EPG3343 - Seminario de Estadística III
Clase 8

Jonathan Acosta

Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre, 2022

Esquema

Esquema

Modelo SAR

- El Modelo SAR tiene la forma reducida

$$\boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\epsilon}$$

donde $B = \rho\boldsymbol{W}$ o $B = \alpha\widetilde{W}$

Modelo SAR

- El Modelo SAR tiene la forma reducida

$$\boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\epsilon}$$

  donde $B = \rho\boldsymbol{W}$ o $B = \alpha\widetilde{W}$

- Este proceso se denomina proceso de error SAR.

Modelo SAR

- El Modelo SAR tiene la forma reducida

$$\boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\epsilon}$$

  donde $B = \rho\boldsymbol{W}$ o $B = \alpha\widetilde{W}$

- Este proceso se denomina proceso de error SAR.
- En un modelo (o error) SAR se introducen habitualmente covariables de forma de regresión.

Modelo SAR

- El Modelo SAR tiene la forma reducida

$$\boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\epsilon}$$

  donde $B = \rho \boldsymbol{W}$ o $B = \alpha \widetilde{W}$

- Este proceso se denomina proceso de error SAR.
- En un modelo (o error) SAR se introducen habitualmente covariables de forma de regresión.
- Son los residuos

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

  los que se modelan mediante un proceso SAR.

Modelo SAR

- Esto es, si $\boldsymbol{u} \sim \text{SAR}$ entonces

$$\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{Y} + (\boldsymbol{I} - B)\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

Modelo SAR

- Esto es, si $\boldsymbol{u} \sim \text{SAR}$ entonces

$$\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{Y} + (\boldsymbol{I} - B)\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

- En general, los errores ϵ_i's pueden heterocedásticos, con $\mathbb{E}[\epsilon_i^2] = \sigma_i^2$, pero no correlacionados, es decir, $\mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j] = 0$ para $i \neq j$.

Modelo SAR

- Esto es, si $\boldsymbol{u} \sim \text{SAR}$ entonces

$$\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{Y} + (\boldsymbol{I} - B)\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

- En general, los errores ϵ_i's pueden heterocedásticos, con $\mathbb{E}[\epsilon_i^2] = \sigma_i^2$, pero no correlacionados, es decir, $\mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j] = 0$ para $i \neq j$.

- En el caso especial de homocedasticidad los errores tienen varianza constante, $\mathbb{E}[\epsilon_i^2] = \sigma^2$.

Modelo SAR

- Esto es, si $\boldsymbol{u} \sim \text{SAR}$ entonces

$$\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{Y} + (\boldsymbol{I} - B)\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

- En general, los errores ϵ_i's pueden heterocedásticos, con $\mathbb{E}[\epsilon_i^2] = \sigma_i^2$, pero no correlacionados, es decir, $\mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j] = 0$ para $i \neq j$.
- En el caso especial de homocedasticidad los errores tienen varianza constante, $\mathbb{E}[\epsilon_i^2] = \sigma^2$.
- Si $\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de varianzas-covarianzas de $\boldsymbol{\epsilon}$ entonces

$$\mathbb{V}[\boldsymbol{u}] = (\boldsymbol{I} - B)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{I} - B^\top)^{-1}$$

Modelo SAR

- Note que si $B = \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}}$ entonces $B \neq B^\top$, luego

$$(\boldsymbol{I} - \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}})^{-1} \neq (\boldsymbol{I} - \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}}^\top)^{-1}.$$

Modelo SAR

- Note que si $B = \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}}$ entonces $B \neq B^\top$, luego

$$(\boldsymbol{I} - \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}})^{-1} \neq (\boldsymbol{I} - \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}}^\top)^{-1}.$$

- Para el caso homocedástico se tiene

$$\mathbb{V}[\boldsymbol{u}] = \sigma^2 \left[(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^\top(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\right]^{-1}$$

Modelo SAR

- Note que si $B = \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}}$ entonces $B \neq B^\top$, luego

$$(\boldsymbol{I} - \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}})^{-1} \neq (\boldsymbol{I} - \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}}^\top)^{-1}.$$

- Para el caso homocedástico se tiene

$$\mathbb{V}[\boldsymbol{u}] = \sigma^2 \left[(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^\top(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\right]^{-1}$$

- Aplicando esta notación a la variable $\boldsymbol{Y}$, se tiene

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \epsilon$$

Modelo SAR

- Note que si $B = \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}}$ entonces $B \neq B^\top$, luego

$$(\boldsymbol{I} - \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}})^{-1} \neq (\boldsymbol{I} - \alpha\widetilde{\boldsymbol{W}}^\top)^{-1}.$$

- Para el caso homocedástico se tiene

$$\mathbb{V}[\boldsymbol{u}] = \sigma^2 \left[(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^\top(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\right]^{-1}$$

- Aplicando esta notación a la variable $\boldsymbol{Y}$, se tiene

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \epsilon$$

- Esto significa que el filtro espacial $(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})$ remueve la autocorrelación espacial, pero no la heterocedasticidad si es que sta presente.

