

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE INGENIERÍA



TALLER DE AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

---

TP2: Control Digital

---

1<sup>er</sup> CUATRIMESTRE 2024

*Integrantes:*

Arballo, Facundo	105096	farballo@fi.uba.ar
Spaltro, Francisco	102098	fspaltro@fi.uba.ar

# Índice

<b>1. Modelado del sistema</b>	<b>2</b>
1.1. Función de transferencia . . . . .	2
1.2. Identificación . . . . .	3
1.2.1. Transferencia Servo. $\phi_{ref} - \phi$ . . . . .	3
1.2.2. Transferencia Péndulo. $\phi - \theta$ . . . . .	4
<b>2. Mediciones</b>	<b>5</b>
2.1. Ángulo del brazo . . . . .	5
2.2. Ángulo del péndulo . . . . .	6
<b>3. Controlador</b>	<b>7</b>
3.1. Simulink . . . . .	7
3.2. Introducción . . . . .	9
3.2.1. Proporcional, integral y derivativo . . . . .	9
3.2.2. Limitaciones . . . . .	9
3.2.3. Discretización . . . . .	9
3.3. Implementaciones . . . . .	10
<b>4. Conclusión</b>	<b>17</b>

# 1. Modelado del sistema

La planta se basa en un modelo de péndulo, pero en lugar de ser un péndulo con eje fijo controlado por un torque, la base del péndulo es móvil. Existen dos formatos típicos para esta planta, el primero de ellos es el péndulo invertido que se mueve a lo largo de un riel de manera lineal. La alternativa aquí propuesta se conoce como péndulo invertido rotativo (Rotary Inverted Pendulum - RIP, o también péndulo de Furuta).

En este Trabajo se desarrollará el modelado y control de la planta para el péndulo de Furuta no invertido

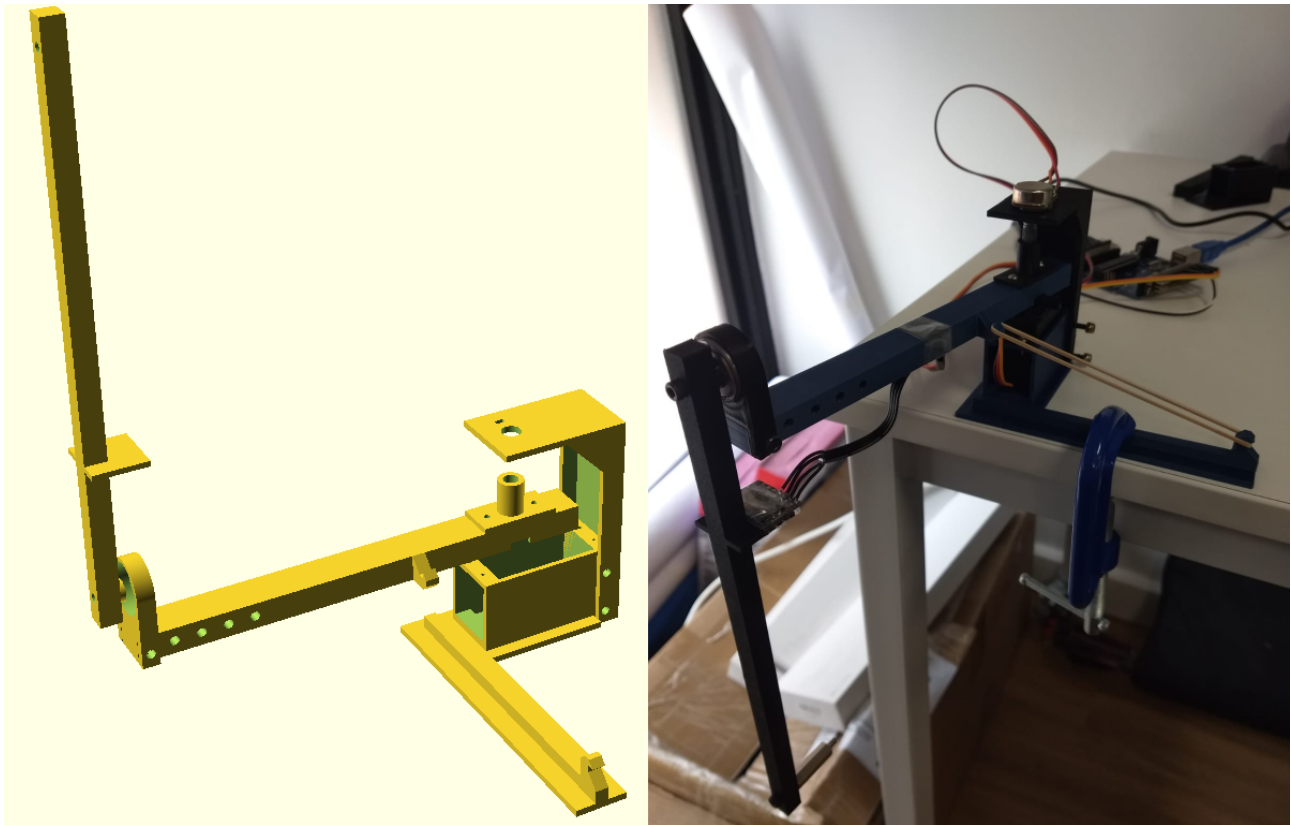


Figura 1: Pendulo normal / invertido

## 1.1. Función de transferencia

Sea

- $r$ : largo del brazo
- $l$ : largo del péndulo
- $\phi$ : ángulo del brazo respecto al ángulo de referencia
- $\theta$ : ángulo del péndulo respecto al vector de gravedad

El péndulo de Furuta no invertido es un sistema estable donde  $\theta = 0$  en ausencia de una entrada de control  $\phi$ . La respuesta del mismo está determinada por  $\phi$ , la fuerza de fricción y la aceleración de la gravedad. Entonces, para una masa suspendida en un ángulo  $\theta$  (y considerando que el peso que se le coloca al péndulo en su extremo es mucho más grande que el de su estructura) con cierta fuerza de fricción proporcional a su velocidad se tiene

$$m \ddot{\theta}_{grav} = -\frac{m g \sin \theta}{l} - \gamma \dot{\theta}$$

Además, la rotación del rotor induce una aceleración que es inversamente proporcional al largo del péndulo, nula para los casos donde el péndulo está completamente horizontal (factor  $\cos \theta$ ), descripta por el arco que traza el brazo, siendo de la forma

$$\ddot{\theta}_{rot} = \frac{r \sin \phi}{l} \ddot{\phi} \cos \theta$$

Sumando las contribuciones y considerando ángulos pequeños resulta

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{r \sin \phi}{l} \ddot{\phi} \cos \theta - \frac{\gamma}{m} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \theta + \frac{r}{l} \ddot{\phi} - \frac{\gamma}{m} \dot{\theta} \\ r \ddot{\phi} &= g \theta + \frac{\gamma}{m} \dot{\theta} + l \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Pasando al dominio de Laplace:

$$r s^2 \phi(s) = g \theta(s) + \frac{\gamma}{m} s \theta(s) + l s^2 \theta(s)$$

Entonces, la transferencia del péndulo con entrada  $\phi$  (ángulo del brazo) y salida  $\theta$  (ángulo del péndulo) es:

$$G_p(s) = \frac{\theta(s)}{\phi(s)} = \frac{\frac{r}{l} s^2}{s^2 + \frac{\gamma}{ml} s + \frac{g}{l}}$$

## 1.2. Identificación

### 1.2.1. Transferencia Servo. $\phi_{ref} - \phi$

El sistema se va a encontrar controlado mediante una señal PWM que ingresa a un servomotor, el cual es el encargado de mover el brazo  $r$  del sistema, y de esta forma inducir un torque para afectar el ángulo  $\theta$  del péndulo.

