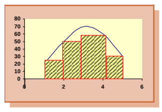


CAPÍTULO I: FUNCIONES REALES- Parte A
GUIA DE ESTUDIO

FUNCIÓN REAL:

Sean A y B dos conjuntos

Una relación f de A en B es una función, si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1°) Existencia: todo elemento de A se relaciona con un elemento de B

$(\forall x \in A)(\exists y \in B)/(x\,;y) \in f$

2°) Unicidad: cada elemento de A se relaciona con uno y sólo un elemento de B

$(x\,;\mathbf{y}) \in f \wedge (x\,;\mathbf{z}) \in f \Rightarrow y = z$

Al conjunto **A** se lo llama **Dominio de la función**, y se indica con la letra D. Al conjunto **B** se lo llama **Codominio**

Los elementos de **A** se anotan generalmente con la letra **"x",** y como puede tomar libremente distintos valores del dominio, se la llama **variable independiente**.

Cada elemento **"x"** del Dominio, se relaciona con un elemento de B, que indicaremoas con la letra **"y"** . Los valores que toma **"y"** dependen de los valores que tome **"x"**, por eso se dice que **"y"** es la **variable dependiente**

Ese elemento **"y"** es la imagen de **x** , y se anota simbólicamente y = f(x)

En este curso de Cálculo I nos interesan especialmente las funciones reales de variable real o funciones escalares, que son funciones definidas de la siguiente manera:

f: D → $\mathbb{R}$ D $\subset \mathbb{R}$ donde D es el dominio

dada por y = f(x)

y= f(x) es la fórmula que define la función, y la que indica cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente.

Vamos a trabajar con la definición de función y con su notación funcional

Ejemplo 1: **f: $\mathbb{R}$ → $\mathbb{R}$ dada por y= f(x) = x + 4 Es función?**

Condición de existencia: a todos los números reales del dominio se les puede sumar 4, y se obtiene otro número real cómo resultado

Condición de unidad: a cada número real del dominio, le corresponde como i**magen** un único número, que es el resultado de sumar 4

Por lo tanto **sí es función**. La notación funcional **y = f(x)** nos indica que a la variable independiente es **"x",** y la variable dependiente es **"y"**

Si la relación ubiese sido definida como **f: $\mathbb{R}$ →$\mathbb{N}$** dada por **y=f(x) = x + 4**, sería función? Por qué?

Ejemplo 2: La relación f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por y= f(x) = $\sqrt{x}$ Es función?

Condición de existencia: si le damos a x un valor negativo, no tendrá imagen en **R** ,ya que no es un número real, por ejemplo f(-4)= $\sqrt{-4}$ **no es un número real**

Por lo tanto todos los números reales negativos no tienen imagen. **No cumple la condición de existencia.**

Así definida **no es función**, a pesar de que la condición de unicidad sí la cumple.

¿Cómo habría que definirla para que si corresponda a una función?

f: $[0;\infty]$→ R dada por y = f(x) = $\sqrt{x}$ donde el dominio son todos los reales positivos y el cero escrito como intervalo

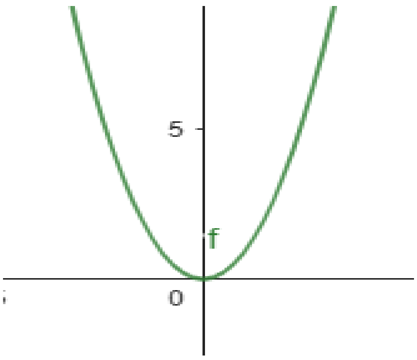
Como se puede representar una función de variable real

Para ayudar a comprender una función o visualizarla, se puede representar de distintas maneras:

- **Algebraica** (mediante una formula): **f(x) = x^2**
- **Numérica** (por medio de una tabla de valores)

x	$y = x^2$
1	1
-2	4
3	3

Visual: (gráfica)



EJERCITACIÓN PRÁCTICO

Dada la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / f(x) = $\frac{1}{3}x + 2$

a) ¿Cuál es la imagen de x = 3?
b) f (0) =
c) ¿Cuál es el elemento del dominio cuya imagen es 5?
d) Si f(x) = 12 ¿cuánto vale x?
e) ¿El par (1, 2) pertenece a la función?
f) ¿Cuál es el elemento del dominio cuya imagen es cero?
g) Represente gráficamente esta función (

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES REALES

Las funciones numéricas se clasifican de la siguiente manera:

