# LEGGI DI NEWTON

Thursday, February 24, 2022 8:37 AM

## PRIMA LEGGE

UN CORPO (MASSA) PERSEVERA NEL SUO STATO DI QUIETE O DI MOTO RETTILINEO UNIFORME, SE NON È SOGGETTO ALLA APPLICAZIONE DI FORZE ESTERNE

## SECONDA LEGGE

L'ACCELERAZIONE DI UN CORPO DI MASSA m È PROPORZIONALE AL VALORE DELLA FORZA E INVERSAMENTE PROPORZIONALE AL VALORE DELLA MASSA

$$f = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

se $f=0$ anche $dv=0$

$$f = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$f = m \cdot a$$

$$a = \frac{f}{m}$$

$$m = \frac{f}{a}$$

SE IL MODULO DEL VETTORE FORZA È NULLO LA DERIVATA DEL VETTORE VELOCITÀ È NULLA E QUINDI LE COMPONENTI DEL VETTORE VELOCITÀ RIMANGONO COSTANTI

## TERZA LEGGE

NON È POSSIBILE GENERARE UNA FORZA SU UN CORPO SENZA GENERARE CONTEMPORANEAMENTE UNA SECONDA FORZA DI SEGNO OPPOSTO E UGUALE IN MODULO ALLA PRIMA

## UNITÀ DI MISURA DELLA FORZA

$$1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$$

$$1N = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

COSTANTE G

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \; N m^2 / kg^2$$

NEL CASO IN CUI $m_2$ ED $r$ SONO RISPETTIVAMENTE LA MASSA $M$ E IL RAGGIO DELLA TERRA $R$ IL VALORE DELLA FORZA GRAVITAZIONALE SULLA TERRA È :

$$F_G = F_g = G \frac{Mm}{R^2} = gm$$

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

# DEFINIZIONE DI CENTRO DI MASSA

martedì 21 giugno 2022 09:23

Nel caso di n corpi puntiformi di massa $m_i$ il vettore della posizione del centro di massa $x_c$ è pari alla media pesata dei vettori posizioni delle singole masse:

$$m_T = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$x_c = \frac{1}{m_T} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Nel caso di un corpo esteso di massa m e densità p(x) e volume V la sommatoria diventa un integrale:

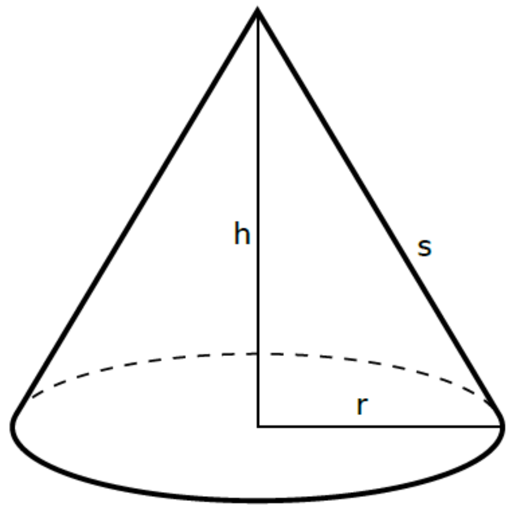
$$x_c = \frac{1}{m} \int_m x \, dm$$

$$x_c = \frac{1}{m} \int_V x \, p(x) \, dV$$

Tutti i piani passanti per il punto $x_c$ dividono il corpo in due parti, ciascuna di massa m/2.

# CALCOLO DEL CENTRO DI MASSA DI UN CONO DI DENSITA' UNIFORME

Thursday, February 24, 2022 8:58 AM




$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$ VOLUME

$$\rho = \frac{M}{V}$$ DENSITÀ

$$dm = \rho\, dV = \rho \pi r^2\, dh$$

OPERAZIONI DI TRASFORMAZIONE DELLA FORMULA DI $Z_C$

$$Z_C = \frac{\pi \rho}{M} \int_0^H r^2 h\, dh$$

$R$ = raggio della base
$H$ = altezza
$M$ = massa
$dh$ = spessore dei dischi
$\vartheta$ = angolo tra apotema e asse verticale del cono

$$K = \tan(\vartheta) = \frac{R}{H}$$

$$r(h) = kh$$

$$Z_C = \frac{\pi \rho}{M} \int_0^H (kh)^2 h\, dh$$

$$z_c = \frac{\pi \rho k^2}{M} \int_0^H h^3 \, dh$$

$$\frac{\pi \rho k^2}{M} = \frac{\pi k^2}{V} = \frac{\pi R^2}{V H^2} = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{3}{\pi R^2 H} = \frac{3}{H^3}$$

