Untersuchung und Integration der natürlichen Exponentialfunktionen

- D. Extrema und Wendepunkte: S. 103 lesen und Ü5b) bearbeiten
- E. Einfache Flächenberechnungen: S. 104/105 lesen, Integrationsregeln übernehmen und S. 105 Ü7 bearbeiten
- F. Integration durch 1. **direkten Nachweis durch Ableitung** und mittels 2. **Formansatz/ Koeffizientenvergleich**: S. 106/107 lesen und S. 106 Ü10 bearbeiten

Es gilt:

$$\ln(e^x) = x,$$

da der natürliche Logarithmus die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion ist.

Kurvenuntersuchungen und Anwendungs-aufgaben

- S. 112 Nr. 1) oder 2) oder 3)
- S. 114 Nr. 5a)
- S. 115 Nr. 10) oder 12*)
- Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten

S. 112 Nr. 1) - 3

1. a) $f'(x) = xe^x$, $f''(x) = (1+x)e^x$, $f'''(x) = (2+x)e^x$

   b) Nullstelle ist $x = 1$

   c) Extremum: $f'(x) = 0$ für $x = 0$, $f''(0) = 1 > 0$, $T(0|-1)$

   Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = -1$, $f'''(-1) = e^{-1} \neq 0$, $W(-1|-2e^{-1})$

   d) $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$

   e) Graph siehe Aufgabe

2. a) $F'(x) = (x-1)e^x = f(x)$

   b) $A = -(F(1)-F(0)) = -(-e+2) \approx 0{,}718282\ km^2 = 718282\ m^2$

   Verkaufspreis: 57462560 Euro

   c) $B = -(F(0)-F(-2)) = -(-2+4e^{-2}) \approx 1458659\ m^2$

3. a) $f'(x) = e^x - 1$, $f''(x) = e^x$

   Extrema: $f'(x) = 0$ für $x = 0$, $f''(0) = 1 > 0$, $T(0|1)$

   Wendepunkt: $f''(x) \neq 0$, kein Wendepunkt

   b) Da der Tiefpunkt bei $y = 1 > 0$ liegt und kein Wendepunkt existiert, kann f keine Nullstellen besitzen.

   c) $P(1|e-1)$, $z(x) = (e-1)x$, $f'(1) = e - 1$: z mündet tangential in die Autobahn.

   $|BP| = \sqrt{1+(e-1)^2} \approx 2\ km$

   In 60 min werden 30 km zurückgelegt, also braucht man für 2 km 4 Minuten.

   d) $A = \int_0^1 (f(x) - z(x))dx = \int_0^1 (e^x - ex)dx = [e^x - \frac{e}{2}x^2]_0^1 = e - \frac{e}{2} - 1 \approx 0{,}359\ km^2 \approx 36\ ha$

S. 114 Nr. 5a) und 6)

5. a) Nullstelle: $x = -1$

$f'(x) = (1-x)e^{-0,5x}$, $f''(x) = (-1{,}5+0{,}5x)e^{-0,5x}$

$f'''(x) = (1{,}25-0{,}25x)e^{-0,5x}$

Extremum: $f'(x) = 0$ für $x = 1$, $f''(1) = -e^{-0,5} < 0$

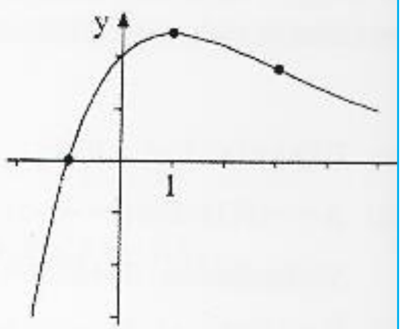
$H(1|4e^{-0,5}) = H(1|2{,}43)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = 3$, $f'''(3) \neq 0$

$W(3|8e^{-1,5}) = W(3|1{,}79)$

Verhalten für $|x| \to \infty$:

$x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$, $x \to \infty$: $f(x) \to 0$



b) Nullstelle: $x = 1$

$f'(x) = (x-2)e^{2-x}$, $f''(x) = (3-x)e^{2-x}$

$f'''(x) = (x-4)e^{2-x}$

Extremum: $f'(x) = 0$ für $x = 2$, $f''(2) = 1 > 0$

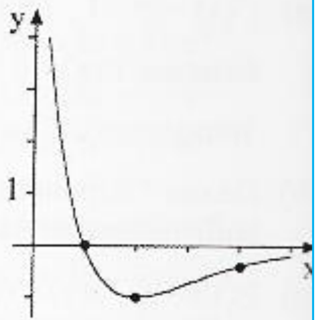
$T(2|-1)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = 3$, $f'''(3) = -e^{-1} \neq 0$

