EPG3343 - Seminario de Estadística III

Clase 4

Jonathan Acosta

Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre, 2022

Esquema

1. Campos Aleatorios
   - Estimadores No Paramétricos
   - Estimador en base a Modelos Paramétricos
     - Estimación por Máxima Verosimilitud
     - Estimación por Máxima Verosimilitud Restringida
     - Estimación por Mínimos Cuadrados
   - Criterios de Elección de Modelos
   - Estimación Bajo Anisotropía
     - Anisotropía Geométrica
     - Anisotropía Estratificada

Esquema

Estimadores No paramétricos

Vimos que:

- El estimador de Matheron (1965) del semivariograma es :

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{2|N(\boldsymbol{h})|} \sum_{N(\boldsymbol{h})} [Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)]^2$$

Estimadores No paramétricos

Vimos que:

- El estimador de Matheron (1965) del semivariograma es :

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{2|N(\boldsymbol{h})|} \sum_{N(\boldsymbol{h})} [Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)]^2$$

- El estimador robusto de Cresie & Hawking (1980):

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \frac{\left(\frac{1}{|N(\boldsymbol{h})|} \sum_{N(\boldsymbol{h})} |Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)|^{1/2}\right)^4}{0{,}914 + \frac{0{,}988}{|N(h)|}}$$

Estimadores No paramétricos

Vimos que:

- El estimador de Matheron (1965) del semivariograma es :

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{2|N(\boldsymbol{h})|} \sum_{N(\boldsymbol{h})} [Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)]^2$$

- El estimador robusto de Cresie & Hawking (1980):

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \frac{\left(\frac{1}{|N(\boldsymbol{h})|} \sum_{N(\boldsymbol{h})} |Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)|^{1/2} \right)^4}{0{,}914 + \frac{0{,}988}{|N(h)|}}$$

- Genton (1998) sugiere, basado en un estimador muy robusto de la escala $Q_{N(h)}$ (Rousseeuw and Croux, 1993), un estimador del variograma como

$$2\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \left(Q_{N(h)} \right)^2$$

Este estimador del variograma es más robusto que los anteriores.

Estimadores No paramétricos

Por otro lado un estimador natural de la función de covarianza esta dado por

$$\widehat{C}(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{2|N(\boldsymbol{h})|} \sum_{N(\boldsymbol{h})} [Z(\boldsymbol{s}_i) - \overline{Z}][Z(\boldsymbol{s}_j) - \overline{Z}]; \quad \text{donde } \overline{Z} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} Z(\boldsymbol{s}_i).$$

El estimador $\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h})$ es insesgado para $\gamma(\boldsymbol{h})$ si $Z(\boldsymbol{s})$ es intrínsecamente estacionario, en cambio si la media se estima desde los datos, $\widehat{C}(\boldsymbol{h})$ es un estimador sesgado para $C(\boldsymbol{h})$, pero el sesgo desaparece cuando $n \to \infty$ ya que $|N(\boldsymbol{h})|/n \to 1$.

Estimadores No paramétricos

Por otro lado un estimador natural de la función de covarianza esta dado por

$$\widehat{C}(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{2|N(\boldsymbol{h})|} \sum_{N(\boldsymbol{h})} [Z(\boldsymbol{s}_i) - \overline{Z}][Z(\boldsymbol{s}_j) - \overline{Z}]; \quad \text{donde } \overline{Z} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} Z(\boldsymbol{s}_i).$$

El estimador $\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h})$ es insesgado para $\gamma(\boldsymbol{h})$ si $Z(\boldsymbol{s})$ es intrínsecamente estacionario, en cambio si la media se estima desde los datos, $\widehat{C}(\boldsymbol{h})$ es un estimador sesgado para $C(\boldsymbol{h})$, pero el sesgo desaparece cuando $n \to \infty$ ya que $|N(\boldsymbol{h})|/n \to 1$.

Obs: Ninguno de los estimadores anteriores está bien definido. En el caso, de los estimadores del variograma no cumplen con la propiedad de ser condicionalmente definidos negativos. Mientras que el estimador de la función de convarianza no es definida positiva.

Estimador en base a Modelos Paramétricos

Denotemos por $\boldsymbol{\theta}$ al conjunto paramétrico que definen al modelo espacial.

Estimador en base a Modelos Paramétricos

Denotemos por $\boldsymbol{\theta}$ al conjunto paramétrico que definen al modelo espacial.

