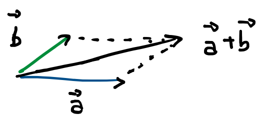
APPUNTI

Saturday, January 8, 2022 3:17 PM

SOMMA TRA VETTORI

$(+): V_0 \times V_0 \to V_0$ OPERAZIONE INTERNA

$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a}+\vec{b}$



1) COMMUTATIVA $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$
2) ASSOCIATIVA $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3) ELEMENTO NEUTRO $\exists\ \vec{o} \in V_0 : \vec{o}+\vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a} \in V_0$
4) ESISTENZA DELL'OPPOSTO $\forall \vec{a} \in V_0, \exists\ \vec{b} \in V_0 : \vec{a}+\vec{b} = \vec{o}$
$(\vec{b} = -\vec{a})$

PRODOTTO PER SCALARE

$(\cdot): \mathbb{R} \times V_0 \to V_0$ OPERAZIONE INTERNA A V_0

$(\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$

5) ASSOCIATIVA
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
MOLTIPLICAZIONE NUMERI REALI $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

$\alpha \cdot \vec{v}$
- DIREZIONE DI $\vec{v}$
- VERSO
  - ↗ STESSO DI $\vec{v}$ SE $\alpha > 0$
  - ↘ OPPOSTO DI $\vec{v}$ SE $\alpha < 0$
- MODULO $= |\alpha| \cdot$ MODULO DI $\vec{v}$

6) DISTRIBUTIVA IN $\mathbb{R}$
$(\alpha+\beta)\vec{v} = (\alpha \cdot \vec{v}) + (\beta \cdot \vec{v})$
7) DISTRIBUTIVA IN V_0
$\alpha(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \vec{w}$
8) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in V_0$

GRUPPO

UN INSIEME G DOTATO DI UNA OPERAZIONE INTERNA $G \times G \to G$
$(g,h) \mapsto g * h$

È DETTO GRUPPO SE

1) ASSOCIATIVA $\forall g, h, l \in G \quad (g*h)*l = g*(h*l)$
2) ELEMENTO NEUTRO $\exists\ 1_G \in G : \forall g \in G \quad 1_G * g = g * 1_G = g$
3) ESISTENZA DEL "SIMMETRICO" $\forall g \in G, \exists\ h \in G : g * h = 1_G$

SE INOLTRE $*$ È COMMUTATIVA ($\forall\, g, h \in G$, $g*h = h*g$) ALLORA G È DETTO GRUPPO ABELIANO

CAMPO

UN INSIEME F DOTATO DI DUE OPERAZIONI $+$ E $\cdot$ È DETTO CAMPO SE $(F, +)$ E $(F, \cdot)$ SONO GRUPPI ABELIANI

ES.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ SONO CAMPI

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ NON È UN CAMPO

PERCHÈ $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ NON È UN GRUPPO DATO CHE MANCANO GLI INVERSI IN $\mathbb{Z}$

DEFINIZIONE - SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Sia V a F-sp. vettoriale e sia $W \subseteq V$. Allora W è detto sottospazio vettoriale di V se W è spazio vettoriale su F rispetto alle stesse operazioni di V

DEFINIZIONE - COMBINAZIONE LINEARE

Siano $v_1, \dots, v_m \in V$. Allora una combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_m$ è un vettore del tipo:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in F$

DEFINIZIONE

Siano $v_1, \dots, v_m \in V$. Allora il sottospazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_m$ è:

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \mid \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F \}$$

DEFINIZIONE

Dato un campo F, una matrice $m \times m$ su F è una tabella di elementi di F con m righe ed m colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, m \end{array}$$

L'insieme di tali matrici è denotato con $M_{m \times m}(F)$

Il coefficiente a_{ij} è detto ENTRATA o COMPONENTE (i,j)-esima

DEFINIZIONE

Una matrice $A \in M_{m \times n}(F)$, indichiamo con A^j la j-esima colonna
Indichiamo con A_i la i-esima riga

DEFINIZIONE

Sia $A \in M_{m \times n}(F)$. Si definisce TRASPOSTA di A, e si scrive A^t,
la matrice ottenuta da A scambiando le righe e le colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE

Data una matrice QUADRATA $A \in M_n(F)$, la DIAGONALE PRINCIPALE di A è formata dagli elementi a_{ii}, $i = 1, \dots, n$

DEFINIZIONE

Una matrice quadrata $A \in M_n(F)$ è detta DIAGONALE se
$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matrice A è detta SIMMETRICA $A = A^t$

DEFINIZIONE

Si definisce GRUPPO GENERALE LINEARE di ordine n, l'insieme

$$GL_n(F) = \{ A \in M_n \in F \mid A \text{ è invertibile} \}$$

DIMOSTRAZIONE

Ma $\forall A, B \in GL_n(F)$, $\exists A^{-1}, B^{-1} \in M_n(F) \mid A A^{-1} = I_n$, $B \cdot B^{-1} = I_n$

Ma allora $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ infatti $(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1}) A^{-1} =$
$= (A I_n) A^{-1} = A A^{-1} = I_n \Rightarrow B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1} \Rightarrow AB$ è invertibile
$\Rightarrow AB \in GL_n(F)$

3) Elemento neutro $= I_n$

4) $\forall A \in GL_n(F)$, per costruzione $\exists A^{-1} \in GL_n(F) \Rightarrow A$ è invertibile $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ in $GL_n(F)$ esistono gli inversi

