Vettori e numeri complessi

October 29, 2020

1 Vettori

Definiamo con il termine vettore un insieme ordinato di n numeri reali:

$$\boldsymbol{V} = (v_1, v_2 ..., v_n) \tag{1}$$

$$v_i \in \mathbb{R}$$

Ogni vettore può avere una semplice interpretazione geometrica potendo essere associato ad un punto in un sistema di coordinate cartesiane ad n dimensioni. In un sistema cartesiano di assi ortogonali la coordinata generica del vettore v_i rappresenta il valore del vettore $\boldsymbol{V}$ lungo la i-esima direzione. La i-esima direzione è identificata dal vettore unitario $\boldsymbol{u_i}$. Nel caso particolare in cui n=3 abbiamo:

$$\boldsymbol{u_1} = (1, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{u_2} = (0, 1, 0)$$

$$\boldsymbol{u_3} = (0, 0, 1)$$

Una notazione alternativa alla 1, per definire il vettore generico $\boldsymbol{V}$ è la seguente:

$$\boldsymbol{V} = v_1\boldsymbol{u_1} + v_2\boldsymbol{u_2} + ... + v_n\boldsymbol{u_n} = \sum_{i=1}^{n} v_i\boldsymbol{u_i}$$

Il vettore può essere visto come un insieme di *informazioni indipendenti*, non legate a priori da nessuna funzione. *Ciascun direzione veicola una informazione differente e indipendente dalle altre.* Il numero v_i codifica la *quantità* dell'informazione la cui *natura/qualità* è identificata univocamente dall'asse $\boldsymbol{u_i}$. Il concetto stesso di ortogonalità implica l'indipendenza concettuale dell'informazione codificata dai vettori unitari $\boldsymbol{u_i}$.

Un semplice esempio di vettore è la coppia di numeri reali che identifica un punto nel piano:

$$\boldsymbol{V_p} = (x, y) = x\boldsymbol{u_x} + y\boldsymbol{u_y}$$

E' possibile definire diverse operazioni algebriche tra vettori. La somma tra due vettori si ottiene semplicemente sommando le componenti con lo stesso indice. Il risultato è ancora un vettore:

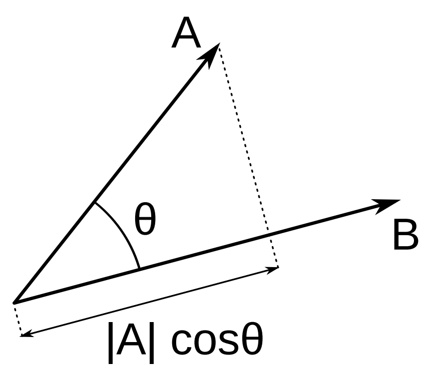
$$\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W} = (v_1 + w_1, v_2 + w_{2,...}, v_n + w_n) = \sum_{i=1}^{n} (v_i + w_i)\, \boldsymbol{u_i}$$

Il prodotto di un vettore per un numero reale a si ottiene molto semplicemente moltiplicando le componenti del vettore per a :

$$a\boldsymbol{V} = (av_1, av_2..., av_n)$$

Il prodotto scalare tra due vettori è un singolo numero reale che si ottiene sommano il prodotto delle componenti con lo stesso indice:

$$S = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$



Se il prodotto scalare S è nullo i due vettori $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ sono tra loro ortogonali. Un esempio particolare di vettori tra loro ortogonali sono i vettori unitari $\boldsymbol{u_i}$ che formano un sistema di riferimento cartesiano.

Il prodotto scalare di un vettore con se stesso è uno scalare il cui valore è pari al quadrato della lunghezza (o modulo) $|\boldsymbol{V}|$ del vettore:

$$|V|^2 = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

$$|\boldsymbol{V}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Un vettore è unitario se il suo modulo è pari a 1. I vettori u_i che costituiscono il sistema di riferimento cartesiano (o base ortonormale) sono casi particolari di vettori unitari:

$$u_i^2 = 1$$

Il prodotto scalare tra due vettori è pari al prodotto dei loro moduli per il coseno dell'angolo formato tra i due vettori:

$$S = |\boldsymbol{V}|\,|\boldsymbol{W}|\cos(\vartheta)$$

Il prodotto scalare è massimo quando i due vettori hanno la stessa direzione ($\vartheta = 0$) è minimo quando hanno direzioni opposte ($\vartheta = \pi$) ed è nullo quando sono ortogonali ($\vartheta = \pm{}^{\pi}/_{2}$)

