

Appunti di Termodinamica

May 31, 2021

1 Equazione di stato dei gas perfetti

ricordiamo brevemente il concetto di «impulso»:

$$F = ma$$

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

$$F dt = m dv$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = m \Delta v$$

Se \bar{F} è il valore medio della forza nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, $m \Delta v$ è la variazione della quantità di moto della particella m

$$\bar{F} \Delta t = m \Delta v.$$

Consideriamo adesso un sistema formato da un gas di N particelle di massa m in una scatola chiusa cubica di lato d e di volume $V = d^3$. Indichiamo con F_i la forza media esercitata dopo un urto su una parete da una singola particella, e con Δt è il tempo tra due urti successivi. Indichiamo inoltre con v_{ix} la componente lungo l'asse x della velocità della generica particella i-esima

$$F_i \Delta t = 2mv_{ix}$$

$$\Delta t = \frac{2d}{v_{ix}}$$

$$F_i = \frac{mv_{ix}^2}{d}$$

P_i è il contributo alla pressione di una singola particella:

$$P_i = \frac{F_i}{d^2} = \frac{mv_{ix}^2}{d^3} = \frac{mv_{ix}^2}{V}$$

$\overline{v_x^2}$ è il valore medio del quadrato della componente lungo x della velocità:

$$P = \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2}{V} = N \frac{m \overline{v_x^2}}{V}$$

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m \left(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \right)$$

$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_y^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_z^2} = \frac{1}{2}K_B T$ è l'energia cinetica media per grado di libertà della singola particella.

Definizione di temperatura T:

$\frac{1}{2}K_B T$ è l'energia media di una singola particella per ognuno dei gradi di libertà possibili. K_B è la costante di Boltzmann.

$$K_B = 1.38064852 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$$

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}K_B T$$

U è l'energia interna del sistema n_g è il numero di gradi di libertà della singola molecola (3 per un gas monoatomico):

$$U = n_g \left(\frac{1}{2}K_B T \right) N = \frac{3}{2}NK_B T$$

$$PV = N m \overline{v_x^2}$$

$$PV = NK_B T \quad (1)$$

Il numero di particelle è uguale al numero di moli per il numero di Avogadro

$$A_v = 6.022140857 \cdot 10^{23} mol^{-1}$$

$$N = nA_v$$

R è la costante universale dei gas perfetti:

$$R = A_v K_B$$

$$R = 8.3144598 J mol^{-1} K^{-1}$$

$$PV = NK_B T = nA_v K_B T = nRT$$

$$U = \frac{3}{2}NK_B T = \frac{3}{2}nRT \quad (2)$$

Equazione di stato dei gas perfetti:

$$PV = nRT$$

Il ruolo della costante di Boltzmann è quello di convertire la scala dei gradi Kelvin in Joule ed è quindi analoga a una costante di conversione tra diverse unità di misura.

2 Primo principio della termodinamica

2.1 Definizione di pressione

La pressione P è definita come forza F per unità di area A

$$P = \frac{F}{A}$$

di conseguenza

$$L = \int F dx = \int \frac{F}{A} A dx = \int P A dx = \int P dV$$

se P è costante si può scrivere

$$L = P \int dV = P \Delta V$$

dove P è la pressione, ΔV è la variazione di volume del gas e L è il lavoro prodotto dalla pressione P .

2.2 Definizione del primo principio

Se Q è il calore (energia termica) immesso nel sistema, ΔU è la variazione di energia interna (energia cinetica dovuta al moto disordinato delle molecole) ed L è il lavoro generato dall'espansione del gas, vale la relazione

$$Q = \Delta U + L \quad (3)$$

Il primo principio è quindi una particolare riformulazione del principio di conservazione dell'energia.

2.3 Calore specifico a volume costante c_v :

Nel caso in cui il lavoro L sia zero, come nel caso delle trasformazioni a volume costante (trasformazioni isocore), la capacità termica C definisce il rapporto tra calore e temperatura:

$$Q = \Delta U = C \Delta T$$

Se n è il numero di moli del gas e c_v è la capacità termica di una singola mole (definita come «calore specifico»), abbiamo:

$$C = n c_v$$

$$Q = \Delta U = n c_v \Delta T.$$

La capacità termica di un gas è quindi uguale al calore specifico del gas moltiplicato il numero di moli.

2.4 Calore specifico a pressione costante c_p e relazione di Mayer:

Se n è il numero di moli e c_p è il calore specifico a pressione costante di una singola mole, possiamo scrivere:

$$Q = n c_p \Delta T = \Delta U + L = \Delta U + P \Delta V$$

$$\Delta U = n c_p \Delta T - L$$

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$

$$P V = n R T$$

$P \Delta V$ è il lavoro L generato dall'espansione del gas a pressione costante P :

$$L = P \Delta V = n R \Delta T$$

$$n c_p \Delta T = n c_v \Delta T + n R \Delta T$$

Da cui si ottiene la Relazione di Mayer:

$$c_p - c_v = R \quad (4)$$

2.5 Espansione a temperatura costante

Non vi è variazione di energia interna in una trasformazione isoterma:

$$dU = 0$$

dL è il differenziale del lavoro compiuto dalla pressione P in corrispondenza di una espansione dV :

$$PdV = dL$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$dL = PdV = \frac{nRT}{V}dV$$

L è il lavoro compiuto in una trasformazione isoterma in seguito ad una variazione di volume da V_1 a V_2 :

$$L = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT (\ln V_2 - \ln V_1) = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (5)$$

2.6 Trasformazioni adiabatiche

In una trasformazione adiabatica non vi è scambio di calore con l'esterno ($dQ = 0$) quindi possiamo scrivere:

$$dU = dQ - PdV$$

la variazione di energia interna è uguale al lavoro svolto dal sistema, cambiato di segno

$$dU = -dL = -PdV$$

la variazione di energia interna è uguale al numero di moli n per il calore specifico a volume costante c_V per la variazione di temperatura dT :

$$dU = -dL = nc_v dT$$

Il lavoro compiuto da una trasformazione adiabatica è uguale alla perdita di energia interna del sistema:

$$L = - \int dU = -nc_v \int_{T_1}^{T_2} dT = -nc_v (T_2 - T_1)$$

per una mole ($n = 1$) la capacità termica è uguale al calore specifico:

$$dU = c_v dT$$

$$-PdV = c_v dT$$

Differenziando l'eq. $PV = nRT$ abbiamo

$$PdV + VdP = RdT$$

$$dT = \frac{PdV + VdP}{R}$$

$$dT = -\frac{PdV}{c_v}$$

sostituendo dT si ha:

$$PdV = -c_v \frac{PdV + VdP}{R}$$

utilizzando la relazione di Mayer

$$c_p - c_v = R$$

e chiamando γ il rapporto c_p/c_v possiamo scrivere:

$$c_v \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) = c_v (\gamma - 1) = R$$

$$\frac{c_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

$$PdV = - \frac{PdV + VdP}{\gamma - 1}$$

$$P(\gamma - 1)dV = -PdV - VdP$$

$$\gamma PdV = -VdP$$

$$\gamma \frac{dV}{V} = \frac{-dP}{P}$$

$$\gamma \int \frac{dV}{V} = - \int \frac{dP}{P}$$

$$\gamma \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma - \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln \frac{P_1}{P_2}$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = \frac{P_1}{P_2}$$

Otteniamo quindi una importante proprietà delle trasformazioni adiabatiche:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$PV^\gamma = \text{cost.} \quad (6)$$

Utilizzando adesso l'equazione dei gas ideali

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$\frac{nRT}{V} V^\gamma = \text{cost}$$

$$nRTV^{\gamma-1} = \text{cost}$$

otteniamo un'altra proprietà delle trasformazioni adiabatiche:

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost} \quad (7)$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

3 Passaggi di stato

Molte sostanze sono caratterizzate da due temperature: La temperatura di fusione e la temperatura di ebollizione. Entrambe le temperature sono funzioni della pressione. Una sostanza se riscaldata, una volta raggiunta la sua temperatura di fusione, necessita di una precisa quantità di calore per passare dallo stato solido a quello liquido. Tale quantità viene definita calore latente di fusione. Un discorso analogo viene fatto per il passaggio di stato da liquido a gassoso. La quantità di energia necessaria affinché avvenga un passaggio di stato dipende dalla sostanza, dalla sua massa e dal tipo di passaggio.

Per la fusione:

$$Q = m\Delta E_{fus}$$

per l'ebollizione:

$$Q = m\Delta E_{eb}$$

dove Q è la quantità di calore assorbita o rilasciata durante il processo, m la massa della sostanza mentre $m\Delta E_{fus}$ e $m\Delta E_{eb}$ rappresentano rispettivamente il calore specifico di fusione e di ebollizione. Vengono riportati i calori molari di fusione e di ebollizione di alcune specie più comuni:

Sostanza	$\Delta E_{fus} (kJ/mol)$	$\Delta E_{eb} (kJ/mol)$
Ammoniaca	5.65	23.4
Etanolo	4.60	43.5
Metanolo	3.16	35.5
Ossigeno	0.44	6.82
Acqua	6.01	40.7

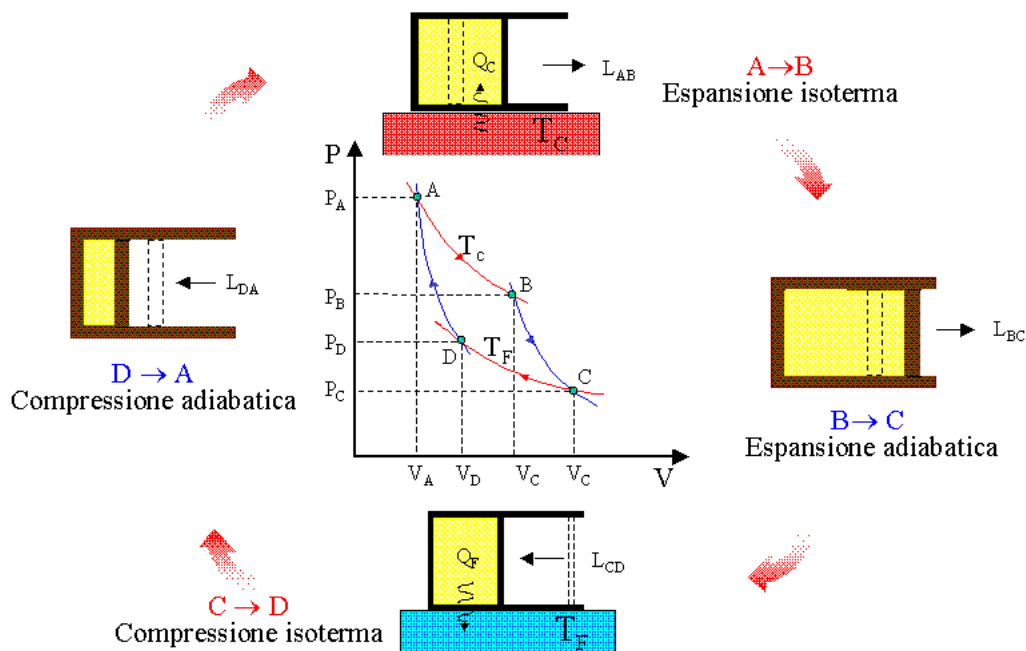
<https://www.chimicamo.org/chimica-generale/calore-e-passaggi-di-stato-esercizi.html>

4 Macchine termiche

4.1 Ciclo di Carnot

Il Ciclo di Carnot per un gas ideale è un ciclo reversibile composto da due isoterme e due adiabatich:

http://www.science.unitn.it/~fisical/fisical/appunti/termo/cap_4/cap_4_5.htm



1) Trasformazione da A a B: Espansione isoterma a temperatura costante T_c . Nella espansione isoterma di un gas ideale la variazione di energia interna è nulla, di conseguenza tutto il calore fornito dalla sorgente a temperatura T_c si trasforma in lavoro (v. par. 2.5):

$$\Delta U = 0$$

$$Q_C = Q_{AB} = L_{AB} = nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}$$

2) Trasformazione da B a C: Espansione adiabatica, il lavoro compiuto dal sistema è uguale alla perdita di energia interna:

$$\Delta Q = 0$$

$$L = -\Delta U$$

$$L_{BC} = -nc_v (T_F - T_c)$$

3) Trasformazione da C a D: Compressione isoterma a temperatura T_F

$$Q_F = Q_{CD} = L_{CD} = nRT_F \ln \frac{V_D}{V_C}$$

4) Trasformazione da D ad A: Compressione adiabatica:

$$L_{DA} = -nc_v (T_c - T_F)$$

nota: il lavoro compiuto in un ciclo dalle trasformazioni adiabatiche è nullo:

$$L_{DA} = -L_{BC}$$

$$L_{DA} + L_{BC} = 0$$

Gli stati B e C sono sulla stessa adiabatca, come gli stati D e A quindi (v. par 2.6):

$$T_c V_B^{\gamma-1} = T_F V_C^{\gamma-1}$$

$$T_F V_D^{\gamma-1} = T_c V_A^{\gamma-1}$$

di conseguenza dividendo la prima equazione per la seconda ed elevando ambo i membri a $(\gamma - 1)^{-1}$ otteniamo:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_F \ln \frac{V_D}{V_C} = nR(T_c - T_f) \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (8)$$

$$\frac{Q_C}{Q_F} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}} = \frac{T_c}{T_F}$$

