EPG3343 - Seminario de Estadística III

Clase 3

Jonathan Acosta

Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre, 2022

Esquema

1. Campos Aleatorios
   - Definición
   - Tipos de Estacionariedad
   - El Variograma y la Función de Covarianza
   - Isotropía y Anisotropía
   - Modelos Paramétricos de Covarianza y Variograma

Esquema

Procesos Espaciales: Definición

Un proceso espacial o campo aleatorio es una familia de variables aleatorias que son indexadas en $D \subset \mathbb{R}^d$ y definidas sobre el espacio de probabilidad (Ω, F, P) que toma valores en (E, ξ).

- (E, ξ) se denomina espacio de estado $(E \subset \mathbb{R}, \ \wedge \ \xi = B(E))$.
- D es el conjunto de sitios.

Procesos Espaciales: Definición

Un proceso espacial o campo aleatorio es una familia de variables aleatorias que son indexadas en $D \subset \mathbb{R}^d$ y definidas sobre el espacio de probabilidad (Ω, F, P) que toma valores en (E, ξ).

- (E, ξ) se denomina espacio de estado $(E \subset \mathbb{R}, \ \wedge \ \xi = B(E))$.
- D es el conjunto de sitios.

Alternativamente, se puede ver el proceso X como una función

$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega \times D & \longrightarrow & E \\ & (\omega, \boldsymbol{s}) & \longmapsto & X(\omega, \boldsymbol{s}) \end{array}$$

- Para $\boldsymbol{s}$ fijo, $X(\omega, \boldsymbol{s})$ es una variable aleatoria.
- Si ω es fijo, entonces $X(\omega, \boldsymbol{s})$ es una trayectoria del proceso.

Procesos Espaciales: Definición

Un proceso espacial o campo aleatorio es una familia de variables aleatorias que son indexadas en $D \subset \mathbb{R}^d$ y definidas sobre el espacio de probabilidad (Ω, F, P) que toma valores en (E, ξ).

- (E, ξ) se denomina espacio de estado $(E \subset \mathbb{R}, \ \wedge \ \xi = B(E))$.
- D es el conjunto de sitios.

Alternativamente, se puede ver el proceso X como una función

$$
\begin{array}{rccc}
X: & \Omega \times D & \longrightarrow & E \\
 & (\omega, \boldsymbol{s}) & \longmapsto & X(\omega, \boldsymbol{s})
\end{array}
$$

- Para $\boldsymbol{s}$ fijo, $X(\omega, \boldsymbol{s})$ es una variable aleatoria.
- Si ω es fijo, entonces $X(\omega, \boldsymbol{s})$ es una trayectoria del proceso.

Notación: $\{X(\boldsymbol{s}) : s \in D\}$, $\{X(\boldsymbol{s})\}$, $X(\boldsymbol{s})$ o $X_{\boldsymbol{s}}$.

Observaciones:

- Si $d = 1$, X_s representa una serie de tiempo. Adicionalmente, si $D = \mathbb{Z}$ la serie es discreta y si $D = \mathbb{R}$ la serie es continua.
- Si $d = 2$ y $D = \mathbb{Z}^2$ entonces $X_{\boldsymbol{s}}$ es una grilla regular.
- Los casos de interés para este curso son cuando $d \geq 2$.

Procesos Espaciales

Para cualquier entero $n \geq 1$ y $(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n) \in D^n$, la distribución de $(X(\boldsymbol{s}_1), X(\boldsymbol{s}_2), \ldots, X(\boldsymbol{s}_n))$ es la imagen de $\mathbb{P}$ bajo el mapeo

$$\omega \longmapsto (X(\omega, \boldsymbol{s}_1), X(\omega, \boldsymbol{s}_2), \ldots, X(\omega, \boldsymbol{s}_n))$$

Es decir, para $A_i \in \xi$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbb{P}_X(A_1, \ldots, A_n) = \mathbb{P}\left(X(\boldsymbol{s}_1) \in A_1, X(\boldsymbol{s}_2) \in A_2, \ldots, X(\boldsymbol{s}_n) \in A_n\right)$$

