Es.

$$\begin{cases} x + y + (\lambda-1)z = 1 \\ 2x + \lambda y + \lambda z = \lambda \\ \lambda x + 2(\lambda-1)y + 2z = 4-\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2(\lambda-1) & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = -\lambda(\lambda-2)^2 \neq 0 \iff \lambda \neq 0 \text{ e } \lambda \neq 2 \iff r(A) = 3$$

- $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 2$ : $r(A) = 3$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 2 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2(\lambda-1) & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}, \quad r(A|B) = 3$$

CI SONO SOLO TRE RIGHE NELLA MATRICE E IL RANGO NON PUÒ ESSERE 4

Il sistema è compatibile

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 4-\lambda & 2(\lambda-1) & 2 \end{pmatrix}}{-\lambda(\lambda-2)^2}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 4-\lambda & 2 \end{pmatrix}}{-\lambda(\lambda-2)^2}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2(\lambda-1) & 4-\lambda \end{pmatrix}}{-\lambda(\lambda-2)^2}$$

- $\lambda = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0 \Rightarrow r(A) \leq 2$$

$A^2 = -A^3$ ed $A^1$ non è proporzionale ad $A^2$ $\Rightarrow r(A)=2$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\det M = 0}$$

$$\det M' = (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot (4+2) = -12 \neq 0 \Rightarrow r(A|B) = 3$$

Il sistema non è compatibile

$\lambda = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A|B) = 1$$

Il sistema è compatibile e avrà $\infty^{3-1}$ soluzioni $\equiv \infty^2$ soluzioni

$$x+y+z=1 \Rightarrow z = 1-x-y$$

$$S = \{ (x, y, 1-x-y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

APPLICAZIONI LINEARI

Thursday, November 18, 2021 11:38 AM

**OSS**

Sia $S$ un insieme e sia $V$ = F-sp. vett. Sia inoltre

$$\mathcal{F} = \{ f : S \to V \mid f \text{ applicazione} \}$$

$\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale definendo

$$(+): \forall f, g \in \mathcal{F}, \quad (f+g)(t) = f(t) + g(t), \quad \forall t \in S$$

$$(\cdot): \forall f \in \mathcal{F}, \forall \alpha \in F, \quad (\alpha f)(t) = \alpha f(t), \quad \forall t \in S$$

**OSS**

$id : A \to A$ applicazione identica se $id(a) = a$, $\forall a \in A$

$0 : A \to A$ applicazione nulla se $0(a) = 0_A$, $\forall a \in A$

**DEF.**

Siano $V$ e $W$ due F-sp. vett., allora un applicazione $f : V \to W$ è detta omomorfismo di spazi vettoriali (trasformazione lineare, applicazione lineare) se

1) $\forall v_1, v_2 \in V$, $f(\underbrace{v_1+v_2}_{\text{in } V}) = \underbrace{f(v_1) + f(v_2)}_{\text{IN } W}$

2) $\forall v \in V$ e $\forall \alpha \in F$, $f(\underbrace{\alpha \cdot v}_{\text{IN } V}) = \underbrace{\alpha \cdot f(v)}_{\text{IN } W}$

Es.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \mid f(x,y,z) = (x,y)$

1) $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$f(v_1+v_2) = f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$

$$= (x_1+x_2,\ y_1+y_2) = (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = f(v_1)+f(v_2)$$

2) $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ v = (x,y,z)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha v) = f(\alpha(x,y,z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x, \alpha y) = \alpha\overbrace{(x,y)}^{f(v)} = \alpha f(v)$$

Es.

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid f(X) = AX^t \text{ dove } X = (x,y,z) \text{ e } A = (1\ \ 2\ -1)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y,z) = x+2y-z$$

1) $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3,\ f(X_1+X_2) = A(X_1+X_2)^t = A(X_1{}^t+X_2{}^t) = AX_1{}^t + AX_2{}^t =$

$= f(X_1)+f(X_2)$

2) $\forall X \in \mathbb{R}^3$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha X) = A(\alpha X)^t = \alpha A X^t = \alpha f(X)$

Es.

Sia $V$ = $F$-sp. vett. e $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di $V$ su $F$. Allora

$f: V \to F^n \mid f(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dove $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ è un omomorfismo di sp. vett.

1) $\forall v_1, v_2 \in V,\ v_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad v_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \Rightarrow$

$$f(v_1+v_2) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n \beta_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i+\beta_i) e_i\right) =$$

$$= (\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = f(v_1)+f(v_2)$$

2) $\forall v \in V$ e $\forall \gamma \in F$, $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $f(\gamma v) = f\left(\gamma \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) =$

$$= f\left(\sum_{i=1}^n (\gamma \alpha_i) e_i\right) = (\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n) = \gamma f(v)$$

**OSS.**

$$\left.\begin{array}{l} id: V \to V \mid id(v) = v, \ \forall v \in V \\ 0: V \to W \mid 0(v) = 0_W, \ \forall v \in V \end{array}\right\} \text{omomorfismi di sp. vett.}$$

**OSS.**

Sia $\mathcal{L}(V, W) = \{ f: V \to W \mid f$ è omomorfismo di sp. vett. $\}$.

Allora $\mathcal{L}(V, W)$ è uno sp. vett. rispetto alle operazioni:

$$\begin{array}{lll} (+) & (f+g)(v) = f(v) + g(v) & \\ & & \forall v \in V \\ (\cdot) & (\alpha f)(v) = \alpha f(v) & \end{array}$$

**TEOREMA**

Siano V e W due F-sp. vett., e siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ base di V e $w_1, \dots, w_m$ vettori arbitrari di W. Allora esiste un unico omomorfismo

$$f: V \to W \mid f(v_i) = w_i .$$

Inoltre se $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ allora

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$$

**DEFINIZIONE**

Sia $f: V \to W$ omomorfismo di sp. vett. allora si definiscono

1) nucleo di $f$, $\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

2) immagine di $f$, $\operatorname{Im} f = f(V) = \{ f(v) \mid v \in V \}$

**OSSERVAZIONE**

1) $\operatorname{Ker} f$ è sottosp. vett. di V

a) $\forall v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f$, dimostriamo che $v_1+v_2 \in \operatorname{Ker} f$.

Ma se $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f$ allora $f(v_1) = f(v_2) = 0$.

Inoltre, $f(v_1+v_2) \underset{f \text{ è lineare}}{=} f(v_1) + f(v_2) \underset{v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f}{=} 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} f$

b) $\forall v \in \operatorname{Ker} f$ e $\forall \alpha \in F$, dimostriamo che $\alpha v \in \operatorname{Ker} f$.

Ma se $v \in \operatorname{Ker} f$ allora $f(v) = 0$.

Quindi $f(\alpha v) \underset{f \text{ lineare}}{=} \alpha f(v) \underset{v \in \operatorname{Ker} f}{=} \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha v \in \operatorname{Ker} f$

2) $\operatorname{Im} f$ è sottosp. vett. di $W$

a) $\forall v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f$, dimostriamo che $v_1 + v_2 \in \operatorname{Im} f$.

Ma se $v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, w_1, w_2 \in V \mid v_1 = f(w_1)$ e $v_2 = f(w_2)$.

Pertanto $v_1 + v_2 = f(w_1) + f(w_2) \underset{f \text{ lineare}}{=} f(w_1 + w_2) \Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Im} f$

b) $\forall v \in \operatorname{Im} f$ e $\forall \alpha \in F$, dimostrazione che $\alpha v \in \operatorname{Im} f$.

Ma se $v \in \operatorname{Im} f$, $\exists\, w \in V \mid v = f(w)$,

quindi $\alpha v = \alpha f(w) = f(\alpha w) \Rightarrow \alpha v \in \operatorname{Im} f$

## TEOREMA

Sia $f: V \to W$ un omomorfismo di sp. vett.

Sia inoltre $\{v_1, \dots, v_m\}$ base di $V$ su $F$. Allora

$$\mathrm{Im}\, f = \langle f(v_1), \dots, f(v_m) \rangle$$

Dim.

- $\langle f(v_1), \dots, f(v_m) \rangle \subseteq \mathrm{Im}\, f$ ovvio! per definizione

- $\mathrm{Im}\, f \subseteq \langle f(v_1), \dots, f(v_m) \rangle$

$\forall v \in \mathrm{Im} f,\ \exists w \in V \mid v = f(w)$

Ma $w \in V$ quindi $w$ si può scrivere come comb. lin. dei vettori della base di $V$, ossia

$$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F \mid w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

Pertanto $v = f(w) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) \underset{f \text{ lineare}}{=} \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_m f(v_m)$

$\Rightarrow v \in \langle f(v_1), \dots, f(v_m) \rangle$

Es.

$f : F^4 \to F^4 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, 0, 0)$ appl. lineare

$\mathrm{Ker}\, f = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4 \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0) \} =$

$= \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4 \mid (x_1, x_2, 0, 0) = (0,0,0,0) \} =$

$= \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4 \mid x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0$

$= \{ (0, 0, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in F \}$

$\dim_F \mathrm{Ker}\, f = 2$ $\qquad B_{\mathrm{Ker}\, f} = \{ (0,0,1,0), (0,0,0,1) \}$

$\mathrm{Im}\, f = \{ f(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4 \} =$

$= \{ (x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in F \}$

$\dim_F \operatorname{Im} f = 2 \qquad B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0)\}$

$\operatorname{Im} f = \langle f(v_1),\ f(v_2),\ f(v_3),\ f(v_4) \rangle$ dove $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $F^4$ su $F$

Scegliamo la base canonica: $v_1 = (1,0,0,0)$
$v_2 = (0,1,0,0)$
$v_3 = (0,0,1,0)$
$v_4 = (0,0,0,1)$

$f(1,0,0,0) = (1,0,0,0)$

$f(0,1,0,0) = (0,1,0,0)$

$f(0,0,1,0) = (0,0,0,0)$

$f(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$

I VETTORI NULLI NON POSSONO FORMARE UNA BASE

$\operatorname{Im} f = \langle (1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,0),\ (0,0,0,0) \rangle$

$= \langle (1,0,0,0),\ (0,1,0,0) \rangle$

Osservo che $\dim_F F^4 = \dim_F \operatorname{Ker} f + \dim_F \operatorname{Im} f$

$4 = 2 + 2$

Es.

$f: F^3 \to F^2 \mid f(x,y,z) = (x+y,\ y+z)$ è lineare

1) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in F^3 \mid f(x,y,z) = (0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) \in F^3 \mid (x+y,\ y+z) = (0,0)\}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} f\ \{(-y, y, -y) \mid y \in F\}$

$$\dim_F \operatorname{Ker} f = 1 \qquad B_{\operatorname{Ker} f} = \{(-1,1,-1)\}$$

2) $\operatorname{Im} f = \{ f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in F^3 \} =$

$$= \{ (\underbrace{x+y}_{\alpha}, \underbrace{y+z}_{\beta}) \mid x,y,z \in F \}$$

$$= \{ (\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in F \} = F^2 \Rightarrow f \text{ è suriettiva perché } F^2 = \operatorname{Im} f$$

$$\dim_F \operatorname{Im} f = 2 \qquad B_{\operatorname{Im} f} = \{ (1,0), (0,1) \}$$

$$\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3) \rangle$$

$v_1 = (1,0,0)$
$v_2 = (0,1,0)$
$v_3 = (0,0,1)$

$f(1,0,0) = (1,0)$

$f(0,1,0) = (1,1)$

$f(0,0,1) = (0,1)$

$\operatorname{Im} f = \langle (1,0), (1,1), (0,1) \rangle$ ← SONO GENERATORI MA NON SONO BASE PERCHÉ NON SONO LIN. DIP.

$\langle (1,0), (0,1) \rangle$

Es.

$f: M_2(F) \to F \mid f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d$ lineare

1) $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F) \mid f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F) \mid a+d = 0 \right\} =$$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F) \;\middle|\; d = -a \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in F \right\}$

$\dim_F \operatorname{Ker} f = 3 \qquad B_{\operatorname{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

2) $\operatorname{Im} f \subseteq F \Rightarrow \dim_F \operatorname{Im} f \leq \dim_F F = 1 \Rightarrow \dim_F \operatorname{Im} f = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

Ma se $\dim_F \operatorname{Im} f = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = 0 \Rightarrow f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F)$

$\Rightarrow f$ è l'omomorfismo nullo $\lightning$

Poichè in questo caso si avrebbe che $\operatorname{Ker} f = M_2(F)$ ma

$\dim_F \operatorname{Ker} f = 3$ e $\dim_F M_2(F) = 4 \Rightarrow \operatorname{Ker} f \neq M_2(F)$

Quindi $\dim_F \operatorname{Im} f = 1$

Ma allora $\operatorname{Im} f \subseteq F \Rightarrow \operatorname{Im} f = F$ e $B_{\operatorname{Im} f} = \{1\}$

Es.

$f: F^2 \to F^3 \mid f(x,y) = (x, x+y, y)$ lineare

1) $\operatorname{Ker} f = \{ (x,y) \in F^2 \mid f(x,y) = (0,0,0) \} =$

$= \{ (x,y) \in F^2 \mid (x, x+y, y) = (0,0,0) \}$

$\begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}, \; \dim_F \operatorname{Ker} f = 0$

2) $\operatorname{Im} f = \{ f(x,y) \mid (x,y) \in F^2 \} =$

$= \{ (x, x+y, y) \mid x, y \in F \}$

$\dim \operatorname{Im} f = 2 \qquad B_{\operatorname{Im} f} = \{ (1,1,0), (0,1,1) \}$

$$\dim_F \operatorname{Im} f = 2 \qquad B_{\operatorname{Im} f} = \{ (1,1,0), (0,1,1) \}$$

NOTIAMO CHE $\dim_F F^2 = \dim_F \operatorname{Ker} f + \dim_F \operatorname{Im} f$

$$2 = 0 + 2$$

PROPOSIZIONE

Sia $f : V \to W$ omomorfismo di spazi vettoriali.

Allora $f$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = 0$

DIM.

$(\Rightarrow)$ Ip: $f$ è iniettiva $\qquad$ Th: $\operatorname{Ker} f = 0$

Per assurdo $\exists\, w \in \operatorname{Ker} f$, $w \neq 0_W \Rightarrow f(w) = 0_W = f(0_V)$.

Ma $f$ è iniettiva $w = 0_W$ $\lightning$

$(\Leftarrow)$ Ip: $\operatorname{Ker} f = 0$ $\qquad$ Th: $f$ è iniettiva

Dobbiamo dimostrare che $\forall\, v_1, v_2 \in V$ se $f(v_1) = f(v_2)$ allora $v_1 = v_2$

Ma $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \underset{f \text{ LINEARE}}{\Rightarrow} f(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} f$

Però $\operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$

# TEOREMA DELLA DIMENSIONE

Sia $f: V \to W$ un omomorfismo di sp. vett. e sia $\dim_F V = m < +\infty$.

Allora risulta che $\dim_F V = \dim_F \ker f + \dim_F \operatorname{Im} f$

## DIM.

Se $f = 0$ non c'è nulla da dimostrare perchè in tal caso

$\ker f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} = V$

$\operatorname{Im} f = \{ f(v) \mid v \in V \} = \{0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m = \dim_F V = \underbrace{\dim_F \ker f}_{= m} + \underbrace{\dim_F \operatorname{Im} f}_{= 0}$$

Pertanto sia $f \neq 0 \Rightarrow \dim_F \ker f = t < m$. Sia allora

$B_{\ker f} = \{ v_1, \dots, v_t \}$ una base di $\ker f$ su $F$. Se dimostriamo

che $\dim_F \operatorname{Im} f = m - t$ abbiamo finito

Completiamo $B_{\ker f}$ ad una base di $V \Rightarrow$

$\Rightarrow B_V = \{ v_1, \dots, v_t, e_1, \dots e_{m-t} \}$ base di $V$ su $F$

Vogliamo dimostrare che $\{ f(e_1), \dots, f(e_{m-t}) \}$ è una base di $\operatorname{Im} f$

1) $f(e_1), \dots, f(e_{m-t})$ sono lin. indip.:

Si consideri la comb. lin. $\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_{m-t} f(e_{m-t}) = 0$

e dimo che $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-t} = 0$

Ma $\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_{m-t} f(e_{m-t}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{m-t} e_{m-t}) = 0$

f LINEARE

$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{m-t} e_{m-t} \in \ker f$, pertanto tale vettore può essere scritto come comb. lin. dei vettori di:

$B_{\ker f} \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_t \in F$

tali che:

$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{m-t} e_{m-t} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-t} e_{n-t} - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_t v_t = 0$$

questa è una comb. lin. nulla di vettori di $B_V$ che sono dunque lin. indip.

