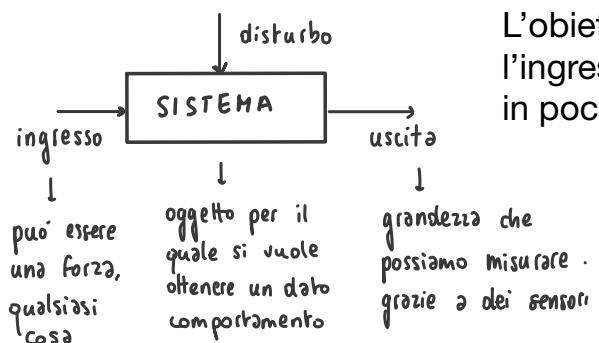


I controlli automatici nascono con l'idea di dotare di intelligenza un sistema fisico, rendendolo un sistema automatico basato su leggi matematiche e/o algoritmi.



L'obiettivo è progettare algoritmi che permettano di trovare l'ingresso ideale per ottenere l'uscita desiderata dal sistema; in poche parole seguire un segnale di riferimento.

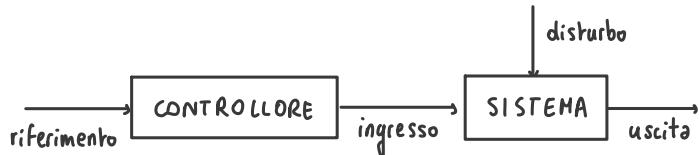
```
graph TD; A[ ] --- B[ANALISI]; A[ ] --- C[SINTESI]
```

The diagram illustrates a hierarchical relationship. At the top center is a vertical line. From its upper portion, two horizontal lines branch out to the left and right, each ending in a bracketed label. The left bracket contains the word "ANALISI" and the right bracket contains the word "SINTESI".

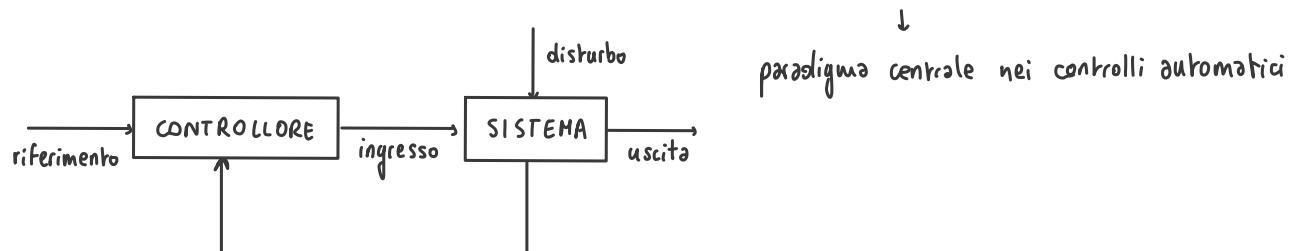
Controllore: o regolatore, determina l'andamento della *variabile di controllo (ingresso)*.

Sistema di controllo: sistema (processo) + controllore; può essere *naturale* (es. ritmo cardiaco), *manuale* quando è presente l'azione dell'uomo o *automatico* quando l'uomo è sostituito da un dispositivo.

Controllo in anello aperto (feedforward): il controllore utilizza solo il segnale di riferimento.



Controlli in anello chiuso (feedback o retroazione): il controllore utilizza il segnale di riferimento a variabile controllata ad ogni istante di tempo.

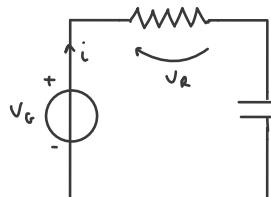


Progetto di un sistema di controllo:

"prototipo virtuale"

- 1) definizione delle specifiche;
 - 2) modellazione del sistema (controllo e test); → modello di test più complesso e realistico
 - 3) analisi del sistema;
 - 4) sintesi della legge di controllo;
 - 5) simulazione sistema controllato;
 - 6) scelta elementi tecnologici;
 - 7) sperimentazione.

Esempio di sistema di controllo: circuito elettrico RC



$$V_R(t) = V_g(t) - V_c(t) \rightarrow R \cdot i(t) = V_g(t) - V_c(t)$$

sapendo che $C \cdot \dot{V}_c(t) = i(t) \rightarrow RC \cdot \dot{V}_c(t) = V_g(t) - V_c(t)$

$$\dot{V}_c(t) = \frac{1}{RC} (V_g(t) - V_c(t)) \rightarrow \text{equazione differenziale ordinaria} \rightarrow \text{ODE}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \text{ingresso} & \text{stato} \end{matrix} \rightarrow \text{l'uscita dipende dall'ingresso} \rightarrow \dot{x}(t) = \frac{1}{RC} (u(t) - x(t))$$

descrive il comportamento del sistema
ma noi non lo conosciamo istante per
istante

$$\begin{matrix} V_g & V_c \\ \uparrow & \uparrow \\ y(t) = -x(t) + u(t) \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{uscita} \end{matrix}$$

Sistemi in forma di stato:

Sistemi continui - il tempo è una variabile reale

algebrica
↑

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad \text{equazione di stato (ODE)} \quad y(t) = h(x(t), u(t), t) \quad \text{equazione (trasformazione) di uscita}$$

derivata nel tempo
della $x(t)$

$$\begin{matrix} x(t) \in \mathbb{R}^n - \text{stato} \\ u(t) \in \mathbb{R}^m - \text{ingresso} \\ y(t) \in \mathbb{R}^p - \text{uscita} \end{matrix}$$

$\rightarrow p \leq m \rightarrow$ se $m < n$ il sistema è sottoattuato
se $m > n$ il sistema è sovrattuato

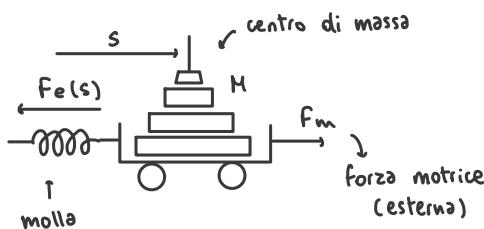
Quando $n > 1$, $m = p = 1$; si tratta di un sistema Single Input-Single Output o SISO, altrimenti MIMO (Multi Input-Multi Output).

$$\text{funzione di stato} \rightarrow f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix} \rightarrow \text{stessa cosa per l'uscita} \\ y(t) = h(x(t), u(t), t)$$

Per questi sistemi tipicamente andremo a scegliere l'istante da cui partire all'istante iniziale. Questi sistemi sono anche detti causali. $\rightarrow x(t_0) = x_0$

Oltre ai sistemi continui, esistono anche sistemi in cui il tempo è scandito da valori interi, detti sistemi discreti. L'unica differenza è che la funzione f restituisce l'istante al momento successivo.

Esempio: sistema meccanico - carrello



legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m \quad F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

$$\rightarrow M\ddot{z} = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

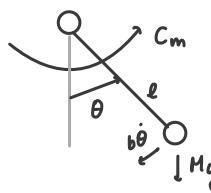
In questo caso possiamo prendere più di uno stato scalare, perché c'è la derivata seconda:

$$x_1 = z \rightarrow \text{stato } x := [x_1 \ x_2]^T \rightarrow \text{sia } k(t) = K \text{ e consideriamo come uscita l'energia totale}$$

$$x_2 = \dot{z} \quad u(t) := F_m \quad E_T(t) = \frac{1}{2} (Kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \rightarrow y(t) = \frac{1}{2} (Kx_1^2(t) + Mx_2^2(t)) \rightarrow h(x, u) := \frac{1}{2} (Kx_1^2 + Mx_2^2)$$

Esempio: pendolo

$$\text{massa} \quad -Mg \sin(\theta) \quad -b\dot{\theta} \rightarrow b \text{ coeff. d'attrito}$$

↑ ↑ ↑

$$\text{equazione dei momenti} \rightarrow Ml^2\ddot{\theta} = C_{\text{grav}} + C_{\text{drag}} + C_m$$

$$\text{equazione della dinamica} \rightarrow \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) - \frac{b}{Ml^2} \dot{\theta}(t) + \frac{1}{Ml^2} C_m(t)$$

definiamo $x_1 := \theta$ e $x_2 := \dot{\theta}$ (stato $x := [x_1, x_2]^T$) e $u := C_m$ (ingresso) $\rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{se misuriamo } \theta \text{ (sensore angolo) allora } y := \theta \rightarrow y(t) = x_1(t) \\ \rightarrow \text{se misuriamo la posizione verticale, allora } y := -l \cos(\theta) \rightarrow y(t) = -l \cos(x_1(t)) \end{array} \right. \begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2} x_2(t) + \frac{1}{Ml^2} u(t) \end{aligned}$$

Definizioni

- Traiettoria (movimento) del sistema:** dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale $x(t_0)$, è detta traiettoria dello stato $x(t)$ la funzione del tempo $(x(t), u(t))$, $t \geq t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$
Di conseguenza, $y(t)$ si dice traiettoria dell'uscita.

esempio $\rightarrow \dot{x}(t) = u(t)$ $x(t_0) = 10 = x_{t_0}$ $u(t) = 1 \quad \forall t \geq t_0$ $\left. \begin{aligned} x(t) &= x_{t_0} + \int_0^{t_0} u(t) dt = 10 + \int_{t_0}^t 1 dt = 10 + (t - t_0) \\ (\bar{x}_1(t), \bar{u}(t)) &= (10 + t - t_0, 1) \end{aligned} \right. \rightarrow \text{TRAIETTORIA}$

per sistemi senza ingresso (non forzati, ovvero manca la $u(t)$) la traiettoria dello stato $x(t)$ è determinata solo dall'istante iniziale.

- Equilibrio di un sistema:** dato un sistema (non forzato) $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice equilibrio del sistema se $x(t) = x_e, t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.
- Coppia di equilibrio:** dato un sistema forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e, u_e) si dice coppia di equilibrio del sistema se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e), t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.

Proprietà per sistemi tempo invarianti continui $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{data una coppia di equilibrio } (x_e, u_e) \text{ vale } f(x_e, u_e) = 0 \\ \text{per sistemi non forzati, dato un equilibrio } x_e \text{ vale } f(x_e) = 0 \end{array} \right.$$

CLASSIFICAZIONE (RIEPILOGO)DI SISTEMI

- monovariabili (SISO) \subset multivariabili (MIMO)
 - \hookrightarrow Single Input Single Output \rightarrow se $m=p=1$
- strettamente propri \subset propri
 - \hookrightarrow se $y = h(x(t), t)$
- tempo invarianti \subset tempo varianti
 - \hookrightarrow $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$
 - \hookrightarrow $y(t) = h(x(t), u(t))$
- lineari \subset non lineari
 - \hookrightarrow $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$
 - \hookrightarrow $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$

matrici costanti

↑

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$$

↑

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t)}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

IMPORTANTE!

Principio di sovrapposizione degli effetti: (solo per sistemi lineari!)

↓

anche tempo variante

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Sia $(x_a(t), u_a(t))$ traiettoria con $x_a(t_0) = x_{0a}$ Sia $(x_b(t), u_b(t))$ traiettoria con $x_b(t_0) = x_{0b}$ Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dato lo stato iniziale $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$, si ha che

$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$ è traiettoria di sistema → applicando come ingresso
 $u_{ab} = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$

ESEMPIO:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t)\end{aligned} \rightarrow \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Traiettoria A

$$u_a(t) = 3 \quad \forall t \geq 0$$

$$x_2(t) = 3t$$

$$x_1(t) = 2 + \frac{3}{2}t^2$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Traiettoria B

$$u_b(t) = \text{cost} \quad t \geq 0$$

$$x_2 = 1 + \sin t$$

$$x_1 = 4 + t - \cos t$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = \int_0^t x_2(\tau) d\tau$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha u_a(t) + \beta u_b(t) \\ \alpha x_{0a} + \beta x_{0b} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$$

$$x_{ab}(t) = \begin{bmatrix} x_{1ab}(t) \\ x_{2ab}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{3}{2}t^2 + 4 + t - \cos t \\ 3t + 1 - \sin t \end{bmatrix}$$

Soluzione equazione
di statoESEMPIO:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad x(0) = x_0$$

$$\text{traiettoria A} \quad x_L(0) = x_0, u_L(t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$$

$$\text{traiettoria B} \quad x_F(0) = 0, u_F(t) = u(t)$$

$$x_L(t), t \geq t_0 \text{ traiettoria di stato A}$$

$$x_F(t), t \geq t_0 \text{ traiettoria di stato B}$$

$$\rightarrow x(t) = x_L(t) + x_F(t)$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti ad x_L ed x_F , traiettorie di stato, si ha che fissato lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e applicando l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato è data da $x(t) = x_L(t) + x_F(t)$.

