27/06/2009

GEOMETRIA A (C.d.L. in Ingegneria Meccanica e Ingegneria Informatica)

Nel corso dell'esercitazione sono stati svolti alcuni esercizi, tratti da temi d'esame, sull'argomento "Applicazioni lineari e diagonalizzazione". I quesiti tipici affrontati in questi esercizi sono:

- Determinare immagine e nucleo di un'applicazione lineare data e discuterne iniettività e suriettività;
- Calcolare composizioni e inverse di applicazioni lineari date;
- calcolare autovalori e autovettori di una matrice e dire se essa è diagonalizzabile.

Gli strumenti utilizzati nell'affrontare questi problemi, quali la determinazione del rango di matrici, la risoluzione di sistemi lineari mediante riduzione di Gauss, e il calcolo del determinante, si trovano nel testo di riferimento GEOMETRIA A (L.Alessandrini, L.Nicolodi).
Laddove possibile sono stati indicati più metodi di risoluzione dello stesso problema.

NB : Gli ultimi due esercizi presentati in queste note (il (7) e l'(8)) non sono stati svolti in classe ma, su richiesta, sono stati inseriti a completamento degli esercizi svolti nelle esercitazioni del 13 e del 20 giugno.

(1) Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$L(x, y) = (x - 3y, -x - 2y, -3x + 6y).$$

Si dimostri che L è lineare; si calcolino il nucleo $Ker(L)$ e l'immagine $Im(L)$; si dica se L è iniettiva o suriettiva.

Svolgimento
Ricordiamo che un'applicazione $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice lineare se sono verificate le due condizioni seguenti: (i) dati due vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, si ha che $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$; (ii) dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ e un numero reale c, si ha $L(cv) = cL(v)$.
Per verificare la linearità dell'applicazione L data nell'esercizio direttamente dalla definizione, consideriamo due vettori $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$. Allora $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, e

$$L(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2-3(y_1+y_2), -(x_1+x_2)-2(y_1+y_2), -3(x_1+x_2)+6(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1 - 3y_1 + x_2 - 3y_2, -x_1 - 2y_1 - x_2 - 2y_2, -3x_1 + 6y_1 - 3x_2 + 6y_2) =$$

$$= (x_1 - 3y_1, -x_1 - 2y_1, -3x_1 + 6y_1) + (x_2 - 3y_2, -x_2 - 2y_2, -3x_2 + 6y_2) = L(x_1, y_1) + L(x_2, y_2).$$

verificando così la condizione (i). Per la condizione (ii), vediamo che dati un vettore $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, e numero reale c si ha

$$L(c(x, y)) = L(cx, cy) = (cx - 3cy, -cx - 2cy, -3cx + 6cy) =$$

$$= (c(x - 3y), c(-x - 2y), c(-3x + 6y)) = c(x - 3y, -x - 2y, -3x + 6y) = cL(x, y).$$

Un modo alternativo di giustificare la linearità dell'applicazione è osservare che $L(x, y)$ si può esprimere come il prodotto di matrici $A \cdot (x, y)^T$, dove $(x, y)^T$ indica il vettore colonna trasposto[1] di (x, y) e A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

La linearità segue allora dalle proprietà del prodotto di matrici, più precisamente da $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$ e $A(cB) = cAB$, applicate nel nostro caso a $B_1 = (x_1, y_1)^T$, $B_2 = (x_2, y_2)^T$ e $B = (x,y)^T$.

Questo non è un caso, in quanto data una qualunque applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ esiste una matrice $A \in M_{m \times n}$ tale che $L(x_1, \dots, x_n) = A \cdot (x_1, \dots, x_n)^T$: l'applicazione L si denota allora L_A e si chiama l'*applicazione lineare associata alla matrice* A.

Per rispondere alla seconda domanda, ricordiamo le definizioni: il nucleo $Ker(L)$ di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è l'insieme dei vettori $v \in \mathbb{R}^n$ tali che $L(v) = o$ (stiamo qui denotando con o il vettore nullo $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$).

