# UNIDAD 1: INTRODUCCION AL ALGEBRA

## Parte A: <u>Modelos del Algebra de Boole</u>

## <u>Lógica Proposicional</u>

El Algebra de Boole es un modelo matemático, para conocerlo comenzaremos estudiando uno de sus ejemplos: la Lógica proposicional. Las proposiciones, los conectivos lógicos, los cuantificadores y las propiedades que verifican conforman su objeto de estudio.

- **Proposición**

Es un enunciado u oración del cual puede establecerse un valor de verdad, es decir se puede determinar si es verdadero ( V ) o falso ( F). No son proposiciones aquellas que expresan deseo, orden, interrogación o exclamación. Se suelen simbolizar con letras imprenta minúsculas p, q, r, s, etc. Ejemplos de proposiciones:

p: Juan estudia Ingeniería.

q: 3 = 2+1

*<u>Ejercicio 1</u>*

*Indica cuáles de las siguientes expresiones corresponden a proposiciones.*

- *Hoy es lunes.*
- *4 . 5 = 5 . 4*
- *$Z \subset IN$*
- *¡Qué calor hace!*
- *¿Las mesas están con manteles?*
- *Me gustaría ir al circo.*
- *2+3 = 6*

- **Negación de una proposición**

Dada una proposición p, siempre es posible determinar otra proposición negándola, se simboliza –p y se lee “no p”. Si p es una proposición verdadera su negación será falsa.

| **p** | **-p** |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

En las tablas de verdad se pueden visualizar todos los posibles valores de verdad de una proposición.

- **Conectivos lógicos**

A través del uso de conectivos lógicos se obtienen proposiciones compuestas. En este curso estudiaremos los siguientes conectivos lógicos: conjunción, disyunción, implicación simple o condicional y doble implicación o bicondicional.

**Conjunción**
Dadas dos proposiciones p y q cualesquiera, la conjunción de dos proposiciones es otra proposición anotada p $\wedge$ q, y es verdadera sólo cuando ambas son verdaderas. Se lee p y q.

| **p** | $\wedge$ | **q** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | F | F |

**Disyunción**
La disyunción de dos proposiciones es otra proposición anotada p$\vee$q, y será falsa solo cuando ambas son falsas. Se lee p ó q.

| **p** | $\vee$ | **q** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | V | F |
| F | V | V |
| F | F | F |

**Implicación simple o condicional**
La implicación de proposiciones es otra proposición anotada p $\Rightarrow$ q, y es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Se lee p implica q**.**

| **p** | $\Rightarrow$ | **q** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | V | F |

En este caso la proposición p recibe el nombre de ‘antecedente” y la proposición q de “consecuente”.

**Implicaciones asociadas**

Dada una implicación simple: $p \Rightarrow q$ existen tres implicaciones asociadas a ella que son:

***recíproca*: $q \Rightarrow p$**

***contraria*: $-p \Rightarrow -q$**

***contrarecíproca*: $-q \Rightarrow -p$**

Además, dada una implicación simple: $p \Rightarrow q$, se dice que q es una **condición necesaria** para que se verifique p, y que p es una **condición suficiente** para que se verifique q.

**Doble implicación o bicondicional**

Dadas dos proposiciones p, q se puede formar otra proposición compuesta llamada doble implicación o bicondicional, anotada $p \Leftrightarrow q$. La doble implicación es verdadera cuando ambas proposiciones toman el mismo valor de verdad y es falsa en caso contrario. Se lee p si y solo si q.

| **p** | $\Leftrightarrow$ | **q** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | F |

*<u>Ejercicio 2</u>*

*Escribe los siguientes enunciados usando proposiciones y conectivos lógicos.*

*a)4+3 =7 ó 15 – 8 =7*
*b) 1/3 es un número entero y 3 es natural.*
*c)6+8 =23 entonces $(2)^0 = 1$*
*d)El mes de julio tiene 31 días si y solo si agosto tiene 30 días.*
*e) Está seco o está mojado.*

*<u>Ejercicio 3</u>*

*Encuentra el valor de verdad para las siguientes proposiciones compuestas:*

*a) 2 es un natural y 2/5 es un entero.*

b) *Si 0,4 es un numero racional entonces -0,45 es un número real..*
c) *Un paralelogramo es un cuadrilátero si y solo si un triángulo es un polígono.*

*Ejercicio 4*
*Siendo p una proposición verdadera, q falsa y r verdadera, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:*

a) $-[(p \vee -r)] \wedge (q \Rightarrow -p)$
b) $(p \vee -r) \wedge (q \vee -p)$
c) $(r \Rightarrow -q) \vee (p \Leftrightarrow -r)$

*Ejercicio 5*
*Construya tablas de verdad para las siguientes proposiciones compuestas, e indique si es una tautología, contradicción o contingencia:*

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-p \vee q)$
b) $(p \vee r) \Leftrightarrow [(-p \vee q) \Rightarrow -r]$
c)- $[(-p \vee q) \wedge (-q \vee p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
e) $(-p \Rightarrow -q) \Leftrightarrow [(q \vee r) \wedge p)]$
f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

Ejercicio 6
Complete la siguiente tabla para que resulte verdadera cada expresión pedida.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(-p \wedge q) \wedge -r$ es V | p es ........ | q es ….. | r es ....... |
| $p \Rightarrow p \wedge r$ es F | p es ............ | r es ......... | $-(q \vee p)$ es ….. |
| $p \Rightarrow [(-r \veebar q) \vee q]$ es F | p es ........... | q es ........... | $-q \Rightarrow -r$ es......... |
| $[(p \wedge -r) \Rightarrow p] \Rightarrow (p \vee q)$ es F | q es ………… | $-p \veebar -q$……… | $p \Leftrightarrow q$ es………. |

Se obtiene una TAUTOLOGIA, cuando todos los valores de verdad obtenidos son verdaderos. Cuando todos los valores de verdad obtenidos son falsos, se llama CONTRADICCIÓN, y cuando en la tabla se obtienen valores verdaderos o falsos se denomina CONTINGENCIA.