Cosa accade se $x(0) = 0$ e $u(t) = 0$? Lo stato non varia → equilibrio $f(x_E, u_E, t) = 0 \quad \forall t$

EVOLUZIONE LIBERA → $x_L(t), t \geq t_0$ tale che $x_L(t_0) = x_0$ e $u_L(t) = 0, t \geq t_0 \rightarrow$ uscita $y_L(t) = C(t)x_L(t)$

EVOLUZIONE FORZATA → $x_F(t), t \geq t_0$ tale che $x_F(t_0) = 0$ e $u_F(t) = u(t), t \geq t_0 \rightarrow$ uscita $y_F(t) = C(t)x_F(t) + D(t)u(t)$

↓
IMPORTANTI!

Traiettorie di un sistema LTI: esempio scalare

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= cx(t) + du(t)\end{aligned}$$

Evoluzione libera + evoluzione forzata (soluzione omogenea + soluzione particolare)

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau & \rightarrow \text{funzione esponenziale} & \rightarrow e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots \\ y(t) &= ce^{at}x_0 + c \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)\end{aligned}$$

Caso generale:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{array} \right]$$

Le due evoluzioni (evoluzione libera + evoluzione forzata) dipendono strettamente dall'esponenziale di matrice

$$e^{At} := I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \quad \rightarrow \text{NOTA: in generale } A = T^{-1}JT \quad \begin{matrix} & & \text{si pu  calcolare} \\ & & \text{esponenziale} \\ & & \uparrow \\ & & \text{matrice di Jordan} \\ & & \downarrow \\ & & \text{diagonale a blocchi} \\ & & \text{con autovalori sulla} \\ & & \text{diagonale} \end{matrix}$$

Modi di un sistema LTI:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Indichiamo con $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli $r \leq n$ autovalori (reali o complessi coniugati) distinti della matrice A , con molteplicit  algebrica $n_1, \dots, n_r \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^r n_i = n$.

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato $x_L(t)$ si possono scrivere come:

$$x_{e,j}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{n_i} \gamma_{j,q} t^{q-1} e^{\lambda_i t} \quad j = 1, \dots, n \quad \begin{matrix} & & \text{poich  l'uscita  } \\ & & \text{lineare nello stato} \\ & & \uparrow \\ \text{MODI NATURALI} & \rightarrow \text{evoluzione libera} = \text{combinazione lineare} \\ \text{DEL SISTEMA} & & \text{dello stato} & \text{dei modi} \end{matrix}$$

AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI

NOTA: autovalori di A a coeff. reali

$$Av = \lambda v \quad \begin{matrix} v \text{ autovettore} \\ \text{scalare} \end{matrix} \quad \lambda \text{ autovalore} \rightarrow \lambda \text{ reale} \rightarrow \lambda, \bar{\lambda} \text{ complessi coniugati}$$

ESPOENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

- $e^{(\sigma+j\omega)t} = e^\sigma e^{j\omega t} = e^\sigma (\cos \omega t + j \sin \omega t)$
- $e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$

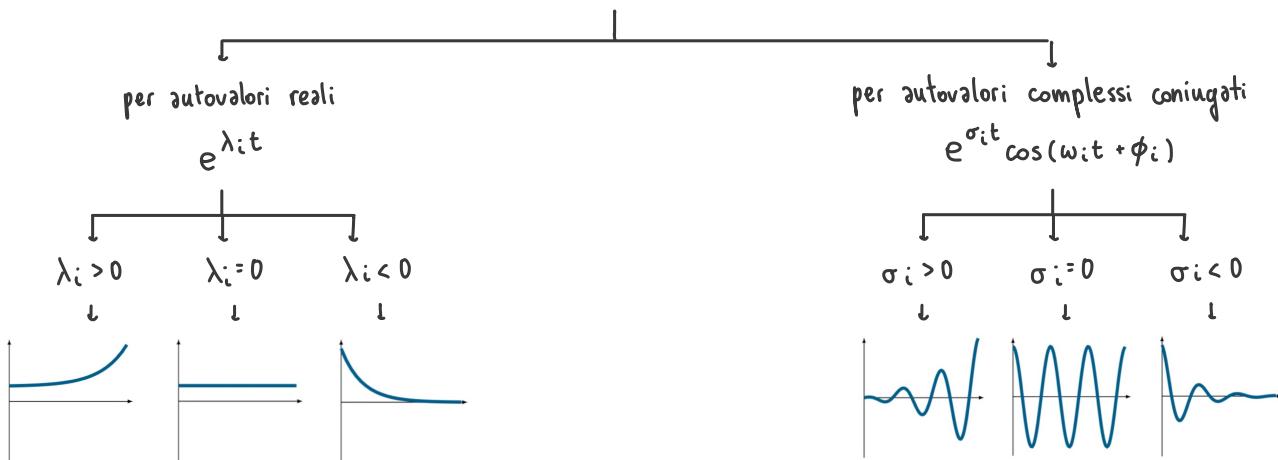
Se la matrice A è reale e $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$ è anche autovalore di A.

↓

MODI REALI DEL SISTEMA: $t^{q-i} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$

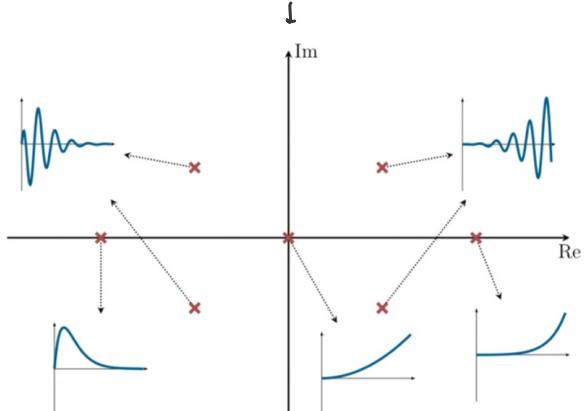
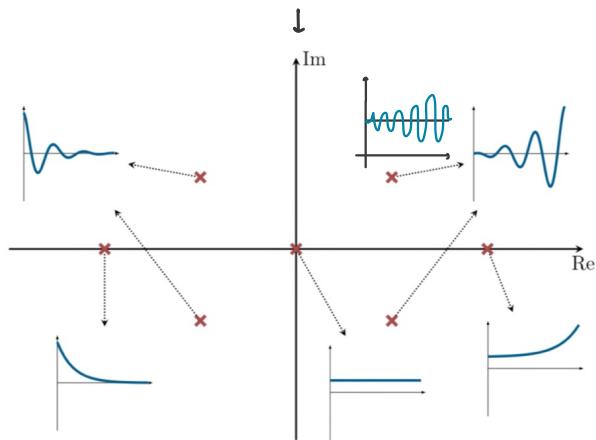
↑
parte reale ↗
parte immaginaria

Caso particolare: supponiamo che le molteplicità algebriche n_1, \dots, n_r degli autovalori di A coincidano con le molteplicità geometriche (ad es. quando gli autovalori sono distinti) Allora i coefficienti h_i sono tutti pari a 1 e l'espressione dei modi si semplifica in:



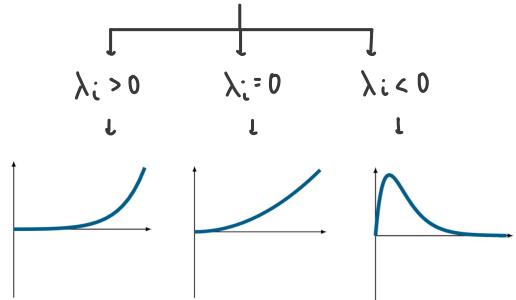
molteplicità algebrica $n_i =$ molteplicità geometrica

molteplicità algebrica $>$ molteplicità geometrica



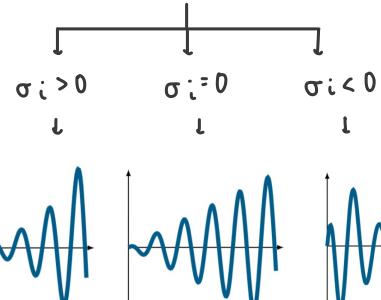
per autovalori reali

$t^q e^{\lambda_i t}$



per autovalori complessi coniugati

$t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$



Esempio: carrello

equazione di stato $\rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ x_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \end{aligned}$ $x_1 := z$ POSIZIONE $x_2 := \dot{z}$ VELOCITÀ $\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{M} \rightarrow \text{AUTOVALORI} = \text{radici di } \lambda^2 + \frac{k}{M}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}} \\ \lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}} \end{array} \right.$$

Esempio: carrello-molla con attrito

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) - h x_2(t) \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -h \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow u = -hx_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}} \\ \lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}} \end{array} \right.$$

↓
se $h^2 > 4Mk$ autovalori reali
se $h^2 < 4Mk$ complessi coniugati

Stabilità interna: conseguenze sulla traiettoria legate a incertezze sullo stato iniziale con ingressi fissi e noti.

Poiché l'ingresso è fissato, il sistema è non forzato. $u(t) = \bar{u}(t), t \geq 0$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ sistema non forzato} \rightarrow x_e \text{ equilibrio ovvero } f(x_e) = 0$$

↓

Cosa accade se $x(0) = x_e + \Delta x_0$?

(non parto dall'equilibrio)

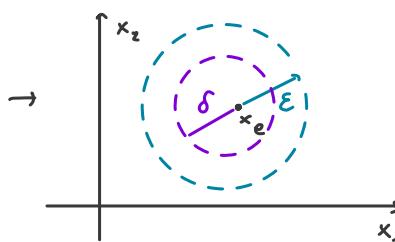
Equilibrio stabile: uno stato di equilibrio x_e si dice stabile se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$ per tutti $t \geq 0$

↓

qualsiasi ϵ mi sia dato, anche molto piccolo, riesco a trovare un intorno di raggio δ (di solito più piccolo di ϵ) che mi fa comunque rimanere a distanza ϵ per ogni $t \geq 0$

↓

se non si verifica → equilibrio instabile



Equilibrio attrattivo: $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| < \delta$ allora risulti $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

↓

un equilibrio stabile non è per forza attrattivo

STABILITÀ \swarrow locale → vale in un intorno dello stato di equilibrio x_e
STABILITÀ \downarrow globale → valgono per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

La proprietà di stabilità può essere applicata anche a una traiettoria $\bar{x}(t), t \geq 0$

Per sistemi lineari si può mostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità (nei sistemi lineari $x = 0$ è sempre un equilibrio, con $u = 0$). Per questo motivo si parla di **stabilità del sistema**.

Un sistema LTI è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa. → **TEOREMA 1**

Inoltre è stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a 0 e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica. → **TEOREMA 2**

Si ha instabilità se almeno un autovalore ha parte reale positiva o se almeno un autovalore con parte reale nulla ha molt. algebrica > molt. geometrica.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x \text{ è equilibrio} \rightarrow Ax_e = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \text{se } \ker(A) \neq 0 \text{ (tutti gli autovalori } \neq 0) \\ \downarrow \\ x_e = 0 \end{array}$$

stabilità (interna) di un sistema LTI

SISTEMA FORZATO $\rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ x è equilibrio \rightarrow 1) se questo equilibrio non è stabile, come facciamo a renderlo asintoticamente stabile usando $u(t)$?

ipotesi 1) $x_e = 0 \rightarrow$ RETROAZIONE STATICHE DELLO STATO 2) come usare $u(t)$ per migliorare le prestazioni del sistema?

