Themen der 1. Mathematikklausur am 31.10.2024

1, Analytische Geometrie

Thema	Kompetenzen	Übungen
Darstellungsformen von Ebenen	Ich kann eine Ebenengleichung aus gegebenen Punkten aufstellen. Ich kann die Parameterform einer Ebene in die Koordinatenform überführen und umgekehrt.	AB „Koordinatenform der Ebenengleichung“
Lagebeziehung von geometrischen Objekten (Punkten / Geraden / Ebenen)	Ich kann eine Punktprobe für Geraden und Ebenen durchführen. Ich kann die Lagebeziehung Gerade/Gerade, Gerade/Ebene, Ebene/Ebene untersuchen.	
Abstandsberechnungen	Ich kann den Abstand von Objekten für die Kombinationen Punkt/Gerade, Punkt/Ebene, Gerade/Ebene, Ebene/Ebene berechnen.	AB „AB5 – Lotfußpunkt-Verfahren zur Abstandsbestimmung“
Komplexe Aufgaben zu analytischer Geometrie	Ich kann komplexe Aufgaben zu Punkten, Geraden und Ebenen lösen.	AB „Wiederholung: Komplexe Aufgabe zu Geraden & Ebenen“ AB „Komplexe Aufgaben zur Abstandsberechnung“

2, Stochastik

Thema	Kompetenzen	Übungen
Grundbegriffe der Stochastik	Ich kenne die Grundbegriffe Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, Ergebnismenge, Schnitt, Vereinigung, Gegenereignis, sicheres Ereignis, unmögliches Ereignis und Wahrscheinlichkeit. Ich kann für Zufallsexperimente die Ergebnismenge, Ereignisse, Gegenereignisse, Schnitte und Vereinigungen in Mengenschreibweise darstellen.	Seite 31 – 34
Häufigkeiten und Gesetz der großen Zahlen	Ich kann die absolute und relative Häufigkeit eines Ereignisses anhand gegebener Daten bestimmen. Ich kann den Unterschied zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erklären und das Gesetz der großen Zahlen erläutern.	Arbeitsblätter „Absolute und relative Häufigkeit von Zufallsexperimenten“ Arbeitsblatt „Gesetz der großen Zahlen“ Seite 39 – 40
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	Ich kann die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen <u>durch Zählen</u> bestimmen, in denen <u>alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind</u>.	Seite 43 – 45
Mehrstufige Zufallsexperiment	Ich kann für mehrstufige Zufallsexperimente Baumdiagramme zeichnen. Ich kann Wahrscheinlichkeiten von mehrstufigen Ereignissen berechnen, bei denen nicht alle Ereignisse gleich wahrscheinlich sind.	Seite 47 – 50

Übungsaufgaben für die 1. Mathematikklausur am 31.10.2024

Analytische Geometrie:

Aufgabe 1: Warm-Up zu Geraden und Ebenen

a) Eine Ebene verläuft durch die Punkte $P_1(5|-1|0)$, $P_2(0|-11|0)$ und $P_3(0|-9|3)$. Berechnen Sie die Ebenengleichung der Ebene in Koordinatenform und berechnen Sie den Abstand der Ebene von dem Punkt $R(-23|22|-4)$.

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebene $E: 2x + y - 2z = 0$ und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$.

c) Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(1|2|3)$ auf der Geraden liegt, die durch die Punkte $A(-3|5|8)$ und $B(0|9|-2)$ veräuft.

d) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebenen $E_1: 7x + y - 3z = 8$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Berechnen Sie den Abstand der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ von der Ebene $E: 6x - 2y + 3z = 7$.

Aufgabe 2: Komplexe Aufgabe

Ein Helikopter fliegt bei schlechter Sicht auf ein eben ansteigendes Bergmassiv zu, welches durch die Punkte $P(0|5|0)$, $Q(5|10|2)$ und $R(10|10|2)$ beschrieben wird. Der Helikopter fliegt durch die Punkte $A(1|6|1)$ und $B(2|7|1)$. Alle Angaben sind in km.

a) Berechnen Sie eine Ebenengleichung des Berghangs in Parameter- und Koordinatenform.
[Kontrolllösung: $E: 2y - 5z = 10$]

b) Berechnen Sie den Punkt, in dem der Hubschrauber auf den Berghang stoßen würde, wenn das Flugzeug seine Flugrichtung beibehält.

