

# EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI

martedì 21 giugno 2022 22:23

Ricordiamo brevemente il concetto di <<impulso>>

$$F = m \cdot a$$

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

$$F dt = m \cdot dv$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = m \Delta v$$

Se  $\bar{F}$  è il valore medio della forza nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $m\Delta v$  è la variazione della quantità di moto della particella  $m$

$$\bar{F} \Delta t = 2mv_{ix}$$

Consideriamo adesso un sistema formato da un gas di  $N$  particelle di massa  $m$  in una scatola chiusa cubica di lato  $d$  e di volume  $V = d^3$ : Indichiamo con  $F_i$  la forza media esercitata dopo un urto su una parete da una singola particella, e con  $\Delta t$  è il tempo tra due urti successivi. Indichiamo inoltre con  $v_{ix}$  la componente lungo l'asse  $x$  della velocità della generica particella  $i$ -esima

$$F_i \Delta t = 2mv_{ix}$$

$$\Delta t = \frac{2d}{v_{ix}}$$

$$F_i = \frac{mv_{ix}^2}{d}$$

$P_i$  è il contributo alla pressione di una singola particella:

$$P_i = \frac{F_i}{d^2} = \frac{(mv_{ix})^2}{d^3} = \frac{(mv_{ix})^2}{d}$$

$\overline{v_x^2}$  è il valore medio del quadrato della componente lungo  $x$  della velocità:

$$P = \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N \frac{(mv_{ix})^2}{V} = N \frac{m \overline{v_x^2}}{V}$$

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2})$$

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} k_B T$$

è l'energia cinetica media per grado di libertà di ogni singola particella

DEFINIZIONE DI TEMPERATURA T:

$$\frac{1}{2} k_B T$$

è l'energia di una singola particella per ognuno dei gradi di libertà possibili.

$$k_B$$

è la costante di Boltzmann

$$k_B = 1.38064852 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} k_B T$$

U è l'energia interna del sistema  $n_g$  è il numero di gradi di libertà della singola molecola (3 per un gas monoatomico):

$$U = n_g \left( \frac{1}{2} k_B T \right) N = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$PV = N m \overline{v_x^2}$$

$$PV = N k_B T \quad (1)$$

Il numero di particelle è uguale al numero di moli per il numero di Avogadro

$$A_V = 6.022140857 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$N = n A_V$$

R è la costante universale dei gas perfetti:

$$R = A_v k_B$$

$$R = 8.3144598 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$PV = Nk_B T = nA_v k_B T = nRT$$

$$U = \frac{3}{2} Nk_B T = \frac{3}{2} nRT \quad (2)$$

Equazione di stato dei gas perfetti:

$$PV = nRT$$

Il ruolo della costante di Boltzmann è quello di convertire la scala dei gradi Kelvin in Joule ed è quindi analoga a una costante di conversione tra diverse unità di misura.

# PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

giovedì 23 giugno 2022 02:08

## DEFINIZIONE DI PRESSIONE

giovedì 23 giugno 2022 02:08

La pressione  $P$  è definita come forza  $F$  per unità di area  $A$

$$P = \frac{F}{A}$$

di conseguenza

$$L = \int F dx = \int \frac{F}{A} A dx = \int \underbrace{PA}_{P dV} dx = \int P dV$$

Se  $P$  è costante si può scrivere

$$L = P \int dV = P \Delta V$$

dove  $P$  è la pressione,  $\Delta V$  è la variazione di volume del gas e  $L$  è il lavoro prodotto dalla pressione  $P$

# DEFINIZIONE DEL PRIMO PRINCIPIO

giovedì 23 giugno 2022 10:33

Se  $Q$  è il calore (energia termica) immesso nel sistema,  $\Delta U$  è la variazione di energia interna (energia cinetica dovuta al moto disordinato delle molecole) ed  $L$  è il lavoro generato dall'espansione del gas, vale la relazione

$$\overset{\text{CALORE}}{Q} = \overset{\text{LAVORO}}{\Delta U} + L \quad (3)$$

VARIAZIONE  
ENERGIA INTERNA

Il primo principio è quindi una particolare riformulazione del principio di conservazione dell'energia

