13/06/2009

GEOMETRIA A (C.d.L. in Ingegneria Meccanica e Ingegneria Informatica)

Nel corso dell'esercitazione sono stati svolti alcuni esercizi sull'argomento "Rette e piani", tratti da temi d'esame passati. I quesiti tipici affrontati in questi esercizi sono:

- il passaggio da equazioni parametriche a equazioni cartesiane di una retta e viceversa;
- la determinazione della direzione di una retta data in equazioni cartesiane o in equazioni parametriche;
- la determinazione di una retta passante per un punto e parallela a una retta data;
- la determinazione di un piano che passi per un punto e (1) che sia perpendicolare a una retta data (2) che contenga una retta data.

Gli strumenti utilizzati nell'affrontare questi problemi, quali la determinazione del rango di matrici o la risoluzione di sistemi lineari mediante riduzione di Gauss, il prodotto vettoriale etc. si trovano nel testo di riferimento GEOMETRIA A (L.Alessandrini, L.Nicolodi).
Laddove possibile sono stati indicati più metodi di risoluzione dello stesso problema.

(1) Siano r la retta di equazione

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+3z-1=0 \end{cases}$$

e s la retta di equazione

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=3+4t \end{cases}$$

Si determinino: la mutua posizione di r e s; l'equazione di un piano perpendicolare a s e passante per $(1,2,-1)$; l'equazione di un piano parallelo a r e passante per $P_1=(1,2,-1)$ e $P_2=(0,-2,0)$.

Svolgimento

Per determinare la mutua posizione di r e s, determiniamo prima equazioni cartesiane per s: ad esempio, sostituendo $t = y$ nella prima e nella terza equazione otteniamo

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 4y - 3 = 0 \end{cases}.$$

Mettiamo insieme queste equazioni con quelle di r ottenendo cosi il sistema

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ z - 4y = 3 \\ x + y - z = 0 \\ x + 3z = 1 \end{cases}$$

che ha come matrice associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Per calcolare il rango di questa matrice e determinare così la posizione reciproca delle due rette applichiamo l'algoritmo di riduzione di Gauss.
Per indicare le operazioni che eseguiremo, seguiamo una notazione del tipo $R_i \to aR_i + bR_j$ per indicare "moltiplichiamo la riga i-esima per a, la j-esima per b e sostituiamo la combinazione così ottenuta alla riga i-esima".
Ad esempio, eseguendo le operazioni $R_3 \to R_3 - R_1$, $R_4 \to R_4 - R_1$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Eseguendo $R_3 \to -2R_3 + R_2$, $R_4 \to -4R_4 + R_2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{array}\right)$$

E infine, con $R_4 \to R_4 + 8R_3$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 51 \end{array}\right)$$

che riduce finalmente la matrice a una matrice a scala. Essendo le righe non nulle della matrice A dei coefficienti 3 e della matrice completa $(A|b)$ 4, si ha $rg(A) = 3$ e $rg(A|b) = 4$, e quindi le rette sono sghembe.

Un modo alternativo di verificare la posizione delle rette è il seguente: sostituendo le espressioni parametriche di s nelle equazioni cartesiane di r otteniamo

$$\begin{cases} t - 8 = 0 \\ 13t + 7 = 0 \end{cases}$$

che sono equazioni incompatibili (la prima dà $t = 8$, la seconda $t = -7/13$), il che ci dice che non esiste nessun punto di s le cui coordinate soddisfano le equazioni di r, e cioè s e r non hanno punti in comune: dunque sono o parallele disgiunte o sghembe. Per escludere che siano parallele, basta ricavare i loro vettori direttori: per s, leggendo nelle parametriche i coefficienti di t abbiamo $(1, 1, 4)$; per ricavare un vettore direttore per r si può procedere in due modi: considerando i coefficienti di x, y, z nella prima e nella seconda equazione cartesiana di r abbiamo i vettori $(1, 1, -1)$ e $(1, 0, 3)$: un vettore direttore per r è dato allora dal prodotto vettoriale di questi due vettori $(1, 1, -1) \times (1, 0, 3) = (3, -4, -1)$.
Alternativamente si può risolvere il sistema omogeneo associato alle equazioni cartesiane di r, le cui soluzioni sono esattamente tutti i vettori proporzionali a $(3, -4, -1)$, cioè l'insieme di tutti i possibili vettori direttori per r.
In ogni caso, è chiaro che i vettori $(1, 1, 4)$ e $(3, -4, -1)$ non sono proporzionali e dunque le rette, avendo diverse direzioni, non sono parallele.

Passiamo ora alla seconda domanda e determiniamo l'equazione di un piano perpendicolare a s e passante per (1,2,-1): il modo migliore di procedere è ricordare che, per un generico piano dato dall'equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$, il vettore (a, b, c) è normale al piano. Dunque un generico piano che sia normale alla retta s, che ha $(1, 1, 4)$ come vettore direttore, sar $x + y + 4z + d = 0$. Per determinare d imponiamo in questa generica equazione il passaggio per $(1, 2, -1)$ ottenendo $1 + 2 - 4 = d$ e cio $d = -1$. La risposta al quesito è dunque $x + y + 4z - 1 = 0$.