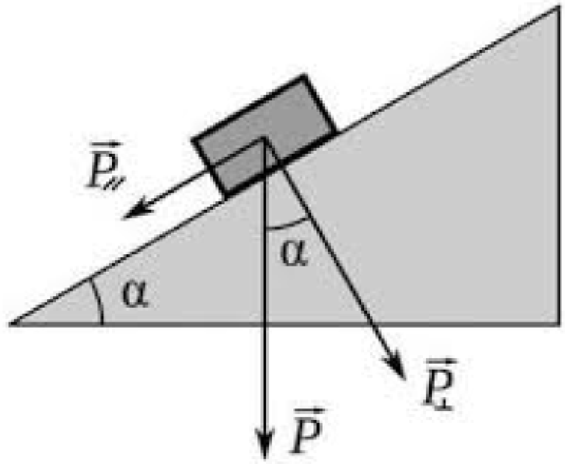
$$\int_0^H h^3 \, dh = \frac{H^4}{4}$$

$$z_c = \frac{3}{H^3} \cdot \frac{H^4}{4} = \frac{3}{4} H$$

$x_c = (0, 0, z_c)$ CENTRO DI MASSA

# PIANO INCLINATO SENZA ATTRITO

Thursday, February 24, 2022 8:59 AM



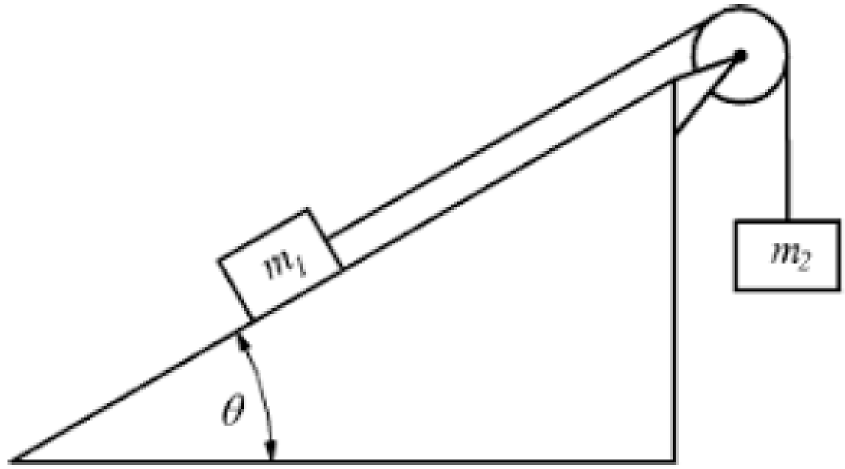

$$P = mg = P_{\perp} + P_{//}$$

$$P_{\perp} = mg\cos(\alpha)$$

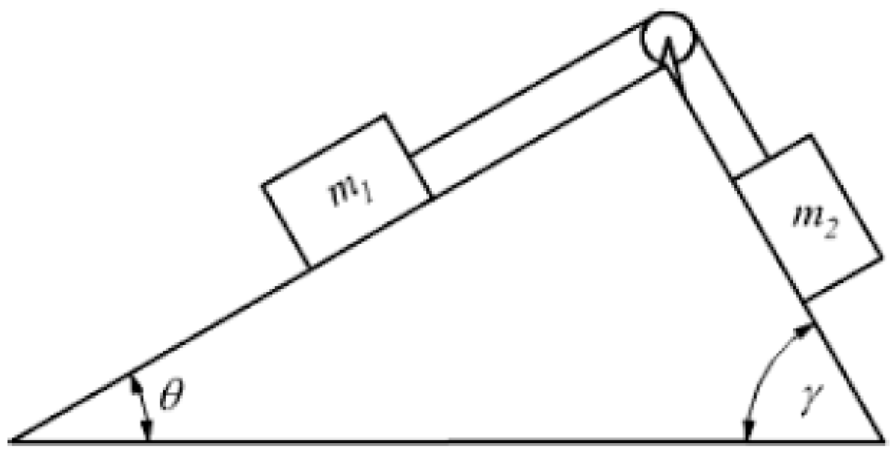
$$P_{//} = mg\sin(\alpha)$$

ACCELERAZIONE LUNGO IL PIANO INCLINATO

$$a = \frac{P_{//}}{m} = \frac{\cancel{m}g\sin(\alpha)}{\cancel{m}} = g\sin(\alpha)$$




$f = m_1 g \sin(\theta) - m_2 g$




$f = m_1 g \sin(\theta) - m_2 g \sin(\gamma)$

# FORZA CENTRIPETA

Thursday, February 24, 2022 8:59 AM

$$a = \omega^2 r$$

a = accelerazione

w = velocità angolare

r = raggio

$$f = ma$$

$$f = m\omega^2 r \rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

$$f = m\frac{v^2}{\cancel{r^2}}\cancel{r} = m\frac{v^2}{r}$$

SATELLITE

$$f_c = f_g$$

m = massa del satellite

G = costante di gravitazione univer

M = massa della Terra

r = raggio del satellite

$$\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = \cancel{m}G\frac{M}{r^{\cancel{2}}}$$

$$v^2 = G\frac{M}{r}$$

$$r = \frac{GM}{v^2} \rightarrow v = \omega r$$

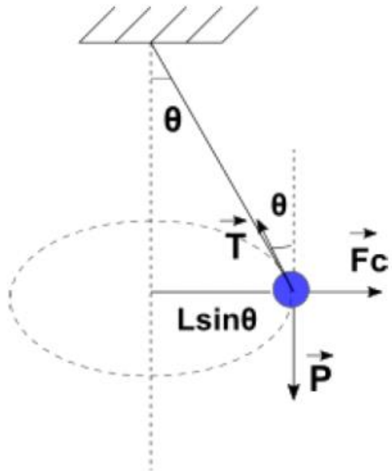
$$r = \frac{GM}{\omega^2 r^2}$$

$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

# PENDOLO CONICO

Thursday, February 24, 2022 8:59 AM




$r = L\sin(\theta)$

L = lunghezza della corda

Forza centripeta

$$\tan(\theta) = \frac{F_c}{P} = \frac{\cancel{m}\omega^2 r}{\cancel{m}g} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega^2 L\sin(\theta)}{g}$$

Forza peso

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\omega^2 L\sin(\theta)}{g}$$

$$\cos(\theta) = \frac{g}{\omega^2 L}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L}$$

$$\omega^{-2} = \frac{L\cos(\theta)}{g}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ← PERIODO

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{L\cos(\theta)}{g}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos(\theta)}{g}}$$ COMPONENTE PARALLELA AL PIANO (TRAIETTORIA)

TENSIONE DEL FILO

$$f_T = P + F_c$$

$$f_T = \sqrt{P^2 + F_c^2} = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2}$$

