

Domande orale Controlli Automatici

@Francesca Guzzi

Alcune delle domande per l'orale di Controlli Automatici-T.

[Sistemi in forma di stato e trasformata di Laplace](#)

[Diagrammi di Bode](#)

[Sistemi di controllo: stabilità e prestazioni](#)

[Progettazione di un regolatore](#)

[Luogo delle radici](#)

Sistemi in forma di stato e trasformata di Laplace

▼ Punto di equilibrio e sue caratteristiche

Dato un sistema non forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice **equilibrio del sistema** se $x(t) = x_e, t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.

Per i sistemi forzati $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, si dice **coppia di equilibrio** (x_e, u_e) del sistema se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e), t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.

Traiettoria del sistema: dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale $x(t_0)$, si dice traiettoria dello stato $x(t)$ la funzione del tempo $(x(t), u(t), t), t \geq t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$. ($y(t)$ = traiettoria dell'uscita)

Caratteristiche:

- principale! il vettore \dot{x} delle derivate delle variabili di stato è nullo.
- data una coppia di equilibrio (x_e, u_e) vale $f(x_e, u_e) = 0$
- per sistemi non forzati, dato un equilibrio x_e vale $f(x_e) = 0$

▼ Trasformata di Laplace e trasformate di segnali elementari


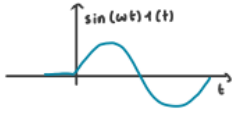
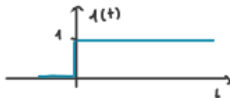
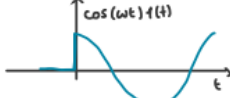
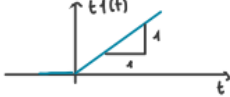
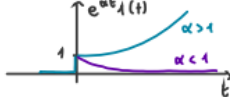
Data una funzione complessa f di variabile reale $t, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, sia $s = \sigma + j\omega$ una variabile complessa:

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Dal dominio del tempo al dominio di Laplace $\rightarrow F(s) = L[f(t)]$

$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow$ Numeratore e denominatore, polinomi primi tra loro \rightarrow radici $N(s) = 0$ sono ZERI
 \rightarrow radici $D(s) = 0$ sono POLI

Trasformate di segnali elementari:

<ul style="list-style-type: none"> delta di Dirac $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ 		<ul style="list-style-type: none"> $\mathcal{L}[\sin(\omega t)1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ 	
<ul style="list-style-type: none"> gradino unitario $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$ 		<ul style="list-style-type: none"> $\mathcal{L}[\cos(\omega t)1(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ 	
<ul style="list-style-type: none"> segnale rampa $\mathcal{L}[t1(t)] = \frac{1}{s^2}$ 		<ul style="list-style-type: none"> $\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \varphi)1(t)] = \frac{\omega \cos \varphi \pm s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$ 	
<ul style="list-style-type: none"> $\mathcal{L}[e^{\alpha t}1(t)] = \frac{1}{s - \alpha}$ 		<ul style="list-style-type: none"> $\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \varphi)1(t)] = \frac{s \cos \varphi \pm \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$ 	

▼ Dimostrazione della trasformata di Laplace

Partendo dal presupposto che $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ quindi $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$ e in più $\mathcal{L}[u(t)] = U(s)$

Dall'espressione in forma di stato
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Si ottiene, trasformando secondo Laplace:
$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Ci interessa solo l'evoluzione forzata, quindi $x(0) = 0$

1. $sX(s) - AX(s) = BU(s)$
2. $(sI - A)X(s) = BU(s)$
3. $X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$
4. Sostituendo nella $Y(s)$ si ha: $Y(s) = (C(sI - A)^{-1} + D)U(s)$
5. Quindi dividendo entrambi i membri per $U(s)$ si ha $\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} + D = G(s)$
6. Si ottiene la funzione di trasferimento!

▼ Funzione di trasferimento, come ricavarla dalle matrici?

La funzione di trasferimento può essere definita come la trasformata dell'uscita a $\delta(t)$, o come il rapporto tra la trasformata dell'uscita e dell'ingresso nel caso in cui $x(0) = 0$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

Matrice aggiunta $\operatorname{adj}(A) = \text{trasposta di } A$; $A^{-1} = \frac{A^T}{\det(A)}$

▼ Teorema del regime permanente

Se a un sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$ avente poli a parte reale negativa si applica l'ingresso sinusoidale:

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

l'uscita a transitorio esaurito è data da:

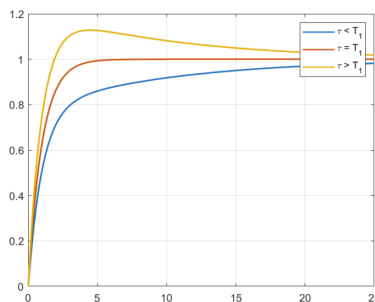
$$y_2(t) = U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

▼ Coda di assestamento

Per coda di assestamento si intende quando il sistema supera il valore asintotico, e poi molto lentamente ci ritorna.

Ad esempio, con $\tau \approx T_1 \gg T_2$ e $\tau, T_1, T_2 > 0$ con:

$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$



Diagrammi di Bode

Come si traccia un diagramma di Bode:

Ampiezza:

1. Guadagno k : retta orizzontale che vale $20 \log_{10} k$;
2. Poli nell'origine $(j\omega)^g$: retta con pendenza $-20g$ dB/decade;
3. Poli reali $1 + \tau j\omega$: retta con pendenza -20 dB/decade per $\omega > \frac{1}{\tau}$;
4. Poli cc $\frac{1}{1 + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$: retta con pendenza -40 dB/decade per $\omega > \omega_n$;

Fase:

