Themen für die 2. Matheklausur am 12.12.2024

Thema	Kompetenzen	Übungen
Kombinatorik	Ich kann in Sachzusammenhängen die Eigenschaften *mit/ohne* Reihenfolge und *mit /ohne* Zurücklegen identifizieren. Ich kann die Formeln der Kombinatorik anwenden. Ich kann mit Hilfe der Formeln der Kombinatorik Wahrscheinlichkeiten berechnen („Lotto-Modell“).	Seite 71 - 73
Bedingte Wahrscheinlichkeiten	Ich kann für Sachzusammenhänge Baumdiagramme und Vier-Felder-Tafeln zeichnen und fehlende Wahrscheinlichkeiten bestimmen. Ich die Bedeutung von gegebenen Ereignissen im Sachzusammenhang erklären. Ich kann bedingte Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe gegebener Anzahlen oder gegebener Wahrscheinlichkeiten berechnen. Ich kann Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit prüfen.	ABs „Widder und Migräne“ ~~ABs „bedingte Wahrscheinlichkeiten – Übungen“~~ AB mit gemischten Abi-Aufgaben Seite 79 & 81
Wahrscheinlichkeitsverteilungen	Ich kann Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Zufallsvariablen aufstellen. Ich kann den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsvariable berechnen. Ich kann untersuchen, ob ein Glücksspiel fair ist bzw. die Bedingungen des Spiels anpassen, damit es fair wird.	Seite 101-102 Seite 105-106 Seite 109

Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur am 12.12.2024

Aufgabe 1: Leon besitzt 10 Fantasybücher, 8 Krimis und 3 Romane. Leon hat seine Bücher in einem Koffer verstaut und mit einem Zahlenschloss mit 4 Rädern geschützt, die jeweils auf die Zahlen 0-9 eingestellt werden können.

a) Untersuchen Sie, wie viele Code-Kombinationen für das Schloss möglich sind.

b) Untersuchen Sie, wie viel weniger Code-Kombinationen gegenüber a) möglich sind, wenn jede Zahl höchstens einmal vorkommen darf.

Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Möglichkeiten für folgende Szenarien!

c) Leon wählt 3 beliebige Bücher aus, die er im Urlaub lesen möchte.

d) Leon wählt aus jedem Genre ein Buch aus.

e) Leon wählt 3 Bücher aus und wird sie in der gewählten Reihenfolge lesen.

Leon möchte nach seinem Urlaub die beschriebenen Bücher in seinem Bücherregel neu sortieren. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für folgende Szenarien.

f) Leon ordnet die Bücher beliebig an.

g) Leon ordnet die Bücher an, sodass die Fantasybücher, Krimis und Romane jeweils blockweise nebeneinander stehen.

h) Leon ordnet die Bücher in folgender Reihung an:

Nicht-Fantasy Fantasy Nicht-Fantasy Fantasy (…)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Leon beim Ziehen von fünf Büchern…

i) genau 3 Fantasybücher zieht.

j) mindestens 3 Romane zieht.

k) höchstens zwei Krimis zieht.

Aufgabe 2:

In einer Urne („Urne 1“) liegen 5 blaue und 3 gelbe Kugeln. In einer anderen Urne („Urne 2“) liegen 4 blaue und 2 gelbe Kugeln. Eine Versuchsperson entscheidet sich zufällig für eine der Urnen (also jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) und zieht anschließend eine Kugel.

a) Zeichnen Sie ein beschriftetes Baumdiagramm für das Zufallsexperiment.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person eine gelbe Kugel zieht.

c) Bestimmen Sie eine Wahrscheinlichkeit, dass eine blaue gezogene Kugel aus Urne 1 kam.

d) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „Die gezogene Kugel ist gelb“ und „es wird aus Urne 2 gezogen“ stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 3:

Stiftung Warentest lässt in einer Studie den Zusammenhang von Fahrradhelmen und dem Verletzungsrisiko untersuchen. Es stellte sich heraus, dass 97% aller Fahrradunfälle mit Fahrradhelmen ohne schwerwiegende Verletzungen ausgehen, bei Unfällen mit Fahrradhelm gehen 15% der Unfälle mit schwerwiegenden Verletzungen aus. Die Befragung zeigte, dass etwa 35% der Menschen einen Fahrradhelm beim Fahrradfahren tragen. Es werden folgende Ereignisse definiert:

H = Eine Person trägt einen Helm

V = Eine Person hat bei einem Unfall schwerwiegende Verletzungen erlitten.

Untersuchen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Person, die bei einem Verkehrsunfall schwerwiegende Verletzungen erlitten hat, hierbei keinen Helm getragen hat.

Aufgabe 4:

Kinder aus dem Kindergarten und der Grundschule werden gefragt, ob sie schwimmen können. 75 % aller Kinder sagen, dass sie nicht schwimmen können. Davon ist ein Drittel noch im Kindergarten. Von den Schwimmern ist ein Fünftel noch im Kindergarten. Hierbei werden folgende Ereignisse definiert:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}75\ ;\ P(B) = 1 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}75\ \ ;\ \ P(C) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}25 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}75\ \ ;\ \ P(D) = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0{,}25}{\frac{1}{5} \cdot 0{,}25 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}75}$$

Beschreiben Sie die Ereignisse A, B, C und D bzw. die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten im Sachzusammenhang und geben Sie diese in formaler Schreibweise an.