## CALORE SPECIFICO A VOLUME COSTANTE $C_v$

giovedì 23 giugno 2022 10:34

Nel caso in cui il lavoro  $L$  sia zero, come nel caso delle trasformazione a volume costante (trasformazioni isocore), la capacità termica  $C$  definisce il rapporto tra calore e temperatura:

$$\overset{\text{CALORE SCAMBIATO}}{\text{CON L'AMBIENTE}} \quad Q = \overset{\text{VARIATIONE DI}}{\Delta U = \text{ENERGIA INTERNA}} C \Delta T \quad \text{ISOCORA}$$

Se  $n$  è il numero di moli del gas e  $c_v$  è la capacità termica di una singola mole (definita come <<calore specifico>>), abbiamo:

$$C = n c_v$$

$$Q = \Delta U = n c_v \Delta T$$

La capacità termica di un gas è quindi uguale al calore specifico del gas moltiplicato il numero di moli.

## CALORE SPECIFICO A PRESSIONE COSTANTE $C_p$ E RELAZIONE DI MAYER

giovedì 23 giugno 2022 10:37

Se  $n$  è il numero di moli e  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante di una singola mole, possiamo scrivere

$$Q = mc_p \Delta T = \Delta U + L = \Delta U + P \Delta V$$

$$\Delta U = mc_p \Delta T - L \quad \text{ISOBARA}$$

$$\Delta U = mc_v \Delta T$$

$$PV = nRT$$

$P \Delta V$  è il lavoro  $L$  generato dall'espansione del gas a pressione costante  $P$ :

$$L = P \Delta V = nR \Delta T$$

$$mc_p \Delta T = mc_v \Delta T + nR \Delta T$$

Da cui si ottiene la Relazione di Mayer:

$$c_p - c_v = R \quad (4)$$



## CALORE SPECIFICO A VOLUME COSTANTE E PRESSIONE COSTANTE

martedì 23 agosto 2022 18:59

Per calcolare l'energia interna di una mole di gas, detto  $f$  il numero di gradi di libertà di una molecola basta moltiplicare l'energia media di una molecola per il numero di Avogadro

$$\Delta U = \frac{f}{2} RT \quad C_V = \frac{dU}{dT}$$

$$C_V = \frac{f}{2} R \quad C_P = C_V + R = \frac{f}{2} R + R = \frac{R}{2} (f+2)$$

Gas Monoatomico: se il gas ha molecola monoatomica, i suoi gradi di libertà sono 3. Infatti si può muovere liberamente nello spazio tridimensionale. Pertanto:

$$C_V = \frac{3}{2} R \quad C_P = \frac{5}{2} R$$

Gas Biatomico: se il gas ha molecola biatomica rigida i gradi di libertà diventano 5. Infatti per individuare l'energia cinetica della molecola occorrono le 3 componenti della velocità del suo CdM (Centro di Massa) e 2 componenti di rotazione intorno al CdM

$$C_V = \frac{5}{2} R \quad C_P = \frac{7}{2} R$$

## ESPANSIONE A TEMPERATURA COSTANTE

giovedì 23 giugno 2022 10:43

Non vi è variazione di energia interna in una trasformazione isoterma:

$$dU = 0 \quad \text{ISOTERMA}$$

$dL$  è il differenziale del lavoro compiuto dalla pressione  $P$  in corrispondenza di una espansione  $dV$

$$P dV = dL$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$dL = P dV = \frac{nRT}{V} dV$$

$L$  è il lavoro compiuto in una trasformazione isoterma in seguito ad una variazione di volume da  $V_1$  a  $V_2$  :

$$L = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT (\ln V_2 - \ln V_1) = nRT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (5)$$

# TRASFORMAZIONI ADIABATICHE

giovedì 23 giugno 2022 14:15

In una trasformazione adiabatica non vi è scambio di calore con l'esterno ( $dQ = 0$ ) quindi possiamo scrivere:

$$dU = dQ - PdV$$

la variazione di energia interna è uguale al lavoro svolto dal sistema, cambiato di segno

$$dU = -dL = -PdV$$

la variazione di energia interna è uguale al numero di moli  $n$  per il calore specifico a volume costante  $c_v$  per la variazione di temperatura  $dT$  :

$$dU = -dL = n c_v dT$$

Il lavoro compiuto da una trasformazione adiabatica è uguale alla perdita di energia interna del sistema:

$$L = -\int dU = -n c_v \int_{T_1}^{T_2} dT = -n c_v (T_2 - T_1)$$

Per una mole ( $n = 1$ ) la capacità termica è uguale al calore specifico:

$$dU = c_v dT$$

$$-PdV = c_v dT$$

Differenziando l'eq.  $PV = nRT$  abbiamo

$$PdV + VdP = RdT$$

$$dT = \frac{PdV + VdP}{R}$$

$$dT = \frac{P dV + V dP}{R}$$

$$dT = - \frac{P dV}{C_v}$$

sostituendo dT si ha:

$$P dV = -C_v \frac{P dV + V dP}{R}$$

utilizzando la relazione di Mayer

$$C_p - C_v = R$$

e chiamando  $\gamma$  il rapporto  $C_p/C_v$  possiamo scrivere

$$C_v \left( \frac{C_p}{C_v} - 1 \right) = C_v (\gamma - 1) = R$$

$$\frac{C_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

$$P dV = - \frac{P dV + V dP}{\gamma - 1}$$

$$P(\gamma - 1) dV = -P dV - V dP$$

$$\gamma P dV = -V dP$$

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

$$\gamma \int \frac{dV}{V} = - \int \frac{dP}{P}$$

$$\gamma \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right) = \ln \left( \frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$\left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = \frac{P_1}{P_2}$$

Otteniamo quindi una importante proprietà delle trasformazioni adiabatiche:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$P V^\gamma = \text{cost} \quad (6)$$

Utilizzando adesso l'equazione dei gas ideali

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$\frac{nRT}{V} V^\gamma = \text{cost}$$

$$nRT V^{\gamma-1} = \text{cost}$$

Otteniamo un'altra proprietà delle trasformazioni adiabatiche

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

## PASSAGGI DI STATO

lunedì 1 agosto 2022 17:42

Molte sostanze sono caratterizzate da due temperature: La temperatura di fusione e la temperatura di ebollizione. Entrambe le temperature sono funzioni della pressione. Una sostanza se riscaldata, una volta raggiunta la sua temperatura di fusione, necessita di una precisa quantità di calore per passare dallo stato solido a quello liquido. Tale quantità viene definita calore latente di fusione. Un discorso analogo viene fatto per il passaggio di stato da liquido a gassoso. La quantità di energia necessaria affinché avvenga un passaggio di stato dipende dalla sostanza, dalla sua massa e dal tipo di passaggio.

Per la fusione:

$$Q = m \Delta E_{fus}$$

Per l'ebollizione

$$Q = m \Delta E_{eb}$$

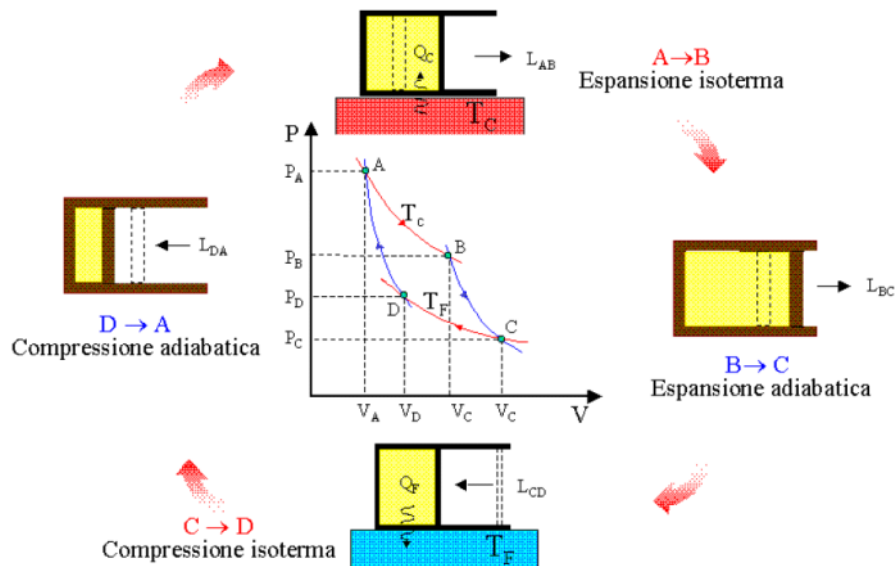
dove  $Q$  è la quantità di calore assorbita o rilasciata durante il processo,  $m$  la massa della sostanza mentre  $\Delta E_{fus}$  e  $\Delta E_{eb}$  rappresentano rispettivamente il calore specifico di fusione e di ebollizione. Vengono riportati i calori molari di fusione e di ebollizione di alcune specie più comuni:

Sostanza	$\Delta E_{fus} (kJ/mol)$	$\Delta E_{eb} (kJ/mol)$
Ammoniaca	5.65	23.4
Etanolo	4.60	43.5
Metanolo	3.16	35.5
Ossigeno	0.44	6.82
Acqua	6.01	40.7

# CICLO DI CARNOT

lunedì 1 agosto 2022 17:51

Il Ciclo di Carnot per un gas ideale è un ciclo reversibile composto da due isoterme e due adiabatiche



1) Trasformazione da A a B: Espansione isoterma a temperatura costante  $T_c$ . Nella espansione isoterma di un gas ideale la variazione di energia interna è nulla, di conseguenza tutto il calore fornito dalla sorgente a temperatura  $T_c$  si trasforma in lavoro (v. par. 2.5):

$$\Delta U = 0$$

$$Q_c = Q_{AB} = L_{AB} = nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}$$

2) Trasformazione da B a C: Espansione adiabatca, il lavoro compiuto dal sistema è uguale alla perdita di energia interna:

$$\Delta Q = 0$$

$$L = -\Delta U$$

$$L_{BC} = -nC_v (T_f - T_c)$$

3) Trasformazione da C a D: Compressione isoterma a temperatura  $T_f$



$$Q_F = Q_{CD} = L_{CD} = nRT_F \ln \frac{V_D}{V_C}$$

4) Trasformazione da D ad A: Compressione adiabatica:

$$L_{DA} = -nC_V (T_C - T_F)$$

Nota: il lavoro compiuto in un ciclo dalle trasformazioni adiabatiche è nullo:

$$L_{DA} = -L_{BC}$$

$$L_{DA} + L_{BC} = 0$$

Gli stati B e C sono sulla stessa adiabatca, come gli stati D e A quindi (v. par 2.6):

$$T_C V_B^{\gamma-1} = T_F V_C^{\gamma-1}$$

$$T_F V_D^{\gamma-1} = T_C V_A^{\gamma-1}$$

di conseguenza dividendo la prima equazione per la seconda ed elevando ambo i membri a  $(\gamma-1)^{-1}$  otteniamo:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = nRT_C \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_F \ln \frac{V_D}{V_C} = nR(T_C - T_F) \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (8)$$

$$\frac{Q_C}{Q_F} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}} = \frac{T_C}{T_F}$$

Il Rendimento  $\eta$  è uguale al rapporto tra la quantità di calore che si è trasformata in lavoro in un ciclo (differenza tra il calore fornito dalla sorgente calda  $Q_C$  e il calore disperso nella sorgente fredda  $Q_F$ ) e la quantità di calore fornita  $Q_C$ :

$$\frac{Q_c - Q_F}{Q_c} = 1 - \frac{Q_F}{Q_c} = 1 - \frac{T_F}{T_c}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_c} \quad (9)$$

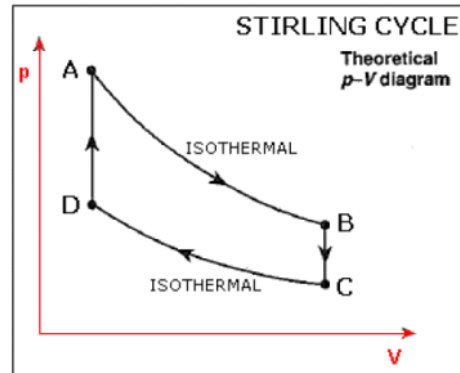
Il lavoro eseguito in un ciclo è rappresentato dall'area racchiusa nel diagramma pressione-volume, valore uguale all'integrale pressione volume lungo il ciclo (percorso chiuso):

$$L = \oint P dV$$

# MOTORE STIRLING

martedì 2 agosto 2022 16:00

Il ciclo di Stirling consiste in quattro trasformazioni: due isoterme e due isocore (a volume costante):