Esta señal PWM puede relacionarse directamente como una entrada de ángulo  $\phi$  que se comando a donde se desea que se mueva en servo, pero es de esperarse que la respuesta de este no sea instantánea, sino que exista una transferencia a modelar.

Se plantea

$$G_{servo} = \frac{\phi}{\phi_{ref}} = \frac{a}{s^2 + bs + c}$$

en donde  $\phi_{ref}$  es el ángulo que se comanda a moverse al servo mediante el PWM del arduino, y  $\phi$  es el ángulo real del brazo que se obtiene a la salida.

Debido a los escasos datos de la hoja de datos del servomotor utilizado, y teniendo la posibilidad de medir el ángulo del brazo con el potenciómetro colocado en el sistema, se hizo un ajuste a ojo de los parámetros, comandando varios *steps* al dispositivo para ver como es la evolución del ángulo  $\phi$  en función del tiempo y poder controlar los coeficientes  $a, b, c$ , de los cuales se sabe que por teorema del valor final  $a = c$  ya que en el tiempo final, el brazo llega a alcanzar la referencia.

Luego de varios análisis se obtuvo el siguiente ajuste para  $a = c = 250$  y  $b = 25$ .

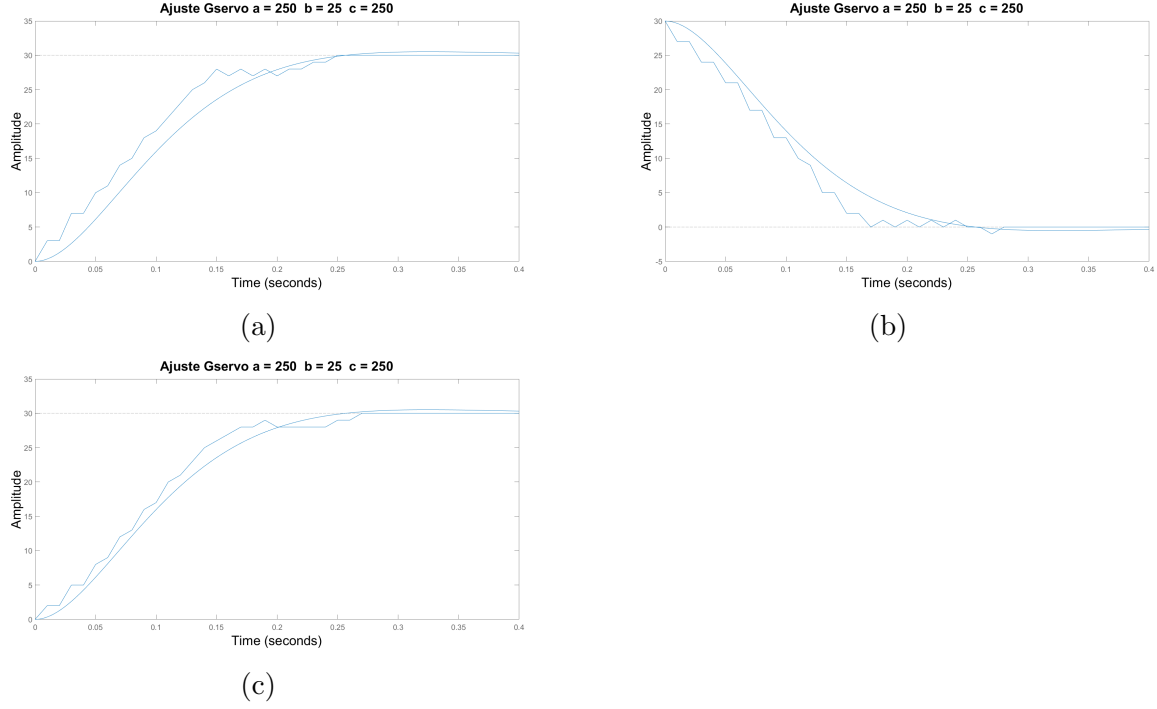


Figura 2: Ajuste Gservo

### 1.2.2. Transferencia Péndulo. $\phi - \theta$

Una vez modelada la primera parte de nuestro sistema, ahora ponemos foco a la transferencia que ejerce nuestro brazo al ángulo  $\theta$  que es el objetivo del control. Conociendo la transferencia planteada en la sección en función de los parámetros físicos como:

$$G_p(s) = \frac{\theta(s)}{\phi(s)} = \frac{\frac{r}{l}s^2}{s^2 + \frac{\gamma}{ml}s + \frac{g}{l}}$$

sabemos que esto se trata de una aproximación a un sistema ideal muy diferente del sistema real implementado. En la práctica, existen factores no deseados tales como un rozamiento no uniforme del ruleman, una vibración mecánica del dispositivo al girar, un movimiento no uniforme del servomotor e inclusive una fuerza externa generada por la conexión de los cables del sensor MPU6050.

Uno de los factores más influyentes que se notó en las mediciones es que, cuando se deja oscilar el péndulo, para ángulos grandes este se comporta más aproximado al modelo ideal, pero cuando  $\theta$  cae a un rango de valores pequeños, la oscilación frena de manera abrupta a causa de un rozamiento no deseado del ruleman. Para contrarrestar este efecto se aumentó la masa en el extremo de  $l$  pero existe un límite hasta donde se puede mejorar esto sin generar complicaciones al sistema.

Es por esto que para la identificación de los parámetros, se realiza la medición física de los valores de  $r, l, m$ , se utiliza  $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$  y se estima  $\gamma$  pero variando levemente  $r, l, m$  alrededor de los valores medidos para contrarrestar los efectos mencionados, comparando la respuesta a un escalón ideal con lo obtenido por medición.

Para las mediciones, se comanda un step de  $x$  cantidad de grados al servo y se mide mediante el sensor MP6050 el ángulo  $\theta$  del péndulo. Esto se corresponde a la transferencia total del sistema ya que inicia con  $\phi_{ref}$  y la salida medida es  $\theta$ , por lo que en código se implementan 2

transferencias, una  $G_{servo}$  mencionada en la sección anterior y otra  $G_p$  que es la a modelar con los parámetros físico y su ajuste.

La curva que se grafica a continuación se corresponde con la transferencia total del sistema  $G_{total} = G_{servo} * G_p$ :

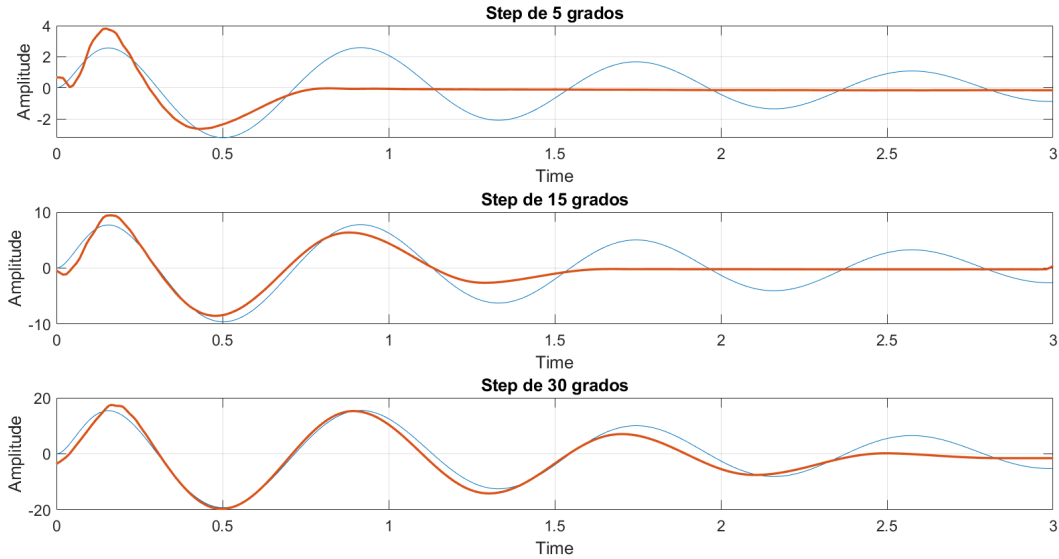


Figura 3: Ajuste Transferencia Sistema

En la imagen puede verse la comparación de sistema ideal contra medición real para steps de 5, 15 y 30 grados respectivamente. Se observa que tanto la frecuencia de oscilación como la amplitud para valores de ángulos  $\theta$  no chicos coinciden significativamente más que para valores de  $\theta$  chicos. Esto es por los factores mencionados anteriormente y en gran parte debido al frenado de las oscilaciones del péndulo a partir de  $\theta$  menores a 2 grados, mientras que en el modelo teórico el rozamiento es ideal.

