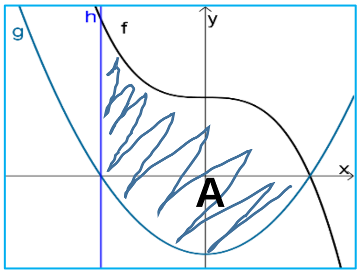
AB4: Wiederholung - Integralrechnung und Kurvenuntersuchungen - Lösung

Aufgabe 1 – *e*-Funktionen ableiten und integrieren

a) $f'(x) = -e^{-x}$ b) $g'(x) = ae^{ax+b}$ c) $h'(x) = -10e^{-5x} + 10x$

d) $R(x) = e^{-x} + C$ e) $K(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ f) $N(x) = e^{2x} + C$

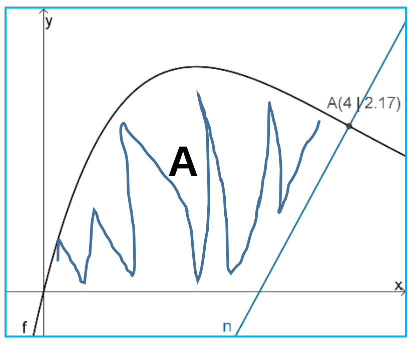
Aufgabe 2 – Flächen zw. Funktionsgraphen



a) Zwei Funktionen $f(x) = 1 - x^3$ und $g(x) = x^2 - 1$ …

1. Schritt: Intervall bestimmen
   (a) Linke Grenze ist Nullstelle von g(x):
   $$g(x) = 0 \rightarrow 1 = x^2 \rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$
   (b) Rechte Grenze ist der Schnittpunkt von g(x) und h(x) bzw. weitere Nullstelle von g(x)
2. Schritt: Integral berechnen und Flächeninhalt A angeben
   $$\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)dx$$
   $$= \int_{-1}^{1} 1 - x^3 - x^2 + 1dx$$
   $$= \int_{-1}^{1} -x^3 - x^2 + 2\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{10}{3}$$

$\rightarrow A = \frac{10}{3}$



b) Der Graph $f(x) = 4xe^{-0{,}5x}$ und seine Wendenormale $n(x) = \frac{e^2}{4}x - e^2 + \frac{16}{e^2}$ …

1. Schritt: Planung
   Fläche von f(x) auf [0; 4] – Fläche von n(x) zwischen dessen Nullstelle und x = 4
2. Schritt: Nullstelle von n(x) bestimmen
   $$n(x) = 0 \rightarrow x = 2{,}83$$
3. Schritt: Integral berechnen und Flächeninhalt A angeben
   $$\int_{0}^{4} 4xe^{-0{,}5x}\,dx - \int_{2{,}83}^{4} \frac{e^2}{4}x - e^2 + \frac{16}{e^2}dx = 9{,}5 - 1{,}27 = 8{,}23$$

$\rightarrow A = 8{,}23 \rightarrow$ A ist größer als 8 FE

Aufgabe 3 – Produkt- und Kettenregel

a) Mit $f(x) = cos^2 x = \cos(x)\cos(x)\, folgt$: $f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$

b) Mit $g(x) = e^{x+3} \cdot e^{-x} = e^3 folgt$: $g'(x) = 0$

c) $h'(k) = 2k \cdot \frac{1}{k} + (1 + k^2) \cdot \left(-\frac{1}{k^2}\right) = 2 - \frac{1}{k^2} - 1 = 1 - \frac{1}{k^2}$

Aufgabe 4 – Kurvenuntersuchungen I

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

a) Extrema

$f'(x) = 0 \to 0 = 3x^2 - 12x + 9 \to (p - q - Formel): x_1 = 3\,, x_2 = 1$

x_1: $f''(3) = 6$ → Tiefpunkt: TP (3|0)

x_2: $f''(1) = -6$ → Hochpunkt: HP (1|4)

b) Wendepunkte

$f''(x) = 0 \to 0 = 6x - 12 \to x = 2$ und es gilt $f'''(x) \neq 0$

Da $f'''(x) = 6$ > 0, ist es ein rechts-links-Wendepunkt. (Alternativ über den Wechsel vom Hoch- zum Tiefpunkt nachvollziehbar.)

→ WP (2|2)

c) Geraden durch die Extrema

$$g(x) = mx + b\ mit\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ folgt: g(x) = -2x + 6$$

d) Setze WP in g(x): $2 = -4 + 6 = 2$ → WP ∈ g(x)

Aufgabe 5 – Kurvenuntersuchungen III

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4xe^{-0,5x}$

a) Nullstelle: $x = 0$

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) $f'(x) = (4-2x)e^{-0,5x}$ Extrema: $H(2|2,94)$

$f''(x) = (x-4)e^{-0,5x}$ Wendepunkte: $(4|2,17)$

$f'''(x) = (3-0,5x)e^{-0,5x}$

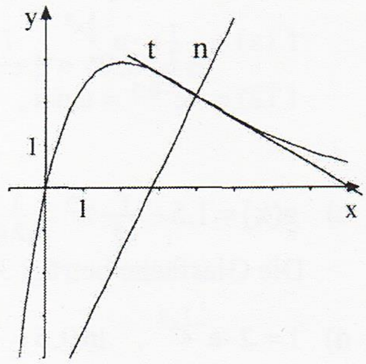
f ist streng monoton steigend für $x < 2$ und streng monoton fallend für $x > 2$.

f ist für $x < 4$ rechts- und für $x > 4$ linksgekrümmt.

