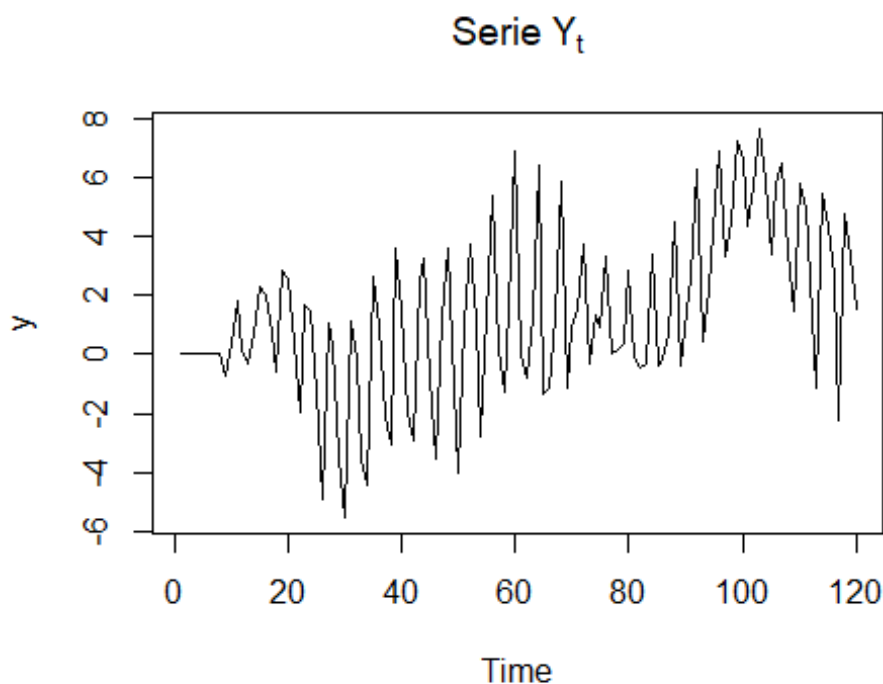


# Analisi della serie economica

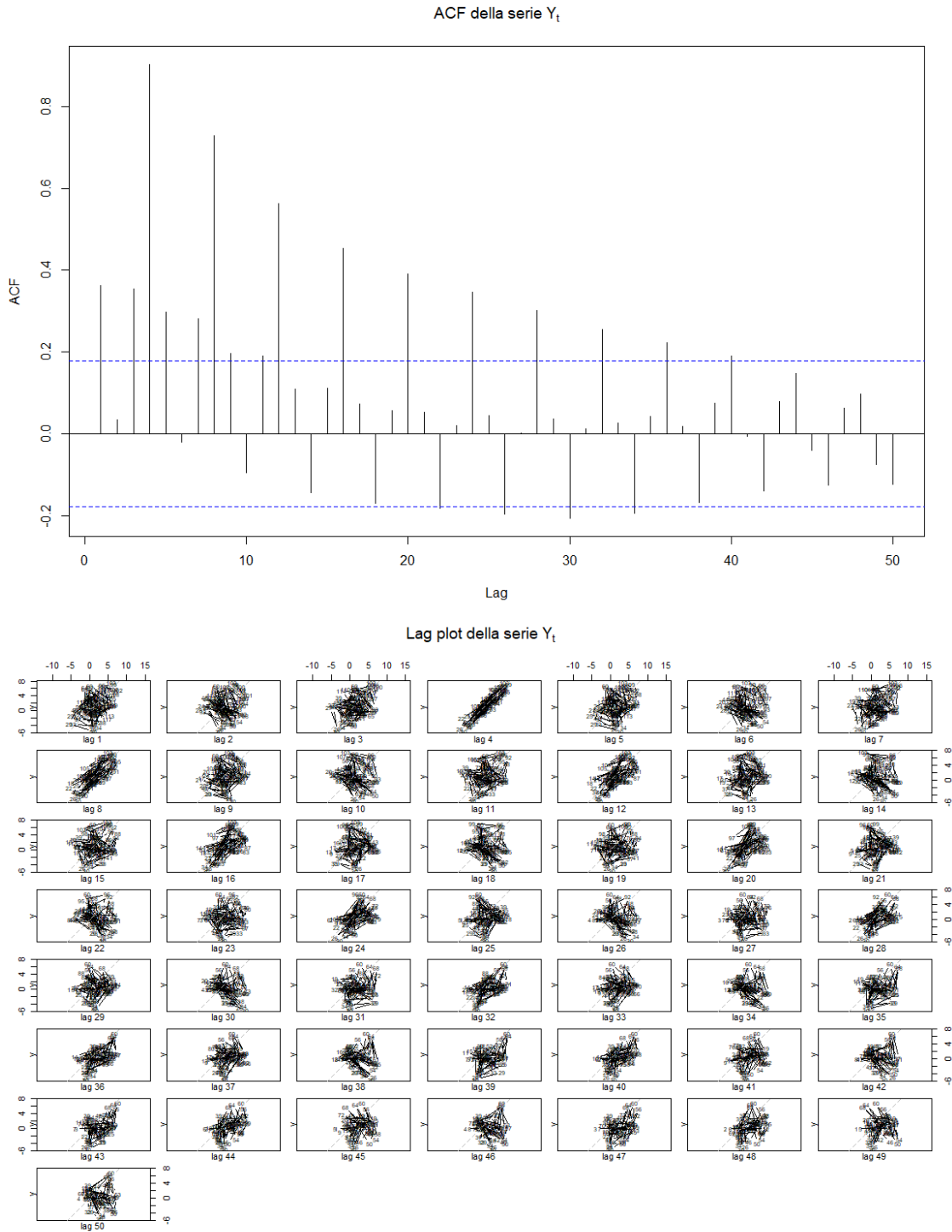
Francesca Bellissimo

2024-07-05

In questa relazione, mi occuperò dell'analisi, della modellizzazione e dell'individuazione di previsioni per la serie storica in esame. L'analisi inizia con una semplice visualizzazione grafica dei valori della serie, che permetterà di osservare le sue caratteristiche e tendenze principali. La serie, che nel seguito indicherò con  $Y_t$ , è composta da 120 osservazioni, le prime otto delle quali assumono esattamente valore 0.

