EPG3343 - Seminario de Estadística III

Clase 6

Jonathan Acosta

Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre, 2022

Esquema

1. Kriging no Lineales
   - Kriging Lognormal
   - Trans-Gaussian Kriging
   - Kriging Indicador

2. Cambio de Soporte
   - Kriging por Bloques

Esquema

Kriging Lognormal

Suponga que $Z(\boldsymbol{s})$ es un campo aleatorio tal que

$$Y(\boldsymbol{s}) = \ln\big(Z(\boldsymbol{s})\big) \quad \text{es normal}, \;\; \forall\ \boldsymbol{s} \in D$$

Consecuentemente, $Z(\boldsymbol{s}) = \exp\{Y(\boldsymbol{s})\} > 0$, $\forall\ \boldsymbol{s} \in D$.

Kriging Lognormal

Suponga que $Z(\boldsymbol{s})$ es un campo aleatorio tal que

$$Y(\boldsymbol{s}) = \ln\big(Z(\boldsymbol{s})\big) \quad \text{es normal}, \;\; \forall\ \boldsymbol{s} \in D$$

Consecuentemente, $Z(\boldsymbol{s}) = \exp\{Y(\boldsymbol{s})\} > 0$, $\forall\ \boldsymbol{s} \in D$.

Asuma que $Y(\boldsymbol{s})$ tiene función de media $\mu_Y(\boldsymbol{s})$ y función de covarianza $C_Y(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)$, entonces (Aitchison & Brown, 1957)

$$\begin{aligned} \mu_Z(\boldsymbol{s}) &= \exp\left\{\mu_Y(\boldsymbol{s}) + \frac{1}{2}C_Y(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})\right\} \\ C_Z(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) &= \mu_Z(\boldsymbol{s}_1)\mu_Z(\boldsymbol{s}_2)\left[\exp\left\{C_Y(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)\right\} - 1\right] \end{aligned}$$

Obs: $\mu_Z(\boldsymbol{s}) \geq \exp\{\mu_Y(\boldsymbol{s})\}$.

Kriging Lognormal

Más aún, si $P^0(Y, \boldsymbol{s}_0)$ es el mejor predictor lineal de $Y(\boldsymbol{s}_0)$ entonces

$$\exp\{P^0(Y, \boldsymbol{s}_0)\}$$

es un predictor sesgado de $Z(\boldsymbol{s}_0)$.

Kriging Lognormal

Más aún, si $P^0(Y, \boldsymbol{s}_0)$ es el mejor predictor lineal de $Y(\boldsymbol{s}_0)$ entonces

$$\exp\{P^0(Y, \boldsymbol{s}_0)\}$$

es un predictor sesgado de $Z(\boldsymbol{s}_0)$.

Objetivo: Predecir insesgadamente $Z(\boldsymbol{s}_0)$ usando la información contenida en $\boldsymbol{Y} = (Y(\boldsymbol{s}_1), \ldots, \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s}_n))^\top$

Resultado: Según la notación anterior

$$\mathbb{E}\left[\exp\{P^0(Y, \boldsymbol{s}_0)\}\right] = \mu_Z \exp\left\{-\frac{\sigma_Y^2}{2} + \frac{\mathbb{V}[P^0(Y, \boldsymbol{s}_0)]}{2}\right\}$$

donde $\mu_Z = \exp\left\{\mathbb{E}\left[P^0(Y, \boldsymbol{s}_0)\right] - \frac{\mathbb{V}[P^0(Y, \boldsymbol{s}_0)]}{2}\right\}.$

Resultado: Según la notación anterior

$$\mathbb{E}\left[\exp\{P^0(Y,\boldsymbol{s}_0)\}\right] = \mu_Z \exp\left\{-\frac{\sigma_Y^2}{2} + \frac{\mathbb{V}[P^0(Y,\boldsymbol{s}_0)]}{2}\right\}$$

donde $\mu_Z = \exp\left\{\mathbb{E}\left[P^0(Y,\boldsymbol{s}_0)\right] - \dfrac{\mathbb{V}[P^0(Y,\boldsymbol{s}_0)]}{2}\right\}.$

Por lo tanto,

$$P_{LK}(Z,\boldsymbol{s}_0) = \exp\left\{P^0(Y,\boldsymbol{s}_0) + \frac{\sigma_Y^2}{2} - \frac{\mathbb{V}[P^0(Y,\boldsymbol{s}_0)]}{2}\right\}$$

