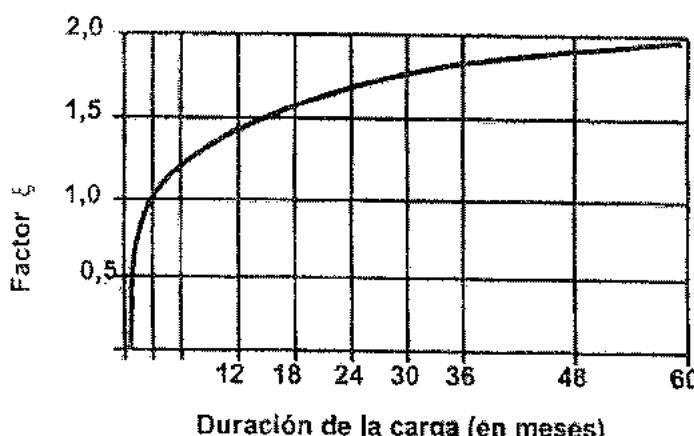
$$\Delta_t = \lambda \Delta_i \quad (10.14)$$

donde  $\Delta_i$  es la deflexión elástica inicial calculada como se explica en el apartado a), y  $\lambda$  es el factor de fluencia dado por

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \rho'} \quad (10.15)$$

donde  $\rho' = A'_s / b d$  es la cuantía de armadura comprimida, calculada en la mitad de la luz para tramos simples y continuos, y en el apoyo para voladizos.  $\xi$  es un factor que depende del tiempo y de las características de la fluencia lenta y retracción. Para hormigones de peso normal y livianos, la función  $\xi(t)$  se presenta en la fig.10.5

Las expresiones (10.14) y (10.15) también se pueden aplicar al cálculo de flechas a largo plazo para losas armadas en dos direcciones, pero se recomienda  $\xi = 3$  para  $t > 5$  años.



$t$	$\xi$
5 años o más	2.0
12 meses	1.4
6 meses	1.2
3 meses	1.0
1 mes	0.7

Figura 10.5: Factor  $\xi$  en función del tiempo

Si una viga soporta una carga permanente  $D$  y en determinado tiempo  $t$  se aplica una sobrecarga importante de corta duración  $L$ , la flecha máxima total bajo esta carga combinada, ver fig.10.6, se obtiene con:

- Se calcula la flecha instantánea  $\Delta_{iD}$  debido a la carga permanente  $D$  como se describió en a), utilizando la inercia efectiva  $I_e$  calculada con (10.10) para  $M_a = M_D$ .
- Se calcula la flecha adicional a largo plazo debido a  $D$  con ec.(10.14), es decir

$$\Delta_{tD} = \lambda \Delta_{iD} \quad (10.16)$$

con  $\lambda$  evaluado con (10.15) para el tiempo  $t$ .

- La flecha total producida por la carga permanente  $D$  es:

$$\Delta_D = \Delta_{iD} + \Delta_{tD} \quad (10.17)$$

- Para calcular la flecha instantánea causada por  $L$  de corta duración, debe tenerse en cuenta que después de la fisuración la relación carga-flecha es no lineal, y como se describió en a), resulta:

$$\Delta_{iL} = \Delta_{i(D+L)} - \Delta_{iD} \quad (10.18)$$

donde  $\Delta_{i(D+L)}$  es la flecha instantánea total que se obtendría si  $D$  y  $L$  fueran aplicadas simultáneamente, con  $I_e$  evaluada para con (10.10) para  $M_a = M_{(D+L)}$ .

- Finalmente la flecha total es:

$$\Delta = \Delta_D + \Delta_{iL} \quad (10.19)$$

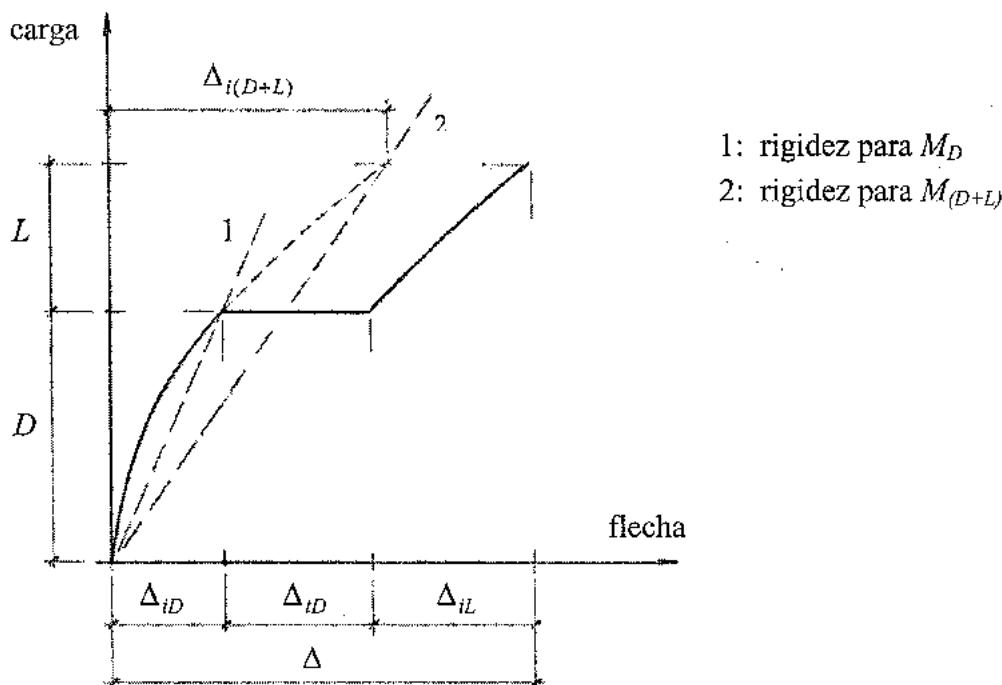


Figura 10.6: Relación carga-flecha

### 10.3.4. Flechas máximas admisibles

Para garantizar un comportamiento satisfactorio en condiciones de servicio, el CIRSOC 201 impone límites a las flechas calculadas con los procedimientos descriptos en 10.3.3, para elementos armados en una dirección.

- a) Cubiertas planas que no soportan ni están unidas a elementos no estructurales que puedan sufrir daños por grandes flechas:

Flecha instantánea debido a la sobrecarga  $L$  ..... 1 / 180

- b) Entrepisos que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales que puedan sufrir daños por grandes flechas:

Flecha instantánea debido a la sobrecarga  $L$  ..... 1 / 360

- c) Cubiertas o entrepisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que posiblemente sufran daños por grandes flechas:

Parte de la flecha total que ocurre después de la construcción de los elementos no estructurales ..... 1 / 480

- d) Cubiertas o entrepisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que posiblemente no sufran daños por grandes flechas:

Parte de la flecha total que ocurre después de la construcción de los elementos no estructurales ..... 1 / 240

El límite del caso a) no tiene por objeto prevenir acumulación de agua. Este efecto debe verificarse.

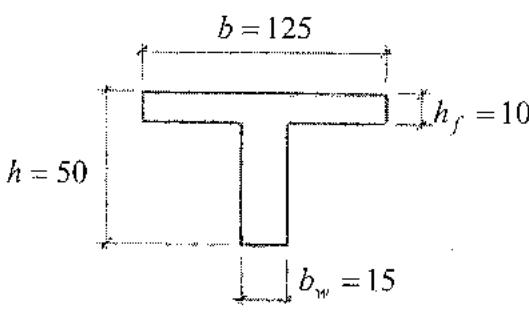
El límite del caso c) se puede exceder si se adoptan medidas adecuadas para prevenir daños en elementos no estructurales.

El límite del caso d) no debe ser mayor que la tolerancia establecida para los elementos no estructurales. Si se supera el límite permitido, se puede construir el elemento estructural con una contraflecha tal que la diferencia entre flecha menos contraflecha no supere el límite.

Estos límites se aplican a vigas, losas macizas y nervuradas “derechas” armadas en una dirección, como así también a losas que trabajan en dos direcciones.

### 10.3.5. Ejemplo 10.2

Calcular la flecha total en el centro del tramo de la viga  $V_1$  del ejemplo desarrollado en 5.12, para un tiempo  $t > 5$  años.



Hormigón H-25

$$E_c = 4700 \sqrt{f'_c} = 23500 \text{ MPa}$$

$$f'_c = 0.625 \sqrt{f'_c} = 3.13 \text{ MPa}$$

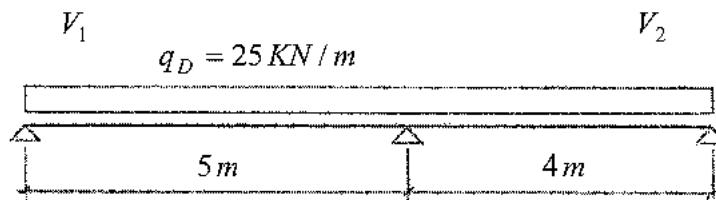
Acero ADN 420

$$E_s = 200000 \text{ MPa}$$

$$f_y = 420 \text{ MPa}$$

a) Análisis estructural:

Se realiza para las cargas  $D$  y  $L$  por separado y con rigidez constante para los dos tramos:



$M_u(\text{ap}) [\text{KNm}]$	-65.66   65.66		Sin redistribución de momento de apoyo por ser cargas de servicio
$M_u(\text{ap}) [\text{KNm}]$		-65.66	
$V_q [\text{KN}]$	62.5	62.5   50	50
$V_M [\text{KN}]$	-13.1	13.1   16.4	-16.4
$V_u [\text{KN}]$	49.4	75.6   66.4	33.6
$\chi [m]$	→ 1.98		1.34 ←
$M_u(\text{tr}) [\text{KNm}]$	48.8		22.6

Distancia al punto de corte nulo

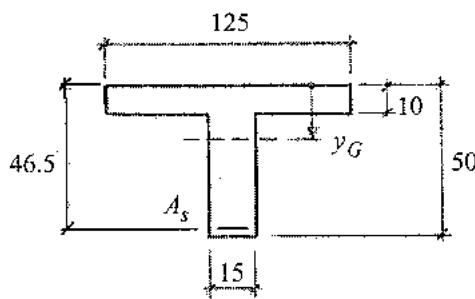


$M_u(\text{ap}) [\text{KNm}]$	-30.6   30.6		Sin redistribución de momento de apoyo por ser cargas de servicio
$M_u(\text{ap}) [\text{KNm}]$		-30.6	
$V_q [\text{KN}]$	20	20   50	50
$V_P [\text{KN}]$		25	25
$V_M [\text{KN}]$	-6.1	6.1   7.6	-7.6
$V_u [\text{KN}]$	13.9	26.1   32.6	17.4
$\chi [m]$	→ 1.74		2.00 ←
$M_u(\text{tr}) [\text{KNm}]$	12.1		34.8

Distancia al punto de corte nulo

**b) Momentos de fisuración de la sección:**

- Tramo VI



$$A_s = 5 \cdot 1.13 = 5.65 \text{ cm}^2 \quad (5\phi 12)$$

$A'_s : 2\phi 6$  despreciable

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200000}{23500} = 8.51$$

$$A_h = 15 \cdot 50 + 110 \cdot 10 + (8.51 - 1) \cdot 5.65 = 1892.4 \text{ cm}^2$$

$$y_G = \frac{15 \cdot 50 \cdot 25 + 110 \cdot 10 \cdot 5 + (8.51 - 1) \cdot 5.65 \cdot 46.5}{1892.4} = \frac{26223}{1892.4} = 13.9 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} J_h &= \left[ \frac{15 \cdot 50^3}{12} + 15 \cdot 50 (25 - 13.9)^2 \right] + \left[ \frac{110 \cdot 10^3}{12} + 110 \cdot 10 (13.9 - 5)^2 \right] \\ &\quad + [(8.51 - 1) \cdot 5.65 \cdot (46.5 - 13.9)^2] \\ &= 248657 + 96298 + 45095 = 390050 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$M_{cr} = \frac{f_r J_h}{h - y_G} = \frac{3.13 \cdot 390050 \cdot 10^{-8}}{0.50 - 0.139} = 0.0338 \text{ MNm} = 33.8 \text{ KNm}$$

Sección fisurada: se utiliza la ec. (4.4) suponiendo eje neutro en la placa

$$\frac{b(kd)^2}{2} = n A_s (d - kd)$$

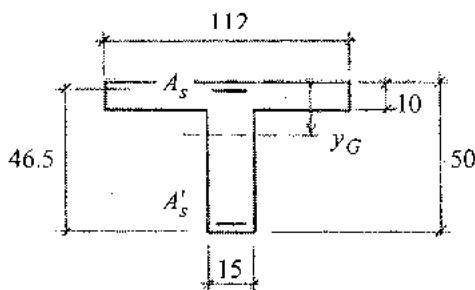
$$\frac{125 \cdot 46.5^2}{2} k^2 + 8.51 \cdot 5.65 \cdot 46.5 k - 8.51 \cdot 5.65 \cdot 46.5 = 0$$

$$135141 k^2 + 2235.8 k - 2235.8 = 0 \rightarrow k = 0.1206$$

$$c = k d = 0.1206 \cdot 46.5 = 5.60 \text{ cm} < 10 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} J_{hf} &= \left[ \frac{125 \cdot 5.60^3}{12} + 125 \cdot 5.60 \cdot 2.8^2 \right] + [8.51 \cdot 5.65 \cdot (46.5 - 5.6)^2] \\ &= 7317.3 + 80431 = 87748 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

■ Apoyo



Como ancho de ala se toma un promedio entre V<sub>1</sub> y V<sub>2</sub>

$$A_s = 6 \cdot 1.13 = 6.78 \text{ cm}^2 \quad (6\phi 12)$$

$$A'_s = 3 \cdot 1.13 = 3.39 \text{ cm}^2 \quad (3\phi 12)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200000}{23500} = 8.51$$

$$A_h = 15 \cdot 50 + 102 \cdot 10 + (8.51 - 1) (6.78 + 3.39) = 1846.4 \text{ cm}^2$$

$$y_G = \frac{15 \cdot 50 \cdot 25 + 102 \cdot 10 \cdot 5 + 50.9 \cdot 3.5 + 25.46 \cdot 46.5}{1846.4} = \frac{25212}{1846.4} = 13.7 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} J_h &= \left[ \frac{15 \cdot 50^3}{12} + 15 \cdot 50 (25 - 13.7)^2 \right] + \left[ \frac{102 \cdot 10^3}{12} + 102 \cdot 10 (13.7 - 5)^2 \right] \\ &\quad + [50.9 (13.7 - 5)^2] + [25.46 (46.5 - 13.7)^2] \\ &= 252018 + 77204 + 5296 + 27391 = 361909 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$M_{cr} = \frac{f_r J_h}{y_G} = \frac{3.13 \cdot 361909 \cdot 10^{-8}}{0.137} = 0.0827 \text{ MNm} = 82.7 \text{ KNm}$$

Sección fisurada: se utiliza la ec. (4.4) considerando A'\_s

$$\frac{b(kd)^2}{2} + n A'_s (kd - 3.5) = n A_s (d - kd)$$

$$\frac{125 \cdot 46.5^2}{2} k^2 + 8.51 \cdot 3.39 \cdot 46.5 k - 8.51 \cdot 3.39 \cdot 3.5 - 8.51 \cdot 6.78 \cdot 46.5 + 8.51 \cdot 6.78 \cdot 46.5 k = 0$$

$$16216.9 k^2 + 4024.4 k - 2784 = 0 \rightarrow k = 0.308$$

$$c = k d = 0.308 \cdot 46.5 = 14.3 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} J_{hf} &= \left[ \frac{15 \cdot 14.3^3}{12} + 15 \cdot 14.3 \cdot 7.05^2 \right] + [8.51 \cdot 3.39 (14.3 - 3.5)^2] \\ &\quad + [8.51 \cdot 6.78 (46.5 - 14.3)^2] \\ &= 14316 + 3365 + 59823 = 77504 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

c) *Flechas instantáneas*

■ *Cargas permanentes*

Cálculo de la inercia efectiva:

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 J_h + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] J_{hf}$$

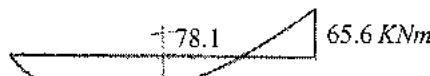
$$I_{e_m} = \left( \frac{33.8}{48.8} \right)^3 390050 + \left[ 1 - \left( \frac{33.8}{48.8} \right)^3 \right] 87748 = 129602 + 58592 = 188194 \text{ cm}^4$$

$$I_{e_1} = J_h = 361909 \text{ cm}^4 \quad \text{porque } M_{cr} = 82.7 \text{ KNm} > M_a = 65.6 \text{ KNm}$$

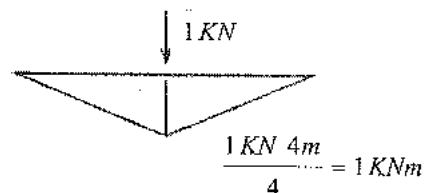
$$I_e = 0.85 I_{e_m} + 0.15 I_{e_1} = 0.85 188194 + 0.15 361909 = 214251 \text{ cm}^4$$

Cálculo de la flecha utilizando el método de la carga virtual unitaria

ED



ECV



$$1 \text{ KN} \Delta = \int_0^l M d\phi = \int_0^l M \frac{M}{EI} dx$$

$$\left. \begin{array}{c} \text{Diagram of a triangular deflection curve with a maximum deflection of 65.6 at the free end.} \\ \text{Diagram of a parabolic deflection curve with a maximum deflection of 1 at the free end.} \end{array} \right\} \frac{5}{EI} \left[ \frac{1}{4} (-65.6) 1 \right] = -\frac{82}{EI}$$

$$\left. \begin{array}{c} \text{Diagram of a parabolic deflection curve with a maximum deflection of 78.1 at the free end.} \\ \text{Diagram of a parabolic deflection curve with a maximum deflection of 1 at the free end.} \end{array} \right\} \frac{5}{EI} \left[ \frac{5}{12} 78.1 1 \right] = \frac{162.7}{EI}$$

$$1 \text{ KN} \Delta = \frac{162.7 - 82}{EI} = \frac{80.7}{EI} \text{ KN}^2 \text{ m}^3$$

$$E_c I_e = 23500 10^3 \text{ KN/m}^2 \cdot 214251 10^{-8} \text{ m}^4 = 50349 \text{ KN m}^2$$

$$\Delta_{ID} = \frac{80.7}{50349} 10^2 = 0.160 \text{ cm}$$

■ *Cargas permanentes + sobrecarga*

$$I_{e_m} = \left( \frac{33.8}{48.8+12.1} \right)^3 390050 + \left[ 1 - \left( \frac{33.8}{48.8+12.1} \right)^3 \right] 87748 = 139430 \text{ cm}^4$$

$$I_{e_1} = \left( \frac{82.7}{65.6+30.6} \right)^3 361909 + \left[ 1 - \left( \frac{82.7}{65.6+30.6} \right)^3 \right] 77504 = 258192 \text{ cm}^4$$

$$I_e = 0.85 I_{e_m} + 0.15 I_{e_1} = 0.85 \cdot 139430 + 0.15 \cdot 258192 = 157244 \text{ cm}^4$$

$$1 \text{ KN } \Delta_{i(D+L)} = \frac{5}{EI} \left\{ \left[ \frac{1}{4} (-65.6 - 30.6) 1 \right] + \left[ \frac{5}{12} \frac{33.8^2}{8} 1 \right] \right\} = \frac{94.59}{EI} \text{ KN}^2 \text{ m}^3$$

$$E_c I_e = 23500 \cdot 10^3 \text{ KN/m}^2 \cdot 157244 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 = 36952 \text{ KN m}^2$$

$$\Delta_{i(D+L)} = \frac{94.59}{36952} \cdot 10^2 = 0.256 \text{ cm}$$

■ *Sobrecarga*

$$\Delta_{iL} = \Delta_{i(D+L)} - \Delta_{iD} = 0.256 - 0.160 = 0.096 \text{ cm}$$

*d) Flechas a largo plazo, para cargas permanentes*

$$\Delta_{tD} = \lambda \Delta_{iD}$$

$$\xi = 2.00 \text{ para } t > 5 \text{ años}$$

$\rho' = 0 \rightarrow$  se desprecia 2φ6 como armadura comprimida en el tramo ( $\epsilon < 2\%$ )

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \rho'} = 2.00$$

$$\Delta_{tD} = 2.00 \cdot 0.16 = 0.32 \text{ cm}$$

*e) Flecha total*

$$\Delta = \Delta_{iD} + \Delta_{tD} + \Delta_{iL} = 0.16 + 0.32 + 0.096 = 0.576 \text{ cm}$$

Para comparar con las flechas máximas admisibles dadas en 10.3.4 se considera que los elementos no estructurales están vinculados al entrepiso y pueden dañarse. Además los elementos no estructurales se construyen una vez aplicadas las cargas permanentes.

Luego:

$$\Delta_{adm} = \frac{l}{480} = \frac{500}{480} = 1.04 \text{ cm} > \Delta_{iD} + \Delta_{iL} = 0.32 + 0.096 = 0.416 \text{ cm} \quad \checkmark$$

#### 10.4. REQUISITOS DE DURABILIDAD

Las prescripciones del CIRSOC 201 tienen por finalidad lograr un adecuado comportamiento en servicio durante una vida útil de 50 años. Las estructuras y sus elementos componentes deben cumplir dos requisitos mínimos para garantizar su durabilidad.

- a) Valor mínimo de la resistencia especificada a compresión del hormigón  $f'_c$ : ver tabla 9.6.3 CIRSOC 201.
- b) Recubrimientos mínimos de las armaduras: ver CIRSOC 201, artículo 7.7

Considerar especialmente las prescripciones de durabilidad del artículo 2.2 del CIRSOC 201 y en particular la tabla 2.5.

# CAPÍTULO 11

## LOSAS DE HORMIGÓN ARMADO

### 11.1. TIPOS DE LOSAS

Las losas son elementos estructurales bidimensionales planos, donde una dimensión, el espesor, es pequeño con respecto a las otras dos. Se utilizan como superficies planas para pisos, entrepisos y cubiertas de edificaciones, como paredes de recipientes, como superficies de rodamiento en puentes y carreteras, etc., es decir como superficie para soportar cargas.