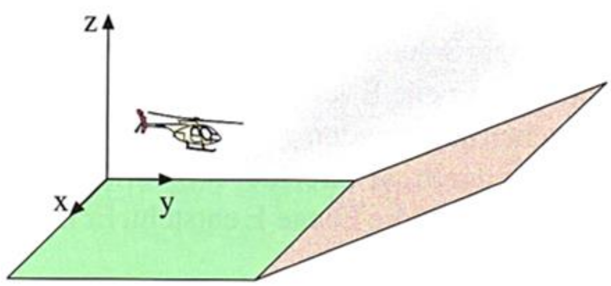
Um eine Kollision mit dem Berghang zu vermeiden, behält der Pilot seine Bewegung x-y-Richtung bei, verändert jedoch die Bewegung in x-Richtung. Seine Flugbahn verläuft nun parallel zum Berghang.

c) Interpretieren Sie die Gleichung im Sachzusammenhang und ermitteln Sie die neue Flugbahn des Flugzeugs:
[Kontrolllösung: Neue Flugbahn $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$]

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 0}$$

d) Berechnen Sie den Abstand des Flugzeugs von dem Berghang in seiner neuen Flugbahn aus Aufgabenteil c).

e) Zu einem späteren Zeitpunkt befindet sich das Flugzeug im Punkt $X(3|8|4)$ direkt oberhalb des Berghangs. Berechnen Sie, wie viel Kilometer oberhalb der Ebene sich das Flugzeug befindet.



Aufgabe 3: Sie werfen eine Münze mit Beschriftungen 0 und 1 insgesamt 3-mal und notieren die aufgetretenen Ergebnisse.

a) Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an. Geben Sie auch folgende Ereignisse in Mengenschreibweise an:

E_1 = Es fällt immer dieselbe Zahl.

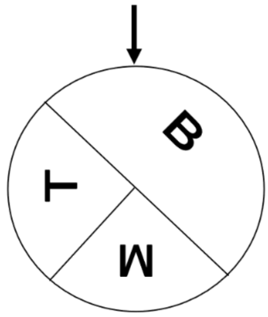
E_2 = Die Zahlen 0 und 1 treten immer abwechselnd auf.

E_3 = Es tritt genau zweimal die 1 auf.

b) Bestimmen Sie $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_3, \overline{E_1} \cap \overline{E_3}$ und $(E_1 \cup E_2) \cap \overline{E_3}$ in Mengenschreibweise.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse E_1, E_2 und E_3.

Aufgabe 4: Bei dem abgebildeten Glücksrad ist der Sektor B doppelt so groß wie die beiden anderen Sektoren. Das Rad wird zweimal gedreht.



a) Stellen Sie das Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm dar.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweimaligen Drehen B nicht vorkommt.

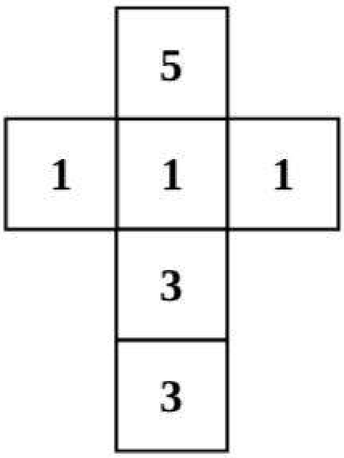
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der im ersten Zug gedrehte Buchstabe im Alphabet weiter vorne liegt als der im zweiten Zug gedrehte Buchstabe.

d) Der Spieler gewinnt 8€, wenn zweimal derselbe Buchstabe gedreht wird. Berechnen Sie den Einsatz des Spieles, sodass das Spiel fair ist.

e) Lukas spielt das Spiel dreimal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er das Spiel mindestens einmal gewinnt.

Aufgabe 5: Sechsseitiger Würfel

Der zum rechts dargestellten Würfelnetz gehörende Würfel wird dreimal geworfen.



a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E_1 = Es fällt genau zweimal die 5.

E_2 = Es fällt mindestens eine 5.

E_3 = Es fällt höchstens eine 5.

E_4 = Es kommt jede Zahl wenigstens einmal vor.

E_5 = Es tritt die Folge 1-5-3 auf.

