AB2 – Weitere Ableitungsregeln

Neben den Ihnen bekannten elementaren Ableitungsregeln (Potenz-, Faktor- und Summenregel) gibt es zwei weitere komplexere Ableitungsregeln.
Heute lernen Sie die Produkt- sowie die Kettenregel für Ableitungen kennen.

A) Produktregel:

Die Produktregel kommt zur Anwendung, wenn eine **Funktion $f(x)$ aus zwei Teilfunktionen $u(x)$ und $v(x)$**, die miteinander **multipliziert** werden, zusammengesetzt ist, z.B.:

$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = \sin(x)$

Für die Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$ gilt dann allgemein:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}}$$

dabei sind $u'(x)$ und $v'(x)$ die Ableitungen der beiden Teilfunktionen.

Für unser Beispiel bedeutet dies:

$u'(x) = 2x$ und $v'(x) = \cos(x)$ und damit folgt für $f'(x)$:

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$= 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

Merkregel:
(uv)'= u'v + uv'

Aufgabe 1)

a) Vervollständigen Sie nachfolgende Ableitung.

$f(x) = (3x^2 - x)(x^3 - 1)$, also ist $u(x) =$__________ und $v(x) =$__________.

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ mit $u'(x) =$_________ und $v'(x) =$_______:

$f'(x) =$____

$=$____

$=$_____________________________________

b) Vereinfachen Sie den Funktionsterm durch Multiplizieren und leiten Sie danach ohne Produktregel ab. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit 1a).

Aufgabe 2) Bestimmen Sie die Ableitungen der angegebenen Funktionen mit der Produktregel und vereinfachen Sie die Terme soweit wie möglich.

a) $f(x) = (1 - 2x)(3x + 1)$
b) $f(t) = (3t^2 + t)(1 - t^2)$
c) $f(x) = x\sqrt{x}$
d) $f(x) = (2x + 1) \cdot \frac{1}{x}$
e) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
f) $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$
g) $f(t) = t(x^2 - x)$

Tipps:

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{x^1} = x^{-1}$

Achten Sie auf die Variablen

h) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)(4 - 0{,}8x^2)$
i) $h(r) = (1 + r^2)^2$
j) $g(t) = (4t^2 - 1)\sqrt{t}$
k) $f(x) = \frac{3-x}{x}$
l) $f(x) = \sin^2 x$
m) $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$
n) $g(x) = e^{-x-2} \cdot e^x$

B) <u>Kettenregel:</u>

Die Kettenregel kommt zur Anwendung, wenn eine **Funktion $f(x)$ aus zwei Teilfunktionen $g(x)$ und $h(x)$** besteht, die miteinander **verkettet** sind, z.B.:

$$f(x) = \sqrt{4x - 3} \quad \text{mit} \quad h(x) = 4x - 3 \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{h(x)}.$$

Für die Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$ gilt dann allgemein:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = g\big(h(x)\big) \rightarrow f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)}}$$

dabei ist $\boldsymbol{g'\big(h(x)\big)}$ die Ableitung der **äußeren Teilfunktion** und $\boldsymbol{h'(x)}$ die Ableitung der **inneren Teilfunktion**.

Für unser Beispiel bedeutet dies:

$g'\big(h(x)\big) = \frac{1}{2}(4x - 3)^{-\frac{1}{2}}$ und $h'(x) = 4$ und damit folgt für $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) \\ &= \frac{1}{2}(4x - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 \\ &= 2(4x - 3)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x - 3}} \end{aligned}$$

<u>Merkregel:</u>
„Äußere Ableitung“ mal „Innere Ableitung“

Aufgabe 3)

Vervollständigen Sie nachfolgende Ableitung.

$f(x) = \cos(3x)$ also ist $g\big(h(x)\big) =$__________ und $h(x) =$__________.

$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$ mit $g'\big(h(x)\big) =$_________ und $h'(x) =$_______:

$f'(x) =$____

$=$_______________________________________

Aufgabe 4) Bestimmen Sie die Ableitungen der angegebenen Funktionen mit der Kettenregel (ggf. zusammen mit der Produktregel) und vereinfachen Sie die Terme soweit wie möglich.

a) $f(x) = (2x-1)^8$

b) $f(t) = \sqrt{6x-2}$

c) $f(x) = (7x^3 - 28x)^{19}$

d) $f(x) = (2x^2 - 1) \cdot e^{2x-3}$

e) $f(x) = \frac{1}{8x-1}$

f) $h(r) = r^2 \cdot \sin(r^2)$

g) $g(t) = \cos(e^{3x})$

h) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$

Platz für Fragen und Notizen:

1 Vervollständigen Sie die Tabelle. Vereinfachen Sie die Ergebnisse gegebenenfalls so weit wie möglich.

$u(x)$	$v(x)$	$u(x) + v(x)$	$u(x) \cdot v(x)$	$u(v(x))$	$v(u(x))$
x^2	$3x - 1$				
$\sqrt{x}$	e^{2x}				
$\frac{3}{x}$	$\frac{1}{9}x^2$				
e^x	e^{-x}				
$4x$	$x^3 - 5$				
$3e^{x+1}$	-1				

1 Es ist $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Vervollständigen Sie die Tabelle. Der Term $f'(x)$ muss nicht vereinfacht werden.

$f(x)$	$u(x)$	$u'(x)$	$v(x)$	$v'(x)$	$f'(x)$
$(x^2 + 1) \cdot e^x$					
$-\sqrt{x} \cdot \frac{5}{x^2}$					
$e^x \cdot \cos(x)$					
$\sqrt{x} \cdot \sin(x)$					
$\frac{1}{4+x} \cdot e^x$					
$2x^4 \cdot e^{3-x}$					

1 Es ist $f(x) = u(v(x))$. Ergänzen Sie. Vereinfachen Sie das Ergebnis von $f'(x)$ so weit wie möglich.

$f(x)$	$v(x)$	$v'(x)$	$u(x)$	$u'(x)$	$u'(v(x))$	$f'(x)$
$(6x - 5)^5$	$6x - 5$		x^5			
$(1 - 2x^2)^{-3}$						
e^{5x-2}						
$4e^{0,25x^4}$						
$\cos(-3x + 2)$						
$\sin(x^3 - 1)$						