



# GRADO EN FÍSICA

## LABORATORIO DE FÍSICA III: Electricidad y Magnetismo

### CURSO 2022-2023 1<sup>er</sup> SEMESTRE

## Análisis de Fourier

### Objetivo:

Estudiar de manera práctica el espectro de Fourier de diferentes señales periódicas.

### Introducción

Haciendo uso del hecho de que toda señal periódica se puede representar como la suma de sinusoidales (senos y cosenos), las técnicas de análisis de Fourier descomponen las señales en una suma sencilla mediante la llamada serie de Fourier. De esta manera una señal periódica  $f(t)$ , de período  $T$ , se puede representar como:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right] \quad (1)$$

donde:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

El término  $a_0$  de la expresión (1) se denomina **componente continua** de  $f(t)$ . El resto de términos que componen la función  $f(t)$ , se conocen como **armónicos**, siendo el **armónico fundamental** una sinusoidal de frecuencia más baja  $f_1 = 1/T$ . El segundo término es una sinusoidal de frecuencia  $f_2 = 2f_1$ , y así sucesivamente. La amplitud  $A_n$  de cada uno de los armónicos viene dada por la siguiente expresión:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2)$$

El gráfico  $A_n$  vs  $f_n$ , se conoce como el **espectro de frecuencias de la señal  $f(t)$** . A partir de él podemos reconstruir nuevamente la señal con mayor o menor exactitud dependiendo de la cantidad de armónicos que usemos para dicha síntesis. A medida que usemos más armónicos, la señal generada se asemejará más a la señal original.

En el caso de que la señal tenga carácter par o impar se puede representar como suma de sólo cosenos o sólo senos, respectivamente. Representemos entonces las funciones que estudiaremos en esta práctica como funciones impares:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right); (a_n = 0) \quad (3)$$

El hecho de que una señal se pueda descomponer en una suma de ondas sinusoidales simplifica considerablemente el análisis de señales. Es suficiente con estudiar el comportamiento de una señal sinusoidal y aplicar este comportamiento a cada una de las componentes de Fourier de la señal bajo estudio.

El espectro de frecuencias de una onda puramente sinusoidal tiene un único pico. Otras formas de onda tienen una serie de componentes de distinta frecuencia, lo que se manifiesta en una variedad de picos en el espectro de frecuencias. Debido a esto, el análisis de Fourier resulta especialmente eficiente cuando se pretende comparar una onda sinusoidal con otra ligeramente modificada.

### La práctica

Se analizarán distintas señales utilizando un ordenador. Para ello, tendrás que conectar un generador de funciones (Figura 1) al conversor analógico-digital (Figura 2), que transformará la señal para que el ordenador la pueda capturar. La señal que proviene del generador se introduce por los bornes + y – del canal “Analog In 2/S2” del conversor analógico digital (bornes amarillos marcados con un rectángulo rojo en la Figura 2). Inicialmente se trabajará sin nivel de DC, por lo que botón “Décalage” del generador debe estar pulsado. Se recomienda trabajar inicialmente con una frecuencia de 1 kHz y una amplitud de la señal de 9 V. Si observas que la señal de entrada está saturada, debes disminuir su amplitud para evitar introducir una señal distorsionada en el programa de medida.



Figura 1. Panel del generador de funciones

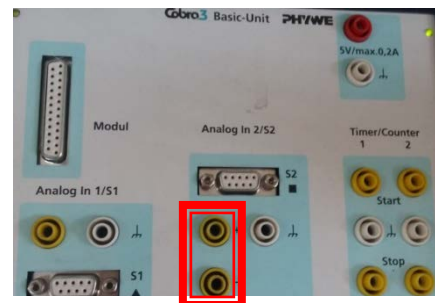


Figura 2. Conversor A-D

### REALIZACIÓN DE LA PRÁCTICA

A continuación se explican todos los pasos a seguir para registrar y analizar una señal sinusoidal. Estos pasos se repetirán según corresponda en las distintas cuestiones de la práctica.

