trasformata di $s(t) = \cos(\omega_0 t)$ con $x(t)$ gradino unitario simmetrico $1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t > 0 \\ -\frac{1}{2} & t < 0 \end{cases}$

esprimo il coseno come somma di due esponenziali complessi : $\cos(\omega_0 t) = \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$ → invece per $\mathrm{sen}(\omega_0 t) = \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2j}$

$s(t) = \frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_0 t}$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jt(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jt(\omega + \omega_0)} dt = \frac{1}{2} x(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} x(\omega + \omega_0)$$

trasformata del gradino unitario → $X(\omega) = \dfrac{1}{j\omega}$

$$S(\omega) = \frac{1}{2} x(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} x(\omega + \omega_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} = \frac{1}{\cancel{2}j} \left(\frac{\cancel{2}\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) = \frac{1}{j} \left(\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)$$

spettro di ampiezza monolatero : $V(\omega) = \dfrac{|S(\omega)|}{\pi} = \dfrac{|\omega|}{\pi |(\omega^2 - \omega_0^2)|}$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$(\omega^2 - \omega_0^2) = b$

$\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^{\cancel{2}}} = \omega^2 - \omega_0^2$

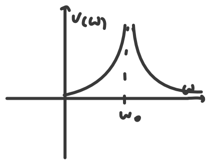
spettro di fase monolatero : $\varphi(\omega) = -\arg\{S(\omega)\} = \arg\{\omega^2 - \omega_0^2\} - \underbrace{\arg\{\omega\}}_{= 0} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \omega \le \omega_0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega > \omega_0 \end{cases}$

grafico di $V(\omega) = \dfrac{|\omega|}{\pi |(\omega^2 - \omega_0^2)|}$

quando $\omega = 0$ → 0

quando $\omega = +\infty$ → $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \dfrac{|\omega|}{\pi(\omega^2 - \omega_0^2)} = 0$

quando $\omega = \omega_0$ → $\dfrac{|\omega_0|}{\pi(\omega_0^2 - \omega_0^2)} = \dfrac{|\omega_0|}{0} = +\infty$ →



$s(t) = x(t) \sin(\omega_0 t)$ con $x(t) = 1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t > 0 \\ -\frac{1}{2} & t < 0 \end{cases}$

esprimo il seno come somma di due esponenziali complessi coniugati → sen $= \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2j}$

$s(t) = \frac{1}{2j} x(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2j} x(t) e^{-j\omega_0 t}$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{jt(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{jt(\omega - \omega_0)}$$

$$= \frac{1}{2j} x(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2j} x(\omega - \omega_0) \rightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega} \rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} =$$

$$= \frac{1}{2j^2(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{2j^2(\omega - \omega_0)} = \frac{\omega + \cancel{\omega_0} + \omega - \cancel{\omega_0}}{2j^2(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}$$

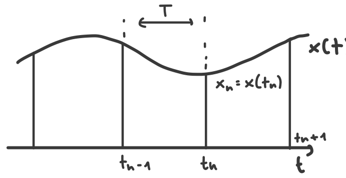
$$= \frac{\cancel{2}\omega}{\cancel{2}j^2(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{\omega}{\underbrace{j^2}_{= -1}(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ampiezza monolatera → $V(\omega) = \dfrac{|S(\omega)|}{\pi} = \dfrac{|\omega|}{\pi |\omega_0^2 - \omega^2|}$

fase monolatera → sono due numeri reali sia al nominatore che al denominatore → $\varphi(\omega) = 0$

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO DI SHANNON → per risolvere tutte le frequenze in una funzione, deve essere campionata al doppio della frequenza più alta presente

Il campionamento è il primo passo del processo di conversione analogico-digitale di un segnale. Consiste nel prelievo di campioni da un segnale analogico e continuo nel tempo, quindi nel leggere i valori di una funzione tempo continua ad intervalli regolari.



I valori $x_n = x(t_n)$ sono detti valori campionati, gli istanti di lettura t_n istanti di campionamento, l'intervallo costante T che li separa è detto intervallo di campionamento e il suo inverso $\frac{1}{T} = f_0$, frequenza di campionamento.

Possiamo porre la $t_n = nT$ (assumendo l'origine dei tempi in uno degli istanti di campionamento) → $x_n = x(nT)$
$n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Fra la trasformata $X_s(\omega)$ della serie e la trasformata $X(\omega)$ della funzione campionata vale la seguente importantissima relazione

$$\boxed{X_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0)}$$

→ la dimostrazione si basa sulla "doppia natura" dei campioni ed in particolare sul confronto fra le due seguenti formule di antitrasf. In quanto elementi di una serie gli x_n possono essere espressi come antitrasformata della trasformata della serie:

antitrasformata di una serie

$$x_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} X_s(\omega)\, e^{j\omega nT}\, d\omega$$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega nT}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\overbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{T}-k\omega_0}^{+\frac{\pi}{T}+k\omega_0}}^{\text{somma infinita di piccoli intervalli}} X(\omega)\, e^{j\omega nT}\, d\omega \overset{\xi = \omega - k\omega_0}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(\xi + k\omega_0)\, e^{jnT(\xi + k\omega_0)}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(\xi + k\omega_0)\, \underbrace{e^{jk\omega_0 Tn}}_{=1} e^{j\xi nT}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(\omega + k\omega_0)\, e^{jn\omega T}\, d\omega$$

$$x_n = x(nT) \rightarrow \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(\omega)\, e^{j\omega nT}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(\omega + k\omega_0)\, e^{jn\omega T}\, d\omega$$

$$\rightarrow \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(\omega)\, e^{j\omega nT}\, d\omega = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(\omega + k\omega_0)\, e^{jn\omega T}\, d\omega \longrightarrow X_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0)$$