La estimación de $\boldsymbol{\theta}$ se puede llevar a cabo:

- Utilizando supuestos distribucionales (log-verosimilitud): Máxima Verosimilitud (ML); Máxima Verosimilitud Restringida (REML).

Estimador en base a Modelos Paramétricos

Denotemos por $\boldsymbol{\theta}$ al conjunto paramétrico que definen al modelo espacial.

La estimación de $\boldsymbol{\theta}$ se puede llevar a cabo:

- Utilizando supuestos distribucionales (log-verosimilitud): Máxima Verosimilitud (ML); Máxima Verosimilitud Restringida (REML).
- Utilizando las técnicas de mínimos cuadrados no lineales.

Estimador en base a Modelos Paramétricos

Denotemos por $\boldsymbol{\theta}$ al conjunto paramétrico que definen al modelo espacial.

La estimación de $\boldsymbol{\theta}$ se puede llevar a cabo:

- Utilizando supuestos distribucionales (log-verosimilitud): Máxima Verosimilitud (ML); Máxima Verosimilitud Restringida (REML).

- Utilizando las técnicas de mínimos cuadrados no lineales.

- A partir de pseudo-datos que ayuden a simplificar el problema: Ecuaciones de Estimación Generalizada (GEE); Composición de Verosimilitudes (CL). (Schabenberger and Gotway, 2005)

  Ejemplo de pseudo-dato, $T_{ij} = Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)$.

Máxima Verosimilitud

Suponga que la variable Z ha sido observada en n sitios, tal que

$$\boldsymbol{Z} = (Z(\boldsymbol{s}_1), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n))^\top \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right)$$

$\boldsymbol{\theta} = (\tau^2, \sigma^2, \phi)$, $dim(\boldsymbol{\theta}) << n$.

Máxima Verosimilitud

Suponga que la variable Z ha sido observada en n sitios, tal que

$$\boldsymbol{Z} = (Z(\boldsymbol{s}_1), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n))^\top \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right)$$

$\boldsymbol{\theta} = (\tau^2, \sigma^2, \phi)$, $dim(\boldsymbol{\theta}) << n$.

$$l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})| - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu}\right)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu}\right)$$

Máxima Verosimilitud

Suponga que la variable Z ha sido observada en n sitios, tal que

$$\boldsymbol{Z} = \left(Z(\boldsymbol{s}_1), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)\right)^\top \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right)$$

$\boldsymbol{\theta} = (\tau^2, \sigma^2, \phi)$, $\;dim(\boldsymbol{\theta}) << n$.

$$l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu})$$

Lamentablemente $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ y $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ en la mayoria de los casos no tiene forma cerrada y, por lo tanto, se obtienen resolviendo el sistema no lineal:

$$\nabla l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$

mediante algoritmos numéricos como Newton-Raphson.

Máxima Verosimilitud

Para el caso media lineal, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$, donde $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s})$:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} = \left(\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{ML})\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{ML})\boldsymbol{Z}$$

y

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

Esto significa que se debe realizar un proceso iterativo.

Máxima Verosimilitud Restringida

Definición: Sea $\boldsymbol{K}$ una matriz de dimensión $(n-k) \times n$ tal que

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{K}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s})] = \mathbf{0}.$$

El método de estimación REML consiste en estimar $\boldsymbol{\theta}$ maximizando la log-verosimilitud de $\boldsymbol{K}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s})$.

Máxima Verosimilitud Restringida

Definición: Sea $\boldsymbol{K}$ una matriz de dimensión $(n-k) \times n$ tal que

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{K}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s})] = \mathbf{0}.$$

El método de estimación REML consiste en estimar $\boldsymbol{\theta}$ maximizando la log-verosimilitud de $\boldsymbol{K}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s})$.

- En la literatura la matriz $\boldsymbol{K}$ es denominada matriz de contraste de errores.
- Notar que $\mathbb{V}[\boldsymbol{K}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s})] = \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{K}^\top$.
- La matriz $\boldsymbol{K}$ no es única.
- Afortunadamente, esto no importa para la estimación de parámetros ni inferencia Harville (1974).

