Appunti di Meccanica

February 22, 2021

1 Unità di misura fondamentali

Le grandezze fisiche fondamentali, dalle quali tutte le altre sono derivate, sono lo spazio, il tempo e la massa. Il sistema internazionale (SI) utilizza come unità di misura dello spazio il metro. Il metro corrisponde allo spazio percorso dalla velocità della luce in 1/c secondi. La velocità della luce c nel vuoto è per definizione pari a 299792458 m/s $\left(c \simeq 3 \cdot 10^8 m/s\right)$. Un metro corrispondente approssimativamente a $0.25 \cdot 10^{-7}$ la lunghezza di un meridiano terrestre. Il secondo è definito come un multiplo (9192631770) del periodo di una particolare oscillazione generata dall'atomo di cesio. Un secondo corrisponde approssimativamente a 86400^{-1} giorni. L'unità di massa è il kg, un valore che corrisponde approssimativamente alla massa di un decimetro cubico $\left(10^{-3}m\right)$ di acqua alla temperatura di $3.98^{\circ}C$ e a pressione atmosferica $\left(\simeq 10^5 Pascal = 1bar\right)$. Dal 20 maggio 2019, la definizione formale del kg è basata su una costante fondamentale, la costante di Planck h:

$$h = 2\pi\hbar = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

$$1Kg = \left(\frac{h}{6.62607015 \cdot 10^{-34}}\right) \frac{s}{m^2}$$

In fisica sono spesso utilizzate altri sistemi di unità di misura in alternativa al diffuso SI. Nel sistema CGS ad esempio le unità utilizzate per le grandezze fisiche fondamentali sono il centimetro, il grammo e il secondo. Particolarmente utili in fisica teorica sono i sistemi di unità di misura basati su costanti naturali come la velocità della luce e la costante di Planck. In tali sistemi la velocità della luce nel vuoto c e la costante di Planck ridotta $\hbar = {}^{h}\!/_{2\pi}$ sono adimensionali (numeri puri) e hanno valore unitario ($c = 1$, $\hbar = 1$). Di conseguenza, utilizzando le unità naturali, lo spazio e il tempo possono avere la stessa unità di misura. Nelle unità di misura naturali l'unità di massa può essere espressa semplicemente come l'inverso dell'unità di tempo o dell'unità di spazio.

1.1 Misura di un valore e propagazione degli errori

La misura di un valore fisico come la lunghezza è soggetta a un errore che dipende principalmente dalla precisione dello strumento di misura. Se ad esempio si utilizza un metro a nastro con una scala millimetrata la precisione della misura sarà dell'ordine di $0.5 \cdot 10^{-3} m$. E' importante saper valutare come un errore nella misura di un valore fisico si propaga in grandezze che sono funzioni del valore misurato. Per valutare approssimativamente il valore dell'errore in una funzione del valore misurato è sufficiente moltiplicare il valore assoluto della derivata della funzione per l'errore della misura.

$$\delta f = \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \delta x$$

Se ad esempio volessi misurare l'area A di un cerchio misurando il suo diametro D con una precisione δD, potrei valutare l'errore δA nella misura dell'area calcolando la derivata della funzione che lega il valore dell'area del cerchio con il suo diametro:

$$A(D) = \frac{1}{4}\pi D^2$$

$$A'(D) = \frac{dA}{dD} = \frac{1}{2}\pi D$$

$$\delta A = \frac{dA}{dD}\delta D = \left(\frac{1}{2}\pi D\right)\delta D$$

Una misura del diametro pari a 70 cm con un errore δD dell'ordine di 0.5 mm comporta un errore δA nella misura dell'area di un cerchio:

$$D = 0.7\, m$$

$$\delta D = 0.5 \cdot 10^{-3}\, m$$

$$\delta A = \left(\frac{1}{2}\pi D\right)\delta D \simeq 5.5\, cm^2$$

Nel caso in cui una grandezza dipenda da due o più valori misurati l'errore potrà essere calcolato utilizzando le derivate parziali. La derivata parziale di una funzione di più variabili rispetto ad una delle variabili indipendenti è ottenuta fissando il valore delle altre variabili e calcolando la derivata soltanto rispetto a questa particolare variabile.

$$\delta f = \left| \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y} \right| \delta y$$

Un esempio molto semplice è dato dal calcolo dell'errore nella misura dell'area del rettangolo:

La funzione che lega l'area del rettangolo con la base x e l'altezza y è il prodotto di x e y

$$A = f(x, y) = xy$$

Se la misura del valore della base è di 90 cm e dell'altezza è 120 cm e la precisione per ciascuna delle misure è di 0.5 mm avremo:

$$x_0 = 0.9\, m$$

$$y_0 = 1.2\, m$$

$$\delta x = \delta y = 0.5 \cdot 10^{-3}\, m$$

$$\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial x y_0}{\partial x} = y_0$$

$$\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y} = \frac{\partial x_0 y}{\partial y} = x_0$$

$$\delta A = x_0 \delta y + y_0 \delta x = 0.45 \cdot 10^{-3} + 0.6 \cdot 10^{-3} = 1.05 \cdot 10^{-3} m^2$$

2 Leggi di Newton

La prima legge di Newton afferma che un corpo [massa] persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, se non è soggetto alla applicazione di forze esterne. La seconda legge sostiene che l'accelerazione di un corpo di massa m è proporzionale al valore della forza e inversamente proporzionale al valore della massa:

$$\boldsymbol{f} = m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\boldsymbol{f} = m \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$$

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{f}}{m}$$

Se il modulo del vettore forza è nullo la derivata del vettore velocità è nulla e quindi le componenti del vettore velocità rimangono costanti. Di conseguenza la prima legge di Newton può essere considerata come un caso particolare della seconda. La terza legge di Newton afferma che non è possibile generare una forza su un corpo senza generare contemporaneamente una seconda forza di segno opposto e uguale in modulo alla prima.

