CAPÍTULO II:

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO – CONTINUIDAD

- **Introducción al concepto de límite**
- **Definición de límite en un punto**
- **Cálculo de límite**
- **Continuidad**

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

GRÁFICAS DE FUNCIONES REALES

Graficar funciones no siempre es fácil. Con tomar una tabla de valores, a veces no es suficiente, porque hay que tener cuidado al unir los puntos. Por esta razón a veces es necesario estudiar cómo se comporta la función alrededor de un punto determinado.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Dada la siguiente función $\mathbf{f(x)} = \frac{x^2-x}{x^2-1}$

a) Encuentre el dominio de la función

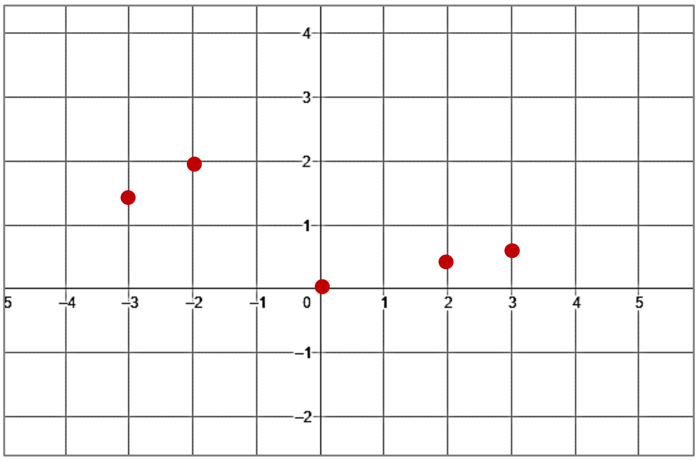
Para encontrar el dominio, se deben excluir los valores de x que anulen el denominador

$\mathbf{x^2 - 1 = 0}$ **tenemos una diferencia de cuadrados, en forma factorizada**

$\mathbf{x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0}$ **los valores de** $\mathbf{x = -1}$ **y** $\mathbf{x = 1}$ **anulan el denominador**

Df = |R – { -1; 1}

b) Graficar tomando una tabla de valores



x	y
3	3/4
2	2/3
1	----
0	0
-1	----
-2	2
-3	3/2

marcamos en forma aproximada estos puntos en el gráfico

Pero al unir los puntos, hay que tener en cuenta que ni el 1, ni el -1, pertenecen al dominio, por lo tanto, algo pasa en esos valores con la gráfica.

Para ello tomamos otras dos tablas de valores, con valores cada vez más cercanos al 1 y al -1

Los valores de x se acercan a 1 por izquierda → ← **Los valores de x se acercan al 1 por derecha**

x	0,5	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,2	1,5
y	0,3333	0,4975	0,4997	0,5000		0,5000	0,5002	0,5025	0,5455	0,6000

→ **0,5** ←

Los valores de y. se acercan a 0.5 **Los valores de y. se acercan a 0.5**

Vemos que cuando **x se acerca al 1 por la derecha y por la izquierda, sus imágenes se acercan cada vez más a 0.5**.

Esto se expresa diciendo que cuando x tiende a 1, la función tiende a 0.5.

O bien que 0.5 es el límite de la función cuando x tiende a 1.

En símbolos: $\lim_{x \to 1} f(x) = 0.5$

Importante: **Aunque la función no está definida en x=1, sí tiene límite en x =1, esto produce una laguna en el punto (1; 0.5).**

Tomamos ahora valores de x cada vez más cercanos del número -1

Los valores de x se acercan a -1 por izquierda **Los valores de x se acercan a -1 por la derecha**

x	-1,1	-1,01	-1,001	-1,0001	-1	-0,9999	-0,999	-0,99	-0,9	-0,8
y	11,00	101,00	1001,00	10001,00		-9999,00	-999,00	-99,00	-9,00	-4,00

Los valores de y crecen infinitamente ∞ **Los valores de y toman valores negativos cada vez más chicos**

Decimos entonces que, cuando los valores de x se acercan cada vez más al número **-1**, las imágenes crecen infinitamente (en valor absoluto)

Observamos que cuando x tiende al -1, tanto por derecha como por izquierda, la función toma valores cada vez más grandes (en valor absoluto), por lo tanto, en este caso la función no tiende a un número, sino que aumenta infinitamente.