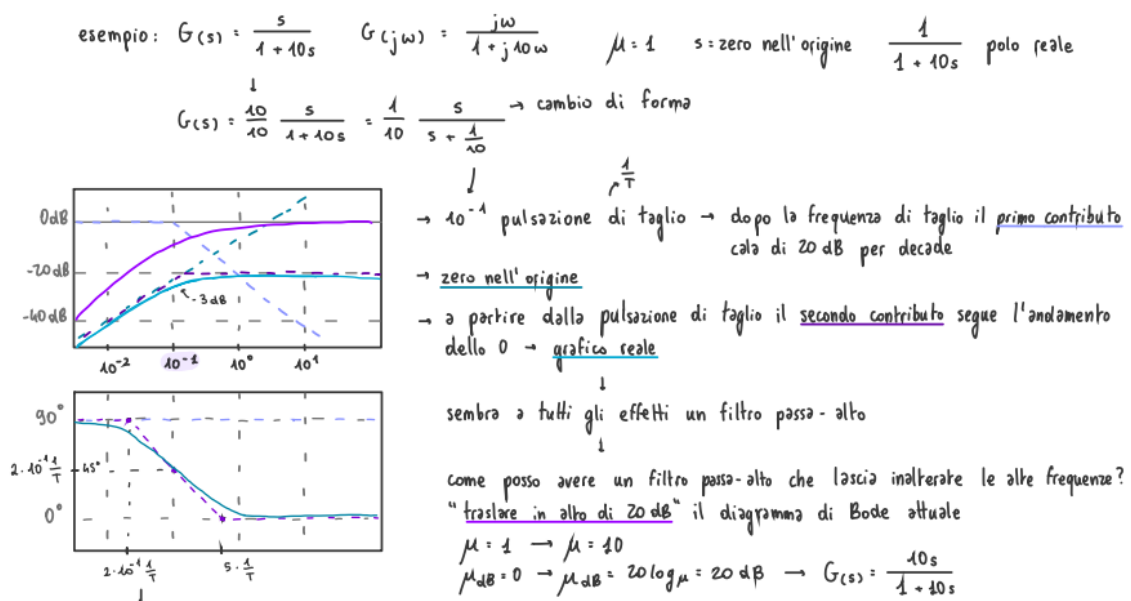
1. Guadagno k: 0 per guadagno positivo, -180° per guadagno negativo;
2. Poli nell'origine $(j\omega)^g$: $g \cdot 90^\circ$ su tutto l'asse delle pulsazioni;
3. Poli reali $1 + \tau j\omega$: $-90^\circ \operatorname{sgn}(T)$ per $\omega > \frac{1}{|T|}$;
4. Poli cc: $-180^\circ \operatorname{sgn}(\xi)$ per $\omega > \omega_n$

▼ Risposta in frequenza e diagrammi di Bode

Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale → le pulsazioni e frequenze sono positive!

La funzione complessa $G(j\omega)$ ottenuta valutando $G(s)$ per $s = j\omega$ è detta risposta in frequenza.

Tra i modi più comuni per rappresentarla vi sono i diagrammi di Bode. → dimostrano che un sistema dinamico si comporta come un filtro per l'ingresso.



per la fase, una decade dopo la pulsazione di taglio deve tendere a 0° partendo da 90°

- 1) prendo la decade precedente alla puls. di taglio, ne prendo $1/3$ e da lì parte il ginocchio dell'asintoto
- 2) prendo la decade successiva, e a $2/3$ finira il ginocchio dell'asintoto
- 3) intersecherà la pulsazione di taglio a 45° (meta tra 90° e 0°)

posizionarsi sull'inizio della decade prec. e mi sposto di $1/3$

IMPORTANTE: il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio $\omega = \frac{1}{T}$

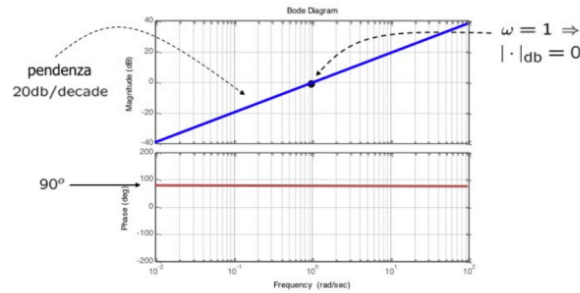
▼ Diagramma di Bode di uno zero, nell'origine e reale

Zero nell'origine:

Considerando uno zero nell'origine quindi $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{-1}} = j\omega$, $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega$

Ampiezza → retta con pendenza 20dB/decade

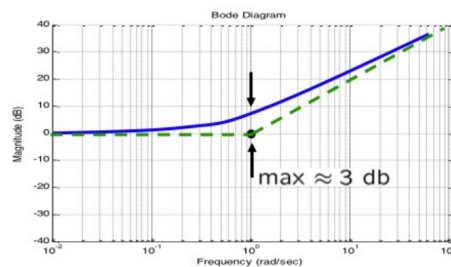
Fase → $j\omega$ punto sul semiasse immaginario positivo → fase $90^\circ \forall \omega > 0$



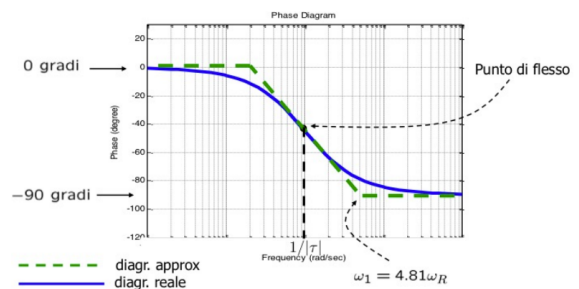
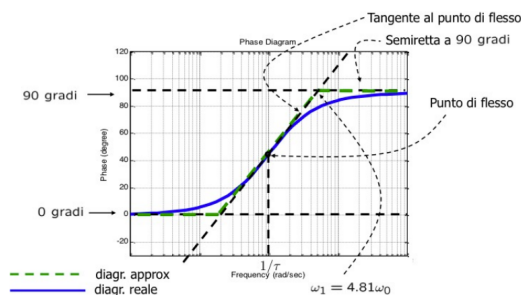
Zero reale:

Considerando $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$

Ampiezza → nel diagramma asintotico fino a $\omega = \frac{1}{\tau}$ pulsazione di taglio, andamento costante a 0 dB. Dopo retta $\log \omega \rightarrow -20 \log \frac{1}{\tau} + 20 \log \omega$ con pendenza 20 dB/dec, nel diagramma reale si curva poco poco alla frequenza di taglio