# MOTO PARABOLICO DI UN PROIETTILE

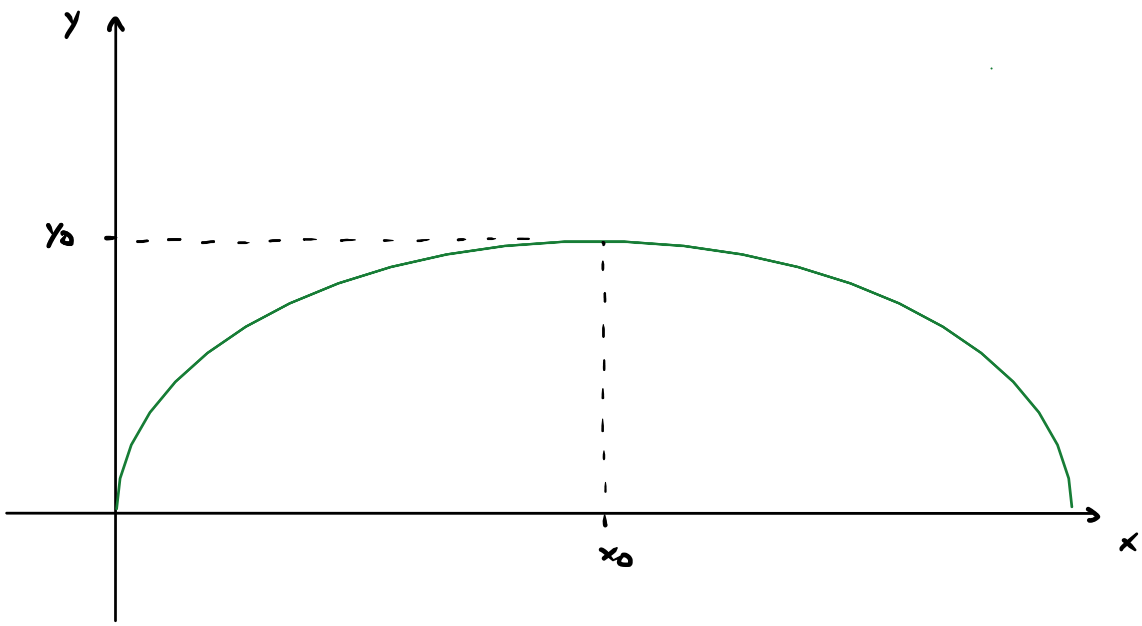
Thursday, February 24, 2022 8:59 AM

$V_{x_0} = V\cos(\theta)$

COMPONENTE PARALLELA AL PIANO

$V_{y_0} = V\sin(\theta)$

COMPONENTE PERPENDICOLARE AL PIANO




ASSE X

Se trascuriamo l'attrito

$$x(t) = V_{x_0} t$$

ASSE Y

$$a_y = \frac{f_y}{m} = \frac{\cancel{m}g}{\cancel{m}} = g$$

$$v_y(t) = V_{y_0} - gt$$

$$y(t) = \int_0^t (V_{y_0} - gt)\,dt = V_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

[ $x(t)$ e $y(t)$ descrivono la traiettoria in forma parametrica ]

## PARAMETRO t

$$t = \frac{x}{V_{x_0}}$$

$$y(x) = \frac{V_{y_0}}{V_{x_0}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{V^2_{x_0}} x^2$$

$$b = \frac{V_{y_0}}{V_{x_0}}$$

$$a = -\frac{1}{2} \frac{g}{V^2_{x_0}}$$

$$y(x) = ax^2 + bx$$

## GITTATA

$x_I$

$$y = 0 \Rightarrow ax + b = 0$$

$$x_I = -\frac{b}{a} = \frac{V_{y_0}}{\cancel{V_{x_0}}} \frac{2 V_{x_0}^{\cancel{2}}}{g} = 2 \frac{V_{y_0} V_{x_0}}{g}$$

## MASSIMA ALTEZZA

$x_m$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$x_m = -\frac{b}{2a} = \frac{v_{y0} v_{x0}}{g} = \frac{1}{2} x_I$$

$y_m$

$$y_m = y(x_m)$$

CALCOLARE L'ANGOLO $\theta$ CHE CORRISPONDE ALLA MASSIMA GITTATA

$$x_I = 2 \frac{v_{y0} v_{x0}}{g} = \frac{2v^2}{g} \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\frac{d x_I}{d\theta} = \frac{2v^2}{g} \left[ \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \right]$$

la derivata si azzera per $\theta = \theta_m$

$$\cos^2(\theta_m) - \sin^2(\theta_m) = 0$$

dividiamo per $\cos^2(\theta_m)$

$$1 - \tan^2(\theta_m) = 0$$

$$\tan(\theta_m) = 1$$

$$\theta_m = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

# FORZA DI CORIOLIS

martedì 21 giugno 2022 09:23

Scriviamo il vettore delle coordinate di un punto "materiale" (dotato di massa) che si trova in un sistema che ruota con velocità angolare uniforme w come numero complesso z

$$(x, iy) = z = r\exp(i\theta) = r\exp(i\omega t)$$

La derivata di z rispetto al tempo è il vettore (numero complesso) velocità v:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}\exp(i\omega t) + i\omega r\exp(i\omega t) \qquad (1)$$

La derivata di v è il vettore (numero complesso) accelerazione a

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\exp(i\omega t) + i\omega\frac{dr}{dt}\exp(i\omega t) + i\omega\frac{dr}{dt}\exp(i\omega t) - \omega^2 r\exp(i\omega t) \qquad (2)$$

$$a = \left(\frac{d^2r}{dt^2} + 2i\omega\frac{dr}{dt} - \omega^2 r\right)\exp(i\omega t) \qquad (3)$$

$$a = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r + 2\omega\frac{dr}{dt}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right]\exp(i\omega t) \qquad (4)$$

Il primo termine dell'espressione entro parentesi quadre è dovuto all'accelerazione dovuta alla variazione della componente radiale della velocità. Il secondo termine $-w^2r$ è l'accelerazione centripeta. Il terzo termine è l'accelerazione di Coriolis.

