20/06/2009

GEOMETRIA A (C. d. L. in Ingegneria Meccanica e Ingegneria Informatica)

Oggetto dell'esercitazione sono stati i seguenti argomenti:

1) Risoluzione di sistemi lineari, con e senza parametro; applicazioni del teorema di Rouché-Capelli (esercizi (1)-(4));

2) le nozioni di combinazione lineare, indipendenza lineare, insieme di generatori, base (esercizi (5)-(9)).

Per entrambi gli argomenti, è stata dedicata attenzione tanto agli esercizi di calcolo quanto alle domande teoriche.
Le definizioni dei concetti coinvolti negli esercizi e gli enunciati dei teoremi usati si trovano nel libro di riferimento GEOMETRIA A (L. Alessandrini, L. Nicolodi).

(1) Dire se il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

è compatibile e, in caso affermativo, trovarne le soluzioni.

**Svolgimento**

Per risolvere l'esercizio ricordiamo che dato un sistema di equazioni lineari $Ax = b$, dove $A$ è la matrice dei coefficienti del sistema e $b$ è il suo vettore dei termini noti, il sistema è compatibile se e solo se il rango di $A$ è uguale al rango della matrice completa $(A|b)$ (cioè la matrice che si ottiene aggiungendo il vettore $b$ ad $A$ come ultima colonna).
Per determinare i ranghi, applichiamo il procedimento di riduzione a scala alla matrice dei coefficienti del sistema e alla matrice completa.
Abbiamo

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Applichiamo le seguenti operazioni elementari[1]: $R_2 \to -3R_2+5R_1$, $R_3 \to 3R_3 - 7R_1$, $R_4 \to 3R_4 - R_1$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

Applichiamo ora le operazioni $R_3 \to R_3 + 2R_2$, $R_4 \to R_4 - R_2$ ottenendo infine la matrice ridotta a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Essendo il rango il numero di righe non nulle della matrice dopo una qualunque riduzione a scala, deduciamo che $rg(A) = 2$, $rg(A|b) = 2$: il sistema è dunque compatibile per il teorema di Rouché-Capelli. Inoltre, lo stesso teorema afferma che nel caso in cui il sistema sia compatibile, allora le sue soluzioni dipendono da $n - rg(A)$ parametri, dove $n$ è il numero di incognite del sistema. Nel nostro caso $n - rg(A) = 3 - 2 = 1$.
Per trovare le soluzioni, scriviamo il sistema corrispondente alla matrice ridotta a scala (che sappiamo essere equivalente al sistema iniziale in quanto le operazioni elementari non modificano l'insieme delle soluzioni)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ y - 4z = -1 \end{cases}$$

(NB le ultime due righe corrispondono alle equazioni $0 = 0$ che sono delle identità che non impongono alcun vincolo sulle incognite e possono dunque non essere considerate)
e risolviamolo a partire dall'ultima equazione: questa dà $y = 4z - 1$, che sostituito nella prima dà $3x + 2(4z - 1) + z = 1$, cioè $x = 1 - 3z$. In queste espressioni, l'incognita $z$ funge da parametro: denotando $z = t$, otteniamo che le soluzioni del sistema sono tutte le terne del tipo $(1 - 3t, 4t - 1, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Ricordiamo che, in generale, si chiamano elementi di testa o pivot della matrice ridotta a scala i primi coefficienti non nulli in ogni riga (nel nostro caso 3 nella prima riga e 1 nella seconda), e nello scrivere le soluzioni le incognite corrispondenti a questi elementi ($x$ e $y$ nel nostro caso) si esprimono in

[1] Ricordiamo che la notazione $R_i \to aR_i + bR_j$ significa che sostituiamo la riga $i$-esima con la somma tra la riga $i$-esima moltiplicata per $a$ e la riga $j$-esima moltiplicata per $b$

funzione delle incognite restanti che non corrispondono a nessun elemento di testa (nel nostro caso solo la $z$).

(2) Si risolva, se compatibile, il sistema

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

e si risponda alla seguente domanda: è possibile modificare i termini noti in modo che il sistema abbia soluzione unica?

