Modelos Discretos: Respuestas tarea 1

Francisco Carvajal, Vicente Díaz, Benjamín Farías

September 17, 2023

1 Inducción Estructural

2 Inducción sobre strings

3 Definición inductiva de grafos

3.1 Mediante inducción estructural defina la estructura del grafo.

Debemos definir un grafo de a través de la inducción estructural, con base en las instrucciones se usará una lista de adyacencia, por lo tanto, lo primero que debemos crear es una lista de números para que posteriormente el grafo sea una lista de listas de números. Se define la lista y algunas funciones útiles.

Lista de naturales

Definición:

$$\emptyset \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$$

$$L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \Rightarrow L \to k \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Operaciones:

$$Insertar(L, k) = L \to k$$

Ejemplos:

$$\to 0 \to 2 \to 7$$

$$Insertar(\to 0 \to 2 \to 7, 10) =\to 0 \to 2 \to 7 \to 10$$

$$Insertar(\emptyset, 4) =\to 4$$

Definición del grafo

Ahora se crea el grafo utilizando la lista, es importante notar que la definición de este grafo, es la implementación de un grafo direccional, las listas de adyacencia por lo general son para grafos dirigidos. Haremos que sea un grafo no dirigido posteriormente con el método de $InsertarNodo$, ya que, ese método creara una conexión de i a j y de j a i, manteniendo las propiedades de un grafo no dirigido [1]. Se utilizará una flecha diferente a la de la lista para distinguirlas.

Definición

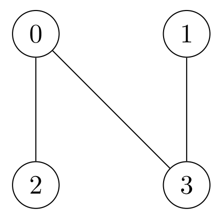
$$\emptyset \in \mathcal{G}$$

$$G \in \mathcal{G} \Rightarrow G \rightarrowtail (l) \in \mathcal{G}, \forall l \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$$

Ejemplos:

$$\rightarrowtail (\rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrowtail (\rightarrow 3) \rightarrowtail (\rightarrow 0) \rightarrowtail (\rightarrow 0 \rightarrow 1)$$

Representa el siguiente grafo:



3.2 Insertar Nodo

Esta parte se complica un poco, al ser un grafo no dirigido, ya que, no se puede solo añadir la lista al final del grafo que ya tenemos, porque se crearía asimetría en los datos del grafo, es decir, se puede llegar de j a i, pero no de i a j. Por lo tanto, lo que debemos hacer es añadir la lista al final, pero además debemos agregar en cada lista del grafo que corresponda, un borde a la nueva arista. Para hacer esto lo primero que haré es una función que conecte el nodo i y j de un grafo G.

$$Conectar((L) \rightarrowtail G, 0, j) = (Insertar(L, j)) \rightarrowtail G$$

$$Conectar((L) \rightarrowtail G, i, j) = (L) \rightarrowtail Conectar(G, i - 1, j)$$

Además, ahora sería útil una función que conecte una lista de nodos a un nodo, para utilizarla en la función final.

$$ConectarTodos(G, \emptyset, j) = G$$

$$ConectarTodos(G, i \rightarrow L, j) = ConectarTodos(Conectar(G, i, j), L, j)$$

Ahora que ya podemos conectar el nodo i con el j, necesitamos saber qué valor tendrá j, por lo tanto, tenemos que saber cuantos nodos hay en el grafo para conocer cuál será el valor del siguiente.

$$ContarNodos(\emptyset) = 0$$

$$ContarNodos((L) \rightarrowtail G) = 1 + ContarNodos(G)$$

Con estas funciones auxiliares creadas, el trabajo se facilita mucho y ya podemos definir la función InsertarNodo.

$$InsertarNodo(G, L) = ConectarTodos(G \rightarrowtail (L), L, ContarNodos(G))$$

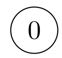
[1] A excepción de que en este grafo la cantidad flechas será el doble que la cantidad de aristas reales en el grafo.

3.3 Cantidad mínima de aristas

Debemos demostrar $a_n = n - 1$ donde a_n es la mínima cantidad de aristas necesarias para conectar n nodos.

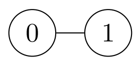
B.I.

$$n = 1$$



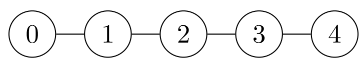
En este caso hay 0 aristas, lo que concuerda con $a_1 = 1 - 1 = 0$. :)

$$n = 2$$



En este caso hay 1 arista, lo que concuerda con $a_2 = 2 - 1 = 1$. :)

$$n = 5$$



En este caso hay 4 aristas, lo que concuerda con $a_5 = 5 - 1 = 4$. :)

H.I.

Ahora vamos asumir que $a_n = n - 1$.

T.I.

PDQ: $a_{n+1} = (n + 1) - 1 = n$
Partimos de un grafo que ya estaba mínimamente conectado, y queremos añadir un nodo. Tenemos que añadirlo con la mínima cantidad de aristas posibles, esto se hace conectándolo con cualquier nodo que estuviese originalmente en el grafo, ya que así solo añadimos 1 arista, lo cual es mínimo. Cuando hayamos hecho esto, el número total de aristas se habrá incrementado en 1 al igual que lo hará la cantidad nodos, con relación al grafo inicial.

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 1$$

Por H.I

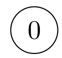
$$a_{n+1} = (n - 1) + 1$$
$$a_{n+1} = n$$

3.4 Cantidad máxima de aristas

Debemos demostrar $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$ donde a_n es la máxima cantidad de aristas que podemos utilizar para conectar n nodos.

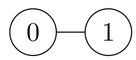
B.I

$$n = 1$$



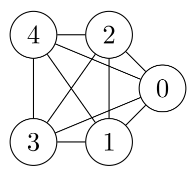
En este caso hay 0 aristas, lo que concuerda con $a_1 = \frac{1(1-1)}{2} = 0$. :)

$$n = 2$$



En este caso hay 1 arista, lo que concuerda con $a_2 = \frac{2(2-1)}{2} = 1$. :)

$$n = 5$$



En este caso hay 10 aristas, lo que concuerda con $a_5 = \frac{5(5-1)}{2} = 10$. :)

H.I

Ahora asumiremos correcto que:

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

T.I

PDQ:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

Si tenemos un grafo que está máximamente conectado con n nodos y queremos añadir uno nuevo, podemos añadir como máximo n aristas, ya que, será añadida una conexión a cada nodo que ya estaba en el grafo, no podemos añadir más debido todas las otras ya están en el grafo por estar máximamente conectado.

$$\therefore a_{n+1} = a_n + n$$

Por H.I.

$$a_{n+1} = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

4 Inducción para resolver sumatorias

5 Inducción sobre fórmulas lógicas

6 Inducción sobre números naturales

7 Falacias inductivas