$\Delta t = \frac{1}{2\omega_{max}}$ ↑ Nyquist ↑ velocità di camp. ↑

Il teorema di Shannon definisce la minima frequenza, detta frequenza di Nyquist, necessaria per campionare un segnale analogico senza perdere informazioni, e per poter quindi ricostruire il segnale analogico tempo continuo originario.
In particolare, il teorema afferma che, dato un segnale a banda limitata (trasformata di Fourier nulla al di fuori di un certo intervallo di frequenze), la minima frequenza di campionamento necessaria per evitare aliasing e perdita di informazione nella ricostruzione del segnale analogico originario deve essere maggiore del doppio della sua frequenza massima. → $f_0 > 2f_{max}$ ‖ $\omega_0 > 2\omega_{max}$

Volendo esprimere $x(t)$ in funzione dei suoi valori campionati $x(nT)$, scegliamo la frequenza di Nyquist per isolare il termine centrale
↳ $\frac{\omega_0}{2}$ → metà freq. di campionam.

$$X(\omega) = \begin{cases} T X_s(\omega) & \text{se } |\omega| < \frac{\omega_0}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

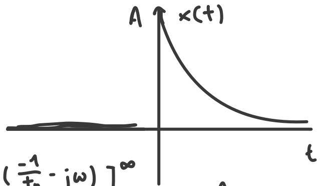
↳ la inseriamo nella formula di antitrasformazione di $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega T}\, d\omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X_s(\omega)\, e^{j\omega T}\, d\omega = \frac{T}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\omega t}\, e^{-jn\omega T}\, d\omega = \frac{T}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left.\frac{e^{j\omega(t-nT)}}{j(t-nT)}\right|_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} =$$

$$= \frac{T}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{t-nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \operatorname{sinc}\left[\frac{1}{T}(t-nT)\right] \text{ con banda in } \left[0, \frac{\omega_0}{2}\right]}$$

→ sviluppo in serie di Shannon

Trasformata esponenziale monolatera $\rightarrow$ $x(t) : \begin{cases} 0 & t<0 \\ Ae^{-\frac{t}{t_0}} & t \geq 0 \end{cases} \quad t_0 > 0 \rightarrow$



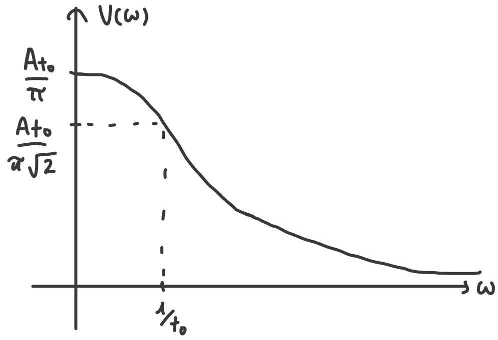
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = A \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{t_0}} e^{-j\omega t}\, dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\left(\frac{-1}{t_0} - j\omega\right)} dt = A \left[\frac{e^{t\left(\frac{-1}{t_0} - j\omega\right)}}{\frac{-1}{t_0} - j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{At_0}{1 + j\omega t_0}$$

ampiezza monolatera $= V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi} = \frac{At_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 t_0^2}} \quad \omega \geq 0$

grafico $\rightarrow \omega = 0 \rightarrow V(\omega) = \frac{At_0}{\pi}$

$\omega = +\infty \rightarrow V(\omega) = 0 \rightarrow \frac{1}{+\infty}$

$\omega = \frac{1}{t_0} \rightarrow \frac{At_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{t_0}\right)^2 t_0^2}} = \frac{At_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{At_0}{\pi\sqrt{2}}$ $\rightarrow$



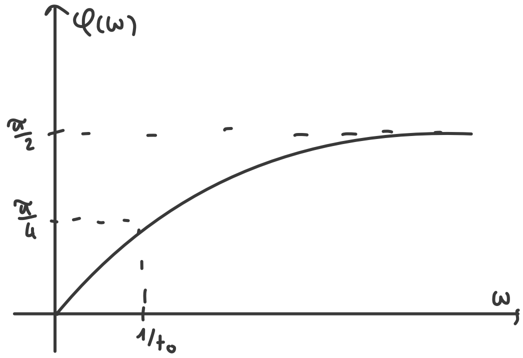
fase monolatera $\cdot$ $\varphi(\omega) = -\arg\{X(\omega)\} = \arg\{1 + j\omega t_0\} - \arg\{At_0\}$

$\arg\left\{\frac{\omega t_0}{1}\right\} = \arctan \omega t_0 \quad \arg\{At_0\} = \text{reale} = 0 \quad \varphi(\omega) = \arctan \omega t_0$

grafico $\rightarrow \omega = 0 \rightarrow 0$

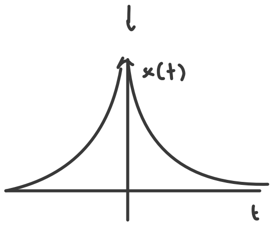
$\omega = +\infty \rightarrow \lim_{\omega \to +\infty} \arctan \omega t_0 = \frac{\pi}{2}$

