

Alte Prüfungsaufgaben zur Binomialverteilung

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X gelten die Formeln:

$$E(X) = n \cdot p \quad \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) \quad \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Hessisches Kultusministerium**Landesabitur 2023****Mathematik
Grundkurs (WTR/CAS)****Thema und Aufgabenstellung
Prüfungsteil 2 – Vorschlag C2.2****Stochastik****Aufgaben**

- 1 In einem Land besuchen 45 % der Siebtklässler ein Gymnasium.
- 1.1 Es werden 60 Siebtklässler zufällig ausgewählt und befragt, welche Schulform sie besuchen. Die Zufallsgröße X bezeichnet die Anzahl der befragten Siebtklässler, die angeben, ein Gymnasium zu besuchen. Es ist davon auszugehen, dass alle Siebtklässler wahrheitsgemäß antworten.
- Begründen Sie, dass X näherungsweise binomialverteilt mit dem Parameter $p = 0,45$ ist, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
- A: Genau 29 der befragten Siebtklässler geben an, ein Gymnasium zu besuchen.
B: Die Anzahl der befragten Siebtklässler, die angeben, ein Gymnasium zu besuchen, weicht um höchstens 2 vom Erwartungswert von X ab.
- (8 BE)
- 1.2 Berechnen Sie, wie viele zufällig ausgewählte Siebtklässler man mindestens befragen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein Siebtklässler darunter ist, der angibt, ein Gymnasium zu besuchen.
- (4 BE)
- 1.3 Die Klasse 7b der Gauß-Schule besteht aus 12 Jungen und 15 Mädchen. Für die Vorbereitung eines Themas werden 3 Kinder aus der Klasse zufällig ausgewählt.
- 1.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 2 Mädchen ausgewählt werden.
- (3 BE)
- 1.3.2 Beschreiben Sie ein Ereignis E , für dessen Wahrscheinlichkeit $P(E) = 1 - \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{13}{25}$ gilt.
- (2 BE)

Hessisches Kultusministerium**Landesabitur 2023 (Nachtermin)****Mathematik
Grundkurs (WTR/CAS)****Thema und Aufgabenstellung
Prüfungsteil 2 – Vorschlag C2.2****Stochastik**

In einer für ganz Deutschland repräsentativen Befragung des deutschen Musikinformationszentrums aus dem Jahr 2020 wurden Kinder und Jugendliche im Alter von 6 bis 15 Jahren befragt. 48,4 % der Befragten gaben an, in ihrer Freizeit zu musizieren, also ein Instrument zu spielen, zu singen oder beides. Unter den musizierenden Kindern und Jugendlichen gaben 96,3 % an, ein Instrument zu spielen, und 28,5 %, zu singen. Ein Teil der musizierenden Kinder und Jugendlichen gab also an, sowohl ein Instrument zu spielen als auch zu singen.

Die angegebenen relativen Häufigkeiten sollen im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

Aufgaben

- 1 Im Jahr 2020 wurden 8 Kinder und Jugendliche im Alter von 6 bis 15 Jahren zufällig ausgewählt und befragt, ob sie musizieren.
 - 1.1 Begründen Sie, dass man in guter Näherung davon ausgehen kann, dass die Zufallsvariable X : „Anzahl der Kinder und Jugendlichen, die angaben, zu musizieren“ binomialverteilt ist.
(2 BE)
 - 1.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
A: Unter den 8 Befragten gaben weniger als 3 an, zu musizieren.
B: Unter den 8 Befragten gaben höchstens 2 an, nicht zu musizieren.
C: Die ersten 4 Befragten gaben an, zu musizieren, die folgenden 4 gaben an, dies nicht zu tun.
D: Unter den 8 Befragten gaben genau 2 an, zu singen.
(10 BE)
 - 1.3 Formulieren Sie ein Ereignis E im Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $P(E) = \binom{8}{5} \cdot 0,484^5 \cdot 0,516^3 \cdot (1 - 0,285)^5$ berechnet werden kann.
(2 BE)

Nachtermin 2023 C2.2

Aufg.	erwartete Leistungen	BE
1.1	<p>Ein Siebtklässler besucht entweder ein Gymnasium oder eine andere Schulform, es gibt also bei jedem befragten Siebtklässler nur zwei mögliche Ergebnisse. Da die Anzahl der Siebtklässler sehr groß ist, kann davon ausgegangen werden, dass die Wahrscheinlichkeiten für die beiden möglichen Ergebnisse für jeden befragten Siebtklässler annähernd gleich bleiben. Somit ist X näherungsweise binomialverteilt.</p> <p>$P(A) = P(X = 29) = B(60; 0,45; 29) \approx 8,97\%$</p> <p>$E(X) = n \cdot p = 60 \cdot 0,45 = 27$</p> <p>$P(B) = P(25 \leq X \leq 29) = F(60; 0,45; 29) - F(60; 0,45; 24) \approx 48,31\%$</p>	<p>2</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>3</p>
1.2	<p>$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0,99$</p> <p>$\Leftrightarrow P(X = 0) = 0,55^n \leq 0,01$</p> <p>$n \geq \log_{0,55}(0,01) \approx 7,7$</p> <p>Man muss mindestens 8 Siebtklässler befragen.</p>	<p>3</p> <p>1</p>
1.3.1	$3 \cdot \frac{12}{27} \cdot \frac{15}{26} \cdot \frac{14}{25} \approx 43,08\%$	3
1.3.2	E: Unter den drei zufällig aus der Klasse ausgewählten Kindern befindet sich mindestens ein Junge.	2

Aufg.	erwartete Leistungen	BE
1.1	Bei jeder Stufe der Befragung gibt es genau zwei mögliche Ergebnisse: eine Person musiziert oder sie musiziert nicht. Da die Gesamtheit aller Personen (Kinder und Jugendliche im Alter von 6 bis 15 Jahren) groß ist, kann man davon ausgehen, dass sich die Wahrscheinlichkeit, auf eine musizierende Person zu treffen, von einer Person zur nächsten (nahezu) nicht ändert. Daher kann man davon ausgehen, dass die Zufallsvariable X in guter Näherung binomialverteilt ist.	2

Seite 1 von 3

Hessisches Kultusministerium**Landesabitur 2023 (Nachtermin)****Mathematik****Lösungs- und Bewertungshinweise****Grundkurs (WTR/CAS)****Prüfungsteil 2 – Vorschlag C2.2**

Aufg.	erwartete Leistungen	BE
1.2	$P(A) = P(X \leq 2) = F_{8,0,484}(2) \approx 0,1665$ $P(B) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_{8,0,484}(5) \approx 0,1245$ $P(C) = 0,484^4 \cdot 0,516^4 \approx 0,0039$ $P(D) = \binom{8}{2} \cdot (0,484 \cdot 0,285)^2 \cdot (1 - 0,484 \cdot 0,285)^6 \approx 0,2187$	2 3 2 3
1.3	E: Von den 8 ausgewählten Kindern und Jugendlichen gaben genau 5 an, zu musizieren, aber nicht zu singen. Die anderen 3 gaben an, nicht zu musizieren.	2