## CAMBIAMENTI DI BASE

Componenti di un vettore rispetto ad una base e matrici di passaggio tra due basi.
Formula del cambiamento di base per le componenti di un vettore.
Formula del cambiamento di base per la matrice di applicazioni lineari ed endomorfismi.

---

**Esercizio 1** *Si consideri l'insieme di vettori di* $\mathbb{R}^3$ *dato da*

$$\mathcal{B} = \{X_1 = (1,1,2)\,,\ X_2 = (2,-1,1),\ X_3 = (3,1,2)\}\,.$$

1) *Si verifichi che* $\mathcal{B}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e si determinino le componenti* $[X]_{\mathcal{B}}$ *del vettore* $X = (0,1,3)$ *rispetto a* $\mathcal{B}$.

2) *Si determinino un vettore* $Y \in \mathbb{R}^3$ *tale che* $[Y]_{\mathcal{B}} = X$ *ed una base* $\mathcal{B}_0$ *di* $\mathbb{R}^3$ *tale che* $[X]_{\mathcal{B}_0} = (1,1,1)$.

3) *Si calcolino le matrici di passaggio* $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ *e* $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ *dalla base canonica* $\mathcal{C}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathcal{B}$ *e viceversa.*

4) *Si verifichi che* $\mathcal{B}' = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e si calcolino* $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ *e* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

**Esercizio 2** *Si consideri l'applicazione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definita da* $f(x,y) = (x+2y, x-y)$.

1) *Si verifichi che* $f$ *è un endomorfismo di* $\mathbb{R}^2$.

2) *Si determini la matrice* $M_f^{\mathcal{C}}$ *associata ad* $f$ *rispetto alla base canonica* $\mathcal{C}$ *in partenza e in arrivo. Si ripeta l'esercizio determinando la matrice* $M_f^{\mathcal{B}}$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} = \{X_1 = (2,-1),\ X_2 = (1,1)\}$.

**Esercizio 3** *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base* $\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(0,-1,1))$ *di* $\mathbb{R}^3$. *Scrivere la matrice* $M_f^{\mathcal{C}}$ *di* $f$ *rispetto alla base canonica* $\mathcal{C}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *e determinare* $\ker f$ *ed* $\operatorname{im} f$.

**Esercizio 4** *Si consideri l'applicazione lineare* $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ *definita dalle condizioni*

$$f(1+x) = 1, \quad f(1+x^2) = 1+x, \quad f(x+x^2) = x.$$

1) *Calcolare le matrici di* $f$ *rispetto alle basi* $\mathcal{B} = (1+x+x^2, 1+x^2, x+x^2)$ *di* $\mathbb{R}_2[x]$ *e* $\mathcal{B}' = (1+x, 1-x)$ *di* $\mathbb{R}_1[x]$ *e rispetto alle basi canoniche di* $\mathbb{R}_2[x]$ *ed* $\mathbb{R}_1[x]$.

2) *Verificare la formula del cambio di base per la matrice di un'applicazione lineare.*

3) *Studiare l'applicazione* $f$.

**SVOLGIMENTI**

---

**Esercizio 1** *1)* La matrice dei vettori $X_1, X_2, X_3$ (rispetto alla base canonica) ha determinante non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

e quindi $X_1, X_2, X_3$ sono linearmente indipendenti. Siccome sono tanti vettori quanti la dimensione di $\mathbb{R}^3$, essi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.
Per calcolare le componenti $[X]_{\mathcal{B}}$ possiamo procedere in due modi: (i) usare la definizione di componenti di $X$ rispetto $\mathcal{B}$; (ii) usare la formula del cambiamento di base per le componenti. Vediamoli entrambi, sebbene il secondo risulti in questo caso più laborioso.

(i) Per definizione di componenti di $X$ rispetto $\mathcal{B}$, si ha $[X]_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2, c_3)$ dove $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sono gli unici coefficienti per cui $c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 = X$. Questo significa

$$c_1(1, 1, 2) + c_2(2, -1, 1) + c_3(3, 1, 2) = (0, 1, 3),$$

ossia equivale a risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + c_2 + 2c_3 = 3 \end{cases} .$$

A conti fatti, risulta $c_1 = \frac{7}{3}$, $c_2 = \frac{1}{3}$ e $c_3 = -1$, cioè $[X]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$.