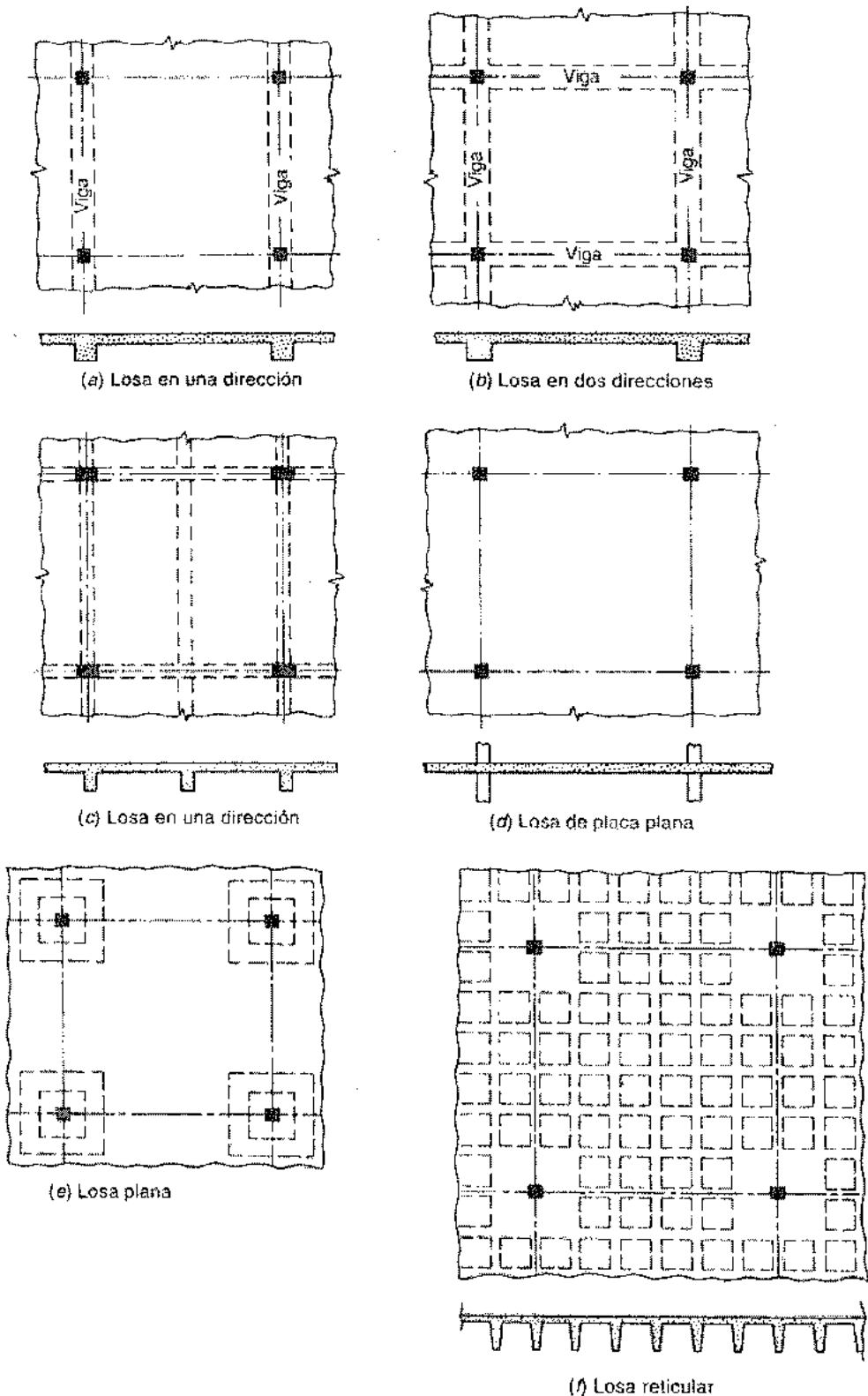
Las acciones son perpendiculares a su plano, originando esfuerzos internos de flexión, torsión y corte. Las cargas contenidas en su plano producen un funcionamiento que, dependiendo de la vinculación, puede ser de viga de gran altura, tabique, diafragma, etc., y no será objeto de este capítulo.

Las losas pueden estar apoyadas en vigas de hormigón armado (en general hormigonadas en forma monolítica), en muros de mampostería, en tabiques de hormigón, en vigas metálicas, en forma directa sobre columnas, o en el terreno en forma continua.

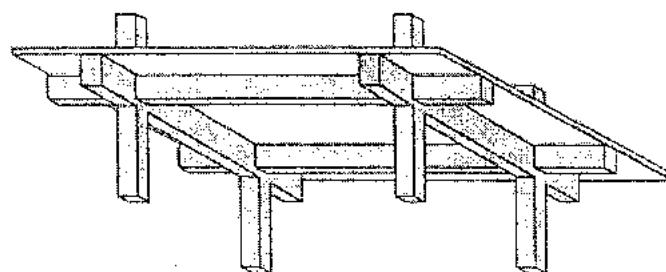
Se clasifican de distintas maneras, de acuerdo al parámetro considerado:

#### a) Por su forma de trabajo

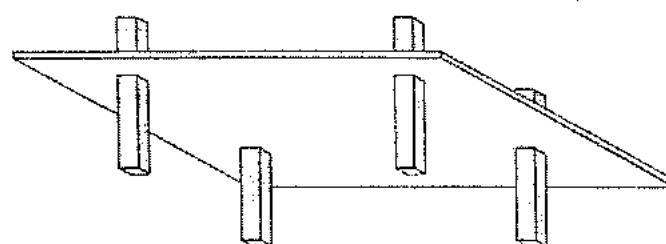
- Losas armadas en una dirección, llamadas losas “derechas”, fig.11.1 (a), donde las cargas se transmiten en la dirección perpendicular a las vigas de apoyo. Si hay vigas en los cuatro bordes pero la relación lado mayor / lado menor  $> 2$ , el funcionamiento se aproxima a una losa derecha en la dirección de la menor luz, fig.11.1 (c).
- Losas armadas en dos direcciones, llamadas losas “cruzadas”, fig.11.1 (b), donde la relación lado mayor / lado menor  $\leq 2$ . Las cargas se transmiten en las dos direcciones a los apoyos. También son losas cruzadas los casos de fig.11.1 (d), (e), (f).



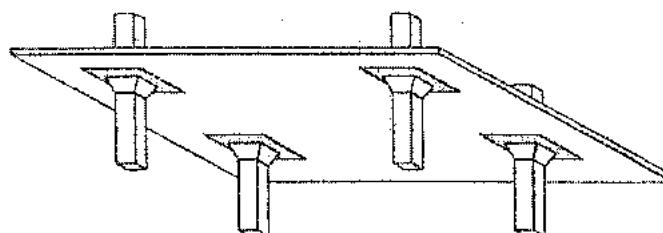
**Figura 11.1:** Tipos de losas estructurales



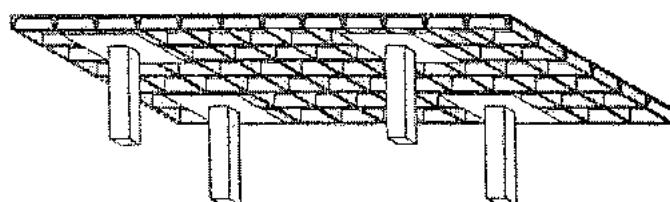
(a) Losa en dos direcciones apoyada en vigas



(b) Placa plana



(c) Losa plana

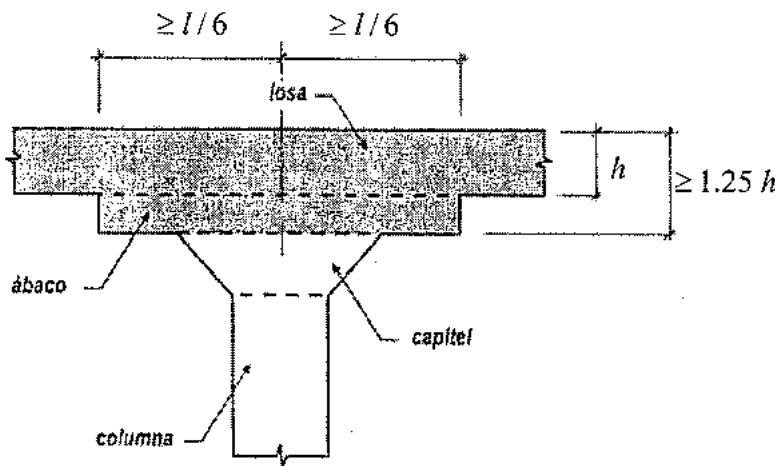


(d) Losa nervurada en dos direcciones

Figura 11.2: Tipos de losas en dos direcciones

### b) Por su vinculación

- Losas apoyadas en vigas en los bordes, fig.11.1 (a), (b), (c).
- Losas apoyadas directamente sobre columnas en las esquinas, fig.11.1 (d), (e), (f). En este tipo de losas se distinguen:
  - “Placa plana” con espesor constante, fig.11.1 (d).
  - “Losa plana”, fig.11.1 (e) que incorpora una región con sobre-espesor de losa en la vecindad de la columna, llamado “ábaco”, que en general se complementa con un ensanche en la parte superior de la columna, llamado “capitel”, ver fig.11.3. Con el capitel y el ábaco se reducen las tensiones producidas por corte y flexión negativa alrededor de las columnas.
- Se reconocen también situaciones intermedias, donde existen vigas con diferentes grado de flexibilidad en los bordes de las losas entre columnas.



**Figura 11.3:** Detalle de ábaco y capitel

### c) Por su conformación

- Losas macizas: todo el espesor se llena de hormigón.
- Losas alivianadas o nervuradas, fig.11.1 (f), cuando el espesor de la losa es importante, sea por condición de resistencia o de deformación, se puede disminuir el peso del hormigón, y por lo tanto el costo, eliminando el hormigón de las zonas traccionadas que no colabora. Se reemplaza por bloques o ladrillones cerámicos huecos, o por elementos de telgopor que quedan perdidos en la losa, es decir el fondo sigue siendo plano, ver fig.11.4, quedando solamente los nervios de hormigón que conectan la armadura con la capa de compresión. Otra alternativa es moldear el fondo con casetones que luego se retiran. Las nervaduras pueden disponerse en una o las dos direcciones.

La fig.11.2 muestra también algunos de los tipos de losas descriptos, vistos en forma axonométrica.

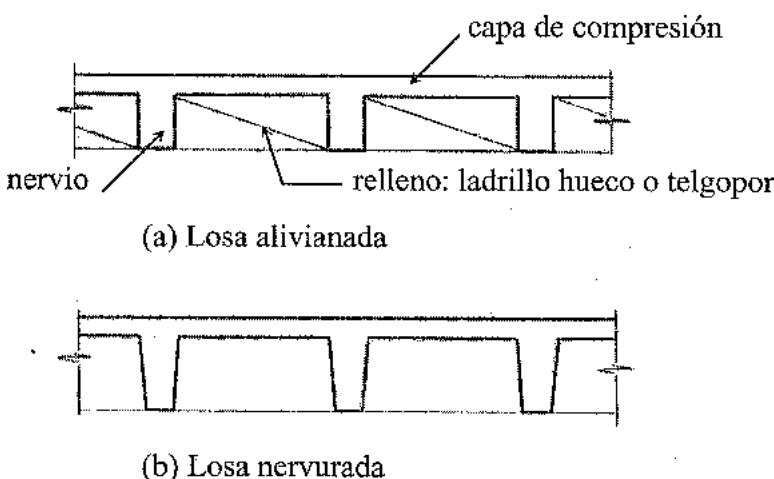


Figura 11.4: Losas alivianadas y nervuradas

## 11.2. LOSAS MACIZAS QUE TRABAJAN EN UNA DIRECCIÓN

### 11.2.1. Análisis estructural

El comportamiento estructural de una losa derecha cargada uniformemente se muestra en la fig.11.5. Las curvaturas y, en consecuencia, los momentos flectores son los mismos en todas las franjas que se extienden en la dirección corta entre los bordes apoyados, formándose una superficie cilíndrica.

Se demuestra que la ecuación diferencial de una placa delgada, cumpliendo las hipótesis de Kirchhoff, es

$$\nabla^4 w = \frac{q(x,y)}{D} \quad (11.1)$$

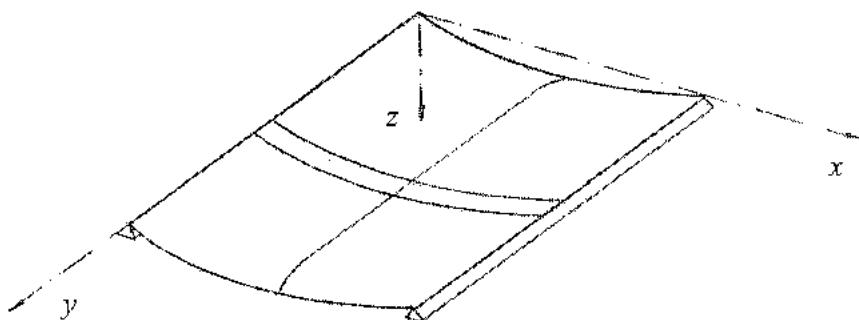
donde  $w$  es el desplazamiento normal al plano medio de la losa,  $q(x,y)$  la carga distribuida función de las coordenadas  $x, y$ ,  $D = E h^3 / (12(1-\nu^2))$  la rigidez a flexión con  $E$ : módulo de elasticidad,  $h$ : espesor de la losa,  $\nu$ : coeficiente de Poisson siendo  $\nu = 0.20$  para hormigón.

Para flexión cilíndrica resulta nula la curvatura según la dirección  $y$ :  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$  y entonces los momentos flectores son:

$$m_x = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad m_y = \nu m_x \quad (11.2)$$

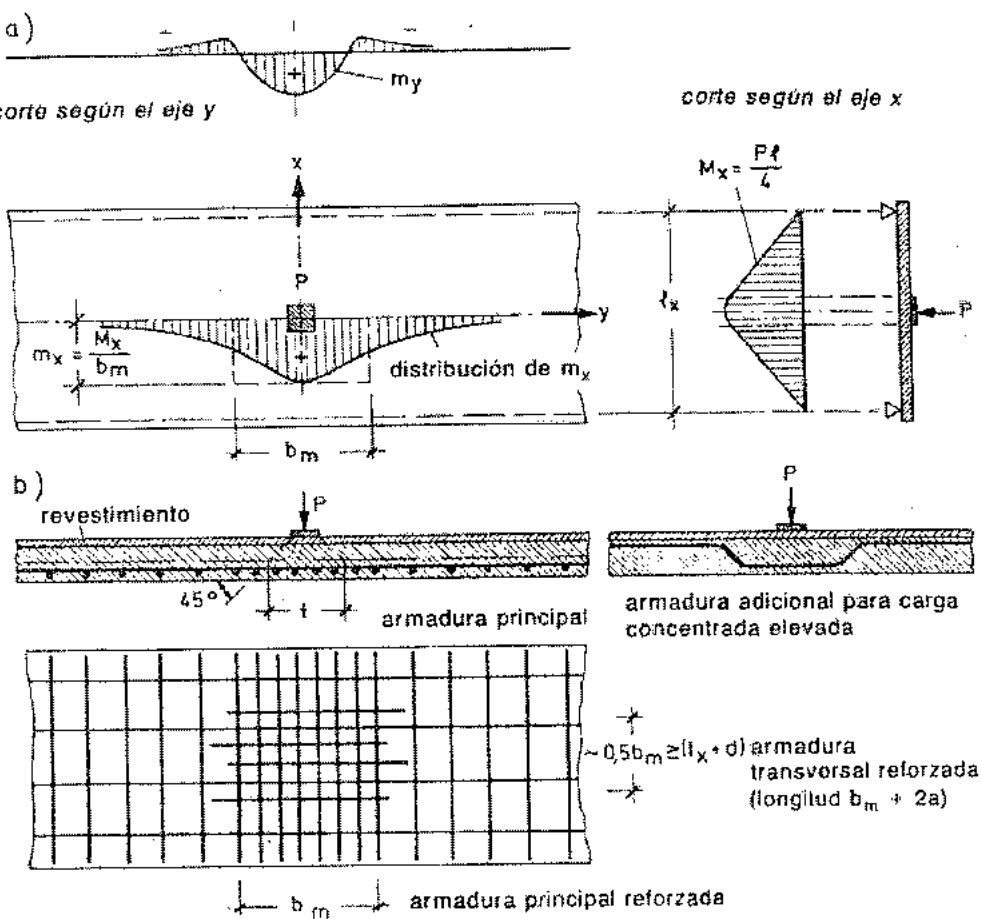
Se puede entonces analizar una franja genérica de ancho unitario como si fuera una viga. Observar que (11.2) indica para  $m_x$  una pequeña diferencia que es en el denominador  $(1-\nu^2) = 0.96 \cong 1$ , despreciable.

En el sentido transversal se origina un momento  $m_y$  por deformación impedida.



**Figura 11.5:** Flexión de losa derecha

Cuando actúa una carga concentrada, o lineal (por ej. pared) en la dirección  $x$ , se origina una distribución de momentos como la mostrada en la fig.11.6. El problema se simplifica considerando un ancho de repartición  $b_m$ , de manera de calcular una franja de ancho  $b_m$  con el mismo momento máximo producido por la carga concentrada.



**Figura 11.6:** Cargas concentradas en losas derechas

Luego, dentro del ancho  $b_m$ , el momento total por unidad de longitud es:

$$m_x = \frac{M_x}{b_m} + m_{x(c.u.)} \quad (11.3)$$

donde  $m_{x(c.u.)}$  es el momento producido por la carga uniforme.

Los valores de  $b_m$  para diferentes condiciones de vínculo pueden consultarse en el Cuaderno 240, apartado 2.2.2.

#### *Consideraciones sobre la luz de cálculo:*

- Para elementos que no estén construidos monolíticamente con los apoyos, por ejemplo losa sobre mampostería, la luz de cálculo  $l_e$  será la luz libre entre apoyos  $l_n$  más la altura del elemento  $h$ , pero menor o igual a la luz entre ejes de apoyo  $l_c$ , es decir

$$l_e = l_n + h \leq l_c \quad (11.4)$$

- Para elementos monolíticos, aporticados o continuos, la luz de cálculo será la luz entre ejes de apoyos, pero se permite una reducción de los momentos negativos, dimensionando para el momento en la cara del apoyo, ver fig.11.7

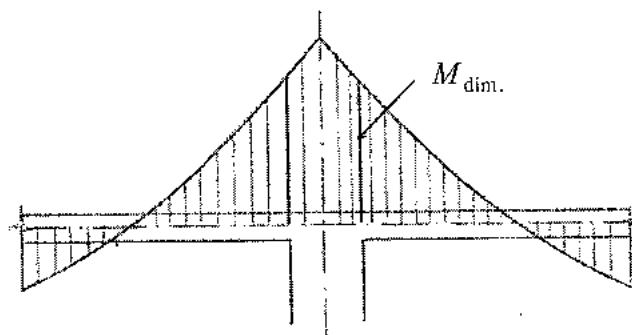


Figura 11.7: Reducción de momentos negativos por ancho de apoyo

- En lasas de luz menor de 3 m, monolítica con los apoyos, se permite el análisis de losa continua sobre apoyos puntuales (ancho nulo) y con luz igual a la luz libre de la losa.

#### **11.2.2. Dimensionamiento**

El diseño a flexión se realiza de la misma forma que para vigas, de acuerdo a los conceptos y metodología desarrollada en el Cap.4.

Los momentos flectores obtenidos del análisis estructural son por unidad de longitud, es decir el ancho es  $b = 1$ . Luego la armadura  $A_s$  calculada será para un ancho unitario, y en general se expresará en  $cm^2/m$ .

Tres criterios se utilizan para definir el espesor de la losa:

- Cuantía baja de armadura:* es conveniente desde el punto de vista económico, además para tener sección controlada por tracción (dúctil), pero debe satisfacer cuantía mínima dada por efectos de contracción de fragüe y temperatura como se había señalado al final del

apartado 4.8, ec. (11.6)  $\rho_{\min} = 0.0018$  para  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . Las cuantías típicas se ubican entre el mínimo y hasta 0.008.

b) *Deformabilidad de la losa*: debe tener una rigidez suficiente para cumplir con las flechas admisibles en condiciones de servicio, ver Cap.10. Para predimensionar el espesor se puede utilizar la guía dada en la tabla 10.2, o la ec.(10.3) en función del tipo de sobrecarga.

c) *Resistencia al corte*: por razones de simplicidad constructiva es conveniente no disponer armadura de corte, es decir la contribución del hormigón a corte debe ser suficiente para cubrir la solicitud externa, es decir  $\phi V_c > V_u$  de acuerdo con 5.8.1.

### 11.2.3. Armaduras

Las barras de la armadura principal se colocan en la dirección de la luz corta donde se producen los momentos mayores, con una separación que debe cumplir con las prescripciones al CIRSOC 201, 7.6.5:

$$s \quad \left\{ \begin{array}{l} \leq 2.5 h \\ \leq 25 d_b \\ \leq 30 \text{ cm} \end{array} \right. \quad (11.5)$$

con  $h$ : altura de la losa,  $d_b$ : diámetro de la barra

Los diámetros de las barras se deben seleccionar para que el espaciamiento no sea menor que aproximadamente  $1.5 h$  para evitar costos excesivos de mano de obra de manipuleo y colocación.

Esta armadura principal se coloca contra la cara traccionada (inferior en el tramo, superior en los apoyos) con un recubrimiento que debe cumplir los requisitos de durabilidad según CIRSOC 201, 7.7. Por ejemplo para losas hormigonadas in situ con  $d_b \leq 32 \text{ mm}$ , en ambiente no agresivo, resulta  $c_c = 20 \text{ mm}$ , distancia libre entre la superficie de hormigón y la barra de armadura.

Una parte de la armadura del tramo se levanta cerca de los apoyos para cubrir el momento negativo de continuidad con otra losa adyacente, o el momento de empotramiento con viga de borde debido a la rigidez a torsión de ésta, ver Cap.6. La cantidad de la armadura dobrada a  $45^\circ$  hacia la cara superior puede ser desde  $1/3 A_s$  (una barra cada tres),  $1/2 A_s$  (una barra cada dos), y hasta un máximo de  $2/3 A_s$  (dos barras cada tres). La posición de las barras dobladas dependen del diagrama de momentos flectores, ver ejemplo 11.1, o simplificadamente a  $l_x / 4$  en los apoyos continuos y  $l_x / 7$  en los simplemente apoyados.