Para cualquier entero $n \geq 1$ y $(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n) \in D^n$, la distribución de $(X(\boldsymbol{s}_1), X(\boldsymbol{s}_2), \ldots, X(\boldsymbol{s}_n))$ es la imagen de $\mathbb{P}$ bajo el mapeo

$$\omega \longmapsto (X(\omega, \boldsymbol{s}_1), X(\omega, \boldsymbol{s}_2), \ldots, X(\omega, \boldsymbol{s}_n))$$

Es decir, para $A_i \in \xi$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbb{P}_X(A_1, \ldots, A_n) = \mathbb{P}\left(X(\boldsymbol{s}_1) \in A_1, X(\boldsymbol{s}_2) \in A_2, \ldots, X(\boldsymbol{s}_n) \in A_n\right)$$

La familia de distribuciones finito dimensional de $X_{\boldsymbol{s}}$ se llama distribución finito dimensional.

Procesos Espaciales

Para cualquier proceso estocástico $X_{\boldsymbol{s}}$ se definen las siguientes tres funciones:

Procesos Espaciales

Para cualquier proceso estocástico $X_{\boldsymbol{s}}$ se definen las siguientes tres funciones:

- **Función de Media**:

$$\begin{array}{rccl} \mu: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{s} & \longmapsto & \mu(\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}[X(\boldsymbol{s})] \end{array}$$

Procesos Espaciales

Para cualquier proceso estocástico $X_{\boldsymbol{s}}$ se definen las siguientes tres funciones:

- **Función de Media**:

$$\begin{array}{rccl} \mu: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{s} & \longmapsto & \mu(\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}[X(\boldsymbol{s})] \end{array}$$

- **Función de Covarianza**:

$$\begin{array}{rccl} C: & D \times D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) & \longmapsto & C(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \operatorname{cov}[X(\boldsymbol{s}_1), X(\boldsymbol{s}_2)] \end{array}$$

Procesos Espaciales

Para cualquier proceso estocástico $X_{\boldsymbol{s}}$ se definen las siguientes tres funciones:

- **Función de Media**:

$$\begin{array}{rccl} \mu: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{s} & \longmapsto & \mu(\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}[X(\boldsymbol{s})] \end{array}$$

- **Función de Covarianza**:

$$\begin{array}{rccl} C: & D \times D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) & \longmapsto & C(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \mathrm{cov}[X(\boldsymbol{s}_1), X(\boldsymbol{s}_2)] \end{array}$$

- **Función de Correlación**:

$$\begin{array}{rccl} \rho: & D \times D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) & \longmapsto & \rho(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \mathrm{cor}[X(\boldsymbol{s}_1), X(\boldsymbol{s}_2)] \end{array}$$

Procesos Espaciales

Proceso de 2^o Orden: Diremos que el proceso espacial $X(\boldsymbol{s})$ es de segundo orden si y solo si:

$$\mathbb{E}\left[X(\boldsymbol{s})^2\right] < \infty \quad \boldsymbol{s} \in D.$$

Proceso de 2^o Orden: Diremos que el proceso espacial $X(\boldsymbol{s})$ es de segundo orden si y solo si:

$$\mathbb{E}\left[X(\boldsymbol{s})^2\right] < \infty \quad \boldsymbol{s} \in D.$$

Teorema: Sea $X(\boldsymbol{s})$ un proceso espacial de 2^o orden obtenido sobre D, entonces

(i) $\mu(\boldsymbol{s}) < \infty, \quad \forall \boldsymbol{s} \in D.$

(ii) $C(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) < \infty, \quad \forall (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) \in D^2.$

Teorema: Sea $C(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)$ una función de covarianza. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j C(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_j) \geq 0$$