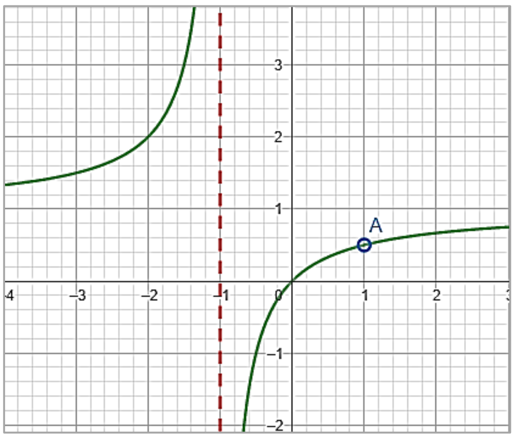
En este caso decimos que **no existe límite finito en x = -1**, porque la función tiende a infinito cuando x tiende a -1

En símbolos $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$

Cuando el límite en un punto **x** = **a, no existe porque da infinito**, la gráfica tiene una **asíntota vertical, cuya ecuación es** $\boxed{x = a}$

En este ejemplo la gráfica de la función tiene una **asíntota vertical** cuya ecuación es $\boxed{x = -1}$

Completemos ahora el gráfico:



Decimos que la función presenta una laguna

En el punto (1; 1/2), y una asíntota vertical en x=-1

En el ejemplo vimos que nos acercábamos al valor 1 y -1, considerando valores próximos por izquierda y por derecha, para que el límite exista, estos valores deben aproximarse al mismo número.

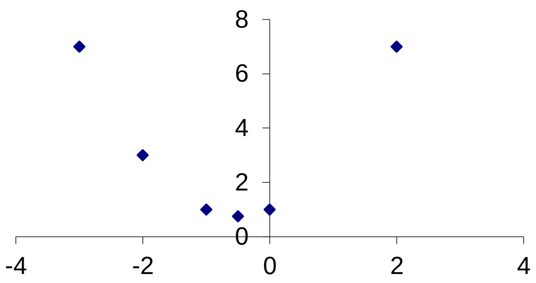
Ejemplo 2:

Supongamos que queremos graficar la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}}$

Lo primero que debemos hacer es hallar su dominio: $\mathbf{D = R - \{1\}}$

Luego tomamos una tabla de valores para obtener algunos puntos.

x	**0**	**2**	**1**	**-0.5**	**-1**	**-2**	**-3**
y	**1**	**7**	**--**	**3/4**	**1**	**3**	**7**



Como en el caso anterior debemos unir los puntos, para ello es importante saber cómo se comporta la función en un entorno reducido del punto 1. Podemos tomar otra tabla de valores, con valores muy próximos al 1, por derecha y por izquierda, y ver qué pasa con sus imágenes.

x	0,5	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,2	1,5
y	1,7500	2,9701	2,9970	2,9997		3,0003	3,0030	3,0301	3,6400	4,7500

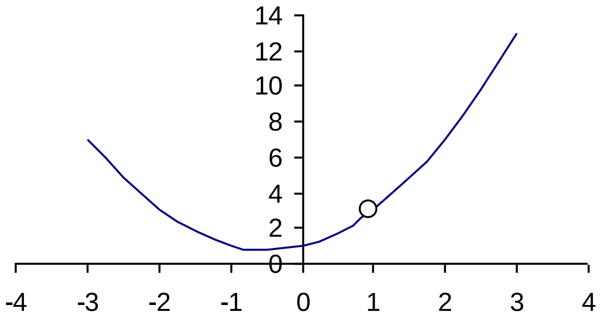
3

Vemos que cuando x se acerca al 1 por la derecha y por la izquierda sus imágenes se acercan al n°3. Esto se expresa diciendo que cuando x tiende al n° l, la función tiende al n°3.

O bien que 3 es el límite de la función cuando x tiende al n° 1.

En símbolos: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

Ahora si podemos unir los puntos:



Vemos que obtenemos una parábola lo que es lógico, porque al dividir un polinomio de grado 3 con un polinomio de grado 1, se obtiene un polinomio de grado 2. Aunque la función no está definida en x=1, si tiene límite en x=1, esto produce una laguna en el punto (1,3).

Esto ocurre muy a menudo y <u>es muy importante darse cuenta que, aunque el punto x=1 no tiene imagen lo mismo puede tener límite</u>

- **<u>DEFINICIÓN DE LÍMITE EN UN PUNTO x=a:</u>**

La función y = f (x) tiene límite L en el punto x = a, si al tomar valores de x cada vez más próximos al punto <u>a</u>, los valores de la función se acercan, tanto como se quiera al número L.   **En símbolos** $\lim_{x \to a} f(x) = L$

El punto **a** donde se calcula el límite debe ser **<u>punto de acumulación</u>** del dominio de la función, ya que es necesario que alrededor del punto **a** haya elementos del dominio de la función para poder calcular su imagen. Es importante comprender que ***<u>no importa lo que pasa justo en el punto a, sino cerca del punto</u>***

¿Cómo escribimos en forma simbólica que nos aproximamos a un valor x=a por izquierda o por derecha?

