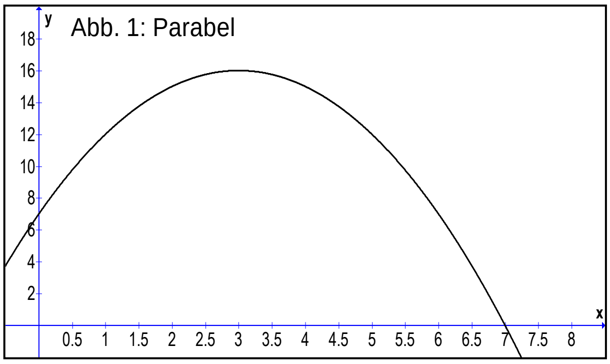
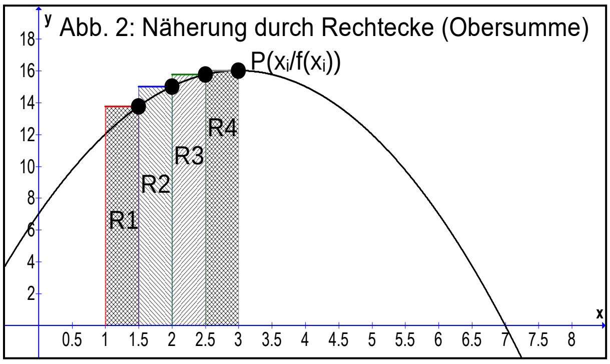
Aufgabe 1: Fläche unter einer Parabel (*)

Gegeben sei die quadratische Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ (Graph in Abb. 1).

a. Zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse liegt auf dem Intervall $[1;\ 3]$ ein Flächenstück. Markieren sie diese Fläche A in Abbildung 1.





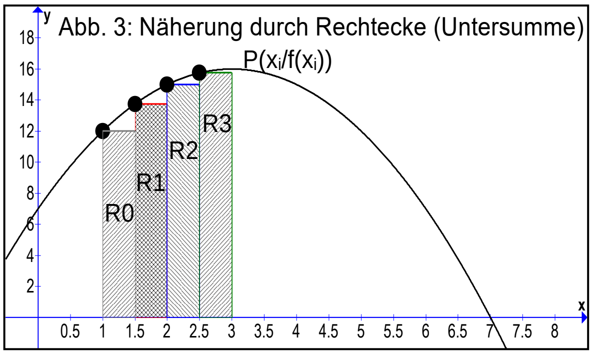
b. Zur näherungsweisen Berechnung dieser krummlinig begrenzten Fläche A wird der Flächeninhalt durch die Summe von vier Rechteckflächen abgeschätzt (vgl. Abbildung 2).

Das Intervall wird dafür in $n = 4$ gleich große Teilintervalle mit der Länge 0,5 unterteilt (=> Breite der Rechtecke Δx) und die Funktionswerte von f werden auf diesen Teilintervallen stückweise durch Konstanten angenähert (=> Höhe der Rechtecke $f(x_i)$):

Rechteck i	Breite Δx	Höhe $f(x_i)$	Rechteckfläche $\Delta x \cdot f(x_i)$
R1	0,5	$f(1,5) = -1{,}5^2 + 6 \cdot 1{,}5 + 7 = 13,75$	$0,5 \cdot 13,75 = 6,875$
R2	0,5	$f(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 + 7 = 15$	$0,5 \cdot 15 = 7,5$
R3	0,5	$f(2,5) = -2{,}5^2 + 6 \cdot 2{,}5 + 7 = 15,75$	$0,5 \cdot 15,75 = 7,875$
R4	0,5	$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 7 = 16$	$0,5 \cdot 16 = 8$
		(Ober-) Summe:	$6,875 + 7,5 + 7,875 + 8 = 30,25$

Der Flächeninhalt A beträgt laut dieser Näherung ca. 30,25 Flächeneinheiten. Weil alle Rechtecke oberhalb des Graphen liegen, nennt man diese Näherung eine **Obersumme** und die Abschätzung ist zu groß. Analog zur Obersumme kann man auch eine untere Abschätzung vornehmen, bei der alle Rechtecke unterhalb des Graphen liegen - eine **Untersumme**.

Berechnen Sie mit Hilfe von Abb. 3 und der Tabelle die Untersumme zur Näherung des Flächeninhaltes A und begründen Sie, warum diese Abschätzung der tatsächlichen Fläche A zu klein ist.



Rechteck i	Breite Δx	Höhe $f(x_i)$	Fläche $\Delta x \cdot f(x_i)$
R0	0,5	$f(1) = 12$	$0,5 \cdot 12 = 6$
R1	0,5	$f(1,5) = \ldots$	…
R2	0,5		
R3	…		
(Unter-) Summe:			

c. Der Wert des tatsächlichen Flächeninhaltes A liegt zwischen den Werten der Ober- und Untersumme. Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen (ggf. mit Hilfe der beigefügten geogebra – Datei):

- Wie kann beim Bilden einer Obersumme eine bessere Näherung erzielt werden?
- Wie verändert sich die Differenz zwischen Ober- und Untersummen bei Erhöhung der Rechtecks-Anzahl n?
- Warum muss der Grenzwert von Ober- und Untersummen für $n \to \infty$ identisch sein, und welchen Grenzwert erhält man in beiden Fällen?

