Cálculo I	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Cap.XXVI. Polinômio de Taylor e Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

---

Definição 26.1 (Polinômio de Taylor de ordem n em volta de x_0) : (⇑)

Seja f uma função derivável até a ordem n em um intervalo aberto I e seja $x_0 \in \mathrm{I}$. O polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

é denominado Polinômio de Taylor , de ordem n , de f em volta de x_0 .

Teorema 26.1 (Fórmula de Taylor de ordem n em volta de x_0 □om Resto de Lagrange) : (⇑)

Se f é uma função derivável até a ordem $n+1$ no intervalo aberto I e $x , x_0 \in \mathrm{I}$, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + R_n(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) = \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) , \text{ sendo} \end{aligned}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\left(\begin{array}{l} R_n(x) \text{ é denominado Resto de Lagrange e nos dá o resto} \\ \text{quando aproximamos a função por seu Polinômio de Taylor} \end{array} \right)$$

---

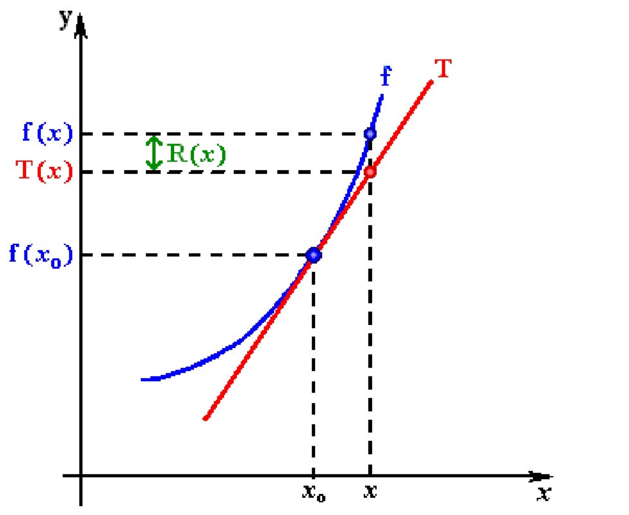
voltar para o iní□io

Observação 26.1 (Polinômio e Fórmula de Taylor de ordem 1 em volta de x_0) : (⇑)

- **Polinômio de Taylor de ordem 1 em volta de x_0 :**

Se f é uma função derivável no intervalo aberto I e $x, x_0 \in$ I, então o Polinômio de Taylor de ordem 1 é

$$\mathrm{P}_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{\mathrm{f}^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$
$$= \frac{\mathrm{f}^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{\mathrm{f}^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 =$$
$$= \frac{\mathrm{f}(x_0)}{1}(x-x_0)^0 + \frac{\mathrm{f}'(x_0)}{1}(x-x_0)^1 =$$
$$= \underbrace{\mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{equação da reta tangente ao} \\ \text{gráfico de f no ponto } (x_0, \mathrm{f}(x_0))}}$$



T é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, \mathrm{f}(x_0))$:

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)(x-x_0)$$

Observe, no gráfico acima, que

$$\mathrm{f}(x) = \underbrace{\mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)(x-x_0)}_{\mathrm{T}(x)} + \mathrm{R}(x)$$

- **Fórmula de Taylor de ordem 1 em volta de x_0 com Resto de Lagrange :**

Se f é uma função derivável até a ordem 2 no intervalo aberto I e $x, x_0 \in$ I, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{P}_1(x) + \mathrm{R}_1(x) =$$
$$= \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)(x-x_0) + \mathrm{R}_1(x) \text{ , sendo}$$
$$\mathrm{R}_1(x) = \frac{\mathrm{f}''(s)}{2!}(x-x_0)^2$$

voltar para o iní□io

Exemplo 26.1 : (⇑)

(a) En□ontre o Polinômio de Taylor de ordem 1 de $\mathrm{f}(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o Resto de Lagrange .
(b) Cal□ule um valor aproximado para ln (1,003) e avalie o erro .

(solução de a) (solução de b)

Solução :

(a) En□ontre o Polinômio de Taylor de ordem 1 de $\mathrm{f}(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o Resto de Lagrange .