Ne segue che un vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartiene al nucleo dell'applicazione L dell'esercizio se è soddisfatta la condizione $(x - 3y, -x - 2y, -3x + 6y) = (0, 0, 0)$, che corrisponde al sistema omogeneo

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ -3x + 6y = 0 \end{cases}$$

che ha come matrice associata proprio

[1] si noti che il vettore (x, y) è una matrice 1×2 e il vettore colonna trasposto $(x, y)^T$ è una matrice 2×1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Per risolvere il sistema, operiamo allora mediante la riduzione di Gauss su A: le operazioni $R_2 \to R_2 + R_1$, $R_3 \to R_3 + 3R_1$ riducono A a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e mediante l'operazione $R_3 \to 5R_3 - 3R_2$ otteniamo la matrice ridotta a scala

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema associato equivalente $x - 3y = 0, -5y = 0$ ha come unica soluzione (NB la matrice ha rango massimo $= 2$) il vettore nullo $(0,0)$ che è quindi l'unico elemento di $Ker(L)$.

L'immagine $Im(L)$ di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è l'insieme dei vettori $w \in \mathbb{R}^m$ tali che $w = L(v)$ per qualche $v \in \mathbb{R}^n$.
Osserviamo che, data una base (o anche solo un sistema di generatori) $(v_1, \ldots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$, ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive come $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ e quindi, essendo l'applicazione lineare, $L(v) = x_1L(v_1) + \cdots + x_nL(v_n)$. Questo dimostra che ogni vettore della forma $L(v)$ (cioè ogni elemento dell'immagine di L) si scrive come combinazione lineare di $L(v_1), \ldots, L(v_n)$.
Dunque $Im(L)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato da $L(v_1), \ldots, L(v_n)$.
Nel risolvere gli esercizi, è comodo scegliere come base $(v_1, \ldots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ la base canonica[2]: in tal caso, infatti, i vettori $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ sono le colonne della matrice A associata all'applicazione.
La risposta al questito posto è dunque: $Im(L)$ è lo spazio generato dai vettori $(1, -1, -3)$, $(-3, -2, 6)$.

Infine, ricordiamo che per un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ valgono le seguenti affermazioni:

(i) L è iniettiva se e solo se $Ker(L)$ contiene il solo vettore nullo.

(ii) L è suriettiva se e solo se $Im(L) = \mathbb{R}^m$.

[2]Cioè $v_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $v_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $v_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

Dunque l'applicazione dell'esercizio è iniettiva, ma non suriettiva in quanto la sua immagine è un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$.

(2) Si determini l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $L(e_1) = (0, 2, 3)$, $L(e_2) = (2, -5, 0)$, $L(e_3) = (-1, 4, -6)$ ((e_1, e_2, e_3) denota la base canonica di $\mathbb{R}^3$), si calcolino $Ker(L)$, $Im(L)$ e si dica se L è iniettiva o suriettiva.

Svolgimento Come abbiamo osservato nell'esercizio precedente, ogni applicazione lineare ha una matrice associata le cui colonne sono le immagini dei vettori della base canonica. Dunque la matrice associata all'applicazione è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione è quindi $L(x, y, z) = (2y - z, 2x - 5y + 4z, 3x - 6z)$.

Per calcolare il nucleo di L risolviamo, come spiegato nell'esercizio precedente, il sistema omogeneo associato alla matrice A: scambiando la prima e la seconda riga e applicando l'operazione elementare $R_3 \to -2R_3 + 3R_1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -15 & 24 \end{pmatrix}$$

e infine, applicando $R_3 \to 2R_3 + 15R_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}.$$

Questo ci dice che la matrice A ha rango 3, quindi il sistema omogeneo a lei associato ha la sola soluzione nulla e il nucleo dell'applicazione contiene solo il vettore nullo.
Inoltre, essendo il rango della matrice la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne, che come abbiamo visto è l'immagine dell'applicazione, deduciamo che $Im(L)$ ha dimensione 3, quindi coincide con $\mathbb{R}^3$, e quindi l'applicazione è anche suriettiva.
Osserviamo che è vero in generale che un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva se e solo se è suriettiva. Anzi vale il seguente schema riassuntivo:

Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare.