Aufgabe 5:

In einer Lostrommel befinden sich 500 Lose. Hierbei geben 80 Lose einen Gewinn von 10 Euro, 20 Lose einen Gewinn von 25 Euro und 400 Lose sind Nieten. Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler ein Los ziehen. X beschreibt den Gewinn/Verlust des Spielers.

a) Berechnen Sie $E(X)$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$. Begründen Sie, dass das Spiel nicht fair ist.

b) Der Betrag der 25-Euro-Lose sollen angepasst, sodass der Betreiber im Durchschnitt nur noch 0,50 Euro pro Spiel Gewinn macht. Untersuchen Sie, auf welchen Betrag die ursprünglichen 25-Euro-Lose geändert werden müssen.

c) Untersuchen Sie, wie viele Nieten Sie im ursprünglichen Spiel mindestens durch 10 Euro Gewinnlose ersetzen müssten, damit das Spiel fair wird.

Lösung: Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur am 12.12.2024

Aufgabe 1:

a) $10^4 = 10.000$

b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040 \rightarrow 10.000 - 5.040 = 4.960$

c) $\binom{21}{3} = 1330$

d) $10 \cdot 8 \cdot 3 = 240$

e) $21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$

f) $21! \approx 5{,}11 \cdot 10^{19}$

g) $10! \cdot 8! \cdot 3! \cdot 3! \approx 5{,}27 \cdot 10^{12}$

h) $11! \cdot (10!)^2 \cdot (9!)^2 \cdot (\dots) \cdot (1!)^2 \approx 1{,}77 \cdot 10^{63}$

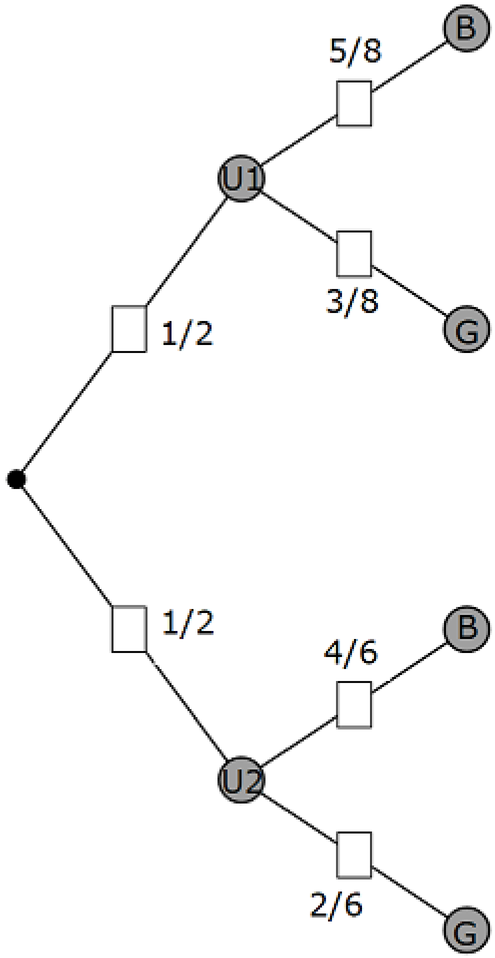
j) $P(j) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{11}{2}}{\binom{21}{5}} = \frac{2200}{6783} \approx 32{,}4\ \%$

$k)\ P(mind.\, 3\ Romane) = P(genau\ 3\ Romane) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{18}{2}}{\binom{21}{3}} = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{21}{3}} = \frac{153}{1330} \approx 11{,}5\ \%$

l) $P(höchstens\ 2\ Krimis) = \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{13}{5}}{\binom{21}{5}} + \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{13}{4}}{\binom{21}{5}} + \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{13}{3}}{\binom{21}{5}} = \frac{715}{969} \approx 73{,}79\ \%$

Aufgabe 2:

a)



b)

$$P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{17}{48}$$

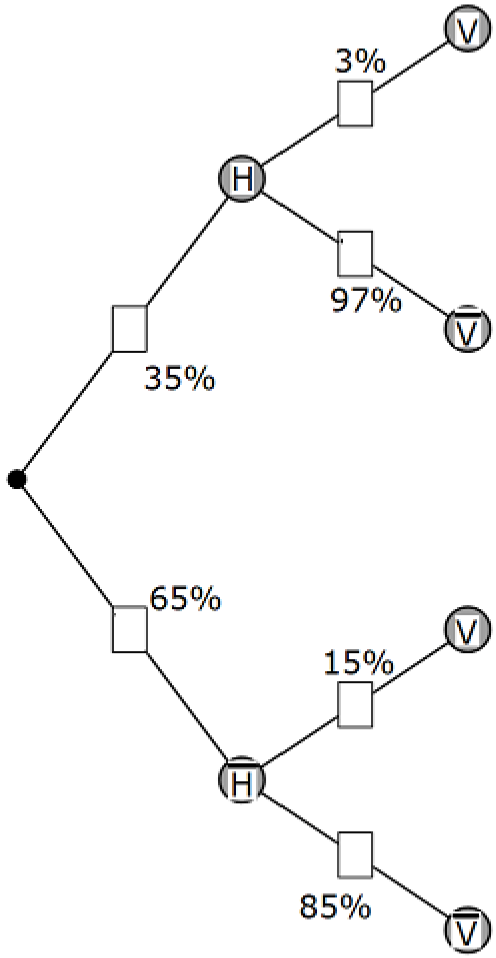
c)

