

img/logo

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ???

TÍTULO DE LA MEMORIA/TESIS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN ???

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIER[O/A?] CIVIL EN ???

NOMBRE COMPLETO AUTOR

PROFESOR GUÍA:  
NOMBRE COMPLETO GUÍA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
NOMBRE COMPLETO UNO  
NOMBRE COMPLETO DOS  
NOMBRE COMPLETO TRES

SANTIAGO DE CHILE  
2023

# Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

*Una dedicatoria corta.*

# Agradecimientos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

# Tabla de Contenido

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Introducción</b>                   | <b>1</b> |
| <b>2. Transporte Óptimo de Masas</b>     | <b>4</b> |
| 2.1. Notación . . . . .                  | 4        |
| 2.2. El problema de transporte . . . . . | 5        |
| <b>Bibliografía</b>                      | <b>6</b> |
| <b>Apéndice A. Anexo</b>                 | <b>7</b> |

# Índice de Tablas

# Índice de Ilustraciones

# Capítulo 2

## Transporte Óptimo de Masas

En este capítulo se abordará el problema de transporte óptimo, la distancia de Wasserstein, y el problema de los baricentros de Wasserstein. Además, se presentarán algunas propiedades de la distancia de Wasserstein, las cuales serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo. La notación y definiciones utilizadas en este capítulo se encuentran basadas en [3] y [2]. Sin embargo, antes de empezar a enunciar definiciones y propiedades, se sentarán la notación y definiciones básicas que se utilizarán a lo largo de este trabajo.

### 2.1. Notación

**Definición 2.1.** Se definen los siguientes espacios:

- $(\mathcal{X}, d)$  es un espacio Polaco, si  $\mathcal{X}$  es un espacio métrico, completo y separable.
- $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  denotará al conjunto de medidas de probabilidad en  $\mathcal{X}$ , utilizando la  $\sigma$ -álgebra de Borel.
- $\mathcal{P}_{ac}(\mathcal{X})$  denotará al conjunto de medidas de probabilidad absolutamente continuas con respecto a una medida de referencia  $\lambda$  (como por ejemplo, la de Lebesgue o la cuenta puntos), utilizando la  $\sigma$ -álgebra de Borel.
- $\mathcal{C}(\mathcal{X})$  denotará al conjunto de funciones continuas en  $\mathcal{X}$ .

**Definición 2.2.** Se definirá el *simplex* de dimension  $n$  como el conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^n$  cuyas componentes suman 1, es decir,

$$\Sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}, \quad (2.1)$$

y a los elementos pertenecientes al simplex se les llamará *vectores de probabilidad*.

**Definición 2.3.** Dados  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$  y  $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ , se denotará por  $\text{Cpl}(\mu, \nu)$  al conjunto de medidas de probabilidad en  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  cuyas proyecciones marginales sean  $\mu$  y  $\nu$ , es decir,

$$\text{Cpl}(\mu, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) : \pi(A \times \mathcal{Y}) = \mu(A), \pi(\mathcal{X} \times B) = \nu(B), \forall A \subseteq \mathcal{X}, B \subseteq \mathcal{Y} \}. \quad (2.2)$$



**Definición 2.4.** Para una función medible  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  se define el *operador push-forward* de  $T$  como la aplicación  $T_{\#} : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$  que satisface la siguiente relación:

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) dT_{\#}\mu(x) = \int_{\mathcal{Y}} f(T(x)) d\mu(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{Y}), \quad (2.3)$$

para toda  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ . Adicionalmente, el operador push-forward se puede definir como aquel operador que satisface la siguiente relación:

$$\forall A \subseteq \mathcal{Y} \text{ medible}, \quad T_{\#}\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)). \quad (2.4)$$

*Observación 2.5.* Se puede notar que  $T_{\#}$  preserva la positividad y la masa total, es decir, si  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ , entonces  $T_{\#}\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ .

*Observación 2.6.* Para el caso en que la medida  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$  sea una medida discreta<sup>1</sup>, entonces el operador  $T_{\#}$  lo que hará será intercambiar la masa de cada punto de  $\mathcal{X}$  a su imagen en  $\mathcal{Y}$ , es decir,

$$T_{\#}\mu = \sum_{i=0}^n m_i \delta_{T(x_i)}. \quad (2.5)$$

## 2.2. El problema de transporte

En esta sección se presentará el problema de transporte óptimo clásico, o el problema de Monge. Este problema consiste en encontrar una manera óptima de transportar una medida de probabilidad  $\mu$  a otra medida de probabilidad  $\nu$ . Para esto, se considera un costo de transporte  $c(x, y)$ , el cual representa el costo de transportar una unidad de masa desde  $x$  a  $y$ . El problema de transporte óptimo consiste en encontrar una manera óptima de transportar la masa de  $\mu$  a  $\nu$  de manera que se minimice el costo total de transporte. Formalmente, el problema de transporte óptimo se puede definir de la siguiente manera:

Empezaremos definiendo

---

<sup>1</sup>i.e.  $\mu = \sum_{i=0}^n m_i \delta_{x_i}$  con  $m \in \Sigma_n$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$  y  $\delta_x$  la medida de Dirac en  $x$

# Bibliografía

- [1] Julio Backhoff-Veraguas, Joaquin Fontbona, Gonzalo Rios, and Felipe Tobar. Bayesian learning with wasserstein barycenters, 2018.
- [2] Gabriel Peyré and Marco Cuturi. Computational optimal transport. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 11(5-6):355–607, 2019.
- [3] Cédric Villani. *Optimal Transport: Old and New*, volume 338. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

# Apéndice A

## Anexo

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetur lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetur eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetur varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetur non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

Vivamus commodo eros eleifend dui. Vestibulum in leo eu erat tristique mattis. Cras at elit. Cras pellentesque. Nullam id lacus sit amet libero aliquet hendrerit. Proin placerat, mi non elementum laoreet, eros elit tincidunt magna, a rhoncus sem arcu id odio. Nulla eget leo a

leo egestas facilisis. Curabitur quis velit. Phasellus aliquam, tortor nec ornare rhoncus, purus urna posuere velit, et commodo risus tellus quis tellus. Vivamus leo turpis, tempus sit amet, tristique vitae, laoreet quis, odio. Proin scelerisque bibendum ipsum. Etiam nisl. Praesent vel dolor. Pellentesque vel magna. Curabitur urna. Vivamus congue urna in velit. Etiam ullamcorper elementum dui. Praesent non urna. Sed placerat quam non mi. Pellentesque diam magna, ultricies eget, ultrices placerat, adipiscing rutrum, sem.