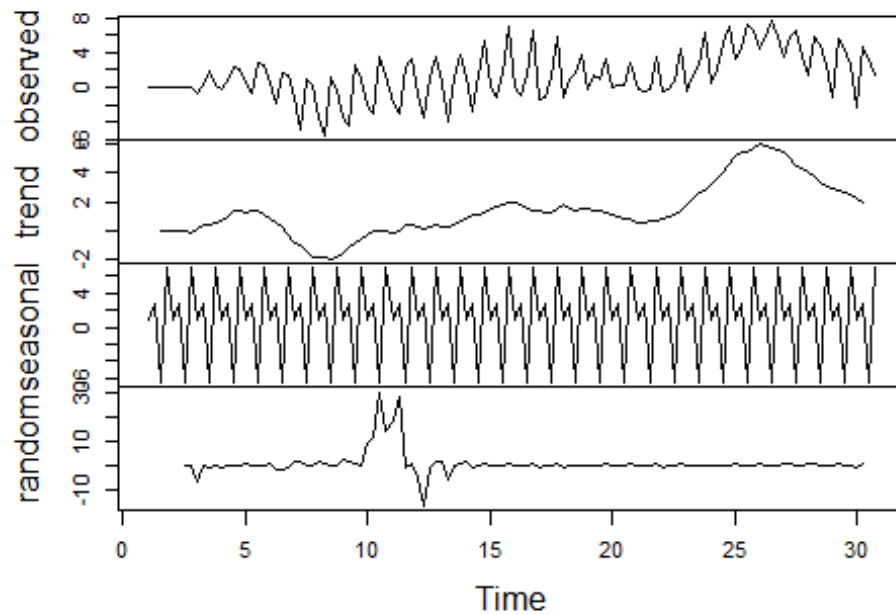


La serie storica in oggetto presenta una marcata componente stagionale. Il correlogramma mostra che le correlazioni più elevate si manifestano in corrispondenza degli sfasamenti che sono multipli di 4, suggerendo una periodicità di questa frequenza. Questo risultato è confermato dall'analisi del lag plot. Anche in questo caso, si osservano relazioni significative per gli sfasamenti multipli di 4. Questi risultati indicano chiaramente che la serie presenta una struttura ciclica ben definita, con ripetizioni regolari che si verificano ogni quattro unità temporali.



In questa prima fase esplorativa, è utile visualizzare la decomposizione tradizionale della serie nelle sue componenti principali. Ho scelto di utilizzare un modello moltiplicativo perché l'ampiezza delle oscillazioni sembra variare nel tempo.

## Decomposition of multiplicative time series

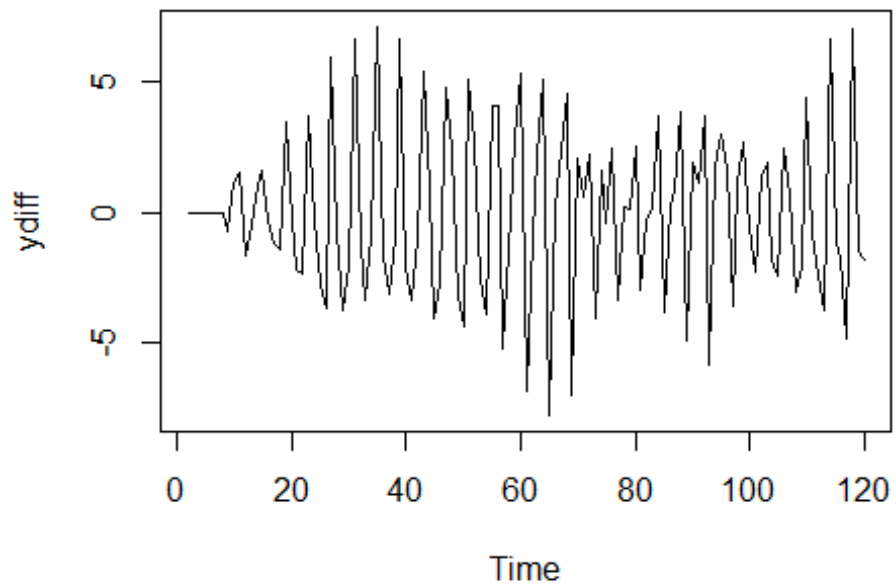


La serie sembra essere non stazionaria, principalmente a causa della presenza di un trend crescente. Tuttavia, non è ancora certo se queste variazioni siano numericamente significative. Per verificare la non stazionarietà della serie, ho effettuato il test di Dickey-Fuller, che conferma che la serie non è stazionaria.

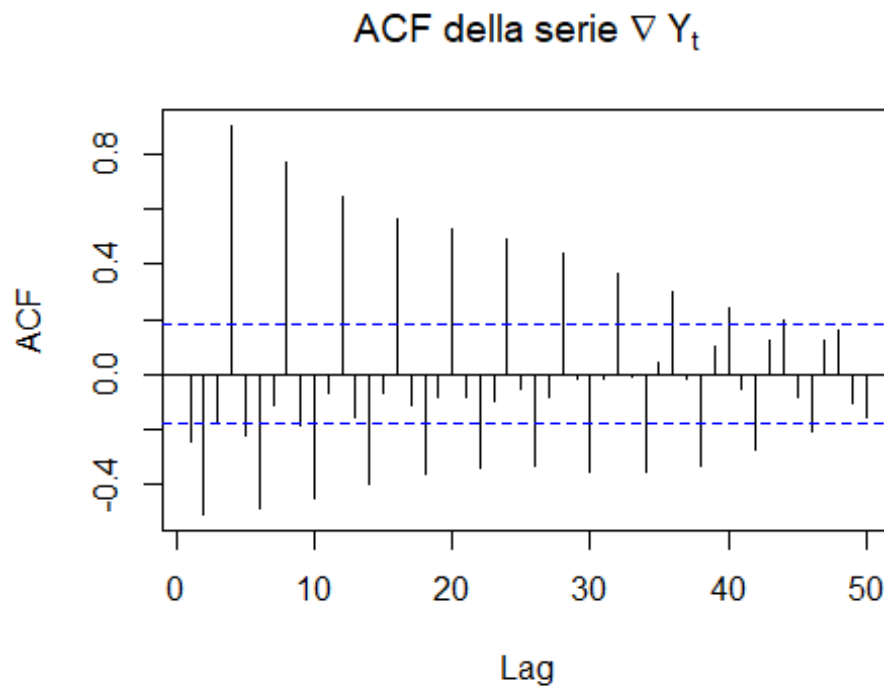
```
##  
## Augmented Dickey-Fuller Test  
##  
## data: y  
## Dickey-Fuller = -1.7194, Lag order = 4, p-value = 0.6931  
## alternative hypothesis: stationary
```

Inoltre, la funzione di autocorrelazione tende ad annullarsi, ma molto lentamente. Anche per lag intorno al 40, l'autocorrelazione risulta ancora significativamente diversa da zero. Pertanto, ho ritenuto necessario differenziare la serie una volta. Dopo questa operazione, il test di Dickey-Fuller suggerisce di accettare l'ipotesi di stazionarietà. Il grafico della serie a seguito della differenziazione è riportato sotto.