Il Rendimento η è uguale al rapporto tra la quantità di calore che si è trasformata in lavoro in un ciclo (differenza tra il calore fornito dalla sorgente calda Q_C e il calore disperso nella sorgente fredda Q_F) e la quantità di calore fornita Q_C :

$$\frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_c}$$

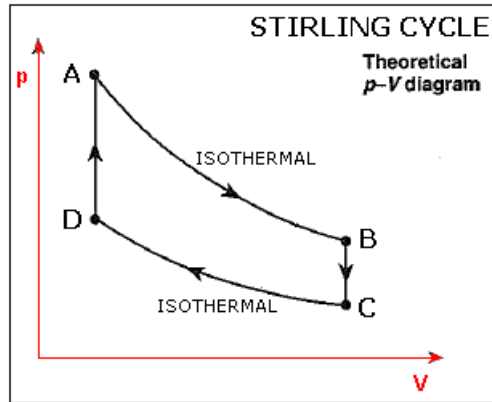
$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_c}. \quad (9)$$

Il lavoro eseguito in un ciclo è rappresentato dall'area racchiusa nel diagramma pressione-volume, valore uguale all'integrale pressione volume lungo il ciclo (percorso chiuso):

$$L = \oint P dV$$

4.2 Motore Stirling

Il ciclo di Stirling consiste in quattro trasformazioni: due isoterme e due isocore (a volume costante):

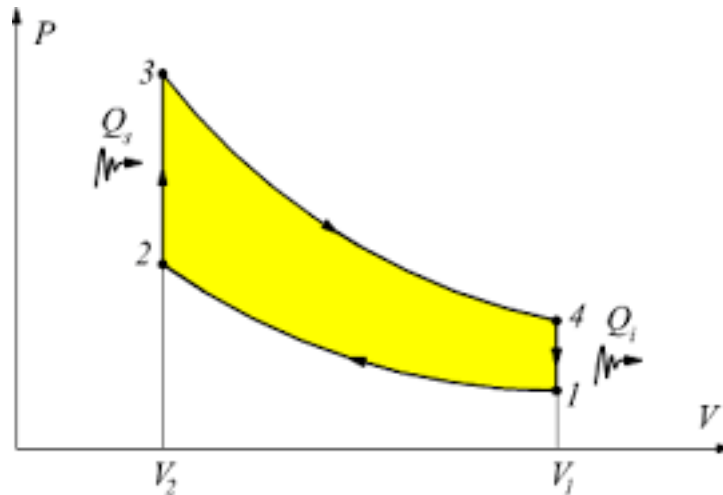


Un ciclo di Stirling può essere visto come un ciclo di Carnot in cui le due trasformazioni adiabatiche sono state sostituite da due isocore. Nelle trasformazioni isocore vi è una variazione di temperatura ma non di volume, di conseguenza il lavoro compiuto in queste trasformazioni è nullo. Le trasformazioni isocore BC e BA rappresentano rispettivamente un raffreddamento e un riscaldamento. Il rendimento massimo teorico di una macchina di Stirling è identico al rendimento del ciclo di Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_c}$$

<http://stirlingengineforum.com/viewtopic.php?t=1694>

4.3 Motore ciclo otto



La figura mostra lo svolgimento del ciclo Otto nel diagramma (P,V). Si consideri la macchina formata da un cilindro munito di pistone contenente una certa quantità di gas perfetto (p.es. 1 g d'aria). Tutte le trasformazioni subite dal gas siano rappresentabili sui diagrammi come una successione di stati di equilibrio.

1-2: il pistone, mosso dall'esterno, realizza una compressione adiabatica, nello stato 2 il gas ha una pressione ed una temperatura superiori a quelle dello stato 1 (in questa fase viene assorbito lavoro dall'esterno).

2-3 : il pistone è fermo, il gas viene riscaldato dall'esterno a volume costante, crescono la sua temperatura, la pressione e l'entropia. In questa fase viene assorbito calore dall'esterno (combustione chimica). Il calore trasferito al gas è:

$$Q_{2-3} = c_v (T_3 - T_2)$$

3-4 : il gas si espande adiabaticamente, la temperatura e la pressione del gas diminuiscono (in questa fase viene fornito lavoro all'esterno).

4-1 : il pistone è fermo, il gas viene raffreddato dall'esterno a volume costante, diminuiscono la sua temperatura, la pressione e l'entropia. (in questa fase viene ceduto calore all'esterno)

Il calore sottratto al gas è:

$$Q_{4-1} = c_v (T_4 - T_1)$$

Il rendimento della macchina sarà pertanto:

$$\eta_{otto} = \frac{Q_{2-3} - Q_{4-1}}{Q_{2-3}} = 1 - \frac{Q_{4-1}}{Q_{2-3}} = 1 - \frac{c_v (T_4 - T_1)}{c_v (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \left[\frac{(T_4/T_1) - 1}{(T_3/T_2) - 1} \right]$$

Ed essendo adiabatiche le due trasformazioni di compressione e di espansione, e considerando che nelle due isocore $v_2 = v_3$ e $v_1 = v_4$, si ha anche:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{v_4}{v_3} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_3}{T_4}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

con $\gamma = c_p/c_v$ esponente identico delle due adiabatiche. Di conseguenza

$$\eta_{otto} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{\gamma-1} \quad (10)$$

<http://adpaloha.altervista.org/wp-content/uploads/2012/11/Parte-6.pdf>

5 Trasmissione del calore

5.1 trasmissione per conduzione

La quantità di calore trasmesso dQ in un tempo dt tra due superfici di area S parallele con differenza di temperatura ΔT separate da un materiale con conducibilità termica k_T di spessore l è

$$\frac{dQ}{dt} = k_T \frac{\Delta T}{l} S \quad (11)$$

5.2 trasmissione per irraggiamento

La quantità di calore emesso, per unità di superficie e per unità di tempo, da un “corpo nero” a temperatura T è

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma_0 T^4 \quad (12)$$

e da un corpo non nero a temperatura T è

$$\frac{dQ}{dt} = a\sigma_0 T^4$$

dove a (coefficiente di assorbimento) è un numero inferiore a 1

5.3 trasmissione per convezione

S è la superficie del solido h è il coefficiente di convezione dipende da molti fattori (es. velocità, densità, viscosità del fluido in contatto con il solido) ΔT è la differenza di temperatura:

$$\frac{dQ}{dt} = hS\Delta T$$

6 Entropia

6.1 Entropia secondo Clausius

Definizione della variazione di entropia ΔS secondo Clausius. dQ è il differenziale del calore scambiato alla temperatura T :

$$\Delta S = \int_{Stato\ iniziale}^{Stato\ finale} \frac{dQ}{T}$$

In una espansione a temperatura costante non vi è variazione di energia interna:

$$dU = 0$$

quindi

$$dQ = dU + dL = dL$$

$$dL = PdV$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$dQ = dL = PdV = \frac{nRT}{V}dV$$

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRTdV}{TV} = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nR(\ln V_2 - \ln V_1) = nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (13)$$

nel caso in cui $V_2 = 2V_1$

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = nR \ln 2$$

6.2 Entropia come logaritmo del numero di microstati di un sistema

Definizione di entropia come logaritmo del numero di possibili microstati w :

$$S = k_B \ln w$$

Definiamo con il termine «cella» un contenitore di volume unitario. Il numero di possibili microstati per una particella che si trova in una «cella» singola è 1. Il numero di possibili microstati per una particella in due celle distinte (contenitore di volume doppio) è 2. Il numero di possibili microstati per due particelle che si trovano in una cella singola è $w = 1$. Il numero di possibili microstati per due particelle in due celle distinte è $w = 2^2 = 4$. Il numero di possibili microstati per N particelle che si trovano in una cella singola è $w = 1$. Il numero di possibili microstati per N particelle in due celle distinte è $w = 2^N$.

Nel caso dell'espansione di un gas da un volume V_1 (cella singola) a un volume doppio V_2

$$w_i = 1$$

$$w_f = 2^N$$

$$\Delta S = k_B \ln w_f - k_B \ln w_i = k_B \ln \frac{w_f}{w_i} = k_B \ln \frac{2^N}{1} = N k_B \ln 2 = n R \ln 2 \quad (14)$$

6.3 Probabilità, informazione ed entropia:

La probabilità associata ad uno stato macroscopico s è uguale al numero dei possibili stati microscopici dello stato s (w_s) in rapporto a tutti i microstati possibili (w_{tot}):

$$p_s = \frac{w_s}{w_{tot}}$$

L'informazione I (numero di bit) necessaria ad identificare uno stato macroscopico con probabilità p_s è data dal suo logaritmo negativo:

$$I = -\log_2(p_s)$$

Il passaggio dal logaritmo in base 2 al logaritmo in base e equivale alla moltiplicazione per una costante. Infatti se

$$I = -\log_2(p_s)$$

$$2^{-I} = p_s$$

considerando che

$$2 = e^{\ln 2}$$

possiamo scrivere

$$(e^{\ln 2})^{-I} = e^{-I \ln 2} = p_s$$

quindi possiamo dimostrare che

$$I \ln 2 = -\ln(p_s)$$

$$I = -\frac{1}{\ln 2} \ln(p_s)$$

$$\ln(p_s) = \ln\left(\frac{w_s}{w_{tot}}\right) = \ln(w_s) - \ln(w_{tot})$$

$$I = -\frac{1}{\ln 2} [\ln(w_s) - \ln(w_{tot})]$$

Ricordando che l'entropia S è definita come:

$$S = k_B \ln(w_s)$$

possiamo scrivere:

$$I = -\frac{S}{k_B \ln 2} + \frac{\ln(w_{tot})}{\ln 2} \quad (15)$$

Il termine con w_{tot} è una costante additiva che non gioca nessun ruolo nella variazione di entropia, mentre il termine $-1/k_B \ln 2$ è solo una costante moltiplicativa.

Il segno negativo ci dice quindi che un aumento di entropia corrisponde ad una perdita di informazione.

7 Derivazione della distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann

$$\Delta S = k_B \ln w_2 - k_B \ln w_1 = k_B \ln \frac{w_2}{w_1} = k_B \ln \frac{p_2}{p_1} = -k_B \ln \frac{p_1}{p_2}$$

A temperatura costante, la variazione di energia di una singola particella è associata ad una variazione di entropia:

$$\Delta E = E_2 - E_1$$

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = -\frac{\Delta E}{T}$$

$$-\frac{\Delta E}{T} = k_B \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$-\frac{\Delta E}{k_B T} = \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$$

$$p \propto \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

Se E è l'energia cinetica, la *densità di probabilità* nello spazio delle velocità (con assi v_x, v_y, v_z). La densità di probabilità è la probabilità per unità di "volume":

$$p(v) \propto \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

per ottenere la *probabilità* $\mathcal{P}(v)$ tra $p(v)$ e $p(v+dv)$ bisogna moltiplicare per il volume nello spazio delle velocità $4\pi v^2 dv$. C è la costante di proporzionalità.

$$\mathcal{P}(v) dv = 4\pi v^2 p(v) dv = C 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv$$

$$\mathcal{P}(v) = C 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

$$\int_0^\infty \mathcal{P}(v) dv = 1$$

dalla tabella degli integrali:

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

poniamo:

$$a = \frac{m}{2k_B T}$$

$$1 = C 4\pi \int_0^\infty v^2 \exp(-av^2) dv = C \pi \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} = C \sqrt{\frac{\pi^3}{a^3}} = C \sqrt{\left(\frac{2k_B T \pi}{m}\right)^3}$$

$$C = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$$

$$\mathcal{P}(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (16)$$

$$\mathcal{P}(v) = 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} v^2 \exp(-av^2)$$

$$\frac{d\mathcal{P}(v)}{dv} = 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} [2v \exp(-av^2) - 2av^3 \exp(-av^2)]$$

$$\frac{d\mathcal{P}(v)}{dv} = 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} [2v (1 - av^2) \exp(-av^2)]$$

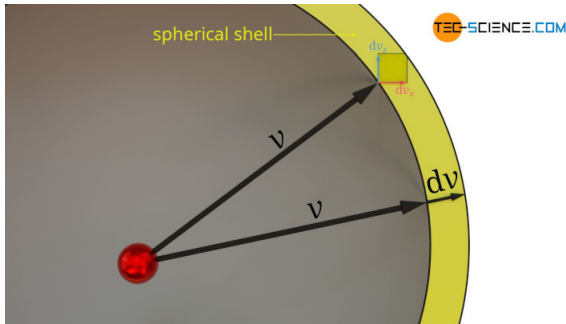
Per trovare il valore massimo della distribuzione poniamo a zero la derivata:

$$\frac{d\mathcal{P}(v)}{dv} = 0 \Rightarrow (1 - av^2) = 0$$

$$v_{max}^2 = \frac{1}{a} = \frac{2k_B T}{m}$$

$$E_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = k_B T$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (17)$$



8 Legge del raffreddamento di Newton

La legge del raffreddamento di Newton afferma che il tasso di perdita di calore di un corpo è proporzionale alla differenza tra la temperatura del corpo T_c e la temperatura ambiente T_a . Il coefficiente di proporzionalità k è pari al prodotto della superficie A del corpo esposta all'ambiente e il coefficiente di scambio termico h :

$$k = hA$$

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{dU}{dt} = k(T_c(t) - T_a)$$