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-t} = \lambda_1 = \dots = \lambda_t = 0$$

2) $\mathrm{Im}\, f = \langle f(e_1), \dots, f(e_{n-t}) \rangle$ :

- $\langle f(e_1), \dots, f(e_{n-t}) \rangle \subseteq \mathrm{Im}\, f$ ovvia
- $\mathrm{Im}\, f \subseteq \langle f(e_1), \dots, f(e_{n-t}) \rangle$,

  $\forall\, v \in \mathrm{Im}\, f,\ \exists\, w \in V \mid v = f(w)$

Ma $w$ si può scrivere come comb. lin. dei vettori di $B_V$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{n-t} e_{n-t} \Rightarrow$ 　　$f$ LINEARE

$$\Rightarrow v = f(w) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{n-t} e_{n-t}) =$$

$$= \underbrace{\alpha_1 f(v_1)}_{=0} + \dots + \underbrace{\alpha_t f(v_t)}_{=0} + \beta_1 f(e_1) + \dots + \beta_{n-t} f(e_{n-t}) =$$

$v_1, \dots, v_t \in \mathrm{Ker}\, f$

$$= \beta_1 f(e_1) + \dots + \beta_{n-t} f(e_{n-t}) \Rightarrow v \in \langle f(e_1), \dots, f(e_{n-t}) \rangle$$

## DEF.

Un omomorfismo di sp. vett. $f: V \to W$ è detto isomorfismo se $f$ è biunivoco

$$V \cong W$$

## TEOREMA

$$V \cong W \iff \dim_F V = \dim_F W$$

## DIM.

$(\Rightarrow)$ Ip: $V \cong W$ ; Th: $\dim_F V = \dim_F W$

Esiste un isomorfismo $f: V \to W \Rightarrow f$ è iniettivo e suriettivo

Poichè $f$ è iniettivo $\Rightarrow \ker f = 0$ e $\dim_F \ker f = 0$

Inoltre $f$ è suriettivo $\Rightarrow \mathrm{Im}\, f = W \Rightarrow \dim_F \mathrm{Im}\, f = \dim_F W$

Per il teorema precedente

$$\dim_F V = \underbrace{\dim_F \ker f}_{=0} + \dim_F \mathrm{Im}\, f = \dim_F W$$

$O$

$(\Leftarrow)$ Ip: $\dim_F V = \dim_F W$ Th: $V \cong W$

Se $\dim_F V = \dim_F W = n$ allora una base di $V$ contiene lo stesso numero di elementi di una base di $W \Rightarrow$

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad B_W = \{w_1, \dots, w_n\}$$

Per un teorema precedente, $\exists!\ f: V \to W$ omomorfismo di sp. vett. tale che $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$

Ma allora $\mathrm{Im} f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle = \langle w_1, \dots, w_n \rangle = W$

$\Rightarrow f$ è suriettiva

Per il teorema precedente

$$\cancel{n} = \dim_F V = \dim_F \ker f + \dim_F \mathrm{Im} f = \dim_F \ker f + \dim_F W =$$

$$= \dim_F \ker f + \cancel{n} = \dim_F \ker f = 0 \Rightarrow \ker f = 0$$

$\Rightarrow f$ è iniettiva

$f$ è biunivoca $\Rightarrow f$ è isomorfismo, $V \cong W$

Es.

$$M_2(F) \cong F^4, \quad M_n(F) \cong F^{n^2}$$

$$F_2[x] \cong F^3$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \Leftrightarrow (a_0, a_1, a_2)$$

## MATRICE ASSOCIATA ad un OMOMORFISMO DI SP. VETT.

$f: V \to W$ omomorfismo di sp. vett.

Siano $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V$ e $B_W \{w_1, \dots, w_m\}$ base di $W$.

Calcoliamo le immagini di $v_1, \dots, v_n$ rispetto ad $f$ e scriviamo tali immagini come comb. lin. dei vettori $w_1, \dots, w_m$.

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$$

$\vdots$

$f(v_m) = a_{1m} w_1 + a_{2m} w_2 + \dots + a_{mm} w_m$

Costruiamo la matrice $M_f$ mettendo per colonna le componenti di ogni $f(v_i)$

$$M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{pmatrix} \in M_{m \times m}(F)$$

DEF.

$M_f$ è detta matrice associata ad $f$ rispetto alle basi $B_V$ e $B_W$

OSS.

$M_f$ non è unica!

Es.

$f: F^3 \to F^2 \mid f(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y+z)$

1) Det. $M_f$ rispetto alle basi canoniche di $F^3$ e di $F^2$

2) Det. $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$

3) Det. $\overline{M}_f$ rispetto alle basi

$\overline{B}_{F^3} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

$\overline{B}_{F^2} = \{(1,1), (0,-1)\}$

SOL. 1) $B_{F^3} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$B_{F^2} = \{(1,0), (0,1)\}$

$f(1,0,0) = (1,1) = 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$

$f(0,1,0) = (1,-1) = 1 \cdot (1,0) - 1 \cdot (0,1)$ $\qquad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$f(0,0,1) = (1,1) = 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$

2) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in F^3 \mid f(x,y,z) = (0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) \in F^3 \mid (x+y+z,\ x-y-z) = (0,0)\}$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+2z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$$

SOMMANDO

SOTTRAENDO

$\ker f = \{(x,0,-x) \mid x \in F\}$

$\dim_F \ker f = 1 \qquad B_{\ker f} = \{(1,0,-1)\}$

$\dim_F F^3 = \dim_F \ker f + \dim_F \operatorname{Im} f$

SONO GLI STESSI

$3 = 1 + \dim_F \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim_F \operatorname{Im} f = 2 = \dim_F F^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = F^2 \Rightarrow f$ è suriettiva

DOMANDA: È POSSIBILE COSTRUIRE UN OMOMORFISMO DI SP. VETT. INIETTIVO TRA $F^3$ E $F^2$?

Supponiamo che $f: F^3 \to F^2$ sia iniettiva:

$3 = \dim_F F^3 = \dim_F \ker f + \dim_F \operatorname{Im} f = \dim_F \operatorname{Im} f \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_F \operatorname{Im} f = 3$ $\lightning$ perchè $\dim_F \operatorname{Im} f \leq \dim_F F^2 = 2$

3)

$f(1,1,1) = (3,1) = 3 \cdot (1,1) + 2\,(0,-1)$

$f(1,1,0) = (2,0) = 2 \cdot (1,1) + 2\,(0,-1)$

$f(1,0,0) = (1,1) = 1 \cdot (1,1) + 0\,(0,-1)$

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE

Siano $U$ e $W$ due sp. vett. e sia

$f: U \to W$ omomorfismo di sp. vett.

Siano $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ e $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi di $V$ e $W$.

Allora se $\forall v \in V$, $v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$, $x_i \in F$ allora [illegible] $v \in V$, $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $x_i \in F$ [illegible]

risulta che $f(v) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$ con

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M_f \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= X} \Rightarrow Y = M_f X$$

Es.

$f : F^3 \to F^2 \qquad f(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y+z)$

$B_{F^3},\ B_{F^2} \to M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\overline{B}_{F^3},\ \overline{B}_{F^2} \to \overline{M}_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$v = (1\ 2\ 3) \qquad f(v) = y_1(1,0) + y_2(0,1)$

$y_1$ e $y_2$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$

$f(1,2,3) = 6(1,0) + 2(0,1) = (6,0) + (0,2) = (6,2)$

$v = (1,2,3) = 3(1,1,1) - 1(1,1,0) - 1(1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \leftarrow \neq f(v)$$

$f(v) = f(1,2,3) = 6 \cdot (1,1) + 4(0,-1) = (6,6) + (0,-4) = (6,2)$

**PROPOSIZIONE**:

Sia $f: V \to W$ omomorfismo di spazi vettoriali e siano $B_V$ e $B_W$ due basi di $V$ e $W$, rispettivamente. Sia inoltre $M_f$ la matrice associata ad $f$ rispetto a $B_V$ e $B_W$. Se $\overline{B_V}$ e $\overline{B_W}$ sono due nuove basi di $V$ e $W$ e se $\overline{M_f}$ è la matrice associata a $f$ rispetto a $\overline{B_V}$ e $\overline{B_W}$, allora:

$$\overline{M_f} = C^{-1} M_f A$$

dove $C = M_{\overline{B_W} \to B_W}$ e $A = M_{\overline{B_V} \to B_V}$

**ES.**

$$f: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x] \mid f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b+c)x + dx^2$$

1) $f$ è omomorfismo di sp. vett.:

$$\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} w & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

dobbiamo dimostrare che $f(A+B) = f(A) + f(B)$

Ma $f(A+B) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} a+w & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$

$= (a+w) + ((b+y)+(c+z))x + (d+t)x^2$

$f(A) + f(B) = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} w & y \\ z & t \end{pmatrix} =$

$= a + (b+c)x + dx^2 + w + (y+z)x + tx^2 =$

$= (a+w) + (b+c+y+z)x + (d+t)x^2$

$\Rightarrow f(A+B) = f(A) + f(B)$

Inoltre $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

dobbiamo dimostrare che $f(\alpha A) = \alpha f(A)$

Ma $f(\alpha A) = f\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} =$

$= \alpha a + (\alpha b + \alpha c)x + \alpha d x^2 =$

$= \alpha(a + (b+c)x + dx^2) = \alpha f(A)$

2) Costruire $M_f$ rispetto alle basi canoniche di $M_2(\mathbb{R})$ ed $\mathbb{R}_2[x]$

$$B_{M_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{ 1, x, x^2 \}$$

- $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$
- $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$
- $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$
- $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a + (b+c)x + dx^2 = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ d = 0 \end{cases} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f = 1 \quad e \quad B_{\operatorname{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per calcolare Ker f è sufficiente moltiplicare $M_f$ per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ e porre $= 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y+z \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases} \quad \operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-y \\ t=0 \end{cases} \qquad \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} \middle| \; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} \ker f + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f \Rightarrow 4 = 1 + \dim_{F} \operatorname{Im} f$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[x] \text{ ed } f \text{ è suriettiva}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = r(M_f) = 3$$

numero di colonne di $M_f$

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker f = 4 - r(M_f) = 1$$

3) Scrivere $\bar{M}_f$ rispetto alle basi di $\bar{B}_{M_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\bar{B}_{\mathbb{R}_2[x]} = \{ 1, 1+x, 1+x+x^2 \}$$

- $f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2)$
- $f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1+x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2)$
- $f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1+2x = -1 \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2)$
- $f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1+2x+x^2 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (1+x) + 1 \cdot (1+x+x^2)$

$$\bar{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(\bar{M}_f) = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \ker f = 1$$

$$\bar{M}_f = C^{-1} M_f A, \quad \text{dove} \quad C = M_{\bar{B}_{\mathbb{R}_2[x]} \to B_{\mathbb{R}_2[x]}}$$

$$A = M_{\bar{B}_{M_2} \to B_{M_2}}$$

$$\bar{B}_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\} \qquad B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$1+x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$1+x+x^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2$

$$\overline{B}_{M_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{M_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertire C: 1) Calcolare $C^{-1}$ (regola di Gauss o complementi algebrici)

2) $C^{-1} = M_{B_{\mathbb{R}_2[x]} \to \overline{B}_{\mathbb{R}_2[x]}}$

$B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$ $\overline{B}_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$

$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2)$

$x = -1 \cdot 1 + 1(1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2)$

$x^2 = 0 \cdot 1 + -1(1+x) + 1(1+x+x^2)$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_f} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

DEF.

Un omomorfismo è un endomorfismo se dominio e codominio coincidono:

$$f : V \to V$$

OSS.

$f \in End(V)$ allora $M_f \in M_n(\mathbb{F})$ dove $n = \dim_{\mathbb{F}} V$

$$\overline{M}_f = A^{-1} M_f A$$

Es.

$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \qquad f(a + bx + cx^2) = bx + c$

1) Det. $M_f$ rispetto alla base canonica

2) Det. $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$

3) È vero che $\mathbb{R}_2[x] = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ ?

4) Det $\overline{M}_f$ rispetto a $\overline{B} = \{1, 1+x, x+x^2\}$

Sol. 1) $B = \{1, x, x^2\}$

$f(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$f(x) = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$f(x^2) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

2) $r(M_f) = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f, \qquad \dim_{\mathbb{R}} \ker f = 1.$

Inoltre $x^2 \in \ker f \Rightarrow \ker f = \langle x^2 \rangle = \{c x^2 \mid c \in \mathbb{R}\}$ e

$B_{\ker f} = \{x^2\}$

$\operatorname{Im} f = \langle f(1), f(x), f(x^2) \rangle = \langle 1, x, 0 \rangle = \langle 1, x \rangle =$

$= \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad B_{\operatorname{Im} f} = \{1, x\}$

3) $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ sono in somma diretta se $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

Ma poiché $\ker f = \langle x^2 \rangle$, $\operatorname{Im} f = \langle 1, x \rangle \Rightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

quindi $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ sono in somma diretta

$$\dim_{\mathbb{R}} (\ker f \oplus \operatorname{Im} f) = \dim_{\mathbb{R}} \ker f + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 1 + 2 = 3$$

$$\ker f \oplus \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}_2[x]$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}_2[x] = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$$

4) $\overline{B} = \{1, 1+x, x+x^2\}$

$f(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2)$

$f(1+x) = 1+x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2)$

$f(x+x^2) = x = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (1+x) \cdot 0 \cdot (x+x^2)$

$$\overline{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(\overline{M}_f) = 2$$

$\overline{M}_f = A^{-1} M_f A$, dove $A = M_{\overline{B} \to B}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \\ 1+x \\ x+x^2 \end{matrix}$$

$\det A = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot (1-0) = 1$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = (A')^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a'_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \end{pmatrix} = 1$

$$a'_{11} = \frac{(-1)^{1+1}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$a_{12}' = \frac{(-1)^{1+2}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$a'_{13} = \frac{(-1)^{1+3}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a'_{21} = \frac{(-1)^{2+1}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$a'_{22} = \frac{(-1)^{2+2}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$a'_{23} = \frac{(-1)^{2+3}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a'_{31} = \frac{(-1)^{3+1}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$a'_{32} = \frac{(-1)^{3+2}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$a'_{33} = \frac{(-1)^{3+3}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\overline{M}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_f} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DEF.

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di sp. vett. Se $v \in V, v \neq 0$ allora $v$ è detto autovettore di $f$ se

$$\exists\, \alpha \in F \mid f(v) = \alpha v$$

In tal caso lo scalare $\alpha$ è detto autovalore relativo all'autovettore $v$

DEF.

L'insieme degli autovalori di $f$ è detto spettro di $f$

OSS.

1) Ogni autovettore è associato ad un solo autovalore, difatti se $v \in V$, $v \neq 0$, è autovettore associato a due autovalori $\lambda_1$ e $\lambda_2$ differenti, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $f(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$.
Ma $v \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ ↯

2) Se $v$ è autovettore associato all'autovalore $\lambda$, allora $\forall\, \alpha \in F$, $\alpha v$ è ancora un autovettore associato a $\lambda$,
difatti

$$f(\alpha v) \underset{f \text{ è lineare}}{=} \alpha f(v) \underset{v \text{ autovettore}}{=} \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v) \Rightarrow \alpha v \text{ è autovettore di } f$$

DEF.

L'insieme $V_\lambda = \{ v \in V \mid v \text{ è autovettore associato a } \lambda \}$ è detto autospazio relativo all'autovalore $\lambda$

PROPOSIZIONE

$V_\lambda \cup \{0_V\}$ è un sottospazio vettoriale di $V$

DIM.

Dim. che $V_\lambda \cup \{0_V\}$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare

1) $\forall\, v_1, v_2 \in V_\lambda$, $f(v_1) = \lambda v_1$ ed $f(v_2) = \lambda v_2$.

Ma $f(v_1+v_2) \underset{\uparrow}{=} f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1+v_2) \Rightarrow v_1+v_2 \in V_\lambda$

f lineare

2) $\forall\, v \in V_\lambda$ e $\forall\, \alpha \in F$, $f(v) = \lambda v$.

Ma $f(\alpha v) \underset{\nearrow}{=} \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v) \Rightarrow \alpha v \in V_\lambda$

f lineare

Es.

$id: V \to V \mid id(v) = v$, $\forall\, v \in V$

$id(v) = v = \underset{\substack{\shortparallel \\ \lambda}}{1} \cdot v \Rightarrow$ ogni vettore di $V$ non nullo è autovettore relativo

all'unico autovalore $\lambda = 1 \Rightarrow V_1 = V$

Es.

