Definition: Skalar-Multiplikation von Vektoren

Ein **Vektor $\vec{a}$** wird mit einer **reellen Zahl s** (= „Skalar“) multipliziert, indem jede seiner Koordinaten mit s multipliziert wird:

$$s \cdot \vec{a} = \binom{s \cdot x}{s \cdot y} \text{ bzw. } s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} s \cdot x \\ s \cdot y \\ s \cdot z \end{pmatrix}$$

r und s seien **zwei reelle Zahlen** und **$\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren**, dann gelten folgende Rechengesetze:

(1) Distributivgesetz: $r \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

(2) Distributivgesetz: $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$

(3) Assoziativgesetz: $(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$

Übungen zur Skalar-Multiplikation von Vektoren

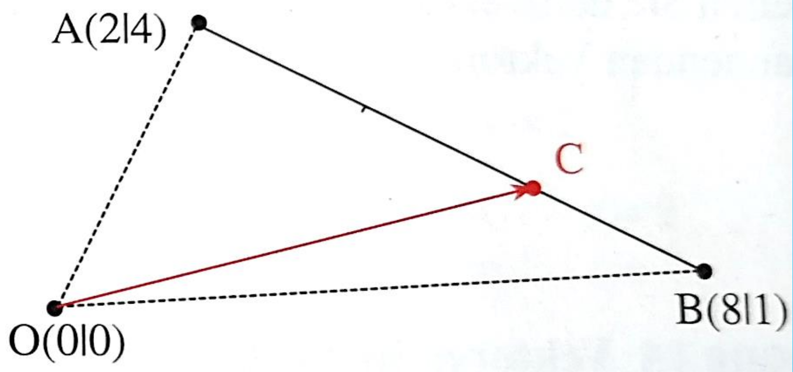
- S. 66 Nr.
  - 6);
  - 7a, c, e);
  - 8a-d)
  - 9a, c, h)
  - 10a, c)
  - 11a, d)

S. 68 Nr. Ü13) und Ü15)

Vektorzüge = Hintereinanderausführung von Verschiebungen

z.B. bei Unterteilung einer Strecke AB, sodass **Punkt C diese Strecke im Verhältnis 2:1** teilt.

Ergo ergibt sich eine Drittelung der Strecke AB:



Berechnung des Ortsvektors von C:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

S. 69 Ü16) und
S. 72 Nr. 21)

Linearkombination von Vektoren

- Mit Hilfe zweier Vektoren $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ lassen sich weitere Vektoren der Form $\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ erzeugen. Eine solche Summe nennt man **Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$**.

- Allgemein: Eine Summe der Form ($r_i \in \mathbb{R}$)

$$\vec{x} = r_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + r_n \cdot \overrightarrow{a_n}$$

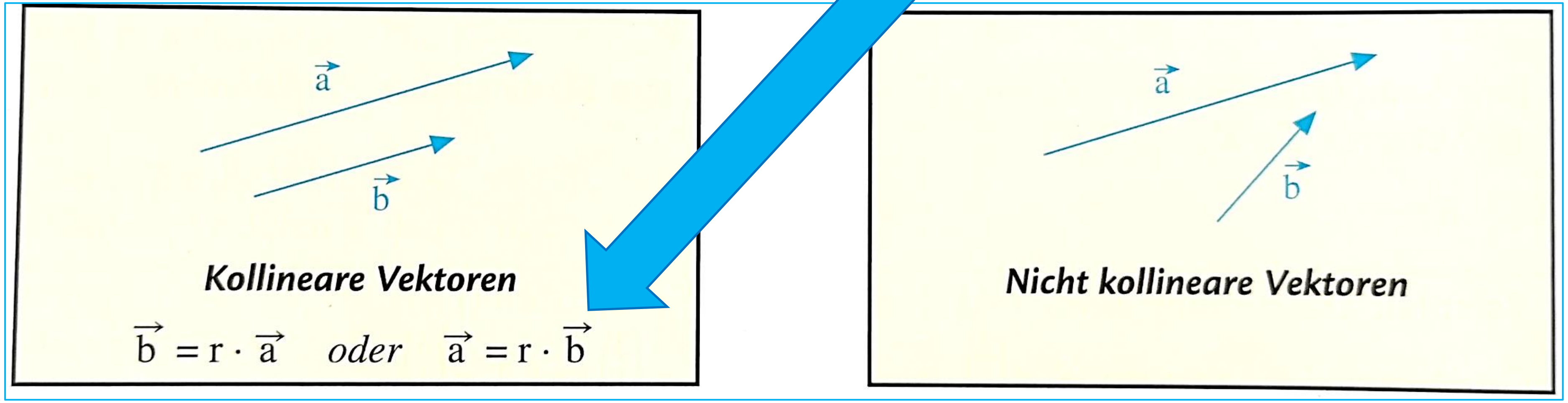
nennt man **Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$**.