$\omega = \frac{1}{t_0} \rightarrow \arctan \frac{1}{\cancel{t_0}} \cancel{t_0} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$



<u>grafici uguali a quelli di circuito RC</u>

Trasformata esponenziale bilatera



$x(t) = Ae^{-\frac{|t|}{t_0}} \quad t_0 > 0$ $\rightarrow$ visto che c'è il modulo lo spezziamo in 2 integrali diversi

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega T} dt = A \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{t_0}} e^{-j\omega t} dt + A \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{t_0}} e^{-j\omega t} dt =$$

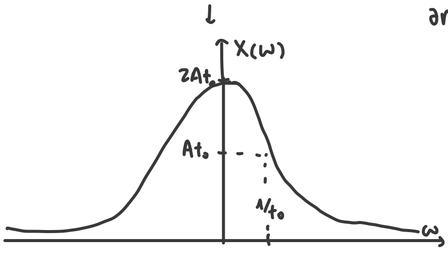
$$= A \int_{-\infty}^{0} e^{t\left(\frac{1}{t_0} - j\omega\right)} dt + A \int_{0}^{+\infty} e^{t\left(\frac{-1}{t_0} - j\omega\right)} dt =$$

$$= A \left[\frac{e^{t\left(\frac{1}{t_0} - j\omega\right)}}{\frac{1}{t_0} - j\omega} \right]_{-\infty}^{0} + A \left[\frac{e^{t\left(-\frac{1}{t_0} - j\omega\right)}}{-\frac{1}{t_0} - j\omega} \right]_{0}^{+\infty} = A \frac{1}{\frac{1}{t_0} - j\omega} + A \frac{-1}{-\frac{1}{t_0} - j\omega}$$

$$= \frac{At_0}{1 - j\omega t_0} + \frac{At_0}{1 + j\omega t_0} = \frac{2At_0}{1 + \omega^2 t_0^2}$$

$\rightarrow$ trasformata sempre positiva $\rightarrow$ coincide con il suo modulo, quindi con spettro ampiezza bilatero

$\rightarrow$ ampiezza nulla per stesso motivo



DFT → trasformata di Fourier discreta → si applica a un vettore, generalmente complesso

↓

$(x_0, \dots, x_{N-1}) \Longleftrightarrow (X_0, \dots, X_{N-1})$

trasformata → $X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega T}$ ↗ $\omega = q$ ↘ $T = \frac{2\pi}{N}$ → $\boxed{X_q = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nq}}$

antitrasformata → $x_n = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j\frac{2\pi}{N}nq}$

↓

dimostrazione

$$\hookrightarrow \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j\frac{2\pi}{N}nq} = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}nq} e^{j\frac{2\pi}{N}nq} \overset{\text{raccolgo}}{=} \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j\frac{2\pi}{N}nq(n-k)} =$$

↓

sostituisco X_q con la sua definizione

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sum_{q=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}(n-k)}\right]^q$$

→ dall'analisi ricordiamo la serie geometrica → $\sum_{q=0}^{N-1} x^q = \begin{cases} \frac{1-x^N}{1-x} & x \neq 1 \\ N & x = 1 \end{cases}$

||

$$\begin{cases} \frac{1-\left[e^{j\frac{2\pi}{N}(n-k)}\right]^N}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(n-k)}} & \text{se } n \neq k \\ N & \text{se } n = k \end{cases} \rightarrow \frac{1-e^{j2\pi(n-k)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(n-k)}} \Rightarrow e^{j2\pi(n-k)} = 1 \Rightarrow 0$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \underbrace{\sum_{q=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}(n-k)}\right]^q}_{=0 \text{ per quello detto prima}} = \frac{1}{\cancel{N}}\cancel{N} x_n = x_n$$

teorema di Parseval:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2$$

la DFT può essere usata per calcolare in modo approssimato la trasformata di segnali continui.
il legame riguarda le ripetizioni periodiche di $x(t)$ e $X(\omega)$

$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT_p)$ $\quad X_p(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\omega - k\omega_p)$ $\quad \boxed{T_p\omega_p = 2\pi N}$ → $\left.\begin{array}{l}\Delta t = \frac{T_p}{N} = \frac{2\pi}{\omega_p} \\ \Delta\omega = \frac{\omega_p}{N} = \frac{2\pi}{T_p}\end{array}\right] \rightarrow \Delta t \Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$

↳ legame tra i periodi

si definiscono le n-ple di numeri

$\Delta t \cdot x_p(n\Delta t) \quad n = 0, 1, .., N-1 \qquad X_p(q\Delta\omega) \quad q = 0, 1, .., N-1$

valgono allora le uguaglianze → $\Delta t \cdot x_p(n\Delta t) = F_d^{-1}(X_p(q\Delta\omega)) \qquad X_p(q\Delta\omega) = F_d(\Delta t \; x_p(n\Delta t)$

se non c'é aliasing ne nei tempi nē nelle frequenze, é possibile ricavare la trasformata continua da quella discreta

la FFT é un algoritmo ottimizzato per calcolare la DFT o la sua inversa → il più famoso è algoritmo di Cooley-Tukey

↓ spezza ricorsivamente una DFT di dimensione N, con N t.c. $N = N_1 N_2$ in DFT più piccole di dim. N_1 e N_2

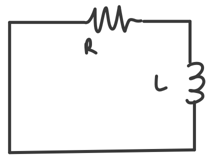
↓ la DFT → quantità di operazioni aritmetiche $O(N^2)$ → abbastanza lenta e laboriosa

↓

FFT ottiene stesso risultato con $O(N\log(N))$ operazioni → veloce!!!

