Hinführung zum Hauptsatz am Beispiel „Wassertank“

Die Zuflussrate in einen Wassertank während eines 24minütigen Regenschauers kann durch die Funktion f mit folgender Gleichung modelliert werden:

- *Änderungsrate:* $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 4x; \quad x \in [0; 24]$

Dabei wird x in Minuten und die Zuflussrate $f(x)$ in Liter pro Minute gemessen. Der Wassertank ist zu Beginn leer. (vgl. Einstiegsaufgabe „Wassertank“)

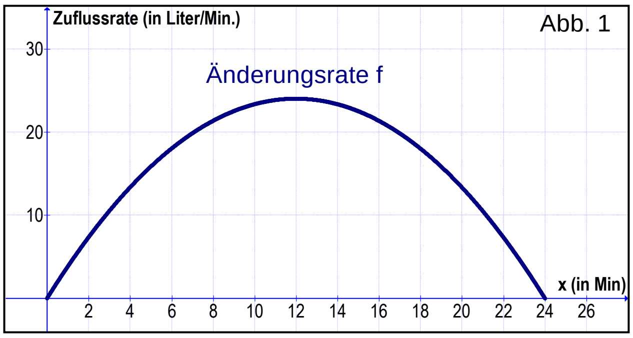
Aus der gegebenen Änderungsrate soll der Wasserbestand im Tank für diesen 24-minütigen Zeitraum ermittelt werden.

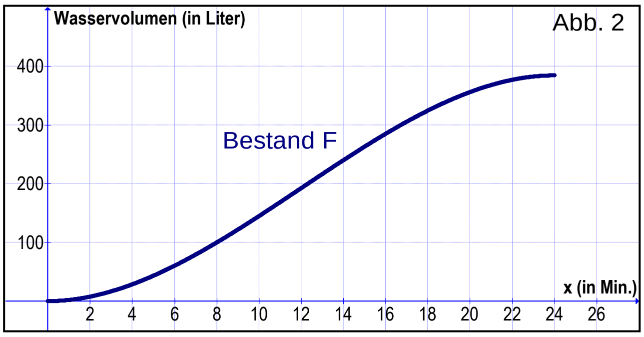
i) Mittels Differenzialrechnung:

Aus der Differenzialrechnung ist bekannt, dass man den Bestand über die Umkehrung des Ableitens, d.h. durch Aufleiten der Änderungsrate erhält: In Bezug auf das Wassertank-Beispiel bedeutet dies, dass das gesammelte Wasservolumen im Behälter (in Liter) durch eine Stammfunktion F der Zuflussrate f beschrieben wird:

- *Bestandsfunktion:* $F(x) = -\frac{1}{18}x^3 + 2x^2 + c; \quad x \in [0; 24]$

Weil der Tank zu Beginn leer ist, d.h. weil $F(0)=0$ ist, gilt $c = 0$.





Übung 1 (zum Verständnis und zur Wiederholung)

a. Berechnen Sie mit Hilfe der beiden Funktionsgleichungen den Wasserzufluss und den Wasserbestand im Tank sechs Minuten nach Beginn des Regenschauers.

b. Berechnen Sie, welche Wassermenge zwischen Minute vier und sechs in den Tank hinzugekommen ist.

Zusammenfassendes Ergebnis aus Teil i (Differenzialrechnung)

Wenn F eine (beliebig gewählte) Stammfunktion zu der gegebenen Änderungsratenfunktion f ist, so gilt:

- Der Bestand $B(x)$ zum Zeitpunkt x beträgt $F(x) + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen ist, dass für den Bestand zum Zeitpunkt 0 gilt: $B(0) = F(0) + c$.
- Die Bestandsänderung $B(b) - B(a)$ zwischen zwei Zeitpunkten b und a (mit $b > a$) beträgt $\boldsymbol{F(b) - F(a)}$.

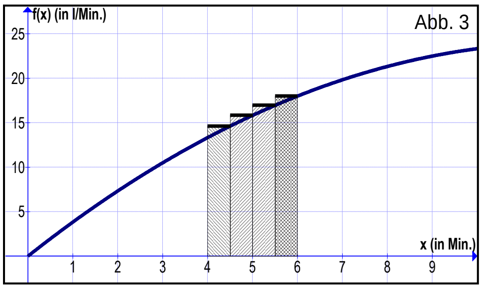
ii) Mittels Integralrechnung:

Aus der Integralrechnung ist bekannt, dass man den Bestand zu gegebener Änderungsratenfunktion f auf [a;b] durch das „fünfschrittige Rekonstruktionsverfahren“ bestimmen kann (siehe Tabelle). Das Ergebnis dieses Verfahrens nennt man das Integral von f auf [a;b]. Geometrisch kann dies als Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf [a;b] gedeutet werden.

