

# Assegnamento

Sia dato un grafo bipartito completo  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  con

$$V_1 = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad V_2 = \{b_1, \dots, b_n\}$$

e quindi  $|V_1| = |V_2| = n$ . Agli archi  $(i, j) \in E$  sono associati i costi  $d_{ij} \geq 0$  e interi.

Il problema di assegnamento consiste nel cercare tra tutti i matching  $M$  di cardinalità  $n$  su tale grafo, quello per cui

$$\sum_{(i,j) \in M} d_{ij}$$

è minimo.

# Modello per Esempio 5

Il problema nell'Esempio 5 può essere modellato come problema di assegnamento dove:

- i nodi in  $V_1$  sono i lavori e quelli in  $V_2$  i lavoratori;
- gli archi del grafo rappresentano il possibile assegnamento di un lavoro a un lavoratore;
- i valori  $d_{ij}$  degli archi rappresentano i costi di assegnamento del lavoro  $i$  al lavoratore  $j$ .

Risolvere il problema di individuare i lavori da assegnare ai vari lavoratori a un costo totale minimo equivale a risolvere un problema di assegnamento sul grafo appena descritto.

Nel seguito vedremo una procedura di risoluzione per questo problema, l'**algoritmo ungherese**.

# Osservazione

Si è supposto che  $V_1$  e  $V_2$  abbiano la stessa cardinalità  $n$ . Vi sono però casi in cui questo non è vero ( $|V_1| > |V_2|$  oppure  $|V_1| < |V_2|$ ).

Questi casi possono sempre essere ricondotti al caso  $|V_1| = |V_2|$  aggiungendo elementi fittizi nell'insieme più piccolo con costo degli accoppiamenti con elementi fittizi pari a 0 (l'accoppiamento con un elemento fittizio equivale a un non accoppiamento).

Se la cardinalità è diversa allora si aggiungono elementi fittizi con costo pari a 0 nell'insieme più piccolo fino ad avere la stessa cardinalità da entrambe le parti

# Un esempio

Tabella dei costi ( $n = 4$ ):

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$a_1$	2	3	4	5
$a_2$	6	2	2	2
$a_3$	7	2	3	3
$a_4$	2	3	4	5

# Matrice dei costi

La matrice dei costi  $T_0$  di ordine  $n \times n$  è semplicemente la matrice che ha come elemento nella posizione  $(i, j)$  il valore  $d_{ij}$ .

# Riduzione della matrice - I

Il primo passo consiste nel trasformare la matrice  $T_0$  in una nuova matrice. Si comincia a calcolare per ogni colonna  $j$  il minimo su tale colonna

$$d_j^0 = \min_i d_{ij};$$

tale valore verrà sottratto ad ogni elemento della colonna  $j$  e questo viene fatto per tutte le colonne. Si ottiene quindi una nuova matrice  $T_1$  che nella posizione  $(i, j)$  ha il valore  $d_{ij} - d_j^0$ .

# Nell'esempio

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$a_1$	2	3	4	5
$a_2$	6	2	2	2
$a_3$	7	2	3	3
$a_4$	2	3	4	5
$d_j^0$	2	2	2	2

Da cui  $T_1$ :

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$a_1$	0	1	2	3
$a_2$	4	0	0	0
$a_3$	5	0	1	1
$a_4$	0	1	2	3

# Riduzione della matrice - II

La matrice  $T_1$  viene ulteriormente trasformata andando a calcolare il minimo su ogni sua riga  $i$

$$d_i^1 = \min_j [d_{ij} - d_j^0]$$

e sottraendo questo ad ogni elemento della riga  $i$ . Il risultato è una matrice  $T_2$  che nella posizione  $(i, j)$  ha il valore

$$d_{ij}^2 = d_{ij} - d_j^0 - d_i^1 \geq 0.$$

È importante notare che, per come sono stati ottenuti, tutti gli elementi  $d_{ij}^2$  sono non negativi.



# Nell'esempio

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$d_i^1$
$a_1$	0	1	2	3	0
$a_2$	4	0	0	0	0
$a_3$	5	0	1	1	0
$a_4$	0	1	2	3	0

Da cui  $T_2$ :

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$a_1$	0	1	2	3
$a_2$	4	0	0	0
$a_3$	5	0	1	1
$a_4$	0	1	2	3

# Rappresentazione assegnamento

Per ogni coppia  $i \in V_1, j \in V_2$ , si introduca la variabile

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ assegnato a } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Un assegnamento soddisfa le condizioni:

Vedi appunti su quaderno

$$\sum_{j \in V_2} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V_1$$

(a ogni  $i \in V_1$  si associa uno e un solo  $j \in V_2$ )

$$\sum_{i \in V_1} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V_2$$

(a ogni  $j \in V_2$  si associa uno e un solo  $i \in V_1$ ).

