EPG3343 - Seminario de Estadística III
Clase 2

Jonathan Acosta

Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre, 2022

Esquema

Esquema

Introducción

Principio (Primera Ley de la geografía)

Cantidades cercanas (vecinas) tienden a ser más parecidas que las cantidades que están más apartadas

Tipos de Datos Espaciales:

1. Datos Geoestadísticos: El dominio es un conjunto continuo y fijo.
2. Datos sobre Grillas: El dominio es fijo y contable.
3. Patrones de Puntos: El dominio es aleatorio.

Nociones de Estadística Descriptiva

Suponga que tiene una variable atributo Z Georreferenciada. Dada una muestra de esta variable, $Z(\boldsymbol{s}_1), Z(\boldsymbol{s}_2), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)$, podemos resumir (describir) la información contenida en ella:

Suponga que tiene una variable atributo Z Georreferenciada. Dada una muestra de esta variable, $Z(\boldsymbol{s}_1), Z(\boldsymbol{s}_2), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)$, podemos resumir (describir) la información contenida en ella:

(i) Calculando medidas de Tendencia Central, Dispersión y Forma (Asimetría y Curtosis).

Nociones de Estadística Descriptiva

Suponga que tiene una variable atributo Z Georreferenciada. Dada una muestra de esta variable, $Z(\boldsymbol{s}_1), Z(\boldsymbol{s}_2), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)$, podemos resumir (describir) la información contenida en ella:

(i) Calculando medidas de Tendencia Central, Dispersión y Forma (Asimetría y Curtosis).

(ii) Construyendo del Histograma y Box-Plot de la variable atributo.

Nociones de Estadística Descriptiva

Suponga que tiene una variable atributo Z Georreferenciada. Dada una muestra de esta variable, $Z(\boldsymbol{s}_1), Z(\boldsymbol{s}_2), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)$, podemos resumir (describir) la información contenida en ella:

(i) Calculando medidas de Tendencia Central, Dispersión y Forma (Asimetría y Curtosis).

(ii) Construyendo del Histograma y Box-Plot de la variable atributo.

(iii) Graficar las coordenas.

Nociones de Estadística Descriptiva

Suponga que tiene una variable atributo Z Georreferenciada. Dada una muestra de esta variable, $Z(\boldsymbol{s}_1), Z(\boldsymbol{s}_2), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)$, podemos resumir (describir) la información contenida en ella:

(i) Calculando medidas de Tendencia Central, Dispersión y Forma (Asimetría y Curtosis).

(ii) Construyendo del Histograma y Box-Plot de la variable atributo.

(iii) Graficar las coordenas.

(iv) Graficar $Z(\boldsymbol{s})$ versus $\boldsymbol{s}$.

Nociones de Estadística Descriptiva

Suponga que tiene una variable atributo Z Georreferenciada. Dada una muestra de esta variable, $Z(\boldsymbol{s}_1), Z(\boldsymbol{s}_2), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)$, podemos resumir (describir) la información contenida en ella:

(i) Calculando medidas de Tendencia Central, Dispersión y Forma (Asimetría y Curtosis).

(ii) Construyendo del Histograma y Box-Plot de la variable atributo.

(iii) Graficar las coordenas.

(iv) Graficar $Z(\boldsymbol{s})$ versus $\boldsymbol{s}$.

(v) Detectar *outlier* y *datos influyentes*.

Suponga que tiene una variable atributo Z Georreferenciada. Dada una muestra de esta variable, $Z(\boldsymbol{s}_1), Z(\boldsymbol{s}_2), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)$, podemos resumir (describir) la información contenida en ella:

(i) Calculando medidas de Tendencia Central, Dispersión y Forma (Asimetría y Curtosis).

(ii) Construyendo del Histograma y Box-Plot de la variable atributo.

(iii) Graficar las coordenas.

(iv) Graficar $Z(\boldsymbol{s})$ versus $\boldsymbol{s}$.

(v) Detectar *outlier* y *datos influyentes*.

(vi) Obtener las curvas de nivel.