Máxima Verosimilitud Restringida

Note que

$$l(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n-k}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left|\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{K}^\top\right| - \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{K}^\top\left(\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{K}^\top\right)^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Z}$$

Claramente no aparece $\boldsymbol{\beta}$ en la log-verosimilitud de $\boldsymbol{K}\boldsymbol{Z}$. Una vez obtenido $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{REML}$, se tiene que

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{REML} = \left(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{REML})\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{REML})\boldsymbol{Z}$$

Máxima Verosimilitud Restringida

Resultado: Si $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ es definida positiva, entonces

$$\boldsymbol{K}^\top \left(\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{K}^\top\right)^{-1}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$$

donde

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{X}\right)^{-1}$$

Es decir, no depende de la matriz $\boldsymbol{K}$.

Máxima Verosimilitud Restringida

Ejemplo de matrices de contraste de errores en procesos espaciales ver Harville (1974, 1977).

1. $\boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{K} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}^\top$
2. $\boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$.

Observación: La estimación REML es usada sólo en el caso que la función de media es una estructura lineal, en otro caso no es claro como construir la matriz $\boldsymbol{K}$.

Mínimos Cuadrados

Considere:

$$\begin{array}{rl} \widehat{\gamma}(\cdot) & \text{El variograma empirico} \\ \gamma(\cdot, \boldsymbol{\theta}) & \text{El variograma teórico} \end{array}$$

Suponga que

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta}) + e(\boldsymbol{h})$$

Los mínimos cuadrados no lineales consisten en minimizar:

Mínimos Cuadrados

Considere:

$$\begin{array}{rl} \widehat{\gamma}(\cdot) & \text{El variograma empirico} \\ \gamma(\cdot, \boldsymbol{\theta}) & \text{El variograma teórico} \end{array}$$

Suponga que

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta}) + e(\boldsymbol{h})$$

Los mínimos cuadrados no lineales consisten en minimizar:

- Caso $\mathbb{V}[e(\boldsymbol{h})] \propto \boldsymbol{I}$: (OLS)

$$\sum_{i=1}^{K} \left(\widehat{\gamma}(h_i) - \gamma(h_i, \boldsymbol{\theta})\right)^2 \quad \equiv \quad \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)^\top \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)$$

Mínimos Cuadrados

Considere:

$$\begin{array}{rl} \widehat{\gamma}(\cdot) & \text{El variograma empirico} \\ \gamma(\cdot, \boldsymbol{\theta}) & \text{El variograma teórico} \end{array}$$

Suponga que

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta}) + e(\boldsymbol{h})$$

Los mínimos cuadrados no lineales consisten en minimizar:

- Caso $\mathbb{V}[e(\boldsymbol{h})] \propto \boldsymbol{I}$: (OLS)

$$\sum_{i=1}^{K} \left(\widehat{\gamma}(h_i) - \gamma(h_i, \boldsymbol{\theta})\right)^2 \quad \equiv \quad \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)^\top \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)$$

- Caso $\mathbb{V}[e(\boldsymbol{h})] = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$: (GLS)

$$\left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)^\top \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)$$

Mínimos Cuadrados

- Caso $\mathbb{V}[e(\boldsymbol{h})] = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\theta})$ una matriz diagonal: (WLS)

$$\left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)^{\top} \boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)$$

En este caso,

$$\left(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\theta})\right)_{ii} \approx \frac{2\gamma(\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{\theta})^2}{|N(\boldsymbol{h}_i)|}$$

Por lo tanto, hay que minimizar

$$\left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)^{\top} \boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{|N(\boldsymbol{h}_i)|}{2\gamma(\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{\theta})^2} \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}_i) - \gamma(\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{\theta})\right)^2$$

Mínimos Cuadrados

- Caso $\mathbb{V}[e(\boldsymbol{h})] = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\theta})$ una matriz diagonal: (WLS)

$$\left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)^\top \boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)$$

En este caso,

$$(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\theta}))_{ii} \approx \frac{2\gamma(\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{\theta})^2}{|N(\boldsymbol{h}_i)|}$$

Por lo tanto, hay que minimizar

$$\left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right)^\top \boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta})\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{|N(\boldsymbol{h}_i)|}{2\gamma(\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{\theta})^2} \left(\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}_i) - \gamma(\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{\theta})\right)^2$$

Obs.: Stain (2012) sugiere que no es adecuado tratar de ajustar el modelo teórico al variograma empírico.