Límite por izquierda $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$

Límite por derecha $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$

Para que existe el límite $L_1 = L_2$.

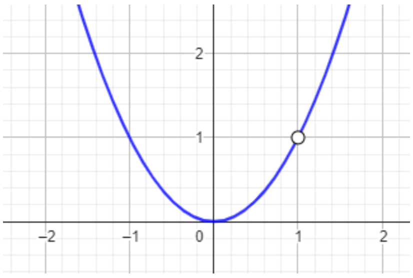
Estos límites reciben el nombre de límites laterales, <u>si sus valores no son iguales, el límite no existe.</u>

Hasta ahora hemos visto el cálculo de los límites de manera numérica (con tabla de valores), y gráfica. Estos límites se pueden calcular en forma analítica

<u>Ejercitación:</u>

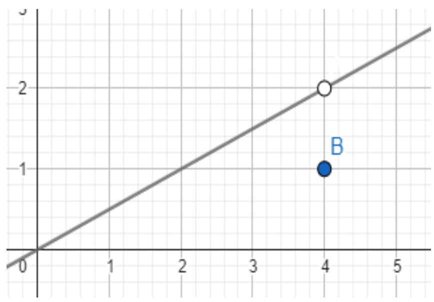
Analice gráficamente si existen o no los límites indicados. En caso afirmativo encuentre el valor de dicho límite

a)



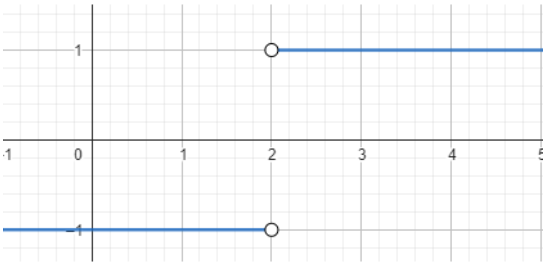
$\lim_{x \to 1} f(x) =$

b)



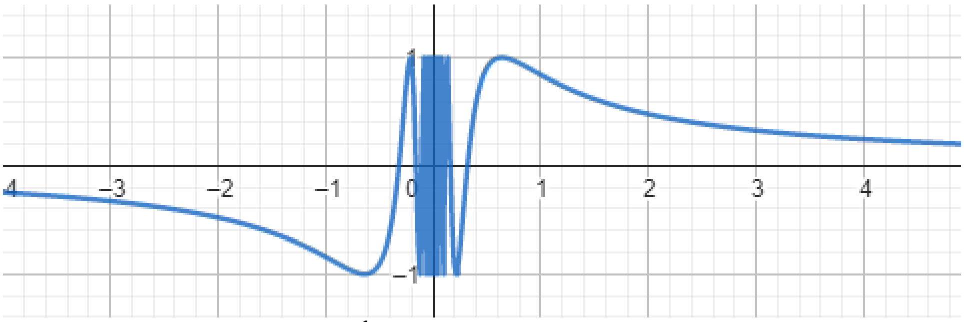
$\lim_{x \to 4} f(x) =$

c)



$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

d)



$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) =$

Hasta ahora hemos visto el cálculo de los límites de manera numérica (con tabla de valores), y gráfica. A continuación, veremos cómo calcular límite en un punto analíticamente

- <u>**CÁLCULO DE LÍMITE EN UN PUNTO**</u>

Por lo visto anteriormente vemos que, si la función no tiene lagunas, ni asíntotas, ni saltos en **x = a**, el valor del límite en **a** coincide con la imagen de **a,** es decir **f(a) = L.**

Por lo tanto, en estos casos, para calcular el límite basta con reemplazar en la fórmula de la función, a la **x** por **a**. **(Esto se llama sustitución directa)**.