#### 1. ADQUISICIÓN DE LA SEÑAL Y ANÁLISIS DE FOURIER

Abre el programa ANÁLISIS DE FOURIER, a través de un acceso directo que se encuentra en el escritorio de Windows. Para comenzar a medir, presiona el círculo rojo que aparece en el menú superior (debajo de Archivo). A continuación aparecerán 3 ventanas como en la Figura 3. La ventana superior corresponde a la

**Señal** de entrada, la ventana inferior es el **Espectro** de frecuencias de la señal de entrada y a través de la tercera ventana (**Medidor de frecuencias**) podemos configurar el conversor analógico digital. Se recomienda comenzar con la configuración que se muestra en la Figura 3 y se explica a continuación:

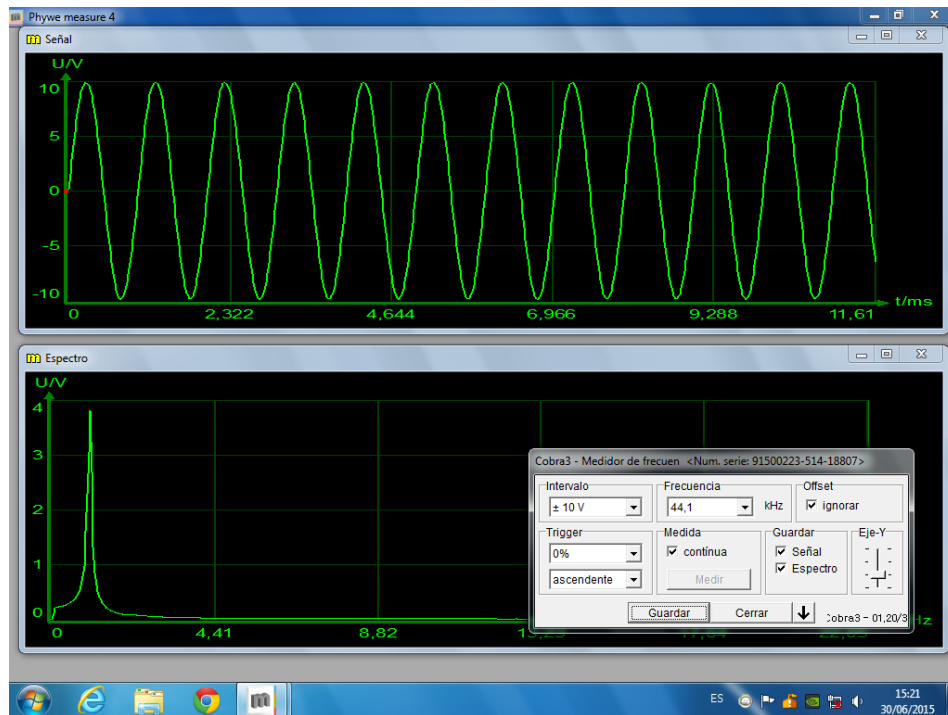


Figura 3. Ventanas de adquisición, espectro y configuración

**NOTA:** para observar correctamente el espectro es conveniente que la ventana de medida de la señal contenga un número entero de longitudes de onda. Para ello puedes modificar ligeramente la frecuencia en el generador.

## 2. CONFIGURACIÓN DE LA VENTANA MEDIDOR DE FRECUENCIAS

**Intervalo** =  $\pm 10$  V (se cambiará en función de la amplitud de la señal de entrada del generador de ondas, se recomienda trabajar con señales de 10 V de amplitud).

**Frecuencia** = 44.1 kHz (se recomienda que sea aproximadamente 40 veces superior a la frecuencia de entrada, se puede cambiar en función de la frecuencia de la señal de entrada).

**Offset** (si seleccionamos ignorar se omite el pico correspondiente a la frecuencia 0 Hz en el espectro de frecuencias, aunque en la señal de entrada sí se observa el nivel de DC elegido).

**Trigger (o Disparador)** se mantendrá en 0% y ascendente (con esto logramos que la sincronización de la señal se realice con el frente de subida de la señal de entrada).

**Medida** (continua: adquisición en tiempo real. Cuando no se selecciona esta opción debes presionar el botón “medir” para adquirir nuevamente la señal y ver las modificaciones que se hayan hecho en el generador).