$\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ löst man, indem man ein **LGS** aufstellt, bei dem die x-Zeile der drei Vektoren die erste Gleichung repräsentiert, die y-Zeile die zweite usw.

S. 71 Ü17)
und Ü18)

Kollineare Vektoren

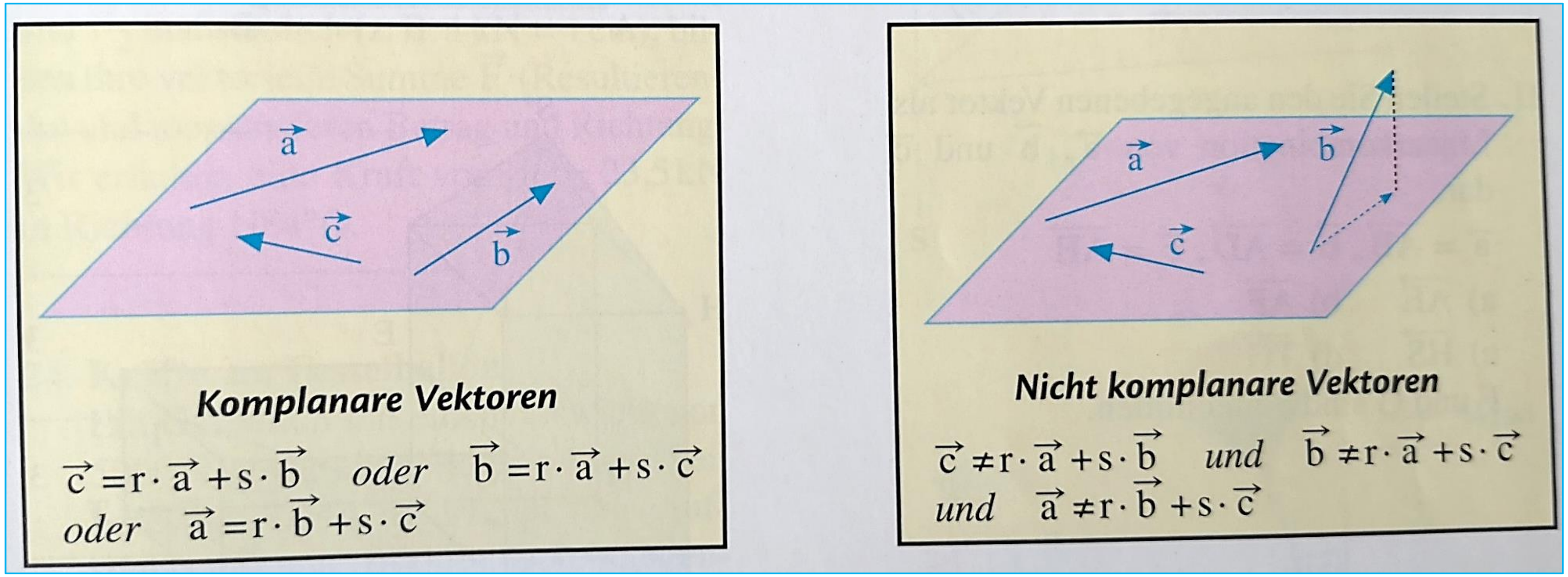
- **Zwei Vektoren**, deren **Pfeile parallel** verlaufen, nennt man **kollinear**. Sie zeigen in die **gleiche Richtungen**, können aber in der **Länge variieren**. Daher lässt sich einer der beiden **Vektoren immer als Vielfaches des anderen** Vektors darstellen.



Komplanare Vektoren

S. 72 Ü23a)
und Ü23b)

- **Drei Vektoren**, deren **Pfeile** sich **in derselben Ebene** darstellen lassen, bezeichnet man als **komplanar**. Das bedeutet, dass **mindestens einer der drei Vektoren als Linearkombination der anderen beiden** darstellbar ist.

