MENOS 1 e 7!

uff Universidade Federal Fluminense 2008-1
EGM - Instituto de Matemática mplícita
GMA - Departamento de Matemática Aplicada ionadas

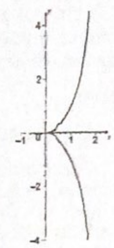
1. Determine a expressão de pelo menos duas funções $y = y(x)$ definidas implicitamente pela equação $xy^2 + x + y = 1$. Explicite seus domínios.

2. Seja $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $\sec^2(x+y) - \cos^2(x+y) = \dfrac{3}{2}$. Calcule $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, sabendo que $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

3. Seja $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $x^2 - x\sqrt{xy} + 2y^2 = 10$. Encontre o coeficiente angular da reta normal ao gráfico da função f no ponto $(4, 1)$.

4. Considere $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^4 - xy + y^4 = 1$. Calcule $f'(0)$, sabendo que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

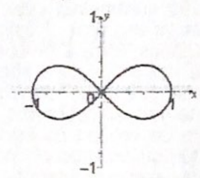
5. Considere a curva da figura ao lado conhecida por cissóide de Diocles cuja equação é $(2-x)y^2 = x^3$.



   (a) Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da curva em $(1, 1)$;

   (b) Obtenha as equações das retas tangentes ao gráfico da curva nos pontos em que $x = \dfrac{3}{2}$.

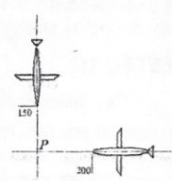
6. Considere a lemniscata de equação $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ (figura ao lado). Determine os quatro pontos da lemniscata em que as retas tangentes são horizontais. Ache, em seguida, os dois pontos em que as tangentes são verticais.



7. Cascalho está caindo e formando uma pilha cônica que aumenta a uma taxa de 3 m^3/min, de modo que o raio do cone é sempre igual a sua altura. Encontre a taxa de variação da altura da pilha quando a altura é de 3 m.

8. Uma câmara de televisão no nível do solo está filmando a subida de um ônibus espacial que está subindo verticalmente de acordo com a equação $s = 15t^2$, sendo s a altura e t o tempo. A câmara está a 600 m do local de lançamento. Encontre a taxa de variação da distância entre a câmara e a base do ônibus espacial, 10 seg após o lançamento (suponha que a câmara e a base do ônibus estão no mesmo nível no tempo $t = 0$).

9. Num determinado instante, um controlador de tráfego aéreo vê dois aviões na mesma altura voando a velocidades constantes, em trajetórias ortogonais que se cruzam num ponto P (veja figura). Neste instante, um dos aviões está a 150 milhas do ponto P e se aproxima de P à 450 milhas por hora, enquanto o outro está a 200 milhas do ponto P e se movendo à 600 milhas por hora, também em direção ao ponto P.



   (a) Antes do ponto P, a distância entre os aviões está diminuindo? a que taxa?

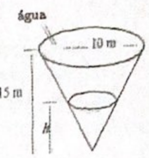
   (b) Os aviões correm risco de choque? em caso afirmativo, quanto tempo o controlador tem para fazer com que um dos aviões mude a sua trajetória?

10. Um ponto move-se ao longo da elipse $x^2+4y^2=1$. A abscissa x está variando a uma velocidade $\dfrac{dx}{dt}=\operatorname{sen}4t$. Mostre que (a) $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{x\operatorname{sen}4t}{4y}$ (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{\operatorname{sen}^2 4t+16xy^2\cos 4t}{16y^3}$.

11. Um ponto move-se sobre a semi-circunferência $x^2+y^2=5$, $y\geq 0$. Suponha $\dfrac{dx}{dt}>0$. Determine o ponto da curva em que a velocidade de y seja o dobro da velocidade de x.

12. Uma escada de 8 m está encostada numa parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/seg, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 m da parede?

13. Enche-se de água um reservatório, cuja forma é de um cone circular reto (veja a figura), a uma taxa de $0,1$ m^3/seg. O vértice está a 15 m do topo e o raio do topo é de 10 m. Com que velocidade o nível h da água está subindo no instante em que $h=5$ m?



14. O raio de luz de um farol, que está situado a 3 km de uma praia reta, faz 8 rpm (rotações por minuto). Considere a altura do farol desprezível em relação a sua distância até a praia. Ache a velocidade da extremidade do raio de luz, ao longo da praia, quando ele faz um ângulo de 45° com a linha da praia.

RESPOSTAS

1. $y=f(x)=\dfrac{-1-\sqrt{1+4x-4x^2}}{2x}$

   $y=g(x)=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x-4x^2}}{2x}$;

   domínio $=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},0\right)\bigcup\left(0,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

2. -1

3. 0

4. $\dfrac{1}{4}$

5. (a) $y=2x-1$

   (b) $y=3\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$ e $y=-3\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

6. Tangentes horizontais em:

   $x=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ e $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

   $x=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ e $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

   $x=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ e $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

   $x=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ e $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

   Tangentes verticais em:

   $x=1$ e $y=0$; $x=-1$ e $y=0$.