↳ in generale questi algoritmi si basano sulla fattorizzazione di N

Circuito RL



$Z_2 = j\omega L \qquad Z_1 = R$

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{j\omega L}{R+j\omega L} \overset{\text{divido} \times j\omega L}{=} \frac{1}{1+\frac{R}{j\omega L}} \qquad \omega_0 = \frac{R}{L} \rightarrow H(\omega) = \frac{1}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$$

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\frac{\omega_0}{\omega}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\left\{1-j\frac{\omega_0}{\omega}\right\} = \operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\omega}$$

$\downarrow$

grafico $\rightarrow$ $\omega = 0 \rightarrow 0$

$\omega = +\infty \rightarrow +\infty$

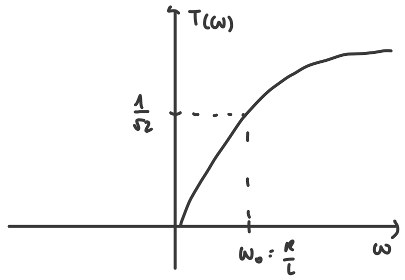
$\omega = \omega_0 : \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

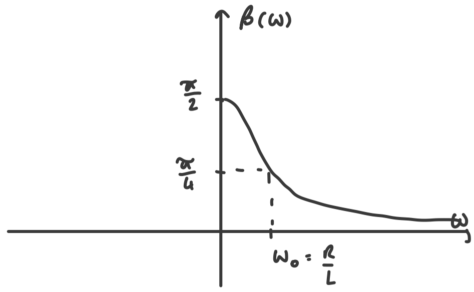
$\downarrow$

grafico $\rightarrow$ $\omega = 0 \rightarrow \operatorname{arctg} +\infty = \frac{\pi}{2}$

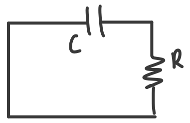
$\omega = +\infty \rightarrow \operatorname{arctg} 0 = 0$

$\omega = \omega_0 \rightarrow \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$





Circuito CR



$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}} \overset{\text{moltiplico} \times j\omega C}{=} \frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}$$

$\arg\{1+j\omega CR\} = \arctan(\omega CR)$

$\arg\{j\omega CR\} = \frac{\pi}{2} \rightarrow a=0,\ b>0$

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \left| \frac{j\omega CR}{R+j\omega CR} \right| = \frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1+j\omega CR\} - \arg\{j\omega CR\} = \arctan(\omega CR) - \frac{\pi}{2}$$

$\downarrow$

grafico $\rightarrow$ $\omega = 0 \rightarrow 0$

$\omega = +\infty \rightarrow +\infty$

$\omega = \omega_0 \rightarrow \frac{\frac{1}{CR}CR}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{CR}CR\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\downarrow$

$\omega_0 = \frac{1}{CR}$

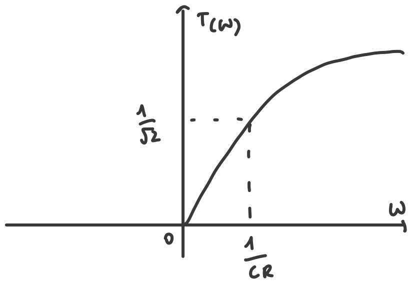
$\downarrow$

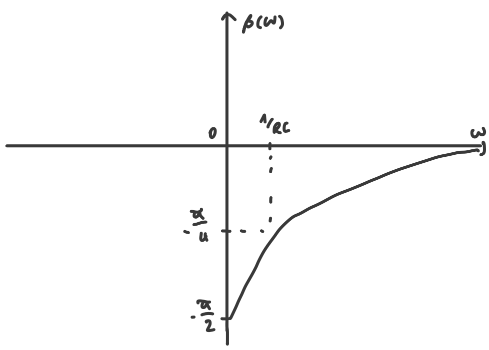
grafico $\rightarrow$ $\omega = 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$\omega = +\infty \rightarrow 0$

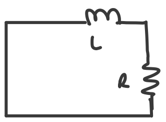
$\omega = \frac{1}{RC} \rightarrow \arctan\left(\frac{1}{CR}CR\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} =$

$= \frac{\pi - 2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$





Circuito LR



$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{R}{j\omega L + R} = \frac{1}{1+\frac{j\omega L}{R}}$$

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\left\{1+\frac{j\omega L}{R}\right\} = \arctan\frac{\omega L}{R}$$

↓

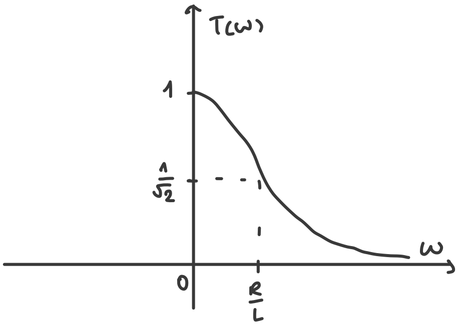
grafico → $\omega = 0 \to \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$