$E_6 = E_2 \cap E_3$

$E_7 = E_2 \cup E_3$

$E_8 = \overline{E_2 \cup E_3}$

b) Der Spieler gewinnt 10€, wenn man in den drei Drehungen in der Summe mindestens einen Wert von 10 würfelt. Berechnen Sie den Einsatz des Spieles, sodass das Spiel fair ist.
[Kontrolllösung: Der Einsatz beträgt ca. 1,30 €]

c) Das Spiel wird nun erschwert, indem man in der Summe nun einen Wert von mindestens 12 würfeln muss um zu gewinnen. Untersuchen Sie, mit welchem Gewinn pro Spiel langfristig zu rechnen ist, wenn der Einsatz aus Aufgabenteil b) beibehalten wird.

Aufgabe 6: Münzwurf

Sie werfen in einem Glücksspiel zeitgleich zwei verschiedene Münzen. Eine Münze trägt die Aufschriften 0 und 1, die andere Münze die Aufschriften 1 und 2. Nachdem die Münzen gefallen sind, berechnen Sie die Augensumme.

Der Spieler erhält im Spiel die Höhe der Augensumme in € ausgezahlt. Ermitteln Sie einen geeigneten Einsatz für das Spiel, damit das Spiel fair ist.

Aufgabe 7: HIV-Test

In der Diagnostik von Krankheiten sind medizinische Tests nicht wegzudenken. Sie helfen Medizinern, schnell den Grund für bestimmte Beschwerden zu finden. Medizinische Tests sind jedoch nicht vollkommen zuverlässig. Bei einem Test zur Diagnostik von Herzerkrankungen gilt Folgendes:

- Die Sensitivität des Tests beträgt 98%, d.h. 98% der erkrankten Personen erhalten ein positives Testergebnis.
- Die Spezifität des Tests beträgt 95%, d.h. 95% der gesunden Personen erhalten ein negatives Testergebnis.

Man geht davon aus, dass ca. 0,2% der Bevölkerung an der Herzerkrankung leiden.

Stellen Sie die Situation in einem Baumdiagramm dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Test ein falsches Ergebnis liefert.

Aufgabe 8: Schuss auf zwei Hasen

Ein Jäger sichtet in einem Gebüsch zwei Hasen. Er schießt hierbei auf beide Hasen jeweils einmal. Auch wenn er den ersten Hasen verfehlt haben sollte, schießt er dennoch beim zweiten Schuss auf den zweiten Hasen.

Der Jäger trifft die Hasen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von p.

a) Stellen Sie das Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm dar.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Jäger genau einen der beiden Hasen trifft, liegt bei 42%. Bestimmen Sie alle Wahrscheinlichkeiten, die für p in Frage kommen. Begründen Sie, dass es genau zwei Lösungen gibt.

Übungsaufgaben für die 1. Mathematikklausur am 31.10.2024

Aufgabe 1:

a) Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -30 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}$

Koordinatenform: $-30x + 15y - 10z = -165 \rightarrow -6x + 3y - 2z = -33$

Hilfsgerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -23 \\ 22 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: $-6(-23 - 6t) + 3(22 + 3t) - 2(-4 - 2t) = -33 \rightarrow t = -5$

$$\begin{pmatrix} -23 \\ 22 \\ -4 \end{pmatrix} + (-5) \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Abstand: $\left| \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -23 \\ 22 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{30^2 + 15^2 + 10^2} \approx 35$

b) Einsetzen der Geradengleichung in die Koordinatenform:

$2 \cdot (7 + 3r) + (-1 + r) - 2(4 + 3{,}5r) = 0$

$14 + 6r - 1 + r - 8 - 7r = 0$

$5 = 0 \rightarrow$ Die Gerade verläuft parallel zur Ebene

c)

Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$

Punkt einsetzen: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 1 = -3 + 3r \rightarrow r = \frac{4}{3}$

$\rightarrow 2 = 5 + 4r \rightarrow r = -\frac{3}{4}$

Nein!

d)

Einsetzen von Ebene E_1 in E_2:

$7 \cdot s + 1 - r - 3 \cdot 2r = 8$

$-7r + 7s = 7$

$s = 1 + r$

Schnittgerade:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + (1+r) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

e)

Wir wählen den Punkt $P(7|-1|4)$ von g und berechnen den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$

Hilfsgerade: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: $6(7 + 6r) - 2(-1 - 2r) + 3(4 + 3r) = 7 \rightarrow r = -1$

$$\begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Abstand: $\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-6\\2\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7$

