$f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Lista 10 **Cálculo I -A-** *2008-1*

LISTA 10 - 2008-1
Funções inversas
Teorema da Função Inversa
Funções trigonométricas inversas

uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

1. Seja $f(x) = \frac{1}{x} - x^3, \quad x > 0.$
   (a) Mostre que f tem inversa em $(0, \infty)$; (b) Calcule $f^{-1}(0)$ e $(f^{-1})'(0)$;
   (c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(0, f^{-1}(0))$.

2. Sendo f uma função invertível, derivável, tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 7$, $f'(1) = 3$ e $f'(2) = 4$, calcule $(f^{-1})'(2)$.

REFAZER

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x \leq 0 \\ 1 - x^2, & x > 0 \end{cases}$. Se f^{-1} existir, calcule $(f^{-1})'(x)$ e esboce os gráficos de f e f^{-1}.

Resolva as equações dos exercícios 4. a 11.

4. $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\cos x = 0$
6. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$
7. $\cos x = -1$
8. $\tan x = 0$
9. $\tan x = 1$
10. $\tan x = -1$
11. $\sec x = -2$

Nos exercícios 12. a 19. encontre o valor de x.

12. $x = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2}$
13. $x = \arccos 0$
14. $x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$
15. $x = \arccos -1$
16. $x = \arctan 0$
17. $x = \arctan 1$
18. $x = \arctan -1$
19. $x = \operatorname{arcsec} -2$

Deduza as fórmulas dos exercícios 20. a 22.

20. $\operatorname{arcsec} x - \arccos \frac{1}{x} = 0$
21. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
22. $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$

Nos exercícios 23. e 24. derive a função.

23. $f(x) = \operatorname{arcsen}^3\left((x+1)^2\right) + \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

24. $g(x) = \arctan \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Nos exercícios 25. e 26. encontre y', se $y = y(x)$ é definida implicitamente pela equação dada.

25. $x \arctan y = x^2 + y^2$
26. $\operatorname{arcsen}(xy) = x + y$

Nos exercícios 27. a 29. verifique a igualdade.

27. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} \operatorname{arcsen} x + \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}\right) = x^2 \operatorname{arcsen} x$

28. $\frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

29. $\frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\right) = 2$

30. Seja $f(x) = 2(x^2+1) \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$.
    (a) Mostre que f é invertível;
    (b) Verifique que $f(-1) = -\pi$ e calcule $(f^{-1})'(-\pi)$;

$(\operatorname{arcsen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arc\,cos}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arcsec}(x))' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(\operatorname{arccossec}(x))' = ?$ $(\operatorname{arccotg}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

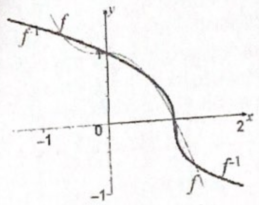
Lista 10 **Cálculo I -A-** 2008-1

RESPOSTAS

1. (a) Como $f'(x) = -\dfrac{1+3x^4}{x^2} < 0$ em $(0,\infty)$,
   f satisfaz as hipóteses do TFI
   (teorema da função inversa).
   Logo f é invertível em $(0,\infty)$;
   (b) $f^{-1}(0) = 1$ e $(f^{-1})'(0) = -1/4$;
   (c) $x + 4y = 4$

2. $\dfrac{1}{3}$

3. $(f^{-1})'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}, & x > 1 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}, & x < 1 \end{cases}$



4. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

5. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

6. $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

7. $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

8. $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

9. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

10. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

11. $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

12. $x = \dfrac{\pi}{3}$

13. $x = \dfrac{\pi}{2}$

14. $x = -\dfrac{\pi}{6}$

15. $x = \pi$

16. $x = 0$

17. $x = \dfrac{\pi}{4}$

18. $x = -\dfrac{\pi}{4}$

19. $x = \dfrac{2\pi}{3}$

20. Sabemos que $y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow \sec y = x$, $0 \le y < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < y \le \pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos y} = x$, $0 \le y < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < y \le \pi \Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{x} = \cos y$. Substituindo a primeira e a última relação na equação dada, obtemos $y - \arccos(\cos y) = y - y = 0$.