$0: V \to V \mid 0(v) = 0_V$, $\forall\, v \in V$

$0(v) = 0_V = \underset{\substack{\shortparallel \\ \lambda}}{0_F} \cdot v$, $\forall\, v \in V \Rightarrow$ ogni vettore di $V$ non nullo è

autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 0 \Rightarrow V_0 = V$

OSS.

$\ker f = V_0$

DIM.

$\forall\, v \in V$, $v \in \ker f \iff f(v) = 0 \iff f(v) = 0 \cdot v \iff$

$0$ è autovalore relativo a $v \iff v \in V_0$

OSS. Gli autospazi sono una generalizzazione del nucleo.

Difatti,

$v \in V_\lambda \iff f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0$

$\Leftrightarrow \quad f(v) = \lambda\, id(v) = 0_V \quad \Leftrightarrow$

$(f - \lambda\, id)(v) = 0_V \quad \Leftrightarrow \quad v \in \ker(f - id)$

OSS.

Se $0$ è autovalore di $f \Rightarrow$

$\exists\, V_0 = \ker f \neq \{0\} \Rightarrow f$ non è iniettiva $\Leftrightarrow$ $f$ non è invertibile

Es.

$V = F_2[x] \qquad f: V \to V \mid f(ax^2+bx+c) = bx+c$

$f(ax^2+bx+c) = \lambda(ax^2+bx+c) \Rightarrow bx+c = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda a = 0 \\ \lambda b = b \\ \lambda c = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda a = 0 \\ (\lambda-1)b = 0 \\ (\lambda-1)c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{opp.} \\ a = 0 \end{cases}$$

1) se $\lambda = 0 \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow ax^2$ è autovettore relativo a $\lambda = 0$

$V_0 = \{ax^2 \mid a \in F\}$

2) se $\lambda \neq 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\lambda-1)b = 0 \\ (\lambda-1)c = \end{cases}$

- se $\lambda = 1 \Rightarrow$ la seconda equazione è sempre verificata

$\Rightarrow bx+c$ è autovettore relativo a $\lambda = 1$

$V_1 = \{bx+c \mid b, c \in F\}$

- se $b = 0 \Rightarrow (\lambda-1)c = 0$ ma $c \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$ ricadiamo nel caso precedente

$B_{V_0} = \{x^2\} \qquad B_{V_1} = \{1, x\}$

unendo le basi otteniamo la base canonica di $F_2[x]$

$B_{V_0} \cup B_{V_1} = \{1, x, x^2\}$

$$f(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1 \cdot 1$$
$$f(x) = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1 \cdot x \qquad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$f(x^2) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^2$$

PROPOSIZIONE

Sia $f: V \to V$ endomorfismo e siano $v_1, \dots, v_k$ autovettori relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distinti, $f(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall\, i = 1, \dots, k$

Allora $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip.

DIM.

Dimostriamo la proposizione solo per $k=2$, quindi $v_1$ e $v_2$ sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1$ e $\lambda_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Sia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \ ^{(1)}$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in F$

$\Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(0) = 0$

Ma $f$ è lineare, pertanto $\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = 0$

Inoltre
$$\begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0 \ ^{(2)}$.

Moltiplico la (1) per $-\lambda_1$ e sommo il risultato a (2)

$$\begin{cases} -\alpha_1 \lambda_1 v_1 - \alpha_2 \lambda_1 v_2 = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{Ma } v_2 \neq 0 \Rightarrow$$
$$\overline{\qquad \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0 \qquad}$$

$\Rightarrow \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0$.

Se $\alpha_2 = 0$ abbiamo finito perchè in questo caso

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 = 0$ ma $v_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Se $\alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1$ ↯

PROPOSIZIONE

Sia $f: V \to V$ endomorfismo e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori di $f$ distinti, allora $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta

Dim.

$k=2 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$, dobbiamo dim. che $V_{\lambda_1}$ è in somma diretta con $V_{\lambda_2}$.

Per assurdo, sia $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ e $v \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} v \in V_{\lambda_1} \Rightarrow f(v) = \lambda_1 v \\ v \in V_{\lambda_2} \Rightarrow f(v) = \lambda_2 v \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$.

Ma $v \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ ↯

[ Come calcolare gli autovalori ?

$f: V \to V$ endomorfismo e $B = \{ e_1, \dots, e_n \}$ base di $V$ su $F$.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrice associata ad $f$ rispetto a $B$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad | \; \forall v \in V, \; v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Supponiamo che $v$ sia autovettore relativo all'autovalore $\lambda$:

$$\begin{cases} f(v) = \lambda v \\ f(v) = AX \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \lambda X \\ Y = AX \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda X = AX \Rightarrow AX - \lambda X = 0$$

$$\Rightarrow AX - \lambda I_m \cdot X = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I_m) X = 0 \quad \text{ossia}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mm}-\lambda \end{pmatrix} = A - \lambda I_m$$

$(A - \lambda I_m) X = 0$ questo è un sistema lineare omogeneo con $m$ incognite ed $m$ equazioni.

Affinché esistano soluzioni non nulle (ossia autovettori e autovalori) è necessario che $r(A - \lambda I_m) < m$ ossia che $\det(A - \lambda I_m) = 0$

DEF.

Sia $A$ matrice associata ad un endomorfismo $f$. Si chiama polinomio caratteristico il polinomio

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_m)$$

OSS.

$\lambda$ è autovalore di $f \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_m) = 0 \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda$ è radice del polinomio caratteristico

Equazione caratteristica: $P_f(\lambda) = 0$

Es.

$f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \mid f(ax^2+bx+c) = bx+c$

$$B = \{1, x, x^2\} \Rightarrow M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

$$\Rightarrow -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$$

Es.

$$f: F^3 \to F^3 \mid f(x,y,z) = (x+y+z,\ x+y+z,\ x+y+z)$$

$$B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$

$$f(1,0,0) = (1,1,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$$
$$f(0,1,0) = (1,1,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$$
$$f(0,0,1) = (1,1,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) =$$

$$= \cancel{1} - \lambda^3 - \cancel{3\lambda} + 3\lambda^2 + \cancel{2} - \cancel{3} + \cancel{3\lambda} = \lambda^2(3-\lambda)$$

$$\lambda^2(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 3.$$

Esistono due autovalori:

- $\underline{\lambda = 0}$, $V_0 = \{v \in F^3 \mid f(v) = 0\} = \ker f$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x+y+z=0} \\ \cancel{x+y+z=0} \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=0$$

$$\Rightarrow z = -x-y \Rightarrow V_0 = \{(x,\ y,\ -x-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

$B_{V_0} = \{ (1,0,-1), (0,1,-1) \}$

$\underline{\lambda = 3}$: $\quad V_3 = \{ v \in F^3 \mid f(v) = 3v \} = \operatorname{Ker}(A - 3I_3)$

$$(A-3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{-2x + y + z = 0} \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow z = y \Rightarrow \begin{cases} z = y \\ x = 2y - z = y \end{cases}$$

$3y - 3z = 0$

$V_3 = \{ (y,y,y) \mid y \in F \}$ $\quad B_{V_3} = \{ (1,1,1) \}$

Per la preposizione precedente

$B' = B_{V_0} \cup B_{V_3}$ ottengo un insieme lin. dip. inoltre

$V_0$ e $V_3$ sono in somma diretta

quindi $B' = \{ \overset{u_1}{(1,0,-1)}, \overset{u_2}{(0,1,-1)}, \overset{u_3}{(1,1,1)} \}$ è

una base di $F^3$ e pertanto

$$F^3 = V_0 \oplus V_3$$

$f(u_1) = 0 \cdot u_1 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$

$f(u_2) = 0 \cdot u_2 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$

$f(u_3) = 3 \cdot u_3 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3$

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es.

$f: F^3 \to F^3 \mid f(x,y,z) = (x+z, -2(x+z), 2x+y+z)$

1) Det. gli autovalori di $f$
2) Det. gli autospazi
3) $\exists$ una base di $F^3$ composta da autovettori di $f$? In caso di risposta affermativa, scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto a tale base
4) $F^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ ?

Sol. Sia $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base canonica di $F^3$.
Determiniamo $M_f$ rispetto a $B$

$f(1,0,0) = (1,-2,2) = 1\cdot(1,0,0) + (-2)\cdot(0,1,0) + 2\cdot(0,0,1)$
$f(0,1,0) = (0,0,1) = 0\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$
$f(0,0,1) = (1,-2,1) = 1\cdot(1,0,0) + (-2)\cdot(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $P_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= -\lambda(1-\lambda)^2 - 2 + 2\lambda + 2(1-\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2 - \cancel{2(1-\lambda)} + \cancel{2(1-\lambda)} =$

$= -\lambda(1-\lambda)^2 \Rightarrow -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1$

molteplicità 1 molteplicità 2

2) • $V_0 = \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in F^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\} =$
$= \{(x,y,z) \in F^3 \mid (x+z, -2(x+z), 2x+y+z) = (0,0,0)\}$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ \cancel{-2(x+z)=0} \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-x \\ 2x+y-x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-x \\ y=-x \end{cases}$$

$V_0 = \{(x,-x,-x) \mid x \in F\}$

$B_{V_0} = \{(1,-1,-1)\}$

• $V_1 = \{(x,y,z) \in F^3 \mid f(x,y,z) = 1\cdot(x,y,z)\} = \operatorname{Ker}(f - 1\cdot id) =$
$= \operatorname{Ker}(M_f - 1\cdot I_3)$

$$M_f - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \cancel{-2x - y = 0} \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases} \qquad V_1 = \{ (x, -2x, 0) \mid x \in F^3 \}$$

$$B_{V_1} = \{ (1, -2, 0) \}$$

3) Non esiste una base di autovettori di $F^3$ poichè $\dim_F V_0 = \dim_F V_1 = 1$

ma $\dim_F F^3 = 3 \Rightarrow B_{V_0} \cup B_{V_1}$ contiene 2 elementi pertanto

non può essere una base di $F^3$

4) $\operatorname{Ker} f = V_0 \qquad \dim_F \operatorname{Im} f = \dim_F F^3 - \dim_F \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$

Per assurdo

$\forall\, v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, ma se $\begin{cases} v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow v = \alpha (1, -1, -1) & \alpha \in F \\ v \in \operatorname{Im} f \Rightarrow v = \beta (0, 0, 1) + \gamma (1, -2, 1) & \beta, \gamma \in F \end{cases}$

Cerchiamo una base di $\operatorname{Im} f = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \rangle$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad = \langle (1,-2,2), (0,0,1), (1,-2,1) \rangle$$
$$= \langle (0,0,1), (1,-2,1) \rangle$$

In particolare, $v = \alpha (1, -1, -1) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow (1, -1, -1) \in \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow (1, -1, -1) = \beta (0, 0, 1) + \gamma (1, -2, 1)$

$$(1, -1, -1) = (\gamma, -2\gamma, \beta + \gamma) = \begin{cases} \gamma = 1 \\ -2\gamma = -1 \\ \beta + \gamma = -1 \end{cases} \qquad ⚡$$

$\Rightarrow v = 0$ e $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ sono in somma diretta

$$F^3 = \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{\operatorname{Im} f} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\operatorname{Ker} f}$$

$$v = \overset{\substack{0 \\ \neq}}{\alpha} (1, -1, -1) \in \operatorname{Im} f$$

$$\underline{\alpha^{-1}} v = \underline{\alpha^{-1} \cdot \alpha} (1, -1, -1) \in \operatorname{Im} f$$
$$\parallel$$
$$(1, -1, -1) \in \operatorname{Im} f$$

OSS.

Se $f: V \to V$ è endomorfismo, $\dim_f V = n$, allora $M_f \in M_n(F)$ e fissando un'altra base di $V$, risulta che

$$\overline{M_f} = C^{-1} M_f C \qquad C = \text{Matrice di passaggio}$$

$$P_{\overline{M}_f}(\lambda) = \det(\overline{M}_f - \lambda I_n) = \det(C^{-1} M_f C - \lambda I_n)$$
$$= \det(C^{-1} M_f C - \lambda C^{-1} I_n C) = \det(C^{-1} M_f C - C^{-1} \lambda I_n C) =$$

$$= \det(C^{-1}(M_f - \lambda I_m)C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TEOREMA} \\ \text{DI BINET}}}{=} \det(C^{-1})\det(M_f - \lambda I_m)\det(C) =$$

$$= \cancel{\det(C)^{-1}} \det(M_f - \lambda I_m) \cancel{\det C} = \det(M_f - \lambda I_m) = P_{M_f}(\lambda)$$

DEF.

Sia $p(x)$ polinomio e sia $x_0$ radice di $p(x)$, $p(x_0) = 0$.

Diremo che $x_0$ è radice di $p(x)$ con molteplicità algebrica $m$ se

$$p(x) = q(x)(x - x_0)^m$$

dove $\deg q(x) = \deg p(x) - m$ e $q(x)$ non è divisibile per $x - x_0$ (ossia $q(x_0) \neq 0$)

DEF.

Sia $f: V \to V$ endomorfismo e sia $\lambda_0$ autovalore di $f$. Allora $m_a(\lambda)$, la molteplicità algebrica di $\lambda$, è la molteplicità algebrica di $\lambda$ in $P_f(\lambda)$.

La molteplicità geometrica di $\lambda_0$, $m_g(\lambda_0)$, è la dimensione dell'autospazio $V_{\lambda_0}$

Es.

$f: F^3 \to F^3$, $f(x,y,z) = (x+z, -2(x+z), 2x+y+z)$

$\lambda_1 = 0 \qquad m_a(0) = 1 \qquad m_g(0) = 1$

$\lambda_2 = 1 \qquad m_a(1) = 2 \qquad m_g(1) = 1$

Es.

$0 : F^m \to F^m \mid 0(v) = 0$ (endomorfismo nullo)

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad M_0 - \lambda I_m = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_0(\lambda) = (-1)^m \lambda^m$$

$0$ è l'unico autovalore $\Rightarrow m_a(0) = m \qquad m_g(0) = \dim_F V_0 = \dim_F V = m$

Es.

$id: F^m \to F^m \mid id(v) = v$ (endomorfismo identico)

$$M_{id} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_m \Rightarrow P_{id}(\lambda) = \det(M_{id} - \lambda I_m) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$= (1-\lambda)^m \Rightarrow 1$ è l'unico autovalore $\Rightarrow m_a(1) = m$

e $m_g(1) = \dim_F V_1 = \dim_F \{ v \in F^3 \mid id(v) = 1 \cdot v \} = \dim_F V = m$

PROPOSIZIONE

$$m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0)$$

## PROPOSIZIONE

$$m_g(\lambda_0) \le m_a(\lambda_0)$$

## DEF.

Un endomorfismo $f: V \to V$ è detto diagonalizzabile se esiste una base di $V$ rispetto alla quale la matrice associata ad $f$ è diagonale, ossia

$$M_f = \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix}$$

## TEOREMA

$f$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste una base di $V$ di autovettori

## DIM.

$(\Rightarrow)$ Ip: $f$ è diagonalizzabile Th: $\exists$ base di autovettori

$f$ diagonalizzabile $\Rightarrow$ $\exists$ una base rispetto alla quale $M_f$ è diagonale, ossia

$$M_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_m(F) \text{ con } \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ tutti distinti}, \ k \le m$$

Sia $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ tale base.

Allora $f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_m = \lambda_1 v_1 \Rightarrow v_1$ è autovettore di $f$ relativo a $\lambda_1$

$f(v_2) = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_m = \lambda_2 v_2 \Rightarrow v_2$ è autovettore e $\lambda_2$ autovalore.

Pertanto $\forall\, i = 1, \dots, m$ $v_i$ è autovettore di $f$ relativo a qualche autovalore tra $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ $\Rightarrow$ $B$ è una base di autovettori.