La armadura transversal se coloca encima de la principal, a  $90^\circ$ . La altura estática será menor pero también es menor el momento flector a resistir, ec.(11.2). De acuerdo a dicha ec.(11.2) deberá ser  $A_{sy} = 0.20 A_{sx}$ , pero además debe resistir esfuerzos debido a contracción y a temperatura. El CIRSOC 201, 7.12, indica la siguiente cuantía mínima:

$$\text{Para } f_y \leq 420 \text{ MPa} \rightarrow \rho_{\min} = 0.0018$$

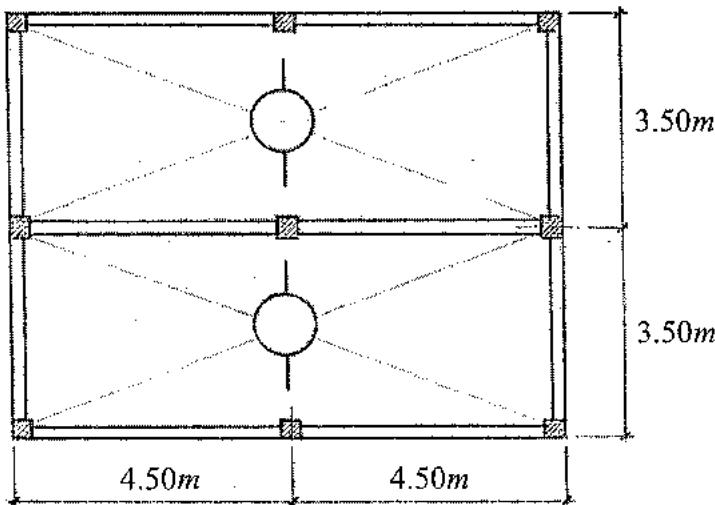
$$\text{Para } f_y > 420 \text{ MPa} \rightarrow \rho_{\min} = 0.0018 \frac{420}{f_y} \quad (11.6)$$

Con separación entre barras:

$$s \leq 3 h, \quad s \leq 30 \text{ cm} \quad (11.7)$$

### 11.2.4. Ejemplo 11.1

Calcular la losa derecha que se muestra en la siguiente figura:



#### a) Datos

Materiales:	Hormigón H-25 → $f'_c = 25 \text{ MPa}$
	Acero ADN 420 → $f_y = 420 \text{ MPa}$
Cargas:	Permanentes: $q_D = 5.00 \text{ KN/m}^2$
	Sobrecarga: $q_L = 5.00 \text{ KN/m}^2$ ( depósito )
Elementos:	vigas perimetrales: 15 / 40
	vigas centrales: 20 / 50
	columnas: 25 x 25

#### b) Análisis de cargas

Se analizan dos situaciones de carga:

- Con sobrecarga en ambas losas → máximo momento de apoyo
- Con sobrecarga en una losa → máximo y mínimo momento de tramo

Se podría considerar continuidad con las vigas externas (torsión de compatibilidad, ver Cap.6), ya que las mismas deben ser verificadas para resistir un momento torsor dado por (6.21).

$$\frac{T_u}{\phi} = \frac{\sqrt{f'_c}}{3} \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} = \frac{\sqrt{25}}{3} \frac{(0.15 \cdot 0.40)^2}{2(0.15 + 0.40)} 10^3 = 5.45 \text{ KNm} \rightarrow T_u = 0.75 \cdot 5.45 = 4.09 \text{ KNm}$$

Suponiendo vigas perfectamente empotradas a torsión:  $T_u = m_{t_u} \frac{L}{2}$

Luego el momento por unidad de longitud que puede transmitirle la losa es:

$$m_{tu} = \frac{T_u}{L} \cdot 2 = \frac{4.09 \cdot 2}{4.50} = 1.88 \text{ KNm/m}$$

La no consideración de esta continuidad producirá esfuerzos internos del lado de la seguridad de la losa. En este ejemplo se sigue este criterio.

Se utiliza la redistribución de momentos de apoyo:  $\Delta M = 1000 \varepsilon_t (\%) \leq 20\%$ . Como no se conoce a priori  $\varepsilon_t$ , se supone  $\varepsilon_t > 0.015 \rightarrow \Delta M = 15\%$ , y luego se deberá verificar.

Combinaciones de carga para obtener momentos máximo de apoyo y de tramo, teniendo en cuenta que la sobrecarga puede o no estar presente.

$$U_1 : 1.2 D + 1.6 L \quad q_{u1} = 1.2 \cdot 5.00 + 1.6 \cdot 5.00 = 14.00 \text{ KN/m}$$

$$U_2 : 1.2 D \quad q_{u2} = 1.2 \cdot 5.00 = 6.00 \text{ KN/m}$$

### c) Análisis estructural

Franja de ancho 1 m

	$q_{u1} = 14 \text{ KN/m}$		$q_{u1} = 14 \text{ KN/m}$		$q_{u2} = 6 \text{ KN/m}$
$M_u(\text{ap})$		-20.6			
$0.85M_u$		-17.50			
$V_q$	24.01	24.01			
$V_M$	-5.10	5.10			
$V_u$	18.91	29.11			
$\chi [m]$	→ 1.35	Distancia al punto de corte nulo			1.00 ←
$M_u(\text{tr})$	12.77			13.89	3.00

(\*) No se aplica la redistribución porque el apoyo se dimensionará para  $M_{ap} = -17.50 \text{ KNm/m}$

### d) Dimensionamiento por resistencia a flexión

- Espesor de la losa para cumplir con el control de flechas (ver 10.3.2 a). Se puede utilizar la tabla 10.2 porque se trata de un depósito con sobrecarga mayor o igual a  $5 \text{ KN/m}^2$ .

$$h = \frac{l}{24} = \frac{343}{24} = 14.3 \text{ cm} \rightarrow \text{se adopta } h = 14 \text{ cm}$$

- Recubrimiento:

$$c_c = 20 \text{ mm} \rightarrow d = h - c_c - \frac{d_b}{2} = 14 - 2 - 0.5 = 11.5 \text{ cm}$$

■ *Sección apoyo:*

Como la losa es monolítica con las vigas, se puede dimensionar con el momento en el filo del apoyo:

$$M_u = 17.50 - 29.11 \cdot 0.10 + 14 \frac{0.10^2}{2} = 14.66 \text{ KNm/m}$$

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{14.66}{0.9} = 16.29 \text{ KNm/m} = 0.01629 \text{ MNm/m}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b_w}}} = \frac{0.115}{\sqrt{\frac{0.01629}{1.00}}} = 0.900 \rightarrow \text{tabla FLEXIÓN 3 : } k_e = 24.603, k_z = 0.968, k_c = 0.076, \varepsilon_s = 0.036$$

$$A_s = k_e \frac{M_n}{d} = 24.603 \frac{0.0163}{0.115} = 3.49 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1\phi 10 \text{ c/44 (doblados de L_1)} \\ 1\phi 10 \text{ c/44 (doblados de L_2)} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= 0.036 > 0.015 \rightarrow \text{reducción de momentos de apoyo } \checkmark \\ &> 0.005 \rightarrow \phi = 0.9 \checkmark \end{aligned}$$

■ *Sección tramo:*

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \frac{13.89}{0.9} = 15.43 \text{ KNm/m} = 0.0154 \text{ MNm/m}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_n}{b}}} = \frac{0.115}{\sqrt{\frac{0.0154}{1.00}}} = 0.927 \rightarrow k_e = 24.557$$

$$A_s = k_e \frac{M_n}{d} = 24.557 \frac{0.0154}{0.115} = 3.29 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 1\phi 10 \text{ c/22}$$

■ *Verificación de separaciones máximas entre barras, ec.(11.5):*

$$s_{\max} = 25 d_b = 25 \cdot 1.0 = 25 \text{ cm} \quad \checkmark$$

■ *Verificación de separaciones máximas entre barras por control de fisuración, ec.(10.2):*

$$s_{\max} = \frac{95000}{0.6 \cdot 420} - 2.5 \cdot 20 = 327 \text{ mm}, \quad s_{\max} = 300 \text{ mm} \quad \checkmark$$

■ *Armadura de repartición:*

$$\begin{aligned} A_{s_y} &= 0.2 A_{s_x} \rightarrow \text{apoyo: } A_{s_y} = 0.2 \cdot 3.49 = 0.70 \text{ cm}^2/\text{m} \\ &\rightarrow \text{tramo: } A_{s_y} = 0.2 \cdot 3.29 = 0.66 \text{ cm}^2/\text{m} \end{aligned}$$

$$\text{Por retracción y temperatura } \rho_{\min} = 0.0018 \rightarrow A_{s_y} = 0.0018 \cdot 100 \cdot 14 = 2.52 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\rightarrow 1\phi 8 \text{ c/20}$$

e) Dimensionamiento por resistencia a corte

$$V_u = 29.11 \text{ KN/m}$$

$$V_n \geq \frac{V_u}{\phi} = \frac{29.11}{0.75} = 38.81 \text{ KN/m}$$

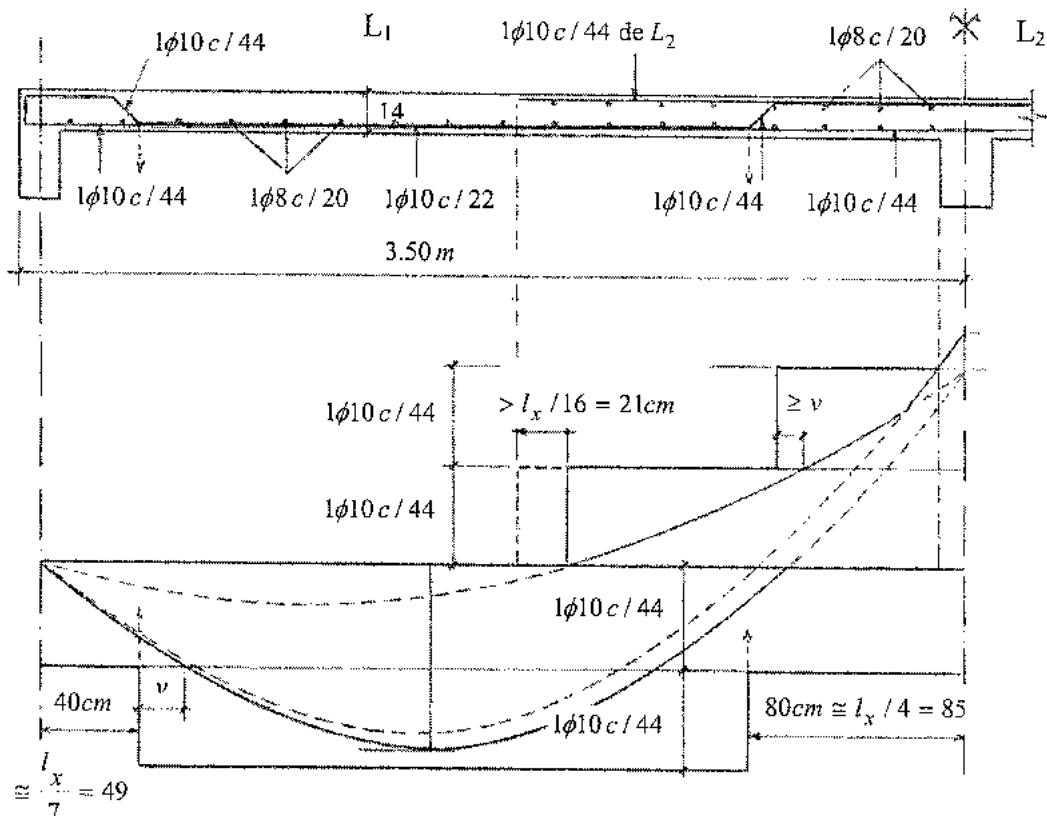
Contribución del hormigón:

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d = \frac{1}{6} \sqrt{25} 1.00 \cdot 0.115 = 0.0958 \text{ MN/m} = 95.8 \text{ KN/m}$$

$V_c > V_n$  ✓ no es necesaria armadura de corte

f) Cobertura del diagrama de momentos flectores

Ver CIRSOC 201: 12.2, 12.10, 12.11, 12.12



$$M_u (1\phi 10c/44) = \left( \frac{100}{44} 0.79 \right) 10^{-4} (0.968 0.115) 420 10^3 0.9 = 7.56 \text{ KNm/m}$$

$$\text{Decalaje } v \cong 0.5 z = 0.5 \cdot 0.968 \cdot 11.5 = 5.5 \text{ cm}$$

$$\text{Anclajes } l_d = \frac{9}{10} \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \left[ \frac{\alpha \beta \gamma \lambda}{c + K_p} \right] d_b = \frac{9}{10} \frac{420}{\sqrt{25}} \frac{1.0 \ 1.0 \ 0.8 \ 1.0}{\left[ \frac{2.5 + 0}{1.0} \right]} d_b = 24 d_b$$

$$l_d = 24 d_b = 24 \text{ cm}$$

$$l_x / 16 = 21 \text{ cm} > 12 d_b > d \quad \checkmark$$

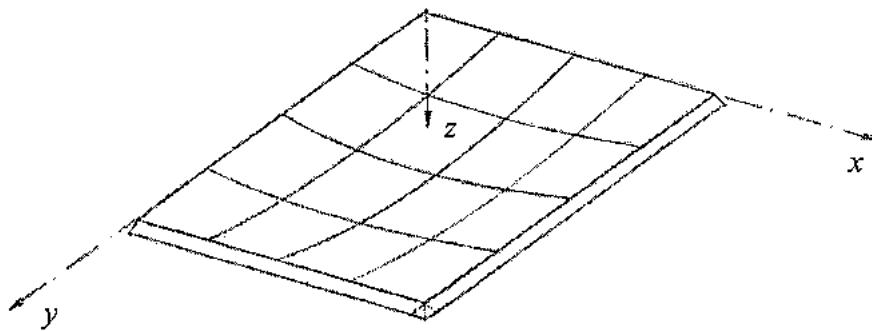
### 11.3. LOSAS MACIZAS QUE TRABAJAN EN DOS DIRECCIONES APOYADAS EN VIGAS RÍGIDAS

#### 11.3.1. Análisis estructural

Las losas que trabajan en dos direcciones, o losas cruzadas, como se describió en 11.1, tienen una relación de lado mayor / lado menor  $\leq 2$ , y transmiten las cargas en dos direcciones.

El caso más simple de losa cruzada es el de fig.11.1 (b) u 11.2(a), que está apoyada en los cuatro bordes en vigas. Cuando las vigas son relativamente altas, es decir rígidas, se puede hacer una *hipótesis simplificativa importante* que es suponer que el desplazamiento normal al plano de la losa en correspondencia con las vigas es nulo (descenso nulo). En este caso *se pueden analizar las losas independientemente de las vigas*, que serán líneas de apoyo ideales (apoyos simples o continuos).

La forma de la superficie deformada se muestra en la fig.11.8, la cual presenta curvaturas en ambas direcciones indicando que la carga se transmite según  $x$  e  $y$ .



**Figura 11.8:** Flexión de losa cruzada simplemente apoyada en los cuatro bordes, con carga uniforme.

La solución de la ecuación diferencial (11.1), con las condiciones de borde apropiadas, permite obtener la función de la elástica  $w(x,y)$ . Luego se obtienen los esfuerzos internos:

$$\begin{aligned} m_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) & m_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ t_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w & t_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \\ m_{xy} &= -D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (11.8)$$

donde  $m_x, m_y$  son los momentos flectores,  $t_x, t_y$  los esfuerzos de corte,  $m_{xy}$  el momento torsor,  $D = E h^3 / (12(1-\nu^2))$  es la rigidez a flexión y  $\nabla^2 w = \partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2$ . Todos son esfuerzos internos por unidad de longitud.

En los cursos de análisis estructural se desarrolla la teoría y métodos de solución. Dicha solución puede obtenerse de:

- **Solución analítica:** para geometrías simples, condiciones de borde ideales (simplemente apoyado, empotrado, borde libre), y cargas también sencillas. Se encuentran en tablas producidas por diversos autores.
- **Soluciones numéricas:** para situaciones más complejas se recurre a los métodos numéricos aproximados como “elementos finitos”, “diferencias finitas”, que se encuentran implementadas en los programas de computación (software) de análisis estructural.

### **Observaciones:**

- a) Losas con apoyos en los cuatro bordes pero con relación de lado mayor / lado menor  $> 2$ , la transmisión de cargas se realiza principalmente en la dirección corta y se puede analizar como losa derecha.
- b) Cuando la losa tiene un borde libre, o dos bordes libres adyacentes, mientras la relación de lados sea  $\leq 2$ , se comporta como losa cruzada.
- c) La mejor calidad de los materiales actuales, la exigencia de mayores espacios libres de columnas en los edificios y la necesidad de reducir al mínimo los espesores totales de entrepisos, llevan a diseñar estructuras muy flexibles que pueden invalidar los procedimientos de diseño estructural de losas cruzadas utilizados comúnmente (independientes de las vigas). Conduce a problemas de fisuración y perjuicio a los elementos no estructurales vinculados a la estructura. En esos casos es necesario analizar conjuntamente losas y vigas, tema que se trata en 11.5.

El Reglamento CIRSOC 201, 13.5.1 dice que los sistemas de losas se pueden diseñar mediante cualquier procedimiento que satisfaga condiciones de equilibrio y compatibilidad geométrica, verificando condiciones de resistencia y de servicio incluyendo valores límites para las flechas.

En resumen, esta aproximación de losas independientes sobre vigas se puede utilizar con vigas rígidas con relación altura / luz  $\cong 1/10$ . Otro criterio indica que se debe cumplir  $\alpha_m > 2$  ver apartado 10.3.2.b), ec.(10.4) y fig.10.4. Para esbelteces mayores, utilizar los procedimientos de 11.5 que abarca los casos de vigas flexibles hasta el caso de losas sin vigas.

### **Simplificación de las condiciones de borde para losas continuas:**

Para utilizar las soluciones analíticas disponibles en manuales y tablas, se deben modelizar las condiciones de vínculo en los bordes continuos, como bordes simplemente apoyados o perfectamente empotrados. Se presentan dos casos típicos

- a) Dos losas continuas de dimensiones y cargas similares, ver fig.11.9

Los momentos iniciales o de empotramiento perfecto de ambas losas son similares, con diferencias de hasta 20%. Como las dimensiones son del mismo orden, significa que la rigidez angular de ambas losas en ese borde común también serán similares, y luego el momento de desequilibrio ( $\leq 20\%$ ) será absorbido aproximadamente la mitad por cada losa.

Esto significa que el momento flector para el dimensionamiento del apoyo se pueda calcular como el promedio entre los momentos de empotramiento perfecto de cada losa.

Los momentos flectores en el tramo de cada losa se obtienen directamente de la solución disponible para condición de borde empotrado perfectamente en el borde continuo, ya que la

diferencia con el momento de tramo en equilibrio es mínima porque la diferencia en el apoyo es solo 10% aproximadamente.

$$q_{L_1} \cong q_{L_2}, \quad h_1 \cong h_2$$

$$L_{x_1} \cong L_{x_2}, \quad L_{y_1} \cong L_{y_2}$$

$M_{0_1}, M_{0_2}$ : momentos de empotramiento perfecto

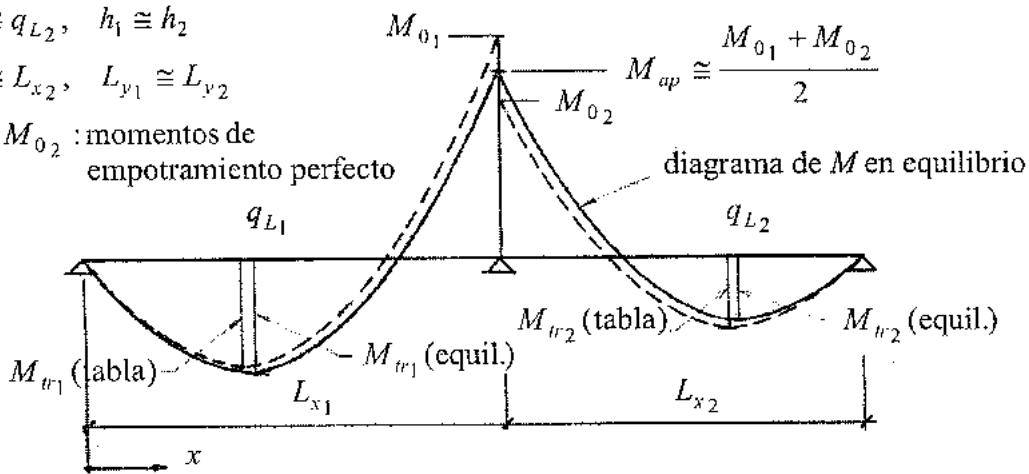


Figura 11.9: Análisis en la dirección x de dos losas cruzadas continuas similares

b) Dos losas continuas de dimensiones diferentes y cargas similares, ver fig.11.10

El momento de empotramiento perfecto de la losa más grande  $M_{0_1}$  será considerablemente mayor que el de la losa más chica  $M_{0_2}$ , mientras que la relación entre las rigideces angulares es inversa, es decir bastante mayor la de la losa de menor luz (la luz interviene en el denominador).

La situación de equilibrio elástico será con un momento flector en el apoyo cercano al momento de empotramiento perfecto de la losa más grande, porque el momento de desequilibrio será absorbido casi en su totalidad por la losa menor que tiene mayor rigidez angular. Recordar que el momento de desequilibrio, diferencia entre los momentos de empotramiento perfecto, se reparte entre las losas en función de su rigidez angular.

La losa de menor dimensión resulta con momento de tracción arriba en todo el tramo y reacción negativa en el apoyo opuesto, situación inconveniente desde el punto de vista de la disposición de armaduras porque además deberá colocarse armadura de tramo en la cara inferior de la losa por razones constructivas.

Un criterio práctico utilizado es redistribuir el momento de apoyo disminuyéndolo hasta el momento de empotramiento perfecto de la losa de menor luz  $M_{0_2}$ , con el cual se dimensiona la armadura de apoyo en el borde común. Se produce un giro plástico importante en la losa de mayor dimensión, con la formación de fisuras en la cara superior, que estarán controladas por la propia armadura de dimensionamiento del apoyo.

