

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA



TALLER DE AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

TP1: Identificación

1^{er} CUATRIMESTRE 2024

Integrantes:

Arballo, Facundo	105096	farballo@fi.uba.ar
Spaltro, Francisco	102098	fspaltro@fi.uba.ar

Índice

1. Modelado del sistema	2
1.1. Ecuaciones no lineales	2
1.2. Múltiples puntos de equilibrio	5
1.3. Identificación	5
2. Controlador	7
3. Diseño en Matlab	8
3.1. Respuesta a escalón de acción de control	8
3.2. Sistema con controlador. Respuesta a escalón de referencia	10
3.3. Sistema con controlador. Respuesta a escalón de referencia y variación de Q_i . .	12
4. Conclusión	13

1. Modelado del sistema

La planta a caracterizar tiene la forma de un tanque cónico piramidal de sección horizontal cuadrado y punta inferior cortada. Una bomba genera un flujo constante de entrada de agua Q_i que fluye por la cañería. Una válvula permite controlar el flujo de salida de agua Q_o mediante una acción de control $u \in [0, 1]$ que regula el área efectiva de la cañería de salida entre 0 y 100 %

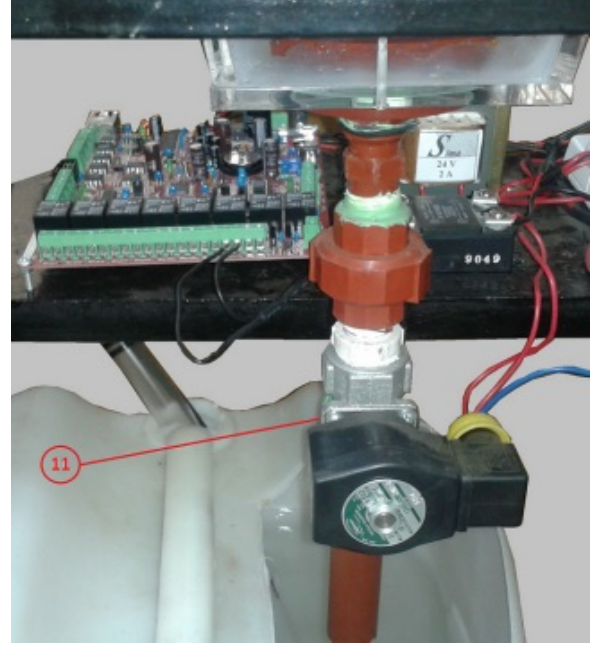
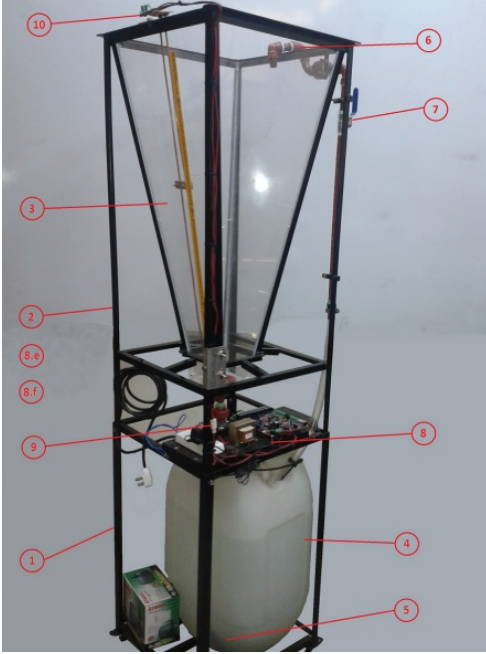


Figura 1: 4) reserva de agua; 6) cañería; 7) válvula de entrada; 8) válvula de salida

1.1. Ecuaciones no lineales

Se parte de las ecuaciones

$$Q_o = \alpha \sqrt{h} \quad (1)$$

$$V = h \frac{A_s + A_i + \sqrt{A_s A_i}}{3} \quad (2)$$

donde Q_o es el caudal de salida, h la altura del líquido y V el volumen de un cono piramidal de sección truncada, siendo A_s y A_i las áreas de su sección superior e inferior, respectivamente. Cabe destacar que en nuestro caso el área superior variará con la altura del líquido.

La variación del volumen está dada por la diferencia entre el caudal de entrada y de salida, es decir:

$$\frac{dV}{dt} = Q_i - Q_o \quad (3)$$

La ecuación 1 puede reescribirse haciendo uso de la Ley de Torricelli ($v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ con $v(t)$ la velocidad del líquido). Dado que el caudal es la velocidad por el área (efectiva ya que controlamos con la válvula), resulta:

$$Q_o = A_{ef} v(t) = A_o u \sqrt{2gh} \quad (4)$$

donde A_o es el área de salida.

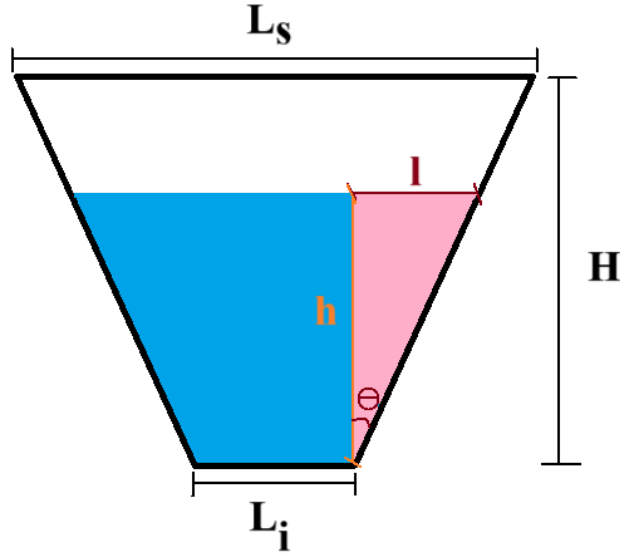


Figura 2: Cono piramidal de sección truncada

Para calcular el área superior (que depende de la altura del líquido) se puede aplicar las propiedades trigonométricas en la figura 2.

