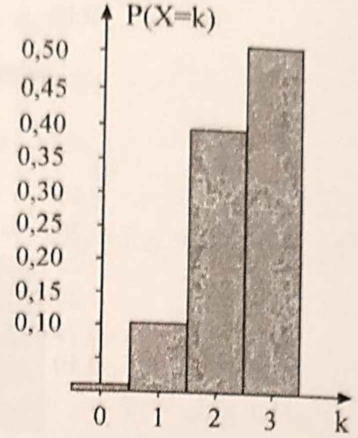
Lösungen

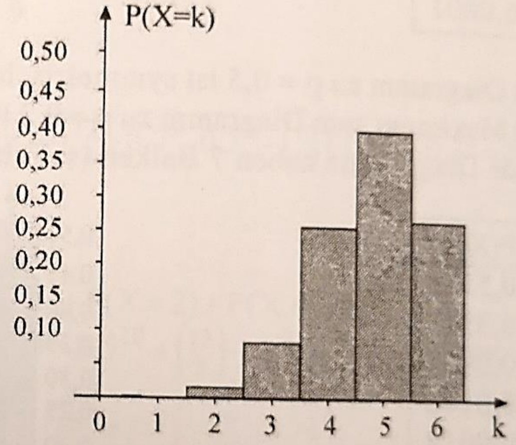
4. a)

k	P(X=k)
0	0,0080
1	0,0960
2	0,3840
3	0,5120



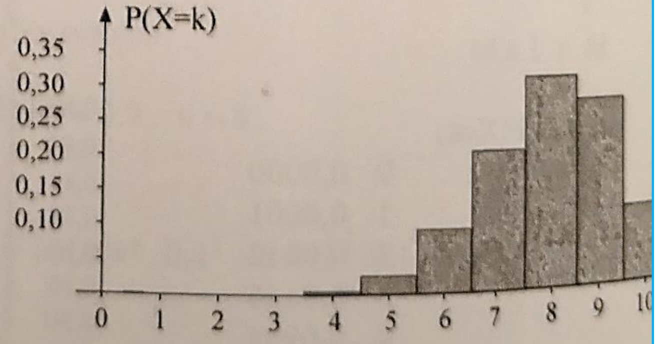
b)

k	P(X=k)
0	0,0001
1	0,0015
2	0,0154
3	0,0819
4	0,2458
5	0,3932
6	0,2621



c)

k	P(X=k)
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0001
3	0,0008
4	0,0055
5	0,0264
6	0,0881
7	0,2013
8	0,3020
9	0,2684
10	0,1074



Lösungen

b) $P(A) = P(B) \approx 3{,}95\%$, $P(C) \approx$

10. $\mu = 8 \cdot 0{,}5 = 4$, $\quad \sigma = \sqrt{8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \approx 1{,}41$

Angenäherte Berechnung von P mit der 2σ-Umgebung:

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$$
$$P(4 - 2{,}82 \le X \le 4 + 2{,}82) \approx 0{,}955, \quad P(1{,}18 \le X \le 6{,}82) \approx 0{,}955$$
$$P(2 \le X \le 6) \approx 0{,}955 = 95{,}5\%$$

Exakte Berechnung mithilfe der Bernoulli-Formel:

$$P(2 \le X \le 6) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$
$$= B(8;0{,}5;2) + \ldots + B(8;0{,}5;6) \approx 0{,}9297 = 92{,}97\%$$

Erläuterung der Abweichung:
Die Differenz beruht auf dem Problem, dass X ganzzahlig ist, aber die Grenze des 2σ-Intervalls nicht. So ergibt sich bei relativ kleinem Stichprobenumfang ($n = 8$) und nicht erfüllter Laplace-Bedingung ($\sigma \approx 1{,}41 < 3$) eine relativ große Abweichung vom exakten Ergebnis (ca. 2,5%).

