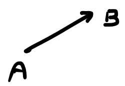
GEOMETRIA

Wednesday, October 6, 2021 6:47 PM

VETTORE



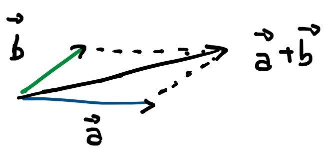
$\overline{AB}$ È UN SEGMENTO ORIENTATO CHE POSSIEDE $\begin{cases} \text{PUNTO DI APPLICAZIONE} \\ \text{DIREZIONE} \\ \text{VERSO} \\ \text{MODULO O NORMA} \end{cases}$

$V_0 = \{$ vettori avent. origine in $\emptyset$ $\}$ POSSIAMO DEFINIRE IN V_0 DUE OPERAZIONI

SOMMA TRA VETTORI

$$(+): \; V_0 \times V_0 \rightarrow V_0 \qquad \text{OPERAZIONE INTERNA}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$$



1) COMMUTATIVA $\quad \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

2) ASSOCIATIVA $\quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3) ELEMENTO NEUTRO $\quad \exists \, \vec{0} \in V_0 : \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a} \in V_0$

4) ESISTENZA DELL'OPPOSTO $\quad \forall a \in V_0 , \exists \, \vec{b} \in V_0 : \vec{a}+\vec{b} = \vec{0}$
$\quad (\vec{b} = -\vec{a})$

PRODOTTO PER SCALARE

$$(\cdot): \; \mathbb{R} \times V_0 \rightarrow V_0 \qquad \text{OPERAZIONE INTERNA A } V_0$$

$$(\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$$

5) ASSOCIATIVA

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$$

MOLTIPLICAZIONE NUMERI REALI

(DIREZIONE DI $\vec{v}$

6) DISTRIBUTIVA IN $\mathbb{R}$

$\alpha \cdot \vec{v}$ $\begin{cases} \text{DIREZIONE DI } \vec{v} \\ \text{VERSO} \begin{cases} \nearrow \text{ STESSO DI } \vec{v} \text{ SE } \alpha > 0 \\ \searrow \text{ OPPOSTO DI } \vec{v} \text{ SE } \alpha < 0 \end{cases} \\ \text{MODULO} = |\alpha| \cdot \text{MODULO DI } \vec{v} \end{cases}$

6) DISTRIBUTIVA IN $\mathbb{R}$

$$(\alpha + \beta)\vec{v} = (\alpha \cdot \vec{v}) + (\beta \cdot \vec{v})$$

7) DISTRIBUTIVA IN V_0

$$\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \vec{w}$$

8) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}, \ \forall \ \vec{v} \in V_0$

GRUPPO

Thursday, October 7, 2021 11:27 AM

DEFINIZIONE

Un insieme G dotato di una operazione interna $G \times G \to G$
$(g,h) \mapsto g * h$

è detto GRUPPO se

1. ASSOCIATIVA $\forall g, h, l \in G \quad (g*h)*l = g*(h*l)$
2. ELEMENTO NEUTRO $\exists 1_G \in G : \forall g \in G \quad 1_G * g = g * 1_G = g$
3. ESISTENZA DEL "SIMMETRICO" $\forall g \in G, \exists h \in G : \quad g * h = 1_G$

SE INOLTRE $*$ È COMMUTATIVA ($\forall g, h \in G, \ g*h = h*g$) ALLORA G È DETTO GRUPPO ABELIANO

ES.

$(V_0, +)$ è un GRUPPO ABELIANO

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ NON SI PUÒ MAI INVERTIRE $\emptyset$

SONO TUTTI GRUPPI ABELIANI

$(\mathbb{N}, +)$ NON È UN GRUPPO PERCHÈ MANCA L'OPPOSTO

ES.

$$G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \{ (a,b) \mid a \in \mathbb{R}^*, \ b \in \mathbb{R} \}$$

$$* : \ G \times G \to G : \ (a,b) * (c,d) = (ac, \ ad+b)$$

DIMOSTRAZIONE

G è un gruppo non abeliano

1. ASSOCIATIVA

$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in G$ devo dimostrare che

$$((a,b) * (c,d)) * (e,f) = (a,b) * ((c,d) * (e,f))$$

$$(ac, \ ad+b) * (e,f) = (a,b) * (ce, \ cf+d)$$

$$(ace, \ acf + ad + b) = (ace, \ acf + ad + b)$$

LA PROPRIETÀ È STATA DIMOSTRATA

2. ELEMENTO NEUTRO

$$\exists ? (x,y) \in G : \forall (a,b) \in G,$$

$$(a,b) * (x,y) = (x,y) * (a,b) = (a,b)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1,0) * (a,b) = (1 \cdot a, 1 + b \cdot 0) = (a,b) \\ (a,b) * (1,0) = (a \cdot 1, a \cdot 0 + b) = (a,b) \end{array}\right\} 1_G = (1,0)$$

3 ESISTENZA DEL SIMMETRICO

$$\forall (a,b) \in G, \quad \exists ? (c,d) \in G : (a,b) * (c,d) = (1,0)$$

BASTA CONSIDERARE $(c,d) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \right)$ INFATTI :

$$(a,b) * \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \right) = \left(a \cdot \frac{1}{a}, a\left(-\frac{b}{a}\right) + b \right) = (1,0) = 1G$$

$$\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \right) * (a,b) = \left(\frac{1}{a} \cdot a, \frac{1}{a} \cdot b + \left(-\frac{b}{a}\right)\right) = (1,0) = 1G$$

G è un GRUPPO rispetto a $*$

Si considerino

$$(2,1) * (1,1) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 1) = (2,3)$$
$$(1,1) * (2,1) = (1 \cdot 2, 1 \cdot 1 + 1) = (2,2)$$

IL GRUPPO NON È ABELIANO PERCHÉ NON SODDISFA, PROPRIETÀ COMMUTATIVA PER OGNI ELEMENTO

OSSERVAZIONE

Un insieme che è un gruppo rispetto alla somma, è detto GRUPPO ADDITIVO
Un insieme che è un gruppo rispetto al prodotto, è detto GRUPPO MOLTIPLICATIVO

OSSERVAZIONE

$(G, \cdot)$ GRUPPO $\Rightarrow \emptyset \notin G$

CAMPO

Thursday, October 7, 2021 12:03 PM

CAMPO

UN INSIEME F DOTATO DI DUE OPERAZIONI + E · È DETTO **CAMPO**
SE $(F,+)$ E $(F,\cdot)$ SONO GRUPPI ABELIANI

ES.

$(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ SONO CAMPI

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ NON È UN CAMPO

PERCHÈ $(\mathbb{Z}^*,\cdot)$ NON È UN GRUPPO DATO CHE MANCANO GLI INVERSI IN $\mathbb{Z}$

SPAZI VETTORIALI

Thursday, October 7, 2021 12:06 PM

DEFINIZIONE

Un insieme V si dice SPAZIO VETTORIALE sul campo F, se esistono due operazioni

$$(+): V \times V \to V \qquad \text{tali che}$$
$$(\cdot): F \times V \to V$$

1. $(V, +)$ È UN GRUPPO ABELIANO
2. $1_F \cdot v = v \quad \forall v \in V$
3. $\forall \alpha, \beta \in F, \ \forall v \in V \Rightarrow (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
4. $\forall \alpha, \beta \in F, \ \forall v \in V \Rightarrow (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
5. $\forall \alpha \in F, \ \forall v, w \in V \Rightarrow \alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$

ES.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \}$$

$$(+): (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(\cdot): \alpha \cdot (a,b) = (\alpha a, \alpha b)$$

$\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

1. $(\mathbb{R}^2, +)$ È UN GRUPPO ABELIANO

   a) ASSOCIATIVA $\quad ((a,b)+(c,d))+(e,f) = (a,b)+((c,d)+(e,f))$

$$(a+c, b+d) + (e,f) = (a,b) + (c+e, d+f)$$

$$(a+c+e, b+d+f) = (a+c+e, b+d+f)$$

ASSOCIATIVA IN $\mathbb{R}$

(b) ELEMENTO NEUTRO

$$(0,0)+(a,b) = (0+a,\ 0+b) = (a,b)$$

$$(a,b)+(0,0) = (a+0,\ b+0) = (a,b)$$

$$0_V = (0,0)$$

(c) OPPOSTI

$$(a,b)+(-a,-b) = (a+(-a),\ b+(-b)) = (0,0) = 0_V$$
$$(-a,-b)+(a,b) = (-a+a,\ -b+b) = (0,0) = 0_V$$

(d) COMMUTATIVA

$$(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d) = (c+a,\ d+b) = (c,d)+(a,b)$$

(2) $\forall v \in V,\quad 1_F \cdot v = v$

$$1\cdot(a,b) = (1a,\ 1b) = (a,b)$$

(3) $\forall \alpha,\beta \in F,\quad (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

$v = (a,b)$

$$(\alpha\beta)\cdot(a,b) = \alpha(\beta\cdot(a,b))$$

$$(\alpha\beta a,\ \alpha\beta b) = \alpha(\beta a,\ \beta b)$$

$$(\alpha\beta a,\ \alpha\beta b) = (\alpha\beta a,\ \alpha\beta b)$$

(4) $\forall \alpha,\beta \in F,\quad \forall v \in V,\quad (\alpha+\beta)v = \alpha v+\beta v$

$v = (a,b)$

$$(\alpha+\beta)(a,b) = \alpha(a,b)+\beta(a,b)$$

$$\alpha(a,b)+\beta(a,b) = (\alpha a,\ \alpha b)+(\beta a,\ \beta b)$$

$$(\alpha a,\ \alpha b)+(\beta a,\ \beta b) = (\alpha a+\beta a,\ \alpha b+\beta b)$$

$$(\alpha a+\beta a,\ \alpha b+\beta b) = (\alpha a+\beta a,\ \alpha b+\beta b)$$

5

$$\forall \alpha \in F, \forall v, w \in V, \quad \alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$$

$$v = (a, b) \quad w = (c, d)$$

$$\alpha((a,b) + (c,d)) = \alpha(a,b) + \alpha(c,d)$$

$$\alpha(a+c, b+d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d)$$

$$(\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d) = (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d)$$

CAMPO

Thursday, October 7, 2021 12:49 PM

NOTAZIONE

F = CAMPO

Es.

- $F^m = \{(a_1, a_2, \dots, a_m) \mid a_i \in F\}$
- $M_{m \times m}(F)$ $\qquad$ $M_m(F)$
- $F_1[x] = \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in F\}$

  (+) $\quad (a_0 + a_1 x) + (b_0 + b_1 x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$

  (·) $\quad \alpha(a_0 + a_1 x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x$

- $F_m[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \mid a_i \in F\}$

  se fisso il grado del polinomio non si ottiene più uno spazio vettoriale infatti la somma non è più interna

  $$(a_0 + a_1 x) + (a_0 - a_1 x) = 2a_0 \qquad a_0, a_1 \neq 0$$

MATRICI

Thursday, October 7, 2021 12:32 PM

Es.

