Esercizi di GEOMETRIA e ALGEBRA LINEARE
(Ingegneria Ambientale e Civile - Curriculum Ambientale)

1. Tra le seguenti matrici, eseguire tutti i prodotti possibili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, calcolare $A \cdot A -^t A + I_3$.

3. Calcolare i determinanti e, quando possibile, le inverse delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

4. Determinare quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali. Per i sottospazi vettoriali determinare la dimensione ed una base.

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \qquad U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3\}$$

$$U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y + 1\}$$

$$U_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0,\ t = 3x\}$$

5. Determinare la dimensione ed una base dei seguenti sottospazi vettoriali:
$U_1 = L((1, 0, 1), (2, 1, 1), (-6, -2, -4)) \subseteq \mathbb{R}^3$
$U_2 = L((1, 2, 3), (4, -1, 5), (-3, 3, -2), (6, 3, 11)) \subseteq \mathbb{R}^3$

$U_3 = L((1,0,1),(2,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$
$U_4 = L((8,-3,5,0),(0,1,1,0),(3,-1,2,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$
$U_5 = L((2,1,-1,0),(0,1,1,1),(0,0,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$
$U_6 = L((3,0,1,1),(1,1,0,1),(2h,h+2,h,h+1))$ (al variare di $h \in \mathbb{R}$).

6. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono lineari; per queste ultime determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine. Stabilire inoltre quali sono iniettive, quali suriettive e quali isomorfismi.

$f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \qquad f_1(x,y,z,t) = (x-y, y+z, t)$

$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f_2(x,y,z) = (x+3y, y-4z-x) \qquad f_3 = f_2 \circ f_1$

$f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f_4(x,y) = (x+y, y, x)$

$f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \qquad f_5(x,y) = (3x, x, 2x, 0)$

$f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f_6(x,y,z) = (x+3, y)$

$f_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad f_7(x,y,z) = (2x+y, z, x-y).$

7. Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari determinare la matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, dimensione ed una base dell'immagine e del nucleo:

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z,t) = (x-y, y+z, t)$

$\mathcal{B} = ((2,-1,0,0),(-1,1,0,1),(0,1,0,0),(1,0,1,1))$
$\mathcal{B}' = ((1,1,1),(0,1,1),(1,-4,-3));$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x,y,z) = (x+3y, y-4z-x)$

$\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(1,-4,-3)), \quad \mathcal{B}' =$ base canonica di $\mathbb{R}^2$;

(c) $h = g \circ f, \quad \mathcal{B} = ((2,-1,0,0),(-1,1,0,1),(0,1,0,0),(1,0,1,1)),$
$\mathcal{B}' =$ base canonica di $\mathbb{R}^2$.

8. Data la famiglia di applicazioni lineari

$f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad f_\lambda(x,y,z) = (x-y+(1-\lambda)z, \lambda x + 2y + \lambda z, 2x, \lambda y + 2z)$

determinare la dimensione di $Im\, f_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. Determinare gli eventuali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali l'applicazione lineare:

$$f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_\lambda(x, y, z) = (5x + 2y, (\lambda - 2)z, y - x)$$

è un isomorfismo. Per tali valori di λ determinare l'inversa di f_λ.

10. Determinare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $Kerf = L((1, 0, 1))$, $\quad f((2, -1, 3)) = (-2, 0, -1, -3)$, $\quad f((1, 0, 0)) = (2, -3, 1, 1))$.

11. Determinare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ che ha la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 11 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$ come matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, -4, -3))$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1), (0, 2))$ di $\mathbb{R}^2$.

12. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 5 & -5 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 9 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 11 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Risolvere, quando possibile, i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 13x - 5y - 3z - t = 12 \\ 2x - y + t = 3 \\ 3x - y - z - t = 2 \\ 5x - 2y - z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - 4y + 6z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5y + 6z = 0 \\ x - 3y = 4 \\ y - 3z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + y - z + t = 2 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ -4x + 7y - z + 5t = 6 \\ -8x + 2y - 4z + 2t = 3 \end{cases}$$

14. Discutere i seguenti sistemi lineari, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + z + t = \lambda \\ x - \lambda y + z = 3\lambda \\ 2x + 2z + \lambda t = 4 \\ (1-\lambda)x + 2y + t = -2\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ (1-\lambda)x - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y = \lambda \\ 4x - y + (2-\lambda)z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + y + z + t = 2 \\ x + \lambda y = 2 \\ x + y + 3z - t = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 3y + 3z = \alpha \\ 3x + \alpha y + z = 0 \\ y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \alpha y - 3z + 4t = -1 \\ 2x - y + 2z - 2t = 4 \\ 3x + y - z + \alpha t = 3 \\ 4x + 3y - 4z + 6t = 2 \end{cases}$$

15. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

trovare, se esiste, una matrice regolare E tale che $E^{-1}AE$ sia diagonale.

16. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, trovare una matrice regolare E tale che $E^{-1}AE$ sia diagonale.

Dire se la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ è simile alla matrice A.

17. Trovare il rango delle seguenti forme quadratiche:

$$q_1(x,y) = 4x^2 - 6xy + y^2$$
$$q_2(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$$
$$q_3(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz.$$

18. Data la forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xz$, determinare la matrice associata a q rispetto alla base $\mathcal{B} = ((-1,0,1),(0,3,0),(5,1,1))$.

19. Data la famiglia di forme quadratiche $q_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $q_\alpha(x, y, z) = \alpha x^2 + (2\alpha - 3)y^2 + \alpha z^2 + 2\alpha xy$, determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali q_α è degenere e quelli per i quali q_α è definita;

20. Date le matrici $A, B \in S_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

verificare che A e B sono congruenti.

21. La matrice $A \in S_4(\mathbb{R})$ ha polinomio caratteristico:

$$\Delta_A(t) = (t^2 - t - 6)(t^2 - 9t + 20).$$

La matrice $B \in S_4(\mathbb{R})$ ha polinomio caratteristico:

$$\Delta_B(t) = (t - \tfrac{1}{2})(t^3 + 6t^2 + 3t - 10).$$

A e B sono congruenti ?

22. In $\mathcal{E}^2$, fissato un sistema di riferimento cartesiano, sono date le rette r di equazione $3x - 4y + 12 = 0$ e s di equazione $2x - y + 8 = 0$. Determinare la mutua posizione di r e s. Scrivere l'equazione della retta r' parallela a r e passante per $P \equiv (\frac{3}{2}, 1)$ e della retta s' passante per P ed ortogonale a r. Calcolare poi l'area del trapezio formato dalle rette r, s, r', s'.

23. In $\mathcal{E}^2$, fissato un sistema di riferimento cartesiano, sono dati i punti $A \equiv (1, 2), B \equiv (3, 3), C \equiv (4, 7), D \equiv (2, 6)$. Verificare che $ABCD$ è un parallelogramma e calcolarne l'area.

24. Date in $\mathcal{E}^2$, le rette $r : 3x + 4y - 7 = 0$ e $s : x + 3y + 1 = 0$, trovare una retta t che interseca r nel punto $A \equiv (1, 1)$ e dista $\frac{3}{\sqrt{5}}$ dall'origine del riferimento. Calcolare l'area del triangolo formato dalle rette r, s, t.

25. Dati in $\mathcal{E}^2$ i punti $A \equiv (0, 0),\ B \equiv (1, 0),\ C \equiv (1, 2)$, determinare i punti $D \in \mathcal{E}^2$ in modo tale che $\{A, B, C, D\}$ sia l'insieme dei vertici di un parallelogramma.

26. Dati in $\mathcal{E}^3$ i punti $A \equiv (1, 0, 1),\ B \equiv (2, 1, 0),\ C \equiv (3, 0, 1)$, verificare che $A,\ B,\ C$ sono affinemente indipendenti e trovare un'equazione cartesiana del piano π passante per $A,\ B,\ C$.

Scrivere poi una equazione della retta r per $P \equiv (1, 1, 1)$, e ortogonale a π.

27. In $\mathcal{E}^3$, verificare che il piano $\alpha \; : \; 2x+y+z+2=0$ e la retta $r \; : \begin{cases} x+y-5=0 \\ y-z-3=0 \end{cases}$ sono paralleli e calcolarne la distanza. Scrivere l'equazione del piano contenente r e parallelo a α.

Scrivere l'equazione del piano passante per $P \equiv (0,-1,-2)$ e ortogonale a r.

28. Dati, in $\mathcal{E}^3$, il punto $P \equiv (1,2,0)$ e le rette $r : \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y+z=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$, verificare che r e s sono incidenti e trovare le coordinate del punto $A = r \cap s$.

Scrivere un'equazione del piano π passante per l'origine, per P e per A. Scrivere inoltre una rappresentazione cartesiana del piano passante per $P' = (1,0,1)$ e parallelo a π.

29. Dati la retta $r \; : \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ ed il piano $\pi \; : \; \alpha x + 3y - 2z = 2\alpha$, discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la reciproca posizione di r e π.

30. Date le rette di $\mathcal{E}^3$,

$$r : \begin{cases} x-y+z-3=0 \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases} \qquad s : \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{5} = z$$

verificare che sono sghembe e calcolarne la distanza.

31. Date in $\mathcal{E}^3$ le rette

$$r_k : \begin{cases} x+ky-z=0 \\ x-y=k-1 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} 3x-6y-kz+1=0 \\ x-2y-kz+\frac{1}{3}=0 \end{cases} \qquad (k \neq 0)$$

determinare, al variare di $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, la mutua posizione di r_k e s_k.

32. Date le rette di $\mathcal{E}^3$,

$$r : \begin{cases} x+2y-2z-20=0 \\ z+6=0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=-4 \end{cases}$$

verificare che sono parallele e calcolarne la distanza.

