

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Corso di laurea in INGEGNERIA ELETTRONICA

# “MODELLISTICA E CONTROLLO DI UN MOTORE ELETTRICO IN CORRENTE CONTINUA”

Relatore:

Prof. Roberto Zanasi

Studente:

Francesca Cantoni

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

# Indice

## Abstract

<b>1</b>	<b>Motore elettrico DC</b>	<b>1</b>
1.1	Struttura meccanica	1
1.2	Principio di funzionamento	2
1.3	Dati di targa e specifiche di progetto	3
<b>2</b>	<b>Modello matematico</b>	<b>5</b>
2.1	Circuito equivalente di un motore DC a magneti permanenti	5
2.2	Implementazione su piattaforma Simulink	8
<b>3</b>	<b>Risposta al gradino</b>	<b>9</b>
3.1	Sistema in catena aperta	9
3.2	Limitazione della corrente d'armatura	10
3.3	Sistema retroazionato	13
<b>4</b>	<b>Controllo di velocità con regolatore PID</b>	<b>16</b>
4.1	Introduzione del regolatore PID	16
4.2	Regolatore P	18
4.3	Regolatore PD	22
4.4	Regolatore PI	25
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>28</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>31</b>

# Abstract

Al giorno d'oggi i motori sono utilizzati in numerosi campi, tra cui quello industriale. È facile immaginare come in alcune applicazioni risulti necessario effettuare dei controlli per quanto riguarda, per esempio, la posizione e/o la velocità. A seconda della variabile sulla quale si vuole compiere l'azione di controllo, le considerazioni e di conseguenza le soluzioni adottate variano notevolmente.

In questa trattazione ci si prefigge di controllare la velocità angolare di un motore elettrico DC a magneti permanenti in modo tale da rispettare determinati vincoli. Questa esigenza nasce nel momento in cui si vuole garantire un andamento il più possibile costante nonostante la presenza di disturbi esterni, di rumori e/o della variazione di parametri interni.

Tra le innumerevoli tecniche disponibili per raggiungere questa finalità si è deciso di utilizzare un regolatore PID per la sua efficacia e semplicità di settaggio.

Il problema verrà risolto in modo graduale, affrontando in prima analisi il sistema in catena aperta, per poi passare a un sistema retroazionato e infine all'introduzione del regolatore PID.

Nello svolgimento di ogni fase si cercheranno di mettere in luce le criticità e i principali miglioramenti introdotti.

Si noti che l'intera trattazione è stata svolta utilizzando i valori nominali del motore in modo tale da osservare il suo comportamento limite; durante le varie fasi di analisi, inoltre, si cercherà di porsi nelle condizioni il più possibile ideali.

È bene chiarire, però, che man mano che il sistema assume un comportamento sempre più reale, mediante l'introduzione di non idealità o dei sensori a rendimento non unitario, le prestazioni ottenibili dal motore saranno sicuramente inferiori rispetto a quelle mostrate durante l'intera trattazione.

# Capitolo 1

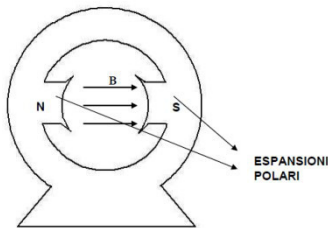
## Motore elettrico DC

In questo capitolo viene introdotto il motore elettrico in corrente continua (DC), ne viene spiegato il funzionamento e vengono ricavate le leggi che ne governano la dinamica.

### 1.1 Struttura elementare

Il motore elettrico DC è una macchina elettrica rotante, alimentata in corrente continua, che converte l'energia elettrica in energia meccanica. La macchina è costituita principalmente da tre parti: statore, rotore e sistema collettore a spazzole.

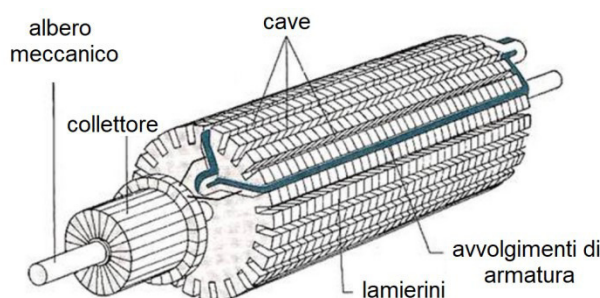
#### STATORE



Lo statore è la parte fissa della macchina e ha il compito di produrre il flusso magnetico necessario per il funzionamento. È realizzato in materiale ferromagnetico (ferro, ghisa, acciaio) ed è dotato di opportune espansioni polari ove viene prodotto il campo magnetico.

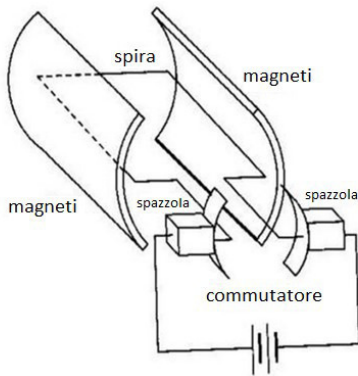
Il flusso magnetico può essere generato in due modi differenti. Il primo metodo è ottenuto attraverso l'utilizzo di magneti permanenti che vengono posizionati in corrispondenza delle espansioni polari. Il secondo, invece, è conseguito mediante l'uso di avvolgimenti di eccitazione, ovvero avvolgimenti percorsi da corrente che generano un flusso magnetico grazie alla legge di Lorentz.

#### ROTORE



Il rotore, che è costituito da un cilindro di materiale ferromagnetico, è inserito all'interno dello statore ed è libero di ruotare intorno al proprio asse. Su di esso sono allocati gli avvolgimenti di armatura ai capi dei quali, con il rotore in movimento, si genera una forza elettromotrice. Questa parte del motore, inoltre, viene laminata per ridurre al minimo le correnti di Foucault.

## COLLETORE A SPAZZOLE



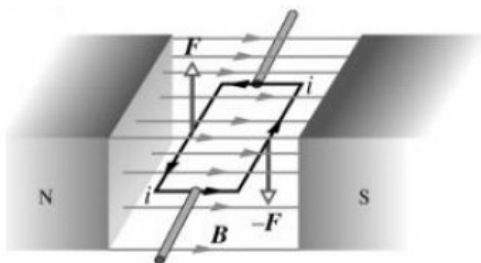
Montato sullo stesso albero del rotore si ha il collettore. Questo componente ha lo scopo di fornire agli avvolgimenti d'armatura la tensione di alimentazione e fare in modo che la coppia generata dalla corrente che li attraversa sia costante o quantomeno unidirezionale.

Il collettore è costituito da lamelle in rame, disposte in modo tale da formare un cilindro, che mettono in collegamento elettrico con i conduttori che costituiscono gli avvolgimenti di armatura.

Sopra viene mostrata la rappresentazione di un collettore in presenza di una singola spira.

## 1.2 Principio di funzionamento

Si considera un modello semplificato del motore dove, al posto della bobina del rotore, è presente una sola spira.



Quest'ultima, essendo percorsa da corrente ed immersa in un campo magnetico uniforme **B** perpendicolare alle due facce interne dello statore, è sottoposta ad una forza **F** espressa dalla seconda legge di Laplace:

$$\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

dove  $i$  è la corrente che fluisce nel conduttore e  $l$  è la lunghezza del tratto preso in considerazione.

Nei due lati della spira, di lunghezza  $a$  e perpendicolari a **B**, il vettore forza ha modulo non nullo e direzione determinata dalla regola della mano destra. Per gli altri due lati, ovvero quelli paralleli al campo magnetico e di lunghezza  $b$ , il contributo di **F** è nullo perché i due vettori hanno la stessa retta d'azione e di conseguenza il loro prodotto vettoriale è nullo.

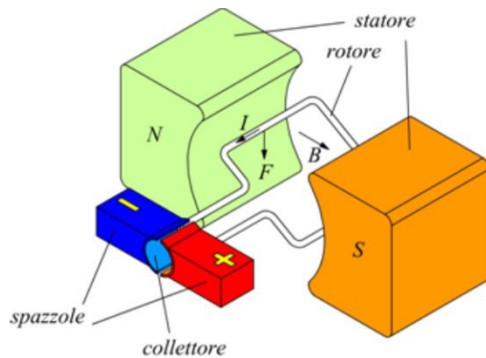
Nei due lati perpendicolari al campo magnetico si viene a generare una coppia di forze, **F** e **-F**, di braccio  $r$  e di conseguenza si crea un momento meccanico rispetto all'asse di rotazione, ovvero una coppia motrice, definito nel seguente modo:

$$\mathbf{M} = r \times \mathbf{F}$$

Con  $r = b \sin \theta$  (dove  $\theta$  è l'angolo formato tra il versore  $u_n$  normale al piano e il campo magnetico uniforme **B**) e  $\mathbf{F} = ia\mathbf{B}$ .

Il modulo del momento meccanico può quindi essere riscritto come segue:

$$M = b \sin\theta F = i ab B \sin\theta = i AB \sin\theta$$



Grazie a questa relazione si può capire che quando la spira si trova nella condizione in cui  $\theta < 90^\circ$  si ha un momento meccanico positivo per cui essa tende a ruotare. Nel momento in cui si giunge in  $\theta = 90^\circ$  la coppia di forze ha braccio nullo e quindi la coppia motrice è nulla. Infine quando  $\theta > 90^\circ$  si crea una coppia che tende a far ruotare la spira nella direzione opposta.

In assenza del sistema collettore a spazzole, quindi, si ha che la spira non riesce a compiere una rotazione completa in quanto tende sempre a essere riportata nella condizione di equilibrio in cui  $\theta = 90^\circ$ .

Introducendo questo sistema si ottiene una spira alimentata con una corrente il cui verso varia a seconda della posizione del rotore, anziché essere di tipo statico, ovvero con un flusso che entra sempre nella stessa direzione. Quanto detto si traduce nel fatto che quando  $\theta > 90^\circ$  il flusso della corrente viene invertito, in questo modo si creano delle forze il cui verso permette di mantenere invariata la direzione di rotazione della spira.

Aumentando il numero di spire d'armatura, opportunamente collegate tra di loro, e il numero di lamelle del collettore è possibile ottenere una coppia generata a rotore pressoché costante.

### 1.3 Dati di targa e specifiche di progetto

Il motore elettrico DC sul quale si vuole compiere il controllo di velocità è a magneti permanenti. Presenta inoltre i seguenti dati di targa:

- Potenza nominale	$P_n = 2500 \text{ W}$
- Tensione di armatura nominale	$V_{an} = 250 \text{ V}$
- Perdite nel circuito di armatura	$P_a = 4\% P_n = 100 \text{ W}$
- Induttanza degli avvolgimenti rotorici	$L_a = 5 \text{ mH}$
- Velocità angolare nominale	$\omega_n = 160 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- Potenza necessaria per vincere l'attrito	$P_b = 128 \text{ W}$

Da questi dati è possibile ricavare tutti i parametri necessari per descrivere in modo completo il motore elettrico:

- Corrente nominale	$I_{an} = \frac{P_n}{V_{an}} = 10 \text{ A}$
- Valore nominale della coppia	$C_n = \frac{P_n}{\omega_n} = 15 \text{ Nm}$
- Resistenza di armatura	$R_a = \frac{P_a}{I_a^2} = 1 \Omega$
- Momento di inerzia	$J = \frac{C_n t_r}{\omega_n} = 0.1125 \frac{\text{N m s}^2}{\text{rad}}$
- Coefficiente di attrito viscoso	$B = \frac{P_b}{\omega_n^2} = 5 * 10^{-3} \frac{\text{N m s}}{\text{rad}}$
- Costante elettrica $K_v$	$K_v = \frac{E_g}{\omega_n} = 1.5 \frac{\text{V s}}{\text{rad}}$
- Costante di coppia $K_t$	$K_t = \frac{C_n}{I_{an}} = 1.5 \frac{\text{N m}}{\text{A}}$

Si noti che, al fine di rispettare la conservazione dell'energia, i valori  $K_t$  e  $K_v$  devono assumere quantità equivalenti poiché in caso contrario questa relazione non risulta più verificata:

$$K_t C_m = K_v \omega$$

Si mette in evidenza che durante la trattazione ci si riferirà a questi parametri utilizzando la costante  $K_e$ .

$$K_t = K_v = K_e$$

Si suppone, inoltre, di utilizzare un alimentatore con le seguenti caratteristiche minime:

- Tensione	$V_{alim} \geq V_{an} = 250 \text{ V}$
- Corrente	$I_{alim} \geq I_{an} = 10 \text{ A}$

Vengono inoltre espressi i vincoli temporali che si vogliono ottenere dalla dinamica di velocità del sistema:

- Tempo di salita	$t_r \leq 2 \text{ s}$
- Tempo di assestamento	$t_s \leq 2.5 \text{ s}$
- Sovraelongazione	$S \leq 20\%$
- Errore a regime	$e_p \leq 1\%$

# Capitolo 2

## Modello matematico

*In questo capitolo si ricava il modello matematico che regola il comportamento di un motore elettrico DC a magneti permanenti e successivamente si implementa quanto ottenuto in ambiente Simulink di MATLAB.*

### 2.1 Circuito equivalente di un motore DC a magneti permanenti

Per ricavare il circuito equivalente di un motore DC a magneti permanenti si studia un modello elettrico più generico a cui in seguito si applicano delle modifiche.