(ii) Usiamo la formula del cambiamento di base per le componenti: per ogni coppia di basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ si ha $[X]^T_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\,[X]^T_{\mathcal{B}_2}$, dove $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base $\mathcal{B}_2$, cioè la matrice che si ottiene disponendo sulle colonne le componenti rispetto a $\mathcal{B}_1$ dei vettori di $\mathcal{B}_2$.
Poiché conosciamo le componenti rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ sia di $X$ che dei vettori di $\mathcal{B}$, cioè $[X]_{\mathcal{C}} = X = (0, 1, 3)$ e

$$[X_1]_{\mathcal{C}} = X_1 = (1, 1, 2)\,, \quad [X_2]_{\mathcal{C}} = X_2 = (2, -1, 1)\,, \quad [X_3]_{\mathcal{C}} = X_3 = (3, 1, 2)\,,$$

abbiamo

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e risulta $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,[X]^T_{\mathcal{B}} = [X]^T_{\mathcal{C}} = (0, 1, 3)^T$, ossia $[X]^T_{\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,(0, 1, 3)^T$. Calcolando $P^{-1}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$, si trova

$$P^{-1}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

e dunque si ottiene

$$[X]^T_{\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

*2)* Per definizione di componenti, $[Y]_{\mathcal{B}} = (0,1,3)$ significa

$$Y = 0X_1 + 1X_2 + 3X_3 = (2,-1,1) + 3\,(3,1,2) = (11,2,7)\,.$$

Per definizione di componenti $[X]_{\mathcal{B}_0} = (1,1,1)$, la base $\mathcal{B}_0 = (Y_1,Y_2,Y_3)$ deve essere tale che $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$, cioè dobbiamo trovare 3 vettori linearmente indipendenti la cui somma sia $(0,1,3)$. Per esempio possiamo scegliere i primi 2 vettori della base canonica come $Y_1, Y_2$ ed $Y_3$ il terzo in modo che siano soddisfatte le condizioni richieste: si ottiene

$$\mathcal{B}_0 = ((1,0,0),(0,1,0),(-1,0,3))\,.$$

*3)* Ricordando che per ogni coppia di basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ si ha $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$, entrambe le matrici sono già state calcolate al punto *1)*:

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

*4)* Si procede come al punto *1)*. Il determinante della matrice dei vettori di $\mathcal{B}'$ è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

per cui $\mathcal{B}'$ (che ha 3 elementi) è una base di $\mathbb{R}^3$.
Per scrivere $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, servono le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$; calcolandole come in (i) (ad esempio le componenti $[X_1]_{\mathcal{B}'} = (c_1,c_2,c_3)$ si ottengono risolvendo il sistema $c_1(1,0,1) + c_2(1,1,0) + c_3(1,1,1) = (1,1,2)$), si trova

$$[X_1]_{\mathcal{B}'} = (0,-1,2), \quad [X_2]_{\mathcal{B}'} = (3,1,-2), \quad [X_3]_{\mathcal{B}'} = (1,2,0).$$

Dunque

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e, a conti fatti,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2** *1)* Si tratta di verificare che $f$ è lineare, il che è chiaramente vero, in quanto le componenti di $f\,(x,y) = (x+2y, x-y)$ sono polinomi lineari omogenei nelle variabili $x, y$.

*2)* La matrice associata ad un endomorfismo rispetto ad una base qualsiasi $\mathcal{B}$ è la matrice le cui colonne sono le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ delle immagini tramite l'endomorfismo dei

vettori di $\mathcal{B}$ stessi.
Considerando la base canonica $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$, si ha

$$f(1,0) = (1,1) \quad \text{ed} \quad f(0,1) = (2,-1),$$

per cui si ottiene

$$M_f^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Considerando la base $\mathcal{B} = \{X_1 = (2,-1),\ X_2 = (1,1)\}$, possiamo procedere nei due modi seguenti.