**Guardar** (tanto señal como espectro deben estar seleccionados)

La barra de desplazamiento del **Eje Y** permite modificar la escala de la ventana “Espectro”.

### 3. GRABACIÓN DE LA SEÑAL Y DEL ESPECTRO DE FRECUENCIA

Al presionar el botón Guardar en la ventana Medidor de Frecuencias, aparecen dos ventanas (“Señal” y “Espectro”), como se observa en la Figura 4:

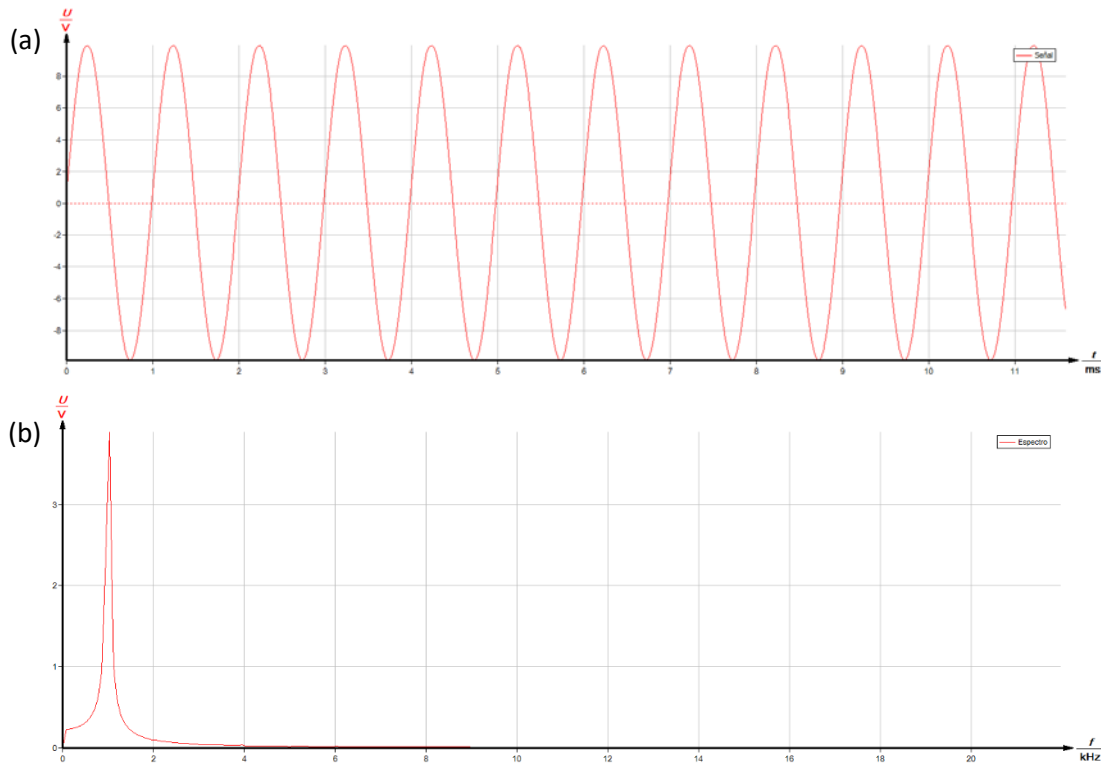


Figura 4. (a) Señal sinusoidal de entrada. (b) Espectro de Fourier de la señal sinusoidal

Para guardar las ventanas con extensión msr (la extensión del programa) debes seleccionar una de las ventanas e ir al menú **Archivo - Guardar Medida** (repetir para cada una de las ventanas). *(estos archivos no te los llevas porque sólo los abre el programa que hay en el laboratorio)*

**NOTA: LOS DATOS SE DEBEN GUARDAR EN VUESTRAS MEMORIAS-USB, YA QUE AL FINALIZAR LA SESIÓN TODOS LOS DATOS GUARDADOS EN EL ORDENADOR SERÁN BORRADOS.**

Para obtener la tabla de datos de cada una de las dos ventanas *(los archivos que sí te llevas para procesar luego con Origin, SciDavis, Phyton o el software de tu elección)*: teniendo seleccionada una de las ventanas se utiliza el menú **Medida - Exportar datos**, a continuación se abrirá la ventana *Exportar Valores* en la que seleccionamos **Copiar en un fichero y Exportar como números** (Figura 5), (los ficheros se crearán con extensión txt). Estos ficheros “.txt” podrás abrirlos con cualquier programa de análisis de datos (Origin, SciDavis, Phyton, etc.).