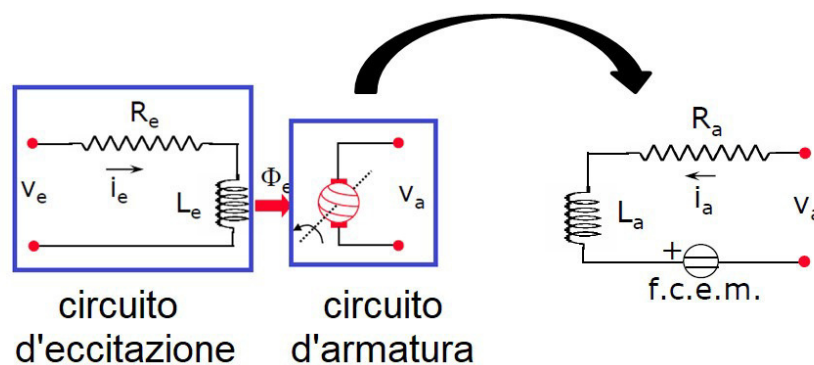


Fig. 2.1 – rappresentazione di un motore elettrico DC ad eccitazione parallelo

Come si può notare dalla figura, lo schema è costituito da due blocchi principali:

- circuito d'eccitazione: rappresenta il comportamento dello statore
- circuito d'armatura: rappresenta il comportamento del rotore

L'andamento di questo sistema è regolato dalle seguenti relazioni:

$$v_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} \quad \text{tensione ai capi del circuito d'eccitazione}$$

$$\phi_e = K_e i_e \quad \text{flusso magnetico generato dal circuito di eccitazione}$$

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + f.c.e.m. \quad \text{tensione ai capi del circuito d'armatura}$$

$$C_m = \phi_e K_t i_a \quad \text{coppia motrice generata dal rotore}$$

$$f.c.e.m. = \phi_e K_v \omega \quad \text{forza contro-elettromotrice dovuta alla rotazione del rotore}$$



Si noti che la f.c.e.m. è un effetto generato dai fenomeni di induzione elettromagnetica. Faraday, infatti, dimostra che ogni qual volta avviene un moto relativo tra la spira e il campo magnetico (in questo caso la rotazione della spira in un **B** costante) si genera una f.e.m. indotta tale da opporsi alla causa che ha generato il fenomeno.

Si passa ora a studiare il circuito equivalente di un motore a magneti permanenti. In questo caso il modello elettrico presenta solo il circuito d'armatura. Quanto appena detto è dovuto ad una caratteristica intrinseca dei magneti, i quali non necessitano di alcun tipo di alimentazione per generare un campo magnetico.

Per questa ragione si farà sempre riferimento alla seguente rappresentazione:

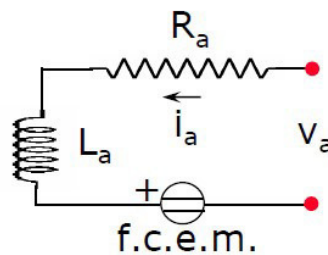


Fig. 2.2 – rappresentazione di un motore elettrico DC a magneti permanenti

Grazie alla presenza di un flusso costante, le equazioni generiche precedentemente scritte possono essere semplificate come indicato:

$$v_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + f.c.e.m.$$

$$f.c.e.m. = K_v \omega$$

$$C_m = K_t i_a$$

Si analizza ora la parte meccanica del motore, ovvero si considerano i fattori di inerzia  $J$  del rotore e gli attriti  $B$  delle spazzole ottenendo la seguente relazione:

$$C_m = J \frac{d\omega}{dt} + B \omega + C_{ext}$$

Si sono quindi ricavate le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti che descrivono completamente il comportamento dinamico di un motore elettrico DC a magneti permanenti.

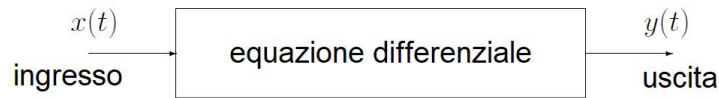
$$v_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + f.c.e.m.$$

$$C_m = J \frac{d\omega}{dt} + B \omega + C_{ext}$$

Grazie alla risoluzioni di queste due relazioni è possibile prevedere quale sarà l'andamento futuro dell'uscita del sistema noto l'andamento dell'ingresso.

I metodi di risoluzioni disponibili sono molteplici, ma quello che risulta più efficiente dal punto di vista dei controlli è l'utilizzo della Trasformata di Laplace.

Questo metodo si basa sull'utilizzo di funzioni complesse  $X(s)$  e  $Y(s)$ , le quali vengono poste in corrispondenza biunivoca con i corrispondenti segnali temporali  $x(t)$  e  $y(t)$ :



$$x(t) \leftrightarrow X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

Il vantaggio nell'utilizzo di questo metodo è che l'equazione differenziale di partenza si trasforma in un'equazione algebrica più facilmente risolvibile:

$$Y(s) = G(s) X(s)$$

dove  $G(s)$  è chiamata "funzione di trasferimento del sistema".

Applicando questo tipo di trasformazione alle relazioni precedentemente trovate si ottiene:

$$V_a(s) = I_a(s) R_a + L_a I_a(s) s + K_v \omega(s)$$

$$C_m(s) = J \omega(s) s + B \omega(s) + C_{ext}(s)$$

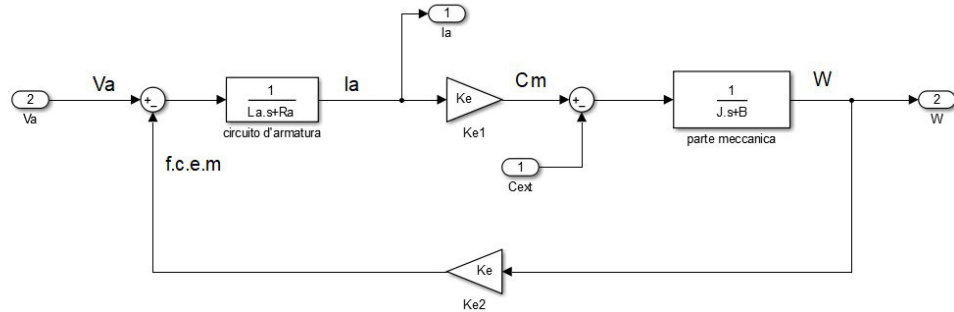
Effettuando dei passaggi matematici è possibile ricavare:

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - f.c.e.m.(s)}{L_a s + R_a} = \frac{V_a(s) - K_v \omega(s)}{L_a s + R_a}$$

$$\omega(s) = \frac{C_m - C_{ext}}{J s + B}$$

## 2.2 Implementazione su piattaforma Simulink

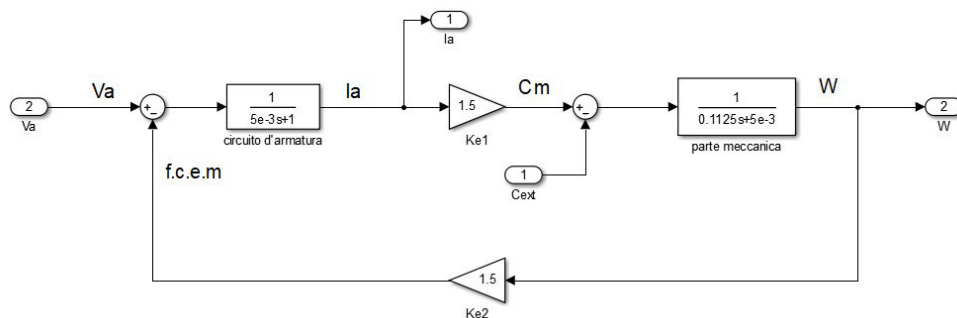
Si procede ora ad implementare su piattaforma Simulink le equazioni differenziali ottenute nel paragrafo precedente.



Sfruttando la formula di Mason è possibile ricavare la funzione di trasferimento che lega la velocità angolare del motore alla sua tensione d'armatura.

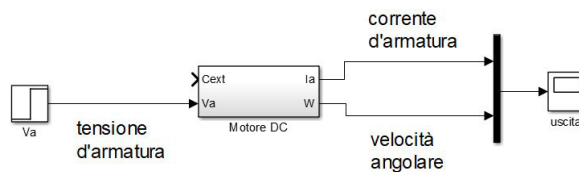
$$G(s) = \frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_e}{(L_a s + R_a)(J s + B) + K_e^2} = \frac{K_e}{(L_a J)s^2 + (L_a B + R_a J)s + R_a B + K_e^2}$$

Sostituendo alle variabili i valori dei dati di targa forniti si ottiene la seguente rappresentazione:



$$G1(s) = \frac{1.5}{(5 * 10^{-3} * 0.1125)s^2 + (5 * 10^{-3} * 5 * 10^{-3} + 0.1125)s + 5 * 10^{-3} + 1.5^2}$$

Si noti che, durante tutta la trattazione, lo schema sopra illustrato verrà rappresentato sotto forma di un blocco unico con il nome “Motore DC”. In questo modo si ottiene una maggiore semplicità circuitale.



# Capitolo 3

## Risposta al gradino

*In questo capitolo viene mostrata la risposta del motore quando si presenta un segnale a gradino in ingresso. In prima analisi si espone il comportamento del sistema in catena aperta, cercando di risolvere la problematica legata al valore di picco di corrente di avviamento. Si passa infine allo studio della dinamica d'uscita in seguito all'aggiunta di un feedback negativo.*

### 3.1 Sistema in catena aperta

In prima analisi si studia il comportamento del motore in assenza di controllo ovvero in catena aperta. Come si può facilmente intuire, questo sistema, non avendo nessun tipo di controllo e limitazione, potrebbe non rispettare i valori massimi stabiliti dai dati di targa.

Ci si pone ora nella situazione limite di lavoro garantita dal costruttore, ovvero la condizione in cui si presenta in ingresso un gradino di ampiezza pari alla tensione nominale, quindi  $V_a = V_{an} = 250V$ . Questo test viene eseguito per verificare che il motore, durante l'andamento a regime, lavori con un consumo di corrente inferiore, o al massimo uguale, al valore nominale (tuttavia si può accettare un picco di corrente pari a 2-3  $I_{an}$  a patto che questo sia applicato per breve periodo di tempo).

