CAPÍTULO II:

INFINITÉSIMOS- LÍMITES NOTABLES- TEOREMAS

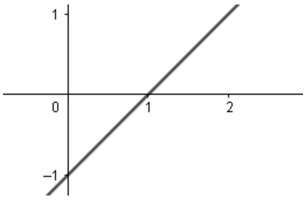
➢ **INFINITÉSIMO EN UN PUNTO**

Definición:

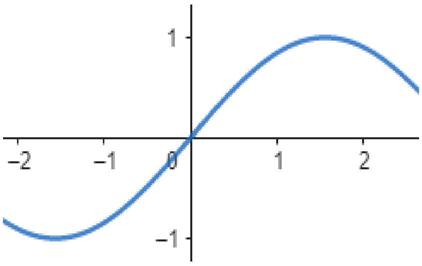
La función f es un infinitésimo en $x = a$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Ejemplos:

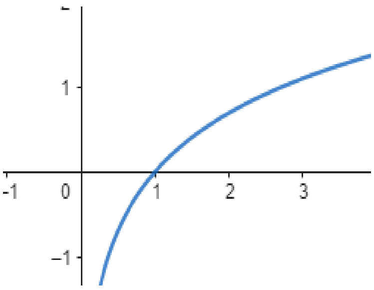
a) $f(x) = x - 1$ es un infinitésimo en $x = 1$ ya que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$



b) $f(x)=$ sen x es un infinitésimo cuando $x \to 0$ ya que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$



c) $f(x)= \ln x$ es un infinitésimo cuando $x \to 1$ ya que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$



Observe que decir que f es un infinitésimo en $x = a$ significa que para valores de x muy próximos al número **a**, la función toma valores muy cercanos a cero.

Generalmente para distinguirla de las otras funciones se designa un infinitésimo con un letra griega, como por ejemplo **φ, ϕ , o χ .**

- **Propiedades de infinitésimos**

1. **Sean f y g dos infinitésimos en x = a**

a) (f ± g)(x) también es un infinitésimo en x = a (demostrar aplicando límite de la suma)

b) (f . g) (x) también es un infinitésimo en x = a (demostrar aplicando límite del producto)

c) (f / g) (x) El cociente de dos infinitésimos en x = a NO siempre es otro infinitésimo. Esto depende del orden de los infinitésimos.

Ejemplo 1:

f(x) = x² es un infinitésimo en x = 0 porque $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

g(x) = x⁴ también es un infinitésimo en x = 0 porque $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$

a) Analizamos la suma

$\lim_{x \to 0} \left(x^2 + x^4\right) = 0 + 0 = 0$ la función **(f + g) (x)** es un infinitésimo en x=0

b) Analizamos el producto

$\lim_{x \to 0} \left(x^2 . x^4\right) = 0.0 = 0$ la función **(f. g) (x)** es un infinitésimo en x=0

c) Analizamos la division

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{x^4}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$ la función **(f/g) (x)** no es un infinitésimo en x=0

d) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^4}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$ la función **(g/f) (x)** es un infinitésimo en x=0

- **Orden de los infinitésimos**

El orden del infinitésimo es la rapidez con la que tiende al cero.

Dados dos infinitésimos f y g en un mismo punto x=a , se puede comparar cuál es el de mayor orden de los dos, haciendo el cociente entre ambos

- Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ entonces el numerador es de mayor orden que el denominador
- Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ entonces el denominador es de mayor orden que el numerador
- Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ **con k ≠0** entonces el numerador y el denominador son del mismo orden

En el ejemplo anterior:

f(x) = x² es un infinitésimo en x = 0 porque $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

g(x) = x⁴ también es un infinitésimo en x = 0 porque $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$

Dados estos infinitésimos, queremos saber cuál es el de mayor orden, planteamos entonces el cociente

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\infty$$

Si el límite del cociente es infinito, entonces el denominador es de mayor orden que el numerador, por lo tanto:

$f(x)=x^4$ es de mayor orden que $g(x)= x^2$

Ejemplo 3:

$f(x) = x^3 - 2x^2$ es un infinitésimo en x = 2

$g(x) = x - 2$ es un infinitésimo en x = 2

Si hacemos el cociente entre ellos, y calculamos su límite para x →2, nos da $\frac{0}{0}$

Salvando la indeterminación nos queda

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x-2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2.(\ x-2)}{x-2}=4\neq 0$$

Como el límite del cociente dio un número distinto de 0, son INFINITÉSIMOS DEL MISMO ORDEN, es decir que tienden a x=2 con la misma rapidez