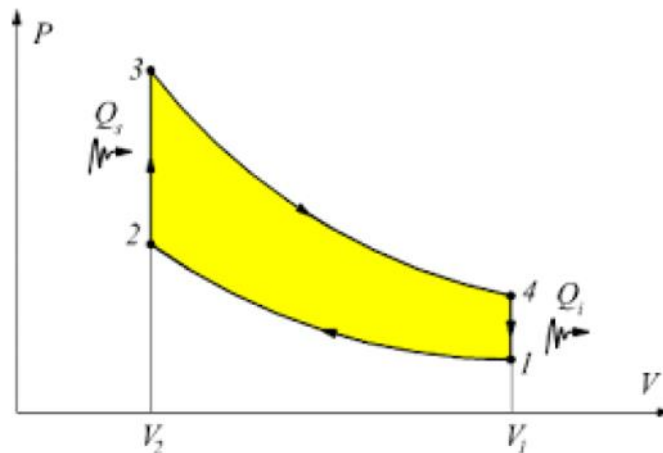


Un ciclo di Stirling può essere visto come un ciclo di Carnot in cui le due trasformazioni adiabatiche sono state sostituite da due isocore. Nelle trasformazioni isocore vi è una variazione di temperatura ma non di volume, di conseguenza il lavoro compiuto in queste trasformazioni è nullo. Le trasformazioni isocore BC e BA rappresentano rispettivamente un raffreddamento e un riscaldamento. Il rendimento massimo teorico di una macchina di Stirling è identico al rendimento del ciclo di Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

# MOTORE CICLO OTTO

martedì 2 agosto 2022 16:03



La figura mostra lo svolgimento del ciclo Otto nel diagramma (P,V). Si consideri la macchina formata da un cilindro munito di pistone contenente una certa quantità di gas perfetto (p.es. 1 g d'aria). Tutte le trasformazioni subite dal gas siano rappresentabili sui diagrammi come una successione di stati di equilibrio.

1-2: il pistone, mosso dall'esterno, realizza una compressione adiabatica, nello stato 2 il gas ha una pressione ed una temperatura superiori a quelle dello stato 1 (in questa fase viene assorbito lavoro dall'esterno).

2-3 : il pistone è fermo, il gas viene riscaldato dall'esterno a volume costante, crescono la sua temperatura, la pressione e l'entropia. In questa fase viene assorbito calore dall'esterno (combustione chimica). Il calore trasferito al gas è:

$$Q_{2-3} = c_v (T_3 - T_2)$$

3-4 : il gas si espande adiabaticamente, la temperatura e la pressione del gas diminuiscono (in questa fase viene fornito lavoro all'esterno).

4-1 : il pistone è fermo, il gas viene raffreddato dall'esterno a volume costante, diminuiscono la sua temperatura, la pressione e l'entropia. (in questa fase viene ceduto calore all'esterno)

Il calore sottratto al gas è:

$$Q_{4-1} = c_v (T_4 - T_1)$$

Il rendimento della macchina sarà pertanto:

$$\eta_{otto} = \frac{Q_{2-3} - Q_{4-1}}{Q_{2-3}} = 1 - \frac{Q_{4-1}}{Q_{2-3}} = 1 - \frac{c_v (T_4 - T_1)}{c_v (T_3 - T_2)}$$

$$1 - \frac{T_1}{T_2} \left[ \frac{(T_4/T_1) - 1}{(T_3/T_2) - 1} \right]$$

Ed essendo adiabatiche le due trasformazioni di compressione e di espansione, e considerando che nelle due isocore  $v_2 = v_3$  e  $v_1 = v_4$ , si ha anche:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{v_4}{v_3} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_3}{T_4}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

con  $\gamma = c_p/c_v$  esponente identico delle due adiabatiche. Di conseguenza

$$\eta_{otto} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{\gamma-1} \quad (10)$$

# TRASMISSIONE PER CONDUZIONE

martedì 2 agosto 2022 16:14

La quantità di calore trasmesso  $dQ$  in un tempo  $dt$  tra due superfici di area  $S$  parallele con differenza di temperatura  $\Delta T$  separate da un materiale con conducibilità termica  $k_T$  di spessore  $L$  è

$$\frac{dQ}{dt} = k_T \frac{\Delta T}{L} S \quad (11)$$

## TRASMISSIONE PER IRRAGGIAMENTO

martedì 2 agosto 2022 16:19

La quantità di calore emesso, per unità di superficie e per unità di tempo, da un "corpo nero" a temperatura  $T$  è