Kriging Lognormal

- **Kriging Simple**: Si $\mu(\boldsymbol{s})$ es conocido

$$
\begin{aligned}
P_{SLK}(Z, \boldsymbol{s}_0) &= \exp\left\{P_{SK}(Y, \boldsymbol{s}_0) - \frac{\sigma^2_{SK}(\boldsymbol{s}_0)}{2}\right\} \\
\sigma^2_{SLK}(\boldsymbol{s}_0) &= P_{SLK}(Z, \boldsymbol{s}_0)^2 \left[\exp\{\sigma^2_{SK}(\boldsymbol{s}_0)\} - 1\right]
\end{aligned}
$$

Kriging Lognormal

- **Kriging Simple**: Si $\mu(\boldsymbol{s})$ es conocido

$$\begin{aligned} P_{SLK}(Z, \boldsymbol{s}_0) &= \exp\left\{P_{SK}(Y, \boldsymbol{s}_0) - \frac{\sigma^2_{SK}(\boldsymbol{s}_0)}{2}\right\} \\ \sigma^2_{SLK}(\boldsymbol{s}_0) &= P_{SLK}(Z, \boldsymbol{s}_0)^2 \left[\exp\{\sigma^2_{SK}(\boldsymbol{s}_0)\} - 1\right] \end{aligned}$$

- **Kriging Ordinario**: Si $\mu(\boldsymbol{s}) = \mu$, μ constante desconocida

$$\begin{aligned} P_{OLK}(Z, \boldsymbol{s}_0) &= \exp\left\{P_{OK}(Y, \boldsymbol{s}_0) - \frac{\sigma^2_{SK}(\boldsymbol{s}_0)}{2} - m_y\right\} \\ \sigma^2_{OLK}(\boldsymbol{s}_0) &= \exp\{2\mu_Y + \sigma^2_Y\}\exp\{\sigma^2_Y\} * \\ &\quad \left[1 + \left(\exp\{-\sigma^2_{OK}(\boldsymbol{s}_0) + m_y\}\exp\{m_y - 2\}\right)\right] \end{aligned}$$

donde m_y es el multiplicador de Lagrange obtenido usando Kriging ordinario para predecir $Y(\boldsymbol{s}_0)$.

Trans-Gaussian Kriging

El problema general de transformar un predictor a través de una función no lineal (de un campo Gaussiano) se denomina Trans-Gaussian Kriging.

Trans-Gaussian Kriging

El problema general de transformar un predictor a través de una función no lineal (de un campo Gaussiano) se denomina Trans-Gaussian Kriging.

Asuma que $Z(\boldsymbol{s}) = \varphi(Y(\boldsymbol{s}))$, donde

- $Y(\boldsymbol{s})$ es normal.
- $Y(\boldsymbol{s})$ es int. estacionario con media μ_y y semivariograma $\gamma_y(\boldsymbol{h})$.

Suponga que μ_y es desconocido y que se utiliza $P_{OK}(Y, \boldsymbol{s}_0)$ como el predictor de $Y(\boldsymbol{s}_0)$

Trans-Gaussian Kriging

Obs: En este contexto, el predictor natural de $Z(\boldsymbol{s}_0)$ es

$$P(Z, \boldsymbol{s}_0) = \varphi\left(P_{OK}(Y, \boldsymbol{s}_0)\right)$$

el cual podría ser sesgado, tal como el caso del lognormal kriging.

Trans-Gaussian Kriging

Obs: En este contexto, el predictor natural de $Z(\boldsymbol{s}_0)$ es

$$P(Z, \boldsymbol{s}_0) = \varphi\left(P_{OK}(Y, \boldsymbol{s}_0)\right)$$

el cual podría ser sesgado, tal como el caso del lognormal kriging.

Para rersulver el problema del sesgo, considere las expansiones en serie de Taylor de la función $\varphi(\cdot)$ evaluada en

$$Y_0 = Y(\boldsymbol{s}_0) \qquad \wedge \qquad \widehat{Y}_0 = P_{OK}(Y, \boldsymbol{s}_0)$$

entorno a μ_y.

