Vjerojatnost i statistika

Kratki pregled gradiva obrađenih na Visokom učilištu Algebra

(Neslužbeni dokument, Tomislav Kucar, 15.9.2020.)

0.1 Vjerojatnost i uvjetna vjerojatnost

Zadatak 0.1. *Strijelac gada metu najvise 4 puta, a igra se prekida kad pogodi.*

(a) Odredite prostor elementarnih dogadaja

(b) Ako je vjerojatnost pogodtka neovisna o prethodima i iznosi 0.4 odredite vjerojatnost da je strijelac pogodio metu u trecem pokusaju

(c) Odredite vjerojatnost da strijelac nije pogodio metu

Rjesenje:

(a) H - hit, M - miss : $\Omega = \{H, MH, MMH, MMMH, MMMM\}$

(b) Posto je vjerojatnost pogodtka neovisna o prethodnima:

$P(MMH) = P(M) * P(M) * P(H)$

I uvrstavamo $P(H) = 0.4$:

$P(MMH) = 0.6 * 0.6 * 0.4 = 0.144$

(c) $P(MMMM) = 0.6^4 = 0.1296$

Zadatak 0.2. *U 6 kutija na slucajni nacin se rasporeduju 4 razlicite kuglice. Kolika je vjerojatnost da ce u prve 4 kutije biti tocno po jedna kuglica?*

Rjesenje:

Svaka od 4 kuglice moze pasti u bilo koju od 6 kutija, sto znaci da ukupno ima 6^4 mogucnosti. Nadalje prva kuglica mora upasti u jednu od 4 kutije, druga onda mora upasti u jednu od 3 kutije, treca u jednu od 2 kutije, i zadnja kuglica u zadnju kutiju, dakle $4 * 3 * 2 * 1$. Znaci rjesenje je $\frac{4!}{6^4}$

Zadatak 0.3. *Iva i Martin igraju igru: svaki ce zamisliti broj izmedu 1 i 20 (ukljuceni). Kolika je vjerojatnost da je razlika tih brojeva veca od 10?*

Rjesenje:

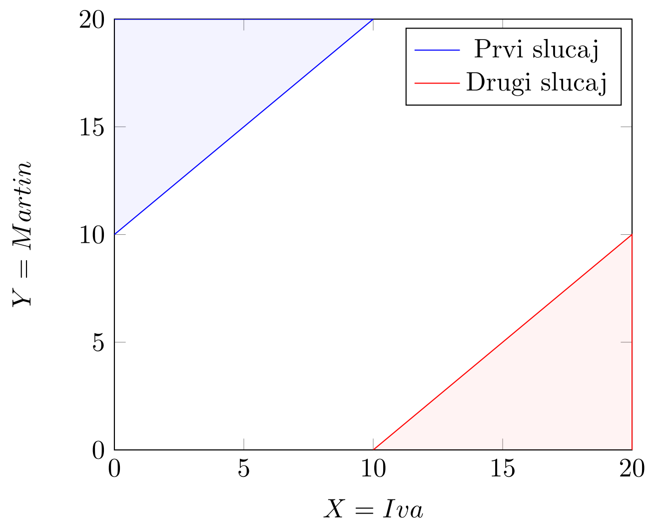
X = Iva, Y = Martin

Njihovi brojevi se mroaju razlikovati za vise od 10. Posto ne pise tko je uzeo kojih bitno je samo da njihova razlika mora biti strogo veca od 10:

$$\begin{aligned} \underline{|X - Y| > 10} \\ x - y \geq 10 \\ -x + y \geq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ\ y \leq 10 - x \\ 2^\circ\ y \geq 10 + x \end{aligned}$$

Nacrtajmo graf:



Da bi dobili geometrijsku vjerojatnost trebamo izracunati povrsinu osjencanih trokuta kroz povrsinu kvadrata.

$$\frac{P(\triangle_1) + P(\triangle_2)}{P(\square)} = \frac{\frac{10*10}{2} * 2}{20 * 20} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

Zadatak 0.4. *Maja i Marko igraju igru: Maja baca novcic i dobiva ako padne glava. Marko baca kocku i dobiva ako padne neparan broj.*

(a) Je li igra fer?

