Trabajo Práctico 1: INTRODUCCION AL ÁLGEBRA

La Matemática admite diversos marcos de representación, pero su lenguaje específico es el resultado de la combinación coherente de signos y símbolos.
El lenguaje ***lógico proposicional*** *es un excelente recurso que permite comunicar con precisión las ideas matemáticas, a la vez que beneficia la formación de estructuras generales de argumentación.*
Los modelos matemáticos que involucran procesos de ordenación y clasificación pueden aplicarse y extenderse a situaciones diferentes en diversos campos del saber.
El concepto de ***función*** *y sus múltiples aplicaciones constituyen el eje central de todo pensamiento matemático.*
El ***Álgebra de Boole*** *en su forma bivalente, es la herramienta matemática adecuada para el análisis del funcionamiento de los ordenadores por su trabajo con información binaria.*

Objetivos:

- Reconocer los modelos del **Álgebra de Boole** y sus aplicaciones en distintas situaciones problemáticas.
- Utilizar correctamente el lenguaje **lógico proposicional** y el **lenguaje conjuntista**.
- Interpretar y aplicar la teoría de **circuitos lógicos**.
- Reconocer y clasificar: **relaciones de orden, de equivalencia y funciones**, dadas por diferentes representaciones y definidas en diversos conjuntos, finitos o no.
- Reconocer las **operaciones binarias internas**.

❖ Ejercitación para desarrollar junto con el profesor en clase

PARTE A: MODELOS DEL ALGEBRA DE BOOLE

LÓGICA PROPOSICIONAL

Ejercicio 1

Indica cuáles de las siguientes expresiones corresponden a proposiciones.

a) *Hoy es lunes.*
b) $4 . 5 = 5 . 4$
c) $Z \subset IN$
d) *¡Qué calor hace!*
e) *¿Las mesas están con manteles?*
f) *Me gustaría ir al circo.*
g) $2+3 = 6$

Ejercicio 2

Escribe los siguientes enunciados usando proposiciones y conectivos lógicos.

a) $4+3 =7$ *ó* $15 - 8 =7$
b) *1/3 es un número entero y 3 es natural.*
c) $6+8 =23$ *entonces* $(2)^0 = 1$
d) *El mes de julio tiene 31 días si y solo si agosto tiene 30 días.*

Ejercicio 3

Encuentra el valor de verdad para las siguientes proposiciones compuestas:

a) *2 es un natural y 2/5 es un entero.*
b) *Si 0,4 es un numero racional entonces -0,45 es un número real.*
c) *La suma de la medida de los ángulos interiores de un octógono es igual a 1080° o posee 5 diagonales.*
d) *Un paralelogramo es un cuadrilátero si y solo si un triángulo es un polígono.*

Ejercicio 4

Siendo p una proposición verdadera, q falsa y r verdadera, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $-[(p \vee -r)] \wedge (q \Rightarrow -p)$
b) $(p \vee -r) \wedge (q \vee -p)$
c) $(r \Rightarrow -q) \vee (p \Leftrightarrow -r)$

Ejercicio 5

Construya tablas de verdad para las siguientes proposiciones compuestas, e indique si es una tautología, contradicción o contingencia:

a) $-(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-p \vee q)$
b) $(p \vee r) \Leftrightarrow [(-p \vee q) \Rightarrow -r]$
c)- $[(-p \vee q) \wedge (-q \vee p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
e) $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow [(q \vee r) \wedge p)]$
f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

Ejercicio 6

Construye las tablas de verdad para demostrar que las siguientes propiedades son tautologías.