Un qualunque campo è uno spazio vettoriale su se stesso

Es.

$$V = M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

MATRICE COLONNA

$A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ $i = 1,2$ $j = 1,2,3$

$B = (b_{ij})$ $i = 1,2$ $j = 1,2,3$

$(+)$: $A + B = (a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$ $i = 1,2$ $j = 1,2,3$

$(\cdot)$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \alpha A = (\alpha a_{ij})$ $i = 1,2$ $j = 1,2,3$

V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$(V, +)$ È GRUPPO ABELIANO

1. $\forall A, B, C \in V$, $(A+B)+C = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} + (c_{ij})_{i,j}$

$= ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{i,j} =$

$= (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{i,j} =$

$= (a_{ij})_{i,j} + (b_{ij} + c_{ij})_{i,j} =$

$= A + (B + C)$

2. $+$ È ABELIANA: $\forall A, B \in V$, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$ ← IN $\mathbb{R}$ LA SOMMA È COMMUTATIVA

$= (b_{ij} + a_{ij})_{i,j}$

$= B + A$

3. Sia $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0)_{i,j} \Rightarrow \forall A \in V$

3. Sia $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0)_{i,j} \Rightarrow \forall A \in V$

0 È ELEMENTO NEUTRO DI + IN $\mathbb{R}$

$$A + O = (a_{ij} + 0_{ij})_{i,j} = (a_{ij})_{i,j} = A$$

4. $\forall A \in V,\ A = (a_{ij})_{i,j},\ \text{sia } B = (-a_{ij})_{i,j} \Rightarrow$

$$A + B = (a_{ij} + (-a_{ij}))_{i,j} = (0)_{i,j} = O$$

5. $\forall A \in V,\ 1_{\mathbb{R}} \cdot A = 1 \cdot (a_{ij})_{i,j} = (1 a_{ij})_{i,j} = (a_{ij}) = A$

1 È ELEMENTO NEUTRO DI $\cdot$ IN $\mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE

Thursday, October 7, 2021 12:57 PM

Es.

$\mathbb{Z}$ non è uno spazio vettoriale in $\mathbb{R}$

$\forall z \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha z \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ L'OPERAZIONE $\cdot$ NON È INTERNA

PROPRIETÀ

Sia V = F. spazio vettoriale allora:

1. $\forall \alpha \in F, \ \alpha \cdot 0_V = 0_V$
2. $\forall v \in V, \ 0_F \cdot v = 0_V$
3. $\forall v \in V, \ -1_F \cdot v = -v$
4. Se $\alpha v = 0_V$ allora $\alpha = 0_F$ OPPURE $v = 0_V$

DIMOSTRAZIONE

1. $\forall \alpha \in F$

0_V È ELEMENTO NEUTRO DI + IN V

$$\alpha \cdot 0_V = \alpha(0_V + 0_V) = \alpha 0_V + \alpha 0_V$$

DISTRIBUTIVA

Sia $w = \alpha \cdot 0_V \Rightarrow w = w + w \Rightarrow w + (-w) = w + w + (-w) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0_V = w + 0_V = w$$

$-w$ È L'OPPOSTO DI w

0_V È ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA IN V

pertanto $\alpha \cdot 0_V = 0_V$

DISTRIBUTIVA

2. $\forall v \in V, \ 0_F \cdot v = (0_F + 0_F) \cdot v = 0_F \cdot v + 0_F \cdot v$

2) $\forall v \in V,\ 0_F \cdot v = (0_F + 0_F) \cdot v = 0_F \cdot v + 0_F \cdot v$

0_F È ELEMENTO NEUTRO DI + IN F

pongo $w = 0_F \cdot v \Rightarrow w = w + w$

Analogamente al punto 1), otteniamo $w = 0_V \Rightarrow 0_F \cdot v = 0_V$

3) Dobbiamo dimostrare che $\forall v \in V,\ -1_F \cdot v = -v$

Ma $v + (-1_F \cdot v) = 1_F \cdot v + (-1_F \cdot v) = (1_F + (-1_F)) \cdot v$

PROPRIETÀ 5) SP. VETT.

DISTRIBUTIVA

$= 0_F \cdot v = 0_V$

-1_F È OPPOSTO DI 1_F

$\Rightarrow v + (-1_F \cdot v) = 0_V \Rightarrow -v = -1_F \cdot v$

4) Sia $\alpha \cdot v = 0_V$

Se $\alpha = 0_F \Rightarrow 0_F \cdot v = 0_V$ e non c'è nulla da dimostrare

Pertanto sia $\alpha \neq 0_F \Rightarrow \exists\, \alpha^{-1} \in F \Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)\, v = \alpha^{-1} \cdot 0_V =$

$= 1_F \cdot v = 0_V \Rightarrow v = 0_V$

$\alpha\alpha^{-1} = 1_F$ E PER LA 1)

$1_F \cdot v = v$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Thursday, October 14, 2021 5:20 PM

DEFINIZIONE

Sia $V = F$ - sp. vettoriale e sia $W \subseteq V$. Allora W è detto sottospazio vettoriale di V se W è spazio vettoriale su F rispetto alle stesse operazioni di V

OSSERVAZIONE

Sia $W \subseteq V$ sottoinsieme non vuoto di $V = F$ - sp. vettoriale. Allora W è un sottospazio vettoriale di V se

1. $\forall\ v_1, v_2 \in W \quad v_1 + v_2 \in W$
2. $\forall\ \alpha \in F,\ \forall\ v \in W,\ \alpha v \in W$

1 + 2 $= \forall\ \alpha, \beta \in F,\ \forall\ v, w \in W \quad \alpha v + \beta w \in W$

OSSERVAZIONE

Sia W = sottospazio vettoriale su F di V allora $0_V \in W$, ossia $0_W = 0_V$.

Difatti per la

2. $\forall\ \alpha \in F$ e $\forall\ v \in W$ risulta $\alpha v \in W$.

Ma allora scegliamo

$$\alpha = 0_F \Rightarrow 0_F \cdot v \in W \Rightarrow 0_F \cdot v = 0_V \in W$$

Inoltre

$$\forall\ w \in W \Rightarrow -1_F \cdot w \in W \Rightarrow -w \in W \Rightarrow$$

$\Rightarrow W$ possiede anche gli opposti

DEFINIZIONE

Sia $V = F$ - spazio vettoriale e sia $v \in V$.

DEFINIZIONE

Sia V = F-spazio vettoriale e sia $v \in V$.
Allora il sottospazio vettoriale generato da v, $\langle v \rangle$ è:

$$\langle v \rangle = \{ \alpha v \mid \alpha \in F \}$$

OSSERVAZIONE

$\langle v \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V

DIMOSTRAZIONE

1. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall\, v_1, v_2 \in \langle v \rangle,\quad v_1 + v_2 \in \langle v \rangle$$

Ma

$$\forall\, v_1, v_2 \in \langle v \rangle,\ \exists\, \alpha, \beta \in F \mid v_1 = \alpha v,\ v_2 = \beta v$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 = \alpha v + \beta v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DISTRIBUTIVA}}}{=} (\alpha + \beta) v \underset{\substack{\uparrow \\ \gamma = \alpha + \beta}}{=} \gamma v \in \langle v \rangle$$

2. $\forall\, \alpha \in F,\ \forall\, w \in \langle v \rangle$, dobbiamo verificare che $\alpha w \in \langle v \rangle$

Ma

$$\forall\, w \in \langle v \rangle,\ \exists\, \beta \in F \mid w = \beta v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha w = \alpha(\beta v) = (\alpha\beta) v \underset{\substack{\uparrow \\ \gamma = \alpha\beta}}{=} \gamma \cdot v \Rightarrow \alpha w \in \langle v \rangle$$

$\langle v \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V

COMBINAZIONE LINEARE

Thursday, October 14, 2021 5:38 PM

DEFINIZIONE

Siano $v_1, \dots, v_m \in V$. Allora una combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_m$ è un vettore del tipo:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in F$

DEFINIZIONE

Siano $v_1, \dots, v_m \in V$. Allora il sottospazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_m$ è:

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \mid \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F \}$$

OSSERVAZIONE

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V

Es.

$$V = F^m = \{ (a_1, a_2, \dots, a_m) \mid a_i \in F \}$$

Dimostriamo che $U = \{ (a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, 0) \mid a_i \in F \}$ è un sottospazio vettoriale di V

1. $\forall (a_1, \dots, a_{m-1}, 0), (b_1, \dots, b_{m-1}, 0) \in U$

$$(a_1, \dots, a_{m-1}, 0) + (b_1, \dots, b_{m-1}, 0) \underset{+ \text{ in } F^m}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_{m-1} + b_{m-1}, 0+0)$$

$$= (a_1 + b_1, \dots, a_{m-1} + b_{m-1}, 0) \in U$$

2. $\forall (a_1, \dots, a_{m-1} + b_{m-1}, 0) \in U, \ \forall \alpha \in F$

$$\alpha \cdot (a_1, \dots, a_{m-1}, 0) \underset{\cdot \text{ in } F^m}{=} (\alpha a_1, \dots, \alpha a_{m-1}, \alpha \cdot 0) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_{m-1}, 0) \in U$$

Es.

$V = F^m$

Fissiamo $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ non tutti nulli

Si consideri $H = \{ (x_1, \dots, x_m) \in F^m \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0 \} \subseteq V$

1. $\forall (x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \in H \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0 \\ \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m = 0 \end{cases}$

$$(x_1, \dots, x_m) + (y_1, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m)$$

$$\alpha_1 (x_1 + y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2) + \dots + \alpha_m (x_m + y_m) \underset{\text{DISTRIBUTIVA}}{=}$$

DISTRIBUTIVA

$= \alpha_1 x_1 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m x_m + \alpha_m y_m =$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{COMMUTATIVA}}}{=} \underbrace{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m)}_{= 0} + \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m y_m)}_{= 0} = 0$$

2) $\forall \beta \in F, \forall (x_1, \dots, x_m) \in H \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0$

$\beta (x_1, \dots, x_m) = (\beta x_1, \dots, \beta x_m)$

ASSOCIATIVA

$\alpha_1 (\beta x_1) + \alpha_2 (\beta x_2) + \dots + \alpha_m (\beta x_m) = (\alpha_1 \beta) x_1 + \dots + (\alpha_m \beta) x_m =$

$= (\beta \alpha_1) x_1 + \dots + (\beta \alpha_m) x_m = \beta (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) = \beta \cdot 0 = 0$

COMMUTATIVA DISTRIBUTIVA

DEFINIZIONE

Dato un campo F, una matrice $n \times m$ su F è una tabella di elementi di F con n righe ed m colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$$

L'insieme di tali matrici è denotato con $M_{m \times m}(F)$

Il coefficiente a_{ij} è detto entrata o componente (i,j)-esima

DEFINIZIONE

Una matrice $A \in M_{m \times m}(F)$, indichiamo con A^j la j-esima colonna

Indichiamo con A_i la i-esima riga

ES.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = (5\ 3\ 1\ -1)$$

OSSERVAZIONE

Se $n = m$ allora la matrice è detta quadrata e scriviamo $A \in M_m(F)$

PROPOSIZIONE

Sia $V = M_{m \times m}(F)$. Definendo

$(+) : A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$

$(\cdot) : \alpha A = (\alpha a_{ij})_{i,j}$

$\forall A, B \in V$ e $\forall \alpha \in F$

V è uno spazio vettoriale

DEFINIZIONE

Sia $A \in M_{m \times n}(F)$. Si definisce **TRASPOSTA** di A, e si scrive A^t, la matrice ottenuta da A scambiando le righe e le colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE

Se $A \in M_{m \times n}(F) \Rightarrow A^t \in M_{n \times m}(F)$

$A \in M_n(F) \Rightarrow A^t \in M_n(F)$

DEFINIZIONE

Data una matrice quadrata $A \in M_n(F)$, la diagonale principale di A è formata dagli elementi a_{ii}, $i = 1, \dots, n$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli elementi sulla diagonale principale della trasposta di una matrice quadrata rimangono invariati

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE

Una matrice quadrata $A \in M_n(F)$ è detta **DIAGONALE** se

$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matrice A è detta **SIMMETRICA** $A = A^t$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ DIAGONALE} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ SIMMETRICA} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Una matrice diagonale è simmetrica

Es.