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{scegliere l'ingresso } u(t) \\ \text{in funzione dello stato} \\ \downarrow \\ y(t) = x(t) \\ \text{misuriamo lo stato (ipotesi)} \end{array}$$

$u(t)$ dipende solo da
 x all'istante t ($x(t)$)

$$u(t) = k(x(t))$$

$$\begin{array}{c} x: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x \longmapsto k(x) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{per sistemi lineari} \\ \text{tempo invarianti} \end{array} \rightarrow u(t) = K(x(t)) \rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + Bk(x(t))$$

$$\downarrow \text{MATRICE } K^{m \times n}$$

\downarrow
consideriamo (x_e, u_e)
coppia di equilibrio

$$0 = Ax_e + Bue$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_e$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\downarrow$$

$$= A(\tilde{x}(t) + x_e) + Bu(t)$$

$$\downarrow$$

$$= A\tilde{x}(t) + Ax_e + Bu(t)$$

$$\downarrow$$

$$u(t) = u_e + \tilde{u}(t)$$

$$\downarrow$$

$$= A\tilde{x}(t) + \underbrace{Ax_e + Bue}_{= 0} + B\tilde{u}(t)$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{x}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \rightarrow \tilde{x} = 0 \text{ equilibrio}$$

$$\downarrow$$

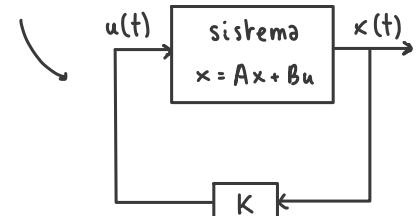
$$\tilde{u}(t) = K\tilde{x}(t)$$

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$$

→ per stabilizzare equilibri diversi dall'origine (traiettorie che vanno ad x_e)

il sistema non è più
forzato, non ha ingresso
e posso studiarne la
stabilità

SISTEMA AD ANELLO CHIUSO



proprietà di raggiungibilità

$$R = [B \ A B A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] \rightarrow \text{rango}$$

se questa matrice ha rango pieno
il sistema è raggiungibile

osservazione: abbiamo assunto $y(t) = x(t)$ → due strade per gestire il caso in cui non misuro tutto $x(t)$



sistemi SISO $y(t) \in \mathbb{R}$ "teoria dei sistemi"
 lavorare in un altro dominio ricostruire $x(t)$ da $y(t)$
 ↓ $\hat{x}(t)$ stima dello stato
 dominio della trasformata di Laplace
 ↓
 controlli automatici

Linearizzazione di un sistema non lineare nell'intorno di un equilibrio:

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0 \rightarrow$ supponiamo che $f(x_e, u_e)$ sia coppia di equilibrio $f(x_e, u_e) = 0$

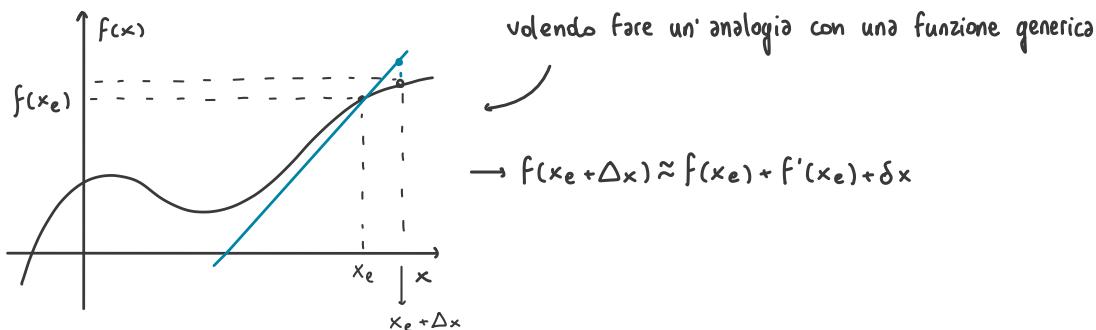
$$\left. \begin{array}{l} \text{se } u(t) = u_e \quad \forall t \geq 0 \\ x(0) = x_e \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0 \\ \downarrow \\ u(t) = u_e + \Delta u(t) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x(t) = x_e + \Delta x(t) \\ x(0) = x_e + \Delta x_0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \text{nuova traiettoria } (x(t), u(t)), t > 0 \\ \downarrow \\ \text{con la linearizzazione potremo approssimare} \\ x(t) \approx x_e + \delta x(t) \\ u(t) \approx u_e + \delta u(t) \end{array}$$

$(\delta x(t), \delta u(t)), t \geq 0$ è una traiettoria di un sistema LTI che sarà di questo tipo:

$$\underline{\delta \dot{x}(t) = A_e \delta x(t) + B_e \delta u(t)} \quad \text{con } \delta x(0) = \Delta x_0$$

che "approssima" le variazioni di stato e ingresso "nell'intorno" della coppia di equilibrio (x_e, u_e)

↓



$u(t) = u_e + \Delta u(t) \rightarrow x(t) = x_e + \Delta x(t) \rightarrow$ essendo una traiettoria vale:

$$\delta y(t) = C \delta x(t) + D \delta u(t)$$

↑

$\frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) = f(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)) \rightarrow$ questa approssimazione vale anche per l'uscita

↓ sviluppando in serie di Taylor (f suff. regolare) in (x_e, u_e)

$$\frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) = f(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. superiore}$$

↓

$$\dot{\Delta x}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. super.}$$

↓

$$\dot{\Delta x}(t) = A \Delta x(t) + B \Delta u(t) + \text{term. ord. super.} \quad \Delta x(0) = \Delta x_0$$

$$\dot{\Delta x}(t) \approx A \Delta x(t) + B \Delta u(t)$$

↓

$$\delta x(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t) \rightarrow \text{sistema linearizzato}$$

Esempio: linearizzazione del pendolo

$$0 = x_{2e}$$

$$0 = -\frac{g}{l} \sin(x_{1e}) - \frac{b}{Ml^2} x_{2e} + \frac{1}{Ml^2} u_e \rightarrow u_e = Mgl \sin(x_{1e}) \rightarrow \left(\begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \end{bmatrix}, u_e \right)$$

$$x_{1e} = \frac{\alpha}{4} \quad u_e = Mgl \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow g \approx 10, l = 2, M = 5 \rightarrow x_{1e} = \frac{\alpha}{4}, u_e = 100 \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{4} \\ 0 \end{bmatrix}, 100 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\dot{x}(t) = A_e \delta x(t) + B_e \delta u(t)$$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{b}{Ml^2} x_2 + \frac{1}{Ml^2} u \end{bmatrix} \rightarrow A_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{b}{Ml^2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_e & -\frac{b}{Ml^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

abbiamo tante colonne quanti sono gli n ingressi
 $u \in \mathbb{R}^n \rightarrow n$ colonne

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta x}_1(t) \\ \dot{\delta x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_e & -\frac{b}{Ml^2} \end{bmatrix}}_{A_e} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix}}_{B_e} \delta u(t)$$

Volendo anche rendere asintoticamente stabile un sistema non lineare (che linearizziamo) ovvero controllo nonlineare mediante linearizzazione:

$$\begin{aligned} x(t) &\approx x_e + \delta x(t) \\ u(t) &= u_e + K_e (x(t) - x_e) \quad \underbrace{\approx \delta x(t)}_{\text{somma dell' ingresso di equilibrio + feedback linearizzato}} \end{aligned}$$

Teorema: dato un sistema LTI, se il sistema linearizzato intorno alla coppia di equilibrio (x_e, u_e) è asintoticamente stabile, allora l'equilibrio x_e relativo all'ingresso u_e è (localmente) asintoticamente stabile.

Controllo ottimo (LQR Linear Quadratic Regulation):

$$\underset{x(\cdot), u(\cdot)}{\text{minimize}} \int_0^{+\infty} \left\{ x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R u(\tau) \right\} d\tau \quad \xrightarrow{\text{indice di costo}} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

funzioni del tempo $x, u \rightarrow$ la soluzione al problema è un feedback $u(t) = kx(t)$

$$k \text{ si ricava con l'equazione algebrica di Riccati} \rightarrow A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad K = R^{-1}B^T P$$

Trasformata di Laplace \mathcal{L}

$$s = \rho e^{j\varphi}$$

Data una funzione complessa f di variabile reale t , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, sia $s = \sigma + j\omega$ una variabile complessa

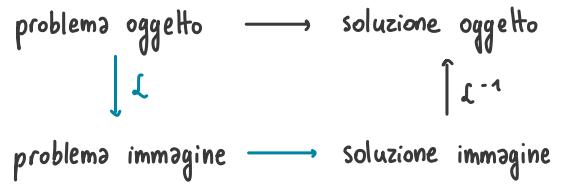
$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

se l'integrale converge per qualche s

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \rightarrow f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

↓ ↓

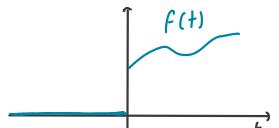
dominio del tempo dominio di Laplace



Considerando solo $f(t)$ t.c. $f(t) = 0$ per $t < 0$ allora c'è corrispondenza biunivoca tra $f(t)$ e $F(s)$ (stesso contenuto informativo).

$$e^{-st} = e^{-(\sigma+j\omega)t} = e^{-\sigma t} (\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

$$f(t) e^{-st} = f(t) (e^{-\sigma t} \cos \omega t - j e^{-\sigma t} \sin \omega t) = f(t) e^{-\sigma t} \cos \omega t - j f(t) e^{-\sigma t} \sin \omega t$$



Ascissa di convergenza: sia $\bar{\sigma} > -\infty$ estremo inferiore di $s = \sigma + j\omega$, allora la trasformata esiste nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > \bar{\sigma}$ e $\operatorname{Re}(s) \leq \bar{\sigma} \rightarrow \bar{\sigma}$ ascissa di convergenza

Trasformate razionali:

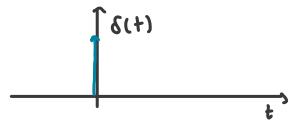
$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow N(s), D(s) \text{ polinomi primi tra loro} \begin{cases} \text{radici } N(s) = 0 \rightarrow \text{ZERI} \\ \text{radici } D(s) = 0 \rightarrow \text{POLI} \end{cases}$$

Formula di antitrasformazione: $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

Trasformate di segnali elementari:

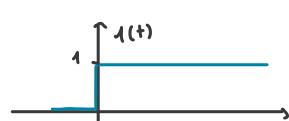
- delta di Dirac

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$



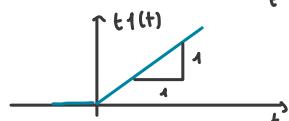
- gradino unitario

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

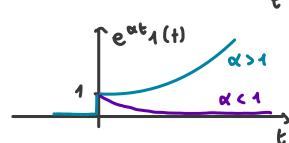


- segnale rampa

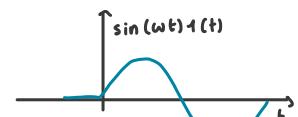
$$\mathcal{L}[t 1(t)] = \frac{1}{s^2}$$



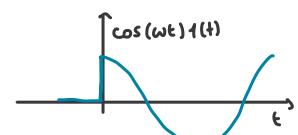
- $\mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$



$$\mathcal{L}[\sin(\omega t) 1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\cos(\omega t) 1(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \varphi) 1(t)] = \frac{\omega \cos \varphi \pm s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \varphi) 1(t)] = \frac{s \cos \varphi \pm \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

Proprietà della trasformata di Laplace:

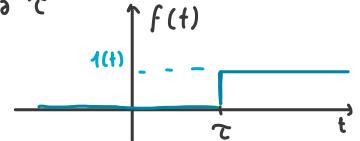
- Linearità:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt = \underbrace{\alpha \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt}_{F(s)} + \underbrace{\beta \int_{0^-}^{+\infty} g(t) e^{-st} dt}_{G(s)} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

- Traslazione temporale:

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad \forall \tau > 0 \rightarrow \text{gradino unitario, ma diventa 1 a partire da } \tau$$

esempio: $\mathcal{L}[1(t-\tau)] = e^{-s\tau} = \frac{1}{s}$



- Traslazione nel dominio della variabile complessa:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s-\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \rightarrow \text{esempio trasformata di } e^{\alpha t} 1(t)$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \rightarrow \mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$$

- Derivazione (nel tempo):

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0) \rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(t) \Big|_{t=0}$$

- Integrazione (nel tempo): f integrabile tra 0 e $+\infty$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