$(\Leftarrow)$ Ip: $\exists$ base di autovettori Th: $f$ è diagonalizzabile

$\exists$ base di autovettori $\Rightarrow$ $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ a base $|$ $f(v_i) = \lambda_i v_i$, per qualche $\lambda_i$ autovalore e $\forall\, i = 1, \dots, m$

Ma costruendo la matrice associata ad $f$ rispetto a $B$ otteniamo

$$f(v_1) = \lambda v_1 + 0\, v_2 + \dots + 0 \cdot v_m$$
$$f(v_2) = \lambda_2 v_2$$
$$\vdots$$
$$f(v_m) = \lambda_m v_m$$

$$M_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

## TEOREMA

$f$ è diagonalizzabile se e solo se

1) $P_f(\lambda)$ possiede solo radici reali

2) $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i$ autovalore

COROLLARIO

Se $f$ possiede autovalori reali tutti distinti, allora $f$ è diagonalizzabile

DIMOSTRAZIONE

$P_f(\lambda) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_m), \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i,j \Rightarrow$

$\Rightarrow m_a(\lambda_i) = 1 \quad \forall i = 1,\dots,m$. Ma $m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ e

$m_g(\lambda_i) = \dim_f V_{\lambda_i} > 0 \Rightarrow 0 < m_g(\lambda_i) \leq 1 \Rightarrow m_g(\lambda_i) = 1$

$\Rightarrow m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i), \quad \forall i = 1,\dots,m \Rightarrow$ per il TEOREMA precedente, $f$ è diagonalizzabile

ES.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (x-z,\ \alpha x + y - \alpha z,\ -(x-z)),\ \alpha \in \mathbb{R}$

1) Det. gli autovalori di $f$
2) Discutere la diagonalizzabilità di $f$
3) Calcolare gli autospazi
4) In caso di risposta affermativa a 2), diagonalizzare $f$

<u>Sol</u>.

$B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canonica

$f(1,0,0) = (1,\alpha,-1)$;

$f(0,1,0) = (0,1,0)$;

$f(0,0,1) = (-1,\alpha,1)$;

1) $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & -\alpha \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_\alpha(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ \alpha & 1-\lambda & -\alpha \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$ LAPLACE sulla 2° colonna

$= (-1)^2 \cdot (1-\lambda) \cdot ((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + \cancel{1} \cancel{-1}) =$

$= \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) \Rightarrow$

$P_\alpha(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 2$ sono gli autovalori di $f \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Poichè $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono tutti reali e distinti, per il corollario precedente, $f$ sarà sempre diagonalizzabile.

2) ↗

3) Gli autospazi $V_0 = \operatorname{Ker} f$; $V_1 = \operatorname{Ker}(M_f - I_3)$; $V_2 = \operatorname{Ker}(M_f - 2I_3)$

- $V_0 = \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-z,\ \alpha x + y - \alpha z,\ -(x-z)) = (0,0,0)\}$

$$\begin{cases} x-z=0 \\ \alpha x+y-\alpha z=0 \\ \cancel{-(x-z)=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x \\ \cancel{\alpha x}+y-\cancel{\alpha x}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x \\ y=0 \end{cases}$$

$V_0 = \{(x,0,x) \mid x\in\mathbb{R}^3\}$, $\dim_f V_0 = 1 = m_g(0) \leq m_a(0)=1$

$B_{V_0} = \{(1,0,1)\}$

- $V_1 = Ker(M_f - I_3)$ $\qquad (M_f - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z=0 \\ \alpha x-\alpha z=0 \\ -x=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \{(0,y,0) \mid y\in\mathbb{R}\}, \quad \dim_f V_1 = 1 = m_g(1) \leq m_a(1)=1$$

$B_{V_1} = \{(0,1,0)\}$

- $V_2 = Ker(M_f - 2I_3)$, $\qquad (M_f - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-z=0 \\ \alpha x-y-\alpha z=0 \\ \cancel{-x-z=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-x \\ \alpha x-y+\alpha x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=2\alpha x \end{cases} \Rightarrow V_2 = \{(x,2\alpha x,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$$

$\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 1 \qquad B_{V_2} = \{(1,2\alpha,-1)\}$

4)

$B = B_{V_0} \cup B_{V_1} \cup B_{V_2} = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,2\alpha,-1)\}$

$$\overline{M}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es.

Sia $\varphi_t: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid \varphi_t(x,y,z) = (tx+y+2z, x+ty+tz, z)$, $t\in\mathbb{R}$

1) Det. $Ker\,\varphi_t$, $Im\,\varphi_t$

2) Det. gli autovalori di $\varphi_t$

3) Discutere la diagonalizzabilità di $\varphi_t$ determinandone gli autospazi

Sol.

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\varphi_t(1,0,0) = (t,1,0)$

$\varphi_t(0,1,0) = (1,t,0) \qquad M_{\varphi_t} = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi t(1,0,0) = (t,1,0)$

$\varphi t(0,1,0) = (1,t,0)$ $\qquad M\varphi t = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi t(0,0,1) = (2,t,1)$

1) $r(M\varphi t) = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi t$ e $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \varphi t = 3 - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi t$

$\det M\varphi t = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot (t^2-1) = t^2-1 \neq 0 \iff (t-1)(t+1) \neq 0$

$\iff t \neq 1$ e $t \neq -1$

$\iff t \neq \pm 1$

a) $t \neq \pm 1$: $\det M\varphi t \neq 0 \Rightarrow r(M\varphi t) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi t = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \varphi t = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \varphi t$ è suriettiva

Inoltre, $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \varphi t = 3 - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi t = 3-3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi t = 0$ e $\varphi t$ è iniettiva

b) $t = 1$

$M\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $r(M\varphi_1) = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \varphi_1 = 3-2 = 1$

$\operatorname{Im} \varphi_1 = \langle \varphi_1(1,0,0), \varphi_1(0,1,0), \varphi_1(0,0,1) \rangle =$

$= \langle (1,1,0), (1,1,0), (2,1,1) \rangle = \langle (1,1,0), (2,1,1) \rangle$

$\Rightarrow B_{\operatorname{Im} \varphi_1} = \{(1,1,0), (2,1,1)\}$

$\operatorname{Ker} \varphi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_1(x,y,z) = (0,0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+2z, x+y+z, z) = (0,0,0)\}$

$\begin{cases} x+y+2z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 0 \\ \cancel{x+y=0} \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker} \varphi_1 = \{(x,-x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $B_{\operatorname{Ker} \varphi_1} = \{(1,-1,0)\}$

c) $t = -1$

$M_{\varphi-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $r(M_{\varphi-1}) = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi{-1}$

$\operatorname{Im} \varphi{-1} = \langle \varphi{-1}(1,0,0), \varphi{-1}(0,1,0), \varphi{-1}(0,0,1) \rangle =$

$= \langle (-1,1,0), (1,-1,0), (2,1,-1) \rangle =$

$= \langle (1,-1,0), (2,-1,1) \rangle$

$B_{\operatorname{Im} \varphi-1} = \{(1,-1,0), (2,-1,1)\}$

$= \langle (1,-1,0), (2,-1,1) \rangle$

$B_{Im\,\varphi_{-1}} = \{ (1,-1,0), (2,-1,1) \}$

$\dim_{\mathbb{R}} \ker \varphi_{-1} = 3 - \dim_{\mathbb{R}} Im\,\varphi_{-1} = 3-2=1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+2z=0 \\ x-y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{-x+y=0} \\ x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=0 \end{cases}$$

$\ker \varphi_{-1} = \{ (x,x,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$, $B_{\ker \varphi_{-1}} = \{ (1,1,0) \}$

2) $P_{\varphi_t}(\lambda) = \det ( M\varphi_t - \lambda I_3 ) = \det \begin{pmatrix} t-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & t-\lambda & t \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$(-1)^{3+3} \cdot (1-\lambda) \cdot ((t-\lambda)^2-1) = (1-\lambda)((t-\lambda)^2-1) =$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2t\lambda + t^2 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ \text{opp.} \\ \lambda^2 - 2t\lambda + t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = t \pm \sqrt{\cancel{t^2} - \cancel{t^2} + 1} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{opp.} \\ \lambda = t \pm 1 \end{cases}$$

abbiamo 2 oppure 3 autovalori tutti reali

Sia $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = t-1$; $\lambda_3 = t+1$

$\lambda_1 = \lambda_2$ ? $1 = t-1 \Rightarrow t=2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = \lambda_3$ ? $1 = t+1 \Rightarrow t=0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 1$ e $\lambda_2 = -1$

$\lambda_2 = \lambda_3$ ? $\cancel{t}-1 = \cancel{t}+1 \Rightarrow -1 = 1$ ↯ MAI

a) $t \neq 0$ e $t \neq 2$: gli autovalori tutti distinti (reali) $\Rightarrow$ per il corollario $\varphi_t$ è diagonalizzabile

$$\overline{M}\varphi_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

b) $t=2$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3 \Rightarrow m_a(1) = 2$; $m_a(3) = 1$

$0 < m_g(3) \leq m_a(3) = 1 \Rightarrow m_g(3) = 1$

Determiniamo $V_1 = \ker (M\varphi_2 - I_3)$

$M\varphi_2 - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r(M\varphi_2 - I_3) = 1 = \dim_{\mathbb{R}} Im (M\varphi_2 - I_3)$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \ker(M\varphi_2 - I_3) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} Im(M\varphi_2 - I_3) = 3-1 =$$

$$= 2 \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ m_g(1)}}{\dim_{\mathbb{R}} V_1} = \dim_{\mathbb{R}} \ker(M\varphi_2 - I_3) = 2$$

$$\left.\begin{aligned} m_g(1) &= m_a(1) = 2 \\ m_g(3) &= m_a(3) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_2 \text{ è diagonalizzabile}$$

$$\bar{M}\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $t=0$ : $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ $\Rightarrow$ $m_a(1) = 2$, $m_a(-1) = 1$

$\Rightarrow m_g(-1) = 1$

$$V_1 = \ker(M\varphi_0 - I_3) \Rightarrow M\varphi_0 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_g(1) = \dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} \ker(M\varphi_0 - I_3) = 3 - r(M\varphi_0 - I_3) =$$

$$= 3-2 = 1 \Rightarrow m_g(1) = 1 \neq 2 = m_a(1)$$

$\Rightarrow \varphi_0$ non è diagonalizzabile

**Es.**

$f: M_2(F) \to M_2(F) \mid f(A) = A^t$

1) Dim. che $f$ è endomorfismo di sp. vett.
2) Scrivere $M_f$ rispetto alla base canonica di $M_2(F)$
3) Calcolare gli autovalori stabilendo se $f$ è diagonalizzabile
4) In caso affermativo, diagonalizzare $f$ determinando una base di autovettori

Sol. 1) $\forall\, A, B \in M_2(F)$ e $\forall\, \alpha \in F$ dobbiamo dim. che

$f(A+B) = f(A) + f(B)$ e che $f(\alpha A) = \alpha f(A)$

- $f(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = f(A) + f(B)$

PROPR. DELLA TRASPOSTA

- $f(\alpha A) = (\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha f(A)$

2)
$$B = \left\{ \underset{C_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{C_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{C_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{C_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$f(C_1) = C_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C_1 = 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 + 0 \cdot C_4$$

$$f(C_2) = C_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C_3 = 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 + 0 \cdot C_4$$

$$f(C_3) = C_3^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C_2 = 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 + 0 \cdot C_4$$

$$f(C_4) = C_4^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C_4 = 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 + 1 \cdot C_4$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = r(M_f) = 4 = \dim_{\mathbb{R}} M_2(F)$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = M_2(F) \Rightarrow f$ è suriettiva

$\Rightarrow$ per il TEOREMA DELLA DIMENSIONE, $f$ è iniettiva

3) $$P_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(-1)^{3+3} \cdot (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1)\right] =$$

$$= (1-\lambda)^2(\lambda^2-1) = (1-\lambda)^2 \underbrace{(\lambda-1)}(\lambda+1) = -(1-\lambda)^3(\lambda+1)$$

$P_f(\lambda) = 0 \iff (1-\lambda)^3(\lambda+1) = 0 \iff 1-\lambda = 0 \lor \lambda+1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = 1 \lor \lambda = -1.$

Pertanto esistono due autovalori reali, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ | $m_a(1) = 3$ e $m_a(-1) = 1$

Notiamo che $m_g(-1) = 1 = m_a(-1)$.

Studiamo $m_g(1) = \dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} \ker(M_f - I_4) = 4 - r(M_f - I_4)$

$$M_f - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = A_4 = 0 \text{ e } A_2 = -A_3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow r(M_f - I_4) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_g(1) = \dim_{\mathbb{R}} \ker(M_f - I_4) = 4 - 1 = 3 = m_a(1) = f$ è diagonalizzabile

4)

$$\overline{M_f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{B} = \{ \overbrace{v_1, v_2, v_3}^{\lambda_1 = 1}, \underbrace{v_4}_{\lambda_2 = -1} \}$$

a) $$V_1 = \ker(M_f - I_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(F) \;\middle|\; (M_f - I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{0=0} \\ \cancel{-y+z=0} \\ y-z=0 \\ \cancel{0=0} \end{cases} \Rightarrow z=y$$

$$* = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \,\middle|\, z=y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & t \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,t \in F \right\}$$

$$\dim_f V_1 = 3 = m_g(1) = m_a(1)$$

$$B_{V_1} = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

b) $V_{-1} = \ker(M_f + I_4)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ y+z=0 \\ \cancel{y+z=0} \\ 2t=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ z=-y \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \,\middle|\, x=t=0,\ z=-y \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in F \right\}$$

$$B_{V_{-1}} = \left\{ \overset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

Se $\overline{B} = B_{V_1} \cup B_{V_{-1}} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ allora la matrice $\overline{M}_f$ associata ad $f$ rispetto a $\overline{B}$ è

$$\overline{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ottenere $\overline{M}_f$ tramite la matrice di passaggio che lega $B$ e $\overline{B}$

Es.

$f: \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R}) \mid f(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

a) Dim. che $f$ è omomorfismo di sp. vett. su $\mathbb{R}$

b) Det. $M_f$ rispetto alle basi: $B_{\mathbb{C}} = \{1, i\}$, $B_{M_2}$ = canonica

c) Usando $M_f$, determinare $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$

Sol.

a) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ dobbiamo dim. che

$f(z_1+z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ e $f(\alpha z_1) = \alpha f(z_2)$

$z_1 = a_1 + ib_1 \qquad z_2 = a_2 + ib_2$

Ma $f(z_1+z_2) = f((a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)) = f((a_1+a_2)+i(b_1+b_2)) =$

$= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$, inoltre $f(z_1)+f(z_2) = f(a_1+ib_1)+f(a_2+ib_2)$

$= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix} = f(z_1+z_2)$

$f(\alpha z_1) = f(\alpha(a_1+ib_1)) = f(\alpha a_1 + i(\alpha b_1)) = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & -\alpha b_1 \\ \alpha b_1 & \alpha a_1 \end{pmatrix}$

$= \alpha \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \alpha f(z_1)$

b) $B_{\mathbb{C}} = \{1, i\} \qquad B_{M_2} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$

$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = c_1 + c_4$

$f(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -c_2 + c_3$

$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = r(M_f) = 2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \ker f = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$

c) $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = r(M_f) = 2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f è iniettiva

$$\operatorname{Im} f = \langle f(1), f(i) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Sia

$$(1) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} \qquad Ax = 0$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è un sottospazio vettoriale di $F^n$

TEOREMA

U è sottospazio vettoriale di $F^n$ <=> U è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ | $\dim_F U = n - r(A)$

DEF.

Sia U un sottospazio vettoriale di $F^n$, la codimensione di U è

$$\operatorname{codim}_F U = n - \dim_F U$$

DEF.

Le equazioni del sistema lineare omogeneo corrispondente ad un sottospazio vettoriale U sono dette equazioni cartesiane di U

OSS.

Il numero di equazioni cartesiane di U è pari a $\operatorname{codim}_F U$

OSS.

Le eq. cartesiane non sono uniche!

ES.

$V = F^2$ = piano cartesiano => gli unici sottospazi propri hanno dimensione

- 1 ≡ le rette => $\dim_F U = 1$ => $\operatorname{codim}_F U = 2 - 1 = 1$ =>

la retta nel piano si rappresenta con una sola equazione cartesiana:

$$A = (a\ b) \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad 0 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow (a\ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$U:\ ax + by = 0$

ES.