TEOREMA - SOMMA DI SOTTOSPAZI

Siano $V = F$-sp. vett. e U e W due sottosp. di V. Allora $U+W$ è un sottosp. vett. di V

DIMOSTRAZIONE

Dobbiamo dimostrare che:

1) $\forall x_1, x_2 \in U+W \Rightarrow x_1 + x_2 \in U+W$

2) $\forall x \in U+W$ e $\forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x \in U+W$

1) $\forall x_1, x_2 \in U+W \Rightarrow \exists u_1, u_2 \in U$ e $\exists w_1, w_2 \in W$ / $\begin{cases} x_1 = u_1 + w_1 \\ x_2 = u_2 + w_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) \overset{\text{commutativa di } +}{=} \underbrace{(u_1 + u_2)}_{= u' \in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{= w' \in W} = u' + w' \in U+W$$

perché U e W sono sp. vett.

2) $\forall x \in U+W$, $\exists u \in U$ e $\exists w \in W$ | $x = u + w$, $\forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x =$

$$= \alpha(u_1 + w_1) \underset{\text{DISTRIBUTIVA}}{=} \underbrace{\alpha u_1}_{\in U} + \underbrace{\alpha w_1}_{\in W} \in U+W$$

TEOREMA - INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI

Sia $V = F$-sp. vettoriale e siano U e W due sottosp. vettoriali di V. Allora $U \cap W$ è un sottosp. vettoriale di V

DIMOSTRAZIONE

1) $\forall v_1, v_2 \in U \cap W$, devo dim. che $v_1 + v_2 \in U \cap W$

Ma $v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} v_1, v_2 \in U \\ \text{e} \\ v_1, v_2 \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 \in U \\ v_1 + v_2 \in W \end{cases} \Rightarrow$

U e W sono sottospazi vettoriali di V

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$

2) $\forall \alpha \in F$ e $\forall v \in U \cap W$ devo dim. $\alpha v \in U \cap W$

Ma $v \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} v \in U \\ v \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha v \in U \\ \alpha v \in W \end{cases}$

U e W sono sottospazi vettoriali di V

U e W
sono sottospazi vettoriali di V

Pertanto $U \cap W$ è un sottosp. vettoriale di V

DEFINIZIONE

Siano $V = F$-sp. vett. e U e W due sottosp. vett. di V, allora U e W si dicono in SOMMA DIRETTA se

$$U \cap W = \{0\}$$

in tal caso scriveremo $U \oplus W$. Inoltre diremo che U e W sono SUPPLEMENTARI in V se

$$V = U \oplus W$$

TEOREMA

Siano $V = F$-sp. vett. e U e W due sottosp. vett. di V in somma diretta
Allora $\forall v \in U \oplus W$, v si scrive in modo unico come somma di un elemento di U ed uno di W

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo, supponiamo che

$\exists v \in U \oplus W \mid v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, dove

$u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ e $u_1 \neq u_2$ e $w_1 \neq w_2$

$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = -w_1 + w_2 \in W \cap U = \{0\}$

U e W sono in somma diretta

$\Rightarrow w_2 - w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$ $\lightning$

DEFINIZIONE

Sia $V = F$-sp. vett. e siano $v_1, \dots, v_x \in V$. Allora $v_1, \dots, v_x$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se

$$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_x \in F \text{ non tutti nulli} \mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_x v_x = 0$$

Si diranno LINEARMENTE INDIPENDENTI se la combinazione lineare

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_x v_x = 0$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_x = 0$

DEFINIZIONE

Sia $V = F$-sp. vett. e siano $v_1, \dots, v_m$, allora
$v_1, \dots, v_m$ sono generatori di V (generano V) se
$V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

DEFINIZIONE - BASE

Sia V = F-sp. vett. e sia $B = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ allora B è detta base di V su F se:

1) $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

2) $v_1, \dots, v_m$ sono lin. ind.

MATRICI E SISTEMI LINEARI

1) $A \in M_{m \times m}(F)$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

2) $A \in M_{m \times m}(F)$, A_i = i-esima riga , A^j = j-esima colonna

3) $M_{m \times 1}(F)$ vettori colonna , $M_{1 \times m}(F)$ vettore riga

4) $A \in M_{m \times m}(F)$, $A = (a_{ij})_{i,j} \Rightarrow A^t \; (a_{ji})_{i,j}$ TRASPOSTA

5) $A \in M_m(F)$, se $A = A^t \Rightarrow A$ è simmetrica

se $A = -A^t \Rightarrow A$ è antisimmetrica

6) Se $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_m(F)$ è t.c. $a_{ij} = 0$ $\forall \, i > j \Rightarrow A$ è detta TRIANGOLARE SUPERIORE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3m} \\ 0 & 0 & 0 \quad \ddots & \cdots \\ & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

7) Se $A = (a_{ij}) \in M_m(F)$ è t.c. $a_{ij} = 0$ $\forall \, i < j \Rightarrow A$ è detta TRIANGOLARE INFERIORE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

8) $A \in M_m(F)$ è detta **DIAGONALE** se $a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

9) $A \in M_m(F)$ è detta **SCALARE** se è diagonale e tutti gli elementi sulla diagonale coincidono

$$A = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA MATRICI

$A \in M_{m \times m}(F)$, $B \in M_{m \times t}(F) \Rightarrow$ È possibile calcolare $A \cdot B$

Se $t \neq m$ non si può calcolare $B \cdot A$

Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,t}}$ allora

$$A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j}$$