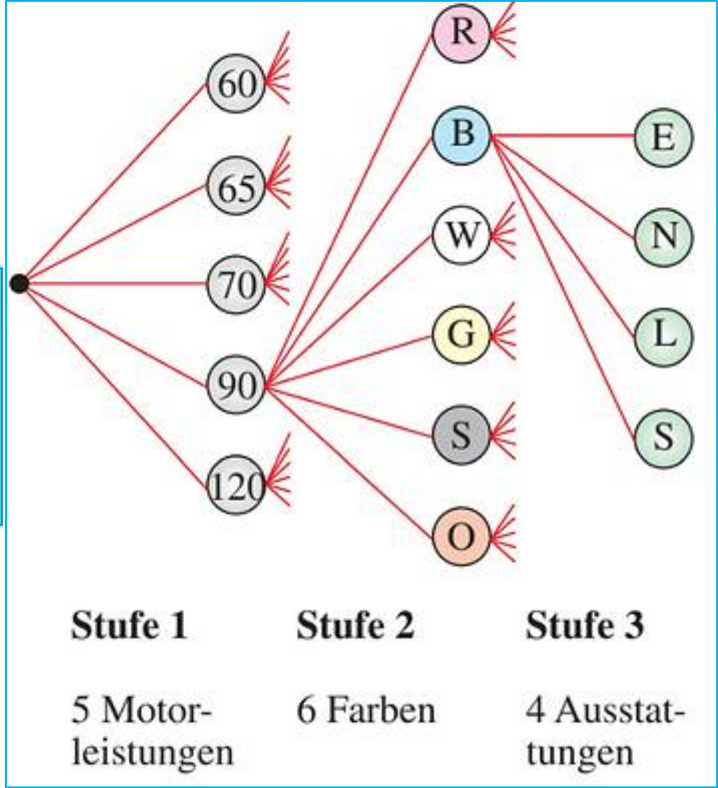
4) Kombinatorische Abzählverfahren

4.1) Die Produktregel mit Beispiel

Beispiel: Ein Autohersteller bietet für ein Modell 5 unterschiedliche Motorstärken (60 kW, 65 kW, 70 kW, 90 kW, 120 kW), 6 verschiedene Farben (Rot, Blau, Weiß, Gelb, Schwarz, Orange) und 4 verschiedene Innenausstattungen (einfach, normal, luxus, super) an.
Unter wie vielen Modellvarianten kann ein Käufer auswählen?



Die Produktregel

Ein Zufallsversuch werde in k Stufen durchgeführt. Die Anzahl der in einer beliebigen Stufe möglichen Ergebnisse sei unabhängig von den Ergebnissen vorhergehender Stufen.
In der ersten Stufe gebe es n_1, in der zweiten Stufe gebe es n_2, … und in der k-ten Stufe gebe es n_k mögliche Ergebnisse.
Dann hat der Zufallsversuch insgesamt $\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$ mögliche Ergebnisse.

- Für unser Beispiel gibt es folgende Modellvarianten, da immer alle Stufen vollständig verfügbar sind:

$$5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$$

Buch S. 67 Ü1)

Übung 1

In einer Großstadt besteht das Kfz-Kennzeichen aus zwei Buchstaben, gefolgt von zwei Ziffern, gefolgt von einem weiteren Buchstaben. Wie viele Kennzeichen sind in der Stadt möglich?

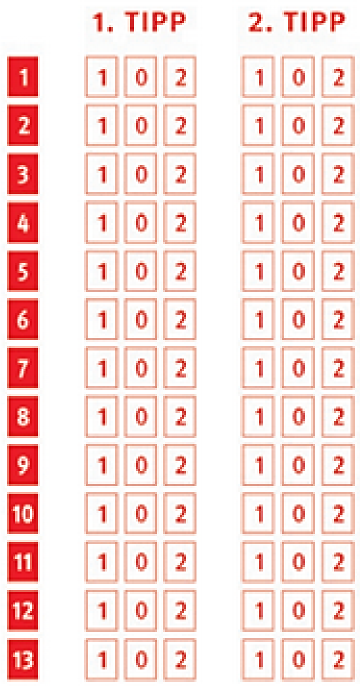
4.2) Geordnete Stichproben – mit oder ohne Zurücklegen?

