APPUNTI 3

Thursday, February 17, 2022 3:55 PM

PROPRIETÀ

1) det è lineare sulle righe di A

a) $\left(\begin{pmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12}+a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

b) $\det\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

2) det è lineare sulle colonne di A

3) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$, $A \in M_n(F)$

4) Se A possiede almeno una riga (colonna) nulla, allora $\det A = 0$

5) Se A' si ottiene da A scambiando due righe (due colonne) allora

$\det A' = -\det A$

6) $\det(I_n) = 1$

7) Se A' si ottiene da A sommando ad una riga (ad una colonna) un multiplo di un'altra riga (risp. colonna), allora

$\det A' = \det A$

8) Se A possiede due righe (colonne) uguali o proporzionali, allora $\det A = 0$

9) $\det(A^t) = \det A$

TEOREMA DI BINET

Se $A, B \in M_n(F)$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

DEFINIZIONE - SISTEMA LINEARE

Un sistema lineare in n indeterminate ed m equazioni è del tipo

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se tale sistema ammette almeno una soluzione è detto compatibile

$$\underset{m \times n}{A}\ \underset{n \times 1}{X} = \underset{m \times 1}{B}$$

A è detta matrice incompleta. La matrice ottenuta giusto appendendo A e B è detta matrice completa

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE

Se $B = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, allora il sistema è detto omogeneo

OSSERVAZIONE

Un sistema omogeneo $AX = 0$ è sempre compatibile, perchè $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ è sempre soluzione del sistema

DEFINIZIONE

Due sistemi $AX = B$ e $A'X = B'$ sono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni

METODO DI RIDUZIONE DI GAUSS

Sia $AX = B$. Le operazioni fondamentali sulle righe di $A|B$ sono:

1) Scambiare due righe: $R_{ij} \equiv$ scambio la i-esima con la j-esima
2) Moltiplicare una riga per $\alpha \in F$: $R_i(\alpha) \equiv$ moltiplico la i-esima per α
3) Sostituire una riga con la somma per un multiplo di $\alpha \in F$

$R_i + R_j(\alpha) \equiv$ sostituisco la i-esima con la somma di R_i con R_j moltiplicata per $\alpha \in F$

$$A|B \xrightarrow{\text{OPERAZIONI}} \left(\begin{matrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{matrix}\ \middle|\ * \right)$$ e poi risolvere

INVERSA DI UNA MATRICE

$$GL_m(F) = \{ A \in M_m(F) \mid A \text{ è invertibile} \}$$

Usando le operazioni fondamentali sulle righe, dobbiamo trovare la matrice inversa A^{-1} (laddove possibile) giustapponendo A con I_m e cercando di ottenere una nuova matrice in cui I_m compaia a sinistra

$$(A\, I_m) \in M_{m \times 2m}(F) \xrightarrow[\text{FONDAMENTALI}]{\text{OPERAZIONI}} (I_m\, B) \Rightarrow A^{-1} = B$$

PROPOSIZIONE - SISTEMA LINEARE

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

$Ax = 0$, dove $A \in M_{m \times m}(F)$, è un sottospazio

vettoriale di F^m

DIMOSTRAZIONE

Sia $W = \{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \mid A x_i = 0 \}$ tale insieme

1) $\forall\, x_1, x_2 \in W$ dobbiamo dimostrare che $x_1 + x_2 \in W$

Ma se $x_1, x_2 \in W \Rightarrow Ax_1 = 0$ e $Ax_2 = 0$,

pertanto

$$A(x_1 + x_2) = \underbrace{Ax_1}_{=0} + \underbrace{Ax_2}_{=0} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \in W$$

2) $\forall\, x \in W$ e $\forall\, \alpha \in F$ dobbiamo dimostrare che $\alpha x \in W$

Ma se $x \in W \Rightarrow Ax = 0$

pertanto

$$A(\alpha x) = \alpha \underbrace{(Ax)}_{=0} = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha x \in W$$

DEFINIZIONE - RANGO

Sia $V = F$-sp. vett. e siano $v_1, \dots, v_m$ vettori di V. Si definisce

rango di $v_1, \dots, v_m$ il numero massimo di vettori lin. indip. e

si indica con $r(v_1, \dots, v_m)$

DEFINIZIONE

Sia $A \in M_{m \times m}(F)$, $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$, $A_i \in F^m$