- Se $n < m$, allora L non può essere suriettiva (mentre può essere iniettiva o no, a seconda dei casi)
- Se $n > m$, allora L non può essere iniettiva (mentre può essere suriettiva o no, a seconda dei casi)
- Se $n = m$, allora L è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Ad esempio, un'affermazione come "nessuna applicazione $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è un isomorfismo[3]" è vera, mentre affermazioni come "ogni applicazione $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è suriettiva" o "ogni applicazione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è iniettiva" sono false.

(3) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si scriva l'applicazione lineare composta $L_B \circ L_A$.

Svolgimento

L'esercizio si risolve ricordando il fatto generale che date due matrici $B \in M_{m\times n}$ e $A \in M_{n\times p}$, la matrice prodotto BA è la matrice associata alla composizione $L_B \circ L_A$.

Applicando la definizione di prodotto righe per colonne tra matrici, troviamo

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

e quindi $(L_B \circ L_A)(x, y, z) = (-y - 2z, -x - 2y - 3z)$.

(4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si calcolino autovalori e autovettori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

[3] Così si chiamano le applicazioni lineari bigettive, cioè sia iniettive che suriettive.

Svolgimento

Ricordiamo che, data una matrice quadrata $A \in M_{n\times n}$, un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^n$ si dice autovettore di A se esiste un numero reale λ tale che $Av = \lambda v$. Il numero λ si dice autovalore associato all'autovettore v.

Gli autovalori di una matrice A sono le soluzioni dell'equazione $det(A-\lambda I) = 0$ (dove I denota la matrice identità). Nel nostro caso si ha

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

e si trova quindi $det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$.
Con la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado si trova che le soluzioni di $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$.
Ora troviamo per ogni autovalore i relativi autovettori.
In generale, l'insieme degli autovettori associati a un autovalore λ (detto l'*autospazio relativo a* λ *e denotato spesso* V_λ) si trova risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$. Si ha

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e, dopo una riduzione a scala (che può essere evitata osservando che la seconda riga corrisponde a un'equazione proporzionale alla prima) si ottiene il sistema formato dalla sola equazione $-x + y = 0$. Ponendo $y = t$ si ha che le soluzioni del sistema sono tutti e soli i vettori del tipo (t, t) al variare di $t \in \mathbb{R}$. Queste soluzioni sono gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda_1 = 3$. Poichè $(t, t) = t(1, 1)$, l'autospazio V_3 può essere descritto come lo spazio generato dal vettore $(1, 1)$.

Ripetiamo lo stesso procedimento per trovare l'autospazio relativo al secondo autovalore. Si ha

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che corrisponde al sistema dato dall'equazione $x + y = 0$, le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori del tipo $(-t, t)$. Queste soluzioni sono gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda_2 = 1$. Poichè $(-t, t) = t(-1, 1)$, l'autospazio V_3 può essere descritto come lo spazio generato dal vettore $(-1, 1)$.

Per rispondere all'ultima domanda dell'esercizio, ricordiamo che una matrice $A \in M_{n\times n}$ si dice diagonalizzabile se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.
Nel nostro caso, una tale base si ottiene mettendo insieme i generatori dei due autospazi, cioè $((1, 1), (-1, 1))$. Dunque A è diagonalizzabile. Nel prossimo

esercizio vedremo un caso in cui gli autospazi non sono "abbastanza grandi" da fornire una base.

(5) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

si calcolino autovalori e autovettori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Svolgimento
Seguiamo il procedimento indicato nell'esercizio precedente. Sviluppando il determinante lungo la prima colonna, si trova

$$det(A-\lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 3 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+3)+(\lambda-1) = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)$$

Le soluzioni dell'equazione $(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = 0$ (che, per il principio di annullamento del prodotto, si trovano ponendo $= 0$ i due fattori separatamente) sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ ($\lambda = 1$ appare come soluzione sia del primo fattore che del secondo!).
Per trovare l'autospazio V_1, risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 1I$, che è

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se riduciamo scambiando la prima e la seconda riga e applicando l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$, otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui sistema associato è $-x - y + 3z = 0$, $-y + 2z = 0$. Risolto a partire dall'ultima equazione, ponendo $z = t$ come parametro, abbiamo che le sue soluzioni sono tutti e soli i vettori dati da $(t, 2t, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Come nell'esercizio precedente, troviamo che l'autospazio V_1 è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(1, 2, 1)$.