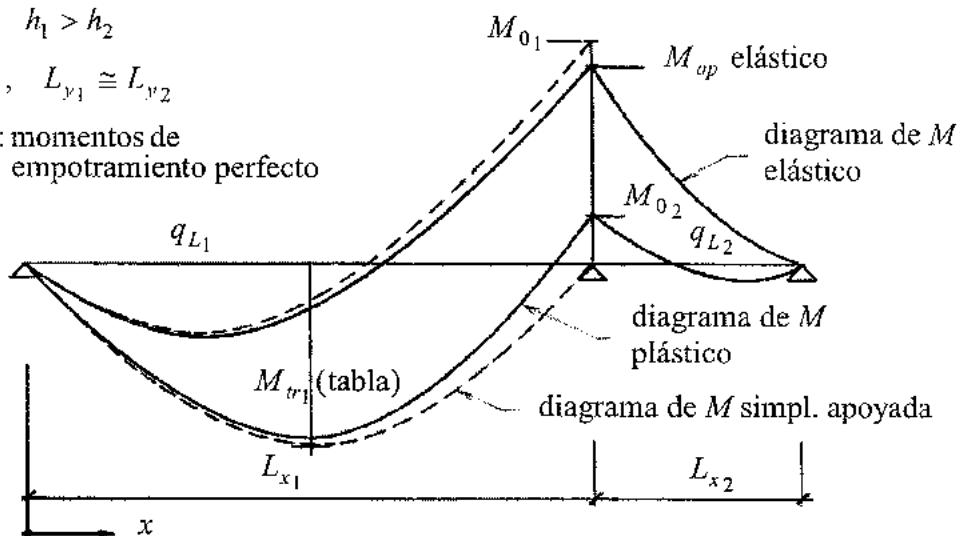
El momento de tramo de la losa menor se obtiene de la solución disponible en tablas para borde perfectamente empotrado, en el borde continuo, porque para ese momento se dimensiona el apoyo.

El momento de tramo de la losa más grande se obtiene de la solución disponible en tablas para borde simplemente apoyado  $M_{tr_1}(\text{tabla})$ , porque el momento de apoyo de dimensionamiento es muy inferior al momento de empotramiento perfecto de dicha losa.

$$q_{L_1} \cong q_{L_2}, \quad h_1 > h_2$$

$$L_{x_1} \gg L_{x_2}, \quad L_{y_1} \cong L_{y_2}$$

$M_{0_1}, M_{0_2}$ : momentos de empotramiento perfecto



**Figura 11.10:** Análisis en la dirección x de dos losas cruzadas continuas diferentes

### 11.3.2. Dimensionamiento

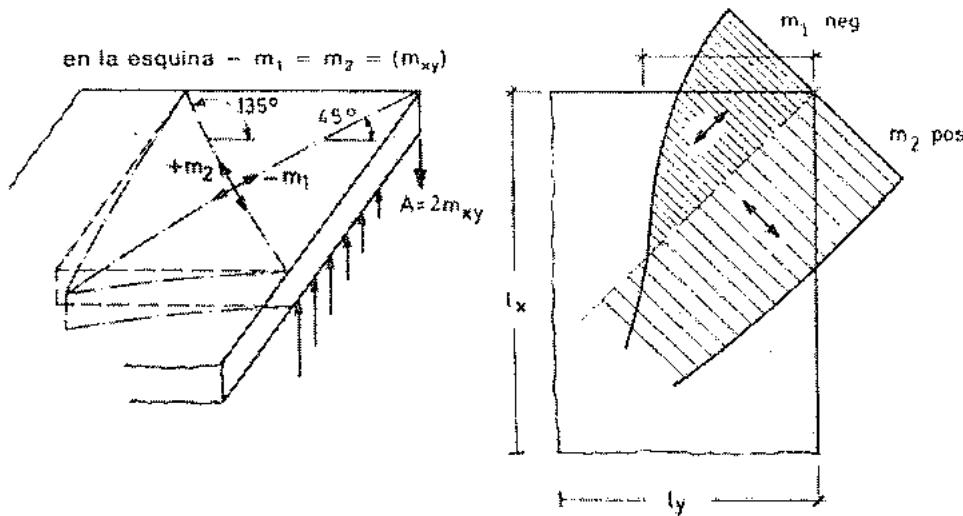
Similarmente a lo señalado en 11.2.2, el diseño a flexión se realiza con los conceptos desarrollados en el Cap.4 y el diseño para esfuerzos de corte con las indicaciones del Cap.5.

Se insiste en que los esfuerzos internos en losas son por unidad de longitud, de manera que las verificaciones y cálculo de armaduras se realizan para un ancho unitario:  $b = 1$ .

Para losas en dos direcciones también se utilizan los criterios dados en 11.2.2 para definir el espesor:

- Cuantía baja de armadura por razones económicas, además para tener secciones controladas por tracción, satisfaciendo la cuantía mínima, para la cual es válido lo señalado en el apartado 4.8 y en 11.2.2, es decir que en cada dirección de análisis se debe satisfacer la cuantía mínima por contracción y temperatura, ec. (11.6).
- Deformabilidad de la losa: utilizar ec.(10.4), (10.5) o tabla 10.3 para predimensionar el espesor por límite de esbeltez.
- Resistencia al corte: es conveniente que el espesor de la losa sea tal que la colaboración del hormigón cubra la solicitación externa sin necesidad de colocar armadura de corte.

Se debe prestar atención a los momentos torsores que toman valores máximos en las esquinas de losas simplemente apoyadas, produciendo momentos flectores de tracción arriba a  $45^\circ$  en diagonal a la esquina y de tracción abajo en la normal a dicha diagonal como se muestra en la fig.11.11.



**Figura 11.11:** Momentos principales en las zonas de esquinas

### 11.3.3. Armaduras

Las armaduras se disponen según las dos direcciones de trabajo de la losa, calculadas con los momentos flectores  $m_x, m_y$  de las secciones críticas (valores máximos de tramo y de apoyo).

La armadura que cubre el mayor momento entre  $m_x, m_y$  que en general flexa la luz menor, se coloca más cerca de la superficie de hormigón, es decir aprovechando la mayor altura estática  $d_1 = h - c_c - d_b / 2$ . La otra armadura se coloca a  $90^\circ$  de la anterior con  $d_2 = d_1 - d_b$ .

La separación entre barras, además de cumplir la ec.(11.5), no debe superar el siguiente valor:

$$s_{max} \leq 2 h \quad (11.9)$$

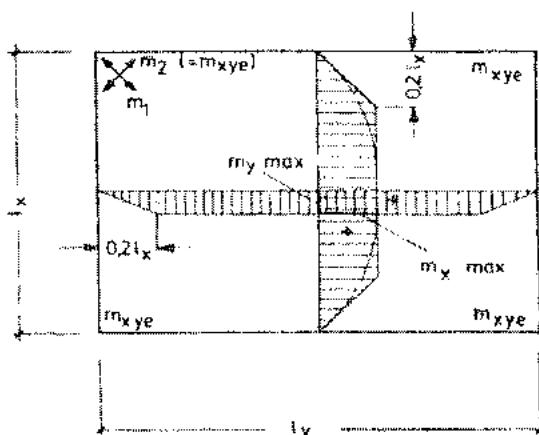
que reemplaza a la condición de  $2.5 h$  de (11.5). Es para garantizar la seguridad de la losa, reducir la fisuración, y repartir cargas concentradas en pequeñas áreas.

En las figs. 11.12, 11.13 y 11.14 se muestran ejemplos de disposición de armaduras para losas simplemente apoyadas, empotradas y detalles de armaduras de esquina respectivamente, debido a Leonhardt.

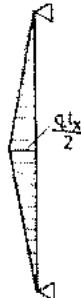
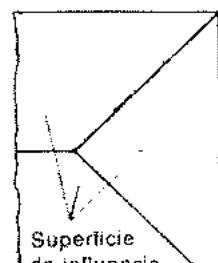
En general la armadura de esquina se dispone con una malla contra la cara superior y otra contra la cara inferior, de sección igual en cada dirección, a la máxima armadura de tramo.

El CIRSOC 201, 13.3.6.3 indica que la zona donde debe disponerse la armadura de esquina es  $1/5$  de la luz mayor de la losa, en lugar de  $0.3 l_x$ , siendo  $l_x$  la luz menor, sugerida por Leonhardt.

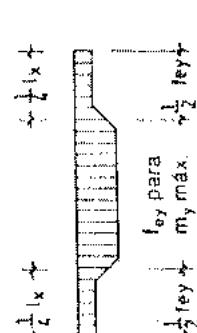
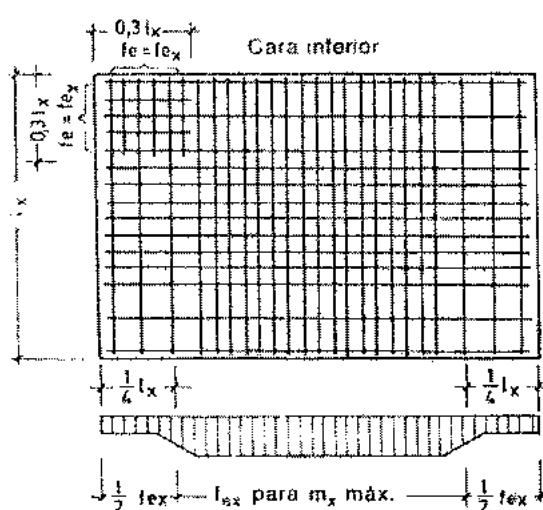
a) momentos  
(distribución simplificada)



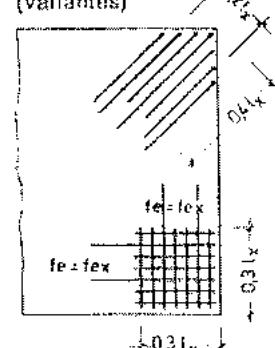
Reacciones de apoyo  
(aproximadas)



b) armadura de barras

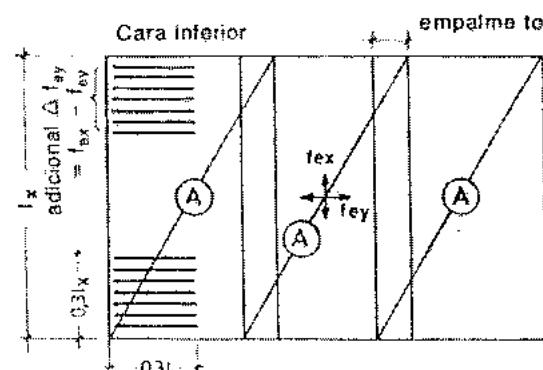


Cara superior  
(variantes)



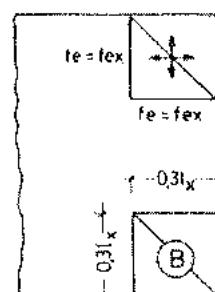
armadura de  
esquina igual  
para todas ellas

c) armadura de mallas



empalme total para  $f_{ey}$

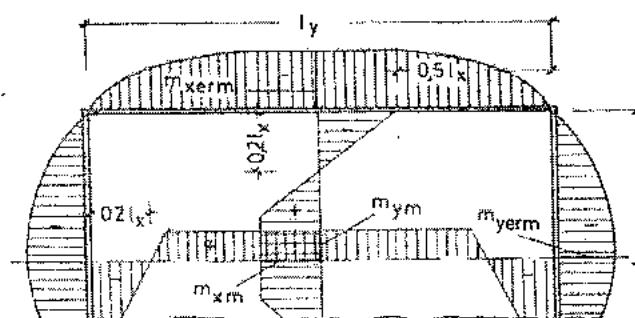
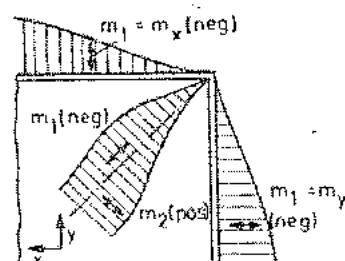
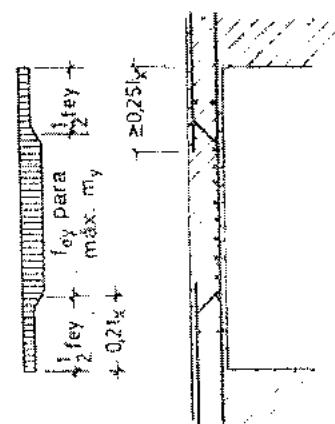
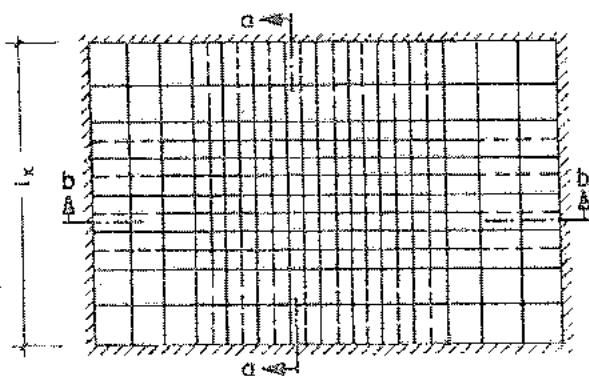
Cara superior



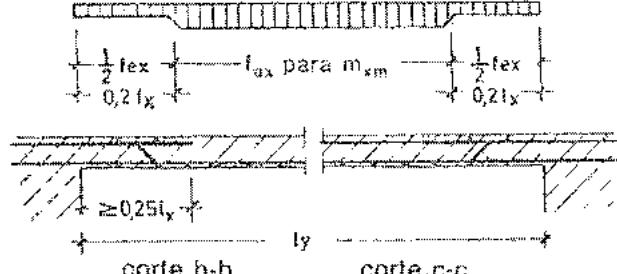
armadura de esquina igual para  
todas ellas

Figura 11.12: Armado de una losa rectangular simplemente apoyada con carga uniforme

## a) momentos (distribución aproximada)

momentos principales  
en la zona de esquinab) armadura de barras  
cara inferior

corte a-a



→ prolongar el paño contiguo

corte c-c

## cara superior

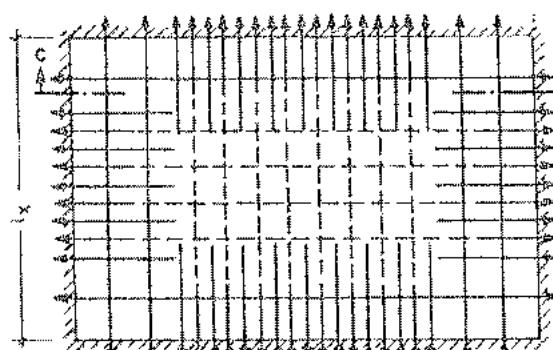
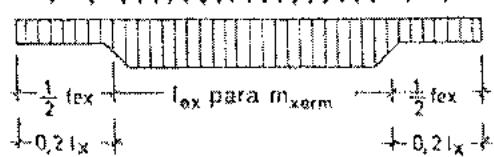
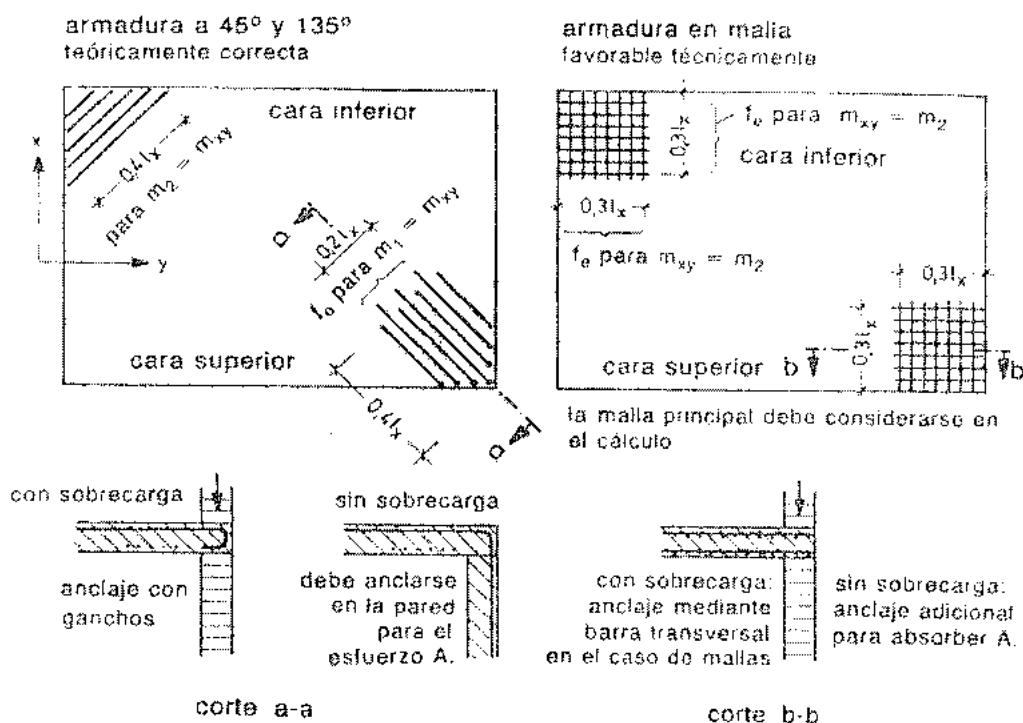
armadura para las  
direcciones x e y

Figura 11.13: Armado de una losa rectangular empotrada en los cuatro bordes con carga uniforme.



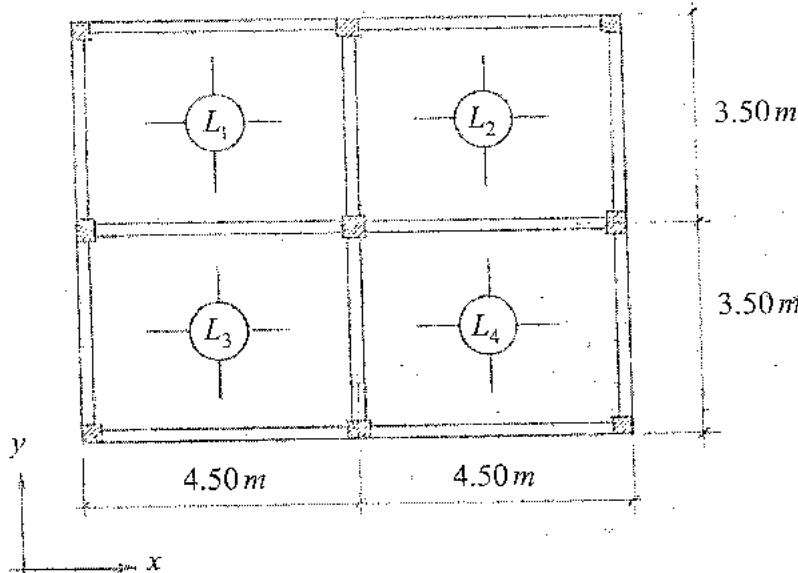
**Figura 11.14:** Disposición de armadura de esquina en una losa simplemente apoyada

#### Observación:

Se hace notar que la armadura de esquina debe colocarse si la esquina está asegurada contra el levantamiento (ver detalles en fig.11.14). Si la esquina puede levantarse, por ejemplo losa apoyada sobre mampostería sin anclaje, no se producirán los momentos  $m_1$ ,  $m_2$  señalados en fig.11.11, y por consiguiente no se requiere dicha armadura. Tener en cuenta el hecho si la esquina puede levantarse al calcular los momentos de tramo.

### 11.3.4. Ejemplo 11.2

Al entrepiso del ejemplo 11.2.4 se agrega una viga vinculando las columnas centrales y transformando las losas derechas en losas que trabajan en dos direcciones. Calcular las losas y comparar ambas soluciones.



#### a) Datos

Materiales: Hormigón H-25  $\rightarrow f'_c = 25 \text{ MPa}$   
 Acero ADN 420  $\rightarrow f_y = 420 \text{ MPa}$

Cargas: Permanentes:  $q_D = 5.00 \text{ KN/m}^2$   
 Sobre carga:  $q_L = 5.00 \text{ KN/m}^2$  ( depósito )

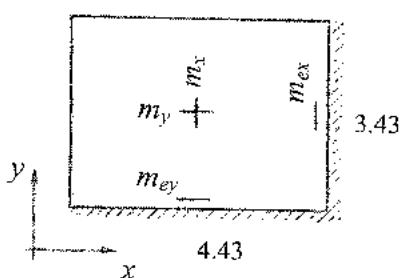
Elementos: vigas perimetrales: 15 / 40  
 vigas centrales: 20 / 50  
 columnas: 25 x 25

#### b) Análisis estructural

- Las vigas tienen una esbeltez aproximada de  $L/10$ , luego se puede utilizar la aproximación de losas independientes sobre vigas rígidas.
- Siguiendo el mismo criterio del ejemplo 11.1, no se considera la continuidad con las vigas perimetrales para calcular los esfuerzos internos en las losas, resultando éstos del lado de la seguridad.
- Se obtienen momentos máximos y mínimos de tramo y máximos de apoyo, disponiendo la sobre carga en forma de tablero de ajedrez. Se aplica el método aproximado visto en el curso de análisis estructural, que debido a la doble simetría de este ejemplo, resulta exacto.

$$q_u = 1.2 q_D + 1.6 q_L = g + p = 1.2 \cdot 5.00 + 1.6 \cdot 5.00 = 600 + 8.00 = 14.00 \text{ KN/m}^2$$

- Todas las losas con:  $g + p/2 = 6.00 + 8.00/2 = 10 \text{ KN/m}^2$



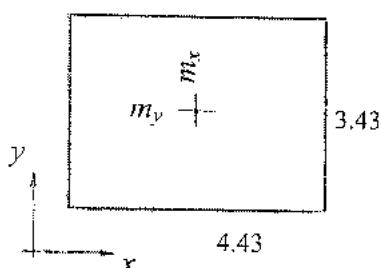
Tablas de Ertürke

$$\lambda = 4.43 / 3.43 \cong 1.30 \quad Q = 10 \cdot 4.43 \cdot 3.43 = 152$$

$$m_x = 0.0150 \cdot 152 = 2.28 \text{ KNm/m}$$

$$m_y = 0.0290 \cdot 152 = 4.41 \text{ KNm/m}$$

- Losas con  $\pm p/2$  en damero (tablero de ajedrez):  $p/2 = 4 \text{ KN/m}^2$



$$\lambda = 4.43 / 3.43 \cong 1.30 \quad Q = 4.00 \cdot 4.43 \cdot 3.43 = 60.8$$

$$m_x = 0.0249 \cdot 60.8 = 1.51 \text{ KNm/m}$$

$$m_y = 0.0459 \cdot 152 = 2.79 \text{ KNm/m}$$

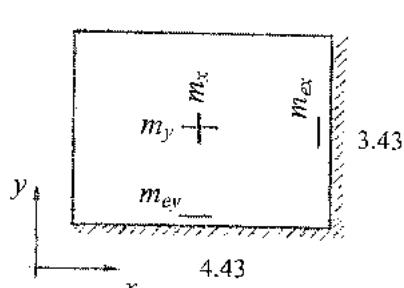
- Momentos máximos de tramo:  $m_x = 2.28 + 1.51 = 3.79 \text{ KNm/m}$

$$m_y = 4.41 + 2.79 = 7.20 \text{ KNm/m}$$

- Momentos mínimos de tramo:  $m_x = 2.28 - 1.51 = 0.77 \text{ KNm/m}$

$$m_y = 4.41 - 2.79 = 1.62 \text{ KNm/m}$$

- Para máximos de apoyo: todas las losas con:  $g + p = 6.00 + 8.00 = 14 \text{ KN/m}^2$



Tablas de Ertürke

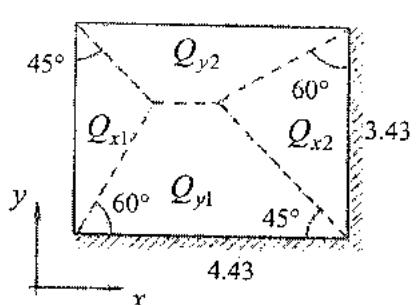
$$\lambda = 4.43 / 3.43 \cong 1.30 \quad Q = 14 \cdot 4.43 \cdot 3.43 = 212.7$$

$$m_{ex} = -0.0583 \cdot 212.7 = -12.4 \text{ KNm/m}$$

$$m_{ey} = -0.0706 \cdot 212.7 = -15.0 \text{ KNm/m}$$

Por simplicidad de cálculo, en este ejemplo no se aplica redistribución de momentos de apoyo.