Campo Aleatorio Gaussiano: Sea $\left\{Z(\boldsymbol{s}):\ s \in D \subset \mathbb{R}^d\right\}$ un proceso espacial. Diremos que $Z(\boldsymbol{s})$ es Gaussiano si y solo si $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n) \in D^n$, el vector $\boldsymbol{Z} = (Z(\boldsymbol{s}_1),\ldots,Z(\boldsymbol{s}_n))$ tiene una distribución normal multivariada de media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de varianza $\boldsymbol{\Sigma}$, donde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu(\boldsymbol{s}_1) \\ \mu(\boldsymbol{s}_2) \\ \vdots \\ \mu(\boldsymbol{s}_n) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_1) & C(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2) & \ldots & C(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_n) \\ & C(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_2) & \ldots & C(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_n) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & C(\boldsymbol{s}_n,\boldsymbol{s}_n) \end{pmatrix}$$

Notación: $\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$

Tipos de Estacionariedad

Estacionariedad Estricta o Fuerte: Se dirá que el proceso $X_{\boldsymbol{s}}$ es estrictamente estacionario si la distribución finito dimensional es invariante bajo traslación, es decir, si para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$ y para todo $\boldsymbol{h}$ tal que $\boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{h} \in D$ entonces

$$(X(\boldsymbol{s}_1), X(\boldsymbol{s}_2), \ldots, X(\boldsymbol{s}_n)) \overset{d}{\equiv} (X(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{h}), X(\boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{h}), \ldots, X(\boldsymbol{s}_n + \boldsymbol{h}))$$

Tipos de Estacionariedad

Estacionariedad Estricta o Fuerte: Se dirá que el proceso $X_{\boldsymbol{s}}$ es estrictamente estacionario si la distribución finito dimensional es invariante bajo traslación, es decir, si para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$ y para todo $\boldsymbol{h}$ tal que $\boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{h} \in D$ entonces

$$(X(\boldsymbol{s}_1), X(\boldsymbol{s}_2), \ldots, X(\boldsymbol{s}_n)) \stackrel{d}{\equiv} (X(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{h}), X(\boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{h}), \ldots, X(\boldsymbol{s}_n + \boldsymbol{h}))$$

Ejemplo: Cualquier proceso iid es estrictamente estacionario.

Obs: Claramente esta condición es demasiado estricta en el sentido que no muchos procesos satisfacen esta propiedad.

Tipos de Estacionariedad

Estacionariedad Débil: Sea $X(\boldsymbol{s})$ un campo aleatorio de 2^o orden. Se dice que el proceso es débilmente estacionario si:

(i) $\mu(\boldsymbol{s}) = \mu, \ \forall \boldsymbol{s} \in D.$

(ii) $C(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \widetilde{C}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}), \ \forall \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in D.$

Tipos de Estacionariedad

Estacionariedad Débil: Sea $X(\boldsymbol{s})$ un campo aleatorio de 2^o orden. Se dice que el proceso es débilmente estacionario si:

(i) $\mu(\boldsymbol{s}) = \mu, \ \forall \boldsymbol{s} \in D.$

(ii) $C(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \widetilde{C}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}), \ \forall \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in D.$

Sin pérdida de genralidad, se escribirá $\widetilde{C}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}) = C(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s})$.

Resultado: Si $X(\boldsymbol{s})$ es un proceso debilmente estacionario entonces $\mathbb{V}[X(\boldsymbol{s})] = C(\mathbf{0})$ (constante) $\forall \boldsymbol{s} \in D$.

Tipos de Estacionariedad

Estacionariedad Débil: Sea $X(\boldsymbol{s})$ un campo aleatorio de 2^o orden. Se dice que el proceso es débilmente estacionario si:

(i) $\mu(\boldsymbol{s}) = \mu, \ \forall \boldsymbol{s} \in D.$

(ii) $C(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \widetilde{C}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}), \ \forall \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in D.$

Sin pérdida de genralidad, se escribirá $\widetilde{C}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}) = C(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s})$.

Resultado: Si $X(\boldsymbol{s})$ es un proceso debilmente estacionario entonces $\mathbb{V}[X(\boldsymbol{s})] = C(\mathbf{0})$ (constante) $\ \forall \boldsymbol{s} \in D$.