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-p \vee q)$
b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

Ejercicio 7

Aplica sucesivamente las leyes lógicas para simplificar las siguientes proposiciones lógicas:

a) $(p \vee q) \wedge -q$
b) $-(p \wedge q) \vee p$
c) $(q \Rightarrow p) \vee q$
d) $-(p \vee -q) \wedge -p$

Ejercicio 8

Transforme las siguientes oraciones en proposiciones verdaderas utilizando cuantificadores.

a) $x - 3 = 5$
b) $2x - 3 \leq 12$
c) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
d) $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$

Ejercicio 9

Niegue las siguientes proposiciones cuantificadas:

a) $(\exists x)\ (x \in IR):(x-4 \leq 3)$

b) $(\forall x)\ (x \in IR):(x-4)(x+4)=x^2-16$

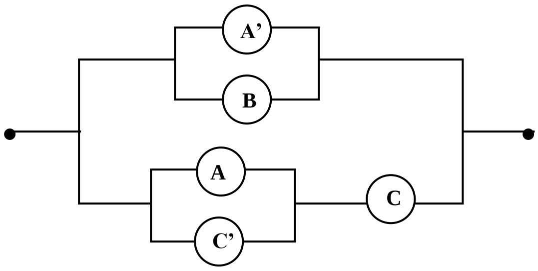
c) $(\exists x)\ (x \in IR):(3x+5 > 8+x)$

d) $(\forall x)\ (x \in IR):(x-3)^2=x^2-9$

CIRCUITOS LÓGICOS

Ejercicio 10

Escriba la fórmula de Boole que corresponde al circuito lógico dado:



Ejercicio 11

Dibuje la red del circuito lógico correspondiente a la expresión simbólica dada:

[(A + B) ● C] + (A’ + B’) .

Ejercicio 12

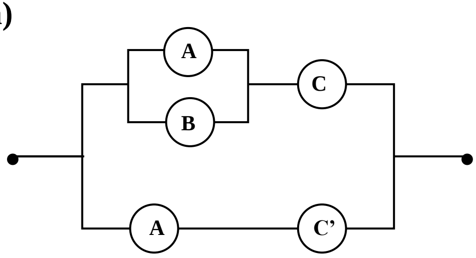
Dibuje un circuito lógico que responda a cada una de las fórmulas dadas y construya las tablas respectivas:

a) *(A+B) ● (A●C)*
b) *A● (A’+B) ●C*
c) *(A●B●C) + (A● B’ ●C’) + (A’●B●C)*

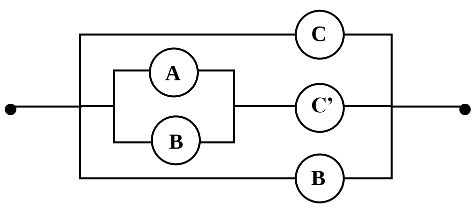
Ejercicio 13

Determine en qué posiciones de las llaves circula corriente entre los terminales de los circuitos lógicos representados a continuación:

a)



b)



Ejercicio 14

Aplicando las propiedades anteriores, simplifica los siguientes circuitos lógicos:

a) $A'\bullet(B+A)'$
b) $(A+B')\bullet(A+B)$
c) $(A\bullet B')'+B$
d) $(A'\bullet B) + (A+B)'$
e) $(A'\bullet B'\bullet D')+(A'\bullet B\bullet D') +(A'\bullet B\bullet D) +(A\bullet B\bullet D)$
f) $(A'\bullet C\bullet D)+(A\bullet C\bullet D)+(A'\bullet B'\bullet D)+(A'\bullet B'\bullet C)+(A\bullet B'\bullet D)+(A\bullet B'\bullet C)$

LENGUAJE CONJUNTISTA

Ejercicio 15

Escribe por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x: x\in IN, 4 \leq x < 7\}$
b) $B = \{x: x\in Z, x - 11 = -9\}$
c) $C = \{x: x\in IR, x^2 -25 = 0\}$

Ejercicio 16

Sea el conjunto $H = \{x: x\in IN, 2 \leq x \leq 50$, *x es múltiplo de 5 pero no es múltiplo de 2*$\}$. *Determina el número de elementos del conjunto H, es decir el cardinal de H.*

Ejercicio 17

Siendo $A= \{m, p, o, t\}$, *se puede afirmar que:*

a) $\{m, o\} \subset A$ b) $p \subset A$ c) $\{m\}\not\subset A$ d) $\{e,m\} \subset A$

Ejercicio 18

Determina si el número de elementos del conjunto P (A) es menor, mayor o igual al de P (B), siendo $A=\{a, b, c\}$ *y* $B=\{x: x\in Z, x +10 = 18\}$.