# Un lower bound per il valore ottimo

Osserviamo che

$$d_{ij} = d_{ij}^2 + d_j^0 + d_i^1.$$

Andando a sostituire nel valore dell'assegnamento al posto di  $d_{ij}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij}^2 + d_j^0 + d_i^1) x_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 x_{ij} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n d_j^0 x_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i^1 x_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 x_{ij} + \sum_{j=1}^n d_j^0 \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n d_i^1 \sum_{j=1}^n x_{ij}. \end{aligned}$$

Per ogni assegnamento si ha  $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$  per ogni  $j$  e  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$  per ogni  $i$ , quindi il valore dell'assegnamento è uguale a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 x_{ij} + \sum_{j=1}^n d_j^0 + \sum_{i=1}^n d_i^1.$$

Ponendo

$$D_0 = \sum_{j=1}^n d_j^0 \quad D_1 = \sum_{i=1}^n d_i^1,$$

si ha infine

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 x_{ij} + D_0 + D_1.$$

# Continua

Poiché, come già osservato,  $d_{ij}^2 \geq 0$  per ogni  $i, j$ , e poiché si ha anche che  $x_{ij} \geq 0$  per ogni  $i, j$ , si ha che

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \geq D_0 + D_1,$$

per ogni possibile assegnamento.

# Nell'esempio ...

... abbiamo  $D_0 = 8$  e  $D_1 = 0$ . Quindi,  $D_0 + D_1 = 8$  fornisce un lower bound per il valore ottimo di questa istanza del problema di assegnamento.

# Ma allora ...

... se trovo un assegnamento con valore pari a  $D_0 + D_1$ , questo è certamente anche una soluzione ottima.

Quindi la domanda che ci poniamo ora è la seguente:  
esiste o meno un assegnamento con valore  $D_0 + D_1$ ?

In caso di risposta positiva, abbiamo una soluzione ottima del problema, in caso di risposta negativa ci dovremo poi porre la questione di cosa fare se non esiste.

# Problema associato

*Determinare un sottinsieme  $\Delta$  di cardinalità massima degli 0 della matrice  $T_2$  tale che presi due elementi qualsiasi di  $\Delta$  essi sono indipendenti, ovvero appartengono a righe e colonne diverse.*



## Se ...

... questo problema ammette una soluzione  $\Delta$  con  $|\Delta| = n$ ,  
consideriamo allora:

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in \Delta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per prima cosa dimostriamo che tale soluzione è un  
assegnamento. Supponiamo per assurdo che non lo sia.  
Per esempio supponiamo che per qualche  $j$  si abbia

$$\sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij} \neq 1.$$

# Casi possibili

- **Caso I**  $\sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij} = 0$ : in tal caso non c'è nessun elemento di  $\Delta$  nella colonna  $j$ . Quindi ve ne dovranno essere  $n$  nella restanti  $n - 1$  colonne. Ciò vuol dire che almeno una colonna contiene due elementi in  $\Delta$ , ma questo è assurdo in quanto gli elementi di  $\Delta$  devono essere tra loro indipendenti e quindi non possono appartenere ad una stessa colonna.
- **Caso II**  $\sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij} \geq 2$ : in tal caso ci sono due elementi di  $\Delta$  nella colonna  $j$  e si ha una contraddizione identica a quella vista per il Caso I.

# Continua

In modo del tutto analogo si vede che le condizioni

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = 1 \quad \forall i,$$

non possono essere violate. Quindi abbiamo un assegnamento.

# Valore dell'assegnamento

Si nota che le  $\bar{x}_{ij}$  sono uguali a 1 solo in corrispondenza di coppie  $(i, j)$  per cui si ha  $d_{ij}^2 = 0$ . Quindi

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 \bar{x}_{ij} + D_0 + D_1 = D_0 + D_1.$$

ovvero il valore di questo assegnamento è  $D_0 + D_1$  e per quanto già osservato la soluzione è ottima.

# Ma come si calcola $\Delta$ ?

Si costruisca un grafo *bipartito* nel modo seguente:

- \* i due insiemi di vertici sono rispettivamente rappresentati dall'insieme  $A$  e dall'insieme  $B$ ;
- \* tra il vertice  $a_i$  ed il vertice  $b_j$  si traccia un arco (non orientato) se e solo se  $d_{ij}^2 = 0$ .