11. a) Ein zufällig ausgewählter Schüler hat mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{7}$ am Sonntag Geburtstag.
Prognose mit der 2σ-Regel:

$n = 1000$, $\quad p = \frac{1}{7}$, $\quad X$ = Anzahl der Sonntagskinder unter 1000 Personen

$$\mu = n \cdot p \approx 142{,}86, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 11{,}07 > 3$$
$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955 \ (2\sigma\text{-Regel})$$
$$P(120{,}73 \le X \le 165) \approx 0{,}955, \quad P(121 \le X \le 165) \approx 0{,}955$$

b) 1. Glaubhaftigkeit einer Aussage prüfen:

$n = 21$, $p = \frac{1}{7}$, X = Anzahl der Sonntagskinder unter den 21 Schülern

$$\mu = 3, \quad \sigma \approx 1{,}6$$
$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955, \quad P(-0{,}2 \le X \le 6{,}2) \approx 0{,}955, \quad P(0 \le X \le 6) \approx 0{,}955$$
$$\Rightarrow P(X \ge 7) \le 1 - 0{,}955 = 0{,}045 \Rightarrow P(X \ge 8) \le 4{,}5\%$$

Die Aussage ist wenig glaubhaft.

2. Exakte, aber aufwendige Lösung mit der Bernoulli-Formel:

$$P(X \ge 8) = 1 - P(X \le 7) = 1 - P(X=1) - \ldots - P(X=7)$$
$$= 1 - \binom{21}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{7}\right)^{21} - \binom{21}{1} \cdot \left(\tfrac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{1}{7}\right)^{20} - \ldots - \binom{21}{7} \cdot \left(\tfrac{1}{7}\right)^7 \cdot \left(\tfrac{1}{7}\right)^{14}$$
$$\approx 1 - 0{,}0393 - \ldots - 0{,}0163 \approx 0{,}0061 = 0{,}61\%$$

3. Exakte Lösung mit der Bernoulli-Formel:

$$P(X \ge 8) = 1 - P(X \le 7) = 1 - B(21; \tfrac{1}{7}; 7) \approx 0{,}0066 \approx 0{,}7\%$$

Die Richtigkeit der Aussage ist so unwahrscheinlich, dass sie nicht glaubhaft wirkt.
Bemerkung: Die 2σ-Regel liefert ein relativ ungenaues Resultat ($P(X \ge 8) < 4{,}5\%$).
Das genaue Resultat ist $P(X \ge 8) < 0{,}7\%$.
Der Grund: n ist relativ klein ($n = 21$) und die Laplace-Bedingung ($\sigma > 3$) ist nicht erfüllt.

12. a) $n = 200$, $p = 0{,}1$, $\mu = 20$, $\sigma \approx 4{,}24 > 3$
Y = Anzahl der Stornierungen unter den 200 Buchungen

$$P(\mu - 2\sigma \le Y \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$$
$$P(11{,}52 \le Y \le 28{,}48) \approx 0{,}955, \quad P(12 \le Y \le 28) \approx 0{,}955$$
$$X = 200 - Y$$
$$P(200 - 28 \le X \le 200 - 12) \approx 0{,}955, \quad P(172 \le X \le 188) \approx 0{,}955$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5% liegt die Anzahl der tatsächlich realisierten Buchungen zwischen 172 und 188. Die Gefahr einer Überbuchung erscheint recht hoch.

b) $n = 190$, $\quad p = 0{,}1$, $\quad \mu = 19$, $\quad \sigma \approx 4{,}14 > 3$, $\quad$ Y = Anzahl der Stornierungen
$$P(\mu - 2\sigma \le Y \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955, \quad P(10{,}72 \le Y \le 27{,}28), \quad P(11 \le Y \le 27) \approx 0{,}955$$
$$X = 190 - Y, \quad P(163 \le X \le 179) \approx 0{,}955 \Rightarrow P(X \ge 180) < \tfrac{1 - 0{,}955}{2} = 0{,}0225 = 2{,}25\%$$

Das Risiko für Überbuchung beträgt also nur 2,25%, ist also erfreulich klein.