Los parámetros medidos fueron  $r = 0,18m$ ,  $l = 0,21m$ ,  $m = 0,05Kg$ , y modificando los mismos para coincidir las frecuencia de oscilación y las amplitudes de la señal se obtuvo

$$\gamma = 0,008, \quad r = 0,145, \quad l = 0,17, \quad m = 0,045$$

Llegando a:

$$G_p = \frac{0,8529s^2}{s^2 + 1,046s + 57,65}$$

## 2. Mediciones

### 2.1. Ángulo del brazo

Para la medición del ángulo del brazo, se utiliza un potenciómetro anclado al mismo y conectado a 5 V. Tomamos la convención de  $0^\circ - 180^\circ$ , siendo  $\phi = 90^\circ$  nuestro ángulo de referencia para el brazo, y se calibró la posición del potenciómetro de forma tal que el valor digital 10 corresponda a los  $0^\circ$  y 712, a los  $180^\circ$ . El microcontrolador realiza el mapeo de un espacio al otro, dando un valor de paso de  $\phi_{min} = 0,26^\circ$

## 2.2. Ángulo del péndulo

Para la medición del ángulo del péndulo, utilizamos el integrado MPU6050 que cuenta con un giróscopo y una acelerómetro, colocado sobre el péndulo. Observando la estructura de frente, el eje de coordenadas con el cual trabaja esta unidad de medida inercial se define como en la figura 4

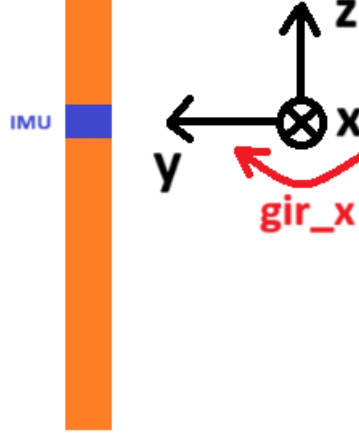


Figura 4: Eje de coordenadas - IMU

Se configura la operación del integrado en un rango de  $\pm 8g$  para la aceleración,  $\pm 500deg/s$  para la velocidad y un filtro de ancho de banda de  $10Hz$ , a fin de reducir el ruido de la medición con un retardo aceptable para este trabajo.

Para la medición con el giróscopo, y partiendo de un estado de reposo en el punto de equilibrio estable (al menos para el péndulo), se debe integrar la velocidad angular y sumársela al ángulo actual. Es decir, en formato discreto:

$$\theta_{gk} = \theta_{k-1} + \Omega_x T \frac{180^\circ}{\pi}$$

donde  $\Omega_x$  es la medición de la velocidad angular en el eje x por parte del giróscopo para el instante  $k$ ,  $T$  es el período de medición (que en nuestro caso coincide con el período del ciclo de programa) y el factor de conversión es para trabajar en grados en lugar de radianes.

Para el acelerómetro, por su parte, se requiere aplicar identidades trigonométricas. El sensor en reposo mide, principalmente, la aceleración de la gravedad, de magnitud aproximadamente constante y apuntando hacia abajo. Al inclinarse, esta aceleración se proyecta en los ejes coordenados como muestra la figura 5. Entonces, el ángulo puede calcularse aplicando el arco-tangente:

$$\theta_{ak} = \arctan \frac{a_y}{a_z} \frac{180^\circ}{\pi}$$



Figura 5: Medición de la aceleración

Para todas estas mediciones, en la práctica se agregaron los offsets que corrigen la diferencia que aparece en reposo para los valores tanto de aceleración como de velocidad angular.

Finalmente, se utiliza un filtro complementario para combinar ambas mediciones. El ángulo del giróscopo es más fiable para variaciones rápidas pero tiene un desvío a largo plazo producto de la integración del error. El acelerómetro, por su parte, es más estable en tiempo estacionario pero sensible a variaciones de alta frecuencia. Una forma de solucionar esto es aplicar filtros pasa-altos y pasa-bajos, respectivamente, o implementar una predicción mediante un filtro de Kalman. En nuestro caso, hacemos uso de un filtro complementario de coeficiente  $\alpha = 0,98$ , ponderando mayoritariamente el giróscopo, como se muestra en la figura 6. De esta forma:

$$\theta = \alpha\theta_g + (1 - \alpha)\theta_a = 0,98\theta_g + 0,02\theta_a$$

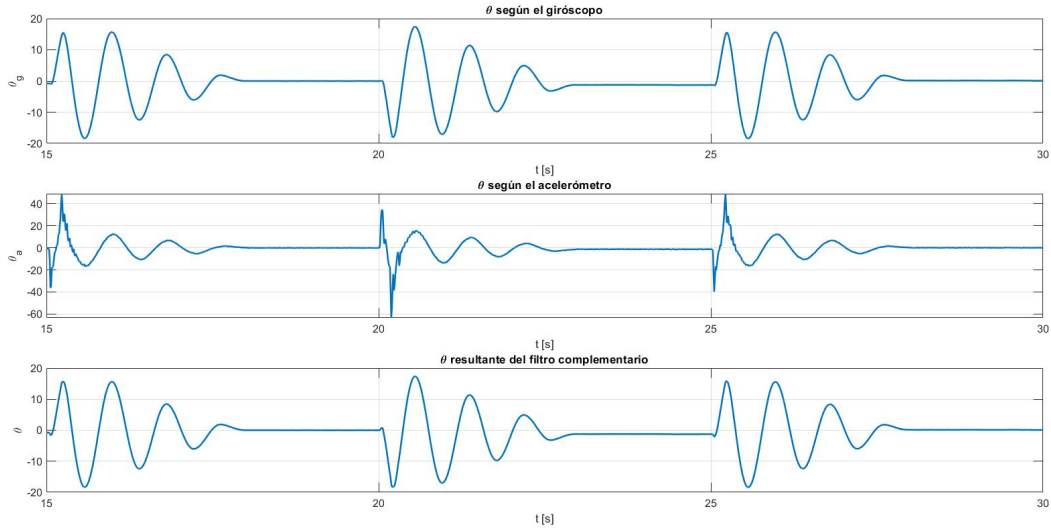


Figura 6: Filtro complementario con  $\alpha = 0,98$

### 3. Controlador

#### 3.1. Simulink

Utilizando las transferencias obtenidas en la sección de identificación  $G_{servo}$  y  $G_p$ , llamamos a nuestras variables de estado como  $\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}$  para describir la dinámica del sistema.