c) $t(x) = mx+n$, $m = f'(4) = -\frac{4}{e^2}$

$t(x) = -\frac{4}{e^2}(x-4) + \frac{16}{e^2} = -\frac{4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}$

d)



Aufgaben aus dem Buch:

130

3. a) $f(0) = 2,4 - 0,2 \cdot 2 = 2$, Höhe stimmt

$f(-1) = -0,05 \approx 0$, $f(1) \approx 0$, Breite stimmt

b) $f'(x) = -0,2(2,5e^{2,5x} - 2,5e^{-2,5x}) = -0,5(e^{2,5x} - e^{-2,5x})$

$f'(-1) \approx 6,05$, $\alpha \approx 80,6°$

Am linken unteren Torbogen muss die Säge unter ca. 81° angesetzt werden.

c) Zu streichende Fläche: $A = 4 \cdot 8 - A_{Torbogen}$

$$A_{Torbogen} = 2\int_0^1 f(x)dx = 2[2,4x - 0,2(\tfrac{2}{5}e^{2,5x} - \tfrac{2}{5}e^{-2,5x})]_0^1 \approx 2,86$$

$A \approx 32 - 2,86 = 29,14$

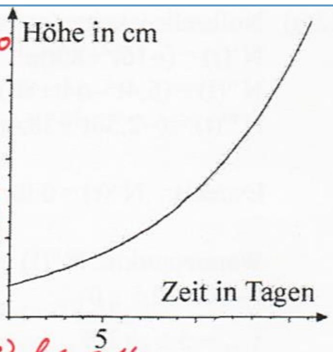
Die zu streichende Fläche beträgt ca. 29 m^2.

135

9\. b) Es gilt $\frac{h(4)}{h(0)} = \frac{h(8)}{h(4)} = ...$, also liegt unbegrenztes exponentielles Wachstum vor.
Es gilt $h(t) = 2 \cdot 1{,}75^{0,25t} \approx 2e^{0,14t}$

1\. $t=0$: $h(0) = c \cdot e^{k \cdot 0}$
$2 = c \cdot 1$
$\underline{2 = c}$

2\. $t=4$: $h(4) = 2 \cdot e^{k \cdot 4}$
$3{,}5 = 2e^{4k}$
$1{,}75 = e^{4k}$
$\ln(1{,}75) = 4k$
$\frac{\ln(1{,}75)}{4} = k \Rightarrow \underline{k \approx 0{,}14}$



c) mittlere Wachstumsgeschwindigkeit:
$\frac{h(10)-h(0)}{10-0} = \frac{8{,}1-2}{10} = 0{,}61$ cm/Tag
momentane zu Beginn des 10. Tages
d.h. für $t = 9$: $h'(t) = 0{,}28e^{0,14t}$, $h'(9) = 0{,}99$
bzw. $h'(t) = 0{,}5 \cdot 1{,}75^{0,25t} \cdot \ln 1{,}75$, $h'(9) = 0{,}99$, also ca. 1cm/Tag

d) $40 = 2e^{0,14t}$, $t = \frac{\ln 20}{0{,}14} \approx 21{,}40$ d.h. ca. in der Mitte des 22. Tages

bzw. $40 = 2 \cdot 1{,}75^{0,25t}$, $t = \frac{\ln 20}{0{,}25 \cdot \ln 1{,}75} \approx 21{,}41$ d.h. ca. in der Mitte des 22. Tages

139

3\. a) $h(0) = 240$, $h(12) = 263$
Franz hat 240 Hasen gekauft. Nach einem Jahr sind es 263 Hasen.
b) $h'(t) = (8-t)e^{-0,05t}$, $h'(0) = 8$: Die Wachstumsrate beträgt 8 Hasen/Monat.
c) $h'(t) = 0$ gilt für $t = 8$, $h''(t) = (0{,}05t-1{,}4)e^{-0,05t}$, $h''(8) = -e^{-0,4} < 0$, Max.
Nach 8 Monaten erreicht die Population ihr Maximum.
d) $h''(t) = 0$ gilt für $t = 28$: Nach 28 Monaten verringert sich die Population am stärksten.

4\. a) Nullstellen: $t = 0$ und $t = 6$
Die Epidemie dauert 6 Wochen.
b) Ableitungen: $N'(t) = (-t^2 + 4t + 6) \cdot e^{t-6}$, $N''(t) = (-t^2 + 2t + 10) \cdot e^{t-6}$

Extrema: $N' = 0$: $t = 2 \pm \sqrt{10}$, $N''(5{,}16) < 0 \Rightarrow H(5{,}16 \mid 1{,}87)$
Nach 5,16 Wochen ist mit ca. 1,87 Millionen Erkrankten das Maximum erreicht.

c) Die Erkranktenzahl steigt im Wendepunkt am schnellsten.
$N'' = 0$: $t = 1 \pm \sqrt{11}$, $N'(4{,}32) \approx 0{,}86$, $N(4{,}32) \approx 1{,}35$
Die Erkranktenzahl steigt nach 4,32 Wochen am schnellsten mit ca. 1,35 Millionen.
Die Erkrankungsrate beträgt ca. 0,86 Millionen/Woche.

II\. a) $z(t) = c \cdot e^{-kt}$, $t = 0$: $c = 20$; $t = 1$: $18{,}09 = 20 \cdot e^{-k}$, $k \approx 0{,}1$, $z(t) = 20 \cdot e^{-0,1t}$
b) $10 = 20 \cdot e^{-0,1t}$, $t \approx 6{,}93$ Nach etwa 7 Stunden.
c) $M(t) = \int z(t)dt = -200 \cdot e^{-0,1t} + C$, $C = 200$ (wg. $M(0) = 0$)
d) $M(24) = 182$mg