Nel sistema internazionale l'unita di misura della forza è il Newton:

$$1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Il Newton è una forza in grado di far variare la velocità di una massa di 1kg di una quantità pari a un metro al secondo in un intervallo di tempo di un secondo. E' quindi in grado di imprimere ad un corpo di 1kg una accelerazione pari a un m/s^2. La forza gravitazionale sulla superficie terrestre è un particolare esempio di forza meccanica. Il suo valore è proporzionale al valore della massa:

$$f_g = mg$$

Ne consegue che nei casi in cui è possibile trascurare o evitare l'attrito con l'aria l'accelerazione è una costante:

$$f_g = ma$$

$$a = g \simeq 9.8\,\frac{m}{s^2}$$

La forza di gravità sulla superficie terrestre deriva dalla legge di gravitazione universale di Newton, secondo la quale due corpi nello spazio si attirano con una forza proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza:

$$f_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La costante G è la costante di gravitazione universale. Nel SI il suo valore è

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$

Per corpi estesi (non puntiformi) la distanza r può essere spesso approssimata con la distanza tra i centri di massa dei due corpi.

Nel caso in cui m_2 ed r sono rispettivamente la massa M e il raggio della Terra R il valore della forza gravitazionale sulla terra è:

$$f_G = f_g = G\frac{Mm}{R^2} = gm$$

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

2.1 Definizione di centro di massa

Nel caso di n corpi puntiformi di massa m_i il vettore della posizione del centro di massa $\boldsymbol{x}_c$ è pari alla media pesata dei vettori posizioni delle singole masse:

$$m_T = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\boldsymbol{x}_c = \frac{1}{m_T} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{x}_i$$

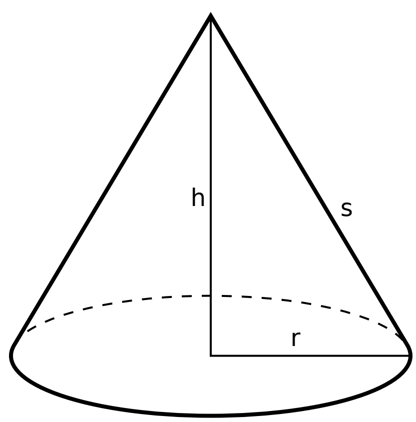
Nel caso di un corpo esteso di massa m e densità $\rho(\boldsymbol{x})$ e volume V la sommatoria diventa un integrale:

$$\boldsymbol{x}_c = \frac{1}{m} \int_m \boldsymbol{x} dm$$

$$\boldsymbol{x}_c = \frac{1}{m} \int_V \boldsymbol{x} \rho(\boldsymbol{x}) dV$$

Tutti i piani passanti per il punto $\boldsymbol{x}_c$ dividono il corpo in due parti, ciascuna di massa m/2.

2.1.1 Calcolo del centro di massa di un cono di densità uniforme



Per calcolare il centro di massa di un cono di densità uniforme e di massa M, con raggio della base R e altezza H è conveniente immaginare il cono come una somma di dischi di spessore dh e diametro r crescente da 0 a R. ϑ è langolo formato tra l'apotema s e l'asse verticale del cono:

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dh$$

$$z_c = \frac{\pi \rho}{M} \int_0^H r^2 h dh$$

$$k = \tan(\vartheta) = \frac{R}{H}$$

$$r(h) = kh$$

$$z_c = \frac{\pi \rho}{M} \int_0^H (kh)^2 \, h dh$$

$$z_c = \frac{\pi \rho k^2}{M} \int_0^H h^3 dh$$

$$\frac{\pi \rho k^2}{M} = \frac{\pi k^2}{V} = \frac{\pi R^2}{V H^2} = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{3}{\pi R^2 H} = \frac{3}{H^3}$$

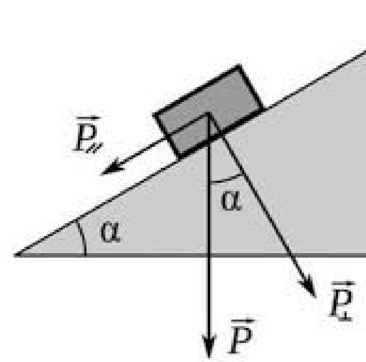
$$\int_0^H h^3 dh = \frac{H^4}{4}$$

$$z_c = \frac{3}{H^3} \frac{H^4}{4} = \frac{3}{4} H$$

$$\boldsymbol{x}_c = (0, 0, z_c)$$

2.2 Semplici esempi

2.2.1 Piano inclinato senza attrito



Il vettore della forza peso può essere scomposto in due componenti, una parallela e una ortogonale al piano inclinato:

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{P}_{\perp} + \boldsymbol{P}_{\parallel}$$

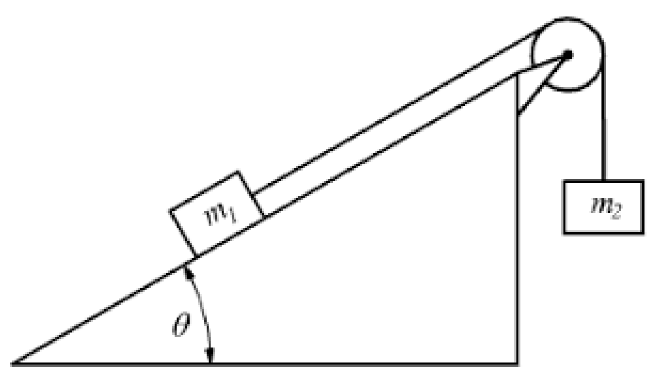
$$P_{\perp} = mg\cos(\alpha)$$

$$P_{\parallel} = mg\sin(\alpha)$$

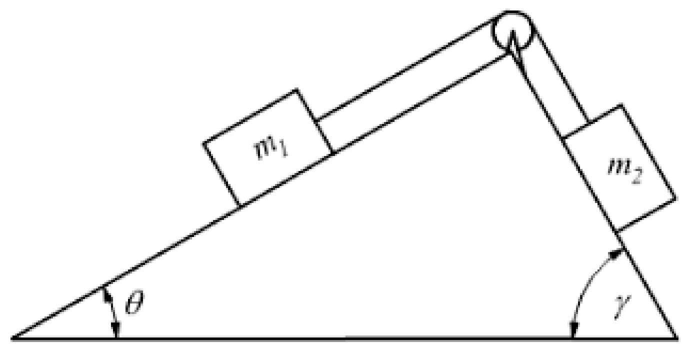
L'accelerazione a lungo il piano inclinato sarà:

$$a = \frac{P_{\parallel}}{m} = g\sin(\alpha)$$

Altri esempi con due masse:



$f = m_1 g \sin(\vartheta) - m_2 g$



$f = m_1 g \sin(\vartheta) - m_2 g \sin(\gamma)$

2.2.2 Forza centripeta

Ricordando che l'accelerazione centripeta a è uguale al prodotto del quadrato della velocità angolare per il raggio dell'orbita circolare e applicando la seconda legge di Newton possiamo trovare la forza centripeta f necessaria a mantenere una massa m in un moto con velocità angolare costante ω in un orbita di raggio r:

$$a = \omega^2 r$$

$$f = ma$$

$$f = m\omega^2 r$$

$$f = m\frac{v^2}{r}$$

Satellite:

Utilizzando queste equazioni possiamo calcolare il raggio dell'orbita di un satellite di massa m che si muove in un orbita circolare intorno alla terra con una velocità v. E' sufficiente eguagliare la forza centripeta f_c con la forza gravitazionale f_g :

$$f_c = f_g$$

$$m\frac{v^2}{r} = mG\frac{M}{r^2}$$

$$v^2 = G\frac{M}{r}$$

$$r = \frac{GM}{v^2}$$

$$v = \omega r$$

$$r = \frac{GM}{\omega^2 r^2}$$

$$r = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}$$

Possiamo calcolare il raggio dell'orbita di un satellite in orbita geostazionaria (velocità angolare = 1 angolo giro/giorno):

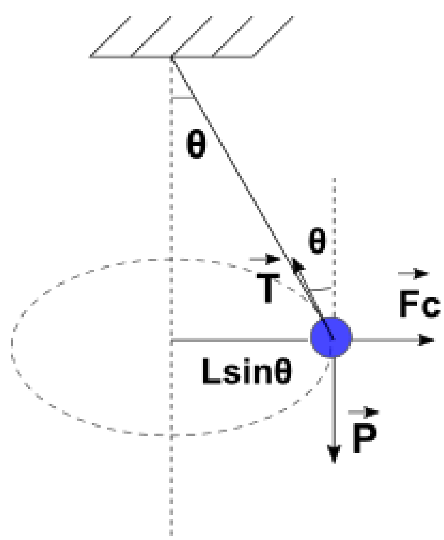
$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \simeq 7.27 \cdot 10^{-5} rad/s$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$

$$M \simeq 5.97 \cdot 10^{24} kg$$

$$r \simeq 42.2 \cdot 10^6 m$$

Pendolo conico:



$$r = L\sin(\vartheta)$$

$$\tan(\vartheta) = \frac{F_c}{P} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega^2 L\sin(\vartheta)}{g}$$

$$\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} = \frac{\omega^2 L\sin(\vartheta)}{g}$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{g}{\omega^2 L}$$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right)$$

$$\omega^{-2} = \frac{L\cos(\vartheta)}{g}$$

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{L\cos(\vartheta)}{g}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos(\vartheta)}{g}}$$

f_T è la tensione del filo:

$$\boldsymbol{f_T} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F_c}$$

$$f_T = \sqrt{P^2 + F_c^2} = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2}$$

Moto Parabolico di un proiettile

Utilizzando le leggi di Newton possiamo facilmente calcolare la traiettoria di un proiettile di massa m avente una velocità iniziale v ed un angolo ϑ rispetto al piano orizzontale:

$$v_{x0} = v\cos(\vartheta)$$

$$v_{y0} = v\sin(\vartheta)$$

Lungo l'asse x, se trascuriamo l'attrito con l'aria, non agisce nessuna forza, di conseguenza $v_x$non varia e avremo

$$x(t) = v_{x0}t$$

Lungo l'asse y agisce la forza di gravità e quindi possiamo scrivere:

$$a_y = \frac{f_y}{m} = \frac{mg}{m} = g$$

$$v_y(t) = v_{y0} - gt$$

$$y(t) = \int_0^t (v_{y0} - gt)\,dt = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Le due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ definiscono la traiettoria in forma parametrica. Le due equazioni definiscono implicitamente la traiettoria $y(x)$. Le due coordinate y e x sono legate dal parametro t.

$$t = \frac{x}{v_{x0}}$$

$$y(x) = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}x^2$$

$$b = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}$$

$$a = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}$$

$$y(x) = ax^2 + bx$$

Per calcolare la gittata x_I basta porre $y = 0$:

$$y = 0 \Rightarrow ax + b = 0$$

$$x_I = -\frac{b}{a} = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}\frac{2v_{x0}^2}{g} = 2\frac{v_{y0}v_{x0}}{g}$$

Per calcolare la coordinata x_m che corrisponde alla massima altezza raggiunta dobbiamo porre a zero la derivata della funzione $y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$x_m = \frac{-b}{2a} = \frac{v_{y0}v_{x0}}{g} = \frac{1}{2}x_I$$

L'altezza massima y_m raggiunta è uguale:

$$y_m = y\left(x_m\right)$$

Possiamo anche calcolare l'angolo ϑ che corrisponde alla massima gittata calcolando il valore dell'angolo che corrisponde a un valore zero della derivata della funzione $x_I\left(\vartheta\right)$

$$x_I = 2\frac{v_{y0}v_{x0}}{g} = \frac{2v^2}{g}\sin\left(\vartheta\right)\cos\left(\vartheta\right)$$

$$\frac{dx_I}{d\vartheta} = \frac{2v^2}{g}\left[\cos^2\left(\vartheta\right) - \sin^2\left(\vartheta\right)\right]$$

La derivata si azzera per $\vartheta = \vartheta_m$

$$\cos^2\left(\vartheta_m\right)\text{-}\sin^2\left(\vartheta_m\right)\text{=}0$$

dividendo ambo i membri per $\cos^2\left(\vartheta_m\right)$ abbiamo:

$$1 - \tan^2\left(\vartheta_m\right) = 0$$

$$\tan\left(\vartheta_m\right) = 1$$

$$\vartheta_m = \arctan\left(1\right) = \frac{\pi}{4}$$

2.3 Forza di Coriolis

Scriviamo il vettore delle coordinate di un punto "materiale" (dotato di massa m) che si trova in un sistema che ruota con velocità angolare uniforme ω come numero complesso z:

$$\left(x, iy\right) = z = r\exp\left(i\vartheta\right) = r\exp\left(i\omega t\right)$$

La derivata di z rispetto al tempo è il vettore (numero complesso) velocità $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}\exp\left(i\omega t\right) + i\omega r\exp\left(i\omega t\right) \tag{1}$$