Modelo SAR

- Note que si se conoce el valor del parámetro autoregresivo ρ, entonces el modelo anterior se reduce a un modelo de regresión lineal simple de la forma

$$\boldsymbol{Y}_s = \boldsymbol{X}_s\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{Y}_s = \boldsymbol{Y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y} \quad \wedge \quad \boldsymbol{X}_s = \boldsymbol{X} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}$$

Modelo SAR

- Note que si se conoce el valor del parámetro autoregresivo ρ, entonces el modelo anterior se reduce a un modelo de regresión lineal simple de la forma

$$\boldsymbol{Y}_s = \boldsymbol{X}_s \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{Y}_s = \boldsymbol{Y} - \rho \boldsymbol{W} \boldsymbol{Y} \quad \wedge \quad \boldsymbol{X}_s = \boldsymbol{X} - \rho \boldsymbol{W} \boldsymbol{X}$$

- Esto proporciona la motivación para el estimador de mínimos cuadrados ponderados espacialmente.

Modelo SAR

- Note que si se conoce el valor del parámetro autoregresivo ρ, entonces el modelo anterior se reduce a un modelo de regresión lineal simple de la forma

$$\boldsymbol{Y}_s = \boldsymbol{X}_s\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{Y}_s = \boldsymbol{Y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y} \quad \wedge \quad \boldsymbol{X}_s = \boldsymbol{X} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}$$

- Esto proporciona la motivación para el estimador de mínimos cuadrados ponderados espacialmente.

- La especificación del error SAR puede ser extendida incluyendo tanto variables endógenas como exógenas del siguiente modo

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \sim \text{SAR}$$

  donde la matriz $\boldsymbol{Z}$ incluye ambos tipos de variables.

Modelo SAR

- Para estimar $\boldsymbol{\beta}$ o $\boldsymbol{\delta}$ se pueden utilizar varias técnicas, tales como las metodologías de mínimos cuadrados.

Modelo SAR

- Para estimar $\boldsymbol{\beta}$ o $\boldsymbol{\delta}$ se pueden utilizar varias técnicas, tales como las metodologías de mínimos cuadrados.

- Estas metodologías asumen que se tiene de un estimador consistente de ρ, denotado por $\widehat{\rho}$.

Modelo SAR

- Para estimar $\boldsymbol{\beta}$ o $\boldsymbol{\delta}$ se pueden utilizar varias técnicas, tales como las metodologías de mínimos cuadrados.
- Estas metodologías asumen que se tiene de un estimador consistente de ρ, denotado por $\widehat{\rho}$.
- Específicamente, OLS en el caso de $\boldsymbol{\beta}$, mientras que 2SLS para $\boldsymbol{\delta}$.

Modelo SAR

- Para estimar $\boldsymbol{\beta}$ o $\boldsymbol{\delta}$ se pueden utilizar varias técnicas, tales como las metodologías de mínimos cuadrados.
- Estas metodologías asumen que se tiene de un estimador consistente de ρ, denotado por $\widehat{\rho}$.
- Específicamente, OLS en el caso de $\boldsymbol{\beta}$, mientras que 2SLS para $\boldsymbol{\delta}$.
- Para el caso que las covariables son exógenas, se puede utilizar mínimos cuadrados ponderados espacialmente (SWLS), Anselin 1988, en este caso

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS} = (\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{X}_s)\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{Y}_s$$

  donde $\boldsymbol{X}_s$ y $\boldsymbol{Y}_s$ se obtienen como antes, pero reemplanzado ρ por $\widehat{\rho}$.

Modelo SAR

- En términos de las variables originales se tiene

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})^\top(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})\boldsymbol{X}\right]^{-1}(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})^\top(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}$$

Modelo SAR

- En términos de las variables originales se tiene

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})^\top(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})\boldsymbol{X}\right]^{-1}(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})^\top(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}$$

- Por otro lado, la inferencia para el estimador de $\boldsymbol{\beta}$ esta basáda en la matriz de covarianza usual.

Modelo SAR

- En términos de las variables originales se tiene

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})^\top(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})\boldsymbol{X}\right]^{-1}(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})^\top(\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}$$

- Por otro lado, la inferencia para el estimador de $\boldsymbol{\beta}$ esta basáda en la matriz de covarianza usual.