Se due vettori rappresentano le coordinate di due punti nel piano, il modulo della differenza tra i due vettori è la distanza euclidea tra i due punti:

$$d_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (v_i - w_i)^2}$$

Le componenti di un vettore nel piano ($n = 2$) posso essere ricavate dal modulo del vettore e dall'angolo ϑ formato con l'asse x:

$$\boldsymbol{V} = (v_x, v_y)$$

$$v_x = |\boldsymbol{V}|\cos(\vartheta)$$

$$v_y = |\boldsymbol{V}|\sin(\vartheta)$$

$$\boldsymbol{V} = |\boldsymbol{V}|\left(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)\right)$$

Quindi, viceversa, l'angolo ϑ può essere ricavato dalle componenti v_x e v_y :

$$\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} = \tan(\vartheta) = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Il prodotto scalare di un vettore generico $\boldsymbol{V}$ per un vettore unitario generico $\boldsymbol{r}_i$ è un valore che definisce univocamente il valore del vettore $\boldsymbol{V}$ lungo la direzione generica $\boldsymbol{r}_i$

$$\boldsymbol{V}_{r_i} = \boldsymbol{r_i} \cdot \boldsymbol{V}$$

Se n vettori unitari $\boldsymbol{r}_i$ formano un sistema di riferimento alternativo (i.e. ruotato) rispetto alla base $\boldsymbol{u}_i$, gli n prodotti scalari formati dal vettore $\boldsymbol{V}$ con i vettori $\boldsymbol{r}_i$ costituiscono le componenti del vettore nel nuovo sistema di riferimento ruotato.

Se chiamiamo $\boldsymbol{M}$ una matrice le cui righe sono costituite dai vettori unitari $\boldsymbol{r}_i$, l'insieme degli N prodotti scalari costituiscono le componenti del vettore ruotato. Tale operazione è definita come il prodotto tra la matrice $\boldsymbol{M}$ e il vettore $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V_r} = \boldsymbol{MV}$$

$$\boldsymbol{V}_r = (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{V}, \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{V}, ..., \boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{V})$$

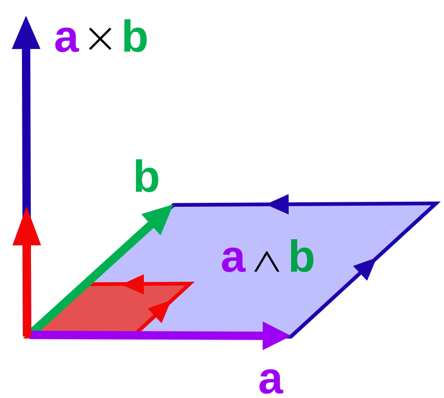
Un'altra importante operazione algebrica tra vettori è il prodotto vettoriale. Il prodotto vettoriale comunemente usato in fisica esiste soltanto in tre dimensioni. Il risultato è un vettore ortogonale ai vettori moltiplicati e il suo modulo è pari al modulo dei vettori moltiplicati per il seno dell'angolo tra loro formato. Il prodotto vettoriale è anti-commutativo:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}$$

$$\boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{Z} = (V_y W_z - V_z W_y)\,\boldsymbol{u}_x + (V_z W_x - V_x W_z)\,\boldsymbol{u}_y + (V_x W_y - V_y W_x)\,\boldsymbol{u}_z$$