Per trovare l'autospazio V_2, risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$, che è

$$A - 1I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se riduciamo applicando le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1$, e poi $R_3 \to R_3 - R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui sistema associato è $-x - y + 2z = 0,\ -y + z = 0$. Risolto a partire dall'ultima equazione, ponendo $z = t$ come parametro, abbiamo che le sue soluzioni sono tutti e soli i vettori dati da (t, t, t) al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Quindi l'autospazio V_2 è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(1, 1, 1)$.
Concludiamo che la matrice non è diagonalizzabile in quanto mettendo insieme i generatori degli autospazi non otteniamo 3 vettori che sarebbero necessari per ottenere una base di $\mathbb{R}^3$.

ATTENZIONE: il fatto che un autovalore compaia come radice doppia dell'equazione $det(A - \lambda I) = 0$ non basta per poter concludere che la matrice non è diagonalizzabile, come vedremo nell'esercizio seguente.

(6) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -6 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si calcolino autovalori e autovettori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Si trovino poi una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolgimento

Seguiamo il procedimento indicato nell'esercizio precedente. Sviluppando lungo l'ultima riga, si trova

$$det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 & 3 \\ -6 & -4-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)((5-\lambda)(-4-\lambda)+18) = (-1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$$

Le soluzioni dell'equazione $(-1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0$ (che, per il principio di annullamento del prodotto, si trovano ponendo $=0$ i due fattori separatamente) sono $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=2$ (come nell'esercizio precedente, $\lambda=-1$ appare come soluzione sia del primo fattore che del secondo!).
Per trovare l'autospazio V_{-1}, risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-(-1)I$, che è

$$A-(-1)I=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui sistema associato è $6x+3y+3z=0$, senza bisogno di effettuare riduzioni. Si noti che, rispetto all'esercizio precedente, stavolta il rango della matrice è 1. Abbiamo dunque due parametri $y=t$, $z=s$ che sostituiti nell'equazione ci dicono che le sue soluzioni sono tutti e soli i vettori dati da $(\frac{-t-s}{2},t,s)$ al variare di $t,s\in\mathbb{R}$.
Poichè $(\frac{-t-s}{2},t,s)=t(-\frac{1}{2},1,0)+s(-\frac{1}{2},0,1)$, troviamo che l'autospazio V_{-1} è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},0,1)$.
Per trovare l'autospazio V_2, risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-2I$, che è

$$A-2I=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Se riduciamo applicando le operazioni $R_2\to R_2+2R_1$, e poi $R_3\to R_3+R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui sistema associato è $3x+3y+3z=0,\ 3z=0$. Risolto a partire dall'ultima equazione, ponendo $y=t$ come parametro, abbiamo che le sue soluzioni sono tutti e soli i vettori dati da $(-t,t,0)$ al variare di $t\in\mathbb{R}$.
Quindi l'autospazio V_2 è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(-1,1,0)$.
Concludiamo che in questo caso la matrice è diagonalizzabile in quanto la somma delle dimensioni degli autospazi è 3 e quindi possiamo mettere insieme i generatori degli autospazi per ottenere una base di $\mathbb{R}^3$, che è $((-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},0,1),(-1,1,0))$.
Riguardo all'ultima domanda dell'esercizio, ricordiamo che in generale quando una matrice A è diagonalizzabile la relazione $D=P^{-1}AP$ vale con: D uguale alla matrice diagonale che ha gli autovalori sulla diagonale (e zero

altrove), ognuno ripetuto tante volte quante compare come radice dell'equazione $det(A - \lambda I) = 0$; e P uguale alla matrice che ha per colonne gli autovettori. Nel nostro caso specifico, si ha quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -6 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

come si può verificare svolgendo i calcoli.