$\omega = +\infty \to 0$

$\omega = \omega_0 \to \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\frac{R}{L}L}{R}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\omega_0 = \frac{R}{L}$

↓



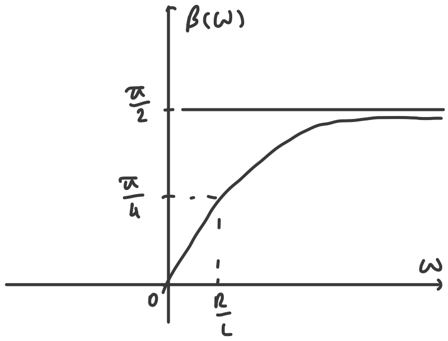
↓

grafico → $\omega = 0 \to 0$

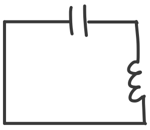
$\omega = +\infty \to \frac{\pi}{2}$

$\omega = \omega_0 \to \frac{\pi}{4}$

↓



Circuito CL



moltiplico × $j\omega C$ → $j^2 = -1$

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{j\omega L}{\frac{1}{j\omega C}+j\omega L} = \frac{j\omega L}{\frac{1+j^2\omega^2 CL}{j\omega C}} = \frac{j^2\omega^2 CL}{1-\omega^2 CL} = \frac{-\omega^2 CL}{-\omega^2 CL+1} \rightarrow \frac{\omega^2 CL}{\omega^2 CL - 1}$$

$T(\omega) = |H(\omega)| =$ é reale, coincide con $H(\omega) \to \dfrac{\omega^2 CL}{\omega^2 CL - 1}$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = H(\omega) \text{ é reale} \to \beta(\omega) = \begin{cases} 0 & H(\omega) > 0 \\ \pi & H(\omega < 0 \end{cases}$$

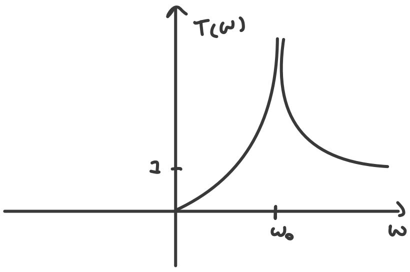
↓

grafico → $\omega = 0 \to 0$

$\omega = +\infty \to \lim_{\omega\to\infty} \dfrac{\omega^2 CL}{\omega^2 (CL - \frac{1}{\omega^2})} = 1$

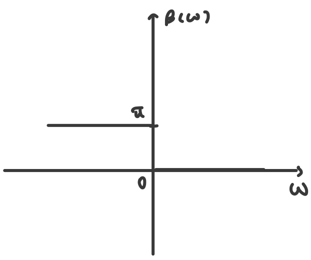
$\omega = \omega_0 = \dfrac{\frac{1}{\cancel{CL}} CL}{\frac{1}{CL} CL - 1} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$

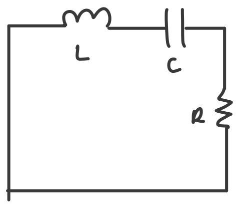


↓

grafico



Circuito LCR serie



$$Z_1 = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \qquad Z_2 = R$$

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{R}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{R}{\frac{j^2\omega^2 CL + 1 + j\omega CR}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1-\omega^2 CL + j\omega CR}$$

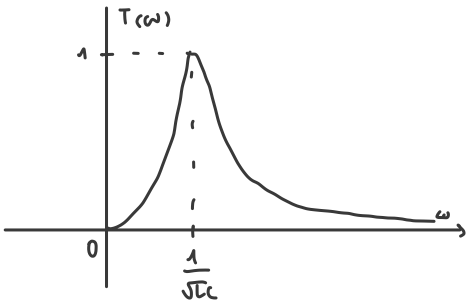
$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{\omega CR}{\sqrt{(1-\omega^2 CL)^2 - (\omega CR)^2}}$$

$\downarrow$

grafico $\rightarrow \omega = 0 \rightarrow 0$

$\omega = +\infty \rightarrow 0$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega = \omega_0 = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot CR}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot CR\right)^2}} = 1$$



$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1-\omega^2 CL + j\omega CR\} - \arg\{j\omega CR\}$$

$$\arg\{1-\omega^2 CL + j\omega CR\} : \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\right) & \omega \le \omega_0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\right) + \pi & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$\arg\{j\omega CR\}$

$$\arg\left\{\frac{\omega CR}{0}\right\} = \frac{\pi}{2} \qquad a = 0,\ b > 0$$

$$\beta(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\right) - \frac{\pi}{2} & \omega \le \omega_0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\right) + \frac{\pi}{2} & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

grafico $\rightarrow \omega = 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

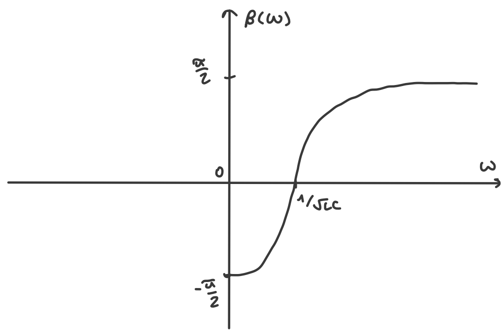
$\omega = +\infty \rightarrow +\frac{\pi}{2}$