Trans-Gaussian Kriging

$$\varphi(\widehat{Y}_0) = \varphi(\mu_y) + \varphi'(\mu_y)\left(\widehat{Y}_0 - \mu_y\right) + \frac{\varphi''(\mu_y)}{2}\left(\widehat{Y}_0 - \mu_y\right)^2 \tag{1}$$

$$\varphi(Y_0) = \varphi(\mu_y) + \varphi'(\mu_y)\left(Y_0 - \mu_y\right) + \frac{\varphi''(\mu_y)}{2}\left(Y_0 - \mu_y\right)^2 \tag{2}$$

Aplicando esperanza en (1) y (2) se obtiene

$$\mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{Y}_0)\right] = \varphi(\mu_y) + \frac{\varphi''(\mu_y)}{2}\mathbb{E}\left[\left(\widehat{Y}_0 - \mu_y\right)^2\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Y_0)\right] = \varphi(\mu_y) + \frac{\varphi''(\mu_y)}{2}\mathbb{E}\left[\left(Y_0 - \mu_y\right)^2\right]$$

Trans-Gaussian Kriging

Condición Insesgado: $\mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{Y}_0)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(Y_0)\right]$. Obteniendo:

$$P_{tg}(Z, \boldsymbol{s}_0) = \varphi\left(P_{OK}(Y, \boldsymbol{s}_0)\right) + \frac{\varphi''(\mu_y)}{2}\left(\sigma^2_{OK}(\boldsymbol{s}_0) - m_y\right)$$

siendo m_y el multiplicador de lagrange del kriging ordinario.

Trans-Gaussian Kriging

Condición Insesgado: $\mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{Y}_0)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(Y_0)\right]$. Obteniendo:

$$P_{tg}(Z, \boldsymbol{s}_0) = \varphi\left(P_{OK}(Y, \boldsymbol{s}_0)\right) + \frac{\varphi''(\mu_y)}{2}\left(\sigma^2_{OK}(\boldsymbol{s}_0) - m_y\right)$$

siendo m_y el multiplicador de lagrange del kriging ordinario.

Más aún,

$$\mathbb{E}\left[\left(P_{tg}(Z, \boldsymbol{s}_0) - Z(\boldsymbol{s}_0)\right)^2\right] = \left[\varphi'(\mu_y)\right]^2 \sigma^2_{OK}(\boldsymbol{s}_0)$$

Obs: Existen algunas transformaciones que pueden ser usadas para obtener normalidad:

Trans-Gaussian Kriging

Obs: Existen algunas transformaciones que pueden ser usadas para obtener normalidad:

- Si $X \sim Poiss(\theta)$, entonces $\varphi(X) = \sqrt{X}$

Trans-Gaussian Kriging

Obs: Existen algunas transformaciones que pueden ser usadas para obtener normalidad:

- Si $X \sim Poiss(\theta)$, entonces $\varphi(X) = \sqrt{X}$
- Si $X \sim Bin(n, p)$, entonces $\varphi(X) = \arcsin(X)$

Obs: Existen algunas transformaciones que pueden ser usadas para obtener normalidad:

- Si $X \sim Poiss(\theta)$, entonces $\varphi(X) = \sqrt{X}$
- Si $X \sim Bin(n, p)$, entonces $\varphi(X) = \arcsin(X)$

Si lo que se busca es simetrizar X, entonces

$$\varphi_\lambda(X) = \begin{cases} \dfrac{X^\lambda - 1}{\lambda} & \text{si} \quad \lambda \neq 0 \\ \ln(X) & \text{si} \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

Trans-Gaussian Kriging

Deutsch & Jourbel (1992) propuso una forma empirica de obtener φ.

Trans-Gaussian Kriging

Deutsch & Jourbel (1992) propuso una forma empirica de obtener φ.

Sean

$\Phi(y)$ la función de distribución de una $\mathcal{N}(0,1)$.

$F(z)$ la función de distribución empirica de los datos.