**Svolgimento**

Riguardo alla compatibilità del sistema, osserviamo che un sistema omogeneo (cioè tale che la colonna dei suoi termini noti è il vettore nullo) è sempre compatibile: infatti, esso ha sempre la soluzione $(0, 0, \ldots, 0)$. Nei termini del teorema di Rouch'e-Capelli, sarà sempre $rg(A) = rg(A|0)$ in quanto la colonna dei termini noti rimane il vettore nullo dopo qualunque operazione elementare e quindi, una volta ridotta a scala la matrice, le righe nulle della matrice dei coefficienti saranno nulle anche nella matrice completa.
Per trovare le soluzioni del sistema, scriviamo la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

e riduciamola a scala applicando prima le operazioni elementari $R_2 \to R_2 + 2R_1$, $R_3 \to R_3 + 3R_1$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e come ultima operazione la $R_3 \to R_3 - R_2$ che riduce la matrice a scala:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque il rango della matrice è 2 e le soluzioni dipenderanno da $3 - 2 = 1$ parametri. La seconda riga corrisponde all'equazione $-2y + 2z = 0$, che dà $y = z$, e sostituendo questa uguaglianza nell'equazione corrispondente alla prima riga, cioè $-x+2y-z = 0$ otteniamo $x = z$. Denotando $z = t$ otteniamo allora che le soluzioni del sistema sono tutte le terne del tipo $(t, t, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Per rispondere alla domanda, osserviamo che, sempre per il teorema di Rouché-Capelli un sistema ha soluzione unica solo se il rango della matrice dei coefficienti coincide con il numero delle incognite (in questo caso, infatti, $n - rg(A) = 0$ e cioè nell'espressione delle soluzioni non compare nessun parametro). Ma, indipendentemente dalla colonna dei termini noti che scegliamo, il rango della matrice dei coefficienti del nostro sistema è 2 e quindi, ammesso che il sistema rimanga compatibile, le sue soluzioni dipenderanno sempre da 1 parametro.

(3) Si determini $Sol(A|0)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Svolgimento**

Ricordiamo che $Sol(A|0)$ denota l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = 0$. Applichiamo dunque una riduzione a scala alla matrice $A$. Tramite le operazioni elementari $R_2 \to R_2 - R_1$ e $R_3 \to R_3 - R_1$, e dopo aver scambiato la seconda e la terza riga, otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & t-1 & 1-t & -2 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

Distinguiamo ora i casi $t = 1$ e $t \neq 1$: nel primo caso la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo il suo rango 2, le soluzioni del sistema dipendono da $4-2 = 2$ parametri (NB le incognite sono 4 perchè il numero delle incognite di un sistema è uguale al numero di colonne della matrice dei coefficienti). Se chiamiamo $x, y, z, w$ le incognite del sistema, la seconda riga della matrice corrisponde all'equazione $-2w = 0$, ovvero $w = 0$, che sostituita nell'equazione corrispondente alla prima riga $(x + y + w = 0)$ dà $x = -y$. Come abbiamo già detto nell'esercizio precedente, usiamo come parametri quelle variabili che non corrispondono a nessun elemento di testa (cioè $y$ e $z$): le soluzioni del sistema sono allora tutte le quadruple del tipo $(-y, y, z, 0)$ al variare di $y$ e $z$ in $\mathbb{R}$.

Nel caso $t \neq 1$ tutte e tre le righe del sistema sono non nulle, il rango è 3 e le soluzioni del sistema dipenderanno da 1 solo parametro. Le equazioni corrispodenti alle righe della matrice ridotta sono in questo caso $x + y + (t-1)z + w = 0$, $(t-1)y + (1-t)z - 2w = 0$ e $(1-t)z = 0$. Tenendo conto del fatto che $1 - t \neq 0$, quest'ultima equazione dà $z = 0$, che sostituita nella seconda dà $y = \frac{2}{t-1}w$, e sostituendo nella prima abbiamo, dopo aver svolto i calcoli, $x = \frac{1+t}{t-1}w$.
In conclusione, per ogni $t \neq 1$ fissato il sistema ha come soluzioni tutte le quadruple del tipo $(\frac{1+t}{t-1}w, \frac{2}{t-1}w, 0, w)$ al variare di $w \in \mathbb{R}$.

