EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Def: una EDP e' un'equazione funzionale della forma $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, D^k u(x)) = 0$

- D^k : derivazione di ordine $k \in \mathbb{N}$
- $\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ (aperto, conesso) le derivate sono ben definite sugli aperti: se prendo un punto dentro un aperto, ovvero tutto un intorno in un aperto, possiamo fare i rapporti incrementali in qualunque direzione
- $u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione scalare

ho un'espressione puntale $\forall x$ uso le derivate forti

- $Du(x) = \nabla u(x)$: $Du(x) = \left(\frac{du}{dx_1}(x), \dots, \frac{du}{dx_N}(x)\right)$ $\quad D^2u(x) = \left(\frac{du(x)}{dx_i dx_j}\right)_{i,j=1\dots N}$ matrice hessiana
- Sia $\alpha \in \mathbb{N}^N$: $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_N)$ vettore di numeri interi non negativi quante derivate faccio rispetto alla variabile con il pedice opportuno

ha tante componenti quante sono le dimensioni dello spazio di partenza

$$\Rightarrow \boxed{D^\alpha u(x) = \frac{d^{|\alpha|} u(x)}{dx_1^{\alpha_1} \cdots dx_n^{\alpha_n}}} \qquad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N \text{ lunghezza del multindice } \alpha$$

Definizione 2.1.1. *Una equazione alle derivate parziali di ordine $k \in \mathbb{N}$ è una relazione funzionale che coinvolge una funzione, la sua variabile indipendente e le derivate della funzione fino all'ordine k, ovvero una scrittura della forma*

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, D^k u(x)) = 0 \quad \textit{per ogni } x \in \Omega, \qquad (2.1)$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto e dove $F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{N^k} \to \mathbb{R}$ è una funzione data. La relazione (2.1) si può scrivere anche in forma compatta come

$$F(x, D^\alpha u(x)) = 0 \quad \textit{per ogni } x \in \Omega \textit{ e per } \alpha \in \mathbb{N}^N \textit{ con } |\alpha| \le k. \qquad (2.2)$$

ES se $N = 3$ $\quad u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $|\alpha| = 4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ $\quad D^\alpha u$ sono derivate quarte

- $\alpha = (4,0,0)$ $\quad D^\alpha u = \frac{d^4 u}{dx_1^4}$
- $\alpha = (1,2,1)$ $\quad D^\alpha u = \frac{d^4 u}{dx_1 dx_2^2 dx_3} = \frac{d^4 u}{dx dy^2 dz}$

$F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{N^k} \longrightarrow \mathbb{R}$

$k=2$ EDP del 2° ordine $F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2} \longrightarrow \mathbb{R}$

ES $-\Delta u = 0$ eq di Laplace : $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dx_i^2}$ $\quad -\Delta u = -\left(\frac{d^2u}{dx_1^2} + \dots + \frac{d^2u}{dx_N^2}\right)$ simmetrica

$u_t = \frac{du}{dt} = d_t u \qquad u_{x_i} = \frac{du}{dx_i} = d_{x_i} u$

ES $u_t - \Delta u = 0$ eq del calore $\rightarrow$ forma non omogenea $u_t - \Delta u = f$

ES eq di Poisson $-\Delta u = f$ forma non omogenea dell'eq di Laplace

Classificazione delle EDP

omogenee o non omogenee / forzate per la modellizzazione di modelli fisici quello che succede a destra può essere che stiamo descrivendo una forza di volume che agisce sul dominio Ω

Analisi I: $y'' + a_1 y' + a_2 y = f$ $\quad$ 2° ordine non omogenea e lineare a coefficienti costanti $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

lineare : $y^{(j)}$ entrano in modo lineare, con potenza 1
$\downarrow$
vale il principio di sovrapposizione

coefficienti variabili : $y' + a(x)y = b(x)$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(x) \quad : \quad \underbrace{e^{A(x)}(y' + a(x)y)}_{(e^{A(x)}y(x))'} = e^{A(x)} b(x) \quad \Rightarrow \quad e^{A(x)} y(x) = \int e^{A(x)} b(x) + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)} b(x) dx + c\right)$$

$$(e^{A(x)}y(x))' = e^{A(x)} b(x)$$

Quando i coefficienti dipendono dal punto del dominio si creano problemi : se i coefficienti sono presenti bisogna imporre delle condizioni di integrazione