Se C è la capacità termica del corpo, possiamo scrivere:

$$\frac{dU}{dt} = C \frac{dT_c}{dt}$$

$$\Delta T(t) = (T_c(t) - T_a)$$

$$C \frac{dT_c}{dt} = -k \Delta T(t)$$

$$\tau = \frac{C}{k}$$

$$dT_c = d\Delta T(t)$$

$$\tau \frac{d\Delta T(t)}{dt} = -\Delta T(t)$$

Abbiamo quindi una equazione differenziale in cui la funzione da trovare $\Delta T(t)$ è proporzionale alla sua derivata prima

$$\tau \int_0^t \frac{d\Delta T(t)}{\Delta T(t)} = - \int_0^t dt$$

$$\ln \Delta T(t) - \ln \Delta T(0) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\ln \frac{\Delta T(t)}{\Delta T(0)} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\Delta T(t) = \Delta T(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$T_c(t) = T_a + (T_c(0) - T_a) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

9 Cammino libero medio

In un gas reale (non ideale) le molecole non sono puntiformi. Come prima approssimazione la loro forma può essere considerata sferica. In un tempo Δt la molecola di «raggio» d percorre una distanza $v\Delta t$ interessando un volume cilindrico Vol_{cil}

$$Vol_{cil} = \pi d^2 v \Delta t$$

Il numero di collisioni che si verificano è quindi uguale al numero di molecole presenti all'interno del cilindro. Se N/V è il numero di molecole per unità di volume il numero di collisioni della molecola con le altre particelle sarà quindi uguale a

$$N_{collisioni} \propto \frac{N}{V} \pi d^2 v \Delta t.$$

Si definisce libero cammino medio λ la lunghezza del cilindro divisa per il numero di collisioni

$$L_{cilindro} = v \Delta t$$

$$\lambda \propto \frac{L_{cilindro}}{N_{collisioni}} = \frac{v \Delta t}{\frac{N}{V} \pi d^2 v \Delta t} = \frac{1}{\frac{N}{V} \pi d^2} \quad (18)$$

Il valore sperimentale di λ è effettivamente proporzionale a questo valore approssimato.

$$\lambda_s \simeq \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \frac{N}{V} \pi d^2} \quad (19)$$

10 Dilatazione Termica

Un corpo solido di volume V è soggetto, in seguito ad un aumento di temperatura ΔT ad un aumento di volume ΔV proporzionale al volume V e all'aumento di temperatura ΔT

$$\Delta V = k V \Delta T$$

Il coefficiente k è il «coefficiente di dilatazione cubica» e dipende dal materiale di cui è costituito il corpo in questione.

Un corpo di lunghezza l è soggetto, in seguito ad un aumento di temperatura ΔT ad un aumento di lunghezza Δl proporzionale al volume V e all'aumento di temperatura ΔT

$$\Delta l = \lambda \Delta T$$

Il coefficiente λ è il «coefficiente di dilatazione lineare» e dipende dal materiale di cui è costituito il corpo in questione.

Il coefficiente k è pari a tre volte il coefficiente λ

$$k = 3\lambda$$

Consideriamo un cubo di volume V_1

$$V_1 = L_1^3$$

$$L_2 = L_1 + \Delta l = L_1 + \lambda L_1 \Delta T$$

$$V_2 = L_2^3 = (L_1 + \lambda L_1 \Delta T)^3$$

Essendo il valore $\lambda L_1 \Delta T$ piccolo rispetto ad L_1 si possono trascurare i termini di ordine superiore:

$$V_2 = L_1^3 + 3L_1^2\lambda L_1\Delta T = V_1^3 + 3\lambda V_1\Delta T = kV_1\Delta T$$

$$3\lambda = k$$

11 Esercizi

11.1 es1

Determinare la variazione di entropia dopo avere mescolato un mazzo di 40 carte ordinato utilizzando unità naturali in cui $k_B = 1$:

Numero w_i di “microstati” possibili per un mazzo ordinato

$$w_i = 1$$

Numero w_f di “microstati” possibili per un mazzo di 40 carte non ordinato

$$w_f = n! = 40!$$

$$S_i = k_B \ln 1 = 0$$

$$S_f = k_B \ln n!$$

$$\Delta S = k_B \ln 40! = 110.32$$

codice octave:

$$S = \log(\text{factorial}(40))$$

11.2 es2

Determinare il volume occupato da 4 g di O₂ a c.n. («condizioni normali» 0°C e 101 kPa o 1 atm)

$$PV = nRT$$

$$V = \frac{nRT}{P}$$

$$R \simeq 8.314$$

$$n = \frac{4}{32}$$

$$T = 0 + 273.15$$

$$P = 101 \cdot 10^3$$

$$V = \frac{nRT}{P} \simeq 2.81 \cdot 10^{-3} m^3$$

istruzione octave:

$$V = n * R * T / P$$

11.3 es3

Tensione di vapore del mercurio a -120°C è 10^{-16}mm calcolare il numero di molecole di Hg per cm^3

$$n = \frac{PV}{RT}$$

$$1\text{mm} = 1.33 \cdot 10^{-3} \text{ bar} = 133 \text{ pascal}$$

$$P = 133 \cdot 10^{-16}$$

$$V = 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$T = 273.15 - 120$$

$$R \simeq 8.314$$

$$Av = 6.02 \cdot 10^{23}$$

codice octave:

$$n = P * V / (R * T)$$

$$N = Av * n \simeq 6$$

11.4 es4

Un gas perfetto subisce una trasformazione nella quale la temperatura raddoppia e e la pressione triplica. Di quanto varia il volume ?

$$P_1 V_1 = n R T_1$$

$$P_2 V_2 = n R T_2$$

$$3P_1 V_2 = n R 2T_1$$

dividiamo l'ultima equazione per la prima:

$$\frac{3V_2}{V_1} = 2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{3}$$

11.5 es5

Dell'elio si trova in un contenitore di 12 litri a pressione $P=730$ Pa alla temperatura di 320 K.

Determinare la quantità di gas (numero di moli n) presente

$$n = \frac{PV}{RT}$$

$$P = 730$$

$$V = 12 \cdot 10^{-3}$$

$$R = 8.314$$

$$T = 320$$

$$n = P * V / (R * T)$$

$$n = 3.29 \cdot 10^{-3}$$

Se il gas subisce una espansione isoterma con un volume finale di 18 litri, quale sarà la pressione finale ?

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$V = 18 \cdot 10^{-3}$$

$$P = n * R * T / V$$

$$P = 486 \text{ Pa}$$

11.6 es6

Determinare il numero di molecole presenti in un m^3 di gas perfetto in condizioni normali (0° C e 1 atm o 101 kPa)

$$PV = Nk_B T$$

$$N = \frac{PV}{k_B T}$$

$$P = 101 \cdot 10^3$$

$$V = 1$$

$$T = 273.15$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$$

$$N = 2.68 \cdot 10^{25}$$

11.7 es7

Un gas si espande a pressione costante (101 kPa) da un volume iniziale di 0.344 m^3 a un volume finale di 0.424 m^3 .
Determinare il lavoro compiuto.

$$L = P\Delta V$$

$$P = 101 \cdot 10^3$$

$$\Delta V = 0.424 - 0.344 = 0.08$$

$$L = 8080 \text{ J}$$

Determinare il lavoro compiuto nel caso della trasformazione inversa (volume iniziale 0.424 e volume finale 0.344).

$$L = -8080 \text{ J}$$

11.8 es8

Il valore di $\gamma = c_p/c_v$ per l'aria è di 1.4. Supponiamo che 1 mole di aria sia inizialmente alla pressione di 202 kPa e occupi un volume di 45 l . L'aria si espande adiabaticamente fino a raggiungere un volume di 65 l . Determinare il lavoro compiuto

$$P_i = 202 \cdot 10^3$$

$$V_i = 45 \cdot 10^{-3}$$

$$V_f = 65 \cdot 10^{-3}$$

$$n = 1$$

$$\gamma = c_p/c_v = 1.4$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost}$$

per una espansione adiabatica $Q = 0$

$$Q = U + L = 0$$

$$T = \frac{PV}{nR}$$

$$L = -U = -nc_v(T_f - T_i)$$

$$L = \frac{nc_v}{R}(RT_i - RT_f)$$

per la relazione di Mayer $R = c_p - c_v$ e ponendo $n=1$

$$L = \frac{c_v}{(c_p - c_v)}(RT_i - RT_f) = \frac{R}{\gamma - 1}(T_i - T_f)$$

$$L = \frac{RT_i}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_f}{T_i} \right)$$

ricordando che $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$ si ha

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1}$$

$$L = \frac{P_i V_i}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} \right)$$

codice octave

gamma = 1.4;

gamma1=1.4-1;

v1 = 45e-3;

v2 = 65e-3;

p1=202000;

$$L=(p1*v1/gamma1)*(1-(v1/v2)^gamma1)$$

Risultato:

L=3108 joule.

Determinare la pressione finale:

$$P_f = \frac{P_i V_i^\gamma}{V_f^\gamma}$$

codice octave:

$$p2=(p1*v1^gamma)/(v2^gamma)$$

Risultato:

$P_f = 120 \text{ kPa}$.

Calcolare le temperature iniziali e finali del sistema:

$$T_i = \frac{P_i V_i}{R} = 1093 \text{ K}$$

$$T_f = \frac{P_f V_f}{R} = 944 \text{ K}$$

11.9 es9

Quanto calore si deve fornire a un chiodo di ferro di 3 g per aumentare la sua temperatura di 20 °C ?

Il calore specifico del ferro è di 0.444 J/g (o 0.106 cal/g).

$$Q = c_s m \Delta T = 0.444 \cdot 3 \cdot 20 = 26.6 \text{ J} = 6.36 \text{ cal}$$

11.10 es10

4 moli di Argon sono contenute in un cilindro a 300 K. Quanto calore deve essere fornito al gas affinché questo raggiunga la temperatura di 600 K

a volume costante:

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2} R n \Delta T$$

$$c_v = \frac{3}{2} R$$

$$Q = c_v n \Delta T = 12.5 \cdot 4 \cdot 300 = 15 \text{ kJ}$$

e a pressione costante:

$$c_p = c_v + R$$

$$Q = c_p n \Delta T = 21 \cdot 4 \cdot 300 = 25 \text{ kJ}$$

11.11 es11

Un recipiente isolato contiene 0.75 Kg di acqua a 20°C, cui vengono aggiunti 1.24 Kg di piombo a 95 °C. Trascurando scambi di calore con l'ambiente determinare la temperatura finale del sistema. Il calore specifico dell'acqua è 4180 J/KgK del piombo 130 J/KgK.

$$Q = \Delta U = 0$$

$$U_{iH_2O} = c_{H_2O} m_{H_2O} T_i = 4180 \cdot 0.75 \cdot (20 + 273.15) = 9.2 \cdot 10^5 J$$

$$U_{iPb} = c_{Pb} m_{Pb} T_i = 130 \cdot 1.24 \cdot (95 + 273.15) = 5.9 \cdot 10^4 J$$

$$U_i = U_{iH_2O} + U_{iPb} = U_f = 9.8 \cdot 10^5 J$$

$$(c_{H_2O} m_{H_2O} + c_{Pb} m_{Pb}) T_f = U_f$$

$$T_f = \frac{U_f}{c_{H_2O} m_{H_2O} + c_{Pb} m_{Pb}} = \frac{9.8 \cdot 10^5}{(4180 \cdot 0.75) + (130 \cdot 1.24)} = 297 \text{ K} = 24^\circ C$$

11.12 es12

Dimostrare che il numero di gradi di libertà n_l è correlato a γ dall'equazione

$$n_l = \frac{2}{\gamma - 1}$$

per definizione

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

usando l'eq. di Mayer abbiamo

$$\gamma = \frac{c_v + R}{c_v}$$

per una mole l'energia interna è

$$U = \frac{n_l}{2} RT$$

$$c_v = \frac{n_l}{2} R$$

quindi

$$\gamma = \frac{\frac{n_l}{2} R + R}{\frac{n_l}{2} R} = \frac{n_l R + 2R}{n_l R} = 1 + \frac{2}{n_l}$$

$$\frac{2}{n_l} = \gamma - 1$$

$$n_l = \frac{2}{\gamma - 1}$$

11.13 es 13

Due moli di gas biatomico, in equilibrio termodinamico, occupano alla temperatura $T_A = 300K$ un volume V_A . A partire da questo stato il gas effettua una trasformazione adiabatica reversibile AB, caratterizzata da un lavoro L e da un raddoppio del volume. Si dimostri che per riportare il gas alla temperatura iniziale mediante una trasformazione isobara reversibile il gas deve scambiare una quantità di calore Q pari a γL . Determinare il valore di Q .

Per una trasformazione adiabatica abbiamo:

$$\Delta U_{AB} = -L$$

$$L = -nc_v (T_B - T_A) = nc_v (T_A - T_B)$$

$$Q_{BC} = Q = nc_P (T_C - T_B)$$

$$Q_{BA} = Q = nc_P (T_A - T_B)$$

$$\gamma = \frac{c_P}{c_v}$$

$$Q = \frac{c_P}{c_v} L$$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

$$T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1}$$

$$V_B = 2V_A$$

per una mole di gas biatomico la capacità termica a volume costante è

$$c_v = \frac{5}{2} R$$

per la formula di Mayer abbiamo quindi

$$c_P = \frac{7}{2}R$$

$$\gamma = \frac{7}{5}$$

$$T_B = 300 \left(\frac{1}{2} \right)^{2/5} = 227.4$$

$$R = 8.314$$

$$Q = 2 \frac{7}{2} R (300 - 227.4) = 4225 J$$

$$L = 2 \frac{5}{2} R (300 - 227.4) = 3018 J$$

11.14 es14

Una stanza (non sigillata) di volume V è riempita d'aria (considerato come un gas ideale biatomico), ed ha una temperatura iniziale T_1 . Dopo avere acceso una stufa, la temperatura aumenta fino ad un valore T_2 . Calcolare la variazione dell'energia interna dell'aria nella stanza.

