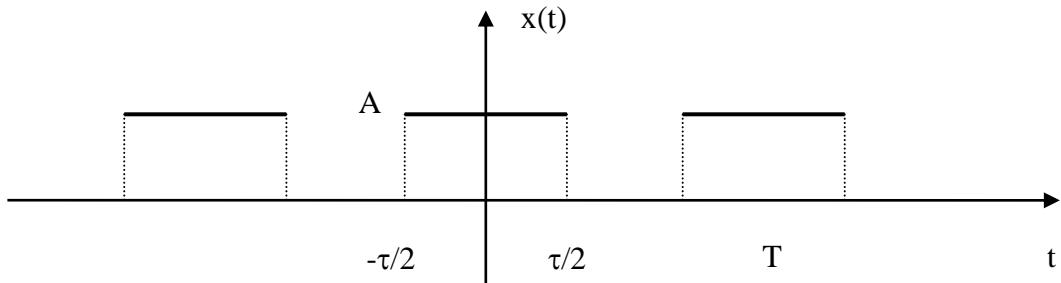


Sviluppo in serie di una successione di impulsi rettangolari

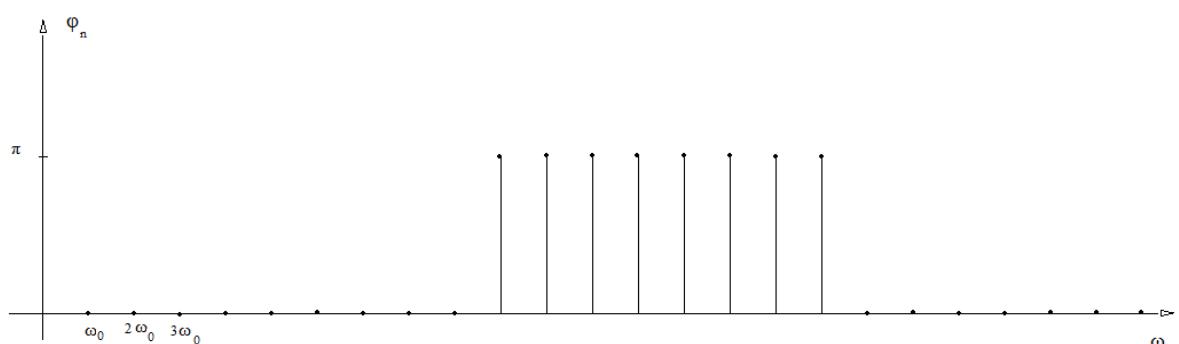
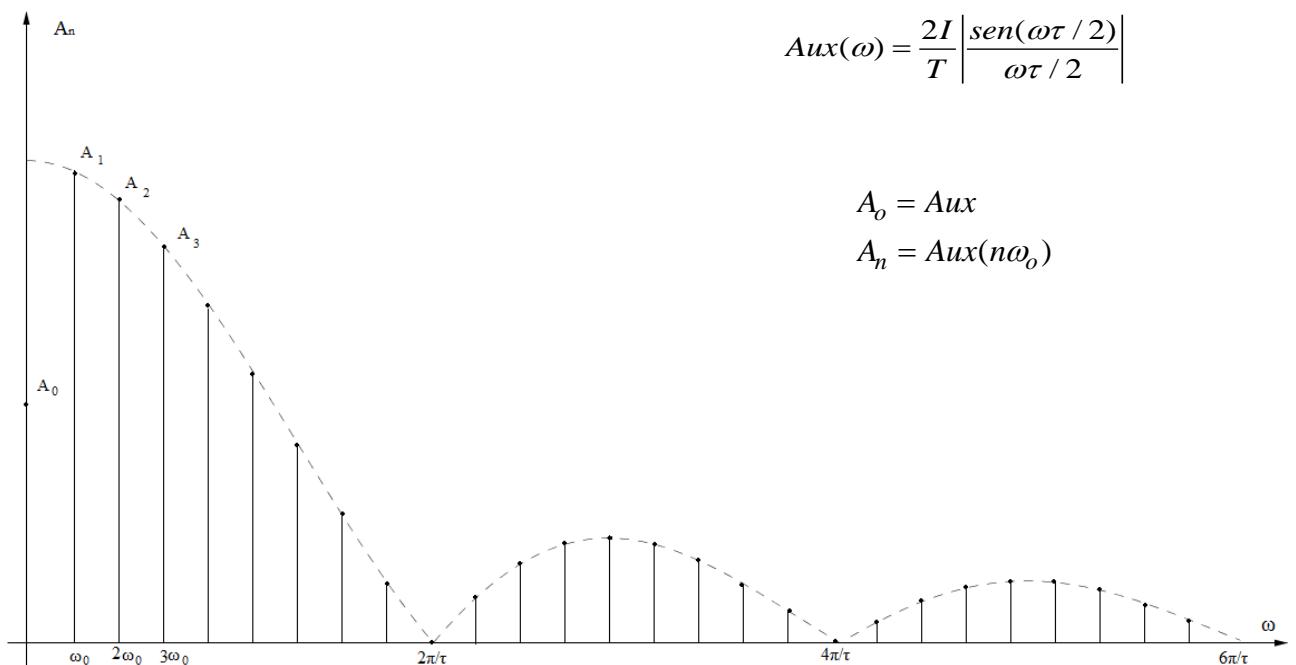