(i) Si ha

$$f(X_1) = (0,3) \quad \text{ed} \quad f(X_2) = (3,0),$$

ma per scrivere $M_f^{\mathcal{B}}$ ci servono le componenti di $f(X_1), f(X_2)$ rispetto a $\mathcal{B}$ (mentre $(0,3)$ e $(3,0)$ sono le loro componenti rispetto alla base canonica). Risolvendo il sistema $c_1X_1 + c_1X_2 = (0,3)$ si trova $(c_1,c_2) = (-1,2)$, mentre il sistema $c_1X_1 + c_1X_2 = (3,0)$ fornisce $(c_1,c_2) = (1,1)$. Dunque

$$f(X_1) = -X_1 + 2X_2 \quad \text{ed} \quad f(X_2) = X_1 + X_2$$

(cioè $[f(X_1)]_{\mathcal{B}} = (-1,2)$ ed $[f(X_2)]_{\mathcal{B}} = (1,1)$) e pertanto

$$M_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Le matrici $M_f^{\mathcal{B}_1}$, $M_f^{\mathcal{B}_2}$ dello stesso endomorfismo $f$ rispetto a due basi qualsiasi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sono legate dalla relazione

$$M_f^{\mathcal{B}_2} = P^{-1} M_f^{\mathcal{B}_1} P,$$

dove $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base $\mathcal{B}_2$ (e $P^{-1} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$).
Nel caso in questione, $M_f^{\mathcal{C}}$ è già stata calcolata in (1) e si ha $M_f^{\mathcal{B}} = P^{-1}\, M_f^{\mathcal{C}}\, P$ con $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ matrice di passaggio dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$. Quest'ultima è subito data da

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si calcola

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_f^{\mathcal{B}} = P^{-1}\, M_f^{\mathcal{C}}\, P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3** Per procurarci la matrice $M_f^{\mathcal{C}}$ di $f$ rispetto alla base canonica

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{i} = (1,0,0)\,,\ \mathbf{j} = (0,1,0),\ \mathbf{k} = (0,0,1)\}$$

di $\mathbb{R}^3$, possiamo determinare le componenti rispetto a $\mathcal{C}$ di $f(\mathbf{i})$, $f(\mathbf{j})$ ed $f(\mathbf{k})$ (da mettere poi sulle colonne di $M_f^{\mathcal{C}}$), oppure usare la formula del cambio di base per la matrice di un endomorfismo. Vediamo entrambi i procedimenti.

(i) *(tramite definizione di $M_f^{\mathcal{C}}$)* Avendo la matrice di $f$ rispetto a $\mathcal{B}$ (la matrice $A$ del testo), sappiamo che

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= 1(1,1,1) + 2(0,1,1) + 3(0,-1,1) = (1,0,6), \\ f(0,1,1) &= 0(1,1,1) - 1(0,1,1) - 2(0,-1,1) = (0,1,-3), \\ f(0,-1,1) &= 1(1,1,1) + 1(0,1,1) + 1(0,-1,1) = (1,1,3), \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} f(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) &= (1,0,6), \\ f(\mathbf{j}+\mathbf{k}) &= (0,1,-3), \\ f(-\mathbf{j}+\mathbf{k}) &= (1,1,3). \end{aligned}$$

Per la linearità di $f$, ciò significa

$$\begin{cases} f(\mathbf{i}) + f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (1,0,6) \\ f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (0,1,-3) \\ -f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (1,1,3) \end{cases}$$

e quindi, risolvendo rispetto alle incognite $f(\mathbf{i})$, $f(\mathbf{j})$, $f(\mathbf{k})$, si ottiene:

$$\begin{cases} f(\mathbf{i}) + f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (1,0,6) \\ f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (0,1,-3) \\ f(\mathbf{k}) = f(\mathbf{j}) + (1,1,3) \end{cases} \begin{cases} - \\ 2f(\mathbf{j}) + (1,1,3) = (0,1,-3) \\ - \end{cases} \begin{cases} - \\ f(\mathbf{j}) = \left(-\frac{1}{2},0,-3\right) \\ f(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2},1,0\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\mathbf{i}) + \left(-\frac{1}{2},0,-3\right) + \left(\frac{1}{2},1,0\right) = (1,0,6) \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} f(\mathbf{i}) = (1,-1,9) \\ f(\mathbf{j}) = \left(-\frac{1}{2},0,-3\right) \\ f(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2},1,0\right) \end{cases}.$$