Criterios de Elección de Modelos

Webster & Mc Bratney (1989) expendieron las ideas de Akaike (1974) para modelos espaciales:

$$
\begin{aligned}
AIC(\boldsymbol{\theta}) &= cte + k\ln\left(RSS(\boldsymbol{\theta})\right) + 2param \quad (NLS)\\
AIC(\boldsymbol{\theta}) &= l_R(\theta) + 2param \quad (REML)
\end{aligned}
$$

donde,

- $RSS(\theta)$ es la suma de cuadrados residuales.
- $l_R(\theta)$ es la log-verosimilitud restringida.

Criterios de Elección de Modelos

Webster & Mc Bratney (1989) expendieron las ideas de Akaike (1974) para modelos espaciales:

$$
\begin{aligned}
AIC(\boldsymbol{\theta}) &= cte + k\ln\left(RSS(\boldsymbol{\theta})\right) + 2param \quad (NLS) \\
AIC(\boldsymbol{\theta}) &= l_R(\theta) + 2param \quad (REML)
\end{aligned}
$$

donde,

- $RSS(\theta)$ es la suma de cuadrados residuales.
- $l_R(\theta)$ es la log-verosimilitud restringida.

El valor de la constante no es relevante dado que se debe escoger el modelo con menor AIC

Nociones de Anisotropía

Asumir Isotropía conlleva a suponer que la dependencia espacial es igual en todas las direcciones, pero esto no tiene porque ser así.

Asumir Isotropía conlleva a suponer que la dependencia espacial es igual en todas las direcciones, pero esto no tiene porque ser así.

Definición: Para una dirección $\vec{\boldsymbol{e}} \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|\vec{\boldsymbol{e}}\| = 1$, el variograma de un cmapo aleatorio intrinsicamente estacionario en la dirección $\vec{\boldsymbol{e}}$ se define como:

$$2\gamma_{\vec{\boldsymbol{e}}}(h) = \mathbb{V}\left[X(\boldsymbol{s} + h\vec{\boldsymbol{e}}) - X(\boldsymbol{s})\right], \qquad h \in \mathbb{R}$$

Nociones de Anisotropía

Asumir Isotropía conlleva a suponer que la dependencia espacial es igual en todas las direcciones, pero esto no tiene porque ser así.

Definición: Para una dirección $\vec{\boldsymbol{e}} \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|\vec{\boldsymbol{e}}\| = 1$, el variograma de un cmapo aleatorio intrinsicamente estacionario en la dirección $\vec{\boldsymbol{e}}$ se define como:

$$2\gamma_{\vec{\boldsymbol{e}}}(h) = \mathbb{V}\left[X(\boldsymbol{s} + h\vec{\boldsymbol{e}}) - X(\boldsymbol{s})\right], \qquad h \in \mathbb{R}$$

Definición: Diremos que el proceso (el variograma) es Anisotrópico si existen al menos dos direcciones en las cuales los variogramas direcionales son diferentes.

Nociones de Anisotropía

Distinguiremos entre dos tipos de Anisotropía:

Nociones de Anisotropía

Distinguiremos entre dos tipos de Anisotropía:

- **Anisotropía Geométrica**: Corresponde a una deformación lineal de un modelo Isotrópico.

Nociones de Anisotropía

Distinguiremos entre dos tipos de Anisotropía:

- **Anisotropía Geométrica**: Corresponde a una deformación lineal de un modelo Isotrópico.
- **Anisotropía Zonal o Estratificada**: Corresponde a un variograma anidado sobre varios subespacios de $\mathbb{R}^d$

Anisotropía Geométrica

El variograma $2\gamma(\cdot)$ exhibe anisotropía geométrica si resulta ser la deformación lineal de un variograma isotrópico $2\gamma_0(\cdot)$

$$\gamma(\boldsymbol{h}) = \gamma_0(\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(\boldsymbol{h}) = \gamma_0(\sqrt{\boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}})$$

Anisotropía Geométrica

El variograma $2\gamma(\cdot)$ exhibe anisotropía geométrica si resulta ser la deformación lineal de un variograma isotrópico $2\gamma_0(\cdot)$

$$\gamma(\boldsymbol{h}) = \gamma_0(\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(\boldsymbol{h}) = \gamma_0(\sqrt{\boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}})$$

Obs: Este tipo de variograma tiene la misma meseta (Sill) en todas la direcciones, pero con rangos (o rangos prácticos) que varian de acuerdo a la dirección.