Estas funciones que **no** presentan lagunas, asíntotas o saltos en un punto x = a se dice que son **continuas** en dicho punto (este concepto será tratado con profundidad más adelante)

Partimos de la función $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$ cuyo comportamiento se analizó con una tabla de valores

El dominio de esta función es **Df =** $|\mathbb{R}$ **– {-1,1}**

Esta función es racional, **las funciones racionales son continuas en todos los puntos de su dominio**. Por lo tanto, si calculamos el límite para x tendiendo a 2 por ejemplo, su límite sería la imagen

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{(2)^2-2}{(2)^2-1} = \frac{2}{3}$ lo que hemos hecho al tomar límite, es una sustitución directa, vemos que el límite coincide con la imagen.

Ahora tomamos límite para los valores de x, que no pertenecen al dominio, no se puede ahora hacer una sustitución directa.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x}{x^2-1} \left(\frac{2}{0}\right)$ **tenemos una división por cero (no se puede poner el signo igual)**

Hemos visto en la tabla que cuando dividimos por un número próximo a cero, las imágenes crecen (en valor absoluto) sin límite. Es decir $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x}{x^2-1} \left(\frac{2}{0}\right) = \infty$

¡NO ESTAMOS DIVIDIENDO POR CERO, SINO POR VALORES PROXIMOS A CERO!

ESO SIGNIFICA LA PALABRA LÍMITE

En este caso decimos que el límite NO EXISTE, porque tiende a infinito (tiene asíntota vertical en x= -1)

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} \left(\frac{0}{0}\right)$ **se anulan numerador y denominador**

IMPORTANTE: A diferencia del caso anterior, se anulan simultáneamente numerador y denominador, hemos obtenido una indeterminación, quiere decir que EL LÍMITE PUEDE O NO EXISTIR.

En este caso para salvar la indeterminación se aplica el siguiente teorema

TEOREMA: Funciones que coinciden en todos sus puntos excepto en uno

Si dos funciones f y g tienen el mismo grafico en un mismo intervalo abierto, excepto en un punto c interior a dicho intervalo, entonces si g(x) tiene límite L en el punto c, la otra función f(x) tiene el mismo límite L en el punto c

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$$

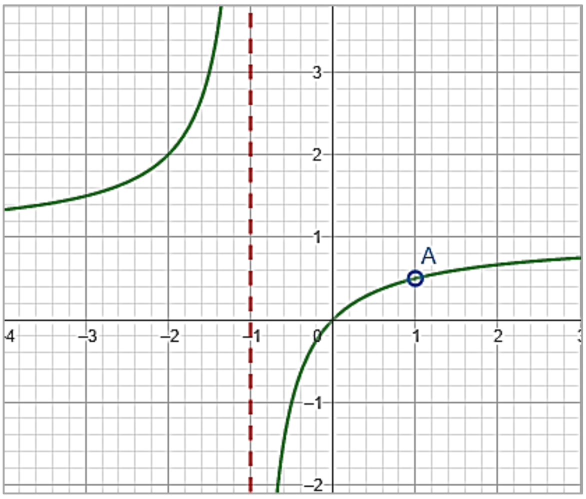
¿Cómo se encuentra esa otra función que dice el teorema? Generalmente se obtiene simplificando la fórmula de la función

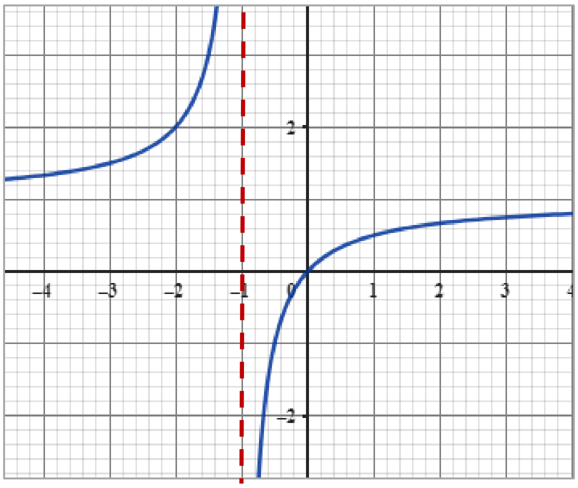
Si se trata de polinomios se puede factorizar para encontrar el factor que es común al numerador y denominador y así simplificar

$$\underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1}\left(\frac{0}{0}\right)} = \underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}} = \underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x+1)}} = \frac{1}{2}$$