21. Deduzida em aula.

22. Sabemos que $y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, $\cos y = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$, mas no intervalo considerado $\cos y \ge 0$, logo $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

23. $f'(x) = 3\operatorname{arcsen}^2((x+1)^2)\,\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{1-(x+1)^4}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2+1}}} \cdot \dfrac{-1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}(2x) =$

$$= \frac{6(x+1)\operatorname{arcsen}^2((x+1)^2)}{\sqrt{1-(x+1)^4}} + \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2}}$$

24. $g'(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \times \dfrac{(1+\cos x)(\operatorname{sen} x) - (1-\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2|\operatorname{sen} x|}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+y^2)(2x - \arctan y)}{x - 2y(1+y^2)} = \dfrac{(1+y^2)(x^2-y^2)}{x^2 - 2xy(1+y^2)}$

26. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{1-x^2y^2} - y}{x - \sqrt{1-x^2y^2}}$

30. (a) $f'(x) = 2 + 4x\arctan x \neq 0$ pois (i) $f'(0) = 2$; (ii) $x > 0 \Rightarrow \arctan x > 0 \Rightarrow x\arctan x > 0 \Rightarrow f'(x) > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$; (iii) $x < 0 \Rightarrow \arctan x < 0 \Rightarrow x\arctan x > 0 \Rightarrow f'(x) > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$.
   Logo aplicando o Teorema da Função Inversa, f possui inversa f^{-1}.
   (b) $f(-1) = 4\arctan(-1) = -\pi$; $(f^{-1})'(-\pi) = \dfrac{1}{2+\pi}$.

$$f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

GMA - IA Lista 10

1) $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$, $x>0$

① $+\ -\sqrt[4]{1/3}\ -\ \sqrt[4]{1/3}\ +$

② $+\ +\ +\ 0\ +\ +$

$f(x)$

a) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 3x^2 = \frac{-3x^4 - 1}{x^2}$ ① ②

$-y x + 1\ x^4$ $-y\left(-x + \frac{1}{4}\right) = x^4$

f^{-1} $\quad 1 \quad \frac{1}{1}$ $\quad 1'\ x^2$

$\frac{-x^4+1}{x} = 0 \to x^4 = \pm 1$

b) $f^{-1}(0)$ e $(f^{-1})'(0)$

$f^{-1}(0) = f(x) \to y = 0$

$$[f^{-1}(0)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{\frac{-3(f^{-1}(0))^4 - 1}{[f^{-1}(0)]^2}} = \frac{(f^{-1}(0))^2}{-3[f^{-1}(0)] - 1} = \frac{1^2}{-3-1} = \frac{-1}{4}$$

$f^{-1}(0) = 1$

c) Equação da reta tangente ao gráfico $f^{-1}(x)$.

$P(0, f^{-1}(0)) = P(0, 1)$. $\quad [f^{-1}(0)]' = -1/4$

~~f(x) =~~ $y - y_0 = y'(x - x_0) \to y - 1 = \frac{-1}{4}(x - 0)$

$y = \frac{-x}{4} + 1$ //

kajoma

$y = x$
$f^{-1}(x) = x$
y

2) f é inversível

$f(1)=2$ $f(2)=7$ $f'(1)=3$ $f'(2)=4$

$(f^{-1})'(2)=?$

$f^{-1}(2) \to (2, y)$
$f \to (y, 2)$

$f^{-1}(2) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$ //

$f^{-1}(2) = f(1)$

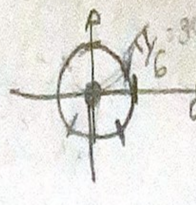
3) $f(x) = \begin{cases} 1-x^3 \text{ se } x \leq 0 \\ 1-x^2 \text{ se } x > 0 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -3x^2 \text{ se } x \leq 0 & ① f'(x) < 0 \\ -2x \text{ se } x > 0 & ② f'(x) < 0 \end{cases}$