$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-j\omega_0} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \\ &= \frac{A}{T} \frac{e^{-jn\omega_0 \tau/2} - e^{jn\omega_0 \tau/2}}{-j\omega_0} = \frac{A}{T} \frac{-2j \sin(n\omega_0 \tau/2)}{-j\omega_0} = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} = \\ &= \frac{I}{T} \operatorname{sinc}(n\tau/T) \end{aligned}$$

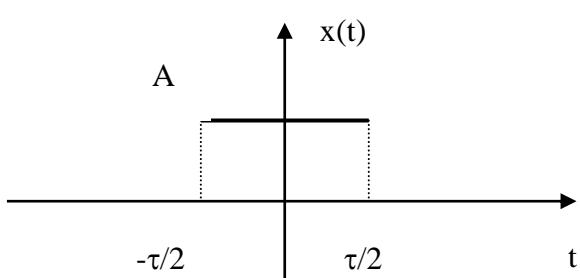
$$A_o = c_o = \frac{I}{T}$$

$$A_n = |2c_n| = \frac{2I}{T} \left| \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} \right| = \frac{2I}{T} |\operatorname{sinc}(n\tau/T)|$$

$$\varphi_n = -\arg\{c_n\} = \begin{cases} 0 & c_n > 0 \\ \pi & c_n < 0 \end{cases}$$