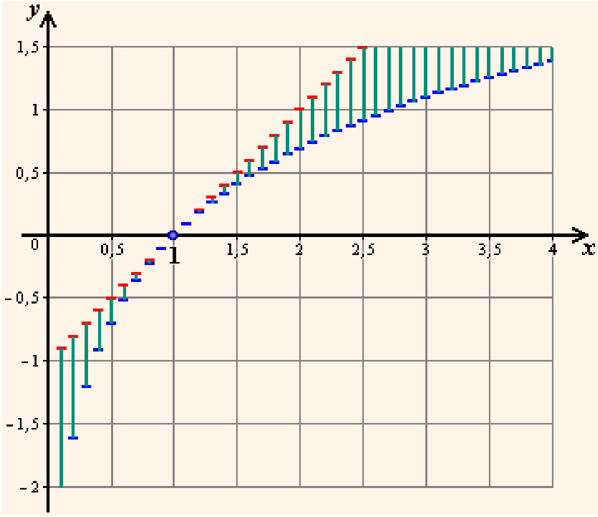
$\left.\mathrm{f}(x) = \ln(x) \text{ , } \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{x}\right\} \Rightarrow \mathrm{f}(1) = \ln(1) = 0 \text{ e } \mathrm{f}'(1) = \frac{1}{1} = 1$	$\mathrm{f}''(x) = \frac{-1}{x^2}$

- **Polinômio de Taylor de ordem 1 de $\mathrm{f}(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$:**

$$\mathrm{P}_1(x) = \mathrm{f}(1) + \frac{\mathrm{f}'(1)}{1!}(x-1)^1 \Rightarrow \mathrm{P}_1(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) \Rightarrow \mathbf{P_1(x) = x - 1}$$

- **Resto de Lagrange :**

$$\mathrm{R}_1(x) = \frac{\mathrm{f}''(s)}{2!}(x-1)^2 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1 \Rightarrow \mathbf{R_1(x) = \frac{-1}{2s^2}(x-1)^2} \textbf{ para algum } s \textbf{ entre } x \textbf{ e } 1$$



voltar para o enunciado deste exemplo

voltar para o início

(b) Calcule um valor aproximado para ln (1,003) e avalie o erro .

♦ **Valor aproximado :**

$$\ln(1{,}003) \cong P_1(x) = 1{,}003 - 1 \Rightarrow \mathbf{\ln(1{,}003) \cong 0{,}003}$$

♦ **Erro :**

$$R_1(1{,}003) = \frac{-1}{2s^2}(1{,}003-1)^2 \text{ para algum } s \text{ entre } 1{,}003 \text{ e } 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Obs.: } s \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{s} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{s^2} \leq 1} \Rightarrow \left|R_1(1{,}003)\right| = \left|\frac{-1}{2s^2}(0{,}003)^2\right| = \frac{1}{2s^2}(0{,}003)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|R_1(1{,}003)\right| = \frac{(0{,}003)^2}{2}\cdot\frac{1}{s^2} \leq \frac{(0{,}003)^2}{2}\cdot 1 = 0{,}0000045 \Rightarrow \mathbf{\left|R_1(1{,}003)\right| \leq 0{,}45\cdot 10^{-5}}$$

voltar para o enunciado deste exemplo

voltar para o início

Observação 26.2 (Polinômio e Fórmula de Taylor de ordem 2 em volta de x_0) : (⇑)

- **Polinômio de Taylor de ordem 2 em volta de x_0:**

  Se f é uma função derivável até a ordem 2 no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então o Polinômio de Taylor de ordem 2 é

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$
$$= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 =$$
$$= \frac{f(x_0)}{1}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

- **Fórmula de Taylor de ordem 2 em volta de x_0 com Resto de Lagrange:**

  Se f é uma função derivável até a ordem 3 no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + R_2(x)\text{ , sendo}$$
$$R_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-x_0)^3$$

voltar para o iní□io

Exemplo 26.2 : (⇑)

(a) En□ontre o Polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o Resto de Lagrange .
(b) Cal□ule um valor aproximado para ln (1,003) e avalie o erro .

(solução de a) (solução de b)

Solução :

(a) En□ontre o Polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o Resto de Lagrange .

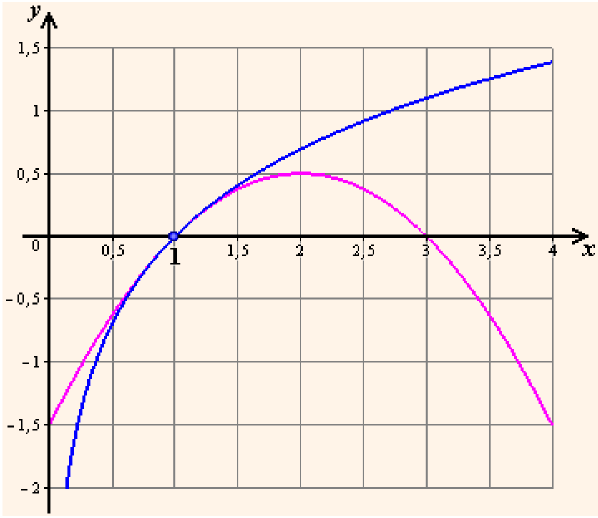
$f(x) = \ln(x)\,,\ f'(x) = \frac{1}{x}\,,\ f''(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f(1) = \ln(1) = 0\,,\ f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \text{ e } f''(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$	$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