Se puede obtener que

$$\tan \theta = \frac{\frac{L_s - L_i}{2}}{H}$$

$$l = h \tan \theta = h \frac{\frac{L_s - L_i}{2}}{H}$$

Con lo cual, el área superior queda definida como

$$A_s(h) = (2l + L_i)^2 = \left(2h \frac{\frac{L_s - L_i}{2}}{H} + L_i\right)^2$$

Por lo tanto, el volumen, utilizando estas expresiones en la ecuación 2:

$$V = h \frac{(h \frac{L_s - L_i}{H} + L_i)^2 + L_i^2 + (h \frac{L_s - L_i}{H} + L_i)L_i}{3}$$

$$V = h^3 \frac{(L_s - L_i)^2}{3H^2} + h^2 \frac{L_i(L_s - L_i)}{H} + hL_i^2$$

Reemplazando en las ecuaciones 3 y 4:

$$\frac{d}{dt} \left(h^3 \frac{(L_s - L_i)^2}{3H^2} + h^2 \frac{L_i(L_s - L_i)}{H} + hL_i^2 \right) = Q_i - A_o u \sqrt{2gh}$$

$$\dot{h} \left(3h^2 \frac{(L_s - L_i)^2}{3H^2} + 2h \frac{L_i(L_s - L_i)}{H} + L_i^2 \right) = Q_i - A_o u \sqrt{2gh}$$

Con lo cual la ecuación no lineal que representa al sistema queda determinada por

$$\dot{h} = \frac{H^2}{(h(L_s - L_i) + L_i H)^2} \left(Q_i - A_o \sqrt{2gh} u \right) \quad (5)$$

Tomando como entrada la variable h y la variable de control $\mu = u$:

$$\dot{h} = f(h, u)$$

Para el punto de equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{h}(h_0, u_0) = 0 \\ Q_i = Q_o(h_0, u_0) \end{cases} \quad (6)$$

De cualquiera de las dos ecuaciones, dado h_0 , se obtiene:

$$Q_i - A_o \sqrt{2gh_0} u_0 = 0$$

Luego:

$$\begin{cases} h_0 = h_0 \\ u_0 = \frac{Q_i}{A_o \sqrt{2gh_0}} \end{cases} \quad (7)$$

Ya con los valores de equilibrio, linealizamos y definimos las matrices de estado de la siguiente manera:

$$A = \frac{\partial}{\partial h} f(h, u) \Big|_{h_0, u_0} = - \frac{h_0^2 (2h_0(L_i - L_s)^2 - 2h_0 L_i (L_i - L_s)) (Q_i - \sqrt{2gh_0} A_o u_0)}{(h_0^2 L_i^2 + h_0^2 (L_i - L_s)^2 - 2h_0 L_i h_0 (L_i - L_s))^2} - \frac{\sqrt{2} A_o h_0^2 g u_0}{2 * \sqrt{gh_0} (h_0^2 L_i^2 + h_0^2 (L_i - L_s)^2 - 2h_0 L_i h_0 (L_i - L_s))}$$

$$B = \frac{\partial}{\partial u} f(h, u) \Big|_{h_0, u_0} = - \frac{\sqrt{2gh_0} A_o h_0^2}{h_0^2 L_i^2 + h_0^2 (L_i - L_s)^2 - 2h_0 L_i h_0 (L_i - L_s)}$$

Planteando $y = h$ se tiene que para $y = Cx + Du$:

$$C = 1$$

$$D = 0$$

Luego, la función de transferencia es:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

quedando, entonces:

$$H(s) = - \frac{\frac{\sqrt{2} A_o H^2 \sqrt{gh_0}}{(L_s h_0 - L_i h_0 + H L_i)^2}}{s - \frac{2H^2 (L_i - L_s) (Q_i - \sqrt{2} A_o u_0 \sqrt{gh_0})}{(L_s h_0 - L_i h_0 + H L_i)^3}} + \frac{\sqrt{2} A_o H^2 g u_0}{2\sqrt{gh_0} (L_s h_0 - L_i h_0 + H L_i)^2}$$

Es decir

$$H(s) = \frac{\frac{\sqrt{2} A_o H^2 \sqrt{gh_0}}{(L_s h_0 - L_i h_0 + H L_i)^2}}{s + \frac{Q_i H^2}{2h_0 (L_s h_0 - L_i h_0 + H L_i)^2}} \quad (8)$$

Se observa que tanto la ganancia como la ubicación del polo dependen de características particulares de la planta, como los largos superior e inferior y la altura. En cuanto al área de la cañería de salida, solo modifica la ganancia del sistema.