$V = M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$

DEFINIZIONE

Siano U e V due spazi vettoriali. Allora la loro intersezione è

$$U \cap V = \{ w \mid w \in U \text{ e } w \in V \}$$

TEOREMA

Sia V F-sp. vettoriale e siano U e W due sottosp. vettoriali di V.
Allora $U \cap W$ è un sottosp. vettoriale di V

DIMOSTRAZIONE

1) $\forall v_1, v_2 \in U \cap W$, devo dim. che $v_1 + v_2 \in U \cap W$

Ma $v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} v_1, v_2 \in U \\ \text{e} \\ v_1, v_2 \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 \in U \\ v_1 + v_2 \in W \end{cases} \Rightarrow$

U e W sono sottospazi vettoriali di V

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$

2) $\forall \alpha \in F$ e $\forall v \in U \cap W$ devo dim. $\alpha v \in U \cap W$

Ma $v \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} v \in U \\ v \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha v \in U \\ \alpha v \in W \end{cases}$

U e W sono sottospazi vettoriali di V

Pertanto $U \cap W$ è un sottosp. vettoriale di V

Es.

$V = F^3 = \{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F \}$ sp. vett.

$U = \{ (\alpha_1, \alpha_2, 0) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in F \}$ sottosp. di V

$W = \{ (0, \beta_1, \beta_2) \mid \beta_1, \beta_2 \in F \}$ sottosp. di V

$U \cap W = ?$ $\quad \forall v \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} v \in U \Rightarrow v = (\alpha_1, \alpha_2, 0) \\ v \in W \Rightarrow v = (0, \beta_1, \beta_2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow v = (0, x, 0) \Rightarrow U \cap W = \{ (0, x, 0) \mid x \in F \}$

OSSERVAZIONE

In genere $U \cup W$ non è un sp. vett., ad esempio

$$U \cup W = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1 = 0 \text{ o } \alpha_3 = 0\} \Rightarrow$$

$v = (0,1,1) \in U \cup W$

$w = (1,1,0) \in U \cup W$

$\Rightarrow (v+w) = (0,1,1) + (1,1,0) = (1,2,1) \notin U \cup W$

DEFINIZIONE

Siano V = F-sp. vettoriale e U e W due F-sottosp. vett. di V, allora la somma tra U e W è definita:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$$

Es.

$$U + W = \{(\alpha_1, \alpha_2, 0) + (0, \beta_1, \beta_2) \mid \alpha_i, \beta_i \in F\} =$$

$$= \{(\underbrace{\alpha_1}_{\lambda_1}, \underbrace{\alpha_2 + \beta_1}_{\lambda_2}, \underbrace{\beta_2}_{\lambda_3}) \mid \alpha_i \beta_i \in F\} =$$

$$= \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_i \in F = F^3$$

TEOREMA

Siano V = F-sp. vett. e U e W due sottosp. di V. Allora $U+W$ è un sottosp. vett. di V

DIMOSTRAZIONE

Dobbiamo dimostrare che:

1) $\forall x_1, x_2 \in U+W \Rightarrow x_1 + x_2 \in U+W$

2) $\forall x \in U+W$ e $\forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x \in U+W$

1. $\forall x_1, x_2 \in U+W \Rightarrow \exists u_1, u_2 \in U$ e $\exists w_1, w_2 \in W$ / $\begin{cases} x_1 = u_1 + w_1 \\ x_2 = u_2 + w_2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) \overset{\text{commutativa di } +}{=} (\underbrace{u_1 + u_2}_{= u' \in U}) + (\underbrace{w_1 + w_2}_{= w' \in W}) = u' + w' \in U + W$

perché U e W sono sp. vett.

2. $\forall x \in U+W$, $\exists u \in U$ e $\exists w \in W$ | $x = u + w$, $\forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x =$

$= \alpha(u_1 + w_1) \underset{\text{DISTRIBUTIVA}}{=} \underbrace{\alpha u_1}_{\in U} + \underbrace{\alpha w_1}_{\in W} \in U + W$

in quanto sp. vett.

DEFINIZIONE

Siano V = F-sp. vett. e U e W due sottosp. vett. di V, allora U e W si dicono in <u>**SOMMA DIRETTA**</u> se

$$U \cap W = \{0\}$$

in tal caso scriveremo $U \oplus W$. Inoltre diremo che U e W sono <u>**SUPPLEMENTARI**</u> in V se

$$V = U \oplus W$$

Es. $U \cap W = \{(0, x, 0) \mid x \in F\} \neq \{(0,0,0)\} \Rightarrow U$ e W non sono in somma diretta

Es. $V = F^3$; $U = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in F\}$ e $W = \{(0, \beta, \gamma) \mid \beta, \gamma \in F\}$

Es.

$V = F^3$; $U = \{ (\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in F \}$ e $W = \{ (0, \beta, \gamma) \mid \beta, \gamma \in F \}$

- $U \cap W = ?$ $\quad \forall x \in U \cap W \Rightarrow x \in U \Rightarrow x = (\alpha, 0, 0), \alpha \in F$.

Ma $x \in W \Rightarrow x \Rightarrow (0, \beta, \gamma), \ \beta, \gamma \in F \Rightarrow (\alpha, 0, 0) = (0, \beta, \gamma) \Rightarrow$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = \beta \\ 0 = \gamma \end{cases} \Rightarrow x = (0,0,0) \Rightarrow U \cap W = \{ (0,0,0) \} \Rightarrow$ U e W sono in somma diretta

- $U \oplus W = \{ (\alpha, 0, 0) + (0, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in F \} =$

$= \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in F \} = V$

$\Rightarrow$ U e W sono supplementari in V

SOMMA DIRETTA

Friday, October 15, 2021 9:27 AM

TEOREMA

Siano V = F-sp. vett. e U e W due sottosp. vett. di V in somma diretta.

Allora $\forall\, v \in U \oplus W$, v si scrive in modo unico come somma di un elemento di U e uno di W

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo, supponiamo che

$$\exists\, v \in U \oplus W \mid v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2, \quad \text{dove}$$

$$u_1, u_2 \in U, \quad w_1, w_2 \in W \quad \text{e} \quad u_1 \neq u_2 \quad \text{e} \quad w_1 \neq w_2$$

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \Rightarrow u_1 - u_2 \in U = -w_1 + w_2 \in W \cap U = \{0\}$$

U e W sono in somma diretta

$$\Rightarrow w_2 - w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 \quad \lightning$$

ES.

$$V = M_2(F) \qquad S = \{A \in M_2(F) \mid A^t = A\}$$

$$\mathcal{A} = \{A \in M_2(F) \mid A^t = -A\}$$

$$\forall\, A \in S, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cancel{a = a} \\ c = b \\ \cancel{b = c} \\ \cancel{d = d} \end{cases} \Rightarrow c = b \Rightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, d \in F \right\}$$

$$\forall\, A \in \mathcal{A}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = -A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ \cancel{b = -c} \\ d = -d \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ d = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \middle| \; c \in F \right\}$$

- S è sottosp. vett. di V:

1) $\forall\, A, B \in S, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S$$

2) $\forall A \in S$ e $\forall \alpha \in F$, $\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha d \end{pmatrix} \in S$

- $\mathcal{A}$ è sottosp. vett. di V

1) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & b_1+b_2 \\ -b_1-b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

2) $\forall A \in \mathcal{A}$ e $\forall \alpha \in F$, $\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha b \\ -\alpha b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$

- Intersezione: $A \in S \cap \mathcal{A} \iff \begin{cases} A \in S \\ A \in \mathcal{A} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = x \\ b = -x \\ d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ x = -x \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S \cap \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow S$ ed $\mathcal{A}$ sono in somma diretta

- Somma tra S ed $\mathcal{A}$

$$S \oplus \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in F \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in F \right\} = M_2(F) = V$$

$\forall A \in M_2(F)$, A si scrive come somma di una matrice di S più una matrice di $\mathcal{A}$

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^t + A - A^t\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)}_{\in S} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)}_{\in \mathcal{A}}$$

$$\frac{1}{2}\left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right)$$

Es.

$V = M_2(F)$, $S = \{ A \in M_2(F) \mid A^t = A \}$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in F \right\}$$

VIDEO

Es.

U e W sono due F-sp. vett. e sia

$U \times W = \{ (u,v) \mid u \in U, w \in W \}$ è F-sp. vett. definendo:

$(+) = (u_1, w_1) + (u_2, w_2) = (u_1 + u_2, w_1 + w_2)$

$(\cdot) = \alpha (u_1, w_1) = (\alpha u_1, \alpha w_1)$

Siano $U' = \{ (u,0) \mid u \in U \} \subseteq U \times W$

$W' = \{ (0,w) \mid w \in W \} \subseteq U \times W$

1) U' e W' sono sottosp. vett. di $U \times W$

2) $U' \cap W' = \{ (0,0) \} \Rightarrow U'$ e W' sono in somma diretta

3) $U \times W = U' \oplus W'$, Dobbiamo dimostrare che $\begin{cases} U' \oplus W' \subseteq U \times W \\ U \times W \subseteq U' \oplus W' \end{cases}$

Ma $U' \oplus W' \subseteq U \times W$ poichè U' e W' sono sottosp. vett. di $U \times W$

Inoltre $\forall v \in U \times W \Rightarrow \exists u \in U$ e $\exists w \in W \mid v = (u,w) = \underbrace{(u,0)}_{\in U'} + \underbrace{(0,w)}_{\in W'} \in U' \oplus W'$

Pertanto $U \times W = U' \oplus W'$

Es. $V = F_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in F \}$

Es.

