TIC

Ejercicios - Tema 2

Curso 2017/2018

Francisco Javier Caracuel Beltrán

caracuel@correo.ugr.es

4º - Grado en Ingeniería Informática – CCIA – ETSIIT

Índice

1. ¿Qué es la entropía de la información?

La entropía de un símbolo es la probabilidad de que aparezca dicho símbolo por la información que ofrece. La entropía de la información es la suma del cálculo anterior para todos los símbolos.

También se considera como la esperanza de la información.

Para comparar la entropía de dos fuentes se debe normalizar la entropía de cada fuente. Esto se hace dividiendo la entropía entre el logaritmo en base 2 del número de símbolos. Si las fuentes tienen el mismo número de símbolos no es necesario normalizar.

Cuanto más se acerque la entropía a 0, menos incertidumbre y más información se tiene. Si un símbolo tiene probabilidad 0, nunca se tiene en cuenta y se tiene incertidumbre 0.

Su medida depende del número de preguntas que se realicen. Si se mide en dos estados, su medida es el bit. Si se mide en tres estados, su medida es el trit, etc.

Si la entropía de una fuente es de 5, se necesitan 5 bits para codificar los mensajes que envía una fuente, es decir, se tienen que hacer 5 preguntas para obtener el resultado (siempre que las probabilidades sean equiprobables).

2. Suponiendo un suceso **s**, ¿Qué diferencias existen entre I(s) y H(s)?

I(s) mide la cantidad de información que se emite.

H(s) mide la incertidumbre que produce esa información.

3. Suponiendo que un sistema S pueda generar 4 símbolos, ¿es posible que H(S)=5? Razone su respuesta.

La mayor incertidumbre se produce si todos los símbolos son equiprobables. Teniendo esto en cuenta, se puede calcular H(S) de los 4 símbolos:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{n=4} p(S = si) * \log_2\big(p(S = si)\big) = -\sum_{i=1}^{n=4} (0.5) * \log_2(0.5) = 2$$

El resultado es 2, por lo que no sería posible que H(S) fuera 5.

4. ¿Qué significado tendría H(S)= 0? Indique qué implicaciones, en términos de probabilidades de los símbolos del alfabeto, tiene que H(S)= 0.

Significa que la entropía de un suceso S es 0, por tanto, se está completamente seguro de que va a ocurrir un evento y no existe incertidumbre sobre él.

La entropía tiende a 0 cuando la probabilidad de ocurrencia de un evento tiende a 1 o a 0, es decir, la entropía es 0 siempre que se sepa al 100% que un símbolo no se va a recibir o que se sepa al 100% el símbolo que se va a recibir.

Las implicaciones en términos de probabilidades de los símbolos del alfabeto son que todos los símbolos tienen probabilidad 1 o 0 de aparecer.

5. Un sistema A tiene 4 símbolos y una entropía H(A)=2, y otro sistema B tiene 2 símbolos y una entropía H(B)= 1. ¿Cuál produce más información? Razone su respuesta.

Para conocer la fuente que tiene más entropía se debe normalizar. Para normalizar se hace uso de la fórmula:

$$\widetilde{H}(S1) = \frac{H(S1)}{\log_2(n)}$$

$$H'(A) = \frac{2}{\log_2 4} = 1$$

$$H'(B) = \frac{1}{\log_2 2} = 1$$

Los dos sistemas producen la misma información ya que la incertidumbre que existe en ellos es la misma.

6. Si un sistema A que produce 4 símbolos tiene entropía H(A)=2, indique qué implicaciones, en términos de probabilidades de los símbolos del alfabeto, tiene que H(A)= 2.

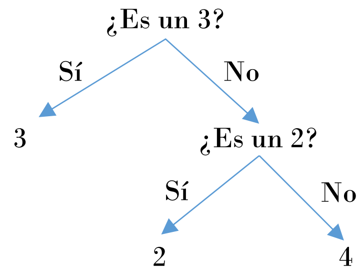
Aprovechando el ejercicio 3 de esta relación, donde se indicaba que la entropía de un sistema S de 4 símbolos era 2, se puede decir que la implicación que tiene en los símbolos del alfabeto es que todos estos tienen la misma probabilidad de ser generados.

7. Un juego entre dos amigos consiste en que suponen que la cara de la moneda vale 1 y la cruz vale 2. Uno de ellos lanza una moneda no trucada al aire 2 veces, y suma el resultado de ambas tiradas. El otro amigo debe adivinar qué número ha calculado el primero. Desarrolle una estrategia que permita realizar el mínimo número de preguntas de respuesta "Sí/No" para averiguar la respuesta.