Ejercicio 19

Si $A = \{1, 3, 5, 7\}$ *y* $B= \{2, 4, 6\}$ *coloca V ó F según corresponda:*

a) $\{1,3\} \in P(A)$ b) $P(A) = \{\{1\}, \{3\}\}$ c) $P(B)$ *tiene 8 elementos*
d) $P(A) = P(B)$

Ejercicio 20

Siendo $G = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $H = \{2, 3, 4, 5\}$, *encuentra el conjunto* $G\cup H$ *por extensión y por diagrama de Euler-Venn.*

Ejercicio 21

Sean los conjuntos $A = \{x : x \in Z; |x| < 2\}$ *y* $B = \{x : x \in Z; -2 \leq x \leq 3\}$, *determina por comprensión los conjuntos:*

a) $A \cap B$ *b)* $A \cup B$

Ejercicio 22

A y B son conjuntos cualesquiera. Existen elementos de A que pertenecen al conjunto B, entonces la proposición verdadera es:

a) $A \cup B = B \cup A$
b) *B es un subconjunto de A*
c) *A y B son conjuntos disjuntos*
d) $A \cap B = \{\}$

Ejercicio 23

Se sabe que $A \cup B \cup C = \{x: x \in IN, 1 \leq x \leq 10\}$, $A \cap B = \{2,3,8\}$, $A \cap C = \{2,7\}$, $B \cap C = \{2,5,6\}$ *y que* $A \cup B = \{x: x \in IN, 1 \leq x \leq 8\}$. *Determina el cardinal del conjunto C.*

Ejercicio 24

Siendo $A = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, *se puede afirmar que:*

a) $\{1\} \notin A$ *b)* $\{1\} \subset A$ *c)* $(\{2\} \cap \{1\}) \not\subset A$ *d)* $(\{1\} \cap \{2\}) \subset A$

Ejercicio 25

Siendo $E = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b\}$ *y* $B = \{c, d, e\}$, *determina el valor de verdad para las proposiciones compuestas:*

a) $[(\{a, b\} \subset E) \Rightarrow (B \subset \{\})] \vee (d \subset B)$
b) $((A \cup B) \cap E = E) \Leftrightarrow (A \cap B \neq \{\})$
c) $(E = \{a, b, c\} \cup A) \wedge (B \cap E \neq \{\}) \Rightarrow (A = \{a, b, c, d\} \cap E)$

Ejercicio 26

Considera los conjuntos $A = \{x: x \in IR, x^2 - 16 = 0\}$ *y*
$B = \{x: x \in Z, -4 \leq x < 5\}$, *determina por extensión los conjuntos: A-B y B-A.*

Ejercicio 27

Sean los conjunto $A = \{x: x \in IN$, *x es múltiplo de 6 y menor que 18*$\}$ *y*
$B = \{x: x \in IN$, *x es divisor de 6*$\}$. *Determina por extensión:*

a) $A \cap B$
b) $A - (A \cup B)$
c) $A - (B \cap A)$
d) $(B - A) \cup A$

Ejercicio 28

Siendo E = {a, b, c, d, e, f, g}, A = {a, b, c, d} y B ={c, d, e, f, g}, determina por extensión:
a) E-A
b) (B'∪A)
c) (A∩ B)'
d) A' ∩ (B'∩ A)

Ejercicio 29
Aplica las leyes del lenguaje de conjuntos para simplificar:

a) $B \cup (B' \cap A)$ *c)* $(A \cap B') \cup (A \cap B)$

b) $B \cap (B' \cup A)$ *d)* $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B')$

PARTE B: RELACIONES y FUNCIONES

Ejercicio 30
Marca la respuesta correcta:

- *Si A = {x: x ∈ Z, x^2 + 4 = 0} y B = {x: x ∈IR, 2(x-3) = 2} entonces:*

a) (4, -4) ∈ AXB *b) (-4, 3) ∈ AXB* *c) AXB ≠ { }* *d) AXB = { }*

- *Si AXB = {(b,2), (b,3),(b,4)} , es falso que:*

a) (b, 2) ∈ AXB *b) {(b, 2)} ∈ AXB* *c) (b, 3) ∈ AXB* *d) ∅ ⊂ AXB*

- *Si A = {x: x ∈IN, x^2 -25 = 0} y B = {x: x ∈Z, -3≤ x <3} entonces:*

a) AXB tiene 12 elementos *b) AXB = { }* *c) AXB= BXA* *d) AXB tiene 6 elementos*

- *Si AXB = {(a,2), (a,3),(a,4), (a,5), (a,6)} , entonces:*

a) A= {a} y B={2,3,4,5,6} *b) B= {a} y A={2,3,4,5,6}* *c) A=∅ y B=∅* *d) A=B*

- *Si A = {x: x ∈Z, x^2 + 16 = 0} y B = {x: x ∈IN, -2≤ x≤ 5 } entonces:*

a) AXB = { } *b) AXB tiene 5 elementos* *c) AXB≠ AXA* *d) AXB tiene 10 elementos*

Ejercicio 31

Mediante gráficas cartesianas represente las siguientes relaciones definidas en IR x IR.

a) $R_1 = \{(x,y): (x,y) \in IR \times IR \wedge x \geq y\}$

b) $R_2 = \{(x,y): (x,y) \in IR \times IR \wedge x < y \wedge y < 2\}$

c) $R_3 = \{(x,y): (x,y) \in IR \times IR \wedge 0 \leq x \wedge y \leq 3\}$

Ejercicio 32

Sean los conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, mediante un diagrama de flechas represente la relación R definida de A en B tal que $(x\,R\,y \Leftrightarrow y = 2x)$. Determina su conjunto imagen.

Ejercicio 33

Define por extensión, la relación inversa de R definida de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{0, 1, 2, 3\}$, donde: $(a, b) \in R \Leftrightarrow a+b < 4$.

Ejercicio 34

Sea el conjunto $A = \{1, 2, 6, 4\}$:

a) *Mediante un diagrama de flechas represente la relación R definida en AXA tal que $(x\,R\,y \Leftrightarrow x \leq y)$.*

b) *Defina por extensión la relación R definida en AxA dada por: $x\,R\,y \Leftrightarrow y = x - 5$.*

c) *Mediante un diagrama cartesiano defina la relación R definida en AXA dada por: $(a, b) \in R \Leftrightarrow a+b < 4$.*

Ejercicio 35

Sea el conjunto $A = \{2, 3, 5\}$ y la relación $R = \{(x, y) / (x,y) \in AxA \wedge 2 / x+y\}$. Analiza si dicha relación es de equivalencia.

Ejercicio 36

Sea $A = \{a, b, c, d\}$, y $R = \{(a,a);(b,b);(a,b);(c,d);(b,c)\}$, agregue los pares necesarios para que la relación sea reflexiva y simétrica.

Ejercicio 37

Dado el conjunto $E = \{a, b\}$

a) *Determine P(E) por extensión.*

b) *Dada la relación $R_{\subset} = \{(X, Y): (X, Y) \in P(E) \times P(E) \wedge X \subset Y\}$, construya el diagrama cartesiano.*

c) *Justifique por qué la relación inclusión dada en P(E) es una relación de orden.*

Ejercicio 38

Analice si las siguientes relaciones son de orden:

a) *$R = \{(x,y): (x,y) \in IN$, el máximo común divisor entre x e y es 1$\}$*

a) *En* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $R = \{(1,1);(2,1);(3,1);(4,1)\}$

