Lösungen S. 70

70

3. a) $\binom{5}{3}=10$, $\binom{7}{6}=7$, $\binom{4}{4}=1$, $\binom{5}{0}=1$, $\binom{8}{3}=56$, $\binom{9}{2}=36$, $\binom{22}{11}=705432$

$\binom{100}{20}\approx 5{,}359833703\cdot 10^{20}$

b) $\binom{12}{5}=792$ c) $\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}=126+84+36+9+1=256$

d) $2^{10}=1024$ (mit der leeren Menge)

4. a) Da 2 Mannschaften das Endspiel bestreiten, gibt es $\binom{8}{2}=28$ mögliche Kombinationen.

b) $\binom{5000}{2}=12497500$ c) $\binom{25}{3}=2300$

5. a) Es gibt $\binom{32}{4}=35960$ Möglichkeiten, 4 Karten auszuwählen. Da nur eine dieser Möglichkeiten 4 Asse liefert, gilt: $P(\text{"4 Asse"})=\frac{1}{35960}\approx 0{,}000028$.

b) Da es genau eine Auswahlvon 5 Buchstaben ohne Konsonanten gibt,nämlich die 5 Vokale, gilt:

$$P(\text{"kein Konsonant"})=P(\text{"nur Vokale"})=\frac{1}{\binom{26}{5}}=\frac{1}{65780}\approx 0{,}000015.$$

Spezialfall: Das Lottomodell

Beispiel: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Lotto „6 aus 49“ mit einem abgegebenen Tipp genau vier Richtige erzielt.

Lösung:
Insgesamt sind $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Tipps möglich. Um festzustellen, wie viele dieser Tipps günstig für das Ereignis E: „Vier Richtige“ sind, verwenden wir folgende Grundidee:
Wir denken uns den Inhalt der Lottourne in zwei Gruppen von Zahlen unterteilt: in eine Gruppe von 6 roten Gewinnkugeln und ein Gruppe von 43 weißen Nieten.

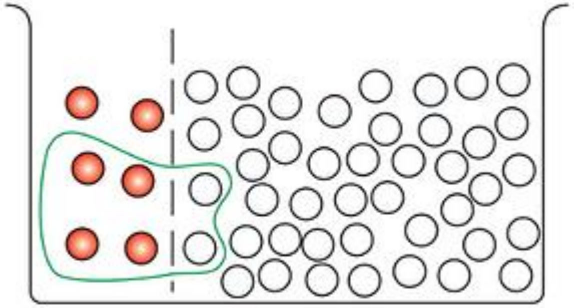
Ein für E günstiger Tipp besteht aus vier roten und zwei weißen Kugeln.

Es gibt $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten, aus der Gruppe der 6 roten Kugeln 4 Kugeln auszuwählen.

Analog gibt es $\binom{43}{2} = 903$ Möglichkeiten, aus der Gruppe der 43 weißen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen.

Folglich gibt es $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$ Möglichkeiten, vier rote Kugeln mit zwei weißen Kugeln zu einem für E günstigen Tipp zu kombinieren.

Dividieren wir diese Zahl durch die Anzahl aller Tipps, d. h. durch $\binom{49}{6}$, so erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit.
Sie beträgt ca. 0,001.



4 aus 6	2 aus 43
$\binom{6}{4}$ Möglichkeiten	$\binom{43}{2}$ Möglichkeiten

$\Downarrow$

$$P(\text{„4 Richtige“}) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13\,983\,816} \approx 0{,}001$$

Buch S. 71 Ü6) und Ü7)

Lösungen S. 71

71

6. a) $P(3R) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{20\cdot 12341}{13983816} \approx 0{,}0177$ b) $P(\text{mind. } 5R) = \underbrace{\frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{13983816}}_{P(5R)} + \underbrace{\frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0}}{13983816}}_{P(6R)} \approx 0{,}000019$

7. a) $P(\text{genau 2 defekte Lampen}) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{120}{252} \approx 0{,}4762 = 47{,}62\%$

b) $P(\text{mind. 2 defekte Lampen}) = \frac{\underbrace{\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{2}}_{2\text{d.L}} + \underbrace{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{3}}_{3\text{d.L}} + \underbrace{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{4}}_{4\text{d.L.}}}{\binom{10}{5}} = \frac{186}{252} \approx 0{,}7381 = 73{,}81\%$

c) $P(\text{höchstens 2 defekte Lampen}) = \frac{\underbrace{\binom{6}{5}\cdot\binom{4}{0}}_{0\text{.d.L}} + \underbrace{\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{1}}_{1\text{d.L.}} + \underbrace{\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{2}}_{2\text{d.L}}}{\binom{10}{5}} = \frac{186}{252} \approx 0{,}7381 = 73{,}81\%$

Übungsstunde
Buch S. 72/73 Nr…

- 8)
- 10)
- 11)
- 12)
- 13)
- 14)
- 16)
- 17)
- 18)
- 20)
- 21)
- 23)
- *27)*

8. Es gibt $2^8 = 256$ Beleuchtungsmöglichkeiten.

9. a) Es gibt $10^3 = 1000$ Zahlenkombinationen.
   b) Es gibt 500 Kombinationen mit höchstens einer ungeraden Ziffer.