La derivata di $\boldsymbol{v}$ è il vettore (numero complesso) accelerazione $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\exp\left(i\omega t\right) + i\omega\frac{dr}{dt}\exp\left(i\omega t\right) + i\omega\frac{dr}{dt}\exp\left(i\omega t\right) - \omega^2 r\exp\left(i\omega t\right) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} + 2i\omega\frac{dr}{dt} - \omega^2 r\right)\exp\left(i\omega t\right) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r + 2\omega\frac{dr}{dt}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right]\exp\left(i\omega t\right) \tag{4}$$

Il primo termine dell'espressione entro parentesi quadre è dovuto all'accelerazione dovuta alla variazione della componente radiale della velocità. Il secondo termine $-\omega^2 r$ è l'accelerazione centripeta. Il terzo termine è l'accelerazione di Coriolis. L'accelerazione di Coriolis è ortogonale all'accelerazione centripeta ed è anche ortogonale (se la velocità angolare ω come un vettore $\boldsymbol{\omega}$) ad $\boldsymbol{\omega}$. Per ottenere la forza di Coriolis, basta moltiplicare l'accelerazione per la massa m del punto materiale.

3 Energia Cinetica, Energia Potenziale e Quantità di moto

3.1 Energia cinetica ed energia potenziale

Il lavoro (Energia) generato da una forza f è definito come l'integrale del prodotto scalare del vettore forza $\boldsymbol{f}$ per il vettore-differenziale spostamento $\boldsymbol{ds}$

$$\boldsymbol{s} = (x, y, z)$$

$$\boldsymbol{ds} = (dx, dy, dz)$$

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{s}\right) = \left(f_x\left(\boldsymbol{s}\right), f_y\left(\boldsymbol{s}\right), f_z\left(\boldsymbol{s}\right)\right)$$

$$dL = f_x\left(\boldsymbol{s}\right)dx + f_y\left(\boldsymbol{s}\right)dy + f_z\left(\boldsymbol{s}\right)dz = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{s}\right)\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$L = \int_{\boldsymbol{s}_1}^{\boldsymbol{s}_2}\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{s}\right)\cdot\boldsymbol{ds} = \int_{x_1}^{x_2} f_x\left(\boldsymbol{s}\right)dx + \int_{y_1}^{y_2} f_y\left(\boldsymbol{s}\right)dy + \int_{z_1}^{z_2} f_z\left(\boldsymbol{s}\right)dz$$

In molti casi il calcolo il vettore forza è parallelo al vettore-differenziale ds. In questo caso possiamo semplicemente scrivere, scegliendo un sistema di riferimento in cui sia $\boldsymbol{ds}$ che $\boldsymbol{f}$ hanno componenti non nulle solo lungo l'asse x

$$\boldsymbol{f} = (f_x, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{ds} = (x, 0, 0)$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\, dx$$

Possiamo omettere, in questo caso particolare, per maggiore semplicità di notazione il pedice x:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

Nel caso in cui la forza è costante, sia in modulo che in direzione, il lavoro può essere calcolato semplicemente come prodotto scalare del vettore forza $\boldsymbol{f}$ per il vettore spostamento $\triangle \boldsymbol{s}$:

$$\triangle \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{s}_1$$

$$L = \boldsymbol{f} \cdot \triangle \boldsymbol{s} = f_x \triangle x + f_y \triangle y + f_z \triangle z = f \triangle s \cos(\vartheta)$$

In quest'ultima formula ϑ è langolo tra il vettore forza e il vettore spostamento. Nel caso in cui i due vettori sono paralleli $(\cos(\vartheta) = 1)$ la formula può essere ulteriormente semplificata:

$$L = |\boldsymbol{f}|\, |\triangle \boldsymbol{s}| = f \triangle s$$

Calcoliamo adesso il lavoro svolto da una forza f costante che accelera una massa m. In questo caso la forza e los spostamento sono paralleli e quindi possiamo scrivere:

$$f = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} f dx = f \int_{x_1}^{x_2} dx = f(x_2 - x_1) = f \triangle x$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} f dx = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt} dx = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{c2} - E_{c1} = \triangle E_c$$

Il termine $\frac{1}{2} m v^2$ indica l'energia cinetica di una massa m:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Di conseguenza, in questo caso, il lavoro svolto è uguale alla variazione dell'energia cinetica della massa m:

$$L = f\triangle x = \triangle E_c$$

Per sollevare una massa m ad una altezza $h = \triangle x$ occorre compiere un lavoro L:

$$f = mg$$

$$L = f\triangle x = mgh$$

Lasciando cadere la massa m da un altezza h il corpo acquisirà una velocità v ed una energia cinetica E_c

$$v_f = gt_f$$

$$h = \int_0^{t_f} vdt$$

$$\frac{1}{2}gt_f^2 = h$$

$$v_f^2 = g^2t_f^2$$

$$t_f^2 = \frac{2h}{g}$$

$$v_f^2 = 2gh$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$$

L'energia cinetica acquisita da un corpo di massa m lasciato cadere da una altezza h è pari al lavoro eseguito per sollevarlo all'altezza h. Il termine mgh ha le dimensioni di una energia che dipende esclusivamente dalla posizione del corpo. Più genericamente se la parte di energia di un sistema che dipende esclusivamente dalla sua posizione/configurazione è definita energia potenziale.

$$E_p = U\left(x, y, z\right)$$

O più semplicemente in un sistema monodimensionale:

$$E_p = U\left(x\right)$$

$$dL = dU\left(x\right)$$

Un diminuizione $-dU$ dell'energia potenziale di un sistema comporta la generazione di un lavoro dL

$$dL = f_x\left(x\right)dx = -dU\left(x\right)$$

$$f_x\left(x\right) = -\frac{dU\left(x\right)}{dx}$$

nel caso di una massa m in un campo gravitazionale possiamo scrivere:

$$U\left(h\right) = mgh$$

$$-dU = -mgdh$$

$$f = -\frac{dU}{dh} = -mg$$

nel caso di un piano inclinato con pendenza $\tan\left(\vartheta\right)$ abbiamo:

$$h = kx = \tan\left(\vartheta\right)x$$

$$U\left(h\right) = mgh = mgkx$$

$$f_x = -\frac{dU}{dx} = mg\tan\left(\vartheta\right)$$

Nel caso di una buca con profilo parabolico profonda un metro e larga due metri possiamo scrivere:

$$y = x^2 - 1$$

$$U\left(x\right) = mgy$$

$$f_x = -\frac{dU}{dx} = -2mgx$$

Una forza orizzontale esterna $f_{ex} = 2mgx$ applicata ad un massa m su piano inclinato permetterà di mantenerla in equilibrio, impedendole di scivolare. *In un sistema isolato, non soggetto a forze esterne, l'energia totale, espressa come somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, si conserva.*