Teorema: Si $X(\boldsymbol{s})$ es un proceso de 2^o orden fuertemente estacionario, entonces $X(\boldsymbol{s})$ es débilmente estacionario.

Estacionariedad Débil: Sea $X(\boldsymbol{s})$ un campo aleatorio de 2^o orden. Se dice que el proceso es débilmente estacionario si:

(i) $\mu(\boldsymbol{s}) = \mu, \ \forall \boldsymbol{s} \in D.$

(ii) $C(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \widetilde{C}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}), \ \forall \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in D.$

Sin pérdida de genralidad, se escribirá $\widetilde{C}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}) = C(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s})$.

Resultado: Si $X(\boldsymbol{s})$ es un proceso debilmente estacionario entonces $\mathbb{V}[X(\boldsymbol{s})] = C(\mathbf{0})$ (constante) $\ \forall \boldsymbol{s} \in D$.

Teorema: Si $X(\boldsymbol{s})$ es un proceso de 2^o orden fuertemente estacionario, entonces $X(\boldsymbol{s})$ es débilmente estacionario.

Teorema: Si $Z(\boldsymbol{s})$ es un proceso Gaussiano de 2^o orden débilmente estacionario, entonces $Z(\boldsymbol{s})$ es fuertemente estacionario.

Tipos de Estacionariedad

Estacionariedad Intrinseca: Sea $\{X(\boldsymbol{s})\}$ un proceso espacial con media constante. Diremos que $\{X(\boldsymbol{s})\}$ es intrinsecamente estacionario si y solo si la función

$$\gamma(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{h}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - X(\boldsymbol{s}))^2\right]$$

depende únicamente de $\boldsymbol{h}$.

Tipos de Estacionariedad

Estacionariedad Intrinseca: Sea $\{X(\boldsymbol{s})\}$ un proceso espacial con media constante. Diremos que $\{X(\boldsymbol{s})\}$ es intrinsecamente estacionario si y solo si la función

$$\gamma(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{h}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - X(\boldsymbol{s}))^2\right]$$

depende únicamente de $\boldsymbol{h}$.

Como $\mathbb{E}\left[X(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - X(\boldsymbol{s})\right] = 0$, entonces

$$\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - X(\boldsymbol{s}))^2\right] = \mathbb{V}\left[X(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - X(\boldsymbol{s})\right]$$

Observación: La estacionariedad intrinseca solo especifica el primer y segundo momento de la diferencia $X(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - X(\boldsymbol{s})$. Por lo tanto, a partir de la estacionariedad intrinseca no tenemos la información de la verosimilitud del vector $(X(\boldsymbol{s}_1), \ldots, X(\boldsymbol{s}_n))$.

El Variograma y la Función de Covarianza

Función de Covarianza: Para procesos débilmente estacionarios se puede reescribir la función de covarianza como

$$\begin{array}{rccl} C(\boldsymbol{h}): & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{h} & \longmapsto & C(\boldsymbol{h}) = \operatorname{cov}[X(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}), X(\boldsymbol{s})] \quad \forall \boldsymbol{s} \in D. \end{array}$$

De manera análoga se puede reescribir la función de correlación. Además, se satisface la relación

$$\rho(\boldsymbol{h}) = \frac{C(\boldsymbol{h})}{C(\mathbf{0})}$$

Función de Covarianza: Para procesos débilmente estacionarios se puede reescribir la función de covarianza como

$$\begin{array}{rccl} C(\boldsymbol{h}): & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{h} & \longmapsto & C(\boldsymbol{h}) = \operatorname{cov}[X(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}), X(\boldsymbol{s})] \quad \forall \boldsymbol{s} \in D. \end{array}$$

De manera análoga se puede reescribir la función de correlación. Además, se satisface la relación

$$\rho(\boldsymbol{h}) = \frac{C(\boldsymbol{h})}{C(\mathbf{0})}$$

Variograma: Para procesos intrinsecamente estacionarios, la función

$$2\gamma(\boldsymbol{h}) = \mathbb{E}\left[\left(X(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - X(\boldsymbol{s})\right)^2\right]$$

es conocida como variograma, mientras que $\gamma(\boldsymbol{h})$ es el semi-variograma.