- Reacciones de apoyo: se calculan para:  $q_u = g + p = 14 \text{ KN/m}^2$



$$Q_{x1} = 0.141 \cdot 212.7 = 30 \text{ KN}$$

$$Q_{x2} = 0.244 \cdot 212.7 = 51.9 \text{ KN}$$

$$Q_{y1} = 0.390 \cdot 212.7 = 83 \text{ KN}$$

$$Q_{y2} = 0.225 \cdot 212.7 = 47.8 \text{ KN}$$

Suponiendo que las reacciones se reparten uniformemente, se obtienen las siguientes cargas sobre las vigas de apoyo:

$$q_{u,x_1} = 30 / 3.43 = 8.75 \text{ KN/m}$$

$$q_{u,x_2} = 51.9 / 3.43 = 15.1 \text{ KN/m}$$

$$q_{u,y_1} = 83 / 4.43 = 18.7 \text{ KN/m}$$

$$q_{u,y_2} = 47.8 / 4.43 = 10.8 \text{ KN/m}$$

### c) Dimensionamiento por resistencia a flexión

- Espesor de losa para cumplir con el control de flechas: se aplican los criterios de esbeltez límite dados en 10.3.2.b)

Para  $\alpha_m > 2$  (vigas rígidas), se verifica esta condición, resulta ec.(10.4)

$$h \geq \frac{l_n (0.8 + f_y / 1400)}{36 + 9 \beta} = \frac{443 (0.8 + 420 / 1400)}{36 + 9 \cdot 443 / 343} = 10.2 \text{ cm} > 9 \text{ cm} \quad \checkmark$$

se adopta  $h = 11 \text{ cm}$

- Recubrimiento:  $c_c = 20 \text{ mm} \rightarrow d_1 = 11 - 2 - 0.5 = 8.5 \text{ cm}$   
 $d_2 = 8.5 - 1 = 7.5 \text{ cm}$
- Secciones de tramo: armadura contra cara inferior

- Armadura según eje  $y$

$$m_{uy} = 7.20 \text{ KNm/m} \rightarrow m_n \geq \frac{m_{uy}}{\phi} = \frac{7.20}{0.9} = 8 \text{ KNm/m} = 0.008 \text{ MNm/m}$$

$$k_d = \sqrt{\frac{d}{\frac{m_n}{b}}} = \sqrt{\frac{0.085}{\frac{0.008}{1.00}}} = 0.950 \rightarrow \text{tabla FLEXIÓN 3 : } k_e = 24.552$$

$$A_{sy} = k_e \frac{m_n}{d} = 24.552 \frac{0.008}{0.085} = 2.31 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 1\phi 8 \text{ c/20}$$

Verifica separación máxima entre barras ec. (11.5):  $s_{\max} = 25 d_b = 25 \cdot 0.8 = 20 \text{ cm} \quad \checkmark$

- Armadura según eje  $x$

$$m_{ux} = 3.79 \text{ KNm/m} \rightarrow m_n \geq \frac{m_{ux}}{\phi} = \frac{3.79}{0.9} = 4.21 \text{ KNm/m} = 0.00421 \text{ MNm/m}$$

$$k_d = \sqrt{\frac{d}{\frac{m_n}{b}}} = \sqrt{\frac{0.075}{\frac{0.00421}{1.00}}} = 1.156 \rightarrow \text{tabla FLEXIÓN 3 : } k_e = 24.30$$

$$A_{sx} = k_e \frac{m_n}{d} = 24.30 \frac{0.00421}{0.075} = 1.36 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Armadura mínima por retracción y temperatura:  $A_{s\min} = 0.0018 \cdot 100 \cdot 11 = 1.98 \text{ cm}^2 / \text{m}$   
 $\rightarrow 1\phi 6 \text{ c/14}$

Verifica separación máxima entre barras ec. (11.5):  $s_{\max} = 25 \cdot d_b = 25 \cdot 0.6 = 15 \text{ cm}$  ✓

- Secciones de apoyo: armadura contra cara superior

- Armadura según eje  $y$  (sobre vigas de 4.43 m de luz). Entre  $L_1$  y  $L_3$

$$m_{uy} = 15.0 \text{ KNm/m} \rightarrow m_n \geq \frac{m_{uy}}{\phi} = \frac{15.0}{0.9} = 16.7 \text{ KNm/m} = 0.0167 \text{ MNm/m}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{m_n}{b}}} = \frac{0.085}{\sqrt{\frac{0.0167}{1.00}}} = 0.658 \rightarrow k_e = 25.277$$

$$A_{sy} = k_e \frac{m_n}{d} = 25.277 \frac{0.0167}{0.085} = 4.97 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1\phi 8 \text{ c/40 (doblados de } L_1) \\ 1\phi 8 \text{ c/40 (doblados de } L_3) \end{array} \right.$$

$$4.97 - 1.25(1\phi 8c/40) - 1.25(1\phi 8c/40) = 2.47 \text{ cm}^2 / \text{m} \rightarrow 1\phi 8 \text{ c/20 adicional}$$

- Armadura según eje  $x$  (sobre vigas de 3.43 m de luz). Entre  $L_1$  y  $L_2$

$$m_{ux} = 12.4 \text{ KNm/m} \rightarrow m_n \geq \frac{m_{ux}}{\phi} = \frac{12.4}{0.9} = 13.8 \text{ KNm/m} = 0.0138 \text{ MNm/m}$$

$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{m_n}{b}}} = \frac{0.085}{\sqrt{\frac{0.0138}{1.00}}} = 0.724 \rightarrow k_e = 25.018$$

$$A_{sx} = k_e \frac{m_n}{d} = 25.018 \frac{0.0138}{0.085} = 4.06 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1\phi 6 \text{ c/28 (doblados de } L_1) \\ 1\phi 6 \text{ c/28 (doblados de } L_2) \end{array} \right.$$

$$4.06 - 1.00(1\phi 6c/28) - 1.00(1\phi 6c/28) = 2.06 \text{ cm}^2 / \text{m} \rightarrow 1\phi 6 \text{ c/14 adicional}$$

d) Dimensionamiento por resistencia a corte

$$V_{u\max} = 18.7 \text{ KN/m}$$

$$V_n \geq \frac{V_u}{\phi} = \frac{18.7}{0.75} = 24.93 \text{ KN/m}$$

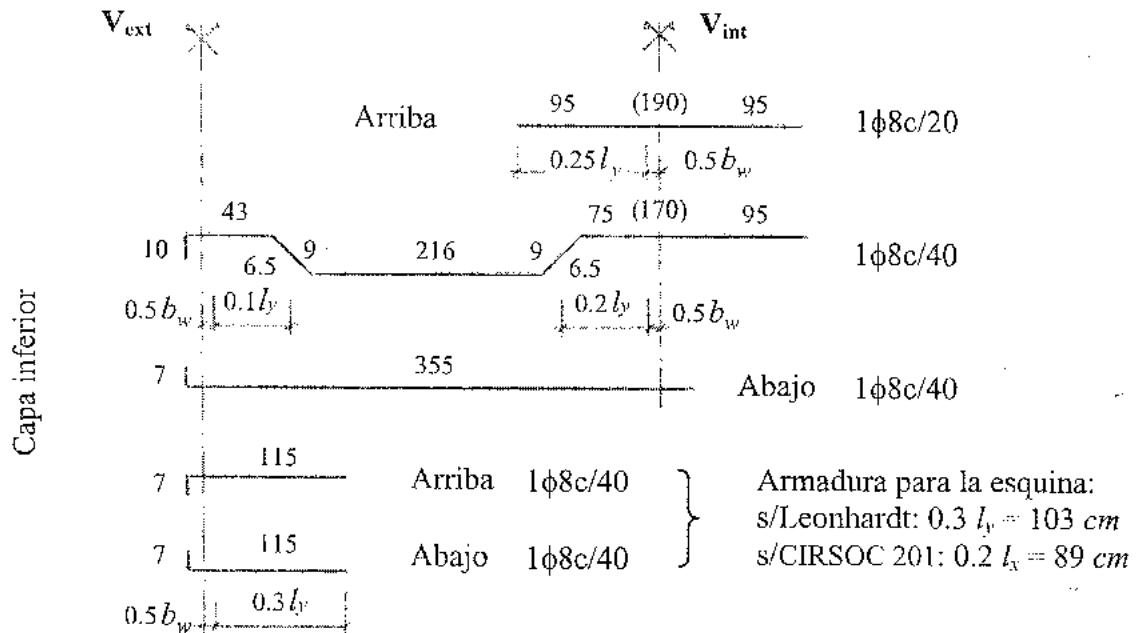
Contribución del hormigón:

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d = \frac{1}{6} \sqrt{25} 1.00 \cdot 0.085 = 0.07083 \text{ MN/m} = 70.83 \text{ KN/m}$$

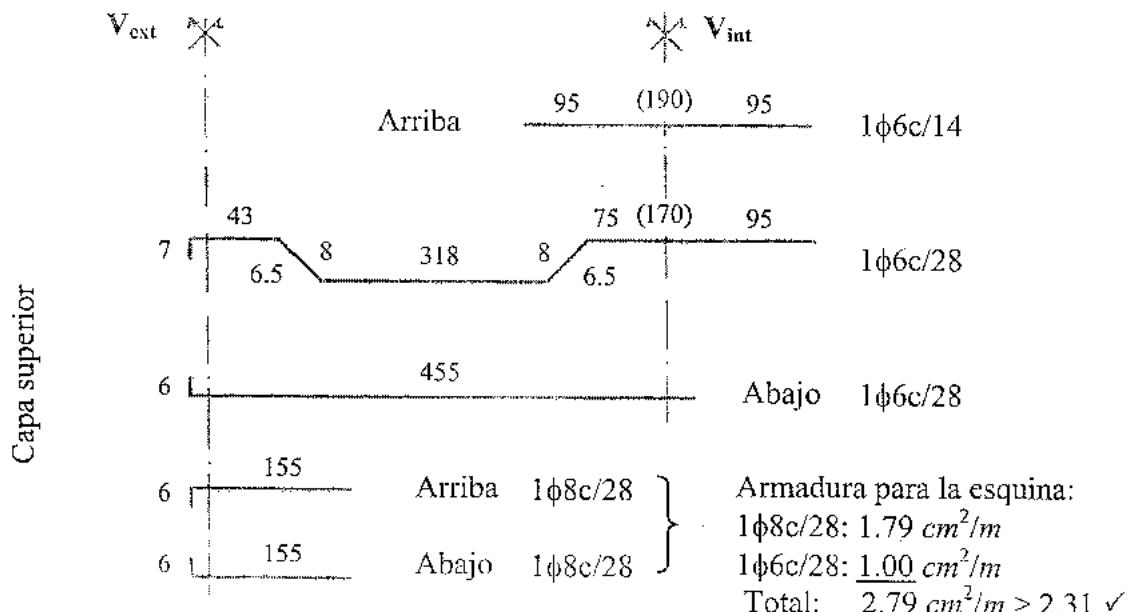
$V_c > V_n$  ✓ no es necesaria armadura de corte

e) Detalle de hierros

Armadura dirección  $y$



Armadura dirección  $x$



Observar que las longitudes de doblado son función de la luz corta  $l_y$

## 11.4. LOSAS NERVURADAS

Las losas alivianadas o nervuradas fueron definidas en 11.1, figs.11.1 (f), 11.2 (d) y 11.4.

### a) Limitaciones dimensionales

En la fig.11.15 se indican dimensiones mínimas y máximas para los nervios. Si no se cumplen estas prescripciones (CIRSOC 201, 8.11) se deben diseñar como losas y vigas.

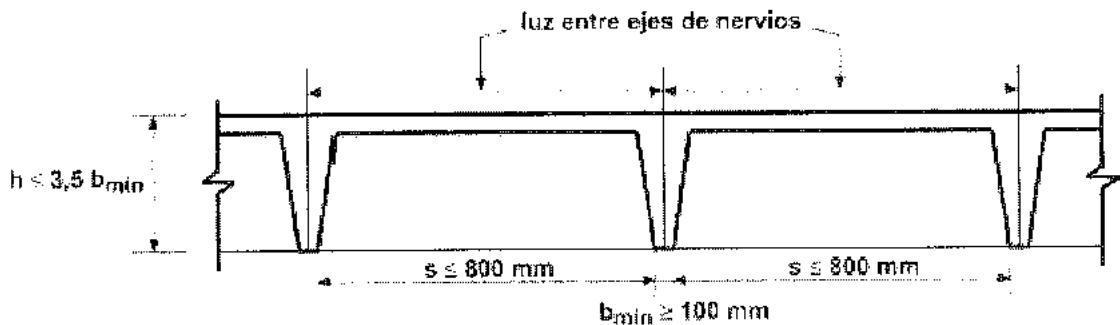


Figura 11.15: Limitaciones dimensionales

El espesor de la losa de hormigón  $e$  (capa de compresión) debe ser:

- Losa alivianada, es decir con elementos de relleno permanentes:

$$e \begin{cases} \geq 40 \text{ mm} \\ \geq s/12 \end{cases} \quad (11.10)$$

- Losa nervurada, es decir con encofrados removibles

$$e \begin{cases} \geq 50 \text{ mm} \\ \geq s/12 \end{cases} \quad (11.11)$$

### b) Dimensionamiento

Se deben aplicar los conceptos de resistencia a flexión y corte dados en los Cap.4 y 5. La altura total  $h$  de la losa debe cumplir con los requisitos de control de flechas dados en 10.3.

Si el eje neutro se ubica dentro de la capa de compresión, se puede trabajar como en una losa maciza, es decir con momentos por unidad de longitud, y luego la armadura concentrarla en los nervios:

$$A_s(1 \text{ nervio}) = A_s (\text{cm}^2 / \text{m}) \cdot l (\text{m}) \quad (11.12)$$

Si el eje neutro se ubica en los nervios, se deberá analizar cada uno como viga placa con su ancho de colaboración, que en general será  $b = l$ , siendo  $l$  la luz entre ejes de nervios.

Para la determinación de la resistencia al corte y la resistencia al momento negativo (nervios comprimidos), se puede incluir la pared vertical del elemento de relleno (bloque de hormigón o ladrillo cerámico) que está en contacto con el nervio. Como los elementos de relleno no están normalizados se debe realizar una comprobación experimental de la resistencia.

Debido a la posibilidad de redistribución de sobrecargas entre las nervaduras adyacentes, y a los resultados experimentales, en las losas nervuradas (y alivianadas) se puede considerar que la contribución a la resistencia al corte  $V_c$  es un 10 % mayor que la especificada en el Cap.5, ec. (5.55) o (5.56). La resistencia al corte se puede incrementar con el uso de armadura de corte o ensanchando los nervios en la proximidad de los apoyos.

#### c) *Armaduras*

Deben cumplir con los requisitos generales para las armaduras, recubrimientos especificados en CIRSOC 201, 7.7, condiciones de fisuración, cuantía mínima dada para elementos a flexión (vigas), ec.(4.69), etc.

En la losa se debe colocar una armadura perpendicular a los nervios con el fin de cubrir los requerimientos de flexión y considerar ubicación de cargas concentradas, pero en ningún caso menor a la necesaria para contracción y temperatura, ec. (11.6), (11.7).

#### d) *Nervios transversales*

La anterior reglamentación exigía disponer nervios transversales, en losas nervuradas en una dirección, cuando la luz era mayor de 6 m o la carga era mayor de  $2.75 \text{ KN/m}^2$ . Estos nervios debían estar separados aproximadamente 10 veces la altura de la losa.

El CIRSOC 201 actual no hace mención a nervios transversales. Queda a criterio del proyectista incluirlos o no. La función de estos elementos es agregar rigidez transversal al conjunto, y principalmente distribuir la carga más uniformemente entre los nervios longitudinales. Entonces se recomienda su utilización cuando hay cargas concentradas en pequeños sectores de la losa, por ejemplo un caso típico es la presencia de paredes sobre la losa.

### **11.5. SISTEMAS DE LOSAS QUE TRABAJAN EN DOS DIRECCIONES APOYADAS DIRECTAMENTE SOBRE COLUMNAS**

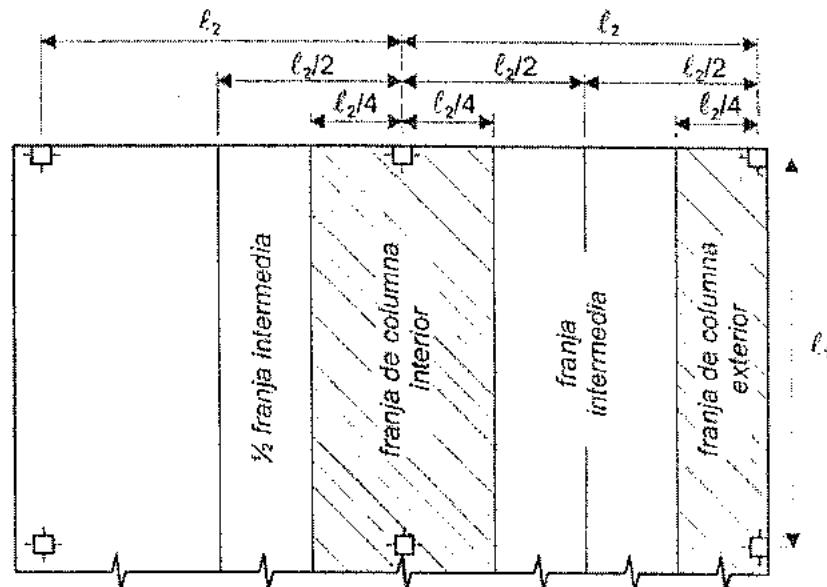
Este tema se refiere a las losas apoyadas sobre columnas, descriptas en 11.1 como "placa plana", fig.11.1 (d), 11.2 (b), "losa plana" que incluye ábacos y/o capiteles, fig.11.1 (c), 11.2 (c), pudiendo la losa ser maciza o nervurada como en fig.11.1 (f), 11.2 (d), y también abarca los casos con vigas flexibles entre columnas, donde es necesario analizar losas y vigas en forma conjunta.

#### **11.5.1. Análisis estructural**

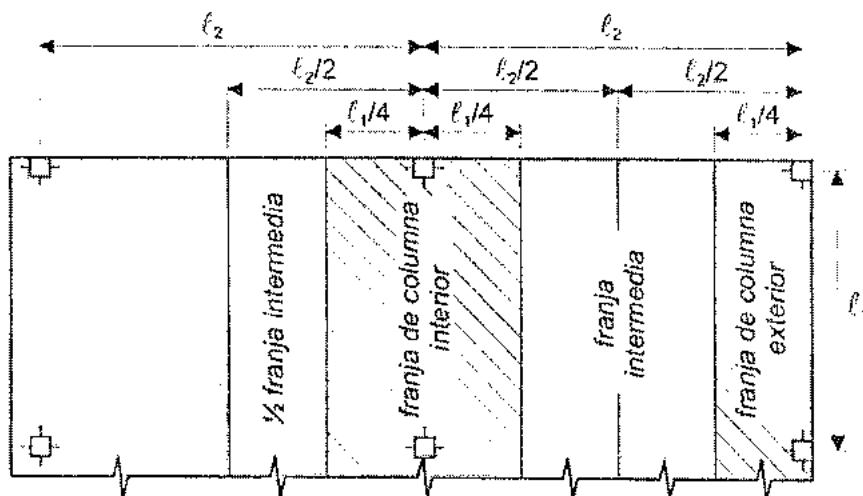
Repetiendo el criterio señalado al final del punto 11.3.1, y considerado en CIRSOC 201, 13.5.1, los sistemas de losas, incluyendo las vigas si las hubiera, se pueden diseñar con cualquier procedimiento que satisfaga condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones, y verificando estados límites de resistencia y de servicio que incluyen valores límites para las flechas.

El análisis, es decir el cálculo de esfuerzos internos, reacciones de apoyo, y desplazamientos, se puede realizar con:

- **Métodos numéricos:** como el método de elementos finitos implementado en los programas de computación. Se discretiza la losa con elementos bidimensionales y las vigas con elementos de barra espaciales. También las columnas se incluyen en el modelo como barras espaciales, al menos un tramo hacia arriba y hacia abajo del entrepiso, para cargas gravitacionales. En los extremos de esos tramos, las columnas pueden considerarse empotradas. Para cargas horizontales hay que modelizar toda la estructura completa.
- **Métodos aproximados:** bajo ciertas condiciones se pueden utilizar métodos aproximados:
  - *Método de diseño directo:* es un método semiempírico.
  - *Método del pórtico equivalente:* es un análisis estático aproximado.