Fase → se $\tau < 0$ $\arg(G_e(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$, altrimenti -90°



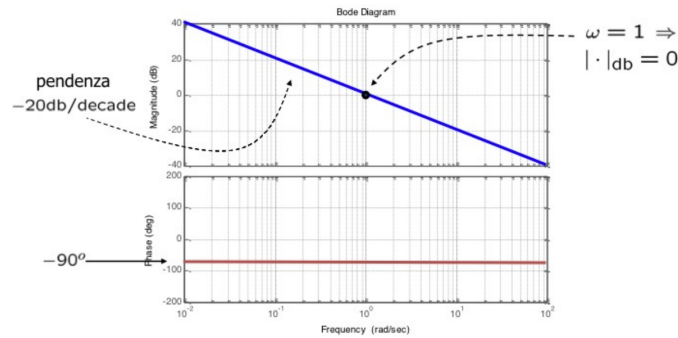
▼ Diagramma di Bode di un polo, nell'origine e reale

Polo nell'origine:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Ampiezza → retta con pendenza -20dB/dec, se ho g poli nell'origine allora -20g dB/dec

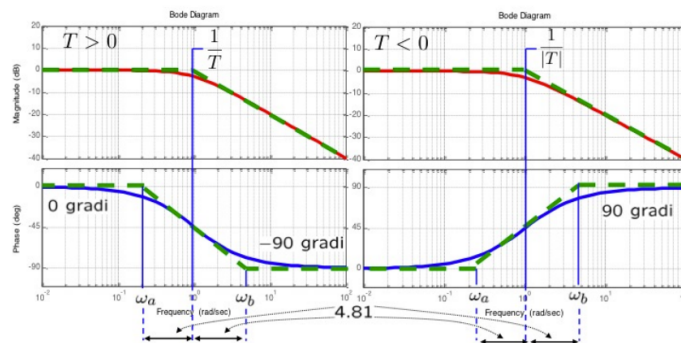
Fase → retta sui $-90^\circ \forall \omega > 0$, punto sul semiasse negativo



Polo reale:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

Diagramma ottenuto da quello dello zero reale ribaltando rispetto all'asse reale:



▼ Risposta al gradino di un sistema con 2 poli reali e uno zero

Troviamo una funzione di trasferimento fatta così:

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \text{ (numeratore zero } \rightarrow -\frac{1}{\tau} \text{) (denominatore 2 poli)}$$

$$u(t) = k \cdot 1(t) \rightarrow k \text{ guadagno con gradino } \rightarrow U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \rightarrow Y(s) \text{ somma dei residui} = \frac{k_1}{1 + T_1 s} + \frac{k_2}{1 + T_2 s}$$

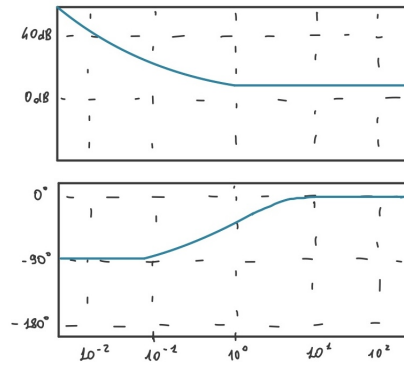
$$\text{Quindi sviluppo di Heaviside: } k_i = (1 + T_i s) \cdot G(s) \big|_{s=-p_i}$$

$$\text{Infine } y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{-p_i t} \cdot 1(t)$$

▼ Diagramma di Bode con polo nell'origine, zero reale

Ampiezza → parte da infinito a causa del polo nell'origine, e diminuisce esponenzialmente dopo che incontra lo zero fino a stabilizzarsi.

Fase → a causa dello zero nell'origine, fase a -90° a basse frequenze, poi a frequenze più alte aumenta gradualmente a causa del polo reale fino a raggiungere 0 all'infinito.



Sistemi di controllo: stabilità e prestazioni

▼ Margine di ampiezza e margine di fase

Margine di fase è definito come:

»

indica quanto si è distanti da 180° alla pulsazione ω_c e da misura della stabilità del sistema a fronte di ritardi temporali. Dato che un ritardo di tempo τ dà al diagramma di Bode della fase un contributo di $-\omega\tau$ il sistema rimane stabile finché $\tau < \frac{M_f}{\omega_c}$.

Il margine di ampiezza, invece, è definito come:

$$M_a = -|L(j\omega_\pi)|, \quad \arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

indica la distanza tra lo 0 in dB e il modulo di $L(j\omega_\pi)$. Rappresenta la massima incertezza tollerabile sul guadagno statico μ , in quanto variazioni di μ determinano traslazioni del diagramma delle ampiezze e non alterano quello delle fasi. Se il margine di ampiezza è troppo sottile si rischia di perdere stabilità, in generale quindi



Maggiore M_a = maggiore robustezza

▼ Criterio di Bode

Il criterio di Bode lega la stabilità del sistema retroazionato a quella del sistema in anello aperto $L(s)$.

Supponendo che:

1. $L(s)$ non abbia poli a parte reale strettamente positiva;
2. Il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ attraversi una sola volta l'asse a 0 dB.

Allora, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che risulti:

1. $\mu > 0$ (guadagno statico)

2. $M_f > 0$ (margine di fase)

Quindi imponendo condizioni sulla $L(j\omega)$ (funzione di trasferimento in anello aperto) si può ottenere stabilità in anello chiuso.

Ricordando $\rightarrow L(s) = R(s)G(s)$

▼ A che frequenze agiscono w, d, n ?

Le bande di $w(t)$ (ingresso) e $d(t)$ (disturbo sull'uscita) sono a basse frequenze (ad esempio posizioni, rotazioni, velocità, ...)

I disturbi di misura $n(t)$ invece hanno bande ad alte frequenze (ad esempio disturbi termici in componenti elettronici, accoppiamenti con campi elettromagnetici, ...)