Para $Q_i = 8 \text{ L/min}$, $d_2 = 10,65 \text{ mm}$, $L_i = 10 \text{ cm}$, $L_s = 40 \text{ cm}$, $H = 0,9 \text{ m}$, siendo d_2 el diámetro de la cañería de salida:

$$u_0 = 0,5039$$

$$H(s) = -\frac{0,004233}{s + 0,00237} \quad (9)$$

1.2. Múltiples puntos de equilibrio

Haciendo un barrido para h_0 con puntos de 0,1 m a 0,8 m de a pasos de 0,1 m se obtiene el siguiente diagrama de Bode:

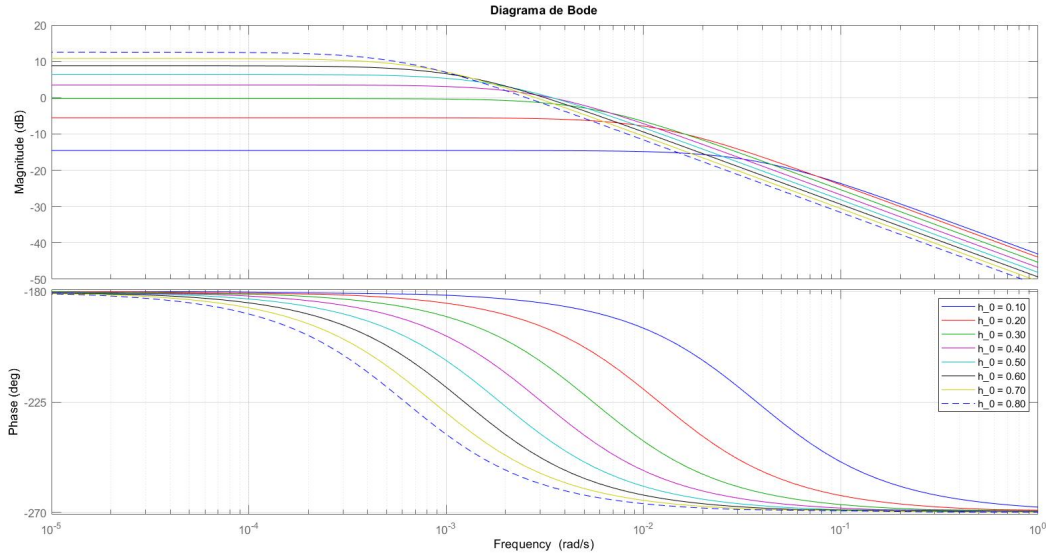


Figura 3: Diagramas de bode para diferentes valores de h_0

Se observa que, a medida que se aumenta el valor de h_0 , la amplitud crece, la fase comienza a rotar antes y la frecuencia de corte se mueve hacia la izquierda. Moviendo el polo, la respuesta de la planta se hace más rápida (requiriendo un actuador más veloz), haciendo que, en el diseño del controlador se deba considerar otros puntos de trabajo para lograr el margen de fase de 60° . Por ejemplo, entre los valores de $h_0 = 0,8$ y $h_0 = 0,3$, la planta a lazo abierto tiene este mismo margen de fase mencionado pero en un orden de magnitud diferente en el eje de frecuencias.

1.3. Identificación

En esta sección utilizamos la identificación por regresión lineal para estimar el área de la cañería de salida, asumiendo que es el único parámetro desconocido, calculando el numerador de la función de transferencia y comparándolo con el de la ecuación 8, que reemplazando por los valores dados resulta en $47,5176 A_o$. Como el polo no depende de esta incógnita, lo tomamos como dato.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \dots \\ x_n^T \end{pmatrix} \alpha$$

La solución insesgada y de mínima varianza es

$$(X^T X)^{-1} X y \quad (10)$$

Suponiendo una transferencia del tipo

$$P = \frac{c_1}{s + c_2} \rightarrow P_d = \frac{k_d}{z - p_d}$$

Esta última se puede expresar como una ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = p_d y_n + k_d u_n$$

De forma matricial:

$$\bar{h}_{n+1} - p_d \bar{h}_n = k_d \bar{u}_n$$

Por lo tanto, la solución es

$$k_d = \bar{u}_n^{-1} (\bar{h}_{n+1} - p_d \bar{h}_n) = 0,0042$$

Teniendo $p_s = 0,00237$ y $T = 1$ s, el polo en tiempo discreto es $p_d = e^{-T p_s} = 0,9976$ y:

$$k_s = -\frac{\log p_d}{T} \frac{k_d}{p_d - 1}$$

Resultando en $k_s = 0,0042$. Se grafican los datos provistos por la cátedra en comparación con la planta identificada en la siguiente figura:

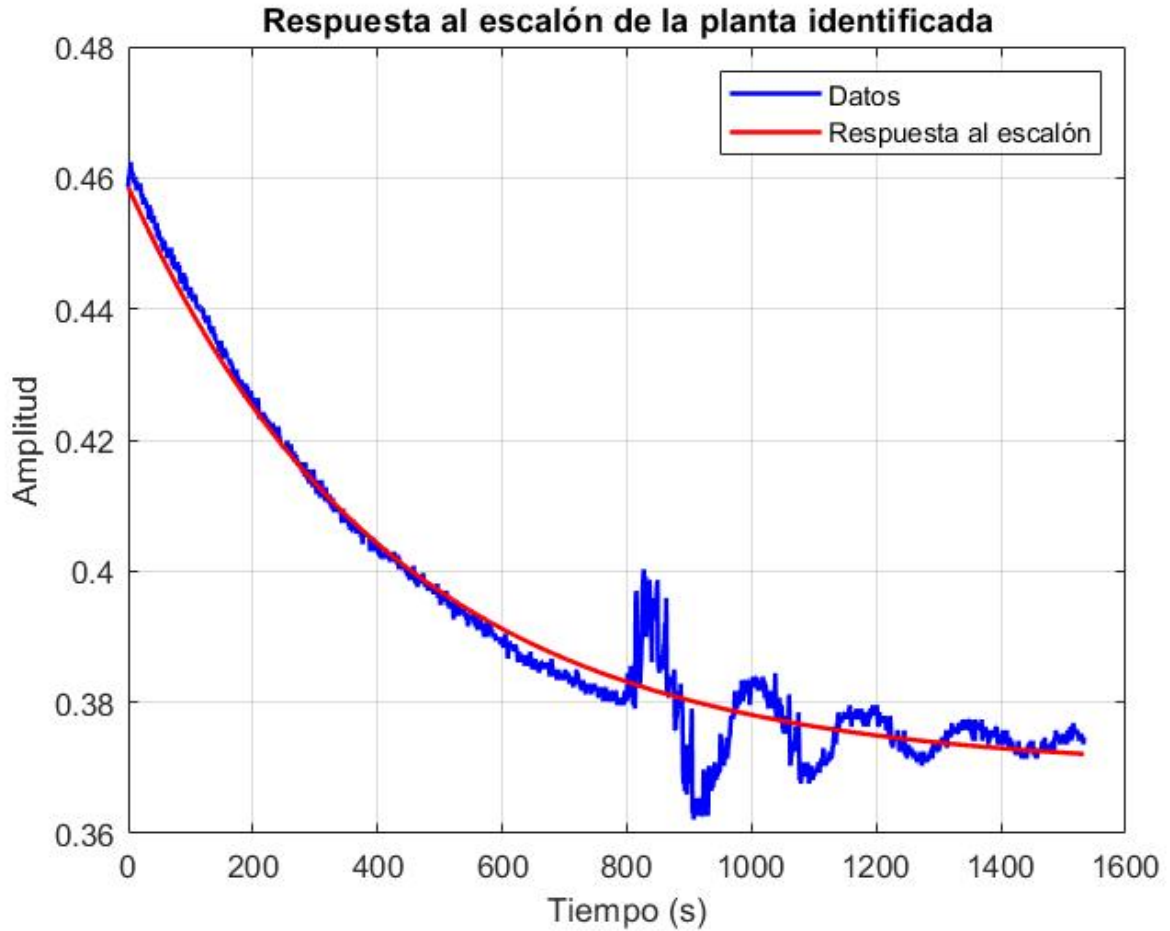


Figura 4: Respuesta al escalón de la planta identificada

Por lo tanto, el área de la cañería de salida es

$$A_o = \frac{0,0042}{47,5176} = 8,8613 \cdot 10^{-5} m^2$$

Siendo un valor muy cercano a los $8,9082 \cdot 10^{-5} m^2$ que se dieron como dato. Hay algunos factores a tener en cuenta a la hora de utilizar este valor de área de salida. Por un lado, se modelizó el comportamiento de la planta, en principio desconocida, por una transferencia $\frac{k_s}{s+p_s}$, linealizando el sistema. En cuanto a la válvula de salida digital, controlada con una señal PWM de $T = 1$ s, algunos factores como la fricción, la respuesta dinámica del actuador y la velocidad del flujo pueden introducir variaciones no lineales en el sistema. A su vez, estos cambios en la presión del agua pueden influir en la relación que establecimos para el área efectiva como el producto entre el área de salida y la acción de control.

Utilizando este área conocida, el diámetro es de

$$d_o = 2 \sqrt{\frac{A_o}{\pi}} = 0,0106 \text{ m}$$

2. Controlador

Se solicita un controlador proporcional/derivativo/integral adecuado, que sea lo más rápido posible y no sature el actuador en ningún momento. Además, debe tener error nulo a una referencia tipo escalón.

El controlador PID se define por tres parámetros (K_p , K_i , K_d), que representan tres acciones posibles:

1) Acción proporcional (rapidez). Esta acción es proporcional al error y busca minimizarlo. Cuando el error es grande, la acción también lo es, lo que reduce el error del sistema. Aumentar K_p tiene tres efectos: acelera la respuesta del sistema, disminuye el error permanente y aumenta la inestabilidad. Existe un equilibrio donde la respuesta es rápida y el error es bajo sin volverse inestable. Superar este punto conduce a inestabilidad, mientras que reducir K_p ralentiza la respuesta y aumenta el error permanente.

2) Acción derivativa (estabilidad). Proporcional a la derivada del error, esta acción previene el sobrepaso al frenar el sistema antes de llegar al punto deseado. Aumentar K_d mejora la estabilidad, aunque reduce ligeramente la velocidad y no afecta al error permanente. La desventaja es que amplifica señales rápidas como el ruido, que puede mitigarse con un filtro de paso bajo en la señal de error.

3) Acción integral (error en régimen permanente). Calcula la integral del error, acumulándolo con el tiempo para reducir el error permanente. Sin embargo, añade inercia al sistema y aumenta la inestabilidad. Aumentar K_i disminuye el error permanente y aumenta la inestabilidad y la velocidad del sistema.

En todos los casos, se debe tener cuidado con la saturación. En sistemas reales, hay limitaciones que restringen la capacidad del controlador para alcanzar la respuesta deseada. Por ejemplo, al aumentar la acción proporcional más allá de cierto punto, el actuador puede llegar a su límite de operación y no podrá proporcionar más salida. Por lo tanto, es importante reconocer que la velocidad de respuesta en sistemas reales está limitada por las características físicas del sistema, y el controlador no puede superar estos límites impuestos por el hardware.

Dado la función de sensibilidad que relaciona la entrada $R(s)$ con el error $E(s)$:

$$S(s) = \frac{1}{1 + PC} = \quad (11)$$

se tiene por el teorema del valor final que, para una referencia de tipo escalón $R = \frac{1}{s}$, el error en estado estacionario es

$$E(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)R(s) = \frac{1}{1 + PC}$$

Para un error en estado estacionario nulo para referencias del tipo escalón alcanza con que la transferencia $S(s)$ tenga un cero en $s = 0$.

3. Diseño en Matlab

Se utilizó Simulink para el armado en bloques de los sistemas tanto no lineal como linealizado, y para la simulación de las respuestas de estos ante perturbaciones o cambios introducidos. A continuación se muestran los esquemas planta-controlador con las respectivas entradas.