3.1.1 Energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale di una massa m soggetta all'attrazione di un pianeta di massa M si ottiene integrando la forza da R (distanza della massa dal centro di massa del pianeta) all'infinito:

$$U_g = \int_R^\infty f_g(r)\,dr = \int_R^\infty -G\frac{mM}{r^2}dr = -GmM\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \left.\frac{GmM}{r}\right|_R^\infty = 0 - \frac{GmM}{R}$$

La velocità minima di fuga che permette di sfuggire all'attrazione gravitazionale si ottiene uguagliando a zero la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{GmM}{R}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

3.2 Impulso di una forza e variazione della quantità di moto

L'impulso di una forza è definito come l'integrale nel tempo del vettore forza. Un impulso applicato ad una massa m libera di muoversi nello spazio comporta una variazione $\triangle \boldsymbol{p}$ della sua velocità e della sua quantità di moto $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$.La quantità di moto di una massa m che si muove ad una velocità v è un vettore pari al prodotto della massa per la velocità del corpo.

$$\triangle \boldsymbol{p} = \int_0^T \boldsymbol{f}(t)\,dt$$

$$\triangle \boldsymbol{p} = \int_0^T m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}dt$$

$$\triangle \boldsymbol{p} = \int_{v_0}^{v_f} md\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}_f - m\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_0$$

In un sistema isolato, non soggetto a forze esterne, la quantità di moto totale, espressa come somma della quantità di moto delle singole masse del sistema, si conserva.

3.3 Equazioni di Eulero-Lagrange

Se definiamo come Lagrangiana di un sistema la differenza tra la sua energia cinetica T e la sua energia potenziale U,

$$L = T - U$$

L'azione S è un valore scalare che caratterizza l'evoluzione di un sistema in un intervallo di tempo $\triangle t = t_2 - t_1$.

E' definita come l'integrale definito della Lagrangiana nell'intervallo $\triangle t$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, v_x, t)dt$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt$$

Un sistema fisico si evolve nel tempo secondo un andamento che minimizza l'azione.

E' possibile utilizzare le equazioni di Eulero-Lagrange per descrivere tale comportamento del sistema:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Ad esempio nel caso di una particella che si trova in una buca di potenziale $U(x) = mg\left(x^2 - 1\right)$ possiamo scrivere:

$$L = \frac{1}{2}mv_x^2 - U(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_x} = m\frac{dv_x}{dt} = ma_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{dU}{dx}$$

$$ma_x + \frac{dU}{dx} = 0$$

$$f_x = -\frac{dU}{dx}$$

ritrovando la seconda legge di Newton:

$$f_x = ma_x$$

Nel caso particolare in cui $U(x) = mg\left(x^2 - 1\right)$ avremo:

$$f_x = -2mgx$$

3.4 Feynmann “Unworldliness”

In un sistema isolato l’energia totale è una costante K (si conserva):

$$E = T + U = K$$

Di conseguenza la sua derivata nel tempo deve essere nulla:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

$$-\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = -v_x\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dv_x}\frac{dv_x}{dt}$$

Nel caso molto semplice di una singola massa possiamo scrivere:

$$T = \frac{1}{2}mv_x^2$$

$$\frac{dT}{dt} = mv_x\frac{dv_x}{dt} = -v_x\frac{dU}{dx}$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{dU}{dx}$$

$$f_x = ma_x$$

3.5 Sistemi oscillanti

3.5.1 Sistema massa molla

Legge di Hooke: La forza di richiamo f di una molla è proporzionale e opposta alla sua estensione x:

$$f = -kx$$

Possiamo applicare la legge di Newton $f = ma$ ad una molla che ha un estremo fisso e l’altro estremo collegato ad una massa m libera di muoversi senza attrito:

$$f = ma$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{5}$$

L'eq. 5 è una equazione differenziale che ha come soluzione una *funzione incognita* $x\left(t\right)$. L'equazione del sistema massa-molla ci dice che la soluzione va cercata tra le funzioni che sono proporzionali alla loro derivata seconda. Tra le funzioni candidate che hanno questa caratteristica troviamo le funzioni trigonometriche seno e coseno e le funzioni esponenziali. Possiamo quindi provare ad applicare un tentativo di soluzione del tipo:

$$x\left(t\right) = x_0 \exp\left(zt\right)$$

dove z e $x_0$sono costanti incognite. In questo caso la 5 diventa:

$$mx_0z^2 \exp\left(zt\right) = -kx_0 \exp\left(zt\right)$$

$$z^2 = -\frac{k}{m}$$

Essendo k ed m valori positivi reali z dovrà essere un numero puramente immaginario

Se chiamiamo ω la radice del rapporto k/m possiamo scrivere:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$z = i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega$$

Quindi la soluzione dell'eq. 5 sarà:

$$x\left(t\right) = x_0 \exp\left(i\omega t\right)$$

Il valore della costante x_0 dipende dalla posizione della massa all'istante iniziale $t_0 = 0$

$$x\left(t_0\right) = x\left(0\right) = x_0$$

x_0 rappresenta l'ampiezza delle oscillazioni della massa m mentre ω la frequenza angolare. La frequenza ν espressa in numero di oscillazioni al secondo (Hertz) si ottiene dividendo la frequenza angolare ω per il numero di radianti in un intero ciclo (2π):

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

3.5.2 Oscillazioni forzate e risonanza

Se applichiamo una forza esterna f sinusoidale con pulsazione ω_f e ampiezza f_{max} al sistema massa-molla

$$f = f_{max} \exp\left(i\omega_f t\right)$$

e ipotizziamo che lo spostamento sia sincrono con la forza esterna:

$$x = x_{max} \exp\left(i\omega_f t\right)$$

le equazioni del moto diventano:

$$-kx + f = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx_{max} \exp\left(i\omega_f t\right) + f_{max} \exp\left(i\omega_f t\right) = -m\omega_f^2 x_{max} \exp\left(i\omega_f t\right)$$