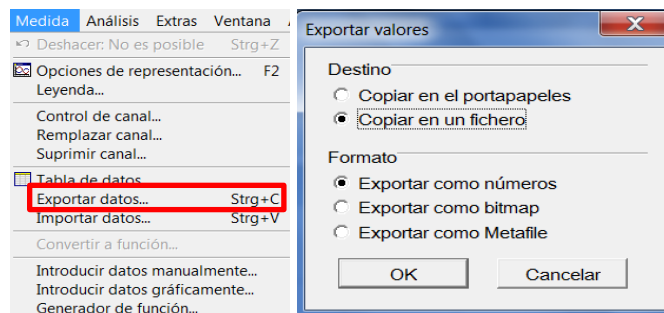


Figura 5. Ventanas para exportar datos

#### 4. DETECCIÓN DE LOS PICOS DEL ESPECTRO DE FRECUENCIAS

El programa también nos ofrece la posibilidad de detectar los picos del Espectro de frecuencias, para esto, una vez que estés sobre la ventana Espectro ir al menú **Análisis / Análisis de pico**.

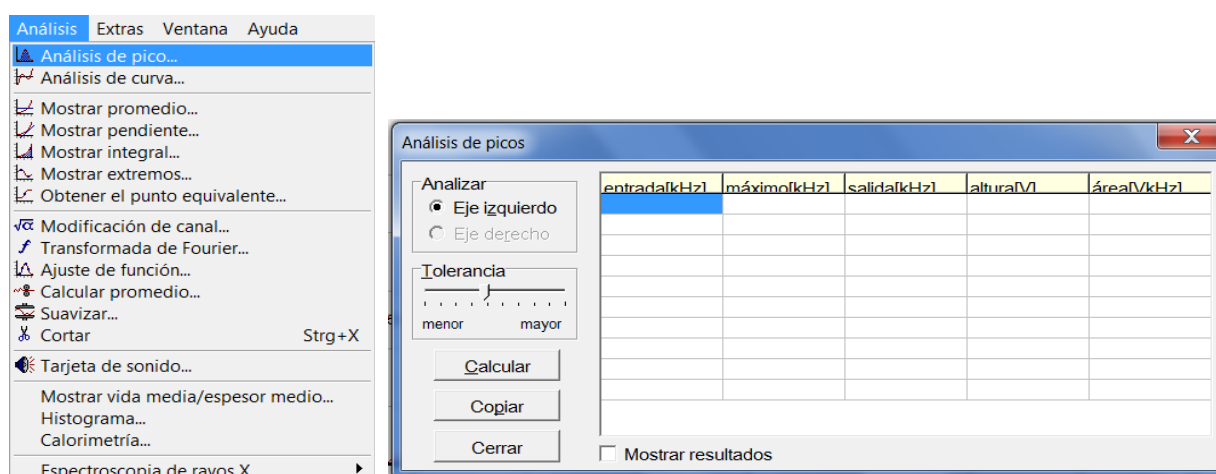


Figura 6. Ventanas para el análisis de los picos de la serie de Fourier

A continuación aparecerá la ventana Análisis de picos en la que presionando el botón **Calcular** se obtiene la amplitud y la frecuencia de los picos del espectro (para que aparezcan en esa ventana la mayor cantidad de picos, la barra de tolerancia debe ser pequeña). Los valores que se deben anotar son los de las columnas 2 y 4: frecuencia (máximo [kHz]) y amplitud de pico (altura [V]) respectivamente (Figura 6).