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma T^4 \quad (12)$$

e da un corpo non nero a temperatura  $T$  è

$$\frac{dQ}{dt} = a \sigma T^4$$

dove  $a$  (coefficiente di assorbimento) è un numero inferiore a 1

## TRASMISSIONE PER CONVEZIONE

martedì 2 agosto 2022 16:22

S è la superficie del solido, h è il coefficiente di convezione dipende da molti fattori (es. velocità, densità, viscosità del fluido in contatto con il solido)  $\Delta T$  è la differenza di temperatura:

$$\frac{dQ}{dt} = hS\Delta T$$



## ENTROPIA SECONDO CLAUSIUS

martedì 2 agosto 2022 16:23

Definizione della variazione di entropia  $\Delta S$  secondo Clausius.  $dQ$  è il differenziale del calore scambiato alla temperatura  $T$ :

$$\Delta S = \int_{\text{Stato iniziale}}^{\text{Stato finale}} \frac{dQ}{T}$$

In una espansione a temperatura costante non vi è variazione di energia interna:

$$dU = 0$$

quindi

$$dQ = dU + dL = dL$$

$$dL = P dV$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$dQ = dL = P dV = \frac{nRT}{V} dV$$

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT dV}{TV} = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nR (\ln V_2 - \ln V_1) = nR \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (13)$$

Nel caso in cui  $V_2 = 2V_1$

$$\Delta S = nR \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = nR \ln 2$$

# ENTROPIA COME LOGARITMO DEL NUMERO DI MICROSTATI DI UN SISTEMA

martedì 2 agosto 2022 19:42

Definizione di entropia come logaritmo del numero di possibili microstati  $w$ :

$$S = k_B \ln w$$

Definiamo con il termine <<cella>> un contenitore di volume unitario. Il numero di possibili microstati per una particella che si trova in una <<cella>> singola è 1. Il numero di possibili microstati per una particella in due celle distinte (contenitore di volume doppio) è 2. Il numero di possibili microstati per due particelle che si trovano in una cella singola è  $w = 1$ . Il numero di possibili microstati per due particelle in due celle distinte è  $w = 2^2 = 4$ . Il numero di possibili microstati per  $N$  particelle che si trovano in una cella singola è  $w = 1$ . Il numero di possibili microstati per  $N$  particelle in due celle distinte è  $w = 2^N$ .  
Nel caso dell'espansione di un gas da un volume  $V_1$  (cella singola) a un volume doppio  $V_2$

$$w_i = 1$$

$$w_f = 2^N$$

$$\Delta S = k_B \ln w_f - k_B \ln w_i = k_B \ln \frac{w_f}{w_i} = k_B \ln \frac{2^N}{1} = N k_B \ln 2 = n R \ln 2 \quad (14)$$

# PROBABILITA', INFORMAZIONE ED ENTROPIA

martedì 2 agosto 2022 19:48

La probabilità associata ad uno stato macroscopico  $s$  è uguale al numero dei possibili stati microscopici dello stato  $s$  ( $w_s$ ) in rapporto a tutti i microstati possibili ( $w_{tot}$ ):

$$p_s = \frac{w_s}{w_{tot}}$$

L'informazione  $I$  (numero di bit) necessaria ad identificare uno stato macroscopico con probabilità  $p_s$  è data dal suo logaritmo negativo:

$$I = -\log_2(p_s)$$

Il passaggio dal logaritmo in base 2 al logaritmo in base  $e$  equivale alla moltiplicazione per una costante. Infatti se

$$I = -\log_2(p_s)$$

$$2^{-I} = p_s$$

considerando che

$$2 = e^{\ln 2}$$

possiamo scrivere

$$(e^{\ln 2})^{-I} = e^{-I \ln 2} = p_s$$

quindi possiamo dimostrare che

$$I \ln 2 = -\ln(p_s)$$

$$I = -\frac{1}{\ln 2} \ln(p_s)$$

$$\ln(p_s) = \ln\left(\frac{w_s}{w_{tot}}\right) = \ln(w_s) - \ln(w_{tot})$$

$$= w_{tot} /$$

$$I = - \frac{1}{\ln 2} \left[ \ln(w_s) \cdot \ln(w_{tot}) \right]$$

Ricordando l'entropia  $S$  è definita come:

$$S = k_B \ln(w_s)$$

possiamo scrivere

$$I = - \frac{S}{k_B \ln 2} + \frac{\ln(w_{tot})}{\ln 2} \quad (15)$$

# DERIVAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITA' MAXWELL-BOLTZMANN

martedì 2 agosto 2022 19:56

$$\Delta S = k_B \ln \omega_2 - k_B \ln \omega_1 = k_B \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} = k_B \ln \frac{P_2}{P_1} = -k_B \ln \frac{P_1}{P_2}$$

A temperatura costante, la variazione di energia di una singola particella è associata ad una variazione di entropia

$$\Delta E = E_2 - E_1$$

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = - \frac{\Delta E}{T}$$

$$- \frac{\Delta E}{T} = k_B \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$- \frac{\Delta E}{k_B T} = \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \exp \left( - \frac{\Delta E}{k_B T} \right)$$

$$p \propto \exp \left( - \frac{E}{k_B T} \right)$$

Se  $E$  è l'energia cinetica, la densità di probabilità nello spazio delle velocità (con assi  $v_x$ ;  $v_y$ ;  $v_z$ ). La densità di probabilità è la probabilità per unità di "volume":

$$p(v) \propto \exp \left( - \frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

per ottenere la probabilità  $P(v)$  tra  $p(v)$  e  $p(v + dv)$  bisogna moltiplicare per il volume nello spazio delle velocità  $4\pi v^2 dv$ .  $C$  è la costante di proporzionalità.

$$P(v) dv = 4\pi v^2 dv = C 4\pi v^2 \exp \left( - \frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv$$

$$P(v) = C 4\pi v^2 \exp \left( - \frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

$$P(u) = C 4\pi u^2 \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_B T}\right)$$

$$\int_0^{\infty} P(u) du = 1$$

dalla tabella degli integrali

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

poniamo

$$a = \frac{m}{2k_B T}$$

$$1 = C 4\pi \int_0^{\infty} u^2 \exp(-au^2) du = C \pi \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} = C \sqrt{\frac{\pi^3}{a^3}} = C \sqrt{\left(\frac{2k_B T \pi}{m}\right)^3}$$

$$C = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$$

$$P(u) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} 4\pi u^2 \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_B T}\right) \quad (16)$$

$$P(u) = 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} u^2 \exp(-au^2)$$

$$\frac{dP(u)}{du} = 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} [2u \exp(-au^2) - 2au^3 \exp(-au^2)]$$

$$\frac{dP(u)}{du} = 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} [2u(1 - au^2) \exp(-au^2)]$$

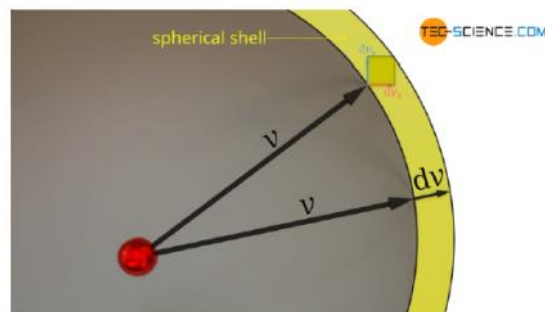
Per trovare il massimo della distribuzione poniamo a zero la derivata:

$$\frac{dP(v)}{dv} = 0 \Rightarrow (1 - 2v^2) = 0$$

$$v^2_{\max} = \frac{1}{2} = \frac{2k_B T}{m}$$

$$E_{\max} = \frac{1}{2} m v^2_{\max} = k_B T$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (17)$$