El Variograma y la Función de Covarianza

Teorema: Si el proceso $\{X(\boldsymbol{s})\}$ es débilmente estacionario, entonces el proceso es intrinsecamente estacionario, satisfaciendo:

$$\gamma(\boldsymbol{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\boldsymbol{h})$$

El Variograma y la Función de Covarianza

Teorema: Si el proceso $\{X(\boldsymbol{s})\}$ es débilmente estacionario, entonces el proceso es intrinsecamente estacionario, satisfaciendo:

$$\gamma(\boldsymbol{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\boldsymbol{h})$$

Obs: Note que siempre se puede escribir $\gamma(\boldsymbol{h})$ como función de $C(\boldsymbol{h})$. Pero para que se tenga la relación inversa se necesita una condición extra conocida como ergocidad del proceso.

El Variograma y la Función de Covarianza

Teorema: Si el proceso $\{X(\boldsymbol{s})\}$ es débilmente estacionario, entonces el proceso es intrinsecamente estacionario, satisfaciendo:

$$\gamma(\boldsymbol{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\boldsymbol{h})$$

Obs: Note que siempre se puede escribir $\gamma(\boldsymbol{h})$ como función de $C(\boldsymbol{h})$. Pero para que se tenga la relación inversa se necesita una condición extra conocida como ergocidad del proceso.

Teorema: Si $\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to\infty} C(\boldsymbol{h}) = 0$, entonces el proceso es ergódico.

Consecuencia $\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to\infty} \gamma(\boldsymbol{h}) = C(\mathbf{0})$. Por lo tanto,

$$C(\boldsymbol{h}) = \lim_{\|\boldsymbol{u}\|\to\infty} \gamma(\boldsymbol{u}) - \gamma(\boldsymbol{h}).$$

El Variograma y la Función de Covarianza

Propiedades de la Función de Covarianza: Sea $\{X(\boldsymbol{s})\}$ un proceso débilmente estacionario con función de covarianza $C(\boldsymbol{h})$. Entonces:

(i) $C(\mathbf{0}) \geq 0$.

(ii) $C(\mathbf{0}) \geq C(\boldsymbol{h}),\ \forall \boldsymbol{h} \in D$.

(iii) $C(\boldsymbol{h}) = C(-\boldsymbol{h}),\ \forall \boldsymbol{h} \in D$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n) \in D^n$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j C(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j) \geq 0$$

El Variograma y la Función de Covarianza

Propiedades de la Función de Covarianza: Sea $\{X(\boldsymbol{s})\}$ un proceso débilmente estacionario con función de covarianza $C(\boldsymbol{h})$. Entonces:

(i) $C(\mathbf{0}) \geq 0$.

(ii) $C(\mathbf{0}) \geq C(\boldsymbol{h}), \ \forall \boldsymbol{h} \in D$.

(iii) $C(\boldsymbol{h}) = C(-\boldsymbol{h}), \ \forall \boldsymbol{h} \in D$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \, (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n) \in D^n$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j C(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j) \geq 0$$

Resultado: $|\rho(\boldsymbol{h})| \leq 1$.

El Variograma y la Función de Covarianza

Propiedades de la Función de Covarianza: Sea $\{X(\boldsymbol{s})\}$ un proceso débilmente estacionario con función de covarianza $C(\boldsymbol{h})$. Entonces:

(i) $C(\mathbf{0}) \geq 0$.

(ii) $C(\mathbf{0}) \geq C(\boldsymbol{h}), \ \forall \boldsymbol{h} \in D$.

(iii) $C(\boldsymbol{h}) = C(-\boldsymbol{h}), \ \forall \boldsymbol{h} \in D$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n) \in D^n$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j C(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j) \geq 0$$

Resultado: $|\rho(\boldsymbol{h})| \leq 1$.