Siendo la transferencias del estilo:

$$G_{servo} = \frac{\phi}{\phi_{ref}} = \frac{a}{s^2 + bs + c}, \quad G_p = \frac{\theta}{\phi} = \frac{ds^2}{s^2 + es + f}$$

y teniendo los valores de los coeficientes, podemos despejarnos 2 ecuaciones del estilo:

$$\ddot{\phi} = a u - b \dot{\phi} - c \phi \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} = d \ddot{\phi} - e \dot{\theta} - f \theta \quad (2)$$

Utilizando el bloque Matlab function en Simulink, es posible plantear el sistema como la siguiente figura, en donde se plantea el controlador a la entrada  $u$ , y una bloque de pulso en la variable  $\theta$  para introducir perturbaciones al péndulo. También se agregó un bloque saturador



para emular el comportamiento de nuestro código cuando el brazo supera los umbrales de protección.

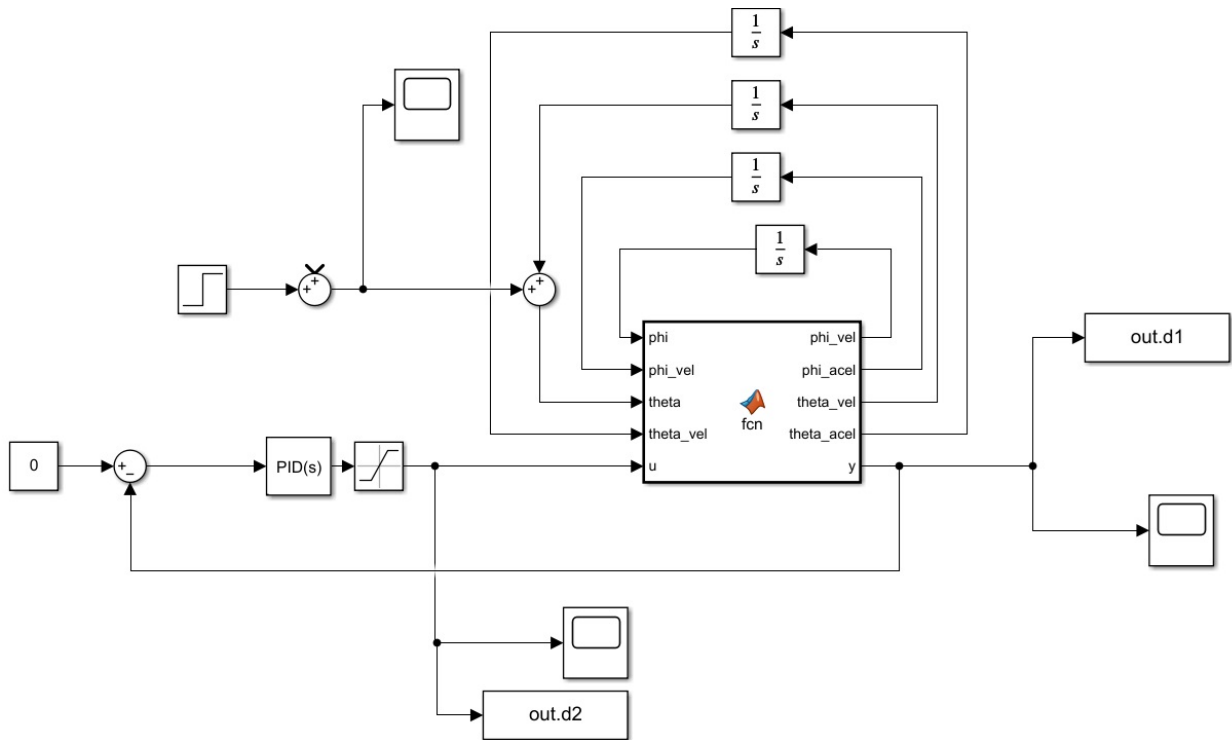


Figura 7: Diagrama Simulink

Para corroborar que el sistema sea correcto, se realiza un step a la entrada de  $u$ , modelando un movimiento del brazo del sistema, y se observa la salida sin controlador. Se compara la simulación con la medición real.

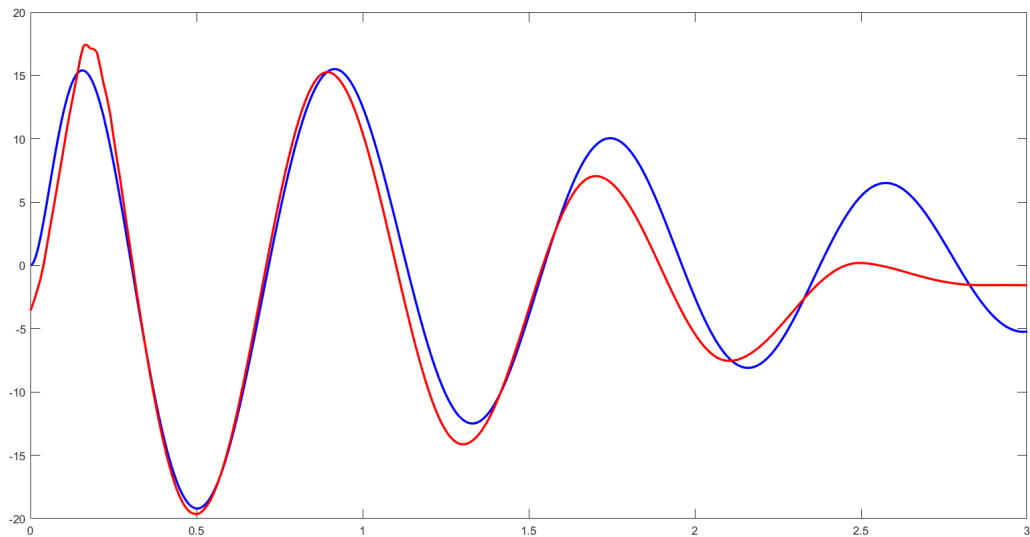


Figura 8: Step simulink

En azul se observa la curva simulada ideal y en rojo la medida. La primera se condice exactamente con el step 30 grados de la Figura 3, por lo que el modelo de Simulink es correcto.

## 3.2. Introducción

### 3.2.1. Proporcional, integral y derivativo

Retomando una breve introducción del trabajo práctico anterior, se tiene que el controlador PID se define por tres parámetros ( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ), que representan tres acciones posibles:

**1) Acción proporcional (rapidez).** Esta acción es proporcional al error y busca minimizarlo. Un valor alto acelera la respuesta del sistema y disminuye el error permanente aunque aumenta la inestabilidad.

**2) Acción derivativa (estabilidad).** Proporcional a la derivada del error, esta acción previene el sobrepaso al frenar el sistema antes de llegar al punto deseado. Aumentar  $K_d$  mejora la estabilidad, aunque reduce ligeramente la velocidad y no afecta al error permanente. Sin embargo, amplifica señales rápidas como el ruido, que puede mitigarse con un filtro de paso bajo en la señal de error.

**3) Acción integral (error en régimen permanente).** Calcula la integral del error, acumulándolo con el tiempo para reducir el error permanente pero con la contrapartida de añadir inercia al sistema y aumenta la inestabilidad.

### 3.2.2. Limitaciones

La acción de control que combine una o más de estas alternativas no debe superar las limitaciones de la capacidad del controlador. Por un lado, la velocidad de operación del servo MG996R utilizado es de unos  $300^\circ/s$  (de la hoja de datos que contempla  $\frac{0.2}{60^\circ} s$  a  $4,8 V$  sin carga).

Por otra parte, por la posición del péndulo en la estructura al moverse, se limitó por seguridad la operación del actuador mediante software entre los ángulos  $45^\circ$  y  $135^\circ$ .

