

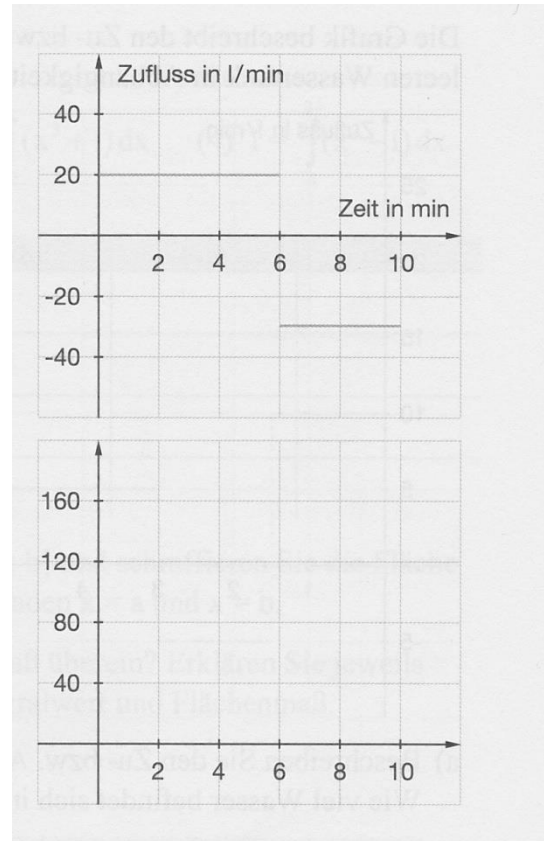
Bearbeiten Sie von den acht Aufgaben mindestens vier. Aufgabe 1-3 sind Basics, Aufgaben 4-7 sind Standard und Aufgabe 8 ist eine Vertiefungsaufgabe. Wählen Sie solche Aufgaben aus, von denen Sie meinen, dass Sie deren Bearbeitung herausfordert oder Sie eine inhaltliche Klärung erreichen können.

AUFGABE 1 ¹

Badevorgang

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Zuflussrate bei einem Badevorgang, der 10 Minuten dauert. Zu Beginn ist die Badewanne leer.

- Berechnen Sie die Wassermenge in der Badewanne nach 0, 2, 4, 6, 8 und 10 Minuten. Skizzieren Sie den zugehörigen Bestandsgraphen. Beschriften Sie dabei zunächst die Achsen. Was wird durch diese Funktion beschrieben?
- Was würde sich am Bestandsgraphen ändern, wenn zu Beginn des Badevorgangs 40 Liter in der Wanne sind?



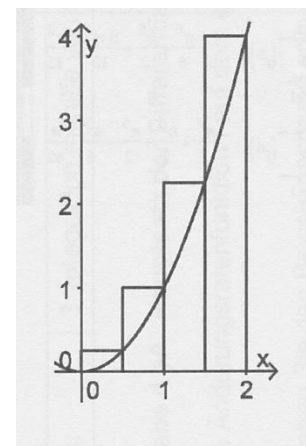
AUFGABE 2

Näherungsweise Flächenberechnung

Die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen einer nicht linearen Funktion (z.B. $f(x) = x^2$) und der x-Achse soll in dem Intervall $[0; 2]$ näherungsweise berechnet werden.

In nebenstehender Skizze ist eine Lösungsidee zur näherungsweisen Berechnung grafisch dargestellt.

- Berechnen Sie näherungsweise die gesuchte Fläche für $n = 4$ Rechteckstreifen.
- Wie verändert sich die berechnete Fläche, wenn Sie in dem Intervall $[0; 2]$ die Anzahl der Rechteckstreifen von 4 auf 100 erhöhen? Begründen Sie Ihre Antwort.