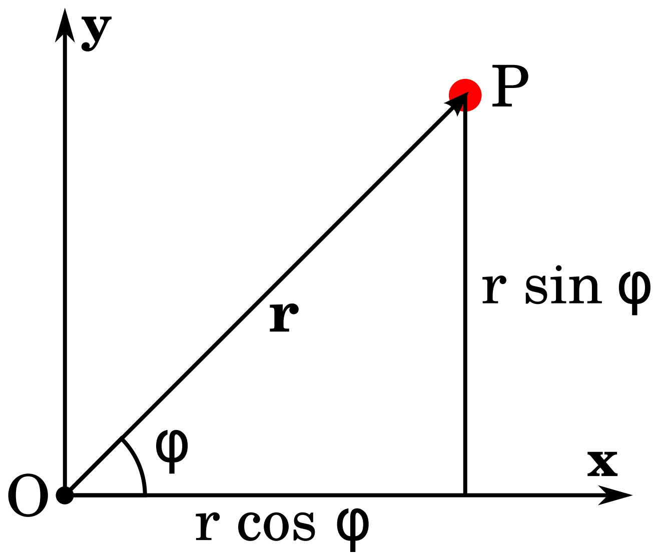
$$|\boldsymbol{Z}| = |\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}| = |\boldsymbol{V}|\,|\boldsymbol{W}| \sin(\vartheta)$$



1.1 Sistemi di coordinate

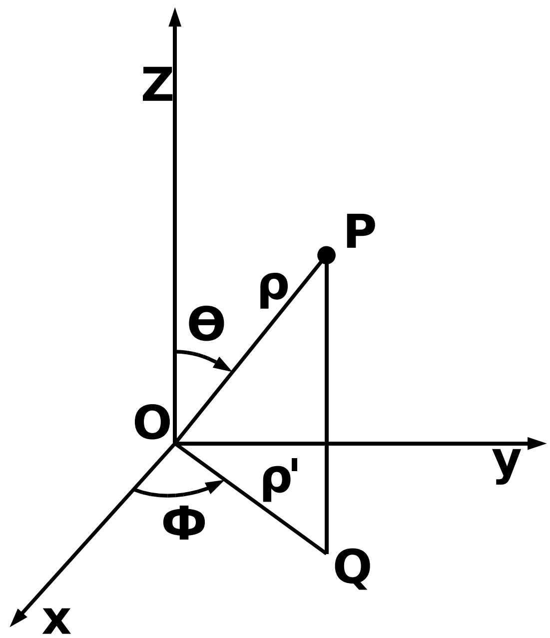
In due dimensioni al posto delle coordinate cartesiane possono essere utilizzate le coordinate polari. Il punto P è identificato dalla distanza r dall'origine e dall'angolo φ:

$$p = (r, \varphi)$$



In tre dimensioni si possono utilizzare le coordinate sferiche, in questo caso il punto p nello spazio è identificato dalla distanza dall'origine ρ e dai due angoli ϑ e φ:

$$p = (\rho, \vartheta, \varphi)$$



2 Numeri Complessi

Il numero complesso può esser visto come un particolare vettore del piano in un sistema di riferimento in cui il vettore unitario di riferimento l'ungo l'asse y ha quadrato negativo:

$$\boldsymbol{u}_x^2 = 1$$

$$\boldsymbol{u}_y^2 = -1$$

Per semplicità di notazione si usa la lettera i per identificare l'asse con quadrato negativo

$$i^2 = -1$$

Un «vettore» in questo particolare piano (piano complesso o di Argand-Gauss) viene genericamente indicato come una «somma» (intesa come *composizione*, non come somma vera e propria) di una parte reale (con quadrato positivo) e una parte immaginaria (con quadrato negativo):

$$z = a + ib$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a^2 \geq 0$$

$$b^2 \geq 0$$

$$(ib)^2 \leq 0$$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{zz^*}$$

Con z^*indichiamo il coniugato del numero complesso z. Il coniugato di un numero complesso si ottiene semplicemente cambiando di segno la parte immaginaria, i.e: se $z = a + ib$ allora $z^* = a - ib$.

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$z = \rho\left(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)\right) = \rho\exp(i\vartheta)$$

Si definisce forma euleriana di un numero complesso la codifica che utilizza la funzione esponenziale:

$$z = \rho\exp(i\vartheta)$$

Nel caso in cui $\rho = 1$ abbiamo un numero complesso unitario:

$$z = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta) = \exp(i\vartheta)$$