(a) *franja de columna*  $\ell_2 \leq \ell_1$



(b) *franja de columna*  $\ell_2 > \ell_1$

**Figura 11.16:** Definición de franjas de diseño, para análisis de la flexión en la dirección de  $l_1$

Para propósitos de diseño, en cualquiera de los dos casos, un panel (paño) de losa se divide en franjas de columna y en franjas intermedias como se muestra en la fig.11.16. El ancho de la franja de columna, a cada lado del eje entre centros de columnas, es  $\frac{1}{4} l_1$  o  $\frac{1}{4} l_2$  la que sea menor, e incluye las vigas entre los ejes de columnas, si existen. La franja intermedia es aquella que queda limitada por dos franjas de columna.

Se define  $l_1$  la luz en la dirección de análisis y  $l_2$  la luz en la dirección transversal, ambas medidas hasta los ejes entre centros de columnas.

### 11.5.1.1. Método de diseño directo

Consiste en un conjunto de reglas para la distribución de momentos a las secciones de losa y de vigas, y consta de 3 pasos principales.

- Determinación del momento isostático mayorado total.
- Distribución de dicho momento a las secciones de “apoyo” (momentos negativos) y “tramo” (momentos positivos).
- Distribución de los momentos negativos, y positivos, entre las franjas de columnas e intermedias, y en las vigas si existen.

#### a) Limitaciones

- Deben existir como mínimo tres tramos en cada dirección.
- Los paneles de losa deben ser rectangulares con relación de lados mayor / menor  $\leq 2$ .
- Las longitudes de los tramos sucesivos, en cada dirección, no deben diferir en más de  $1/3$  de la luz mayor.
- Las columnas pueden estar desplazadas con respecto a cualquier eje de columnas sucesivas hasta un 10 % de la luz del tramo en la dirección del desalineamiento.
- Las cargas deben ser únicamente gravitatorias, uniformemente distribuidas, y la sobrecarga no debe ser mayor que 2 veces la carga permanente.
- Si se utilizan vigas en los ejes entre columnas, la rigidez relativa de las vigas en las dos direcciones perpendiculares debe ser:

$$0.2 \leq \frac{\alpha_1 l_2^2}{\alpha_2 l_1^2} \leq 5.0 \quad (11.13)$$

donde:

$$\alpha_1 = \frac{E_{cb} I_b}{E_{cs} I_s} \quad (11.14)$$

con:  $E_{cb}$ ,  $E_{cs}$  módulos de elasticidad de viga y losa respectivamente  
 $I_b$  momento de inercia de la viga efectiva según fig.11.17

$$I_s = \frac{l_2 h_f^3}{12} \quad \text{momento de inercia de la losa según fig.11.17}$$

$\alpha_2$  se define de manera similar para la flexión en la dirección  $l_2$ , es decir con ancho de panel igual a  $l_1$

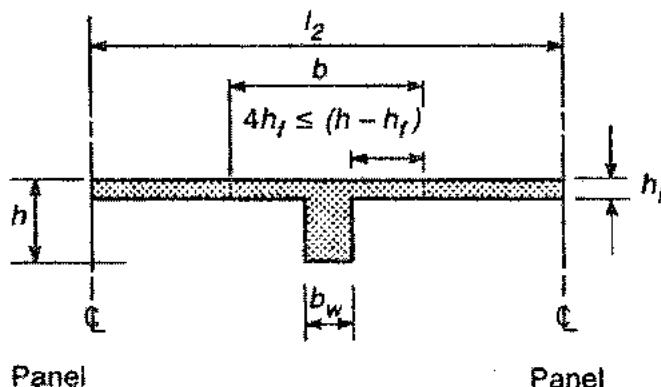


Figura 11.17: Sección transversal de losa y viga efectiva

Al aplicar este método aproximado las rigideces a flexión de la viga y la losa se pueden calcular con la sección bruta de hormigón, sin considerar la armadura ni la fisuración. También pueden ignorarse las variaciones producidas por ábacos y capiteles.

### b) Momento isostático mayorado total para un tramo

Para la flexión en la dirección  $l_1$ , con carga repartida mayorada (última)  $q_u [KN/m^2]$ , el momento total es:

$$M_0 = \frac{q_u l_2 l_n^2}{8} \quad (11.15)$$

donde  $l_n$  es la luz libre, distancia entre caras de columnas, o capiteles, pero no menor que  $0.65 l_1$ . Este momento corresponde a un ancho  $l_2$  medido entre ejes de paneles adyacentes.

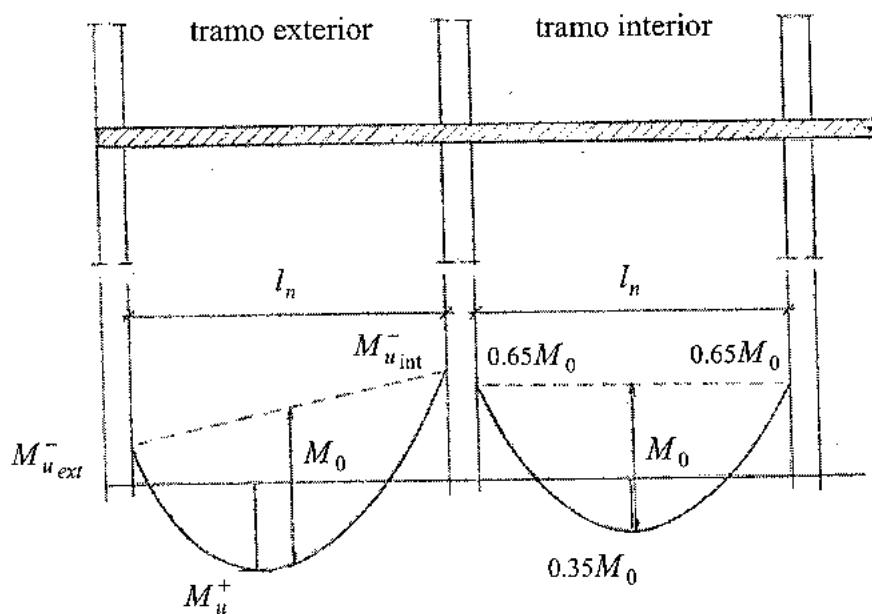
### c) Momentos negativos y positivos

La repartición del momento total  $M_0$  entre momento negativo de apoyo y positivo de tramo se indica en la fig.11.18 y tabla 11.1, donde se observa la distinción que se hace entre tramo exterior y tramo interior.

Estos coeficientes se basan en análisis elásticos tridimensionales, ajustados con resultados experimentales y de la práctica.

Las vigas de borde, si existen, o el borde de la losa cuando no hay vigas, ver fig.11.19, deben diseñarse para resistir a torsión el momento negativo exterior  $M_{u ext}$ .

Cuando en un apoyo interior sean diferentes los momentos negativos de los tramos adyacentes, la losa debe dimensionarse para el momento mayor.



**Figura 11.18:** Repartición de  $M_0$  en momentos negativos y positivos

**Tabla 11.1:** Factores de distribución de  $M_0$  para tramos exteriores.

	1	2	3	4	5
Borde exterior articulado	Losa con vigas entre todos los apoyos	Losa sin vigas entre apoyos interiores		Con viga de borde	Borde exterior empotrado
		Sin viga de borde	Con viga de borde		
$M_u^-_{int}$	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65
$M_u^+$	0.63	0.57	0.52	0.50	0.35
$M_u^-_{ext}$	0	0.16	0.26	0.30	0.65

#### d) Distribución lateral de momentos

Los momentos negativos (de apoyo) y positivos (de tramo) deben ahora distribuirse en el ancho de las franjas de columna e intermedia para obtener los momentos por unidad de longitud necesarios para el dimensionamiento.

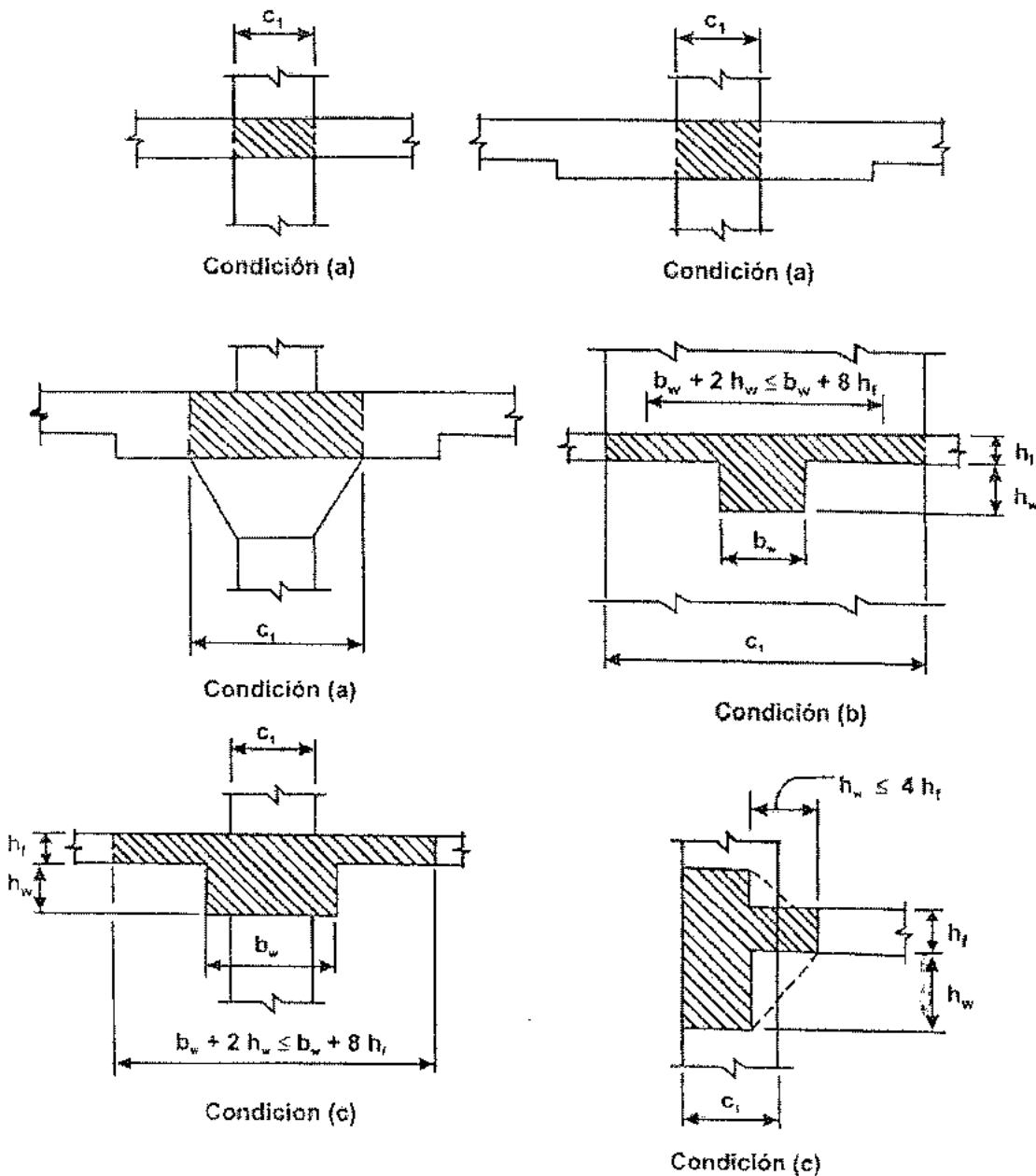
Esta distribución depende de la relación  $l_2 / l_1$ , de la rigidez relativa de la viga y de la losa  $\alpha_1$  ec. (11.14) en la dirección en que se analizan los momentos, y del grado de restricción rotacional que suministra la viga de borde transversal reflejada mediante el parámetro  $\beta$ , definido como:

$$\beta_t = \frac{E_{cb} C}{2 E_{cs} I_s} \quad (11.15)$$

donde  $E_{cb}$ ,  $E_{cs}$ ,  $I_s$  tienen el mismo significado que para ec.(11.14), y  $C$  es una constante que define la rigidez a torsión de la viga transversal efectiva.

$$C = \sum \left( 1 - 0.63 \frac{x}{y} \right) \frac{x^3 y}{3} \quad (11.16)$$

Se calcula dividiendo la sección en sus componentes rectangulares, cada una con la menor dimensión  $x$  y la mayor dimensión  $y$ , y sumando las contribuciones de los rectángulos.



**Figura 11.19:** Elementos torsionales

La viga transversal efectiva, ver fig.11.19, se define como la mayor de:

- (a) Una parte de la losa con ancho igual a la columna, o capitel, en dirección de la flexión analizada.
- (b) La porción de losa indicada en (a) más la parte de viga transversal por arriba o por debajo de la losa.
- (c) La viga transversal definida en fig.11.17

Los momentos en las franjas de columna como porcentajes del momento negativo y positivo se resumen en la tabla 11.2

**Tabla 11.2:** Porcentajes de momento para franjas de columnas

	$l_2 / l_1$		
	0.5	1.0	2.0
Momento negativo interior $\alpha_1 l_2 / l_1 = 0$	75	75	75
$\alpha_1 l_2 / l_1 \geq 1.0$	90	75	45
Momento negativo exterior $\alpha_1 l_2 / l_1 = 0$ $\beta_t = 0$	100	100	100
	75	75	75
$\alpha_1 l_2 / l_1 \geq 1.0$ $\beta_t = 0$	100	100	100
	90	75	45
Momento positivo $\alpha_1 l_2 / l_1 = 0$	60	60	60
$\alpha_1 l_2 / l_1 \geq 1.0$	90	75	45

Para valores intermedios se debe interpolar linealmente.

Los momentos así calculados se dividen por el ancho de la franja para obtener los momentos por unidad de longitud y dimensionar la losa.

Si existe viga en el eje de las columnas en la dirección  $l_1$  (dirección de la flexión analizada), ésta debe resistir el 85 % del momento de la franja de columna si  $\alpha_1 l_2 / l_1 \geq 1.0$ . Para valores de  $0 \leq \alpha_1 l_2 / l_1 < 1.0$  el porcentaje se debe obtener por interpolación lineal entre 0 y 85 %.

Las cargas concentradas o lineales aplicadas directamente sobre la viga la debe resistir completamente la viga.

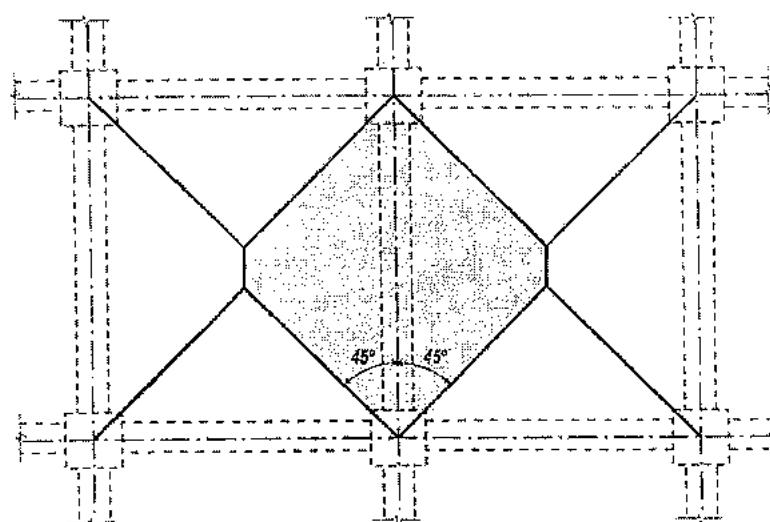
Momentos en franjas intermedias: la parte de los momentos negativo y positivo que no resiste la franja de columna, se asigna proporcionalmente a las medias franjas intermedias adyacentes.

Luego cada franja intermedia se diseña para resistir la suma de los momentos asignados a sus dos mitades de franja.

Una franja intermedia adyacente y paralela a un tabique se diseña para el doble del momento asignado a la semifranja intermedia correspondiente a la primera fila de apoyos interiores.

#### e) *Esfuerzos de corte en sistemas de losas con vigas*

Las vigas con  $\alpha_1 l_2 / l_1 \geq 1.0$  se deben diseñar para resistir el esfuerzo de corte producido por las cargas sobre un área tributaria como se muestra en la fig.11.20.



**Figura 11.20:** Área tributaria para cálculos de esfuerzos de corte en vigas

Para  $0 \leq \alpha_1 l_2 / l_1 < 1.0$  la parte de la carga que transmite la viga por corte se obtiene por interpolación lineal entre 0 para  $\alpha_1 = 0 l_2 / l_1 \geq 1.0$  y 1.00 para  $\alpha_1 l_2 / l_1 = 1.0$ .

La parte restante se transmite directamente de la losa a las columnas, ver apartado 11.5.5.

Las vigas, además, se deben diseñar para resistir el esfuerzo de corte producido por las cargas aplicadas directamente sobre ellas.

#### f) *Momentos flectores en columnas y tabiques*

La columna, o tabique, que soporta una viga de borde (transversal a la dirección de análisis de la flexión) se debe calcular con el momento que se aplica desde el borde de la losa  $M_{u,ext}^-$  de tabla 11.1.

Para el caso de losa sin viga de borde el momento a transmitir desde la losa a la columna de borde es  $0.30 M_0$ .

Para columnas interiores, y considerando la distribución más desfavorable de la sobrecarga, se deben diseñar para un momento mayorado:

$$M_u = 0.07 \left( (q_{D,u} + 0.5 q_{L,u}) l_2 l_n^2 - q'_D l'_2 l_n'^2 \right) \quad (11.17)$$

donde  $q_{Du}$ ,  $q_{Lu}$  son las cargas repartidas sobre la losa para cargas permanentes y sobrecargas mayoradas,  $q'_{Du}$ ,  $l'_2$ ,  $l'_n$  corresponden a la luz más corta de los dos tramos adyacentes.

En todos los casos, el momento se distribuye entre el tramo superior e inferior de la columna en proporción a su rigidez relativa a flexión.

### 11.5.1.2. Método del pórtico equivalente

El método de diseño directo, desarrollado en 11.5.5.1, es aplicable cuando se cumplen las limitaciones señaladas. De otro modo se necesita un método más general como este método del pórtico equivalente.

El sistema tridimensional se divide en una serie de pórticos planos, *llamados pórticos equivalentes*, limitado por los ejes de los paneles de losa adyacente, abarcando la totalidad de la altura. Se extienden longitudinal y transversalmente en toda la estructura como se muestra en la fig. 11.21

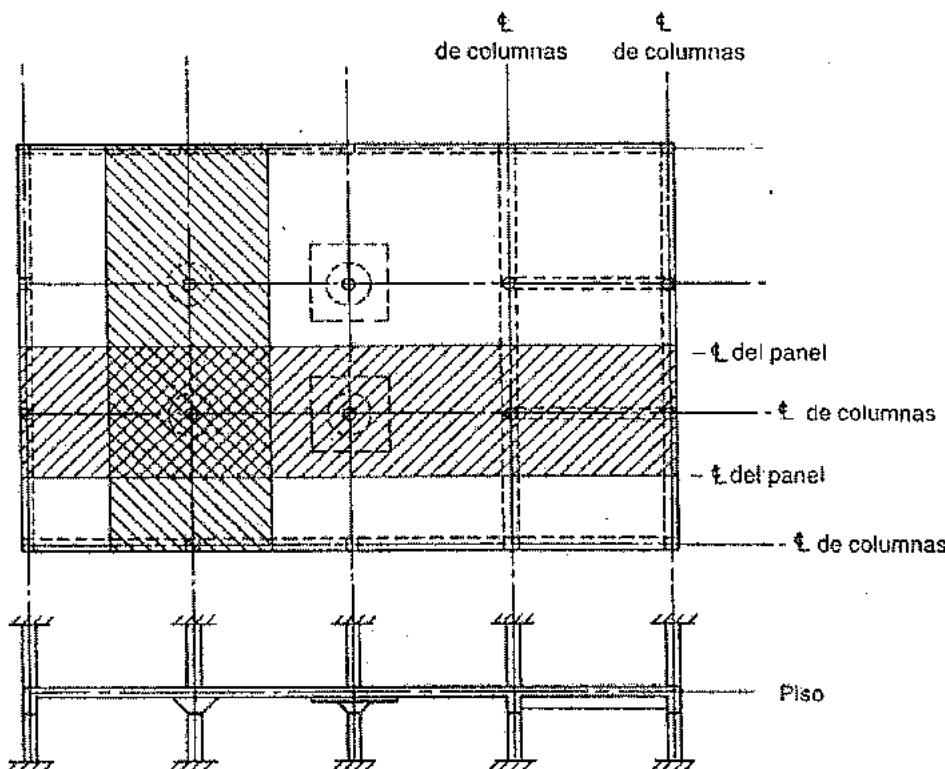


Figura 11.21: Idealización de un edificio como sistema de pórticos equivalentes

Cada pórtico consta de 3 partes:

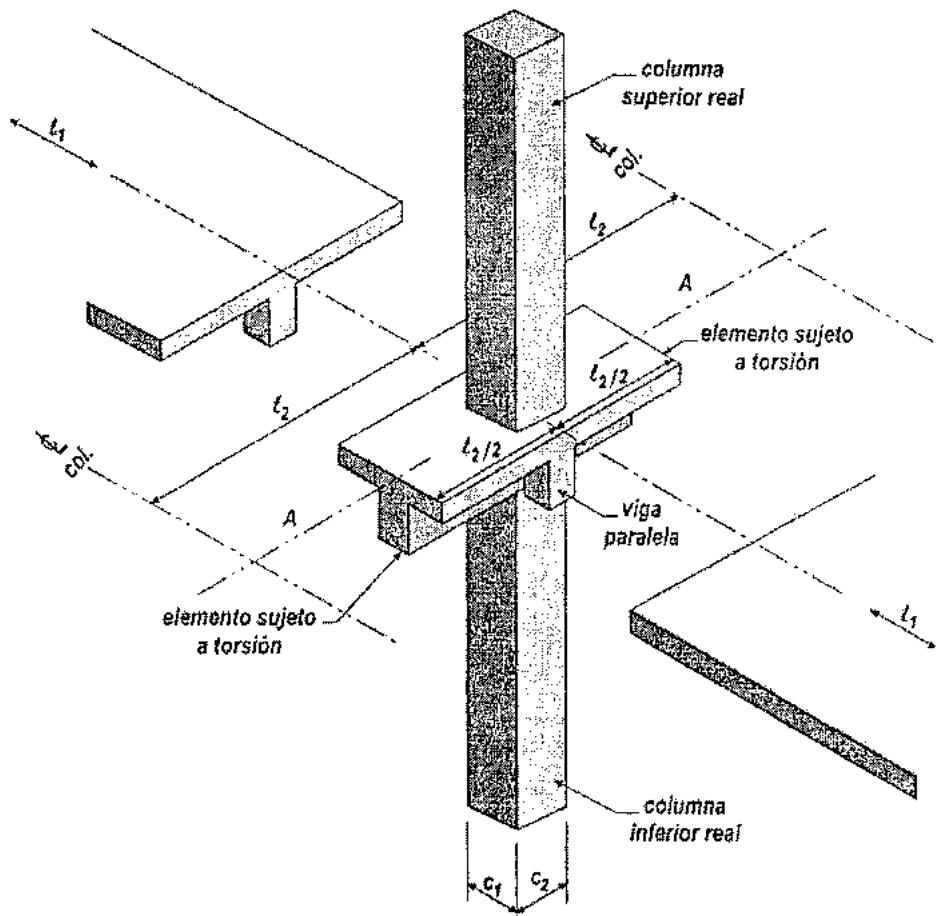
- La franja de losa horizontal que incluye las vigas en la dirección del pórtico.
- Las columnas u otros elementos verticales de apoyo.
- Elementos transversales, que trabajando a torsión, transfieren los momentos desde la losa-viga a las columnas.