FUNCIONES ALGEBRARICAS

- **FUNCIÓN POLINÓMICA** f(x)= P(x)
- **FUNCIÓN RACIONAL** f(x)= $\frac{P(x)}{Q(x)}$
- **FUNCIÓN IRRACIONAL** f(x)= $\sqrt[n]{P(x)}$

FUNCIONES TRASCENDENTES

- **FUNCIÓN EXPONENCIAL** f(x)=a^x
- **FUNCIÓN LOGARITMO** f(x)= $\log_b x$
- **FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA**

ANÁLISIS FUNCIONAL

Ahora veremos algunos aspectos importantes para analizar en una función

I. DOMINIO
II. CONJUNTO IMAGEN
III. ORDENADA AL ORIGEN
IV. CEROS O RAÍCES
V. INTERVALOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD
VI. FUNCIÓN CRECIENTE - FUNCIÓN DECRECIENTE
VII. PARIDAD
VIII. PERIDIOCIDAD

I. DOMINIO

Definición:

Sea f una fc definida f:A→B

El dominio es el conjunto de valores de A, que hacen que la expresión y = f(x) tenga sentido.

Es decir que al reemplazar ese valor en la fórmula de la función, se obtiene como imagen un valor real.

El objetivo es que ustedes aprendan a encontrar el dominio, **gráficamente** (conocido el gráfico) y **analíticamente** (conocida la fórmula)

Ejemplos:

Analíticamente

a) **f : D → $\mathbb{R}$** **D $\subset \mathbb{R}$** **dada por** **f(x) = - 3 x + 2 (fc. polinómica)**

de acuerdo a las operaciones que afectan a la variable, hay que analizar qué valores puede tomar

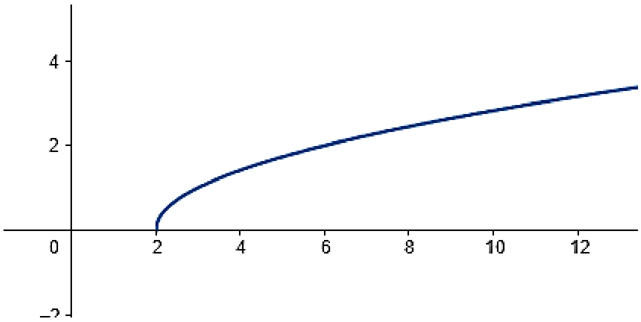
En este caso, la variable **x** puede tomar cualquier valor, por lo tanto, **D = $\mathbb{R}$**

b) **f : D → $\mathbb{R}$** **D $\subset \mathbb{R}$** **dada por** **f(x) = $\frac{1}{x}$** **(fc. racional)**

en este caso, como la variable está dividiendo**, no puede tomar el valor cero,** por lo tanto, **D = $\mathbb{R}$ – {0} = $\mathbb{R}^*$**

Gráficamente

Dada la gráfica de la función **f : D → $\mathbb{R}$** dada por **f(x)= $\sqrt{x-2}$** , encuentre el dominio



En este caso vemos que sólo los valores del dominio **x $\geq$ 2**, intervienen en la gráfica, es decir tienen una imagen.

Por lo tanto **D = [2 ; ∞)**

II. CONJUNTO IMAGEN DE UNA FUNCIÓN:

Definición

Sea f una fc definida f:A→B

Es el conjunto de valores "y" de B (condominio), tales que tienen una pre-imagen en A = D(f).

Generalmente indicaremos los valores de la imagen con la letra y, la denominaremos variable dependiente

En símbolos: **Im(f) = { y $\in$ B / (x; y) $\in$ f } $\subseteq$ B**

Ejemplos:

Hallar el conjunto Imagen de las siguientes funciones

I. $f(x) = (x-2)^2$

Analíticamente

Por ser polinómica D = $\mathbb{R}$

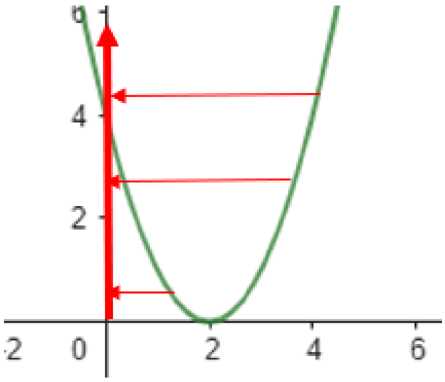
Para determinar su conjunto imagen debemos pensar en todos los resultados posibles, al sacar la cuenta que indica la fórmula

En este caso, cualquier número elevado al cuadrado, da siempre un número real positivo, por lo tanto todas las imágenes van a ser positivas.