Dunque

$$M_f^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) *(tramite matrice di passaggio)* Usando la formula del cambio di base per la matrice di un endomorfismo, si ha:

$$M_f^{\mathcal{C}} = P^{-1} M_f^{\mathcal{B}} P,$$

dove $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ ed $M_f^{\mathcal{B}}$ è la matrice di $f$ rispetto a $\mathcal{B}$. Quest'ultima è la matrice $A$ data nel testo, quindi restano da calcolare $P$ e $P^{-1}$. Siccome abbiamo già le componenti dei vettori di $\mathcal{B} =$

$((1,1,1),(0,1,1),(0,-1,1))$ rispetto a $\mathcal{C}$, possiamo scrivere subito $P^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ (matrice di passaggio da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$) e poi calcolare $P = \left(P^{-1}\right)^{-1}$. Si ha

$$P^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e, a conti fatti, risulta

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_f^{\mathcal{C}} = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avendo la matrice di $f$ rispetto alla base canonica, possiamo calcolare $\ker f$ ed $\operatorname{im} f$ facilmente:

- $\ker f$ coincide con il sottospazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

  si trova $\ker f = \mathcal{L}(1,3,1)$ e quindi $\dim\ker f = 1$;

- $\operatorname{im} f$ è il sottospazio generato dalle colonne di $M_f^{\mathcal{C}}$ ed ha dimensione 2 per il teorema del rango, per cui ha per base una qualsiasi coppia di colonne linearmente indipendenti di $M_f^{\mathcal{C}}$, ad esempio $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left((1,-1,9),(1/2,1,0)\right)$.

**Esercizio 4** Controlliamo innanzitutto se l'applicazione $f$ è univocamente assegnata, cioè se dalle condizioni imposte risultano fissati valori di $f$ su una base della spazio di partenza. Si tratta quindi di verificare se $(1+x, 1+x^2, x+x^2)$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$. Se indichiamo con $\mathcal{C}$ la base canonica di $R_2[x]$ (cioè $\mathcal{C} = \left\{1, x, x^2\right\}$), si ha

$$[1+x]_{\mathcal{C}} = (1,1,0), \quad \left[1+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (1,0,1), \quad \left[x+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (0,1,1),$$

per cui la matrice dei vettori $1+x, 1+x^2, x+x^2$ rispetto a $\mathcal{C}$ ha determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

e pertanto i tre vettori sono linearmente indipendenti. Essendo tanti quanti la dimensione di $R_2[x]$, essi formano una base di $R_2[x]$ e quindi l'applicazione $f$ è ben definita.

*1)* Conviene procurarsi prima la matrice $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ di $f$ rispetto alle basi canoniche $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ e $\mathcal{C}' = \{1, x\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ ed $\mathbb{R}_1[x]$. Per questo, dobbiamo calcolare le componenti dei vettori $f(1), f(x), f(x^2)$ rispetto alla base $\mathcal{C}'$ (da mettere poi sulle colonne di $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$). Usando la linearità di $f$, dalle condizioni

$$f(1+x) = 1, \quad f(1+x^2) = 1+x, \quad f(x+x^2) = x$$

imposte dal testo deduciamo

$$\begin{cases} f(1) + f(x) = 1 \\ f(1) + f(x^2) = 1 + x \\ f(x) + f(x^2) = x \end{cases}$$

e quindi, risolvendo rispetto alle incognite $f(1), f(x), f(x^2)$, si ottiene:

$$\begin{cases} f(1) + f(x) = 1 \\ f(1) + f(x^2) = 1 + x \\ f(x) + f(x^2) = x \end{cases} \begin{cases} f(x) = 1 - f(1) \\ f(x^2) = 1 + x - f(1) \\ 1 - f(1) + 1 + x - f(1) = x \end{cases} \begin{cases} - \\ - \\ f(1) = 1 \end{cases} \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x^2) = x \\ f(1) = 1 \end{cases}.$$