Den Grenzwert, den man durch Bilden des Grenzwerts der Ober- und/oder Untersummen für $n \to \infty$ auf dem Intervall [1; 3] erhält, bezeichnet man als **Integral** der Funktion f auf diesem Intervall:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i = \textit{Integral von f auf } [1;3] \text{ , **Schreibweise:** } \int_1^3 f(x)dx$$

d. Mit Hilfe eines Computers wurden die Integrale von f auf weiteren Intervallen berechnet:

- Integral von f auf [1; 5]: $\int_1^5 f(x)dx = \frac{176}{3} \approx 58{,}67$
- Integral von f auf [1; 6]: $\int_1^6 f(x)dx = \frac{205}{3} \approx 68{,}33$
- Integral von f auf [1; 7]: $\int_1^7 f(x)dx = 72$

Markieren Sie in Abb. 4 die Flächen, die zu den beiden berechneten Integralen gehören (evtl. mehrfarbig), und begründen Sie, warum die Werte zunehmend steigen.

Begründen Sie zudem, warum $\int_1^1 f(x)dx = 0$ gilt.

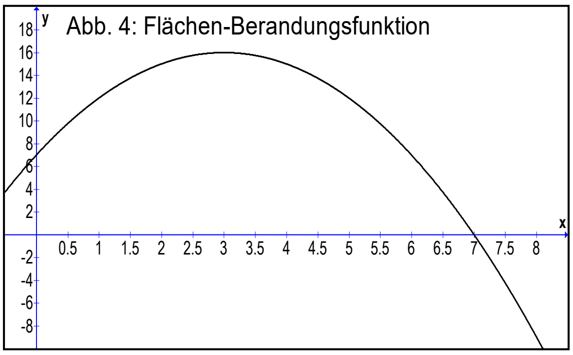


Abb. 4: Flächen-Berandungsfunktion

e. Für das Integral der Funktion f auf dem Intervall [1; 8] (also $\int_1^8 f(x)dx$) erhält man den Wert $67{,}67$ und die zugehörige Fläche wurde in Abb. 5 schraffiert.

Erläutern Sie anhand der Abbildung, warum das berechnete Integral von f auf dem Intervall [1; 8] kleiner ist als auf dem Intervall [1; 7].

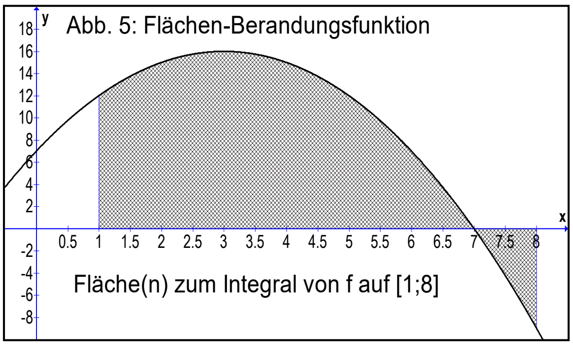


Abb. 5: Flächen-Berandungsfunktion

f. Trägt man alle berechneten Integrale in einer Tabelle und in einem Koordinatensystem zusammen, erhält man Auszüge der Wertetabelle und des Graphen einer neuen Funktion. Das ist die **Integralfunktion** der gegebenen Funktion f.

Intervall [1, x]	**Integral** $\int_1^x f$
1	0
3	29,33
5	58,67
6	68,33
7	72
8	67,67

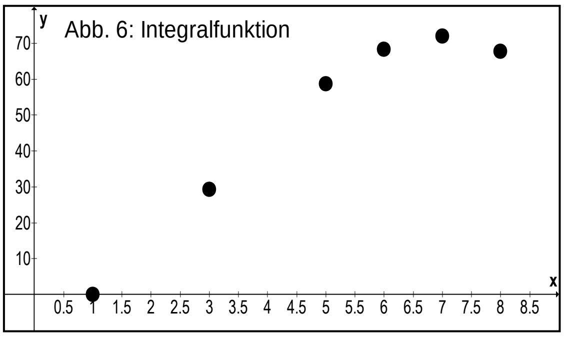


Abb. 6: Integralfunktion

Verbinden Sie die Punkte in Abbildung 6 durch einen Kurve und vergleichen Sie die zwei Funktionsgraphen aus Abb. 5 und Abb. 6. Welchen Zusammenhang sehen bzw. vermuten Sie? (Hinweis: Markieren Sie in beiden Graphen besondere Punkte wie Extrempunkte, Wendepunkte u, Nullstellen).