ESERCIZI 3

(1) Provare che

(a) $-(-x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $-(x+y) = -x-y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(c) $x = y \iff x+z = y+z, \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(d) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(e) $\dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(f) $x = y \iff x \cdot z = y \cdot z, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(g) $\dfrac{1}{x \cdot y} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(h) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x \cdot z}{y \cdot z}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(i) $x \leq y \iff -x \geq -y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Inoltre: $x < y \iff -x > -y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(j) $x^2 \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre: $x^2 > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Osservazione. *Dalla (j) deduciamo immediatamente che*

$$1 = 1 \cdot 1 > 0.$$

Inoltre, sempre dalla (j) deduciamo che l'equazione $x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1$ *non può avere soluzioni in campo reale.*

(k) $x > 0 \iff \dfrac{1}{x} > 0$

(l) $x \leq y \iff x+z \leq y+z, \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(m) $x \leq y \iff x \cdot z \leq y \cdot z, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z > 0$

(n) $x \leq y \iff x \cdot z \geq y \cdot z, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z < 0$