3-(a)
4-(a)

15-(~~a~~)
TODAS

uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

- 2008-1
de derivada
ra da cadeia

1. Uma partícula se move sobre uma linha reta de acordo ... distância (em metros) da partícula ao seu ponto de partida, após decorri...
   (a) Calcule a velocidade média da partícula de $t = 9$ até $t = 16$
   (b) Calcule a velocidade instantânea da partícula quando $t = 9$.

2. Calcule a taxa de variação do volume de um balão esférico em relação ao seu raio, quando o raio do balão for igual a 5 cm.

3. Um projétil é lançado verticalmente para cima e t segundos após o lançamento está a s metros do solo, onde $s = s(t) = 256\,t - 16t^2$. Calcule:
   (a) A velocidade do projétil t segundos após o lançamento; → t = 40
   (b) O tempo necessário para o projétil atingir a altura máxima;
   (c) A altura máxima atingida pelo projétil.

4. No instante t horas um veículo está $16\sqrt{t^3} - 24t + 16$ quilômetros à leste de um ponto de referência na estrada.
   (a) Qual a velocidade no instante $t = \frac{1}{4}$ e qual é o sentido do movimento em relação ao ponto de referência?
   (b) Onde está o veículo quando a velocidade é zero?

Nos exercícios 5. a 10. derive a função (se possível, simplifique antes e/ou depois de derivar).

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x^4 + 2x}}{\cos^2 x}$

6. $f(x) = (\operatorname{sen} 2x)\left(x^3 + 2x\right)^{2/3}$

7. $F(u) = \dfrac{u^3 - 3u^2}{(u^4 + 1)^{5/2}}$

8. $G(r) = \sqrt[5]{\dfrac{2r^2 - 2}{r - 1}}$

9. $M(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^4} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

11. Sejam $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ e $g(x) = \sqrt{\tan x}$. Calcule $(f \circ g)'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

12. Considere f uma função diferenciável e g definida por $g(x) = f^2(\cos x)$.
    Sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, calcule $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

13. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável; $g(0) = \dfrac{1}{2}$ e $g'(0) = 1$.
    Calcule $f'(0)$, onde $f(x) = (\cos x) g^2\left(\tan \dfrac{x}{x^2 + 2}\right)$.

14. Sejam g diferenciável e $f(x) = x\, g\left(x^2\right)$.
    (a) Mostre que $f'(x) = g\left(x^2\right) + 2x^2 g'\left(x^2\right)$;
    (b) Calcule $g(4)$, sabendo que $g(4) + g'(4) = 1$ e $f'(2) = -1$.

15. Considere as funções $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1 \\ |x| & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ e $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
    → (a) Encontre $(f \circ g)(x)$; → (b) Usando (a), encontre $(f \circ g)'(x)$ e determine seu domínio D;
    (c) Determine o conjunto C onde podemos aplicar a regra da cadeia para calcular $(f \circ g)'(x)$;
    (d) Usando a regra da cadeia, encontre $(f \circ g)'(x)$, $\forall x \in C$;
    (e) Compare (b) e (d); (f) Esboce os gráficos de g, f e $f \circ g$;
    ✓ (g) Indique nos gráficos os pontos onde g, f e $f \circ g$ não são diferenciáveis.
    ?

RESPOSTAS

1. (a) $\dfrac{\sqrt{16}-\sqrt{9}}{16-9}$; (b) $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{9+\Delta t}-\sqrt{9}}{\Delta t}=s'(9)=\frac{1}{6}$ m/seg.

2. Sendo V = volume, $V'(5)=100\pi$ cm^3/cm. 3. (a) 128 m/seg; (b) 8 seg (c) 1024 m

4. (a) $s'(1/4)=-12<0\Rightarrow$ sentido: veículo se aproxima da referência, rumo oeste, com velocidade escalar de 12 km/h; (b) 8 km à leste da referência.