- Convoluzione (nel tempo): assumendo funzioni nulle per $t < 0$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$$

Teoremi del valore iniziale e finale:

$$\frac{N(s)}{D(s)}$$

||

Teorema del valore iniziale: se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado denominatore maggiore grado numeratore, allora

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

$$F(s) = \frac{s^v \beta_{v-1} s^{v-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad n \geq v$$

Teorema del valore finale: se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado denominatore maggiore grado numeratore e poli nulli o a parte reale negativa, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

NOTAZIONE: $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$ $\mathcal{L}[u(t)] = U(s)$

$$\begin{aligned} & \underbrace{sX(s) - x(0)}_{\mathcal{L}[\dot{x}(t)]} = \underbrace{AX(s) + BU(s)}_{\mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)]} \rightarrow sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s) \\ & (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \end{aligned}$$

↓
consideriamo s t.c. $(sI - A)$
invertibile

Trasformate dello stato e dell'uscita in funzione di x_0 e $U(s)$:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)}_{\text{evoluzione forzata}} \rightarrow \text{consideriamo } y_f(t) \text{ (uscita forzata)}$$

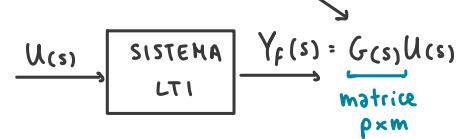
$$y_f(s) = \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)}_{G(s)}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$\downarrow$$

se supponiamo di partire con $x(0) = 0$ \rightarrow $U(s) \rightarrow G(s) \rightarrow Y(s)$



noi consideriamo sistemi SISO: $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$ ($p = m = 1$) \rightarrow ingresso e uscita scalari, $G(s)$ scalare complesso

La funzione di trasferimento può essere definita come la trasformata dell'uscita a $\delta(t)$; o come il rapporto tra la trasformata dell'uscita e dell'ingresso nel caso $x(0) = 0$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Richiami di calcolo matriciale:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \hat{A}_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{A}_{ij} \rightarrow \hat{A}_{ij} \text{ complemento algebrico dell'elemento } a_{ij}$$

determinante della matrice ottenuta eliminando da A la riga i e la colonna j e moltiplicando per $(-1)^{i+j}$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \cdots & \hat{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{n1} & \cdots & \hat{A}_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{matrice aggiunta} \\ \text{adj}(A) = A^T \end{array} \rightarrow A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D \rightarrow G(s) = \frac{C \text{adj}(sI - A)B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow \begin{array}{l} \text{polinomi su } s \\ \downarrow \\ \text{polinomio caratteristico} \\ \text{della matrice } A \end{array}$$

$$\text{esempio: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \quad sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -\alpha & s-\beta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l|l} \widehat{(sI-A)}_{11} = (-1)^{1+1}(s-\beta) & \widehat{(sI-A)}_{21} = (-1)^3(-1) \\ \widehat{(sI-A)}_{12} = (-1)^{1+2}(-\alpha) & \widehat{(sI-A)}_{22} = (-1)^4(s) \end{array}$$

$\det(sI - A) = s(s - \beta) = \alpha = s^2 - \beta s - \alpha$ polinomio caratteristico di $A \rightarrow n=2$ in questo esempio

$$\widehat{(sI-A)} = \begin{bmatrix} s-\beta & 1 \\ \alpha & s \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} s-\beta & 1 \\ \alpha & s \end{bmatrix} \quad \text{grado degli elementi di } \text{adj}(sI-A) \leq n-1$$

\downarrow

$$\deg(N(s)) \leq \deg(D(s)) \rightarrow \deg(N(s)) < \deg(D(s)) \text{ se } D=0$$

overo sistema strettamente proprio

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_v s^v + \beta_{v-1} s^{v-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^v + \alpha_{v-1} s^{v-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \text{radici di } N(s) \cdot \text{zeri} \\ &\rightarrow \text{radici di } D(s) \cdot \text{poli} \rightarrow \text{radici di } \det(sI - A) \text{ quindi} \\ &\quad \text{autovalori della matrice } A \end{aligned}$$

FORME FATTOORIZZATE:

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

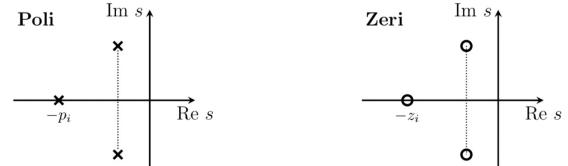
$\hookrightarrow s_{1/2} = -\xi_i \omega_{ni} \pm \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 - \omega_m^2}$

$s + p_i \rightarrow p_i \in \mathbb{R} \rightarrow -p_i$ polo di $G(s)$

magari non li troviamo perché
c'è stata qualche semplificazione
(polinomi non primi tra loro)

$v \leq n$ possibili cancellazioni
tra $N(s)$ e $D(s)$

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}$$



- ρ costante di trasferimento, μ guadagno, g tipo;
- $-z_i$ zeri reali, $-p_i$ poli reali, τ_i e T_i costanti di tempo;
- $\alpha_{ni} > 0$, $\omega_{ni} > 0$ pulsazioni naturali di zeri e poli complessi coniugati;
- ξ_{ni}, ω_{ni} ($|z_{ni}| < 1$, $|\xi_{ni}| < 1$), smorzamenti di zeri e poli complessi coniugati.

Ricordiamo che la trasformata della risposta di un sistema Lineare Tempo Invariante (LTI) singolo ingresso singola uscita (SISO) è data da:

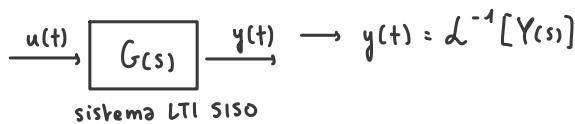
$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1} x(0)}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} + G(s) U(s)$$

\rightarrow gli elementi sono rapporti di polinomi

Considereremo ingressi tali che $U(s)$ sia un rapporto di polinomi: $Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

Ricordiamo che per $x(0) = 0$ (risposta forzata): $Y(s) = G(s) U(s)$

applicando in ingresso una delta di Dirac $u(t) = \delta(t)$ ($U(s) = 1$) si ha: $Y(s) = G(s)$
quindi per la risposta all'impulso le radici di $D(s)$ sono i poli di $G(s)$.



NOTAZIONE $\rightarrow \prod_{i=1}^n (s+p_i) = (s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n) \rightarrow p_i$ può anche essere complesso $\rightarrow \bar{p}_i$ complesso coniugato

Sviluppo di Heaviside: (in fratti semplici)

1) poli reali o complessi coniugati distinti (molteplicità 1)

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s+p_i}$$

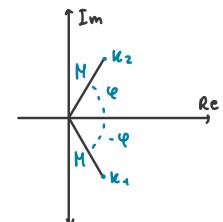
$$(s+p_i) Y(s) \Big|_{s=-p_i} = \sum_{j \neq i} \frac{(s+p_i) \cdot k_j}{s+p_j} \Big|_{s=-p_i} + \frac{(s+p_i) k_j}{(s+p_i)} \rightarrow k_i = [(s+p_i) Y(s)] \Big|_{s=-p_i}$$

quindi antitrasformando $Y(s)$ sviluppata in fratti semplici:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{L}\left[\frac{1}{s+p_i}\right] = \sum_{i=1}^n k_i e^{-p_i t} \delta(t)$$

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega)} = \frac{k_1}{s+\sigma+j\omega} + \frac{k_2}{s+\sigma-j\omega} \quad k_1, k_2 \text{ complessi coniugati}$$

$$k_1 = M e^{-j\varphi} \quad k_2 = M e^{j\varphi} \quad \text{modulo}$$



$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 e^{-(\sigma+j\omega)t} \delta(t) + k_2 e^{-(\sigma-j\omega)t} \delta(t) = M e^{-j\varphi} e^{-(\sigma+j\omega)t} \delta(t) + M e^{j\varphi} e^{-(\sigma-j\omega)t} \delta(t) \\ &= M e^{-\sigma t} (e^{-j(\omega t + \varphi)} + e^{j(\omega t + \varphi)}) \delta(t) = 2 M e^{-\sigma t} \frac{(e^{-j(\omega t + \varphi)} + e^{j(\omega t + \varphi)})}{2} \delta(t) \\ &= 2 M e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) \delta(t) \quad \begin{cases} p_{i,1} = \sigma + j\omega \\ k_{i,1} = M e^{-j\varphi} \end{cases} \end{aligned}$$

esempio:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1(t) \quad G(s) = \frac{1}{s+p} \quad U(s) = 5 \cdot \frac{1}{s} \quad \rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+p} \cdot \frac{5}{s} = \frac{5}{s(s+p)} \\ Y(s) &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+p} \rightarrow k_1 = s Y(s) \Big|_{s=0} = s \cdot \frac{5}{s(s+p)} \Big|_{s=0} = \frac{5}{p} \\ k_2 = (s+p) Y(s) \Big|_{s=-p} &= (s+p) \frac{5}{s(s+p)} \Big|_{s=-p} = -\frac{5}{p} \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = \frac{5}{p} \\ k_2 = -\frac{5}{p} \end{array} \right] \rightarrow Y(s) = \frac{5}{p} \cdot \frac{1}{s} - \frac{5}{p} \cdot \frac{1}{s+p} \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{p} \cdot \frac{1}{s} - \frac{5}{p} \cdot \frac{1}{s+p}\right] = \frac{5}{p} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{5}{p} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+p}\right] = \frac{5}{p} \delta(t) - \frac{5}{p} e^{-pt} \delta(t) \quad (\text{trasformate note})$$

2) poli reali o complessi coniugati multipli (molteplicità > 1)

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s+p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{k_{i,h}}{(s+p_i)^h} \quad \text{con } k_{i,h}, h=1, \dots, n_i \text{ residui del polo } -p_i$$

$$\begin{aligned} (s+p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} &= (s+p_i)^{n_i} \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq i}}^{n_j} \frac{k_{j,h}}{(s+p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s+p_i)^{n_i-h} k_{i,h} \\ &= (s+p_i)^{n_i} \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq i}}^{n_j} \frac{k_{j,h}}{(s+p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i-1} (s+p_i)^{n_i-h} k_{i,h} + k_{i,n_i} \quad \begin{cases} k_{i,n_i} = (s+p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i} \\ k_{i,h} = \frac{1}{(n_i-h)!} \frac{d^{n_i-h}}{ds^{n_i-h}} \left[(s+p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \right] \Big|_{s=-p_i} \end{cases} \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \mathcal{L}\left[\frac{1}{(s+p_i)^h}\right] = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \frac{t^{n_i-h}}{(h-1)!} e^{-p_i t} \delta(t) \quad \hookrightarrow \text{polo reale (multiplo) } -p_i$$

Risposta in frequenza

Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale: → LE PULSAZIONI E LE FREQUENZE SONO POSITIVE!

$$\text{esempio: } G(s) = \frac{1}{s+1} \quad u(t) = U \cos \omega t \quad \rightarrow \quad U(s) = U \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \frac{Us}{s^2 + \omega^2} \rightarrow Y(s) = \frac{k_i}{s+i} + \frac{k_u}{s-j\omega} + \frac{\bar{k}_u}{s+j\omega}$$

↑ ↑
modo di modo
tipo e^{-t} sinusoidale

$$\rightarrow s_{p_{1/2}} = \pm j\omega = 2M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$k_i = (s+i)Y(s) \Big|_{s=-i} = \frac{U(s)}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s=-i} = -\frac{U}{1+\omega^2} \xrightarrow{\text{numero}}$$

$$k_u = (s+j\omega)Y(s) \Big|_{s=j\omega} = (s-j\omega) \frac{1}{s+1} \cdot \frac{U(s)}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \Big|_{s=j\omega}$$

$$y(t) = k_i e^{-t} 1(t) + 2M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{j\omega + 1} \cdot \frac{U j\omega}{j\omega + j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1} \frac{U}{2}$$

$$k_u = \left| \frac{1}{j\omega + 1} \frac{U}{2} \right| e^{j \arg \left(\frac{1}{j\omega + 1} \frac{U}{2} \right)}$$

$$= \left| \frac{1}{j\omega + 1} \right| \frac{U}{2} \cdot e^{j \arg \left(\frac{1}{j\omega + 1} \right)}$$

$$k_u = \underbrace{\left| \frac{1}{j\omega + 1} \frac{U}{2} \right|}_{M} e^{j \arg \left(\frac{1}{j\omega + 1} \frac{U}{2} \right)}$$

$$= M e^{j\varphi} \rightarrow \text{vedi sviluppo di Heaviside}$$

$$y(t) = \underbrace{k_i e^{-t} 1(t)}_{0 \text{ se } t \rightarrow \infty} + |G(j\omega)| U \cos(\omega t + \arg(G(j\omega))) 1(t) \rightarrow G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} \rightarrow \text{pulsazione sinusoidale in ingresso}$$