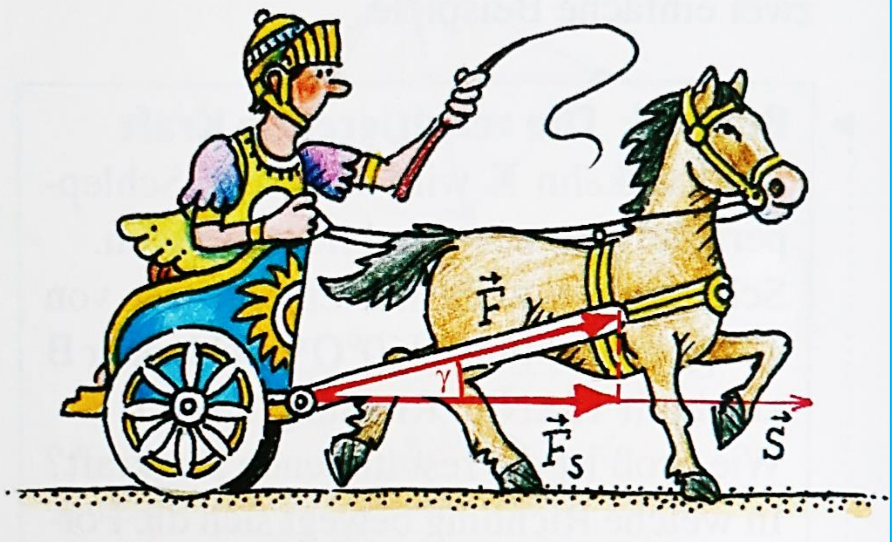


Winkel

Wie liegen zwei Vektoren zueinander in der Ebene oder im Raum?

Definition des Skalarprodukt

S. 74 Nr. Ü1)Tipp: c, d) zeichnen
S. 76 Nr. 4), 5a, c) und 6b)



„Arbeit = Kraft · Weg“

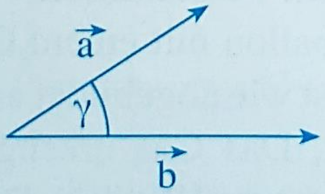
Arbeit = Kraft in Wegrichtung · Weglänge

$W = F_s \cdot s$

$W = |\vec{F}| \cdot \cos\gamma \cdot |\vec{s}|$

$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\gamma$

Das Skalarprodukt (Kosinusform)



$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien zwei Vektoren und γ der Winkel zwischen diesen Vektoren ($0° \leq \gamma \leq 180°$).
Dann bezeichnet man den Ausdruck

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$$

als ***Skalarprodukt*** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das Skalarprodukt von Spaltenvektoren lässt sich als Produktsumme von Koordinaten darstellen:

Das Skalarprodukt (Koordinatenform)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

- Mit Hilfe des Skalarproduktes eine Vektors kann man

Der Betrag eines Vektors

Für den Betrag (die Länge) eines Vektors $\vec{a}$ gilt die Formel

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \text{ bzw. } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

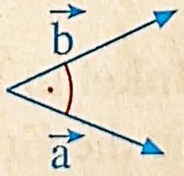
- Die Betrag des Vektors
- und den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen:

S. 78 Ü1a, b), Ü2b), Ü3a, c) und *U4)*

Die Kosinusformel

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien vom Nullvektor verschiedene Vektoren und γ sei der Winkel zwischen ihnen. Dann gilt:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



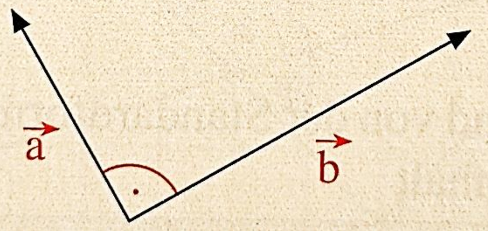
Orthogonalität von Vektoren

S. 79 Ü5) und Ü6a, b)

Orthogonalitätskriterium

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$) sind genau dann orthogonal (senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt null ist.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



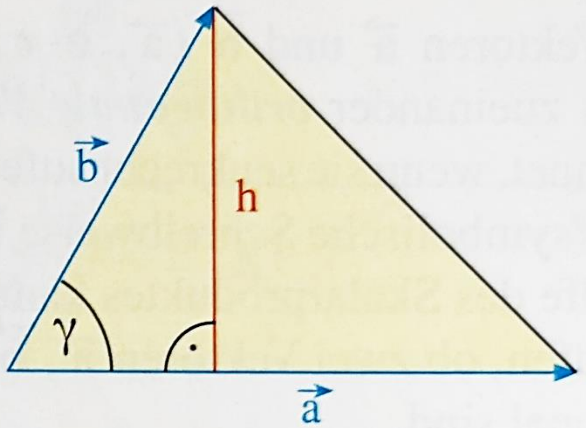
Flächeninhalt eines Dreiecks

S. 81 Nr. 9) und 11) sowie *13)*

Flächeninhalt eines Dreiecks

Spannen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Anschauungsraum ein Dreieck auf, so gilt für dessen Flächeninhalt A die Formel:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}.$$