$V = F^3 =$ spazio cartesiano (3D) $\Rightarrow$ i sottospazi hanno dimensione

- $1 \equiv$ rette $\Rightarrow \operatorname{codim}_F U = 3-1 = 2$
- $2 \equiv$ piani $\Rightarrow \operatorname{codim}_F U = 3-2 = 1$

1) RETTE

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = O$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

2) PIANI

$$A = (a, b, c) \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad O = 0 \Rightarrow AX = O$$

$$(a\ b\ c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + cz = 0$$

NOTA

IPERPIANO $U$ DI $F^m$ è t.c. $\dim_F U = m-1 \Rightarrow$ ha 1 sola eq. cartesiana

Sia $U$ un sottospazio di $F^m$, $\dim_F U = t$, e sia

$$B = \{u_1, \dots, u_t\} \text{ base di } U \text{ su } F$$

Allora $\forall x \in F^m$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $x \in U$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \alpha_i \in F \mid x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \quad (*)$$

Sia $\forall i = 1, \dots, t \quad u_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{im} \end{pmatrix} \Rightarrow$ la $(*)$ implica che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1m} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_t \begin{pmatrix} u_{t1} \\ u_{t2} \\ \vdots \\ u_{tm} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{21} + \dots + \alpha_t u_{t1} \\ \vdots \\ x_m = \alpha_1 u_{1m} + \alpha_2 u_{2m} + \dots + \alpha_t u_{tm} \end{cases}$$

**DEF.**

Le equazioni appena costruite sono dette equazioni parametriche di $U$

**OSS.**

Il numero di eq. parametriche è $m$

**OSS.**

Il numero di parametri è pari a $\dim_F U$

**OSS.**

Le eq. parametriche non sono uniche poichè dipendono dalla scelta della base di $U$

**ES.**

$V = F^2 \Rightarrow \dim_F U = 1 \Rightarrow U = \langle u \rangle = \langle (u_1, u_2) \rangle$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \alpha$

$$\begin{cases} x = \alpha u_1 \\ y = \alpha u_2 \end{cases}$$

**ES.**

$V = F^3 \Rightarrow \dim_F U = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ opp.

1) $\dim_F U = 1 \Rightarrow$ rette: $U = \langle u \rangle = \langle (u_1, u_2, u_3) \rangle$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \alpha$

$$\begin{cases} x = \alpha u_1 \\ y = \alpha u_2 \\ z = \alpha u_3 \end{cases}$$

2) $\dim_F U = 2 \Rightarrow$ piani

$U = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle (u_{11}, u_{12}, u_{13}), (u_{21}, u_{22}, u_{23}) \rangle$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha u_{11} + \beta u_{21} \\ y = \alpha u_{12} + \beta u_{22} \\ z = \alpha u_{13} + \beta u_{23} \end{cases}$$

## DA PARAMETRICHE A CARTESIANE

Sia $U$ sottosp. vett. di $F^m$ e siano

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 u_{11} + \dots + \alpha_t u_{t1} \\ \vdots \\ x_m = \alpha_1 u_{1m} + \dots + \alpha_t u_{tm} \end{cases}$$ eq. parametriche di $U$

Bisogna imporre che

$$r \begin{pmatrix} x_1 & u_{11} & u_{21} & \dots & u_{t1} \\ x_2 & u_{12} & u_{22} & \dots & u_{t2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m & u_{1m} & u_{2m} & \dots & u_{tm} \end{pmatrix} = t$$

Es.

$V = F^2$ $\quad U: \begin{cases} x = \alpha u_1 \\ y = \alpha u_2 \end{cases}$ $\quad \dim_F U = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \iff r \begin{pmatrix} x & u_1 \\ y & u_2 \end{pmatrix} = 1 \iff \det \begin{pmatrix} x & u_1 \\ y & u_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u_2 x - u_1 y = 0$$

Es.

$$U: \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \end{cases} \quad \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -2 \end{pmatrix} = 0 \iff -2x - y = 0 \iff 2x + y = 0$$

Es.

$V = F^3$

$$U: \begin{cases} x = \alpha u_1 \\ y = \alpha u_2 \\ z = \alpha u_3 \end{cases} \quad r \begin{pmatrix} x & u_1 \\ y & u_2 \\ z & u_3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} x & u_1 \\ y & u_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} y & u_2 \\ z & u_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} x & u_1 \\ z & u_3 \end{pmatrix} = 0$$

Es.

$$U: \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad r \begin{pmatrix} x & 3 \\ y & -1 \\ z & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} x & 3 \\ y & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det\begin{pmatrix} y & -1 \\ z & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det\begin{pmatrix} x & 3 \\ z & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -x-3y=0 \\ y+z=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \qquad 3^{\circ} = -3\cdot 2^{\circ} - 1^{\circ} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y+z=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$$

Es.

$V = F^3$

$$U: \begin{cases} x = \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{21} \\ y = \alpha_1 u_{12} + \alpha_2 u_{22} \\ z = \alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{23} \end{cases}$$

$\dim_F U = 2 \qquad U = \langle (u_{11}, u_{12}, u_{13}) , (u_{21}, u_{22}, u_{23}) \rangle$

$$r\underbrace{\begin{pmatrix} x & u_{11} & u_{12} \\ y & u_{21} & u_{22} \\ z & u_{31} & u_{23} \end{pmatrix}}_{A} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \det A = 0$$

Es.

$$U: \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + \beta \\ z = -\beta \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \det A = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad x + z + y = 0$

DA CARTESIANE A PARAMETRICHE :

$U$ è sottosp. di $F^m$ e sono $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m = 0 \end{cases}$ eq. cartesiane di $U$

Per passare alle parametriche basta trovare $t$ vettori di $U$, $\{u_1, \dots, u_t\}$ le cui componenti risolvono il sistema

Es.

$V = F^2 \qquad U: 2x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad$ scelgo $u = (-1, 2)$

$\Rightarrow \quad ax + by = 0 \quad \Rightarrow \quad (-b, a)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 2\alpha \end{cases}$$

Es.

$V = F^3 \qquad \dim_F U = 1 \qquad \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$

Una soluzione è data dal vettore $u = \left( \det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \right)$

Es.

$U: \begin{cases} x+3y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad u = \left( \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$

$= (3, -1, 1)$

$$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Es.

$V = F^3 \qquad U: ax+by+cz=0, \quad \begin{cases} u_1 = (0, -c, b) \\ u_2 = (-c, 0, 0) \end{cases}$

Es.

$U: x+y+z=0, \quad \begin{cases} u_1 = (0, -1, 1) \\ u_2 = (1, 0, -1) \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0\cdot\alpha + 1\cdot\beta \\ y = -1\cdot\alpha + 0\cdot\beta \\ z = 1\cdot\alpha + (-1)\cdot\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \beta \\ y = -\alpha \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$$

Sia $F^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in F\}$

**DEF.**

Dati due punti $X=(x_1,\dots,x_n)$ e $Y=(y_1,\dots,y_n)$ di $F^n$, il vettore $\vec{XY}$ che congiunge X e Y è il vettore $\vec{XY}=(y_1-x_1,\dots,y_n-x_n)$

**DEF.**

Sia $O\in F^n$ e $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ base di $F^n$. Si chiama riferimento affine (o sistema di coordinate affini) l'unione tra il punto O e la base B:

$$R=\{O;\ e_1,\dots,e_n\}$$

Il punto O è detto origine del riferimento R

**DEF.**

Un punto $P\in F^n$ ha coordinate $x=(x_1,\dots,x_n)$ rispetto al riferimento $R$, se il vettore $\vec{OP}$ ha componenti $(x_1,\dots,x_n)$ rispetto alla base $B$, cioè

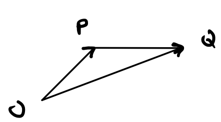
$$\vec{OP}=x_1e_1+\dots+x_ne_n$$

**OSS.**

L'origine O di R ha coordinate $(0,0,\dots,0)$ rispetto ad R

**OSS.**

$\forall\ P,Q\in F^n,\ P\neq Q,\quad \vec{OP}+\vec{PQ}=\vec{OQ} \Rightarrow \vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}$




**Es.**

$V=F^2,\ O\in F^2,\ B=\{e_1,e_2\} \Rightarrow R=\{O, e_1, e_2\}$

$\forall\ (p_1,p_2)=P\in F^2$. le coordinate di P sono $(x_1,x_2)$ se $\vec{OP}$ ha componenti $(x_1,x_2)$ rispetto a $B$, ossia $\vec{OP}=x_1e_1+x_2e_2$

Scelgo $O=(0,0)$ e $B=\{(1,0),(0,1)\}$

$\forall\ P=(p_1,p_2)\in F^2 \Rightarrow \vec{OP}=(p_1-0,\ p_2-0)=(p_1,p_2)=p_1\cdot\overset{e_1}{(1,0)}+p_2\overset{e_2}{(0,1)}$

- Scelgo $O = (0,0)$ e $B = \{(1,0),(0,1)\}$

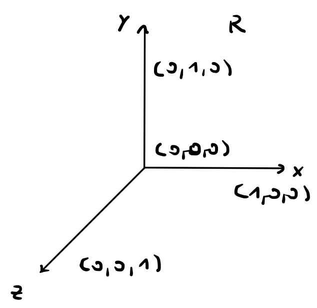
  $\forall\, P = (p_1, p_2) \in F^2 \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (p_1 - 0,\ p_2 - 0) = (p_1, p_2) = p_1 \cdot \overset{e_1}{(1,0)} + p_2 \overset{e_2}{(0,1)}$

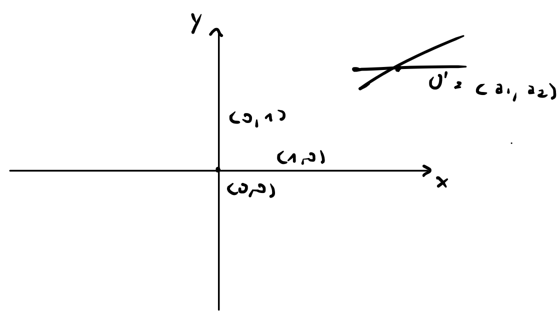
  $\Rightarrow$ rispetto a tale riferimento, $P$ ha coordinate $(p_1, p_2)$

- Scelgo $O' = (1,-1)$ $\quad B' = \{(1,0),(1,1)\}$

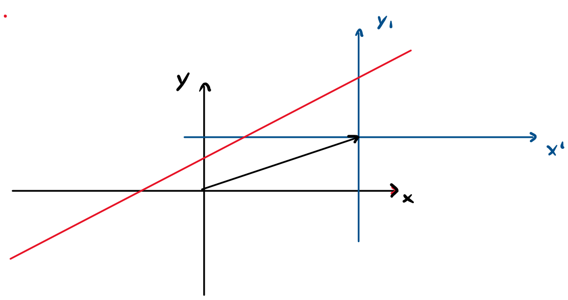
  $P = (2,2) \in F^2 \Rightarrow \overrightarrow{O'P}\ (2-1,\ 2-(-1)) = (1,3) = -2\,(1,0) + 3 \cdot (1,1)$

  $\Rightarrow$ le coordinate di $P$ sono $(-2,3)$ in $R'$

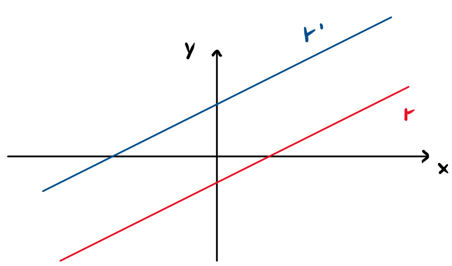



OSS.




STATICA




DINAMICA

DEF.

Si definisce spazio affine di $F^n$ ogni traslato di un sottospazio vettoriale di $F^n$

DEF.

Dato un sottosp. affine $U$ di $F^n$, il sottosp. vett. da cui si ottiene $U$ per traslazione è chiamato giacitura di $U$, $\vec{U}$. Inoltre per definizione si pone $\dim U = \dim_F \vec{U}$

**OSS.**

In ogni sp. vett. c'è sempre il vettore nullo, in ambito affine non c'è alcun punto "privilegiato"

**OSS.**

Sia $\vec{U}$ sottosp. vettoriale di $F^m$. Fissato $P = (p_1, \dots, p_m) \in F^m$, il sottospazio affine $U$ passante per $P$ e avente giacitura $\vec{U}$ è il sottoinsieme di $F^m$ costituito da tutti i punti $Q$ t.c. $\vec{PQ} \in \vec{U}$

**OSS.**

Sia $P \in U$. Allora $Q \in U \iff \vec{PQ} \in \vec{U}$

Si considerino le eq. parametriche della giacitura $\vec{U}$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 u_{11} + \dots + \alpha_t u_{t1} \\ \vdots \\ x_m = \alpha_1 u_{1m} + \dots + \alpha_t u_{tm} \end{cases}$$

$\forall (p_1, \dots, p_m) \in U$. Il punto $Q(q_1, \dots, q_m) \in U$

$$\iff \vec{PQ} \in \vec{U}$$

$$\iff \vec{PQ} = (q_1 - p_1, \dots, q_m - p_m) \in \vec{U}$$

$$\iff \begin{cases} q_1 - p_1 = \alpha_1 u_{11} + \dots + \alpha_t u_{t1} \\ \vdots \\ q_m - p_m = \alpha_1 u_{1m} + \dots + \alpha_t u_{tm} \end{cases}$$

Quindi $\begin{cases} x_1 = p_1 + \alpha_1 u_{11} + \dots + \alpha_t u_{t1} \\ x_m = p_m + \alpha_1 u_{1m} + \dots + \alpha_t u_{tm} \end{cases}$ sono le eq. parametriche di $U$

Le equazioni cartesiane di $U$ sono:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m + c_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{m-t,1} x_1 + \dots + a_{m-t,m} x_m + c_{m-t} = 0 \end{cases}$$

**TEOREMA**

$U$ è sottospazio affine di $F^m \iff U$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare

# TEOREMA

U è sottospazio affine di $F^m$ $\Leftrightarrow$ U è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX+C=0$, con $r(A)=m-\dim U$ e $C\in F^m$

Es.

$V=F^2$, $\dim U=1$

$ax+by+c=0$ eq. cartesiane

$$\begin{cases} x=\alpha u_1+p_1 \\ y=\alpha u_2+p_2 \end{cases}$$ eq. parametriche

Es.

$V=F^3$

1) $\dim U=1$ (RETTA AFFINE)

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$ eq. cartesiane

$$\begin{cases} x=\alpha u_1+p_1 \\ y=\alpha u_2+p_2 \\ z=\alpha u_3+p_3 \end{cases}$$ eq. parametriche

2) $\dim U=2$ (PIANO AFFINE)

$ax+by+cz+d=0$ eq. cartesiane

$$\begin{cases} x=\alpha u_{11}+\beta u_{21}+p_1 \\ y=\alpha u_{12}+\beta u_{22}+p_2 \\ z=\alpha u_{13}+\beta u_{23}+p_3 \end{cases}$$ eq. parametriche

## DA PARAMETRICHE A CARTESIANE

Es.

$V=F^2$, $\dim_F U=1 \Rightarrow U: \begin{cases} x=p_1+\alpha u_1 \\ y=p_2+\alpha u_2 \end{cases}$

allora dobbiamo imporre che $r\begin{pmatrix} x-p_1 & u_1 \\ y-p_2 & u_2 \end{pmatrix}=1 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} x-p_1 & u_1 \\ y-p_2 & u_2 \end{pmatrix}=0$

Es.

$V=F^2$, $U: \begin{cases} x=2+3\alpha \\ y=1-\alpha \end{cases} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} x-2 & 3 \\ y-1 & -1 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x+2-3(y-1)=0 \Rightarrow -x+2-3y+3=0 \Rightarrow -x+3y+5=0$

Es.

$V=F^3$

$$U: \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1 \\ z = 3-5\alpha \end{cases} \qquad r\begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ y-1 & 0 \\ z-3 & -5 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ y-1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad \det\begin{pmatrix} y-1 & 0 \\ z-3 & -5 \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad \det\begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ z-3 & -5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -y+1=0, \quad -5(y-1)=0, \quad -5x+10-z+3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ -5x-z+13=0 \end{cases} \qquad \text{eq. cartesiane}$$

Es.

$V = F^3$

$$U: \begin{cases} x = 3+2\beta \\ y = 2-5\alpha+\beta \\ z = -1-4\beta \end{cases} \qquad r\begin{pmatrix} x-3 & 0 & 2 \\ y-2 & -5 & 1 \\ z+1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} x-3 & 0 & 2 \\ y-2 & -5 & 1 \\ z+1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det A = (-1)^{2+2}\cdot(-5)\cdot(-4(x-3)-2(z+1)) = 0$$

$$\Rightarrow -5(-4x+12-2z-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -5(-4x-2z+10) = 0$$

$$\Rightarrow -2x-z+5=0$$

DA CARTESIANE A PARAMETRICHE

Es.

$V = F^2 \qquad U: \; x+3y-5=0$

Scelgo $y=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow P \equiv (5,0) \in U$

Scrivo l'eq. della giacitura di U:

$$\vec{U}: \; x+3y=0 \Rightarrow \text{scelgo } u = (-3,1)$$

$$U: \begin{cases} x = -3\alpha+5 \\ y = 1\cdot\alpha+0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3\alpha+5 \\ y = \alpha \end{cases}$$

Es.