Nociones de Estadística Descriptiva

Suponga que tiene una variable atributo Z Georreferenciada. Dada una muestra de esta variable, $Z(\boldsymbol{s}_1), Z(\boldsymbol{s}_2), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)$, podemos resumir (describir) la información contenida en ella:

(i) Calculando medidas de Tendencia Central, Dispersión y Forma (Asimetría y Curtosis).

(ii) Construyendo del Histograma y Box-Plot de la variable atributo.

(iii) Graficar las coordenas.

(iv) Graficar $Z(\boldsymbol{s})$ versus $\boldsymbol{s}$.

(v) Detectar *outlier* y *datos influyentes*.

(vi) Obtener las curvas de nivel.

(vii) Detectar Cluster.

Nociones de Estadística Descriptiva

Mantel (1967) definio un índice para detectar clusters.

Nociones de Estadística Descriptiva

Mantel (1967) definio un índice para detectar clusters.

- Este índice está construido para datos espacio-temporales.
- Puede ser aplicable a datos espaciales.

Nociones de Estadística Descriptiva

Mantel (1967) definio un índice para detectar clusters.

- Este índice está construido para datos espacio-temporales.
- Puede ser aplicable a datos espaciales.

Sean $T(\boldsymbol{s}_1), T(\boldsymbol{s}_2), \ldots, T(\boldsymbol{s}_n)$ los tiempos en los cuales los eventos de interés ocurren. Considere :

$$W_{ij} = \|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j\|; \qquad U_{ij} = |T(\boldsymbol{s}_i) - T(\boldsymbol{s}_j)|$$

Nociones de Estadística Descriptiva

Mantel (1967) definio un índice para detectar clusters.

- Este índice está construido para datos espacio-temporales.
- Puede ser aplicable a datos espaciales.

Sean $T(\boldsymbol{s}_1), T(\boldsymbol{s}_2), \ldots, T(\boldsymbol{s}_n)$ los tiempos en los cuales los eventos de interés ocurren. Considere :

$$W_{ij} = \|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j\|; \qquad U_{ij} = |T(\boldsymbol{s}_i) - T(\boldsymbol{s}_j)|$$

Mantel sugirio los estadísticos:

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} W_{ij} U_{ij}; \qquad M_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} U_{ij}$$

Mantel (1967) definio un índice para detectar clusters.

- Este índice está construido para datos espacio-temporales.
- Puede ser aplicable a datos espaciales.

Sean $T(\boldsymbol{s}_1), T(\boldsymbol{s}_2), \ldots, T(\boldsymbol{s}_n)$ los tiempos en los cuales los eventos de interés ocurren. Considere :

$$W_{ij} = \|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j\|; \qquad U_{ij} = |T(\boldsymbol{s}_i) - T(\boldsymbol{s}_j)|$$

Mantel sugirio los estadísticos:

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} W_{ij} U_{ij}; \qquad M_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} U_{ij}$$

Obs: Para procesos Espaciales $U_{ij} = |Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)|$

Nociones de Estadística Descriptiva

La distribución asintótica de M_2 es aproximadamente normal, es decir,

$$\frac{M_2 - \mathbb{E}[M_2]}{\sqrt{\mathbb{V}[M_2]}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Luego, considere el test

$$\mathrm{H}_0: \ \ \operatorname{cov}\left[Z(\boldsymbol{s}_i), Z(\boldsymbol{s}_j)\right] = 0 \quad \forall i \neq j$$

$\therefore$ Se rechaza H_0 si

$$|Z_{obs}| = \left| \frac{M_{2(obs)} - \mathbb{E}[M_2]}{\sqrt{\mathbb{V}[M_2]}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Suponga que el atributo Z es binario y esta definido sobre una grilla, obteniendo

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si los sitios } i \text{ y } j \text{ están conectados} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$Z(\boldsymbol{s}_i) = \begin{cases} 1 & \text{Si el evento ocurre en el sitio } i. \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Supuesto: $\mathbb{P}[Z(\boldsymbol{s}_i) = 1] = p, \quad 0 \leq p \leq 1.$

Además, $\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s}_i)^k] = p$

Asumiendo que $Z(\boldsymbol{s}) = 1$ se colorea de color negro, mientras que $Z(\boldsymbol{s}) = 0$ se colorea de color blanco. Considere los estadísticos

$$BB = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}Z(\boldsymbol{s}_i)Z(\boldsymbol{s}_j); \quad BW = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\left(Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)\right)^2$$