Aufgabe 2:

a) Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix}$

Koordinatenform: $10y - 25z = 50 \rightarrow 2y - 5z = 10$

b) Geradengleichung des Flugzeugs: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $2(6+t) - 5 \cdot 1 = 10 \rightarrow t = 1{,}5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 7{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow S(2{,}5|7{,}5|1)$$

c) Das Flugzeug behält seine Bewegung x-y-Richtung und verändert sie lediglich in z-Richtung. Daher bleiben der Wert 1 in der x-Richtung und y-Richtung des Richtungsvektors der Geraden erhalten, nur der letzte Wert ändert sich und ist unbekannt.

Weil das Flugzeug parallel zur Ebene fliegt, sind der Richtung der Flugbahn des Flugzeugs und der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ orthogonal. Dadurch entsteht die angegebene Gleichung.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -2 + 5z = 0 \rightarrow z = \frac{2}{5}$$

Flugbahn: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$

d) Wir wählen den Punkt $P(1|6|1)$ von der Flugbahn des Flugzeugs und berechnen den Abstand von P zur Ebene E.

Hilfsgerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Setze die Hilfsgerade in die Ebene ein: $2(6-2v) - 5(1+5v) = 10 \rightarrow v = -\frac{3}{29}$

Schnittpunktberechnung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{29} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{180}{29} \\ \frac{14}{29} \end{pmatrix}$

Abstand: $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{180}{29} \\ \frac{14}{29} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{29} \\ \frac{15}{29} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{6}{29}\right)^2 + \left(\frac{15}{29}\right)^2} \approx 0{,}56$

e) Nutze die Hilfsgerade, die vom X aus gesehen senkrecht nach unten zeigt.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von h und E: $2 \cdot 8 - 5(4 - w) = 10 \rightarrow w = 2{,}8$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + 2{,}8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$$

Abstand: $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1{,}2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} \right| = 2{,}8$

Aufgabe 3

a) $\Omega = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$

$E_1 = \{(0,0,0), (1,1,1)\} \rightarrow \overline{E_1} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

$E_2 = \{(0,1,0), (1,0,1)\}$

$E_3 = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\} \rightarrow \overline{E_3} = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,1,1)\}$

b) $E_1 \cup E_2 = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,1)\}$

$E_1 \cap E_3 = \{\,\}$

$\overline{E_1} \cap \overline{E_3} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

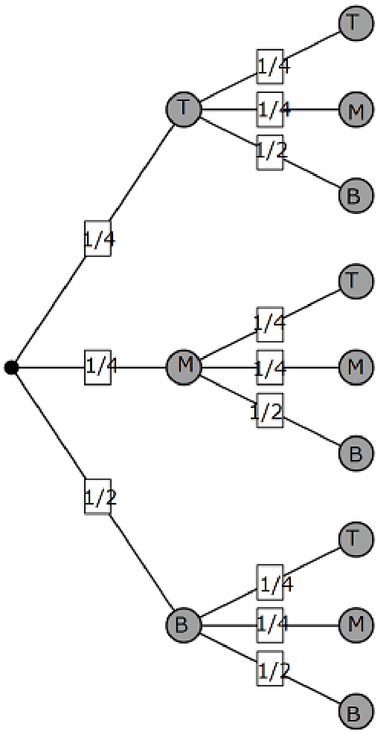
$(E_1 \cup E_2) \cap \overline{E_3} = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,1)\} \cap \overline{E_3} = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$

c) $P(E_1) = P(E_2) = \frac{2}{8}$

$P(E_3) = \frac{3}{8}$

Aufgabe 4

a)



b) $P(b) = P(TT) + P(TM) + P(MT) + P(MM) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

c) $P(c) = P(MT) + P(BM) + P(BT) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

d) $P(gleicher\ Buchstabe) = P(TT) + P(MM) + P(BB) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\frac{3}{8} \cdot 8€ = \mathbf{3€}$

e) $P(gewinnt\ mindestens\ einmal) = 1 - P(verliert\ dreimal) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3 \approx 76{,}6\ \%$

Aufgabe 5

a) $P(E_1) = P(155) + P(515) + P(551) + P(355) + P(535) + (553) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{72}$

$P(E_2) = 1 - P(keine\ 5) = 1 - \big(P(111) + P(311) + P(131) + P(113) + P(331) + P(313) + P(133) + P(333)\big)$