Com $f(x)$ é extritamente negativo nos intervalos pelo TVI, podemos afirmar que existe $f^{-1}(x)$.

se $x < 0$ $f^{-1}(x)' = \dfrac{1}{-3(f'(x))^2} < 0$

$\boxed{f^{-1}(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} =$

se $x < 0 \to 1-x^3 = x$



$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

4) $\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

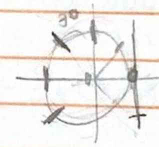
5) $\cos(x) = 0$. , $x = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

6) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{\pi}{6} + \pi$ ou $\frac{\pi}{6} + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{6}$

$7\pi/6$ ou $4\pi/3$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6}$

$\cos \frac{\pi}{6} - \pi$ $\quad \frac{2\pi}{3}$

7) $\cos x = -1$ $\quad \pi =$

$x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

8) $\tan x = 0$

$x = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

9) $\tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

10) $\tan x = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

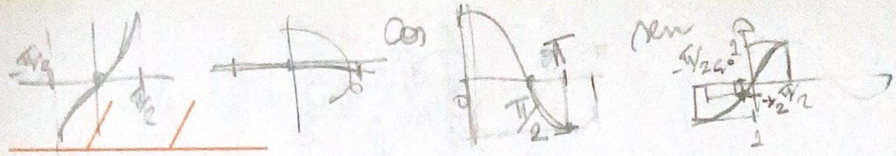
1) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi + 3\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

11) $\sec x = -2$

$\frac{1}{\cos(x)} = -2 \rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



12) $x = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \to x = 60° = \frac{\pi}{3}$

13) $x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

14) $x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi/6.$

15) $x = \arccos -1 = \pi$

16) $x = \arctan 0 = 0$

17) $x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

18) $x = \arctan -1 = -\pi/4$

19) $x = \operatorname{arcsec} -2. = \frac{1}{\arccos x} = -2$

$\arccos(x) = \frac{-1}{2} \to x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ //

23) $f(x) = \arcsin^3\left((x+1)^2\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \quad (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 3\arcsin^2\left[(x+1)^2\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^4}} \cdot 2(x+1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}\right) \cdot -\frac{1}{2} \cdot (x^2$

$1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{6(x+1)\arcsin^2(x+1)^2}{\sqrt{1-(x+1)^2}} + \frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} =$

$f'(x) = \frac{6(x+1)\arcsin^2(x+1)^2}{\sqrt{1-(x+1)^2}} + \frac{x^2+1}{x} \quad \frac{x}{x^2+1}$

kajoma

$\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

24) $g(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right) =$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x\,(1+\cos(x)) - (1-\cos\ldots}{(1+\cos(x))^2}$$

25) $(x \arctan y)' = (x^2+y^2)'$

$$1\arctan y + x \cdot \frac{1}{1+y^2} \cdot y' = 2x + 2y\,y'$$

$$\frac{xy'}{1+y^2} - 2yy' = 2x - \arctan y$$

$$y'\left(\frac{x}{1+y^2} - 2y\right) = 2x - \arctan y$$

26) $(\operatorname{arcsen}(xy))' = (x+y)'$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}} \cdot (1y + xy') = 1 + y'$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}} + \frac{xy'}{\sqrt{1-(xy)^2}} = 1 + y'$$

$$\frac{xy'}{\sqrt{1-(xy)^2}} - y' = 1 - \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}} \Rightarrow y'\left(\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}} - 1\right) = 1 - \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}$$

$$y' = \frac{1 - \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}}{\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}} - 1}$$

27) $\cancel{\frac{d}{dx}\left(\arctan\sqrt{\frac{2+\tan x}{1-\tan^2 x}}\right)}$

27) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\operatorname{arcsen}(x)\right) + \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}\Bigg)$

$x^2 \operatorname{arcsen} x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x}{9}\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2+2}{9} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

28)