# LEGGE DEL RAFFREDDAMENTO DI NEWTON

venerdì 5 agosto 2022 10:52

La legge del raffreddamento di Newton afferma che il tasso di perdita di calore di un corpo è proporzionale alla differenza tra la temperatura del corpo  $T_c$  e la temperatura ambiente  $T_a$ : Il coefficiente di proporzionalità  $k$  è pari al prodotto della superficie  $A$  del corpo esposta all'ambiente e il coefficiente di scambio termico  $h$ :

$$k = hA$$

$$- \frac{dQ}{dt} = - \frac{dU}{dt} = k (T_c(t) - T_a)$$

Se  $C$  è la capacità termica del corpo, possiamo scrivere:

$$\frac{dU}{dt} = C \frac{dT_c}{dt}$$

$$\Delta T(t) = (T_c(t) - T_a)$$

$$C \frac{dT_c}{dt} = -k \Delta T(t)$$

$$\tau = \frac{C}{k}$$

$$dT_c = d\Delta T(t)$$

$$\tau \frac{d\Delta T(t)}{dt} = -\Delta T(t)$$

Abbiamo quindi una equazione differenziale in cui la funzione da trovare  $\Delta T(t)$  è proporzionale alla sua derivata prima



proporzionale alla sua derivata prima

$$\tau \int_0^t \frac{d\Delta T(t)}{\Delta T(t)} = - \int_0^t dt$$

$$\ln \Delta T(t) - \ln \Delta T(0) = - \frac{t}{\tau}$$

$$\ln \frac{\Delta T(t)}{\Delta T(0)} = - \frac{t}{\tau}$$

$$\Delta T(t) = \Delta T(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$T_c(t) = T_a + (T_c(0) - T_a) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

## CAMMINO LIBERO MEDIO

venerdì 5 agosto 2022 10:59

In un gas reale (non ideale) le molecole non sono puntiformi. Come prima approssimazione la loro forma può essere considerata sferica. In un tempo  $\Delta t$  la molecola di raggio  $d$  percorre una distanza  $v\Delta t$  interessando un volume cilindrico  $Vol_{cil}$

$$Vol_{cil} = \pi d^2 v \Delta t$$

Il numero di collisioni che si verificano è quindi uguale al numero di molecole presenti all'interno del cilindro.

Se  $N/V$  è il numero di molecole per unità di volume il numero di collisioni della molecola con le altre particelle sarà quindi uguale a

$$N_{collisioni} \propto \frac{N}{V} \pi d^2 v \Delta t$$

Si definisce libero cammino medio  $\lambda$  la lunghezza del cilindro divisa per il numero di collisioni

$$L_{cilindro} = v \Delta t$$

$$\lambda \propto \frac{L_{cilindro}}{N_{collisioni}} = \frac{v \Delta t}{\frac{N}{V} \pi d^2 v \Delta t} = \frac{1}{\frac{N}{V} \pi d^2} \quad (18)$$

Il valore sperimentale di  $\lambda$  è effettivamente proporzionale a questo valore approssimato.

$$\lambda_s \approx \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \frac{N}{V} \pi d^2} \quad (19)$$

# DILATAZIONE TERMICA

venerdì 5 agosto 2022 11:06

Un corpo solido di volume  $V$  è soggetto, in seguito ad un aumento di temperatura  $\Delta T$  ad un aumento di volume  $\Delta V$  proporzionale al volume  $V$  e all'aumento di temperatura  $\Delta T$

$$\Delta V = k V \Delta T$$

Il coefficiente  $k$  è il <<coefficiente di dilatazione cubica>> e dipende dal materiale di cui è costituito il corpo in questione.

Un corpo di lunghezza  $l$  è soggetto, in seguito ad un aumento di temperatura  $\Delta T$  ad un aumento di lunghezza  $\Delta l$  proporzionale al volume  $V$  e all'aumento di temperatura  $\Delta T$

$$\Delta l = \lambda l \Delta T$$

Il coefficiente  $\lambda$  è il <<coefficiente di dilatazione lineare>> e dipende dal materiale di cui è costituito il corpo in questione.

Il coefficiente  $k$  è pari a tre volte il coefficiente  $\lambda$

$$k = 3\lambda$$

Consideriamo un cubo di volume  $V_1$

$$V_1 = L_1^3$$

$$L_2 = L_1 + \Delta l = L_1 + \lambda L_1 \Delta T$$

$$V_2 = L_2^3 = (L_1 + \lambda L_1 \Delta T)^3$$

Essendo il valore  $\lambda L_1 \Delta T$  piccolo rispetto ad  $L_1$  si possono trascurare i termini di ordine superiore:

$$V_2 = L_1^3 + 3L_1^2 \lambda L_1 \Delta T = V_1^3 + 3\lambda V_1 \Delta T = k V_1 \Delta T$$

$$3\lambda = k$$