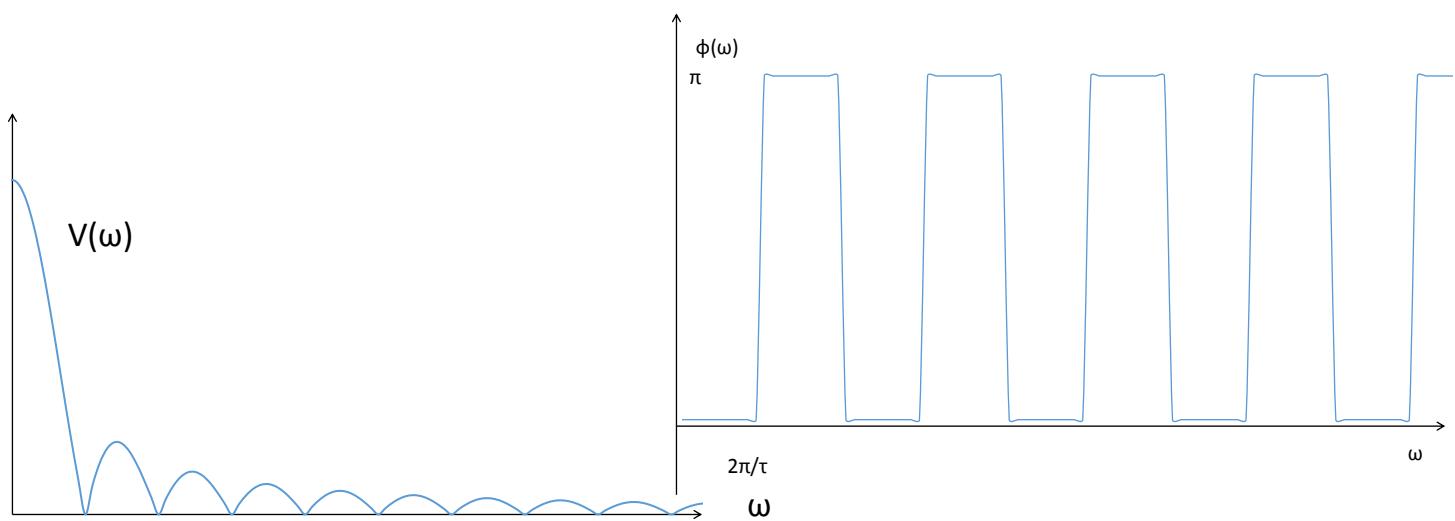
Trasformata di un impulso rettangolare



$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\omega t} dt = A \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \\ &= A \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega} = A \frac{-2j \sin(\omega\tau/2)}{-j\omega} = \\ &= A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = I \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = I \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

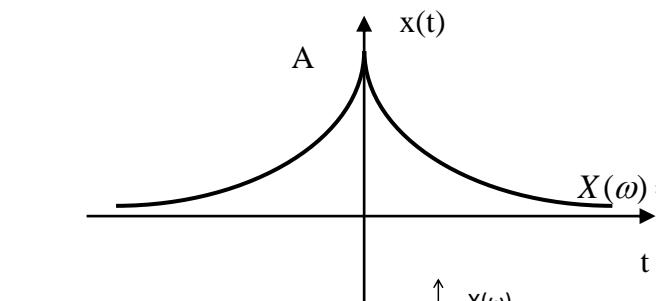
$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi} = \frac{I}{\pi} \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right| = \frac{I}{\pi} |\operatorname{sinc}(\omega\tau/2\pi)| \quad \omega > 0$$

$$\phi(\omega) = -\arg\{X(\omega)\} = \begin{cases} 0 & X(\omega) > 0 \\ \pi & X(\omega) < 0 \end{cases}$$