Veniamo alla terza domanda: per determinare il piano cercato, per quanto osservato sopra basta determinare una sua normale (a, b, c). Questo vettore (a, b, c) dovrà essere perpendicolare sia alla direzione di r, che è $(3, -4, -1)$, sia al vettore che congiunge i punti P_1 e P_2, le cui coordinate si ottengono sottraendo le coordinate di P_1 da quelle di P_2: $P_2 - P_1 = (0, -2, 0) - (1, 2, -1) = (-1, -4, 1)$. Dunque si può ottenere (a, b, c) come prodotto vettoriale $(3, -4, -1) \times (-1, -4, 1) = (-8, -2, -16)$. Il piano cercato sarà allora della forma $-8x-2y-16z=d$, e per determinare d imponiamo il passaggio ad esempio per P_2 sostituendo le sue coordinate nell'equazione, ottenendo $d=4$. Quindi la risposta al quesito è $-8x-2y-16z=4$ (si può anche dividere per -2 quest'equazione per ottenere $4x+y+8z=-2$).

(2) Sia r la retta di equazione

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ x-4=0 \end{cases}$$

e $P=(3,1,0)$.

Si determini un piano contenente r e P; equazioni parametriche per una retta s parallela a r e passante per P.

Svolgimento

Per rispondere alla prima domanda, ricordiamo che data una retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases},$$

l'equazione cartesiana di un generico piano che contiene questa retta è data da $\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$, al variare di α e β in $\mathbb{R}$. Nel nostro caso, l'equazione di un generico piano che contiene r è data da $\alpha(x-y+z-2)+\beta(x-4)=0$. Per determinare α e β, imponiamo il passaggio per $P=(3,1,0)$ sostituendo le sue coordinate in quest'equazione, ottenendo $\beta=0$; dunque l'equazione cercata è $\alpha(x-y+z-2)=0$: si noti che essa è determinata a meno del coefficiente di proporzionalità α (le equazioni cartesiane sono sempre determinate a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo) dividendo per il quale otteniamo la risposta cercata $x-y+z-2=0$.

Per rispondere alla seconda domanda, determiniamo prima un vettore direttore di r dalle sue equazioni cartesiane come spiegato nello svolgimento dell'esercizio precedente, cioè attraverso il prodotto vettoriale dei vettori che ottengo dai coefficienti della prima e della seconda equazione cartesiana di r: $(1,-1,1)\times(1,0,0)=(0,1,1)$. Questo vettore, per la condizione di parallelismo, dà anche la direzione della retta s cercata, che può essere subito scritta in equazioni parametriche da

$$\begin{cases} x=3 \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$$

(i coefficienti di t sono le coordinate del vettore direttore $(0, 1, 1)$, mentre i termini noti sono le coordinate del punto $(3, 1, 0)$ per cui passa la retta).
Un modo alternativo di risolvere questo quesito è ricordare che, quando una retta è data in equazioni cartesiane, tutte le rette a questa parallele si ottengono variando i termini noti di queste equazioni. Ad esempio, nel nostro caso tutte le rette parallele a r sono date dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x = b \end{cases}$$

al variare di a e b in $\mathbb{R}$. Per determinare quella che passa per il punto $(3, 1, 0)$, sostituiamo le sue coordinate in queste equazioni ottenendo $a = 2$ e $b = 3$: la retta cercata è così completamente determinata.

(3) Sia r la retta di equazione

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \ . \end{cases}$$

Si determinino i punti di r che hanno distanza 4 dall'origine; si determini l'equazione cartesiana di una retta s parallela sia a r che all'asse delle z.

Svolgimento

Per rispondere alla prima domanda, scriviamo le generiche coordinate di un punto di r determinando le sue equazioni parametriche: ricordiamo che, in generale, per determinare le equazioni parametriche di una retta data in equazioni cartesiane, basta risolvere il sistema dato da queste ultime. In questo caso, la matrice associata al sistema in questione è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Riducendo a scala mediante l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

che corrisponde al sistema equivalente

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo dal basso, e chiamando t la variabile libera y, otteniamo le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

che ci dicono che il generico punto di r ha coordinate $(t, t, 0)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Ora, tra questi punti dobbiamo cercare quelli che distano 4 dall'origine $(0, 0, 0)$.
Ricordando che l'espressione della distanza tra due punti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ è $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$, abbiamo che la condizione data dal quesito è

$$4 = \sqrt{(t-0)^2 + (t-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2t^2}$$

che risolta dà $t = \pm\sqrt{8}$. Tornando alle equazioni parametriche, vediamo che i punti che soddisfano la condizione data sono $(\sqrt{8}, \sqrt{8}, 0)$ e $(-\sqrt{8}, -\sqrt{8}, 0)$.

Per rispondere alla seconda domanda, notiamo che l'asse delle z ha direzione data dal vettore $(0, 0, 1)$, mentre la retta r, come si vede leggendo i coefficienti di t nelle sue equazioni parametriche, ha vettore direttore $(1, 1, 0)$: essendo questi due vettori non proporzionali, essi NON determinano la stessa direzione e quindi NON può esistere una retta parallela a entrambe queste rette.