# AB5 – Lotfußpunkt-Verfahren zur Abstandsbestimmung

Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Ebene E versteht man die **Länge d** der **Lotstrecke $\overrightarrow{\mathbf{PF}}$**, die senkrecht auf der Ebene steht. Der Punkt **F heißt Lotfußpunkt**.

Mit Hilfe des **Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene** kann man eine **Hilfsgeraden** aufstellen und damit den Abstand eines Punktes zu einer Ebene ermitteln.

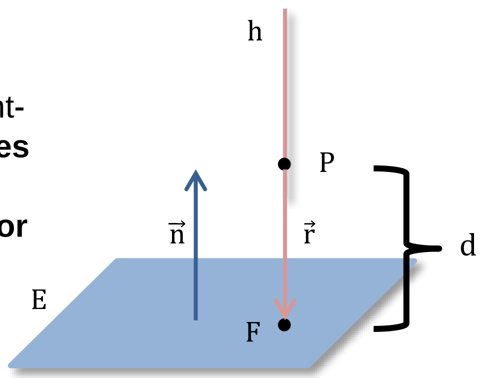
Erinnerung zum Kreuzprodukt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

## *Teil 1: Abstandsbestimmung von Punkt und Ebene (Parameterform):*

1) **Hilfsgerade h** konstruieren, die durch Punkt P geht und die Ebene E im Punkt F senkrecht schneidet (**F nennt man Lotfußpunkt**). Dabei ist der Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden kollinear zum Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene.

2) Geradengleichung von h aufstellen, dabei entspricht der **Stützvektor den Koordinaten des Punktes P** in Parameterform und der **Richtungsvektor ist gleich dem Normalenvektor der Ebene**:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



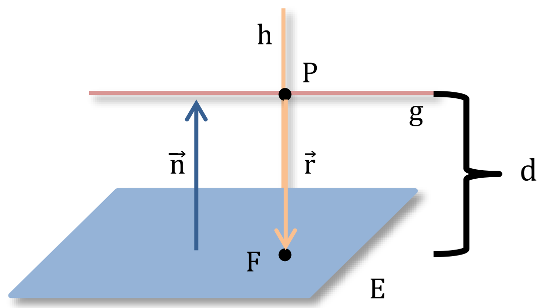

3) Ermittlung des Lotfußpunktes F: **Geradengleichung entweder in die Koordinatengleichung der Ebene einsetzen** oder mit der Parametergleichung der Ebene gleichsetzen und das LGS lösen, um $r, s, t$ zu bestimmen und $t$ in die Geradengleichung einzusetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 1{,}5, s = 1, t = 0{,}5,$$

Ergibt $F\ (1{,}5|1|1{,}5)$ und damit lässt sich der **Abstand d** bestimmen zu:
$\boldsymbol{d} = \left|\overrightarrow{\mathbf{PF}}\right| = 0{,}707$ LE.

***Teil 2: Abstandsbestimmung von Gerade und Ebene (koordinatenform):***

1) Hilfsgerade $\mathrm{h}$ konstruieren, die durch Punkt $\mathrm{P}$ geht und die Ebene $\mathrm{E}$ im Punkt $\mathrm{F}$ senkrecht schneidet. Dabei ist der Richtungsvektor $\vec{\mathrm{r}}$ der Geraden parallel zum Normalenvektor $\vec{\mathrm{n}}$ der Ebene.




2) Geradengleichung von $\mathrm{h}$ aufstellen, dabei entspricht der **Stützvektor den Koordinaten des Stützpunktes P der Geraden** in Parameterform und der **Richtungsvektor ist gleich dem Normalenvektor der Ebene**:

$$\mathrm{h}: \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Ermittlung des Schnittpunktes $\mathrm{F}$: Geradengleichung entweder in die Koordinatengleichung der Ebene einsetzen oder mit der Parametergleichung der Ebene gleichsetzen und das LGS lösen, um $\mathrm{r}, s, \mathrm{t}$ zu bestimmen und $\mathrm{t}$ in die Geradengleichung einzusetzen:

$\mathrm{h}$ in $\mathrm{E}$: $4\mathrm{t} + 6 + 4\mathrm{t} + 2 + \mathrm{t} = 4 \Leftrightarrow \mathrm{t} = -\frac{4}{9}$, eine eindeutige Lösung

Einsetzen von $\mathrm{t}$ in die Parametergleichung der Geraden $\mathrm{h}$ ergibt: $\mathrm{F}\left(-\frac{8}{9}\middle|\frac{19}{9}\middle|\frac{5}{9}\right)$

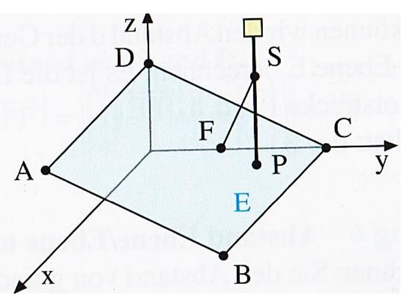
und den Abstand $\mathrm{d}$: $d = \left|\overrightarrow{\mathrm{PF}}\right| = 1{,}915$ LE.

**Aufgaben:**

1) **Bestimmen** Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E:
   a) $E: 4x - 4y + 2z = 16; P(5|-5|6)$ [Lösung: $d = 6\ LE$]
   b) $E: -4x + 5y + z = 10; P(-3|7|5)$ [Lösung: $d = 6{,}48\ LE$]

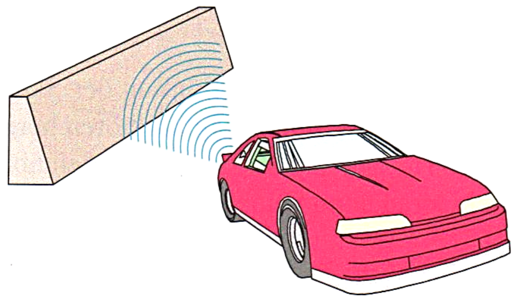
2) [Lösung: $d = \sqrt{20}\ LE$]

Auf dem Hang E, der durch die Punkte A(12|0|5), B(12|10|0), C(0|10|0) und D(0|0|5) definiert wird, steht im Punkt P(4|8|1) eine Antenne. Im Punkt S(4|8|6) soll ein Stützstab angebracht werden, der senkrecht im Punkt F auf den Hang trifft. Berechnen Sie die Länge des Stützstabes.




3) **Bestimmen** Sie den Abstand zwischen einer Gerade/Ebene und einer dazu parallelen Ebene:
   a) $E: 4x + 2y - 4z = 16; G: -2x - y + 2z = -26$ [Lösung: $d = 6\ LE$]
   b) $E: 6x - 2y + 3z = 7; g: \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ [Lösung: $d = 7\ LE$]

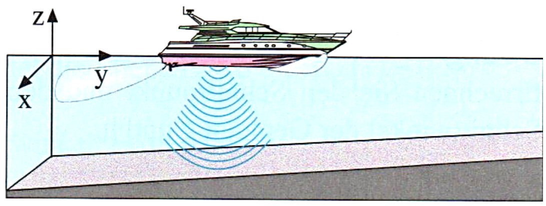
**16. Einparkhilfe**



Bei der Entwicklung der KFZ-Einparkhilfe haben Bionikforscher das Ortungssystem der Fledermaus kopiert und entsprechende Sensoren in die hintere Stoßstange integriert. Die Sensoren sind so eingestellt, dass sie eine Abstandsunterschreitung von 0,3 m anzeigen.
Ein Autofahrer fährt geradlinig rückwärts auf eine schräge Ebene zu, die durch E: $6x + 2y + 3z = 49$ beschrieben wird.