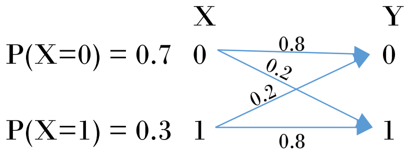
Los únicos valores que pueden aparecer son 2, 3 y 4. La probabilidad de cada uno es:

- P(2) = 0.25 → Tirada 1: 1 y tirada 2: 1.
- P(3) = 0.5 → Tirada 1: 1 y tirada 2: 2. Tirada 1: 2 y tirada 2: 1.
- P(4) = 0.25 → Tirada 1: 2 y tirada 2: 2.

Número de preguntas = 0.25 * 2 + 0.5 * 1 + 0.25 * 2 = 1.5



8. Una fuente E emite una señal X con bits de modo que la probabilidad en cualquier momento de emitir un uno sea 0,3. Esos bits son transmitidos hasta un receptor a través de un canal binario con probabilidad de error en un bit igual a 0,2, el cual recibe una señal Y. Se pide:



a) Calcular H(X) y H(Y).

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n=2} p(S = si) * \log_2\big(p(S = si)\big) = -(0.7 * \log_2(0.7) + 0.3 * \log_2(0.3)) = 0.88129$$

P(X=0, Y=0) = P(Y=0 | X=0) * P(X=0) = 0.8*0.7 = 0.56

P(X=0, Y=1) = P(Y=1 | X=0) * P(X=0) = 0.2*0.7 = 0.14

P(X=1, Y=0) = P(Y=0 | X=1) * P(X=1) = 0.2*0.3 = 0.06

P(X=1, Y=1) = P(Y=1 | X=1) * P(X=1) = 0.8*0.3 = 0.24

P(Y=0) = 0.56+0.06 = 0.62
P(Y=1) = 0.14+0.24 = 0.38

$$H(Y) = -(0.62 * \log_2(0.62) + 0.38 * \log_2(0.38)) = 0.95804$$

b) Calcular H(X,Y).

$$H(X,Y) = -((0.56 * \log_2(0.56)) + (0.14 * \log_2(0.14)) + (0.06 * \log_2(0.06)) + (0.24 * \log_2(0.24))) = 1.60322$$

c) Calcular H(X|Y) y H(Y|X), y explicar qué significa tanto H(X|Y) como H(Y|X).

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1.60322 - 0.95804 = 0.64518$$

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 1.60322 - 0.88129 = 0.72193$$

H(X|Y) es la entropía del símbolo emitido X supuesto recibido Y, es decir, la entropía que se tiene si se emite el símbolo X sabiendo que se ha recibido el símbolo Y.

H(Y|X) es la entropía del símbolo emitido Y supuesto recibido X, es decir, la entropía que se tiene si se emite el símbolo Y sabiendo que se ha recibido el símbolo X.

d) Explicar qué significa la Información mutua. Calcular la información mutua I(X; Y).

La información mutua es una medida que se utiliza para cuantificar la dependencia existente entre la entrada y la salida de un canal.

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.88129 - 0.64518 = 0.23611$$

9. Consideremos una fuente S que emite símbolos *{a, b, c, d}* con probabilidades *{1/2, 1/4, 1/8, 1/8}*, respectivamente. Calcular la entropía de la fuente.

$H(S) = -\sum_{i=1}^{n=4} p(S = si) * \log_2\big(p(S = si)\big) = -(0.5 * \log_2(0.5) + 0.25 * \log_2(0.25) + 0.125 * \log_2(0.125) + 0.125 * \log_2(0.125)) = 1.75$ es la entropía de la fuente.

10. En una planta de una comunidad de vecinos hay 2 pisos con las letras A y B. Se sabe que el dueño de uno de ellos es un mentiroso (siempre miente), mientras que el otro es honrado y siempre dice la verdad. ¿Cuál sería el mínimo número de preguntas de respuesta "Sí/No" que deberíamos hacer para saber cuál es el mentiroso? ¿Sabría elaborar la batería de mínimas preguntas necesarias para detectarlo? Justifique su respuesta utilizando argumentos basados en la Teoría de la Información.

La probabilidad de que sea el mentiroso o sea el honrado es 0.5.