Considerando che

$$\cos(-\vartheta) = \cos(\vartheta)$$

$$\sin(-\vartheta) = -\sin(\vartheta)$$

possiamo scrivere:

$$z^* = \cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta) = \exp(-i\vartheta)$$

$$z + z^* = 2\cos(\vartheta) = \exp(i\vartheta) + \exp(-i\vartheta)$$

$$z - z^* = 2i\sin(\vartheta) = \exp(i\vartheta) - \exp(-i\vartheta)$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{\exp(i\vartheta) + \exp(-i\vartheta)}{2}$$

$$\sin(\vartheta) = \frac{\exp(i\vartheta) - \exp(-i\vartheta)}{2i}$$

$$\sin(\vartheta + \phi) = \sin(\vartheta)\cos(\phi) + \cos(\vartheta)\sin(\phi)$$

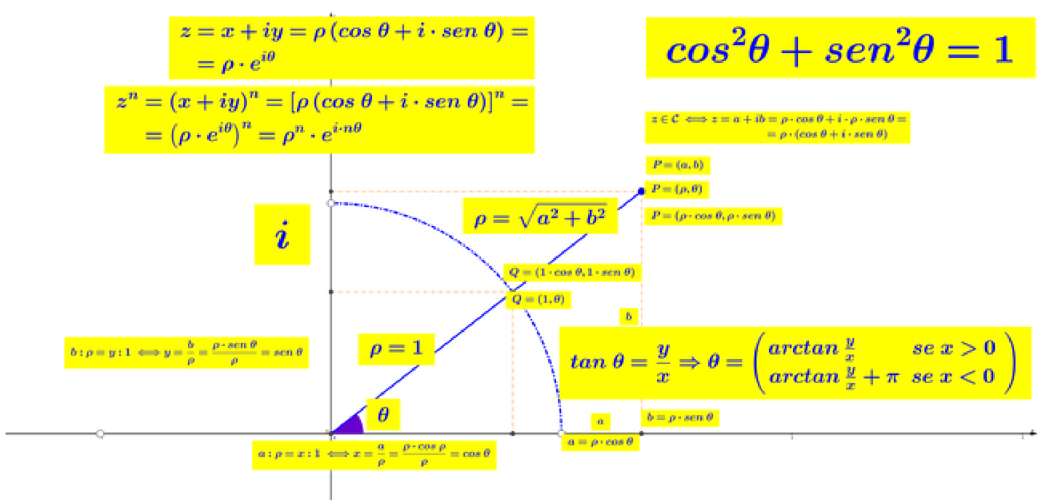
La forma euleriana di un numero complesso è particolarmente utile in fisica e in geometria perché permette di codificare la rotazione nel piano con una semplice moltiplicazione per un numero complesso unitario:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2 = 1$$