¿Puede ser 0 la imagen**?** $\mathbf{f(x) = (x-2)^2 = 0}$ $\boldsymbol{x - 2 = 0}$ $\boldsymbol{x = 2}$ sí puede ser

El conjunto imagen es I = [0; ∞)

Gráficamente



Debemos proyectar sobre el eje de ordenadas los puntos que pertenecen a la gráfica. ¿Qué sector del eje interviene en la gráfica?

Vemos que el conjunto imagen es I = [0; ∞)

II. g(x) = x ^{3}

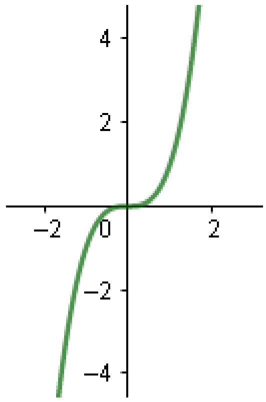
Analíticamente

En este caso, cualquier número elevado al cubo, mantiene el signo de la base, por lo tanto todas las imágenes van a ser positivas o negativas según el signo de "x".

¿Puede ser 0 la imagen**?** $\mathbf{f(x) = (x)^3 = 0}$ $\boldsymbol{x = 0}$ sí puede ser

El conjunto imagen es I = R

Gráficamente:



Debemos proyectar sobre el eje de ordenadas los puntos que pertenecen a la gráfica. ¿Qué sector del eje interviene en la gráfica?

Vemos entonces que **I = R**

<u>Observación</u>:

En el caso de la funciones polinómica, el dominio es <u>siempre todos los reales</u>, pero la imagen depende del grado de la función:

- **Si el grado es impar, el conjunto imagen son todos los reales**
- **Si el grado es par, el conjunto imagen depende del ejercicio en particular.**

III. ORDENADA AL ORIGEN

Definición:

Es la ordenada del punto de intersección de la gráfica de la función, con el eje de ordenadas.
También se puede definir como la imagen del cero.
Esto último en símbolos es:

b es la ordenada al origen de la gráfica de f(x) , si y sólo si b = f(0)

¿Cómo se calcula la ordenada al origen de una función y = f(x)?

Analíticamente:

Se calcula la imagen de x= 0, reemplazando en la función a la x por 0

Gráficamente:

Se grafica la función, y la ordenada del punto donde la gráfica intersecta al eje de ordenadas, es la ordenda al origen

Ejemplos:

Hallar la ordenada al origen de las siguientes funciones, (si es posible)

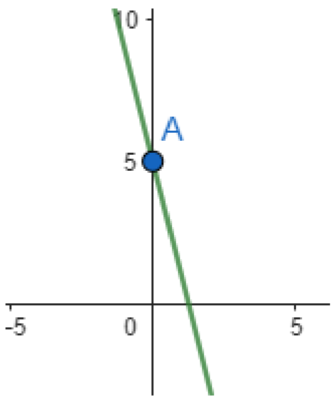
a) **f (x)= - 4x+5**

Analíticamente

Buscamos la imagen del 0

f(0)= - 4 . 0 + 5 = 5 **b = 5** es la ordenada al origen

Gráficamente



En el caso de las funciones polinómicas, la ordenada al origen es el coeficiente del término independiente

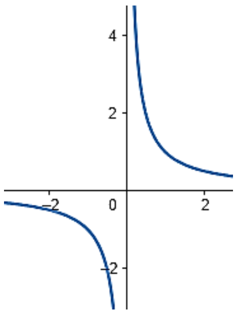
b) **h(x)=** $\frac{1}{x}$

Analíticamente

.Por ser una función racional , el denominador no puede ser cero, por lo tanto x≠0