Resultado: Si $C_j(\boldsymbol{h})$ son funciones de covarianza $\ \forall j = 1, \ldots, k$. Entonces:

(a) $\sum_{j=1}^{k} b_j C_j(\boldsymbol{h})$ es una función de covarianza $\ \forall b_j \geq 0$.

(b) $\prod_{j=1}^{k} C_j(\boldsymbol{h})$ es una función de covarianza.

El Variograma y la Función de Covarianza

Propiedades del Variograma: Sea $\{X(\boldsymbol{s})\}$ un proceso débilmente estacionario con función de covarianza $C(\boldsymbol{h})$ y semi-variograma $\gamma(\boldsymbol{h})$. Entonces:

(i) $\gamma(\mathbf{0}) = 0$.

(ii) $\gamma(\boldsymbol{h}) = \gamma(-\boldsymbol{h}), \ \forall \boldsymbol{h} \in D$.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ y $\forall (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n) \in D^n$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \gamma(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j) \leq 0$$

(iv) Si $\boldsymbol{A}$ es una transformación lineal en $\mathbb{R}^d$, entonces $\boldsymbol{h} \mapsto \gamma(\boldsymbol{A}\boldsymbol{h})$ es una variograma.

Resultado: Si $\gamma_j(\boldsymbol{h})$ son variogramas $\forall j = 1, \ldots, k$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{k} b_j \gamma_j(\boldsymbol{h})$$

es un variograma $\forall b_j \geq 0$.

Isotropía y Anisotropía

Definición: Sea $\{X(\boldsymbol{s})\}$ un proceso espacial. Se dice que el proceso tiene covarianza isotrópica si depende exclusivamente de la norma de la diferencia de los sitios.

Isotropía y Anisotropía

Definición: Sea $\{X(\boldsymbol{s})\}$ un proceso espacial. Se dice que el proceso tiene covarianza isotrópica si depende exclusivamente de la norma de la diferencia de los sitios.

Resultado Si $\{X(\boldsymbol{s})\}$ es isotrópico entonces es débilmente estacionario.

Isotropía y Anisotropía

Definición: Sea $\{X(\boldsymbol{s})\}$ un proceso espacial. Se dice que el proceso tiene covarianza isotrópica si depende exclusivamente de la norma de la diferencia de los sitios.

Resultado Si $\{X(\boldsymbol{s})\}$ es isotrópico entonces es débilmente estacionario.

Definición: Un proceso se dice anisotrópico si su covarianza no es isotrópica.

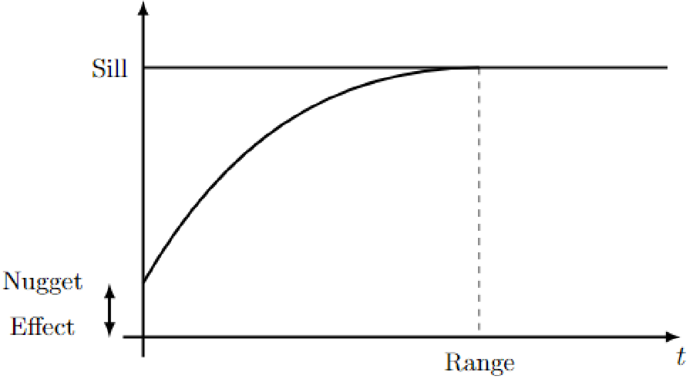


Figura 1: Comportamiento de un Variograma Teórico

- El efecto *nugget* representa el error de medición, para obtener su valor se calcula $\gamma(\boldsymbol{h})$ cuando $|\boldsymbol{h}| = 0$.

- El efecto *nugget* representa el error de medición, para obtener su valor se calcula $\gamma(\boldsymbol{h})$ cuando $|\boldsymbol{h}| = 0$.
- El *sill* representa la varianza del campo aleatorio, y se calcula a través de $\lim_{h\to\infty} \gamma(\boldsymbol{h})$.