$$z_u = \alpha + i\beta = \exp(i\varphi)$$

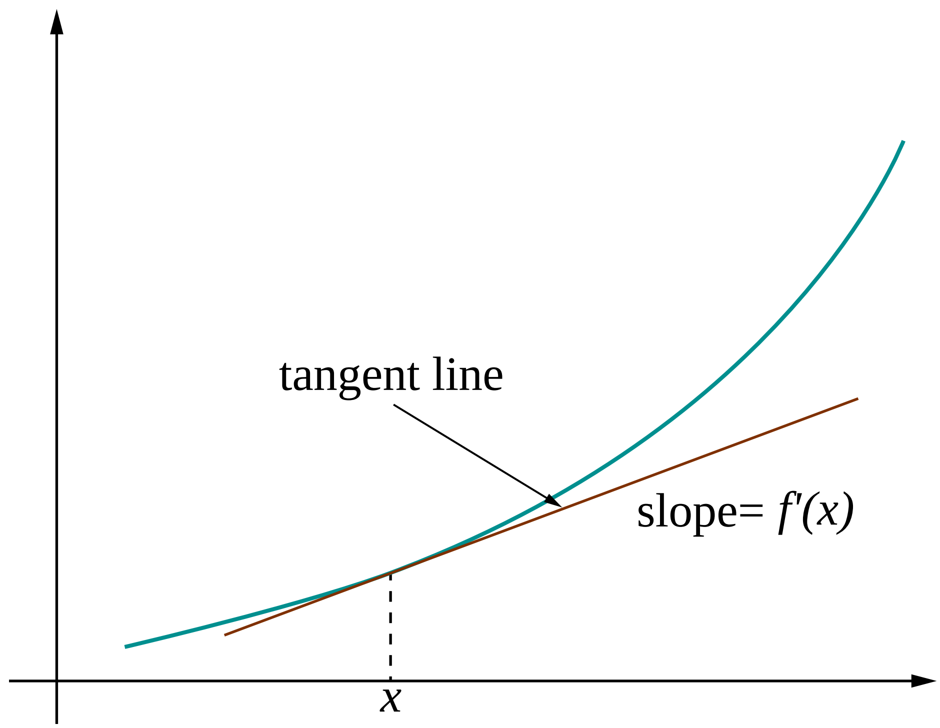
$$z = a + ib = \rho \exp(i\vartheta)$$

$$z_{ruotato} = z z_u = \rho \exp(i\vartheta)\exp(i\varphi) = \rho \exp(i(\vartheta + \varphi))$$



3 Derivata di una funzione:

La derivata $f' = \frac{df}{dx}$ di una funzione $f(x)$ di una variabile reale x è un'altra funzione che definisce in ogni punto la pendenza di f:



La derivata di una funzione in un punto è uguale alla pendenza della retta tangente. La pendenza della retta è uguale al suo coefficiente angolare k:

$$y = kx + c$$

$$k = \tan(\vartheta)$$

Il coefficiente angolare k è uguale al valore della tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse (asse x).

Per trovare la derivata di una funzione è sufficiente calcolare il valore dy dell'incremento della funzione $y(x)$ corrispondente ad un aumento arbitrariamente piccolo dx della variabile indipendente e calcolare quindi il loro rapporto.

Nel caso della retta ad esempio abbiamo:

$$dy = k(x + dx) + c - (kx + c) = kdx$$

$$\frac{dy}{dx} = k$$

Gli incrementi arbitrariamente piccoli come dx e dy sono spesso indicati con il termine *differenziale*.

Nel caso particolare della funzione $y = x^2$, considerando che il termine dx^2 può essere trascurato, essendo molto più piccolo del differenziale dx, possiamo scrivere:

$$y = x^2$$

$$dy = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + dx^2 + 2xdx - x^2 \simeq 2xdx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Più in generale si può dimostrare che la derivata di una funzione del tipo $y = x^n$ è la funzione
$y' = nx^{n-1}$. La derivata di un funzione moltiplicata per una costante è pari alla costante moltiplicata per la derivata della funzione:

$$y = kf(x)$$

$$y' = \frac{dkf(x)}{dx} = k\frac{df(x)}{dx}$$

La derivata della somma di due funzioni è pari alla somma delle derivate. La derivata di una costante è sempre nulla. La derivata del prodotto di due funzioni è pari alla derivata della prima funzione per la seconda non derivata sommata alla derivata della seconda funzione per la prima non derivata:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = f(x)\,\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\,\frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = fg' + gf'$$

La derivata di una funzione composta (funzione f di funzione g) è uguale al prodotto delle derivate:

$$y = f(g(x))$$

$$y' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

esempio:

$$g = kx$$

$$f(g(x)) = g^2 = (kx)^2$$

$$f' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = 2kxk = 2k^2x$$

Alcune derivate particolarmente importanti:

$$\frac{d}{dx}\left(kx + c\right) = k$$

$$\frac{d}{dx}\sin\left(x\right) = \cos\left(x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\cos\left(x\right) = -\sin\left(x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\exp\left(x\right) = \exp\left(x\right)$$