Indeterminación ⟶ factorizamos ⟶ Simplificamos y obtenemos OTRA FUNCIÓN

En el último término $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{(x+1)} = \frac{1}{2}$ **se puede aplicar sustitución directa porque x=1 pertenece al dominio de esta NUEVA FUNCIÓN que le llamamos g(x)**





f(x) → Df = |R – { -1,1}   laguna en (1;1/2)

g(x) →Df = |R – {-1}

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

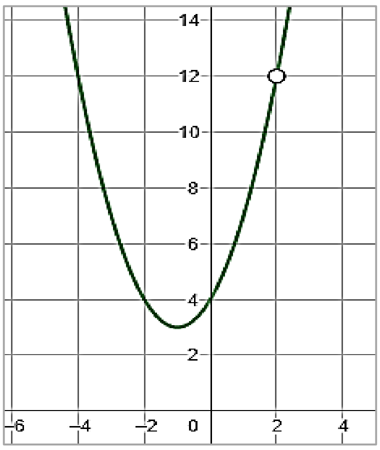
Debemos buscar una función cuya gráfica coincida con la función dada, excepto en x= 2, esto se logra simplificando la función Para ello, se puede factorizar para simplificar el factor que anula numerador y denominador, o aplicar Regla de Ruffini para factorizar.

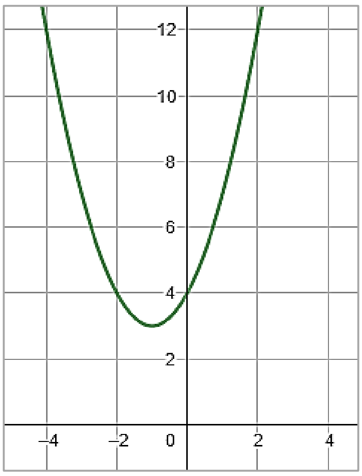
$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2).(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4$$

Luego aplicando el teorema anterior:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

Gráficamente esto significa que la fc. tiene una laguna en el punto de coordenadas (2, 12)





$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$$

$$g(x)=x^2+2x+4$$

Df = |R – {2}

Dg = |R

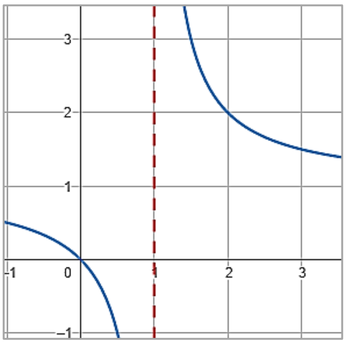
Ejemplo 2:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x-1)^2}\left(\frac{0}{0}\right)$ salvamos la indeterminación factorizando

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x-1)^2}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}\left(\frac{1}{0}\right) = \infty$$

Salvamos la indeterminación y nos dio que el límite es infinito, por lo tanto, no existe el límite finito

Gráficamente en x = 1 hay una asíntota vertical cuya ecuación es **x = 1**



ACLARACIÓN SOBRE EL LÍMITE INFINITO EN UN PUNTO

Si es necesario, cuando el límite da infinito, se puede especificar el signo del infinito tomando límites laterales

Por ejemplo:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{0}\right) = \infty$ **si necesito saber si es mas infinito o menos infinito, tomo laterales**

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{0}\right) = +\infty$ **por que los valores de x a la derecha del cero son positivos**

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{0}\right) = -\infty$ **por que los valores de x a la izquierda del cero son negativos**

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\left(\frac{0}{0}\right) =$$

Para salvar la indeterminación hay que simplificar, pero ¿cómo hacemos si no tenemos polinomios?

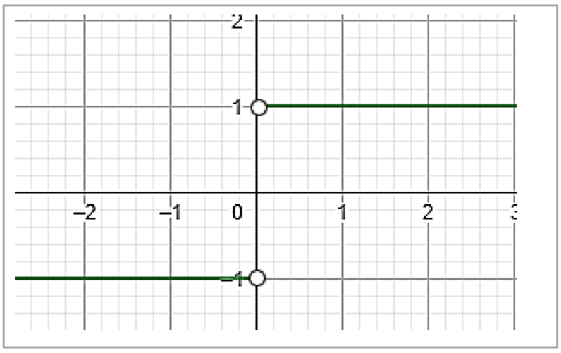
Para resolver esta indeterminación se debe resolver el valor absoluto teniendo en cuenta que:

|x| = x si x ≥0 |x| = - x si x < 0

Hay que tomar límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$



Como los límites laterales son distintos, entonces **no existe el límite**

Ejemplo 4:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{para } x<0 \\ x^2+1 & \text{para } x\geq 0 \end{cases}$

Acá también debemos tomar límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2+1) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}(2x+1) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$$

Como los límites laterales son iguales, entonces **SI existe el límite**

Ejemplo 5:

$$\lim_{x\to 0}[x+e^x]$$

Esta función es una suma de una polinómica con una exponencial.