$A = (A^1, A^2, \dots, A^m)$, $A^j \in F^m$

Sia $A \in M_{m \times n}(F)$, $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$, $A_i \in F^n$
$A = (A^1, A^2, \dots, A^n)$, $A^j \in F^m$

allora si definiscono

1) rango per riga di A come il rango di $A_1, \dots, A_m$

$$r_R(A) = r(A_1, \dots, A_m)$$

2) rango per colonne di A come il rango di $A^1, \dots, A^n$

$$r_C(A) = r(A^1, \dots, A^n)$$

PROPRIETÀ

1) Sia $A \in M_{m \times n}(F)$, allora $r_R(A) = r_C(A)$
2) $A \in M_n(F)$, allora $r(A) = r(A^t)$
3) se $A = 0 \Rightarrow r(A) = 0$
4) se $A = I_n \Rightarrow r(I_n) = n$

PROPOSIZIONE

Se $A \in M_{m \times n}(F)$ e $B \in M_{n \times p}(F)$ allora

$\rightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

COROLLARIO

Se $A \in GL_n(F)$ e $B \in M_{n \times p}(F)$ allora $r(AB) = r(B)$

TEOREMA

Sia $A \in M_n(F)$. Allora $A \in GL_n(F) \Leftrightarrow r(A) = n$ (è massimo)

DIMOSTRAZIONE

($\Rightarrow$) Ip: $A \in GL_n(F)$; Th. $r(A) = n$

$A \in GL_n(F) \Rightarrow \exists A^{-1} \in GL_n(F) \mid AA^{-1} = I_n$

$$\Rightarrow n = r(I_n) = r(A)$$

$(\Leftarrow)$ Ip: $r(A) = m$; Th: $A \in GL_m(F)$

Se $r(A) = m \Rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ sono lin. indip.

$\Rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ è una base di F^m

Sia $B' = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ base canonica di F^m,

cioè $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-esima}}{1}, 0, \dots, 0)$

Costruiamo la matrice di passaggio da B a B'

$e_1 = (1, 0, \dots, 0) = b_{11} A_1 + b_{12} A_2 + \dots + b_{1m} A_m =$

$= (b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} + \dots + b_{1m} a_{m1}, \dots, b_{11} a_{1m} + b_{12} a_{2m} + \dots + b_{1m} a_{mm})$

$$= (b_{11} \; b_{12} \; \dots \; b_{1m}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) = (b_{21} \; b_{22} \; \dots \; b_{2m}) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$e_m = (0, 0, \dots, 0, 1)$

Pertanto

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}} \cdot A$$

$$BA = I_m \Rightarrow A^{-1} = B \Rightarrow A \in GL_m(F)$$

TEOREMA

Sia $A \in M_m(F)$. Allora $\det A \neq 0 \Rightarrow r(A) = m$

DIMOSTRAZIONE

$(\Leftarrow)$ Ip: $r(A) = m$; Th: $\det A \neq 0$

Se $r(A) = m \Rightarrow$ per il Teorema precedente,

$A \in GL_m(F) \Rightarrow \exists\, A^{-1} \in GL_m(F) \mid AA^{-1} = I_m$

Ma allora $1 = \det(I_m) = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1})$

↑ TEOREMA DI BINET

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad e \quad \det A \neq 0$$

($\Rightarrow$) Ip: $\det A \neq 0$; Th: $r(A) = m$

Per assurdo sia $r(A) < m$ ossia le righe sono lin. dip. .

Poichè il determinante non cambia scambiando le righe, possiamo

supporre che sia A_1 scritta come comb. lin. delle altre

$$A_1 = c_2A_2 + \dots + c_mA_m, \quad c_i \in F$$

$$\det A = \det(A_1\ A_2 \dots A_m) =$$

$$= \det(c_2A_2 + \dots + c_mA_m\ \ A_2 \dots A_m) =$$

$$\overset{\text{PROPRIETÀ DETERMINANTE}}{=} c_2 \underbrace{\det(A_2\ A_2 \dots A_m)}_{=0} + c_3 \underbrace{\det(A_3\ A_2\ A_3 \dots A_m)}_{=0} + \dots + c_m \underbrace{\det(A_m\ A_2 \dots A_m)}_{=0}$$

$$\overset{\text{PROPRIETÀ DETERMINANTE}}{=} 0 \ \lightning$$

INVERSA DI UNA MATRICE

Se $A \in GL_m(F)$, allora $A^{-1} = (x_{ij})_{i,j}$ tali che

$$x_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det A_{ij}}{\det A}$$

dove A_{ij} è ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna

OSSERVAZIONE

Poniamo $a_{ij}' = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ e lo chiamiamo cofattore o

complemento algebrico di a_{ij}. Allora per la regola precedente,

se $A' = (a_{ij}')$ risulta che

$$A^{-1} = \frac{1}{\quad} \cdot A'^{t}$$

$\det A$

APPLICAZIONI LINEARI IN POI