Geometrische Figuren und Körper im Raum

Bild von Körper mit Vektoren einfügen

Diverse Übungen

- [S. 82/83 lesen und Beispiele nachvollziehen]
- S. 82 Ü1) (Tipp zu b): Ein paar parallele Seiten)
- S. 84 Nr. 2b), 4) und 7a,b)
- S. 85 Nr. 2), 3) und *4)*

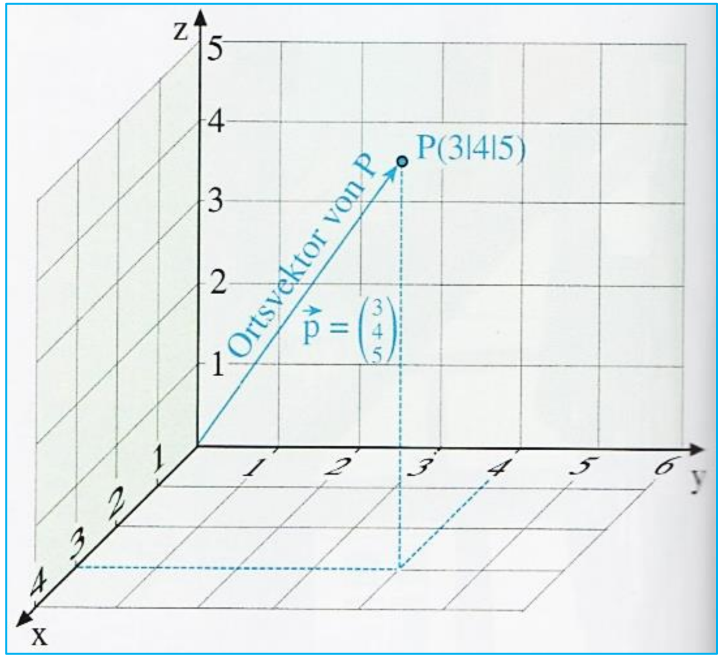
TEST – Buch S. 88

Geraden und Ebenen im Raum

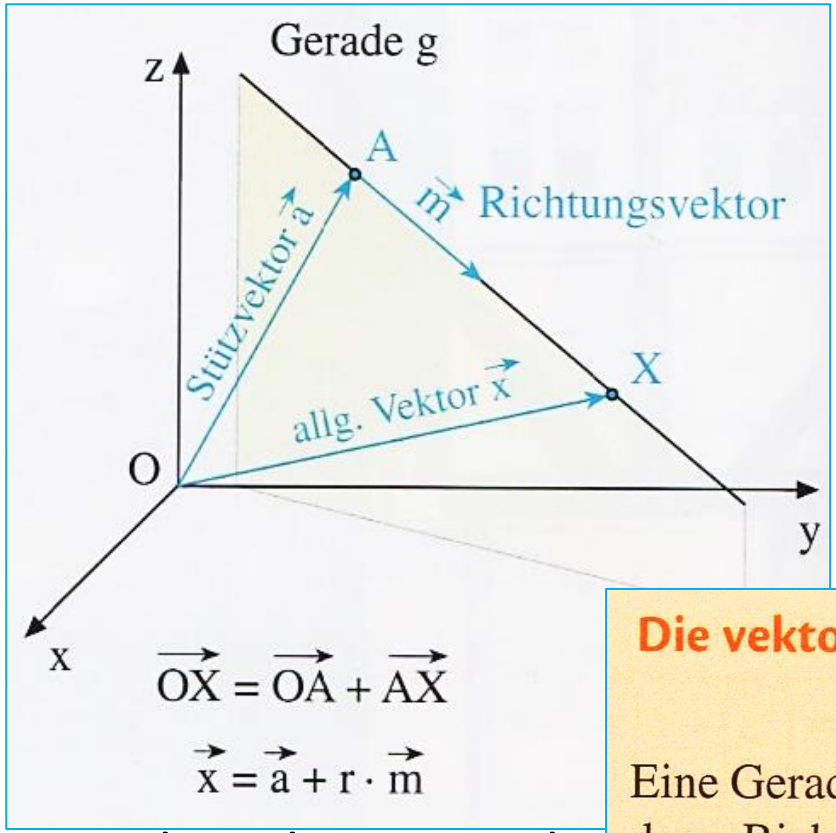
Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen