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$

Utilizzando la legge dei gas ideali, possiamo sostituire $n \Delta T$ con $\Delta(PV)/R$:

$$\Delta U = c_v \frac{\Delta(PV)}{R} = 0$$

11.15 es15

Una bolla di 5 moli di elio è immersa in acqua. La bolla in seguito ad un riscaldamento di 20° a pressione costante si espande. Quanto calore viene fornito all'elio in seguito all'aumento di temperatura ?

$$Q = n c_p \Delta T$$

$$c_p = c_v + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

ottenendo:

$$Q = n c_p \Delta T = n \frac{5}{2} R \Delta T = 5 \cdot 2.5 \cdot 8.31 \cdot 20 = 2077.5 J.$$

Qual è la variazione di energia interna ?

$$\Delta U = Q - L = n c_v \Delta T = n \frac{3}{2} R \Delta T = 5 \cdot 1.5 \cdot 8.31 \cdot 20 = 1246.5 J$$

Qual è il lavoro compiuto dall'espansione dell'elio ?

$$L = Q - \Delta U = 2077.5 - 1246.5 = 831 J$$

11.16 es16

Un motore di automobile ha un rendimento $\eta = 22\%$ gira a 95 giri al secondo, sviluppando una potenza di 120CV. Quanto lavoro compie in un ciclo?

$$1CV = 735W$$

$$120CV = 120 \cdot 735 = 88.2 kW$$

Lavoro in un ciclo

$$L = \frac{88200}{95} = 928.5 J.$$

Quanto calore viene fornito al motore ad ogni ciclo ?

$$L = \eta Q = \frac{22}{100} Q = 928.5 J$$

$$Q = \frac{100}{22} \cdot 928.5 = 4227 J$$

Quanto calore viene scaricato dal motore ad ogni ciclo ?

$$Q_{out} = Q - L = 4227 - 928 = 3300$$

11.17 es17

Una pompa di calore deve mantenere la temperatura all'interno di una stanza a 22°C, quando la temperatura esterna è di -10°C. E' necessaria una potenza termica di 16 kW per compensare le perdite di calore verso l'esterno. Che potenza minima deve avere il motore elettrico della pompa di calore ?

$$\eta = \frac{Q_F}{L} = \frac{Q_C - L}{L} = \frac{Q_C}{L} - 1 = \frac{T_F}{T_C - T_F} = \frac{273 - 10}{(273 + 22) - (273 - 10)} = 8.22$$

$$L = Q_C - Q_F$$

$$\frac{Q_C}{t} = 16$$

$$L = \frac{Q_C}{\eta + 1}$$

$$\frac{L}{t} = \frac{1}{\eta + 1} \frac{Q_C}{t} = \frac{1}{8.22 + 1} 16 = 1.7 kW$$

11.18 es18

Due blocchi di rame di massa $m = 0.85$ Kg, sono posti in contatto termico in un contenitore isolato. Le temperature iniziali dei due blocchi sono rispettivamente di 325 K e 285 K e il calore specifico del rame è di $0.386 J/(g \cdot K)$.

Qual è la temperatura finale di equilibrio T dei due blocchi ?

$$U_1 = c_{cu} m T_1$$

$$U_2 = c_{cu} m T_2$$

$$U_3 = c_{cu} 2m T$$

$$U_3 = U_1 + U_2$$

$$T = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) = 305K$$

$$\Delta T = 20K$$

Qual è la variazione di entropia per i due blocchi ?

$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU}{T} = mc_{cu} \int \frac{dT}{T} = mc_{cu} \ln \frac{T}{T + \Delta T}$$

$$\Delta S_2 = mc_{cu} \ln \frac{T}{T - \Delta T}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc_{cu} \left(\ln \frac{T}{T + \Delta T} + \ln \frac{T}{T - \Delta T} \right) = mc_{cu} \ln \frac{T^2}{T^2 - \Delta T^2} = 1.41 J/K$$

11.19 es19

Calcolare il calore assorbito da 31.6 g di ghiaccio a 0°C per passare allo stato liquido. Una mole d'acqua pesa circa 18 grammi. Di conseguenza il numero n di moli d'acqua è

$$n = \frac{31.6}{18} = 1.75$$

$$Q = 1.75 \cdot 6.01 = 10.5 kJ$$

11.20 es20

Calcolare la massa di metanolo m che passa dallo stato di vapore a quello liquido quando vengono rilasciati 20 kJ. Poiché ΔE_{eb} del metanolo è di 35.5 kJ/mol il valore ΔE_{eb} relativo al processo inverso cioè al processo di condensazione è pari a -35.5 kJ/mol. Una mole di metanolo M pesa 32 g. Il calore viene dato dal sistema all'ambiente e pertanto assume valore negativo. Se n è il numero di moli

$$-20.0 kJ = -35.5 \cdot n$$

Da cui si ricava $n = 0.563$.

Una mole di metanolo pesa circa 32 g di conseguenza

la massa di metanolo = $0.563 \text{ mol} \cdot 32 \text{ g/mol} = 18 \text{ g}$

$$M = 32$$

$$n = 0.563$$

$$m = nM = 18g$$

11.21 es21

Una lastra è composta da uno strato di legno di 2 cm e uno di lana di roccia di 5 cm. La conducibilità del legno è di $0.11W/(m \cdot K)$, della lana di roccia è $0.043W/(m \cdot K)$. L'area A della lastra è di $26 m^2$. Se la differenza di temperatura tra le due superfici è di $35^\circ C$, qual è il calore trasferito nell'unità di tempo dalla lastra?

$$\varrho_{legno} = \frac{1}{0.11} = 9.1$$

$$\varrho_{roccia} = \frac{1}{0.043} = 23$$

$$r_{legno} = \varrho_{legno} \cdot s_{legno} = 9.1 \cdot 0.02$$

$$r_{roccia} = \varrho_{roccia} \cdot s_{roccia} = 23 \cdot 0.05$$

$$Q = \frac{A\Delta T}{\Sigma r_T} = \frac{A\Delta T}{\Sigma r_T} = \frac{26 \cdot 35}{0.18 + 1.15} = 684 W$$

11.22 es22

Due moli di gas biatomico effettuano una espansione adiabatica, con una variazione di temperatura da $350^\circ C$ a $45^\circ C$. Si calcoli il lavoro compiuto dal gas. Dal primo principio abbiamo per una trasformazione adiabatica ($Q = 0$):

$$\Delta U = Q - L = -L$$

$$\Delta U = nc_v \Delta T = n \frac{5}{2} R \Delta T = 2 \frac{5}{2} 8.31 (45 - 350) = -12.673 kJ$$

$$L = 12.673 kJ$$

11.23 es23

Un recipiente è diviso in due parti uguali da una parete. La prima parte contiene un gas ideale a temperatura $T_1 = 300K$ e $P_1 = 10^5 Pa$. Nell'altra parte è contenuta lo stesso gas ma a temperatura $T_2 = 500K$ e $P_2 = 3 \cdot 10^5 Pa$. La parete viene rimossa e i due gas si mescolano. Si determinino la temperatura e la pressione del gas nella condizione finale.

$$n_1 = \frac{P_1 V_1}{RT_1}, n_2 = \frac{P_2 V_1}{RT_2}$$

$$(n_1 + n_2) = \frac{V_1}{R} \left(\frac{P_1}{T_1} + \frac{P_2}{T_2} \right) \quad (20)$$

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

$$n_1 c_v (T_f - T_1) + n_2 c_v (T_f - T_2) = 0$$

$$T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$$

$$P_f = (n_1 + n_2) \frac{RT_f}{2V_1}$$

$$P_f = \left(\frac{P_1}{T_1} + \frac{P_2}{T_2} \right) \frac{T_f}{2}$$

$$T_f = 429K$$

$$P_f = 2 \cdot 10^5 Pa$$

11.24 es24

Si può trovare sperimentalmente i «diametri» molecolari dei diversi tipi di molecole gassose misurando i tassi ai quali i diversi gas si diffondono l'uno dentro l'altro. Per l'ossigeno si registra $d = 2.9 \cdot 10^{-10} m$. Qual è il cammino libero medio per l'ossigeno a temperatura ambiente e alla pressione atmosferica di 1 bar ?

$$V = \frac{nRT}{P}$$

per una mole $n=1$

$$V = \frac{RT}{P} = 2.47 \cdot 10^{-2} m^3$$

di conseguenza

$$\frac{N}{V} = \frac{N_{Av}}{V} = 2.44 \cdot 10^{25} \text{ molecole}/m^3$$

$$\lambda_s \simeq \frac{1}{\sqrt{2} \frac{N}{V} \pi d^2} = 1.1 \cdot 10^{-7} m$$

Questo valore corrisponde circa a 380 «diametri» molecolari. Se la velocità media di una molecola è di 450 m/s, quale sarà la frequenza degli urti?

$$f_{urti} = \frac{v}{\lambda_s} = \frac{450}{1.1 \cdot 10^{-7}} = 4.1 \cdot 10^9 s^{-1}$$

11.25 es25

Qual è la velocità media v delle molecole dell'ossigeno gassoso a $T=300K$? La massa molare M dell'ossigeno è 32g/mol.

$$a = \frac{m}{2k_B T}$$

$$\mathcal{P}(v) = 4\pi \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} v^2 \exp(-av^2)$$

$$\bar{v} = \int_0^\infty v \mathcal{P}(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Qual è la velocità quadratica media ?

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 \mathcal{P}(v) dv = \frac{3RT}{M}$$

11.26 es26

Un frigorifero con efficienza $\eta = 4.7$ estrae calore al ritmo di 250 J per ciclo. Quanto lavoro deve esser speso dal motore del frigorifero per ogni ciclo ?

$$\eta = \frac{Q_F}{Q_c - Q_F} = \frac{Q_F}{L}$$
$$L = \frac{Q_F}{\eta} = \frac{250}{4.7} = 53J$$

Quanto calore per ciclo viene scaricato nella stanza ?

$$Q_c = L + Q_F = 250 + 53 = 303J$$

11.27 es27

Una macchina termica trasferisce calore da una sorgente a 520°C a una a temperatura di 100°C . Qual è il suo rendimento massimo possibile ?

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{793 - 373}{793} = 0.53$$

11.28 es28

Un blocco di ghiaccio di 235g si fonde in acqua alla temperatura di 0°C . Qual è la variazione di entropia del ghiaccio ?

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{Q}{T}$$

se $L_f = 333 \text{ kJ/kg}$ è il calore latente di fusione del ghiaccio allora

$$Q = mL_f = 0.235 \cdot 333 = 7.83 \cdot 10^4 J$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{7.83 \cdot 10^4}{273} = 287 \text{ J/K}$$

11.29 es29

Un cilindro adiabatico dotato di parete mobile (stantuffo) contiene 6g di Ar e 14g di N_2 . I due gas sono separati da una parete mobile, perfettamente conduttore. La temperatura del sistema è $T_0 = 25^\circ\text{C}$; il volume complessivo è $V_0 = 6l$. Lo stantuffo viene premuto e la temperatura sale a $T_1 = 145^\circ\text{C}$. Si calcoli: a) il lavoro compiuto nella compressione; b) il volume finale di ciascun gas, nell'ipotesi di trasformazione reversibile.

$$L = -\Delta U = -n_1 c_{v1} (T_1 - T_0) - n_2 c_{v2} (T_1 - T_0)$$

Il numero di moli di Ar è

$$n_1 = \frac{6}{40} = 0.15$$

Il numero di moli di azoto è

$$n_2 = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

$$c_{v1} = \frac{3}{2}R$$

$$c_{v_2} = \frac{5}{2}R$$

Di conseguenza il lavoro assorbito dal gas è

$$L = -1471J.$$

cv1=

I due gas sono alla stessa temperatura e pressione:

$$PV_1 = n_1RT$$

$$PV_2 = n_2RT$$

da cui:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}V$$

$$V_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}V$$

$$dU = -dL$$

$$(n_1c_{v_1} + n_2c_{v_2})dT = -PdV$$

$$P(V_1 + V_2) = (n_1 + n_2)RT$$

$$(n_1c_{v_1} + n_2c_{v_2})dT + \frac{n_1 + n_2}{V}RTdV = 0$$

$$\bar{c} = \frac{n_1c_{v_1} + n_2c_{v_2}}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{c}\frac{dT}{T} = +R\frac{dV}{V} = 0$$

$$T^{\frac{\bar{c}}{R}}V = cost$$

$$V_f = V_0 \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{\bar{c}}{R}}$$

11.30 es30

Una sorgente di calore di potenza W non nota aumenta la temperatura di 0.5 l d'acqua di 50 K in tre minuti. Considerando che la capacità termica dell'acqua è di 4.18 joule per grammo per K e che la densità dell'acqua è di circa 1Kg/l, calcolare la potenza media erogata dalla sorgente di calore. Calcolare la potenza W erogata dalla sorgente termica.

$$m = \rho V = 0.5 \text{ Kg}$$

$$C = 4180 \text{ JK}^{-1}\text{Kg}^{-1}$$

$$\Delta T = 50 \text{ K}$$

$$Q = Cm\Delta T = 4180 \cdot 0.5 \cdot 50 \text{ J}$$

$$\Delta t = 3 \cdot 60 = 180 \text{ s}$$

$$W = \frac{Q}{\Delta t} = 580 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

```
codice octave:  
!/usr/bin/octave  
Vol=0.5e-3; #m3  
rho=1000; #Kg/m3  
C=4.18e3; #J/(Kg*K)  
deltaT=50;  
m=rho*Vol;  
E=C*m*deltaT;  
t=180;  
W=E/t
```

11.31 es31

Una sorgente termica di potenza W non nota riscalda un flusso d'acqua di 1 l/min. Se il ΔT è di 10°C, quale sarà il valore di W ?

$$\Phi = \frac{dm}{dt} = \frac{1}{60} \text{ Kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$W = \frac{dQ}{dt} = \frac{C\Delta T dm}{dt} = C\Delta T\Phi = 4180 \cdot 10 \cdot \frac{1}{60} \simeq 697 \text{ w}$$

11.32 es32

Consideriamo due blocchi di massa m e calore specifico c , aventi rispettivamente le temperature T_1 e T_2 . Dopo essere posti a contatto termico si portano ad una temperatura finale T_e . Calcolare la variazione di entropia.