¿Sabemos cómo es la gráfica? ¿Podemos hacer sustitución directa?

Para resolver este ejercicio veremos ahora las propiedades de límite en un punto

Propiedades de límite en un punto

Sean f y g dos funciones que tienen límite en un punto **c** de acumulación de sus dominios, L_1 y L_2 respectivamente

Entonces:

a) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x) = L_1 \pm L_2$ (el límite de la suma (o diferencia) es igual a la suma (o diferencia) de los límites

b) $\lim\limits_{x\to c}(f(x).\ g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x)\ .\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = L_1.\ L_2$ (el límite del producto es igual al producto de los límites)

c) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$ (el límite del cociente es igual al cociente de los límites)

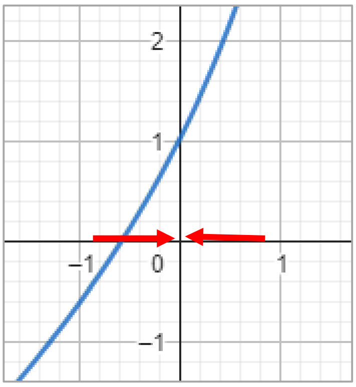
d) $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to c} f(x))^n = (L_1)^n$

e) $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ Si n es par entonces L_1 debe ser mayor a 0

Volviendo al ejercicio anterior, podemos aplicar la primera propiedad ya que cada función sí tiene límite

$$\lim_{x\to 0}[x+e^x] = \lim_{x\to 0}[x] + \lim_{x\to 0}[e^x] = 0+1 = 1$$

Gráficamente



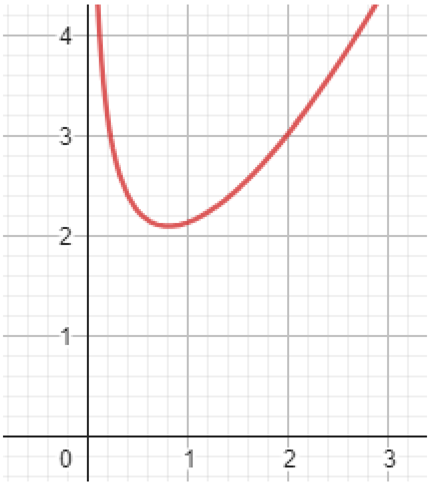
Ejemplo 6

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{x^2 + 2}{\sqrt{2x}} \right]$$

En este caso al igual que en el ejercicio anterior, podemos aplicar la tercera propiedad ya que el denominador no tiene límite 0

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{x^2 + 2}{\sqrt{2x}} \right] = \frac{\lim_{x \to 2} (x^2 + 2)}{\lim_{x \to 2} \sqrt{2x}} = \frac{6}{2} = 3$$

gráficamente



RESOLVER (trabajo práctico)

Calcular los siguientes límites en los puntos que se indican y responder para cada caso:

- Cuál es su dominio
- Cuál o cuáles son sus raíces
- ¿Tiene ordenada al origen?

a) $f(x) = \dfrac{3x - 9}{x^3 - 9x}$ Calcular el límite en x = - 3, x = 0 y x = 3

b) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 4x}{x^2 - 2x + 1}$ Calcular el límite en x = -1, x = 1

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{para } x < 1 \\ -x + 6 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$ Calcular el límite para x = -2, para x =1 y para x =4

d) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{para } x < 2 \\ 4 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$ Calcular el límite para x = 1, para x =2 y para x =3

➢ CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función es continua en un punto **a** de su dominio si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe la imagen de la función en x= a: **∃f(a)**
2. Existe el límite de la fc. en el punto x = a: $\mathbf{\lim_a f(x) = L}$
3. El valor del límite coincide con la imagen: **L = f(a)**

Deben cumplirse las tres condiciones para que sea continua en x=a

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Si una de las tres condiciones no se cumple, se dice que la función es discontinua

Las discontinuidades se clasifican en dos: **evitable y esencial**

a) **Evitable**: tiene una discontinuidad evitable en x = a si es discontinua en x = a, y **si existe el límite (finito y único) en x = a.**

b) **Esencial:** tiene discontinuidad esencial en x=a si es discontinua en dicho punto, y **no existe el límite en x=a**

Ejemplo 1

Encontrar el o los puntos de discontinuidad de la siguiente función. Clasifique la discontinuidad.