**Propiedades:**

- La implicación simple es equivalente a la disyunción del antecedente negado del consecuente, es decir:

$$\mathbf{(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-p \vee q)}$$

- La doble implicación de dos proposiciones p, q, es equivalente a la conjunción de dos implicaciones simples en las cuales se intercambian el antecedente y el consecuente respectivamente:

$$\mathbf{(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]}$$

*Ejercicio 7*
*Construye las tablas de verdad para demostrar que las propiedades anteriores son tautologías.*

- **Leyes y principios lógicos**

**Involución**:lanegación de una proposición negada es equivalente a la proposición.

$$-(-p) \Leftrightarrow p$$

**Idempotencia**: la conjunción, o la disyunción, de una proposición consigo misma es equivalente a dicha proposición.

$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$
$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

**Conmutativa**: si se cambia el orden de las proposiciones en conjunción, o en disyunción se obtiene una proposición equivalente.

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$
$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

**Identidad**: la disyunción de una proposición y una falsedad es equivalente a dicha proposición. La conjunción de una proposición y una verdad es equivalente a dicha proposición.

$$(p \vee F) \Leftrightarrow p$$
$$(p \vee V) \Leftrightarrow V$$
$$(p \wedge F) \Leftrightarrow F$$
$$(p \wedge V) \Leftrightarrow p$$

**Asociativa**: cualesquiera sean las proposiciones p, q, r, se verifican las siguientes equivalencias:

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

**Complemento**: la disyunción de una proposición y su negación es una verdad absoluta. La conjunción de una proposición y su negación es una falsedad absoluta.

$$(p \vee -p) \Leftrightarrow V$$
$$(p \wedge -p) \Leftrightarrow F$$

**Distributiva:** cualesquiera sean las proposiciones p, q, r, se verifican las siguientes equivalencias:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

**Leyes de De Morgan**: la negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las dos proposiciones negadas.

$$-(p \vee q) \Leftrightarrow (-p \wedge -q)$$

La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de ambas proposiciones negadas.

$$-(p \wedge q) \Leftrightarrow (-p \vee -q)$$

**Ley de consistencia o absorción**:

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$
$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

*<u>Ejercicio 8</u>*
*Aplica sucesivamente las leyes lógicas para simplificar las siguientes proposiciones lógicas:*

a) $(p \vee q) \wedge -q$
b) $-(p \wedge q) \vee p$
c) $(q \Rightarrow p) \vee q$
d) $–(p \vee -q) \wedge -p$

*e)* $(p \Rightarrow q) \wedge [q \wedge (r \vee -q)]$

*f)* $(q \Rightarrow p) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge -p)]$

- **Esquemas proposicionales**

Hay expresiones como: $x+1 = 7$, $x \geq 2$, $x^3 = 2x^2$, que contienen variables y cuyo valor lógico dependerá del valor atribuido a esas variables. En los ejemplos citados: $x+1 = 7$ es verdadera si x es igual a 6, y falsa en cualquier otro caso; lo mismo ocurre para $x \geq 2$, que será verdadera para un conjunto de valores y falsa para otro. A estas expresiones que contienen variables se las llama funciones proposicionales o esquemas proposicionales. Los esquemas proposicionales no son proposiciones ya que su valor lógico (V ó F), depende del valor dado a las variables.
Hay dos maneras de transformar esquemas proposicionales en proposiciones:

- atribuir valor a las variables
- utilizar cuantificadores

El **cuantificador universal**, usado para transformar esquemas proposicionales en proposiciones, se indica con el símbolo $\forall$ que se lee: "para todo".

Ejemplo:
$(\forall x)$ $(x \in IR)$:$(x + 1 = 7)$ , que es una proposición falsa.
$(\forall x)$ $(x \in IR)$:$(x^2 > 0)$, que es una proposición verdadera.

El **cuantificador existencial** se indica con el símbolo $\exists$ y se lee: "existe".

Ejemplo:
$(\exists x)$ $(x \in IR)$: $(x+1 = 7)$, que es una proposición verdadera.
$(\exists x)$ $(x \in IR)$: $(x^2 + 1 \leq 0)$, que es una proposición falsa.

*<u>Ejercicio 9</u>*
*Transforme las siguientes oraciones en proposiciones verdaderas utilizando cuantificadores.*

*a)* $x - 3 = 5$
*b)* $2x - 3 \leq 12$
*c)* $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

**Negación de esquemas proposicionales**
Negar un esquema proposicional equivale a negar el cuantificador y la función proposicional respectiva. Negar un cuantificador universal equivale a obtener un cuantificador existencial y viceversa.