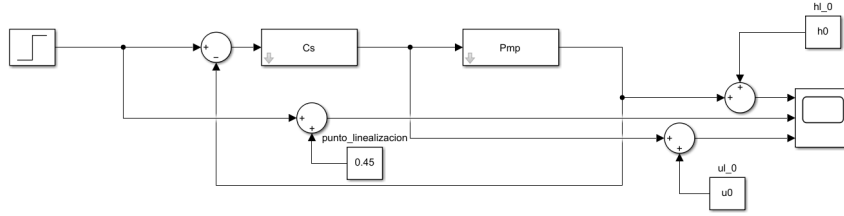


Figura 5: Esquema planta lineal

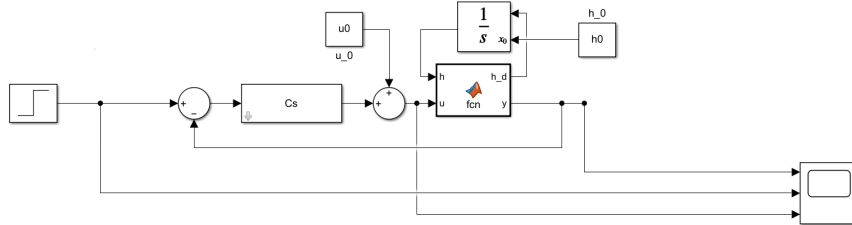


Figura 6: Esquema planta no lineal

En la Figura 5 se puede observar un funcionamiento del sistema alrededor de un punto Q de trabajo, por lo que el trabajo se realiza todo a través de diferenciales Δ , y para luego se suman las constantes para su visualización en los scopes.

En la Figura 6 se utiliza el bloque de función Matlab, en donde se encuentra la ecuación no lineal de la altura del tanque, con las constantes del punto de equilibrio.

3.1. Respuesta a escalón de acción de control

En este análisis, se coloca una simulación de las plantas tanto lineal como no lineal sin el bloque de control. Luego se introduce una variación en la acción de control desde u_0 hasta $1,1 \cdot u_0$ y se analiza como varía la altura del tanque.

Considerando que la acción de control es la apertura de la válvula de salida, se puede concluir que al aumentar la acción de control, se estaría obteniendo una mayor área efectiva de salida para el flujo de agua, por lo que se lograría un equilibrio de altura del tanque en un nivel inferior.