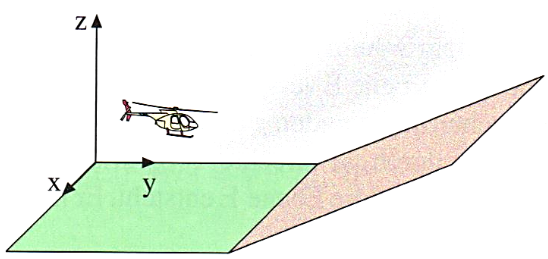
a) Der der Ebene nächste Sensor befindet sich zunächst im Punkt $P(6|3|1)$. Zeigen Sie, dass der Sensor noch keinen Alarm gegeben hat. Wenig später ist der Sensor im Punkt $Q(6|4|1)$ angelangt. Ist inzwischen ein Alarm erfolgt?
b) An welchem Punkt R zwischen P und Q muss der Sensor Alarm geben?

**17. Echolot (Tiefenmessung)**




Ein Motorboot bewegt sich in einem Gewässer mit ebenem, aber leicht ansteigendem Grund. $P(0|0|-20)$, $Q(50|50|-15)$ und $R(0|50|-15)$ sind Punkte der Grundebene. Das Boot besitzt einen Echolotsensor in Höhe der Wasseroberfläche.
a) Erstellen Sie eine Koordinatengleichung der Grundebene.
b) Welcher Abstand zur Grundebene wird gemessen, wenn der Sensor sich im Punkt $A(50|50|0)$ befindet?
c) Wie tief ist das Wasser senkrecht unter dem Sensor im Punkt $B(75|75|0)$?
d) Welcher Abstand zur Grundebene wird gemessen, wenn sich der Sensor im Punkt $C(50|99|0)$ befindet?

**18. Radar (Höhenmessung)**




Ein Helikopter fliegt bei schlechter Sicht auf ein eben ansteigendes Bergmassiv zu, welches durch die Punkte $P(0|5|0)$, $Q(5|10|2)$, $R(10|10|2)$ beschrieben wird. Der Helikopter durchfliegt die Punkte $A(1|6|1)$ und $B(2|7|1)$ (Angaben in km).
a) Erstellen Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung des Berghangs.
b) In welchem Punkt würde der Hubschrauber auf den Berghang stoßen, wenn er seine Flugrichtung beibehält?
c) Um einen Unfall zu vermeiden, geht der Pilot im Punkt B unter Beibehaltung seiner x-y-Richtung in einen Steigflug über, der parallel zum Berghang verläuft. Wie lautet der neue Kurs?
d) Um welchen Winkel hat der Pilot im Punkt B seinen Kurs geändert?

16. a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in E: $r = \frac{4}{49}$, $d(P) = \frac{4}{7} \approx 0{,}57.. > 0{,}3$ ; kein Alarm bis zum Punkt P.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in E: $r = \frac{2}{49}$, $d(Q) = \frac{2}{7} \approx 0{,}28.. < 0{,}3$ ; Alarmauslösung zwischen

P und Q.

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in E: $6(6+6r) + 2(y+2r) + 3(1+3r) = 49$

$r = \frac{49-(39+2y)}{49}$, $d = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \frac{10-2y}{49} = \frac{10-2y}{7} = 0{,}3 \Rightarrow y = 3{,}95$, $R(6|3{,}95|1)$

17. a) G: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$, $-y + 10z = -200$

b) $g_A: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ ; in G: $-50 + 101r = -200$, $r = -\frac{150}{101}$, $d = \frac{150}{\sqrt{101}} \approx 14{,}93$

c) $g_B: \vec{x} = \begin{pmatrix} 75 \\ 75 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; in G: $-75 - 10r = -200$, $r = 12{,}5$

$F_B(75|75|-12{,}5)$, Wassertiefe bei B: 12,5m

d) $g_C: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$; in G: $-99 + 101r = -200$, $r = -\frac{101}{101} = -1$, $d = \sqrt{101} \approx 10{,}05$

18. a) $E_{Berg}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$, $-2y + 5z = -10$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; in E: , $r = \frac{3}{2}$, $S(2{,}5|7{,}5|1)$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$, $z = 0{,}4$ neuer Kurs: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$

d) $\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}\right|}$, $\alpha \approx 15{,}8°$