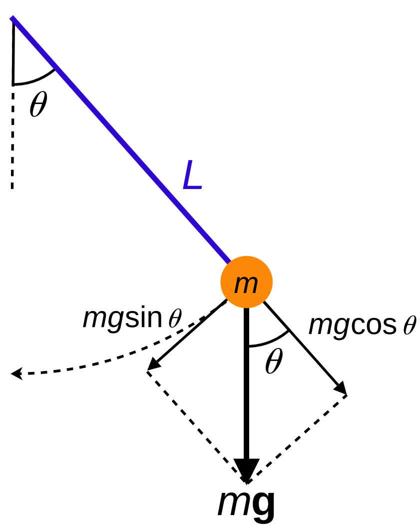
$$f_{max} + x_{max}\left(m\omega_f^2 - k\right) = 0$$

$$x_{max} = \frac{f_{max}}{\left(k - m\omega_f^2\right)}$$

L'ampiezza diventa virtualmente infinita (condizione di risonanza) se la frequenza della forza esterna tende alla frequenza tipica del sistema massa molla $\left(\omega_f = \sqrt{k/m}\right)$:

$$lim_{\omega_f \to \pm\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad x_{max} = \pm\infty$$

3.5.3 Pendolo



Un pendolo è formato da un asta di massa trascurabile e di lunghezza L al quale è collegata una massa m. Spostando l'asta di un angolo θ rispetto alla verticale, la massa è soggetta ad una forza di richiamo proporzionale al seno dell'angolo:

$$f = -mg\sin(\theta)$$

Per *piccoli angoli* ($\theta \ll 1$) la funzione seno può essere approssimata dal suo argomento:

$$\sin(\theta) \simeq \theta$$

$$x = L\sin(\theta) \simeq L\theta$$

$$f \simeq -mg\theta = -m\frac{g}{L}x$$

$$f = ma$$

$$-m\frac{g}{L}x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L}x \tag{6}$$

L'eq. 6, dal punto di vista matematico, è del tutto simile all'eq. 5, semplicemente al posto del rapporto k/m troviamo il rapporto L/g. La soluzione sarà data quindi da una funzione, che non dipende dal valore della massa, del tipo:

$$x(t) = x_0\exp(i\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Il numero ν di oscillazioni al secondo (Hertz) sarà quindi

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

4 Forze dissipative

La forza di attrito di un corpo che scivola su una superficie (attrito radente) è proporzionale ad un coefficiente μ che dipende dalla natura della superfici in contatto e dalla componente della forza che agisce sul corpo perpendicolare alla superficie:

$$f_A = \mu N$$

Nel caso in cui il corpo non scivola sulla superficie la forza d'attrito (attrito statico) è in genere superiore all'attrito radente.

La forza di attrito di un corpo che si muove in un fluido viscoso è funzione di un coefficiente γ che dipende dalla forma del corpo e dalla viscosità del fluido ed è proporzionale alla sua velocità v:

$$f_V = -\gamma v$$

Le forze di attrito trasformano l'energia meccanica in energia termica.

4.1 Esempi

4.1.1 Spazio di frenata di una automobile

Possiamo ad esempio calcolare lo spazio di frenata S di un automobile che si muove con velocità v conoscendo il coefficiente d'attrito tra le gomme e l'asfalto, nel caso in cui le ruote vengano bloccate dai freni, utilizzando il principio di conservazione dell'energia:

$$E_{cinetica} = E_{dissipata}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = f_A S$$

$$f_A = \mu N = \mu m g$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu m g S$$

$$S = \frac{v^2}{2\mu g}$$

4.1.2 Piano inclinato con attrito

Possiamo calcolare l'accelerazione di una massa che scivola su un piano inclinato conoscendo il coefficiente d'attrito tra la massa e il piano inclinato:

$$f = mg\sin(\vartheta) - \mu N$$

$$f = mg\sin(\vartheta) - \mu mg\cos(\vartheta)$$

$$a = \frac{f}{m} = g\left(\sin(\vartheta) - \mu\cos(\vartheta)\right)$$

L'accelerazione in questo caso è nulla quando la forza complessiva f è nulla:

$$mg\sin(\vartheta) = \mu mg\cos(\vartheta)$$

$$\sin(\vartheta) = \mu\cos(\vartheta)$$

$$\mu = \tan(\vartheta)$$

4.1.3 Moto paracadute

Un massa lasciata cadere con un paracadute è soggetta sia alla forza di gravità che alla forza d'attrito con l'aria:

$$f = mg - \gamma v = ma$$

$$m\frac{dv}{dt} + \gamma v = mg$$

$$\tau = \frac{m}{\gamma}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = g$$

Il corpo raggiungerà la massima velocità (velocità limite v_L) quando l'accelerazione è zero:

$$v_L = g\tau$$

4.1.4 Aereo frenato da un paracadute

Nel caso di un areo frenato nella pista di atterraggio da un paracadute, ipotizzando che l'unica forza frenante sia quella del paracadute, avremo semplicemente una equazione differenziale in cui la derivata prima è proporzionale alla funzione stessa:

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v \tag{7}$$

Possiamo quindi tentare una soluzione del tipo:

$$v = v_0 \exp(zt)$$

In questo caso la 7 diventa:

$$mzv_0 \exp(zt) = -\gamma v_0 \exp(zt)$$

$$z = -\frac{\gamma}{m} = -\frac{1}{\tau}$$

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$a(t) = -\frac{v_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$x(t) = \int_0^{t_f} v(t)\,dt = -\tau v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\Bigg|_0^{t_f} = -\tau v_0 \left[\exp\left(-\frac{t_f}{\tau}\right) - 1\right]$$