7. $10,6$ cm/min

8. $278,54$ m/seg

9. (a) está diminuindo à velocidade escalar de 750 mi/h

   (b) 20 min

11. $(-2,1)$

12. velocidade escalar de $\dfrac{6}{\sqrt{55}}$ m/seg $\cong 80,9$ cm/seg

13. $\dfrac{0,9}{100\pi}$ m/seg $\cong 0,2865$ cm/seg

14. $96\pi\cong 301,6$ km/min $\cong 5,03$ km/h

GMA

I1 Lista 9:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 8 \\ & 4 \end{array}$$

1) $xy^2 + y + (x-1) = 0$

$\Delta = 1 - 4x(x-1) = 1 - 4x^2 + 4x$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{-4x^2+4x+1}}{2x}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-4x^2+4x+1}}{2x}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{-4x^2+4x+1}}{2x}$$

DOMÍNIO $x \neq 0$

$-4x^2+4x+1 > 0$

$\Delta = 16 - 4(-4)\,1 = 16+16 = 32$

$x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2(-4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{-2}$

$Dom = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-1+\sqrt{2}}{-2} < x < \frac{-1-\sqrt{2}}{-2}$

$y = f(x)$

2) $\left(\sec^2(x+y) - \cos^2(x+y)\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^1$ $\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$ $\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\frac{d}{dy}\sec^2(x+y) - \frac{d}{dy}\cos^2(x+y) = 0$

$2(\sec(x+y))\sec(x+y)\cdot\tan(x+y)\cdot\left(\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dx}\right) - 2\cos(x+y)\cdot(-\sin(x+y))\left(\frac{dx}{dy}+\frac{dx}{dx}\right)$

$= 2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(1+f'(x)) + 2\cos(x+y)\sin(x+y)(1+f'(x)) = 0$

$= (1+f'(x))\left[2\sec^2(x+y)\tan(x+y) + 2\cos(x+y)\sin(x+y)\right] = 0$

GMA

I1 Lista 9:

$\begin{array}{c|c} 32 & 2 \\ 16 & 8 \\ & 4 \end{array}$

1) $xy^2 + y + (x-1) = 0$

$\Delta = 1 - 4x(x-1) = 1 - 4x^2 + 4x$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-4x^2+4x+1}}{2x}$

$y = \dfrac{-1 + \sqrt{-4x^2+4x+1}}{2x}$

$y = \dfrac{-1 - \sqrt{-4x^2+4x+1}}{2x}$

DOMÍNIO $x \neq 0$

$-4x^2+4x+1 > 0$

$\Delta = 16 - 4(-4)1 = 16+16 = 32$

$x = \dfrac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2(-4)} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{-2}$

$Dom = \{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{-1+\sqrt{2}}{-2} < x < \dfrac{-1-\sqrt{2}}{-2}$

$y = f(x)$

2) $(\sec^2(x+y) - \cos^2(x+y))' = \left(\dfrac{3}{2}\right)'$ $\quad f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = ?$ $\quad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\dfrac{d}{dy}\sec^2(x+y) - \dfrac{d \cos^2(x+y)}{dy} = 0$

$2(\sec(x+y))\sec(x+y) \cdot \tan(x+y) \cdot \left(\dfrac{dx}{dx} + \dfrac{dy}{dx}\right) - 2\cos(x+y) \cdot (-\sin(x+y))\left(\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{dx}{dx}\right)$

$= 2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(1+f'(x)) + 2\cos(x+y)\sin(x+y)(1+f'(x)) = 0$

$= (1+f'(x))\left[2\sec^2(x+y)\tan(x+y) + 2\cos(x+y)\sin(x+y)\right] = 0$

[illegible]

$x(x\cdot y)^{1/2}$

$P(4,4)\,P(4,1)$

3) $\left[x^2 - x\sqrt{xy} + 2y^2\right]' = (10)' \rightarrow \frac{d(x^2)}{dx} - \frac{d\left(x(xy)^{1/2}\right)}{dx} + 2\frac{d(y^2)}{dx} \rightarrow$

$2x\cancel{\frac{dx}{dx}} - \left(\cancel{\frac{dx}{dx}}\cdot(xy)^{1/2} + x\frac{d(xy)^{1/2}}{dx}\right) + 2\cdot 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2x - (xy)^{1/2} + x\cdot\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}\cdot\frac{d(xy)}{dx} + 4yy' = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2x - \sqrt{xy} + \frac{x}{2\sqrt{xy}}\left(\cancel{\frac{dx}{dx}}\cdot y + \frac{dy}{dx}\cdot x\right) + 4yy' = 0 \rightarrow 2x - \sqrt{xy} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}} + \frac{x^2y'}{2\sqrt{xy}} + 4yy' = 0$