$V = F_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in F \}$

$W = \{ a_0 + a_0 x + a_1 x^2 \mid a_i \in F \}$

$U = \{ a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in F \}$

U e W sono sottosp. vett. di V,

1) $\forall\, u_1(x), u_2(x) \in U$

$u_1(x) = a_1 x + a_2 x^2$

$u_2(x) = b_1 x + b_2 x^2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1(x) + u_2(x) = (a_1 x + a_2 x^2) + (b_1 x + b_2 x^2) =$

$= (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 \in U$

2) $\forall\, u(x) \in U, \forall\, \alpha \in F.$

$\alpha u(x) = \alpha (a_1 x + a_2 x^2) =$

$= (\alpha a_1) x + (\alpha a_2) x^2 \in U$

$U \cap W = ?$

$U \cap W = \{ p(x) \in V \mid p(x) \in U \text{ e } p(x) \in W \} =$

$= \{ p(x) \in V \mid p(x) = a_1 x + a_2 x^2 = b_0 + b_0 x + b_1 x^2 \}$

$$\begin{cases} 0 = b_0 \\ a_1 = b_0 \\ a_2 = b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = b_1 \end{cases} \qquad p(x) = \cancel{a_1 x} + a_2 x^2$$

$U \cap W = \{ p(x) \in V \mid p(x) = a_2 x^2,\ a_2 \in F \} \neq 0$

$U + W = V\ ?$

$U+W \subseteq V$ come prima

$\forall\, p(x) \in V$ esistono $u(x) \in U$ e $w(x)\, W \mid p(x) = u(x) + w(x)$?

se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \overset{?}{=} (b_1 x + b_2 x^2) + (c_0 + c_0 x + c_1 x^2)$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x = c_0 + (b_1 + c_0) x + (b_2 + c_1) x^2$$

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ b_1 + c_0 = a_1 \\ b_2 + c_1 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 - a_0 \\ b_2 = a_2 - c_1 \end{cases}$$

$$\underbrace{p(x)}_{\in V} = \underbrace{\left((a_1 - a_0)x + (a_2 - c_1)x^2\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(a_0 + a_0 x + c_1 x^2\right)}_{\in W} \in U+W$$

Es. $V = F_2[x]$

1) $U = \{ a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in F \}$

$W = \{ a_0 + a_0 x + a_0 x^2 \mid a_0 \in F \}$

BASE

Friday, October 15, 2021 4:55 PM

V = F-sp. vett. $v_1, \dots, v_m \in V$ allora

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \mid \alpha_i \in F \}$$

TEOREMA

Lo spazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_m$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $v_1, \dots, v_m$

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \bigcap_i U_i$$

dove U_i contiene $v_1, \dots, v_m$ $\forall i$

Es. $V = M_2(F)$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = S$$

DEFINIZIONE

Sia V = F-sp. vett. e siano $v_1, \dots, v_x \in V$. Allora $v_1, \dots, v_x$ si dicono <u>linearmente</u> <u>dipendenti</u> se

$$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_x \in F$$

non tutti nulli $\mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_x v_x = 0$

Si diranno <u>linearmente</u> <u>indipendente</u> se la combinazione lineare

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_x v_x = 0$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_x = 0$

Es.

$$V = F^3, \quad B = \{ \underset{u_1}{(1,1,1)}, \underset{u_2}{(1,1,0)}, \underset{u_3}{(0,0,1)} \}$$

u_1, u_2, u_3 sono lin. ind. ?

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$

$(\alpha,\alpha,\alpha) + (\beta,\beta,0) + (0,0,\gamma) = (0,0,0)$

$(\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha+\gamma) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \cancel{\alpha+\beta=0} \\ \alpha+\gamma=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta=-\alpha \\ \\ \gamma=-\alpha \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha u_1 - \alpha u_2 - \alpha u_3 = 0 \quad \forall \alpha \in F$$

In particolare posso scegliere $\alpha = 1 \Rightarrow$ $u_1 - u_2 - u_3 = 0$

$\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ sono lin. dip. $\quad u_1 = u_2 + u_3$

Es.

$V = F^3, \quad B = \{ \underset{w_1}{(1,1,1)}, \underset{w_2}{(1,1,0)}, \underset{w_3}{(1,0,0)} \}$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F, \quad \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0$

$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0)$

$(\alpha,\alpha,\alpha) + (\beta,\beta,0) + (\gamma,0,0) = (0,0,0)$

$(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \alpha=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \quad w_1, w_2, w_3 \text{ sono lin. ind.}$$

Es.

$V = F_2[x] \qquad B_1 = \{ \underset{u_1}{1-x}, \underset{u_2}{x^2-x}, \underset{u_3}{x^2-1} \}$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F, \quad \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \alpha(1-x) + \beta(x^2-x) + \gamma(x^2-1) = 0$

$\alpha - \alpha x + \beta x^2 - \beta x + \gamma x^2 - \gamma = 0$

$(\alpha-\gamma) + (-\alpha-\beta)x + (\beta+\gamma)x^2 = 0$

$$\begin{cases} \alpha-\gamma=0 \\ -\alpha-\beta=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=\gamma \\ \beta=-\alpha=-\gamma \\ \gamma-\gamma=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha=\gamma \\ \beta=-\gamma \end{cases}$$

$\gamma u_1 - \gamma u_2 + \gamma u_3 = 0 \qquad$ In particolare, se $\gamma = 1$

$\Rightarrow u_1 - u_2 + u_3 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 - u_3$

OSSERVAZIONE

1) $v_1, \dots, v_m$ sono lin. ind. $\Leftrightarrow$ nessuno di essi si scrive come comb. lin. degli altri

$$v_1 = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i v_i \Leftrightarrow \underbrace{v_1 - \sum_{i=2}^{m} \alpha_i v_i = 0}_{\alpha_1 = 1} \quad \lightning$$

2) Se uno tra $v_1, \dots, v_m$ è il vettore nullo, ad es. $v_1 = 0$, allora i vettori sono lin. dip., difatti

$$\forall \alpha \in F^*, \quad \alpha v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_m = \alpha v_1 = \alpha \cdot 0 = 0$$

PROPRIETÀ

1) v è lin. dip. $\Leftrightarrow v = 0$

2) v e w sono lin. dip $\Leftrightarrow w = \alpha v$, per qualche $\alpha \in F$

3) I vettori $v_1, \dots, v_m$ sono lin. dip. $\Leftrightarrow$ almeno uno si scrive come comb. lin. degli altri

PROPOSIZIONE

Se $v_1, \dots, v_d$ sono lin. dip. allora

$\forall \; v_{d+1}, \dots, v_m$ risulta che $v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots v_m$ sono lin. dip

DIMOSTRAZIONE

$v_1, \dots, v_d$ sono lin. dip. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \; \alpha_1, \dots, \alpha_d \in F$ non tutti nulli $\mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d = 0$

Ma allora si considera

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d + 0 v_{d+1} + \dots + 0 v_m = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d = 0$$

comb. lin. nulla con scalari non tutti nulli:

$\Rightarrow v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_m$ sono lin. dip.

OSSERVAZIONE

Se $v_1, \ldots, v_m$ sono lin. ind., allora ogni suo sottoinsieme sarà composto da vettori lin. ind.

Es.

$B = \{(1,1,1), (1,1,0), (0,0,1)\}$ lin. dip $\Rightarrow$

$\Rightarrow B' = \{(1,1,1), (1,1,0), (0,0,1), (1,0,0), (\frac{1}{2}, \sqrt{\pi}, e)\}$

GENERATORI

Saturday, October 16, 2021 11:18 AM

DEFINIZIONE

Sia $V = F$ - sp. vett. e siano $v_1, \dots, v_m$, allora $v_1, \dots, v_m$ sono generatori di V (generano V) se $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

ES.

$V = F^3$, $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ lin. ind.

$$\forall v \in F^3, \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F \ | \ v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$$

IMPONIAMOLO!

$$\forall v \in F^3, \ v = (a,b,c)$$

$$(a,b,c) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (\alpha+\beta+\gamma, \ \alpha+\beta, \ \alpha)$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = a \\ \alpha+\beta = b \\ \alpha = c \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = c \\ \beta = b - \alpha = b-c \\ \gamma = a - \alpha - \beta = a - \cancel{c} - b + \cancel{c} = a-b \end{cases}$$

$$(a,b,c) = c w_1 + (b-c) w_2 + (a-b) w_3 \Rightarrow v \in \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow V = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$$

DEFINIZIONE

Sia $V = F$ - sp. vett. e sia $B = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ allora B è detta **base** di V su F se:

1) $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

2) $v_1, \dots, v_m$ sono lin. ind.

Es.

$V = F^3$; $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ è base di V su F

Es.

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base di F^3

$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di $M_2(F)$

$B = \{1, x, x^2\}$ base di $F_2[x]$

Le basi precedenti sono chiamate BASI CANONICHE

OSSERVAZIONE

Dato uno sp. vett. di V, esso possiede più basi differenti.
difatti ad esempio se

$V = F^3 \Rightarrow B\ \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$
$B'\ \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ sono basi di V su F

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLE BASI:

Sia $V = F$ - sp. vett.

1) $B = \{ v_1, \dots, v_m \}$ è una base di $V \Leftrightarrow B$ è un sistema massimale di vettori lin. indip.

2) $B = \{ v_1, \dots, v_m \}$ è una base di $V \Leftrightarrow B$ è un sistema minimale di generatori di V

3) $B = \{ v_1, \dots, v_m \}$ è una base $\Leftrightarrow \forall v \in V, \ \exists \ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ unici $\mid v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

DIMOSTRAZIONE

1) $(\Rightarrow)$ $\forall v \in V$, poiché B è una base di V su F,

$\exists \ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F \mid v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \Rightarrow \underbrace{v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_m v_m = 0}_{\text{comb. lin. non nulla con scalari non tutti nulli}}$

$\Rightarrow v, v_1, \dots, v_m$ sono vettori lin. dip.

$\Rightarrow B$ è un insieme massimale di vettori lin. ind.

$(\Leftarrow)$

Poiché B è un sistema max di vettori lin. indip., pertanto per dimostrare che essi formano una base, resta da verificare solo che siano dei generatori di V

$$V \doteq \langle v_1, \dots, v_m \rangle$$

Ma se per assurdo $\exists \ v \in V \mid v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle \Rightarrow$ i vettori

$v, v_1, \dots, v_m$ sono lin. indip. $\lightning$

perché $B = \{ v_1, \dots, v_m \}$ è un insieme massimale di vettori lin. indip.

2) $(\Rightarrow)$

Dobbiamo dimostrare che B è un sistema minimale di generatori

Per assurdo, si supponga che $V = \langle v_2, \dots, v_m \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \in \langle v_2, \dots, v_m \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \ \alpha_2, \dots, \alpha_m \in F \mid v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_m$ lin. dip. $\lightning$ perché $\{ v_1, \dots, v_m \}$ è una base

$(\Leftarrow)$

Poiché B è un sistema minimale di generatori di V, allora essi genereranno V

$\Rightarrow$ per essere una base dobbiamo dimostrare che essi sono lin. indip.

Poichè B è un sistema minimale di generatori di V , allora essi generano V
$\Rightarrow$ per essere una base dobbiamo dimostrare che essi sono lin. indip.

Per assurdo supponiamo che non lo siano $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F \text{ non tutti nulli} \mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

Supponiamo che $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha_1^{-1} \in F \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1^{-1}\alpha_1 v_1 + \alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_1^{-1}\alpha_m v_m = 0$$

$$\Rightarrow v_1 + \alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_1^{-1}\alpha_m v_m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_1^{-1}\alpha_m v_m \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_1 \in \langle v_2, \dots, v_m \rangle$ $\lightning$ perchè $\{v_1, \dots, v_m\}$ è un sistema minimale di generatori.

3)

($\Rightarrow$)

Per assurdo sia $v \in V \mid v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m \qquad \alpha_i, \beta_i \in F$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) = 0, \dots, (\alpha_m - \beta_m) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_m = \beta_m$

$\Rightarrow$ gli scalari sono unici

($\Leftarrow$)

$\forall v \in V, \exists!\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F \mid v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \Rightarrow v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

$\Rightarrow V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle \Rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}$ generano V

Inoltre, se in particolare $v = 0$ per ipotesi

$$\exists!\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F \mid 0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m .$$

Ma sicuramente, $0 = 0_{v_1} + \dots + 0_{v_m}$. Per l'unicità degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, deve risultare $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ sono lin. indip.

Es.