Un insieme indipendente di 0 equivale a un matching su tale grafo bipartito. Infatti, cercare insiemi di 0 nella tabella che non siano mai sulla stessa riga e colonna equivale a cercare insiemi di archi nel grafo bipartito che non abbiano nodi in comune, ovvero equivale a cercare dei matching. Quindi, determinare il massimo insieme di 0 indipendenti equivale a risolvere un problema di matching di cardinalità massima sul grafo bipartito.

# Nell'esempio

Risolvendo con l'algoritmo visto per i problemi di matching di cardinalità massima su grafi bipartiti, si ottiene la seguente soluzione:

$$\Delta = \{(a_1, b_1); (a_2, b_3); (a_3, b_2)\}$$

con  $|\Delta| < n = 4$ .

# Che fare se $|\Delta| < n$ ?

L'obiettivo finale sarà quello di giungere ad un'ulteriore trasformazione della matrice  $T_2$ . Per arrivare a questa è necessario un passaggio ulteriore in cui si sfrutta l'insieme  $\Delta$  trovato. Si tratterà di risolvere il seguente problema:

*determinare un insieme minimo di righe e colonne tali che ricoprendole si ricoprono tutti gli 0 della matrice  $T_2$*

Nel seguito si parlerà genericamente di *linee*, dove una linea può essere indifferentemente una riga od una colonna.

# Continua

Questo è strettamente legato a quello della determinazione dell'insieme  $\Delta$ .

Infatti, consideriamo le etichette ottenute all'ultima iterazione dell'algoritmo per il massimo matching sul grafo bipartito costruito per determinare  $\Delta$ . Si può dimostrare la seguente proprietà:

*Un ricoprimento ottimo per il problema dato è formato da esattamente  $|\Delta|$  linee ed è costituito da:*

- (i) Le righe  $a_i$  corrispondenti a nodi non etichettati.*
- (ii) le colonne  $b_i$  corrispondenti a nodi etichettati.*



# Nell'esempio

Le righe corrispondenti a nodi non etichettati al termine della risoluzione del problema di matching sono  $a_2$  e  $a_3$ , mentre la sola colonna corrispondente a un nodo etichettato è la  $b_1$ .

# Aggiornamento della matrice $T_2$

Il ricoprimento con un numero minimo di linee ottenuto con la procedura appena descritta ci serve per aggiornare la matrice  $T_2$  e trasformarla in una nuova matrice  $T_3$ . La trasformazione avviene seguendo questi passi.

- a) Determinare il valore minimo  $\lambda$  tra tutti gli elementi di  $T_2$  non ricoperti da alcuna linea. Si noti che essendo gli 0 di  $T_2$  tutti ricoperti, gli elementi non ricoperti sono tutti positivi e quindi  $\lambda$  stesso è positivo.

b) Gli elementi  $d_{ij}^3$  della nuova matrice  $T_3$  sono definiti in questo modo:

$$d_{ij}^3 = d_{ij}^2 + d_i^3 + d_j^3,$$

dove

$$d_i^3 = \begin{cases} 0 & \text{se la riga } a_i \text{ è nel ricoprimento} \\ -\lambda & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$d_j^3 = \begin{cases} \lambda & \text{se la colonna } b_j \text{ è nel ricoprimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

# Più semplicemente ...

... quanto visto equivale alla seguente regola:

- gli elementi ricoperti da due linee in  $T_2$  devono essere incrementati di  $\lambda$ ;
- gli elementi non ricoperti da alcuna linea vengono decrementati di  $\lambda$ ;
- tutti gli altri (gli elementi ricoperti da una sola linea) non cambiano

# Nell'esempio

Si ha  $\lambda = 1$  e  $T_3$  sarà la seguente tabella:

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$a_1$	0	0	1	2
$a_2$	5	0	0	0
$a_3$	6	0	1	1
$a_4$	0	0	1	2

# Osservazione

Da questa regola si vede anche che i soli elementi a cui viene sottratto qualcosa sono quelli non ricoperti e ad essi viene sottratto il minimo di tutti gli elementi non ricoperti.

Ciò significa che tutti gli elementi  $d_{ij}^3$  di  $T_3$  saranno non negativi come lo erano quelli di  $T_2$ .

# Un nuovo lower bound

Il valore di un assegnamento era stato riscritto in questo modo:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 x_{ij} + D_0 + D_1.$$

Osserviamo ora che  $d_{ij}^2 = d_{ij}^3 - d_i^3 - d_j^3$  ed andando a sostituire otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 x_{ij} + D_0 + D_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij}^3 - d_i^3 - d_j^3) x_{ij} + D_0 + D_1 = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^3 x_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n d_j^3 x_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i^3 x_{ij} + D_0 + D_1 = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^3 x_{ij} - \sum_{j=1}^n d_j^3 \sum_{i=1}^n x_{ij} - \sum_{i=1}^n d_i^3 \sum_{j=1}^n x_{ij} + D_0 + D_1. \end{aligned}$$

# Quindi ...

... per ogni assegnamento, si avrà

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^3 x_{ij} - \sum_{j=1}^n d_j^3 - \sum_{i=1}^n d_i^3 + D_0 + D_1.$$



# Continua

Vediamo ora di calcolare  $\sum_{j=1}^n d_j^3$  e  $\sum_{i=1}^n d_i^3$ .