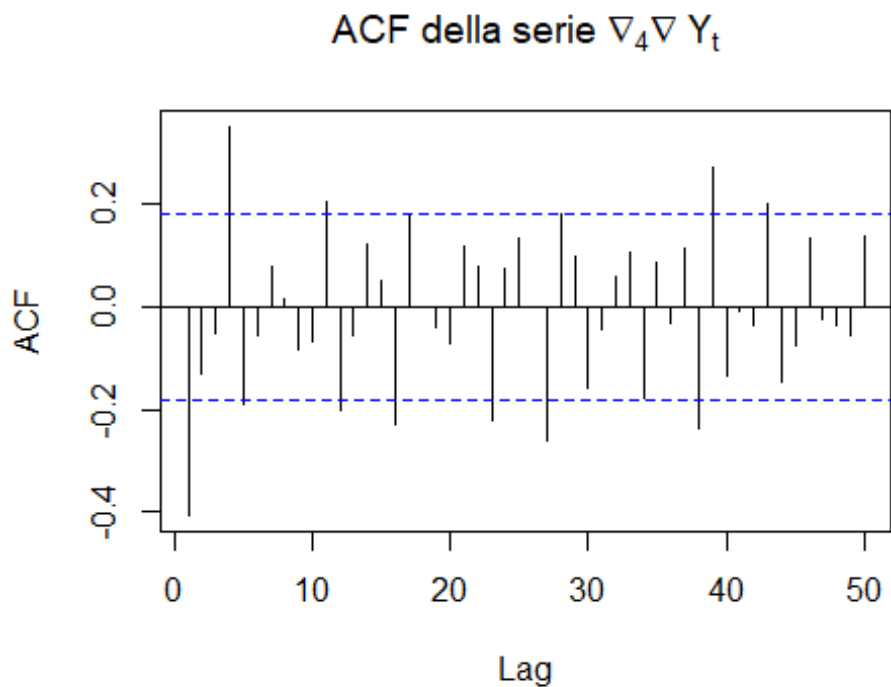
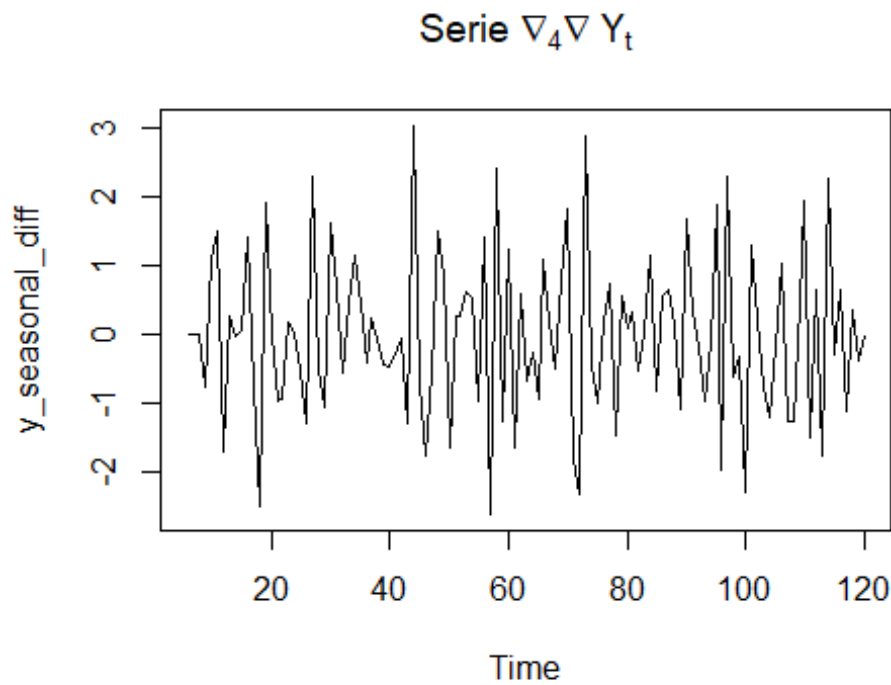
Serie  $\nabla Y_t$



```
##  
## Augmented Dickey-Fuller Test  
##  
## data: ydiff  
## Dickey-Fuller = -4.312, Lag order = 4, p-value = 0.01  
## alternative hypothesis: stationary
```



Al fine di limitare l'impatto della componente stagionale, ho applicato una differenziazione stagionale di periodo 4. Il grafico della serie  $\nabla_4 \nabla Y_t$  e quello della relativa funzione di autocorrelazione globale sono riportati di seguito.



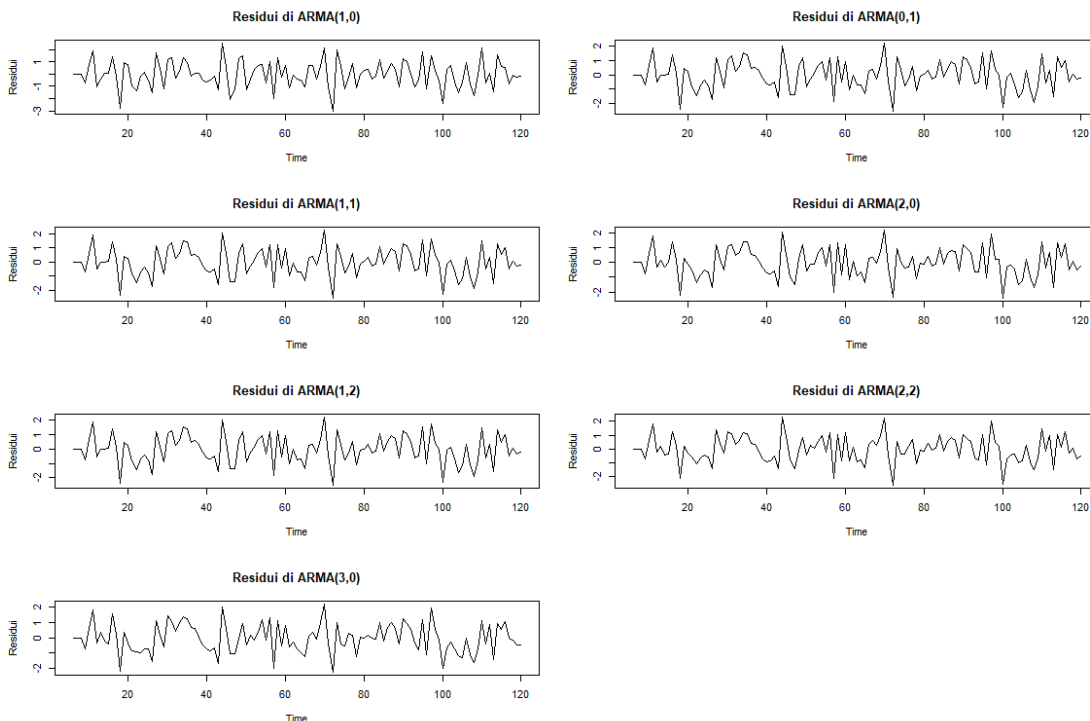
A questo punto, è possibile procedere all'individuazione del modello adatto a descrivere la serie. In una prima fase, limito la ricerca ai modelli ARMA. La funzione `auto.arima()` (imponendo alcuni vincoli tra cui il restringersi ai modelli ARMA, l'escludere la media, e limitare la ricerca a modelli con  $p$  e  $q$  al massimo pari a 3) propone il seguente modello.

```
## Series: y_seasonal_diff
## ARIMA(3,0,0) with zero mean
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ar3
##      -0.6722 -0.5430 -0.3540
## s.e.   0.0867   0.0934   0.0856
##
## sigma^2 = 0.8902: log likelihood = -155.39
## AIC=318.78   AICc=319.14   BIC=329.76
```

Estendo la ricerca ad altri modelli ARMA; i risultati relativi ai criteri di valutazione e alla significatività dei parametri sono riportati nella tabella seguente.