Parameterdarstellung von Geraden #1

- Ortsvektoren: z.B. $\overrightarrow{OP}$



- Parameterdarstellung einer Geraden



- Punktprobe: Beispiel S. 91

Buch S. 92 Ü1)

Die vektorielle Parametergleichung einer Geraden

Eine Gerade mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und dem Richtungsvektor $\vec{m} \neq \vec{0}$ hat die Gleichung

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

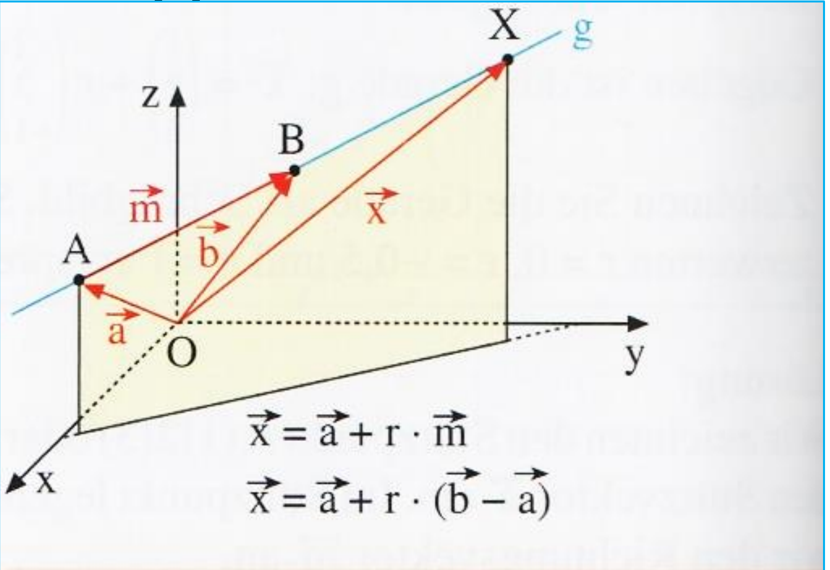
r heißt *Geradenparameter*.

Parameterdarstellung von Geraden #2

- Zwei-Punkte-Gleichung:

Buch S. 92 Ü3)

Buch S. 93 Nr. 8) und 9)



Die Zweipunktegleichung

Die Gerade g durch die Punkte A und B mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hat die Gleichung

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \ (r \in \mathbb{R}).$$

Das ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$

Lagebeziehung von Punkt/Gerade und Punkt/Strecke

Parametergleichung von g:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$$

Punktprobe für P:

$$\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix} \text{ gilt für } r = 0{,}5$$

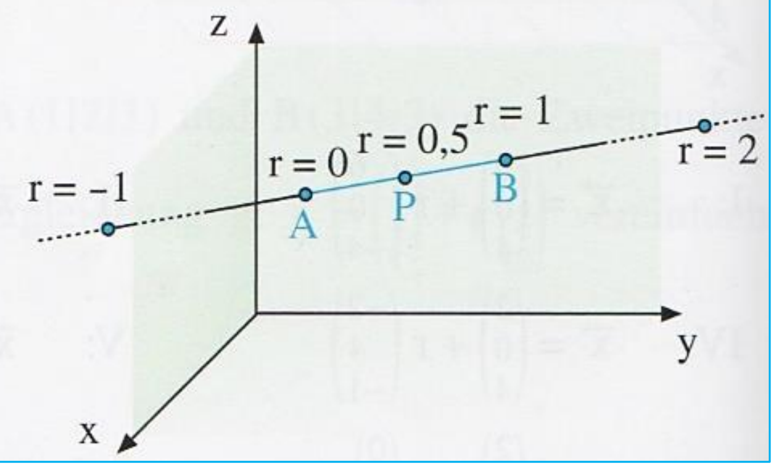
$\Rightarrow$ P liegt auf g.