L'accelerazione di Coriolis è ortogonale all'accelerazione centripeta ed è anche ortogonale (se la velocità angolare w come un vettore w) ad w. Per ottenere la forza di Coriolis, basta moltiplicare l'accelerazione per la massa m del punto materiale.

# ENERGIA CINETICA ED ENERGIA POTENZIALE

Thursday, February 24, 2022 9:00 AM

## LAVORO

$$L = f \cdot \Delta s = \qquad \rightarrow \Delta s = s_2 - s_1$$

$$= f \Delta s \cos(\theta)$$

LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA f COSTANTE CHE ACCELERA UNA MASSA m

forza e spostamento sono paralleli:

$$f = ma = m \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} f\,dx = f \int_{x_1}^{x_2} dx = f(x_2 - x_1) = f \Delta x$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} f\,dx = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt}\,dx = m \int_{x_1}^{x_2} v\,dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = Ec_2 - Ec_1 = \Delta Ec$$

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2} m v^2}$$

IN QUESTO CASO

$$L = f \Delta x = \Delta Ec$$

## ENERGIA POTENZIALE

ALTEZZA $h = \Delta x$ massa $m$

$$f = mg$$

$$L = f \Delta x = mgh$$

CADUTA DI UN CORPO

$$v_f = g t_f$$

$$h = \int_0^{t_f} v \, dt$$

$$\frac{1}{2} g t_f^2 = h$$

$$v_f^2 = g^2 t_f^2$$

$$t_f^2 = \frac{2h}{g}$$

$$v_f^2 = 2gh$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 = mgh$$

# ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Thursday, February 24, 2022 9:00 AM

$$U_g = \int_R^{\infty} F_g(r)\, dr = \int_R^{\infty} -\frac{GmM}{r^2}\, dr = -GmM \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \left. \frac{GmM}{r} \right|_R^{\infty} = 0 - \frac{GmM}{R}$$

VELOCITÀ DI FUGA DALL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{GmM}{R}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

# EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE

martedì 21 giugno 2022 13:50

Se definiamo come Lagrangiana di un sistema la differenza tra la sua energia cinetica T e la sua energia potenziale U,

$$L = T - U$$

L'azione S è un valore scalare che caratterizza l'evoluzione di un sistema in un intervallo di tempo $\triangle t = t_2 - t_1$.

E' definita come l'integrale definito della Lagrangiana nell'intervallo $\triangle t$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, v_x, t)\, dt$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt$$

Un sistema fisico si evolve nel tempo secondo un andamento che minimizza l'azione.
E' possibile utilizzare le equazioni di Eulero-Lagrange per descrivere tale comportamento del sistema:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Ad esempio nel caso di una particella che si trova in una buca di potenziale $U(x) = mg(x^2 - 1)$ possiamo scrivere:

$$L = \frac{1}{2} m v_x^2 - U(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = m v_x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_x} = m\frac{dv_x}{dt} = ma_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{dU}{dx}$$

$$ma_x + \frac{dU}{dx} = 0$$

$$f_x = -\frac{dU}{dx}$$

Ritrovando la seconda legge di Newton:

$$f_x = m \cdot a_x$$

Nel caso particolare in cui $U(x) = mg(x^2 - 1)$ avremo:

$$f_x = -2mgx$$

# IMPULSO DI UNA FORZA E VARIAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

martedì 21 giugno 2022 09:24

L'impulso di una forza è definito come l'integrale nel tempo del vettore forza.
Un impulso applicato a una massa m libera di muoversi nello spazio comporta una variazione $\Delta p$ della sua velocità e della sua quantità di moto $p = mv$. La quantità di moto di una massa $m$ che si muove ad una velocità $v$ è un vettore pari al prodotto della massa per la velocità del corpo

$$\Delta p = \int_0^T f(t)\,dt$$

$$\Delta p = \int_0^T m \frac{dv}{dt}\,dt$$

$$\Delta p = \int_{v_0}^{v_f} m\,dv = mv_f - mv_0 = p_f - p_0$$

IN UN SISTEMA ISOLATO, NON SOGGETTO A FORZE ESTERNE, LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE, ESPRESSA COME SOMMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO DELLE SINGOLE MASSE DEL SISTEMA, SI CONSERVA.

# FEYNMANN "UNWORDLINESS"

martedì 21 giugno 2022 14:03

In un sistema isolato l'energia totale è una costante K (si conserva):

E = T + U = K

Di conseguenza la sua derivata nel tempo deve essere nulla:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

$$-\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -v_x \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dv_x} \cdot \frac{dv_x}{dt}$$

Nel caso molto semplice di una singola massa possiamo scrivere:

$$T = \frac{1}{2} m v^2_x$$

$$\frac{dT}{dt} = m v_x \frac{dv_x}{dt} = - v_x \frac{dU}{dx}$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \frac{dU}{dx}$$

$$f_x = m a_x$$

# SISTEMA MASSA MOLLA

martedì 21 giugno 2022 14:08

## Legge di Hooke

La forza di richiamo f di una molla è proporzionale e opposta alla sua estensione x:

$$f = -kx$$

Possiamo applicare la legge di Newton f = ma ad una molla che ha un estremo fisso e l'altro estremo collegato ad una massa m libera di muoversi senza attrito:

$$f = ma$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (5)$$

L'eq. 5 è una equazione differenziale che ha come soluzione una funzione incognita x(t) .
L'equazione del sistema massa-molla ci dice che la soluzione va cercata tra le funzioni che sono proporzionali alla loro derivata seconda.
Tra le funzioni candidate che hanno questa caratteristica troviamo le funzioni trigonometriche seno e coseno e le funzioni esponenziali.
Possiamo quindi provare ad applicare un tentativo di soluzione del tipo:

$$x(t) = x_0 \exp(zt)$$

dove z e $x_0$ sono costanti incognite. In questo caso la 5 diventa:

$$m x_0 z^2 \exp(zt) = -k x_0 \exp(zt)$$

$$z^2 = -\frac{k}{m}$$

Essendo k ed m valori positivi reali z dovrà essere un numero puramente immaginario
Se chiamiamo w la radice del rapporto k/m possiamo scrivere:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$z = i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega$$