$\rightarrow 2x - \sqrt{xy}\,\frac{+xy}{2\sqrt{xy}} = y'\left(\frac{x^2}{2\sqrt{xy}} + 4y\right) \rightarrow y' = 2x - \sqrt{xy} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}} - \frac{x^2 + 8y\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}} \rightarrow f'(4) = 2\cdot 4 - \sqrt{4} + \frac{4}{2\sqrt{4}} - \frac{16 + 8\sqrt{4}}{2\sqrt{4}}$

$f'(4) = \cancel{8} - 2 + 1 - \cancel{8} = -1 \qquad f'(x) = f'(x) = -1 \qquad f_N'(x) = 1$

$y - 1 = 1(x - 4) \rightarrow y = x - 3$

4) $x^4 - x\cdot y + y^4 = 1 \rightarrow \frac{d(x^4)}{dx} - \frac{d(xy)}{dx} + \frac{d(y^4)}{dx} = \cancel{\frac{d(1)}{dx}} \rightarrow$

$4x^3\cancel{\frac{dx}{dx}} - \left(\cancel{\frac{dx}{dx}}\cdot y + \frac{dy}{dx}\cdot x\right) + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0$

$4x^3 - y - y'x + 4y^3y' = 0$

$4y^3y' - y'x = y - 4x^3 \rightarrow y'(4y^3 - x) = y - 4x^3 \rightarrow$

$y' = \frac{y - 4x^3}{4y - x} \rightarrow y' = \frac{\cancel{y} - 0}{4\cancel{y} - 0} = \frac{1}{4}$ //

5) $(2-x)y^2 =$

a) $P(1,1)$

$\frac{d[(2-x)y}{dx}$

$-1y^2 + (2-$

$y^2 + 2yy' =$

$f'(1) =$

b) $x = \frac{3}{2}$

5) $(2-x)y^2 = x^3$

a) $P(1,1)$ $\qquad y-1 = \underline{1}\,(x-1) \rightarrow y = x$

$$\frac{d\left[(2-x)y^2\right]}{dx} = \frac{d(x^3)}{dx} \rightarrow \frac{d(2-x)}{dx}y^2 + (2-x)\frac{d(y^2)}{dx} = 3x^2\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}}^{1} \rightarrow$$

$$-1y^2 + (2-x)(2yy') = 3x^2 \rightarrow y^2 + 4yy' - 2yy' = 3x^2 \rightarrow$$

$$y^2 + 2yy' = 3x^2 \rightarrow y' = \frac{3x^2 - y^2}{2y}$$

$$f'(1) = \frac{3.1-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

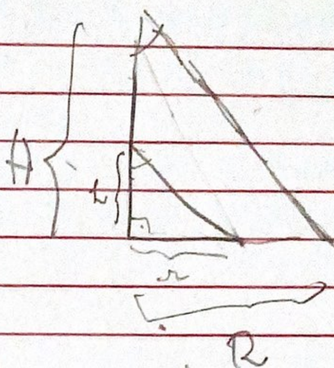
b) $x = \frac{3}{2}$ $\qquad (2-3/2)\,y^2 = (27/8)$

$$y^2 = \frac{27}{8} - \frac{1}{2} = \frac{27-4}{8} = \sqrt{\frac{23}{8}}$$

7)

$r = h$

$\frac{dh}{dt} = ?$ $h = 3m$

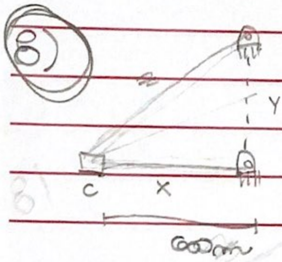


$\frac{dV}{dt} = 3m^3/min$

$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 . h$ $r=h \rightarrow (V(r)) = \left(\frac{1}{3}\pi h^3\right)' \Rightarrow$

$\frac{d(V)}{dt} = \frac{1}{3}\pi \frac{d(h^3)}{dt} \rightarrow 3 = \frac{1\pi}{\cancel{3}} \cancel{3} h^2 \frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{9}\pi} = \frac{1}{3\pi}$ m/min

(8)



$S = 15t^2$ $t = 10s$ $Y = 1500m$ $Y = 15t^2$ $\boxed{\frac{dy}{dt} = 30t}$

$t=0$ $d_{oc} = 600m$ $t = 10s$ $\frac{dz}{dt} = ?$

$z^2 = 600^2 + y^2 \rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 0 + \frac{dy}{dt}2y \rightarrow$

$2.(1501).\frac{dz}{dt} = 300 + 1500$

$\frac{dz}{dt} = \frac{1800}{3002} = 0,6$ m/s

$z^2 = (600)^2 + (1500)^2$

$z \cong 1.501,2$