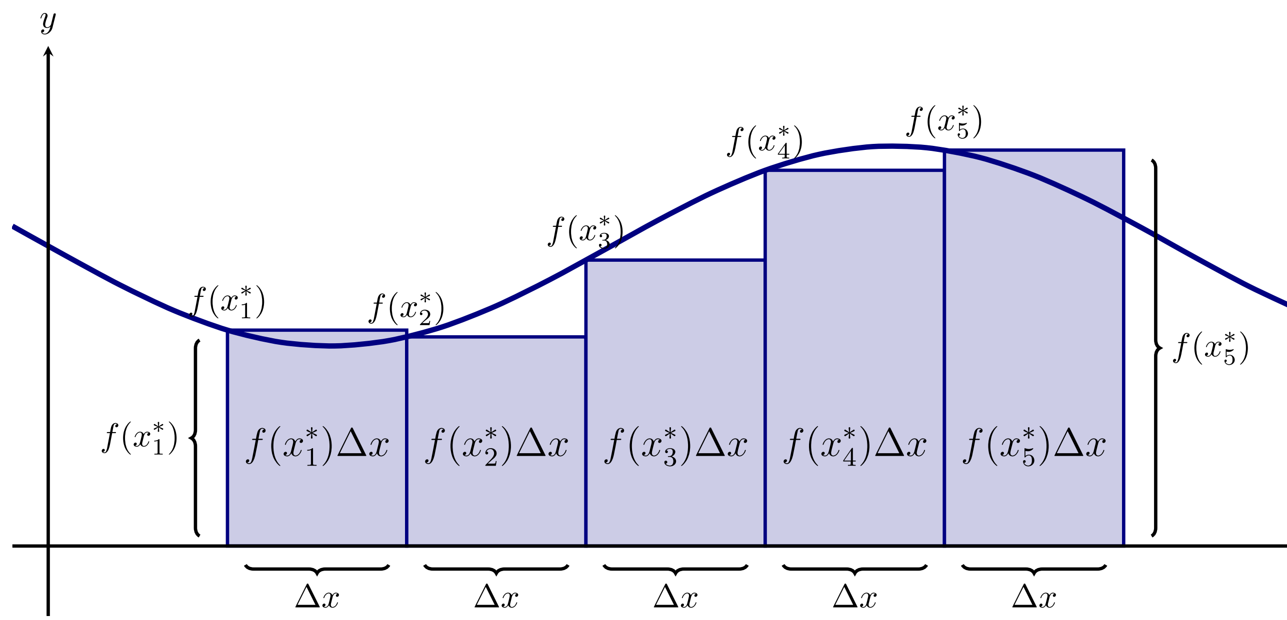
$$\frac{d}{dx}\ln\left(x\right) = \frac{1}{x}$$

4 Integrale di una funzione

L'integrale di una funzione di variabile reale $f\left(x\right)$ è *una funzione* $s\left(x\right)$ che definisce l'area sottesa dalla funzione $f\left(x\right)$:

$$s\left(x\right) \simeq \sum f\left(x\right)\Delta x$$

$$s\left(x\right) = \int f\left(x\right)dx$$



L'integrale definito di una funzione $f(x)$ è *un valore* pare all'area sottesa dalla curva in corrispondenza di un particolare intervallo ab della variabile indipendente x:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = s(b) - s(a)$$

La derivata dell'integrale di una funzione è la funzione stessa:

$$d(s(x)) = f(x)\,dx$$

$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{f(x)\,dx}{dx} = f(x)$$

L'operazione di integrazione può essere considerata quindi l'inverso dell'operazione di derivazione.

Esempi:

L'integrale di una funzione costante è una retta:

$$f(x) = k$$

$$\int f(x) = kx$$

L'integrale della funzione x^2 è $x^3/3$, infatti:

$$\frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2$$

v. anche `https://it.wikipedia.org/wiki/Tavola_degli_integrali_più_comuni`

5 Breve introduzione all'algebra di Clifford

L'algebra di Clifford è basata su due semplici regole definite sugli insiemi di n vettori di una base ortonormale. Se chiamiamo e_i i vettori della base ortonormale le due regole posso essere scritte nella seguente forma:

$$e_i^2 = \pm 1$$

$$e_i e_j = -e_j e_i \; i \neq j$$

Gli elementi di quest'algebra sono costituiti da tutti i possibili 2^n sottoinsiemi degli elementi della base ortonormale. Nel caso in cui n=3 abbiamo quindi $2^3 = 8$ sottoinsiemi («blade»):

bitmask	insieme	grado
000	1	Scalare
001	e_1	Vettore
010	e_2	Vettore
011	e_1e_2	Bivettore
100	e_3	Vettore
101	e_1e_3	Bivettore
110	e_2e_3	Bivettore
111	$e_1e_2e_3$	Pseudoscalare

Nell'algebra di Clifford reale ad n dimensioni un «multivettore» consiste nella composizione di non più di 2^n «blades», ciascuna dei quali ha come coefficiente un numero reale. Un vettore nello spazio 3d dell'algebra $Cl_{3,0}(\mathbb{R})$, dove tutti e tre gli elementi della base hanno quadrato positivo (i.e. $e_i^2 = 1$), potrà essere definito come nella tradizionale algebra vettoriale:

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$$

la moltiplicazione geometrica tra due vettori v e w potrà quindi essere scritta come composizione del prodotto scalare $v \cdot w$ e del prodotto esterno $v \wedge w$:

$$vw = (v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3)(w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3)$$

$$vw = (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) + (v_1w_2 - v_2w_1)e_1e_2 + (v_2w_3 - v_3w_2)e_2e_3 + (v_1w_3 - v_3w_1)e_1e_3$$

$$vw = v \cdot w + v \wedge w$$

prodotto scalare o prodotto interno (Scalare, grado 0):

$$v \cdot w = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$$

prodotto esterno (Bivettore, grado 2):

$$v \wedge w = (v_1 w_2 - v_2 w_1)\, e_1 e_2 + (v_2 w_3 - v_3 w_2)\, e_2 e_3 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)\, e_1 e_3$$

Se chiamiamo I lo pseudoscalare

$$I = e_1 e_2 e_3$$

possiamo definire la relazione tra prodotto vettoriale e prodotto esterno:

$$v \times w = -I\,(v \wedge w)$$

https://www.researchgate.net/publication/228955605_A_brief_introduction_to_Clifford_algebra
https://slideplayer.it/slide/2637098/

6 Esercizi Trigonometria

Calcolare la distanza e l'altezza di un palazzo avendo a disposizione un teodolite e una corda di 100m. Il teodolite è uno strumento ottico (binocolo) che permette di calcolare l'angolo formato dalla retta che passa per il punto di osservazione e l'oggetto osservato con il piano orizzontale.

Per risolvere il problema occorre scrivere le equazioni delle due rette che passano per due punti di osservazione distanti tra loro 100m. I due punti di osservazione e le coordinate nel piano orizzontale del punto osservato si trovano nella stessa retta.

$$\tan(\vartheta_1) = k_1$$

$$y_1(x) = k_1 x$$

$$\tan(\vartheta_2) = k_2$$

$$y_2(x) = k_2 x + c$$

Nel caso in cui il secondo punto di osservazione si trova ad una distanza di 100m dal primo punto, Per trovare il valore di c occorre imporre la condizione che per x=-100m $y_2 = 0$:

$$y_2(-100) = 0;$$

$$-100 k_2 + c = 0$$

$$c = 100 k_2$$

per trovare la distanza x_d occorre trovare il punto in cui le due rette si incontrano

$$y_1(x_d) = y_2(x_d)$$

$$k_1 x_d = k_2 x_d + c$$

$$x_d = \frac{c}{k_1 - k_2}$$

Per trovare l'altezza h basta trovare il valore di una delle due rette nel punto x_d:

$$h = y_1(x_d) = k_1 x_d = \frac{k_1 c}{k_1 - k_2}$$

7 Appunti di cinematica

La velocità, in una dimensione, lungo una particolare direzione x, è definita come la derivata rispetto al tempo della posizione di un punto lungo l'asse x:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

analogamente l'accelerazione è definita come la derivata rispetto al tempo della velocità:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Ne consegue che lo spazio percorso in funzione del tempo è l'integrale della velocità:

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

Lo spazio $\triangle s = s_2(t_2) - s_1(t_1)$ percorso in un intervallo di tempo $\triangle t = t_2 - t_1$ è l'integrale definito della velocità (area sottesa dalla funzione $v(t)$ nell'intervallo $\triangle t$) :

$$\triangle s = \int_{t_1}^{t2} v(t)\, dt$$

Lo spazio percorso $\triangle s$ è uguale al valore medio della funzione $v(t)$ nell'intervallo $\triangle t$:

$$\bar{v} = \frac{1}{\triangle t} \int_{t_1}^{t2} v(t)\, dt$$

$$\triangle s = \bar{v} \triangle t$$

Nel caso di un moto con accelerazione a costante il calcolo dell'area si riduce al calcolo dell'area del trapezio (semisomma delle basi v_1 e v_2 per l'altezza $\triangle t$) o del triangolo (se $v_1 = 0$):