$\omega = \omega_0$

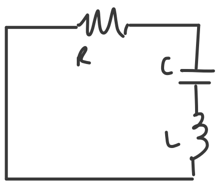
$\downarrow$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}} CR}{0}\right) - \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{arctg} +\infty - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$\downarrow$



Circuito RCL serie



$$H(\omega) = \frac{1-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC + j\omega CR}$$

$$T(\omega) = \frac{|1-\omega^2 LC|}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

$\downarrow$

grafico $\rightarrow \omega = 0 \rightarrow 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}}$

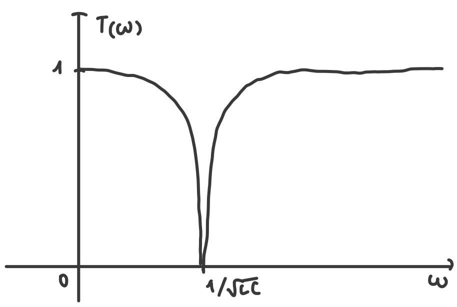
$\omega = +\infty \rightarrow 1$

$\omega = \omega_0$

$\downarrow$

$$\frac{|1 - \frac{1}{\cancel{LC}} \cancel{LC}|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} CR\right)^2}} = 0$$

$\downarrow$



$s(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$ con $x(t)$ impulso rettangolare di durata τ (tronco di sinusoide)

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \rightarrow s(t) = \frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t} =$$

$$= \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$$ → teorema fondamentale della modulazione

trasformata dell' impulso rettangolare:

$$X(\omega) = I\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0) = \frac{1}{2}I\,\text{sinc}\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}I\,\text{sinc}\left(\frac{\omega+\omega_0}{2\pi}\right)$$

trasformata di $x(t) = e^{-t}u(t)$ funzione gradino

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{t(-1-j\omega)}dt =$$

$$= \left[\frac{e^{t(-1-j\omega)}}{-1-j\omega}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{-1-j\omega} = \frac{1}{1+j\omega}$$

$x(t)$ reale → si possono calcolare gli spettri monolateri

$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi} = \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{1+j\omega}\right| = \frac{1}{\pi\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arg\{X(\omega)\} = \arg\{1+j\omega\} - \cancel{\arg\{1\}} = \text{arctg}\{\omega\}$$

$\varphi_1 = \varphi_{x_1} + \beta(\omega_1)$

$A_{y_1} = A_{x_1}T(\omega_1)$

risposta lineare a due sinusoidi $V_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1)$ e $V_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2)$

$x_1(t) = A_{x_1}\cos(\omega_1 t - \varphi_1)$ $\quad A_{x_1} = V_1 \rightarrow y_1(t) = A_{x_1}T(\omega_1)\cos[\omega_1 t - \varphi_{x_1} - \beta(\omega_1)] = A_{y_1}\cos(\omega_1 t - \varphi_1)$

$x_2(t) = A_{x_2}\cos(\omega_2 t - \varphi_2)$ $\quad A_{x_2} = V_2 \rightarrow y_2(t) = A_{x_2}T(\omega_2)\cos[\omega_2 t - \varphi_{x_2} - \beta(\omega_1)] = A_{y_2}\cos(\omega_2 t - \varphi_2)$

per linearità, faccio la somma → $y(t) = A_{y_1}\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_{y_2}\cos(\omega_2 t - \varphi_2)$

trasformata di un impulso rettangolare

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = A \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\omega t}\, dt = A \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = A\, \frac{e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}}}{-j\omega} =$$

$$= A\, \frac{-2j\, \text{sen}(\omega \frac{\tau}{2})}{-j\omega} = A\tau\, \frac{\text{sen}(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \tau/2} = I\, \frac{\text{sen}(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \tau/2} = I\, \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2\pi}\right)$$

$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi} = \frac{I}{\pi} \left| \frac{\text{sen}(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} \right| = \frac{I}{\pi} \left| \text{sinc}(\omega \tau / 2\pi) \right|$$

$$\varphi(\omega) = -\arg\{X(\omega)\} = \begin{cases} 0 & X(\omega) > 0 \\ \pi & X(\omega) < 0 \end{cases}$$

antitrasformata di un impulso rettangolare nelle frequenze

$$X(\omega) = \begin{cases} X_0 & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \qquad X_0 > 0$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{X_0}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{X_0}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\omega_m}^{+\omega_m} = \overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{\frac{X_0\, \omega_m}{\pi}}}\, \frac{\text{sen}(\omega_m t)}{\omega_m t} = x_0\, \frac{\text{sen}(\omega_m t)}{\omega_m t}$$

$\downarrow$

$x_0\, \text{sinc}\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)$

$\downarrow$

maggiore la banda ω_m, + stretto il sinc

variante $\rightarrow$ $X(\omega) = \begin{cases} X_0\, e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases}$

$$x(t) = x_0\, \frac{\text{sen}[\omega_m (t - t_0)]}{\omega_m (t - t_0)} = x_0\, \text{sinc}\left[\frac{\omega_m (t - t_0)}{\pi}\right]$$

MODULAZIONI ANALOGICHE

$V(t) = V_0$ ampiezza (costante) $\qquad m(t) = \dfrac{V(t) - V}{V_0}$ deviaz. relativa di ampiezza

<u>modulazione AM</u> : $\begin{cases} m(t) = kx(t) \\ \alpha(t) = 0 \end{cases}$