(7) Siano r la retta di equazione

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

e r' la retta di equazione

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Dopo aver dimostrato che le rette sono sghembe, si determinino le equazioni di una retta s che sia incidente e perpendicolare ad entrambe.

Svolgimento

Mettendo insieme le equazioni delle due rette, otteniamo un sistema di 4 equazioni in 3 incognite la cui matrice completa associata è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Eseguendo in successione le operazioni elementari $R_3 \to R_3 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_2$, $R_4 \to 2R_4 - R_3$ otteniamo la matrice ridotta a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Dunque $rg(A) = 3$, $rg(A|b) = 4$ il che prova che le rette sono sghembe.

Per trovare la retta s richiesta, osserviamo che s, essendo incidente sia con r che con r', sarà di conseguenza complanare a entrambe (due rette sono complanari se sono incidenti o parallele). Dunque s si ottiene come intersezione di un piano che contiene r e di un piano che contiene r'.
Ora, un generico piano che contiene r si scrive come $\alpha(x-z)+\beta(y-z)=0$. Poichè la retta s cercata, che sta su questo piano, deve essere anche perpendicolare a r', tra tutti i piani del fascio imponiamo la condizione di perpendicolarità: un vettore tangente a r' (che si trova o risolvendo il sistema omogeneo associato alle sue equazioni, o tramite il prodotto vettoriale[4] è $v'=(1,-1,0)$; una normale al generico piano del fascio $\alpha(x-z)+\beta(y-z)=0$, data dai coefficienti di x,y,z, è $(\alpha,\beta,-\alpha-\beta)$. Ora, questa normale è parallela a v' (e quindi il piano è perpendicolare a r') se $\alpha=-\beta$: imponendo questa condizione nell'equazione del fascio, e dividendo per β si trova finalmente $-x+y=0$.
Ripetiamo lo stesso procedimento per un generico piano che contiene r', cioè $\alpha(x+y)+\beta(z-1)=0$: una normale a questo piano è (α,α,β); un vettore tangente a r è $(1,1,1)$. Questi due vettori sono paralleli se $\alpha=\beta$, e imponendo questa condizione nel fascio, dopo aver diviso per β otteniamo il piano $x+y+z-1=0$.
La retta cercata è dunque data dalle equazioni

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$$

(8) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ definito dalle equazioni $x_1+x_4=0,\ x_1+x_5=0$.

Si determini una base di $U^\perp$.

Svolgimento
Ricordiamo che per definizione $U^\perp$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ dato dai vettori perpendicolari a U. Ora, un vettore è perpendicolare a U se e solo se è perpendicolare a ogni vettore di un suo sistema di generatori.
Per trovare esplicitamente un sistema di generatori di U risolviamo il sistema omogeneo dato dalle equazioni che lo definiscono: dopo una semplice riduzione a scala realizzata mediante l'operazione elementare $R_2 \to R_2 - R_1$ otteniamo il sistema ridotto a scala equivalente $x_1+x_4=0$, $-x_4+x_5=0$: scegliendo come parametri $x_2=t$, $x_3=s$, $x_5=u$, abbiamo che le sue soluzioni sono tutti e soli i vettori del tipo $(-u,t,s,u,u)$.

[4] Si vedano gli appunti della lezione del 13 giugno.

Poichè $(-u, t, s, u, u) = u(-1, 0, 0, 1, 1) + t(0, 1, 0, 0, 0) + s(0, 0, 1, 0, 0)$, un insieme di generatori di U è dato da $\{u_1 = (-1, 0, 0, 1, 1), u_2 = (0, 1, 0, 0, 0), u_3 = (0, 0, 1, 0, 0)\}$.
Dunque un generico vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ è perpendicolare a U se e solo se è perpendicolare contemporaneamente a u_1, u_2, u_3: quindi dobbiamo avere

$$\langle v, u_1 \rangle = -x_1 + x_4 + x_5 = 0,$$

$$\langle v, u_2 \rangle = -x_2 = 0,$$

$$\langle v, u_1 \rangle = x_3 = 0.$$

Mettendo insieme queste equazioni, otteniamo equazioni cartesiane per $U^\perp$.