- **lineari** : della forma $\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = 0$ per certe funzioni $a_\alpha: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\sum_{m=1}^N a_m \underline{\alpha}_m$ combinazione lineare

quanti a_α devo avere? $N^2 + N + 1$ se la matrice hessiana e' simmetrica (C^2) allora e' simmetrica (se e' C^2)

ES $-\Delta u = 0 \iff$ $\cdot\ a_\alpha = 0$ $|\alpha| = 0$ $\quad \cdot\ a_\alpha = 0$ $|\alpha| = 1$ non ci sono derivate di ordine 1 $\quad \cdot\ a_\alpha = 0$ se $\alpha \ne (0,0,\overset{i}{2}, \dots 0)$ $\forall i$ $\quad \cdot\ a_\alpha = -1$ se $\alpha = (0,0,\overset{i}{2}, \dots 0)$ $\forall i$

$\cdot$ se $\alpha = (2,0 \dots 0) \longrightarrow a_\alpha = -1$ $\quad \cdot$ se $\alpha = (0,0,2 \dots 0) \longrightarrow a_\alpha = -1$ $\quad \cdot$ se $\alpha = (1,0,0,\dots 1,0) \longrightarrow a_\alpha = 0$

- **semilineari** $\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1}u(x)) = 0$ lineari nelle derivate di ordine massimo

- **quasi lineari** $\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1}u(x)) D^\alpha u(x) + a_0(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1}u(x)) = 0$

eq e' lineare rispetto alle derivate di ordine massimo con coefficienti che dipendono dalle derivate di ordine inferiore

$k = 2$ $\quad (d_{x_1} u(x))^2 \cdot d^2_{x_2} u(x) \dots$

- **completamente non lineare** : resto

se $\underline{u}: \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ vettoriale $\Rightarrow$ sistemi di equazioni parziali $\forall$ componente

se $d = N$ campi vettoriali

Lista di EDP

1. $-\Delta u = 0$ eq di Laplace $\qquad -\Delta u = f$ eq di Poisson $\qquad$ lineari a coefficienti costanti con hessiana simmetrica
   $\downarrow$
   $A = -Id_N$, $A = (a_\alpha)_{|\alpha|=2}$
2. se $(N+1)$ dimensionale $u_t - \Delta u = 0$ eq del calore o $u_t - \Delta u = f$ $\qquad$ t in N+1
3. eq. d'Alambert $\Box u = u_{tt} - \Delta u = 0$ $\quad$ o forzata $u_{tt} - \Delta u = f$ $\quad$ 2° ordine
4. eq onde con velocita' c $\Box_c u = u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ (f) $\quad$ 2° ordine
5. eq. eiconale $|\nabla u| = 1$ non e' lineare, 1° ordine $\qquad$ modulo del gradiente e' costante
6. Schrödinger 2° ordine $iu_t - \Delta u = 0$
7. eq trasporto $u_t + \underline{b} \cdot \nabla u = 0$
   $\downarrow$
   caso particolare di $u_t + \operatorname{div}(\underline{b}(x)\, u) = 0$ eq di continuita' $\quad$ 1° ordine, lineare
8. $u_t + \operatorname{div}(\underline{b}(x)\, u) - \sigma^2 \Delta u = 0$ $\qquad$ eq 2° ordine completa di Fokker-Planck
9. modifiche sul laplaciano : p-laplaciano $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$
10. eq Hamilton-Jacobi $u_t + H(x, \nabla u) = 0$
11. $\operatorname{div}(\underline{T}) = 0$ $\quad \underline{T} \leftrightarrow \nabla \underline{u}$ $\quad \underline{u}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \frac{\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T}{2} =: \underline{\varepsilon}$ gradiente simmetrizzato
    $\updownarrow$
    $\underline{\sigma} := \mathbb{C}\,\underline{\varepsilon}$ $\qquad \underline{\sigma}$ = tensore di stress, $\underline{\varepsilon}$ = tensore di elasticita', $\mathbb{C}$ = applicazione lineare da $\mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$
12. eq di Navier-Stokes $\begin{cases} \underline{u}_t + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \Delta \underline{u} = -\nabla p \\ \operatorname{div} \underline{u} = 0 \end{cases}$ $\qquad \underline{u}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
13. eq biarmonica $\Delta^2 u = 0$ $\qquad \Delta^2 = -\Delta(-\Delta)$ $\quad$ 4° ordine $\qquad \to$ in generale eq. poliarmoniche $\Delta^{2m} u = 0$