##	Modello	AIC	AICc	BIC	Significativi
## 1	ARMA(1,0)	345.61	345.72	351.10	sì
## 2	ARMA(0,1)	327.68	327.79	333.17	sì
## 3	ARMA(1,1)	329.65	329.87	337.89	no
## 4	ARMA(2,1)	327.51	327.87	338.49	no
## 5	ARMA(1,2)	331.62	331.98	342.60	no
## 6	ARMA(2,2)	322.64	323.19	336.36	no
## 7	ARMA(3,0)	318.78	319.14	329.76	sì

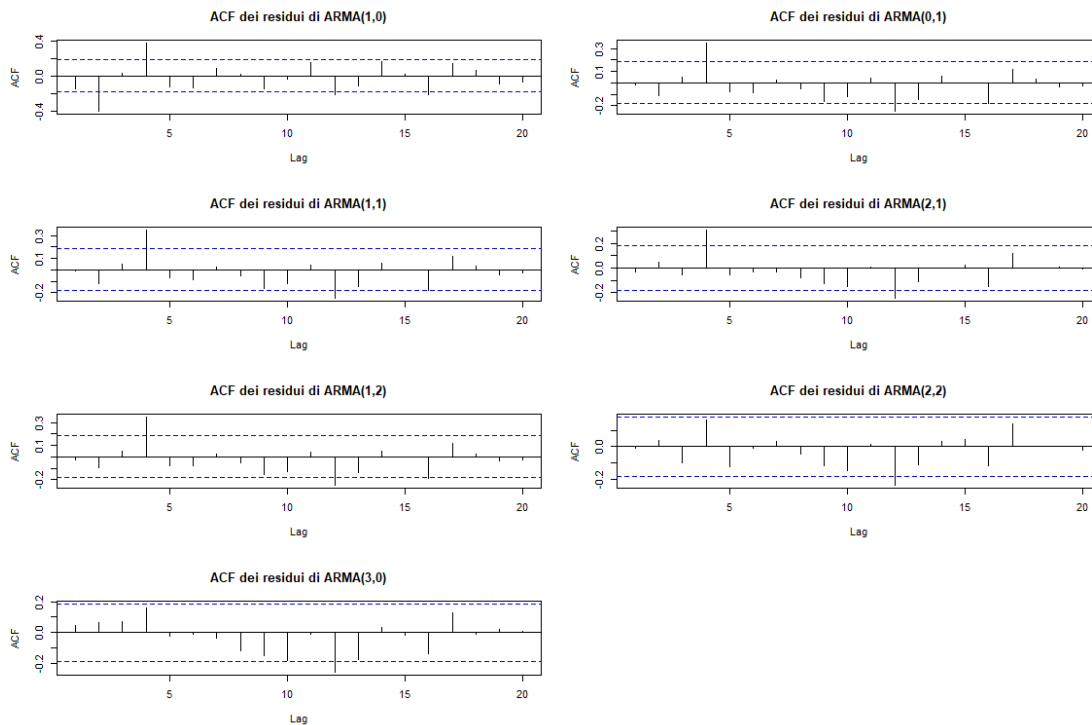
Di seguito, vengono riportati i grafici dei residui relativi ai vari modelli. I residui di tutti i modelli seguono un andamento molto simile e non sono, pertanto, molto informativi.



I residui di ogni modello risultano, secondo i test di Box-Pierce e di Ljung-Box, correlati. I relativi p-value sono riportati nella seguente tabella.

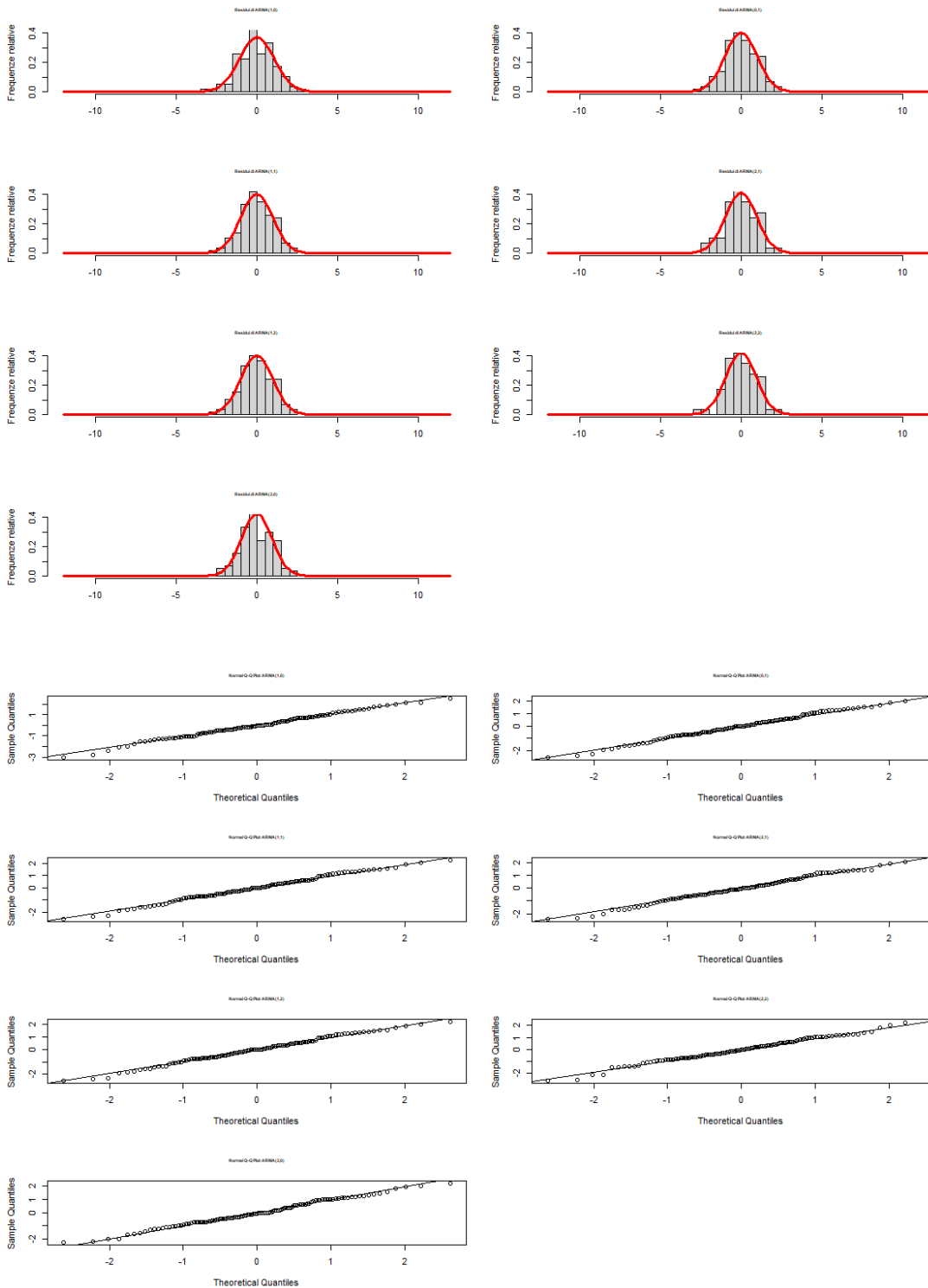
##	Model	BoxPierce	LjungBox	Incorrelati
## 1	ARMA(1,0)	5.323642e-10	8.573142e-13	no
## 2	ARMA(0,1)	9.255870e-04	4.185609e-05	no
## 3	ARMA(1,1)	5.735212e-04	2.352427e-05	no
## 4	ARMA(2,1)	2.491185e-02	3.992596e-03	no
## 5	ARMA(1,2)	5.600624e-04	2.403191e-05	no
## 6	ARMA(2,2)	1.290324e-01	3.459133e-02	no
## 7	ARMA(3,0)	7.971480e-02	1.776893e-02	no