### 3.2.3. Discretización

Para la discretización de los controladores se utilizó la transformación bilineal. La transformación **forward difference** queda descartada por resultar en un sistema no causal

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \\ s &= \frac{1}{T} \ln z \\ &= \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right) \\ &\approx \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \end{aligned}$$

**Proporcional.** Para la discretización de un controlador proporcional de coeficiente  $k_p$  la expresión es:

$$u_k = k_p e_k$$

**Proporcional integral.** En este caso, debe discretizarse la expresión:

$$u(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

Aplicando la transformación bilineal y trabajando el resultado, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_k &= \left( k_p + \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) e_k \\ u_k - u_{k-1} &= k_p e_k + \frac{T}{2} e_k + \frac{T}{2} e_{k-1} \\ u_k &= k_p e_k + \frac{T}{2} e_k + \frac{T}{2} e_{k-1} + u_{k-1} \\ u_k &= k_p e_k + k_i I_k \end{aligned}$$

Donde

$$I_k = I_{k-1} + \frac{T}{2} e_k + \frac{T}{2} e_{k-1}$$

**Proporcional integral derivativo.** De forma similar al caso anterior, se agrega el término

$$\begin{aligned} u(s)_d &= s e(s) \\ u_{kd} &= \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} e_k \\ u_{kd} + u_{k-1d} &= 2 \frac{e_k - e_{k-1}}{T} \\ u_{kd} &= 2 \frac{e_k - e_{k-1}}{T} - u_{k-1d} \end{aligned}$$

Luego

$$u_k = k_p e_k + k_i I_k + k_d D_k$$

Donde

$$D_k = 2 \frac{e_k - e_{k-1}}{T} - D_{k-1}$$

### 3.3. Implementaciones

Para la elección de los coeficientes, se comparó el tiempo de respuesta y la estabilización según distintas combinaciones

**Control proporcional.** Se probaron en la planta los valores  $k_p = 0,2, 0,5, 0,8$ . Haciendo una comparación entre los mismos y teniendo en cuenta la proporción entre el tiempo de establecimiento y el pico máximo al cual llegó el ángulo del péndulo, se concluye que  $k_p = 0,2$  resulta ser el más apropiado, con un tiempo de establecimiento de 2,5 s para un pico máximo de  $46^\circ$ . Cabe destacar que el péndulo sin controlador tiene un tiempo de establecimiento de 6 s para un pico similar ( $43^\circ$ ). Estos datos pueden observarse en la figura 10.

**Simulación Control proporcional.** Para comparar los resultados de la planta real con la modelada, toman las mediciones del ángulo  $\theta$  del péndulo al introducir perturbaciones mediante golpes al mismo. Para contrastar estas con la teoría, al diagrama de la Fig. 7 se introduce un step de la misma magnitud que la perturbación a la entrada de  $\theta$  y se observa la salida.

A continuación se grafican ambas curvas. Se puede observar que el tiempo de respuesta y magnitud de las oscilaciones se corresponden de forma esperada, mientras que en la práctica, al ocurrir el efecto del rozamiento indeseado, se muestra una desaceleración en las oscilaciones mayor que en la curva teórica.

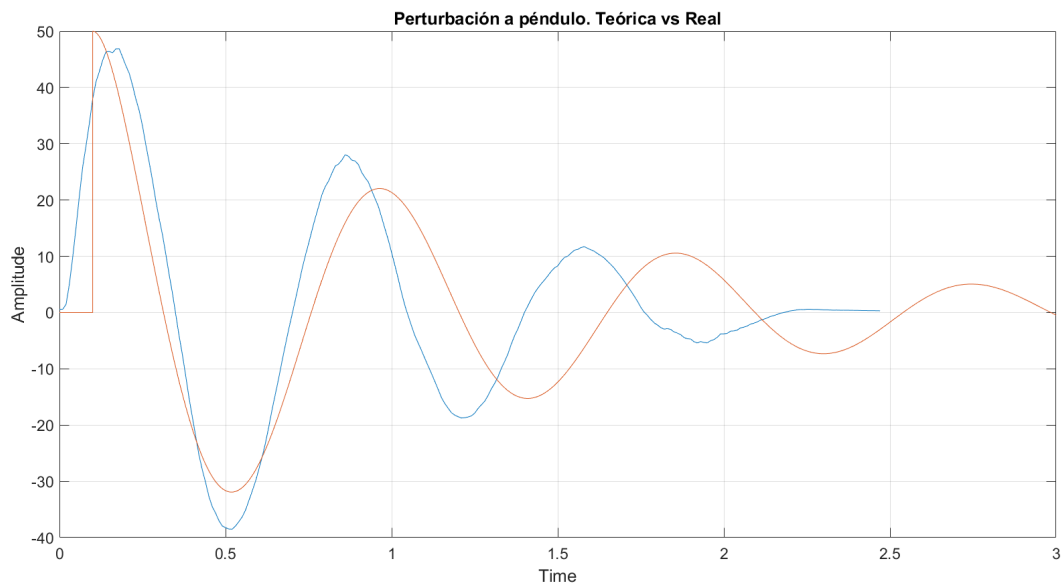
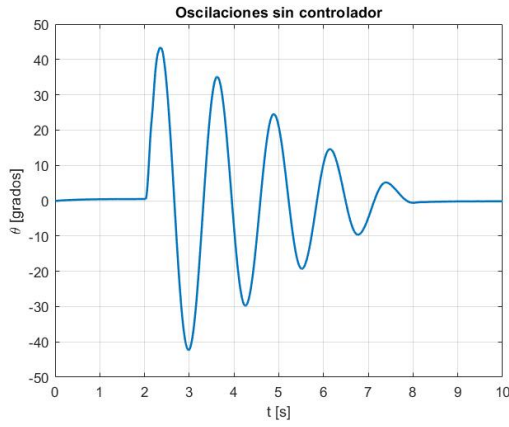
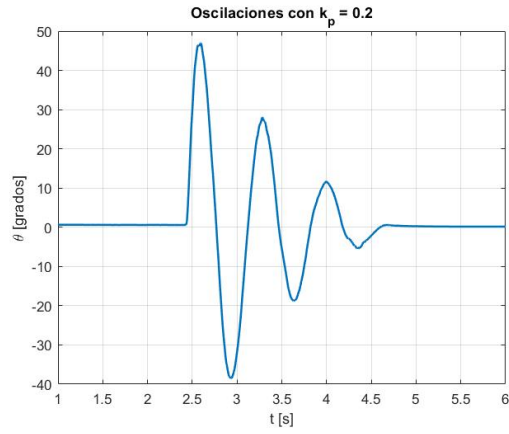


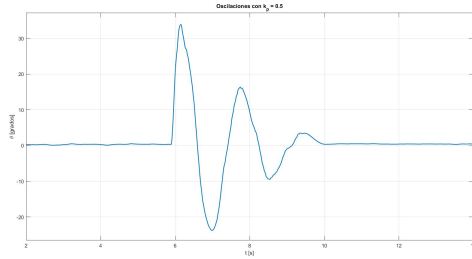
Figura 9: Perturbación al péndulo con controlador proporcional