Soluzioni

es. 3 $det\ A = 7, det\ B = 0, det\ C = -14, det\ D = 442.$

es. 4 Una base di U_1 è $\{(1,-1)\}$;

U_2 e U_3 non sono sottospazi vettoriali;

una base di U_4 è $\{(1,0,1,3),(0,1,1,0)\}$;

es. 5 $dim\ U_1 = 2$; $dim\ U_2 = 2$; $dim\ U_3 = 2$; $dim\ U_4 = 3$; $dim\ U_5 = 3$; $dim\ U_6 = 3$ per $h \neq -1$; $dim\ U = 2$ per $h = -1$;

es. 6 f_1 è suriettiva, $dim\, Ker\, f_1 = 1$, $Ker\, f_1 = L((1,1,-1,0))$.

f_2 è suriettiva, $dim\, Ker\, f_2 = 1$, $Ker\, f_2 = L((-3,1,1))$.

f_3 è suriettiva, $dim\, Ker\, f_3 = 2$, $Ker\, f_3 = L((-2,1,0,1),(-3,0,1,1))$.

$dim\, Im\, f_4 = 2$, f_4 è iniettiva, $Im\, f_4 = L((1,0,1),(1,1,0))$.

$dim\, Im\, f_5 = 1$, $dim\, Ker\, f_5 = 1$, $Im\, f_5 = L((3,1,2,0))$, $Ker\, f_5 = L((0,1))$.

f_6 non è lineare.

f_7 è un automorfismo.

es. 7 (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -11 \\ -4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

es. 8 per $\lambda \neq 2$, $dim\, Im\, f_\lambda = 3$; per $\lambda = 2$, $dim\, Im\, f_\lambda = 2$.

es. 9 $\lambda \neq 2$, $f^{-1}(x,y,z) = (\frac{1}{7}\,x - \frac{2}{7}\,z, \frac{1}{7}\,x + \frac{5}{7}\,z, \frac{1}{\lambda-2}\,y)$

es. 10 $f(x,y,z) = (2x-2z, -3x+3y+3z, x-z, x+2y-z)$; non esistono.

es. 11 $f(x,y,z) = (5x-y+z, 2x+3z)$

es. 12 $\rho(A) = \rho(B) = \rho(C) = \rho(D) = 2$

es. 13

- il sistema è possibile con ∞^2 soluzioni;
- il sistema è impossibile;
- il sistema è possibile con ∞^1 soluzioni;
- il sistema è impossibile;

es. 14

- Per $\lambda \neq 0,1$ il sistema è di Cramer, per $\lambda = 0$ è impossibile, per $\lambda = 1$ è possibile con ∞^2 soluzioni;

- per $\lambda \neq 0, 13$ il sistema è impossibile, per $\lambda = 0$ è possibile con ∞^1 soluzioni, per $\lambda = 13$ ha una soluzione;

- per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema è possibile con ∞^1 soluzioni.

- il sistema è possibile per ogni $\alpha \neq 1$, è impossibile per $\alpha = 1$.

- il sistema è possibile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

15. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16. $E = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; A e B sono simili;

17. $\rho(q_1) = 2$, $\rho(q_2) = 1$, $\rho(q_3) = 2$

18. $\begin{pmatrix} 10 & 0 & -14 \\ 0 & 9 & 3 \\ -14 & 3 & 71 \end{pmatrix}$

19. q_α è degenere per $\alpha = 0, 3$; q_α è definita positiva per $\alpha > 3$.

22. $r' \ : \ 6x - 8y - 1 = 0$, $\quad s' \ : \ 4x + 3y - 9 = 0$, $\quad Area = \frac{75}{4}$

23. $Area = 7$.

24. $t \ : \ 2x + y - 3 = 0$, $\quad Area = \frac{5}{2}$ oppure $t \ : \ x + 2y - 3 = 0$, $\quad Area = 5$.

25. $D_1 \equiv (0, 2)$, $\quad D_2 \equiv (2, 2)$.

26. $\pi \ : \ y + z - 1 = 0$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$.

27. $d(r, \alpha) = \frac{3}{2}\sqrt{6}$, $\quad 2x + y + z - 7 = 0$, $\quad x - y - z - 3 = 0$.

28. $A \equiv (2, -2, 2)$, $\quad \pi \ : \ 2x - y - 3z = 0$, $\quad \pi' \ : \ 2x - y - 3z + 1 = 0$.

29. Per $\alpha \neq 2$ sono incidenti in $P \equiv (2, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$; per $\alpha = 2$, $r \subset \pi$.

30. $d(r, s) = \sqrt{3}$; perpendicolare comune $x - 1 = 1 - y = z$.

31. le rette sono sgembe per $k \in \mathbb{R} - \{-5, 0, 1\}$, sono incidenti per $k = -5$ e $k = 1$; per $k = 0$, s_k non è una retta.

32. $d(r, s) = 3$.