$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = mc \int_{T_1}^{T_e} \frac{dT}{T} = mc \ln \left(\frac{T_e}{T_1} \right)$$

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T} = mc \int_{T_2}^{T_e} \frac{dT}{T} = mc \ln \left(\frac{T_e}{T_2} \right)$$

$$\Delta S = mc \ln \left(\frac{T_e}{T_1} \right) + mc \ln \left(\frac{T_e}{T_2} \right) = mc \ln \left(\frac{T_e^2}{T_1 T_2} \right)$$

$$cm(T_1 + T_2) = 2cmT_e$$

$$T_e = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\frac{T_e^2}{T_1 T_2} = \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} = \frac{4T_1 T_2 + (T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} = 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} > 1$$

Di conseguenza

$$\Delta S = mc \ln \left(\frac{T_e^2}{T_1 T_2} \right) > 0$$

11.33 es33

Due moli di gas biatomico subiscono un raffreddamento isocoro AB seguito da un riscaldamento BC isobaro. Il calore scambiato complessivamente è nullo. Il raffreddamento dimezza la temperatura iniziale $T_B = 1/2 T_A$. Calcolare la temperatura finale T_C raggiunta dal gas dopo il riscaldamento isobaro in funzione della temperatura iniziale T_A

$$Q_{AB} = nc_v (T_B - T_A)$$

$$Q_{BC} = nc_p (T_C - T_B)$$

Se il calore complessivo è nullo

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} = 0$$

$$nc_v (T_B - T_A) + nc_p (T_C - T_B) = 0$$

$$0.5c_v T_A = c_p (T_C - 0.5T_A)$$

$$c_p T_C = 0.5(c_v T_A + c_p T_A)$$

$$T_C = 0.5 \left(\frac{c_v}{c_p} + 1 \right) T_A$$

Per un gas biatomico $c_v = 5/2 R$ e $c_p = 7/2 R$ (utilizzando la formula di Mayer)

$$c_v = c_p - R$$

di conseguenza

$$T_C = 0.5 \left(\frac{5}{7} + 1 \right) T_A = \frac{6}{7} T_A$$

11.34 es34

<http://www.fisica.unisa.it/mariateresa.mercaldo/didattica/termodinamica.pdf>

Si consideri un cilindro rigido lungo $L = 30$ cm diviso in due parti da una parete sottile, a tenuta stagna, parallela alle estremità e libera di muoversi. Il cilindro è libero di scambiare calore con l'ambiente esterno la cui temperatura è costante. Inizialmente la parete è fissa e divide il cilindro in due parti uguali, ciascuna delle quali contiene un gas perfetto rispettivamente a pressione $P_{1,in} = 3 \cdot 10^4 Pa$ e $P_{2,in} = 9 \cdot 10^4 Pa$. Successivamente la parete viene lasciata libera di muoversi; si calcoli la distanza della parete dai due estremi in condizioni di equilibrio.

$$P_{1,in} V_{1,in} = n_1 RT$$

$$P_{2,in} V_{2,in} = n_2 RT$$

Dividendo la seconda equazione per la prima e ricordando che $V_{2,in} = V_{1,in}$ otteniamo

$$\frac{P_{2,in}}{P_{1,in}} = \frac{n_2}{n_1} = 3$$

Chiamando P_f la pressione finale nelle due sezioni e $V_{2,f}$ e $V_{1,f}$ i volumi finali abbiamo:

$$P_f V_{1,f} = n_1 RT$$

$$P_f V_{2,f} = n_2 RT$$

Dividendo la seconda equazione per la prima:

$$\frac{V_{2,f}}{V_{1,f}} = \frac{Ax_2}{Ax_1} = \frac{n_2}{n_1} = 3$$

$$\frac{x_2}{x_1} = 3$$

$$x_1 + x_2 = L = 30$$

$$x_1 + 3x_1 = 30$$

$$x_1 = \frac{30}{4} = 7.5 cm$$

$$x_2 = 22.5 cm$$

11.35 es35

Si consideri un recipiente contenente un gas perfetto. Inizialmente il volume del recipiente è $V_1 = 2l$ e la pressione $P_1 = 10 bar$; indichiamo inoltre la temperatura con T_1 . Il gas viene inizialmente scaldato alla temperatura T_2 a volume costante; la pressione diventa $P_2 = 12 bar$. Quindi viene diminuito il volume (volume finale V_2) a pressione costante, riportando la temperatura a T_1 . Si calcoli: (a) il rapporto T_2/T_1 ; (b) il volume V_2 .

$$P_1 V_1 = n R T_1$$

$$P_2 V_1 = n R T_2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} = 1.2$$

$$P_2 V_2 = n R T_1$$

$$P_2 V_2 = P_1 V_1$$

$$V_2 = \frac{P_1}{P_2} V_1 = \frac{2}{1.2} \simeq 1.67l$$

11.36 es36

Una mole di elio (da approssimare come gas perfetto) alla temperatura $T_1 = 27^\circ\text{C}$ occupa inizialmente il volume $V_1 = 1\text{ l}$. Al gas viene fatta compiere una trasformazione isoterma che ne raddoppia il volume e poi una compressione adiabatica che lo riporta alla pressione iniziale. Determinare lo stato finale e calcolare il lavoro e il calore scambiato dal sistema durante la trasformazione complessiva.

$$n = 1$$

$$V_1 = 10^{-3} m^3$$

$$V_2 = 2 \cdot 10^{-3} m^3$$

$$P_1 V_1 = n R T_1$$

$$L_1 = n R T \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$P_1 = \frac{R T_1}{V_1} \simeq 2.5 \cdot 10^6 Pa$$

$$P_2 = \frac{R T_1}{V_2} = \frac{1}{2} P_1 \simeq 1.25 \cdot 10^6 Pa$$

$$T_1 = 27 + 273.15 \simeq 300 K$$

$$T_2 = T_1$$

$$Q_{isoterma} = L_{isoterma} = 8.314 \cdot 300 \cdot \ln 2 = 1729 J$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{1.5R + R}{1.5R} = 1.67$$

$$P_3 = P_1$$

$$P_2 V_2^\gamma = P_1 V_3^\gamma$$

$$\left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma = \frac{P_2}{P_1}$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$V_3 = V_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{0.6} \simeq 1.32l$$

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$$

$$T_3 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = 300 \cdot \left(\frac{2}{1.32} \right)^{0.67} \simeq 396K$$

$$L_{adiabatica} = -\Delta U = -c_v \Delta T = -\frac{3}{2} R \Delta T = -1197J$$

$$L = L_{isoterma} + L_{adiabatica} = 1729 - 1197 = 532J$$

11.37 es. 37

Si consideri un gas che compie la trasformazione reversibile indicata in figura 1: nel piano di Clapeyron (PV) è rappresentata da un segmento che unisce il punto A (stato iniziale) con il punto B (stato finale). Sapendo che $P_A = 3bar$, $P_B = 1bar$, $V_A = 100cm^3$ e $T = T_A = T_B$, si calcoli il lavoro fatto dal gas nella trasformazione.

$$L = \int_{V_A}^{V_B} P dV = \bar{P} (V_B - V_A)$$

$$\bar{P} = \frac{P_A + P_B}{2} = 2 \cdot 10^5 Pa$$

Per trovare V_B possiamo usare la legge dei gas perfetti:

$$P_A V_A = nRT$$

$$P_B V_B = nRT$$

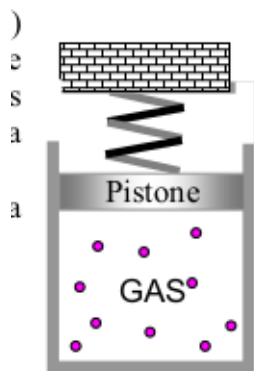
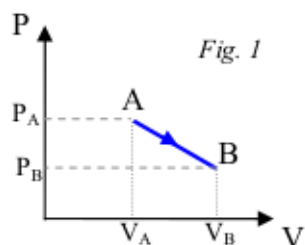
$$P_A V_A = P_B V_B$$

$$V_A = 10^{-4} m^3$$

$$V_B = \frac{P_A}{P_B} V_A = 3 \cdot 10^{-4} m^3$$

$$V_B - V_A = 2 \cdot 10^{-4} m^3$$

$$L = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 40J$$



11.38 es. 38

Una certa quantità di ossigeno (gas biatomico, da trattare come un gas perfetto) è contenuta dentro un cilindro con pistone di area $S = 200\text{cm}^2$ e peso trascurabile collegato tramite una molla ad un sostegno rigido. Inizialmente il volume del gas è $V_0 = 5\text{l}$, la pressione è pari a quella esterna $P_0 = 1\text{atm}$ (la molla è quindi nella sua posizione di riposo) e la temperatura è $T_0 = -30^\circ\text{C}$. Lasciando il sistema a contatto con l'ambiente esterno, si porta alla temperatura ambiente $T = 27^\circ\text{C}$ e il pistone si solleva di $h = 2\text{cm}$. (a) Qual è la massa del gas (peso molecolare $pm = 32$)? (b) Quanto valgono la pressione P e il volume V finali? (c) Qual è il valore della costante elastica k della molla? (d) Qual è il lavoro compiuto durante la trasformazione? (e) Quale quantità di calore Q il sistema ha assorbito dall'ambiente?

$$P_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{Pa}$$

$$V_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$$

$$T_0 = 243.15 \text{K}$$

$$P_0 V_0 = n R T_0$$

$$n = \frac{505}{8.314 \cdot 243.15} \simeq 0.25$$

$$M = n \cdot pm = 0.25 \cdot 32 = 8 \text{g}$$

$$T_f = 300.15 \text{K}$$

$$V_f - V_0 = Sh = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0.4 \cdot 10^{-3} m^3$$

$$V_f = V_0 + Sh = 5.4 \cdot 10^{-3} m^3$$

$$P_f V_f = nRT_f$$

$$P_f = \frac{nRT_f}{V_f} = \frac{0.25 \cdot 8.314 \cdot 300.15}{5.4 \cdot 10^{-3}} = 1.15 \cdot 10^5 Pa$$

$$kh = (P_f - P_0) S$$

$$k = \frac{0.15 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 0.15 \cdot 10^5 Nm^{-1}$$

$$L_1 = \frac{1}{2} kh^2 = 0.075 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \simeq 3J$$

$$L_2 = 10^5 \cdot 0.4 \cdot 10^{-3} \simeq 40J$$

$$L = L_1 + L_2 \simeq 43J$$

$$Q = L + \Delta U = 43 + \frac{5}{2} nR\Delta T = 339J$$

11.39 es. 39

Chiamiamo stato K di un registro di N bits tutte le configurazioni del registro in cui K bits sono 0.

Calcolare l'entropia dello stato K

$$w_K = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)\dots(N-K+1)}{K!} = \binom{N}{K}$$

$$S_K = k_B \ln w_k = k_B \ln \binom{N}{K}$$

11.40 es. 40

Un contenitore racchiude due gas ideali. Sono presenti 2 moli del primo gas e 0.5 moli del secondo. Determinare la frazione della pressione totale sulla parete esercitata sulla parete del contenitore dal primo gas.

$$P_1 V = n_1 RT$$

$$P_2 V = n_2 RT$$

$$n_1 = 2$$

$$n_2 = 0.5$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1}{n_2} = 4$$

$$\frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{4P_2}{4P_2 + P_2} = \frac{4}{5}$$

11.41 es.41

Una mole di gas occupa inizialmente un volume $V_0 = 8l$ e compie una trasformazione isoterma alla temperatura costante di $T_0 = 300K$, producendo un lavoro di 150 J. Quale è il volume finale del gas?

$$L = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_0} \right)$$

$$n = 1$$

$$\frac{L}{nRT} = \ln \left(\frac{V_f}{V_0} \right)$$

$$\exp \left(\frac{L}{nRT} \right) = \frac{V_f}{V_0}$$

$$V_f = V_0 \exp \left(\frac{L}{nRT} \right)$$

$$V_f = 8 \cdot 1.062 = 8.5l$$

11.42 es. 42

Un proiettile di piombo, avente velocità $v = 200m/s$, penetra in un blocco di legno e si ferma. La temperatura iniziale del proiettile è di $20^\circ C$. Ammettendo che l'energia persa dal proiettile provochi un aumento di temperatura del proiettile, quanto vale la temperatura finale ? Quale dovrebbe essere la velocità del proiettile per aumentare la sua temperatura fino a raggiungere la temperatura di fusione del piombo (ossia $327^\circ C$) ? Il calore specifico del piombo vale $c_{Pb} = 129.8J/kgK$.

$$Q = mc_{Pb}\Delta T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c_{Pb}} = 154K$$

$$T_f = 20 + 154 = 174^\circ C$$

Per raggiungere la fusione del piombo, il ΔT deve essere pari a $327-20=307K$

$$\Delta T = 307$$

$$v^2 = 2c_{Pb}\Delta T$$

$$v = \sqrt{2c_{Pb}\Delta T} \simeq 282m/s$$

11.43 es. 43

Un contenitore di forma cilindrica è costituito da pareti adiabatiche. Il contenitore è suddiviso in due parti da una parete interna in grado di condurre energia sotto forma di calore.