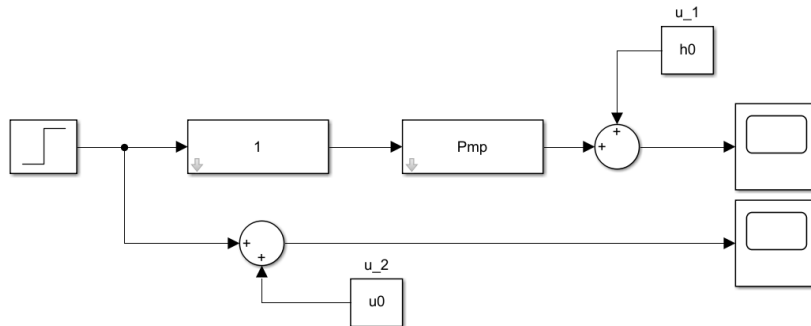


Figura 7: Planta Lineal sin controlador

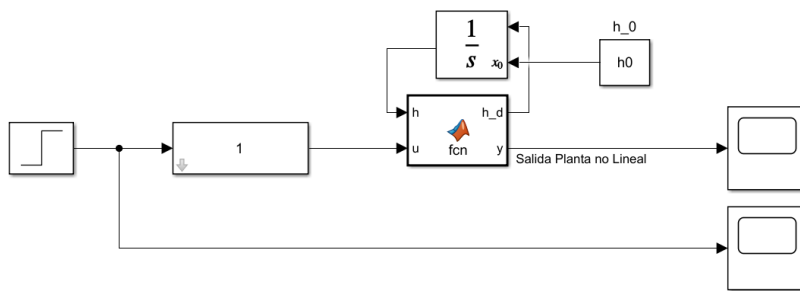


Figura 8: Planta no Lineal sin controlador

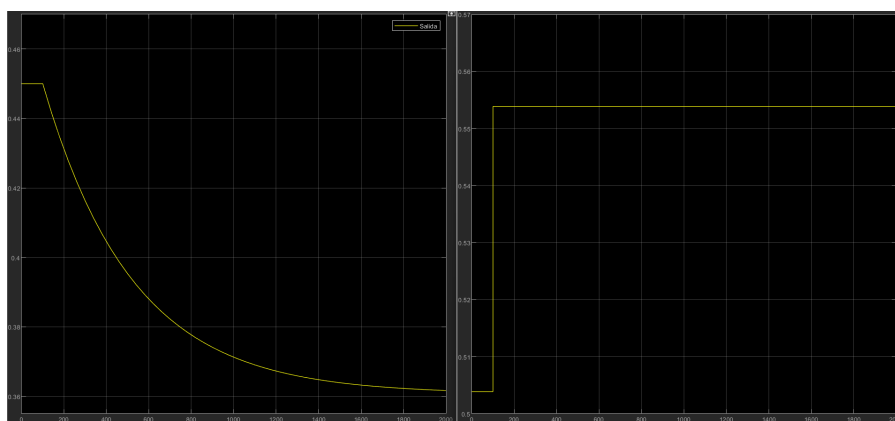


Figura 9: Planta Lineal - Respuesta escalón de acción de control

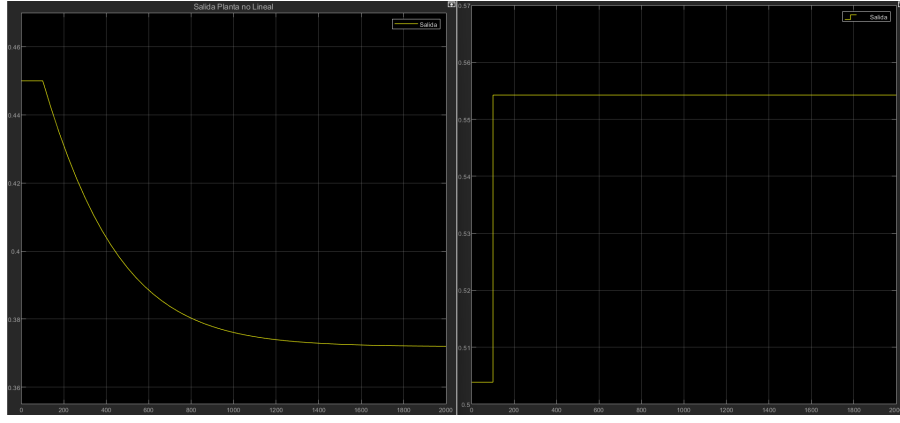


Figura 10: Planta no Lineal - Respuesta escalón de acción de control

3.2. Sistema con controlador. Respuesta a escalón de referencia

Como fue descrito en la sección anterior, se optó por un controlador PID, con un polo en cero para poder seguir referencias de tipo escalón con error en estado estacionario nulo, y un cero en $s = 0.00237$ para anular los efectos del polo de la planta y así obtener margen de fase de 90° .

Además, se toma una ganancia k de 10 dB para aumentar la rapidez con la que actúa el controlador. Esta, observando el diagrama de bode podría aumentarse sin problema de perjudicar el margen de fase ya que el mismo es constante en 90° , pero haciendo algunas pruebas se pudo observar que para valores de k mayores el actuador saturaba a valores físicamente no posibles.

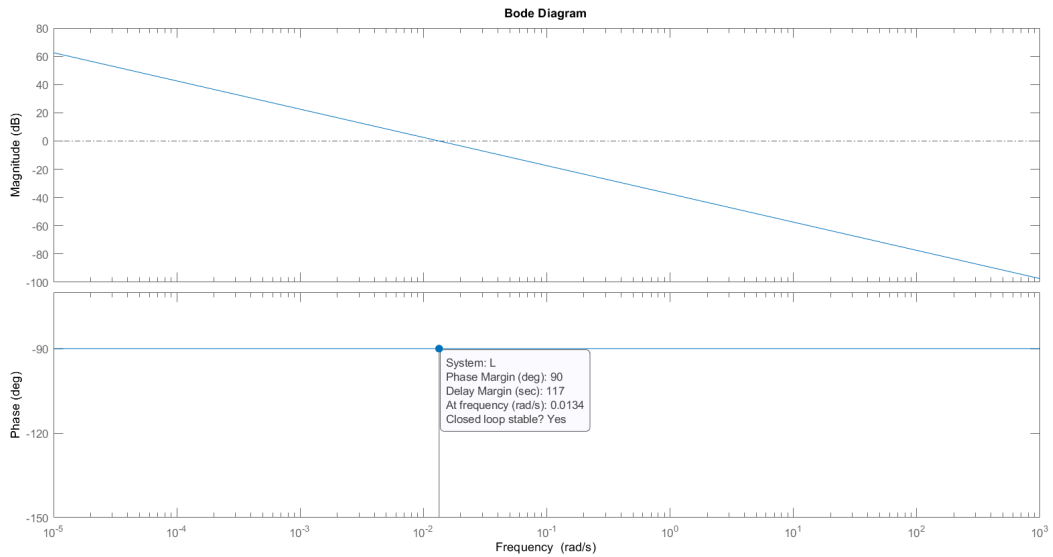


Figura 11: Diagrama de Bode Sistema Planta-Controlador

A continuación, se simulan las respuestas de ambos sistemas vistos en las Figuras 5 y 6 ante escalones de $h = 0,45m$ a $h = 0,55m$ y de $h = 0,45m$ a $h = 0,35m$. Se grafica el estímulo, la acción de control y la salida de cada conjunto.