(b) Jesu li dogadaji $A = \{$ *Marko je dobio* $\}$ *i* $B = \{$ *Maja je dobila* $\}$ *neovisni?*

Rjesenje:

(a) Igra je fer jer oboje imaju istu vjerojatnost dobiti.

(b) A = Maja je dobila, B = Marko je dobio

Znamo da su dogadaji nezavisni ako vrijedi $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

S obzirom da je mali vjerojatnosni prostor mozemo ispisati sve moguce dogadaje, P - pismo, G - glava:

$$(P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(P,5),(P,6)$$
$$(G,1),(G,2),(G,3),(G,4),(G,5),(G,6)$$

Maja dobiva ako padne glava, a marko dobiva ako je pao neparan broj, dakle (G,1), (G,3), (G,5), i takvih dogadaja imamo ukupno 3 od 12 mogucih:

$P(A \cap B) = \frac{3}{12}$

I onda mozemo uvrsiti:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$
$$\frac{3}{12} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Dogadaji su nezavisni.

Zadatak 0.5. *Dva stroja proizvode cavle. Na prvom stroju se proizvede 40% cavala, pri cemu ostaje 3% neispravnih, a na drugom stroju preostane 1% neispravnih.*

(a) Kolika je vjerojatnost da slucajno odabran cavao bude neispravan?

(b) Ako je cavao los, kolika je vjerojatnost da je izraden na stroju 1?

Rjesenje:

(a) Iz zadatka vidimo slijedece hipoteze:

$$H_1 = \{\text{Cavao je iz 1. stroja}\},\ P(H_1) = 0.4$$
$$H_2 = \{\text{Cavao je iz 2. stroja}\},\ P(H_2) = 0.6$$

Moramo odrediti i vjerojatnost da je cavao neispravan a bio je na prvom stroju; $P(A|H_1) = 3\%$ i ako je dosao iz drugog stroja $P(A|H_1) = 1\%$.

Zanima nas vjerojatnost od A = { cavao je neispravan } sto cemo izracunati formulom potpune vjerojatnosti:

$$P(A) = P(A|H_1) * P(H_1) + P(A|H_2) * P(H_2) = 0.4 * 0.03 + 0.6 * 0.01 = 0.018$$

(b) Ako je cavao los, vjerojatnost da je izraden na prvom stroju?

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) * P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.03 * 0.4}{0.018} = \frac{0.012}{0.018} = \frac{2}{3} = 66\%$$

Ako je cavao los 66% da je dosao iz stroja 1.

0.2 Diskretne i neprekinute slucajne varijable

Zadatak 0.6. *Bacamo dvije kocke i zbrajamo brojeve na njima. Ako je zbroj djeljiv s 3, dobivamo X kuna, inace gubimo 5 kuna. Odredite X tako da igra bude fer. (ocekivani rezultat 0)*

Rjesenje:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

X je nasa slucajna varijabla. Gornji red predstavlja vrijednosti, a doljni vjerojatnosti. Vjerojatnosti smo dobili odredivanjem na koliko nacina mozemo dobiti odredenu vrijednost i djeljeci sa ukupnim brojem mogucnosti 6^2 tj. 36. Nadalje racunamo:

$$P(\text{zbroj je djeljiv s 3}) = \tfrac{2}{36} + \tfrac{5}{36} + \tfrac{4}{36} + \tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{3}, P(\text{zbroj nije djeljiv s 3}) = \tfrac{2}{3}$$

Ako se ostvarilo da je broj djeljiv s 3 ostavarujemo vrijednost od X kuna, a ako se nije ostvarilo onda gubimo 5 kuna.

$$Y \sim \begin{pmatrix} X & -5 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ocekivanje od Y mora biti 0 da bi igra bila postena.

$$E(Y) = 0$$
$$X * \frac{1}{3} - 5 * \frac{2}{3} = 0$$
$$X = 10$$

Dakle ako si isplacujemo 10 kuna kad dobijemo, a gubimo 5 kuna kad izgubimo, dugorocno cemo biti cemo na nuli.