Nella parte A sono contenuti tre 3,0 g di elio, monoatomico con massa atomica pari a 4 *uma*, alla temperatura $t_A = -70^\circ\text{C}$, mentre nella parte B sono presenti 10 g di azoto, biatomico, con massa atomica pari a 28 *uma* inizialmente ad una temperatura $t_B = 70^\circ\text{C}$.

Si considerino i due gas ideali, si calcoli, ad equilibrio termico raggiunto:

1. la temperatura di equilibrio finale
2. la quantità di calore scambiata
3. la variazione di entropia dell'intero sistema

Soluzione

La massa molare dell'elio è

$$M_M(\text{He}) = 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

quella dell'azoto:

$$M_M(\text{N}_2) = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Calcoliamo il numero di moli dell'elio e dell'azoto, si ha:

$$n_{\text{elio}} = \frac{\text{massa in grammi}}{\text{massa molare}} \cong \frac{3}{4} \cong 0.75 \text{ mol}$$

$$n_{\text{azoto}} = \frac{\text{massa in grammi}}{\text{massa molare}} \cong \frac{10}{28} \cong 0.36 \text{ mol}$$

La sostanza a temperatura maggiore, l'azoto, cederà energia sotto forma di calore alla sostanza a temperatura minore, l'elio.

Applicando la prima legge della termodinamica ai due sistemi si ha:

$$\Delta U_{azoto} = Q_{azoto} - L_{azoto}$$

$$\Delta U_{elio} = Q_{elio} - L_{elio}$$

Poiché non vi è variazione di volume, in entrambi i casi, il lavoro compiuto è zero.
Si ha allora:

$$\Delta U_{azoto} = Q_{azoto}$$

$$\Delta U_{elio} = Q_{elio}$$

E' possibile inoltre scrivere:

$$\Delta U_{azoto} = Q_{azoto} = n_{azoto}c_V(N_2) \cdot (T_{EQ} - T_{N2})$$

e

$$\Delta U_{elio} = Q_{elio} = n_{elio}c_V(H_e) \cdot (T_{EQ} - T_{He})$$

Applicando il principio zero della termodinamica, noto anche come legge dello scambio del calore, ed indicando con T_{EQ} , la temperatura di equilibrio, è possibile affermare che il calore ceduto dall'azoto è uguale a quello assorbito dall'elio. Si ha:

$$n_{azoto}c_V(N_2) \cdot (T_{EQ} - T_{N2}) + n_{elio}c_V(H_e) \cdot (T_{EQ} - T_{He}) = 0$$

$$R = 8.31$$

$$c_V(N_2) = \frac{5}{2}R$$

$$c_V(H_e) = \frac{3}{2}R$$

Risolviendo rispetto a T_{EQ} si ha:

$$T_{EQ} = \frac{n_{azoto}c_V(N_2) T_{N2} + n_{elio}c_V(H_e) T_{He}}{n_{azoto}c_V(N_2) + n_{elio}c_V(H_e)} \cong \frac{0.36 \cdot 2.5 \cdot 8.31 \cdot 343.15 + 0.75 \cdot 1.5 \cdot 8.31 \cdot 203.15}{0.36 \cdot 2.5 \cdot 8.31 + 0.75 \cdot 1.5 \cdot 8.31} \cong 265 \text{ K}$$

Per quanto concerne il calore scambiato si ha:

$$|Q_{scambiato}| = |n_{azoto}c_V(N_2) \cdot (T_{EQ} - T_{N2})| \cong 0.36 \cdot 2.5 \cdot 8.31 \cdot 78.15 \cong 580 \text{ J}$$

Per quanto riguarda la variazione di entropia si ha:

$$dQ = nc_VdT$$

$$dS_{elio} = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_{elio}}^{T_{EQ}} \frac{n_{elio}c_V(H_e)dT}{T} = n_{elio}c_V \cdot \ln\left(\frac{T_{EQ}}{T_{elio}}\right) = 0.75 \cdot 1.5 \cdot 8.31 \cdot \ln\left(\frac{265}{203.15}\right) \cong 2.48 \frac{J}{K}$$

$$dS_{Azoto} = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_{Azoto}}^{T_{EQ}} \frac{n_{azoto}c_V(N_2)dT}{T} = n_{azoto}c_V(N_2) \cdot \ln\left(\frac{T_{EQ}}{T_{azoto}}\right) = 0.36 \cdot 2.5 \cdot 8.31 \cdot \ln\left(\frac{265}{343.15}\right) \cong -1.93 \frac{J}{K}$$

$$dS_{tot} = dS_{elio} + dS_{azoto} = 2.48 - 1.93 \cong 0.55 \frac{J}{K}$$

11.44 es.44

Una macchina termica ideale lavora fra due sorgenti.

La sorgente fredda è costituita da 300 g di ghiaccio alla temperatura di 273.15 K, ovvero zero gradi centigradi, (ghiaccio portato al punto di fusione).

La sorgente calda è costituita da una certa quantità di stagno, alla temperatura di fusione, pari a circa 232 °C.

La macchina si arresta quando la temperatura di una delle sorgenti inizia a cambiare.

Calcolare la quantità massima di lavoro estraibile dalla suddetta macchina, nel caso in cui la massa dello stagno sia pari a 20 kg.

(si considerino i seguenti valori per i lavori di fusione delle due sostanze $L_f(\text{ghiaccio}) = 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}}$; $L_f(\text{stagno}) = 14 \frac{\text{cal}}{\text{g}}$)

Soluzione

Poiché, per ipotesi, la macchina è ideale, è possibile calcolare il rendimento applicando la seguente relazione.

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{fusione ghiaccio}}}{T_{\text{fusione piombo}}} \cong 1 - \frac{273.15}{505.15} \cong 0.46$$

La massima quantità di calore che la macchina può assorbire dalla sorgente calda, senza che la temperatura di quest'ultima subisca una variazione, è pari al prodotto del lavoro di fusione dello stagno per la massa.

Si ha:

$$Q_{\text{max ass}} = L_f(\text{stagno}) \cdot m_{\text{stagno}} \cong 14 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 20000 \text{ g} \cong 280.000 \text{ cal}$$

Il massimo calore che la macchina può cedere alla sorgente fredda, senza che la temperatura di quest'ultima vari, è dato dalla seguente relazione

$$Q_{\text{max cedibile}} = L_f(\text{ghiaccio}) \cdot m_{\text{ghiaccio}} \cong 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 200 \text{ g} \cong 16000 \text{ cal}$$

Se la macchina cedesse, alla sorgente fredda, una quantità di energia maggiore di 16.000 cal, la temperatura della stessa sorgente inizierebbe a cambiare e la macchina si arresterebbe.

Il limite di funzionamento della macchina è proprio nel calore massimo che può cedere alla sorgente fredda, che non può superare le 16.000 calorie.

Dovrà, pertanto, valere la relazione:

$$|Q_{\text{ceduto}}| \cong 16000 \text{ cal}$$

E' possibile scrivere il rendimento della macchina nel seguente modo

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{ceduto}}|}{Q_{\text{ass}}}$$

Risolvendo l'ultima relazione scritta rispetto a Q_{ass} si ha:

$$Q_{\text{ass}} = \frac{|Q_{\text{ced}}|}{1 - \eta} \cong \frac{16000}{1 - 0.46} \cong 29630 \text{ cal}$$

Si ha inoltre

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}}$$

da cui

$$L = \eta \cdot Q_{\text{ass}} \cong 0.46 \cdot 29630 \cong 13630 \text{ cal}$$

11.45 es.45

Una macchina frigorifera ha un rendimento $\eta = 4.7$ ed estrae calore dalla sorgente fredda al ritmo di 250J per ciclo. Qual è il lavoro necessario al funzionamento della macchina per ogni ciclo?

$$Q_{trasferito} = 250J$$

$$L = \frac{250}{4.7} = 53J$$

Quanto calore viene trasferito dalla macchina frigorifera alla stanza?

$$Q_{stanza} = L + Q_{trasferito} = 250 + 53 = 303J$$

11.46 es.46

Una macchina termica utilizza una sorgente calda alla temperatura di 520°C ed una sorgente fredda alla temperatura di 100°C. Qual è il rendimento massimo possibile?

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{373K}{793K} = 0.53 \quad (53\%)$$

11.47 es.47

Un blocco di 235g di ghiaccio si fonde ad una temperatura costante leggermente superiore a 0°C. Qual è la variazione di entropia del ghiaccio, considerando che il calore latente di fusione del ghiaccio è 333kJ/kg ?

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{Q}{T}$$

$$Q = mQ_F = 0.235 \cdot 333 \cdot 10^3 = 7.83 \cdot 10^4 J$$

$$T = 273.2$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{7.83 \cdot 10^4}{273.2} = 287 JK^{-1}$$

$$\Delta S_{ambiente} = -287 JK^{-1}$$

11.48 es48

Un cubetto di ghiaccio viene prelevato da un frigorifero ed ha una temperatura iniziale pari a -15 °C. Viene immerso, successivamente, in mezzo litro d'acqua, alla temperatura iniziale di 23 °C. Dopo un certo tempo, il ghiaccio si scioglie del tutto ed il sistema raggiunge una temperatura di equilibrio pari a 20 °C.

Qual'è la massa del cubetto di ghiaccio? (si supponga trascurabile l'energia scambiata con l'ambiente sotto forma di calore)

$c_a = 1 \frac{cal}{g^\circ C}$: calore specifico dell'acqua

$c_g = 0.5 \frac{cal}{g^\circ C}$: calore specifico del ghiaccio

$L_f = 80 cal/g$: calore latente di fusione del ghiaccio

$T_{ia} = 23^\circ C$: temperatura iniziale dell'acqua

$T_{ig} = -15^\circ C$: temperatura iniziale del ghiaccio

$T_E = 20^\circ C$: temperatura di equilibrio del sistema

$T_0 = 0^\circ C$

La quantità d'acqua presente all'interno del contenitore cederà tre aliquote di energia sotto forma di calore:

1. La prima aliquota sarà impiegata per portare il ghiaccio dalla temperatura iniziale di $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ al punto di fusione ($0\text{ }^{\circ}\text{C}$)
2. La seconda per fondere la massa di ghiaccio portata al punto di fusione.
3. La terza per elevare la temperatura dell'acqua, ottenuta dalla fusione del ghiaccio, da zero gradi centigradi fino al valore di equilibrio

Col noto significato dei simboli è possibile scrivere:

$$c_a m_a (T_E - T_{ia}) + c_g m_g (T_0 - T_{ig}) + L_f m_g + c_a m_g T_E = 0$$

Risolvendo rispetto alla quantità m_g si ha:

$$m_g [c_g (T_0 - T_{ig}) + c_a T_E + L_f] = -c_a m_a (T_E - T_{ia})$$

$$m_g = \frac{-c_a m_a (T_E - T_{ia})}{c_g (T_0 - T_{ig}) + c_a T_E + L_f} = \frac{-1 \cdot 500 \cdot (20 - 23)}{0.5 \cdot 15 + 1 \cdot 20 + 80} \cong 13\text{ g}$$

11.49 es49

Una macchina frigorifera ideale ha un coefficiente di prestazione $COP = 5$. La temperatura esterna è pari $36\text{ }^{\circ}\text{C}$. Calcolare la temperatura all'interno della macchina (sorgente fredda).

Sapendo che il calore ceduto all'ambiente ad ogni ciclo è pari a 2000 J , calcolare il calore assorbito dalla macchina alla sorgente fredda.

$COP = 5$: coefficiente di prestazione

T_F : temperatura della sorgente fredda

$T_C = 36\text{ }^{\circ}\text{C}$: temperatura della sorgente calda

$Q_c = 2000\text{ J}$: calore ceduto all'ambiente

Q_a : calore assorbito dalla sorgente fredda

Si ha:

$$COP = \frac{1}{\frac{T_C}{T_F} - 1}$$

$$\frac{T_C}{T_F} = \frac{1}{COP} + 1$$

$$\frac{T_C}{T_F} = \frac{1 + COP}{COP}$$

$$\frac{T_F}{T_C} = \frac{COP}{1 + COP}$$

Risolvendo rispetto a T_F , avendo cura di esprimere le temperature in gradi Kelvin si ha:

$$T_F = \frac{COP}{COP + 1} T_C \cong \frac{5}{6} \cdot (273.15 + 36) \cong 258\text{ K} \cong -16\text{ }^{\circ}\text{C}$$

E' possibile esprimere il COP nel seguente modo:

$$COP = \frac{Q_a}{Q_c - Q_a}$$

Risolvendo rispetto a Q_a si ha:

$$Q_a = \frac{COP}{COP + 1} Q_c \cong \frac{5}{6} \cdot 2000 \cong 1668\text{ J}$$

11.50 es50

Un motore termico fornisce una energia meccanica di 10 kJ. Il calore emesso nell'ambiente è di 8.5 kJ. Calcolare il calore assorbito dalla sorgente calda. Calcolare l'efficienza del motore.