*<u>Ejercicio 10</u>*
*Niegue las siguientes proposiciones cuantificadas:*
*a)* $(\exists x)\ (x \in IR):(x-4 \leq 3)$
*b)* $(\forall x)\ (x \in IR):(x-4)(x+4)=x^2-16$
*c)* $(\exists x)\ (x \in IR):(3x+5 > 8+x)$
*d)* $(\forall x)\ (x \in IR):(x-3)^2=x^2-9$

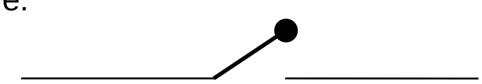
## <u>Circuitos Lógicos</u>

Otro modelo muy importante del Algebra de Boole lo constituyen los circuitos lógicos, sus conexiones y propiedades.

- **Circuitos**

Consideremos un circuito eléctrico con un interruptor que puede estar cerrado o abierto, es decir si está cerrado pasa la corriente y si está abierto no hay paso de corriente. Lo representaremos como sigue:


interruptor cerrado


interruptor abierto

Si el interruptor está cerrado, hay paso de corriente, lo asociaremos con “1”. En cambio, en el caso del interruptor abierto en el cual no hay pasaje de corriente, lo asociaremos con “0”.

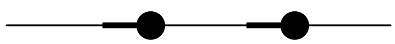
A cada circuito lo designaremos con las letras A, B, C,…,P, Q, R,.. Si consideramos el circuito A y su complemento A’, las posibilidades de circulación de corriente se muestran en la siguiente tabla:

| **A** | **A’** |
|---|---|

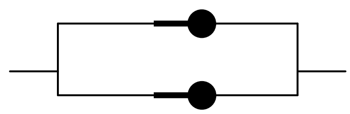
| | |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

- **Conexiones**

La conexión entre circuitos puede realizarse de dos formas diferentes: conexión en serie y conexión en paralelo. La conexión en serie utiliza el símbolo ● y la conexión en paralelo utiliza el símbolo +.



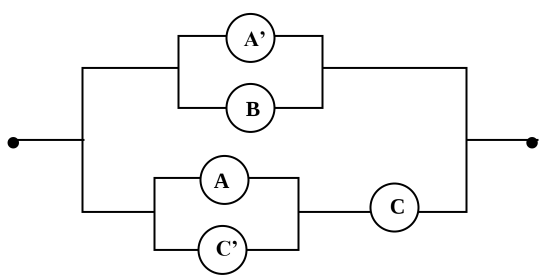
Circuitos conectados en serie
A ● B



Circuitos conectados en paralelo
A+B

Para que circule corriente en un circuito conectado en serie, en ambos interruptores debe circular la corriente, es decir, ambos interruptores deben estar cerrados. En cambio, en un circuito conectado en paralelo, bastara con que uno de los dos interruptores este cerrado para que haya pasaje de corriente.

*<u>Ejercicio 11</u>*
*Escriba la fórmula de Boole que corresponde al circuito lógico dado:*




*<u>Ejercicio 11</u>*
*Dibuje la red del circuito lógico correspondiente a la expresión simbólica dada: [(A + B) ● C]  + (A’ + B’) .*

**Conexión en serie**
Dados dos circuitos A y B cualesquiera, la conexión en serie, anotada A ● B se corresponde con la siguiente tabla:

| A | ● | B |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

**Conexión en paralelo**
Dadas dos circuitos A y B cualesquiera, la conexión en paralelo, anotada A + B se corresponde con la siguiente tabla:

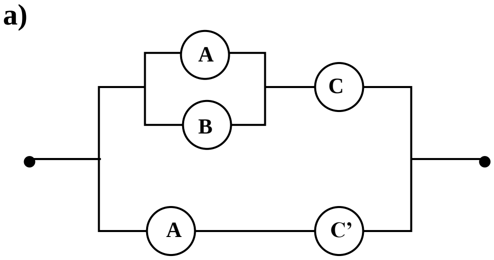
| **A** | + | **B** |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

*<u>Ejercicio 12</u>*
*Dibuje un circuito lógico que responda a cada una de las fórmulas dadas y construya las tablas respectivas:*

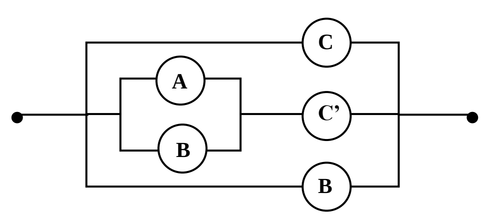
*a) (A+B) ● (A●C)*
*b) A● (A'+B) ●C*
*c) (A●B●C) + (A● B' ●C') + (A'●B●C)*

*<u>Ejercicio 13</u>*
*Determine en qué posiciones de las llaves circula corriente entre los terminales de los circuitos lógicos representados a continuación:*

**a)**




**b)**




- **Propiedades**

**Involución**: el complemento del complemento de un circuito es equivalente al circuito dado.

$$(A')' = A$$

**Idempotencia**

Cualquiera sea el circuito A, se cumple que:

$$(A + A) = A$$
$$(A \bullet A) = A$$

**Conmutativa**

Cualesquiera sean los circuitos A y B se verifica:

$$(A + B) = (B + A)$$
$$(A \bullet B) = (B \bullet A)$$

**Identidad**

Cualquiera sea el circuito A, se cumple que:

$$(A + 0) = A \qquad (A \bullet 0) = 0$$
$$(A + 1) = 1 \qquad (A \bullet 1) = A$$