Tuttavia, l'analisi del correlogramma mostra che soltanto poche correlazioni sono significativamente diverse da 0.



Per verificare la normalità dei residui, ho utilizzato due strumenti: un grafico che riporta l'istogramma dei residui e una curva normale e il Q-Q plot. Dal Q-Q plot, è possibile osservare che i residui mostrano alcune deviazioni dalle code della distribuzione normale. Questi punti anomali nelle code possono suggerire che i residui non seguono perfettamente una distribuzione normale.





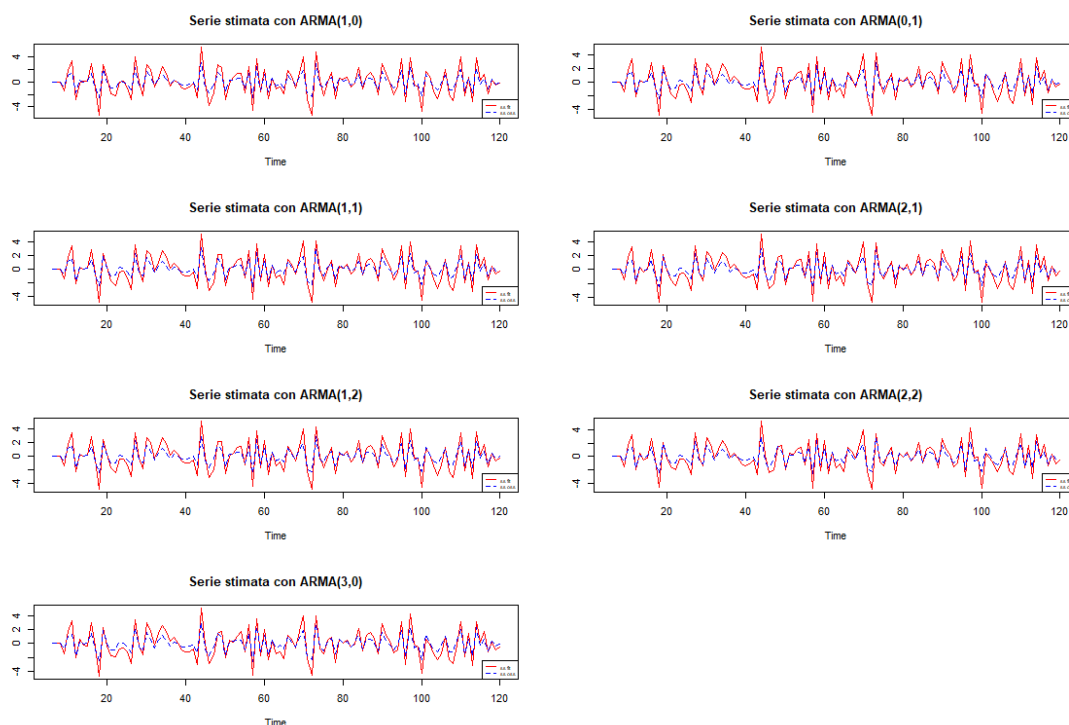
Per una valutazione più formale della normalità, ho eseguito il test di Shapiro-Wilk, noto per essere particolarmente potente nella rilevazione delle deviazioni dalla normalità. Il test di Shapiro-Wilk ha restituito valori di p decisamente elevati, il che suggerisce che non c'è evidenza sufficiente per rifiutare l'ipotesi nulla di normalità dei residui.

```
## [1] "Test Shapiro-Wilk per ARMA(1,0): p-value = 0.885250887889943"
```

```
## [1] "Test Shapiro-Wilk per ARMA(0,1): p-value = 0.763896171711631"
## [1] "Test Shapiro-Wilk per ARMA(1,1): p-value = 0.757422209623894"
## [1] "Test Shapiro-Wilk per ARMA(2,1): p-value = 0.598373442522657"
## [1] "Test Shapiro-Wilk per ARMA(1,2): p-value = 0.737039954105253"
## [1] "Test Shapiro-Wilk per ARMA(2,2): p-value = 0.641105574278519"
## [1] "Test Shapiro-Wilk per ARMA(3,0): p-value = 0.693334244354536"
```

In sintesi, nonostante i segnali grafici di deviazione nelle code del Q-Q plot, il test di Shapiro-Wilk, che fornisce una verifica statistica rigorosa, non ha rivelato evidenze sufficienti per rifiutare l'ipotesi di normalità dei residui. Pertanto, si può concludere che, sebbene ci siano alcune deviazioni osservate nei grafici, i residui si distribuiscono secondo una legge normale.