### a) Rigidez de los elementos del pórtico equivalente

- Viga-losa: se puede determinar usando el área total o bruta de hormigón de la sección completa que abarca el ancho del pórtico, ver fig.11.17.

Se debe considerar el cambio del momento de inercia por la presencia de ábacos y capiteles. El momento de inercia desde el centro a la cara de la columna se calcula con el valor en la cara de la columna dividido por  $(1 - c_2 / l_2)^2$  donde  $c_2$  y  $l_2$  son el ancho de la columna y el ancho del pórtico medidos en sentido transversal.

- Columna equivalente: columna más elementos torsionales, ver fig.11.22. Las deformaciones a torsión de estos elementos transversales de apoyo, reducen la rigidez a flexión que proporciona la columna.



**Figura 11.22:** Columna equivalente

La flexibilidad de la columna equivalente se obtiene sumando la flexibilidad de la columna y del elemento transversal:

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_c} + \frac{1}{K_t} \quad (11.18)$$

donde  $K_c$  es la rigidez de la columna, en términos de momento por unidad de rotación, por ejemplo  $K_c = 4 E_c I_g / l_c$  calculada en base a la inercia bruta de la sección de hormigón;  $K_t$  es la rigidez a torsión de la viga de borde, que se puede calcular con:

$$K_t = \sum \frac{9 E_{cs} C}{l_2 (1 - c_2 / l_2)^3} \quad (11.19)$$

donde la constante  $C$  se calcula con ec. (11.16), y la viga transversal definida en fig.11.19. La sumatoria se aplica cuando hay vigas a ambos lados de la columna.

Si hay vigas entre columnas, en la dirección en que se analiza la flexión, se recomienda que los valores de  $K_t$  calculado con ec.(11.19) se multiplique por la relación entre el momento de inercia de la losa con esta viga y el momento de inercia de la losa sin la viga. Con esto se ajusta mejor a los resultados de análisis tridimensionales.

### b) Ubicación de la sobrecarga

Cuando la sobrecarga es variable, pero no supera 3/4 de la carga permanente, se puede suponer que los momentos máximos en todas las secciones se producen cuando la sobrecarga se aplica en todo el sistema de losas.

Sino se cumple la condición anterior se deberá aplicar 3/4 de la sobrecarga en tramos alternados para encontrar los máximos de tramo, y 3/4 de la sobrecarga en tramos adyacentes para encontrar los máximos de apoyo. El hecho de cargar sólo con 3/4 de la sobrecarga en cada caso es para considerar redistribución de momentos, ya que no ocurrirán simultáneamente momentos máximos de tramo y de apoyo. Sin embargo no podrán ser menores que los obtenidos con toda la sobrecarga aplicada en todos los tramos.

### c) Análisis del pórtico

Una vez resuelto el pórtico, con cualquier método elástico en general implementado en programa de computación, los momentos obtenidos en las secciones de apoyo (negativos) y tramo (positivos), se distribuyen entre franja de columna y franja intermedia con los mismos criterios del método directo, ver 11.5.1.1.d), mientras se cumpla la relación (11.13).

Similarmente a los casos anteriores, los momentos se dividen por los anchos de franjas respectivos para obtener los momentos por unidad de longitud para el dimensionamiento.

## 11.5.2. Dimensionamiento

El diseño a flexión se realiza con los conceptos desarrollados en el Cap.4, y el diseño para esfuerzos de corte con las indicaciones del Cap.5, teniendo en cuenta que los esfuerzos internos son por unidad de longitud, es decir que  $b = 1$ .

El espesor de la losa está definido por:

- Condiciones de resistencia a flexión, considerando cuantías bajas de armaduras, pero satisfaciendo los valores mínimos de ec.(11.6).
- Deformabilidad de la losa: para predimensionar el espesor utilizar ec.(10.4) a (10.7) según corresponda.
- Resistencia al corte: para losas con vigas es conveniente que el espesor de la losa sea tal que la colaboración del hormigón cubra la solicitud externa sin necesidad de colocar armadura de corte. Para losas sin vigas la transferencia del corte de la losa directamente a la columna se tratará en 11.5.4.

### 11.5.3. Armaduras

Para losas con vigas: ver distribuciones de armaduras en 11.3.3, figs.11.12 a 11.14. Para losas sin vigas se reproduce en la fig.11.23 las indicaciones del CIRSOC 201, 13.3.8.

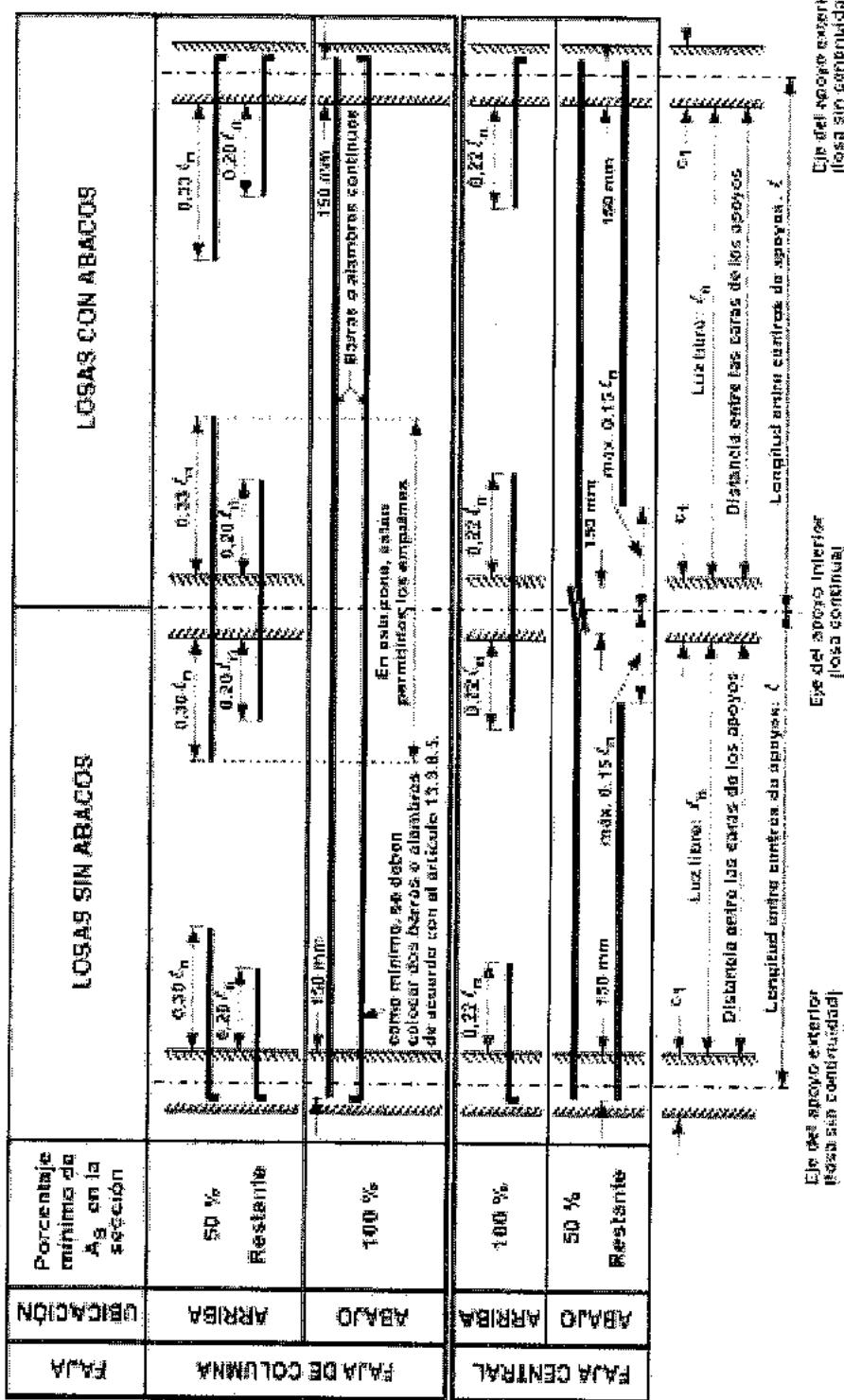


Figura 11.23: Detalles de armaduras para losas sin vigas

#### 11.5.4. Diseño a corte en placas y losas planas (punzonado)

Cuando las losas en dos direcciones están apoyadas directamente sobre columnas con las losas y placas planas, o cuando las losas sostienen cargas concentradas como en el caso de zapatas o bases, el esfuerzo de corte cerca de las columnas puede ser decisivo para el dimensionamiento.

##### 11.5.4.1. Tipos de falla

- Corte por acción de viga o comportamiento en una dirección: la falla se produce por tracción diagonal en un plano a través del ancho total  $l_2$ , es decir la losa actúa como una viga ancha. La sección crítica se toma a una distancia  $d$  de la cara de la columna, ver fig.11.24. Si existe capitel o ábaco, además, habrá que estudiar sucesivas secciones a distancia  $d$  de dichos cambios de espesores.
- Corte por punzamiento o comportamiento en dos direcciones: la falla se produce con una fisura diagonal formando una superficie de cono o pirámide truncada alrededor de la columna, del capitel o del ábaco como se muestra en la fig.11.25. El ángulo de inclinación  $\theta$  depende del tipo y cantidad de armadura en la losa, y aproximadamente varía entre  $20^\circ$  y  $45^\circ$ .

La sección crítica se toma en dirección perpendicular al plano de la losa y con un perímetro mínimo  $b_0$  alrededor de la columna, ábaco o capitel, a distancia  $d/2$  de la periferia del elemento (columna, capitel o ábaco), como se indica en la fig.11.25.

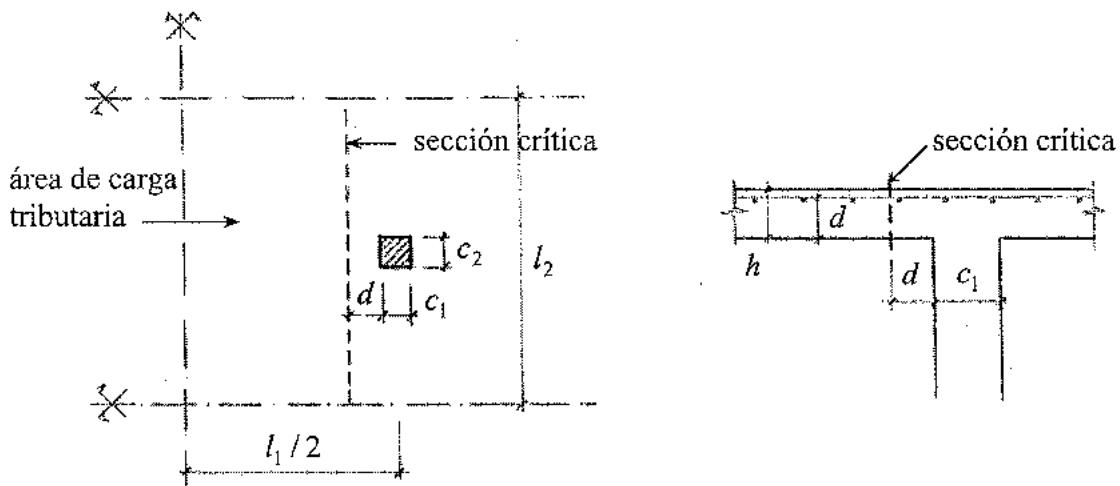
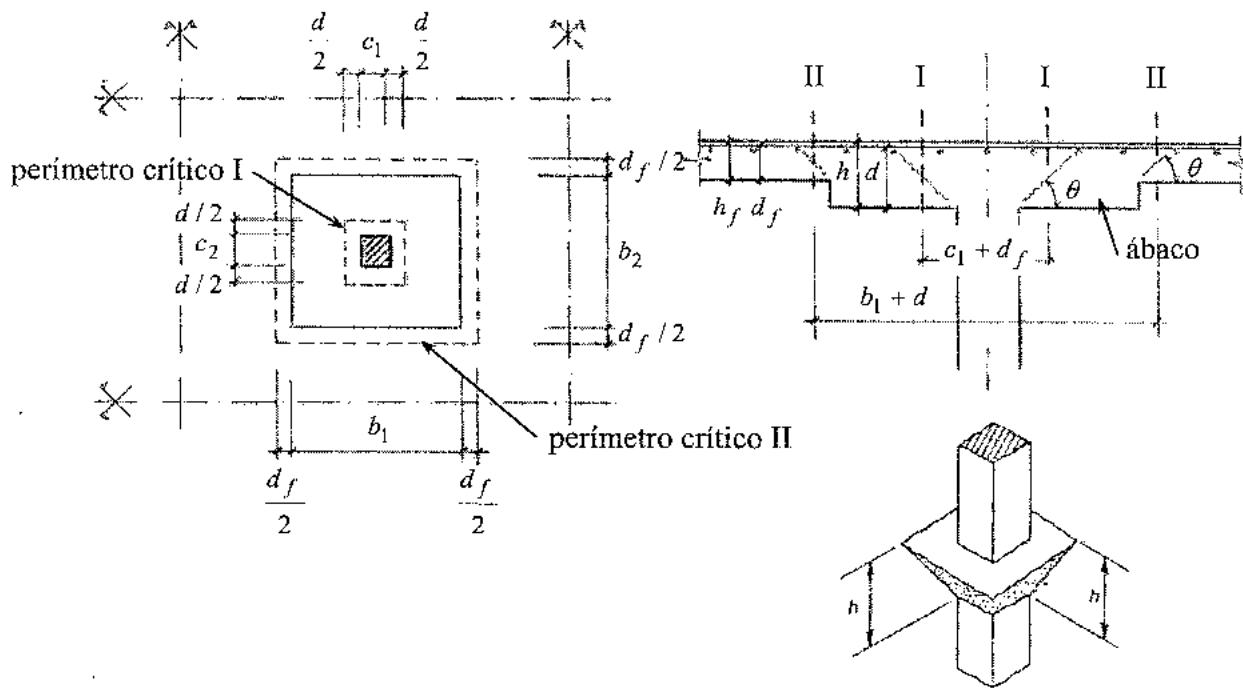


Figura 11.24: Sección crítica para corte por acción de viga



**Figura 11.25:** Sección crítica para corte por punzamiento

#### 11.5.4.2. Contribución del hormigón

- Para corte por acción de viga, la contribución del hormigón  $V_c$  a la resistencia nominal a corte se evalúa con las expresiones dadas en 5.8.1, ec.(5.56) ó (5.55), con  $b_w = l_2$ .

El esfuerzo de corte último  $V_u$  se calcula a partir de la carga actuando sobre el área tributaria de fig.11.24. Si se quiere evitar colocar armadura de corte, se deberá cumplir que  $\phi V_c \geq V_u$ .

- Para corte por punzonamiento, en la sección crítica además de la compresión horizontal por el momento flector negativo, hay una compresión vertical o un poco inclinada debida a la reacción de la columna. Esto aumenta la resistencia al corte proporcionada por el hormigón, dependiendo de la relación entre los lados mayor y menor de la columna.

$$\beta_c = \frac{c_1}{c_2} \quad (c_1 > c_2) \quad (11.20)$$

De resultados experimentales resulta:

$$\text{Si } \beta_c \leq 2 : \quad V_c = \frac{\sqrt{f'_c}}{3} b_0 d \quad (11.21)$$

$$\text{Si } \beta_c > 2 : \quad V_c = \left(1 + \frac{2}{\beta_c}\right) \frac{\sqrt{f'_c}}{6} b_0 d \quad (11.22)$$

Otros ensayos demuestran que la resistencia  $V_c$  disminuye a medida que aumenta la relación entre el perímetro crítico y el espesor efectivo de la losa:  $b_0 / d$ , luego  $V_c$  no debe tomarse mayor que:

$$V_c = \left( \frac{\alpha_s d}{b_0} + 2 \right) \frac{\sqrt{f'_c}}{12} b_0 d \quad (11.23)$$

donde el coeficiente  $\alpha_s = 40$  para columnas interiores,  $\alpha_s = 30$  para columnas de borde y  $\alpha_s = 20$  para las de esquina.

El esfuerzo de corte último  $V_u$  se calcula como la carga mayorada total que actúa sobre un área limitada por las líneas centrales de los paneles de losa alrededor de la columna, menos la carga aplicada dentro del área definida por el perímetro crítico.

Igual al caso anterior, para no colocar refuerzo de corte se debe cumplir que  $\phi V_c \geq V_u$ .

#### 11.5.4.3. Refuerzos para corte

Cuando es necesario se utilizan refuerzos en los apoyos de placas planas e inclusive en las planas. Pueden tener diversas configuraciones como se ilustra en la fig.11.26.

##### a) Conectores de corte

Casos (a) y (c) son perfiles standard I, C de acero estructural embebidos en la losa y ayudan a aumentar el perímetro efectivo  $b_0$  de la sección crítica a corte como se muestra en la fig.11.27.

En la sección crítica original alrededor de la columna (sin conectores de corte), la resistencia nominal a corte se puede incrementar hasta:

$$V_n = 0.6 \sqrt{f'_c} b_0 d \quad (11.24)$$

En la nueva sección crítica, mostrada en la fig.11.27, la resistencia nominal a corte no debe tomarse mayor que:

$$V_n = \frac{1}{3} \sqrt[3]{f'_c} b_0 d \quad (11.25)$$

donde en ambas expresiones  $b_0$  es el perímetro de la sección crítica correspondiente.

Los ensayos demuestran que la parte del corte que toma el conector de corte es proporcional a  $\alpha_v$ :

$$\alpha_v = \frac{E_s I_s}{E_c I_c} \quad (11.26)$$

donde  $E_s, I_s$  son los módulos de elasticidad y momento de inercia de una rama de conector,  $E_c$  es el módulo de elasticidad del hormigón e  $I_c$  es la inercia de la sección fisurada homogeneizada, incluyendo el conector de corte, de la sección de losa de ancho  $c_2 + d$ , con  $c_2$  ancho de apoyo perpendicular al conector.

Los diagramas de corte y momento en el conector se muestran en la fig.11.28, de donde resulta que el momento plástico resistente del conector debe ser:

$$M_p = \frac{V_u}{2\phi\eta} \left[ h_v + \alpha_v (l_v - \frac{c_1}{2}) \right] \quad (11.27)$$

donde  $\phi = 0.9$  es el factor de reducción de resistencia,  $\eta$  el número de brazos del conector,  $\alpha_v$  debe ser mayor que 0.15, ya que conectores más flexibles son ineficaces.