$V = E^3$, $\quad U: \begin{cases} y-1=0 \\ 5x+z-13=0 \end{cases} \quad$ scelgo $x=1 \Rightarrow P(1,1,8)$

$\vec{U}: \begin{cases} y=0 \\ 5x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=-5x \end{cases} \Rightarrow u=(1,0,-5) \in \vec{U}$

$\begin{cases} x = 1\cdot\alpha+1 \\ y = 0\cdot\alpha+1 \\ z = -5\cdot\alpha+8 \end{cases} \Rightarrow \quad U: \begin{cases} x = \alpha+1 \\ y = 1 \\ z = -5\alpha+8 \end{cases}$

Es.

$V = E^3$, $\quad U: 2x+z-5=0 \quad$ scelgo $x=1 \Rightarrow P(1,0,3)$

Passo a $\vec{U}$: $2x+z=0 \Rightarrow z=-2x \Rightarrow \begin{cases} u_1 = (1,0,-2) \\ u_2 = (0,1,0) \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1\cdot\alpha+0\cdot\beta+1 \\ y = 0\cdot\alpha+1\cdot\beta+0 \\ z = -2\cdot\alpha+0\cdot\beta+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha+1 \\ y = \beta \\ z = -2\alpha+3 \end{cases}$

# MUTUA POSIZIONE

Tuesday, December 21, 2021 11:18 AM

**DEF.**

Un generatore della giacitura di uno spazio affine è detto <u>vettore direzione</u>

**OSS.**

1) $U: ax+by+c=0$ retta in $F^2$, allora $(-b, a)$ è un vettore direzione

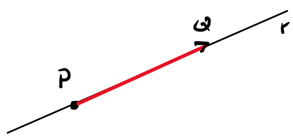
2) $U: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ retta in $F^3$,

allora un vettore direzione di $U$ è $\left( \det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \right)$

**Es.**

Determinare la retta $r$ in $F^2$ passante per $P=(3,2)$ e $Q=(-1,-2)$

<u>Sol.</u>




$\overrightarrow{PQ}$ è un vettore direzione di $r$

$\overrightarrow{PQ} = (-1-3, -2-2) = (-4,-4)$

$r: \begin{cases} x = -4\alpha+3 \\ y = -4\alpha+2 \end{cases}$

**DEF.**

Due spazi affini di $F^n$ si dicono paralleli se la giacitura di uno è contenuta nella giacitura dell'altro.

**OSS.**

Due sottospazi affini $U$ e $W$ aventi la stessa dimensione sono paralleli $\Leftrightarrow \vec{W} = \vec{U}$

**DIM.**

$(\Rightarrow)$ Ip: $U$ e $W$ sono paralleli   Th: $\vec{W} = \vec{U}$

$U$ e $W$ paralleli $\Rightarrow \vec{U} \subseteq \vec{W}$ opp. $\vec{W} \subseteq \vec{U}$.

Ma $\dim W = \dim U \Rightarrow \dim_F \vec{W} = \dim_F \vec{U} \Rightarrow \vec{U} = \vec{W}$

$(\Leftarrow)$ Ip: $\vec{U} = \vec{W}$   Th: $U$ e $W$ sono paralleli

Ovvio!

($\Leftarrow$) Ip: $U = W$ Th: $U$ e $W$ sono paralleli

ovvio!

## DEF.

Due sottospazi affini non paralleli si dicono **incidenti** se possiedono almeno un punto in comune. Altrimenti si dicono **sghembi**

## SPAZIO AFFINE $F^3$

Siano $P$, $Q$ e $R$ punti di $F^3$. Allora $P$, $Q$ ed $R$ sono allineati se e solo se $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ sono lin. dip. In tal caso per tali punti passa una sola retta, altrimenti per tali punti passa un solo piano.

## ES.

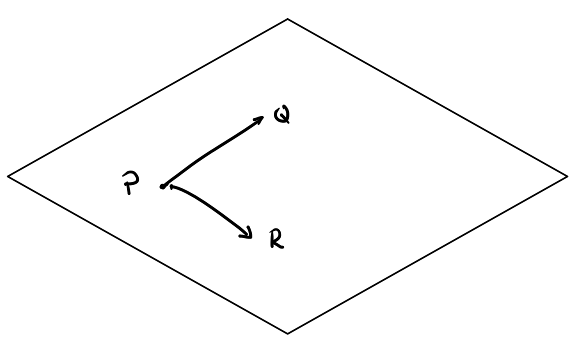
$P = (1, 0, -1)$ ; $Q = (0, 2, 0)$ ; $R = (0, -1, 1)$

Sol.

$$\overrightarrow{PQ} = (0-1,\ 2-0,\ 0-(-1)) = (-1, 2, 1)$$
$$\overrightarrow{PR} = (0-1,\ -1-0,\ 1-(-1)) = (-1, -1, 2)$$

$\Rightarrow$ sono lin. indip.

$\Rightarrow$ $P$, $Q$ ed $R$ individuano un piano $\pi$: tale piano possiede $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ come vettori direzione ed inoltre passa per $P$, per $Q$ e per $R$




$$\pi : \begin{cases} x = -\alpha - \beta \\ y = 2\alpha - \beta + 2 \\ z = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi : 5x + y + 3z - 2 = 0$$

## PROPOSIZIONE

Siano $\pi : ax + by + cz + d = 0$

PROPOSIZIONE

Siano $\pi: ax+by+cz+d=0$
$\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

Allora

1) Se $r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1 \Rightarrow \pi // \pi'$

2) Se $r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2 \Rightarrow \pi$ e $\pi'$ sono incidenti e $\pi \cap \pi' \equiv$ retta

3) Se $\pi // \pi'$ allora $\pi = \pi' \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}=1$

COROLLARIO 1:

In $E^3$, due piani possono essere solo incidenti o paralleli (NO sghembi)

COROLLARIO 2:

$\pi \cap \pi' = \emptyset \Leftrightarrow \pi // \pi' \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1$ e $r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}=2$

Es.

$\pi: 2x+3y-z+2=0$, $\pi': 6x+9y-3z+7=0$

$r\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}=1 \Rightarrow \pi // \pi'$.

Inoltre $r\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 9 & -3 & 7 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow \pi \cap \pi' = \emptyset$

Es.

$\pi: 2x-y+5z+1=0$, $\pi': 4x-2y+10z+2=0$

$r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}=1$ e $r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}=1 \Rightarrow \pi = \pi'$

Es.

$\pi: x-4y+z-3=0$, $\pi': 2x-2y+2z=0$

$r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow \pi$ e $\pi'$ sono incidenti

$$r: \begin{cases} x - 4y + z - 3 = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

## PROPOSIZIONE

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} , \qquad \pi: ax + by + cz + d = 0$$

Allora, se $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ :

1) se $\det(A) = 0 \iff \pi \parallel r$

2) se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ r e $\pi$ sono incidenti e la loro intersezione è un punto

3) se $r \parallel \pi$ allora $r \subseteq \pi \iff r \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = 2$

## COROLLARIO 1:

In $E^3$ una retta ed un piano non possono essere sghembi.

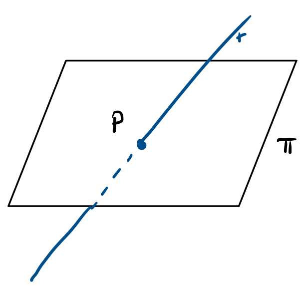
## COROLLARIO 2

$$r \cap \pi = \emptyset \iff r \parallel \pi \text{ e } r \not\subseteq \pi \iff r(A) = 2 \text{ e } r \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = 3$$

## ES.

$$r: \begin{cases} 2x + 3y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + 2z + 3 = 0 \end{cases} \qquad \pi: x - 2y + z + 3 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cancel{+6} \cancel{-6} \cancel{+1} \cancel{+8} \cancel{-9} = -2 \neq 0 \Rightarrow r \text{ e } \pi \text{ sono incidenti}$$




$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + 2z + 3 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0, 1, -1)$$

Es.

$$r: \begin{cases} x+y-2z+3=0 \\ 2x+3y+z-2=0 \end{cases} \qquad \pi: x+2y+3z-1=0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 9+1-8\cancel{+6}-2\cancel{-6} = 0 \Rightarrow r \parallel \pi$$

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = \cancel{-3}\cancel{-2}+\cancel{12}\cancel{-4}+4\cancel{+2} = 4 \neq 0$$

Es.

$$r: \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+4y-z+2=0 \end{cases} \qquad \pi: 9y-3z+4=0$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} = +24+9+18+3 \neq 0 \Rightarrow$$ $r$ e $\pi$ sono incidenti e la loro intersezione è punto

Es.

Siano $P=(1,0,1)$ e $Q=(0,-1,2)$. Scrivere le eq. della retta $r$ passante per $P$ e per $Q$

Es.

$P=(1,0,1)$ e $Q=(1,0,-1)$

Es.

Sia $V=M_2(\mathbb{R})$ spazio affine. Determinare l'equazione passante per i punti $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sol.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-1 & 0-2 \\ 0-0 & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} x & y \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ z & t \end{array}$$

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=-2\alpha \\ z=0 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=0 \\ t=-1 \end{cases}$$

Es.

$V=\mathbb{R}_2[x] \qquad P_1(x)=1+x-x^2 \; ; \; P_2(x)=-x \; ; \; P_3(x)=1-x^2$

Es.

$V = \mathbb{R}_2[x] \qquad P_1(x) = 1 + x - x^2 \; ; \quad P_2(x) = -x \; ; \quad P_3(x) = 1 - x^2$

determinare il piano passante per tali punti

DEF.

Due rette nello spazio si dicono complanari se esiste un piano che le contiene entrambe

PROPOSIZIONE

Due rette r ed r' sono complanari <=> r ed r' sono parallele o incidenti

PROPOSIZIONE

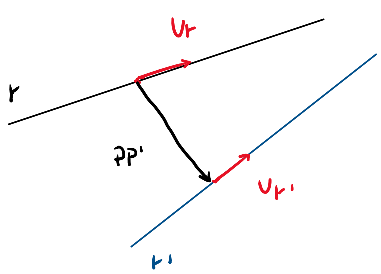
Siano r ed r' due rette. Siano $P = (x_0, y_0, z_0) \in r$, $P' = (x_0', y_0', z_0') \in r'$,

$v_r$ vett. dir. di r e $v_{r'}$ vett. dir. di r'

$v_r = (v_1, v_2, v_3) \qquad v_{r'} = (v_1', v_2', v_3')$

Allora r ed r' sono complanari se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} x_0 - x_0' & y_0 - y_0' & z_0 - z_0' \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \end{pmatrix} = 0$$




PROPOSIZIONE

$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 x + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$r': \begin{cases} a_1' x + b_1' x + c_1' z + d_2' = 0 \\ a_2' x + b_2' y + c_2' z + d_2' = 0 \end{cases}$$

Allora r ed r' sono complanari se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \end{pmatrix} = 0$$

In particolare, $r \parallel r' \iff r \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \end{pmatrix} = 2$

Es.

$$r: \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = -1-\alpha \\ z = 3-2\alpha \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases}$$

$P = (2,-1,3) \in r$ ; $P' = (1,2,0) \in r'$ $\Rightarrow$ $PP' = (1-2,\ 2-(-1),\ 0-3) =$
$= (-1, 3, -3)$

$v_r = (1,-1,-2)$ ; $v_{r'} = (-1,1,4)$ $\Rightarrow$ $r \not\parallel r'$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 4+6-\cancel{3}+\cancel{3}-2+12 = -4 \neq 0 \Rightarrow r \text{ ed } r' \text{ sono sghembe}$$

Es.

$$r: \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = -1-\alpha \\ z = 3-2\alpha \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

$v_r = (1,-1,-2)$ $\quad v_{r'} = (-1,1,2)$ $\Rightarrow$ sono lin. dip. $\Rightarrow$ $r \parallel r'$

e $r$ ed $r'$ sono complanari

Es.

Det. l'eq. della retta $s$ passante per $Q = (1,0,1)$ e complanare alle rette

$$r: \begin{cases} x-y+1=0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad r': \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

<u>Sol.</u>

Sia $v_s = (v_1, v_2, v_3)$ vett. dir. di $s$

- Impongo la complanarità con $r$:

$Q = (1,0,1) \in s$

$P = (-1,0,0) \in r$

$v_r = (1,1,1)$

verificare!

$\overrightarrow{PQ} = (1-(-1), 0-0, 1-0) = (2,0,1)$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2v_3 + v_2 - v_1 - 2v_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 - 2v_3 = 0$$

- Impongo la complanarità con $r'$:

$Q = (1,0,1)$

$P' = (0,0,1)$

$v_{r'} = (0,0,1)$

$\overrightarrow{P'Q} = (1-0, 0-0, 1-1) = (1,0,0)$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (-1)^{1+1} \cdot 1 (-v_2) = 0 \Rightarrow v_2 = 0$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_3 \\ v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_s = (2v_3, 0, v_3)$$

In particolare scelgo $v_3 = 1 \Rightarrow v_s = (2,0,1)$

$$s: \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 0 \\ z = \alpha + 1 \end{cases}$$

DEFINIZIONE

Sia $r$ una retta di $F^3$. L'insieme dei piani di $F^3$ contenenti $r$ è detto fascio proprio di piani di asse $r$

DEFINIZIONE

Sia $\vec{U}$ un piano vettoriale. L'insieme dei piani affini aventi $\vec{U}$ come giacitura è detto fascio improprio di piani di giacitura di $\vec{U}$

PROPOSIZIONE

1) Sia $r$ una retta di equazioni $\quad r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

allora il generico piano del fascio proprio di asse $r$ ha equazioni

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0,$$

dove $\lambda,\mu\in F \mid (\lambda,\mu)\neq(0,0)$

2) Sia $U: ax+by+cz+d=0$ un piano avente giacitura $\vec{U}: ax+by+cz=0$ allora il generico piano del fascio improprio di giacitura $\vec{U}$ ha eq.:

$$ax+by+cz+\mu=0$$

dove $\mu\in F$

ES.

Det. la retta $s$ passante per $Q=(1,0,1)$ e complanare alle rette

$$r: \begin{cases} x-y+1=0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad r' \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Sol.

la retta $s$ può essere pensata come intersezione tra due piani: il piano $\pi$ passante per $Q$ e contenente r ed il piano $\pi'$ passante per Q e contenente r'

- $\pi \in$ fascio proprio di piani di asse r :

$\lambda, \mu \in F \qquad \lambda(x-y+1)+\mu(y-z)=0, \qquad (\lambda,\mu)\neq(0,0)$

Imponiamo il passaggio per Q:

$$\lambda(1-0+1)+\mu(0-1)=0 \Rightarrow 2\lambda-\mu=0 \Rightarrow \mu=2\lambda$$

Pertanto $\lambda(x-y+1)+2\lambda(y-z)=0$.

Ma $\lambda\neq 0 \Rightarrow x-y+1+2(y-z)=0 \Rightarrow \pi: x+y-2z+1=0$

- $\pi \in$ fascio proprio di piani di asse r' : $\lambda, \mu \in F$

$$\lambda x+\mu y=0$$

Impongo il passaggio per $Q=(1,0,1)$

$$\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0=0 \Rightarrow \lambda=0$$

Pertanto $\mu y=0 \Rightarrow \pi': y=0$

Quindi

$$s: \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$v_s=\left(\det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c'\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c'\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b'\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(\det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=(2,0,1)$$

$$s: \begin{cases} x=2\alpha+1 \\ y=0 \\ z=\alpha+1 \end{cases}$$

DEFINIZIONE

Sia V F-sp. vett. Un prodotto scalare su V è un'applicazione da $V\times V$ in F, denotata $\langle\cdot,\cdot\rangle$, tale che:

1) $\forall\, v, w \in V$, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

2) $\forall\, v, w, u \in V$, $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

3) $\forall\, v, w \in V$ e $\forall\, \alpha \in F$, $\langle \alpha v, \alpha w\rangle = \alpha \langle v, w\rangle$

OSS.

1) + 2) $\Rightarrow$ $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle w, u\rangle$

DEFINIZIONE

Un prodotto scalare è detto non degenere se $\langle v, w\rangle = 0$, $\forall\, w \in V$ allora $v = 0$

ES.

Prodotto scalare "usuale": $V = F^m$

$\forall\, v, w \in F^m$, $v = (v_1, \dots, v_m)$, $w = (w_1, \dots, w_m) \Rightarrow$

$$\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_m w_m$$

ES.