$$v_2 = v_1 + a \triangle t$$

$$\bar{v} = \frac{(v_1 + v_2)}{2}$$

$$\triangle s = \bar{v} \triangle t = \frac{(v_1 + v_2)}{2} \triangle t$$

Per trovare l'accelerazione media a conoscendo velocità iniziale e finale e lo spazio percorso $\triangle s$ basta trovare il tempo $\triangle t$:

$$\triangle t = \frac{\triangle s}{\bar{v}}$$

$$a = \frac{\triangle v}{\triangle t}$$

8 Moto in due dimensioni

Nel caso del moto in due dimensioni la posizione è un vettore le cui componenti sono funzioni del tempo:

$$\boldsymbol{s}(t) = (x(t), y(t))$$

Ne consegue che anche la velocità $\boldsymbol{v}$ è un vettore:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{s}(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right) = (v_x(t), v_y(t))$$

In maniera più compatta, possiamo scrivere, considerando implicita la dipendenza del tempo:

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$$

Analogamente l'accelerazione è un vettore le cui componenti sono le derivate delle componenti del vettore velocità:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{v}(t) = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt} \right) = (a_x(t), a_y(t))$$

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$$

Un moto in due dimensioni può sempre essere quindi essere considerato come la composizione di due moti in una singola dimensione. Nello spazio tridimensionale basta aggiungere una terza coordinata $z(t)$ al vettore posizione.

Un caso particolare del moto in due dimensioni è il moto circolare di un corpo che ruota con velocità angolare costante in un orbita di raggio costante r.

$$\boldsymbol{s} = (x, y) = (r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) = r(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$$

La velocità angolare è definita come la derivata dell'angolo ϑ rispetto al tempo

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

se la velocità angolare è costante quindi l'angolo spazzato sarà uguale a ωt:

$$\vartheta = \omega t$$

$$\boldsymbol{s} = (x, y) = r(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

$$\boldsymbol{v} = r(-\omega\sin(\omega t), \omega\cos(\omega t)) = \omega r(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$$

$$\boldsymbol{a} = \omega^2 r(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)) = -\omega^2\boldsymbol{s}$$

considerando che $\sin^2 + \cos^2 = 1$,il modulo del vettore velocità sarà costante e uguale a ωr:

$$v = \omega r$$

mentre il modulo a del vettore accelerazione sarà uguale a $\omega^2 r$:

$$a = \omega^2 r$$

$$a = \omega v$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

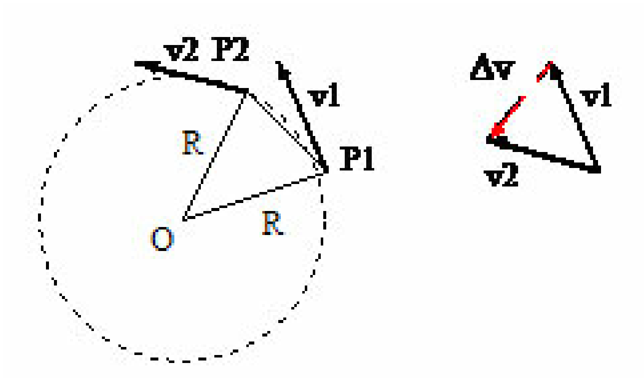
In alternativa, possiamo utilizzare un singolo numero complesso s per codificare una posizione in un punto del piano:

$$\boldsymbol{s} = x + iy = r(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) = r\exp(i\omega t)$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = i\omega r \exp\left(i\omega t\right) = i\omega \boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\omega^2 r \exp\left(i\omega t\right) = -\omega^2 \boldsymbol{s}$$

E' possibile ricavare il valore dell'accelerazione centripeta partendo da semplici osservazioni geometriche.



Per angoli $d\vartheta$ arbitrariamente piccoli la corda e l'arco possono essere considerati uguali e possiamo quinti sostituire il modulo della differenza dei vettori velocità con il differenziale dv

$$\triangle \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$$

$$\triangle \boldsymbol{v} \rightarrow dv$$

$$dv = v d\vartheta$$

dividendo ambo i membri per il differenziale dt otteniamo il valore del modulo dell'accelerazione centripeta:

$$a = \frac{dv}{dt} = v\frac{d\vartheta}{dt} = v\omega = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$