ESERCIZI INTRODUTTIVI

(1) Data la proposizione p: "Tutti gli uomini hanno la coda", discutere la validità delle seguenti proposte di negazione di p:
(i) non tutti gli uomini hanno la coda;
(ii) nessun uomo ha la coda;
(iii) esiste un uomo che non ha la coda;
(iv) esiste un uomo che non ha una coda lunga.

(2) Negare le seguenti affermazioni:
(i) tutti gli studenti del corso di Analisi Matematica abitano a Palermo;
(ii) almeno uno studente prenderà meno di 30 all'esame di Analisi Matematica;
(iii) tutte le studentesse del corso di Analisi Matematica hanno capelli biondi ed occhi azzurri;
(iv) esiste un punto P che non appartiene né alla retta r né alla retta s;
(v) l'equazione (1) ha 3 soluzioni;
(vi) p è un numero primo, dispari, minore di 10;
(vii) dato l'insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$, $\exists M \in \mathbb{R} : x < M \ \forall x \in A$;
(viii) dato l'insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$, $\forall x \in A \ \exists M \in \mathbb{R} : \ x < M$.

(3) Dire quali fra le seguenti affermazioni sono vere:
(i) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^2 \geq 1$;
(ii) $\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 \geq 1$;
(iii) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^2 > 0$;
(iv) $\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 < 0$;
(v) $\forall y \in \mathbb{N} \ \exists x \in \mathbb{R} : \ y \geq x$;
(vi) $\exists x \in \mathbb{R} : \ \forall y \in \mathbb{N} \ y \geq x$.

(4) Lui dice a lei: "Sono bello e ricco". Lei risponde a lui: "Non è vero". Cosa significa?
(i) Lui è brutto e povero;
(ii) lui è brutto o povero, ma non entrambi;
(iii) lui è brutto o povero, o entrambi.
(Identifichiamo brutto con non bello e povero con non ricco)

(5) Sia T un triangolo. Quali delle seguenti condizioni sono necessarie affinché T sia isoscele? Quali sono sufficienti?
(i) T è equilatero;
(ii) T ha due angoli uguali;
(iii) T è rettangolo;
(iv) T ha due angoli uguali e di ampiezza minore di $60°$;
(v) esistono due lati del triangolo per i quali il quoziente delle lunghezze è un numero intero.

(6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(i) Condizione sufficiente affinché un numero sia multiplo di 4 è che sia multiplo di 20;
(ii) $x > 1$ è condizione necessaria e sufficiente affinché $x^2 > 1$;
(iii) $x > 1$ è condizione necessaria e sufficiente affinché $x^3 > 1$;

(iv) $x \in A \cap B$ è condizione necessaria e sufficiente affinché $x \in A$;
(v) condizione sufficiente affinché $\sqrt{x^2} = 2$ è $x = 2$.

(7) Marco dice a Luca: "Se domani ti ricordi di restituirmi il libro di Matematica che ti ho prestato, ti offro da bere". Il giorno dopo Luca dimentica il libro e Marco non gli offre da bere. Marco ha mantenuto la sua promessa? L'avrebbe mantenuta anche se gli avesse offerto da bere?

(8) Mostrare attraverso opportuni controesempi la falsità delle seguenti affermazioni.
(i) Ogni multiplo di 9 è multiplo di 6.
(ii) Se p è un numero primo, allora p è dispari.
(iii) Un triangolo non può avere lati tutti diversi e di lunghezze tutte intere.
(iv) Nella lingua italiana il nome di una nazione terminante con la lettera a assume genere femminile.

(9) *(i)* Scrivere l'equazione della retta r passante per i punti $P(3, -1)$ e $Q(4, 2)$.
(ii) La retta r è parallela alla retta s passante per $A(2, 1)$ e $B(9, -3)$?
(iii) Scrivere l'equazione della retta t passante per $M(0, 2)$ e perpendicolare a r.
(iv) Determinare gli eventuali punti di intersezione tra la retta t e la circonferenza di centro $O(0, 0)$ e raggio 2.

(10) *(i)* Scrivere le equazioni delle rette su cui giacciono i lati del triangolo di vertici $A(2, 0)$, $B(0, 4)$ e $C(-6, 5)$.
(ii) Descrivere il triangolo utilizzando un sistema di disequazioni.

(11) *(i)* Scrivere l'equazione della retta r passante per i punti $P(1, 2, 3)$ e $Q(0, 1, 5)$.
(ii) Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $O(0, 0, 0)$ ed ortogonale al piano $x + y + z = 1$.
(iii) Scrivere l'equazione della retta t intersezione dei piani $x+2y-z = 1$ e $2x+y-z = 0$.

(12) *(i)* Scrivere l'equazione del piano π passante per i punti $P(1, 1, 1)$, $Q(0, 0, 1)$ e $R(-1, 2, 0)$.
(ii) Scrivere l'equazione del piano passante per $O(0, 0, 0)$ e parallelo al piano $2x+3z = 2$.
(iii) Scrivere l'equazione del piano passante per $A(1, 0, -2)$ ed ortogonale a π.

(13) Date le rette $r : 4x + y - 8 = 0$, $s : 6x - 4y + 4 = 0$ ed il punto $P(2, 1)$, determinare:
(i) la retta passante per P e parallela a r;
(ii) la retta passante per P e perpendicolare a s;
(iii) l'insieme $r \cap s$;
(iv) la distanza di P da r.

(14) Disegnare i luoghi geometrici dei punti del piano che verificano le seguenti equazioni:

$$\begin{array}{lll} x^2 - 2x + y^2 = 0, & x^2 - 2x = 0, & x^2 - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 0, & x^2 + 2y^2 = 1, & x^2 + 2y = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 1, & y^2 - 3y = 0, & 2x^2 + 3y^2 = 2 \\ xy = 3. & & \end{array}$$