- **Infinitésimos equivalentes**

Dados dos infinitésimos f(x) y g(x) en un mismo punto x = a , se dice que **son equivalentes si y solo si:** $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ **(el límite del cociente es igual a 1)**

Esto significa que muy cerca del punto x = a, los valores que ambas funciones toman son prácticamente iguales, por eso el cociente tiende a 1

Ejemplo 4:

f(x) = sen x es un infinitésimo en x = 0 por que $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen} x = 0$

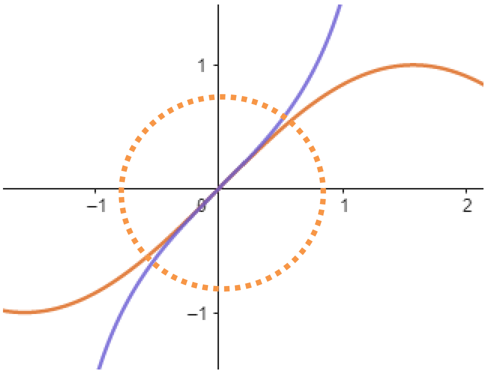
g(x) = tg x es un infinitésimo en x = 0 por que $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x = 0$

Si hacemos el cociente entre ellos, y calculamos su límite para x →0, nos da $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

Significa que ambos infinitésimos son equivalentes en x =0

¿Qué significa que son equivalentes?



en azul g(x) = tg (x)

en rojo f(x) = sen (x)

Si observamos sus gráficas, vemos que los valores que toman ambas funciones son prácticamente iguales, muy cerca de cero.

Quiere decir que si dos infinitésimos son equivalentes en un punto x = a, ambas funciones toman los mismos valores muy cerca del punto x= a

Ejemplo 5

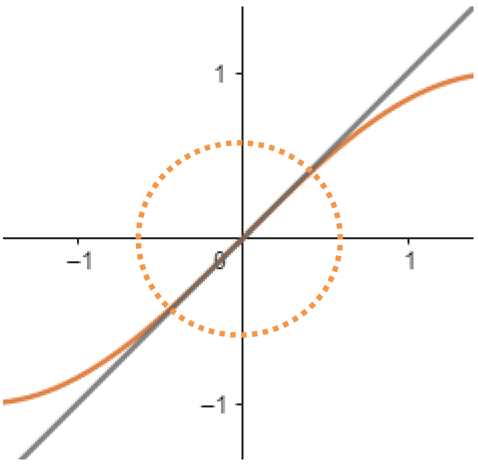
Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

No tenemos manera algebraica de salvar esa indeterminación

Sin embargo (Usando la regla de L'Hopital que veremos después) podemos demostrar que dicho límite es 1, es decir:

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$ significa que las funciones f**(x) = sen x** y **g(x) = x** son infinitésimos equivalentes muy cerca del cero , gráficamente:



y= x

y= sen x

Vemos que para valores de x muy cercanos a 0, ambas funciones toman prácticamente los mismos valores.

POR LO TANTO, SE PODRÍA REEMPLAZAR A UNA DE ELLAS POR LA OTRA, pero solamente para valores muy cercanos a cero, y esto ayudaría por ejemplo a salvar algunas indeterminaciones

- **Limites notables**

Existen algunos límites que tienen un formato particular, y se los llama **Limites notables,** y son los siguientes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen x}}{\text{x}} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg x}}{\text{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{x}}{\text{sen x}} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{x}}{\text{tg x}} = 1$$

Observen que, en todos los casos, x tiende a cero, x es el argumento de la fc trigonométrica, el límite da 1, y el límite del recíproco no cambia

Sin embargo, se puede hacer una generalización de los notables, y establecer que:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen (kx)}}{\text{kx}} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg (kx)}}{\text{kx}} = 1$ **y sus recíprocos también**

Siendo k ≠0

Ejemplo 6:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(6x)}{6x} = 1$$

Y como el límite es 1, son **f(x)= sen(kx)** y **g(x)= kx** **infinitésimos equivalentes**, y puede ser reemplazado uno por el otro (solamente muy cerca del cero)

Y esto conviene usarlo para salvar algunas indeterminaciones

Ejemplo 7:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen (4x)}}{3x} \left(\frac{0}{0}\right)$ no es un notable porque el argumento no coincide con el denominador

Para salvar la indeterminación usamos el concepto de infinitésimos equivalentes.