$V = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ funzione continua} \} = \mathbb{R}$- sp. vett. (provarlo!)

$\forall\, f, g \in V$, si definisce in $V$ il seguente prodotto scalare degenere:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

DEFINIZIONE

Sia $V = F$- sp. vett. e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su $V$. Due vettori $v, w \in V$ sono detti ortogonali (o perpendicolari) se $\langle v, w\rangle = 0$

In tal caso scriviamo $v \perp w$

DEFINIZIONE

Sia $S$ un sottoinsieme di $V$. Allora si definisce:

$$S^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0,\ \forall\, w \in S \}$$

OSS.

$S^\perp$ è un sottosp. vett. di $V$

DIMOSTRAZIONE

1) $\forall\, u, v \in S^\perp \Rightarrow \forall\, w \in V,\quad \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0.$

Quindi $\langle u+v, w\rangle \overset{2)+1)}{=} \underbrace{\langle u, w\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, w\rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow u+w \in S^\perp$

2) $\forall\, u \in S^\perp,\ \forall\, \alpha \in F.\ \forall\, w \in S,\ \langle u, w\rangle = 0.$

Quindi $\langle \alpha u, w\rangle \overset{3)}{=} \alpha \underbrace{\langle u, w\rangle}_{=0} = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha u \in S^\perp$

OSS.

Sia $S$ sottoinsieme di $V$ e $U = \langle S\rangle$ sottosp. vett. generato da tutti i vettori di $S$.

Se $v \in S^\perp$ e se $w_1, w_2 \in S$, allora $\langle v, w_1+w_2\rangle \overset{2)}{=} \underbrace{\langle v, w_1\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, w_2\rangle}_{=0} = 0$

poichè $v \in S^\perp$

Inoltre $\forall\, \alpha \in F$, $\langle v, \alpha w_1\rangle \overset{3)}{=} \alpha \underbrace{\langle v, w_1\rangle}_{=0} = 0$

poichè $v \in S^\perp$

Pertanto se $v$ è ortogonale ad $S$, sarà ortogonale anche ad $U$.

DEFINIZIONE

Un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot\rangle$ è definito positivo se $\forall\, v \in V$:

1) $\langle v, v\rangle \geq 0$

2) $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$

ES.

$V = \mathbb{R}^m$, $v = (v_1, \dots, v_m)$, $w = (w_1, \dots, w_m)$

$$\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_m w_m$$

1) $\langle v,v\rangle = v_1^2+v_2^2+\ldots+v_m^2 \geq 0$ poichè somma di quadrati

2) $\langle v,v\rangle = 0 \iff v_1^2+v_2^2+\ldots+v_m^2 = 0 \underset{v_i \in \mathbb{R}}{\iff} v_1 = v_2 = \ldots = v_m = 0 \iff v = 0$

**DEFINIZIONE**

Uno spazio vettoriale euclideo è un sp. vett. $V$ su cui è definito un prodotto scalare definito positivo

**DEFINIZIONE**

Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno sp. vett. euclideo. Dato un vettore $v \in V$, si definisce lunghezza di $v$ (o norma di $v$), il numero $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

**OSS.**

$V = \mathbb{R}^m$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ prodotto scalare "usuale", allora $\forall v \in V$

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+\ldots+v_m^2}, \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

**DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ**

$\forall v, w \in V$ sp. vett. euclideo

$$\langle v,w\rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

**Es.**

$V = \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{R}$, $\|r\| = |r|$

**OSS.**

Da Schwartz, $\langle v,w\rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\|v\| \cdot \|w\| \leq \langle v,w\rangle^2 \leq \|v\| \cdot \|w\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists!\ \vartheta \in [0,\pi] \mid \cos\vartheta = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

**DEFINIZIONE**

Dati due vettori v e w di uno sp. vett. euclideo, l'angolo $\vartheta$ che v e w formano tra essi è quell'angolo tale che

$$\cos\vartheta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

OSS.

Due vettori v e w sono ortogonali $\Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0 \Leftrightarrow \cos\vartheta = 0$
$\Leftrightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ v e w sono perpendicolari "in senso classico"

PROPRIETÀ DELLA NORMA

Dato uno sp. vett. euclideo V:

1) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

$\forall v, w \in V, \ \forall \alpha \in F$

DEFINIZIONE

Sia V sp. vett. euclideo. Un versore di V è un vettore di norma 1

OSS.

Dato un vettore $v \in V$, $v \neq 0$, è possibile ottenere un versore considerando $\frac{v}{\|v\|}$

Infatti $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| \underset{2)}{=} \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| \underset{1)}{=} \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$

DEFINIZIONE

Sia V uno sp. vett. euclideo. Lo spazio affine associato a V è detto spazio affine euclideo

DEFINIZIONE

Dati due punti P e Q di uno sp. euclideo, si definisce distanza tra P e Q, la norma di $\overrightarrow{PQ}$, ossia:

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

Es.

$V = F^n$, $P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$

$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n) \Rightarrow d(P,Q) = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 + \dots + (q_n-p_n)^2}$

## Proprietà della distanza

1) $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$

2) $d(P,Q) = d(Q,P)$

3) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$

## Definizione

Siano r e r' due rette aventi v e v' come vettori direzione.

Allora l'angolo formato da r e r' è pari all'angolo $\vartheta$ formato da v e v',

ossia $\vartheta \in [0, \pi] \mid \cos\vartheta = \dfrac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \cdot \|v\|}$

## Definizione

Due rette sono dette perpendicolari se l'angolo che formano è $\frac{\pi}{2}$

Es.

$V = F^2$ $\quad r: ax + by + c = 0 \quad r': a'x + b'y + c' = 0$

$v = (-b, a)$ vett. dir. di r

$v' = (-b', a')$ vett. dir. di r'

$$\cos\vartheta = \frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \cdot \|v\|} = \frac{bb' + aa'}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

$r \perp r' \iff v \perp v' \iff \cos\vartheta = 0 \iff bb' + aa' = 0$

Es.

Det. la retta r passante per $P = (0, 1, -1)$ e perpendicolare alla retta

$$r': \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

sol.

$v_r = (v_1, v_2, v_3)$ vettore direzione di $r$

$v_{r'} = (-1, 1, 2)$ vettore direzione di $r'$

- Impongo la perpendicolarità con $r'$:

$$r \perp r' \iff v_r \perp v_{r'} \iff \langle v_r, v_{r'} \rangle = 0 \iff v_1 \cdot (-1) + v_2 \cdot 1 + v_3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -v_1 + v_2 + 2v_3 = 0$$

- $r \perp r'$ perpendicolari $\Rightarrow$ $r$ ed $r'$ incidenti $\Rightarrow$ $r$ ed $r'$ sono complanari $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ imponiamo la complanarità tra $r$ ed $r'$

$$\begin{matrix} P = (0, 1, -1) \in r \\ P' = (0, 2, 1) \in r' \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = (0-0, 2-1, 1-(-1)) = (0, 1, 2)$$

$$r \text{ e } r' \text{ sono complanari} \iff \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\cancel{2v_1} - 2v_2 - \cancel{2v_1} + v_3 = 0 \Rightarrow 2v_2 - v_3 = 0$$

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 + 2v_3 = 0 \\ 2v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 2v_2 \\ -v_1 + v_2 + 4v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 2v_2 \\ v_1 = 5v_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_r = (5v_2, v_2, 3v_2)$. In particolare scelgo $v_2 = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_r = (5, 1, 2)$

$$r: \begin{cases} x = 5\alpha \\ y = \alpha + 1 \\ z = 2\alpha - 1 \end{cases}$$

Es.

Det. la retta $r$ passante per $P = (1, 0, 1)$, che forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la retta

$r': \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ e che è perpendicolare all'asse $x$

sol.

$v_r = (v_1, v_2, v_3)$ versore dir. di $r$; $v_{r'} = (1, 1, 0)$ versore dir. di $r'$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$v_r = (v_1, v_2, v_3)$ versore dir. di $r$; $v_{r'} = (1,1,0)$ versore dir. di $r'$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\|v_r\| = 1$ $\qquad\qquad$ $\|v_{r'}\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ $\qquad\qquad$ $v' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ versore

$\Downarrow$

$$\frac{v_{r'}}{\|v_{r'}\|}$$

- Impongo che $\vartheta = \frac{\pi}{4}$: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\langle v_r, v' \rangle}{\|v_r\| \cdot \|v'\|}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\langle (v_1, v_2, v_3), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \rangle}{\underbrace{\|v_r\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|v'\|}_{=1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{v_1}{\sqrt{2}} + \frac{v_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_1 + v_2 = 1$$

$$\left[ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = 1 \qquad v_r = (v_1, v_2, v_3) \quad v_{r'} = (1,1,0) \right]$$

- Impongo che $r \perp$ asse $x$: asse $x$: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ il versore direzione

dell'asse $x$ è $(1,0,0) = v_x$

$r \perp$ asse $x \Leftrightarrow \langle v_r, v_x \rangle = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1 + v_2 = 1 \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 1 \\ \cancel{1} + v_3^2 = \cancel{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_r = (0,1,0)$$

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases} \qquad P = (1,0,1)$$

DEFINIZIONE

Un vettore $v$ è ortogonale ad un sottosp. affini $U$, se $v$ è ortogonale ad ogni vettore della giacitura $\vec{U}$.

**Oss.**

$V = F^3$, $r: ax + by + c = 0 \Rightarrow \vec{r}: ax + by = 0$

$\forall w \in \vec{r}$, $w = (w_1, w_2) \Rightarrow w$ soddisfa l'equazione di $\vec{r}$, ossia

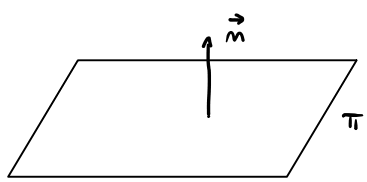
$aw_1 + bw_2 = 0 \Rightarrow \langle (a,b), w \rangle = 0 \Rightarrow$ il vettore $(a,b)$ è ortogonale ad $r$.

Tutti gli altri vettori ortogonali sono proporzionali ad $(a,b)$

**Oss.**

$V = F^3$, $\pi: ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \vec{\pi}: ax + by + cz = 0$.

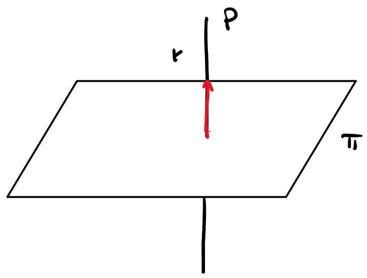
Il vettore $m = (a,b,c)$ è un vettore ortogonale a $\pi$.




**Es.**

Det. la retta passante per $P = (1,2,1)$ e ortogonale a $\pi: x + 2y - 3z + 1 = 0$

Sol.




Un vettore ortogonale a $\pi$ è un vettore direzione di $r$:

$m = (1,2,-3) = v_r$

$$r: \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = -3\alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

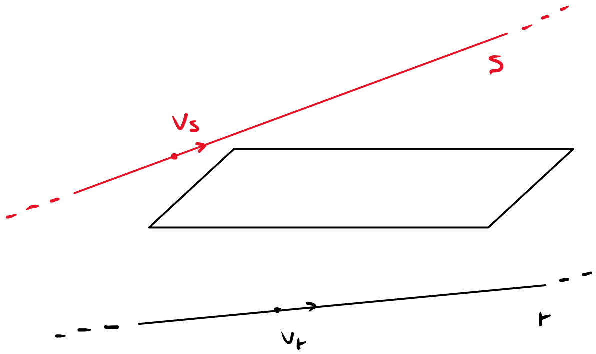
**Es.**

$V = F_2[x]$. Det. il piano $\pi$ passante per $P(x) = 1 - x + x^2$ e parallelo alle rette

$$r: \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Sol.

$P(x) = (1, -1, 1)$




I vettori direzione di $r$ ed $s$ sono i vettori direzione di $\pi$

$v_r = (-1, 1, 1)$ vett. dir. di $r$

$v_s = (-1, 1, -1)$ vett. dir. di $s$

$v_r$ e $v_s$ sono lin. ind. $\Rightarrow$ $r$ ed $s$ non sono parallele!

$$\pi: \begin{cases} x = -\alpha - \beta + 1 \\ y = \alpha + \beta - 1 \\ z = \alpha - \beta + 1 \end{cases} \Rightarrow \pi: x + y = 0$$

**Es.**

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in F \right\} \cong F^3$$

Det. le eq. del piano $\pi$ passante per $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e contenente la retta $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

<u>Sol.</u>

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \equiv (1, 1, -1)$$

Scriviamo il fascio proprio di piani di asse $r$ e imponiamo il passaggio per $P$:

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(y - z) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

$$\lambda(1 + 1 - 1) + \mu(1 - (-1)) = 0 \Rightarrow \lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -2\mu$$

$$\Rightarrow -2\mu(x + y - 1) + \mu(y - z) = 0 \Rightarrow -2(x + y - 1) + y - z = 0$$

$$\Rightarrow \pi: -2x - y - z + 2 = 0$$

# DISTANZA E PUNTO MEDIO

Tuesday, January 18, 2022 2:27 PM

## PUNTO MEDIO

$F^n$, $P = (p_1, \dots, p_n)$; $Q = (q_1, \dots, q_n)$ il punto medio $M$ del segmento $PQ$ è t.c. $d(P,M) = d(Q,M)$

$$M = \left( \frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2}, \dots, \frac{p_n+q_n}{2} \right)$$

## DEFINIZIONE

Siano $\pi$ e $\pi'$ due piani di $F^3$ e siano $n$ ed $n'$ vettori ortogonali a $\pi$ e a $\pi'$, rispettivamente.
L'angolo $\vartheta$ formato da $\pi$ e $\pi'$ è uguale all'angolo formato tra $n$ ed $n'$, ossia:

$$\vartheta \in [0, \pi] \quad \text{t.c.} \quad \cos\vartheta = \frac{\langle n, n' \rangle}{\|n\| \cdot \|n\|}$$

## OSSERVAZIONE

$\pi = ax + by + cz + d = 0$ ; $\pi' = a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$$\pi \perp \pi' \iff \underset{(a,b,c)}{n} \perp \underset{(a',b',c')}{n'} \iff \cos\vartheta = 0 \iff \frac{\langle n, n' \rangle}{\|n\| \cdot \|n\|} = 0 \iff$$

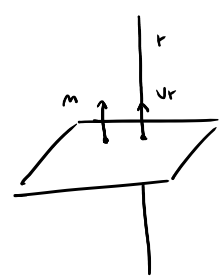
$$\langle n, n' \rangle = 0 \iff aa' + bb' + cc' = 0$$

## DEFINIZIONE

Siano $r$ una retta e $\pi$ un piano. Siano $v_r$ un vett. dir. di $r$ ed $n$ un vett. ortogonale a $\pi$.
L'angolo $\vartheta$ formato tra $r$ e $\pi$ è uguale al complementare dell'angolo formato da $v_r$ ed $n$, ossia

$$\vartheta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{t.c.} \quad \sin\vartheta = \frac{\langle v_r, n \rangle}{\|v_r\| \cdot \|n\|}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\langle v_r, n \rangle}{\|v_r\| \cdot \|n\|} \neq 0$$




## OSSERVAZIONE

$r$ e $\pi$ sono ortogonali se $v_r$ ed $n$ sono lin. dip.