4.1.5 Oscillazione smorzate

F_e è la forza elastica della molla, F_a è la forza d'attrito con l'aria

$$F = ma$$

$$F = F_e + F_a = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_e = -kx$$

$$F_a = -\gamma\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=0$$

Tentativo di soluzione con A numero reale, Z numero complesso $Z=a+ib$

$$x\left(t\right)=Ae^{Zt}$$

$$mZ^2x+\gamma Zx+kx=0$$

$$mZ^2+\gamma Z+k=0$$

$$Z^2=\left(a+ib\right)^2=a^2-b^2+i2ab=0$$

$$m\left(a^2-b^2+i2ab\right)+\gamma\left(a+ib\right)+k=0$$

parte immaginaria dell'ultima equazione:

$$i2mab+i\gamma b=0$$

troviamo l'incognita a:

$$2ma=-\gamma$$

$$a=-\frac{\gamma}{2m}$$

parte reale

$$m\left(a^2-b^2\right)+\gamma a+k=0$$

$$m\left(\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2-b^2\right)-\frac{\gamma^2}{2m}+k=0$$

$$\frac{\gamma^2}{4m}-mb^2-\frac{\gamma^2}{2m}+k=0$$

$$-\frac{\gamma^2}{4m^2}-b^2+\frac{k}{m}=0$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

$$\zeta^2 = \frac{\gamma^2}{4mk}$$

$$a = -\zeta\omega_0$$

$$\frac{\gamma^2}{4m^2} = \zeta^2\frac{k}{m} = \zeta^2\omega_0^2$$

$$-\zeta^2\omega_0^2 - b^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$b^2 = \omega_0^2\left(1-\zeta^2\right)$$

$$b = \omega_0\sqrt{(1-\zeta^2)}$$

$$x(t) = Ae^{(a+ib)t} = Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t}e^{i\omega_0\sqrt{(1-\zeta^2)}t} = Ae^{-\zeta\omega_0 t}e^{i\omega_0\sqrt{(1-\zeta^2)}t}$$

4.2 Urti

4.2.1 Urti perfettamente elastici

In un urto elastico si conserva sia l'energia meccanica che la quantità di moto. Nel caso di due massa $m_1$ed m_2 aventi inizialmente velocità v_{1i}e v_{2i} la legge di conservazione dell'energia meccanica può essere scritta nella forma:

$$E_{ci} = E_{cf}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad (8)$$

$$m_1\left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2\right) = -m_2\left(v_{2i}^2 - v_{2f}^2\right)$$

$$m_1\left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = -m_2\left(v_{2i} - v_{2f}\right)\left(v_{2i} + v_{2f}\right) \qquad (9)$$

dove v_{1f}e v_{2f} sono le velocità delle due masse dopo l'urto. La legge della conservazione della quantità di moto sarà rappresentata dall'equazione seguente:

$$P_i = P_f$$

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \qquad (10)$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = -m_2 (v_{2i} - v_{2f}) \tag{11}$$

Combinando le equazioni 9 e 11otteniamo:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) (v_{1i} + v_{1f}) = m_1 (v_{1i} - v_{1f}) (v_{2i} + v_{2f})$$

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}$$

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i} \tag{12}$$

Sostituendo la 12 nella 10 otteniamo i valori finali delle velocità:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{2f} - m_1 v_{1i} + m_1 v_{2i} + m_2 v_{2f}$$

$$(m_1 + m_2) v_{2f} = 2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i}$$

4.2.2 Urti perfettamente anelastici

Negli urti perfettamente anelastici le due masse si fondono in una sola massa avente velocità finale v_f. Possiamo utilizzare la legge di conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

5 Dinamica rotazionale

Applichiamo la legge di Newton $F = ma$ ad un corpo di massa m vincolato a ruotare intorno ad un asse da un asta di massa trascurabile e di lunghezza r supponendo che il vettore forza sia tangente alla direzione del moto:

$$F = ma$$

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d\omega r}{dt} = mr \frac{d\omega}{dt}$$

$$Fr = mr^2 \frac{d\omega}{dt} \tag{13}$$

$$p = mv = m\omega r$$

$$L = pr = m\omega r^2$$

$$L = mvr$$

$$\tau = Fr$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$I = mr^2$$

$$\tau = I\alpha$$

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

$$L = I\omega \tag{14}$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} \tag{15}$$

Nel caso in cui la forza non sia tangente alla direzione del moto le equazioni 1,2,3 devono essere scritte in forma vettoriale:

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

In queste equazioni τ è la coppia della forza F, I è il momento d'inerzia del sistema rotante, mentre L è il momento angolare del sistema.

L'energia del sistema rotante è uguale a:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Supponendo di un sistema avente più masse, ognuna delle quali è collegata ad un asse centrale di massa trascurabile, da un asta di massa anch'essa trascurabile il momento d'inerzia I si ottiene sommando i momenti d'inerzia delle singole masse:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Nela caso di un sistema in cui la massa non è distribuita in un volume esteso, come nel caso di un cilindro rotante intorno al proprio asse la sommatoria deve essere sostituita da un integrale. Avremo quindi il differenziale $dm = \rho dV$

al posto delle masse discrete m_i

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int \rho r^2 dV$$

In questa equazione ρdV è il prodotto della densità ρ per il differenziale del volume V. Conviene scegliere una forma geometrica del volume dV che faciliti il calcolo dell'integrale.

5.1 Corrispondenza tra grandezze della meccanica lineare e rotazionale

Lineare	Rotazionale
spazio, x	angolo,ϑ
velocità, v	velocità angolare, ω
accelerazione, a	accelerazione angolare,α
massa, m	momento di inerzia, I
quantità di moto, mv	momento angolare, $L = I\omega$
Forza, F	coppia, τ
F=ma	$\tau = I\alpha = \frac{dL}{dt}$

5.2 Momento angolare e momento d'inerzia di una massa puntiforme che trasla con moto uniforme

Una massa puntiforme m che trasla con moto uniforme ha in genere un momento angolare non nullo rispetto ad un particolare sistema di riferimento:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$L = mvr\sin(\vartheta)$$

Nel caso semplice di una massa che trasla parallelamente all'asse x il suo momento angolare è uguale al prodotto della sua quantità di moto mv_x per la sua distanza dall'asse y:

$$r_y = r\sin(\vartheta)$$

$$L = mv_x r_y$$

$$\frac{v_x}{r_y} = \omega_x$$

$$L = m\omega_x r_y^2$$

$$I = mr_y^2$$

$$L = I\omega_x$$

5.3 Momento d'inerzia di un'asta rispetto ad uno dei suoi estremi

Calcoliamo il momento d'inerzia di un'asta di lunghezza L e di massa M di spessore trascurabile. La densità lineare uniforme dell'asta è

$$\rho_L = \frac{M}{L} \tag{16}$$

il differenziale della massa dm, ovvero la massa di un segmento arbitrariamente piccolo di lunghezza dr è quindi

$$dm = \rho_L dr$$

il momento d'inerzia sarà quindi:

$$I = \int_0^M r^2 dm = \rho_L \int_0^L r^2 dr = \rho_L \frac{r^3}{3}\bigg|_0^L = \rho_L \frac{L^3}{3} \tag{17}$$

sostituendo la 16 nella 17 otteniamo:

$$I(L) = \frac{1}{3}ML^2$$

Il momento d'inerzia di un'asta lunga L/2 e di massa M/2 è quindi

$$I\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{1}{24}ML^2$$

Il momento d'inerzia I_c di un'asta di lunghezza L rispetto ad un asse ortogonale che passa per il centro è quindi:

$$I_c\left(L\right)=2I\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{1}{12}ML^2$$

