0.1 Tautologías usadas en la demostración

1. Transformación: $p \to q \equiv \neg p \vee q$
2. Distributividad: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
3. Distributividad: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
4. Doble negación: $\neg\neg p \equiv p$

0.2 Demostración

Usando inducción demostraremos que si $L(P)$ es un lenguaje proposicional, la fórmula $(\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \to Y$ es lógicamente equivalente a $\bigwedge_{i=1}^{n}(X_i \to Y)$, para todo $n \geq 1$.

B.I

n=1

$$X_1 \to Y \equiv X_1 \to Y$$

n=2

$$\begin{array}{ccc} (X_1 \vee X_2) \to Y & & (X_1 \to Y) \wedge (X_2 \to Y) \\ \neg(X_1 \vee X_2) \vee Y & & (\neg X_1 \vee Y) \wedge (\neg X_2 \vee Y) \\ (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee Y & \equiv & (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee Y \end{array}$$

H.I

$$(\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \to Y \equiv \bigwedge_{i=1}^{n}(X_i \to Y) \quad \forall n \geq 1$$

T.I

Para demostrar que lo propuesto en el enunciado se cumple, podemos usar el PIS en lo siguiente:

Empezaremos por la fórmula lógica de la derecha

$$(\bigvee_{i=1}^{n+1} X_i) \to Y \equiv \bigwedge_{i=1}^{n+1}(X_i \to Y)$$

Aplicamos propiedad de la "ANDatoria"

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1}(X_i \rightarrow Y) = \bigwedge_{i=1}^{n}(X_i \rightarrow Y) \wedge (X_{n+1} \rightarrow Y)$$

Por H.I

$$\bigwedge_{i=1}^{n}(X_i \rightarrow Y) \wedge (X_{n+1} \rightarrow Y) = ((\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \rightarrow Y) \wedge (X_{n+1} \rightarrow Y)$$

Aplicamos Transformación

$$((\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \rightarrow Y) \wedge (X_{n+1} \rightarrow Y) = (\neg(\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \vee Y) \wedge (\neg X_{n+1} \vee Y)$$

Aplicamos Distributividad

$$(\neg(\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \vee Y) \wedge (\neg X_{n+1} \vee Y) = (\neg(\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \wedge \neg X_{n+1}) \vee Y$$

Aplicamos Doble negación

$$(\neg(\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \wedge \neg X_{n+1}) \vee Y = \neg\neg(\neg(\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \wedge \neg X_{n+1}) \vee Y$$

$$\neg\neg(\neg(\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \wedge \neg X_{n+1}) \vee Y = \neg((\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \vee X_{n+1}) \vee Y$$

Aplicamos propiedad de la "ORatoria"

$$\neg((\bigvee_{i=1}^{n} X_i) \vee X_{n+1}) \vee Y = \neg(\bigvee_{i=1}^{n+1} X_i) \vee Y$$

Aplicamos Transformación

$$\neg(\bigvee_{i=1}^{n+1} X_i) \vee Y = (\bigvee_{i=1}^{n+1} X_i) \rightarrow Y$$

Ahora es claro que:

$$(\bigvee_{i=1}^{n+1} X_i) \rightarrow Y \equiv \bigwedge_{i=1}^{n+1}(X_i \rightarrow Y)$$