- **Polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$:**

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \Rightarrow P_2(x) = 0 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

- **Resto de Lagrange:**

$$R_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-1)^3 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1 \Rightarrow R_2(x) = \frac{2}{6s^3}(x-1)^3 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_2(x) = \frac{1}{3s^3}(x-1)^3 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1$$



voltar para o enun□iado deste exemplo

voltar para o iní□io

(b) Cal□ule um valor aproximado para ln (1,003) e avalie o erro .

♦ **Valor aproximado :**

$$\ln(1{,}003) \cong P_2(x) = 1{,}003 - 1 - \frac{1}{2}(1{,}003-1)^2 = 0{,}003 - \frac{0{,}003^2}{2} \;\Rightarrow\; \mathbf{\ln(1{,}003) \cong 0{,}0029955}$$

♦ **Erro :**

$$R_2(1{,}003) = \frac{1}{3s^3}(1{,}003-1)^3 \text{ para algum } s \text{ entre } 1{,}003 \text{ e } 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Obs.: } s \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{s} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{s^3} \leq 1} \;\Rightarrow\; |R_2(1{,}003)| = \left|\frac{1}{3s^3}(0{,}003)^3\right| = \frac{1}{3s^3}(0{,}003)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |R_2(1{,}003)| = \frac{(0{,}003)^3}{3}\cdot\frac{1}{s^3} \leq \frac{(0{,}003)^3}{3}\cdot 1 = 0{,}000000009 \;\Rightarrow\; \mathbf{|R_2(1{,}003)| \leq 0{,}9\cdot 10^{-8}}$$

voltar para o enun□iado deste exemplo

voltar para o iní□io

Observação 26.3 (Polinômio e Fórmula de Taylor de ordem 3 em volta de x_0) : (⇑)

- **Polinômio de Taylor de ordem 3 em volta de x_0:**

  Se f é uma função derivável até a ordem 3 no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então o Polinômio de Taylor de ordem 3 é

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$
$$= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 =$$
$$= \frac{f(x_0)}{1}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 =$$
$$= \mathbf{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3}$$

- **Fórmula de Taylor de ordem 3 em volta de x_0 com Resto de Lagrange:**

  Se f é uma função derivável até a ordem 4 no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$\mathbf{f(x) = P_3(x) + R_3(x) =}$$
$$\mathbf{= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + R_3(x)} \text{ , sendo}$$
$$\mathbf{R_3(x) = \frac{f^{IV}(s)}{4!}(x-x_0)^4}$$

voltar para o iní□io

Exemplo 26.3 : (⇑)

(a) En□ontre o Polinômio de Taylor de ordem 3 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o Resto de Lagrange .
(b) Cal□ule um valor aproximado para ln (1,003) e avalie o erro .

(solução de a) (solução de b)

Solução :

(a) En□ontre o Polinômio de Taylor de ordem 3 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o Resto de Lagrange .

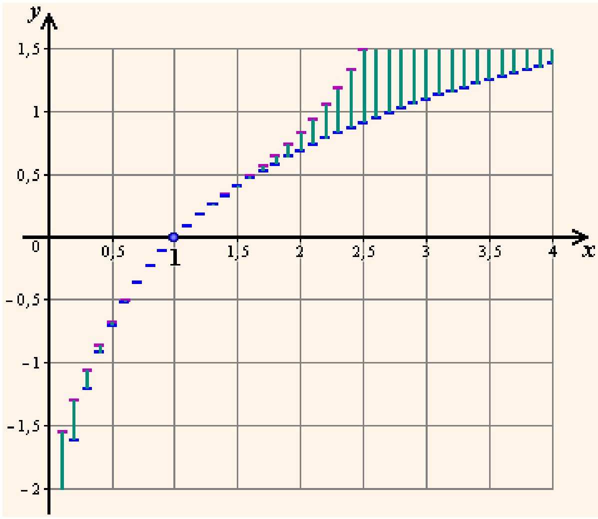
$f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$	$\Rightarrow f(1) = \ln(1) = 0$, $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$, $f''(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$ e $f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$	$f^{IV}(x) = \frac{-6}{x^4}$

♦ **Polinômio de Taylor de ordem 3 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$:**

$$P_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \Rightarrow P_3(x) = 0 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{P_3(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3}$$

♦ **Resto de Lagrange :**

$$R_3(x) = \frac{f^{IV}(s)}{4!}(x-1)^4 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1 \Rightarrow R_3(x) = \frac{-6}{24s^4}(x-1)^4 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{R_3(x) = \frac{-1}{4s^4}(x-1)^4 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1}$$



voltar para o enun□iado deste exemplo

voltar para o iní□io

(b) Cal□ule um valor aproximado para ln (1,003) e avalie o erro .