No existe f(0), **no tiene ordenada al origen**

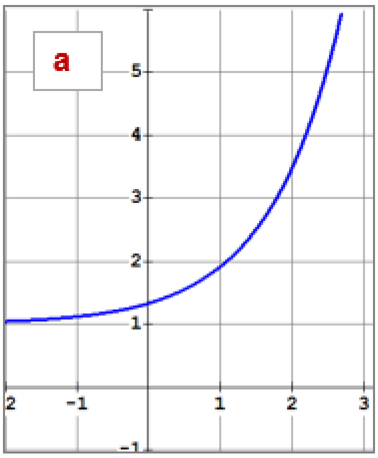
Gráficamente

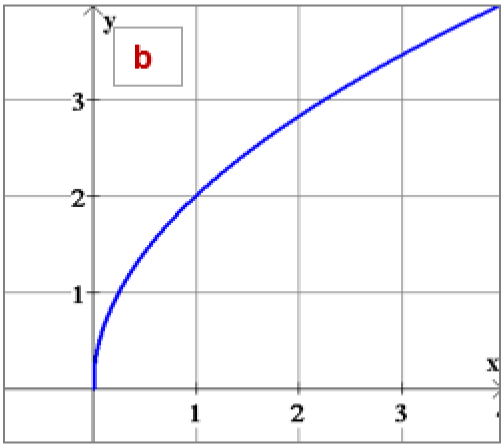


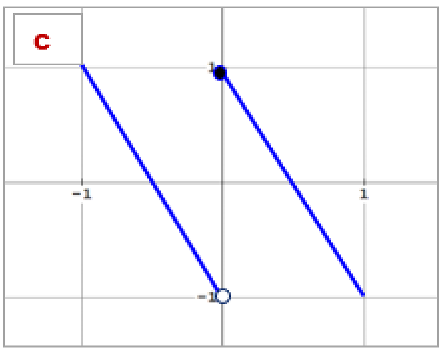
Vemos que es curva no intersecta al eje de ordenadas, por lo tanto no tiene ordenada al origen

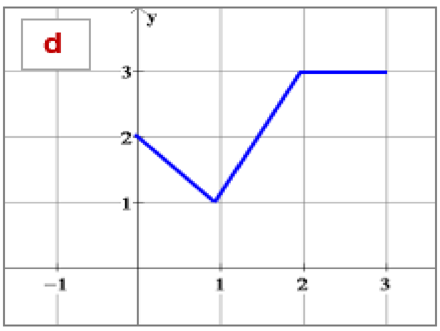
EJERCITACIÓN PRÁCTICO

1. Dadas las siguientes gráficas, encuentre el dominio, conjunto imagen y ordenada al origen. Algunas de ellas están definidas por tramos, identifíquelas









¿Cuál sería la expresión que corresponde a las funciones de los puntos c y d?

IV. CEROS O RAÍCES DE UNA FUNCIÓN

Definición:

Son los valores del dominio para los cuales la función se anula. Es decir la imagen es cero.

En símbolos $\quad$ **x = a es un cero o raíz de f(x)** $\Leftrightarrow$ **f(a) = 0**

¿Cómo se calcula la raíz de una función y = f(x)?

Analíticamente:

Hay que buscar los valores de x que tienen como imagen el valor cero.

Es decir se plantea la ecuación: f(x) = 0 , y se resuelve según el caso

Gráficamente

Si **a** es una raíz real, el gráfico de la función f(x) intersecta al eje de abscisas en el punto de coordenadas (**a; 0**). Es decir donde la Gráfica toca al eje de abscisas

Ejemplos:

Sea f: D → ℝ dada por f(x) = 3x – 4

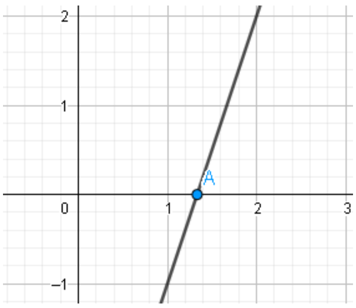
Hallar la raíz de la función

Analíticamente

planteamos la ecuación 3x – 4 = 0

resolvemos despejando, nos queda $\mathbf{x = \frac{4}{3}}$ **esa es la raíz**

Gráficamente



El punto de coordenadas **($\frac{4}{3}$;0)** es el **punto donde la gráfica toca al eje de abscisas**

Por lo tanto **la raíz es** $\mathbf{x = \frac{4}{3}}$

V. INTERVALOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

Una función es positiva en un intervalo **I** ⊂ **D**, si se verifica que $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}: \mathbf{f(x) > 0}$

C⁺ = {x / x ∈ I, f(x) > 0}

Una función es negativa en un intervalo **I** de su dominio, si se verifica que $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}: \mathbf{f(x) < 0}$

C⁻ = {x / x ∈ I, f(x) < 0}

Por ejemplo:

Sea f: D → ℝ dada por **f(x) =** $\mathbf{-\frac{1}{2}x + 3}$

Analíticamente:

Primero calculamos la o las raíces de la función (si las hay), para ello planteamos la ecuación $-\frac{1}{2}\mathbf{x}+\mathbf{3}=\mathbf{0}$ y hallamos la raíz $\mathbf{x}=\mathbf{6}$