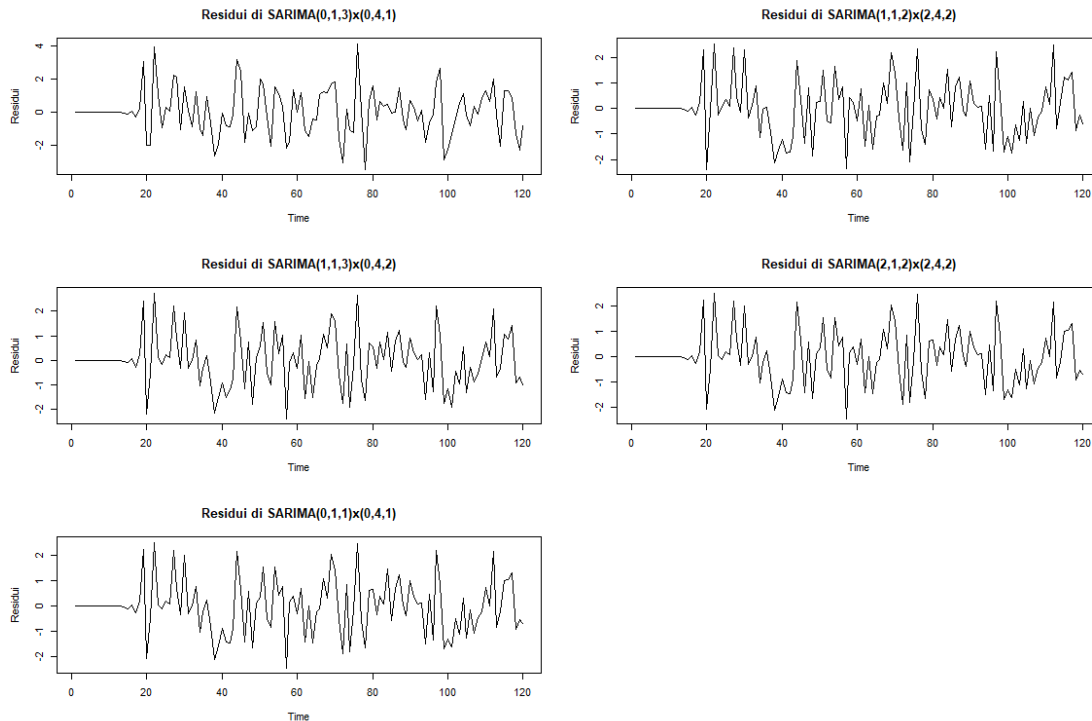
Ho confrontato la serie osservata  $X_t = \nabla_4 \nabla Y_t$  con quella ottenuta come  $\hat{X}_t = X_t + \hat{\varepsilon}_t$ , dove  $\varepsilon_t$  sono i residui stimati. La sovrapposizione tra le serie mostra risultati complessivamente soddisfacenti, evidenziando una buona corrispondenza tra la serie osservata e quella stimata. Tuttavia, in corrispondenza di alcuni istanti, la serie stimata presenta picchi che superano o non raggiungono i valori della serie osservata. Questi scostamenti indicano che il modello potrebbe essere perfezionato per migliorare la precisione delle previsioni.



Nel proseguire con la ricerca, ho deciso di estendere l'analisi ai modelli  $\text{SARIMA}(p, 1, q) \times (P, 4, Q)$ , utilizzando la serie temporale non manipolata  $Y_t$ . L'adozione di modelli SARIMA potrebbe offrire una visione più dettagliata e potenzialmente migliorare la capacità di catturare la stagionalità e le altre caratteristiche intrinseche della serie temporale osservata.

##	Modello	AIC	AICc	BIC	Significativi
## 1	SARIMA(0,1,3)x(0,4,1)	441.7620	442.3806	454.9357	sì
## 2	SARIMA(1,1,2)x(2,4,2)	405.1984	406.7304	426.2763	no
## 3	SARIMA(1,1,3)x(0,4,2)	400.3167	401.4956	418.7598	no
## 4	SARIMA(2,1,2)x(2,4,2)	402.5373	404.4728	426.2499	no
## 5	SARIMA(0,1,1)x(0,4,1)	432.7299	433.1381	443.2689	sì

I residui non sembrano essere distribuiti in modo completamente casuale. Questa non casualità potrebbe indicare la presenza di pattern o strutture residuali non catturati dal modello

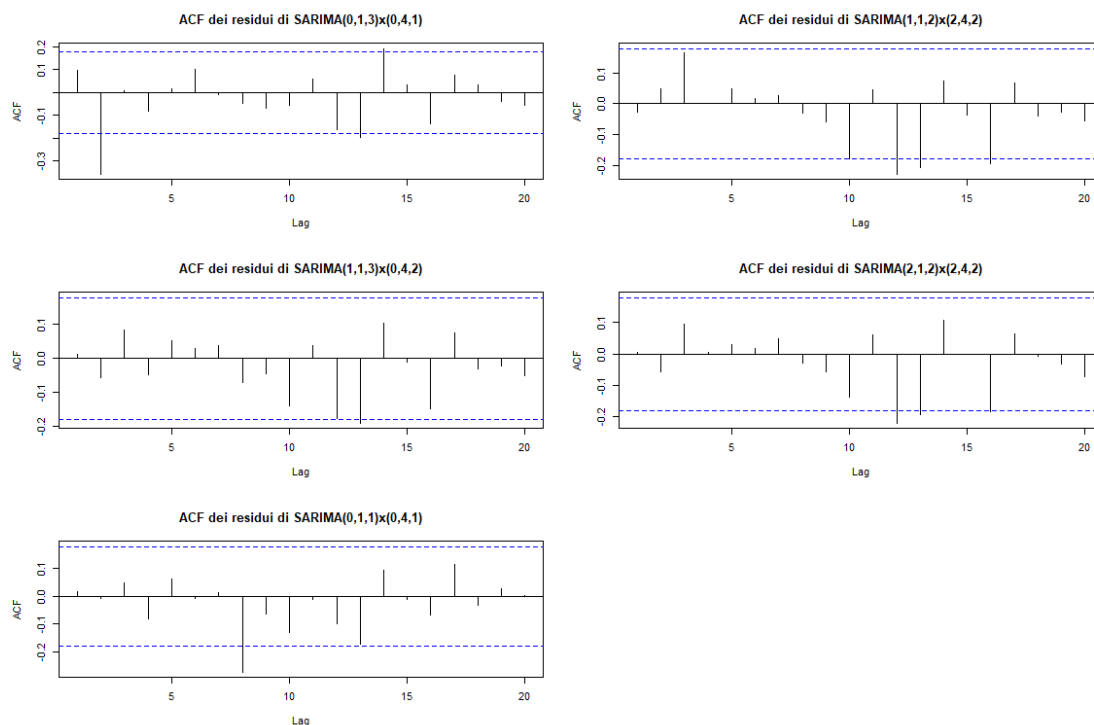


I risultati dei test di incorrelazione di Box-Pierce e di Ljung-Box, così come i test sulla significatività dei parametri dei modelli SARIMA stimati, sono riportati nella tabella seguente.