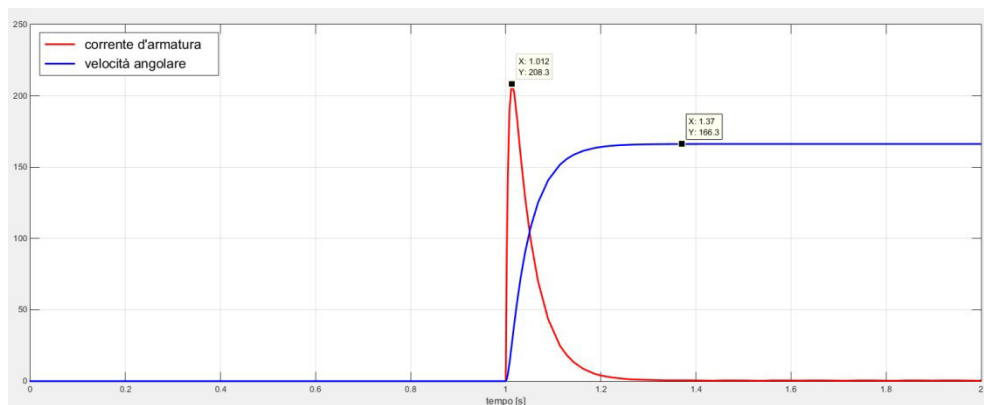


Fig. 3.1 – risposta di un motore in catena aperta con  $C_{ext}=0$

Come si può osservare dalla retta che mostra l'andamento della corrente d'armatura, il motore presenta un problema nella fase di avviamento, in quanto la corrente di spunto raggiunge un valore inaccettabile (circa uguale a 10  $I_{an}$ ).

Questo comportamento si viene a creare perché nel tratto iniziale la velocità angolare, che cresce con una dinamica molto lenta rispetto alla corrente d'armatura, assume dei valori molto bassi. Come conseguenza si ottiene che la f.c.e.m., proporzionale a  $\omega(s)$ ,

presenta dei valori molto piccoli rispetto alla tensione di armatura applicata. Si viene a generare un picco di corrente di avviamento che può danneggiare il motore.

Quanto detto è dimostrato dalla seguente relazione:

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - f.c.e.m.(s)}{L_a s + R_a}$$

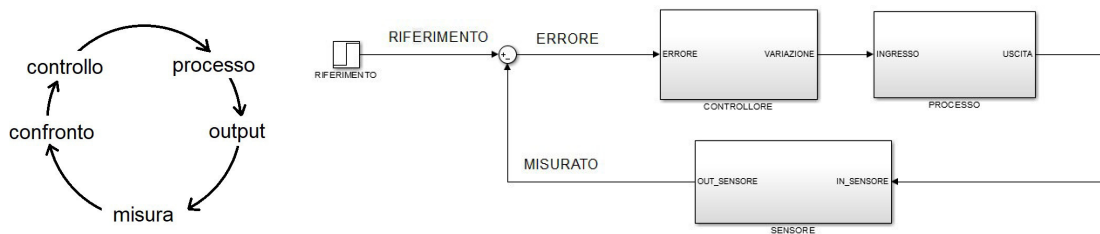
Risulta quindi necessario effettuare una limitazione della corrente di armatura per evitare che si raggiungano dei valori di picco pericolosi per il motore.

## 3.2 Limitazione della corrente d'armatura

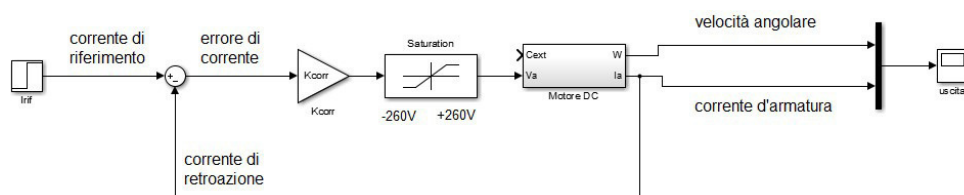
Si procede ora a progettare un circuito che svolga la funzione di mantenere il valore della corrente al di sotto di un certo limite massimo.

Per risolvere questo problema si ricorre ad una strategia di controllo effettuata in catena chiusa con retroazione negativa. Questo tipo di feedback permette di modificare il parametro in ingresso al blocco "Processo" a seconda del valore del segnale errore (quantità ottenuta dalla differenza tra il segnale di riferimento e il segnale di feedback).

Un controllo in catena chiusa si compone quindi di queste fasi:



Per effettuare una regolazione di questo tipo è necessario aggiungere un sensore nel ramo di retroazione. Questo blocco ha lo scopo di trasformare il valore di una grandezza fisica in un'altra grandezza legata alla prima mediante una funzione di trasferimento. Il valore così ottenuto in uscita dal trasduttore viene poi confrontato con il segnale di riferimento, al fine di ottenere il valore del segnale errore. Durante questa trattazione verrà considerato un sensore ideale, ovvero un trasduttore con rendimento unitario e quindi con comportamento equivalente ad un filo. Il valore in uscita dal processo, quindi, sarà uguale a quello che verrà poi confrontato con il segnale di riferimento. Lo schema viene modificato come segue:



Si noti che, oltre al controllo di corrente, si deve introdurre un saturatore che limiti la tensione in ingresso al motore ad un valore massimo di poco superiore a quello nominale.

Si passa ora al dimensionamento del regolatore svolto dal blocco  $K_{corr}$ . Questo parametro deve assumere un valore tale da garantire che l'errore di corrente si annulli nel minor tempo possibile mantenendo, però, una buona dinamica d'uscita.

Si pone l'attenzione sul fatto che, con l'introduzione del saturatore, il sistema non ha più un comportamento lineare; per questo motivo si procede alla scelta del valore in base ai risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate con  $K_{corr}=10$ ,  $K_{corr}=26$  e  $K_{corr}=50$ . La decisione viene presa a posteriori.

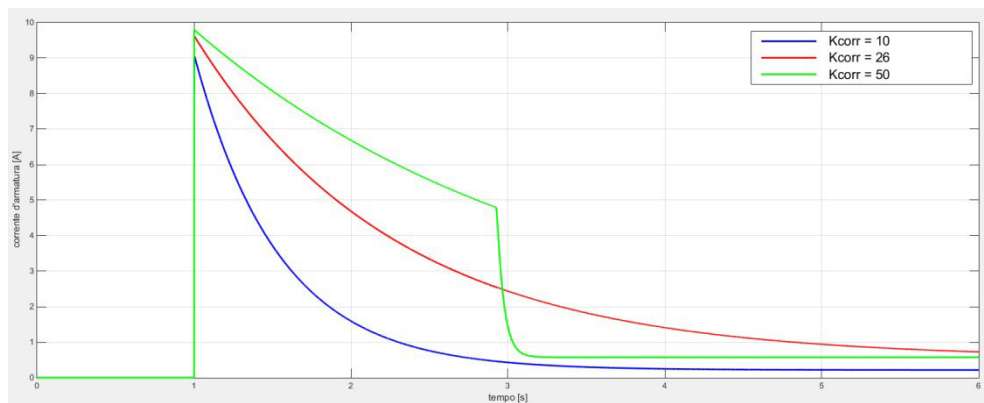


Fig. 3.2 – andamento della corrente d'armatura al variare di  $K_{corr}$

Ad un primo sguardo, osservando solo il grafico dell'andamento della corrente d'armatura, si sarebbe portati a scegliere un valore basso di  $K_{corr}$ , in quanto l'errore associato diminuisce più rapidamente. Si può notare, però, che al decrescere del parametro si ottiene una dinamica del motore molto lenta. Quanto detto è mostrato in figura:

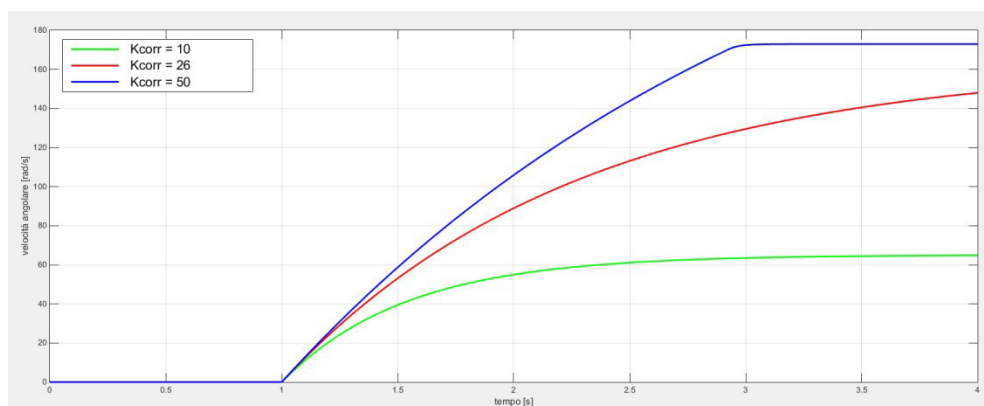


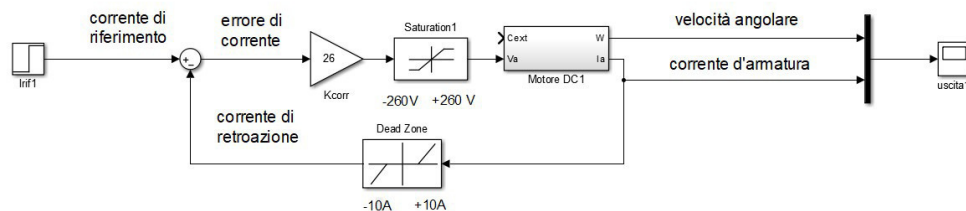
Fig. 3.3 – andamento della velocità angolare al variare di  $K_{corr}$

Si deve quindi scegliere un buon compromesso tra la dinamica del motore e l'andamento dell'errore della corrente, cercando allo stesso tempo di mantenere la risposta del sistema il più lineare possibile. In questo modo si avrà che l'andamento della velocità angolare e della corrente d'armatura ottenuta per il resto della trattazione

presenteranno un comportamento il più vicino possibile ad uno raggiunto attraverso lo studio basato sulla sola funzione di trasferimento. La scelta ricade quindi su  $K_{corr}=26$ .

Al fine di migliorare ulteriormente la dinamica del motore si è posto in retroazione un blocco di dead zone; in questo modo si ottiene che la regolazione di corrente viene eseguita solo in caso di necessità. Questo blocco, infatti, garantisce output nullo quando l'ingresso rientra all'interno di un range di valori (finestra di dead zone) e restituisce un'uscita proporzionale all'ingresso in caso contrario.

Allo schema viene quindi aggiunto il blocco precedentemente analizzato, ponendo la finestra di dead zone pari al valore della corrente nominale ( $I_{sat}=\pm 10A$ ).



Si analizza ora il circuito sopra riportato. Fintanto che la corrente d'armatura si mantiene al di sotto del valore nominale, ovvero  $I_a < I_{an}=10A$ , il limitatore di corrente non interviene. In questa situazione il modello si comporta come se il ramo di retroazione fosse aperto e il valore del segnale di corrente risulta uguale a  $I_{rif}$ . Nel momento in cui  $I_a$  supera il valore di soglia, l'uscita del blocco di dead zone non risulta più nullo, di conseguenza il valore dell'errore di corrente viene ricavato dalla differenza tra la corrente di riferimento e quella di feedback.

Si procede ora a mostrare il confronto dell'andamento del motore prima e dopo l'inserimento della dead zone nel ramo di retroazione.

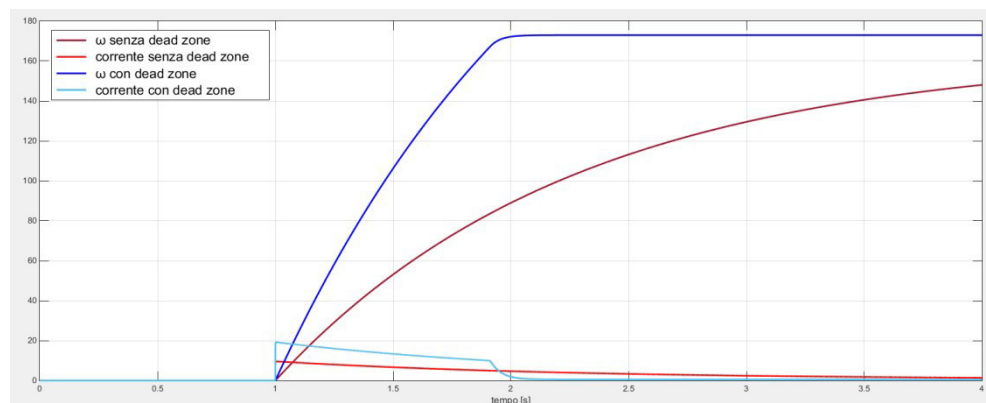


Fig. 3.4 – confronto delle risposte del motore con e senza blocco di dead zone

Dalla figura si può notare che l'introduzione del blocco incrementa notevolmente la dinamica del motore. A questo miglioramento, però, si accompagna l'aumento del valore di corrente di avviamento del motore e anche un sistema meno lineare (in quanto interviene il saturatore). Questo comportamento, però, risulta ancora accettabile poiché il valore della corrente di spunto è circa pari a 2 volte la corrente nominale e si esaurisce in un tempo molto breve.