- En el caso homocedástico, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS}] &= \widehat{\sigma}^2\left(\boldsymbol{X}_s^\top\boldsymbol{X}_s\right)^{-1} \\ &= \widehat{\sigma}^2\left[(\boldsymbol{X} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^\top(\boldsymbol{X} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})\right]^{-1}\end{aligned}$$

donde $\widehat{\sigma}^2$ es un estimador de la varianza de los error ϵ (no de lso errores $\boldsymbol{u}$).

- Un estimador $\widehat{\sigma}^2$ esta basado en los residuos espacialmente filtrados,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_s &= \boldsymbol{Y}_s - \boldsymbol{X}_s \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS} \\ &= (\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\beta}_{SWLS}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_s^\top \boldsymbol{e}_s}{n} \end{aligned}$$

Modelo SAR

- Un estimador $\widehat{\sigma}^2$ esta basado en los residuos espacialmente filtrados,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_s &= \boldsymbol{Y}_s - \boldsymbol{X}_s \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS} \\ &= (\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\beta}_{SWLS}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_s^\top \boldsymbol{e}_s}{n} \end{aligned}$$

- Para el caso en que $\boldsymbol{\Sigma} \neq \sigma^2 \boldsymbol{I}$, se tiene que

$$\mathbb{V}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS}] = \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{X}_s\right)^{-1} \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_s\right) \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{X}_s\right)^{-1}$$

Modelo SAR

- Un estimador $\widehat{\sigma}^2$ esta basado en los residuos espacialmente filtrados,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_s &= \boldsymbol{Y}_s - \boldsymbol{X}_s \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS} \\ &= (\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\beta}_{SWLS}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_s^\top \boldsymbol{e}_s}{n} \end{aligned}$$

- Para el caso en que $\boldsymbol{\Sigma} \neq \sigma^2 \boldsymbol{I}$, se tiene que

$$\mathbb{V}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS}] = \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{X}_s\right)^{-1} \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_s\right) \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{X}_s\right)^{-1}$$

- Un estimador consistente de $\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_s$ es $\dfrac{\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{S} \boldsymbol{X}_s}{n}$, $\boldsymbol{S} = \operatorname{diag}(e_{s,1}^2, \ldots, e_{s,n}^2)$.

Modelo SAR

- Un estimador $\widehat{\sigma}^2$ esta basado en los residuos espacialmente filtrados,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_s &= \boldsymbol{Y}_s - \boldsymbol{X}_s \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS} \\ &= (\boldsymbol{I} - \widehat{\rho}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\beta}_{SWLS}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_s^\top \boldsymbol{e}_s}{n} \end{aligned}$$

- Para el caso en que $\boldsymbol{\Sigma} \neq \sigma^2 \boldsymbol{I}$, se tiene que

$$\mathbb{V}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS}] = \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{X}_s\right)^{-1} \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_s\right) \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{X}_s\right)^{-1}$$

- Un estimador consistente de $\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_s$ es $\dfrac{\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{S} \boldsymbol{X}_s}{n}$, $\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}(e_{s,1}^2, \ldots, e_{s,n}^2)$.

- Finalmente, un estimador de la varianza de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS}$ es

$$\widehat{\mathbb{V}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{SWLS}]} = \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{X}_s\right)^{-1} \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{S} \boldsymbol{X}_s\right) \left(\boldsymbol{X}_s^\top \boldsymbol{X}_s\right)^{-1}$$

Modelo SAR

- Todo lo anterior se basa en tener un estimador consistente del parámetro de autorregresivo ρ.

Modelo SAR

- Todo lo anterior se basa en tener un estimador consistente del parámetro de autorregresivo ρ.
- Una alternativa para conseguir un estimador consistente es utilizar un sistema de ecuaciones de momentos, denominado método de los momentos generalizados (GM).

Modelo SAR

- Todo lo anterior se basa en tener un estimador consistente del parámetro de autorregresivo ρ.
- Una alternativa para conseguir un estimador consistente es utilizar un sistema de ecuaciones de momentos, denominado método de los momentos generalizados (GM).
- En primer lugar los residuos son calculados a partir de un conjunto de estimaciones iniciales consistentes (pero no necesariamente eficaces) para los coeficientes del modelo.

Modelo SAR

- Todo lo anterior se basa en tener un estimador consistente del parámetro de autorregresivo ρ.
- Una alternativa para conseguir un estimador consistente es utilizar un sistema de ecuaciones de momentos, denominado método de los momentos generalizados (GM).
- En primer lugar los residuos son calculados a partir de un conjunto de estimaciones iniciales consistentes (pero no necesariamente eficaces) para los coeficientes del modelo.
- Por ejemplo, OLS o 2SLS.