- Mehrstufige Zufallsexperimente, die in jeder Stufe gleich ablaufen, lassen sich durch sog. **Urnenmodelle** darstellen. In einer solchen Urne liegen **n Kugeln**.
- Nacheinander werden dabei **k Kugeln mit oder ohne Zurücklegen** gezogen.
- Spielt die Reihenfolge der Kugeln eine Rolle, z.B. wenn sich ein Wort ergeben soll statt eines „Wortsalates“, dann muss die **Reihenfolge beachtet** werden und man spricht von einer **geordneten Stichprobe**. Ist die **Reihenfolge egal**, spricht man von einer **ungeordneten Stichprobe**.
- Merke: Unterscheiden zwischen **mit/ohne Zurücklegen** und **mit/ohne Beachtung der Reihenfolge**.

4.2.1) Geordnete Stichproben – <u>mit Zurücklegen</u>

Beispiel:

Beispiel: 13-Wette (Fußballtoto)
Beim Fußballtoto muss man den Ausgang von 13 festgelegten Spielen vorhersagen. Dabei bedeutet 1 einen Sieg der Heimmannschaft, 0 ein Unentschieden und 2 einen Sieg der Gastmannschaft. Wie viele verschiedene Tippreihen sind möglich?



- Urnenmodell mit 3 Kugeln für Sieg(1), Unentschieden (0) und Niederlage (2) liefert bei 13 Ziehungen:

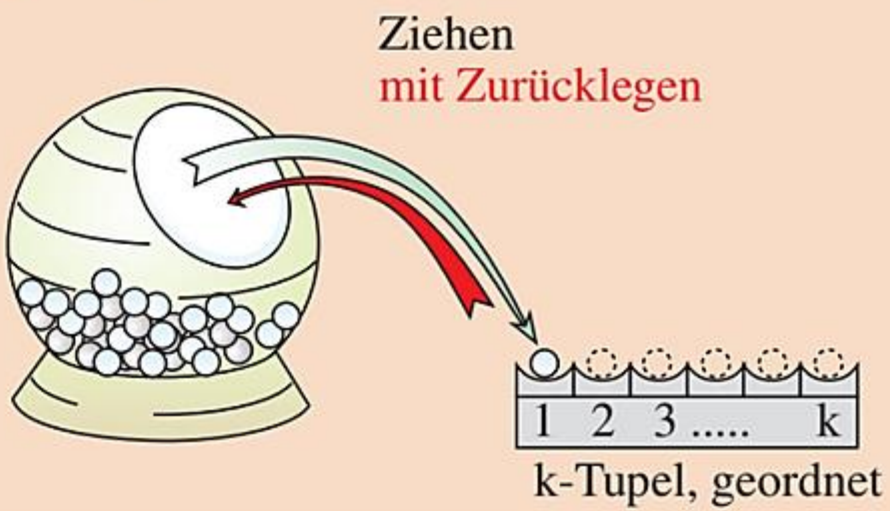
$$13^3 = 1.594.323$$

4.2.1) Geordnete Stichproben – <u>mit Zurücklegen</u>

Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge (geordnete Stichprobe)

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander k Kugeln ***mit Zurücklegen*** gezogen. Die Ergebnisse werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert. Dann gilt für die Anzahl N der möglichen Anordnungen (k-Tupel) die Formel

$$\mathbf{N = n^k}.$$



4.2.2) Geordnete Stichproben – <u>ohne Zurücklegen</u>

Beispiel:

Beispiel: Pferderennen
Bei einem Pferderennen mit 12 Pferden gibt ein völlig ahnungsloser Zuschauer einen Tipp ab für die Plätze 1, 2 und 3.
Wie groß sind seine Chancen, die richtige Einlaufreihenfolge vorherzusagen?

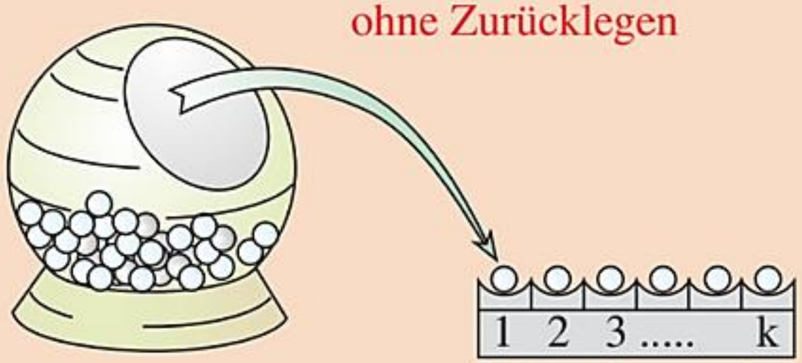
- Urnenmodell mit 3 Kugeln für Platz 1(1), Platz 2 (2) und Platz 3 (3) liefert bei 3 Ziehungen (da nur die ersten drei Plätze interessant sind und ein Pferd, das übers Ziel galoppiert ist, nicht mehr in Frage kommt):

$$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

4.2.2) Geordnete Stichproben – ohne Zurücklegen

Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge (geordnete Stichprobe)