♦ **Valor aproximado :**

$$\ln(1{,}003) \cong P_3(x) = 1{,}003 - 1 - \frac{1}{2}(1{,}003-1)^2 + \frac{1}{3}(1{,}003-1)^3 = 0{,}003 - \frac{0{,}003^2}{2} + \frac{0{,}003^3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{\ln(1{,}003) \cong 0{,}002995509}$$

♦ **Erro :**

$$R_3(1{,}003) = \frac{-1}{4s^4}(1{,}003-1)^4 \text{ para algum } s \text{ entre } 1{,}003 \text{ e } 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Obs.: } s \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{s} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{s^4} \le 1} \Rightarrow |R_3(1{,}003)| = \left|\frac{-1}{4s^4}(0{,}003)^4\right| = \frac{1}{4s^4}(0{,}003)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |R_3(1{,}003)| = \frac{(0{,}003)^4}{4} \cdot \frac{1}{s^4} \le \frac{(0{,}003)^4}{4} \cdot 1 = 0{,}00000000002025 \Rightarrow \mathbf{|R_3(1{,}003)| \le 0{,}2025 \cdot 10^{-10}}$$

voltar para o enun□iado deste exemplo

voltar para o iní□io

Observação 26.4 (Polinômio e Fórmula de Taylor de ordem 4 em volta de x_0) : (⇑)

- **Polinômio de Taylor de ordem 4 em volta de x_0:**

Se f é uma função derivável até a ordem 4 no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então o Polinômio de Taylor de ordem 3 é

$$\mathbf{P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k} =$$

$$= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 =$$

$$= \frac{f(x_0)}{1}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{24}(x-x_0)^4 =$$

$$= \mathbf{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{24}(x-x_0)^4}$$

- **Fórmula de Taylor de ordem 4 em volta de x_0 com Resto de Lagrange:**

Se f é uma função derivável até a ordem 4 no intervalo aberto I e $x, x_0 \in I$, então existe pelo menos um s entre x e x_0 tal que

$$\mathbf{f(x) = P_4(x) + R_4(x)} =$$

$$= \mathbf{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{24}(x-x_0)^4 + R_4(x)} \;,$$

sendo $$\mathbf{R_4(x) = \frac{f^{V}(s)}{5!}(x-x_0)^5}$$

voltar para o iní□io

Exemplo 26.4 : (⇑)

(a) En□ontre o Polinômio de Taylor de ordem 4 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o Resto de Lagrange .
(b) Cal□ule um valor aproximado para ln (1,003) e avalie o erro .

(solução de a) (solução de b)

Solução :

(a) En□ontre o Polinômio de Taylor de ordem 4 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$ e o Resto de Lagrange .

$f(x) = \ln(x)\,,\ f'(x) = \frac{1}{x}\,,\ f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ $f'''(x) = \frac{2}{x^3}\,,\ f^{IV}(x) = \frac{-6}{x^4}$ $\Bigg\rangle \Rightarrow$	$f(1) = \ln(1) = 0\,,\ f'(1) = \frac{1}{1} = 1\,,\ f''(1) = \frac{-1}{1^2} = -1\,,$ $f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$ e $f^{IV}(1) = \frac{-6}{1^4} = -6$	$f^{V}(x) = \frac{24}{x^5}$

♦ **Polinômio de Taylor de ordem 4 de $f(x) = \ln(x)$ em volta de $x_0 = 1$:**

$$P_4(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4 \Rightarrow$$

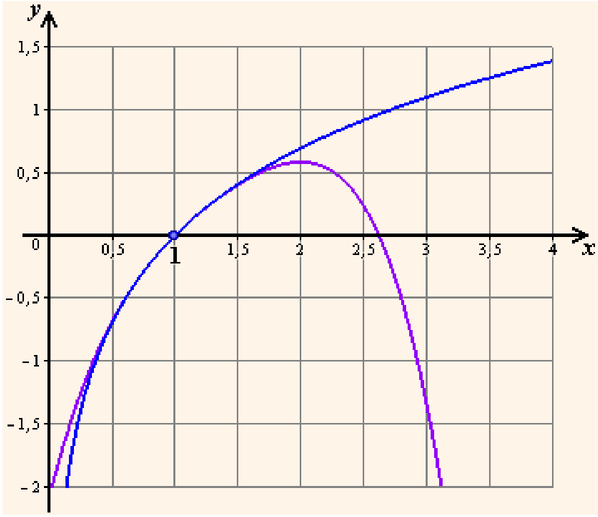
$$\Rightarrow P_4(x) = 0 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 + \frac{-6}{24}(x-1)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{P_4(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4}$$