### 3.3 Sistema retroazionato

Fino a questo momento ci si è preoccupati di ottenere un sistema tale da permettere al motore di lavorare in condizioni di sicurezza senza attuare alcun tipo di retroazione sulla velocità angolare. Come si può facilmente intuire, un funzionamento di questo tipo non presenta un comportamento costante del parametro d'uscita all'insorgere di disturbi esterni e/o alla variazione dei parametri interni. Si sostiene quanto detto mostrando l'andamento di  $I_a(s)$  e di  $\omega(s)$  in seguito all'applicazione di un disturbo esterno di valore  $C_{ext}=10Nm$  all'istante  $t=3s$ .

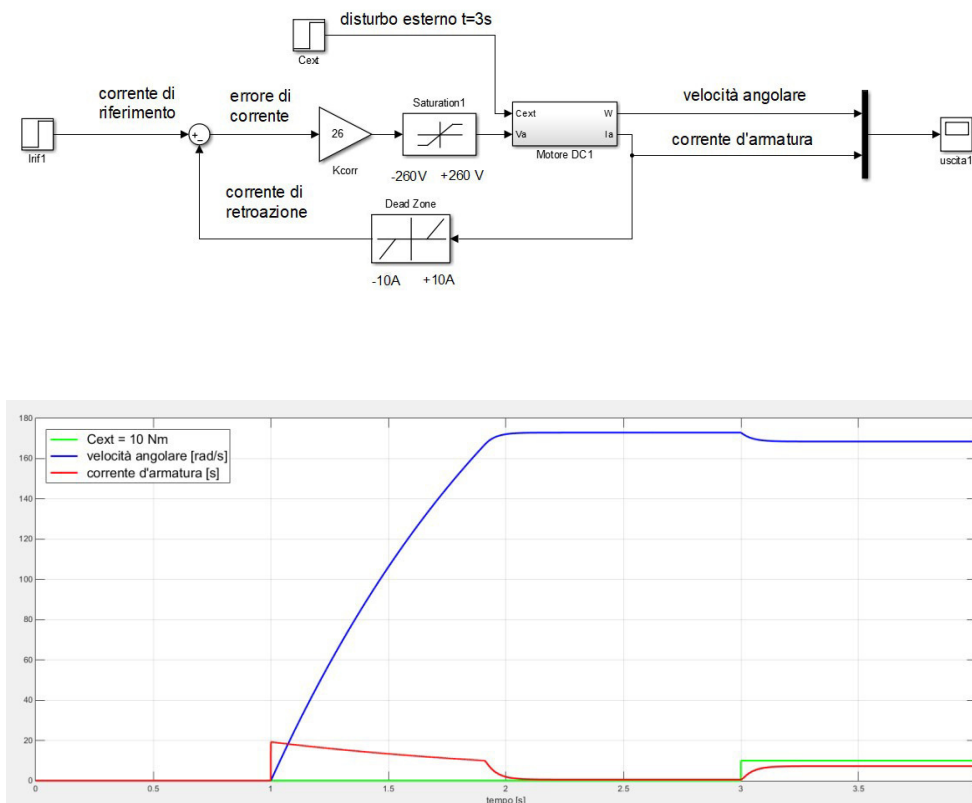


Fig. 3.5 – risposta del motore con  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=3s$

Dalla figura si può notare come la variazione subita risulti inaccettabile in relazione allo scopo del progetto.

Al fine di rendere il sistema il più possibile immune agli effetti creati dai disturbi esterni si utilizza nuovamente un feedback negativo al quale viene aggiunto un saturatore. Si suppone, inoltre, che il sensore posto in retroazione, tipicamente una dinamo tachimetrica, abbia un rendimento unitario.

Si procede ora a confrontare il transitorio del motore in catena aperta e chiusa in risposta ad un disturbo esterno pari a  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=3s$ .



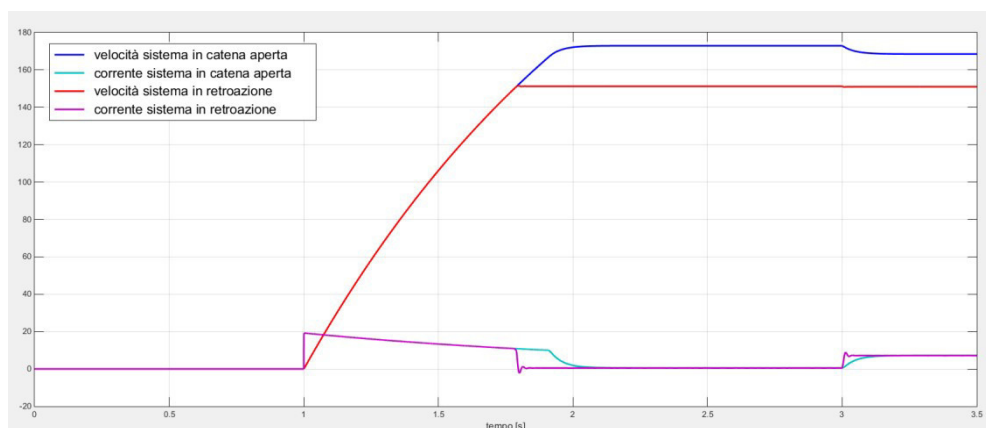
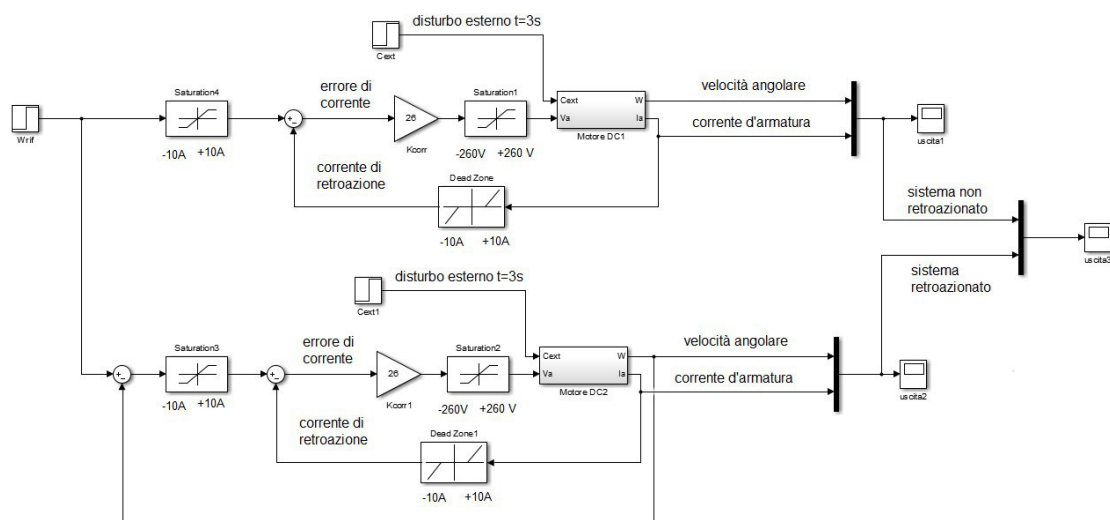


Fig. 3.6 – confronto delle risposte del motore in catena aperta e chiusa con  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=3s$

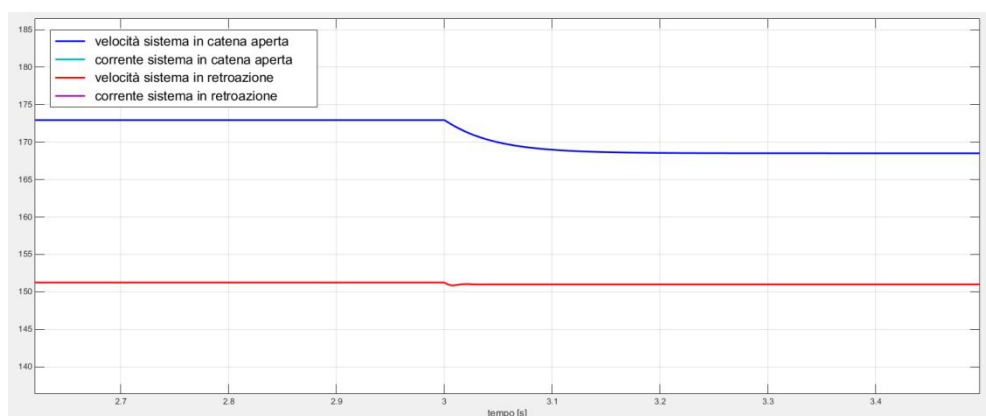
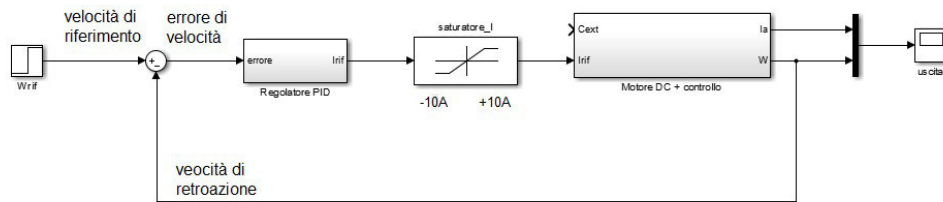


Fig. 3.7 – zoom del confronto delle risposte del motore in catena aperta e chiusa con  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=3s$

Come si può notare dalle figure la modifica introdotta produce un miglioramento significativo.

Nel prossimo capitolo, però, si potrà apprezzare come il comportamento ottenuto fino a questo momento non sia l'andamento ottimale raggiungibile dal motore preso in esame. L'aggiunta di un regolatore di tipo PID permette, infatti, di incrementare ulteriormente la rapidità e la robustezza del sistema.



# Capitolo 4

## Controllo di velocità con regolatore PID

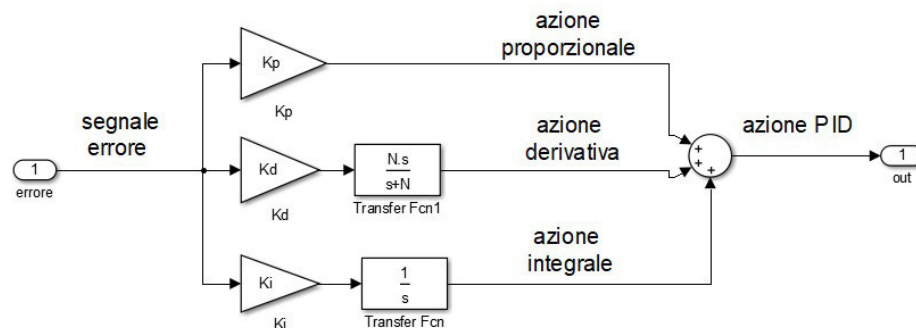
*In questo capitolo si mostrano i passaggi eseguiti per progettare il regolatore PID al fine di ottenere un controllo ottimale della velocità angolare del motore. Ad ogni modifica effettuata si cercheranno di mettere in risalto i miglioramenti e le criticità introdotte.*

### 4.1 Introduzione del regolatore PID

Il regolatore PID è un controllore standard tempo invariante che esegue tre tipi diversi di azioni sul segnale errore:

- azione proporzionale  $K_p$
- azione derivativa  $K_d$
- azione integrale  $K_i$

Come si può vedere dall'immagine sotto riportata, il segnale in uscita dal regolatore dipende dall'azione combinata di questi tre elementi.