Medidas sobre Lattice

Asumiendo que $Z(\boldsymbol{s}) = 1$ se colorea de color negro, mientras que $Z(\boldsymbol{s}) = 0$ se colorea de color blanco. Considere los estadísticos

$$BB = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}Z(\boldsymbol{s}_i)Z(\boldsymbol{s}_j); \quad BW = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\left(Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)\right)^2$$

Observaciones:

- BB es un caso particular del Estadístico de Mantel con $U_{ij} = Z(\boldsymbol{s}_i)Z(\boldsymbol{s}_j)$.
- La cantidad de puntos negros es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p.

Medidas sobre Lattice

Bajo H_0, se tiene que

$$\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s}_i)Z(\boldsymbol{s}_j)] = p^2; \quad \mathbb{V}[Z(\boldsymbol{s}_i)Z(\boldsymbol{s}_j)] = p^2 - p^4$$

Medidas sobre Lattice

Bajo H_0, se tiene que

$$\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s}_i)Z(\boldsymbol{s}_j)] = p^2; \quad \mathbb{V}[Z(\boldsymbol{s}_i)Z(\boldsymbol{s}_j)] = p^2 - p^4$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}[BB] = \frac{p^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}; \quad \mathbb{V}[BB] = \frac{1}{4}p^2(1-p)\big[(1-p)S_1 + pS_2\big]$$

donde,

$$S_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\omega_{ij}+\omega_{ji}\right)^2; \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\omega_{ji}\right]$$

Obs: Los calculos son similares para BW.

Estadísticos de Moran y Geary

Si Z es un atributo continuo tal que su media no varia espacialmente ($\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s})] = \mu$), existen varias formas de medir la cercania entre $Z(\boldsymbol{s}_i)$ y $Z(\boldsymbol{s}_j)$.

Estadísticos de Moran y Geary

Si Z es un atributo continuo tal que su media no varia espacialmente ($\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s})] = \mu$), existen varias formas de medir la cercania entre $Z(\boldsymbol{s}_i)$ y $Z(\boldsymbol{s}_j)$.

$$
\begin{aligned}
U_{ij}^{(1)} &= [Z(\boldsymbol{s}_i) - \mu]\,[Z(\boldsymbol{s}_j) - \mu] \\
U_{ij}^{(2)} &= |Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)| \\
U_{ij}^{(3)} &= \left[Z(\boldsymbol{s}_i) - \overline{Z}\right]\left[Z(\boldsymbol{s}_j) - \overline{Z}\right] \\
U_{ij}^{(4)} &= \left(Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)\right)^2
\end{aligned}
$$

Estadísticos de Moran y Geary

Si Z es un atributo continuo tal que su media no varia espacialmente ($\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s})] = \mu$), existen varias formas de medir la cercania entre $Z(\boldsymbol{s}_i)$ y $Z(\boldsymbol{s}_j)$.

$$
\begin{aligned}
U_{ij}^{(1)} &= [Z(\boldsymbol{s}_i) - \mu]\,[Z(\boldsymbol{s}_j) - \mu] \\
U_{ij}^{(2)} &= |Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)| \\
U_{ij}^{(3)} &= \left[Z(\boldsymbol{s}_i) - \overline{Z}\right]\left[Z(\boldsymbol{s}_j) - \overline{Z}\right] \\
U_{ij}^{(4)} &= (Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j))^2
\end{aligned}
$$

- $U_{ij}^{(1)}$ se descarta porque en la practica μ es desconocido.

Estadísticos de Moran y Geary

Si Z es un atributo continuo tal que su media no varia espacialmente ($\mathbb{E}[Z(\boldsymbol{s})] = \mu$), existen varias formas de medir la cercania entre $Z(\boldsymbol{s}_i)$ y $Z(\boldsymbol{s}_j)$.

$$\begin{aligned}
U_{ij}^{(1)} &= [Z(\boldsymbol{s}_i) - \mu]\,[Z(\boldsymbol{s}_j) - \mu] \\
U_{ij}^{(2)} &= |Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)| \\
U_{ij}^{(3)} &= \left[Z(\boldsymbol{s}_i) - \overline{Z}\right]\left[Z(\boldsymbol{s}_j) - \overline{Z}\right] \\
U_{ij}^{(4)} &= (Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j))^2
\end{aligned}$$

- $U_{ij}^{(1)}$ se descarta porque en la practica μ es desconocido.
- $U_{ij}^{(2)}$ se descarta por ser matematicamente intratable.