♦ **Resto de Lagrange :**

$$R_4(x) = \frac{f^{V}(s)}{5!}(x-1)^5 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1 \Rightarrow R_4(x) = \frac{24}{120\,s^5}(x-1)^5 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{R_4(x) = \frac{-1}{5s^5}(x-1)^5 \text{ para algum } s \text{ entre } x \text{ e } 1}$$



voltar para o enunciado deste exemplo

voltar para o início

(b) Calcule um valor aproximado para ln (1,003) e avalie o erro .

♦ **Valor aproximado :**

$$\ln(1{,}003) \cong P_4(x) = 1{,}003 - 1 - \frac{1}{2}(1{,}003-1)^2 + \frac{1}{3}(1{,}003-1)^3 - \frac{1}{3}(1{,}003-1)^4 = 0{,}003 - \frac{0{,}003^2}{2} + \frac{0{,}003^3}{3} - \frac{0{,}003^4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{\ln(1{,}003) \cong 0{,}00299550897975}$$

♦ **Erro :**

$$R_4(1{,}003) = \frac{1}{5s^5}(1{,}003-1)^5 \text{ para algum } s \text{ entre } 1{,}003 \text{ e } 1 \Rightarrow$$

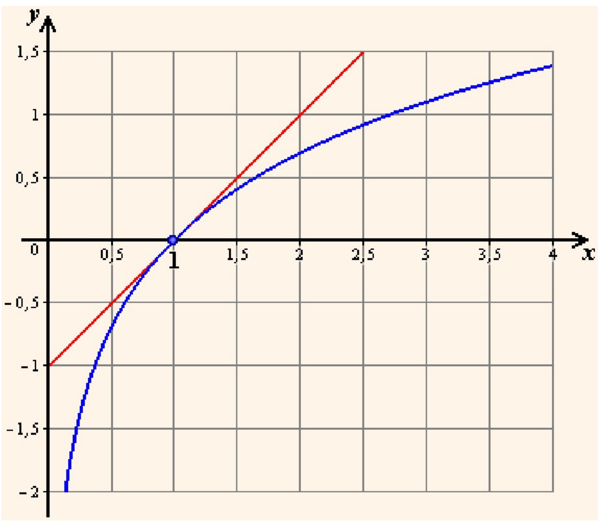
$$\boxed{\text{Obs.: } s \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{s} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{s^5} \leq 1} \Rightarrow \left|R_4(1{,}003)\right| = \left|\frac{1}{5s^5}(0{,}003)^5\right| = \frac{1}{5s^5}(0{,}003)^5 \Rightarrow$$

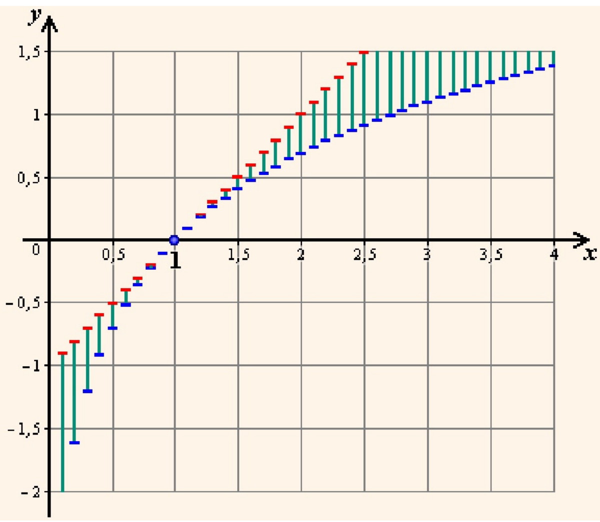
$$\Rightarrow \left|R_4(1{,}003)\right| = \frac{(0{,}003)^5}{5}\cdot\frac{1}{s^5} \leq \frac{(0{,}003)^5}{5}\cdot 1 = 0{,}0000000000000486 \Rightarrow \mathbf{\left|R_4(1{,}003)\right| \leq 0{,}486\cdot 10^{-13}}$$

voltar para o enunciado deste exemplo

voltar para o início

Ln x e seus Polinômios de Taylor de ordem 1 , 2 , 3 e 4 em volta de 1 : (⇑)





voltar para o início

capítulo anterior	índice	próximo capítulo