Il calore assorbito dalla sorgente calda Q_c è pari alla somma del lavoro meccanico L e del calore emesso nell'ambiente Q_F :

$$Q_c = L + Q_F$$

$$Q_c = 18.5 kJ$$

L'efficienza è data da:

$$\frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = \frac{L}{Q_C} = \frac{10}{18.5} \simeq 0.54 = 54\%$$

11.51 es51

Un motore termico ha una efficienza del 30%. Quale è la temperatura della sorgente calda, considerando che la temperatura della sorgente fredda è di 200°C?

$$T_F = 473K$$

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0.3$$

$$\frac{T_F}{T_C} = 0.7$$

$$T_C = \frac{T_F}{0.7} \simeq 676K = 403^\circ C$$

11.52 es52

Le vecchie locomotive a vapore operavano con una efficienza del 17%. La temperatura della sorgente calda era di circa 425°C. Quale sarebbe stata l'efficienza massima ottenibile secondo Carnot? Quale sarebbe stata l'efficienza se la temperatura della sorgente fredda fosse stata di 150°C?

$$T_F = 300K$$

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0.57$$

$$T_F = 423K$$

$$\eta_{max} = 0.4$$

11.53 es53

Il Sole irradia energia con una potenza di $3.8 \cdot 10^{26} W$ ad una temperatura $5500^\circ C$ nello spazio vuoto (una frazione trascurabile si irradia sulla Terra e sugli altri pianeti). La temperatura stimata dello spazio profondo è di circa $-270^\circ C$.

- (a) Quanta energia è emessa ogni giorno?
- (b) Qual è l'aumento dell'entropia in un giorno a causa di questo trasferimento di calore?

$$E = Wt$$

$$t = 24 \cdot 3600 = 86400s$$

$$E = 3.8 \cdot 10^{26} \cdot 86400 = 3.28 \cdot 10^{31} J$$

$$T_{spazio} = 273.15 - 270 = 3.15 K$$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T_{spazio}} = \frac{E}{T_{spazio}} = \frac{3.28 \cdot 10^{31}}{3.15} = 1.04 \cdot 10^{31} JK^{-1}$$

11.54 es54

Qual è la diminuzione di entropia quando 25g di vapore acqua condensano alla temperatura di $35^\circ C$, considerando che il calore latente di vaporizzazione dell'acqua è di $2450 J/g$

$$\Delta Q = 2450 \cdot 25 = 61250 J$$

$$T = 308.15$$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{61250}{308.15} = 199 JK^{-1}$$

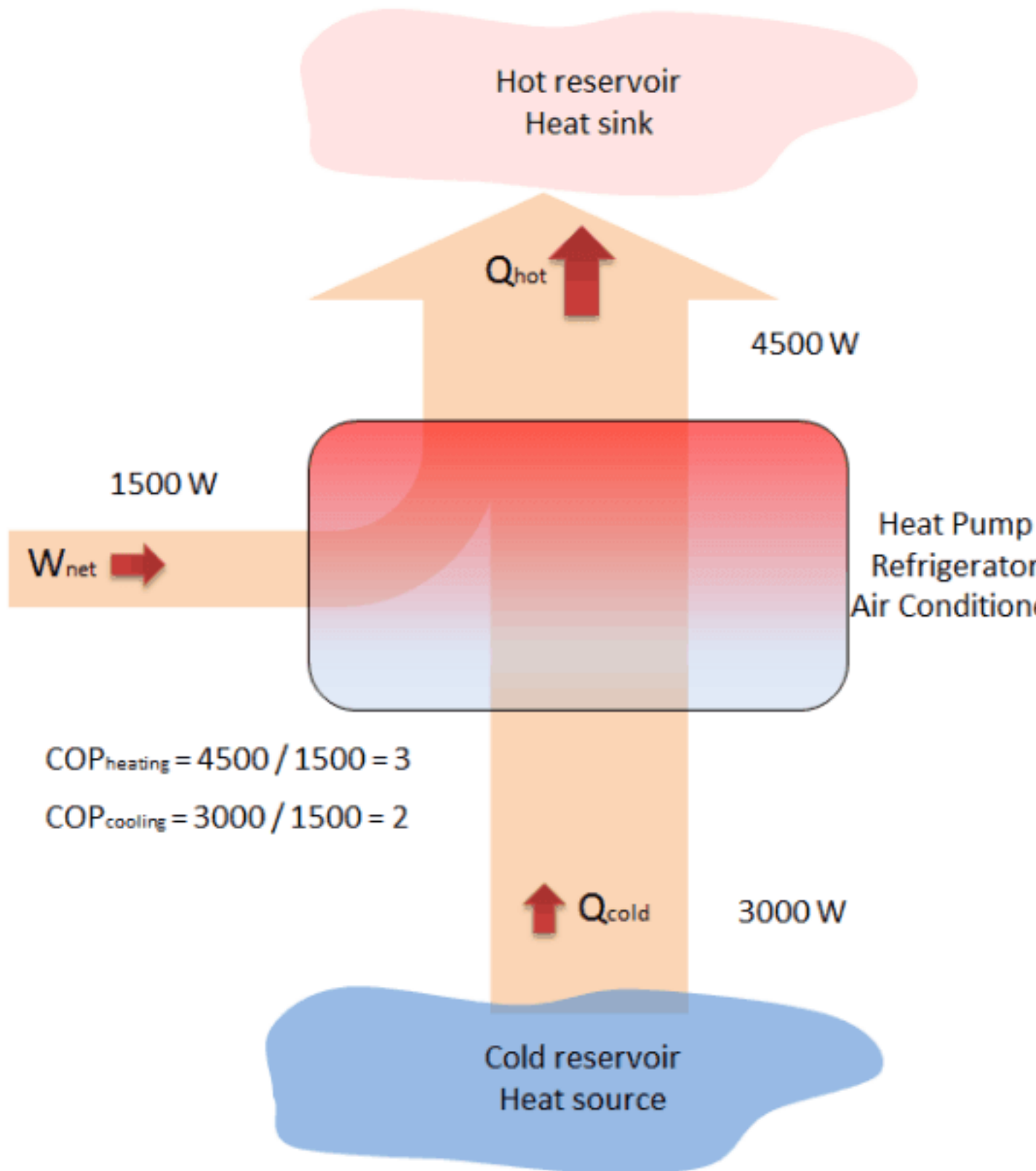
11.55 es55

[https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Exercises_\(University_Physics\)/Exercises%3A_College_Physics](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Exercises_(University_Physics)/Exercises%3A_College_Physics)

$$\eta_{carnot} = \frac{L}{Q_C} = \frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

$$\eta_{pompacalore} = \frac{Q_C}{L} = \frac{1}{\eta_{carnot}}$$

$$\eta_{frigo} = \frac{Q_F}{L} = \frac{Q_C - L}{L} = \frac{Q_F}{Q_C - Q_F} = \frac{1}{\frac{Q_C}{Q_F} - 1} = \frac{1}{\frac{T_C}{T_F} - 1}$$



11.56 es56

Di quanto varia l'entropia se partendo da una configurazione di 10 monete con 5 teste e 5 croci, si rovesciano 3 monete ottenendo 2 teste e 8 croci ?

$$w_1 = \binom{10}{5} = 252$$

Codice octave per il coefficiente binomiale: w1=bincoeff(10,6);

$$w_2 = \binom{10}{2} = 45$$

$$\Delta S = k_B \ln(w_2) - k_B \ln(w_1) = k_B \ln\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -2.47 \cdot 10^{-23}$$

11.57 es57

<https://www.mariagraziapastore.it/esercizi-svolti-di-termodinamica.html>

Una mole di gas ideale monoatomico si espande assorbendo 3000J di calore. Sapendo che il lavoro L compiuto dal gas è pari al doppio della sua variazione di energia interna, si calcoli la variazione di temperatura del gas.

$$Q_A = 3000J$$

$$L = 2\Delta U$$

$$\Delta U = c_v \Delta T$$

$$c_v = \frac{3}{2}R$$

$$\Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T$$

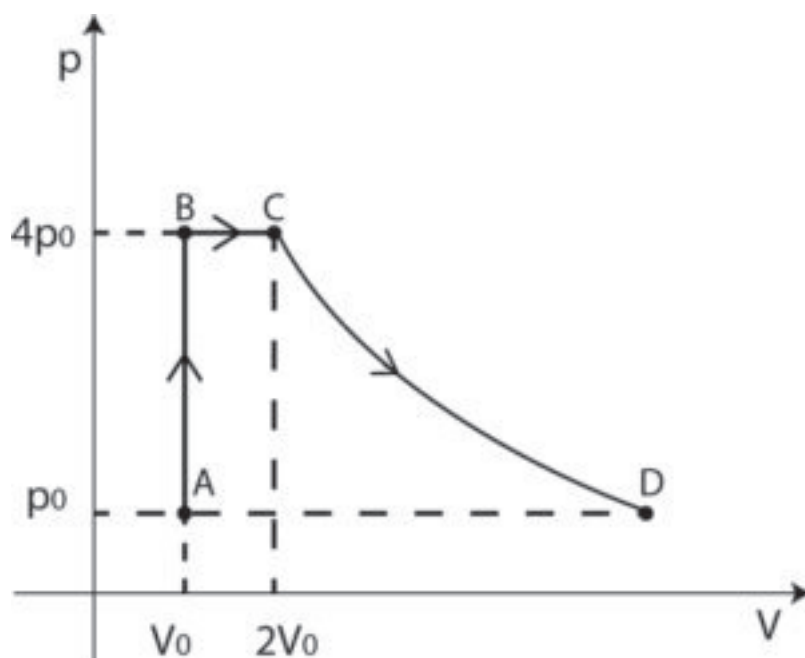
$$L = 3R\Delta T$$

$$Q_A = L + \Delta U = 3R\Delta T + \frac{3}{2}R\Delta T = 4.5R\Delta T = 3000$$

$$\Delta T = \frac{3000}{4.5 \cdot 8.314} = 80.2^\circ C$$

11.58 es58

Una mole di gas ideale monoatomico si trova inizialmente in uno stato A con volume V_0 e pressione p_0 a temperatura $T_0 = 300K$ ed è sottoposto alla seguente sequenza di trasformazioni:



A→B: trasformazione isocora (volume costante) fino alla pressione $4p_0$;

B→C: espansione isobara fino al volume $2V_0$;

C→D: espansione isoterma fino alla pressione p_0 .

Si calcolino il lavoro compiuto ed il calore scambiato dal gas durante la sequenza di trasformazioni.

E' conveniente calcolare volume, pressione e temperatura negli stati A, B, C e D.

Stato A:

volume, pressione e temperature sono quelli iniziali, V_0 , p_0 , T_0 e l'equazione di stato è

$$p_0 V_0 = nRT_0 = 1 \cdot 8.314 \cdot 300 = 2494 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3$$

Stato B:

poichè la trasformazione avviene a volume costante, $V_B = V_0$, $p_B = 4p_0$, e la temperatura è una generica T_B ; la corrispondente equazione di stato è

$$4p_0 V_0 = nRT_B$$

Dal confronto delle equazioni di stato rispetto ad A e B si ottiene (basta dividere membro a membro) $T_B = 4T_0$.

Stato C: $V_C = 2V_0$, $p_C = p_B = 4p_0$ (espansione a pressione costante) e l'equazione di stato è

$$4p_0 2V_0 = nRT_C$$

che, confrontata con l'equazione allo stato A (ancora dividendo membro a membro) si ha $T_C = 8T_0$.

Stato D: volume V_D , pressione $p_D = p_0$, temperatura $T_D = T_C = 8T_0$, (espansione a temperatura costante), la cui equazione di stato è

$$V_D p_0 = 8nRT_0$$

Per calcolare il lavoro, ricordiamo che la grandezza è additiva, per cui basta calcolare i lavori durante le 3 trasformazioni:

$$L_{AB} = 0$$

$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p dV = p_B \int_{V_B}^{V_C} dV = p_B (V_C - V_B) = 4p_0 V_0$$

$$L_{CD} = nRT_C \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) = 8RT_0 \ln(4)$$

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} = 37600J$$

per calcolare il calore scambiato, ricorriamo al primo principio della termodinamica:

$$Q = \Delta U + L$$

Ricordiamo che la variazione di energia interna per un gas monoatomico è data da:

$$\Delta U = nc_v \Delta T = nc_v (T_D - T_0) = 26200J$$

Pertanto

$$Q = 63800J$$

11.59 es59

Due sorgenti termiche si trovano alla temperatura costante di 27°C e 127°C . Quale sarà la variazione di entropia in seguito ad uno scambio di calore $Q = 100J$?

$$T_1 = 300K$$

$$T_2 = 400K$$

$$Q_1 = 100J$$

$$Q_2 = -100J$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

$$\Delta S_1 = \frac{100}{300}$$

$$\Delta S_2 = -\frac{100}{400}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = 0.083 JK^{-1}$$

11.60 es60

<https://www.chimica-online.it/test-fisica/esercizi-secondo-principio-termodinamica.htm>

Una macchina termica non ideale lavora tra due sorgenti termiche la cui temperatura è rispettivamente di 400K e 500K. Se il calore assorbito dalla sorgente calda è ad ogni ciclo è di 200J e il rendimento della macchina è $\eta = 0.15$ calcolare: La variazione di entropia della macchina, la variazione di entropia della sorgente fredda, la variazione di entropia della sorgente calda, la variazione di entropia totale.