Ejercicio 39
Verifique si las siguientes relaciones definidas de A= {a, b, c} en B = {1, 2, 3}, son funciones. Justifique sus respuestas.

a) $\mathrm{R}_1 = \{(\mathrm{a},1);(\mathrm{b},1);(\mathrm{c},1)\}$

b) $R_2 = \{(a,1);(b,2)\}$

c) $R_3 = \{(a,1);(b,1);(a,2);(b,3)\}$

Ejercicio 40
Analiza si cada una de las siguientes funciones son biyectivas sobre IR.

a) f: IR→IR, dada por f(x) = 2x-3
b) g: IR→IR, dada por $g(x) = 3x^2 - 4$
c) h: IR→IR, dada por $h(x) = x^3+1$
d) i: IR→IR, dada por i(x) = 7

Ejercicio 41
Se consideran las funciones f: IR→IR, dada por $f(x) = 7x^3 - 1$*, g: IR→IR, dada por g(x) = x+5 y h: IR→IR, dada por h(x) = 3x. Expresa mediante los esquemas funcionales correspondientes las siguientes funciones compuestas:*
a) fog *b) gof* *c) hof* *d) fof* *e)* hog^{-1} *f)* $(gog)^{-1}$

- **Ejercitación adicional propuesta para el alumno**

Ejercicio 42
Encuentra el valor de verdad para las siguientes proposiciones compuestas:

a) *Si 3/2 es un nº racional y 1,6 es un nº real entonces 12,83 es irracional.*
b) *En un octógono la suma de las medidas de los ángulos interiores es igual a 1030º si y solo si el número de vértices es igual a 5.*
c) *La medida del complemento del ángulo α siendo* $\left|\hat{\alpha}\right|$ *= 32º 12´ es igual a 180º +* $\left|\hat{\alpha}\right|$*, entonces la medida de su suplemento es de 148º.*
d) *Siendo x, y números reales si* $(\frac{x-y}{y-x})^{10} = 1$ *entonces* $(\frac{x-y}{y-x})^{10} = 10$.

e) *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes si y solo si la medida del suplemento del ángulo* $\left|\hat{\alpha}\right|$ *= 35º 10´ es igual a 145º.*

<u>Ejercicio 43</u>

Siendo p y q proposiciones falsas. Para que la proposición compuesta sea verdadera, ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición r? $(-p \Leftrightarrow r) \wedge (p \Rightarrow q)$

<u>Ejercicio 44</u>

Considere las siguientes observaciones:

"Sólo hay dos formatos de foto: rectangular y cuadrada. Las fotos son en color o en blanco y negro. Si la foto es cuadrada, entonces es una foto en blanco y negro. Si es rectangular, es una foto digital en color. En caso de que la foto sea en blanco y negro o digital, entonces es un retrato. Si es un retrato, es la foto de mi amigo."

a) Construya la base de conocimiento escribiendo las proposiciones compuestas que representen lo expresado en el párrafo anterior.
Para escribir las proposiciones compuestas, utilice las proposiciones simples p,q,r,s,t,u,v.

Proposición Simple	Interpretación
p	la foto es en color
q	la foto es en blanco y negro
r	la foto es cuadrada
s	la foto es rectangular
t	la foto es digital
u	la foto es un retrato
v	la foto es de mi amigo

Enunciado	Proposición compuesta
1. Sólo hay dos formatos de foto: rectangular y cuadrada.	
2. Las fotos son en color o en blanco y negro.	
3. Si la foto es cuadrada, entonces es una foto en blanco y negro.	
4. Si es rectangular, es una foto digital en color.	
5. En caso de que la foto sea en blanco y negro o digital, entonces es un retrato.	