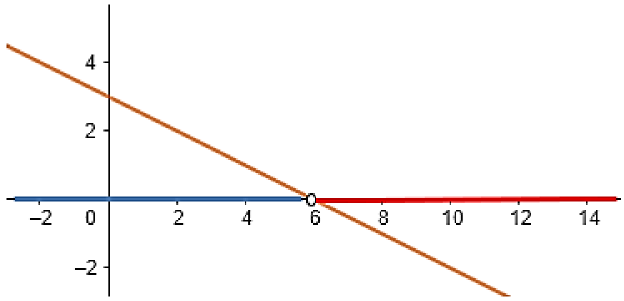
teniendo en cuenta la raíz $x=6$, armamos dos intervalos:

En (-∞ ; 6)	**f(x) >0**	**C^{+}= (-∞ ; 6)**
En (6; ∞)	**f(x) > 0**	**C^{-} = (6 ; ∞)**

En el intervalo de positividad o en el de negatividad, no se incluyen las raíces de la función.

Gráficamente:

vemos que el intervalo de positividad es el conjunto de valores de x cuya imagen es positiva



Para todos los x<6 la función está por encima del eje x , o sea f(x)>0 $\mathbf{C}^{+}-=(-\infty\,;\,\mathbf{6})$

Para todos los x>6 la función está por debajo del eje x , o sea f(x)<0 **C^{-} = (6 ; ∞)**

EJERCITACIÓN PRÁCTICO

Dadas las siguientes funciones reales:

f(x)= $\mathbf{x^3-4x}$ **fc polinómica** **g(x)=** $\mathbf{x^4-4x^2}$ **fc polinómica** **h(x) =** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$ **fc racional**

a) Hallar la o las raíces de las funciones dadas (si es posible), análiticamente y verifique gráficamente (geogebra)

b) Hallar los intervalos de positividad y de negatividad análiticamente (si es posible) y verifique gráficamente (geogebra)

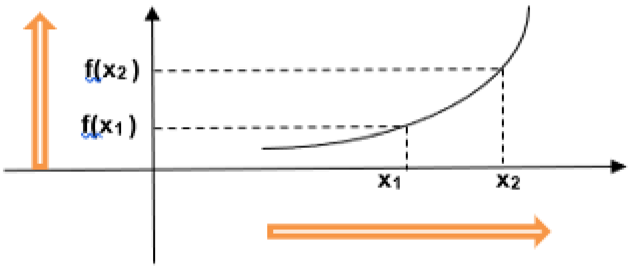
VI. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES EN UN INTERVALO

Definición

FUNCIÓN CRECIENTE: Una función f, definida en un intervalo I, es creciente en dicho intervalo, si y sólo si: Al aumentar los valores de x, aumentan también los valores de sus imágenes, en todo el intervalo I

$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) : [\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ ]$

Graficamente



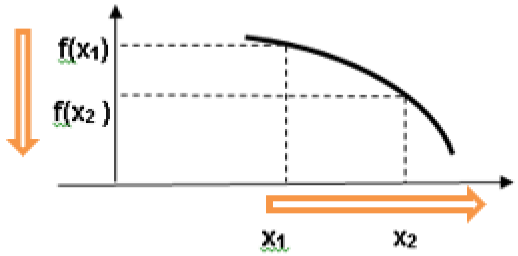
Definición:

FUNCIÓN DECRECIENTE: Una función **f**, definida en un intervalo I, es decreciente en dicho intervalo si y sólo si:

Al aumentar los valores de x, disminuyen los valores de sus imágenes, en todo el intervalo I

$$(\forall x_1 \in I)\ (\forall x_2 \in I) : [x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\ ]$$

Gráficamente

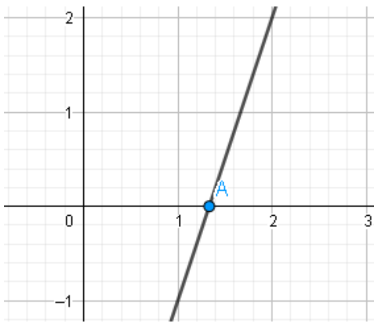


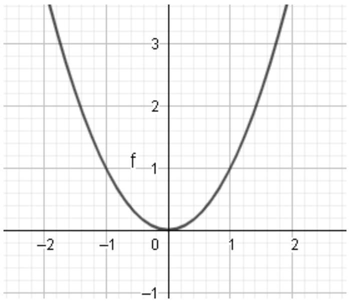
NOTA:

Una función es MONÓTONA CRECIENTE EN SU DOMINIO, si siempre es creciente.