Quindi la soluzione dell'eq. 5 sarà:

$$x(t) = x_0 \exp(i\omega t)$$

Il valore della costante x0 dipende dalla posizione della massa all'istante iniziale $t_0 = 0$

$$x(t_0) = x(0) = x_0$$

x0 rappresenta l'ampiezza delle oscillazioni della massa m mentre w la frequenza angolare. La frequenza v espressa in numero di oscillazioni al secondo (Hertz) si ottiene dividendo la frequenza angolare w per il numero di radianti in un intero ciclo (2π):

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

# OSCILLAZIONI FORZATE E RISONANZA

martedì 21 giugno 2022 14:20

Se applichiamo una forza esterna f sinusoidale con pulsazione $\omega_f$ e ampiezza $f_{max}$ al sistema massa-molla

$$f = f_{max} \exp(i\omega_f t)$$

e ipotizziamo che lo spostamento sia sincrono con la forza esterna:

$$x = x_{max} \exp(i\omega_f t)$$

le equazioni del moto diventano:

$$-kx + f = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx_{max} \exp(i\omega_f t) + f_{max} \exp(i\omega_f t) = -m\omega_f^2 x_{max} \exp(i\omega_f t)$$

$$f_{max} + x_{max}(m\omega_f^2 - k) = 0$$

$$x_{max} = \frac{f_{max}}{(k - m\omega_f^2)}$$

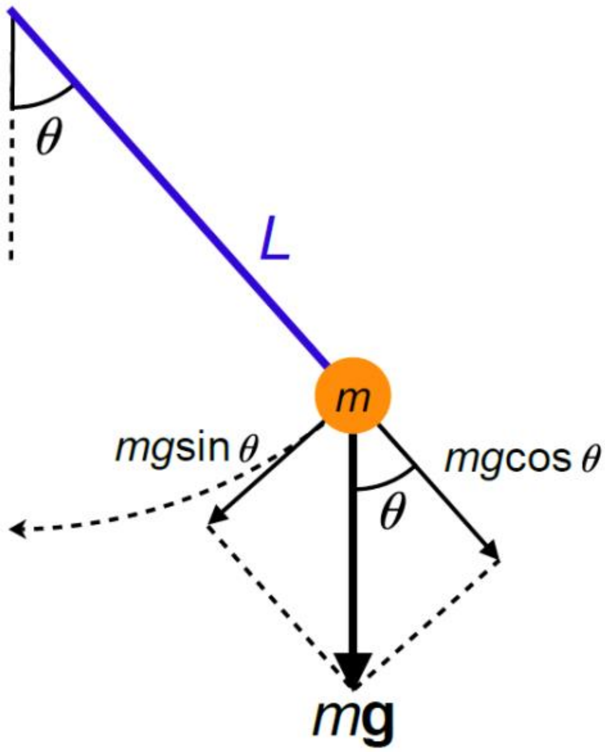
L'ampiezza diventa virtualmente infinita (condizione di risonanza) se la frequenza della forza esterna tende alla frequenza tipica del sistema massa molla

$$(\omega_f = \sqrt{k/m})$$

$$\lim_{\omega_f \to \pm\sqrt{k/m}} x_{max} = \pm\infty$$

# PENDOLO

martedì 21 giugno 2022 14:28




Un pendolo è formato da un asta di massa trascurabile e di lunghezza L al quale è collegata una massa m. Spostando l'asta di un angolo θ rispetto alla verticale, la massa è soggetta ad una forza di richiamo proporzionale al seno dell'angolo:

$$f = -mg \sin(\theta)$$

Per piccoli angoli ($\theta \ll 1$) la funzione seno può essere approssimata dal suo argomento:

$$\sin(\theta) \simeq \theta$$

$$x = L \sin(\theta) \simeq L\theta$$

$$f \simeq -mg\theta = -m \frac{g}{L} x$$

$$f = m \cdot a$$

$$-m \frac{g}{L} x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L} x \qquad (6)$$

L'eq. 6, dal punto di vista matematico, è del tutto simile all'eq. 5, semplicemente al posto del rapporto k/m troviamo il rapporto L/g. La soluzione sarà data quindi da una funzione, che non dipende dal valore della massa, del tipo:

$$x(t) = x_0 \exp(i \omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Il numero v di oscillazioni al secondo (Hertz) sarà quindi