▼ Funzioni di sensitività $S(s)$ ed $F(s)$

Le funzioni di sensitività sono funzioni di trasferimento tra ingressi e uscite di interesse. (Hanno tutte lo stesso denominatore! \rightarrow stabilità determinata dai poli) \rightarrow funzioni che misurano la sensibilità.

La funzione di sensitività è definita come:

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$$

Mentre quella di sensitività complementare:

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Sfruttando la sovrapposizione degli effetti sappiamo che:

$$Y(s) = \underbrace{Y_w(s)}_{\text{uscita con ingresso } w(s)} + \underbrace{Y_d(s)}_{\text{uscita con ingresso } d(s)} + \underbrace{Y_n(s)}_{\text{uscita con ingresso } n(s)}$$

da cui deriva che:

$$Y(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s)$$

Idealmente vorremmo: $Y_w(s) \approx W(s) = y_{ref}(s)$

$$y_0(s) \approx 0, y_n(s) \approx 0$$

$$\text{quindi } \rightarrow F(s) \approx 1; S(s) \approx 0$$

Ricordiamo che $F(s)$ si chiama funzione di sensitività complementare perchè

■

Per ottenere tutti e tre gli obiettivi bisogna ragionare nelle frequenze:

$$Y(j\omega) = F(j\omega)W(j\omega) + S(j\omega)D(j\omega) - F(j\omega)N(j\omega)$$

A basse frequenze, dove abbiamo $N(j\omega) \approx 0$, vogliamo $F(j\omega) \approx 1$, $S(j\omega) \approx 0$;

Ad alte frequenze dove $N(j\omega) \neq 0$, $D(j\omega) \neq 0 \rightarrow S(j\omega) \approx 1$, $F(j\omega) \approx 0$.

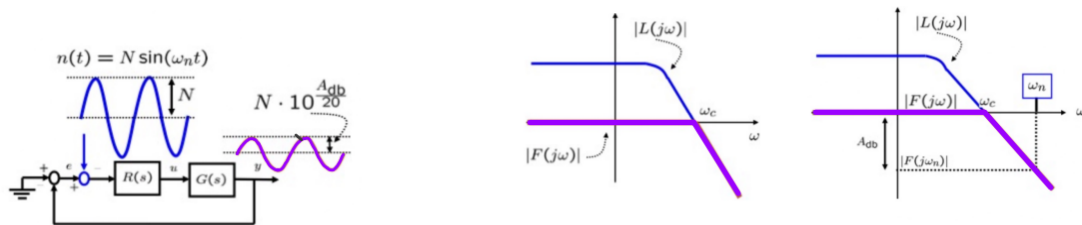
La funzione di sensitività descrive come varia il sistema quando viene apportata una modifica nell'ingresso, mentre la funzione di sensitività complementare descrive come varia la risposta del sistema quando viene modificata la quantità disturbante.

Se la sensitività complementare è bassa, il sistema è più robusto ai disturbi.

Grafici:

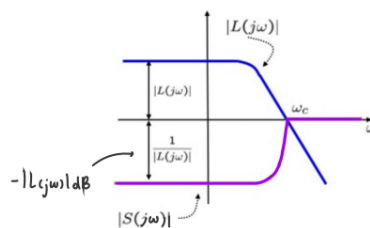
Andamento approssimato di $|F(j\omega)|$:

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \approx \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)| & \omega > \omega_c \end{cases}$$



Andamento approssimato di $|S(j\omega)|$:

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{dB} & \omega \leq \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases}$$



▼ Come ricavare le funzioni di sensitività?

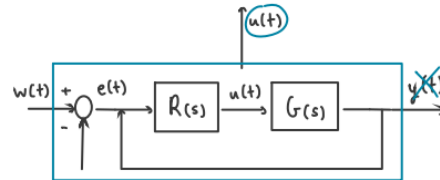
1. $Y(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s)$
2. $E(s) = W(s) - Y(s)$
3. Con $W(s) \neq 0 \rightarrow E_w(s) = W(s) - Y_w(s)$
4. Con $W(s) = 0 \rightarrow E_d(s) = -Y_d(s)$, $E_n(s) = -Y_n(s)$

$$5. E(s) = (1 - F(s))W(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s)$$

$$6. E(s) = S(s)W(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s)$$

▼ **Funzione di sensitività del controllo $Q(s)$, come si ricava e a cosa serve**

Consideriamo come uscita $u(t)$ e non $y(t)$:



La funzione di sensitività del controllo può essere ricavata così:

$$\begin{aligned} U_n(s) &= R(s)E_w(s) = R(s)(W(s) - Y_w(s)) = R(s)(W(s) - G(s)U_w(s)) \\ &= (1 + R(s)G(s))U_N(s) = R(s)W(s) \end{aligned}$$

$$U(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} \cdot W(s)$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

$Q(s)$ dipende solamente da $R(s)$. Infine si ottiene:

$$U(s) = Q(s)W(s) - Q(s)D(s) - Q(s)N(s)$$

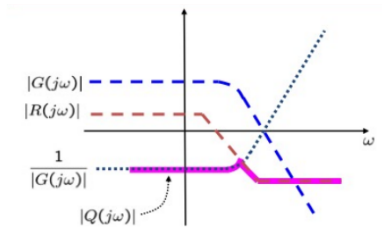
La funzione di sensitività del controllo è una misura della risposta del sistema in seguito ad alterazioni di ingresso o disturbi.

Più la sensibilità è bassa, più il sistema risulta robusto e stabile, perchè se è elevata significa che una piccola modifica nell'ingresso o nei disturbi può causare grandi variazioni nella risposta, sintomo di instabilità.

A basse frequenze il modulo di $Q(j\omega)$ dipende da $G(j\omega)$, quindi non possiamo influenzarlo con il regolatore → è importante progettare per questo regolatori che attenuino a frequenze alte.

$$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \omega \ll \omega_c \\ |R(j\omega)| & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

Per ω alte agiamo direttamente su $|L(j\omega)| \rightarrow |R(j\omega)|$ non deve essere troppo elevata.