Para saber el número de preguntas se utiliza la siguiente fórmula:

$$N.Preguntas = p(A) * Nivel(A) + p(B) * Nivel(B) \ldots$$

Teniendo esta fórmula en cuenta se puede determinar que el número de preguntas es:

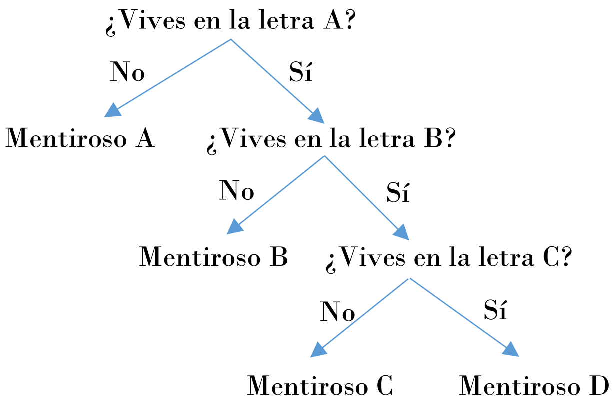
$$N.Preguntas = 0.5 * 2 = 1$$

Solo es necesario hacer una pregunta. Para hacer la pregunta bastaría con ir a cualquiera de las dos puertas y preguntarle al vecino si vive en la letra a la que corresponde esa puerta. De este modo si coincide es el honrado y si no, es el mentiroso.

11. En una planta de una comunidad de vecinos hay 4 pisos con las letras A, B, C y D. Todos se conocen entre ellos y saben quién dice la verdad y quién miente. Se sabe que el dueño de uno de ellos es un mentiroso (siempre miente), mientras que los demás son honrados y siempre dicen la verdad. ¿Cuál sería el mínimo número de preguntas de respuesta "Sí/No" que deberíamos hacer para saber cuál es el mentiroso? ¿Sabría elaborar un procedimiento y la batería de mínimas preguntas necesarias para detectarlo? Justifique su respuesta utilizando argumentos basados en la Teoría de la Información.

Se indica como p(A) la probabilidad de que el vecino del piso A sea el mentiroso, p(B) de la letra B, etc.

$$p(A) = 0.25;\ p(B) = 0.25;\ p(C) = 0.25;\ p(D) = 0.25$$



El número de preguntas promedio que se harán es: 0.25 * 1 + 0.25 * 2 + 0.25 * 3 + 0.25 * 3 = 2.25

12. Supongamos que disponemos de la siguiente tabla de probabilidades conjuntas entre una señal X emitida por un emisor y la señal Y recibida por el receptor, para un sistema que trabaja con 4 símbolos {1, 2, 3, 4}.

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
$Y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$Y=2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$Y=3$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$Y=4$	$\frac{1}{4}$	0	0	0

	X = 1	**X = 2**	**X = 3**	**X= 4**	
Y = 1	0.125	0.0625	0.03125	0.03125	0.25
Y = 2	0.0625	0.125	0.03125	0.03125	0.25
Y = 3	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.25
Y = 4	0.25	0	0	0	0.25
	0.5	0.25	0.125	0.125	

Calcule:

- H(X):

$$H(X) = -(0.5 * \log_2(0.5) + 0.25 * \log_2(0.25) + 0.125 * \log_2(0.125) + 0.125 * \log_2(0.125)) = 1.75$$

- H(Y):

$$H(Y) = -(0.25 * \log_2(0.25) + 0.25 * \log_2(0.25) + 0.25 * \log_2(0.25) + 0.25 * \log_2(0.25)) = 2$$

- H(X,Y):

$$H(X,Y) = -(2 * 0.125 * \log_2(0.125) + 6 * 0.0625 * \log_2(0.0625) + 0.25 * \log_2(0.25) + 4 * 0.03125 * \log_2(0.03125)) = 3.375$$

- H(Y|X):

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 3.375 - 1.75 = 1.625$$

- I(X; Y):

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 1.75 - (3.375 - 2) = 0.375$$

13. Sea un sistema capaz de transmitir dos símbolos {1, 2}, entre un emisor que proporciona una señal X emitida hacia un receptor que recibe la señal Y:

	$X=1$	$X=2$
$Y=1$	0	$\frac{3}{4}$
$Y=2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

	X = 1	**X = 2**	
Y = 1	0	0.75	0.75
Y = 2	0.125	0.125	0.25
	0.125	0.875	

Calcule:

- H(X):

$$H(X) = -(0.125 * \log_2(0.125) + 0.875 * \log_2(0.875)) = 0.54356$$

- H(Y):

$$H(Y) = -(0.75 * \log_2(0.75) + 0.25 * \log_2(0.25)) = 0.81128$$

- H(X,Y):

$$H(X,Y) = -\left(2 * 0.125 * \log_2(0.125) + 0.75 * \log_2(075)\right) = 1.06128$$

- H(Y|X):

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 1.06128 - 0.54356 = 0.51772$$

- I(X; Y):

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.54356 - (1.06128 - 0.81128) = 0.29356$$

14. Calcule la entropía de un mazo de 52 cartas perfectamente barajado. Si escogiésemos una carta al azar, ¿Cuánta información se ganaría conociendo que esa carta es un As? ¿Y si fuese el As de picas?

$$H(mazo) = -52 * \frac{1}{52} * \log_2\left(\frac{1}{52}\right) = 5.70044 \textit{ es la entropía de un mazo de } 52 \textit{ cartas}$$

$I(As) = -\log_2\left(\frac{4}{52}\right) = 3.70044$ es la cantidad de información que se ganaría si se cogiera un As.

$I(As) = -\log_2\left(\frac{1}{52}\right) = 5.70044$ es la cantidad de información que se ganaría si se cogiera un As de picas.

15. El servicio meteorológico de las noticias de un canal de televisión tiene el siguiente sistema de probabilidades para calcular cuándo llueve en las noticias sobre el tiempo:

	Lo que ocurre realmente = X		
Predicción = Y	Lluvia	No Lluvia	
Lluvia	0.625	0.0625	0.6875
No Lluvia	0.1875	0.125	0.3125
	0.8125	0.1875	

a) Calcule la entropía de lo que ocurre realmente:

$$H(X) = -(0.8125 * \log_2(0.8125) + 0.1875 * \log_2(0.1875)) = 0.69621$$

b) Calcule la entropía de la predicción, suponiendo que se sabe lo que ocurre realmente.

$$H(Y) = -(0.6875 * \log_2(0.6875) + 0.3125 * \log_2(0.3125)) = 0.89604$$

c) Calcule la entropía conjunta (H(X,Y)):

$$H(X,Y) = -(0.625 * \log_2(0.625) + 0.1875 * \log_2(0.1875) + 0.0625 * \log_2(0.0625) + 0.125 * \log_2(0.125)) = 1.49666$$

d) Calcule la información mutua del sistema.

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.69621 - (1.49666 - 0.89604) = 0.09559$$

16. Supongamos que en otra cadena tienen el siguiente sistema de probabilidades para las noticias sobre el tiempo:

	Lo que ocurre realmente = X			
Predicción = Y	Lluvia	Nublado	Soleado	
Lluvia	0.1235	0.0056	0.1060	0.2351
Nublado	0.1498	0.1326	0.1183	0.4007
Soleado	0.1024	0.1458	0.1160	0.3642
	0.3757	0.284	0.3403	

a) Calcule la entropía de lo que ocurre realmente.

$H(X) = -(0.3757 * \log_2(0.3757) + 0.284 * \log_2(0.284) + 0.3403 * \log_2(0.3403)) = 1.57558$

b) Calcule la entropía de la predicción, suponiendo que se sabe lo que ocurre realmente.

$H(Y) = -(0.2351 * \log_2(0.2351) + 0.4007 * \log_2(0.4007) + 0.3642 * \log_2(0.3642)) = 1.55044$

c) Calcule la entropía conjunta (H(X,Y)).

$H(X,Y) = -(0.1235 * \log_2(0.1235) + 0.0056 * \log_2(0.0056) + 0.1060 * \log_2(0.1060) + 0.1498 * \log_2(0.1498) + 0.1326 * \log_2(0.1326) + 0.1183 * \log_2(0.1183) + 0.1024 * \log_2(0.1024) + 0.1458 * \log_2(0.1458) + 0.1160 * \log_2(0.1160)) = 3.02104$

d) Calcule la información mutua del sistema.

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 1.57558 - (3.02104 - 1.55044) = 0.10498$$

e) Con respecto al canal de TV del ejercicio anterior, ¿de cuál de los dos sistemas de predicción del tiempo se fiaría más, y bajo qué circunstancias?

El sistema de predicción del tiempo del que me fiaría más es el de este ejercicio (ejercicio 16), ya que el valor de información mutua es mayor. Esto quiere decir que teniendo en cuenta las predicciones, lo que ocurre realmente se aproxima más que en el ejercicio 15.