(4) Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false: (a) un sistema omogeneo di 2 equazioni in 5 incognite ha sempre soluzioni, e queste dipendono da 3 parametri; (b) un sistema omogeneo di 2 equazioni in 5 incognite ha sempre soluzioni, e queste dipendono da almeno 3 parametri; (c) se un sistema quadrato $Ax = b$ è risolubile, allora la soluzione è unica; (d) se $Ax = b$ è un sistema quadrato, con $A$ matrice non invertibile, allora esso non ha soluzioni; (e) se $Ax = b$ è un sistema quadrato, con $A$ matrice non invertibile, allora esso ha soluzioni

**Svolgimento**

(a) e (b): è vero che il sistema ha sempre soluzioni in quanto, come abbiamo osservato sopra, ogni sistema omogeneo è compatibile; per il teorema di Rouchè-Capelli sappiamo che il numero di parametri da cui dipendono le soluzioni è $5 - rg(A)$, dove $A$ è la matrice dei coefficienti del sistema. Dunque il numero dei parametri è 3 solo nel caso in cui il rango della matrice $A$ è 2, mentre è uguale a 4 se $rg(A) = 1$. Non potendo essere il rango maggiore di 2 (il rango di una matrice è sempre minore o uguale al numero delle righe e al numero delle colonne), concludiamo che (a) è falsa, mentre (b) ̀vera.

(c) : sempre per il teorema di Rouché-Capelli, un sistema $Ax = b$ ha soluzione unica solo se $rg(A) = n$, dove $n$ è il numero di incognite del sistema; dunque in generale (c) è falsa

(d) e (e) : per utilizzare il teorema di Rouché-Capelli, basta ricordare che una matrice quadrata di ordine $n$ è invertibile se e solamente se essa ha rango massimo uguale a $n$. Dunque, l'ipotesi fatta significa che $rg(A) < n$. Poichè nella matrice completa aggiungiamo una colonna (il vettore dei termini noti) può succedere che il rango aumenti di 1, cioè $rg(A) \neq rg(A|b)$ e il sistema

non ha soluzioni: dunque (e) è falsa; d'altra parte, può accadere che il rango resti lo stesso, e quindi anche (d) è falsa.
A ulteriore commento di questi ultimi due quesiti, osserviamo che se l'ipotesi fosse stata "$A$ invertibile ", allora avremmo potuto concludere che il sistema ha sempre soluzioni: in tal caso, infatti, essendo il rango di $A$ uguale a $n =$ numero delle righe e delle colonne, aggiungendo la colonna dei termini noti per formare la matrice completa non è possibile che il rango aumenti, e avremmo automaticamente avuto $rg(A) = rg(A|b)$.

(5) Scrivere, se è possibile, il vettore $(0, 0, 0, 1)$ come combinazione lineare di $(0, 0, 0, 0)$, $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 1)$

**Svolgimento**

Ricordiamo che, dati $k$ vettori $v_1, \ldots, v_k$ in $\mathbb{R}^n$, un vettore è loro combinazione lineare se esso può essere scritto nella forma $x_1v_1 + \cdots + x_kv_k$ per certi coefficienti $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$.
Il quesito equivale quindi a chiedere se esistono $x_1, x_2, x_3, x_4$ tali che

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}.$$

il che equivale a chiedere se il sistema

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

ha soluzioni. Ora, è chiaro che questo sistema è incompatibile (anche senza effettuare una riduzione a scala, sostituendo i valori di $x_2, x_3, x_4$ dati dalle ultime 3 equazioni nella prima si ottiene $-1 = 0$) quindi non è possibile scrivere il vettore come combinazione lineare dei 4 vettori dati.

(6) Siano $v = (1, -1, 3, -3, 0)$, $w = (2, 4, 6, 8, 10)$, $u = (1, 2, 3, 4, 5)$. Se $u = av + bw$, si determinino $a$ e $b$; che rango ha la matrice che ha per colonne i vettori $v, w, u$?