Può essere utilizzata per moderare la variabile di controllo $u(t)$:

Ricordiamo che se $w(t) = W \cos(\omega t + \varphi)$ allora

$$u(t) = |Q(j\omega)|W \cos(\omega t + \varphi + \arg(Q(j\omega)))$$

e che

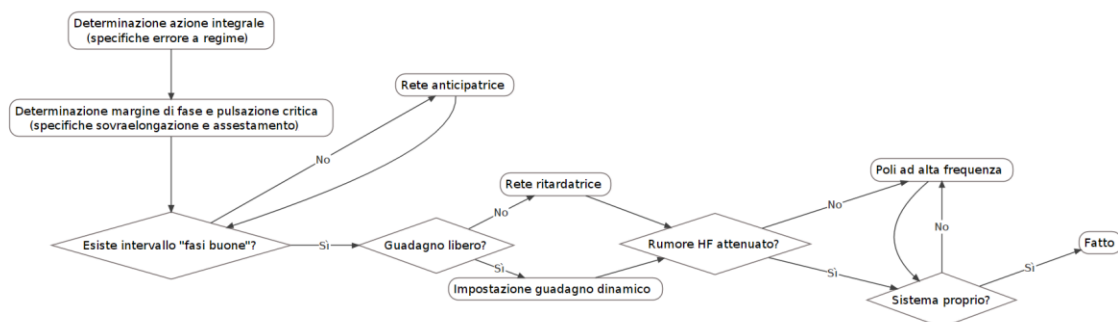
$$|Q(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|G(j\omega)|_{dB} & \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)|_{dB} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Poichè vogliamo contenere $|Q(j\omega)|_{dB}$ e non abbiamo controllo su $G(j\omega)$ dobbiamo:

- limitare ω_c ;
- realizzare $R(j\omega)$ passa-basso.

Progettazione di un regolatore

▼ Diagramma di flusso con le fasi del progetto di un regolatore



▼ Errore a regime

Errore a un gradino:

$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ con $e(t) = w(t) - y(t)$ errore in risposta a un gradino $w(t) = W \cdot 1(t)$.

utilizzando il teorema del valore finale (sistema in anello chiuso asintoticamente stabile):

$$1. e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{W}{s} = W \lim_{s \rightarrow 0} S(s)$$

$$2. L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)} = \frac{N_L(s)}{s^g D'_L(s)} \rightarrow N_L(0) = \mu, D'_L(0) = 1$$

$$3. \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g D'_L(s)}{N_L(s) + s^g D'_L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g}$$

$$4. e_\infty = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g} = \begin{cases} \frac{W}{1 + \mu} & g = 0 \\ 0 & g > 0 \end{cases}$$

Errore a ingressi $\frac{W}{s^k}$:

$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ con $e(t) = w(t) - y(t)$ errore in risposta a un ingresso con trasformata

$$W(s) = \frac{W}{s^k}.$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{W}{s^k} = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-k+1}}{\mu + s^g}$$

$$e_\infty = \begin{cases} \infty & g < k - 1 & \text{l'errore diverge} \\ \frac{W}{\mu} & g = k - 1 & \text{l'errore a regime è finito} \\ 0 & g > k - 1 & \text{errore a regime nullo} \end{cases}$$

L'errore a regime diminuisce all'aumento di μ .

1. Affinchè sia nullo, è necessario che $L(s)$ abbia un numero di poli almeno pari a k .
2. Il sistema in anello chiuso deve essere asintoticamente stabile.

Principio del modello interno:

Affinchè un segnale di riferimento (un disturbo di misura) con una componente spettrale alla frequenza ω_0 sia inseguito (neutralizzato) a regime perfettamente in uscita è necessario e sufficiente che 1. e 2. vengano rispettate.

▼ Disturbo sull'uscita $d(t)$ e suo abbattimento

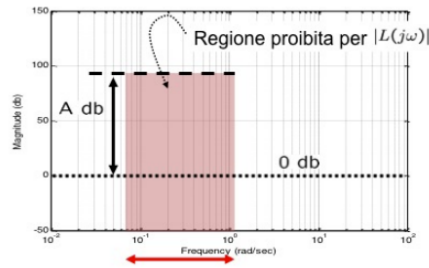
Ricordiamo che se $d(t) = D \cos(\omega t + \varphi)$ allora

$$y_d(t) = |S(j\omega)| D \cos(\omega t + \varphi + \arg(S(j\omega)))$$

$$\text{e che } |S(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{dB} & \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

da specifica vogliamo $|S(j\omega)|_{dB} \leq -A_d \text{ dB}$; poichè $\omega_{d,max} \ll \omega_c$ si ha

$$|L(j\omega)|_{dB} \geq A_d \text{ dB}$$



Esempio: se $d(t)$ deve essere attenuato di 20dB allora $|L(j\omega)|_{dB} \geq 20dB$

▼ Analisi di $F(s)$ per l'abbattimento del rumore $n(t)$

Ricordiamo che se $n(t) = N \cos(\omega t + \varphi)$ allora:

$$y_n(t) = |F(j\omega)|N \cos(\omega t + \varphi - \arg(F(j\omega)))$$

e che:

$$|F(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{dB} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

che otteniamo ponendo a zero gli altri ingressi (sovrapposizione degli effetti) →

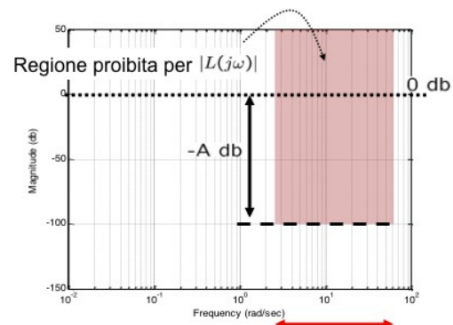
$y_n(s) = -F(s)N(s)$ e quindi per $t \gg 0$ si ottiene

$$y_n \approx N|F(j\omega_n)| \cos(\omega_n t + \varphi_n - \arg(F(j\omega_n)))$$