- El efecto *nugget* representa el error de medición, para obtener su valor se calcula $\gamma(\boldsymbol{h})$ cuando $|\boldsymbol{h}| = 0$.
- El *sill* representa la varianza del campo aleatorio, y se calcula a través de $\lim_{h\to\infty} \gamma(\boldsymbol{h})$.
- El *range* representa la distancia (de existir) en la cual los datos no están correlacionados.

- El efecto *nugget* representa el error de medición, para obtener su valor se calcula $\gamma(\boldsymbol{h})$ cuando $|\boldsymbol{h}| = 0$.
- El *sill* representa la varianza del campo aleatorio, y se calcula a través de $\lim_{h\to\infty} \gamma(\boldsymbol{h})$.
- El *range* representa la distancia (de existir) en la cual los datos no están correlacionados.
- El *Practial range* representa la distancia en la cual el variograma alcanza el 95 % del SILL.

Modelos de Variogramas

- Exponencial:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2(1 - \exp(-h/\phi)), & \text{si } h > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Gaussiano:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2(1 - \exp(-(h/\phi)^2)), & \text{si } h > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Modelos de Variogramas

- Esférico:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2, & \text{si } h \geq \phi, \\ \tau^2 + \sigma^2 \left(\dfrac{3h}{2\phi} - \dfrac{h^3}{2\phi^3} \right), & \text{si } 0 < h \leq \phi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- *Wave*:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 \left(1 - \dfrac{\phi \sin(h/\phi)}{h} \right), & \text{si } h > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Modelo de Matérn

Uno de los modelos más utilizados es el modelo de covarianza de Matérn, dada su gran versatilidad. Este modelo generalmente se escribe en términos de la función de correlación

$$\rho(h, \phi, \nu) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{h}{\phi}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\frac{h}{\phi}\right),$$

donde K_ν es la función de Bessel modificada del segundo tipo, y Γ es la función Gamma.

Modelo de Matérn

Uno de los modelos más utilizados es el modelo de covarianza de Matérn, dada su gran versatilidad. Este modelo generalmente se escribe en términos de la función de correlación

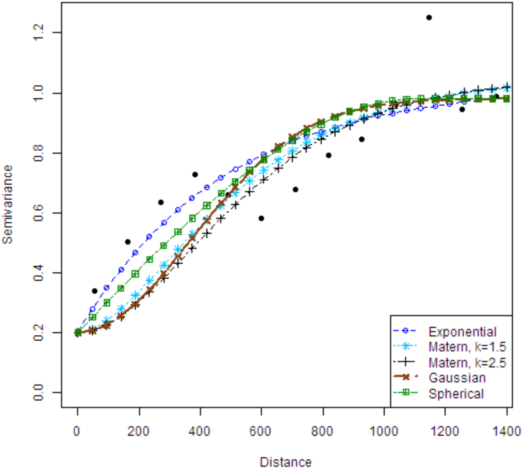
$$\rho(h, \phi, \nu) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{h}{\phi}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\frac{h}{\phi}\right),$$

donde K_ν es la función de Bessel modificada del segundo tipo, y Γ es la función Gamma.

Según el valor del parámetro de suavidad ν, obtenemos algunos casos particulares:

Model	Correlation function
Matérn, $\nu = 1{,}5$	$\rho(h, \phi) = \left(1 + \frac{h}{\phi}\right) \exp\left(-\frac{h}{\phi}\right)$
Matérn, $\nu = 2{,}5$	$\rho(h, \phi) = \left[1 + \frac{h}{\phi} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{\phi}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{h}{\phi}\right)$

Modelos de Variogramas



Bibliografia

Banerjee S., Carlin B., and Gelfand A. (2015) *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*, Boca Raton: Chapman Hall/CRC.

Cressie, N. (1993) *Statistics for Spatial Data*. New York: Wiley.

Matheron, G., (1965) Les variables régionalisés et leur estimation. Masson, Paris.

Shabenberger, O., Gotway, C. A. (2005) *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

¿Alguna Consulta?