Dato un sistema lineare tempo invariante SISO con funzione di trasferimento $G(s)$ vogliamo calcolare l'uscita in corrispondenza di un ingresso sinusoidale:

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow U(s) = U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} \rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = G(s)U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$$

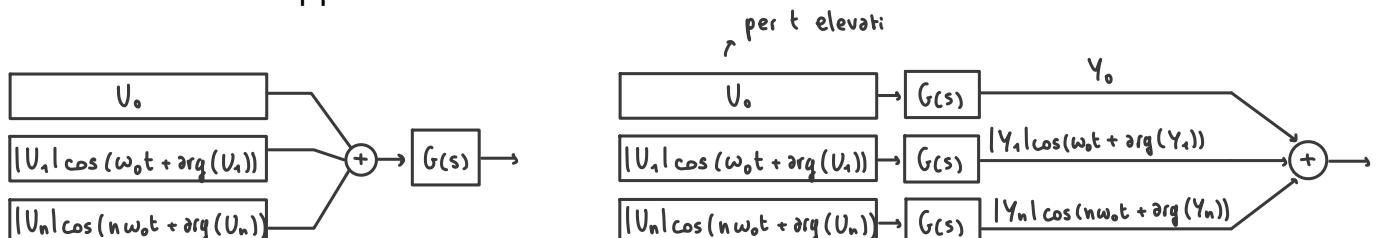
$$y(t) \approx U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega))) \rightarrow \text{uscita a transitorio esaurito}$$

Consideriamo un segnale d'ingresso $u(t)$ **periodico** ($\exists T > 0$ tale che $\forall t \geq 0 \quad u(t+T) = u(t)$) che può essere sviluppato in serie di Fourier:

$$u(t) = U_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |U_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(U_n)) \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$U_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, 1, \dots \rightarrow y(t) \approx Y_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(Y_n)) \rightarrow Y_n = G(jn\omega_0)U_n$$

dato in ingresso un segnale periodico, esso puo` essere rappresentato come la somma delle armoniche dello sviluppo in serie di Fourier

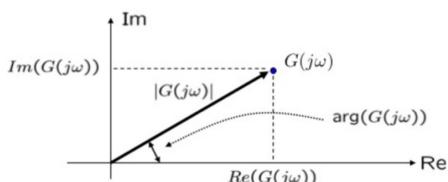


Dato un segnale non periodico dotato di **trasformata di Fourier**, possiamo scriverlo come

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|U(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(U(j\omega))) d\omega \quad \text{con} \quad U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

ovvero l'ingresso è scomponibile come una infinità non numerabile di armoniche con valori di ω reali maggiori o uguali a zero.

La funzione complessa $G(j\omega)$ ottenuta valutando $G(s)$ per $s = j\omega$ è detta **risposta in frequenza**. La risposta in frequenza viene estesa anche a sistemi non asintoticamente stabili. Per un certo valore di ω , $G(j\omega)$ è un numero complesso.

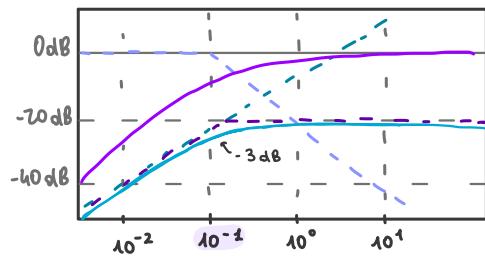


Vi sono diversi modi di rappresentare la risposta in frequenza. Uno dei modi più usati sono i **diagrammi di Bode** in cui si rappresentano separatamente $|G(j\omega)|$ e $\arg G(j\omega)$ in funzione di ω .

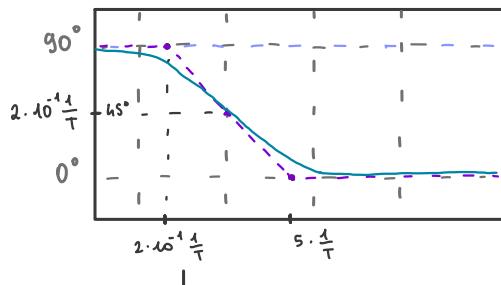
Quanto visto per quando riguarda i diagrammi di Bode (appunti su Notion) dimostra che un sistema dinamico si comporta come un filtro per l'ingresso "modellandolo" per produrre l'uscita.

esempio: $G(s) = \frac{s}{1+10s}$ $G(j\omega) = \frac{j\omega}{1+j10\omega}$ $\mu = 1$ $s = \text{zero nell'origine}$ $\frac{1}{1+10s}$ polo reale

$$\downarrow \\ G(s) = \frac{10}{10} \frac{s}{1+10s} = \frac{1}{10} \frac{s}{s + \frac{1}{10}} \rightarrow \text{cambio di forma}$$



\downarrow
 $\rightarrow 10^{-1}$ pulsazione di taglio \rightarrow dopo la frequenza di taglio il primo contributo cala di 20 dB per decade
 \rightarrow zero nell'origine
 \rightarrow a partire dalla pulsazione di taglio il secondo contributo segue l'andamento dello 0 \rightarrow grafico reale



\downarrow sembra a tutti gli effetti un filtro passa-alto

come posso avere un filtro passa-alto che lascia inalterate le alte frequenze?
 \rightarrow traslare in alto di 20 dB il diagramma di Bode attuale

$$\mu = 1 \rightarrow \mu = 10 \\ \mu_{dB} = 0 \rightarrow \mu_{dB} = 20 \log \mu = 20 \text{ dB} \rightarrow G(s) = \frac{10s}{1+10s}$$

per la fase, una decade dopo la pulsazione di taglio deve tendere a 0° partendo da 90°

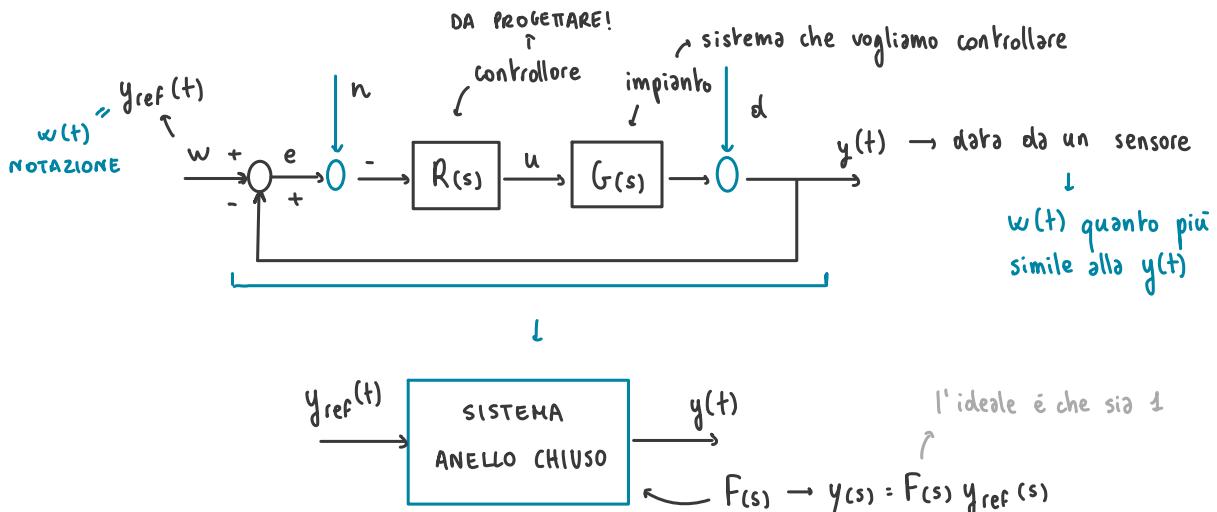
- 1) prendo la decade precedente alla puls. di taglio, ne prendo $1/3$ e da lì parte il ginocchio dell'asintoto
- 2) prendo la decade successiva, e a $2/3$ finisce il ginocchio dell'asintoto
- 3) intersecherà la pulsazione di taglio a 45° (metà tra 90° e 0°)

\downarrow
 posizionarsi sull'inizio della decade prec. e mi sposto di $1/3$

IMPORTANTE: il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio $\omega = \frac{1}{T}$

Sistemi di controllo: stabilità e prestazioni

Consideriamo il seguente schema di controllo in retroazione:

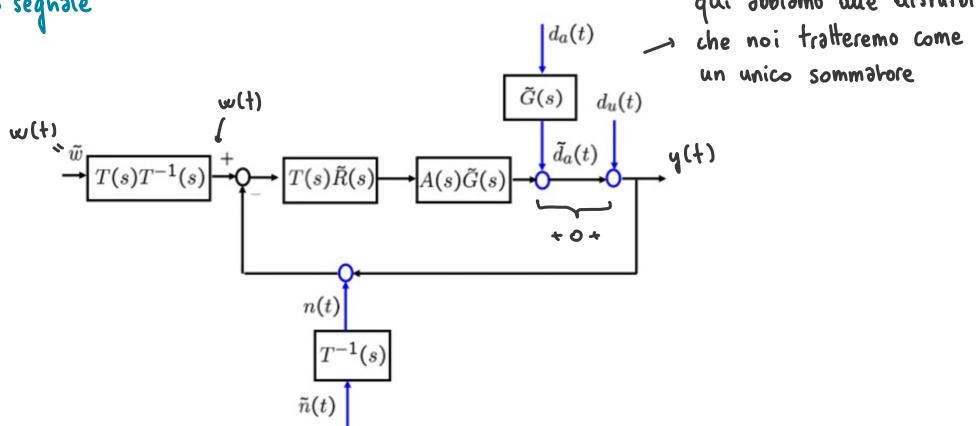
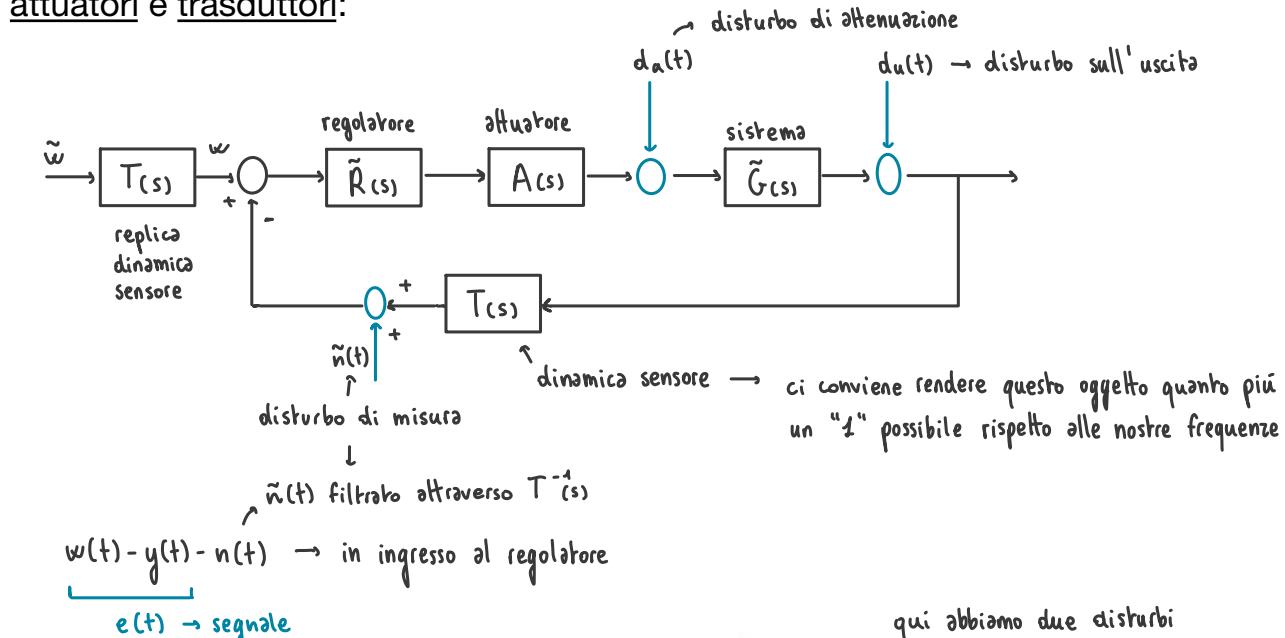