La funzione di trasferimento ideale del regolatore può essere così espressa:

$$G_{PID}(s) = \frac{I_{rif}(s)}{e(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_p s + K_i + K_d s^2}{s}$$

Si nota subito che  $G_{PID}(s)$  presenta un grado relativo minore di 0 e quindi il sistema rappresentato è di tipo improprio (ovvero fisicamente irrealizzabile). Per risolvere questo problema si introduce un nuovo parametro chiamato N.

$$D_{ideale} = K_d s \rightarrow D_{reale} = K_d \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$$

Il valore del parametro N deve essere scelto in modo tale che il polo introdotto, per rendere il sistema fisicamente realizzabile, agisca all'esterno della banda di interesse.

Si può facilmente intuire che maggiore sarà il valore di  $N$ , più il termine derivativo  $D_{\text{reale}}$  produrrà un comportamento simile a un derivatore ideale.

Introducendo le considerazioni appena effettuate, si giunge alla scrittura della FT reale del regolatore PID.

$$G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$$

Quest'ultima può anche essere scritta in funzione ai parametri  $T_i$  e  $T_d$  che rappresentano rispettivamente la costante di tempo dell'azione integrale e derivativa.

$$G_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d \frac{sN}{s + N} \right)$$

Si noti che in alcuni casi il termine derivativo e/o integrale possono essere assenti. Si ottengono così le FT dei regolatori P, PD, PI.

$$G_P(s) = K_p$$

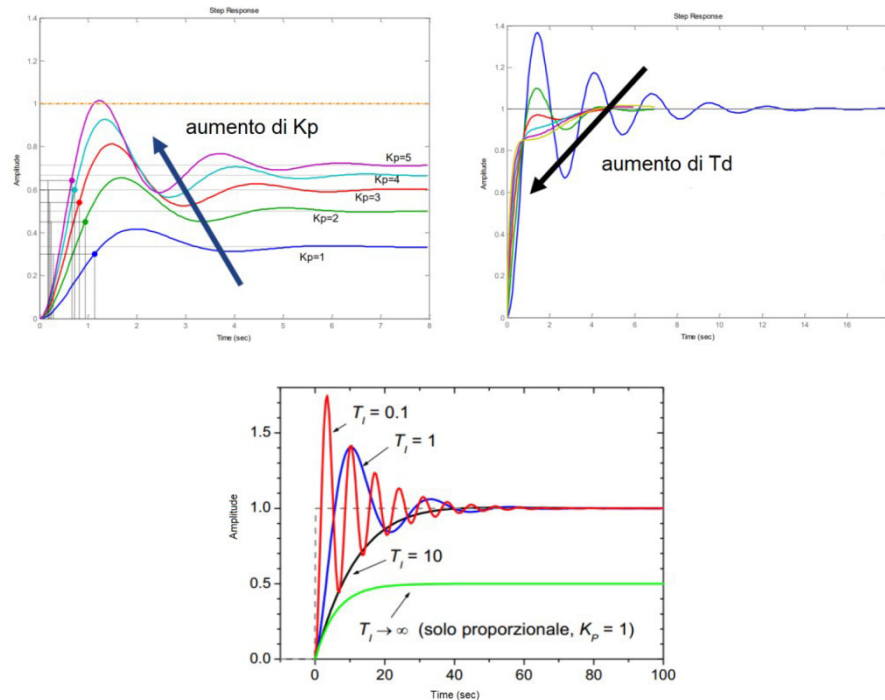
$$G_{PD}(s) = K_p \left( 1 + T_d \frac{sN}{s + N} \right)$$

$$G_{PI}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Si sintetizzano ora in una tabella i vantaggi e gli svantaggi introdotti da ogni singola azione del regolatore PID sulla risposta di un sistema generico.

AZIONE DI CONTROLLO	VANTAGGIO	SVANTAGGIO
Proporzionale $K_p$	Accelera la risposta del sistema e riduce l'errore a regime (per essere azzerato del tutto $K_p$ dovrebbe valere infinito)	Un valore elevato può innescare un aumento delle oscillazioni generate con conseguente destabilizzazione del sistema
Integrale $T_i = \frac{K_p}{K_i}$	Annulla l'errore a regime in presenza di riferimenti costanti e aumenta la velocità di risposta del sistema	Se non opportunamente scelto può destabilizzare il sistema
Derivativo $T_d = \frac{K_d}{K_p}$	Migliora la stabilità del sistema in catena chiusa	Tende a rallentare la risposta del sistema e ad amplifica i segnali ad alta frequenza (tipicamente caratterizzati dal rumore elettromagnetico)

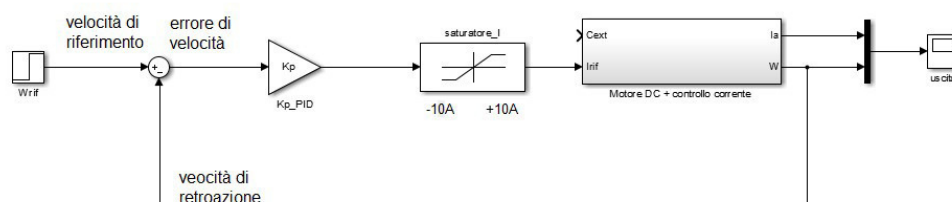
Vengono ora mostrati dei grafici che rappresentano la risposta di un sistema generico alla variazione dei singoli parametri. Queste considerazioni risulteranno utili nei paragrafi successivi per una scelta appropriata del set dei valori dei singoli regolatori di tipo P, PD, PI.



Dopo aver dato una panoramica generica del PID, si procede all'analisi degli effetti prodotti da ogni singolo regolatore sullo specifico motore preso in considerazione.

## 4.2 Regolatore P

Come si può dedurre facilmente dal nome, questo tipo di regolatore produce un'azione di controllo proporzionale al valore del segnale errore.



Mediante la formula di Mason è possibile ricavare la funzione di trasferimento del blocco "Motore DC + controllo corrente" che rappresenta l'azione combinata del motore DC e della rete di feedback della corrente.

Si torna a sottolineare che mediante la funzione di trasferimento si studia il comportamento di un sistema lineare; quello implementato in Simulink, però, esibisce tale comportamento solo nel momento in cui le non linearità (ovvero saturatore e blocco di dead zone) smettono di agire.

Si riporta ora la funzione di trasferimento ottenuta, chiamata  $G_{mot}$ , sulla piattaforma di MATLAB per mezzo di questo pezzo di codice. Attraverso questo passaggio si può utilizzare la funzione `sisotool` che permette di osservare in tempo reale la variazione della risposta del sistema in risposta al mutamento dei parametri del controllore.

```
La=5e-3;
Ra=1;
Ke=1.5;
J=0.1125;
B=La;
den_G_mot=[La*J La*B+Ra*J Ra*B+Ke*Ke];
num_G_mot=Ke;
G_mot=tf(num_G_mot,den_G_mot);

num_a=1;
den_a=[5e-3 1];
a=tf(num_a,den_a);
b=1.5;
d=1.5;
num_c=1;
den_c=[0.1125 5e-3];
c=tf(num_c,den_c);
Kcorr=26;
num_G2=a*b*c*Kcorr;
den_G2=1+a*b*c*d+a*Kcorr;
G_mot=tf(num_G2,den_G2)

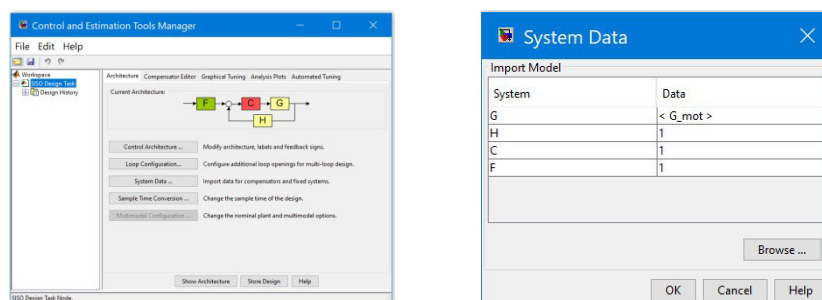
G_mot =

          39
-----
0.0005625 s^2 + 0.1125 s + 0.005

Continuous-time transfer function.

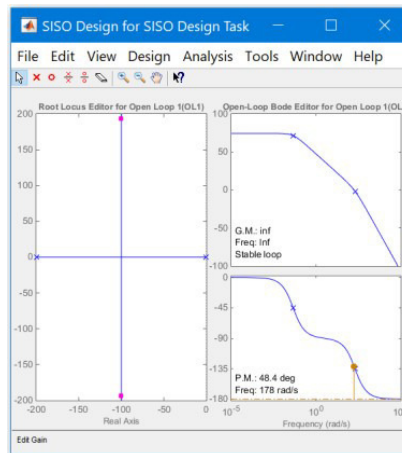
>> sisotool(G_mot);
```

La finestra di interfaccia di `sisotool` si presenta nel seguente modo:



Come si può notare dalle figure sopra riportate, la struttura e i parametri inseriti ricalcano perfettamente la funzione di trasferimento del sistema lineare da analizzare.

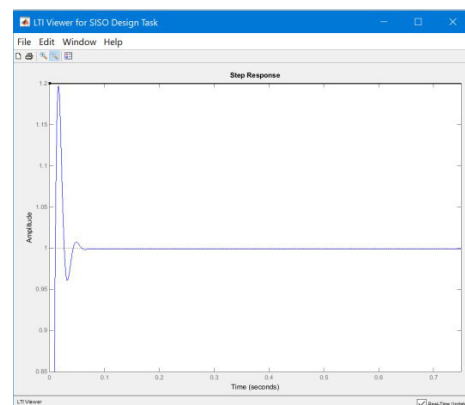
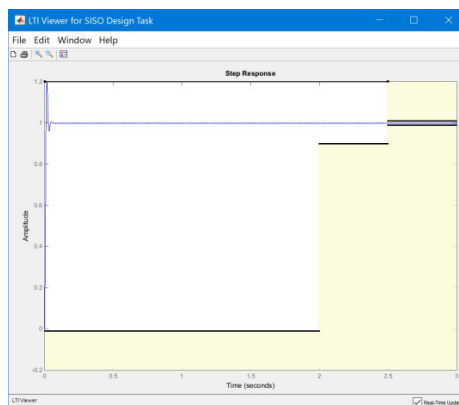
Si mostra ora il luogo delle radici associato:



Da questa immagine è possibile notare che il sistema è stabile, e rimane tale, per qualsiasi valore di  $K$ . Si può quindi agire su tale parametro per cercare di incrementare le prestazioni dell'uscita in modo tale da rispettare le specifiche temporali richieste.

Uno dei metodi per trovare questo valore è l'analisi temporale del sistema, quando in ingresso è posto un gradino unitario. Grazie a questo approccio è possibile sfruttare la funzione "Edit Design Requirement" e impostare manualmente i valori limiti temporali desiderati. Questi ultimi verranno poi rappresentati sulla finestra del transitorio del sistema analizzato. La finestra di interfaccia è così composta:

Per ottenere il valore di  $K$  ottimale bisogna andare ad agire con il cursore sul luogo delle radici prestando, però, attenzione che la dinamica del motore resti all'interno dei range imposti. Si trova che per  $K=0.685$  la risposta del sistema ha le prestazioni massime.



Si procede ora ad inserire il valore ottenuto all'interno del progetto in Simulink per simulare la reale dinamica del motore.