5. $f'(x)=\dfrac{(\cos^2 x)(1/4)(2x^4+2x)^{-3/4}(8x+2)-(2x^4+2x)^{1/4}(2\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^4 x}=\dfrac{(4x^3+1)\cos x+8(x^4+1)\operatorname{sen} x}{2(2x^4+2x)^{3/4}\cos^3 x}$

6. $f'(x)=(\operatorname{sen} 2x)(2/3)(x^3+2x)^{-1/3}(3x^2+2)+(\cos 2x)(2)(x^3+2x)^{2/3}=\dfrac{2(3x^2+2)(\operatorname{sen} 2x)+6(x^3+2x)(\cos 2x)}{3(x^3+2x)^{1/3}}$

7. $F'(u)=\dfrac{(u^4+1)^{5/2}(3u^2-6u)-(u^3-3u^2)(5/2)(u^4+1)^{3/2})(4u^3)}{(u^4+1)^5}=\dfrac{-7u^6+24u^5+3u^2-6u}{(u^4+1)^{7/2}}$

8. $G'(r)=\dfrac{1}{5}(2r+2)^{-4/5}(2)=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{(2r+2)^4}}$ 9. $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

10. $f'(x)=\begin{cases}3x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{4}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^4} & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases}$ 11. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 12. 1 13. $\dfrac{1}{2}$ 14. $\dfrac{9}{7}$

15. (a) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 1-x^2, & x\geq -1\end{cases}$

(b) $(f\circ g)'(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ -2x, & x>-1\end{cases}$ $\nexists (f\circ g)'(-1)$ pois $(f\circ g)'_-(-1)=0\neq(f\circ g)'_+(-1)=2$

$D=\operatorname{dom}(f\circ g)'=\mathbb{R}-\{-1\}$

(c) $g'(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ -1, & -1<x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ $\nexists\, g'(-1)$ pois $g'_-(-1)=0\neq g'_+(-1)=-1$ e
$\nexists\, g'(0)$ pois $g'_-(0)=-1\neq g'_+(0)=1$
Logo dom $(g')=\mathbb{R}-\{-1,0\}$

$f'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -2x, & x\geq 0\end{cases}$ Logo dom $(f'\circ g)=\{x\in(\operatorname{dom} g)=\mathbb{R};\ y=g(x)\in(\operatorname{dom} f')=\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

Como $C=(\operatorname{dom}(f'\circ g))\cap(\operatorname{dom}(g'))$, temos $C=\mathbb{R}-\{-1,0\}$.

(d) Visando aplicar a regra da cadeia, vamos calcular primeiro $f'(g(x))$ em $C=\mathbb{R}-\{-1,0\}$:

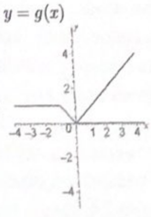
Como $g(x)=\begin{cases}1, & x<-1\\ |x|, & -1<x<0\\ |x|, & x>0\end{cases}$ temos $f'(g(x))=\begin{cases}f'(1)=-2, & x<-1\\ f'(|x|)=-2|x|=2x, & -1<x<0\\ f'(|x|)=-2|x|=-2x, & x>0\end{cases}$.

Aplicando a regra da cadeia: $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)=\begin{cases}-2\times 0=0, & x<-1\\ (2x)\times(-1)=-2x, & -1<x<0\\ (-2x)\times(1)=-2x, & x>0\end{cases}$

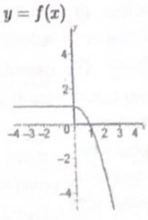
(e) $(f\circ g)'(x)$ são iguais nos pontos comuns de D e C, mas não é possível aplicar a regra da cadeia para calcular $(f\circ g)'(0)$.

(f)

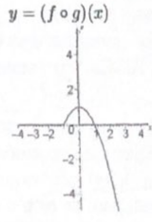
$y=g(x)$



$y=f(x)$



$y=(f\circ g)(x)$



GMA Lista 7 (IA)

1) $s = \sqrt{t}$ s em m, t em s.

a) $v_m = ?$ $t_0 = 9$ $t = 16$

$S_0 = 3$ $S_0 = 4$

$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3-4}{9-16} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$ m/s

b) $V(9) = ?$ $\to s'(9) = ?$

$s'(t) = \lim_{t \to 9} \frac{f(t) - f(9)}{t-9} = \lim_{t \to 9} \frac{(\sqrt{t} - 3)(\sqrt{t} + 3)}{(t-9)(\sqrt{t}+3)} =$

$\lim_{t \to 9} \frac{\cancel{t-9}}{\cancel{(t-9)}(\sqrt{t}+3)} = \frac{1}{6}$

2) $V'(r) = ?$ $r = 5$ cm $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V'(r) = \lim_{r \to 5} \frac{\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi 125}{3}}{r-5} = \lim_{r \to 5} \frac{\frac{4\pi}{3}(r^3 - 125)}{r-5} =$

$\lim_{r \to 5} \frac{4\pi/3 \, \cancel{(r-5)}(r^2 + 5r + 25)}{\cancel{(r-5)}} = \frac{4\pi}{\cancel{3}}(\cancel{25}^{25} + 25 + 25) =$

$= 100\pi$ cm³/cm

3) $s(t) = 256t - 16t^2$

a) $v'(4) = 256 - 32t = 256 - 32 \cdot 4 = 256 - 128 = 128$ m/s.

b) $v'(t) = 0$.