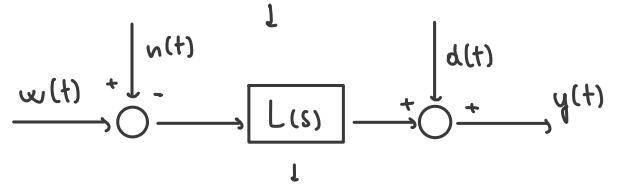
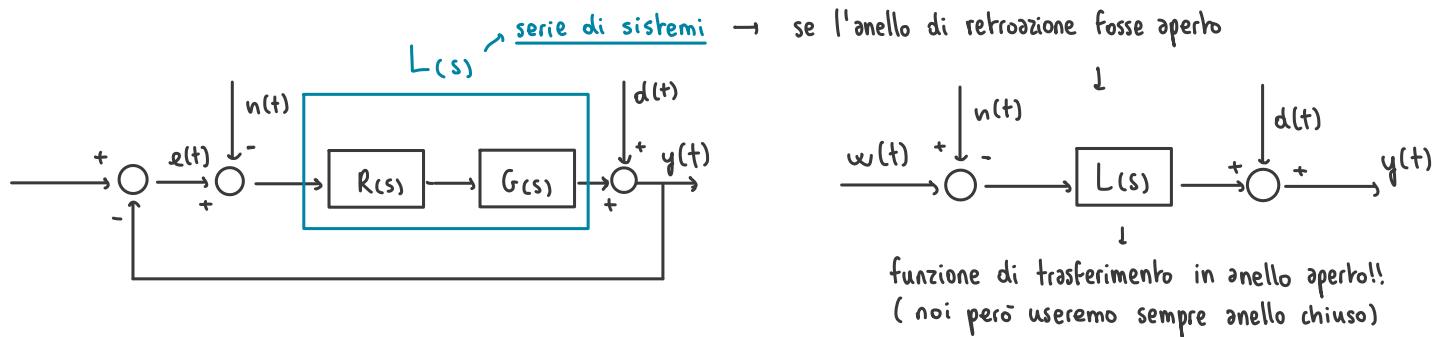
Obiettivi: garantire che l'uscita $y(t)$ segua il riferimento $w(t)$ (scelto dall'utente) in presenza di

- disturbi (non misurabili) in uscita d(t) e disturbi di misura n(t);
- incertezze sul modello $G(s)$ del sistema fisico (impianto) considerato soddisfacendo opportune specifiche di prestazione.

!!! $| L(s) = R(s)G(s)$ funzione d'anello (funzione di trasferimento in anello aperto) \rightarrow PASSAGGIO DA ANELLO APERTO AD ANELLO CHIUSO!!

Lo schema precedente cattura in realtà anche strutture più complesse che includono attuatori e trasduttori:

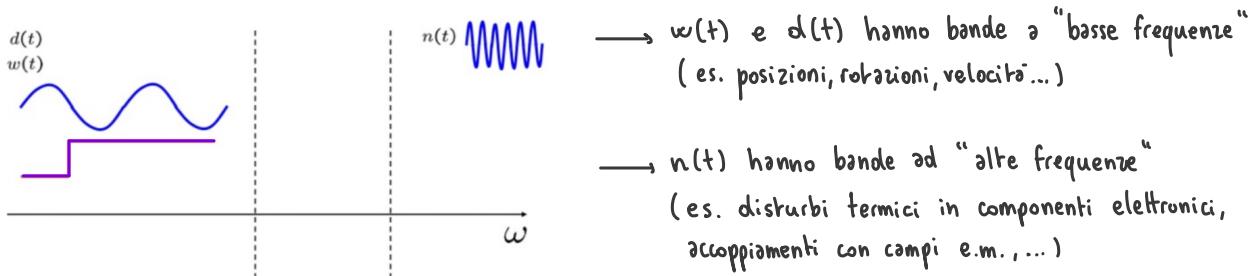




funzione di trasferimento in anello aperto!!
(noi però useremo sempre anello chiuso)

Disaccoppiamento frequenziale dei segnali

Le bande di $w(t)$, $d(t)$, $n(t)$ sono limitate in opportuni range:



Stabilità nominale: "senza disturbi" → requisito fondamentale è l'asintotica stabilità o stabilità BIBO (esterna) se solo rappresentazione ingresso-uscita.

BIBO (Bounded Input Bounded Output): un sistema è detto BIBO stabile se per ogni ingresso limitato l'uscita è limitata.

Un sistema lineare tempo invariante descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ è BIBO stabile se e solo se tutti i poli sono a parte reale < 0 .

Stabilità robusta: la stabilità deve essere garantita anche in condizioni perturbate (errori di modello o incertezze nei parametri).

Prestazioni

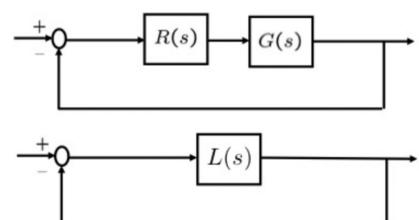
Prestazioni statiche: prestazioni a transitorio esaurito ($t \rightarrow \infty$); tipicamente $e(t)$ limitato o nullo a fronte di ingressi w , d , n con determinate caratteristiche.

Esempi: errore in risposta ad un ingresso a gradino o rampa, risposta a un ingresso sinusoidale a date frequenze,...

Prestazioni dinamiche: prestazioni del sistema in transitorio relative a

- risposta a un riferimento w , date in termini di tempo di assestamento T_a, ε e sovraetensione S% massimi;
- risposta a disturbi d ed n , date in termini di attenuazione in certi range di frequenze;
- moderazione della variabile di controllo u , date in termini di contenimento dell'ampiezza.

Poiché la stabilità di un sistema lineare non dipende dagli ingressi, consideriamo il seguente schema a blocchi → Per studiare la stabilità robusta (in presenza di incertezze) del sistema retroazionato ci avvaliamo del criterio di Bode..

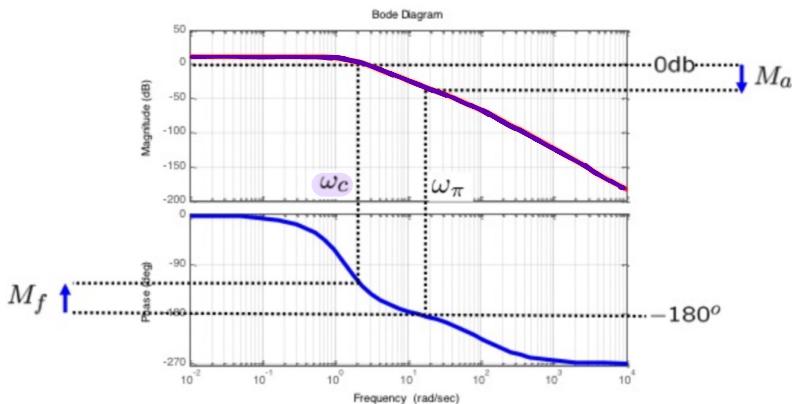


Margine di fase: $M_f = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c))$ con ω_c t.c. $|L(j\omega_c)|_{dB} = 0$ \rightarrow mi dice quanto sono distante da 180° alla pulsazione critica ω_c

$$\downarrow$$

$$M_f = \arg(L(j\omega_c)) - (-180^\circ) = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c))$$

Margine di ampiezza: $M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$ con ω_π t.c. $\arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ$
 \downarrow margine di distanza tra gli 0 dB (sotto) e il modulo della $L(j\omega_\pi)$



Ci sono casi limite in cui M_f e M_a non sono definiti o non sono informativi, nei casi di intersezioni multiple, assenza di intersezioni o segni discordi, ma è molto raro.

\downarrow
caso patologico

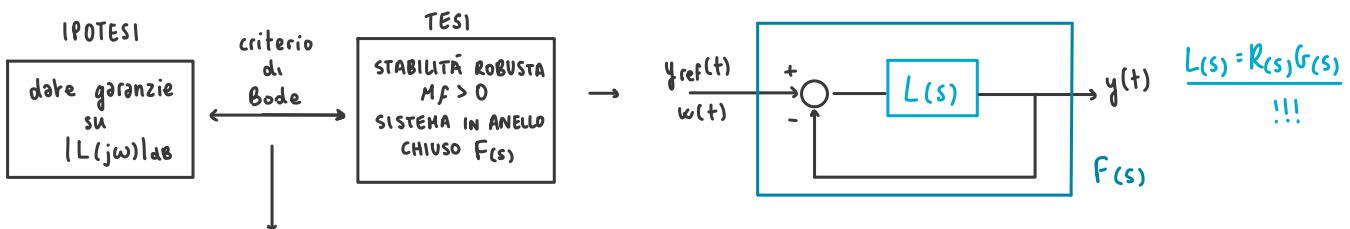
Criterio di Bode: \rightarrow STABILITÀ DEL SISTEMA IN ANELLO CHIUSO

Lega la stabilità del sistema retroazionato a quella del sistema in anello aperto $L(s)$.

Si supponga che:

1. $L(s)$ non abbia poli a parte reale strettamente positiva;
2. il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ attraversi una sola volta l'asse a 0 dB.

Allora, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che risulti $\mu > 0$ (con μ guadagno statico di $L(j\omega)$) e $M_f > 0$.

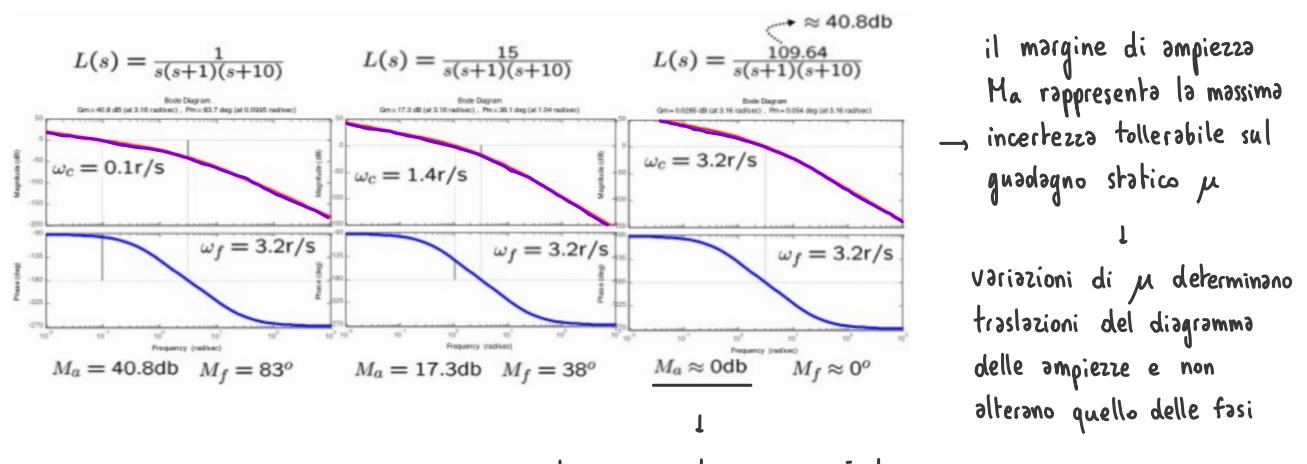


imporre delle condizioni sulla $L(j\omega)$ (funzione di trasferimento sistema in anello aperto) per ottenere stabilità sul sistema in anello chiuso \rightarrow quello che ci interessa !!