**NOTA:** La columna 4 es el valor de la amplitud multiplicado por una constante.<sup>1</sup>

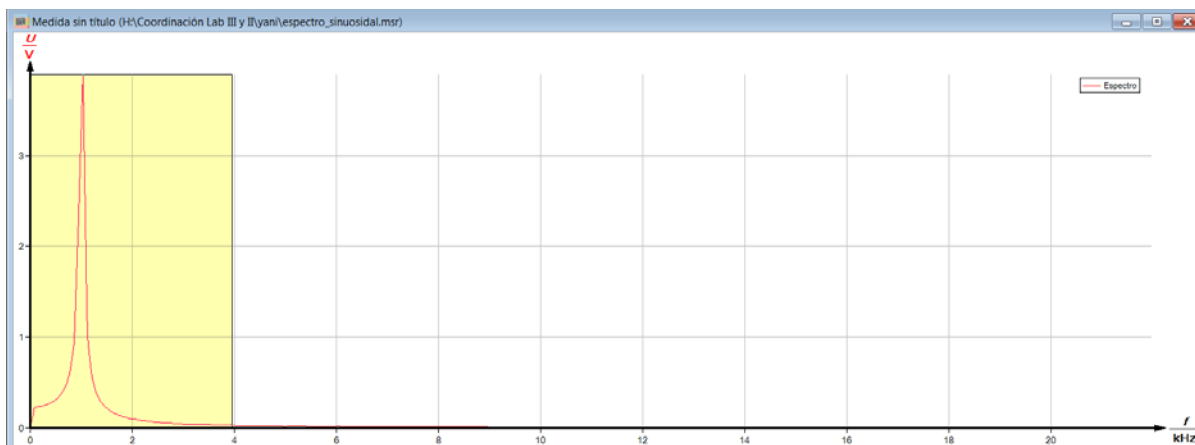
Si la señal tiene ruido se puede mover la posición de la barra de tolerancia. Si seleccionamos la opción **Mostrar resultados**, aparecerá sobre la ventana “Espectro”, la frecuencia y la amplitud de cada uno de los picos. No obstante a partir del fichero de texto que hemos grabado anteriormente (el que corresponde a todo el espectro) podemos determinar también las características de los picos (frecuencia y amplitud).

<sup>1</sup> El software que utilizamos en el laboratorio no se basa exactamente en la misma definición matemática presentada en este guion (ec. 1). En dicho software aplica una transformación de variable  $x = 2\pi/T$ , y como resultado las amplitudes  $a_n$  y  $b_n$  que tú calculas son distintas a las que entrega el programa

## 5. SELECCIÓN DE ARMÓNICOS Y RECUPERACIÓN DE LA SEÑAL

El programa permite reconstruir una onda utilizando todos los términos del desarrollo de Fourier o sólo algunos de esos términos. De esta forma se puede ver qué efecto tienen cada uno de los armónicos en la forma de la señal. Existen varias formas posibles de realizar la reconstrucción de la señal. Explicaremos a continuación la que emplearemos en la práctica.

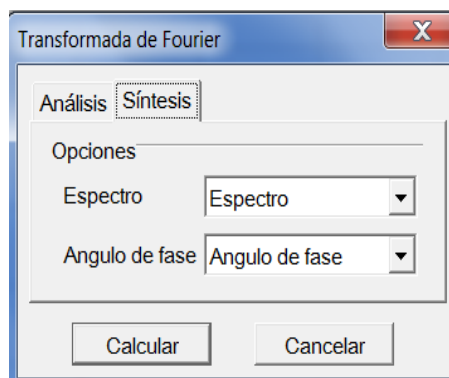
Primero se realizará la reconstrucción de la señal con un sólo pico (el de mayor intensidad), para ello seleccionamos ese pico de la siguiente forma. En el menú superior seleccionamos el icono “+” y sobre la ventana “Espectro” seleccionamos el pico arrastrando el ratón, como se muestra en la Figura 7:



*Figura 7. Ejemplo de selección de un pico de la serie de Fourier*

A continuación en menú **Análisis > Transformada de Fourier > Síntesis > Calcular** podemos reconstruir la señal (la que nos aparecerá en una nueva ventana).