AUFGABE 3 ²

Funktionsgleichungen für Bestandsfunktionen finden.

$$f_1'(x) = 1 + 0,5x$$

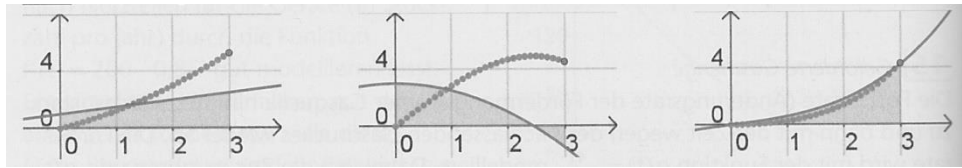
$$f_2'(x) = -0,5x^2 + 3$$

$$f_3'(x) = 0,1x^3 + 0,5x$$

¹ Quelle: Schmidt u.a. (2013): Mathematik neue Wege; Übungsmaterialien Analysis; Schroedel-Verlag; Seite 75; Aufgabe 1

² Quelle: Schmidt u.a. (2011): Mathematik neue Wege – Analysis II; Schroedel-Verlag; Seite 148; Aufgabe 18

Zu den Änderungsratenfunktionen f'_1 , f'_2 und f'_3 wurden in den unten abgebildeten grafischen Darstellungen auch die zugehörigen Bestandsfunktionen dargestellt. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Bestandsfunktionen.

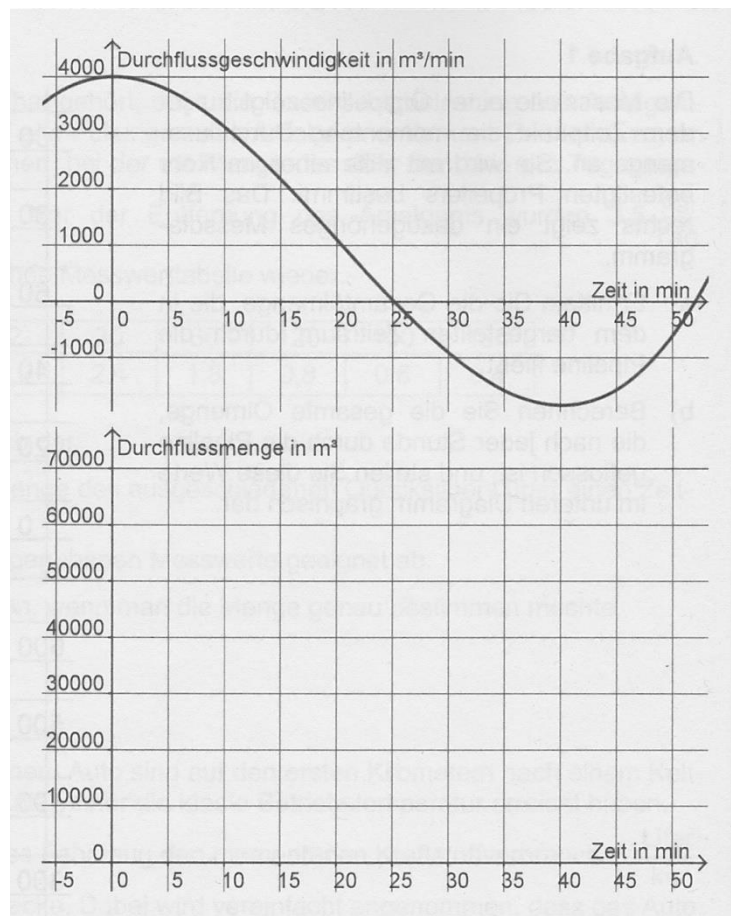


AUFGABE 4³

Pumpspeicherkraftwerk

In der nebenstehenden Grafik ist das Füllen und Entleeren eines Pumpspeicherkraftwerks mit nicht konstanter Zuflussgeschwindigkeit dargestellt.

- Berechnen Sie näherungsweise in Abständen von 5 Minuten um wie viel m^3 sich die Wassermenge im oberen Becken des Pumpspeicherkraftwerks ändert.
- Skizzieren Sie in dem freien Koordinatensystem qualitativ den Graphen des Wasserbestandes im oberen Becken für den Fall, dass es zum Zeitpunkt 0 leer ist. Begründen Sie seinen Verlauf. Erläutern Sie insbesondere die Bedeutung von Extrem- und Nullstellen des oberen Graphen für den unteren Graphen.
- Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Bestandsfunktion ändert, wenn sich zu Beginn $10.000 m^3$ Wasser im oberen Becken befinden.
- Manni meint: „**Der Verlauf einer Bestandsfunktion ist durch die Änderungsratenfunktion eindeutig bestimmt**“. Nehmen Sie Stellung.