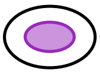
molte proprieta' delle eq del 2° ordine si perdono in ordini maggiori

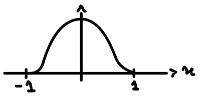
Nozioni di soluzione

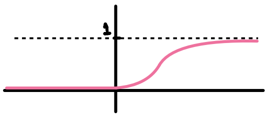
- CLASSICA/FORTE $\quad u \in C^k(\Omega)$ $\qquad$ k = ordine massimo di derivazione

  se $-\Delta u = f \Rightarrow u \in C^2$ $\qquad$ se $\Delta^2 u = g \Rightarrow u \in C^4$
- DEBOLE $\iff$ spazi di Sobolev $u \in W^{m,p}$ $\qquad$ m derivabilita', p integrabilita' $\qquad$ integrazione per parti $\int f' g = -\int f g'$ $\quad f, g = 0$ sul bordo
- DISTRIBUZIONALE $\quad u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

  $N = 1$ $\quad -\Delta u = -u'' = 0$ $\qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b) = C_c^\infty(a,b)$ $\qquad \langle -u'', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi'' \rangle$ deve valere $\forall$ funzione test funzioni a supporto compatto $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supporto } u \subset \Omega\}$ $\quad$ $\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$

se Ω e' aperto  Ω $\quad$ $\text{dist}(\text{supp } u, \partial\Omega) > 0$

Mollificatore di Friedrich 

$\phi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \le 0 \end{cases}$  $\phi'(t) = \begin{cases} e^{-1/t} \cdot \frac{1}{t^2} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \le 0 \end{cases}$ strettamente monotona

$\phi \in C^0(\mathbb{R})$

$\phi'_-(0) = 0 \qquad \phi'_+(0) = \lim_{t \to 0^+} \phi'(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t^2} = 0$ $\quad$ e' continua e derivabile nell'origine $\quad \Rightarrow \phi \in C^1(\mathbb{R})$

$\phi''(t) = \begin{cases} e^{-1/t}\left(\frac{1-2t}{t^4}\right) & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } \underset{= \text{ per tappabuchi}}{t \le 0} \end{cases}$ $\qquad t = \frac{1}{2}$ punto di flesso obliquo

$e^{-1/t}\left(\frac{1-2t}{t^4}\right) = e^{-1/t}\, P\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \dots \Rightarrow \phi \in C^\infty(\mathbb{R})$

sia $\underset{\mathbb{R}^N}{\underset{\cap}{\varphi(x)}} = \phi\left(1 - \|x\|^2\right) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}} & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{se } \|x\| \ge 1 \end{cases}$ $\qquad \text{supp}\varphi = \overline{B_1(0)}$

$\varphi_\varepsilon(x) := \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \frac{x}{\varepsilon} \in \overline{B_1(0)} \iff x \in \varepsilon \overline{B_1(0)} = \overline{B_\varepsilon(0)}$

$\varepsilon > 0 \quad \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ conserva la massa

convoluzione $f * g$ $\quad$ operazione regolarizzante: sposto le derivate sulla funzione più regolare

se $f * \tilde{\varphi}_\varepsilon \in C_c^\infty$ se f ha supp compatto

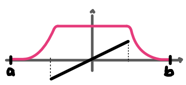
Lemma (fondamentale del calcolo delle variazioni) se $f \in C^0(a,b)$ e t.c. $\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b) \Rightarrow f \equiv 0$

dim: Per assurdo, sfruttando la continuita' di f ed il teorema della permanenza del segno

si suppone che $x_0 \in (a,b)$ sia t.c. $f(x_0) = \ell > 0$, $f \in C^0(a,b)$ e teo permanenza del segno allora $\exists \delta > 0 : f(x) > \frac{\ell}{2} \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$

sia $\underset{C_c^1(a,b)}{\underset{\cap}{\varphi(x)}} = \begin{cases} (x - x_0 - \delta)^2 (x - x_0 + \delta)^2 & \text{se } x \in I_\delta(x_0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow \int_{I_\delta(x_0)} f(x)\varphi(x)\,dx > 0$ $\quad$ 4