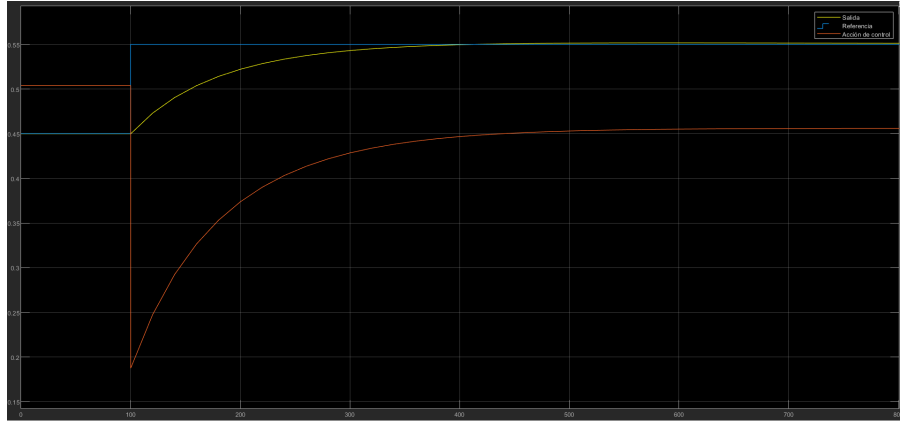


Figura 12: Planta Lineal - Respuesta escalón 0.45-0.55

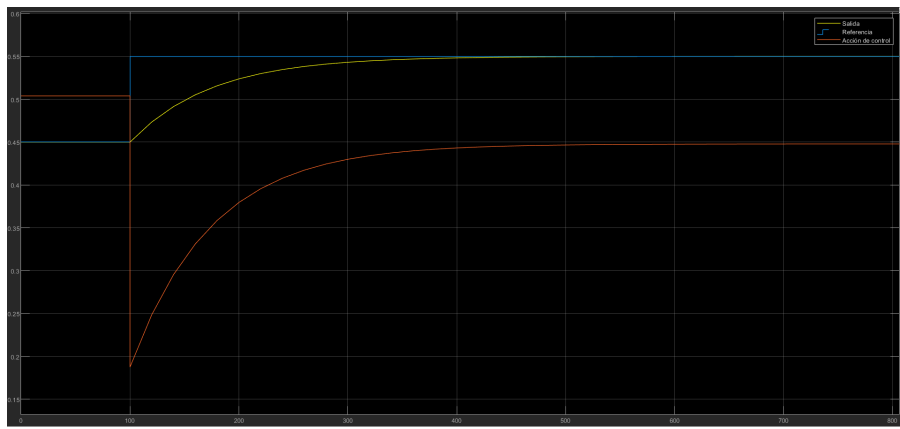


Figura 13: Planta no Lineal - Respuesta escalón 0.45-0.55

Se puede observar que la curva de la acción de control (denotada en color naranja en los gráficos) no alcanza a saturar al momento del step. Esto es debido al ajuste en la ganancia al momento de implementar el controlador, la cual se incrementó para lograr un mejor tiempo de reacción del sistema, pero hasta un límite para evitar que el sobrepico de la curva de la acción de control no llegue a saturar (no atravesase el valor 0 o 1 considerados los límites).

En la siguiente Figura se muestra una comparación entre ambos sistemas, arrojando un resultando muy similar en la respuesta de los dos sistemas ante esta variación de h .

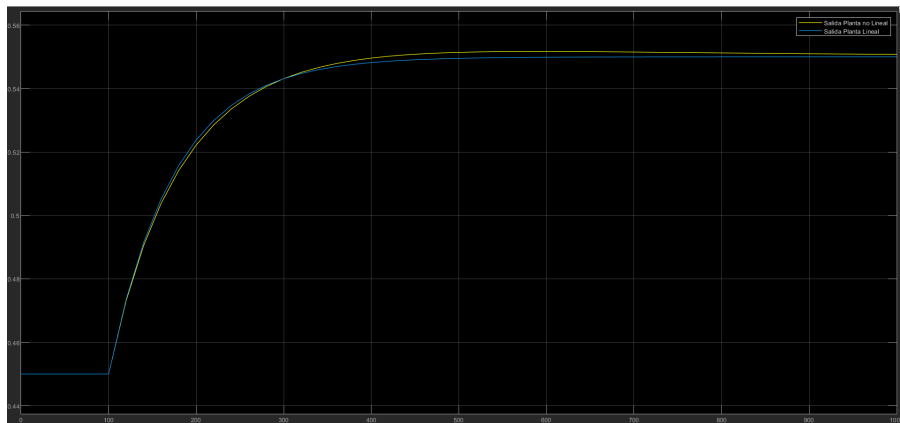


Figura 14: Comparación salidas sistema lineal y no lineal

Analogamente a este escalón, se realizan y grafican las respuestas para el step $h = 0,45 - 0,35m$.