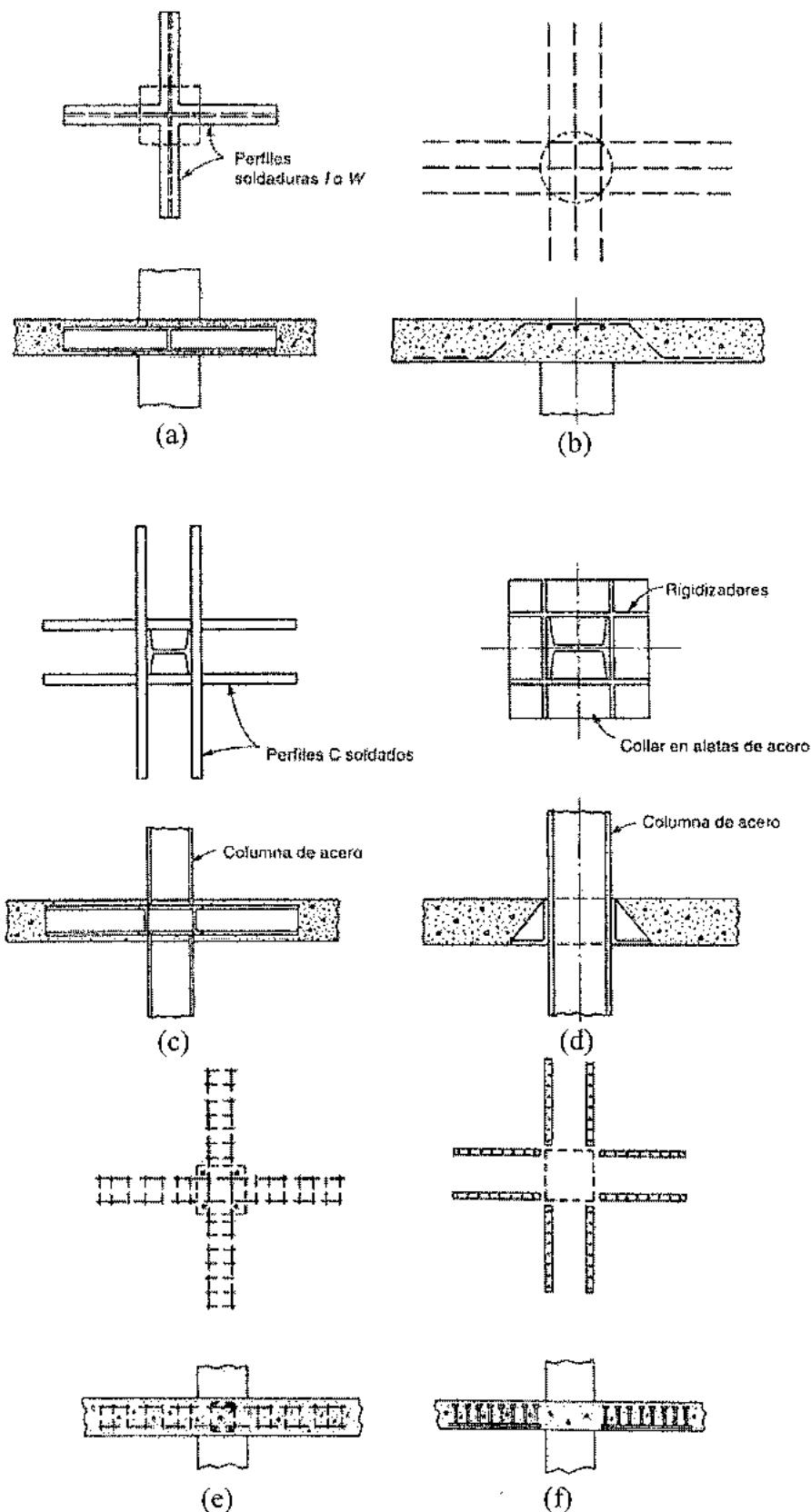
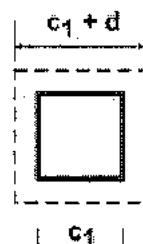


Figura 11.26: Refuerzo para corte en placas planas



(a) sin conector de corte

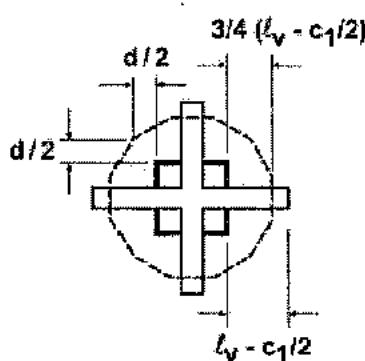
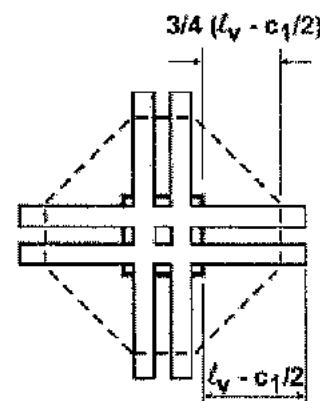
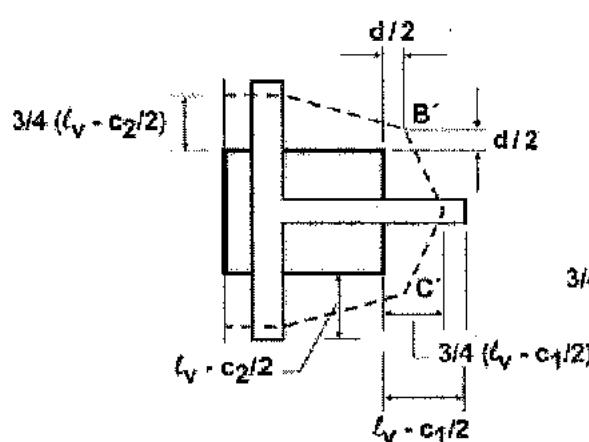
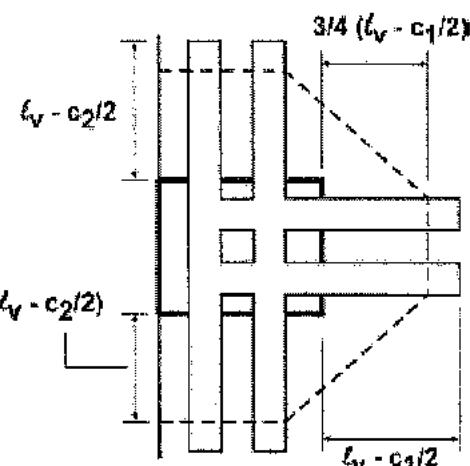
(b) conector de corte pequeño en el interior ( $n = 4$ )(c) conector de corte grande en el interior ( $n = 4$ )(d) conector de corte pequeño en el borde ( $n = 3$ )(e) conector de corte grande en el borde ( $n = 3$ )

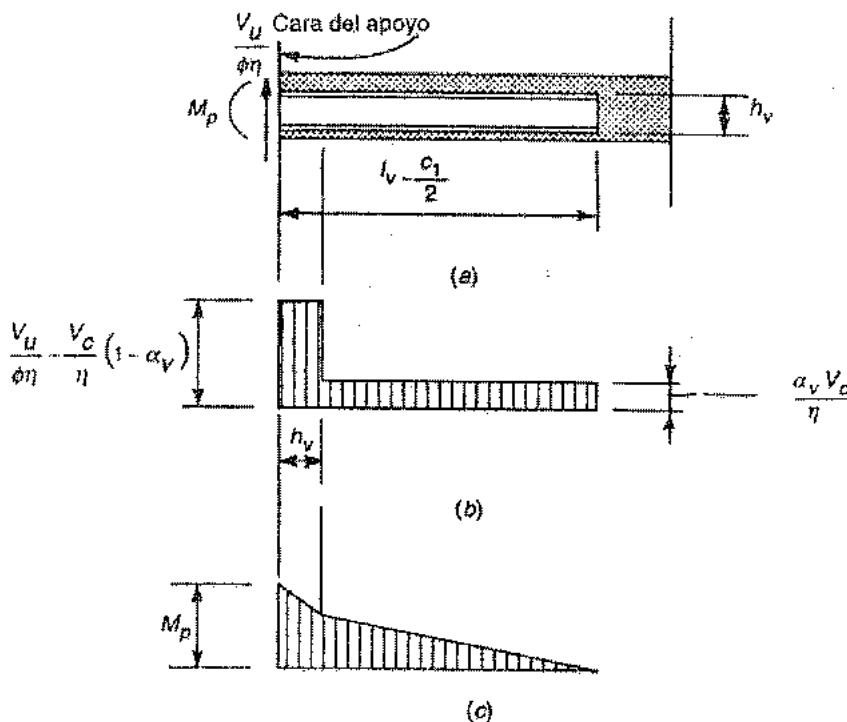
Figura 11.27: Sección crítica para refuerzo con conectores de corte

Este momento  $M_p$  se utiliza para dimensionar el conector. Ahora, el momento que aporta para resistir el momento de la franja de columna que resulta de aplicar alguno de los métodos de diseño visto en 11.5.1, se puede calcular como:

$$M_v = \frac{\phi \alpha_v V_u}{2\eta} \left( l_v - \frac{c_1}{2} \right) \quad (11.28)$$

Entonces para dimensionar la losa en la franja de columna, al momento obtenido con los métodos de diseño se le descuenta  $M_v$ , pero este descuento debe cumplir:

- $M_v \leq 30\%$  del momento total mayorado requerido para la franja de columna.
- $M_v \leq$  el cambio de momento que ocurre en la franja de columna en la distancia  $l_v$ .
- $M_v \leq M_p$  calculado con (11.27).



**Figura 11.28:** Esfuerzos resultantes en un brazo del conector de corte

### b) Barras dobladas

Corresponde al caso (b) de la fig.11.26. En la sección crítica, calculada a  $d/2$  de la cara del apoyo, el valor límite de la resistencia nominal a corte no debe superar el siguiente valor:

$$V_n = \frac{1}{2} \sqrt{f'_c} b_0 d \quad (11.29)$$

La colaboración del hormigón, debido a la fisuración diagonal, se reduce al valor:

$$V_c = \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_0 d \quad (11.30)$$

Recordando la ec.(5.60), la diferencia entre el esfuerzo de corte mayorado total  $V_u / \phi$  y la contribución del hormigón  $V_c$  se debe absorber con la armadura doblada  $V_s$ .

$$\frac{V_u}{\phi} \leq V_n = V_c + V_s \rightarrow V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c \quad (5.60)$$

El área total de barras dobladas  $A_v$ , que atraviesan la sección crítica con ángulo  $\alpha$  se obtiene igualando la componente vertical de la fuerza en la armadura con  $V_s$ , como se describió en ec. (5.72). Luego resulta:

$$A_v = \frac{V_s}{f_y \operatorname{sen} \alpha} \quad (11.31)$$

y se debe cumplir el límite dado en (5.72)

$$V_s \leq \frac{1}{4} \sqrt{f_c} b_0 d \quad (5.72)$$

Deberán analizarse secciones sucesivas a distancias crecientes del apoyo, con nuevo perímetro  $b_0$ , y disponer armadura cuando  $V_u / \phi > V_c$ .

En estos cálculos el factor de reducción de resistencia es  $\phi = 0.75$  de acuerdo a tabla 3.1.

### c) Vigas integrales con estribos verticales

Son las mostradas en el caso (e) de la fig.11.26.

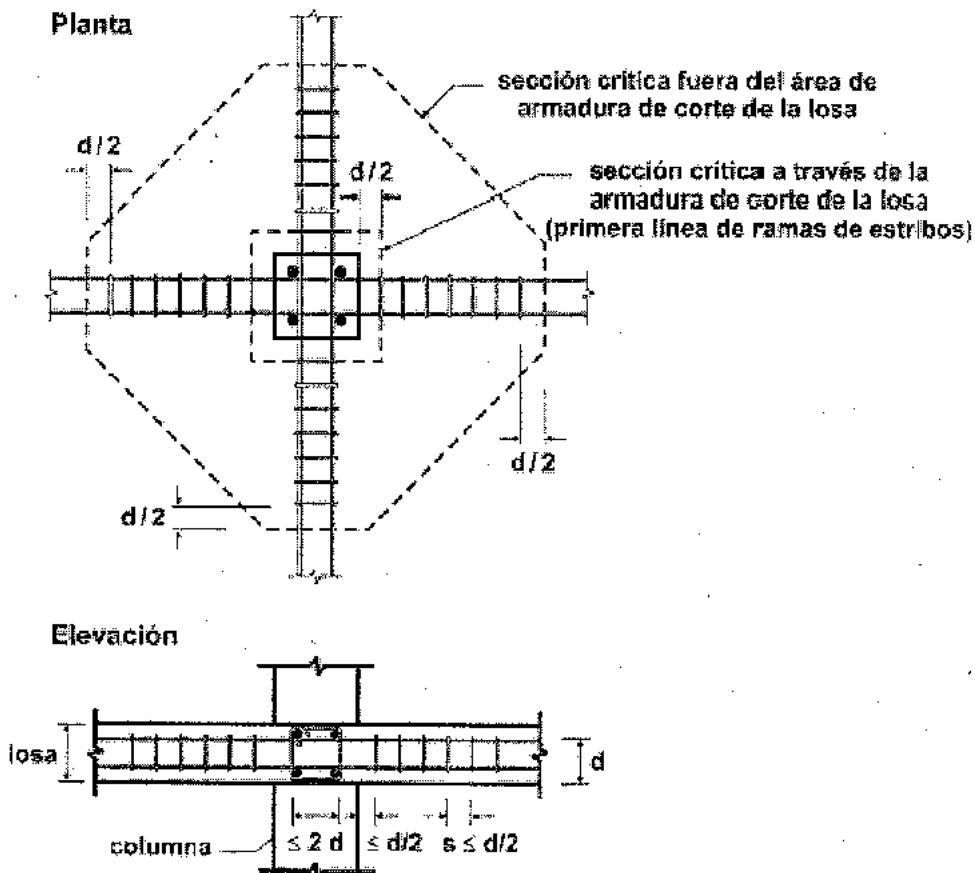


Figura 11.29: Refuerzo para corte por vigas integrales con estribos

La primera sección crítica para diseño a corte se toma a  $d / 2$  de la cara de la columna, y los estribos, si se necesitan, se extienden hacia fuera de la columna en las 4 direcciones para el caso de una columna interior, ó 3 ó 2 direcciones para columnas de borde y de esquina respectivamente, hasta que el hormigón solo sea capaz de resistir todo el corte en la segunda sección crítica, como se muestra en la fig.11.29.

En la primera sección crítica la contribución del hormigón es igual al caso de barras dobladas, es decir ec.(11.30). Similarmente la resistencia nominal a corte, suma de contribución de hormigón y armadura, debe cumplir con el límite de ec.(11.29).

Los estribos se calculan aplicando ec.(5.60), (5.67), y con los límites (5.62) para  $V_s$  y (5.65) para la separación  $s$ .

Para que esta disposición de armaduras, es decir barras rectas y estribos, sea efectiva por razones de anclaje, se debe cumplir que la altura efectiva de la losa  $d$ :

$$d \geq \begin{cases} 15 \text{ cm} \\ 16 d_s \end{cases} \quad (11.32)$$

con  $d_s$  diámetro de la armadura de corte.

Otro tipo de refuerzo lo constituye el caso (d) de la fig.11.26 que es un collar metálico con rigidizadores, utilizado en el sistema de losas que se construyen a nivel de planta baja y luego se izan a través de las columnas. Ubicada la losa en su posición (en altura), el collar sirve también para apoyar la losa sobre ménsulas que se sueldan a las columnas por debajo del nivel de la losa.

Finalmente la fig.11.26 (f) muestra el caso de esfuerzo mediante una banda de acero sobre la que se sueldan los espigas o pasadores de corte con cabeza grande que sirve de anclaje.

### 11.5.5. Transferencia de momentos a las columnas

En el análisis de resistencia al corte por punzonamiento, presentado en 11.5.4, supone que el esfuerzo de corte  $V_u$  es resistido por tensiones de corte uniformemente distribuidos alrededor del perímetro  $b_0$  de la sección crítica a distancia  $d / 2$  de la cara del apoyo. La resistencia al corte proporcionada por el hormigón se calcula con las ec.(11.21), (11.22) u (11.23) según corresponda.

Cuando se deben transferir momentos significativos de la losa a las columnas, debido por ejemplo a cargas gravitacionales no balanceadas, o a cargas horizontales de viento o sismo, resulta que las tensiones de corte no presentan una distribución uniforme.

La situación se representa en la fig.11.30.  $V_u$  es la acción vertical total y  $M_u$  el momento no balanceado que se transmite a la columna, ambos mayorados.

$V_u$  produce tensiones uniformes representada por las flechas verticales hacia abajo en la fig.11.30 (a).

El momento  $M_u$  se transfiere por dos mecanismos:

- Flexión:** representado por las fuerzas  $T$  y  $C$  en fig.11.30 (a), que de acuerdo con resultados experimentales se puede evaluar con:

$$M_{ub} = \gamma_f M_u, \text{ con } \gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{(c_1 + d)/(c_2 + d)}} \quad (11.33)$$

Este momento  $M_{ub}$  puede absorberse concentrando una parte de la armadura de la franja de columna de la losa en un ancho  $c_2 + 2 \cdot 1.5 h$ , es decir  $1.5 h$  a cada lado de la columna, con  $h$  espesor de la losa o del ábaco, si existe.

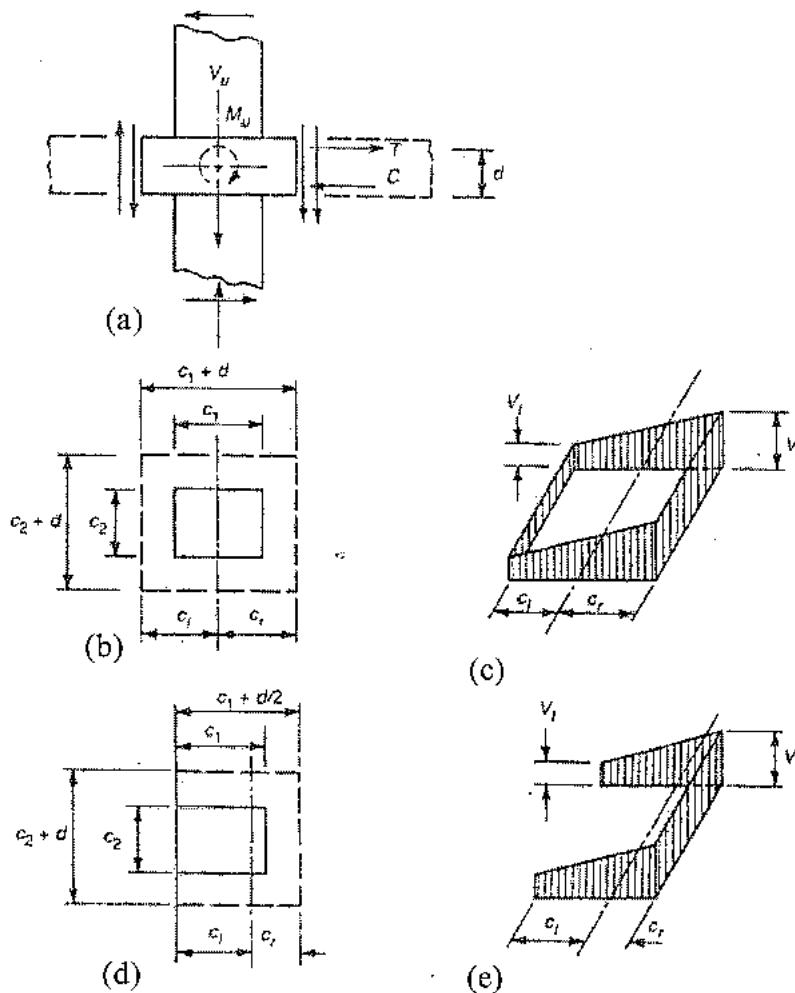


Figura 11.30: Transferencia de momentos de la losa a la columna

- Excentricidad de corte:** representado por flechas hacia arriba y hacia abajo en la fig. 11.30 (a), aumentando las tensiones de corte del lado derecho  $v_r$  y disminuyendo del lado izquierdo  $v_l$ , ver fig.11.30 (c) y (e).

$$M_{uv} = (1 - \gamma_f) M_u \quad (11.34)$$

Si la columna es cuadrada, las ec.(11.33) y (11.34) indican que el 60 % se transfiere por flexión y el 40 % por excentridad de corte. Si el ancho de la columna  $c_2$  es mucho mayor que  $c_1$ , casi todo el momento se transfiere por flexión.

Cambiando las tensiones de corte producidas por  $V_u$  y  $M_{uw}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} v_l &= \frac{V_u}{A_c} - \frac{M_{uw} c_l}{J_c} \\ v_r &= \frac{V_u}{A_c} - \frac{M_{uw} c_r}{J_c} \end{aligned} \quad (11.35)$$

donde:

$$A_c = 2 d ((c_1 + d) + (c_2 + d)) \text{ área de la sección crítica.}$$

$c_l, c_r$  distancias desde el centro de la sección crítica a las respectivas caras izquierda y derecha de la sección.

$$J_c = \frac{2 d (c_1 + d)^3}{12} + \frac{2 (c_1 + d) d^3}{12} + 2 d (c_2 + d) \left(\frac{c_1 + d}{2}\right)^2 \quad (11.36)$$

propiedad de la sección crítica análoga al momento polar de inercia.

- Para losas sin refuerzo de corte se debe verificar

$$\frac{v_r}{\phi} \leq v_n = \frac{V_c}{b_0 d} \quad (11.37)$$

donde la resistencia proporcionada por el hormigón  $V_c$  se calcula con (11.21), (11.22) u (11.23) según corresponda.

- Para losas con armadura de corte, que no sea conector de corte, debe ser

$$\frac{v_r}{\phi} \leq v_n = \frac{V_c + V_s}{b_0 d} \quad (11.38)$$

donde  $V_c$  y  $V_s$  se calculan como se describió en 11.5.4.3 b), c). Además debe ser

$$\frac{v_r}{\phi} \leq 0.17 \sqrt{f'_c} \quad (11.39)$$

En estas ecuaciones se entiende que  $v_r$  es mayor que  $v_l$ , por eso las verificaciones se indican con  $v_r$ .

- Para losas con conectores de corte la suma de la tensión de corte por carga vertical sobre la segunda sección crítica  $v_{II} = V_{uII} / (b_{0II} d)$  (en la proximidad del extremo del conector) y la tensión de corte en la primera sección crítica a  $d/2$  de la cara del apoyo  $v_l$  debe ser:

$$\frac{v_{II} + v_l}{\phi} \leq \frac{1}{3} \sqrt{f'_c} \quad (11.40)$$

## REFERENCIAS

- Möller,O. "HORMIGÓN ARMADO: Conceptos básicos y diseño de elementos con aplicación del reglamento CIRSOC 201-2005", Tercera Edición, Editorial de la Universidad Nacional de Rosario. ISBN: 950-673-474-7, 275 pp, 500 ejemplares, junio 2007.
- "Design of Reinforced Concrete – ACI 318-05 Code Edition", Seventh Edition (2006), McCormac, J.C., Nelson, J.K., Ed. John Wiley & Sons, Inc, ISBN 0-471-76132-X.
- "Reinforced Concrete – A Fundamental Approach – ACI 318-05 Code Edition", Fifth Edition (2005), Nawy, E.G., Ed. Prentice Hall, ISBN 0-13-149757-X.
- "CIRSOC 201: Reglamento Argentino de Estructuras de Hormigón" y "Comentarios al Reglamento Argentino de Estructuras de Hormigón", Ed. Julio 2005, CIRSOC – INTI.
- "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary", ACI: American Concrete Institute, USA (2008).
- "Design of Concrete Structures", 13<sup>rd</sup> Edition (2003), Nilson, A.H., Darwin, D., Dolan, C.W., Ed. McGraw-Hill, ISBN 0-07-292199-4.
- "Notes on ACI 318-99 Building Code Requirements for Structural Concrete, with Design Applications", (1999), Portland Cement Association, Illinois, USA, ISBN 0-89312-144-4.
- "ACI Manual of Concrete Practice", Parts 1, 2, 3 (1999), American Concrete Institute, Michigan, USA, ISSN 0065-7875.
- "Estructuras de Hormigón Armado", Tomos I, II, III, IV, (1986). Leonhardt, F., Mönning, E., Ed. El Ateneo, ISBN 950-02-5242-2.
- "Hormigón Armado", 9º Edición, (1978). Jimenez Montoya, P., García Meseguer, A., Morán, F., Ed. Gustavo Gili, España, ISBN 84-252-0760-6.
- "Hormigón Armado y Hormigón Pretensado, Propiedades de los Materiales y Procedimientos de Cálculo", (1976). Rüsch, H., Ed. CECSA, ISBN 84-7051-050-9.