Esempio: attenuare $n(t)$ di 100 volte →
 $1/100, A_n = 40dB \quad \bar{A}_n = 100 \rightarrow$

$$|F(j\omega_n)| \leq \frac{1}{\bar{A}_n} = \frac{1}{100}$$

$$\forall \omega \in [\omega_{n,min}, \omega_{n,max}] \rightarrow |L(s\omega)|_{dB} \leq -A_n$$



Da specifica vogliamo $|F(j\omega)|_{dB} \leq -A_n dB$. Poichè $\omega_{n,min} \gg \omega_c$, si ha:

$$|L(j\omega)|_{dB} \leq -A_n dB$$

Esempio: se $n(t)$ deve essere attenuato di 20dB allora $|L(j\omega)|_{dB} \leq -20dB$

▼ Sovraelongazione e tempo di assestamento ottenuti dalla $F(s)$ calcolata sul momento partendo dalla $G(s)$

Sappiamo che la funzione di sensitività complementare $F(s)$ è il rapporto tra l'uscita del sistema e la differenza tra l'input desiderato e l'input effettivo, mentre la $G(s)$ descrive il rapporto tra l'input

effettivo e l'uscita del sistema. Quindi, per ottenere la $F(s)$, è necessario calcolare l'inverso di $G(s)$ più 1:

$$F(s) = \frac{1}{1 + G(s)}$$

Per calcolare la sovraelongazione, definita come la percentuale di aumento del massimo errore rispetto all'errore a regime, si usa la formula:

$$s\% = 100 \cdot \frac{Y_{max} - Y_{\infty}}{Y_{\infty}}$$



Per trovare Y_{max} e Y_{∞} , si può tracciare il diagramma di Bode della $F(s)$ e vedere il massimo valore di amplificazione del segnale (nelle ampiezze) e dove si stabilizza (errore a regime)

Per calcolare il tempo di assestamento, si può utilizzare:

$$T_a = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(\frac{s\%}{100} + 1 \right)$$

dove λ è il polo della funzione di sensitività più vicino all'origine.

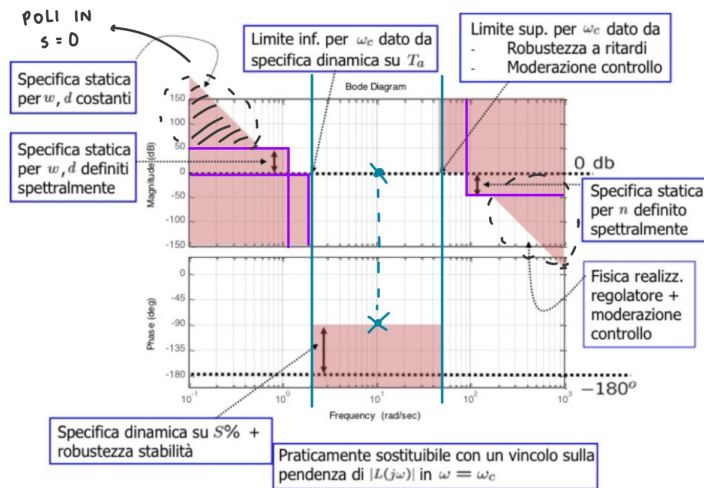
▼ Realizzabilità del regolatore

Il regolatore deve essere un sistema proprio, quindi il grado relativo (differenza poli-zeri) deve essere maggiore o uguale a zero.

A pulsazioni elevate la pendenza $-k_L$ dB per decade di $|L(j\omega)|_{dB}$ è determinata dalle differenze tra poli (ciascuno contribuisce con pendenza -20dB/dec) e zeri (ciascuno contribuisce con pendenza 20dB/dec)

Se a pulsazioni elevate $|G(j\omega)|_{dB}$ ha pendenza $-k_G$ dB/dec allora: $-k_L \leq -k_G$

▼ Mappatura specifiche dinamiche

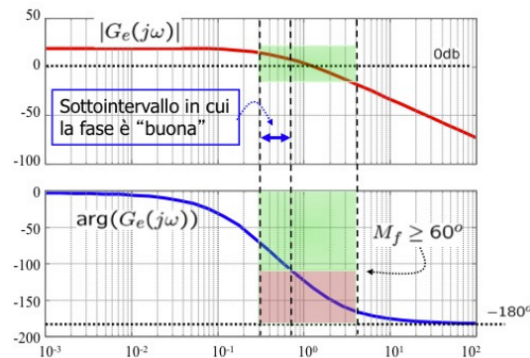


▼ Rete ritardatrice, scenari e formule di inversione

La rete ritardatrice si definisce come:

$$R_d(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$

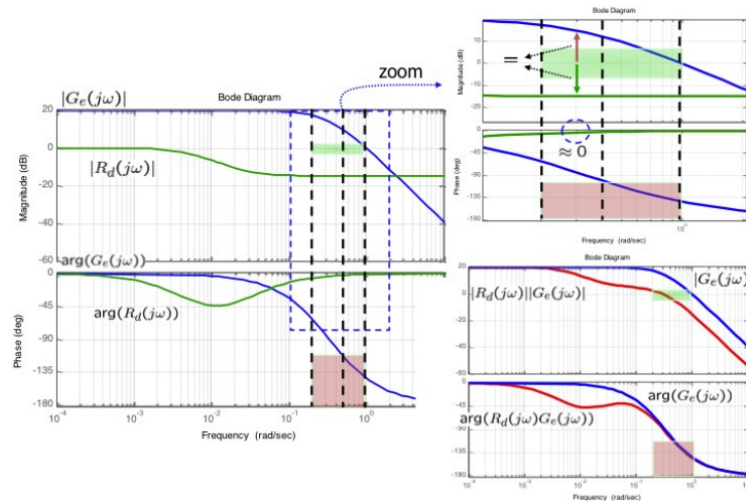
e può risolvere i problemi dello scenario A: nell'intervallo centrale di pulsazioni ammissibili per la pulsazione critica ω_c esiste un sotto-intervallo in cui la fase rispetta il vincolo sul margine di fase.



per lo scenario A, ci sono due possibilità:

1. se μ_d libero, allora scegliere $R_d(s) = \mu_d$ con $\mu_d < 1$ (abbassare il guadagno)
2. se μ_d bloccato (vincolato da guadagno statico), allora attenuare con l'inserimento di poli e zeri in $R_d(s)$ → rete ritardatrice!