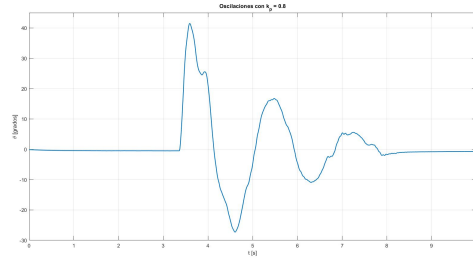
(a) Sin controlador



(b) Con  $k_p = 0,2$



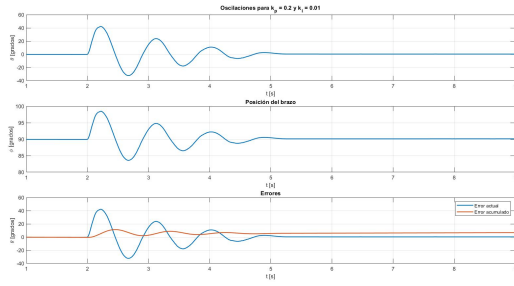
(c) Con  $k_p = 0,5$



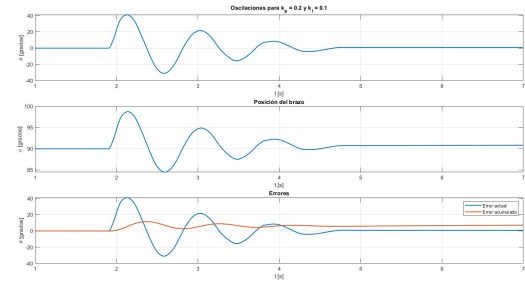
(d) Con  $k_p = 0,8$

Figura 10: Oscilaciones para los distintos controladores proporcionales

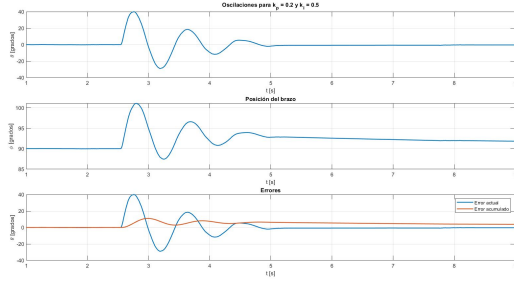
**Controlador integral.** Se probaron distintos valores para los coeficientes  $k_p$  y  $k_i$ , mostrados en la figura 11. En primer lugar, se dejó fijo el valor de la constante de proporcionalidad que se eligió en el punto anterior. Junto a ella, se fue implementando los PI con distintos valores para la integración. Luego, fuimos aumentando el valor de la constante de proporcionalidad a fin de tener una respuesta más rápida, aprovechando que la inercia que crea el integrador permite probar valores que en un simple proporcional resultaba en comportamientos inestables.



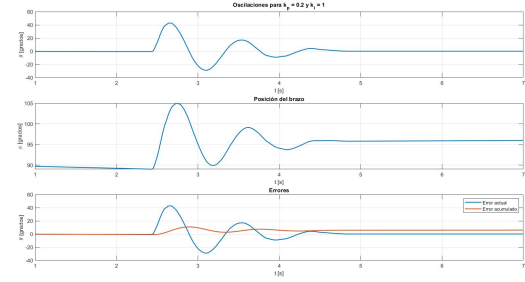
(a) Con  $k_p = 0,2$ ,  $k_i = 0,01$



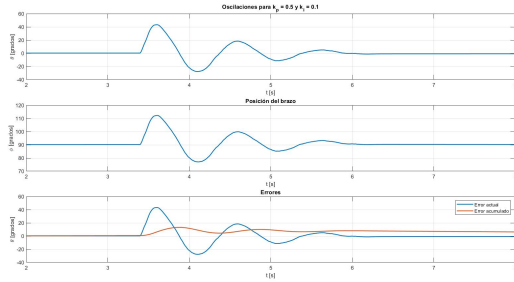
(b) Con  $k_p = 0,2$ ,  $k_i = 0,1$



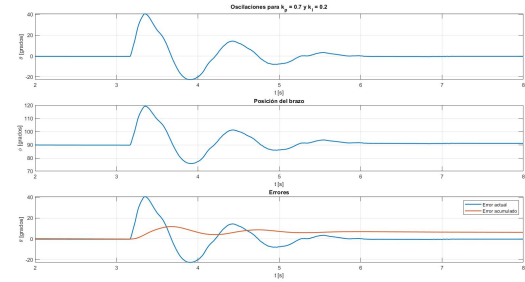
(c) Con  $k_p = 0,2$ ,  $k_i = 0,5$



(d) Con  $k_p = 0,2$ ,  $k_i = 1$



(e) Con  $k_p = 0,5$ ,  $k_i = 0,1$



(f) Con  $k_p = 0,7$ ,  $k_i = 0,2$

Figura 11: Oscilaciones para los distintos controladores proporcional-integrales

La mayoría de los casos que se muestran superan los 3 segundos de tiempo de establecimiento. La opción con  $k_p = 0,2$ ,  $k_i = 1$  logró hacerlo en 2,5 s, igualando el tiempo del punto anterior, aunque con la desventaja de no cumplir con el punto de referencia del brazo. Esto se debe a la acumulación de error que queda cargada aun cuando el error ya paso a ser nulo. También aparece este efecto en casos donde el péndulo, partiendo desde el reposo, comienza a moverse por esta acción integral. Esto se debe al **offset** que tienen los sensores, aun cuando se intentó compensarlos. Esta componente de continua presente, sumada a la inclinación propia del péndulo por problemas inherentes del rulemán, hacen que el error no sea exactamente cero y, sumado a lo largo del tiempo, produzca una acción integral considerable, en especial si  $k_i$  es un valor alto. Esto puede observarse en la figura 12

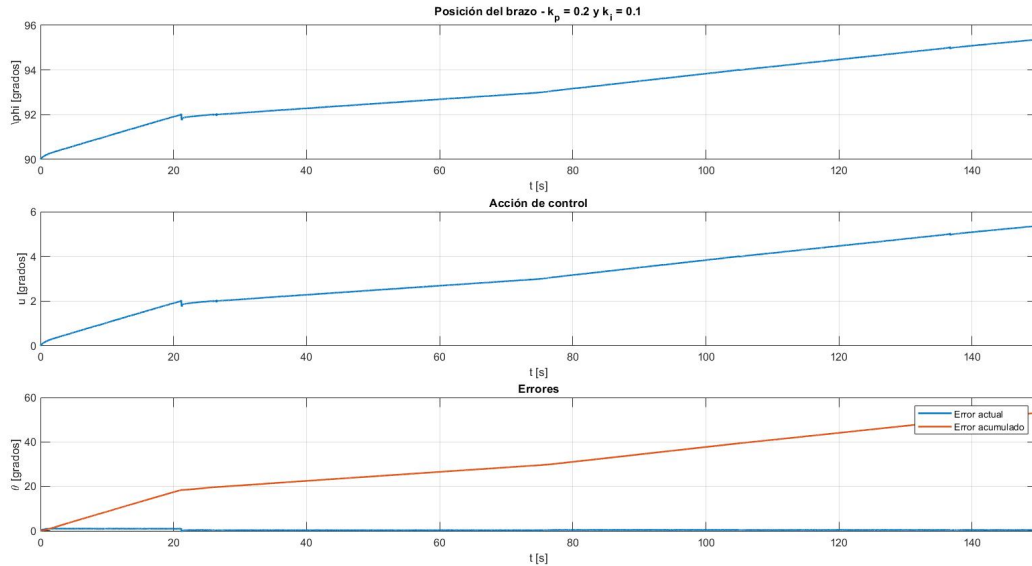


Figura 12: Desplazamiento desde el reposo ( $k_p = 0,2$ ,  $k_i = 0,1$ )

La primera aproximación a una solución que intentamos fue restablecer a 0 el valor del error acumulado una vez que el péndulo alcanzaba el equilibrio. Esto traía problemas si el equilibrio se había alcanzado en un punto fuera de la referencia del brazo, ya que se generaba un movimiento brusco hacia el mismo que hacía que el proceso de establecimiento comenzara de nuevo. Aun si el equilibrio se alcanzaba en dicho punto, el cambio repentino de la acción de control hacía que el efecto de inercia producto de la acción integral desapareciera. Esto mismo pasaba manteniendo un margen de error 0 si el ángulo se encontraba, por ejemplo, entre  $[-0,5, 0,5]$ .