$0 = 256 - 32t = 0 \rightarrow t = 256/32 = 8$ s.

c) $s(8) = 256 \cdot 8 - 16 \cdot 256 = 256(8-16) = 2048$ m.

4) $s(t) = 16\sqrt{t^3} - 24t + 16$

$v'(t) = 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3t^2 - 24}{\sqrt{t^3}} = \frac{24t^2}{2\sqrt{t^3}} - 24 = \frac{12t^2}{\sqrt{t^3}} - 24$

a)

$s'(t/4) = \frac{-24\sqrt{t^3} + 12t^2}{\sqrt{t^3}} = \frac{-\cancel{24}^{3} \cdot 1/\cancel{8} + \cancel{12}^{3} \cdot \frac{1}{\cancel{16}_{4}}}{1/8} = \frac{-3 + 3/4}{1/8} =$

a) $s'(3/4) = -\frac{9}{4} \cdot 8^2 = -18$.

b)

b)

$\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$

5) $f(x)=\frac{\sqrt[4]{2x^4+2x}}{\cos^2(x)}$

$1/4$

$f'(x)=\frac{(\sqrt[4]{2x^4+2x})'\cdot\cos^2(x)-\sqrt[4]{2x^4+2x}\cdot(\cos^2(x))'}{\cos^4(x)}$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{4}(2x^4+2x)^{-3/4}\cdot(8x^3+2)-\sqrt[4]{2x^4+2x}\cdot(2(\cos^1(x))\cdot(-\text{sen}(x)))}{\cos^4(x)}$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{4}(2x^4+2x)^{-3/4}(8x^3+2)+2\cos(x)\,\text{sen}(x)\sqrt[4]{2x^4+2x}}{\cos^4(x)}$

$f(x)=\frac{1}{\cos^4(x)}\left(\frac{(2x^3+1)}{2\sqrt[4]{(2x^4+2x)^3}}+2\cos(x)\,\text{sen}(x)\sqrt[4]{2x^4+2x}\right)=$

$\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$

6) $f(x)=(\text{sen}(2x))(x^3+2x)^{2/3}=$

$f'(x)=(\text{sen}(2x))'(x^3+2x)^{2/3}+(\text{sen}(2x))\left[(x^3+2x)^{2/3}\right]'=$

$-1/3$

$f'(x)=\cos(2x)\,2(x^3+2x)^{2/3}+(\text{sen}(2x))\left(\frac{2}{3}(x^3+2x)^{-1/3}(3x^2+2)\right)$

$f'(x)\quad 2\cos(2x)\sqrt[3]{(x^3+2x)^2}+\frac{2}{3}(x^3+2x)(3x^2+2)\,\text{sen}(2x)$

$5/2 - 1 = 3/2$

7) $F(u) = \dfrac{u^3 - 3u^2}{(u^4+1)^{5/2}}$

$$F'(u) = \frac{(u^3-3u^2)'(u^4+1)^{5/2} - (u^3-3u^2)\left[(u^5+1)^{5/2}\right]'}{\left[(u^4+1)^{5/2}\right]^2} =$$

$$F'(u) = \frac{(3u^2-6u)(u^4-1)^{5/2} - (u^3-3u^2)\left[\frac{5}{2}\cdot(u^5+1)^{3/2}\right]5u^4}{(u^4+1)^5}$$

$$F'(u) = (3u^2-6u)\sqrt[2]{(u^4-1)^5} - 5u^4(u^3-3u^2)\sqrt[2]{\left[\frac{5}{2}(u^5+1)\right]^3} =$$

$\frac{1}{5} - 1 = \frac{-4}{5}$

8) $G(r) = \sqrt[5]{\dfrac{2r^2-2}{r-1}}$

$$G'(r) = \left[\left(\frac{2r^2-2}{r-1}\right)^{1/5}\right]' = \frac{1}{5}\left(\frac{2r^2-2}{r-1}\right)^{-4/5}\left(\frac{(2r^2-2)'(r-1) - (2r^2-2)(r-1)'}{(r-1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{r-1}{2r^2-2}\right)^4}\left(\frac{4r^2-4r-(2r^2+2)}{(r-1)^2}\right) = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{r-1}{2r^2-2}\right)^4}\left(\frac{2r^2-4r+2}{(r-1)^2}\right)$$