Anisotropía Geométrica

El variograma $2\gamma(\cdot)$ exhibe anisotropía geométrica si resulta ser la deformación lineal de un variograma isotrópico $2\gamma_0(\cdot)$

$$\gamma(\boldsymbol{h}) = \gamma_0(\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(\boldsymbol{h}) = \gamma_0(\sqrt{\boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}})$$

Obs: Este tipo de variograma tiene la misma meseta (Sill) en todas la direcciones, pero con rangos (o rangos prácticos) que varian de acuerdo a la dirección.

Caso Particular para $d = 2$: Si $\boldsymbol{A}$ es una rotación en un angulo φ alrededor del origen seguida de una dilatación por un factor $0 \leq e \leq 1$ con respecto al eje Y, entonces el conjunto de los rangos forma una elipse con excentricidad e en una nueva base.

Anisotropía Geométrica

- En la práctica se estiman los variogramas en 4 direcciones principales (0^o, 45^o, 90^o y 135^o)

Anisotropía Geométrica

- En la práctica se estiman los variogramas en 4 direcciones principales (0^o, 45^o, 90^o y 135^o)

- Se determinan los rangos para cada dirección.

Anisotropía Geométrica

- En la práctica se estiman los variogramas en 4 direcciones principales (0^o, 45^o, 90^o y 135^o)
- Se determinan los rangos para cada dirección.
- Luego se construye el gráfico direccional de los rangos para decidir si hay anisotropía geométrica presente o no.

Anisotropía Estratificada

Se dice que un variograma posee anisotropía zonal si después de un cambio de coordenadas el variograma depende sólo de ciertas coordenadas de $\boldsymbol{h}$.

Anisotropía Estratificada

Se dice que un variograma posee anisotropía zonal si después de un cambio de coordenadas el variograma depende sólo de ciertas coordenadas de $\boldsymbol{h}$.

Por ejemplo, si $\mathbb{R}^d = E_1 \oplus E_2$, donde $dim(E_i) = d_i$, $i = 1, 2$ y $d_1 + d_2 = d$. Sea $2\gamma_0$ un variograma isotrópico sore $\mathbb{R}^d$. Si

$$\gamma(\boldsymbol{h}) = \gamma_0(\boldsymbol{h}_1), \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2, \quad \boldsymbol{h}_i \in E_i, i = 1, 2.$$

Entonces 2γ es una variograma estratificado.

Además el Sill de γ será dependiente de la dirrección.

Anisotropía Estratificada

Se dice que un variograma posee anisotropía zonal si después de un cambio de coordenadas el variograma depende sólo de ciertas coordenadas de $\boldsymbol{h}$.

Por ejemplo, si $\mathbb{R}^d = E_1 \oplus E_2$, donde $dim(E_i) = d_i$, $i = 1, 2$ y $d_1 + d_2 = d$.
Sea $2\gamma_0$ un variograma isotrópico sore $\mathbb{R}^d$. Si

$$\gamma(\boldsymbol{h}) = \gamma_0(\boldsymbol{h}_1), \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2, \quad \boldsymbol{h}_i \in E_i, i = 1, 2.$$

Entonces 2γ es una variograma estratificado.

Además el Sill de γ será dependiente de la dirrección.

Chiles & Defines (2009) proponen considerar modelos separados:

$$\begin{aligned}
\gamma(\boldsymbol{h}) &= \gamma_0(h_1) + \gamma_1(h_2) \quad \text{en} \;\; \mathbb{R}^2 \\
\gamma(\boldsymbol{h}) &= \gamma_1(h_1, h_2) + \gamma_2(h_3) \quad \text{en} \;\; \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Bibliografia

Banerjee S., Carlin B., and Gelfand A. (2015) *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*, Boca Raton: Chapman Hall/CRC.

Cressie, N. (1993) *Statistics for Spatial Data*. New York: Wiley.

Matheron, G., (1965) Les variables régionalisés et leur estimation. Masson, Paris.

Shabenberger, O., Gotway, C. A. (2005) *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

Rousseeuw, P. J., Croux, C., (1993). Alternatives of the median absolute deviation. *Journal of American Statistics Association*, **88**, 1273–1283.

¿Alguna Consulta?