Verificare che $B = \{ \underset{u_1}{(1,1,0)}, \underset{u_2}{(1,0,1)}, \underset{u_3}{(0,1,1)} \}$ è una base di F^3 ed esprimere $v = (1,2,3)$ come loro combinazione lineare

SOLUZIONE

1) Sono linearmente indipendenti

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F, \quad \alpha(1,1,0)+\beta(1,0,1)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$(\alpha,\alpha,0)+(\beta,0,\beta)+(0,\gamma,\gamma)=(0,0,0)$$

$$(\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=-\alpha\\ \gamma=-\alpha\\ -\alpha-\alpha=0 \quad -2\alpha=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases} \Rightarrow u_1, u_2, u_3 \text{ sono lin. indip.}$$

2) Generano F^3

$$\forall (a,b,c) \in F^3, \ \exists \alpha, \beta, \gamma \in F \mid (a,b,c)=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$$

$$(a,b,c)=\alpha(1,1,0)+\beta(1,0,1)+\gamma(0,1,1)$$

$$(a,b,c)=(\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma) \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \alpha+\gamma=b\\ \beta+\gamma=c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=a-\alpha\\ \gamma=b-\alpha\\ a-\alpha+b-\alpha=c\end{cases}$$

$$a+b-2\alpha=c \Rightarrow \alpha=\frac{a+b-c}{2}$$

$$\beta=a-\alpha=a-\frac{a+b-c}{2}=\frac{a-b+c}{2}$$

$$\gamma=b-\alpha=b-\frac{a+b-c}{2}=\frac{-a+b+c}{2}$$

$$(a,b,c)=\frac{a+b-c}{2}\cdot u_1+\frac{a-b+c}{2}\cdot u_2+\frac{-a+b+c}{2}\cdot u_3$$

Pertanto u_1, u_2 e u_3 sono generatori di F^3

3) $\underset{a}{1}, \underset{b}{2}, \underset{c}{3}$: $(1,2,3)=0\cdot u_1+1\cdot u_2+2\cdot u_3$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE

Sia V = F - sp. vett. e siano

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \quad e \quad B' = \{w_1, \dots, w_m\} \text{ due basi di } V$$

allora $n = m$

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo sia $m > n$. Si consideri $w_1 \in B'$.

Poichè B è base di V $\Rightarrow$ $\exists\, \alpha_i \in F$ non tutti nulli $\mid w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, sia $\alpha_1 \neq 0$

$$\alpha_1^{-1} w_1 = \overbrace{\alpha_1^{-1}\alpha_1}^{1} v_1 + \dots + \alpha_1^{-1}\alpha_n v_n = v_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_1^{-1}\alpha_i v_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \alpha_1^{-1} w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_1^{-1}\alpha_i v_i \quad (1) \Rightarrow v_1 \in \langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

Si consideri ora $w_2 \in B'$. Poichè B è base di V

$$\exists\, b_i \in F \text{ non tutti nulli} \mid w_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n .$$

Sostituisco (1)

$$w_2 = \beta_1 \underbrace{\left(\alpha_1^{-1} w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_1^{-1}\alpha_i v_i\right)}_{v_1} + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n =$$

$$= \beta_1 \alpha_1^{-1} w_1 - \sum_{i=2}^{n} \beta_1 \alpha_1^{-1}\alpha_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \beta_i v_i =$$

$$= \underbrace{\beta_1 \alpha_1^{-1}}_{\lambda_1} w_1 + \sum_{i=2}^{n} \underbrace{(\beta_i - \beta_1 \alpha_1^{-1}\alpha_i)}_{\lambda_i} v_i \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i$$

Almeno uno tra $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ è diverso da zero. Poichè se fosse

$$\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow w_2 = \lambda_1 w_1 \Rightarrow w_1$ e w_2 lin. dip. $\lightning$ perchè $w_1, w_2 \in B'$ e B' è una base.

Supponiamo che $\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_2^{-1} w_2 = \lambda_2^{-1}\lambda_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_2^{-1}\lambda_i v_i = \lambda_2^{-1}\lambda_1 w_1 + v_2 + \sum_{i=3}^{n} \lambda_2^{-1}\lambda_i v_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \underbrace{-\lambda_2^{-1}\lambda_1}_{} w_1 + \underbrace{\lambda_2^{-1}}_{} w_2 - \sum_{i=3}^{n} \underbrace{\lambda_2^{-1}\lambda_i}_{} v_i \Rightarrow$$

$$\gamma_1 \qquad \gamma_2 \qquad \gamma_i$$

$$\Rightarrow v_2 \in \langle w_1, w_2, v_3, v_m \rangle$$

Inoltre $v_1 = \alpha_1^{-1} w_1 - \sum_{i=2}^{m} \alpha_1^{-1} \alpha_i v_i = \alpha_1^{-1} w_1 - \alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 - \sum_{i=3}^{m} \alpha_1^{-1}\alpha_i v_i =$

$$= \alpha_1^{-1} w_1 - \alpha_1^{-1}\alpha_2 \underbrace{(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \gamma_3 v_3 + \ldots + \gamma_m v_m)}_{v_2} - \sum_{i=3}^{m} \alpha_1^{-1}\alpha_i v_i =$$

$$= (\alpha_1^{-1} - \alpha_1^{-1}\alpha_2\gamma_1) w_1 - \alpha_1^{-1}\alpha_2\gamma_2 w_2 - \sum_{i=3} (\alpha_1^{-1}\alpha_2\gamma_i + \alpha_1^{-1}\alpha_1) v_i$$

$$\Rightarrow v_1 \in \langle w_1, w_2, v_3, \ldots, v_m \rangle$$

Procedendo iterativamente, $\forall\, i = 1, \ldots, m \quad v_i \in \langle w_1, w_2, \ldots, w_m \rangle$

Ma poiché $m > m$, $w_m = \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_m v_m \in \langle w_1, \ldots, w_m \rangle \Rightarrow$

$\uparrow$ B è una base di V

$\Rightarrow w_m, w_1, \ldots, w_m$ sono lin. dip. ⚡ poiché essi appartengono a B' che è una base di V

DEF.

Sia $V = F$-sp. vett. Allora la dimensione di V su F, $\dim_F V$, è uguale al numero di vettori che compongono una base di V su F

OSS.

$$\dim_F V = \text{il numero} \begin{cases} \text{MAX di vett. lin. indip.} \\ \text{MIN di generatori di } V \end{cases}$$

Es.

$V = \{0\} \Rightarrow \dim_F V = 0$

$V = F_2[x] \Rightarrow \dim_F V = 3$

$V = M_{m \times m}(F) \Rightarrow \dim_F V = m \cdot m$

$V = M_2(F) = \dim_F V = 4$

Es.

$$V = M_2(F), \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$$

- W sottosp. vett. di $V \Rightarrow$
- $\dim_F W = 2$

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \downarrow a=1, b=0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \downarrow a=0, b=1$

- I vettori di B sono lin. ind. perché non sono multipli
- $\langle B \rangle = W$; difatti

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \in W, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B è una base di W su F

PROPOSIZIONE

Sia V = F-sp. vett. e sia $\dim_F = n$. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono lin. indip.

$\Rightarrow B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi $v_1, \dots, v_n$ sono lin. ind. pertanto dobbiamo dimostrare che $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

- $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq V$: per costruzione
- $V \subseteq \langle v_1, \dots, v_n \rangle$: $\forall v \in V$, i vettori $\overbrace{v, v_1, \dots, v_n}^{n+1}$ sono lin. dip. perché $\dim_F V = n \Rightarrow$

$\exists\, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ non tutti nulli $\mid \alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Ma $\alpha \neq 0$ poiché se fosse $\alpha = 0$ allora otterremmo la comb. lin

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ poiché $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip. $\lightning$

Pertanto $\alpha \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\alpha^{-1} v + \alpha^{-1}\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha^{-1}\alpha_n v_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v + \alpha^{-1}\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha^{-1}\alpha_n v_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v = -\alpha^{-1}\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha^{-1}\alpha_n v_n \Rightarrow$

$\Rightarrow v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow V \subseteq \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Pertanto $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

TEOREMA DI COMPLETAMENTO A BASE

Sia V $\mathbb{F}$-sp. vett. $|$ $\dim_{\mathbb{F}} V = m$

siano $v_1, \dots, v_k$ vett. lin. indip. ($k \leq m$) allora

$\exists\, v_{k+1}, \dots, v_m \in V \mid \{v_1, \dots, v_m\}$ è una base di V su $\mathbb{F}$

DIMOSTRAZIONE

Se $k = m$ OK!

Se $m = k+1$, $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subsetneq V \Rightarrow$

$\exists\, v_{k+1} \in V \mid v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ sono lin. indip.

Ma $\dim_{\mathbb{F}} V = m = k+1 \Rightarrow$ per la proposizione precedente

$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ è una base

Se $m = k+2$ analogo

$\vdots$

Es. $M_2(\mathbb{F})$ $\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\}$

$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ completiamo B_W

ed una base di $M_2(\mathbb{F})$

Mancano 2 vettori:

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

OSS. $W \subseteq V$ sottospazio $\Rightarrow \dim_F W \leq \dim_F V$

Es. $V = M_2(F)$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in F \right\} ; \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in F \right\}$$

- $\dim_F U = 2$; $\dim_F W = 2$; $\dim_F M_2(F) = 4$
- $U \cap W = \{ A \in V \mid A \in U \text{ e } A \in W \}$

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ x = d \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in U \cap W \Rightarrow U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in F \right\}$$

$\dim_F (U \cap W) = 1$ $\qquad B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $U + W = \{ A + B \mid A \in U, B \in W \}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y \\ y & x+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = x+a \\ a_{12} = y \\ a_{21} = y \\ a_{22} = x+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = x+a \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{22} = x+d \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{22} \in F \right\}$$

$\dim_F (U+W) = 3$ $\qquad B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim_F V = 4$

$\dim_F U = 2$

$\dim_F W = 2$

$\dim_F U \cap W = 1$

$\dim_F (U+W) = 3$

RELAZIONE DI GRASSMANN

Siano V = F-sp. vett. e U, W sottospazi di V. Allora:

$$\dim_F (U+W) = \dim_F U + \dim_F U - \dim_F (U \cap W)$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\dim_F (U \cap W) = t$ e sia $B_{U \cap W} = \{z_1, \dots, z_t\}$.

Poichè $U \cap W$ è un sottosp. vett. sia di U che di W, possiamo completare $B_{U \cap W}$ ad una base di U e ad una base di W

$B_U = \{z_1, \dots, z_t, u_1, \dots, u_r\}$ base di U

$B_W = \{z_1, \dots, z_t, w_1, \dots, w_s\}$ base di W

$\dim_F U = t+r$ e $\dim_F W = t+s$

$$\dim_F U + \dim_F W - \dim_F (U \cap W) = t+r+\cancel{t}+s-\cancel{t} = t+r+s$$

Dobbiamo dimostrare che la dimensione su F $(U+W) = t+r+s$, ossia dobbiamo dimostrare che $B_{U+W} = \{z_1, \dots, z_t, u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$

1) B_{U+W} genera $U+W$: $\forall v \in U+W, \exists u \in U$ ed $\exists w \in W \mid v = u+w$

Ma B_U è una base di $U \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_1, \dots, \beta_r \in F \mid u = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i$

Inoltre

B_W è una base di $W \Rightarrow \exists \delta_1, \dots, \delta_t, \gamma_1, \dots, \gamma_s \in F \mid w = \sum_{i=1}^{t} \delta_i z_i + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i$

$$v = u+w = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{t} \delta_i z_i + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} (\alpha_i + \delta_i) z_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i \Rightarrow B_{U+W} \text{ generano } U+W$$

DISTRIBUTIVA

2) B_{U+W} è linearmente ind. :

Si consideri la comb. lin.