LISTA 8 - 2008-1

Aproximação linear
Diferencial
Derivada de ordem superior

uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

1. Encontre a equação da reta que melhor aproxima o gráfico de $y = f(x) = x^{19/3}$ para valores de x próximos de -1. Usando a equação desta reta, encontre um valor aproximado para $(-1,06)^{19/3}$.
2. Calcule, por diferencial, o valor aproximado de: (a) $\sqrt{35,99}$ (b) $\dfrac{1}{3,09}$ (c) $\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^{1/3}$
3. A altura e o raio de um cilindro reto são iguais, de modo que o volume desse cilindro é dado por $V = \pi h^3$. O volume deve ser calculado com erro não maior que 1% em relação ao valor real. Determine, aproximadamente, o maior erro que pode ser tolerado na medida de h, expressando-o como porcentagem de h.
4. Calcule f'' para a função do ex. 8. da Lista 7.
5. Calcule f'' para a função do ex. 10. da Lista 7.
6. Calcule f'', f''' e seus respectivos domínios para $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
7. Seja $h(x) = |x^2 - 4|$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Dê os pontos onde h é duas vezes diferenciável e determine $h'(x)$ e $h''(x)$;
   (b) Esboce o gráfico de h.
8. Seja $y = u\cos^2 u^3$. (a) Calcule $\dfrac{dy}{du}$; (b) Se $u = u(x)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.
9. Prove: se $y = \cos\sqrt{x} - \operatorname{sen}\sqrt{x}$ então $4xy'' + 2y' + y = 0$.
10. Considere $g(x) = \cos x \times f^2(x)$, onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável, $f(0) = -1$ e $f'(0) = f''(0) = 2$. Calcule $g''(0)$.

RESPOSTAS

1. $y = \dfrac{19}{3}x + \dfrac{16}{3}$; valor aproximado $= -1,38$

2. (a) $\cong 5,9992$ (b) $\cong 0,3233$

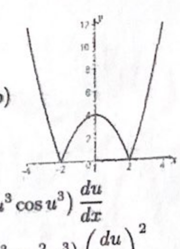
2. (c) como $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/3} \cong 0,8333$, é uma aproximação grosseira, foi usado que $\dfrac{1}{2}$ está perto de 1;
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/3} \cong 0,79375$, é uma aproximação melhor, foi usado que $\dfrac{1}{2}$ está perto de $0,512 = (0,8)^3$

3. $\dfrac{1}{3}\%$ 4. $G''(r) = -\dfrac{16}{25}(2r+2)^{-9/5}$

5. Para $x \neq 0$, $f''(x) = \left(6x - \dfrac{16}{x^7}\right)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{4}{x^3}\cos\dfrac{1}{x^4}$; $\nexists f''(0)$ pois f' não é contínua em $x = 0$.

6. dom f'' = dom $f''' = \mathbb{R} - \{0\}$; $\nexists f''(0)$ pois f' não é contínua em $x = 0$ e $\nexists f'''(0)$ pois $\nexists f''(0)$;
$f''(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$; $f'''(x) = -\dfrac{1}{x^4}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

7. (a) h é duas vezes diferenciável para $\forall x \in \mathbb{R}$; $x \neq -2$ e $x \neq 2$;
$$h'(x) = (2x)\frac{x^2-4}{|x^2-4|} = \begin{cases} -2x & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{se } x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$
$$h''(x) = (2)\frac{x^2-4}{|x^2-4|} = \begin{cases} -2 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{se } x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$
(b)



8. (a) $\dfrac{dy}{du} = \cos^2 u^3 - 6u^3 \operatorname{sen} u^3 \cos u^3$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\cos^2 u^3 - 6u^3 \operatorname{sen} u^3 \cos u^3\right)\dfrac{du}{dx}$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\cos^2 u^3 - 6u^3 \operatorname{sen} u^3 \cos u^3\right)\frac{d^2u}{dx^2} + 6u^2\left(3u^3 \operatorname{sen}^2 u^3 - 4 \operatorname{sen} u^3 \cos u^3 - 3u^3\cos^2 u^3\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

9. Basta calcular y' e y'', substituir na expressão do lado esquerdo da equação e verificar que se anula.

10. 3