Y sean y_p y z_p los cuartiles de orden p de $\Phi(y)$ y $F(z)$ respectivamente, entonces

$$F(z_p) = \Phi(y_p)$$

Obteniendo

$$\begin{aligned} y_p = \Phi^{-1}\left(F(z_p)\right) = \varphi^{-1}(z_p) : &\qquad \text{Normal Scores Transformation.} \\ z_p = F^{-1}\left(\Phi(y_p)\right) = \varphi(y_p) : &\qquad \text{Anamorphosis Transformation.} \end{aligned}$$

Kriging Indicador

Suponga que $\{Z(\boldsymbol{s}): \ \boldsymbol{s} \in D \subset R^d\}$ es un proceso estrictamente estacionario y considere la transformación:

$$I(\boldsymbol{s}, a) = \mathbb{I}_A(\boldsymbol{s}) \quad \text{donde} \quad A = \{\boldsymbol{s}: \ Z(\boldsymbol{s}) \leq a\}$$

Kriging Indicador

Suponga que $\{Z(\boldsymbol{s}): \ \boldsymbol{s} \in D \subset R^d\}$ es un proceso estrictamente estacionario y considere la transformación:

$$I(\boldsymbol{s}, a) = \mathbb{I}_A(\boldsymbol{s}) \quad \text{donde} \quad A = \{\boldsymbol{s}: \ Z(\boldsymbol{s}) \leq a\}$$

Obs: Bajo esta tranformación no es aplicable trans-gaussian kriging, ya que $I(\boldsymbol{s}, a)$ transforma $Z(\boldsymbol{s})$ en un proceso binario donde el umbral a es conocido.

Kriging Indicador

Suponga que $\{Z(\boldsymbol{s}): \ \boldsymbol{s} \in D \subset R^d\}$ es un proceso estrictamente estacionario y considere la transformación:

$$I(\boldsymbol{s}, a) = \mathbb{I}_A(\boldsymbol{s}) \quad \text{donde} \quad A = \{\boldsymbol{s}: \ Z(\boldsymbol{s}) \leq a\}$$

Obs: Bajo esta tranformación no es aplicable trans-gaussian kriging, ya que $I(\boldsymbol{s}, a)$ transforma $Z(\boldsymbol{s})$ en un proceso binario donde el umbral a es conocido.

Como

$$\mathbb{E}[I(\boldsymbol{s}_0, a)] = \mathbb{P}[Z(\boldsymbol{s}_0) \leq a] = F(a)$$

es desconocido, es posible usar kriging ordinario para predecir $I(\boldsymbol{s}_0, a)$ a partir de los datos

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{s}, a) = (I(\boldsymbol{s}_1, a), I(\boldsymbol{s}_2, a), \ldots, I(\boldsymbol{s}_n, a))^\top$$

Kriging Indicador

Luego,

$$P_{IK}[I(a), \boldsymbol{s}_0] = \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{I}(\boldsymbol{s}, a)$$

donde el vector $\boldsymbol{\lambda}$ es obtenido de las ecuaciones de Kriging ordinario usando el variograma

$$2\gamma_I(\boldsymbol{h}) = \mathbb{V}\left[I(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}, a) - I(\boldsymbol{s}, a)\right] = \mathbb{P}[Z(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) \leq a, Z(\boldsymbol{s}) \leq a]$$

Luego,

$$P_{IK}[I(a), \boldsymbol{s}_0] = \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{I}(\boldsymbol{s}, a)$$

donde el vector $\boldsymbol{\lambda}$ es obtenido de las ecuaciones de Kriging ordinario usando el variograma

$$2\gamma_I(\boldsymbol{h}) = \mathbb{V}\left[I(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}, a) - I(\boldsymbol{s}, a)\right] = \mathbb{P}[Z(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) \leq a, Z(\boldsymbol{s}) \leq a]$$

Obs: Note que el Kriging Indicador provee información acerca de

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[I(\boldsymbol{s}_0)|I(\boldsymbol{s}, a)\right] &= \mathbb{P}[Z(\boldsymbol{s}_0) \leq a|I(\boldsymbol{s}, a)] \\ &\neq \mathbb{P}[Z(\boldsymbol{s}_0) \leq a|\boldsymbol{Z}] \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay pérdida de información al transformar $Z(\boldsymbol{s})$ en $I(\boldsymbol{s}, a)$.

Kriging Indicador

Obs: En muchas aplicaciones, como análisis de riesgos, es de interes

$$\mathbb{P}[Z(\boldsymbol{s}_0) \geq a | \boldsymbol{Z}]$$

la cual puede ser estimada usando kriging indicador ya que

$$I^c(\boldsymbol{s}, a) = 1 - I(\boldsymbol{s}, a)$$

Esquema

Kriging por Bloques

Objetivo: Suponga que $B \subset D$ es una región en D y queremos predecir un solo valor (valor promedio) para dicha región. Es decir,

$$Z(B) = \frac{1}{|B|} \int_B Z(\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{s}$$

Utilizando las ideas de kriging ordinario, se considera el predictor

$$P(Z, B) = \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{Z}$$

Kriging por Bloques

Objetivo: Suponga que $B \subset D$ es una región en D y queremos predecir un solo valor (valor promedio) para dicha región. Es decir,

$$Z(B) = \frac{1}{|B|} \int_B Z(\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{s}$$

Utilizando las ideas de kriging ordinario, se considera el predictor

$$P(Z, B) = \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{Z}$$

Obs: Este problema es conocido como cambio de soporte.