$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$ **D =** $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ por ser racional, los únicos puntos dónde puede haber una discontinuidad es en los valores excluidos del dominio

Analizamos las condiciones de continuidad en **x =1**

- **¿Existe la imagen de la función en x= 1? NO,** porque no pertenece al dominio

  Ya sabemos que es discontinua, pero para clasificar la discontinuidad, tenemos que ver si existe o no el límite en ese punto

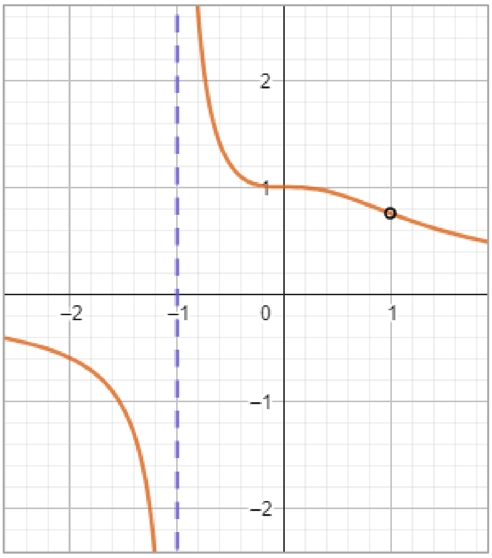
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+1).(x+1).(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2+x+1)}{(x^2+1).(x+1)} = \dfrac{3}{4}$ tiene una laguna

Sí existe el límite por lo tanto tiene una discontinuidad evitable en x= 1

Analizamos las condiciones de continuidad en **x =-1**

- ¿Existe la imagen de la función en x= -1**?** **NO,** porque no pertenece al dominio
  Ya sabemos que es discontinua, pero para clasificar la discontinuidad, tenemos que ver si existe o no el límite en ese punto
- $\lim_{x \to -1} \frac{x^3-1}{x^4-1} \left(-\frac{2}{0}\right) = \infty$ tiene una asíntota vertical

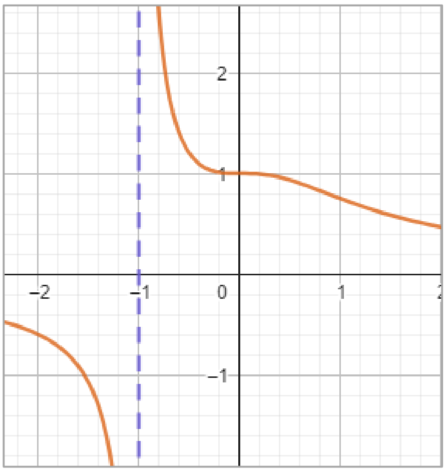
No existe el límite en el punto x =-1 por lo tanto la discontinuidad es esencial



Si la discontinuidad es evitable, la palabra sugiere, qué si fuera necesario, se podría evitar la discontinuidad, y transformarla en una función continua. **¿Pero cómo se logra eso?**
Se busca otra función que tenga la misma gráfica, excepto en el punto x=1, si se puede, se simplifica. Esto lo vimos en el teorema de funciones que coinciden en todos los puntos excepto en uno
En el ejercicio:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+1)\,.\,(x+1).\,(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x^2+1)\,.\,(x+1)} = \frac{3}{4}$$

Si graficamos la función simplificada vemos que la laguna ya no está



A la función original, le asignamos como imagen En x = 1 el valor del límite.
En el ejemplo consideramos:
f(x) para x≠ 1 y g(x) para x =1

Ejemplo 2:

Encontrar el o los puntos de discontinuidad de la siguiente función. Clasifique la discontinuidad.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{para } x \neq 0 \\ 6 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

El único punto de discontinuidad posible es en x= 0.

Analizamos las condiciones

- ¿Existe la imagen de la función en x= 0**?** **Sí, es f (0) = 6**
- Analizamos si tiene límite $\lim\limits_{x \to 0} (2x+1) = 1$ pero **L≠ f(0)**

Por lo tanto, no cumple la tercera condición de continuidad, tiene una discontinuidad evitable en x=0

¿Qué pasa si la queremos transformar en continua por alguna razón?

en este caso debemos **redefinirla asignándole en el punto como imagen el valor del límite**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{para } x \neq 0 \\ L = 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

así definida es continua en x=0

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 3} \underbrace{\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}}_{f(x)} = \lim_{x \to 3} \underbrace{\frac{1}{(x+3)}}_{g(x)} = \frac{1}{6}$$