Parametervergleich:

A: $r = 0$
B: $r = 1$
P: $r = 0{,}5$

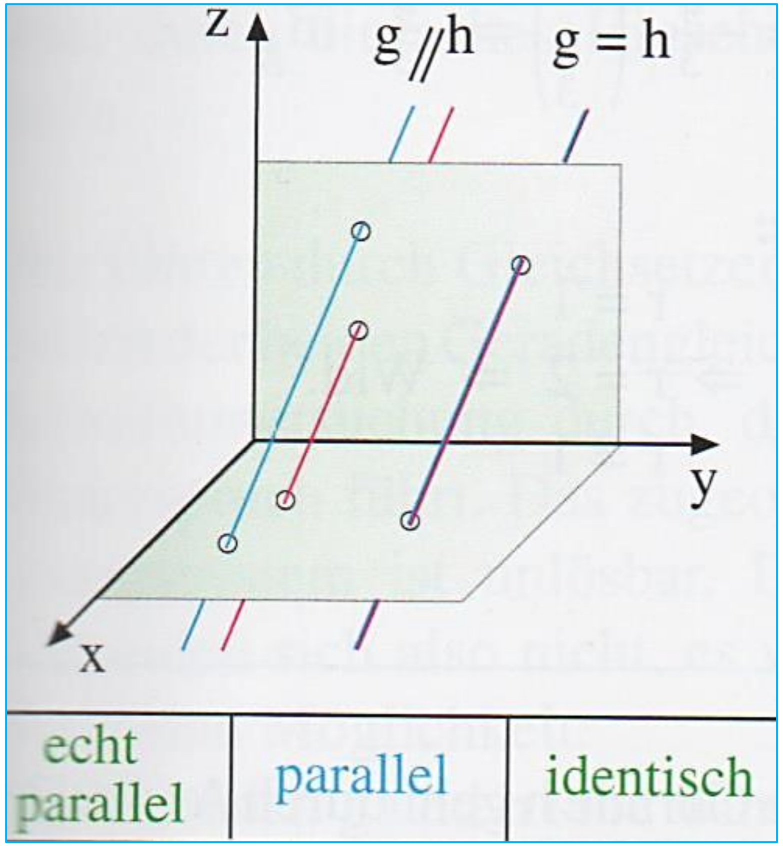
A(3|2|3), B(1|6|5), P(2|4|4)

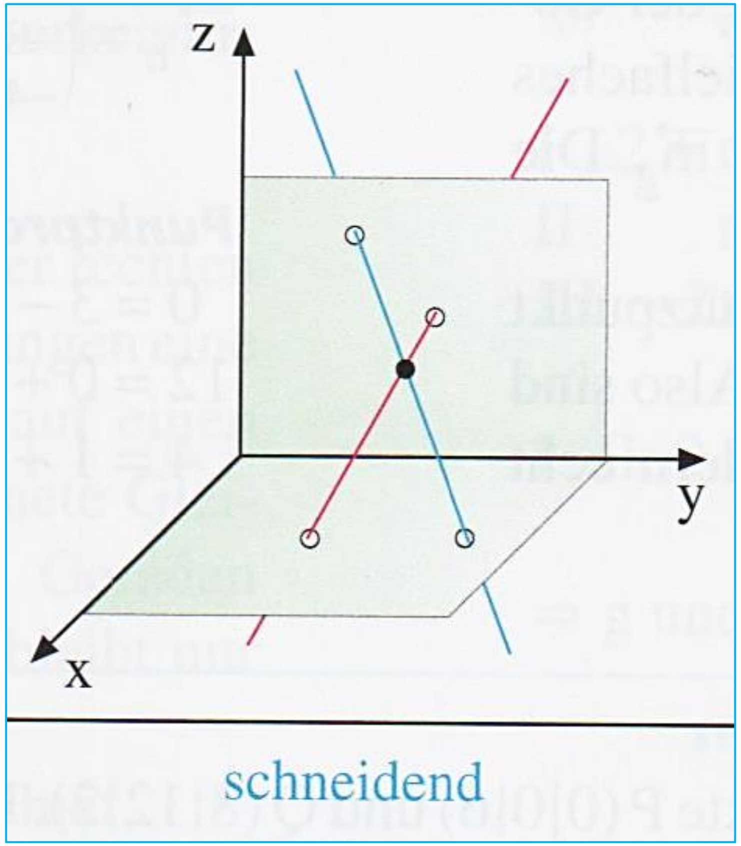
$\Rightarrow$ P liegt auf $\overline{AB}$.