Una posible solución sería aplicar un filtro pasabajos al ángulo medido por el giróscopo para quitarle la componente de continua y uno pasabanda al acelerómetro para, además de este efecto mencionado, disminuir el ruido de la medición. Existen artículos que explican cómo la utilización de un filtro de Kalman puede disminuir las perturbaciones impredecibles, modelando las mismas como un ruido AWGN.

Por último, se observó que una acción integral alta como la que se muestra en la figura 13 hace que el tiempo de establecimiento se reduzca a la mitad (1.2 segundos) pero con un error en la posición del brazo alto. También se puede ver en acción los límites de seguridad que se le agregaron entre los extremos de la curva de movimiento del brazo. La acción integral también produce que una vez superado este límite, se tarde un tiempo en que el lazo vuelva a estar activo, ya que debe compensarse todo el error acumulado hasta el momento.

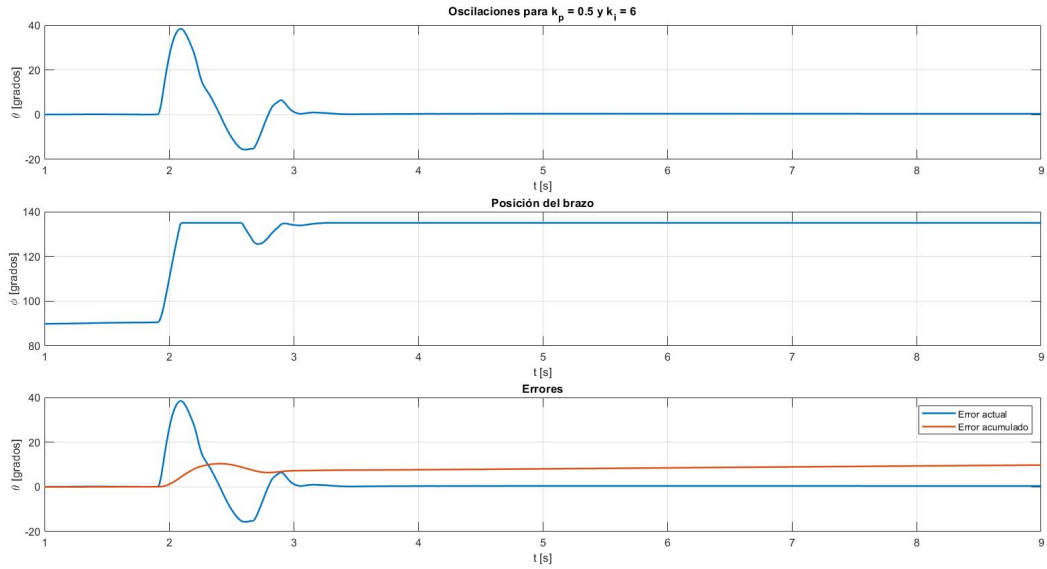


Figura 13: Con  $k_p = 0,5$ ,  $k_i = 6$

**Controlador derivativo.** Debido a la presencia de ruido y perturbaciones espontáneas producto no solo de la toma de datos de la IMU sino también del funcionamiento del rulemán y el cableado eléctrico, debe prestarse especial atención a la constante derivativa. Esto puede observarse en la figura ??, donde se muestran las grandes variaciones en el error derivativo aun cuando el error actual es 0 (o en su cercanía). Por este motivo,  $k_d$  debe ser un valor particularmente bajo.

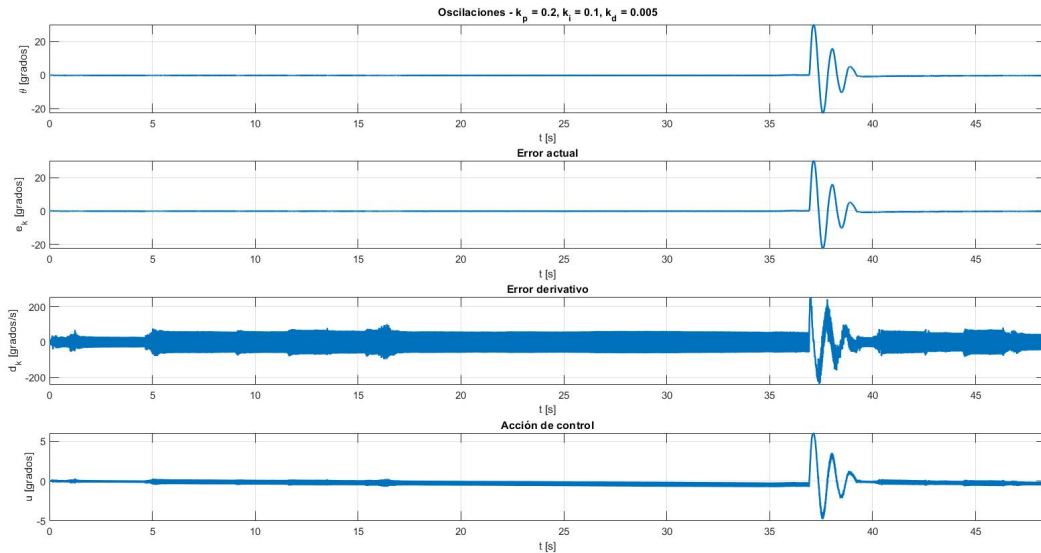


Figura 14: Presencia de ruido en el error derivativo

Esta configuración, con el  $k_p = 0,2$  y  $k_i = 0,1$  del ítem anterior junto a un  $k_d = 0,005$ , redujo el tiempo de establecimiento de dicho caso en pocas fracciones de segundo. Esto se debe, principalmente, a que el efecto derivativo ayuda a controlar los sobresaltos que se producen al mover el brazo.

Finalmente, y al igual que en el punto anterior, se intentó aumentar un poco el factor



proporcional. Llevando a  $k_p = 0,4$  se obtiene un tiempo de establecimiento de 2.5 segundos, como se muestra en la figura 15

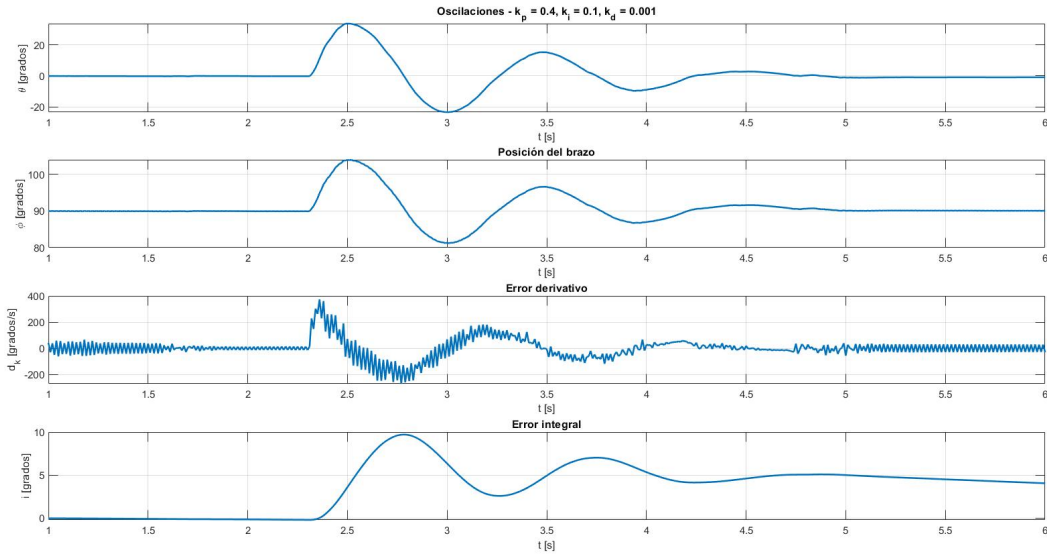


Figura 15: Aumento de la constante proporcional

Nuevamente, aparece la necesidad de algún tipo de filtrado evitar que el ruido en alta frecuencia del error en la velocidad afecte el desempeño del filtro.