$W(3|-2e^{-1}) = W(3|0{,}74)$

Verhalten für $|x| \to \infty$:

$x \to -\infty$: $f(x) \to \infty$, $x \to \infty$: $f(x) \to 0$



c) Nullstelle: $e^{2x} = 2$, $x = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}35$

$f'(x) = e^x + 2e^{-x}$, $f''(x) = e^x - 2e^{-x}$

$f'''(x) = e^x + 2e^{-x}$

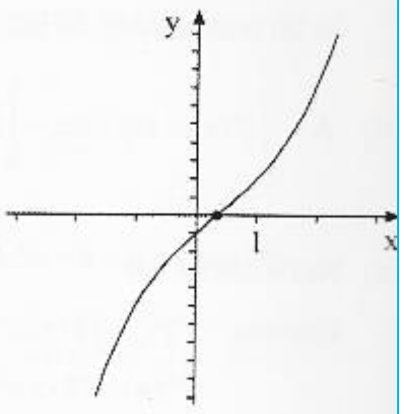
Extrema: keine

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}35$, $f'''(0{,}35) \neq 0$

$W(0{,}35|0)$

Verhalten für $|x| \to \infty$:

$x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$, $x \to \infty$: $f(x) \to \infty$



6.

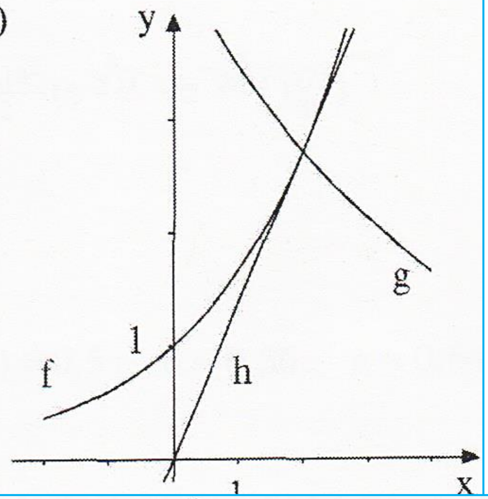
I	II	III	IV
f	h	g	k

Untersuchung der Nullstellen

S. 115 Nr. 10) und 12*)

b) $f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $g'(x)=-\frac{1}{4}e^{1,5-\frac{x}{4}}$

a)



c) Schnittpunkt: $f=g$: $e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{3}{2}-\frac{x}{4}}$ $\quad | \ln$

$\frac{x}{2}=\frac{3}{2}-\frac{x}{4}$, $x=2$, $S(2|e)$

$\tan\alpha = f'(2)=\frac{1}{2}e \Rightarrow \alpha\approx 53,66°$

$\tan\beta = g'(2)=-\frac{1}{4}e \Rightarrow \beta\approx -34,20°$

Schnittwinkel: $\gamma=\alpha+|\beta|\approx 87,86°$

d) $h(x)=mx$, I. $mx=e^{\frac{x}{2}}$ ← $h(x)=f(x)$

II. $m=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $B(2|e)$, $h(x)=\frac{e}{2}\cdot x$

$h'(x)=f'(x)$

⇒ m in (I.) einsetzen liefert $x=2$

e) $A=\int_0^2 (g(x)-f(x))\,dx=\left[-4e^{\frac{3}{2}-\frac{x}{4}}-2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^2=-4e-2e+4e^{\frac{3}{2}}+2\approx 3,62$

11. a) $F'(x)=(4x+8-8)e^{-0,5x}=f(x)$

b) Nullstelle von n: $x=(e^2-\frac{16}{e^2})\cdot\frac{4}{e^2}=\frac{e^4-16}{e^4}\cdot 4=4-\frac{64}{e^4}\approx 2,83$

$$A=\int_0^4 f(x)dx-\int_{4-\frac{64}{e^4}}^4 n(x)dx=[(-8x-16)e^{-0,5x}]_0^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{e^4}\cdot\frac{16}{e^2}=-\frac{48}{e^2}+16-\frac{512}{e^6}\approx 8,23$$

12. $A(u)=u\cdot f(u)=4u^2\cdot e^{-0,5u}$, $A'(u)=(8u-2u^2)\cdot e^{-0,5u}$, $A'(u)=0$ für $u=4$ und $u=0$

$A''(u)=(u^2-8u+8)\cdot e^{-0,5u}$, $A''(0)=8>0$, $A''(4)=-8<0\Rightarrow$ Maximum

$u\to\infty$: $A(u)\to 0$