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{t} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i = 0$$

dobbiamo dimostrare che

$$\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0 \quad \forall i$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i}_{\in W} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{t} \alpha_i z_i - \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i}_{\in U} \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i \in U \cap W$$

ma $B_{U \cap W} = \{z_1, \dots, z_t\}$ è una base di $U \cap W$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_t \in F \mid \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i z_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i - \sum_{i=1}^{t} \lambda_i z_i = 0$$

Questa è una comb. lin. nulla dei vettori $w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_t$ che formano una base di W $\Rightarrow$ sono lin. ind. $\Rightarrow$

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_s = \lambda_1 = \dots = \lambda_t = 0 \Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0$$

Da $(*)$ si ottiene che:

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i = 0$$

Questa è una comb. lin. nulla dei vettori $z_1, \dots, z_t, u_1, \dots, u_r$ che formano una base di U $\Rightarrow$ sono lin. ind. $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \dots = \alpha_t = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$

OSS.

Se U e W sono in somma diretta $\Rightarrow U \cap W = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_F (U \cap W) = 0$ Per la relazione di Grassmann

$$\dim_F (U \oplus W) = \dim_F U + \dim_F W$$

Es. $V = F_2[x]$ $\quad U = \langle 1-x, x, 1+x \rangle$

$W = \langle 1+x^2, 1+x+x^2 \rangle$

- $\dim_F U = 2$

Noto che $1+x = 1 \cdot (1-x) + 2 \cdot x \Rightarrow 1+x$ è lin. dip. da $1-x$ e x

$\Rightarrow U \Rightarrow \langle 1-x, x \rangle$

Inoltre $1-x$ e x sono lin. ind. in quanto nessuno è multiplo dell'altro

$$B_U = \{ 1-x, x \}$$

- $1+x^2$ e $1+x+x^2$ sono lin. dip. $\Rightarrow \dim_F W = 2$ e

$$B_W = \{ 1+x^2, 1+x+x^2 \}$$

- $\forall p(x) \in U, \quad p(x) = \alpha(1-x) + \beta x = \alpha + (\beta - \alpha) x$

$$U = \{ \underbrace{\alpha}_{\lambda_0} + \underbrace{(\beta-\alpha)}_{\lambda_1} x \mid \alpha, \beta \in F \} = \{ \lambda_0 + \lambda_1 x \mid \lambda_0, \lambda_1 \in F \} = F_1[x]$$

$\forall f(x) \in W, \quad f(x) = \alpha(1+x^2) + \beta(1+x+x^2) = (\alpha+\beta) + \beta x + (\alpha+\beta)x^2$

$$W = \{ \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\gamma_0} + \underbrace{\beta}_{\gamma_1} x + \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\gamma_0} x^2 \mid \alpha, \beta \in F \} = \{ \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_0 x^2 \mid \gamma_0, \gamma_1 \in F \} = F_2[x]$$

- $U \cap W$

$$\lambda_0 + \lambda_1 x = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_0 x^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = \gamma_0 \\ \lambda_1 = \gamma_1 \\ 0 = \gamma_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_0 = 0 \\ \lambda_0 = 0 \\ \lambda_1 = \gamma_1 \end{cases} \qquad g(x) = \gamma_1 x$$

$U \cap W = \{ ax \mid a \in F \}, \quad \dim_F U \cap W = 1, \quad B_{U \cap W} = \{ x \}$

Per Grassmann:

$$\dim_F (U+W) = \dim_F U + \dim_F W - \dim_F (U \cap W) = 2+2-1 = 3$$
$$= \dim_F V = \dim_F F_2[x]$$

$U + W \subseteq V$ per costruzione ma $\dim_F (U+W) = \dim_F V$

$$\Downarrow$$

$$U + W = V = F_2[x]$$

SONO SUPPLEMENTARI

CAMBIAMENTO DI BASE

NOTAZIONE

$V = F$ - sp. vett. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall v \in V \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F \qquad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono dette componenti di v rispetto a B

Siano B e B' due basi di V su F. Scriviamo:

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \qquad v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$B' = \{e_1', \dots, e_n'\} \qquad v = \alpha_1' e_1' + \dots + \alpha_n' e_n'$

Si costruisce la matrice di passaggio da B a B'

Si inseriscono per colonne gli scalari delle comb. lin. che permettono di scrivere ogni $e_i \in B$ della vecchia base come, appunto, comb. lin. dei vettori $e_j' \in B'$ della nuova base:

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j' \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow M_{B \to B'} = (\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

in questo modo se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = M_{B \to B'} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Es.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ -1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0-1 \\ 2+0+0 \\ -2+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es.

$V = F_2[x]$, $\dim_F V = 3$ Si considerino le basi

$$B = \{1, x, x^2\} \qquad B' = \{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$$

$\forall\, p(x) \in V,\ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \Rightarrow$

Le componenti di $p(x)$ rispetto a B sono $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

- componenti di 1 rispetto a B': $1 = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x+x^2)$

$$1 = (\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)x + (\beta+\gamma)x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2\gamma = 1 \\ \alpha = -\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \gamma = -\frac{1}{2}$$

- componenti di x rispetto a B': $x = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x+x^2)$

$$x = (\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)x + (\beta+\gamma)x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha+\gamma = 1 \\ \beta+\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - \beta \\ -2\beta = 1 \\ \gamma = -\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = -\frac{1}{2} \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

- Componenti di x^2 rispetto a B'

$$x^2 = (\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)x + (\beta+\gamma)x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ -2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

$$M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Componenti di $p(x)$ rispetto a B' :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 - a_2 \\ a_0 - a_1 + a_2 \\ -a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_0 + a_1 - a_2}{2} \\ \frac{a_0 - a_1 + a_2}{2} \\ \frac{-a_0 + a_1 + a_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{a_0 + a_1 - a_2}{2}(1+x) + \frac{a_0 - a_1 + a_2}{2}(1+x^2) + \frac{-a_0 + a_1 + a_2}{2}(x+x^2)$$

$q(x) = 2 - x + 3x^2$ Cercare le componenti di $q(x)$ rispetto a B'

Es.

$V = M_2(F)$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Cerchiamo le componenti di A rispetto a B

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma + \delta \\ \gamma - \delta & \beta \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} a = \alpha \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} a = a \end{cases}$

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = \gamma + \beta \\ c = \gamma - \beta \\ d = \beta \end{cases} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOMMARE} \\ 2^\circ \text{ e } 3^\circ \text{ EQUAZIONE}}}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha = a \\ b + c = 2\gamma \\ \beta = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = d \\ \gamma = \frac{b+c}{2} \\ \delta = \frac{b-c}{2} \end{cases}$$

Le componenti sono $\begin{pmatrix} a \\ d \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \end{pmatrix}$

- Componenti di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Componenti di $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B':

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Componenti di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B':

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha+\gamma+\delta & \alpha+\delta \\ \beta+\gamma & \beta+\gamma+\delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma+\delta = 0 \\ \alpha+\delta = 1 \\ \beta+\gamma = 1 \\ \beta+\gamma+\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

SOSTITUISCO LA 2° NELLA 1° E LA 3° NELLA 4°

$$\begin{cases} \gamma+1 = 0 \\ \alpha+\delta = 1 \\ \beta+\gamma = 1 \\ 1+\delta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = -1 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \delta = -1 \end{cases}$$

$\alpha = 2, \ b = 2, \ \gamma = -1, \ \delta = -1$

Componenti di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B'

Noto che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = -1, \ \delta = 1$

$$M_{B \to B'} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Componenti di A rispetto a B'

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d+b+c \\ -a+b+c \\ a - \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} \\ d - \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c-d \\ -a+b+c \\ a-b \\ d-c \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICI E SISTEMI LINEARI

RICORDI

1) $A \in M_{m\times n}(F)$, $A = (a_{ij})\; \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

2) $A \in M_{m\times n}(F)$, A_i = i-esima riga , A^j = j-esima colonna

3) $M_{m\times 1}(F)$ vettori colonna , $M_{1\times n}(F)$ vettore riga

4) $A \in M_{m\times n}(F)$, $A = (a_{ij})_{i,j} \Rightarrow A^t \; (a_{ji})_{i,j}$ TRASPOSTA

5) $A \in M_n(F)$, se $A = A^t \Rightarrow$ A è simmetrica

se $A = -A^t \Rightarrow$ A è antisimmetrica

6) Se $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(F)$ è t.c. $a_{ij} = 0$

$\forall\; i > j \Rightarrow$ A è detta TRIANGOLARE SUPERIORE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 \quad \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ è t.c. $a_{ij} = 0$

$\forall\; i < j \Rightarrow$ A è detta TRIANGOLARE INFERIORE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

8) $A \in M_m(F)$ è detta **DIAGONALE** se $a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

9) $A \in M_m(F)$ è detta **SCALARE** se è diagonale e tutti gli elementi sulla diagonale coincidono

$$A = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ & & \ddots \\ 0 & & a \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA MATRICI

$A \in M_{m \times m}(F)$, $B \in M_{m \times t}(F) \Rightarrow$ È possibile calcolare $A \cdot B$

Se $t \neq m$ non si può calcolare $B \cdot A$

Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,t}}$ allora

$$A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j}$$

Es.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(F) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}F$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} (1,1) & (1,2) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 3 & 0\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 1\cdot(-1) \end{pmatrix}} \\ (2,1) & (2,2) \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(F)$$

OSS

Se $A, B \in M_2(F)$, possiamo eseguire sia AB che BA.

M_2 in genere $AB \neq BA$

Ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\#$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

DI SOLITO $\quad x \cdot y = 0 \iff x = 0$ opp. $y = 0$

MA $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{\# \\ 0}}{X} \cdot \underset{\substack{\# \\ 0}}{Y} = \emptyset$$

PROPRIETÀ

$$\forall A,B \in M_{m\times m}(F) \text{ e } \forall C,D \in M_{m\times t}(F)$$

$I_m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\, 1 \end{pmatrix}$

1) $(A+B)C = AC+BC$

2) $A(C+D) = AC+AD$

3) $\forall \alpha \in F,\ \alpha(AC) = A(\alpha C) = (\alpha A)C$

4) $A\cdot I_m = I_m \cdot A = A \qquad I_m \cdot C = C\cdot I_t = C$

5) $(AC)E = A(CE),\quad E \in M_{t\times q}(F)$

6) $(A+B)^t = A^t + B^t$

7) $(AC)^t = C^t A^t$

Dunque se $V = M_m(F) \Rightarrow I_m$ è l'elemento neutro del prodotto tra matrici:

V è un gruppo rispetto al prodotto?