Estadísticos de Moran y Geary

Si se escoge $U_{ij}^{(3)}$, este se podría estandarizar por la varianza muestral, de modo que el estadístico:

$$\frac{(n-1)\left[Z(\boldsymbol{s}_i)-\overline{Z}\right]\left[Z(\boldsymbol{s}_j)-\overline{Z}\right]}{\sum_{i=1}^{n}\left[Z(\boldsymbol{s}_i)-\overline{Z}\right]^2}$$

es un estimador de la correlación entre $Z(\boldsymbol{s}_i)$ y $Z(\boldsymbol{s}_j)$.

Si se escoge $U_{ij}^{(3)}$, este se podría estandarizar por la varianza muestral, de modo que el estadístico:

$$\frac{(n-1)\left[Z(\boldsymbol{s}_i)-\overline{Z}\right]\left[Z(\boldsymbol{s}_j)-\overline{Z}\right]}{\sum_{i=1}^{n}\left[Z(\boldsymbol{s}_i)-\overline{Z}\right]^2}$$

es un estimador de la correlación entre $Z(\boldsymbol{s}_i)$ y $Z(\boldsymbol{s}_j)$.

Inconvenientes:

1. No usa los pesos ω_{ij}.
2. Propiedades estadísticas Pobres.

Estadísticos de Moran y Geary

Moran (1950) define utilizando $U_{ij}^{(3)}$ y los pesos ω_{ij}

$$I = \frac{n}{(n-1)S^2\omega_{..}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\left[Z(\boldsymbol{s}_i) - \overline{Z}\right]\left[Z(\boldsymbol{s}_j) - \overline{Z}\right]$$

donde $\omega_{..} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}$ y $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[Z(\boldsymbol{s}_i) - \overline{Z}\right]^2$

Moran (1950) define utilizando $U_{ij}^{(3)}$ y los pesos ω_{ij}

$$I = \frac{n}{(n-1)S^2\omega_{..}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \left[Z(\boldsymbol{s}_i) - \overline{Z}\right] \left[Z(\boldsymbol{s}_j) - \overline{Z}\right]$$

donde $\omega_{..} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}$ y $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left[Z(\boldsymbol{s}_i) - \overline{Z}\right]^2$

Similarmente, Geary (1954) utiliza $U_{ij}^{(4)}$ y los pesos ω_{ij} y define

$$C = \frac{1}{2S^2\omega_{..}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \left[Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)\right]^2$$

Estadísticos de Moran y Geary

Bajo Normalidad (Cliff & Ord, 1981)

$$\mathbb{E}[I] = -\frac{1}{n-1}; \qquad \mathbb{E}[C] = 1$$

Estadísticos de Moran y Geary

Bajo Normalidad (Cliff & Ord, 1981)

$$\mathbb{E}[I] = -\frac{1}{n-1}; \qquad \mathbb{E}[C] = 1$$

Interpretación de I:

- Si $I > \mathbb{E}[I]$, entonces un sitio tiende a estar conectado a los sitios que tienen atributos similares.
  La correlación espacial es positiva y aumenta a medida que $|I - \mathbb{E}[I]|$ crece.

- Si $I < \mathbb{E}[I]$, entonces los valores de sitios conectados tienden a ser diferentes.

Estadísticos de Moran y Geary

Bajo Normalidad (Cliff & Ord, 1981)

$$\mathbb{E}[I] = -\frac{1}{n-1}; \qquad \mathbb{E}[C] = 1$$

Interpretación de I:

- Si $I > \mathbb{E}[I]$, entonces un sitio tiende a estar conectado a los sitios que tienen atributos similares.
  La correlación espacial es positiva y aumenta a medida que $|I - \mathbb{E}[I]|$ crece.