También podríamos tener como opción eliminar picos aislados del espectro de frecuencias, pero eso no es necesario para el objetivo de esta práctica.



*Figura 8. Ventana para reconstruir la señal*

### NOTA: SOBRE LA PERIODICIDAD

El software de análisis asume que la señal que ves en pantalla (fondo negro y color verde) se repite infinitamente, de forma que si alimentas el programa con la señal como la de la Figura 9 no estás haciendo el análisis de Fourier de una simple señal sinusoidal, ya que al repetirla obtendrías la señal de la Figura 10. El espectro de esta segunda señal no es un espectro de un solo pico, tiene más componentes. Por esta razón es importante fijarse dónde termina la señal que estás introduciendo al programa de análisis.

Una vez entendido esto, asegúrate de que la señal en la pantalla (fondo negro y señal verde) comienza en amplitud = 0 en flanco de subida, y termina en amplitud = 0 en flanco de subida (punto señalado en la Figura

9 con una flecha); para conseguir esto tendrás que modificar ligeramente la frecuencia de la señal hasta que veas que esta tiene el periodo correcto y que no generará armónicos adicionales provenientes de una discontinuidad inexistente.

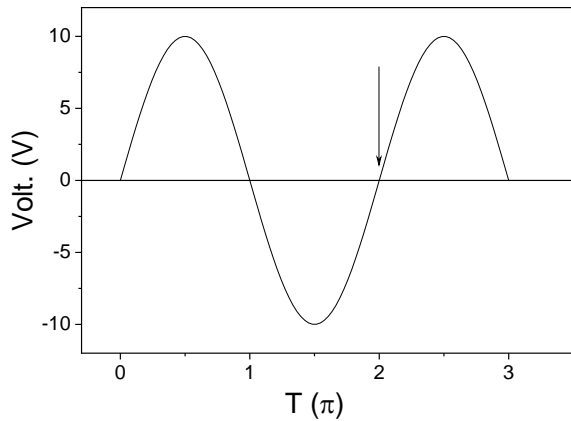


Figura 9. Señal con un periodo y medio

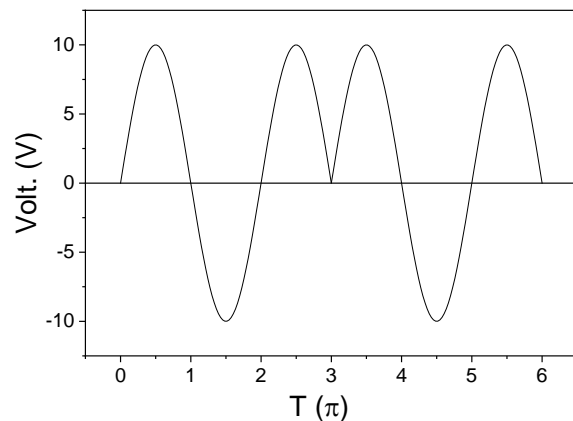


Figura 10. Señal resultante

### Cuestiones

1. Inicialmente utiliza señales con nivel de DC = 0 V (botón “*décalage*” presionado). Introduce señales con una amplitud  $\pm 9$  V (si la señal se mide saturada<sup>1</sup>, esta distorsión genera términos extra en el análisis de Fourier). Registra el análisis de Fourier de:

1.a Una señal sinusoidal

1.b Una señal triangular

1.c Una señal cuadrada

Reporta en el informe: Gráfico de la señal y su espectro (necesitas guardar las tablas de datos para poder graficarlos, no utilices recortes de Windows, ni capturas o fotografías de la pantalla). Incluye en las gráficas sus correspondientes magnitudes y unidades.

Anota las amplitudes y frecuencias de los distintos picos de Fourier (como se explica en el punto 4. Detección de los picos del espectro de frecuencias), y con ellos expresa la ecuación (3) para las tres formas de onda.

2. Calcula la expresión matemática del desarrollo de Fourier para una onda sinusoidal y una cuadrada. Compara las amplitudes de los armónicos de los análisis de Fourier experimental (obtenido en la cuestión 1) y las teóricas para las dos señales.