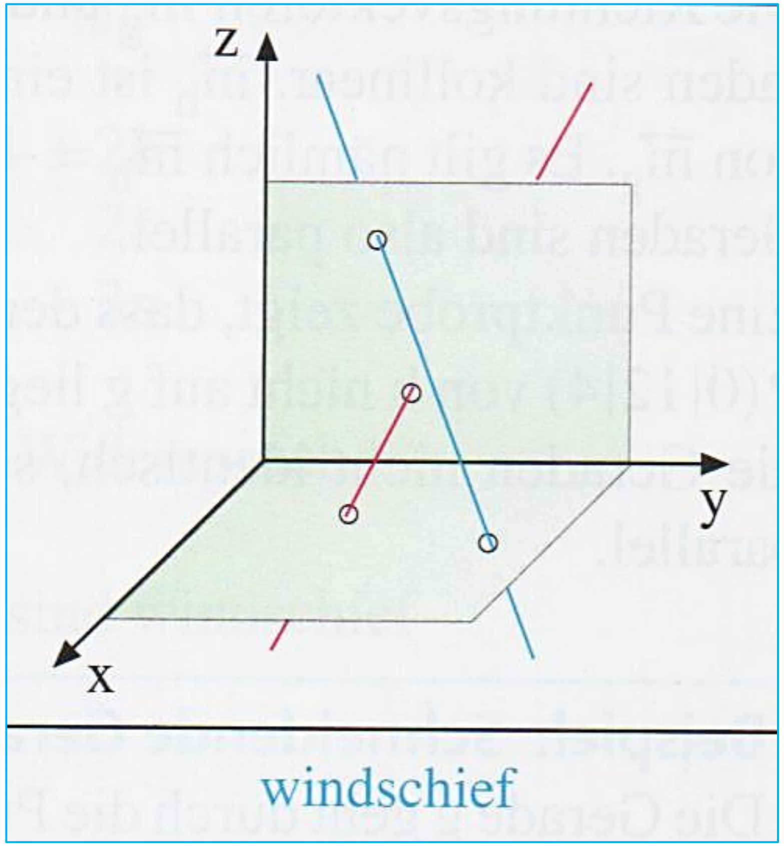


Buch S. 94 Ü1a), *Ü1b)*

Lagebeziehung zweier Geraden im Raum



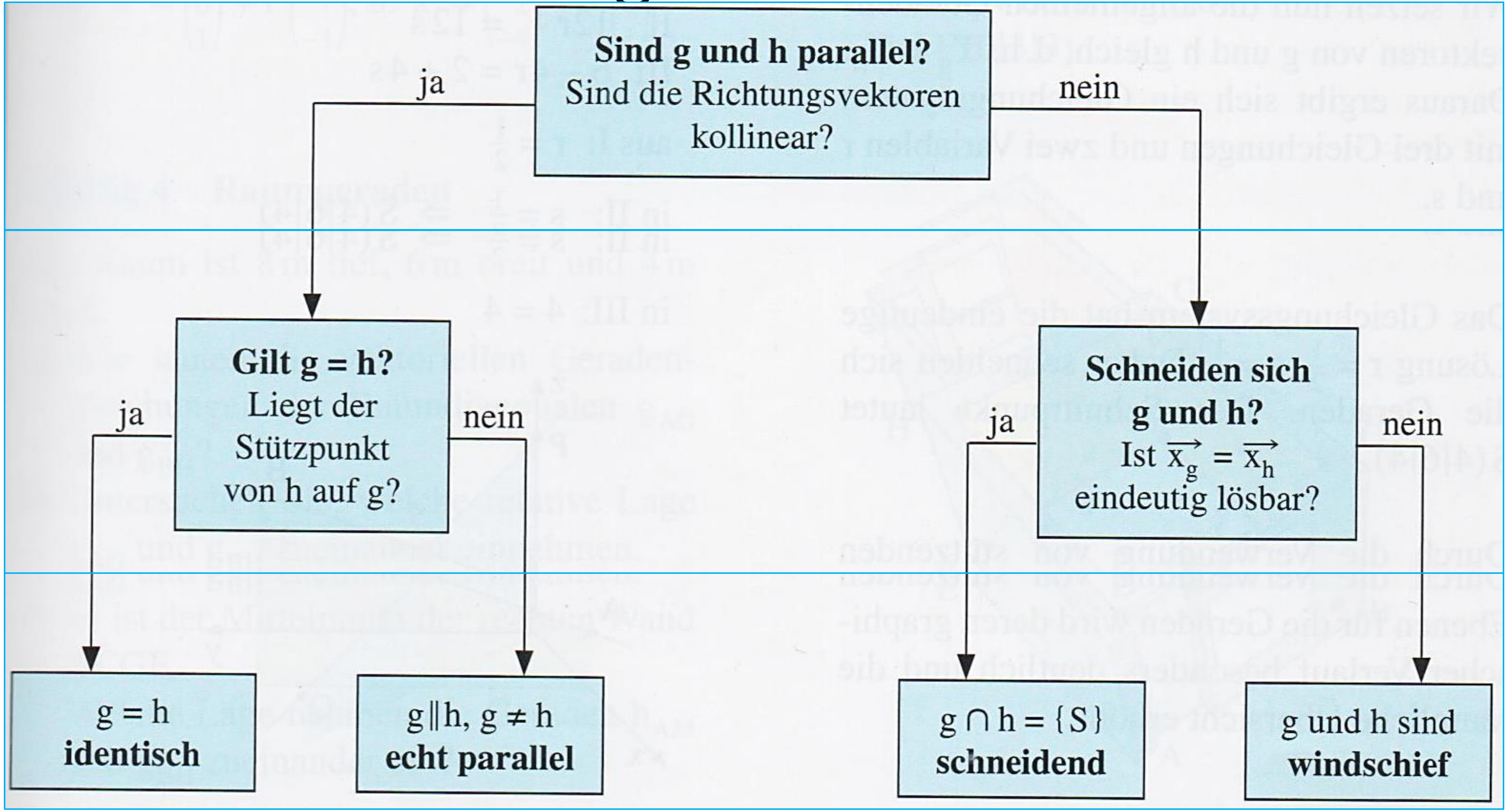




Worin unterscheiden sich die drei Bilder in Bezug auf die Lage der jeweiligen Geraden?

Schema zum Vorgehen

Buch S. 97 Ü2a-c)
Buch S. 98 Nr. 5), *6)*



Weitere Übungen – 4 Aufgaben aus:

- S. 100
  - Nr. 9)
  - 11) (unklare Vermutungen prüfen!)
  - 12) g mit k und v prüfen
  - 13a)
- S. 101
  - 14a)
  - 15a)
  - 16a)
  - 17a)

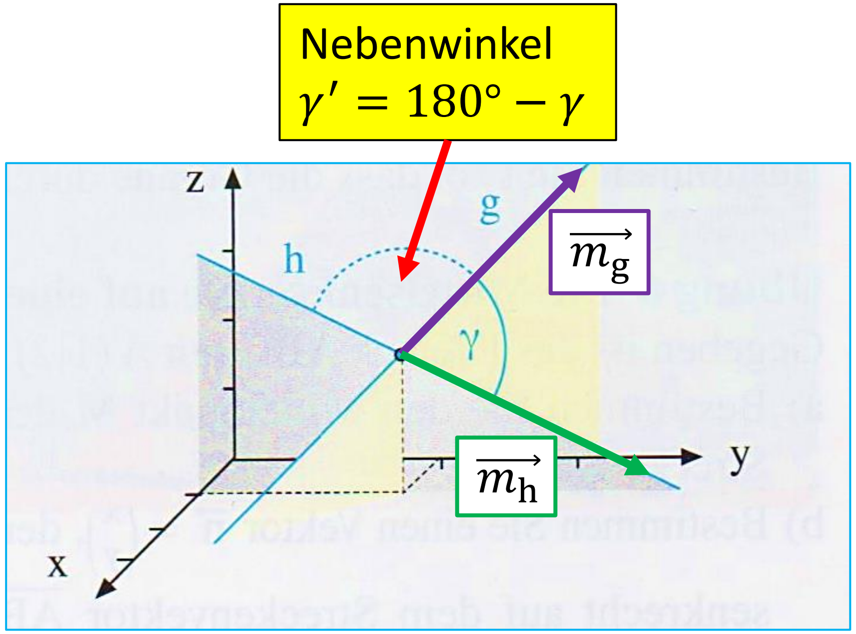
Winkel zwischen zwei Geraden im Raum: Der Schnittwinkel

Schnittwinkel von Geraden

g und h seien zwei Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{m}_1$ und $\vec{m}_2$. Dann gilt für ihren Schnittwinkel γ:

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2|}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|}.$$

Es gilt $0° \leq \gamma \leq 90°$.



- **Bestimmen** Sie zur Schattenaufgabe aus AB1 den Schnittwinkel der Schattengeraden zur Geraden, die durch den Fußpunkt des Baumes und die Schattenspitze verläuft.
- S. 104 Nr. 3b, c); 4); *6a, b, c)*