AUFGABE 5

Falsch oder richtig? Begründen Sie Ihre Antwort! Erläutern Sie die Zusammenhänge ggf. anhand einer Skizze.

- Ein Bestand ist nur dann eindeutig aus Änderungsraten rekonstruierbar, wenn ein Anfangsbestand bekannt ist.

³ Quelle: Calimero S II – Anlysis (Methodische und didaktische Handreichungen (2013); Schroedel-Verlag, S. 50; Aufgabe 2

- b) Die Ableitung der Bestandsfunktion ist identisch mit der Änderungsratenfunktion f .
- c) Positive Änderungsraten bewirken eine Abnahme des Bestandes.
- d) Bei der Bestimmung von **orientierten Flächeninhalten** werden Flächen zwischen dem Graphen der Änderungsratenfunktion und der x-Achse ober- und unterhalb der x-Achse addiert.

AUFGABE 6

Finde den Fehler

In der unten folgenden Dokumentation wird die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0,5 x^2$ und der x-Achse in dem Intervall $[a, b]$ näherungsweise für $n = 4$ berechnet.

- a) Beschreiben Sie Lösungsstrategie und einzelne Umformungsschritte in der Spalte Bemerkung. Bei der algebraischen Umformung ist ein Fehler unterlaufen. Finden Sie den Fehler.
- b) Visualisieren Sie die verwendete Lösungsstrategie in Form einer kleinen Skizze.
- c) Berechnen Sie die Fläche näherungsweise für $n = 6$ möglichst schnell und unter Nutzung der Lösungsstruktur aus a.

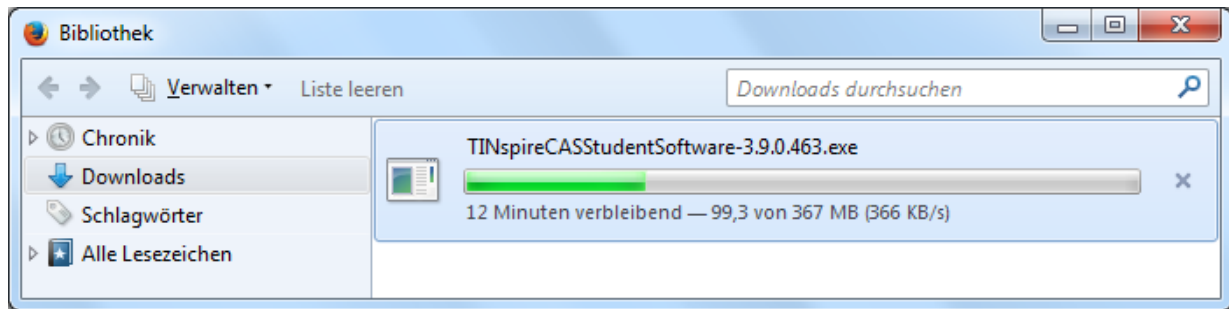
	algebraische Umformungen	Bemerkung
1	$\Delta x = \frac{b-a}{4}$	
2	$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$	
3	$A = \Delta x f(\Delta x) + \Delta x f(2\Delta x) + \Delta x f(3\Delta x) + \Delta x f(4\Delta x)$	
4	$A = \Delta x 0,5 (1 \Delta x)^2 + \Delta x 0,5 (2\Delta x)^2 + \Delta x 0,5 (3\Delta x)^2 + \Delta x 0,5 (4\Delta x)^2$	
5	$A = 0,5 \Delta x [(1 \Delta x)^2 + (2\Delta x)^2 + (3\Delta x)^2 + (4\Delta x)^2]$	
6	$A = 0,5 \Delta x [(1^2 \Delta x^2 + 2^2 \Delta x^2 + 3^2 \Delta x^2 + 4^2 \Delta x^2)]$	
7	$A = 0,5 \Delta x^1 [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2]$	
8	für $a = 0 \wedge b = 2$ ergibt sich $\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$	
9	$A = 0,5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2] = 7,5 FE$	

AUFGABE 7 ⁴

Datenübertragungsrate – Datenmenge

Der unten dargestellte Screenshot zeigt die für einen Download aus dem Internet interessanten Informationen. Dabei kann die Datenübertragungsrate aus dem Internet mathematisch als Änderungsrate (366 kB / s) angesehen werden.