**Svolgimento** Si osserva subito che $u = \frac{1}{2}w$, quindi $a = 0$, $b = 1/2$. In alternativa, si scrive esplicitamente l'uguaglianza $u = av + bw$ come

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b \\ -a+4b \\ 3a+6b \\ -3a+8b \\ 10b \end{vmatrix}$$

e si risolve il sistema

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ -a+4b=2 \\ 3a+6b=3 \\ -3a+8b=4 \\ 10b=5 \end{cases}$$

Per rispondere alla domanda, si ricordi che il rango di una matrice può anche essere definito come il numero di righe (o di colonne) linearmente indipendenti: poichè $k$ vettori sono linearmente indipendenti quando nessuno di loro può essere scritto come combinazione dei rimanenti, abbiamo che le colonne $u, v, w$ della matrice sono linearmente dipendenti (la prima parte dell'esercizio dimostra infatti che $u$ si scrive come combinazione di $v$ e $w$) mentre le colonne $v$ e $w$ sono indipendenti (due vettori sono linearmente dipendenti se e solamente se essi sono proporzionali). Dunque abbiamo due colonne indipendenti, e il rango è 2.

(7) Si risponda ai seguenti quesiti: 6 vettori in $\mathbb{R}^3$ (a) non possono mai formare una base di $\mathbb{R}^3$; (b) generano sempre $\mathbb{R}^3$; (c) non generano mai $\mathbb{R}^3$

**Svolgimento** Per rispondere al quesito, è utile avere in mente il seguente schema generale: dati $k$ vettori $v_1, \ldots, v_k$ in $\mathbb{R}^n$, si ha:

- se $k < n$, allora $v_1, \ldots, v_k$ NON possono generare $\mathbb{R}^n$ (ma possono essere sia linearmente indipendenti che linearmente dipendenti, a seconda dei casi)
- se $k > n$, allora $v_1, \ldots, v_k$ NON possono essere linearmente indipendenti (ma possono generare o non generare $\mathbb{R}^n$, a seconda dei casi)
- se $k = n$, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti se e solamente se generano $\mathbb{R}^n$ (ovvero basta verificare una sola delle due condizioni affinchè siano una base)

Da questo schema si evince che 6 vettori in $\mathbb{R}^3$ non sono mai linearmente indipendenti e quindi non potranno essere una base; d'altra parte, possono o no generare $\mathbb{R}^3$ a seconda dei casi. Dunque (a) è vera, mentre (b) e (c) sono false.

(8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false: (a) se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti, allora $v_2, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti; (b) se $v_1, \ldots, v_k$ generano $\mathbb{R}^n$, allora $2v_1, \ldots, 2v_k$ generano $\mathbb{R}^n$.

**Svolgimento**

(a): l'affermazione è vera: infatti se esistessero dei numeri reali $c_2, \ldots, c_k$ non tutti nulli tali che $c_2v_2 + \cdots c_kv_k = 0$ (ovvero: se $v_2, \ldots, v_k$ fossero linearmente dipendenti) allora avremmo che $0v_1 + c_2v_2 + \cdots c_kv_k = 0$ è una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$ con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo: ma questo contraddice il fatto che $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.
(b): l'affermazione è vera: infatti l'ipotesi ci dice che ogni $v \in \mathbb{R}^n$ può essere scritto come $v = c_1v_1 + \cdots c_kv_k$, ma essendo $c_1v_1 + \cdots c_kv_k = \frac{c_1}{2}2v_1 + \cdots \frac{c_k}{2}2v_k$ allora $v$ si scrive anche come una combinazione lineare di $2v_1, \ldots, 2v_k$.

(9) Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: se $v, w \in \mathbb{R}^5$ sono linearmente indipendenti, allora $2v, v+w$ sono linearmente indipendenti

**Svolgimento**

Per controllare l'affermazione, basta verificare se esistono due numeri reali $x, y$ non entrambi nulli tali che $x(2v) + y(v + w)$ è uguale al vettore nullo.
Ora, $x(2v) + y(v + w) = (2x + y)v + yw$ quindi, essendo $v$ e $w$ linearmente indipendenti per ipotesi, questa combinazione può essere uguale al vettore nullo solo se entrambi i suoi coefficienti $2x + y$ e $y$ sono nulli.
Ma il sistema $2x + y = 0, y = 0$ ha la sola soluzione nulla, il che implica che l'affermazione è vera.