Lo schema utilizzato per tale scopo è il seguente:

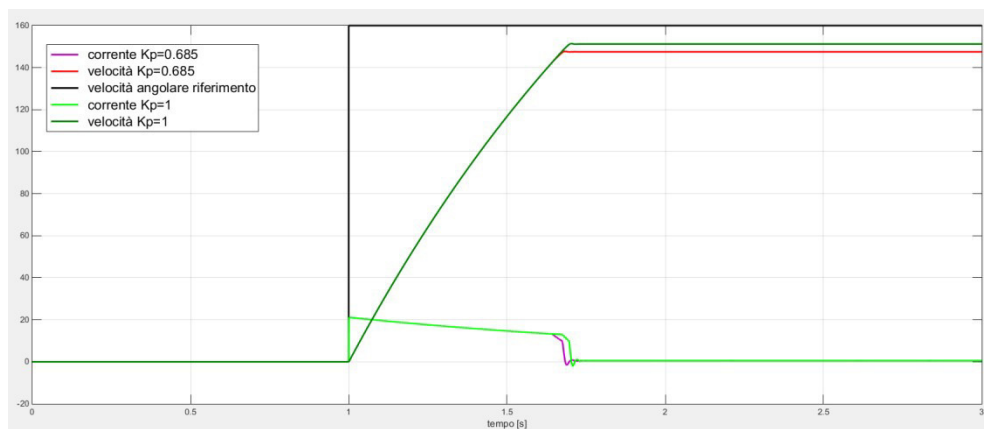
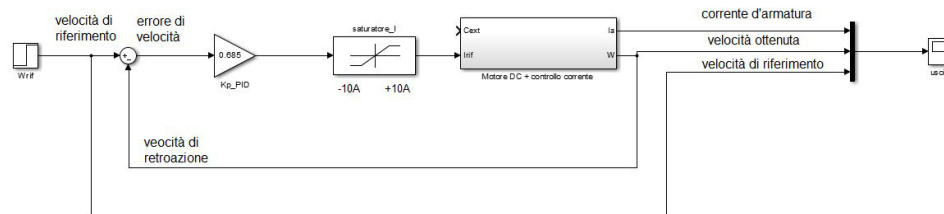


Fig. 4.1 – confronto delle risposte del motore con e senza regolatore  $P$

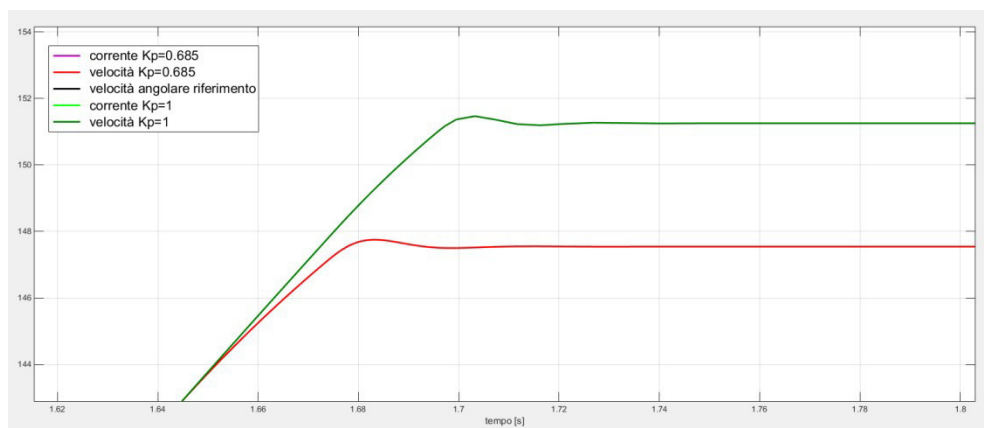


Fig. 4.2 – zoom del confronto delle risposte della velocità angolare del motore con e senza regolatore  $P$

Come preannunciato, l'andamento del sistema non coincide con quello ottenuto su sisotool in quanto il comportamento del sistema non è lineare.

Nonostante questo, dalla figura 4.2, si può notare come l'introduzione del regolatore  $P$  peggiori, anche se di poco, la dinamica del motore mantenendo un andamento della corrente d'armatura pressoché uguale.



Ad un'analisi delle prestazioni ottenute si può osservare come il sistema rispetti i vincoli temporali (ovvero  $t_r$  e  $t_s$ ) e della sovraelongazione, ma presenti ugualmente un errore a regime significativo.

$$e_p = \frac{r}{1 + K_p}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_P(s)G_{mot}(s) = 26.715$$

$$e_p = \frac{160}{1 + 26.715} = 5.77$$

Questo valore, infatti, risulta superiore a quello ottenuto da un sistema solamente retroazionato che presenta un errore a regime  $e_p=4$ .

Si prova a migliorare la dinamica del sistema sostituendo il regolare P con un PD.

### 4.3 Regolatore PD

Il regolatore PD funge da rete anticipatrice e, in quanto tale, migliora la stabilità del sistema retroazionato, peggiorando, però, il tempo di risposta dello stesso. Come si può facilmente intuire l'introduzione di questa rete non apporterà miglioramenti significativi.

Prima di procedere con la simulazione per giustificare quanto detto, però, bisogna valutare in quale punto del piano immaginario si devono inserire i poli e gli zeri legati al regolatore PD fisicamente realizzabile.

Per fare questo bisogna far riferimento alla sua funzione di trasferimento:

$$G_{PD}(s) = K_p \left( 1 + T_d \frac{N s}{s + N} \right) = K_p \left( \frac{1 + (T_d + N) s}{1 + N s} \right)$$

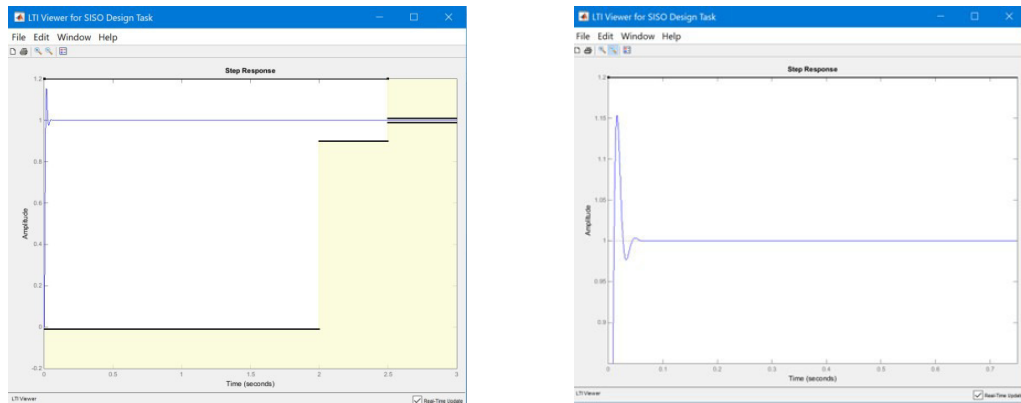
Sulla base delle considerazioni fatte nel paragrafo introduttivo di questo capitolo si può affermare che i parametri  $N$  e  $T_d$  devono assumere valori molto piccoli per ottenere delle prestazioni ottimali.

Si sceglie, quindi, di simulare il sistema in sisotool utilizzando questo set di valori:  $N=0.0005$ ,  $T_d=0.00005$  e  $K_p=0.685$ .

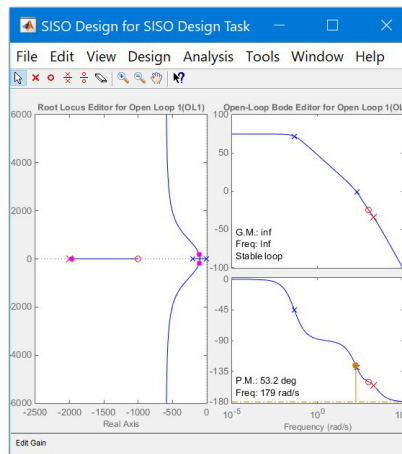
La funzione di trasferimento del controllore diventa, quindi, la seguente:

$$G_{PD}(s) = 0.685 \left( \frac{1 + 0.001s}{1 + 0.0005s} \right)$$

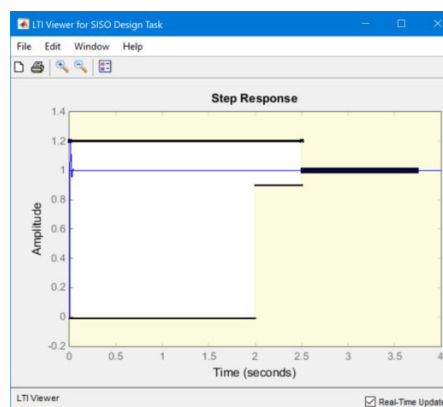
La risposta del sistema risulta essere del seguente tipo:



Come si può notare dalle immagini, la dinamica ottenuta rientra nei vincoli imposti. Analizzando il luogo delle radici, però, si può osservare come il sistema, pur conservando la caratteristica di stabilità, presenti un piccolo margine di miglioramento.



Si giunge alla conclusione che il valore ottimale di K per rispettare i vincoli imposti è pari a  $K=1.005$  (questa scelta è dettata dal fatto che ad un piccolo incremento del parametro corrisponde un aumento significativo della sovralongazione).



La funzione di trasferimento del controllore viene, quindi, modificata come segue:

$$G_{PD}(s) = 1.005 \left( \frac{1 + 0.001s}{1 + 0.0005s} \right)$$

Si procede ora ad implementare  $G_P(s)$  sopra riportato in Simulink e ad osservare l'andamento realmente ottenuto dal sistema. Lo schema utilizzato è il seguente:

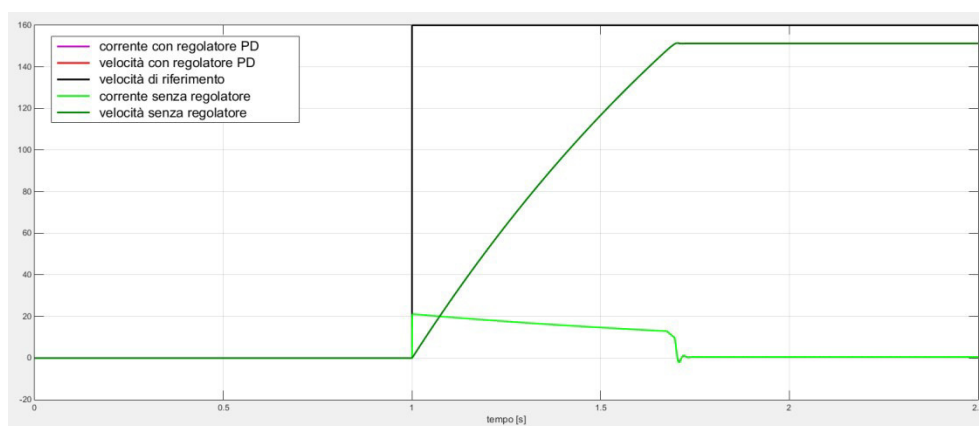
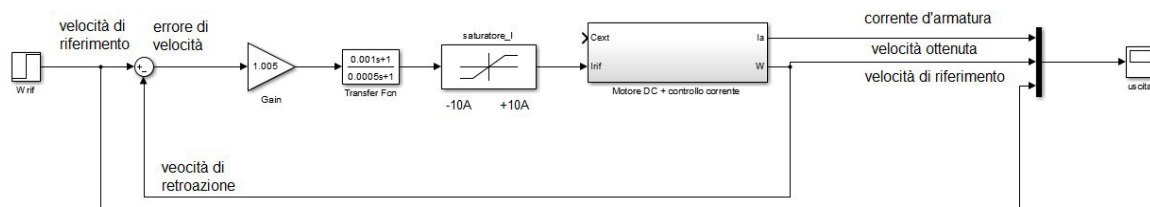


Fig. 4.3 – confronto delle risposte del motore con e senza regolatore PD

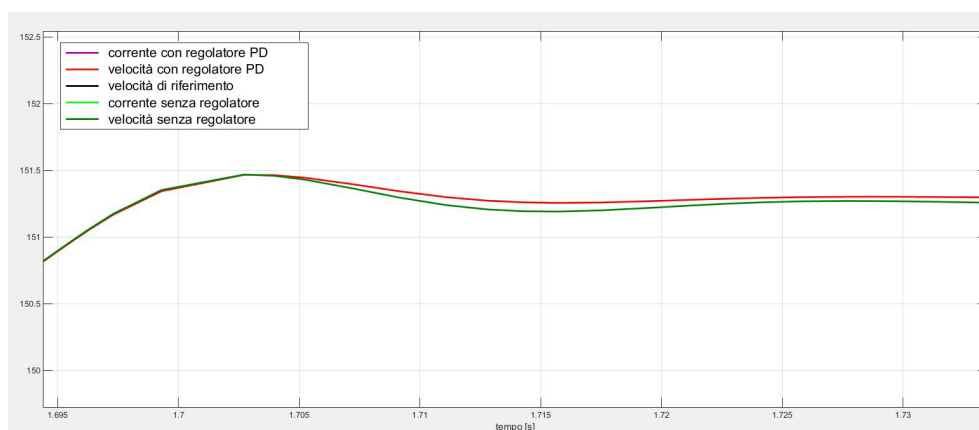


Fig. 4.4 – zoom della velocità ottenuta dal confronto delle risposte del motore con e senza regolatore PD