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander k Kugeln ***ohne Zurücklegen*** gezogen. Die Ergebnisse werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert. Dann gilt für die Anzahl N der möglichen Anordnungen (k-Tupel) die Formel



$$\mathbf{N = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).}$$

Wichtiger Sonderfall: $k = n$. Aus der Urne wird so lange gezogen, bis sie leer ist. Es gibt dann $N = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (n-Fakultät) mögliche Anordnungen.

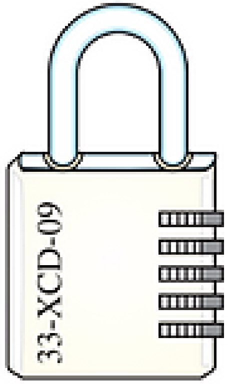
$0! = 1$ und
$1! = 1$

Urnenmodell für alle 12 Plätze des Pferderennens:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12! = 479.001.600$$

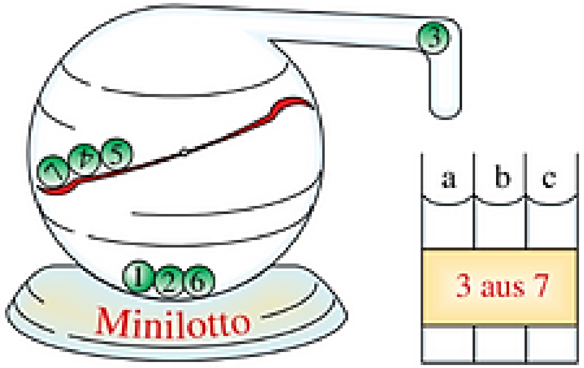
Übung zur geordneten Stichprobe
Buch S. 68 Ü2

Übung 2
Ein Zahlenschloss besitzt fünf Ringe, die jeweils die Ziffer 0, …, 9 tragen. Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlencodes sind möglich? Wie ändert sich die Anzahl der möglichen Zahlencodes, wenn in dem Zahlencode jede Ziffer nur einmal vorkommen darf, d. h. der Zahlencode aus fünf verschiedenen Ziffern bestehen soll? Wie ändert sich die Anzahl, wenn der Zahlencode nur aus gleichen Ziffern bestehen soll?



4.2.3) Ungeordnete Stichproben – <u>ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge</u> - #1

Beispiel: Minilotto „3 aus 7“
In einer Lottotrommel befinden sich 7 Kugeln. Bei einer Ziehung werden 3 Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man mit einem Tipp Lottokönig?



Aus einer Menge von 7 Zahlen lassen sich $7 \cdot 6 \cdot 5$ verschiedene 3-Tupel bilden.

- **Ohne Reihenfolge bedeutet**, dass z.B. **alle 3-er Tupel** mit 1, 4 und 7 (also (1;4;7), (1;7;4), (4;1;7), (4;7;1), (7;1;4) und (7;4;1)) werden **nur als eine Möglichkeit gewertet**!

4.2.3) Ungeordnete Stichproben – <u>ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge</u> - #2

- Für die gezogenen drei Zahlen gibt es **statt 6 nur eine Möglichkeit**, man muss die **gesamten Möglichkeiten für k Ziehungen ohne Zurücklegen also noch durch <u>6 = 3!</u> teilen**:
- $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$
- $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{3! \cdot 4!}$

  Bruch geschickt erweitern

- Allgemein für **7 = n** und **3 = k**: $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$\binom{n}{k}$ wird „**n über k**“ ausgesprochen und heißt **Binomialkoeffizient**.