Zadatak 0.7. *Ako nasumicno odgovaramo na 5 pitanja od kojih svako ima 3 ponudena odgovora, kolika je vjerojatnost da cemo na 3 odgovoriti tocno?*

Rjesenje:

Ovdje imamo binomnu razdiobu sa 5 "pokusa" i vjerojatnoscu uspjeha 1/3 (pogadamo jedan od tri moguca odgovora). $X \sim B(5, \frac{1}{3})$

Zanima nas vjerojatnost da smo pogodili tocno 3 pitanja (od 5). Prema formuli za binomnu razdiobu to je:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} * \left(\frac{1}{3}\right)^3 * \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = 0.164$$

Vjerojatnost da cemo pogoditi 3 od 5 pitanja je 16.4%.

Dodatno:

$$E(X) = n * p = 5 * \frac{1}{3} = 1.66$$

Zadatak 0.8. *Odredite funkciju distribucije slucajne varijable X s gustocom*

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2x}, & 1 < x \leq e \\ 0, & inace \end{cases}$$

Rjesenje:

Kad pricamo o neprekidnim slucajnim varijablama uvijek gledamo intervale, jer je sansa za odabir odredene tocke je jednaka nuli.

$$F(a) = P(X \leq a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$F(x) = \begin{cases} a, & 0 < x \\ *, & 0 \leq a \leq 11 \\ **, & 1 < a \leq e \end{cases}$$

Racunamo:

$$* = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

$$** = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{e} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} xdx + \int\limits_{1}^{e} \frac{1}{2x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2} * ln(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * ln(a) - ln(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * ln(a)$$

I uvrstimo:

$$F(x) = \begin{cases} a, & 0 < x \\ \frac{a^2}{2}, & 0 \leq a \leq 11 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ln(a), & 1 < a \leq e \end{cases}$$

Dodatno:

$$f \; gustoca -> distribucija \; F : \text{integrirati}$$
$$F \; distribucija -> gustoca \; f : \text{derivirati}$$

Zadatak 0.9. *Na nekom ispitu bodovi studenata su normalno distribuirani s ocekivanjem od 68 bodova i disperzijom (varijancom) od 196 bodova. Za prolaz je bilo potrebno 51 bod, a za ocjenu odlican 89 bodova.*

(a) Odredite koliki postotak studenata nije polozio ispit?

(b) Koliki postotak studenata je dobio ocjenu odlican?

Rjesenje:

(a)

$$
\begin{aligned}
&X \sim N\left(68, 14^2\right) \\
&P(X < 51) = \left(\frac{x-68}{14} \leq \frac{51-68}{14}\right) \\
&Y \sim \frac{x-61}{14} \sim N(0,1) \\
&P(Y \leq -1.2142) = \Phi(-1.2142) = 1 - \Phi(-1.2142) \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi^*(1.2142) = 0.5 - \frac{1}{2} * 0.785 = 0.1075
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&P(X \geq 89) \\
&P\left(\frac{x-68}{14} \geq \frac{89-68}{14}\right) \\
&P\left(Y \geq \frac{21}{14}\right) = \left(Y \geq \frac{3}{2}\right) = 1 - P\left(Y \leq \frac{3}{2}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.933 = 0.067
\end{aligned}
$$

Napomena: da bi izracunali Φ trebamo $\leq$

Rj. Vjerojatnost da je netko dobio odlicaj je 6.7%.