La rete ritardatrice attenua ad alte frequenze con uno sfasamento trascurabile; abbassa l'ampiezza e la attenua e alza il margine di fase.



Per quanto riguarda le formule di inversione:

Con l'obiettivo di calcolare α e τ in modo che alla pulsazione ω_c^* , la rete ritardatrice abbia una attenuazione $0 < M^* < 1$ e uno sfasamento $-\frac{\pi}{2} < \varphi^* < 0$, ovvero $R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*}$

$$\tau = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

$$\alpha\tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

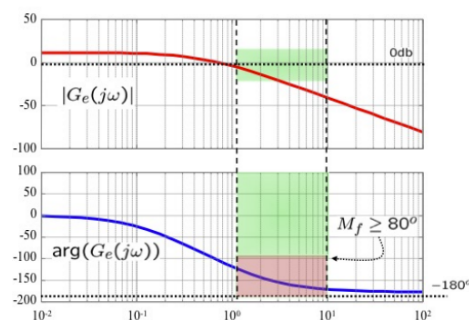
per avere $\alpha > 0$ occorre che $M^* < \cos \varphi^*$.

▼ Rete anticipatrice, scenari e formule di inversione

La rete anticipatrice si definisce così:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$

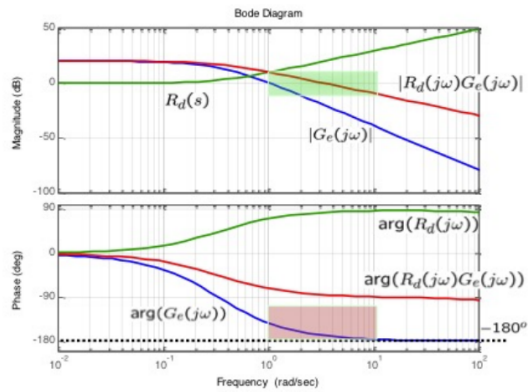
e può risolvere lo scenario B: nell'intervallo centrale di pulsazioni ammissibili per la ω_c NON esistono pulsazioni in cui la fase rispetta il vincolo sul margine di fase.



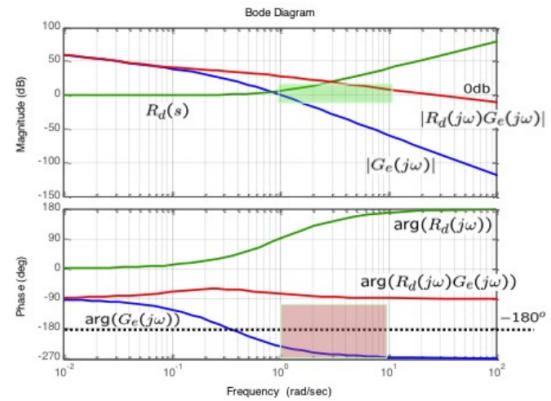
L'obiettivo è quello di aumentare la fase e amplificare il meno possibile l'ampiezza, con due possibilità:

1. aggiungere uno o più zeri per aumentare la fase;
2. aggiungere uno o più poli ad alte frequenze per evitare eccessiva amplificazione → rete anticipatrice!

Aggiunta 1 zero:



Aggiunta 2 zeri:



Se dopo l'uso di una rete ritardatrice ancora non viene rispettato il margine di fase, ci siamo ricondotti nello scenario A.

Formule di inversione:

$$\tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

$$\alpha\tau = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

▼ Cosa sono M^* e φ^* e a cosa servono?

M^* e φ^* sono rispettivamente l'attenuazione e lo sfasamento.

Servono per calcolare le formule di inversione per reti ritardatrici o anticipatrici, e a seconda dei due casi devono essere:

1. Ritardatrice: M^* compreso tra 0 e 1, φ^* compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e 0.
2. Anticipatrice: $M^* > 1$, $0 < \varphi^* < \frac{\pi}{2}$

Si possono calcolare imponendo:

$$|G_e(j\omega_c^*)|_{dB} + 20 \log M^* = 0$$

$$M_f^* = 180^\circ + \arg(G_e(j\omega_c^*)) + \varphi^*$$

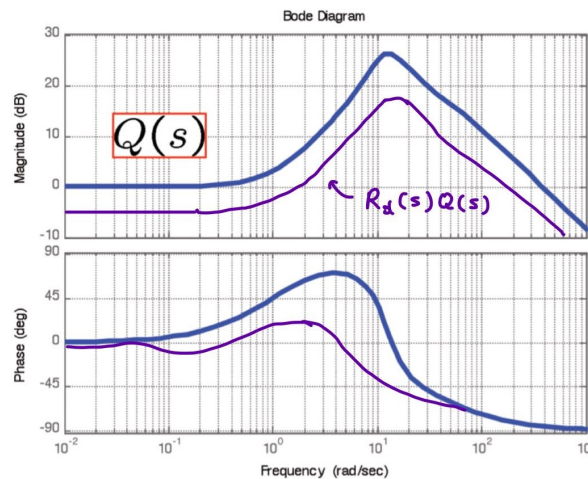
quindi:

»

$$\varphi^* = M_f^* - 180^\circ - \arg(G_e(j\omega_c^*))$$

▼ Bode della funzione di sensitività del controllo applicata a una rete ritardatrice

In generale, una rete ritardatrice può influire negativamente sulla stabilità del sistema, causando un aumento della fase e una diminuzione della banda passante. Ciò può essere riflesso nel diagramma di Bode come un aumento della fase nella regione di bassa frequenza e una diminuzione del guadagno nella regione di alta frequenza.



▼ Regolatori PID: che tipo di regolatore è un regolatore con un polo nell'origine e uno zero?

Un controllore PID (Proportional Integral Derivative) è un controllore che utilizza una combinazione di calcoli proporzionali, integrali e derivati della differenza tra il valore desiderato e il valore effettivo per determinare la quantità di correzione da apportare all'input.