Kriging por Bloques

Asumiendo que $\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s})] = \mathbb{E}[Z(B)] = \mu$ (**condición de Insesgado**)

Kriging por Bloques

Asumiendo que $\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s})] = \mathbb{E}[Z(B)] = \mu \quad$ (**condición de Insesgado**)

Los pesos optimos se obtienen minimizando el ECMP, sugeto a $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\lambda} = 1$.

Kriging por Bloques

Asumiendo que $\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s})] = \mathbb{E}[Z(B)] = \mu$ (**condición de Insesgado**)

Los pesos optimos se obtienen minimizando el ECMP, sugeto a $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\lambda} = 1$.

Es decir, resolver el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\Sigma} - m = \boldsymbol{C}(B) \\ \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\lambda} = 1 \end{cases}$$

Kriging por Bloques

Asumiendo que $\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s})] = \mathbb{E}[Z(B)] = \mu$ (**condición de Insesgado**)

Los pesos optimos se obtienen minimizando el ECMP, sugeto a $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\lambda} = 1$.

Es decir, resolver el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\Sigma} - m = \boldsymbol{C}(B) \\ \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\lambda} = 1 \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}^\top = \left(\boldsymbol{C}(B) + \mathbf{1} \dfrac{1 - \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{C}(B)}{\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \right)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\ m = \dfrac{1 - \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{C}}{\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \end{cases}$$

Obs: $\boldsymbol{C}(B)$ representa la covarianza punto-bloque, la cual esta dada por

$$\boldsymbol{C}(B) = \mathrm{cov}(Z(B), Z(\boldsymbol{s})) = \frac{1}{|B|}\int_B C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{s})d\boldsymbol{u} \tag{3}$$

Obs: $\boldsymbol{C}(B)$ representa la covarianza punto-bloque, la cual esta dada por

$$\boldsymbol{C}(B) = \text{cov}(Z(B), Z(\boldsymbol{s})) = \frac{1}{|B|}\int_B C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{s})d\boldsymbol{u} \tag{3}$$

Adicionalmente, la varianza de predicción

$$\sigma^2(B) = \sigma^2(B, B) - \boldsymbol{C}^\top(B)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{C}(B) + \frac{\left(1 - \mathbf{1}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{C}(B)\right)^2}{\mathbf{1}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$$

donde

$$\sigma^2(B, B) = \text{cov}(Z(B), Z(B)) = \frac{1}{|B|^2}\int_B C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{v} \tag{4}$$

En la práctica las integrales (3) y (4) se estiman discretizando B en los puntos $\{\boldsymbol{u}_j\}$, $j = 1, \ldots, m$.

Kriging por Bloques

En la práctica las integrales (3) y (4) se estiman discretizando B en los puntos $\{\boldsymbol{u}_j\}$, $j = 1, \ldots, m$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}(B) \approx \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} C(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{s}) \\ \sigma^2(B, B) \approx \dfrac{1}{m^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_i) \end{cases}$$

Kriging por Bloques

En la práctica las integrales (3) y (4) se estiman discretizando B en los puntos $\{\boldsymbol{u}_j\}$, $j = 1, \ldots, m$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}(B) \approx \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} C(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{s}) \\ \sigma^2(B, B) \approx \dfrac{1}{m^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_i) \end{cases}$$

Obs: Las librerias (de R) que calculan este tipo de kriging son

- sp
- gstat
- block

Bibliografia

Banerjee S., Carlin B., and Gelfand A. (2015) *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*, Boca Raton: Chapman Hall/CRC.

Cressie, N. (1993) *Statistics for Spatial Data*. New York: Wiley.

Matheron, G., (1965) Les variables régionalisés et leur estimation. Masson, Paris.

Shabenberger, O., Gotway, C. A. (2005) *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

¿Alguna Consulta?