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

# FORZE DISSIPATIVE

martedì 21 giugno 2022 14:35

La forza di attrito di un corpo che scivola su una superficie (attrito radente) è proporzionale ad un coefficiente μ che dipende dalla natura della superfici in contatto e dalla componente della forza che agisce sul corpo perpendicolare alla superficie:

$$f_A = \mu N$$

Nel caso in cui il corpo non scivola sulla superficie la forza d'attrito (attrito statico) è in genere superiore all'attrito radente.
La forza di attrito di un corpo che si muove in un fluido viscoso è funzione di un coefficiente γ che dipende dalla forma del corpo e dalla viscosità del  uido ed è proporzionale alla sua velocità v:

$$f_V = -\gamma v$$

Le forze di attrito trasformano l'energia meccanica in energia termica

# SPAZIO DI FRENATA DI UN AUTOMOBILE

martedì 21 giugno 2022 14:43

Possiamo ad esempio calcolare lo spazio di frenata S di un automobile che si muove con velocità v conoscendo il coefficiente d'attrito tra le gomme e l'asfalto, nel caso in cui le ruote vengano bloccate dai freni, utilizzando il principio di conservazione dell'energia:

$$E_{CINETICA} = E_{DISSIPATA}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = f_A S$$

$$f_A = \mu N = \mu m g$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu m g S$$

$$S = \frac{v^2}{2\mu g}$$

# PIANO INCLINATO CON ATTRITO

martedì 21 giugno 2022 14:46

Possiamo calcolare l'accelerazione di una massa che scivola su un piano inclinato conoscendo il coefficiente d'attrito tra la massa e il piano inclinato:

$$f = mg\sin(\theta) - \mu N$$

$$f = mg\sin(\theta) - \mu mg\cos(\theta)$$

$$a = \frac{f}{m} = g(\sin(\theta) - \mu\cos(\theta))$$

L'accelerazione in questo caso è nulla quando la forza complessiva f è nulla:

$$mg\sin(\theta) = \mu mg\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \mu\cos(\theta)$$

$$\mu = \tan(\theta)$$

# MOTO PARACADUTE

martedì 21 giugno 2022 14:49

Un massa lasciata cadere con un paracadute è soggetta sia alla forza di gravità che alla forza d'attrito con l'aria:

$$f = m \cdot g - \gamma v = m \cdot a$$

$$m \frac{dv}{dt} + \gamma v = mg$$

$$T = \frac{m}{\gamma}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{T} v = g$$

Il corpo raggiungerà la massima velocità (velocità limite $v_L$) quando l'accelerazione è zero:

$$V_L = gT$$

# AEREO FRENATO DA PARACADUTE

martedì 21 giugno 2022 14:51

Nel caso di un areo frenato nella pista di atterraggio da un paracadute, ipotizzando che l'unica forza frenante sia quella del paracadute, avremo semplicemente una equazione differenziale in cui la derivata prima è proporzionale alla funzione stessa:

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v \qquad (7)$$

Possiamo quindi tentare una soluzione del tipo:

$$v = v_0 \exp(zt)$$

In questo caso la 7 diventa:

$$m z v_0 \exp(zt) = -\gamma v_0 \exp(zt)$$

$$z = -\frac{\gamma}{m} = -\frac{1}{T}$$

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

$$a(t) = -\frac{v_0}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

$$x(t) = \int_0^{t_f} v(t)\, dt = -T v_0 \left(-\frac{t}{T}\right)\Big|_0^{t_f} = -T v_0 \left[\exp\left(-\frac{t_f}{T}\right) - 1\right]$$

# OSCILLAZIONI SMORZATE

martedì 21 giugno 2022 14:56

$F_e$ è la forza elastica della molla, $F_a$ è la forza d'attrito con l'aria

$$F = m \cdot a$$

$$F = F_e + F_a = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_e = -kx$$

$$F_a = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Tentativo di soluzione con A numero reale, Z numero complesso Z = a + ib

$$x(t) = Ae^{zt}$$

$$mZ^2x + \gamma Zx + kx = 0$$

$$mZ^2 + \gamma Z + k = 0$$

$$Z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab = 0$$

$$m(a^2 - b^2 + i2ab) + \gamma(a+ib) + k = 0$$

parte immaginaria dell'ultima equazione:

$$i2mab + i\gamma b = 0$$

troviamo l'incognita a:

$$2ma = -\gamma$$

$$a = -\frac{\gamma}{2m}$$

parte reale

$$m(a^2 - b^2) + \gamma a + k = 0$$

$$m\left(\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - b^2\right) - \frac{\gamma^2}{2m} + k = 0$$

$$\frac{\gamma^2}{4m} - mb^2 - \frac{\gamma^2}{2m} + k = 0$$

$$-\frac{\gamma^2}{4m^2} - b^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\zeta^2 = \frac{\gamma^2}{4mk}$$

$$a = -\zeta\omega_0$$

$$\frac{\gamma^2}{4m^2} = \zeta^2 \frac{k}{m} = \zeta^2 \omega_0^2$$

$$-\zeta^2\omega_0^2 - b^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$b^2 = \omega_0^2(1 - \zeta^0)$$

$$b = \omega_0\sqrt{(1 - \zeta^2)}$$

$$b = \omega_0 \sqrt{(1 - \xi^2)}$$

$$x(t) = Ae^{(a+ib)t} = Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t} e^{i\omega_0\sqrt{(1-\xi^2)}t} = Ae^{-\xi\omega_0 t} e^{i\omega_0\sqrt{(1-\xi^2)}t}$$

# URTI PERFETTAMENTE ELASTICI

martedì 21 giugno 2022    15:12

In un urto elastico si conserva sia l'energia meccanica che la quantità di moto.
Nel caso di due massa $m_1$ ed $m_2$ aventi inizialmente velocità $v_{1i}$ e $v_{2i}$ la legge di Conservazione dell'energia meccanica può essere scritta nella forma:

$$E_{c_i} = E_{cf}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad (8)$$

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = -m_2 (v_{2i}^2 - v_{2f}^2)$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2 (v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}) \qquad (9)$$

dove $v_{1f}$ e $v_{2f}$ sono le velocità delle due masse dopo l'urto. La legge della conservazione della quantità di moto sarà rappresentata dall'equazione seguente:

$$P_i = P_f$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (10)$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = -m_2 (v_{2i} - v_{2f}) \qquad (11)$$

Combinando le equazioni 9 e 11 otteniamo:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{2i} + v_{2f})$$