**Asociativa**

Cualesquiera sean los circuitos A, B y C se verifica:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$$

**Complemento**

Cualquiera sea el circuito A, se cumple que:

$$(A + A') = 1$$
$$(A \bullet A') = 0$$

**Distributiva**

Cualesquiera sean los circuitos A, B y C se verifica:

$$A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$$
$$A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$$

**Leyes de De Morgan**

Cualesquiera sean los circuitos A y B se verifica:

$$(A + B)' = (A' \bullet B')$$

$$(A \bullet B)' = (A' + B')$$

*Ejercicio 14*

*Aplicando las propiedades anteriores, simplifica los siguientes circuitos lógicos:*

a) $A'\bullet(B+A)'$
b) $(A+B')\bullet(A+B)$
c) $(A\bullet B')'+B$
d) $(A'\bullet B)+(A+B)'$
e) $(A'\bullet B'\bullet D')+(A'\bullet B\bullet D')+(A'\bullet B\bullet D)+(A\bullet B\bullet D)$

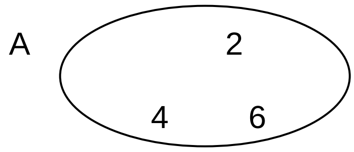
---

## Lenguaje conjuntista

Dentro del estudio del Algebra de Boole, otro modelo que se considera es el de los conjuntos y la posibilidad de formar otros nuevos.

- **Conjuntos**

Concebimos a un conjunto como una colección de objetos. Por ejemplo, el conjunto denominado A, dado por su diagrama de Venn, cuyos elementos son los números 2, 4, y 6.




La relación que vincula a un elemento con un conjunto es la pertenencia, decimos que el elemento 2 pertenece al conjunto A y lo anotamos:

$$2 \in A$$

En cambio, el elemento 7 no pertenece al conjunto, se anota:

$$7 \notin A$$

A los conjuntos también se los puede representar o definir: **por extensión,** cuando denominamos a cada uno de los objetos que lo constituyen (el orden no interesa), ó **por comprensión,** en donde se establece una propiedad característica de los elementos del conjunto.

Ejemplo:
$A = \{x: x \in IN, -2 \leq x < 4\}$ esta definido por comprensión,
$A = \{0,1, 2,3\}$ está definido por extensión.

*<u>Ejercicio 15</u>*
*Escribe por extensión los siguientes conjuntos:*
*a)* $A = \{x: x \in IN, 4 \leq x < 7\}$
*b)* $B = \{x: x \in Z, x - 11 = -9\}$
*c)* $C = \{x: x \in IR, x^2 - 25 = 0\}$

Se denomina cardinal de un conjunto al número o cantidad de elementos que pertenecen a dicho conjunto. Por ejemplo, si A = {a, b, c d, e}, el cardinal de A es 5, se anota: $|A| = 5$
Si un conjunto tiene cardinal igual a uno, se llama conjunto unitario o singulete.

*Ejercicio 16*
*Sea el conjunto H = {x: x$\in$IN, 2 $\leq$ x $\leq$ 50, x es múltiplo de 5 pero no es múltiplo de 2}. Determina el número de elementos del conjunto H, es decir el cardinal de H.*

- **Conjuntos iguales**

Dos conjuntos A y B son iguales cuando todo elemento de A pertenece a B y recíprocamente, todo elemento de B pertenece a A.

$$\mathbf{A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$$

- **Conjunto vacío**

El conjunto vacío es aquel que carece de elementos y se simboliza { } o así $\varnothing$**.**

- **Inclusión**

Un conjunto A esta incluido en B, cuando todos los elementos de A pertenecen a B.

$$\mathbf{A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)}$$

Se dice que:

A esta incluido en B
A es parte de B
A es subconjunto de B

Propiedades de la inclusión:
Siendo A, B y C conjuntos cualesquiera, valen las siguientes propiedades:

$\varnothing \subset \mathbf{A}$
$\mathbf{A \subset A}$
$\mathbf{(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)}$
$\mathbf{(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)}$

*Ejercicio 17*
*Siendo A= {m, p, o, t}, se puede afirmar que:*

*a) {m, o} $\subset$A* *b) p $\subset$A* *c) {m}$\not\subset$A* *d) {e,m} $\subset$A*

- **Partes de un conjunto**

Dado un conjunto A, se llama conjunto partes de A y se anota $\mathcal{P}$(A), al conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{X : X \subset A}\}$$

Ejemplo:
Si A ={a} entonces $\mathcal{P}$(A) = {{a}, {}},
Para B = {1, 2, 3} , es $\mathcal{P}$(B) = {{1}, {2},{3}, {1,2},{1,3}},{3,2}},{1,2,3},{}}

Si A es un conjunto finito de n elementos entonces $\mathcal{P}$(A) tiene $2^n$ elementos.