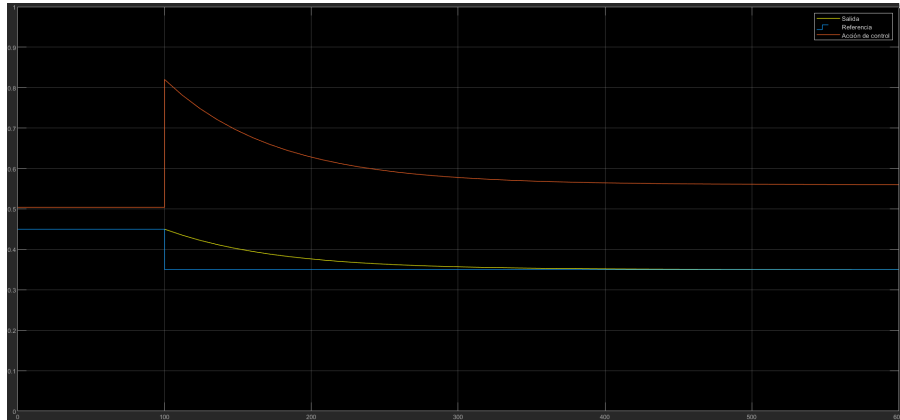


Figura 15: Planta Lineal - Respuesta escalón 0.45-0.35

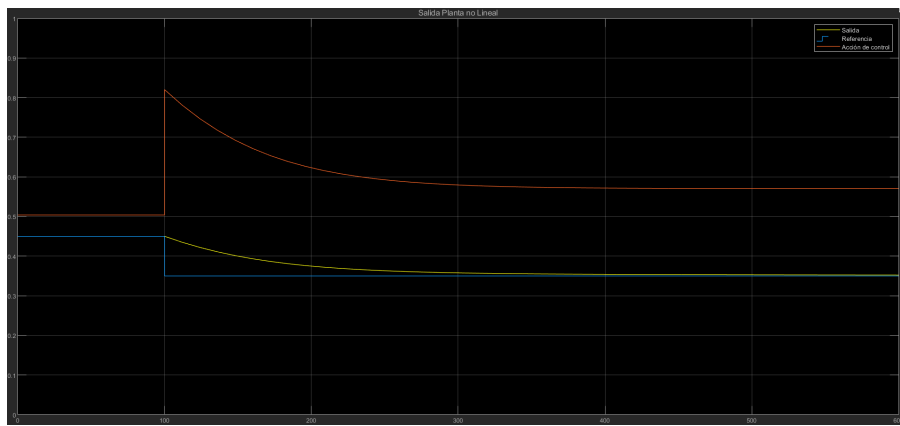


Figura 16: Planta no Lineal - Respuesta escalón 0.45-0.35

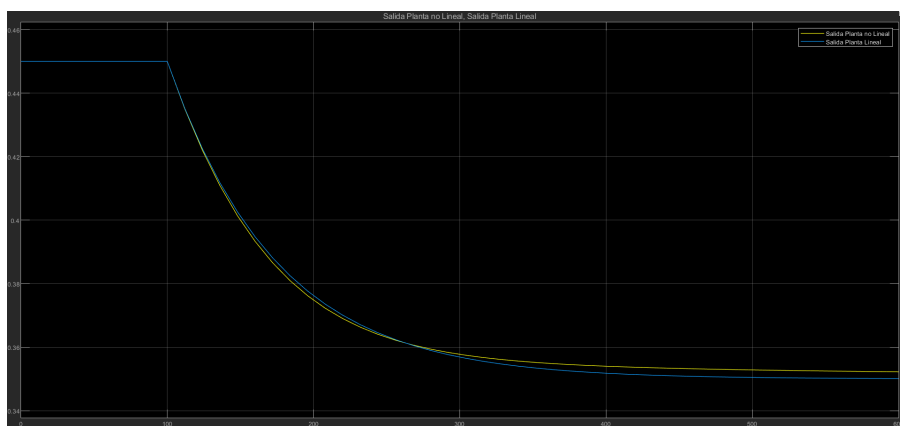


Figura 17: Comparación salidas sistema lineal y no lineal

3.3. Sistema con controlador. Respuesta a escalón de referencia y variación de Q_i

En esta sección se realizan las mismas simulaciones que en el inciso anterior con el modelo no lineal, pero se agrega, luego de la variación de h un ΔQ_i representando una variación en el

flujo de entrada para observar la respuesta del sistema y cómo se llega a un nuevo punto de equilibrio.

ΔQ_i es negativo, pasando a obtener menos agua de entrada a nuestro tanque, por lo que si, si mantenemos la referencia constante, deberíamos ver que nuestra acción de control debería disminuir en ambas Figuras, representando un cierre de la cañería de salida, para que el nivel del agua suba para alcanzar el h que se fija en el sistema.

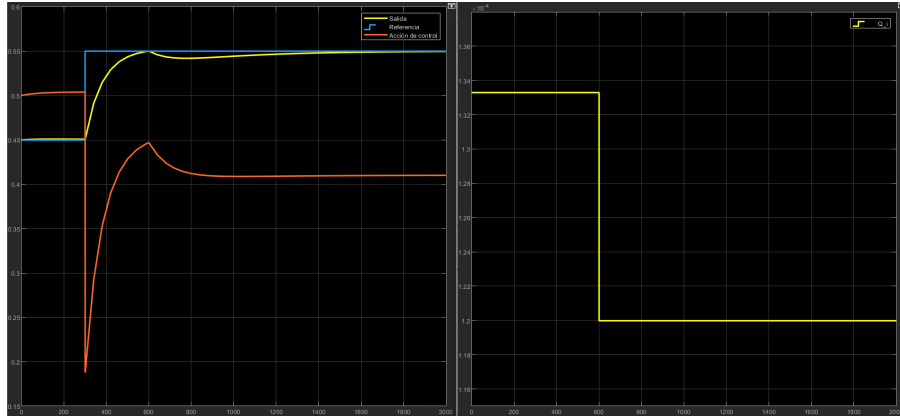


Figura 18: Planta no Lineal - Respuesta a variación de Q_i y step up

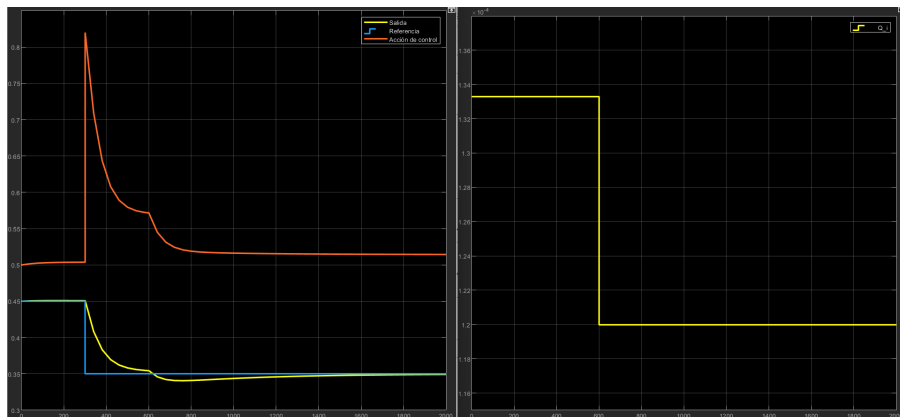


Figura 19: Planta no Lineal - Respuesta a variación de Q_i y step down

4. Conclusión

Mediante el modelado matemático y el análisis teórico, obtuvimos las ecuaciones no lineales que describen la dinámica del sistema. Luego, la linealización nos permitió trabajar con una transferencia para puntos cercanos al equilibrio (h_0, u_0) y diseñar el controlador de una forma más sencilla. La identificación, por su parte, nos permitió obtener un valor de área de salida bastante cercano al real mediante datos experimentales.

En conclusión, durante el desarrollo de este trabajo práctico, pudimos aplicar los conocimientos adquiridos en clase para proponer y simular los efectos de diversos controladores en el sistema. Esta experiencia nos permitió analizar cómo diferentes estrategias de control afectan el comportamiento del tanque cónico piramidal y cómo podemos ajustar los parámetros del controlador para alcanzar nuestros objetivos.