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}$$

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i} \qquad (12)$$

Sostituendo la 12 nella 10 otteniamo i valori finali delle velocità:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{2f} - m_1 v_{1i} + m_1 v_{2i} + m_2 v_{2f}$$

$$(m_1 + m_2) v_{2f} = 2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i}$$

# URTI PERFETTAMENTE ANELASTICI

martedì 21 giugno 2022 20:59

Negli urti perfettamente anelastici le due masse si fondono in una sola massa avente velocità finale $v_f$. Possiamo utilizzare la legge di conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

# DINAMICA ROTAZIONALE

martedì 21 giugno 2022 21:01

Applichiamo la legge di Newton F = ma ad un corpo di massa m vincolato a ruotare intorno ad un asse da un asta di massa trascurabile e di lunghezza r supponendo che il vettore forza sia tangente alla direzione del moto:

$$F = m \cdot a$$

$$F = m\frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d\omega r}{dt} = mr\frac{d\omega}{dt}$$

$\times r$ $\times r$

$$F \cdot r = mr^2 \frac{d\omega}{dt} \qquad (13)$$

QUANTITÀ DI MOTO

$$p = mv = m\omega r$$

$$L = pr = m\omega r^2$$

$$L = mvr$$

COPPIA

$$T = Fr$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

INERZIA

$$I = mr^2$$

$$T = I\alpha$$

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

$$L = I\omega \qquad (14)$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} \qquad (15)$$

Nel caso in cui la forza non sia tangente alla direzione del moto le equazioni 1,2,3 devono essere scritte in forma vettoriale:

$$r \times F = \tau = I\alpha$$

$$L = I\omega$$

$$L = r \times p = r \times mv$$

$$r \times F = \tau = \frac{dL}{dt}$$

In queste equazioni τ è la coppia della forza F, I è il momento d'inerzia del sistema rotante, mentre L è il momento angolare del sistema.

L'energia del sistema rotante è uguale a:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Supponendo di un sistema avente più masse, ognuna delle quali è collegata ad un asse centrale di massa trascurabile, da un asta di massa anch'essa trascurabile il momento d'inerzia I si ottiene sommando i momenti d'inerzia delle singole masse:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Nel caso di un sistema in cui la massa non è distribuita in un volume esteso, come nel caso di un cilindro rotante intorno al proprio asse la sommatoria deve essere sostituita da un integrale. Avremo quindi il differenziale dm = pdV al posto delle masse discrete $m_i$

$$I = \int r^2 \, dm$$

$$I = \int p r^2 \, dV$$

In questa equazione pdV è il prodotto della densità p per il differenziale del volume V. Conviene scegliere una forma geometrica del volume dV che faciliti il calcolo dell'integrale.

# CORRISPONDENZA TRA GRANDEZZE DELLA MECCANICA LINEARE E ROTAZIONALE

martedì 21 giugno 2022 21:13

| Lineare | Rotazionale |
|---|---|
| spazio, x | angolo, $\vartheta$ |
| velocità, v | velocità angolare, $\omega$ |
| accelerazione, a | accelerazione angolare, $\alpha$ |
| massa, m | momento di inerzia, I |
| quantità di moto, mv | momento angolare, $L = I\omega$ |
| Forza, F | coppia, $\tau$ |
| F=ma | $\tau = I\alpha = \frac{dL}{dt}$ |

# MOMENTO ANGOLARE E MOMENTO D'INERZIA DI UNA MASSA PUNTIFORME CHE TRASLA CON MOTO UNIFORME

martedì 21 giugno 2022 21:14

Una massa puntiforme m che trasla con moto uniforme ha in genere un momento angolare non nullo rispetto ad un particolare sistema di riferimento:

$$L = r \times p = r \times mv$$

$$L = mvr\sin(\theta)$$

Nel caso semplice di una massa che trasla parallelamente all'asse x il suo momento angolare è uguale al prodotto della sua quantità di moto $mv_x$ per la sua distanza dall'asse y:

$$r_y = r\sin(\theta)$$

$$L = mv_x r_y$$

$$\frac{v_x}{r_y} = \omega_x$$

$$L = m\omega_x r^2_y$$

$$I = mr^2_y$$

$$L = I\omega_x$$

# MOMENTO DI INERZIA DI UN'ASTA RISPETTO AD UNO DEI SUOI ESTREMI

martedì 21 giugno 2022 21:48

Calcoliamo il momento d'inerzia di un'asta di lunghezza L e di massa M di spessore trascurabile. La densità lineare uniforme dell'asta è

$$\rho_L = \frac{M}{L} \qquad (16)$$

il differenziale della massa dm, ovvero la massa di un segmento arbitrariamente piccolo di lunghezza dr è quindi

$$dm = \rho_L \, dr$$

il momento d'inerzia sarà quindi:

$$I = \int_0^M r^2 \, dm = \rho_L \int_0^L r^2 \, dr = \rho_L \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^L = \rho_L \frac{L^3}{3} \qquad (17)$$

Sostituendo la 16 nella 17 otteniamo:

$$I(L) = \frac{1}{3} M L^2$$

Il momento d'inerzia di un'asta lunga L/2 e di massa M/2 è quindi

$$I\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{24} M L^2$$

Il momento d'inerzia $I_c$ di un'asta di lunghezza L rispetto ad un asse ortogonale che passa per il centro è quindi:

$$I_c(L) = 2I\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{12}ML^2$$

# MOMENTO DI INERZIA DEL CILINDRO

martedì 21 giugno 2022 21:55

Nel caso del cilindro di raggio R, altezza h e densità p potremo scegliere come volume dV una corteccia cilindrica di raggio r, spessore dr e altezza h:

$$dV = h 2\pi r \, dr$$

Ipotizzando che la densità sia costante avremo quindi chiamando M la massa del cilindro il momento d'inerzia del cilindro intorno al proprio asse:

$$I = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 \, dr = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4$$

$$V_{CILINDRO} = \pi h R^2$$

$$M_{CILINDRO} = \rho \pi h R^2$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