##	Model	BoxPierce	LjungBox	Incorrelati
## 1	SARIMA(0,1,3)x(0,4,1)	0.007073384	0.001169388	no
## 2	SARIMA(1,1,2)x(2,4,2)	0.031839294	0.005936285	no
## 3	SARIMA(1,1,3)x(0,4,2)	0.304068869	0.127956923	sì
## 4	SARIMA(2,1,2)x(2,4,2)	0.066595412	0.014753543	test discordanti
## 5	SARIMA(0,1,1)x(0,4,1)	0.466527826	0.258869199	sì

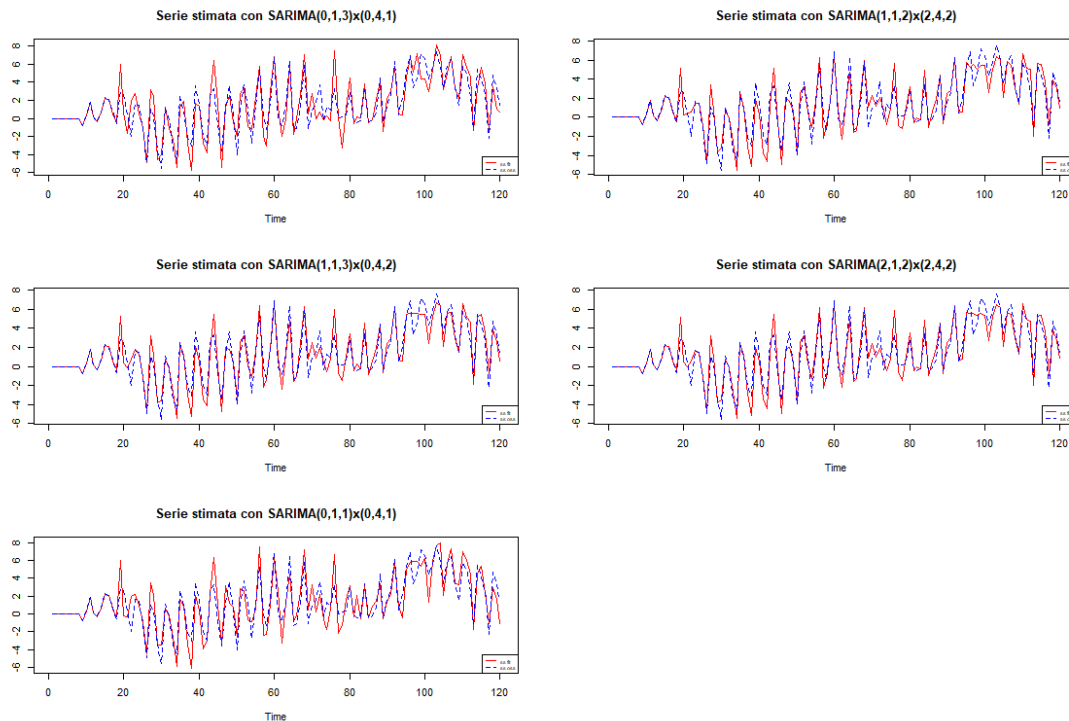
Per alcuni modelli, i residui risultano incorrelati.

##	Model	BoxPierce	LjungBox	Incorrelati
## 1	SARIMA(0,1,3)x(0,4,1)	0.007073384	0.001169388	no
## 2	SARIMA(1,1,2)x(2,4,2)	0.031839294	0.005936285	no
## 3	SARIMA(1,1,3)x(0,4,2)	0.304068869	0.127956923	sì
## 4	SARIMA(2,1,2)x(2,4,2)	0.066595412	0.014753543	test discordanti
## 5	SARIMA(0,1,1)x(0,4,1)	0.466527826	0.258869199	sì



Per verificare la normalità dei residui, ho utilizzato gli strumenti descritti sopra. I grafici suggeriscono che la distribuzione dei residui non è completamente normale. Per alcuni modelli, i risultati del test di Shapiro-Wilk non hanno fornito evidenze sufficienti per rifiutare l'ipotesi nulla di normalità, suggerendo che i residui potrebbero essere normalmente distribuiti. Tuttavia, per altri modelli, i risultati del test di Shapiro-Wilk hanno indicato una deviazione significativa dalla normalità.

Nuovamente, ho confrontato la serie osservata  $Y_t$  con quella ottenuta come  $\hat{Y}_t = Y_t + \hat{\varepsilon}_t$ . I risultati ottenuti con i modelli SARIMA appaiono migliori rispetto a quelli derivanti dai modelli ARMA precedentemente testati. I modelli SARIMA sembrano adattarsi meglio ai dati osservati, senza le distorsioni significative che erano state riscontrate con i modelli ARMA. Questo si traduce in una rappresentazione più fedele della dinamica della serie economica e in una minore variazione rispetto ai valori osservati. Inoltre, questo indica una capacità migliorata del modello nel mantenere la previsione entro intervalli più realistici e meno suscettibili a fluttuazioni estreme, migliorando così l'affidabilità delle previsioni.



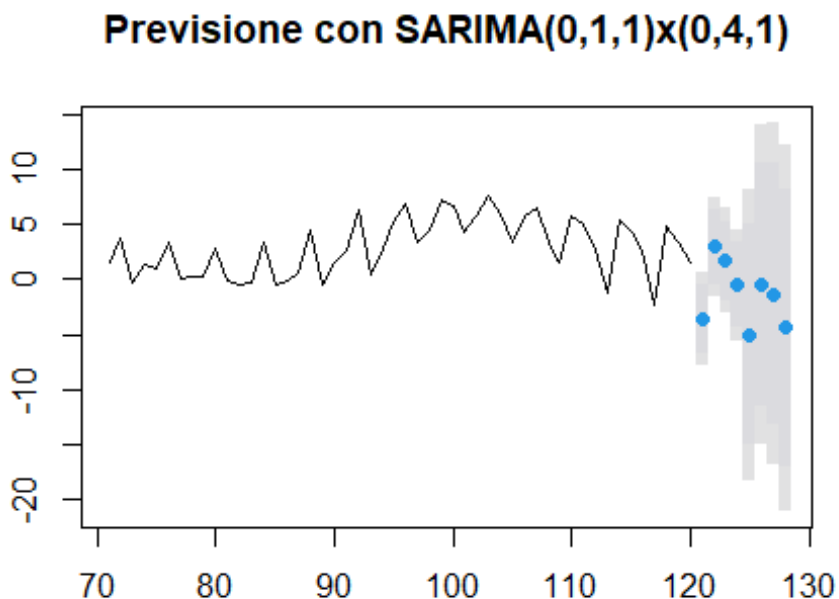
Per la previsione della serie economica, è stato scelto il modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1), che riporto di seguito. La selezione di questo modello è stata guidata da diversi fattori chiave che ne hanno dimostrato l'efficacia e l'affidabilità:

- il modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1) ha fornito risultati complessivamente buoni durante l'analisi. Le previsioni generate dal modello hanno mostrato una buona corrispondenza con i dati osservati, suggerendo una capacità adeguata di catturare le caratteristiche stagionali e le dinamiche della serie;
- i residui del modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1) sono risultati normalmente distribuiti;
- i parametri risultano significativi, il che conferma che le componenti del modello contribuiscono in modo rilevante alla spiegazione della variabilità della serie.