3. Reconstruye, como se explicó en el punto 5, la onda cuadrada utilizando:

- El pico de mayor amplitud del espectro de frecuencias
- Los dos picos más intensos

- c) Los tres picos más intensos
- d) Todos los picos de Fourier.

Analiza lo que observas. Reporta en el informe las gráficas de cada una de las señales reconstruidas (representálas todas juntas en un solo gráfico).

4. Registra el análisis de Fourier de una onda sinusoidal con la misma amplitud y frecuencia que en el apartado 1. Añade ahora un nivel de continua positivo con el generador de funciones (recuerda tirar del botón “*décalage*” para habilitar la componente DC). Para evitar la saturación<sup>i</sup> tendrás que reducir la amplitud de señal. Cambia en la ventana *Medidor de frecuencias* el OFFSET y el valor de FRECUENCIA a 10 kHz, como se observa en la Figura 11.

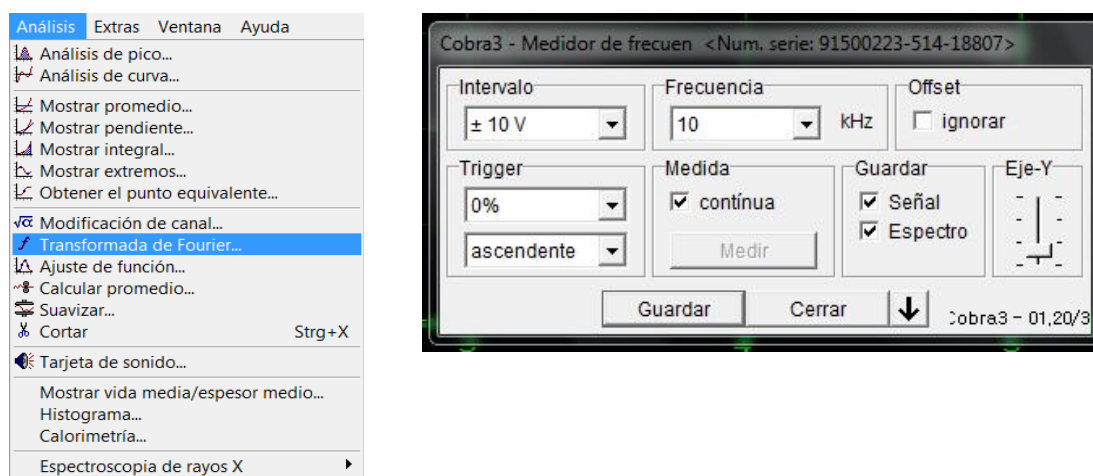


Figura 11. Ventanas para "Medidor de frecuencias"

- a) ¿Qué diferencia observas entre el espectro de frecuencias de esta señal sinusoidal con  $DC \neq 0$  V y el de la sinusoidal del apartado 1 (con  $DC = 0$  V)?

*Nota. Para obtener la amplitud del pico de frecuencia  $f = 0$  Hz, debemos seleccionar la ventana del Espectro de frecuencias y pulsar el botón derecho del ratón. A continuación elegir Tabla de Datos, y en la primera línea (2da columna) aparece la amplitud de ese pico.*

- b) Repite la misma operación pero ahora con un nivel de continua positivo de mayor valor que el usado en el apartado a) (de nuevo, evita la saturación de la señal de entrada). ¿Qué le ocurre a la amplitud del pico de frecuencia 0 Hz respecto del caso anterior?
- c) Reconstruye la señal con ambos picos del espectro de frecuencias. ¿Está la señal reconstruida dividida equitativamente por la línea de 0V?
- d) Reconstruye la señal solamente con el primer pico que observes de frecuencia  $> 0$  Hz. Explica las diferencias o semejanzas que observas con la señal reconstruida en el apartado anterior.
- e) Explica matemáticamente el valor obtenido para el término  $a_0$  en los apartados 4.a) y 4.b).

<sup>i</sup> Saturación significa que la onda tiene una amplitud pero el programa está registrando como máximo un valor inferior, como resultado los extremos de amplitud se ven "aplanados" o "recortados"