Una función es MONÓTONA DECRECIENTE EN SU DOMINIO, si siempre es decreciente.

or ejemplo:





Es monótona creciente

No es monótona porque en x = 0 cambia de decreciente a creciente

Aclaración:

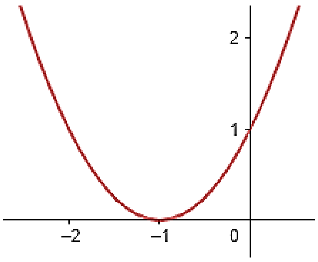
No siempre es fácil encontrar analíticamente si la función es monótona o no, y los intervalos de crecimiento o de decrecimiento. Cuando veamos derivada podremos resolver cualquier ejercicio analíticamente.

Ejemplos:

Hallar si las siguientes funciones son monótonas. En caso contrario indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

a) f (x)= $x^2 + 2x + 1$

Gráficamente

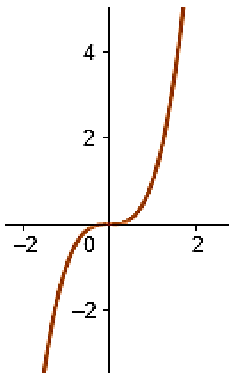


Vemos que

En (-∞ ; -1)	**Es decreciente**
En (-1; ∞)	**Es creciente**

b) f(x)= x^3

Gráficamente

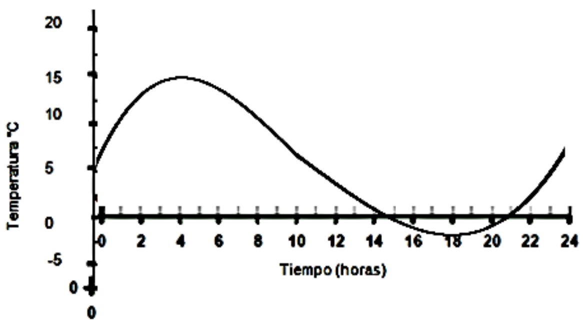


Esta función es monótona creciente

Analizaremos gráficamente los aspectos vistos

Analíticamente

1. En un laboratorio comenzaron a las 0 horas a medir la temperatura de una sustancia. La medición se hizo durante 24 horas y se obtuvo un gráfico que relaciona la temperatura con el tiempo



a) En que horario se registraron temperaturas sobre cero.

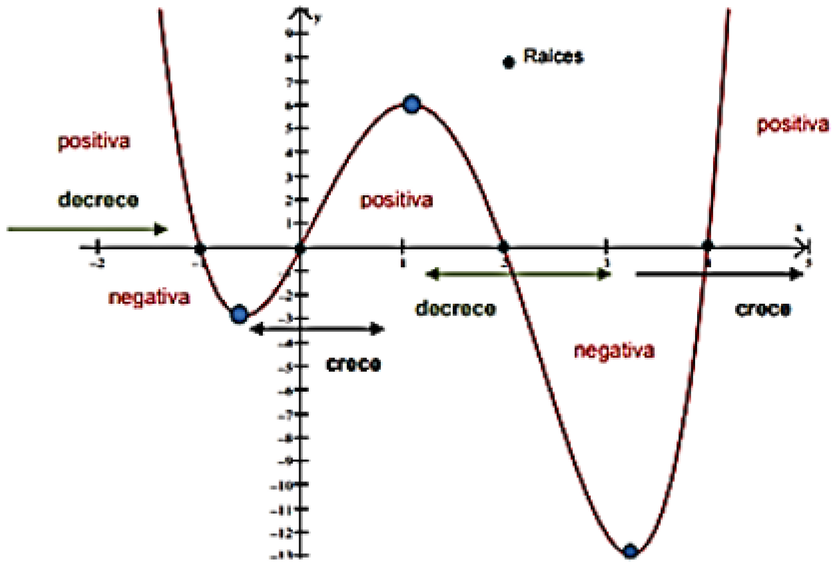
b) En que horario se registraron temperaturas bajo cero.

c) Cuál fue la temperatura al inicio de la medición.

d) Durante qué horas se midió un descenso de temperatura

e) Cuál es la máxima temperatura registrada. A qué hora se hizo la medición

Gráficamente



- **Son ceros o raíces:**
- $\mathbf{C}^{+} =$
- $\mathbf{C}^{-} =$
- **Es creciente en**
- **Es decreciente en**

VII. PARIDAD DE UNA FUNCIÓN

FUNCIÓN PAR

Sea y = f(x) una función real con dominio D⊂R

La función es par si y solo si, para todo elemento del dominio, elementos opuestos del dominio tienen la misma imagen

En símbolos:

f es una función par	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in D$: f(–x) = f(x)