$m(t) = kx(t)$ → deviazione di ampiezza proporzionale al segnale modulante

$\alpha(t) = 0$ → deviazione di fase nulla → $\alpha(t) = \varphi(t) - (\omega_0 t - \varphi_0)$

indice di modulaz. ← $kx(t) \geq 1$ → $\boxed{s(t) = V_0 [1 + kx(t)] \cos[\omega_0 t - \varphi_0]}$ con $V_0 [1 + kx(t)] > 0$

$m_a = \max(|m(t)|)$ $\quad m_a \in [0, 1]$

↓

deve essere $m_a \leq 1$ affinché l'inviluppo del segnale modulato abbia lo stesso andamento dell'informazione da trasmettere

↓

per $m_a > 1$ il segnale $x(t)$ si dice in sovramodulazione non consente ricostruzione fedele dell'informazione

in AM deve sempre esserci un legame lineare fra ampiezza istantanea e segnale modulante

↓

inviluppo complesso

↓

$i(t) = V_0 [1 + kx(t)]$

↓

supponiamo che $x(t)$, di tipo passa-basso sia rappresentabile dall'integrale di Fourier

↓

$$x(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)]\, d\omega$$

↓

sostituendo nell'espressione generale dell'AM

↓

inviluppo complesso di un segnale

↓

$s(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$

↓

$s(t) = \mathrm{Re}\{ i(t) e^{j\omega_0 t} \}$ → $i(t) = V(t) e^{j[\alpha(t) - \varphi_0]}$

$$s(t) = \underbrace{V_0 \cos \omega_0 t}_{\text{portante}} + \underbrace{\frac{kV_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)]\, d\omega}_{\text{banda laterale superiore}} + \underbrace{\frac{kV_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_0 - \omega)t + \varphi(\omega)]\, d\omega}_{\text{banda laterale inferiore}}$$

portante ↓ quando soppressa: DSB (double side band), trasmesse solo le bande laterali

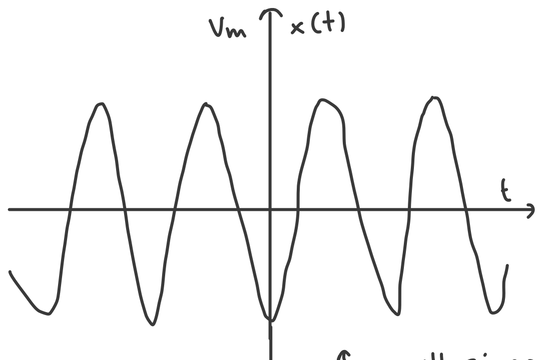
↓

DSB - SC → Suppressed Carrier → se elimina anche una delle due bande laterali → SSB - SC

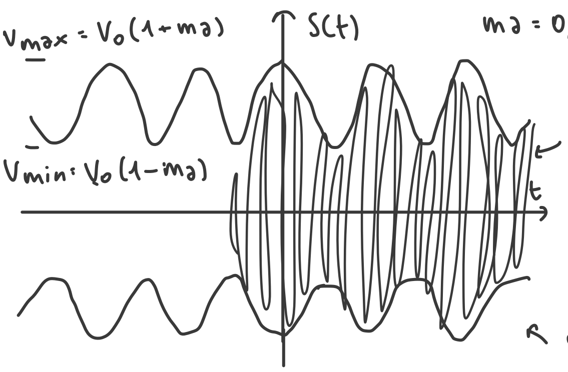
banda laterale superiore / banda laterale inferiore ↓ SSB (single side band)

↓

si trasmette una sola banda laterale → superiore → USB; → inferiore → LSB



oscillazione modulante



portante (qui modulata)

oscillazione modulata AM

modulazioni PM e FM sono modulazioni angolari, cioè modificano argomento della sinusoide portante

PM $\begin{cases} m(t) = 0 \\ \alpha(t) = k\,x(t) \end{cases}$

↓

Phase modulation

↓

$$\boxed{s(t) = V_0 \cos[\omega_0 t + k\,x(t) - \varphi_0]}$$

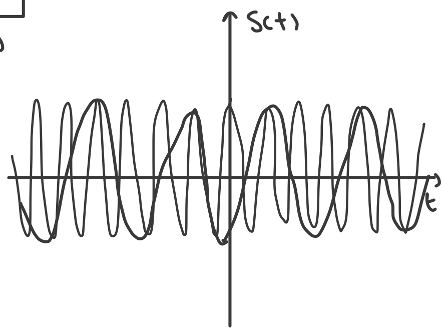
Frequency Modulation → FM $\begin{cases} m(t) = 0 \\ \Delta\omega(t) = k\,x(t) \end{cases}$ → deviazione istantanea di pulsazione

↓

$$\alpha(t) = k \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

↓

$$\boxed{s(t) = V_0 \cos\left[\omega_0 t + k \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau - \varphi_0\right]}$$



MODULAZIONI A PRODOTTO → $\boxed{s(t) = x(t) \cos \omega_0 t}$

↓

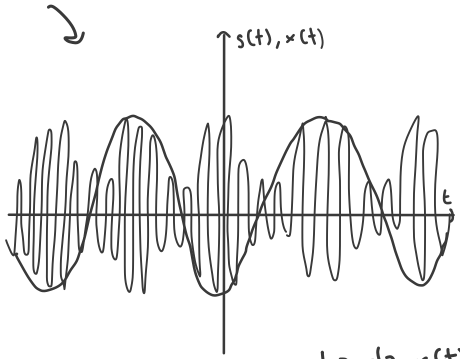
$i(t) = x(t)$

↓

modulazione ibrida, sia l'ampiezza istantanea che deviaz. istantanea di fase variano nel tempo