Integral als verallgemeinertes Produkt			
Nr.	**verbale Beschreibung**	**formale Beschreibung**	**im Wassertank-Beispiel für das Intervall $[4; 6]$ $(n \geq 4)$**
1	Teilung des Intervalls $[a; b]$ in n Teilintervalle der Länge Δx_i	$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, .., n)$	
2	Annahme von stückweise konstanten Funktionswerten $f(x_i)$ auf den n Teilintervallen	$f(x_i) =$ konstant auf $[x_{i-1};\ x_i\ ]$ für $i = 1, .., n$	
3	Multiplikation der Intervalllängen mit dem zugehörigen konstanten Funktionswert $f(x_i)$	$f(x_i) \cdot \Delta x_i$	
4	Addieren der n Produkte	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$	
5	Erhöhung der Anzahl n an Teilintervallen und Wiederholung der Schritte (=> Grenzwertbildung)	$\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$	
⇨ **Integral der Funktion f auf $[a; b]$:** $\int_a^b f(x)dx$			

Übung 2 (zum Verständnis und zur Wiederholung):

Berechnen Sie durch das Bilden von mindestens $n = 4$ Rechtecken näherungsweise den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse auf dem Intervall $[4; 6]$. Bilden Sie den Grenzwert für $n \to \infty$ ggf. mit Hilfe von Geogebra (z.B. Datei „Flächenberechnung mit Ober-/Untersumme“) oder mit dem Taschenrechner und beschreiben Sie die inhaltliche Bedeutung dieser Fläche in Bezug auf den Wassertank-Kontext.



Zusammenfassendes Ergebnis aus Teil ii (Integralrechnung)

Eine Bestandsänderung *B*(*b*)-*B*(*a*) zwischen zwei Zeitpunkten a und b (mit $b > a$) kann bei gegebener Änderungsratenfunktion f durch das Integral rekonstruiert werden: *B*(*b*)-*B*(*a*)= $\int_a^b f(x)dx.$

iii) Zusammenführung der Differenzial- und Integralrechnung

Vergleichen Sie die Ergebnisse aus Teil i und ii. Beide Methoden liefern dasselbe Ergebnis und damit den Hauptsatz.

Zweiter Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall I und F eine Stammfunktion von f, dann gilt für $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Übung 3 (zum Verständnis)

Berechnen Sie das Integral der Funktion f auf dem Intervall $[10; 20]$ mit Hilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung. Verwenden Sie dabei die formale Integralschreibweise und visualisieren Sie den berechneten Wert mit Hilfe der Graphen in den Abbildungen 1 und 2.

Verallgemeinerte Aussage zum zweiten Hauptsatz

Wählt man im zweiten Hauptsatz die obere Grenze b variabel, erhält man auf der linken Seite der Gleichung die Integralfunktion I_a zur Funktion f und rechts die Stammfunktion F (korrigiert um die Konstante $F(a)$):

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

$$I(x) = F(x) - F(a)$$

Durch Integrieren einer Änderungsratenfunktion f erhält man also (wieder) ihre Stammfunktion F. Zusammenfassend bedeutet das: **Integrieren macht Differenzieren rückgängig** (bis auf eine Konstante).

Hinführung zum ersten Hauptsatz

Als Umkehrung zum ersten Teil des Hauptsatzes, bei dem eine Änderungsratenfunktion integriert wird, soll nun untersucht werden, was beim Ableiten der Integralfunktion passiert…:

Voraussetzung: Die Funktion f hat eine Stammfunktion F.

Aus dem zweiten Hauptsatz ist bekannt:

$$I(x) = F(x) - F(a)$$

Durch Ableiten erhält man:

$$I'(x) = F'(x)$$

Die Ableitung von F ist bekanntermaßen f. Man erhält:

$$I'(x) = f(x)$$

Durch Ableiten einer Integralfunktion I zur Funktion f, erhält man also wieder die Funktion f. Zusammenfassend bedeutet das: **Differenzieren macht Integrieren rückgängig**

Erster Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Die Funktion f habe eine Stammfunktion F. Dann gilt für die Integralfunktion $I(x) := \int_a^x f(t)dt$:

$$\boldsymbol{I'(x) = f(x)}$$

Übung 4 (zum Verständnis)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 4x$.

a. Geben Sie die Gleichung der Integralfunktion $I(x) = \int_{10}^x f$ an (vgl. Hauptsatz – Teil 2).

b. Bilden Sie die Ableitung der Integralfunktion $I(x)$ (vgl. Hauptsatz – Teil 1).