6. Si es un retrato, es la foto de mi amigo.	

Ejercicio 45

Simplifique las siguientes proposiciones utilizando leyes lógicas:

$\left[\left(p \vee q\right) \wedge -q\right] \vee q$ **b)** $\left[\left(-p \vee q\right) \vee -p\right] \Rightarrow q$ *c)* $[(p \wedge q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \wedge -p)$

Ejercicio 46

Niegue las siguientes proposiciones cuantificadas:

a) $\exists \mathrm{x} / \mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee -\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ *b)* $\forall \mathrm{x} : \mathrm{P}(\mathrm{x}) \Rightarrow \mathrm{Q}(\mathrm{x})$

Ejercicio 47

Si la proposición compuesta: $\mathrm{p} \Rightarrow (\mathrm{q} \wedge \mathrm{r})$ *es falsa y* $[(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \Leftrightarrow (\mathrm{r} \wedge \mathrm{p})]$ *es verdadera, ¿Qué puede concluir respecto a los valores de verdad de* ***p***, ***q*** *y* ***r*** *?*

Ejercicio 48

Dibuje un circuito lógico que responda a cada una de las formulas dadas y construya las tablas respectivas:

a) $(\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \bullet (\mathrm{R} + \mathrm{Q'})$ *b)* $(\mathrm{P} \bullet \mathrm{Q})' + (\mathrm{P}' \bullet \mathrm{Q})'$ *c)* $(P+R')+(Q+Q')$

Ejercicio 49

Sean los conjuntos $A = \{x : x \in Z; |x| < 2\}$ y $B = \{x : x \in Z; -2 \leq x \leq 3\}$, determina por comprensión los conjuntos:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A - B$ d) $B - A$

Ejercicio 50

Marque la respuesta correcta:

- *Sean los conjuntos A que posee 2 elementos, el conjunto B con 3 elementos y el conjunto C con 4 elementos. Se puede afirmar que:*
  a) A∩B tiene como máximo 1 elemento
  b) AUB tiene como máximo 6 elementos
  b) *(AUB) ∩C tiene como máximo 2 elementos*
  c) *(A∩B) ∩C tiene como máximo 2 elementos*

- *Si* $A = \{x: x \in Z, x^2 + 5 = 0\}$ *y* $B = \{x: x \in IR,\ 2(x-3) = 4\}$ *entonces:*

a) $(5, 5) \in AXB$ *b)* $(-5, 5) \in AXB$ *c)* $AXB \neq \{\}$ *d)* $AXB = \{\}$

- *Se sabe que* $AUBUC = \{x: x \in IN, 1 \leq x \leq 10\}$, $A \cap B = \{2,3,8\}$, $A \cap C = \{2,7\}$, $B \cap C = \{2,5,6\}$ *y que*

$AUB = \{x: x \in IN, 1 \leq x \leq 8\}$, *entonces:*

a) $C=\{9,10\}$ *b)* $C=\{5,6,9,10\}$ *c)* $C=\{2,5,6,7\}$ *d)* $C=\{2,5,6,7,9,10\}$

- *Siendo* $A=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, *se puede afirmar que:*

a) $\{1\} \notin A$ *b)* $\{1\} \subset A$ *c)* $(\{2\} \cap \{1\}) \not\subset A$ *d)* $(\{1\} \cap \{2\}) \subset A$

- *Si* $AXB = \{(b,2), (b,3),(b,4)\}$, *entonces:*

a) $(b, 2) \subset AXB$ *b)* $\{(b, 2)\} \in AXB$ *c)* $b \in AXB$ *d)* $\varnothing \subset AXB$

- *Si* $A = \{1,2,3\}$ *y* $B = \{2,3,5\}$, *siendo x e y dos variables de A y B respectivamente, entonces:*

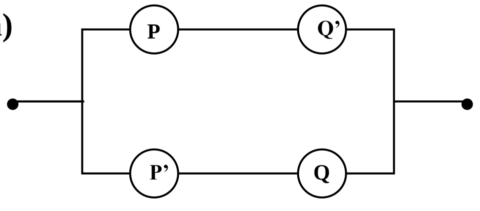
a) $(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (x, y) \in BXA$ *b)* $(\forall x)(x \in A)(\forall y)(y \in B) \Rightarrow (x, y) \in BXA$