*Ejercicio 18*

*Determina si el número de elementos del conjunto $\mathcal{P}$(A) es menor, mayor o igual al de $\mathcal{P}$(B), siendo A={a, b, c} y B={x: x∈Z, x +10 = 18}.*

*Ejercicio 19*

*Si A = {1, 3, 5, 7} y B= {2, 4, 6} coloca V ó F según corresponda:*

*a) {1,3} ∈ $\mathcal{P}$(A)   b) $\mathcal{P}$(A) = {{1}, {3}}   c) $\mathcal{P}$(B) tiene 8 elementos*

*d) $\mathcal{P}$(A) = $\mathcal{P}$(B)*

- **Conjunto unión**

Dados dos conjuntos A y B, se llama conjunto unión al conjunto que tiene por elementos a los elementos que pertenecen a A *o* a B.

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

*Ejercicio 20*

*Siendo G = {1, 2, 3, 4} y H = {2, 3, 4, 5}, encuentra el conjunto G∪H por extensión y por diagrama de Euler-Venn.*

- **Conjunto intersección**

Dados dos conjuntos A y B, se llama conjunto intersección al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

Dos conjuntos se dicen **disjuntos** cuando su intersección es igual al conjunto vacío.

*Ejercicio 21*

*Sean los conjuntos* $A = \{x : x \in Z; |x| < 2\}$ *y* $B = \{x : x \in Z; -2 \le x \le 3\}$, *determina por comprensión los conjuntos:*

*a)* $A \cap B$   *b)* $A \cup B$

Siendo A, B y C conjuntos cualesquiera, se cumplen las siguientes propiedades relativas a la unión e intersección:

$\mathbf{A \cup ( A \cap B ) = A}$
$\mathbf{A \cap ( A \cup B ) = A}$

<u>Ejercicio 22</u>
*A y B son conjuntos cualesquiera. Existen elementos de A que pertenecen al conjunto B, entonces la proposición verdadera es:*

a) $A \cup B = B \cup A$
b) *B es un subconjunto de A*
c) *A y B son conjuntos disjuntos*
d) $A \cap B = \{\}$

<u>Ejercicio 23</u>
*Se sabe que* $A \cup B \cup C = \{x: x \in IN,\ 1 \leq x \leq 10\}$, $A \cap B = \{2,3,8\}$, $A \cap C = \{2,7\}$, $B \cap C = \{2,5,6\}$ *y que* $A \cup B = \{x: x \in IN,\ 1 \leq x \leq 8\}$. *Determina el cardinal del conjunto C.*

<u>Ejercicio 24</u>
*Siendo* $A = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, *se puede afirmar que:*

a) $\{1\} \notin A$ b) $\{1\} \subset A$ c) $(\{2\} \cap \{1\}) \not\subset A$ d) $(\{1\} \cap \{2\}) \subset A$

<u>Ejercicio 25</u>
*Siendo* $E = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b\}$ *y* $B = \{c, d, e\}$, *determina el valor de verdad para las proposiciones compuestas:*

a) $[(\{a, b\} \subset E) \Rightarrow (B \subset \{\})] \vee (d \subset B)$
b) $((A \cup B) \cap E = E) \Leftrightarrow (A \cap B \neq \{\})$
c) $( E = (\{a, b, c\} \cup A)) \wedge ( (B \cap E) \neq \{\}) \Rightarrow ( A = (\{ a, b, c, d\} \cap E))$

- **Conjunto diferencia**

Se llama conjunto diferencia de A y B, al conjunto anotado A - B cuyos elementos pertenecen a A y no a B.

$$\mathbf{A - B = \{x :\ x \in A \wedge x \notin B \}}$$

Propiedades:
$\mathbf{(A - B) \cap B = \{ \}}$
$\mathbf{A - A = \{ \}}$
$\mathbf{A - \{ \} = A}$

*<u>Ejercicio 26</u>*
*Considera los conjuntos* $A = \{x: x \in IR,\ x^2 - 16 = 0\}$ *y*
$B = \{x: x \in Z,\ -4 \leq x < 5\}$*, determina por extensión los conjuntos: A-B y B-A.*

*<u>Ejercicio 27</u>*
*Sean los conjunto* $A = \{x: x \in IN$*, x es múltiplo de 6 y menor que 18}* *y*
$B = \{x: x \in IN$*, x es divisor de 6}. Determina por extensión:*

*a)* $A \cap B$
*b)* $A - (A \cup B)$
*c)* $A - (B \cap A)$
*d)* $(B - A) \cup A$

- **Conjunto complemento**

Sea E un conjunto al cual denominaremos universal o referencial, se tienen todos los subconjuntos o partes de E que anotaremos como A, B, C,..,{ }. Dados los conjuntos A y el referencial E, se llama complemento del conjunto A, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a E y que no pertenecen a A.

$$\mathbf{A' = C_E\, A = E - A = \{x:\ x \in E \wedge x \notin A\}}$$

*<u>Ejercicio 28</u>*
*Siendo* $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ *y* $B = \{c, d, e, f, g\}$*, determina por extensión:*
*a)* $E-A$
*b)* $(B' \cup A)$
*c)* $(A \cap B)'$
*d)* $A' \cap (B' \cap A)$