La discontinuidad es evitable porque existe el límite, no tiene imagen x= 3

En este caso la función la redefinimos como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2-9} & \text{si } x \neq 3 \\ \dfrac{1}{6} & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

nueva función continua en x = 3

En base a las definiciones vistas, encontrar los puntos, donde no son continuas las funciones del ejemplo y clasificarlas, en caso de ser evitable la discontinuidad, redefinir la función en el punto

Resolver: (trabajo práctico)

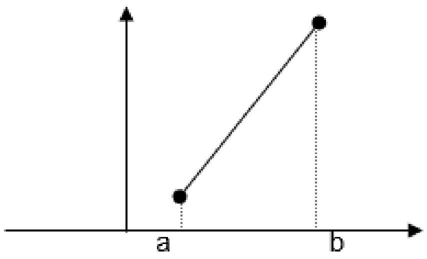
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \leq 2 \\ ax + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

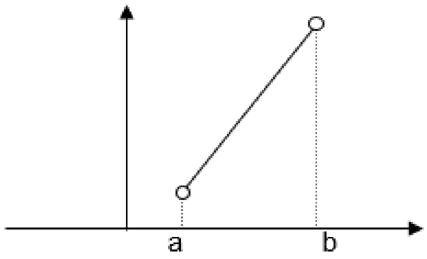
Encuentre el valor de “a” para que la función sea continua en x = 2

- **CONTINUIDAD EN UN INTERVALO**
  - **La función y = f(x) es continua en el intervalo (a, b) si y sólo si es continua en todos los puntos del intervalo.**
  - **La función y = f(x) es continua en el intervalo [a , b] si y sólo si es continua en (a , b) y en los extremos del intervalo:** $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ **y** $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Ejemplos:

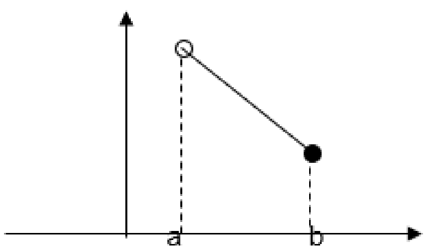


es continua en [a , b]



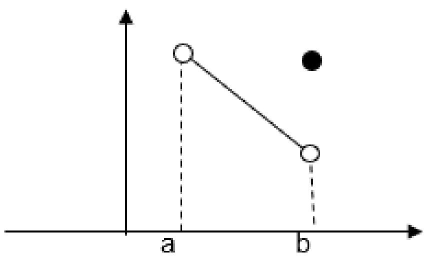
es continua en (a , b)

Analice en los siguientes gráficos si son continuas en el intervalo [a , b] o (a , b)



Es continua en (a; b)

No es continua en [a; b]



Es continua en (a; b)

No es continua en [a; b]

Propiedades de las funciones continuas

1) Sean f y g funciones continuas en x=a, entonces las funciones:

(k. f) (x); (f + g) (x) ; (f - g) (x) ; (f . g) (x) ; (f / g) (x)

también lo son en x = a

(el alumno debe saber demostrar estas propiedades usando propiedad de límite)

2) Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y si es continua en x = a entonces:

3) $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g(L)$

Esta última propiedad es muy importante ya que permite justificar las siguientes proposiciones:

a) $\lim_{x \to a} \ln(f(x)) = \ln(\lim_{x \to a} f(x))$ si $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

b) $\lim_{x \to a} sen(f(x)) = sen(\lim_{x \to a} f(x))$

Ejercitación: (trabajo práctico)

1. Responder:

a) Encuentre el error en las siguientes afirmaciones.

- Si existe el $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y $f(-2)$, entonces f es continua en x = -2
- Si existe el $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, entonces f es continua en x = -2

b) En un laboratorio se está observando la temperatura de una cierta sustancia, está dada por la función:

$$\mathbf{f(t)} = \frac{\mathbf{t-2}}{\mathbf{t^2}-4}$$ donde t está dado en horas y la temperatura en grados centígrados

Se pide:

- El dominio de la función en el contexto del problema.
- Cuál era la temperatura al inicio de la medición.
- Para qué tiempo la temperatura fue de 0,125 grados.
- ¿Se pudo tomar un registro a las dos horas de comenzada la medición? justifique su respuesta
- Si tuviera que completar una tabla con los registros de temperatura ¿Podría redefinir la función para completar el dato?

2. Completar:

Dada la función $g(x)=\begin{cases} x+6 & x\le -1 \\ -x^2+3 & -1<x<3 \\ x-9 & x\ge 3 \end{cases}$, calcule los siguientes límites y concluya acerca de la existencia de cada uno:

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$