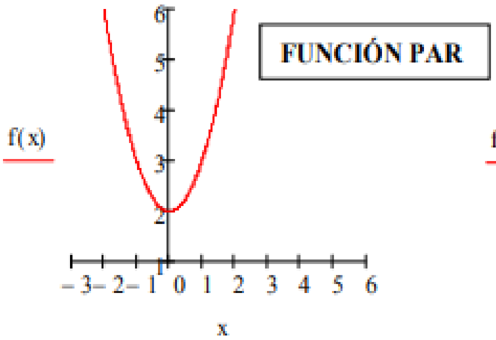
FUNCIÓN IMPAR:

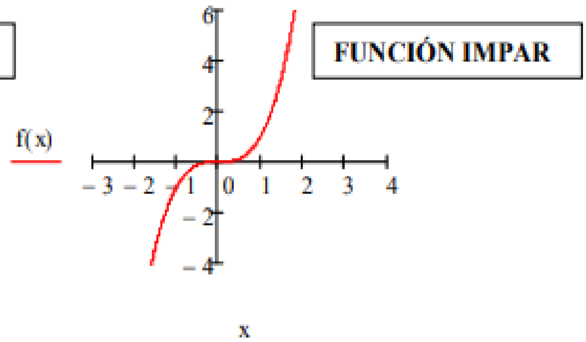
Sea y = f(x) una función real con dominio D$\subset$R

La función es impar si y solo si para todo elemento del dominio, elementos opuestos del dominio tienen imágenes también opuestas

En símbolos:

f es una función impar	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in D$: f(–x) = – f(x)



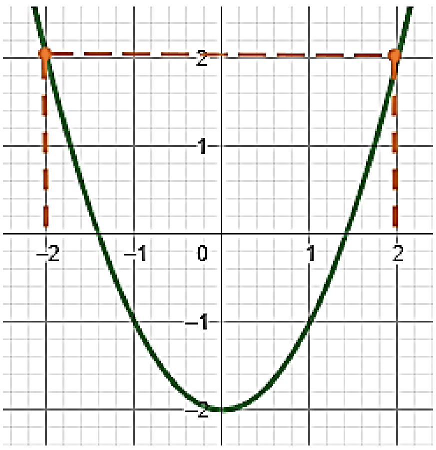


¿Cómo se analiza si una función es par o impar?

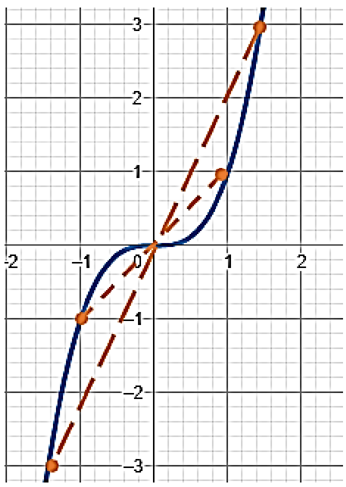
A esta altura del curso sólo vamos a hacer este análisis gráficamente

Gráficamente:

- **si la función es par , su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas**
- **si la función es impar, su gráfica es simétrica del origen de coordenadas**



Simétrica respecto del eje x

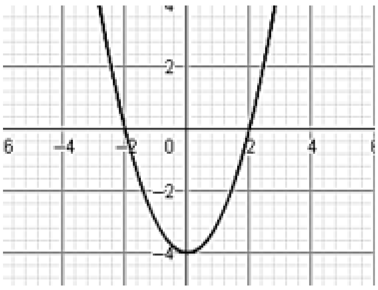


Simétrica respecto del origen

Ejemplos:

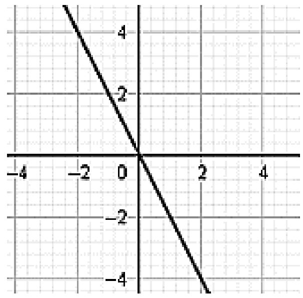
Graficar las siguientes funciones, y analizar si es par o impar cada una

a) $f(x) = x^2 - 4$



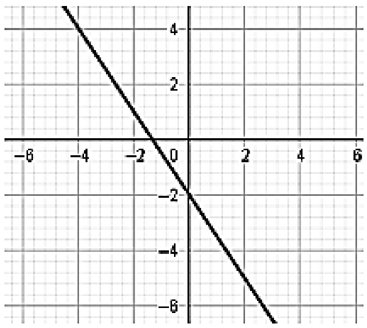
....

b) $f(x) = -2x$



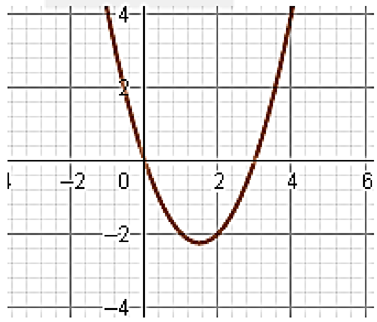
....

c) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 2$



....

d) $f(x) = x^2 - 3x$



....