Por último, repitiendo este último caso pero quitando de la planta la banda elástica se obtiene la figura 16

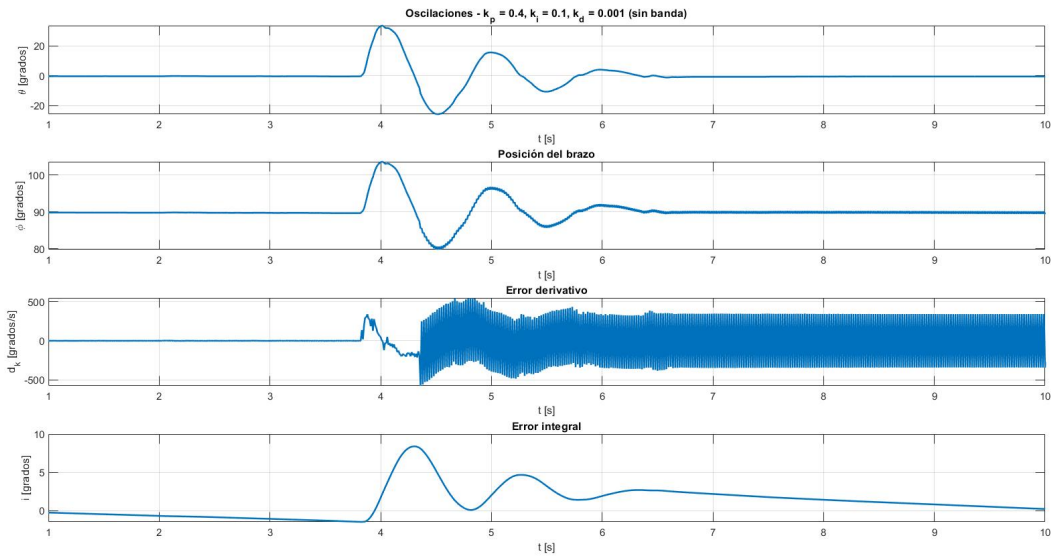


Figura 16: Perturbación sin banda elástica

Si bien el tiempo de establecimiento no cambia, el error derivativo, en términos generales, se duplica. La causa de esto puede estar en quitar el efecto de muelle o resorte que produce la banda elástica en la planta, que amortiguando las perturbaciones que pudieran existir. Los controladores que funcionen en la planta con banda podrían resultar en una inestabilidad en

aquellas donde se la quite. El sistema podría empezar a oscilar espontáneamente ya que cambia la transferencia de la planta y, por ende, el comportamiento dinámico del sistema.

Finalmente, la simulación de este controlador se presenta en la figura 17

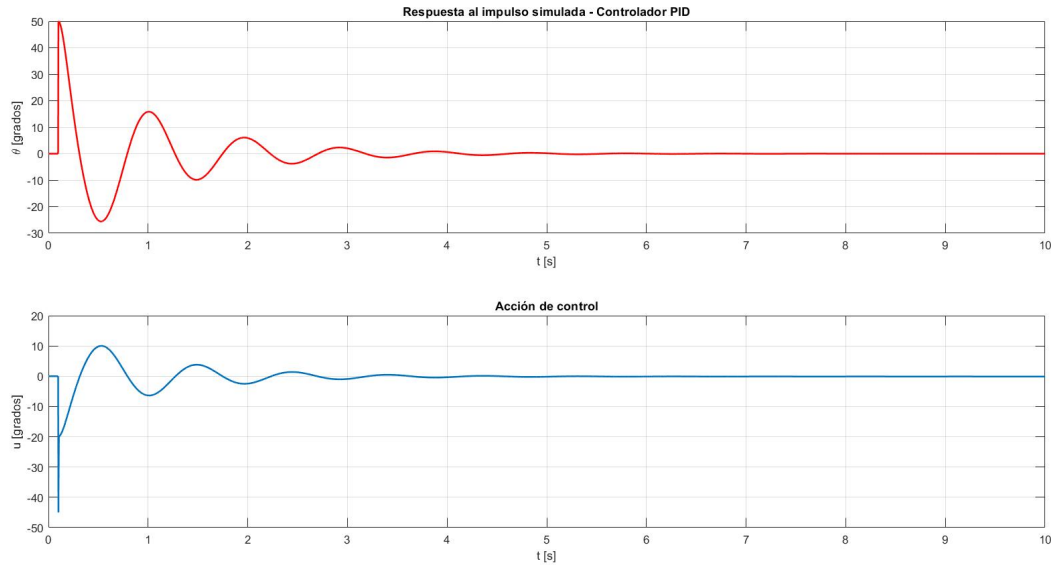


Figura 17: Simulación del controlador PID

## 4. Conclusión

En este trabajo, se evaluaron diferentes tipos de controladores para estabilizar el péndulo de Furuta no invertido. Mediante las pruebas en nuestra planta real, determinamos que el controlador proporcional fue el más efectivo, logrando un tiempo de establecimiento óptimo en comparación con otras opciones, teniendo en cuenta el restablecimiento del brazo a su punto de referencia. Debido a que ofrecía resultados similares que algunas opciones de PI o PID, lo elegimos para no proporcionar complejidad adicional al sistema sin ninguna mejora significativa. Esta simplicidad reduce posibles fuentes de inestabilidad y errores estacionarios, ya que evita la amplificación de ruido y las dificultades en la sintonización precisa que pueden surgir con controladores más complejos.

Cabe destacar que la elección del controlador proporcional como la mejor opción es específica para nuestro caso particular. En otras aplicaciones o sistemas, las ventajas del controlador PID, como la capacidad de eliminar el error estacionario ante perturbaciones persistentes y mejorar la respuesta ante impulsos y escalones, podrían ser más significativas. Si bien el controlador PID tiene el potencial teórico para mejorar el desempeño en términos del error en estado estacionario por su componente integral y en amortiguamiento de oscilaciones por su componente derivativo, en nuestra planta, el componente derivativo tiende a amplificar el ruido presente en las señales de entrada, lo que puede llevar a un comportamiento errático del sistema. Asimismo, el rulemán que sostiene el péndulo introdujo pequeñas variaciones que dificultaron la precisión del controlador, afectando el equilibrio perfecto en cero, lo cual generaba un error acumulativo que distorciónaba la respuesta por la componente integral.

Algunas opciones que podrían brindar soluciones a estos problemas abarcan la implementación de filtros digitales, como el filtro de Kalman o filtros pasa-bajos, que podría reducir el impacto del ruido en las mediciones de posición y velocidad del péndulo, mejorar los componentes mecánicos, utilizando rulemanes de mayor precisión y menor fricción. También se podría profundizar en observadores que corrijan los sesgos presentes en las mediciones.

En resumen, aunque el controlador proporcional demostró ser suficiente y efectivo para el control del péndulo de Furuta no invertido en nuestro caso específico, la implementación de un PID podría ofrecer mejoras adicionales en teoría. Sin embargo, en la práctica, los desafíos como el ruido, las imprecisiones mecánicas y la complejidad de la sintonización hacen que la simplicidad y robustez del controlador proporcional sean preferibles en este contexto.