Como **y = sen (4x)** es equivalente a **y = 4x** cerca de x = 0, podemos reemplazar a **sen(4x)** por **4x** , y nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen (4x)}}{3x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(4x)}{3x} = \frac{4}{3}$$

o también

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen (4x)}}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \left(4.\frac{\text{sen (4x)}}{4x}\right) = \lim_{x\to 0} 4 . \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen (4x)}}{4x} = 4.1 = 4$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\text{sen } 4x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

como tan(2x) es equivalente a 2x y sen(4x) es equivalente a 4x, en x=0 reemplazamos y nos queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\operatorname{sen}4x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

o

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\operatorname{sen}4x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(2x.\frac{\tan(2x)}{2x}.\frac{4x}{\operatorname{sen}(4x)}.\frac{1}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}.\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right]=1.1=1$$

Este último ejercicio nos permite generalizar a la siguiente propiedad:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^k(x)}{x^k}\left(\frac{0}{0}\right)=\mathbf{1}$$

Ejemplo:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3(x)}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)=\mathbf{1}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^4(x)}{x^4}\left(\frac{0}{0}\right)=\mathbf{1}$

- **TEOREMAS SOBRE LIMITE FINITO Y ÚNICO**

1) Teorema del signo del límite

Sea f una función que tiene límite L en un punto x = a de acumulación del dominio:

- **Si L es positivo, existe un entorno reducido del punto a, donde la función también es positiva**

  En símbolos:

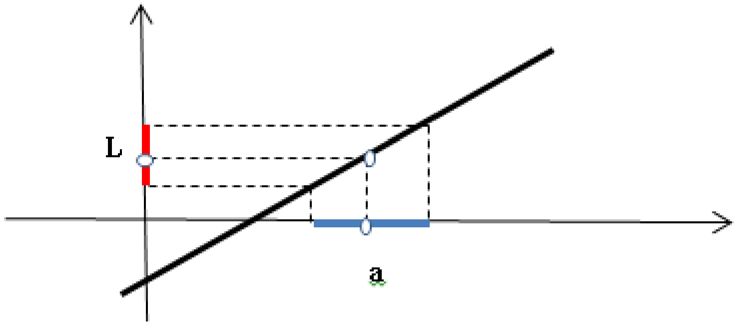
  L> 0 entonces $\exists$ E*(a,∂) : $\forall$x $\in$ E* (a,∂) , f(x) > 0

- **Si L es negativa, existe un entorno reducido del punto a, donde la función también es negativa**

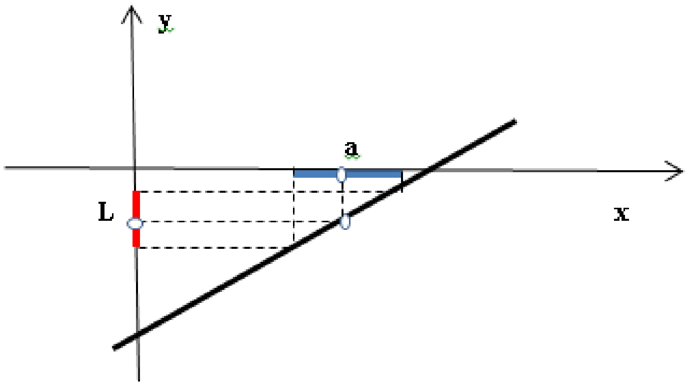
  En símbolos:

  Si L < 0 entonces $\exists$ E*(a,∂) : $\forall$x $\in$ E* (a,∂) , f(x) < 0

Esta propiedad asegura que la fc. y = f (x) tiene el mismo signo que su límite al menos muy cerca del punto.



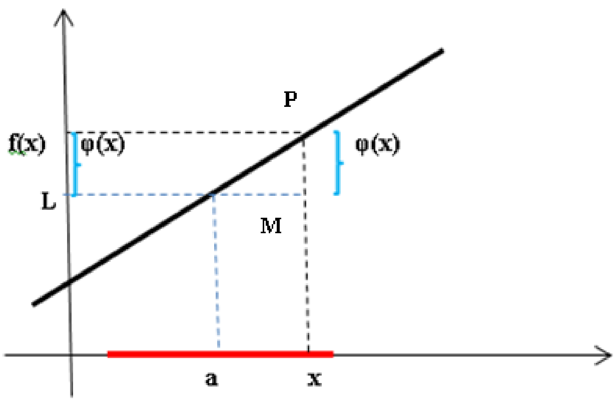
En este caso como el límite es positivo, las imágenes también lo son al menos cerca de a



En este caso como el límite es negativo, las imágenes también lo son al menos cerca de a

2) Teorema fundamental de límite

Si una función tiene límite L en un punto a de acumulación de su dominio entonces existe un entorno reducido del punto donde la función es igual a su límite más un infinitésimo.



medida de seg PM = φ (x)

medida de seg xM = L

medida de seg xP = f(X)

Gráficamente se observa que seg xP= seg xM + seg MP es decir **f(x) - L = φ (x)**