Ad ogni ciclo la macchina torna allo stato iniziale e quindi la variazione di entropia della macchina è nulla:

$$\Delta S_{macchina} = 0$$

$$T_F = 400K$$

$$T_C = 500K$$

$$Q_C = 200J$$

$$\eta = \frac{L}{Q_C} = \frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 0.15$$

$$Q_F = (1 - \eta) Q_C = 170J$$

$$\Delta S_C = -\frac{Q_C}{T_C} = -\frac{200}{500} = -0.4JK^{-1}$$

$$\Delta S_F = \frac{Q_F}{T_F} = \frac{170}{400} = 0.425JK^{-1}$$

$$\Delta S_{TOT} = \Delta S_{macchina} + \Delta S_C + \Delta S_F = 0.025JK^{-1}$$

11.61 es61

Una macchina termica ha una potenza di 7.35 kW utilizzando due sorgenti termiche che si trovano rispettivamente alla temperatura di 300 e di 30°C. Considerando che il suo rendimento è il 25% rispetto a una macchina ideale di Carnot, calcolare la quantità di calore utilizzata dalla macchina nell'unità di tempo

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{303}{573} = 0.47$$

$$\eta = 0.25 \cdot 0.47 = 0.12$$

$$L = Wt$$

$$L = 7.35 \cdot 10^3 \cdot 1J$$

$$\eta = \frac{L}{Q_C}$$

$$Q_C = \frac{L}{\eta} = \frac{7.35 \cdot 10^3}{0.12} = 61250J$$

11.62 es62

Una macchina termica (pompa di calore) estrae calore da un ambiente che si trova a 273K per riscaldare un ambiente che si trova alla temperatura di 298K. Quanti kWh di calore vengono forniti dalla macchina per ogni kWh di energia meccanica fornita dal motore elettrico della macchina termica?

$$\eta = \eta_{carnot}^{-1} = \frac{Q_C}{L} = \frac{Q_C}{Q_C - Q_F} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

$$L = 1kWh = 3.6MJ$$

$$Q_C = \frac{T_C}{T_C - T_F} L = \frac{298}{298 - 273} \cdot 1 = 11,92kWh$$

11.63 es63

Si consideri una parete di mattoni alta 4 m, larga 6 m e spessa 30 cm, la cui conducibilità termica è $\lambda = 0.8W/(m^\circ C)$. In un certo giorno i valori misurati delle temperature della superficie interna e della superficie esterna della parete sono 14°C e 6°C, rispettivamente. Si determini la potenza termica dissipata attraverso la parete in quel giorno e il calore dissipato in un ora.

$$H = 4$$

$$L = 6$$

$$s = 0.3$$

L'area della superficie della parete è $A = HL = 24m^2$ di conseguenza il calore Q trasmesso nell'unità di tempo è:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\lambda A \Delta T}{s} = \frac{0.8 \cdot 24 \cdot 8}{0.3} = 512W$$

Il calore trasmesso per metro quadrato è

$$\frac{dq}{dt} = \frac{0.8 \cdot 8}{0.3} = 21.3W/m^2$$

Per calcolare il calore dissipato in un ora, considerando costante il flusso termico, è sufficiente moltiplicare il flusso di calore dQ/dt per il tempo T :

$$Q = \frac{dQ}{dt} T = 0.512 kWh = 512 \cdot 3600 = 1.84 \cdot 10^6 J$$

11.64 es64

Un grande serbatoio d'acqua contiene 400 litri d'acqua. La superficie del serbatoio esposta al sole ha una superficie di $8m^2$. Se l'acqua ha una temperatura iniziale di 20° C, quale sarà la temperatura dopo otto ore considerando una potenza media dell'energia solare: $800W/m^2$ e una efficienza nel riscaldamento dell'acqua del 30%?

$$C_{H_2O} = 4186 J l^{-1} K^{-1}$$

$$V = 400l$$

$$C_{serbatoio} = C_{H_2O} \cdot V = 4186 \cdot 400 = 1.67 \cdot 10^6 JK^{-1}$$

$$\eta = 0.3$$

$$W_{solare} = 800 \cdot 8W = 6400W$$

$$t = 8 \cdot 3600 = 28800s$$

$$E = \eta W_{solare} t = 5.53 \cdot 10^7 J$$

$$C_{serbatoio} \Delta T = E$$

$$\Delta T = \frac{E}{C_{serbatoio}} = 33K$$

$$t_{finale} = t_0 + \Delta T = 55^\circ C$$

11.65 es65

Un blocco di alluminio di 100 grammi alla temperatura iniziale di $80^\circ C$ viene immerso nell'oceano alla temperatura di $20^\circ C$. Quale sarà la variazione di entropia totale dopo aver raggiunto l'equilibrio termico?

$$\Delta S_{Al} = \int \frac{dQ}{T}$$

$$C_{Al} = 900 JK_g^{-1} K^{-1}$$

$$m = 0.1Kg$$

$$C_{blocco} = C_{Al} m = 90 JK^{-1}$$

$$dQ = C_{blocco} dT$$

$$T_f = 293K$$

$$T_i = 353K$$

$$\Delta S_{Al} = C_{blocco} \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = C_{blocco} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) = 90 \ln \left(\frac{293}{353} \right) \simeq -16.7 JK^{-1}$$

$$\Delta T = 60K$$

$$Q_{total} = C_{blocco} \Delta T = 90 \cdot 60 = 5400J$$

$$\Delta S_{oceano} = \frac{Q}{T_f} = \frac{C_{blocco} \Delta T}{T_f} = 19 JK^{-1}$$

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{Al} + \Delta S_{oceano} = 2.3 JK^{-1}$$

11.66 es66

Un impianto produce ghiaccio alla temperatura di 0°C . La temperatura media dell'acqua utilizzata dalla macchina frigorifera è di 18°C . Valutare il lavoro minimo in kWh necessario per produrre 1 tonnellata di ghiaccio (L'energia di fusione del ghiaccio alla pressione atmosferica è di 333.5 kJ / kg).

$$T_F = 273K$$

$$T_C = 291$$

$$Q_F = 333.5 \cdot 1000 = 3.335 \cdot 10^5 kJ$$

$$\eta = \frac{Q_F}{L} = \frac{Q_F}{Q_C - Q_F} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = \frac{273}{291 - 273} = 15.2$$

$$1kWh = 3600kJ$$

$$L = \frac{Q_F}{\eta} = \frac{3.335 \cdot 10^5}{15.2} = 22 \cdot 10^6 J = 6.1kWh$$

11.67 es67

Due motori termici reversibili A e B sono disposti in serie. La sorgente fredda del motore A è la sorgente calda del motore B. Il motore A riceve 200 kJ a una temperatura di 421°C da una sorgente calda, mentre il motore B utilizza un dissipatore freddo ad una temperatura di 4.4°C . Se il lavoro sviluppato da A è il doppio di quello di B, trovare:

- (a) La temperatura intermedia T_I tra A e B
- (b) L'efficienza di ogni motore
- (c) Il calore Q_F emesso al dissipatore freddo del motore B

$$T_C = 694K$$

$$T_F = 277.4K$$

$$Q_C = 200kJ$$

$$\eta_A = 1 - \frac{T_I}{T_C}$$

$$\eta_B = 1 - \frac{T_F}{T_I}$$

$$L_A = \left(1 - \frac{T_I}{T_C}\right) Q_C = 2L_B$$

$$L_B = \left(1 - \frac{T_F}{T_I}\right) Q_I$$

$$\left(1 - \frac{T_I}{T_C}\right) Q_C = 2 \left(1 - \frac{T_F}{T_I}\right) Q_I$$

$$Q_I = Q_C - L_A = Q_C - Q_C \left(1 - \frac{T_I}{T_C}\right) = Q_C \frac{T_I}{T_C}$$

$$\left(1 - \frac{T_I}{T_C}\right) Q_C = 2 \left(1 - \frac{T_F}{T_I}\right) Q_C \frac{T_I}{T_C}$$

$$\left(1 - \frac{T_I}{T_C}\right) = 2 \left(1 - \frac{T_F}{T_I}\right) \frac{T_I}{T_C}$$

$$T_C - T_I = 2T_I - 2T_F$$

$$T_C + 2T_F = 3T_I$$

$$T_I = \frac{T_C + 2T_F}{3} = 416K = 143^\circ C$$

$$\eta_A = 1 - \frac{T_I}{T_C} = 0.4$$

$$\eta_B = 1 - \frac{T_F}{T_I} = 0.33$$

$$\eta_A = \frac{Q_C - Q_I}{Q_C}$$

$$Q_C - Q_I = \eta_A Q_C$$

$$Q_C (1 - \eta_A) = Q_I$$

$$Q_I = 2 \cdot 10^5 (1 - 0.4) = 120kJ$$

$$\eta_B = \left(\frac{Q_I - Q_F}{Q_I} \right)$$

$$Q_I - Q_F = Q_I \eta_B$$

$$Q_F = Q_I (1 - \eta_B) = 80kJ$$

11.68 es68

Una bombola cilindrica di metano è alta 80 cm ed ha un diametro di 25 cm. E' caricata ad una pressione di 12 MPa alla temperatura ambiente di 27°C. Trovare il peso del gas contenuto nella bombola. Se la bombola ha una valvola di sicurezza sensibile alla temperatura, trovare il valore della temperatura T che permette alla valvola di limitare la pressione del gas a 15 MPa.

$$V = \pi \frac{D^2}{4} h = 0.03927 m^3$$

$$P = 12 \cdot 10^6 Pa$$

$$n = \frac{PV}{RT} = 188.8$$

$$m = n \cdot (12 + 4) = 3.021 Kg$$

$$P = 15 \cdot 10^6 Pa$$

$$T = \frac{PV}{nR} = 375K = 102^\circ C$$

11.69 es69

Un contenitore di di 0.3 m^3 contiene un kg di aria alla temperatura di 5°C . Un trasferimento Q di calore porta la temperatura a 100°C . Calcolare il lavoro eseguito, il calore Q , la variazione di energia interna e la variazione di entropia considerando la capacità termica dell'aria a volume costante c_v pari a $718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

$$V = 0.3$$

$$T_2 = 373 \text{ K}$$

$$T_1 = 278 \text{ K}$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$L = \int P dV = 0$$

$$Q = \Delta U = mc_v \Delta T = 68.21 \text{ kJ}$$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU}{T} = mc_v \int \frac{dT}{T} = mc_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 211 \text{ J K}^{-1}$$

11.70 es70

Un frigorifero utilizza un ciclo di Carnot inverso per mantenere all'interno una temperatura di -5°C . Il calore trasferito all'esterno nell'unità di tempo è di 5 kW . Se la temperatura esterna è di 25°C calcolare la potenza richiesta dal frigorifero.

$$T_F = 268 \text{ K}$$

$$T_C = 298 \text{ K}$$

$$\eta_{carnot}^{-1} = \frac{268}{298 - 268} = 8.93$$

$$W_{richiesta} = \frac{5}{8.93} \text{ kW} = 0.56 \text{ kW}$$

11.71 es71

Una pompa di calore trasferisce calore da una sorgente fredda a 5°C ad un ambiente a 60°C . Il motore della pompa di calore è a sua volta una macchina termica reversibile che lavora l'ambiente a 60°C e una sorgente calda a 840°C . Il motore pilota anche una macchina che assorbe una potenza di 30 kW . Se la pompa di calore sottrae 17 kJ/s dalla sorgente fredda, determinare la quantità di calore sottratta dal motore alla sorgente calda e la quantità di calore trasferita alla sorgente fredda a 60°C .

$$\eta_{carnot}^{-1} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{333}{333 - 278} = 6.05$$

$$\eta_{carnot}^{-1} = \frac{Q_C}{L} = \frac{Q_F + L}{L}$$

$$\eta_{carnot}^{-1} = \frac{Q_C}{L} = \frac{Q_F + L}{L} = \frac{17 + L}{L} = 6.05$$

$$L = \frac{17}{5.05} = 3.36 kW s$$

$$Q_C = L + Q_F = 3.36 + 17 = 20.36$$

$$L_{tot} = L + 30 = 33.36 kW s$$

$$\eta_{motore} = 1 - \frac{333}{1113} = 0.7$$

$$\eta_{motore} = \frac{L_{tot}}{Q_{Cmotore}} = 0.7$$

$$Q_{Cmotore} = \frac{L_{tot}}{0.7} = \frac{33.36}{0.7} = 47.6 kW s$$

$$Q_{Fmotore} = Q_{Cmotore} - L_{tot} = 47.6 - 33.36 = 14.2 kW s$$

La quantità totale di calore trasferita alla sorgente a 60°C è la somma di $Q_{Fmotore}$ e Q_C :

$$Q_{Fmotore} + Q_C = 14.2 + 20.36 = 34.6 kW s$$