⁴ Quelle: Nach einer Idee von www.standardsicherung.nrw.de; weiterentwickelt durch René Groß (Studienseminar Kassel)



- Berechnen Sie die Zeit, die benötigt wird, um eine Datenmenge von 367 MB zu downloaden? (Information: $1 \text{ MB} \triangleq 1024 \text{ kB}$; die Datenübertragungsrate wird dabei als konstant angenommen).
- Im vorausgegangenen Unterricht haben Sie sich mit Änderungsratenfunktionen f' und Beständen f beschäftigt.
Geben Sie die Funktionsgleichung für die Datenübertragungsratenfunktion und die Datenbestandsfunktion an.
- Während des Downloads verändert sich die Übertragungsrate. In dem Zeitintervall $[0 \text{ min}; 6 \text{ min}]$ beträgt die Datenübertragungsrate konstant 366 kB/s . Innerhalb der nächsten 4 Minuten steigt die Datenübertragungsrate auf 600 kB/s linear an. Diese Übertragungsrate bleibt dann für die verbleibende Dauer des Downloads konstant.

Berechnen Sie die Dauer der Übertragung von 367 MB bei den nun veränderten Datenübertragungsraten.

Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Datenratenänderungsfunktion und den Verlauf des übertragenen Datenvolumens in Abhängigkeit von der Zeit.

AUFGABE 8

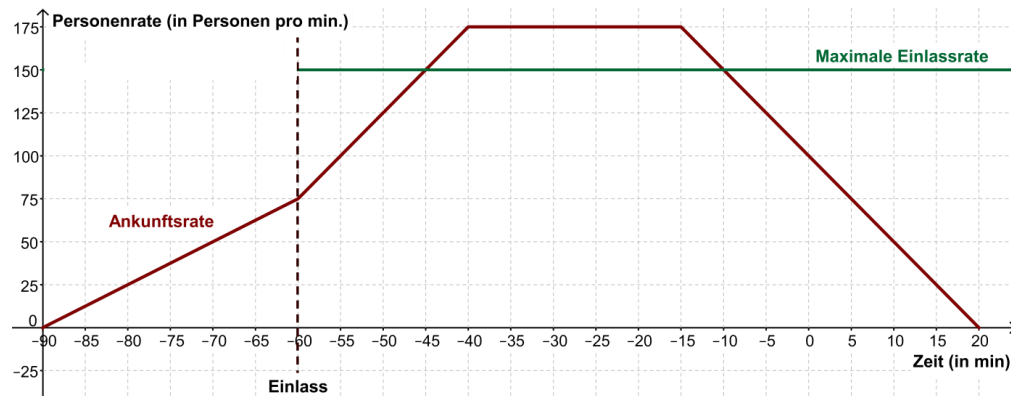
Warteschlange ^{5 6}

60 Minuten vor dem Beginn eines Fußballspiels werden die Tore eines Stadions für die Zuschauer geöffnet. Ab diesem Zeitpunkt können maximal 150 Besucher pro Minute das Stadion betreten.

Die Ankunftsrate der eintreffenden Zuschauer vor dem Stadion beschreibt die folgende Grafik.



- Wie viel Personen befinden sich 20 Minuten nach Spielbeginn im Stadion?
- Zu welchem Zeitpunkt ist die Warteschlange vor dem Stadion am längsten?



- Zu welchem Zeitpunkt ist die Warteschlange abgebaut?

⁵ Quelle: Pascal Schubert (Studienseminar Kassel)

⁶ Quelle des Fotos: www.sport-fan.ch