FUNCIÓN ACOTADA

Definición:

> **Una función y = f(x) está acotada en el intervalo I , si existen dos números reales p ≤ q, tal que , para <u>todo x del intervalo</u> , se cumple que p ≤ f(x) ≤ q. Decimos entonces que p es una cota inferior de la función, y q es una cota superior de la función**

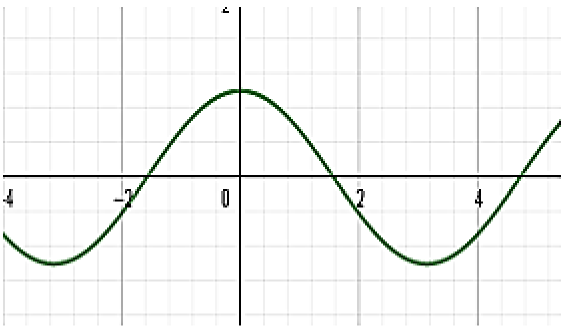
¿Cómo se analiza si una función está acotada?

Se busca el conjunto Imagen: si este es un intervalo abierto , cerrado, o combinado .y cuyos extremos son números reales, entonces si está acotada

Ejemplos:

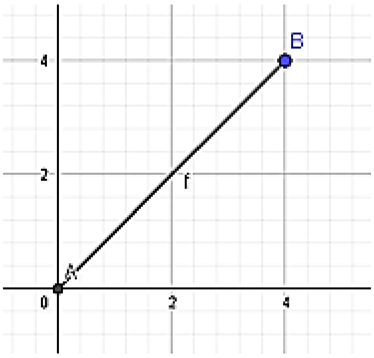
Grafique y analice si está acotada o no

f: R→ R **f(x)= cos x**



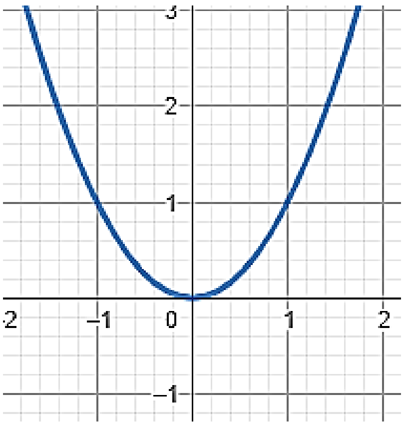
....

f: [0;4] → R **f(x)= x**



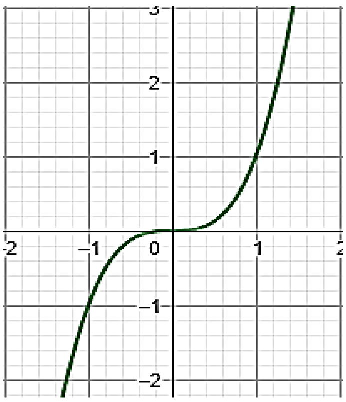
....

f: R→ R **f(x)= x^2**



....

f: R→R **f(x)= x^3**



....

VIII. FUNCIÓN PERIÓDICA

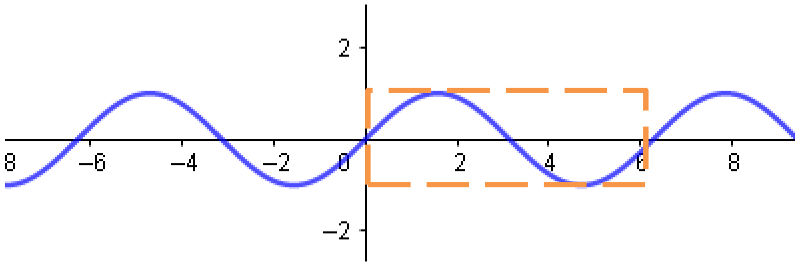
Sea T un número positivo, llamado período, y **f** una función definida en **D**

f(x) es periódica si y solo si $\forall x$: f (x) = f (x+ n.T) $\forall x \in$ **D** para n entero positivo

Ejemplos:

I) La función f(x) = sen x es periódica de período T= 2 π, ya que cumple que:

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \forall x \in R$$



II) La función f(x) = stg x es periódica de período **T= π**, ya que cumple que:

$tg(x+\pi\ ) = tg\ x \qquad \forall x \in D$