Modelos Discretos: Respuestas tarea 1

Francisco Carvajal, Vicente Díaz, Benjamín Farías

September 17, 2023

1 Inducción Estructural

2 Inducción sobre strings

3 Definición inductiva de grafos

3.1 Mediante inducción estructural defina la estructura del grafo.

Debemos definir un grafo de a traves de la induccion estructural, en base a las instrucciones se usara una lista de adyacencia, por lo tanto lo primero que debemos crear es una lista de numeros para que posteriormente el grafo sea una lista de listas de numeros. Se define la lista y algunas funciones utiles.

Lista de naturales

Definición:

$$\emptyset \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$$

$$L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \Rightarrow L \to k \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Operaciones:

$$Insertar(L, k) = L \to k$$

Ejemplos:

$$\to 0 \to 2 \to 7$$

$$Insertar(\to 0 \to 2 \to 7, 10) = \to 0 \to 2 \to 7 \to 10$$

$$Insertar(\emptyset, 4) = \to 4$$

Grafo (Direccional)

Ahora se crea el grafo utilizando la lista, es importante notar que la definicion de este grafo, es la implementacion de un grafo direccional, las listas de adyacencia por lo general son para grafos dirigidos. Haremos que sea un grafo no dirigido posteriormente con el metodo de $InsertarNodo$, ya que, ese metodo creara una conexion de i a j y de j a i, manteniendo las propiedades de un grafo no dirigido [1]. Se utilizara una flecha diferente a la de la lista para distingirlas.

Definición:

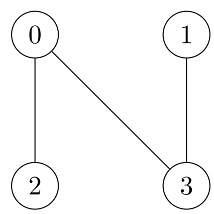
$$\emptyset \in \mathcal{G}$$

$$G \in \mathcal{G} \Rightarrow G \rightarrowtail (l) \in \mathcal{G}, \forall l \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$$

Ejemplos:

$$\rightarrowtail (\rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrowtail (\rightarrow 3) \rightarrowtail (\rightarrow 0) \rightarrowtail (\rightarrow 0 \rightarrow 1)$$

representa el siguiente grafo:



3.2 Insertar Nodo

Esta parte se complica un poco, al ser un grafo no dirigido, ya que, no se puede solo añadir la lista al final del grafo que ya tenemos, porque se crearia asimetria en los datos del grafo, es decir, se puede llegar de j a i, pero no de i a j. Por lo tanto lo que debemos hacer es añadir la lista al final pero ademas debemos agregar en cada lista del grafo que corresponda, un borde a la nueva arista. Para hacer esto lo primero que hare es una funcion que conecte el nodo i y j de un grafo G.

$$Conectar((L) \rightarrowtail G, 0, j) = (Insertar(L, j)) \rightarrowtail G$$

$$Conectar((L) \rightarrowtail G, i, j) = (L) \rightarrowtail Conectar(G, i-1, j)$$

Ademas ahora seria util una funcion que conecte una lista de nodos a un nodo, para utilizarla en la funcion final.

$$ConectarTodos(G, \emptyset, j) = G$$

$$ConectarTodos(G, i \rightarrow L, j) = ConectarTodos(Conectar(G, i, j), L, j)$$

Ahora que ya podemos conectar el nodo i con el j, necesitamos saber que valor tendra j, por lo tanto, tenemos que saber cuantos nodos hay en el grafo para conocer cual sera el valor del siguiente.

$$ContarNodos(\emptyset) = 0$$

$$ContarNodos((L) \rightarrowtail G) = 1 + ContarNodos(G)$$

Con estas funciones auxiliares creadas, el trabajo se facilita mucho y ya podemos definir la funcion InsertarNodo.

$$InsertarNodo(G, L) = ConectarTodos(G \rightarrowtail (L), L, ContarNodos(G))$$

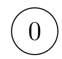
[1] A excepcion de que en este grafo la cantidad flechas sera el doble que la cantidad de aristas reales en el grafo.

3.3 Cantidad minima de aristas

Debemos demostrar $a_n = n - 1$ donde a_n es la minima cantidad de aristas necesarias para conectar n nodos.

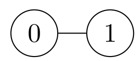
B.I.

$$n = 1$$



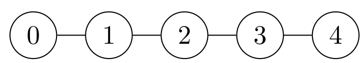
En este caso hay 0 aristas, lo que concuerda con $a_1 = 1 - 1 = 0$. :)

$$n = 2$$



En este caso hay 1 arista, lo que concuerda con $a_2 = 2 - 1 = 1$. :)

$$n = 5$$



En este caso hay 4 aristas, lo que concuerda con $a_5 = 5 - 1 = 4$. :)

H.I. Ahora vamos asumir que $a_n = n - 1$.

T.I.

PDQ: $a_{n+1} = (n + 1) - 1 = n$

Si tenemos un grafo que ya esta minimamente conectado y queremos añadir un nodo tenemos que añadir solo una arista para conectar ese nodo, y mantenemos el estado minimo del grafo. Es decir:

$$a_{n+1} = a_n + 1$$

Por H.I

$$a_{n+1} = (n - 1) + 1$$

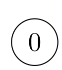
$$a_{n+1} = n$$

3.4 Cantidad maxima de aristas

Demos demostrar $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$ donde a_n es la maxima cantidad de aristas que podemos utilizar para conectar n nodos.

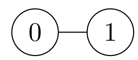
B.I

$$n = 1$$



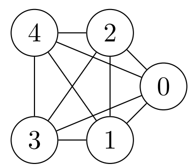
En este caso hay 0 aristas, lo que concuerda con $a_1 = \frac{1(1-1)}{2} = 0$. :)

$$n = 2$$



En este caso hay 1 arista, lo que concuerda con $a_2 = \frac{2(2-1)}{2} = 1$. :)

$$n = 5$$



En este caso hay 10 aristas, lo que concuerda con $a_5 = \frac{5(5-1)}{2} = 10$. :)

H.I

Ahora asumiremos correcto que:

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

T.I

PDQ:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

Si tenemos un grafo que esta maximamente conectado con n nodos y queremos añadir uno nuevo, podemos añadir como maximo n aristas, ya que, sera añadida una conexion a cada nodo que ya estaba en el grafo, no podemos añadir mas debido todas las otras ya estan en el grafo por estar maximamente conectado.

$$\therefore a_{n+1} = a_n + n$$

Por H.I.

$$a_{n+1} = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

4 Inducción para resolver sumatorias

5 Inducción sobre fórmulas lógicas

6 Inducción sobre números naturales

7 Falacias inductivas