Dunque

$$f(1) = 1(1) + 0(x), \quad f(x) = 0(1) + 0(x), \quad f(x^2) = 0(1) + 1(x),$$

cioè

$$[f(1)]_{\mathcal{C}'} = (1, 0), \quad [f(x)]_{\mathcal{C}'} = (0, 0), \quad [f(x^2)]_{\mathcal{C}'} = (0, 1),$$

e perciò

$$M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la matrice $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ di $f$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = (1+x+x^2, 1+x^2, x+x^2)$ e $\mathcal{B}' = (1+x, 1-x)$, dobbiamo calcolare le componenti dei vettori $f(1+x+x^2)$, $f(1+x^2)$, $f(x+x^2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Conoscendo $f(1), f(x), f(x^2)$ ed usando la linearità di $f$, si ottiene subito

$$\begin{aligned} f(1+x+x^2) &= f(1) + f(x) + f(x^2) = 1 + x, \\ f(1+x^2) &= f(1) + f(x^2) = 1 + x, \\ f(x+x^2) &= f(x) + f(x^2) = x, \end{aligned}$$

i quali vanno ora decomposti rispetto a $\mathcal{B}'$: ovviamente si ha subito

$$f(1+x+x^2) = f(1+x^2) = 1 + x = 1(1+x) + 0(1-x),$$

mentre ponendo $x = c_1(1+x) + c_2(1-x)$, si trova $x = c_1 + c_1x + c_2 - c_2x$, cioè $x = c_1 + c_2 + (c_1 - c_2)x$, che equivale a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases},$$

ossia $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = -\frac{1}{2}$; dunque $f\left(x + x^2\right) = x = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(1-x)$ e pertanto si conclude

$$\left[f\left(1+x+x^2\right)\right]_{\mathcal{B}'} = \left[f\left(1+x^2\right)\right]_{\mathcal{B}'} = (1,0), \quad \left[f\left(x+x^2\right)\right]_{\mathcal{B}'} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

In definitiva risulta

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

*2)* La formula del cambio di base per la matrice di $f$ è

$$M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = Q^{-1} M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P$$

dove $P$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ (nello spazio $\mathbb{R}_2[x]$) e $Q$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{C}'$ (nello spazio $\mathbb{R}_1[x]$).
Poiché è più facile decomporre i vettori di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispetto alle basi canoniche, piuttosto che viceversa, conviene calcolare $Q^{-1} = P_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}$ e $P^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ ed invertire poi la seconda, piuttosto che calcolare $Q$ e $P$. Essendo

$$\left[1+x+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (1,1,1)\,, \quad \left[1+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (1,0,1)\,, \quad \left[x+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (0,1,1)$$

e

$$[1+x]_{\mathcal{C}'} = (1,1)\,, \quad [1-x]_{\mathcal{C}'} = (1,-1)\,,$$

si ha

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

da cui, invertendo, risulta

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo dunque verificare che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eseguendo il prodotto a secondo membro, si vede che il risultato coincide con il primo membro e quindi l'uguaglianza è verificata.

*3)* Per studiare $f$ è comodo usare la matrice $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ rispetto alle basi canoniche, ovvero le uguaglianze

$$f(1) = 1, \quad f(x) = 0, \quad f\left(x^2\right) = x.$$

Poiché $f(x)$ è nullo, l'immagine di $f$ è generata dai soli vettori $f(1) = 1, f(x^2) = x$, che sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $\operatorname{im} f$. Dunque $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(1,x) = \mathbb{R}_1[x]$ ed $f$ risulta suriettiva. Per il teorema del rango, $\ker f$ ha allora dimensione 1 e, poiché $x \in \ker f$ (per definizione di nucleo, in quanto $f(x) = 0$) risulta $\ker f = \mathcal{L}(x)$.