- **Propiedades**

**Involución**: el complemento del complemento de un conjunto es igual al conjunto dado.

$$(A')' = A$$

**Idempotencia**

Cualquiera sea el conjunto A, se cumple que:

$$(A \cup A) = A$$
$$(A \cap A) = A$$

**Conmutativa**
Cualesquiera sean los conjuntos A y B se verifica:

$$(A \cup B) = (B \cup A)$$
$$(A \cap B) = (B \cap A)$$

**Identidad**

Cualquiera sea el conjunto A y el referencial E, se cumple que:

$$(A \cup \varnothing) = A \qquad (A \cap \varnothing) = \varnothing$$
$$(A \cup E) = E \qquad (A \cap E) = A$$

**Asociativa**

Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C se verifica:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

**Complemento**

Cualquiera sea el conjunto A y el referencial E, se cumple que:

$$(A \cup A') = E$$
$$(A \cap A') = \varnothing$$

**Distributiva**

Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C se verifica:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**Leyes de De Morgan**

Cualesquiera sean los conjuntos A y B se verifica:

$$(A \cup B)' = (A' \cap B')$$

$$(A \cap B)' = (A' \cup B')$$

*Ejercicio 29*

*Aplica las leyes del lenguaje de conjuntos para simplificar:*

a) $B \cup (B' \cap A)$

b) $B \cap (B' \cup A)$

*c)* $(A \cap B') \cup (A \cap B)$

*d)* $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B')$

## Parte B: Relaciones y funciones

- **Par ordenado**

Un símbolo como (a,b) denota un par ordenado donde a es la primer componente y b la segunda componente.
Dos pares ordenados (a,b) y (c,d) se dicen iguales si y solo si las primeras componentes de cada par son iguales y las segundas componentes de cada par también son iguales:

$$\mathbf{(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)}$$

- **Conjunto producto cartesiano**

Siendo A y B conjuntos cualesquiera, llamamos conjunto producto cartesiano de A por B al conjunto anotado AXB, cuyos elementos son pares ordenados (x, y) , donde el primer elemento pertenece a A y el segundo pertenece a B.

$$\mathbf{AXB = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}}$$

Ejemplo
A = {1,2,3} y B = {4,5}
AXB ={(1, 4) ,(1, 5) ,(2, 4) ,(2, 5) ,(3, 4) ,(3, 5)}

Propiedades

- **Si A ≠ B entonces AXB ≠ BXA**
**- Si A y B son conjuntos finitos con m y n elementos respectivamente, entonces AXB es un conjunto finito de m.n elementos.**
**AX{ }= { }**
**{ }XA ={ }**
**{ }X{ }={ }**

*<u>Ejercicio 30</u>*
*Marca la respuesta correcta:*

- *Si* $A = \{x: x \in Z, x^2 + 4 = 0\}$ *y* $B = \{x: x \in IR, 2(x-3) = 2\}$ *entonces:*

*a)* $(4, -4) \in AXB$ *b)* $(-4, 3) \in AXB$ *c)* $AXB \neq \{\}$ *d)* $AXB = \{\}$

- *Si* $AXB = \{(b,2), (b,3),(b,4)\}$ *, es falso que:*

*a)* $(b, 2) \in AXB$ *b)* $\{(b, 2)\} \in AXB$ *c)* $(b, 3) \in AXB$ *d)* $\varnothing \subset AXB$

- *Si A = {x: x $\in$IN, $x^2$ -25 = 0} y B = {x: x$\in$Z, -3$\leq$ x <3} entonces:*

*a) AXB tiene 12 elementos b) AXB = { } c) AXB= BXA d) AXB tiene 6 elementos*

- *Si AXB = {(a,2), (a,3),(a,4), (a,5), (a,6)} , entonces:*

*a) A= {a} y B={2,3,4,5,6} b) B= {a} y A={2,3,4,5,6} c) A=$\emptyset$ y B=$\emptyset$ d) A=B*

- *Si A = {x: x$\in$Z, $x^2$ + 16 = 0} y B = {x: x$\in$IN, -2$\leq$x$\leq$5 } entonces:*

*a) AXB = { } b) AXB tiene 5 elementos c) AXB≠ AXA d) AXB tiene 10 elementos*

- **Relaciones**

Se llama relación n-aria entre los conjuntos $A_1$, $A_2$, $A_3$,…., $A_n$ dados en ese orden, a todo subconjunto del producto cartesiano generalizado $A_1$ x $A_2$ x $A_3$ x…x $A_n$ ; a cada elemento de este producto cartesiano se lo denomina n-upla ordenada. Si n es 2, los elementos del producto cartesiano son pares ordenados, si n es 3 se denominan ternas ordenadas, si es 4, cuaternas ordenadas.

- **Relaciones binarias**

Dado el producto cartesiano A x B, cualquier subconjunto R de A x B es una relación de A en B. Es decir, una relación R de A en B es una parte de A x B.

$$\mathbf{R \subset A \times B}$$

**R = { (x, y) / ( x ∈ A ∧ y ∈ B ) ∧ x R y}** o bien
**R = { (x, y) / x ∈ A ∧ y ∈ B ∧ ( x, y) ∈ R}**

La expresión **x** R **y** se lee **x** tiene la relación R con **y**, equivale a la expresión (x, y) $\in$ R luego:

$$\mathbf{x\ R\ y \Leftrightarrow (x, y) \in R}$$

El conjunto **A** se lo denomina conjunto de partida y el conjunto **B** conjunto de llegada.