↓

$V(t) = |x(t)|$ $\quad \alpha(t) = \begin{cases} 0 & x(t) > 0 \\ \pi & x(t) < 0 \end{cases}$



trasformata = teorema fondamentale modulazione

↓

$$S(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$$

↓

banda di s(t) doppia rispetto a quella di x(t) → efficienza $\eta_F = \frac{B_x}{B_s} = \frac{\omega_m}{2\omega_m} = \frac{1}{2}$

B_x → banda x(t)

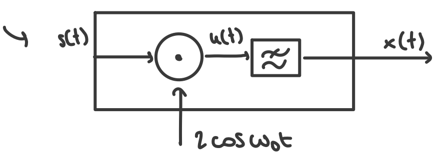
B_s → banda s(t)

demodulatore → demodulazione = $\underbrace{x(t)}_{\text{oscillazione modulante}} \cdot \underbrace{2s(t)}_{\text{portante}}$

↓

$u(t) = 2s(t)\cos\omega_0 t = 2x(t)\cos^2\omega_0 t = x(t) + x(t)\cos 2\omega_0 t$ → poi filtrando passa-basso → $x_d(t) = x(t)$

quindi demodulatore = modulatore a prodotto + filtro passa-basso



↓

la portante deve essere ricostruita non solo in frequenza ma anche in fase (demodulatore coerente)

↓

l'errore di fase provoca un'attenuazione del segnale demodulato, $x_d(t) = x(t)\cos\Delta$

↓

$$u(t) = x(t)\cos\Delta + x(t)\cos(2\omega_0 t - \Delta)$$

MODULAZIONE QAM → estensione della modulazione a prodotto → 2 modulazioni a prodotto con portanti in quadratura

↓

due segnali modulanti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ con stesse caratteristiche spettrali e indipendenti → $\boxed{s(t) = x_1(t)\cos\omega_0 t - x_2(t)\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t}$

↓

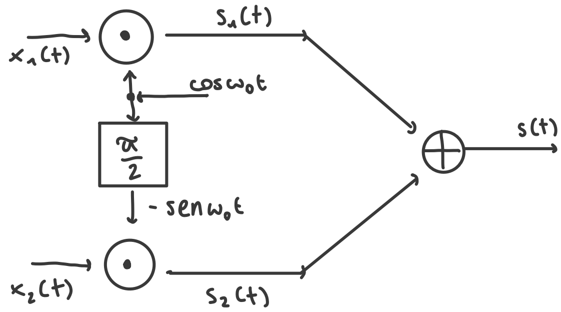
seconda portante sfasata in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ → segnale in uscita → 1° modulatore → via in fase; → 2° modulatore → via in quadrat.

↓

inviluppo complesso

$i(t) = x_1(t) + j x_2(t)$

modulazione ibrida, $i(t)$ varia sia in modulo che in argomento



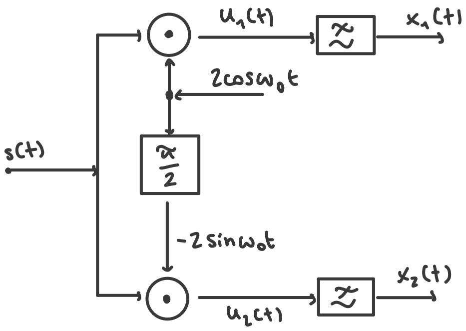
gli spettri della via in fase e della via in quadratura si sovrappongono → l'efficienza in frequenza é quindi doppia

↓

$\eta_f = \frac{2B_x}{B_s} = \frac{2\omega_m}{2\omega_m} = 1$

il demodulatore é la somma di due demodulatori a prodotto

↓



per la via in fase si ha:

$u_p(t) = 2s(t)\cos\omega_0 t = 2x_1(t)\cos^2\omega_0 t - 2x_2(t)\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\cos\omega_0 t =$

$= x_1(t) + x_1(t)\cos 2\omega_0 t - x_2(t)\,\mathrm{sen}\,2\omega_0 t$ → poi passa basso

$x_{pd}(t) = x_1(t)$

per la via in quadratura:

$u_q(t) = -2s(t)\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t = 2x_2(t)\,\mathrm{sen}^2\omega_0 t - 2x_1(t)\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\cos\omega_0 t =$

$= x_2(t) - x_2(t)\cos 2\omega_0 t - x_1(t)\,\mathrm{sen}\,2\omega_0 t$ → $x_{qd}(t) = x_2(t)$

nel caso del QAM un errore di fase provoca non solo un' attenuazione del segnale utile, ma anche una interferenza nella via in quadratura

↓

$x_{pd}(t) = x_1(t)\cos\Delta - x_2(t)\,\mathrm{sen}\,\Delta$ $\quad$ $x_{pd}(t) = x_2(t)\cos\Delta + x_1(t)\,\mathrm{sen}\,\Delta$

$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$
$\arctan(0) = 0$
$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
$\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

$$\arg\{a+jb\} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a>0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a<0 \end{cases}$$