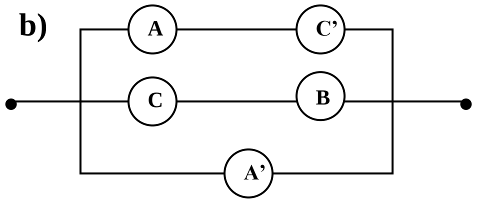
c) $(\forall x)(x \in A)(\forall y)(y \in B) \Rightarrow (x, y) \in AXB$ *d)* $(\forall y)(y \in B) \Rightarrow (x, y) \in BXA$

- *Sea el conjunto* $H = \{x: x \in IN, 2 \leq x \leq 40$, *x es múltiplo de 2 pero no es múltiplo de 3}. El número de elementos de H es:*

a) 12 *b) 9* *c) 15* *d) 14*

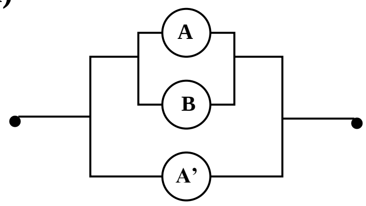
Ejercicio 51
Construya un circuito lógico más simple equivalente a los dados:

a)


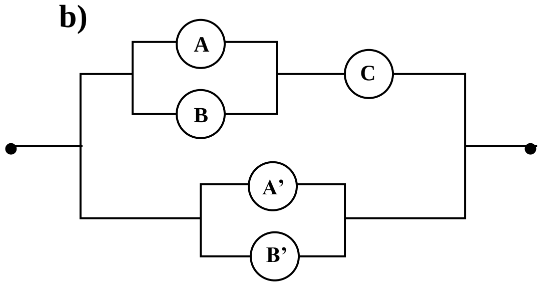
b)


Ejercicio 52
Escribe la fórmula de Boole, para cada una de las siguientes redes que aparecen en las figuras y construye las tablas respectivas.

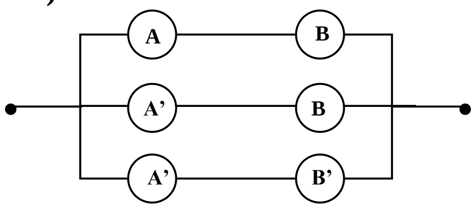
a)



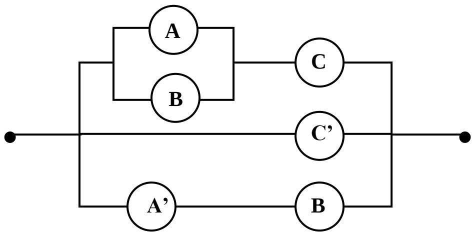
b)



c)



d)



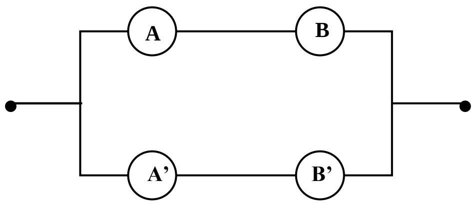
Ejercicio 53

Simplifica los siguientes circuitos lógicos:

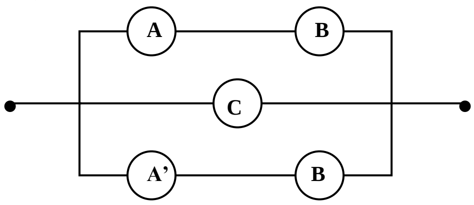
a) $(A + B).A'$

b) $(A'.B') + (A'.B)$

c)



d)



Ejercicio 54

Sea el conjunto A = {a, b, c, d}, determine qué propiedades cumplen las siguientes relaciones definidas en A:

a) R_1 = { (a, b) ; (c, d) ; (b, b) ; (b, a) ; (d, a) }

b) R_2 = { (d, b) ; (b, d) ; (b, b) }

c) R_3 = { (a, a) ; (d, d) ; (b, b) ; (c, c) }