9) $M(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \left(x+\left(x+x^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}$

$$M'(x) = \frac{1}{2}\left(x+\left(x+(x^{1/2})\right)^{1/2}\right)^{-1/2}\left(1+\left[(x+x^{1/2})^{1/2}\right]'\right) =$$

$$M'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$M'(x) = \frac{1+2\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{2}+2}{8\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\sqrt{\ }$ sen $\frac{45}{\sqrt{2}}$ cos $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10) $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} 1/x^4 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ 1

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen}(1/x^4) - \frac{4\cos(1/x^4)}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

x^{-4}

$$f'\left(x^3 \cdot \operatorname{sen} 1/x^4\right)' = (x^3)' \cdot \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) + x^3 \cdot \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)' =$$

$$= 3x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^4}\right) + x^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot -4x^{-5} =$$

$$= 3x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^4}\right) + \frac{-4x^3}{x^5} \cos\left(\frac{1}{x^4}\right) = 3x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^4}\right) - \frac{4}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

11) $f(x) = \sqrt[2]{2x+1}$, $g(x) = \sqrt{\tan(x)}$

$$f \circ g'(\pi/4) = \left[f'(g(x))\right] = \left(\sqrt{2\sqrt{\tan(x)} + 1}\right)' =$$

$2(\tan(x))^{1/2} + 1$

$$\left[2\sqrt{\tan(x)} + 1\right]^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2(\sqrt{\tan(x)}) + 1}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} (\tan(x))^{-1/2} \cdot \sec^2(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\sqrt{\tan(x)} + 1}} \cdot \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{\tan(x)}} = \frac{\sec^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}\sqrt{2\sqrt{\tan(x)} + 1}}$$

$$(f \circ g)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 \pi/4}\right)}{2\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sqrt{\tan(\pi/4)} + 1}} = \frac{\frac{1}{1/2}}{2\sqrt{1} \cdot \sqrt{2 \cdot 1} + 1} =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2} + 1}$$

$\frac{1}{\cos(0)}$

12) $g(0) = 1/2 \qquad g'(0) = 1 \qquad f'(0) = ?$

$f(x) = \left[(\cos(x))\ g^2\right]\left(\tan\left(\frac{x}{x^2+2}\right)\right) =$

sen, cos

$f'(x) = (\cos(x)\,g^2)'\left(\tan\left(\frac{x}{x^2+2}\right)\right) + \cos(x)g^2 \cdot \left(\tan\left(\frac{x}{x^2+2}\right)\right)' =$

$= f'(x) = (-\operatorname{sen}(x)\,g^2 + \cos(x)\,2g\,g'(x))\left(\tan\left(\frac{x}{x^2+2}\right)\right) + \cos(x)g^2 \cdot \left(\sec^2\left(\frac{x}{x^2+2}\right)\right)\left(\frac{x+2-1}{(x+2)^2}\right)$

$f'(x) = 2g(x)\ g'(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)(g(x))^2 \cdot \tan\left(\frac{x}{x^2+2}\right) + \cos(x) \cdot \sec^2\left(\frac{x}{x^2+2}\right)(g(x))^2 \cdot \frac{x^2+2-2x}{(x+2)^2}$

$f'(0) = \left(2g(0)g'(0)\cos(0) - \operatorname{sen}(0)(g(0))^2\right)\tan\left(\frac{0}{2}\right) + \cos(0)\sec^2\left(\frac{0}{2}\right)(g(0))^2\left(\frac{2}{4}\right) =$

0

$f'(0) = \cancel{\left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - 0\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]} 0 + 1 \cdot 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

13) $f(x) = x \cdot g(x^2)$.

a) Prove que $f'(x) = g(x^2) + 2x^2 \cdot g'(x^2)$

$f'(x) = x' \cdot g(x^2) + x \cdot (g(x^2))' = 1\,g(x^2) + x \cdot g'(x^2) \cdot 2x =$

$f'(x) = g'(x^2) + 2x^2\, g'(x^2)$

b) $g(4) = ? \qquad g(4) + g'(4) = 1 \qquad f'(2) = -1$

$g'(4) = 1 - g(4)$

$g(4) = g(x^2) \to x = -2$ ou 2

Para $x = 2$

$f'(2) = g(4) + 2 \cdot 4 \cdot g'(4)$

$-1 = g(4) + 8(1 - g(4)) = g(4) + 8 - 8(g(4)) = -1$

$g(4) = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}$