0.1 Teorema y demostración

Considere este teorema y su “demostración” por inducción:

Teorema Dado un conjunto de n niñas, si al menos una de ellas tiene ojos azules, entonces las n niñas tienen ojos azules.

Demostración. Para n = 1 el enunciado es obviamente cierto. Supongamos que la proposición es cierta para n niñas. Sean $N_1, ..., N_{n+1}$ niñas con al menos una, pongamos N_1, con ojos azules. Veamos que todas tienen los ojos azules:

El grupo de niñas $N_1, ..., N_n$ verifica entonces la hipótesis de inducción, con lo que todas ellas son de ojos azules. Por tanto, como N_2 tiene los ojos azules, tambien $N_2, ..., N_{n+1}$ verifica la hipótesis de inducción, con lo que dichas niñas y en particular N_{n+1} tiene los ojos azules. Así pues, $N_1, ..., N_n, N_{n+1}$ tienen los ojos azules.

0.2 Error de la demostración

El error de esta demostración recae en tomar cualquier conjunto con n niñas y pensar que es igual que otro conjunto con n niñas. La verdad es que cada conjunto de n niñas es distinto, ya que se pueden tener distintas niñas con distintas características físicas.

La demostración se cae de inmediato cuando conformo un conjunto con n niñas que tengan los ojos de color verde, y ahora saco un niña de este conjunto y hago que sea la niña N_{n+1} del conjunto con niñas de ojos azules. Según el teorema las $n + 1$ niñas tienen los ojos azules, pero en realidad hay una que tiene los ojos verdes.

Por esto no se puede asumir que el conjunto conformado por las niñas $N_1, ..., N_n$ es el mismo que el conjunto con las niñas $N_2, ..., N_{n+1}$.