NO, infatti per esempio in $M_2(F)$ se si considera la matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, allora A non è invertibile

se fosse invertibile, $\exists A^{-1} \in M_2(F) \mid A\cdot A^{-1} = I_2$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 1 \quad \leftarrow \text{ASSURDO!} \end{cases}$$

DEF

Si definisce GRUPPO GENERALE LINEARE di ordine m, l'insieme

$$GL_m(F) = \{ A \in M_m F \mid A \text{ è invertibile} \}$$

OSS $(GL_n(F), \cdot)$

1) $\forall A, B, C \in GL_n(F)$, $(AB)C = A(BC)$

2) $\forall A, B \in GL_n(F)$, $AB \in GL_n(F)$

DIMOSTRAZIONE

Ma $\forall A, B \in GL_n(F)$, $\exists A^{-1}, B^{-1} \in M_n(F) \mid AA^{-1} = I_n$, $B \cdot B^{-1} = I_n$

Ma allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ infatti $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} =$

$= (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \Rightarrow AB$ è invertibile

$\Rightarrow AB \in GL_n(F)$

3) Elemento neutro $= I_n$

4) $\forall A \in GL_n(F)$, per costruzione $\exists A^{-1} \in GL_n(F) \Rightarrow A$ è invertibile $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ in $GL_n(F)$ esistono gli inversi

OSS $(GL_n(F), +)$ non è un gruppo

Difatti: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(F)$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(F)$ $(B^{-1} = B)$

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin GL_n(F)$

Es. Det. tutte le matrici $M_2(F)$ che commutano con la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall A \in M_2(F) \mid AB = BA$. Se $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x = x} \\ 0 = y \\ 0 = z \\ \cancel{0 = 0} \end{cases} \quad y = z = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall A \in M_2(F) \mid AC = CA$. Se $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x+z \\ x+\cancel{y} = \cancel{y}+t \\ \cancel{z = z} \\ z+t = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x \\ x = t \\ \\ z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE

Il determinante di una matrice quadrata 2x2 è una applicazione

$$\det : M_2(F) \to F \mid \forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

OSS

Se $A \in M_1(F) \Rightarrow A = a \in F$ allora $\det A = a$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1$$

PROPRIETÀ

1) det è lineare sulle righe di A

a) $\left(\begin{pmatrix} a_{11} + a_{11}' & a_{12} + a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

2) det è lineare sulle colonne di A

3) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$, $A \in M_n(F)$

4) Se A possiede almeno una riga (colonna) nulla, allora $\det A = 0$

5) Se A' si ottiene da A scambiando due righe (due colonne) allora

$\det A' = -\det A$

6) $\det(I_n) = 1$

7) Se A' si ottiene da A sommando ad una riga (ad una colonna) un multiplo di un'altra riga (risp. colonna), allora

$\det A' = \det A$

8) Se A possiede due righe (colonne) uguali o proporzionali, allora $\det A = 0$

9) $\det(A^t) = \det A$

Es.

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -3$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A' = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 3$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A'' = 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 3$$

7)

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_1 \leftarrow A_1 + 2A_2$$

$$\det A' = 5 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 = -5 + 2 = -3$$

8)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 0$$

REGOLA DI SARRUS

Sia $A \in M_3(F)$, allora per calcolare $\det A$ facciamo come segue

$$\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

VALE SOLO PER MATRICI 3x3

Es.

$$A = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 0 \cdot (-2) \cdot 1 = -13$$

REGOLA DI LA PLACE

Se $A \in M_n(F)$ e sia $A_{ij} \in M_{n-1}(F)$ la matrice ottenuta di A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna. Allora:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \ldots +$$

$$(-1)^{i+n} \ldots \det(A_{in}) =$$

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+m} a_{im} \det(A_{im})$$ sviluppo sulla i-esima riga

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{j+2} a_{2j} \det(A_{2j}) + \dots + (-1)^{j+m} a_{mj} \det(A_{mj})$$ sviluppo sulla j-esima colonna

Es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ secondo la 1° riga

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) + 1 \cdot 2 \, (-2 \cdot 2 - 1 \cdot 3) =$$

$$= 1 \cdot 2 \, (-7) = 1 - 14 = -13$$

Es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\left[(-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -\left[2\,(-2 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + (-1) \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)) \right] =$$

$$= -\left[2 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 \right] = -(-9) = 9$$

OSS

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$, infatti ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \, , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A + \det B = 1 + 1 = 2$$

$$\text{Ma } A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = 0$$

TEOREMA DI BINET

Se $A, B \in M_n(F)$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

OSS

Se $A \in GL_n(F)$, allora $\exists\, A^{-1} \in GL_n(F) \mid AA^{-1} = I_n$

$$1 \underset{\text{prop. 6}}{=} \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) \underset{\text{BINET}}{=} \det A \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow$$

$$\det A \neq 0 \text{ e } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

DEFINIZIONE

Un sistema lineare in n indeterminate ed m equazioni è del tipo

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se tale sistema ammette almeno una soluzione è detto compatibile

OSS

Dato $(*)$ e posti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

allora $(*)$ può essere scritto in forma matriciale

$$\underset{m \times n}{A}\ \underset{n \times 1}{X} = \underset{m \times 1}{B}$$

A è detta matrice incompleta. La matrice ottenuta giustapponendo A e B è detta matrice completa

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

DEF

Se $B = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, allora il sistema è detto omogeneo

OSS

Un sistema omogeneo $AX = 0$ è sempre compatibile, perchè $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ è sempre soluzione del sistema

DEF

Due sistemi $AX = B$ e $A'X = B'$ sono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni

METODO DI RIDUZIONE DI GAUSS

Sia $AX = B$. Le operazioni fondamentali sulle righe di $A|B$ sono:

1) Scambiare due righe: $R_{ij} \equiv$ scambio la i-esima con la j-esima
2) Moltiplicare una riga per $\alpha \in F$: $R_i(\alpha) \equiv$ moltiplico la i-esima per α
3) Sostituire una riga con la somma per un multiplo di $\alpha \in F$

$R_1 + R_J(\alpha) \equiv$ sostituisco la i-esima con la somma di R_1 con R_J moltiplicato per $\alpha \in F$

$$A|B \xrightarrow{\text{OPERAZIONI}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & * & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & * \\ & 0 & & & \\ & & & 1 & \end{array}\right)$$ e poi risolvere

Es.

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2(-\frac{1}{9})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 & 2/9 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_1(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 & 2/9 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3(\frac{3}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y + \frac{8}{9}z = \frac{2}{9} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{4}{3} - 3 = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

Es.

$$\begin{cases} x + 2z = -1 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_1(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2(-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 29 & -10 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\left(\frac{1}{29}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4+R_1(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3(11)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 0 & 0 & 0 & 64/29 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\left(\frac{29}{64}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2z = -1 \\ y - 7z = -3 \\ z = -\frac{10}{29} \\ 0 = 1 \quad ↯ \end{cases}$$

Il sistema non è compatibile

Es.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \\ 6x + y = 1 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$$

$$A|B \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1(-3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2(-\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_1(-6)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2(5)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 + R_1(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 + R_2(5)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$GL_n(F) = \{ A \in M_n(F) \mid A \text{ è invertibile} \}$$

INVERSA DI UNA MATRICE

Usando le operazioni fondamentali sulle righe, dobbiamo trovare la matrice inversa A^{-1} (laddove possibile) giustapponendo A con I_n e cercando di ottenere una nuova matrice in cui I_n compaia a sinistra

$$(A \, I_n) \in M_{n \times 2n}(F) \xrightarrow[\text{FONDAMENTALI}]{\text{OPERAZIONI}} (I_n \, B) \Rightarrow A^{-1} = B$$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_2(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 + R_1(-2)]{R_2 + R_1(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_3(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1+R_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Es.

Trovare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $AX = 0$, dove $A \in M_{m \times n}(F)$, è un sottospazio vettoriale di F^n

DIMOSTRAZIONE

Sia $W = \{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \mid AX_i = 0 \}$ tale insieme

1) $\forall\, X_1, X_2 \in W$ dobbiamo dimostrare che $X_1 + X_2 \in W$

Ma se $X_1, X_2 \in W \Rightarrow AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$,

pertanto

$$A(X_1 + X_2) = \underbrace{AX_1}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \underbrace{AX_2}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 \in W$$

2) $\forall\, X \in W$ e $\forall\, \alpha \in F$ dobbiamo dimostrare che $\alpha X \in W$

Ma se $X \in W \Rightarrow AX = 0$

pertanto

$$A(\alpha X) = \alpha(\underbrace{AX}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha X \in W$$

RANGO

Thursday, November 4, 2021 11:26 AM

DEFINIZIONE

Sia V = F-sp. vett. e siano $v_1, \dots, v_m$ vettori di V. Si definisce **rango** di $v_1, \dots, v_m$ il numero massimo di vettori lin. indip. e si indica con $r(v_1, \dots, v_m)$

OSS

$$r(v_1, \dots, v_m) = \dim_F \langle v_1, \dots, v_m \rangle$$

Es.

$V = F^4 \quad W = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1,0,1,0);\ (1,2,0,1);\ (0,2,-1,1)\}$

$r(W) =$

$\alpha w_1 + \beta w_2 + \beta w_3 = (0,0,0,0) \qquad w_1 = w_2 - w_3$

w_1, w_2, w_3 sono lin. dip. $\Rightarrow r(W) < 3 \Rightarrow r(W) =$ 1 NO! / 2

DEFINIZIONE

Sia $A \in M_{m\times n}(F)$, $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$, $A_i \in F^n$

$A = (A^1, A^2, \dots, A^n)$, $A^j \in F^m$

allora si definiscono

1) **rango per riga di A** come il rango di $A_1, \dots, A_m$

$$r_R(A) = r(A_1, \dots, A_m)$$

2) **rango per colonne di A** come il rango di $A^1, \dots, A^n$

$$r_C(A) = r(A^1, \dots, A^n)$$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(F)$$

$r_R(A) = r\big((1,0,1), (0,1,1)\big) =$ 1 NO! / 2 $\Rightarrow r_R(A) = 2$

$r_C(A) = r\big((1,0), (0,1), (1,1)\big) =$ 1 NO! / 2 / 3 NO! $\quad A^3 = A^1 + A^2 \quad \Rightarrow r_C(A) = 2$

PROPRIETÀ

1) Sia $A \in M_{m\times n}(F)$, allora $r_R(A) = r_C(A)$
2) $A \in M_n(F)$, allora $r(A) = r(A^t)$
3) se $A = O \Rightarrow r(A) = 0$
4) se $A = I_n \Rightarrow r(I_n) = n$

OSS

Dato che $r_R(A) = r_C(A)$, allora chiamiamo rango di A, il numero massimo di righe o di colonne lin. indip., $r(A)$

Es.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(F)$$

$r(M) \neq 4 \Rightarrow r(M) =$
- $\nearrow$ 1
- $\rightarrow$ 2 NO! $M_3 = -M_1$
- $\searrow$ 3 NO! $M_2 = 2M_1$

PROPOSIZIONE

Se $A \in M_{m\times n}(F)$ e $B \in M_{n\times p}(F)$ allora

$\rightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

COROLLARIO

Se $A \in GL_n(F)$ e $B \in M_{n\times p}(F)$ allora $r(AB) = r(B)$

TEOREMA

Sia $A \in M_n(F)$. Allora $A \in GL_n(F) \iff r(A) = n$ (è massimo)

DIM

$(\Rightarrow)$ Ip: $A \in GL_n(F)$; Th. $r(A) = n$

$A \in GL_n(F) \Rightarrow \exists A^{-1} \in GL_n(F) \mid AA^{-1} = I_n$

$\Rightarrow n = r(I_n) = r(A)$

$(\Leftarrow)$ Ip: $r(A) = n$; Th: $A \in GL_n(F)$

Se $r(A) = n = \{A_1, \dots, A_n\}$ sono lin. indip.

$\Rightarrow \{A_1, \dots, A_n\}$ è una base di F^n

Sia $B' = \{ e_1, e_2, \dots, e_m \}$ base canonica di F^m,

cioè $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{i-esima}}{1}, 0, \dots, 0)$

Costruiamo la matrice di passaggio da B a B'

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) = b_{11} A_1 + b_{12} A_2 + \dots + b_{1m} A_m =$$

$$= (b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} + \dots + b_{1m} a_{m1}, \dots, b_{11} a_{1m} + b_{12} a_{2m} + \dots + b_{1m} a_{mm})$$

$$= (b_{11} \; b_{12} \; \dots \; b_{1m}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) = (b_{21} \; b_{22} \; \dots \; b_{2m}) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$e_m = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Pertanto

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}}_{= B} \cdot A$$

$$BA = I_m \Rightarrow A^{-1} = B \Rightarrow A \in GL_m(F)$$

TEOREMA

Sia $A \in M_m(F)$. Allora $\det A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = m$

DIM.