Il PID ideale è fatto così:

$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

con T_i tempo integrale, e T_d tempo derivativo.

L'ingresso di controllo è:

$$U(s) = R(s)E(s) = K_p E(s) + \frac{K_p}{T_i} \frac{E(s)}{s} + K_p T_d s E(s)$$

nel dominio del tempo:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

con il primo termine proporzionale, il secondo integrale, il terzo derivativo.

Il PID ideale non è fisicamente realizzabile, perchè sviluppando i calcoli la funzione di trasferimento ha un numeratore con grado più elevato del denominatore.

Il PID reale richiede di aggiungere un polo in alta frequenza:

$$R^{fr}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \frac{1}{1 + T_p s}$$

Il PID reale, in realtà, raccogliendo i termini equivale alla combinazione di una rete anticipatrice e una rete ritardatrice:

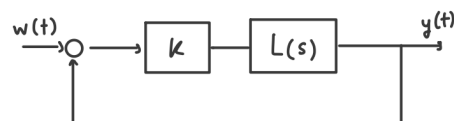
$$R(s) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{s} \cdot \frac{1}{1 + T_p s} = \mu \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s} \frac{1}{1 + T_p s}$$

Casi speciali:

Termini →	Proporzionale T_p	Integrale T_i	Derivativo T_d	Note
Regolatori P	$R(s) = K_p$	$T_i \rightarrow \infty$ oppure $T_i = 0$		
Regolatori I		$R(s) = \frac{K_i}{s}$		Rete ritardatrice con polo nell'origine e zero all'infinito
Regolatori PI	$R(s) = K_p$	$(1 + \frac{1}{T_i s})$		Rete ritardatrice con polo nell'origine e zero in $-\frac{1}{T_i}$
Regolatori PD	$R(s) = K_p$		$(1 + T_d s)$	Rete anticipatrice con zero in $-\frac{1}{T_d}$ e polo all'infinito

Luogo delle radici

Regole per tracciare il luogo delle radici:



1. n rami del luogo delle radici, (dove n è il numero di poli, m il numero di zeri);
2. Per $k = 0$ i rami partono dai poli di $L(s)$

Per $k \rightarrow \infty$ i rami vanno:

- m vanno agli zeri;
- $n - m$ (gli altri) vanno a ∞ ;

3. Il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale;
4. Le parti dell'asse reale che appartengono al luogo sono quelle che lasciano a destra un numero dispari di singolarità → (poli e/o zeri);

5. Il baricentro del luogo delle radici, ovvero il punto da cui partono gli asintoti, è definito come:

$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^m Z_i - \sum_{i=1}^n P_i}{n - m}$$

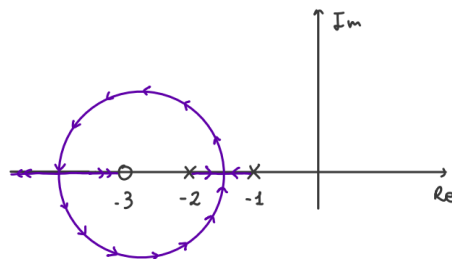
dove Z_i e P_i sono le parti reali, cambiate di segno, di zeri e poli.

6. Gli angoli formati dagli asintoti sono descritti dalla formula:

»

Esempio:

Con $L(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+3)}$, con uno zero in -3 e due poli in -1 e -3, come descritto nel diagramma dei poli in anello aperto:



Qui utilizzando la regola (4), vediamo per ogni punto se a destra del grafico c'è un numero dispari di singolarità (consideriamo lo 0 pari), e coloriamo di viola quelli che saranno le parti dell'asse reale che appartengono al luogo.

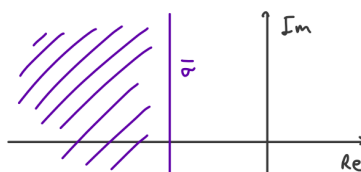
Utilizzando la regola (2) vediamo che per $k = 0$, i due poli a -1 e -2 partono dai poli in anello aperto, e hanno senso di percorrenza opposto (per forza, devono restare nel luogo!) mentre per $k \rightarrow \infty$ uno dei due deve andare verso lo zero, e l'altro verso ∞ lungo l'asse reale.

Per soddisfare la regola (3) compiono questo giro in cerchio, per ritornare in maniera simmetrica sull'asse reale.

▼ Come si mappa una specifica sul tempo di assestamento nel luogo delle radici?

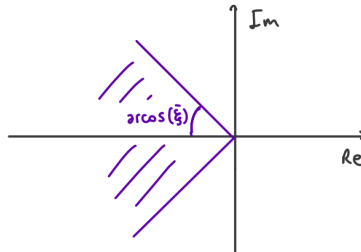
Imponendo un vincolo sulla parte reale dei poli in anello chiuso:

$$\sigma \leq -\frac{\log(0.01k)}{T_{ak}^*}$$



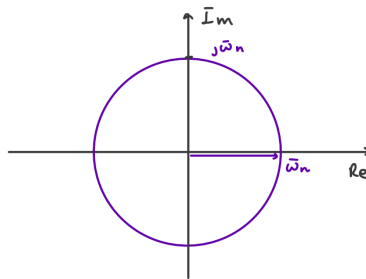
▼ Come si mappa una specifica sullo smorzamento dei poli dominanti nel luogo delle radici?

Per far sì che i poli dominanti abbiano uno smorzamento maggiore di una soglia $\bar{\xi}$, i poli in anello chiuso devono essere all'interno del settore che forma con l'asse reale un angolo pari a $180^\circ - \arccos \bar{\xi}$



▼ Come si mappa una specifica sulla pulsazione naturale dei poli dominanti nel luogo delle radici?

Per far sì che la pulsazione naturale dei poli dominanti sia maggiore di una soglia $\bar{\omega}_n$, i poli in anello chiuso devono essere all'esterno della circonferenza con centro nell'origine e raggio $\bar{\omega}_n$.



▼ Luogo delle radici in MATLAB

Per visualizzare il luogo delle radici in MATLAB basta usare la funzione: `rlocus(G)`