\downarrow
se io guardo il diagramma di Bode dei margini di fase e di ampiezza da un'unica pulsazione $\rightarrow \omega_c$ posso dedurre se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

Robustezza della stabilità:

1) Robustezza rispetto a incertezze sul guadagno:

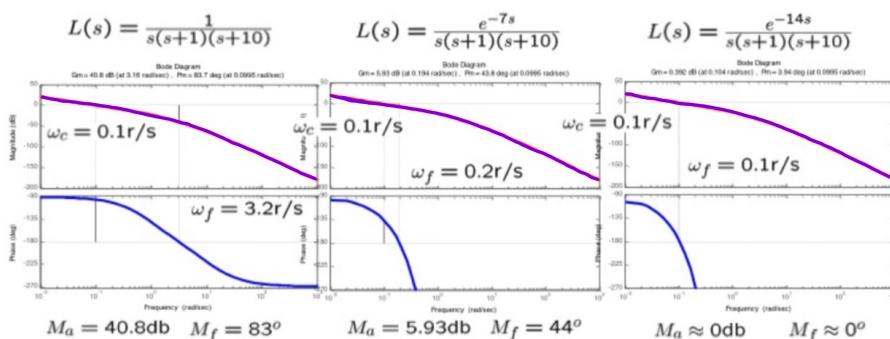
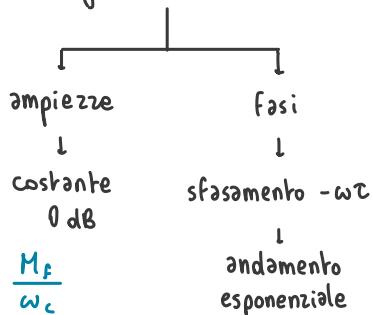


MAGGIORE M_a = MAGGIORE ROBUSTEZZA ← se il margine di ampiezza è troppo sottile si rischia di perdere stabilità

2) Robustezza rispetto a ritardi temporali:

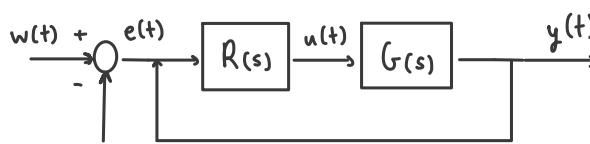
Un sistema che ritarda di τ ha funzione di trasferimento $e^{-s\tau}$ → diagrammi di Bode

↓
un ritardo riduce il margine di fase → se $L(s) = e^{-s\tau} \tilde{L}(s)$
perché per $\omega = \omega_c$ riduce la fase
↓
 $\arg(L(j\omega_c)) = \arg(\tilde{L}(j\omega_c)) - \tau \omega_c$
quindi il massimo ritardo tollerabile τ_{max} deve soddisfare $\tau_{max} < \frac{M_f}{\omega_c}$



Funzioni di sensitività:

→ funzioni di trasferimento tra ingressi e uscite di interesse



$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1 + R(s)G(s)} && \rightarrow \text{funzione di sensitività} \\ F(s) &= \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} && \rightarrow \text{funzione di sensitività complementare} \\ Q(s) &= \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} && \rightarrow \text{funzione di sensitività del controllo} \end{aligned}$$

sfruttando la sovrapposizione degli effetti:

$$Y(s) = Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s)$$

$$\begin{aligned} \downarrow & \quad \downarrow \\ \text{uscita con} & \quad \text{uscita con} \\ \text{ingresso } W(s) & \quad \text{ingresso } D(s) \\ D(s) = 0 & \quad W(s) = 0 \\ N(s) = 0 & \quad N(s) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \downarrow & \\ \text{uscita con} & \quad \text{uscita con} \\ \text{ingresso } N(s) & \quad \text{ingresso } W(s) \\ W(s) = 0 & \quad D(s) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow Y(s) &= Y_w(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s) \\ &\quad || \\ &\quad F(s)W(s) \end{aligned}$$

hanno tutte lo stesso denominatore
stabilità determinata dai poli

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} \rightarrow \text{funzione di sensitività}$$

$$Y(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s)$$

IDEALMENTE VORREMMO: $y_D(s) \approx 0; y_N(s) \approx 0$

$$\downarrow$$

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \rightarrow \begin{array}{l} \text{funzione di sensitività} \\ \text{complementare} \end{array}$$

 \downarrow quindi

$$F(s) \approx 1; S(s) \approx 0$$

$$\begin{aligned} F(s) + S(s) &= \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} + \frac{1}{1 + R(s)G(s)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$F(s) + S(s) = 1 \quad (\text{per questo } F(s) \text{ si chiama funzione di sensitività complementare}) \rightarrow \text{per ottenere tutti e 3 gli obiettivi dobbiamo ragionare nelle frequenze } \omega$$

riscriviamo la $Y(s)$ nel dominio frequenziale

$$Y(j\omega) = F(j\omega)W(j\omega) + S(j\omega)D(j\omega) - F(j\omega)N(j\omega)$$

obiettivi:

$$1) \text{Basse frequenze} \rightarrow F(j\omega) \approx 1; S(j\omega) \approx 0$$

nota: a basse ω , abbiamo $N(j\omega) \approx 0$

ricordiamo la separazione frequenziale degli spettri



$$2) \text{Alte frequenze} \rightarrow F(j\omega) \approx 0$$

nota: ad alte ω : $N(j\omega) \neq 0, D(j\omega) \approx 0 \rightarrow$ effetto collaterale: $S(j\omega) \approx 1$

$$F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \quad \left. \begin{array}{ll} \omega \text{ bassa} \rightarrow |L(j\omega)| \gg 1 & \omega \ll \omega_c \\ \omega \text{ altre} \rightarrow |L(j\omega)| \ll 1 & \omega \gg \omega_c \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} \text{assunzione principale che faremo su } L(j\omega) \\ \text{andremo a progettare la } L(j\omega) \text{ come una specie di filtro passa-basso} \end{array}$$

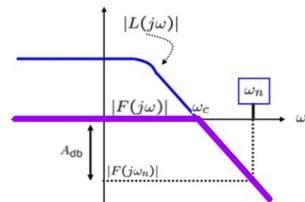
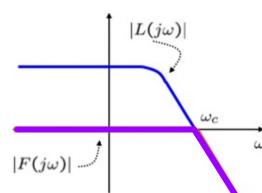
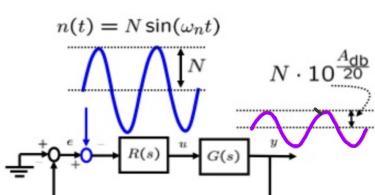
$$|L(j\omega)| \text{ dB} \ll 0 \rightarrow \text{perché siamo in dB}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

SINTESI PER TENTATIVI \downarrow quadrato molto elevato
a basse frequenze e molto basso ad alte frequenze

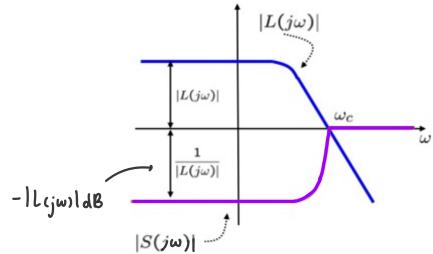
$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

$$\rightarrow |F(j\omega)|_{\text{dB}} = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega > \omega_c \end{cases}$$



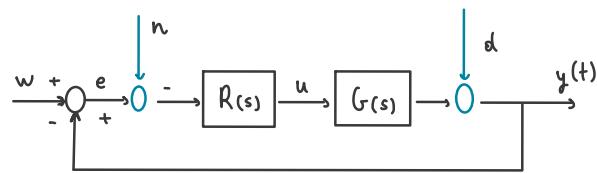
$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \omega \ll \omega_c \rightarrow |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & \omega \gg \omega_c \rightarrow |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

$$|S(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{dB} & \omega \ll \omega_c \\ 0 \text{ dB} & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$



Uscite e funzioni di sensitività:

$$Y(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s) \rightarrow E(s) = W(s) - Y(s) \rightarrow E_W(s) = W(s) - Y_W(s) \rightarrow W(s) \neq 0$$



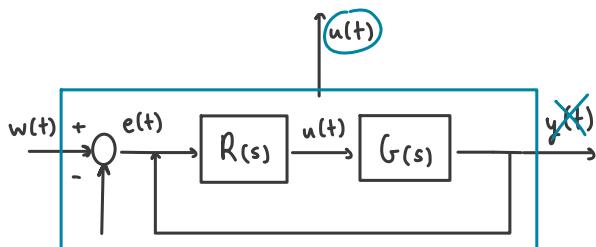
$$E_D(s) = -Y_D(s) \\ E_N(s) = -Y_N(s) \quad \boxed{W(s) = 0}$$

$S(s)$

$$E(s) = (1 - F(s))W(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s)$$

$$= S(s)W(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s) \quad \xrightarrow{\text{x esame!!}} \text{ricavare funz. di trasf. così direttam. dalla funzione dello schema a blocchi:}$$

Funzione di sensitività del controllo:



Consideriamo come uscita $u(t)$ e non $y(t)$

$$U_N(s) = R(s)E_W(s) = R(s)(W(s) - Y_W(s)) = R(s)(W(s) - G(s)U_W(s)) \\ = (1 + R(s)G(s))U_N(s) = R(s)W(s)$$

$$U(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} W(s)$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

dipende solo
da $R(s)$

FUNZIONE DI SENSITIVITÀ
DEL CONTROLLO

$$U(s) = Q(s)W(s) - Q(s)D(s) - Q(s)N(s)$$

$$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \omega \ll \omega_c \rightarrow \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)| & \omega \gg \omega_c \rightarrow \omega > \omega_c \end{cases}$$

a basse frequenze il modulo di $|Q(j\omega)|$ dipende da $G(j\omega)$ quindi non possiamo influenzarlo con il regolatore

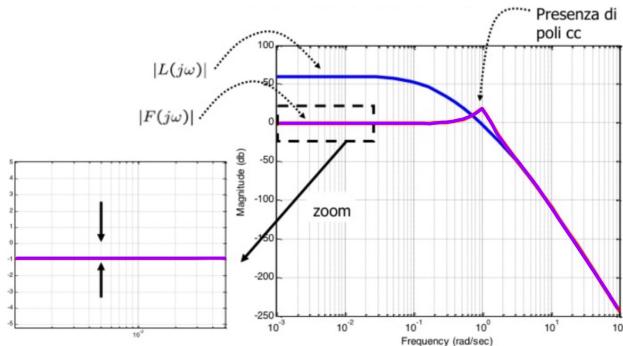
importante progettare regolatori che attenuino a frequenze alte

$$|Q(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|G(j\omega)|_{dB} & \omega \ll \omega_c \\ |R(j\omega)|_{dB} & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

per ω alte agiamo direttamente su $|L(j\omega)| \rightarrow |R(j\omega)|$ non deve essere troppo elevata

Poli complessi di $F(s)$ e margine di fase

La funzione di sensitività complementare può avere una coppia di poli c.c. dominanti:



$$L(s) = \frac{20}{(1+10s)(1+2s)(1+0.2s)}$$

mettiamo in relazione il picco di risonanza di $|F(j\omega)|$ con lo smorzamento ξ associato

$$\begin{aligned} |F(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{|1+L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1+e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{\sqrt{(1+\cos\varphi_c)^2 + \sin^2\varphi_c}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos M_f^{\text{rad}})}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 M_f^{\text{rad}}}} = \frac{1}{2\sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2}} \rightarrow \omega_n \approx \omega_c \rightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\xi} \rightarrow \text{smorzamento dei poli c.c. di } F(s) \end{aligned}$$

$$\xi \approx \frac{M_f}{100} \leftarrow \xi = \sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2} \approx \frac{M_f^{\text{rad}}}{2} = \frac{M_f}{2} \frac{\pi}{180}$$

Analisi statica - errore a un gradino:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \text{ con } e(t) = w(t) - y(t) \text{ errore in risposta a un gradino } w(t) = W_1(t)$$

utilizzando il teorema del valore finale (sistema in anello chiuso asintoticamente stabile):

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{W}{s} = W \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \rightarrow L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)} = \frac{N_L(s)}{s^g D'_L(s)} \left[\begin{array}{l} N_L(0) = \mu \\ D'_L(0) = 1 \end{array} \right]$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g D'_L(s)}{N_L(s) + s^g D'_L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g}$$

$$e_\infty = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g} = \begin{cases} \frac{W}{1+\mu} & g=0 \\ 0 & g>0 \end{cases}$$