$(\Leftarrow)$ I_p: $r(A) = m$; Th: $\det A \neq 0$

Se $r(A) = m \Rightarrow$ per il Teorema precedente,

$$A \in GL_m(F) \Rightarrow \exists A^{-1} \in GL_m(F) \mid AA^{-1} = I_m$$

Ma allora $1 = \det(I_m) = \det(AA^{-1}) \underset{\text{TEOREMA DI BINET}}{=} \det A \cdot \det(A^{-1})$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad e \quad \det A \neq 0$$

($\Leftarrow$) Ip: $\det A \neq 0$; Th: $r(A) = m$

Per assurdo sia $r(A) < m$ ossia le righe sono lin. dip. .

Poichè il determinante non cambia scambiando le righe, possiamo

supporre che sia A_1 scritta come comb. lin. delle altre

$$A_1 = c_2 A_2 + \dots + c_m A_m \;, \quad c_i \in F$$

$$\det A = \det(A_1 \; A_2 \dots A_m) =$$

$$= \det(c_2 A_2 + \dots + c_m A_m \;\; A_2 \dots A_m) =$$

$$\underset{\text{PROPRIETÀ DETERMINANTE}}{=} c_2 \underbrace{\det(A_2 \, A_2 \dots A_m)}_{=0} + c_3 \underbrace{\det(A_3 \, A_2 \, A_3 \dots A_m)}_{=0} + \dots + c_m \underbrace{\det(A_m \, A_2 \dots A_m)}_{=0}$$

$$\underset{\text{PROPRIETÀ DETERMINANTE}}{=} 0 \; \lightning$$

CRITERIO DI INVERTIBILITÀ

$$A \in GL_n(F) \iff \det A \neq 0$$

OSS

$$GL_n(F) = \{ A \in M_n(F) \mid \det A \neq 0 \}$$

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPPELLI

Sia $AX = B$ un sistema lineare con $A \in M_{m \times n}(F)$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Allora $AX = B$ è compatibili $\iff r(A|B) = r(A)$

DIM

Sia $r = r(A)$. Allora $r(A|B) = \begin{cases} r \\ \text{oppure} \\ r+1 \end{cases}$

poichè al più aggiungo una colonna ossia B

$AX = B$ è compatibile $\iff \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$ tale che soddisfa il sistema

$$\iff \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}\alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}\alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\iff \alpha A^1 + \alpha A^2 + \dots + \alpha A^n \;\; B$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_m A^m = B$$

$\Leftrightarrow$ B è comb. lineare delle colonne $A^1, A^2, \ldots, A^m$

$$\Leftrightarrow \quad \langle A^1, A^2, \ldots, A^m, B \rangle = \langle A^1, A^2, \ldots, A^m \rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \dim_F \langle A^1, \ldots, A^m, B \rangle = \dim_F \langle A^1, \ldots, A^m \rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad r(A|B) = r(A)$$

OSS.

$AX = B$, $A \in M_{m \times m}(F)$ e supponiamo il sistema compatibile $(r(A|B) = r(A))$. Allora

$$r(A) = \begin{cases} m \Rightarrow \exists! \text{ soluzione} \\ r < m \quad \exists\ \infty^{m-r} \text{ soluzioni} \end{cases}$$

Es.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$r(A|B) = r(A)$ perché $B = A^2$ $\Rightarrow$ il sistema è compatibile

$$r(A) = \begin{cases} 1 \text{ NO!} \\ 2 \\ 3 \text{ NO! } A^3 = -A^2 \end{cases} \Rightarrow r(A) = r(A|B) = 2$$

esistono $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{23}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + (y-z) = 1 \\ (y-z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y-1 \end{cases} \qquad S = \{ (0, y, y-1) \mid y \in \mathbb{R} \} \quad \infty^1 \text{ soluzioni.}$$

Es.

$$\begin{cases} 2x - y + 7z = 1 \\ 3x - 3y + 10z = 0 \\ 4x - 5y + 13z = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & -3 & 10 \\ 4 & -5 & 13 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Applichiamo GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 10 & 0 \\ 4 & -5 & 13 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 7/2 & 1/2 \\ 3 & -3 & 10 & 0 \\ 4 & -5 & 13 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 4 & -5 & 13 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2(-\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 4 & -5 & 13 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_1(-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}z = \frac{1}{2} \\ y + \frac{1}{3}z = 1 \\ 0 = 8 \quad \lightning \end{cases} \qquad (x,y,z) \in \emptyset$$

Es.

$$\begin{cases} x+y-z+2t = 0 \\ x+3y+2z = -1 \\ 2y+3z-2t = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z = -2t \\ x+3y+2z = 2y+3z-2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z = -2t \\ x+y-z = -2t \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo GAUSS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y-z+2t = 0 \\ y+\frac{3}{2}z - t = -\frac{1}{2} \\ 4t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z = 0 \\ y+\frac{3}{2}z = -\frac{1}{2} \\ t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z \\ t = 0 \end{cases}$$

REGOLA DI CRAMER

Sia $AX = B$ sistema lineare tale che

$$A \in M_m(F) \, , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \, , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{e } \det A \neq 0 .$$

Allora

$$x_j = \frac{\det \left(A^1 A^2 \dots \overset{j\text{-esima colonna}}{B} A^{j+1} \dots A^m \right)}{\det A}$$

OSS

$$\left.\begin{array}{l} A \in M_m(F) \, , \ \det A \neq 0 \Rightarrow r(A) = m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \shortparallel \\ A|B \in M_{m \times m+1}(F) \Rightarrow r(A|B) = m \end{array}\right\} \Rightarrow \exists ! \text{ soluzione}$$

Es.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{SARRUS}}{\det A} = 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= -5 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B)$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2 - 4(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2}{-5}$$

$$= \frac{-3 + \cancel{2} + 0 + 4 - 0 - \cancel{2}}{-5} = -\frac{1}{5}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{0 + 1 + 8 - 0 - 3 - 6}{-5} = 0$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{-3 + 0 + \cancel{4} + 1 - 0 - \cancel{4}}{-5} = \frac{2}{5}$$

Es.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\det A = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

LA PLACE SU A_3

$$= -1 \cdot 1 \cdot (3+1) - 1 \cdot (3-1) = -4 - 2 = -6 \neq 0$$

$(x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$

Per Rouché - Cappelli, poiché $r(A) = 3$ = massimo, il sistema ammette un'unica soluzione. Inoltre, poiché è omogenea, allora $x = y = z = 0$ è sicuramente soluzione. Pertanto $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ è l'unica soluzione del sistema

Es.

$$\begin{cases} 4x + y + z + w = 1 \\ x - y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + y + 3z + 5w = 0 \\ x + y - z - w = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} +$$

LAPLACE SULLA QUARTA RIGA

$$+ (-1) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$-(10 - 3 - 3 - (2 - 5 - 9)) + 40 - 6 + 3 - 4 - 5 + 36 - 20 - 6 + 1 + 2 - 5 + 12 - (-12 + 4 + 1 + 2 - 3 - 8) =$$

$$= -10 + 3 + 3 + 2 - 5 - 9 + 40 - 6 + 3 - 4 - 5 + 36 - 20 - 6 + 1 + 2 - 5 + 12 + 12 - 4 - 1 - 2 + 3 + 8 =$$

$$= -77 + 125 = 48$$

$r(A) = 4 = r(A|B)$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{48} = \frac{1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}}{48} = -\frac{10}{48} = -\frac{5}{24}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{48} = \frac{1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}{48} = \frac{97}{48}$$

INVERSA DI UNA MATRICE

Se $A \in GL_n(F)$, allora $A^{-1} = (x_{ij})_{ij}$ tali che

$$x_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det A_{ij}}{\det A}$$

dove A_{ij} è ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna

OSS

Poniamo $a_{ij}' = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ e lo chiamiamo cofattore o complemento algebrico di a_{ij}. Allora per la regola precedente, se $A' = (a_{ij}')$ risulta che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A'^{t}$$

Es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

LAPLACE SULLA PRIMA RIGA

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + 2 \cdot (-4-3) = 1 - 14 = -13 \neq 0 \Rightarrow A \in GL_n(F)$$

$$a_{11}' = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$a'_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$a'_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -7$$

$$a'_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$a'_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -5$$

$$a'_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$a'_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$a'_{32} \ (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$$

$$a'_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A')^t =$$

$$= -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -7 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/13 & -4/13 & 2/13 \\ -2/13 & 5/13 & 4/13 \\ 7/13 & 2/13 & -1/13 \end{pmatrix}$$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{CALCOLARE } A^{-1} \text{ con i 2 metodi}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{CALCOLARE } A^{-1} \text{ con i 2 metodi}$$

DEF

Sia $A \in M_{m \times n}(F)$. Si chiama minore di ordine p una sottomatrice quadrata $p \times p$ di A

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

sono minori di ordine 2

DEF

Un minore M della matrice A è detto nullo se $\det M = 0$ altrimenti è detto non nullo

TEOREMA

$A \in M_{m \times n}(F)$, allora $r(A)$ = massimo ordine dei minori non nulli di A

TEOREMA DEGLI ORLATI DI KRONACKER

Sia $A \in M_{m \times n}(F)$. Se esiste un minore M non nullo di A di ordine r e se tutti i minori che contengono M ($\equiv$ che orlano M) sono nulli, allora $r(A) = r$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det M_1 = 0$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det M_2 = 0$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det M_3 = -1+4-2-1 = 0 \quad \text{NO!}$$

Non esistono minori 3×3 non nulli $\Rightarrow r(A) \neq 3$

Usiamo il TEOREMA DEGLI ORLATI

Cerchiamo i minori di ordine 2 non nulli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det M_1' = 2+1 = 3 \neq 0$$

Per il Teorema degli Orlati, $r(A) = 2$

ESERCIZI

Thursday, November 18, 2021 10:50 AM

Es.

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y + \lambda^3 z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A) \leq 3 \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda^3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A|B) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$

$r(A|B) = 4 \iff \det(A|B) \neq 0 \iff (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) \neq 0 \iff \lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$

- $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$: $r(A|B) = 4 \neq r(A) \Rightarrow$ Il sistema non è compatibile

- $\lambda = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ poichè $A^1 = A^3$ ed A^1 e A^2 non sono multipli

TEOREMA ORLATI

$$A|B \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det M = 3 + 0 + 0 - 1 + 0 + 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A|B) = 3$

Quindi $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B) \Rightarrow$ Il sistema è incompatibile

- $\lambda = -2$

TEOREMA ORLATI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

$\det M = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det M = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

TEOREMA ORLATI

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det M' = 1-2-1-1 = -3 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A|B) = 0 \Rightarrow r(A|B) \leq 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(A|B) = 3$$

Il sistema è compatibile

Poichè $r(A) = r(A|B) = 3$, eliminiamo la 3ª equazione

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

USIAMO CRAMER MA SI PUÒ ANCHE SVOLGERE NORMALMENTE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -3$$

LA PLACE SULLA PRIMA COLONNA

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)}{-3} = \frac{1}{3}$$

LA PLACE SULLA SECONDA COLONNA

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot (1-1)}{-3} = 0$$

LA PLACE SULLA TERZA COLONNA

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot (1)}{-3} = -\frac{1}{3}$$