Indichiamo con  $h_1$  il numero di righe nel ricoprimento e con  $h_2$  il numero di colonne nel ricoprimento. Si noti che  $h_1 + h_2 = |\Delta|$ .

Si ha:

$$\sum_{i=1}^n d_i^3 = -\lambda \times (\text{numero righe che non sono nel ricoprimento}) = -\lambda(n - h_1),$$

e

$$\sum_{j=1}^n d_j^3 = \lambda \times (\text{numero colonne che sono nel ricoprimento}) = \lambda h_2.$$

# Quindi...

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^3 x_{ij} + \lambda(n - h_1) - \lambda h_2 + D_0 + D_1,$$

da cui

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^3 x_{ij} + \lambda(n - |\Delta|) + D_0 + D_1.$$

# Continua

- dal momento che  $d_{ij}^3 \geq 0$  e  $x_{ij} \geq 0$  si ha che un limite inferiore per il problema di assegnamento è  $D_0 + D_1 + \lambda(n - |\Delta|)$ ;
- se riesco a trovare un assegnamento che ha come valore dell'obiettivo proprio tale limite inferiore ho determinato una soluzione ottima;
- la verifica se un tale assegnamento esista può essere fatto cercando un sottinsieme indipendente di cardinalità massima in  $T_3$ , esattamente come si era fatto in  $T_2$ . Se esso ha cardinalità  $n$  si ha un assegnamento ottimo, altrimenti sfruttando tale sottinsieme e passando attraverso la determinazione di un insieme minimo delle linee di ricoprimento di  $T_3$  si determina una nuova matrice  $T_4$  e si itera in questo modo la procedura fino a che si è determinato un assegnamento ottimo.

# Una semplificazione

Per l'individuazione dell'insieme  $\Delta$  su  $T_3$  conviene sfruttare i calcoli già fatti su  $T_2$ .

Più precisamente, come matching iniziale sul grafo bipartito associato agli 0 di  $T_3$  posso prendere il matching ottimo individuato sul grafo bipartito associato agli 0 di  $T_2$ .

Si può infatti dimostrare che anche dopo l'aggiornamento di  $T_2$  in  $T_3$  l'insieme di 0 indipendenti che era soluzione ottima del problema di matching per  $T_2$ , si ritrova ancora in  $T_3$ .

# Finitezza

Ci si può chiedere se la procedura termina oppure no, cioè se si arriva infine ad una matrice  $T_h$  che contiene un sottinsieme di 0 indipendenti a due a due di cardinalità  $n$ .

Nel caso in cui tutti i  $d_{ij}$  siano interi si ha certamente terminazione finita. Lo si può vedere da come aumentano le limitazioni inferiori ad ogni iterazione.

Con  $T_2$  avevamo una limitazione inferiore per la soluzione ottima pari a  $D_0 + D_1$ ; con  $T_3$  si è passati ad una limitazione inferiore pari a  $D_0 + D_1 + \lambda(n - |\Delta|)$ .

La limitazione inferiore cresce quindi almeno di una quantità pari a  $\lambda > 0$ . Nel caso in cui i  $d_{ij}$  siano interi  $\lambda$  deve essere anch'esso un intero e quindi è certamente maggiore o uguale a 1. Se per assurdo la procedura dovesse essere iterata infinite volte, la limitazione inferiore stessa crescerebbe all'infinito ma questo è assurdo in quanto un qualsiasi assegnamento (ad esempio l'assegnamento  $(a_i, b_i)$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) ha un valore finito ed il minimo di tali assegnamenti non può quindi crescere all'infinito.

# Complessità

Qui ci siamo limitati a dimostrare che la procedura termina in un numero finito di iterazioni. In realtà si può dimostrare che essa richiede un numero  $O(n^3)$  di operazioni ed è quindi una procedura di complessità polinomiale.

# Nota bene

L'algoritmo ungherese può essere visto come un algoritmo costruttivo con la possibilità di rivedere decisioni passate.

Infatti, a ogni iterazione si ha un insieme  $\Delta$  che definisce un assegnamento incompleto. Tale assegnamento incompleto può essere aggiornato in una data iterazione incrementandone la cardinalità, rimuovendo coppie e sostituendole con altre.