- Si $I < \mathbb{E}[I]$, entonces los valores de sitios conectados tienden a ser diferentes.

Interpretación de C: Es opuesta a la interpretación de I

Estadísticos de Moran y Geary

La libreria ***spdep*** contiene las funciones:

moran.test

geary.test

Las cuales sirven para calcular los estadísticos de Moran y Geary respectivamente.

Variograma Empírico

- En el caso de datos Geoestadísticos (dominio fijo y continuo) una de las principales herramientas descriptiva para analizar si existe dependencia espacial es el variograma o semivariograma.

Variograma Empírico

- En el caso de datos Geoestadísticos (dominio fijo y continuo) una de las principales herramientas descriptiva para analizar si existe dependencia espacial es el variograma o semivariograma.

- El variograma consiste en analizar el comportamiento

$$\mathrm{var}[Z(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - Z(\boldsymbol{s})], \qquad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}+\boldsymbol{h} \in D$$

- El estimador de Matheron (1965) del semivariograma es :

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{2|N(\boldsymbol{h})|} \sum_{N(\boldsymbol{h})} [Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)]^2$$

  donde $N(\boldsymbol{h})$ es el conjunto de todos los pares de localizaciones que tienen diferencia $\boldsymbol{h}$ y $|N(\boldsymbol{h})|$ es el número de pares distintos en este conjunto.

Variograma Empírico

Obs: Para construir el estimador considere una partición

$$t_0, t_1, \ldots, t_K \quad \text{del intervalo} \quad (0, t_{max}),$$

donde $t_{\text{máx}} = 0{,}5 \cdot \text{máx}\{\|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j\|\}$[1]. Además, condisidere los intervalos

$$I_k = (t_{k-1}, t_k)$$

En este caso, se tiene que

$$N(t_k) = \{(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_j) : \ \|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j\| \in I_k\}$$

[1] Recuerde que en una partición $t_0 = 0$ y $t_K = t_{\text{máx}}$.

Variograma Empírico

Cresie & Hawking (1980) sugirieron un estimador robusto del variograma.

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{s}_i) &\sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \\ Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j) &\sim \mathcal{N}\left(0, 2\gamma(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j)\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\left(Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)\right)^2}{2\gamma(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j)} \sim \chi^2_{(1)}; \qquad \sqrt[4]{\frac{|Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)|^2}{2\gamma(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j)}} \sim \mathcal{N}ormal$$

Variograma Empírico

Cresie & Hawking (1980) sugirieron un estimador robusto del variograma.

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{s}_i) &\sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \\ Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j) &\sim \mathcal{N}\left(0, 2\gamma(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j)\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\left(Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)\right)^2}{2\gamma(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j)} \sim \chi^2_{(1)}; \qquad \sqrt[4]{\frac{|Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)|^2}{2\gamma(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j)}} \sim \mathcal{N}ormal$$

Obteniendo

$$\widehat{\gamma}(\boldsymbol{h}) = \frac{\left(\frac{1}{|N(\boldsymbol{h})|} \sum_{N(\boldsymbol{h})} |Z(\boldsymbol{s}_i) - Z(\boldsymbol{s}_j)|^{1/2}\right)^4}{0{,}914 + \dfrac{0{,}988}{|N(h)|}}$$

Variograma Empírico

Ejemplo: Sea Z una variable atributo que ha sido observada en $\boldsymbol{s} = (x, y)$. Los datos son:

$$Z(1,1) = 1; \quad Z(2,2) = 2; \quad Z(3,4) = 20; \quad Z(1,4) = 4; \quad Z(3,1) = 3$$

1. Grafique adecuadamente los datos.
2. Obtenga y grafique el estimador de Momentos de Matheron del variograma.
3. Obtenga y grafique el estimador de Robusto de Cresie & Hawking del variograma.

Bibliografia

Banerjee S., Carlin B., and Gelfand A. (2015) *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*, Boca Raton: Chapman Hall/CRC.

Cressie, N. (1993) *Statistics for Spatial Data*. New York: Wiley.

Matheron, G., (1965) Les variables régionalisés et leur estimation. Masson, Paris.

Shabenberger, O., Gotway, C. A. (2005) *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

¿Alguna Consulta?