Sto passando da una formulazione integrale a una puntuale ma questa e' più debole

$f(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \underset{\text{senso per} \Leftarrow}{\underset{\text{mi da' il}}{\forall\varphi}}$ 

ES $\underline{N=1}$ $\quad -u'' = f \quad$ su $\Omega = (a,b)$ $\qquad u \in C^2(a,b)$

$0 = -u'' - f \quad \Rightarrow \quad 0 = (-u'' - f)\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b) \quad \Rightarrow \quad 0 = \int_a^b (-u''(x) - f(x))\,\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$ $\qquad u \in C^2(a,b)$

$\overset{IPP}{\Rightarrow} \quad 0 = \int_a^b (u'(x)\varphi'(x) - f(x)\varphi(x))\,dx - \cancel{u'(x)\varphi(x)}\Big|_a^b$ $\qquad u \in C^1(a,b)$ me ne basta una di derivate forte

$\overset{IPP}{\Rightarrow} \quad 0 = -\int_a^b \underline{u(x)\varphi''(x)\,dx} - \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx + \cancel{u(x)\varphi'(x)}\Big|_a^b$ $\qquad$ e' sufficiente che $u \in C^0(a,b)$ perche' ho un prodotto di funzioni continue e nulle al bordo

$-\langle u, \varphi'' \rangle = -\langle u'', \varphi \rangle$

$N > 1$ $-\Delta u = f$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $-\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \cancel{\int_{\partial\Omega}\varphi(x)\frac{du(x)}{dn}\,d\sigma}^{\,0} = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

f. Green $\int_\Omega \operatorname{div} \underline{f}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\langle \underline{f}, \underline{n}\rangle\, d\sigma$

$\int_\Omega \partial_{x_i} f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\, n_i(x)\,d\sigma$

se $f = uv$ $\int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)\,d\sigma - \int_\Omega \partial_{x_i}(u(x)v(x))\,dx = \int_\Omega ((\partial_{x_i}u(x))v(x) + u(x)\,\partial_{x_i}v(x))\,dx$

se prendo $u \longmapsto \partial_{x_i} U$ $\int_{\partial\Omega} v(x)\,\partial_{x_i}U(x)\,n_i(x)\,d\sigma(x) = \int_\Omega (\partial_{x_i}\partial_{x_i}U(x))\,v(x) + \partial_{x_i}U\,\partial_{x_i}v(x))\,dx$

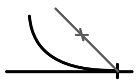
sommo su $i = 1 \dots N$ $\int_{\partial\Omega} v(x)\frac{dU(x)}{dn}\,d\sigma(x) = \int_\Omega (\Delta U(x)v(x) + \nabla U(x)\cdot\nabla v(x))\,dx$

$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

quando è ben definito? $\left|\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx\right| \le \int_\Omega |\nabla u(x)|\,|\nabla\varphi(x)|\,dx \overset{\text{Hölder}}{\le} \|\nabla u\|_{L^2}\cdot\underbrace{\|\nabla\varphi\|_{L^2}}_{<+\infty} < +\infty$ se $\|\nabla u\|_{L^2} < +\infty$

Tutto bene se $\nabla u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$

$$\begin{cases} F(x, u(x) \dots D^k(x)) = 0 & \text{in } \Omega \\ B(u, \dots D^{k-1}u(x)) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

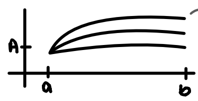


BUONA POSITURA SECONDO HADAMARD

$$\begin{cases} F(x, u(x), Du(x) \dots D^k u(x)) = 0 & \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \\ B(x, u(x), Du(x) \dots D^{k-1}u(x)) = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dipende da k derivate