5.4 Momento di inerzia del cilindro:

Nel caso del cilindro di raggio R, altezza h e densità ρ potremo scegliere come volume dV una corteccia cilindrica di raggio r, spessore dr e altezza h:

$$dV=h2\pi rdr$$

Ipotizzando che la densità sia costante avremo quindi chiamando M la massa del cilindro il momento d'inerzia del cilindro intorno al proprio asse:

$$I=2\pi\rho h\int_0^R r^3dr=\frac{1}{2}\pi\rho hR^4$$

$$V_{cilindro}=\pi hR^2$$

$$M_{cilindro}=\rho\pi hR^2$$

$$I=\frac{1}{2}MR^2$$

5.5 Momento di inerzia della sfera

Immaginiamo una sfera di raggio R come somma di cilindri di altezza infinitesima $dh=d\left(R\sin\left(\vartheta\right)\right)$ e raggio $r=R\cos\left(\vartheta\right)$

$$dm=\rho\pi R^2\cos^2\left(\vartheta\right)d\left(R\sin\left(\vartheta\right)\right)$$

$$d\left(R\sin\left(\vartheta\right)\right)=R\cos\left(\vartheta\right)d\vartheta$$

$$dm=\rho\pi R^3\cos^3\left(\vartheta\right)d\vartheta$$

$$r^2=R^2\cos^2\left(\vartheta\right)$$

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{\rho \pi}{2} R^5 \cos^5(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$I = \rho \pi R^5 \int_0^{\pi/2} \cos^5(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$y = [f(x)]^n \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1} \frac{df}{dx}$$

$$\int \cos^5(\vartheta)\, d\vartheta = \sin(\vartheta) + \frac{\sin^5(\vartheta)}{5} - \frac{2}{3}\sin^3(\vartheta) + C$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5(\vartheta)\, d\vartheta = 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{15+3-10}{15} = \frac{8}{15} = \frac{4}{3} * \frac{2}{5}$$

$$I = \rho \frac{2}{5} \left[\frac{4}{3} \pi R^5 \right]$$

$$V_{sfera} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

Momento di inerzia di una sfera cava:

$$dS = 2\pi r dl = 2\pi R^2 \cos(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$r = R\cos(\vartheta)$$

$$dI = \sigma r^2 dS = \sigma 2\pi R^4 \cos^3(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$I = \sigma 4\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \cos^3(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$\int \cos^3(\vartheta)\, d\vartheta = \sin(\vartheta) - \frac{\sin^3(\vartheta)}{3} + C$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(\vartheta)\, d\vartheta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$I = \sigma 4\pi R^4 \frac{2}{3} = \frac{2}{3} M R^2 \tag{18}$$

Momento di inerzia di una sfera piena calcolata come integrale di cortecce sferiche:

Volume di una corteccia sferica di raggio r:

$$dV = \frac{4}{3}\pi r^2 dr$$

Massa di una corteccia sferica:

$$dm = \rho dV$$

Momento di inerzia di una corteccia sferica (v. eq. 4)

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{2}{3} r^2 \left[\varrho 4\pi r^2 dr\right] = \frac{8}{3}\varrho\pi r^4 dr$$

$$I = \int dI = \frac{8}{3}\varrho\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{3}\varrho\pi \frac{R^5}{5}$$

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

5.6 Teorema degli assi paralleli (Huygens-Steiner)

Il momento di inerzia I_t di un corpo rigido rispetto ad un asse che non passa per il suo centro di massa è uguale al momento di inerzia passante per il centro di massa sommato al valore complessivo della massa m per il quadrato della distanza d dell'asse di rotazione dal centro di massa:

$$I_t = I + md^2$$

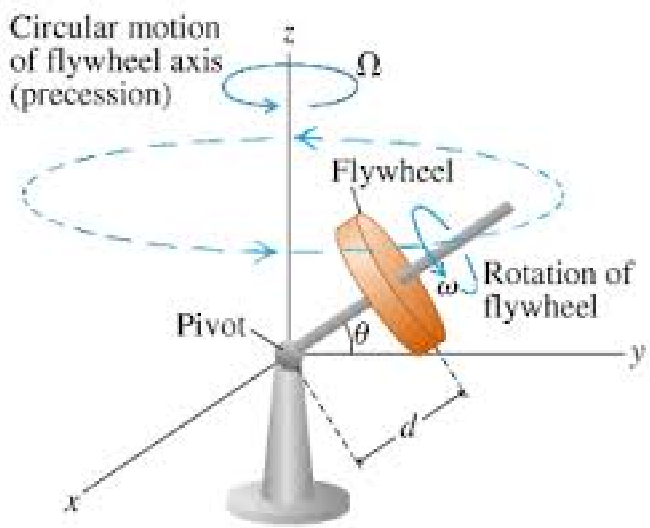
Nel caso di un cilindro ad esempio il momento di inerzia rispetto al proprio asse è $I_c = {}^{mr^2}/_2$. Il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse del cilindro e distante m dal centro di massa sarà quindi:

$$I_{ct} = \frac{1}{2}mr^2 + md^2$$

La rotazione di un cilindro che rotola su una superficie senza strisciare può essere vista come una rotazione del cilindro intorno ad un asse parallelo, giacente sulla superficie e distante r dal centro di massa. In questo caso il momento d'inerzia è

$$I_{ct} = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

5.7 Meccanica del giroscopio



Coppia τ

$$\tau = mgd\cos(\theta)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

$$dL = L\cos(\theta)\,d\varphi$$

$$\frac{dL}{dt} = L\cos(\theta)\,\frac{d\varphi}{dt} = L\cos(\theta)\,\omega_p$$

$$\boldsymbol{\tau} = mgd\cos(\theta) = L\cos(\theta)\,\omega_p$$

La frequenza di precessione è ω_p

$$\omega_p = \frac{1}{L}mgd$$

$$L = I\omega$$

$$\omega_p = \frac{1}{I\omega}mgd$$