$= 1 - \left(\left(\frac{3}{6}\right)^3 + 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^3\right) = \frac{91}{216}$

$P(E_3) = 1 - P(mindestens\ zwei\ Fünfen) = 1 - \big(P(genau\ zwei\ Fünften) + P(keine\ Fünf)\big) = 1 - \big(P(E_1) + P(nur\ 5en)\big) = 1 - \left(\frac{5}{72} + \left(\frac{1}{6}\right)^3\right) = \frac{25}{27}$

$P(E_4) = P(135) \cdot 6 = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6}$ (Der Faktor 6 resultiert aus der Anzahl möglicher Kombinationen)

$P(E_5) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{36}$

$P(E_6) = P(Mindestens\ eine\ 5\ UND\ höchstens\ eine\ 5) = P(genau\ eine\ 5) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$

$P(E_7) = P(mindestens\ eine\ 5\ Oder\ höchstens\ eine\ 5) = 1$

$P(E_8) = 1 - 1 = 0$

b) $P(G) = P(555) + P(553) + P(535) + P(355) + P(533) + P(353) + P(335) + P(551) + P(515) + P(155)$

$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} = \frac{7}{54}$

$10 \cdot \frac{7}{54} = \frac{35}{27} \approx 1{,}30\text{ €}$

c) $P(G) = P(555) + P(553) + P(535) + (355) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{216}$

$P(V) = 1 - \frac{7}{216} = \frac{209}{216}$

Langfristiger Gewinn:

$$\frac{209}{216} \cdot (-1{,}30) + \frac{7}{216} \cdot 8{,}70 \approx -0{,}98\text{ €}$$

Aufgabe 6

$P(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

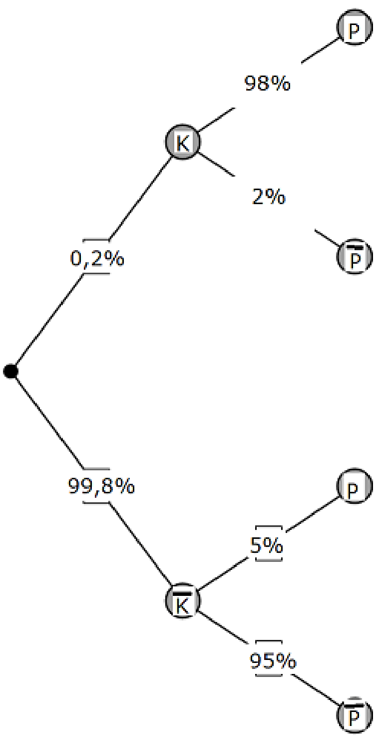
$P(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \mathbf{2}\text{ €}$

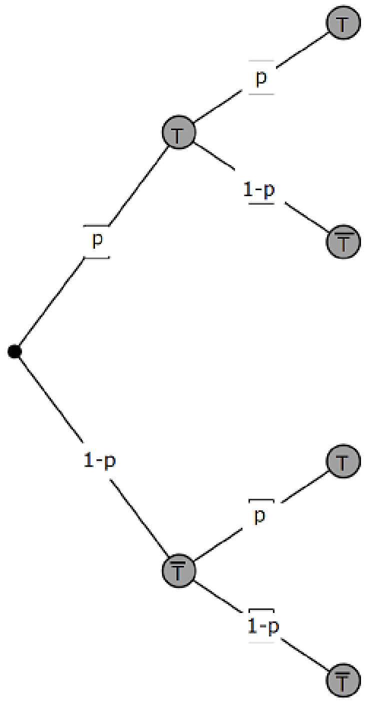
Aufgabe 7

$P(Falsches\ Ergebnis) = P(K \cap \bar{P}) + P(\bar{K} \cap P) = 0{,}2\% \cdot 2\% + 99{,}8\% \cdot 5\% \approx 5\%$



Aufgabe 8

a)



b)

$$p \cdot (1-p) + (1-p) \cdot p = 0{,}42$$

$$p - p^2 + p - p^2 = 0{,}42$$

$$-2p^2 + 2p = 0{,}42$$

$$p^2 - p + 0{,}21 = 0$$

$$p_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0{,}21} \rightarrow p_1 = 0{,}7\,;\, p_2 = 0{,}3$$