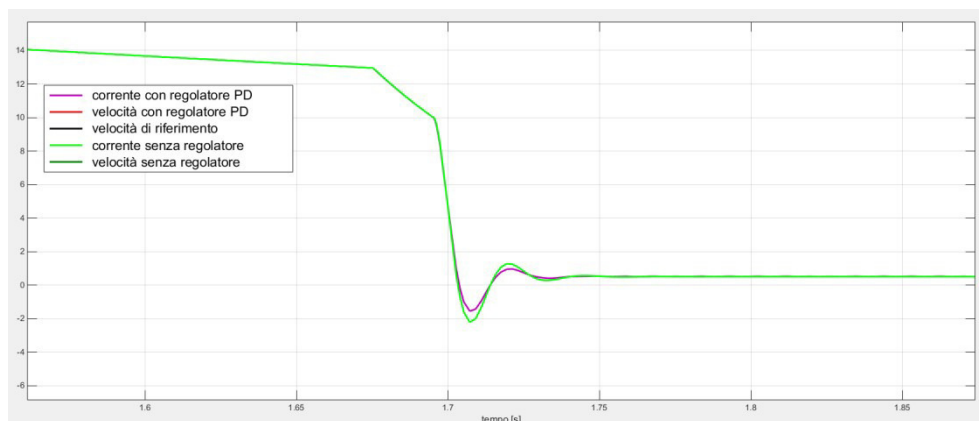


Fig. 4.5 – zoom della corrente ottenuta dal confronto delle risposte del motore con e senza regolatore PD

Come da previsione, dai grafici si può notare che l'utilizzo del regolatore PD introduce un miglioramento irrisorio rispetto al comportamento del sistema senza regolatore.

Quanto detto è riscontrabile anche dalla riduzione minima dell'errore a regime.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{PD}(s)G_{corr}(s) = 39.195$$

$$e_p = \frac{160}{1 + 39.195} = 3.98$$

Si analizzano in seguito gli effetti prodotti da un regolatore PI.

## 4.4 Regolatore PI

Il regolatore PI funge da rete ritardatrice e, in quanto tale, diminuisce il tempo di salita, annulla l'errore a regime, ma tende anche a destabilizzare il sistema. Si può quindi prevedere che l'introduzione di questo controllore, se opportunamente dimensionato, possa portare dei miglioramenti significativi nella dinamica complessiva del sistema.

Come nel caso del regolatore PD, si inizia con una valutazione eseguita sui parametri della FT  $G_{PI}(s)$ :

$$G_{PI}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = K_p \left( \frac{s + \frac{1}{T_I}}{s} \right) = \frac{K_p}{T_I} \left( \frac{T_I s + 1}{s} \right)$$

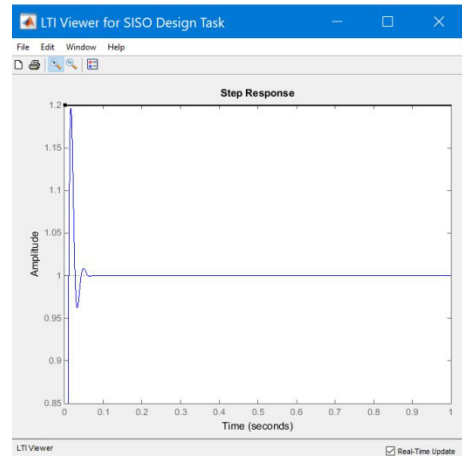
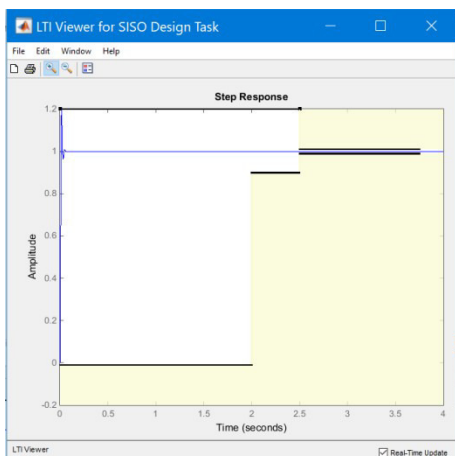
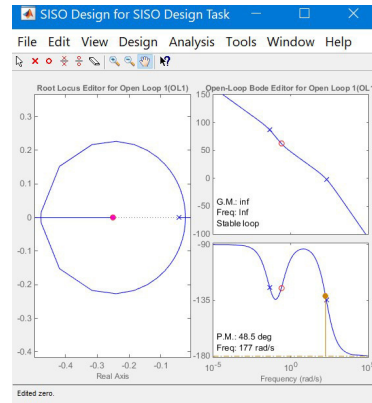
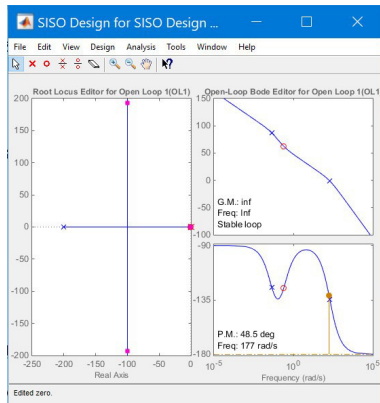
Ricordando quanto affermato nel paragrafo riguardante la teoria dei regolatori PI, si può dichiarare che al diminuire del valore del parametro  $T_I$  si ottiene una riduzione del tempo di risposta del sistema complessivo, ma anche un aumento della sovraelongazione.

Effettuando una serie di iterazioni si giunge alla conclusione che il valore ottimale per questo parametro è  $T_I=4$ .

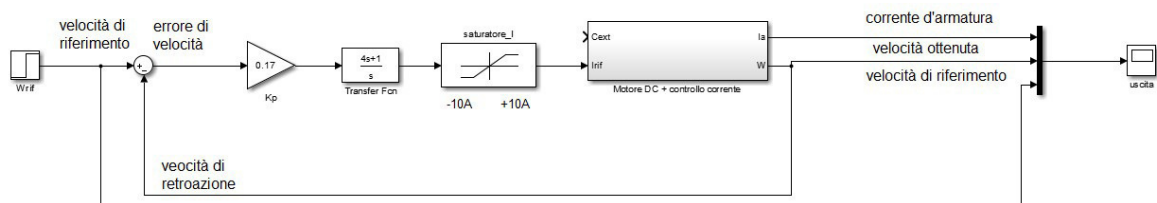
La funzione di trasferimento del compensatore diventa la seguente:

$$G_{PI}(s) = \frac{0.685}{4} \left( \frac{4s + 1}{s} \right) = 0.17 \left( \frac{4s + 1}{s} \right)$$

Il luogo delle radici e il transitorio subiscono una modifica come riportato dalle figure sottostanti:



Si implementa ora la funzione di trasferimento del regolatore sulla piattaforma Simulink e si osserva la risposta reale del sistema.



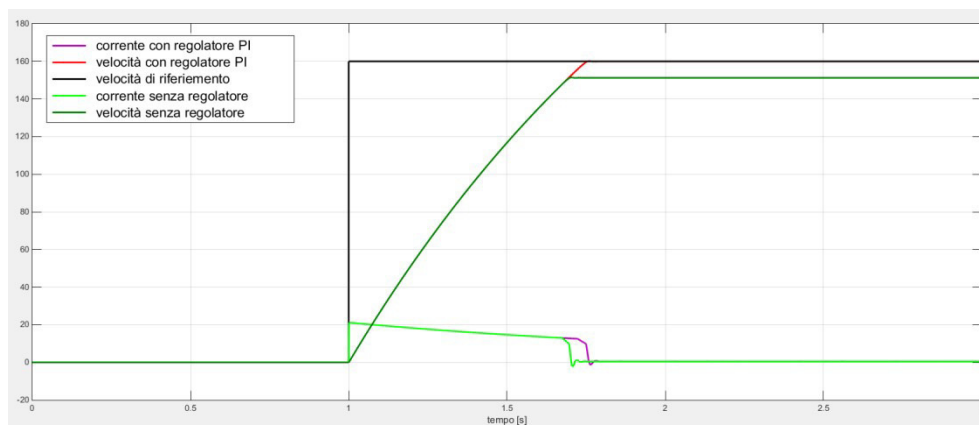


Fig. 4.6 – confronto delle risposte del motore con e senza regolatore PI

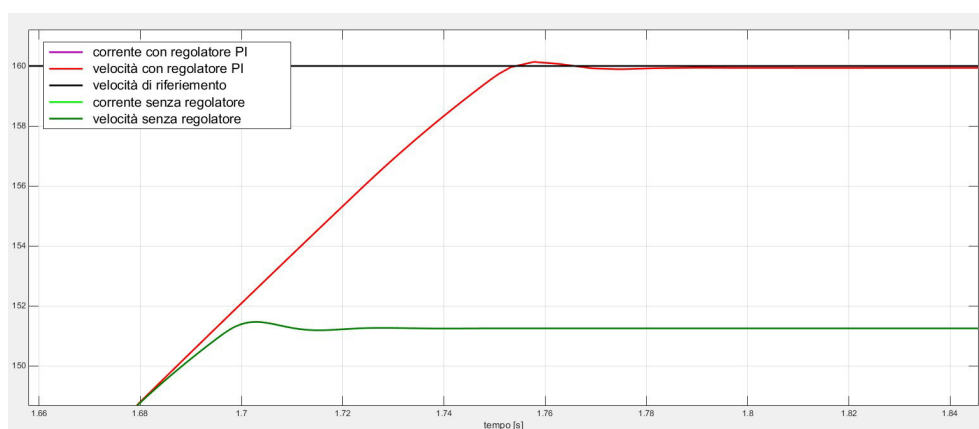


Fig. 4.7 – zoom del confronto delle risposte del motore con e senza regolatore PI

Come si può notare dalle figure, con l'introduzione di questo regolatore le prestazioni migliorano notevolmente. Con questo sistema si ha, inoltre, che vengono rispettati tutti i vincoli di tempo e di sovraelongazione presentando anche un errore a regime nullo.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_p(s)G_{corr}(s) = \infty$$

$$e_p = \frac{160}{1 + \infty} = 0$$

# Capitolo 5

## Conclusioni

Si procede ora al confronto conclusivo di tutti i risultati ottenuti al fine di poter scegliere il regolatore che produce un controllo di velocità ottimale. Per fare questo ci si serve di una serie di grafici che mostrano i vari transitori del sistema all'insorgere di un disturbo esterno pari a  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=2.5s$  posto in ingresso al motore DC.