Sea R una relación de A en B, se llama *conjunto dominio* al conjunto de los elementos de A que están relacionados por R con algún elemento de B:

$$\mathbf{D(R) = \{ x : x \in A \wedge (x, y) \in R\} \qquad D(R) \subset A}$$

Sea R una relación de A en B, se llama *conjunto imagen* de R al conjunto de los elementos de B tales que algún elemento de A está relacionado por R con él:

$$\mathbf{Im\ (R) = \{ y : y \in B \wedge (x, y) \in R\}} \qquad \mathbf{Im\ (R) \subset B}$$

<u>*Ejercicio 31*</u>
*Mediante gráficas cartesianas represente las siguientes relaciones definidas en IR x IR.*

a) $R_1 = \{(x,y): (x,y) \in IR \times IR \wedge x \geq y \}$

b) $R_2 = \{(x,y): (x,y) \in IR \times IR \wedge x < y \wedge y < 2 \}$

c) $R_3 = \{(x,y): (x,y) \in IR \times IR \wedge 0 \leq x \wedge y \leq 3 \}$

<u>*Ejercicio 32*</u>
*Sean los conjuntos A = {2, 3, 4} y B = {2, 4, 6, 8}, mediante un diagrama de flechas represente la relación R definida de A en B tal que (x R y $\Leftrightarrow$ y = 2x). Determina su conjunto imagen.*

**Relación inversa**
Si R es una relación de A en B, $R^{-1}$ denota la relación inversa de R y se define:

$$\mathbf{R^{-1} = \{ ( y, x): (x ,y) \in R\}}$$

Para $R^{-1}$ el conjunto de partida es B y el de llegada es A

$$\mathbf{(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x ,y) \in R}$$

<u>*Ejercicio 33*</u>
*Define por extensión, la relación inversa de R definida de A= {0, 1, 2, 3, 4} en B= {0, 1, 2, 3}, donde: (a, b) $\in$ R $\Leftrightarrow$ a+b < 4.*

**Relación binaria e interna**
Sea el conjunto A distinto del vacío, toda relación R incluida en AXA se denomina relación binaria interna.

<u>*Ejercicio 34*</u>
*Sea el conjunto A = {1, 2, 6, 4}:*

*a) Mediante un diagrama de flechas represente la relación R definida en AXA tal que (x R y $\Leftrightarrow$ $x \leq y$).*

*b) Defina por extensión la relación R definida en AxA dada por: x R y $\Leftrightarrow$ y = x – 5.*

*c) Mediante un diagrama cartesiano defina la relación R definida en AXA dada por: (a, b) $\in R \Leftrightarrow a+b < 4$.*

- **Propiedades de las relaciones binarias internas**

Sea el conjunto A distinto del vacío y una relación binaria interna definida en A, se pueden considerar las siguientes propiedades:

**Propiedad reflexiva**

$(\forall x)\ (x \in A) \Rightarrow (x, x) \in R$
$(\forall x)\ (x \in A) \Rightarrow\ x\, R\, x$

**Propiedad simétrica**

$(\forall (x, y))\ ((x, y) \in A^2): (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
$(\forall (x, y))\ ((x, y) \in A^2):\ x\, R\, y \Rightarrow y\, R\, x$

**Propiedad transitiva**

$(\forall (x, y, z))\ ((x, y, z) \in A^3): ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$
$(\forall (x, y, z))\ ((x, y, z) \in A^3):\ (x\, R\, y \wedge y\, R\, z) \Rightarrow x\, R\, z$

**Propiedad antisimétrica**

$(\forall (x, y))\ ((x, y) \in A^2): ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y$
$(\forall (x, y))\ ((x, y) \in A^2):\ (x\, R\, y \wedge y\, R\, x) \Rightarrow x = y$

- **Relación de equivalencia**

Una relación R binaria e interna en A, con $A \neq \varnothing$, se llama relación de equivalencia si verifica las propiedades **reflexiva, simétrica y transitiva**.

*<u>Ejercicio 35</u>*
*Sea el conjunto A= {2, 3, 5} y la relación R= {(x, y)/ (x,y) $\in$ AxA $\wedge$ 2 | (x+y)}. Analiza si dicha relación es de equivalencia.*

*<u>Ejercicio 36</u>*
*Sea A = {a, b, c, d}, y* $R = \{(a,a);(b,b);(a,b);(c,d);(b,c)\}$, *agregue los pares necesarios para que la relación sea reflexiva y simétrica.*

- **Relación de orden**

Diremos que una relación R binaria e interna en A, con A ≠ ∅, es una relación de orden si verifica las **propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.**

Si en una relación de orden R definida en A, todos los elementos de A son comparables por la relación R se dice que es un **orden total** de lo contrario, si no todos los elementos de A son comparables por la relación R se dice que es un **orden parcial**.