OSSERVAZIONE

$v_r = (v_1, v_2, v_3)$

$n = (a, b, c)$

$r \parallel \pi \iff \sin\vartheta = 0 \iff \langle v_r, n \rangle = 0 \iff a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$

DISTANZA PUNTO - PIANO

$P = (p_1, p_2, p_3)$

$\pi = ax + by + cz + d = 0$

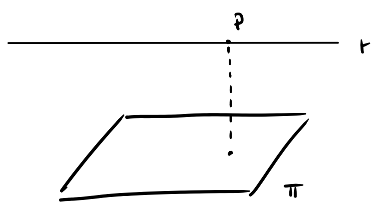
$$d(P, \pi) = \frac{|a p_1 + b p_2 + c p_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

DISTANZA RETTA - PIANO

1) Se $r$ e $\pi$ sono incidenti $\Rightarrow d(r, \pi) = 0$

2) Se $r \subseteq \pi \Rightarrow d(r, \pi) = 0$

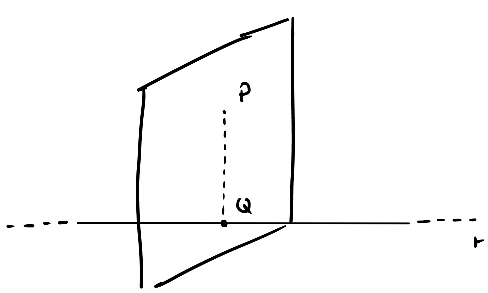
3) Se $r \parallel \pi$ ma $r \subseteq \pi \Rightarrow d(r, \pi) =$ distanza tra un punto qualsiasi di $r$ ed un $\pi$




DISTANZA PUNTO - RETTA

1) Se $P \in r \Rightarrow d(P, r) = 0$

2) Se $P \notin r \Rightarrow d(P, r) = d(P, Q)$, dove $Q = r \cap \pi$ e $\pi =$ piano passante per $P$ ed ortogonale ad $r$

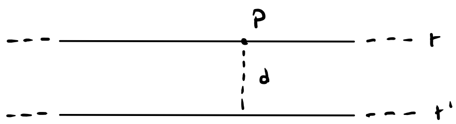


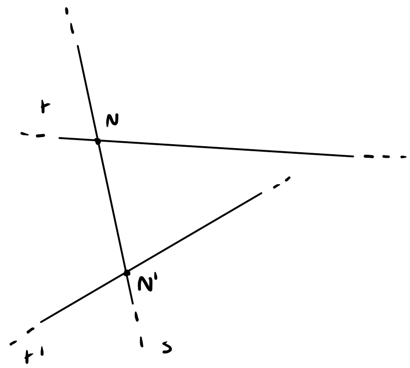

DISTANZA RETTA - RETTA

1) Se $r$ ed $r'$ sono incidenti $\Rightarrow d(r, r') = 0$

2) Se $r \parallel r' \Rightarrow d(r,r') = d(P,r')$ dove $P \in r$ qualsiasi:

3) Se $r$ ed $r'$ sono sghembe $\Rightarrow d(r,r') = d(N,N')$ dove $N \in r$ ed $N' \in r'$ sono punti t.c. la retta passante per $N$ ed $N'$ è ortogonale ad $r$ e ad $r'$




ESEMPIO

$P = (1,0,2)$ ; $\quad r: \begin{cases} 2x+y+3=0 \\ x-2y+z-1=0 \end{cases} \qquad d(P,r) = ?$

1) $P \in r$ ?: $\quad 2\cdot 1 + 0 + 3 \neq 0 \rightarrow P \notin r$

2) $Q = r \cap \pi$ dove $\pi$ è il piano passante per $P$ e ortogonale a $r$

a) determiniamo $\pi$: $\quad n = (a,b,c)$ vett. ortog. a $\pi$

$v_r = (1,-2,-5)$ vett. dir. di $r$

$\pi \perp r \Rightarrow n$ e $v_r$ sono lin. dip. $\Rightarrow$ in particolare posso scegliere

$n = v_r \Rightarrow n = (1,-2,-5) \Rightarrow \pi: x - 2y - 5z + d = 0$

$P \in \pi \Leftrightarrow 1 - 5\cdot 2 + d = 0 \Rightarrow 1 - 10 + d = 0 \Rightarrow d = 9$

$\pi: x - 2y - 5z + 9 = 0$

b) determiniamo $Q = r \cap \pi$ :

$$\begin{cases} x-2y-5z+9=0 \\ 2x+y+3=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \underset{1^\circ - 3^\circ}{\Rightarrow} \begin{cases} -6z+10=0 \\ 2x+y+3=0 \\ x-2y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{5}{3} \\ 2x+y+3=0 \\ x-2y+\frac{5}{3}-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\frac{5}{3} \\ 4x+2y+6=0 \\ x-2y+2/3=0 \end{cases} \qquad 5x \quad \cancel{\ } + \frac{22}{3} = 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} z = 5/3 \\ x = -4/3 \\ y = -2x-3 = \frac{8}{3} - 3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$Q = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

c) determiniamo $d(P,Q)$

$$d(P,Q) = d(P,r) = \sqrt{\left(1+\frac{4}{3}\right)^2 + \left(0+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(2-\frac{5}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{49}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{51}{9}} = \frac{\sqrt{51}}{3}$$

ESERCIZIO

Distanza tra $r: \begin{cases} 2x-y+z-2=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ $\quad r': \begin{cases} 3x-y+1=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$

1) Posizione tra r ed r':

$V_r = (-1,1,3)$

$V_{r'} = (3,9,-2)$

$\Rightarrow V_r$ e $V_{r'}$ non sono lin. dip.

$\Rightarrow$ r e r' non sono paralele

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 9+2+27+3 \neq 0$

$\Downarrow$

r ed r' sono sghembe

$P \in r \quad Q \in r' \quad \overrightarrow{PQ}$

$P = (1,1,1)$

$Q = (0,1,0)$

$\overrightarrow{PQ} = (0-1, 1-1, 0-1) =$

$= (-1,0,-1)$

2) Calcolo distanza:

$N \in r$, $N' \in r'$ t.c. la retta passante per N e per N' è ortogonale ad r ed a r'

$N = (x_0, y_0, z_0)$ $\quad N' = (x_0', y_0', z_0')$

$N \in r \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 - y_0 + z_0 - 2 = 0 & ① \\ x_0 - 2y_0 + z_0 = 0 & ② \end{cases}$

$V_r = (-1,1,3)$

$V_{r'} = (3,9,-2)$

$N' \in r' \Rightarrow \begin{cases} 3x_0' - y_0' + 1 = 0 & ③ \\ 2x_0' + 3z_0' = 0 & ④ \end{cases}$

$\overrightarrow{NN'}$ è ortogonale a $V_r$ e ad $V_{r'}$ $\Rightarrow \overrightarrow{NN'} = (x_0'-x_0,\ y_0'-y_0,\ z_0'-z_0)$

$\overrightarrow{NN'} \perp v_r \Rightarrow \langle \overrightarrow{NN'}, v_r \rangle = 0 \Rightarrow -(x_0' - x_0) + (y_0' - y_0) + 3(z_0' - z_0) = 0$ ⑤

$\overrightarrow{NN'} \perp v_{r'} \Rightarrow \langle \overrightarrow{NN'}, v_{r'} \rangle = 0 \Rightarrow 3(x_0' - x_0) + 9(y_0' - y_0) - 2(z_0' - z_0) = 0$ ⑥

Mettendo a sistema le equazioni ① - ⑥ e risolvendo tale sistema si ottengono le coordinate di N e N' $\Rightarrow d(r, r') = d(N, N')$

ESERCIZIO

Determinare il piano $\pi'$ contenente la retta $r: \begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

ed ortogonale al piano $\pi: x + 2y - 3z + 2 = 0$

SOL.

$\pi' \in$ fascio di piani di asse $r$:

$$\lambda(2x + 5y - 3) + \mu(y + 2z - 1) = 0 \qquad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$
$$2\lambda x + (5\lambda + \mu)y + 2\mu z - 3\lambda - \mu = 0$$

$n_{\pi'} = (2\lambda, 5\lambda + \mu, 2\mu)$ vett. ortogonale a $\pi'$

$n_\pi = (1, 2, -3)$

$\pi \perp \pi' \iff n_\pi \perp n_{\pi'} \iff \langle n_{\pi'}, n_\pi \rangle = 0 \iff$

$2\lambda + 2(5\lambda + \mu) - 3 \cdot 2\mu = 0 \iff 2\lambda + 10\lambda + 2\mu - 6\mu = 0$

$\iff 12\lambda - 4\mu = 0 \iff \mu = 3\lambda$

$2\lambda x + (5\lambda + 3\lambda)y + 6\lambda z - 3\lambda - 3\lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\lambda x + 8\lambda y + 6\lambda z - 6\lambda = 0$, dividiamo per $2\lambda$

$\Rightarrow \pi': x + 4y + 3z - 3 = 0$

ESERCIZIO

Determinare i piani contenenti l'asse z che formano un angolo di $\pi/3$ con il piano $\pi: x - z = 0$

SOL.

asse z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad \pi' \in$ fascio di piani di asse l'asse z $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda x + \mu y = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$

$n_{\pi'} = (\lambda, \mu, 0)$

$\vartheta = \pi/3 \Rightarrow \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$

$n_\pi = (1, 0, 0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\langle m_{\pi'}, m_\pi \rangle}{\|m_{\pi'}\| \cdot \|m_\pi\|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \Rightarrow 2\lambda = \sqrt{\lambda^2+\mu^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 = \lambda^2+\mu^2 \Rightarrow 3\lambda^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm\sqrt{3}\,\lambda \Rightarrow$$

i piani sono due e corrispondono ai valori $\mu = \sqrt{3}\,\lambda$ e $\mu = -\sqrt{3}\,\lambda \Rightarrow$

$$\pi_1' : x + \sqrt{3}\,y = 0 \; ; \; \pi_2' : x - \sqrt{3}\,y = 0$$

ESERCIZIO

Determinare le rette perpendicolari all'asse y che formano un angolo di $\pi/6$ con il piano $\pi : 2x + y + 2z - 3 = 0$

SOL.

asse y : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad v_r = (v_1, v_2, v_3)$ vett. dir. di r

$v_y = (0, 1, 0)$ vett. dir. dell'asse y

1) Perpendicolarità con asse y

$$r \perp \text{asse } y \iff \langle v_r, v_y \rangle = 0 \iff v_2 = 0$$

2) angolo con $\pi$ : $\quad m_\pi = (2, 1, 2)$

$$\vartheta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\langle m_\pi, v_r \rangle}{\|m_\pi\| \cdot \|v_r\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2v_1 + v_2 + 2v_3}{3\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

3) $v_r$ è un versore : $\quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$

$$\begin{cases} v_2 = 0 \\ \frac{1}{2} = \frac{2v_1 + v_2 + 2v_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^3}} \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ 2(2v_1 + 2v_3) = 3 \\ v_1^2 + v_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_3 = \frac{3-4v_1}{4} \\ v_1^2 + \frac{(3-4v_1)^2}{16} = 1 \end{cases}$$

$$16v_1^2 + 9 - 24v_1 + 16v_1^2 - 16 = 0 \Rightarrow 32v_1^2 - 24v_1 - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = 12 \pm \sqrt{144+224} = \frac{12 \pm \sqrt{368}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{23}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{23}}{8}$$

$$v_{r_1} = \left( \frac{3+\sqrt{23}}{8}, 0, v_3 \right) \quad v_3 = \frac{3 - 4 \cdot \frac{3+\sqrt{23}}{16}}{4}$$

$$v_{r_2} = \left( \frac{3-\sqrt{23}}{8}, 0, v_3' \right) \quad v_3' = \frac{3 - 4 \cdot \frac{3-\sqrt{23}}{16}}{}$$

$$\frac{\quad}{4}$$

$$V_{r_2} = \left( \frac{3-\sqrt{23}}{8}, 0, V_3' \right) \qquad V_3' = \frac{3 - 4 \cdot \frac{3-\sqrt{23}}{16}}{4}$$

ESERCIZIO

Sia $\pi$ il piano passante per $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (0,1,0)$ e $P_3 = (0,1,1)$.
Sia $r$ la retta passante per $Q = (1,1,0)$ e avente direzione $w = (0,1,0)$

a) Qual è la mutua posizione di $r$ e $\pi$ ?

b) Sia $s$ la retta passante per $P_1$ e avente direzione $v = (0,0,1)$

Qual è la mutua posizione tra $s$ e $\pi$ ? E tra $r$ ed $s$ ?

SOL.

a) Due vettori direzione di $\pi$ saranno ad esempio

Calcoliamo $\pi$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{P_1P_2} = (0-1, 1-0, 0-1) = (-1, 1, -1)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (0-1, 1-0, 1-1) = (-1, 1, 0)$ sono lin. dip. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P_1$, $P_2$ e $P_3$ non sono allineati $\Rightarrow$ $\pi$ è univocamente determinato

$$\pi : \begin{cases} x = -\alpha - \beta + 1 \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\alpha + 1 \end{cases}$$

passiamo alle equazioni cartesiane

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cancel{(z-1)} + y + \cancel{(z-1)} + (x-1) = 0 \Rightarrow \pi : x + y - 1 = 0$$

Calcoliamo $r$

$Q = (1,1,0)$ $\quad w = (0,1,0)$

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

passiamo alle cartesiane

$$r \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ y-1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Analizziamo la posizione di r e $\pi$ :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot [-1] = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ r e $\pi$ sono incidenti e la loro intersezione è un punto

$$\begin{cases} x+y-1 = 0 \\ x-1=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow R = r \cap \pi = (1,0,0)$$

b)

$P_1 = (1,0,1) \qquad v = (0,0,1)$

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Studiamo la posizione tra $\pi$ e s : $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow s \parallel \pi$

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow s \subseteq \pi$$

$A^3 = 0$ e $A^4 = -A^1$ , $A^1$ e $A^2$ sono lin. ind.

Studiamo la posizione tra r ed s :

$$r: \begin{cases} x-1=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

poichè l'equazione cartesiana $x-1=0$ compare sia in r che in s le due rette saranno complanari:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r \text{ ed } s \text{ sono complanari}$$

$A_1 = A_3$

r ed s sono parallele o incidenti ?

$$r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow r \text{ ed } s \text{ sono incidenti}$$

$A_1 = A_3$ e $A_1, A_2, A_4$ formano la base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ z=0 \\ \cancel{x-1=0} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow R = r \cap s = (1,0,0)$$

ESERCIZIO

$$r: \begin{cases} x-y+z=2 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+2y-z=2 \\ x-z=0 \end{cases}$$

1) Verificare che r ed s sono sghembe

2) Calcolare la distanza

SOL.

1) $V_r = (1,0,-1) \qquad V_s = (1,0,1)$

$$r: \begin{cases} y=-2 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y=1 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Si osservi che $V_r$ e $V_s$ non sono proporzionali $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $V_r$ e $V_s$ sono lin. indip. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ r ed s non sono parallele

$P_r = (0,-2,0) \qquad P_s = (0,1,0)$

$\overrightarrow{P_rP_s}\ (0,3,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = (-1)^{3+2} \cdot 3 \cdot (1+1) = -6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ r ed s sono sghembe

2) $d(r,s) = d(N,N')$ t.c. $N \in r$, $N' \in s$ e la retta passante per N ed N' è ortogonale sia ad r che ad s

$N = (x_0, y_0, z_0) \qquad N' = (x_0', y_0', z_0') \qquad \overrightarrow{NN'} = (x_0'-x_0,\ y_0'-y_0,\ z_0'-z_0)$

a) $N \in r \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ x_0 + z_0 = 0 \end{cases}$

b) $N' \in s \Rightarrow \begin{cases} y_0' = 1 \\ x_0' - z_0' = 0 \end{cases}$

c) $\overrightarrow{NN'} \perp v_r = \langle \overrightarrow{NN'}, v_r \rangle = 0 \Rightarrow x_0' - x_0 - z_0' + z_0 = 0$

d) $\overrightarrow{NN'} \perp v_s = \langle \overrightarrow{NN'}, v_r \rangle = 0 \Rightarrow x_0' - x_0 + z_0' - z_0 = 0$

$$\begin{cases} y_0 = -2 \\ y_0' = 1 \\ x_0 + z_0 = 0 & 3° + 4° \\ x_0' - x_0 + z_0' - z_0 = 0 \\ x_0' - z_0' = 0 & 5° + 6° \\ x_0' - x_0 - z_0' + z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ y_0' = 1 \\ x_0' + z_0' = 0 & 3° + 4° \\ x_0' - z_0' = 0 \\ x_0 - z_0 = 0 & 5° + 6° \\ x_0 + z_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = -2 \\ y_0' = 1 \\ x_0' = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_0' - z_0' = 0 \\ x_0 - z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ y_0' = 1 \\ x_0' = 0 \\ x_0 = 0 \\ z_0' = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

$N = (0, -2, 0)$

$N' = (0, 1, 0)$

GAUSS

$$\begin{cases} y_0 = -2 \\ y_0' = 1 \\ x_0 + z_0 = 0 \\ x_0' - x_0 + z_0' - z_0 = 0 \\ x_0' - z_0' = 0 \\ x_0' - x_0 - z_0' + z_0 = 0 \end{cases}$$

$x_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad x_0' \quad y_0' \quad z_0'$

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0 & y_0 & z_0 & x_0' & y_0' & z_0' & \\
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right) \xrightarrow[R_5 - R_6]{R_3 + R_4}$$

$$d(r, r') = d(N, N') = \sqrt{(0-0)^2 + (1-(-2))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9} = 3$$