Ho anche tenuto conto del principio della parsimonia nella selezione del modello. Questo principio suggerisce di preferire modelli più semplici che spiegano i dati in modo adeguato senza includere complessità eccessive. Il modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1) offre un buon equilibrio tra complessità e capacità predittiva.

```
##
## z test of coefficients:
##
##      Estimate Std. Error  z value  Pr(>|z|)
## ma1  -0.604138   0.097398  -6.2028 5.547e-10 ***
## sar1  -0.504652   0.089776  -5.6213 1.896e-08 ***
## sma1  -0.994595   0.052527 -18.9351 < 2.2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Utilizzando il modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1), sono state ottenute le previsioni per la serie economica. Le previsioni ottenute seguono un andamento complessivamente simile a quello osservato nella serie storica. Questo indica che il modello è riuscito a catturare le principali caratteristiche dinamiche e stagionali della serie economica, mantenendo una coerenza con il comportamento passato dei dati. Tuttavia, è emerso un trend leggermente decrescente nelle previsioni rispetto alla serie osservata. Sebbene il modello riesca a seguire le principali fluttuazioni della serie, questa leggera tendenza decrescente nelle previsioni suggerisce che potrebbe esserci una differenza nelle aspettative future rispetto ai dati storici.



Per valutare l'accuratezza delle previsioni ottenute con il modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1) in modo più robusto, ho implementato due tecniche di cross-validation: la *expanding window* e la *sliding window*.

Nella tecnica di *expanding window*, il campione di addestramento aumenta di dimensione a ogni iterazione. Si inizia con un periodo iniziale di dati per addestrare il modello, quindi, a ogni passo successivo, si aggiungono dati nuovi al set di addestramento, estendendolo progressivamente. Le previsioni vengono poi effettuate su un certo numero di dati successivi non inclusi nel set di addestramento.

Nella tecnica di *sliding windows*, la dimensione del campione di addestramento rimane fissa. Si utilizza una finestra di dati di dimensione costante per addestrare il modello e, a ogni iterazione, la finestra si sposta avanti nel tempo, aggiornando il set di addestramento con nuovi dati e rimuovendo quelli più vecchi.

Per misurare l'accuratezza delle previsioni, ho utilizzato il Root Mean Squared Error (RMSE). L'RMSE fornisce una misura della deviazione media tra le previsioni del modello e i valori

osservati, ed è particolarmente utile per quantificare la precisione delle previsioni in termini di errore quadratico medio. Un valore più basso di RMSE indica una previsione più accurata.

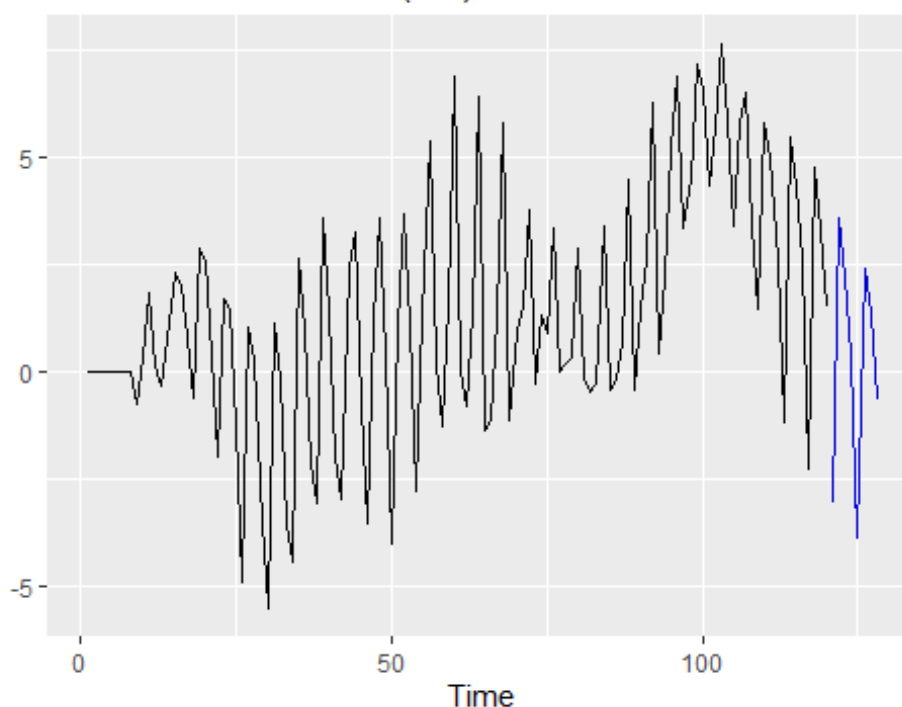
```
## [1] 5.43813
```

```
## [1] 6.462351
```

Oltre al modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1), ho implementato una rete neurale per la previsione della serie economica, al fine di valutare un'alternativa per confrontare le performance del modello tradizionale e per esplorare eventuali miglioramenti nella previsione. I risultati ottenuti dalle reti neurali sono sembrati soddisfacenti. Le previsioni generate hanno mostrato una buona coerenza con i dati osservati.

```
##  
## Average of 20 networks, each of which is  
## a 8-4-1 network with 41 weights  
## options were - linear output units
```

Forecasts from NNAR(8,4)



Ho valutato le previsioni ottenute tramite la rete neurale per mezzo della tecnica di expanding window e di sliding window. I risultati sono riportati di seguito.

```
## [1] 1.71892
```

```
## [1] 2.229524
```

## Conclusioni

In questa relazione, ho analizzato una serie economica utilizzando diversi approcci di modellizzazione e previsione, con l'obiettivo di ottenere stime accurate e affidabili.

I modelli testati hanno mostrato residui che, graficamente, apparivano non sempre normali; i test di Shapiro-Wilk hanno confermato la normalità per alcuni modelli e non per altri. Questo ha evidenziato la necessità di considerare la distribuzione dei residui nella valutazione della qualità dei modelli.

Ho confrontato le serie osservata e stimata, riscontrando che, nel complesso, il modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1) ha offerto un buon adattamento. Tuttavia, è emerso un trend leggermente decrescente nelle previsioni rispetto ai dati storici, suggerendo la possibilità di ulteriori analisi e aggiustamenti.

La selezione del modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1) è stata motivata dalla sua performance positiva, dalla normalità dei residui e dalla significatività dei parametri. Inoltre, è stato tenuto in conto il principio della parsimonia, preferendo un modello relativamente semplice che offre buone previsioni senza eccessiva complessità.

Per valutare le previsioni, ho utilizzato due tecniche di cross-validation—expanding window e sliding window—e il Root Mean Squared Error (RMSE) come misura di accuratezza. Entrambe le tecniche hanno contribuito a una valutazione robusta delle previsioni del modello, assicurando che i risultati fossero affidabili e validi.

Inoltre, l'implementazione delle reti neurali ha fornito risultati soddisfacenti, dimostrando che questa tecnica può essere un complemento utile ai modelli tradizionali, offrendo un adattamento potenzialmente migliore alle dinamiche complesse della serie economica.

In sintesi, i risultati complessivi indicano che il modello SARIMA(0,1,1)x(0,4,1) è adeguato per le previsioni della serie economica, con un buon equilibrio tra complessità e accuratezza. Tuttavia, le reti neurali hanno dimostrato di avere un potenziale significativo per migliorare ulteriormente le previsioni. La combinazione di approcci tradizionali e moderni, insieme a una valutazione rigorosa tramite tecniche di cross-validation, fornisce una base solida per future analisi e decisioni.