Modelo SAR

- Todo lo anterior se basa en tener un estimador consistente del parámetro de autorregresivo ρ.
- Una alternativa para conseguir un estimador consistente es utilizar un sistema de ecuaciones de momentos, denominado método de los momentos generalizados (GM).
- En primer lugar los residuos son calculados a partir de un conjunto de estimaciones iniciales consistentes (pero no necesariamente eficaces) para los coeficientes del modelo.
- Por ejemplo, OLS o 2SLS.
- Se asumira, en primera instancia, que los términos de errores ϵ_i son iid con varianza σ^2.

Modelo SAR

- Usando la propiedad $tr(\boldsymbol{W}) = 0$ se establecen las siguientes tres condiciones de momentos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\epsilon}] &= n\sigma^2 \\
\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W} \boldsymbol{\epsilon}] &= \sigma^2 tr(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W}) \\
\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{\epsilon}] &= 0
\end{aligned}$$

Modelo SAR

- Usando la propiedad $tr(\boldsymbol{W}) = 0$ se establecen las siguientes tres condiciones de momentos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\epsilon}] &= n\sigma^2 \\ \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W} \boldsymbol{\epsilon}] &= \sigma^2 tr(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W}) \\ \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{\epsilon}] &= 0\end{aligned}$$

- Como $\boldsymbol{u} = \rho \boldsymbol{W} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\epsilon}$ entonces $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{u} - \rho \boldsymbol{W} \boldsymbol{u}$.

Modelo SAR

- Usando la propiedad $tr(\boldsymbol{W}) = 0$ se establecen las siguientes tres condiciones de momentos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\epsilon}] &= n\sigma^2 \\
\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W} \boldsymbol{\epsilon}] &= \sigma^2 tr(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W}) \\
\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{\epsilon}] &= 0
\end{aligned}
$$

- Como $\boldsymbol{u} = \rho \boldsymbol{W} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\epsilon}$ entonces $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{u} - \rho \boldsymbol{W} \boldsymbol{u}$.

- Sustituyendo la expresión para $\boldsymbol{\epsilon}$ en el sistema de momentos y utilizando la notación $\boldsymbol{W}\widehat{\boldsymbol{u}} = \widehat{\boldsymbol{u}}_L$, y $\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}\widehat{\boldsymbol{u}} = \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}$.

Modelo SAR

- Se tiene

$$\begin{pmatrix} 2\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & n \\ 2\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & tr(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W}) \\ (\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} + \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L) & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}} \\ \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \\ \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \end{pmatrix}$$

Modelo SAR

- Se tiene

$$\begin{pmatrix} 2\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & n \\ 2\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & tr(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W}) \\ (\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} + \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L) & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}} \\ \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \\ \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \end{pmatrix}$$

- Este sistema puede ser resuelto para ρ y σ^2.

Modelo SAR

- Se tiene

$$\begin{pmatrix} 2\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & n \\ 2\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & tr(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W}) \\ (\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} + \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L) & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}} \\ \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \\ \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \end{pmatrix}$$

- Este sistema puede ser resuelto para ρ y σ^2.
- La inferencia se limita a los coeficientes de regresión.

Modelo SAR

- Se tiene

$$\begin{pmatrix} 2\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & n \\ 2\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & tr(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W}) \\ (\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} + \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L) & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}} \\ \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \\ \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \end{pmatrix}$$

- Este sistema puede ser resuelto para ρ y σ^2.
- La inferencia se limita a los coeficientes de regresión.
- El método GM tiene el problema que no obtiene un estimador consistente para ρ en presencia de Heterocedasticidad.

Modelo SAR

- Se tiene

$$\begin{pmatrix} 2\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & n \\ 2\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L & -\widehat{\boldsymbol{u}}_{LL}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & tr(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W}) \\ (\widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} + \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L) & -\widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_{LL} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}} \\ \widehat{\boldsymbol{u}}_L^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \\ \widehat{\boldsymbol{u}}^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_L \end{pmatrix}$$

- Este sistema puede ser resuelto para ρ y σ^2.
- La inferencia se limita a los coeficientes de regresión.
- El método GM tiene el problema que no obtiene un estimador consistente para ρ en presencia de Heterocedasticidad.
- El Método de Momentos Generalizados es una alternativa para corregir este problema, ver Modern Spatial Econometrics in Practice, Anselin (2014).

Bibliografia

Banerjee S., Carlin B., and Gelfand A. (2015) *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*, Boca Raton: Chapman Hall/CRC.

Cressie, N. (1993) *Statistics for Spatial Data*. New York: Wiley.

Matheron, G., (1965) Les variables régionalisés et leur estimation. Masson, Paris.

Shabenberger, O., Gotway, C. A. (2005) *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

¿Alguna Consulta?