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_2 y = f & x \in (a,b) \\ y(a) = A,\ y'(b) = 0 \end{cases}$$



potrei imporre di avere la tangente nulla in b

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_2 y = f & x \in (a,b) \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases}$$

Se le funzioni sono continue la nozione di dato al bordo o valore in un punto è definita

Se le funzioni non sono continue (L^p)

$\{a,b\} = \partial(a,b)$ condizioni al contorno del dominio

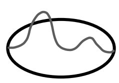
Invece nel caso $\partial\Omega$ se ho la membrana del tamburo $\underset{\text{possibile richiesta}}{u = 0 \text{ su } \partial\Omega}$ non è detto sia facile dire $u(x) = 0\ \forall x \in \partial\Omega$

le bordo di un insieme N-dimensionale è un oggetto N-1 dimensionale.

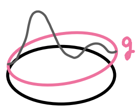
Essendo le bordo di Ω a misura nulla potremmo cambiare la funzione su insiemi di misura e per alcune applicazioni questa condizione non ha effetto

Prototipi di condizioni al bordo B

Dirichlet $B(u) = u - g \iff u = g$ su $\partial\Omega$ se $g = 0$



se $g \neq 0$



non interviene la derivata

Stiamo prescrivendo le profilo che la funzione deve assumere sul bordo dell'insieme

Neumann $B(u, Du) = \partial_n u - g \iff \partial_n u = g$ su $\partial\Omega$ come la funzione arriva al bordo in direzione normale $\partial_n u = \langle\nabla u, n\rangle$ condizione sulla derivata

Robin $B(u, Du) = au + \partial_n u - g \iff au + \partial_n u = g$ su $\partial\Omega$

Navier $B(u, D^2u) = (u, \Delta u) \iff \begin{cases} u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ \Delta u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ ordine superiore al 2°

Condizioni iniziali $u(x,t)$ $x \in \Omega$ (o $\mathbb{R}^N$), $t > 0$: $u : \Omega \times \overset{(0,\infty)}{(0,T)} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases}$ $u(x,T) = u_T(x)$ $\forall x \in \Omega$ evoluzione all'indietro

BUONA POSITURA DEL PROBLEMA 1. $\exists$ soluzione 2. la soluzione è unica 3. la soluzione dipende con continuità dai dati

dati = iniziali (o finali), al contorno, dominio, coefficienti

geometria del dominio: $f(x) = |x| \in Lip = C^{0,1} \longrightarrow f_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2+\varepsilon^2}$ punta della lama

Se la nostra eq differenziale è lineare con dato al bordo imposto $u=g$

$\begin{cases} Lu=0 & \Omega \\ u=g & \partial\Omega \end{cases}$ $(L=-\Delta)$ u_i soluzione di $\begin{cases} Lu=0 & \Omega \\ u=g_i & \partial\Omega \end{cases}$ $i=1,2$ problema lineare con soluzione unica

posso sottrarre le due soluzioni $w = u_1 - u_2$ è soluzione di $\begin{cases} Lw=0 & \Omega \\ w=\underbrace{g_1-g_2}_{g} & \partial\Omega \end{cases}$ $\|w\| \le C\|g\|$ $\Rightarrow$ dipendenza continua dai dati

perché è lineare

deve essere controllata dal dato che impongo

Es di non buona positura

$u_{ttt}(x,y,t) = 0 \xrightarrow[\text{integro}]{} u_{tt}(x,y,t) = a(x,y) \longrightarrow u_t(x,y,t) = a(x,y)\,t + b(x,y) \longrightarrow u(x,y,t) = a(x,y)\frac{t^2}{2} + b(x,y)\,t + c(x,y)$

$\begin{cases} u_{ttt}(x,y,t) = 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \\ u_{tt}(x,y,0) = h(x,y) \end{cases}$ $u(x,y,0) = a(x,y)\cdot 0 + b(x,y)\cdot 0 + c(x,y)$
$f(x,y)$ $= \dots$ $b=g$ e $a=h$ $\Rightarrow u(x,y,t) = h(x,y)\frac{t^2}{2} + g(x,y)\,t + f(x,y)$