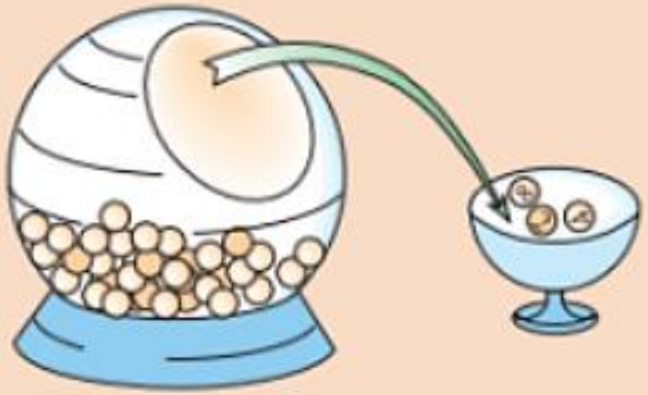
$\binom{n}{k}$ ist definiert für $0 \leq k \leq n$ und es gilt:

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ und } \binom{n}{n} = 1$$

4.2.3) Ungeordnete Stichproben – ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge - #3

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe)

Wird aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln eine ungeordnete Teilmenge von k Kugeln entnommen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten hierfür durch folgende Formeln gegeben:*

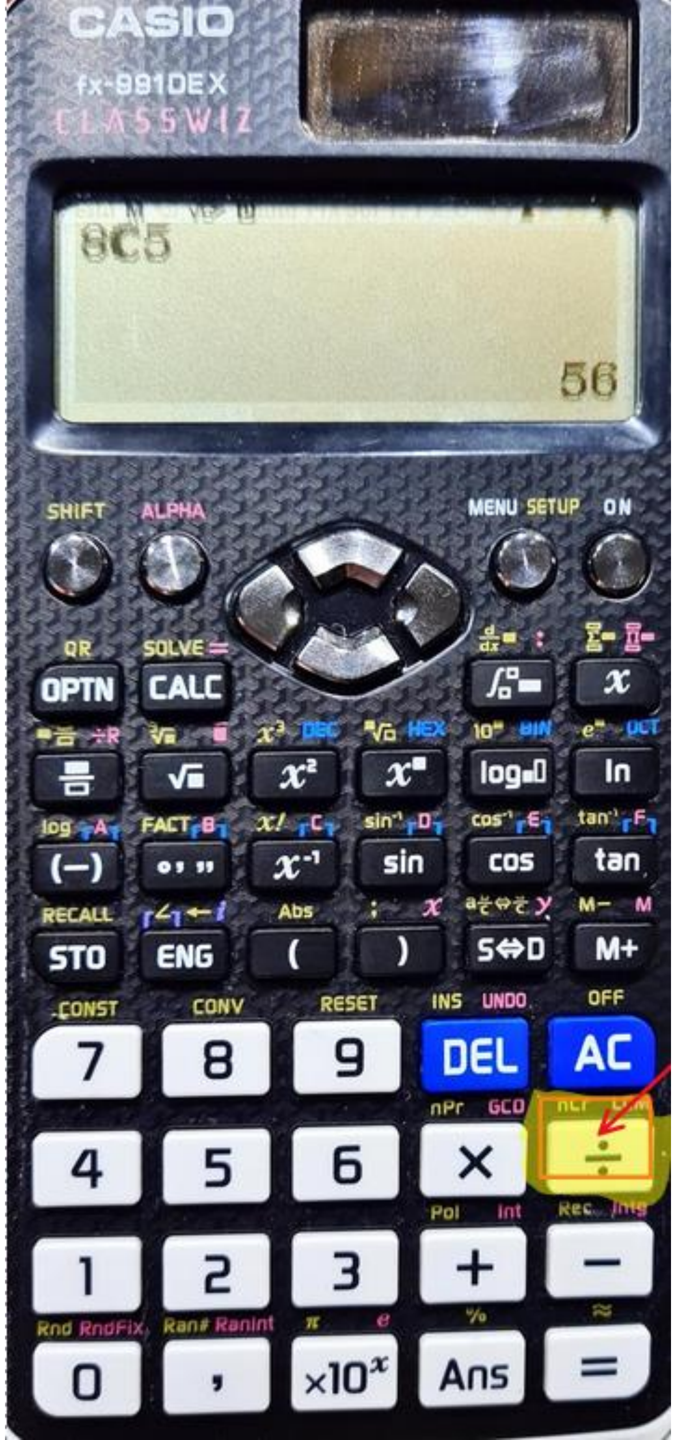


$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

4.2.3) Ungeordnete Stichproben –
<u>ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge</u>

- Beispiel: Zieht man aus einer Menge von n = 8 Kugeln genau k = 5 Kugeln, so ergibt sich für die Anzahl der Möglichkeiten:

$$\binom{n}{k} = \binom{8}{5} = 56$$



Zusammenfassung

	mit Beachtung der Reihenfolge	ohne Beachtung der Reihenfolge
mit Zurücklegen	n^k	$\cancel{\binom{n+k-1}{k}}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Übung zur ungeordneten Stichprobe
Buch S. 68 Ü3 – Ü5