Analisi statica - errore a ingressi $\frac{W}{s^k}$

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \text{ con } e(t) = w(t) - y(t) \text{ errore in risposta a un ingresso con trasformata } W(s) = \frac{W}{s^k}$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{W}{s^k} = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-k+1}}{\mu + s^g} = \begin{cases} \infty & g < k-1 \rightarrow \text{l'errore diverge} \\ \frac{W}{\mu} & g = k-1 \rightarrow \text{l'errore a regime è finito} \rightarrow \text{all'aumento} \\ 0 & g > k-1 \rightarrow \text{l'errore a regime è nullo} \end{cases} \downarrow \text{diminuisce di } \mu$$

il sistema in anello

chiuso deve essere
asintoticamente stabile

PRINCIPIO DEL
MODELLO INTERNO

affinché sia nullo occorre che $L(s)$ abbia
un numero di poli almeno pari a k

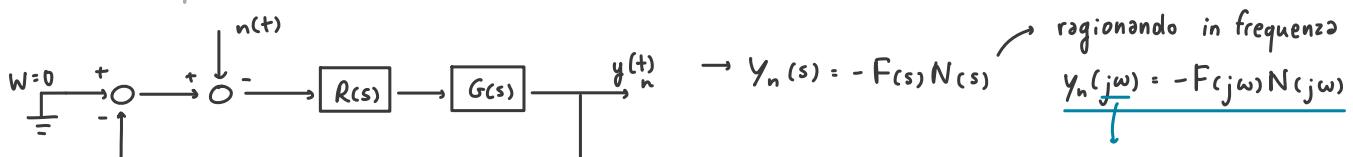
①

↓

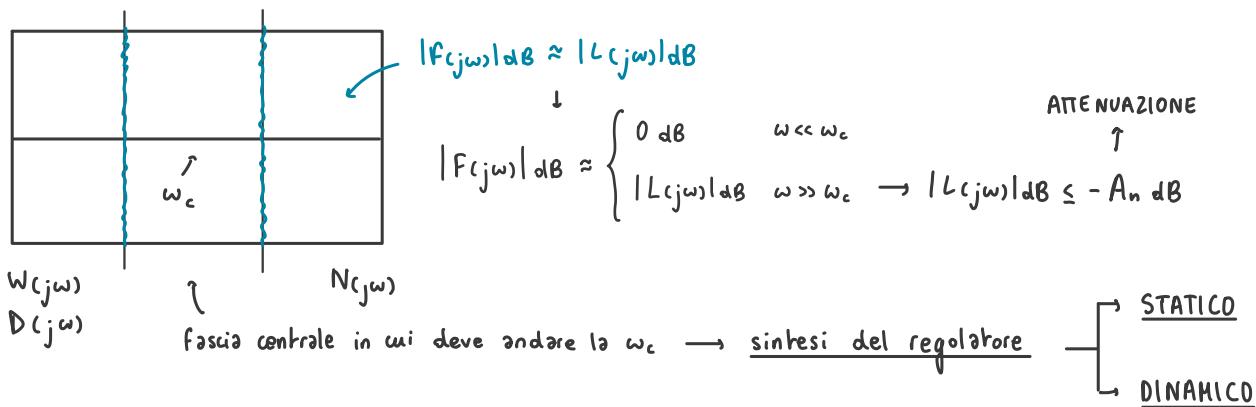
②

Affinché un segnale di riferimento (risp. un disturbo di misura) con una componente spettrale alla frequenza ω_0 sia inseguito (risp. neutralizzato) a regime perfettamente in uscita è necessario e sufficiente che 1) e 2) siano rispettate

12/12/22 - parte 7



piccola nella fascia di pulsazioni in cui agisce il disturbo (freq. alte) $[w_{n,\min}; w_{n,\max}]$

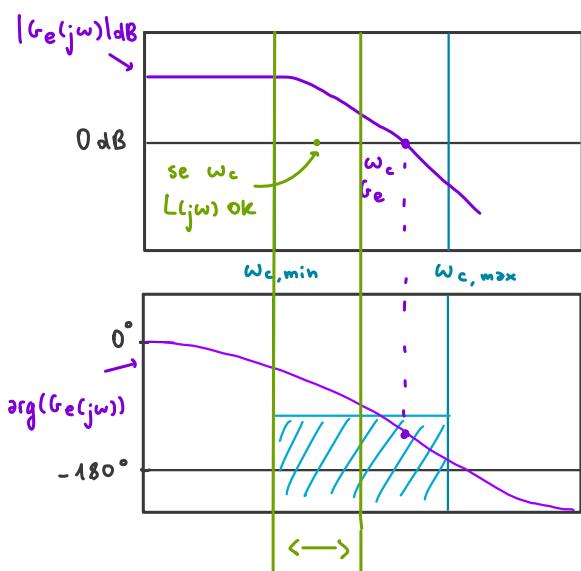
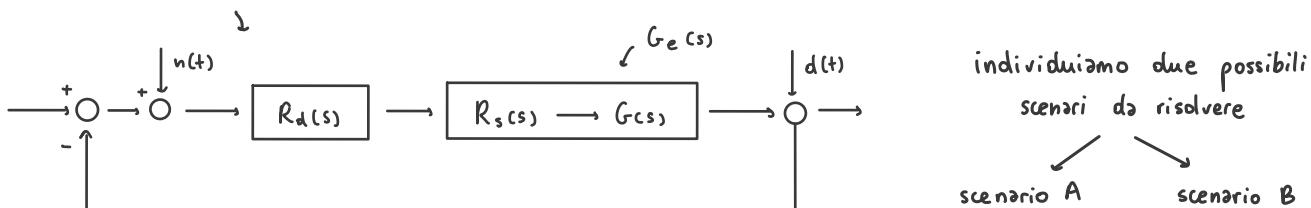


REGOLATORE STATICO → $R(s) = R_s(s)R_d(s) \rightarrow R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k} \rightarrow$ dipende da e_∞

ad esempio $|e_\infty| \leq e^*$ in risposta a gradino su w ed con $G(s)$ senza poli nell'origine

$$\text{scegliamo } R(s) = \mu_s \geq \mu^* \text{ oppure } R(s) = \frac{\mu_s}{s}$$

REGOLATORE DINAMICO → imponere ω_c in un certo intervallo, garantire un dato M_f , garantire data atten. e pendenza di $L(j\omega)$



→ SCENARIO A → regione nella quale se c'è la ω_c la fase è buona (e siamo a posto)

come facciamo a spostare a destra la ω_c ?

- abbassiamo il guadagno statico μ_d
→ scegliere $\mu_d < 1$ ($|\mu_d|_{dB} < 0$) → se non ci sono vincoli
 $|G_e(j\omega_c^*)|_{dB} \Rightarrow |\mu_d|_{dB} = -|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}$
- se μ_d vincolato (da μ_s) attenuare tramite inserimento manuale di poli e zeri in $R_d(s)$
(ci conviene che agisca prima il polo e poi lo zero)

pulsazione taglio polo $\rightarrow \omega_p = \frac{1}{\tau}$

pulsazione taglio zero $\rightarrow \omega_z = \frac{1}{\alpha\tau}$

polo negativo $s_p = -\frac{1}{\tau} < 0$

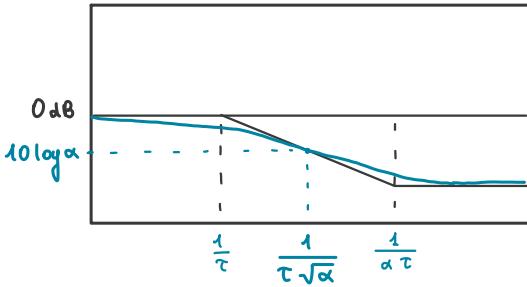
$$s_z = -\frac{1}{\alpha\tau} \leftarrow 0 < \alpha < 1$$

$\tau > 0$

RETE RITARDATRICE

$$R_d(s) = \frac{1}{1 + \alpha \tau s}$$

$$R_d(j\omega) = \frac{1 + \alpha \tau w}{1 + j\omega \tau}$$



$$\rho < 0 \text{ dB} \rightarrow 20 \log \alpha \rightarrow \frac{1}{2} (\log \frac{1}{\tau} + \log \frac{1}{\alpha \tau}) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\tau} \frac{1}{\alpha \tau} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\alpha \tau^2} = \log \frac{1}{\sqrt{\alpha \tau^2}} = \log \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

RETE ANTICIPATRICE $\rightarrow R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$ $0 < \alpha < 1 \rightarrow$ formule di inversione

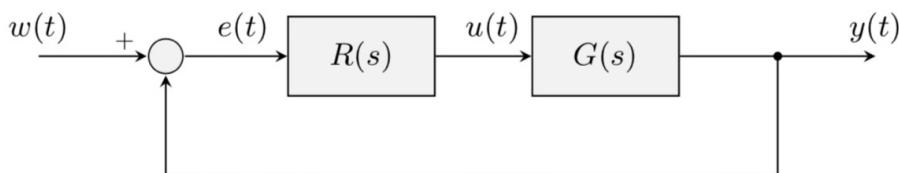
$$\begin{aligned} \tau &= \frac{M'' - \cos \varphi''}{\omega_c'' \sin \varphi''} \\ \alpha \tau &= \frac{\cos \varphi'' - \frac{1}{m''}}{\omega_c'' \sin \varphi''} \end{aligned}$$

CONTROLLORI PID \rightarrow PID "ideale" $\rightarrow R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$

T_i : tempo integrale

T_d : tempo derivativo

↓



ingresso di controllo

↓

$$U(s) = R(s) E(s) = K_p E(s) + \frac{K_p}{T_i} \frac{E(s)}{s} + K_p T_d s E(s)$$

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \underbrace{K_p e(t)}_{\text{termine proporzionale}} + \underbrace{\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{termine integrale}} + \underbrace{K_p T_d \frac{de(t)}{dt}}_{\text{termine derivativo}}$$

aggiunta di un polo ad alta frequenza

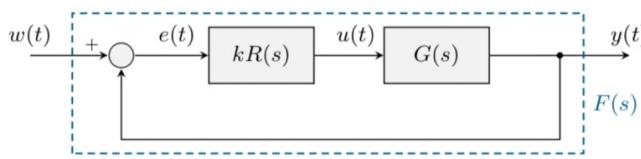
↓
PID REALE

nella funzione di trasferimento del controllore il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore

LUOGO DELLE RADICI

la retroazione non sposta gli zeri del sistema, ma solo i poli

in evidenza il guadagno k



$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow F(s) = \frac{k L(s)}{1 + k L(s)} = \frac{k N(s)}{D(s) + k N(s)}$$

zeri di $F(s)$ sono → zeri di $L(s)$

poli di $F(s)$ sono → dipendono da poli e zeri di $L(s)$
le radici di $D(s) + k N(s)$

$$F(s) = \frac{k L(s)}{1 + k L(s)}$$

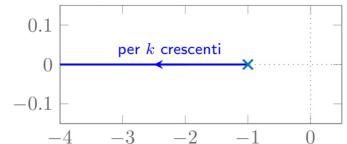
come variano nel piano complesso i poli al variare di k ?

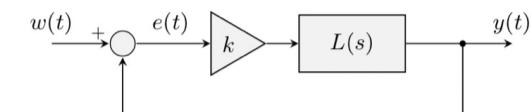
LUOGO DELLE RADICI

posizione nel piano complesso del polo di $F(s)$ al variare di $k \geq 0$

→ luogo diretto → posizione dei poli di $F(s)$ al variare di $k \geq 0$

→ luogo indiretto → posizione dei poli di $F(s)$ al variare di $k \leq 0$





numero di poli sistema retroazionato = anello aperto

i poli del sistema retroazionato sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\rightarrow D(s) + kN(s) = 0$

per sistemi propri il polinomio $D(s)$ ha grado $\geq N(s)$

$$\begin{array}{c} k=0 \\ \downarrow \\ D(s)=0 \end{array} \quad \begin{array}{c} k \rightarrow \infty \\ \downarrow \\ N(s)=0 \end{array}$$

poli di $F(s)$ coincidono con gli zeri di $L(s)$