$$P_B(U1) = \frac{P(B \cap U1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}}{1 - \frac{17}{48}} = \frac{15}{31}$$

d)

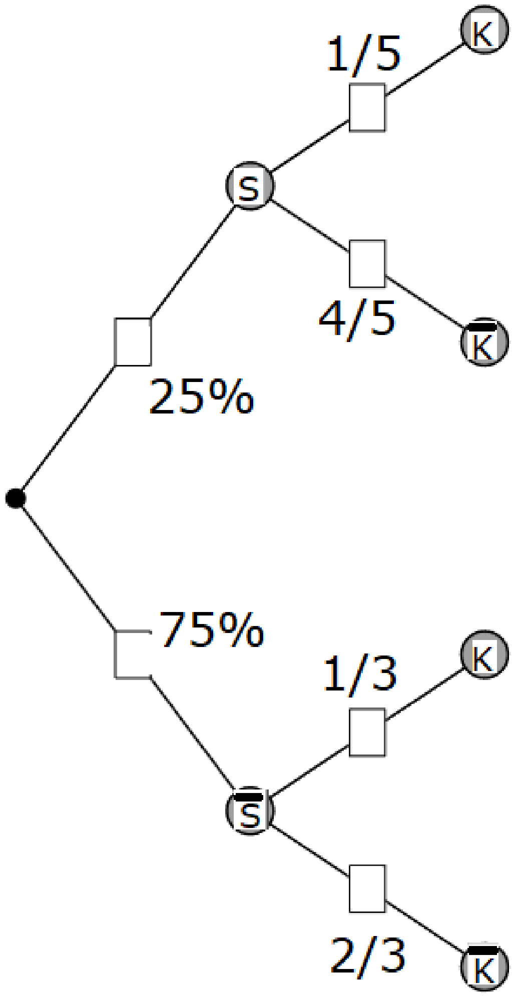
Es gilt $P(G) = \frac{17}{48}$ und $P_{U2}(G) = \frac{2}{6}$, daher also $P(G) \neq P_{U2}(G)$. Die Ereignisse sind damit stochastisch abhängig.

Aufgabe 3:



$$P_V(\overline{H}) = \frac{P(V \cap \overline{H})}{P(V)} = \frac{65\% \cdot 15\%}{35\% \cdot 3\% + 65\% \cdot 15\%} = \frac{65}{72} \approx 90{,}3\ \%$$

Aufgabe 4:



$P(A) = P(\bar{S} \cap K) \rightarrow A =$ Ein Kind ist Nichtschwimmer und geht in den Kindergarten.

$P(B) = P(\bar{A}) \rightarrow B =$ Ein Kind ist Schwimmer oder geht nicht in den Kindergarten.

$P(C) = P(K) \rightarrow C =$ Ein Kind geht in den Kindergarten.

$P(D) = \frac{P(K \cap S)}{P(K)} = P_K(S) \rightarrow D =$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kind Schwimmer ist, unter der Bedingung, dass es in den Kindergarten geht.

Aufgabe 5

a)

x_i	-5	5	20
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

$$E(X) = -5 \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{4}{25} + 20 \cdot \frac{1}{25} = -\frac{12}{5} = -2{,}40$$

Das Spiel ist nicht fair, weil $E(X) \neq 0$ gilt.

$$Var(X) = \frac{4}{5} \cdot (-5 - 2{,}40)^2 + \frac{4}{25} \cdot (5 - 2{,}40)^2 + \frac{1}{25} \cdot (20 - 2{,}40)^2 \approx 57{,}3$$

$$\sigma(X) = \sqrt{57{,}3} \approx 7{,}57$$

b)

x_i	-5	5	$a - 5$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

$$E(X) = -5 \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{4}{25} + (a - 5) \cdot \frac{1}{25} = -0{,}5 \rightarrow -3{,}2 + \frac{1}{25}a - \frac{1}{5} = -0{,}5 \rightarrow a = 72{,}5$$

→ Die Lose mit einem ursprünglichen Gewinn von 25€ müssen auf 72,5€ erhöht werden.

c)

x_i	-5	5	20
$P(X = x_i)$	$\frac{400 - r}{500}$	$\frac{80 + r}{500}$	$\frac{20}{500}$

$$-5 \cdot \frac{400 - r}{500} + 5 \cdot \frac{80 + r}{500} + 20 \cdot \frac{20}{500} = 0 \rightarrow -2000 + 5r + 400 + 5r + 400 \rightarrow r = 120$$