10. $26^2 \cdot 10^3 \cdot 11 = 7436000$ Möglichkeiten

11. a) $12! = 479001600$ Möglichkeiten
   b) Es gibt 4! Möglichkeiten die Kriminalromane anzuordnen.
   Ebenso gibt es 5! Möglichkeiten der Anordnung der Abenteuerbücher und 3! Möglichkeiten der Anordnung der Mathematikbücher.
   Dann gibt es 3! Möglichkeiten der Anordnung der Themen.
   Insgesamt: $4! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 3! = 103680$ Anordnungen.

12. P("Fuzzi kommt durch") $= \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{48}{105} \approx 45{,}71\%$

13. Möglichkeiten der Anordnung der Buchstaben: $26! \approx 4{,}03 \cdot 10^{26}$
   Zeit bei 10^9 Anordnungen pro Sekunde $\approx 4{,}03 \cdot 10^{17}\,\text{s} \approx 1{,}53 \cdot 10^{11}$ Jahre

14. $11! = 39916800$ Möglichkeiten

15. Mögliche Endspielpaarungen: $\binom{12}{2} = 66$, Mögliche Halbfinalpaarungen: $\binom{12}{4} \cdot 3 = 1485$

16. $\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 70$ Möglichkeiten

17. a) $\binom{16}{3} \cdot \binom{8}{2} = 560 \cdot 28 = 15680$ Möglichkeiten
   b) $\binom{16}{4} \cdot \binom{8}{1} + \binom{16}{3} \cdot \binom{8}{2} + \binom{16}{2} \cdot \binom{8}{3} + \binom{16}{1} \cdot \binom{8}{4} + \binom{16}{0} \cdot \binom{8}{5} = \binom{24}{5} - \binom{16}{5} = 38136$ Möglk.

18. a) $\binom{11}{5} = 462$ Möglichkeiten   b) $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55440$ Möglichkeiten

19. a) $\binom{32}{4} = 35960$ Möglichkeiten   b) $\binom{28}{2} \cdot \binom{4}{2} = 378 \cdot 6 = 2268$ Möglichkeiten

20. $P(\text{"3r"}) = \dfrac{\binom{5}{3}\binom{15}{5}}{\binom{20}{8}} \approx 23{,}84\%$

   $P(\text{"mind. 4r"}) = P(\text{"4r"}) + P(\text{"5r"}) \approx 0{,}0542 + 0{,}0036 = 5{,}78\%$

21. $P(\text{"2d"}) = \dfrac{\binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}0702 = 7{,}02\%$

   $P(\text{"mind. 3d"}) = P(\text{"3d"}) + P(\text{"4d"}) + P(\text{"5d"})$
   $\approx 0{,}0063835 + 0{,}0002510 + 0{,}0000033 \approx 0{,}0066$

22. $P(\text{"genau 1 defekt"}) = \dfrac{\binom{10}{1}\binom{70}{4}}{\binom{80}{5}} \approx 0{,}3814$

   $P(\text{"genau 3 defekt"}) = \dfrac{\binom{10}{3}\binom{70}{2}}{\binom{80}{5}} \approx 0{,}0121$

   $P(\text{"höchstens 4 defekt"}) = 1 - P(\text{"alle defekt"}) = 1 - \dfrac{\binom{10}{5}\binom{70}{0}}{\binom{80}{5}} \approx 0{,}9999895$

   $P(\text{"mindestens 1 defekt"}) = 1 - P(\text{"keine defekt"}) = 1 - \dfrac{\binom{10}{0}\binom{70}{5}}{\binom{80}{5}} \approx 0{,}4965$

23. $P(\text{"3R"}) \approx 0{,}0264$, $P(\text{"4R"}) \approx 0{,}000549$
   $G \approx 1€ - 0{,}0264 \cdot 10€ - 0{,}000549 \cdot 1000€ = 0{,}187€$
   Durchschnittlicher Gewinn pro Spiel: 0,187 Euro

24. a) $P(3R) = \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}} = \dfrac{2}{33} \approx 0{,}061$ b) $P(3G) = \dfrac{\binom{5}{3} + \binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} = \dfrac{30}{165} \approx 0{,}182$

25. a) $P(2R) = \dfrac{\binom{10}{2}\binom{40}{3}}{\binom{50}{5}} = \dfrac{45 \cdot 9880}{2118760} \approx 0{,}2098$
   b) $P(\geq 3W) = \dfrac{\binom{10}{2}\binom{40}{3} + \binom{10}{1}\binom{40}{4} + \binom{10}{0}\binom{40}{5}}{\binom{50}{5}} = \dfrac{2016508}{2118760} \approx 0{,}9517$

26. $P(\geq 2G) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{6 \cdot 6 + 4}{120} = \dfrac{1}{3}$

27. a) $P(\text{"1HG, 4N"}) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{78}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}0379$, $P(\text{"kein G"}) = \dfrac{\binom{78}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}1891$
   b) $P(\text{"5T, 5N"}) = \dfrac{\binom{20}{5}\binom{78}{5}}{\binom{100}{10}} \approx 0{,}1891$