# MOMENTO DI INERZIA DELLA SFERA

martedì 21 giugno 2022 22:01

Immaginiamo una sfera di raggio R come somma di cilindri di altezza infinitesima

$dh = d(R\sin(\theta))$ e raggio $r = R\cos(\theta)$

$$dm = \rho\pi R^2\cos^2(\theta)\, d(R\sin(\theta))$$

$$d(R\sin(\theta)) = R\cos(\theta)\, d\theta$$

$$dm = \rho\pi R^3\cos^3(\theta)\, d\theta$$

$$r^2 = R^2\cos^2(\theta)$$

$$dI = \frac{1}{2}r^2\, dm = \frac{\rho\pi}{2}R^5\cos^5(\theta)\, d\theta$$

$$I = \rho\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5(\theta)\, d\theta$$

$$y = [f(x)]^n = \frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1}\frac{df}{dx}$$

$$\int\cos^5(\theta)\, d\theta = \sin(\theta) + \frac{\sin^5(\theta)}{5} - \frac{2}{3}\sin^3(\theta) + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5(\theta)\, d\theta = 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{15+3-10}{15} = \frac{8}{15} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}$$

$$I = \rho\frac{2}{5}\left[\frac{4}{3}\pi R^5\right]$$

$$V_{SFERA} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

Momento di inerzia di una sfera cava

$$dS = 2\pi r \, dl = 2\pi R^2 \cos(\theta) \, d\theta$$

$$r = R \cos(\theta)$$

$$dI = \sigma r^2 dS = \sigma 2\pi R^4 \cos^3(\theta) \, d\theta$$

$$I = \sigma 4\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta) \, d\theta$$

$$\int \cos^3(\theta) \, d\theta = \sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta) \, d\theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$I = \sigma 4\pi R^4 \frac{2}{3} = \frac{2}{3} M R^2 \qquad (18)$$

Momento di inerzia di una sfera piena calcolata come integrale di cortecce sferiche:

Volume di una corteccia sferica di raggio r:

$$dV = \frac{4}{3}\pi r^2 \, dr$$

Massa di una corteccia sferica

$$dm = \rho \, dV$$

Momento di inerzia di una corteccia sferica

Momento di inerzia di una corteccia sferica

$$dI = \frac{2}{3} r^2 \, dm = \frac{2}{3} r^2 \left[ \rho \, 4\pi r^2 dr \right] = \frac{8}{3} \rho \pi r^4 dr$$

$$I = \int dI = \frac{8}{3} \rho \pi \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{3} \rho \pi \frac{R^5}{5}$$

$$V_{SFERA} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

# TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI (HUYGENS-STEINER)

martedì 21 giugno 2022 22:13

Il momento di inerzia It di un corpo rigido rispetto ad un asse che non passa per il suo centro di massa è uguale al momento di inerzia passante per il centro di massa sommato al valore complessivo della massa m per il quadrato della distanza d dell'asse di rotazione dal centro di massa:

$$I_t = I + md^2$$

Nel caso di un cilindro ad esempio il momento di inerzia rispetto al proprio asse è $I_c = mr^2/2$. Il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse del cilindro e distante m dal centro di massa sarà quindi:

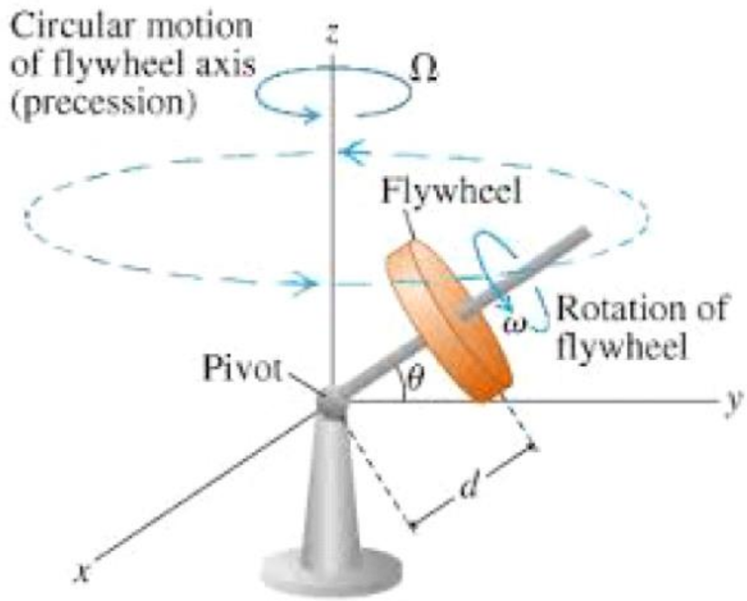
$$I_{ct} = \frac{1}{2}mr^2 + md^2$$

La rotazione di un cilindro che rotola su una superficie senza strisciare può essere vista come una rotazione del cilindro intorno ad un asse parallelo, giacente sulla superficie e distante r dal centro di massa. In questo caso il momento d'inerzia è

$$I_{ct} = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

# MECCANICA DEL GIROSCOPIO

martedì 21 giugno 2022 22:18




Coppia τ

$$\tau = mgd\cos(\theta)$$

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = L\cos(\theta)\, d\varphi$$

$$\frac{dL}{dt} = L\cos(\theta)\frac{d\varphi}{dt} = L\cos(\theta)\,\omega_p$$

$$\tau = mgd\cos(\theta) = L\cos(\theta)\,\omega_p$$

La frequenza di precessione è $\omega_p$

$$\omega_p = \frac{1}{L} mgd$$

$$L = I\omega$$

$$\omega_p = \frac{1}{I\omega} mgd$$