*<u>Ejercicio 37</u>*

*Dado el conjunto E = {a, b}*

*a) Determine P( E ) por extensión.*

*b) Dada la relación $R_{\subset}$ = {(X, Y): (X, Y) ∈ P ( E ) x P ( E ) ∧ X⊂Y}, construya el diagrama cartesiano.*

*c) Justifique por qué la relación inclusión dada en P( E ) es una relación de orden.*

*<u>Ejercicio 38</u>*

*Analice si las siguientes relaciones son de orden:*

**a)** *R= {(x,y): (x,y)∈IN , el máximo común divisor entre x e y es 1}*

**a)** *En A = {1, 2, 3, 4 } y* $R = \{(1,1);(2,1);(3,1);(4,1)\}$

- ***Funciones***

Una función de A en B es una relación que cumple con las condiciones de *existencia y unicidad*, las que pueden sintetizarse diciendo que *para todo elemento de A existe un único elemento de B con el cual se relaciona.* En consecuencia, el dominio de una función coincide con el conjunto A. Recuerde que eventualmente puede ser A = B

En general el esquema funcional que se suele utilizar para representar las funciones es el siguiente:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

*<u>Ejercicio 39</u>*

*Verifique si las siguientes relaciones definidas de A= {a, b, c} en B = {1, 2, 3}, son funciones. Justifique sus respuestas.*

**a)** $\mathrm{R}_1 = \{(\mathrm{a},1);(\mathrm{b},1);(\mathrm{c},1)\}$

**b)** $R_2 = \{(a,1);(b,2)\}$

**c)** $R_3 = \{(a,1);(b,1);(a,2);(b,3)\}$

**Clasificación de funciones**

Sea una función f de A en B se puede clasificar analizaremos en inyectiva, suryectiva o biyectiva.

El conjunto *dominio* de una función: Dom (f), es el conjunto que contiene a las primeras componentes de los pares ordenados de la relación, y que coincide en una función con A. El conjunto *imagen*: Im (f), es el que contiene a las segundas componentes de los pares ordenados en cuestión, y está incluido en B.

Una función es *inyectiva* si a elementos distintos en el dominio corresponden elementos distintos en la imagen, en símbolos: $( x \neq x' ) \Rightarrow ( y \neq y' )$

Una función es *suryectiva* si el conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada, es decir: Im (f) = B

Una función es *biyectiva* si es inyectiva y suryectiva a la vez.

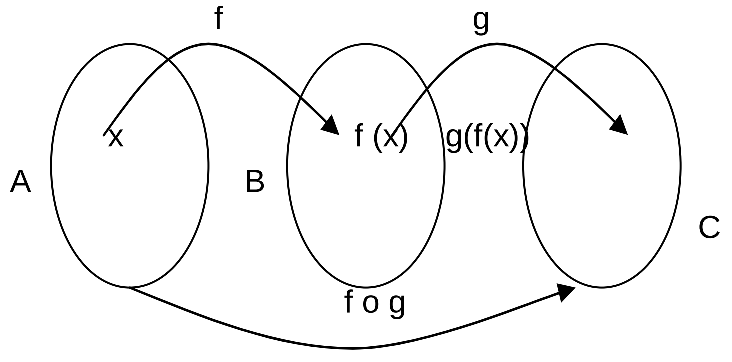
*Ejercicio 40*

*Analiza si cada una de las siguientes funciones son biyectivas sobre IR.*

*a) f: IR→IR, dada por* $f(x) = 2x-3$
*b) g: IR→IR, dada por* $g(x) = 3x^2 - 4$
*c) h: IR→IR, dada por* $h(x) = x^3+1$
*d) i: IR→IR, dada por* $i(x) = 7$

**Función compuesta**

Considere dos funciones: f de A en B tal que $x \to f(x)$ y g de B en C tal que $x \to g(x)$, la función compuesta (f o g) de A en C es aquella que asigna a x el elemento (fog) (x) tal que: (f og) (x) = g(f(x)). El siguiente diagrama representa la situación:



Si se dispone de funciones tales que f está definida de A en B y g de B en C, se puede hallar la función compuesta (f o g) (f seguida de g) que estará definida de A en C. Además, si se dispone de funciones tales que f está definida de A en B y g de C en D, para poder determinar la función compuesta (f o g) (f seguida de g) es imprescindible que el conjunto Im (f) esté incluido en el Dom(g):

$$\text{Im}(f) \subset \text{Dom}(g)$$

Por lo tanto para determinar la función compuesta (g o f) ( g seguida de f) en el primer caso presentado resulta que g está dada de B en C y f de A en B, para poder definir la función compuesta g o f de B en B se tendría que verificar que Im (g) $\subset$ A .Obsérvese que la notación usada en este caso f o g es convencional y puede ser que algunos autores la utilicen diferente.

**Función inversa**

Considere la función f definida de A en B, siempre existe para f la relación inversa, que contiene a los pares opuestos, definida de B en A, en símbolos:

$$R^{-1} = \{ (y, x) / ( x \in A \ \wedge \ y \in B ) \wedge ( x, y) \in R \}$$

En algunos casos esa relación inversa es también una función y se anota $f^{-1}$

**Se puede demostrar que solamente si la función f de A en B es biyectiva, la relación inversa es una función.**

<u>*Ejercicio 41*</u>

*Se consideran las funciones f: $IR \rightarrow IR$, dada por $f(x) = 7x^3 - 1$, g: $IR \rightarrow IR$, dada por $g(x) = x+5$ y h: $IR \rightarrow IR$, dada por $h(x) = 3x$. Expresa mediante los esquemas funcionales correspondientes las siguientes funciones compuestas:*

*a) fog   b) gof   c) hof   d) fof   e) $hog^{-1}$   f) $(gog)^{-1}$*