Lo schema complessivo utilizzato per le simulazioni è il seguente:

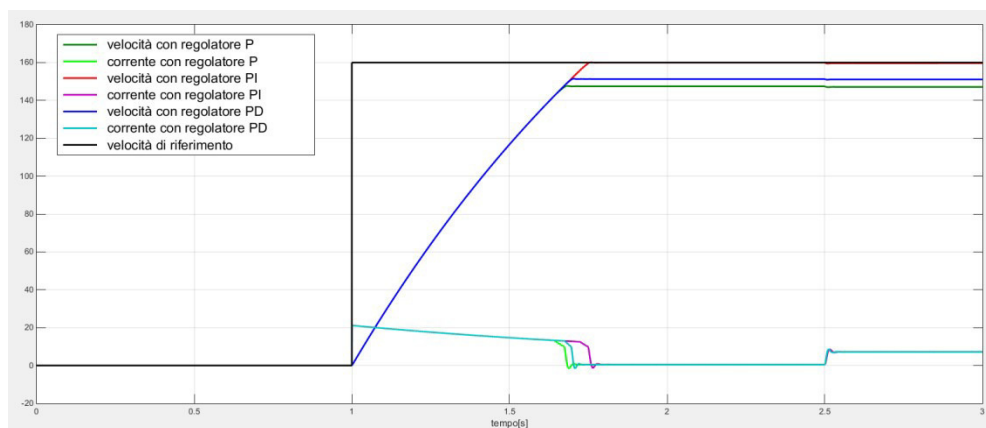
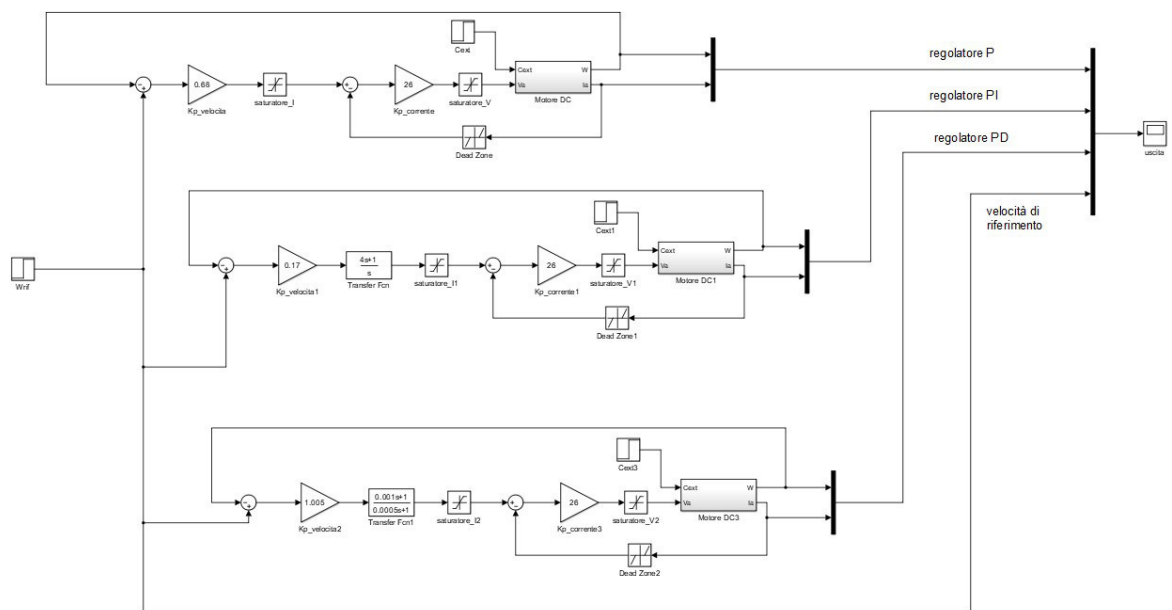


Fig. 5.1 – confronto delle risposte del motore con regolatore P, PD, PI e con  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=2.5s$

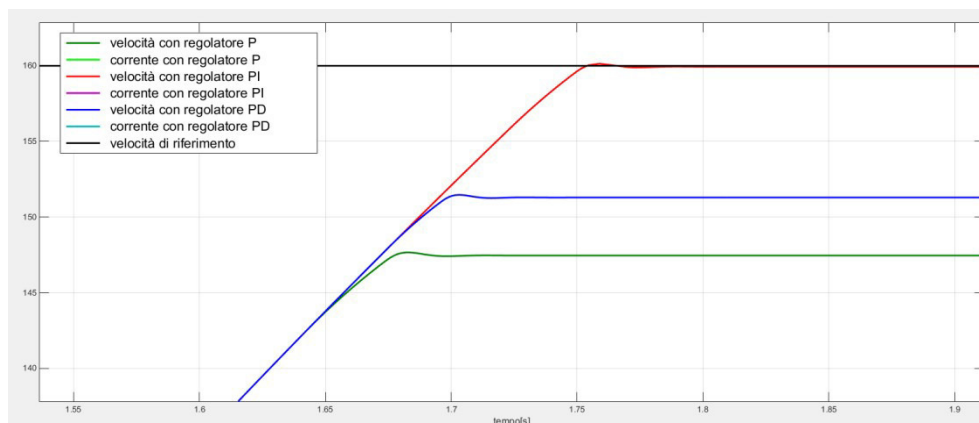


Fig. 5.2 – zoom del confronto delle risposte di velocità del motore con regolatore P, PD, PI con  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=2.5s$

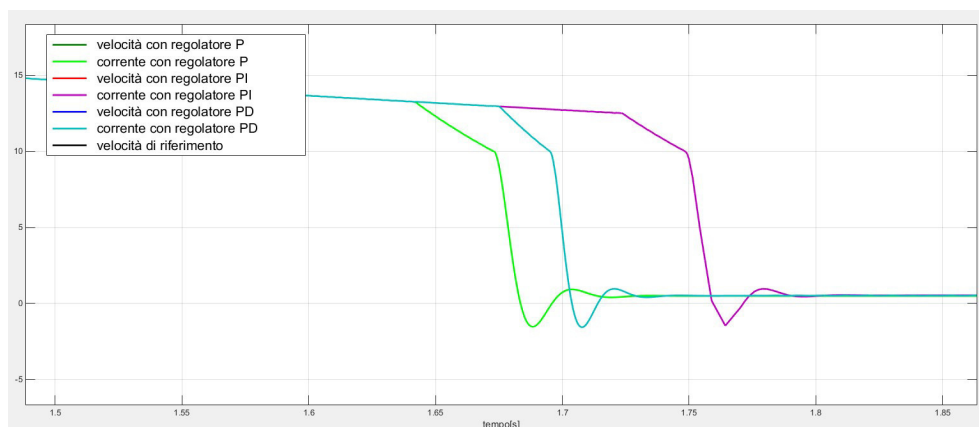


Fig. 5.3 – zoom del confronto delle risposte di corrente del motore con regolatore P, PD, PI con  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=2.5s$

Come si evince dalle figure, il comportamento del regolatore PI ha il transitorio che segue più fedelmente quello di riferimento. Come ultima analisi si procede a confrontare il comportamento del sistema in catena aperta con la dinamica ottenuta utilizzando il controllore PI all'insorgere di  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=2.5s$ .

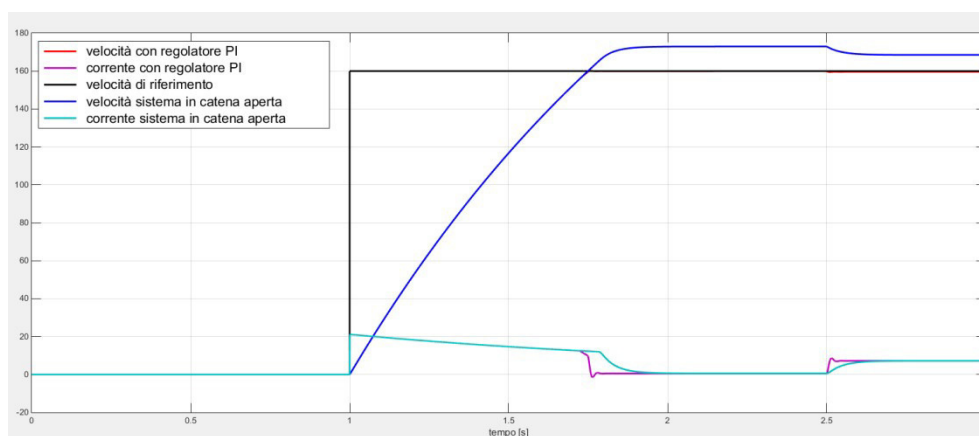
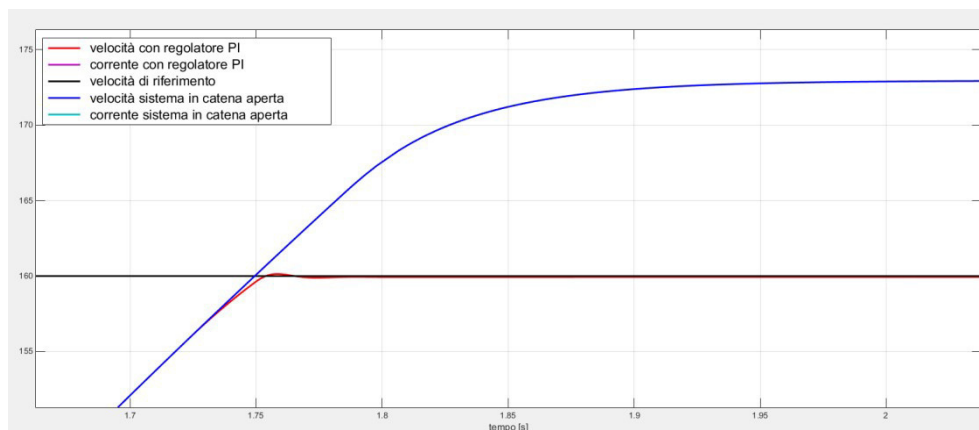
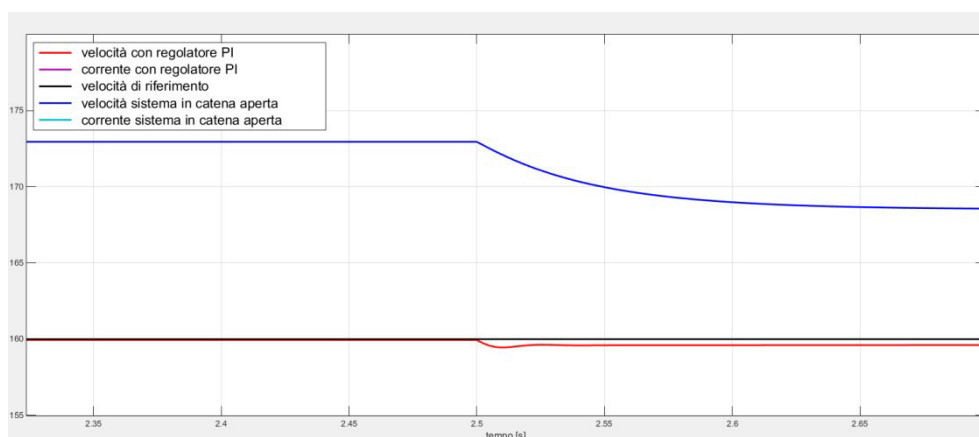


Fig. 5.4 – confronto delle risposte del sistema in catena aperta e in retroazione con regolatore PI posto  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=2.5s$





*Fig. 5.5 – zoom del confronto delle risposte del sistema in catena aperta e in retroazione con regolatore PI posto  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=2.5s$*



*Fig. 5.6 – zoom del confronto delle risposte del sistema in catena aperta e in retroazione con regolatore PI posto  $C_{ext}=10Nm$  in  $t=2.5s$*

Dai grafici si può notare come l'introduzione del regolatore attenui notevolmente gli effetti prodotti da un disturbo esterno.

Si conclude affermando che i comportamenti mostrati in questi grafici sono i migliori che si possono ottenere utilizzando come parametri in ingresso i valori nominali forniti dal costruttore.

Una diminuzione della velocità di riferimento, però, provoca una diminuzione dei valori assunti dalle variabili in gioco con conseguente comportamento maggiormente lineare del sistema. Con questa variazione si ottiene che i blocchi non lineari, quali saturatori e dead zone, intervengono in quantità più limitata. Utilizzando questa modifica si avrà che il tratto iniziale della dinamica del motore non risulterà più a pendenza costante, ma dipenderà maggiormente dal settaggio dei regolatori implementati.

# Bibliografia

- Prof. R. Zanasi, "Controllo automatici"
- Prof. M. Zigliotto, "Azionamenti elettrici"
- R. Dorf, R. Bishop (1995), Modern Control Systems. Addison-Wesley
- M. William, T. Dawn (1998), Control Tutorials for MATLAB and Simulink, disponibile al sito <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>