$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \partial_n u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ problema di Neumann per il laplaciano

non per tutte le f e le g la soluzione $\exists$

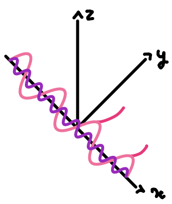
$f=0$ $\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ se u è soluzione $\Rightarrow u+c$ lo è $\forall c$ (abbiamo infinite soluzioni, ma una sola prescrivendo la media)

$f \neq 0$: $\int_\Omega f\,dx \overset{eq}{=} -\int_\Omega \Delta u\,dx \overset{GAUSS}{=} \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, n \rangle\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} \partial_n u\,d\sigma \underset{eq}{=} \int_{\partial\Omega} g\,d\sigma$ condizione di compatibilità (se non viene rispettata $\nexists$ sol)

se $f=0$ la condizione di compatibilità è che $\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} g\,d\sigma = 0$ condiz. sulla media di g su $\partial\Omega$

se $g=0$ la condizione di compatibilità è che $⨍_\Omega f\,dx = 0$ $\frac{1}{A}\int_A = ⨍_A$

$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \frac{\text{sen}(nx)}{n} & \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{du}{dy}(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$



la soluzione è $u_n(x,y) = \frac{\text{sen}(nx)\cosh(ny)}{n}$

$u_n(x,0) = \frac{\text{sen}(nx)}{n} \cdot \underbrace{\cosh(n\cdot 0)}_{1} = \frac{\text{sen}(nx)}{n}$

$\frac{du}{dy} = \frac{\text{sen}(nx)\cdot \text{senh}(ny)\cdot \cancel{n}}{\cancel{n}} \longrightarrow \frac{du}{dy}(x,0) = \text{sen}(nx)\cdot\text{senh}(n0) = 0$

$\frac{d^2u(x,y)}{d^2x} + \frac{d^2u(x,y)}{d^2y} = 0$: $\frac{d^2u(x,y)}{d^2x} = -n\,\text{sen}(nx)\cosh(n,y)$ $+$ $\frac{d^2u(x,y)}{d^2y} = n\,\text{sen}(nx)\cosh(ny)$ $= 0$

$u_n(x,0) = \frac{\text{sen}(nx)}{n}$

$|u_n(x,0)| \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$

se n è dispari $n = 2k+1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ o un suo multiplo dispari

$u_{2k+1}\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \frac{(-1)^k\cosh((2k+1)y)}{2k+1} \longrightarrow \left|u_{2k+1}\left(\frac{\pi}{2}, y\right)\right| = \frac{\cosh((2k+1)y)}{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{y\to\infty} \infty$ non c'è dipendenza continua

Classificazione delle EDP del 2* ordine lineari

$F(x, u(x), Du(x), D^2 u(x)) = 0$

$\|$

$\sum_{|\alpha| \le 2} \left(a_\alpha D^\alpha u(x) \right) - f(x) = 0$ $\qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $|\alpha| \le 2 \iff \alpha_1 + \dots + \alpha_N \le 2$

- $|\alpha| = 0 \iff \alpha = (0, \dots, 0)$: $a_0(x) u(x)$ c'è nell'espressione
- $|\alpha| = 1 \iff \alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)$: ce ne sono N $(1,0\dots0), \dots (0, \dots 0, 1)$ $\qquad \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \langle \underline{b}(x), \overset{D}{\nabla} u(x) \rangle$
- $|\alpha| = 2 \iff \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ (c'è nell'espressione) $\qquad A(x) : Hu(x) \quad \wedge \quad A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j}$ simmetrica

metto un coefficiente davanti alla derivata 2ª e poi sommo

$-\Delta u \longleftrightarrow A(x) = I_N$ ellittica

$u_t - \Delta u \longleftrightarrow A(x) = \left(\begin{array}{c|c} I_N & \\ \hline & \end{array} \right)$ parabolica

$u_{tt} - \Delta u \longleftrightarrow A(x) = \left(\begin{array}{c|c} I_N & \\ \hline & -1 \end{array} \right)$ iperboliche