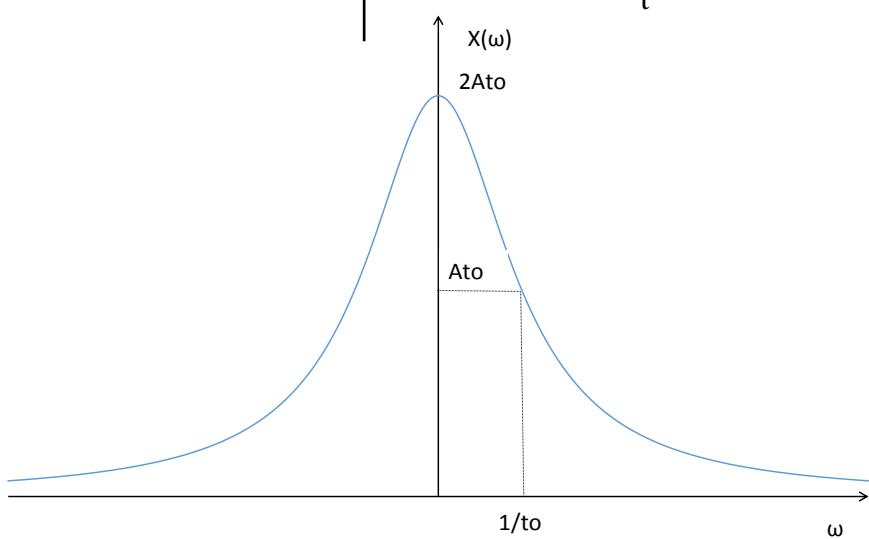
$2\pi/\tau$

Trasformata di un'esponenziale bilatera



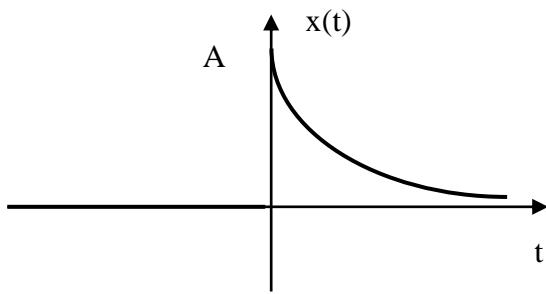
$$x(t) = Ae^{-\frac{|t|}{t_o}} \quad t_o > 0$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^0 e^{t/t_o} e^{-j\omega t} dt + A \int_0^{+\infty} e^{-t/t_o} e^{-j\omega t} dt =$$



$$\begin{aligned} &= A \int_{-\infty}^0 e^{t(1/t_o - j\omega)} dt + A \int_0^{+\infty} e^{t(-1/t_o - j\omega)} dt = \\ &= A \left[\frac{e^{t(1/t_o - j\omega)}}{1/t_o - j\omega} \right]_{-\infty}^0 + A \left[\frac{e^{t(-1/t_o - j\omega)}}{-1/t_o - j\omega} \right]_0^\infty = \\ &= \frac{At_o}{1 - j\omega t_o} + \frac{At_o}{1 + j\omega t_o} = \frac{2At_o}{1 + \omega^2 t_o^2} \end{aligned}$$

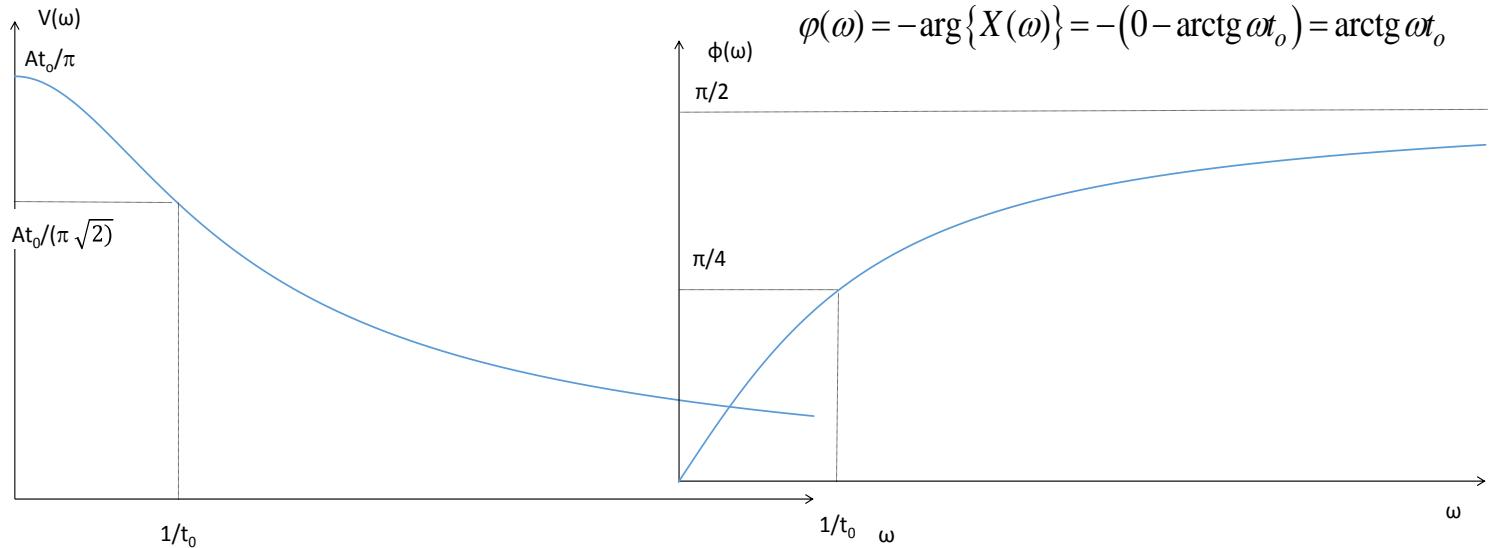
Trasformata di un'esponenziale monolatera



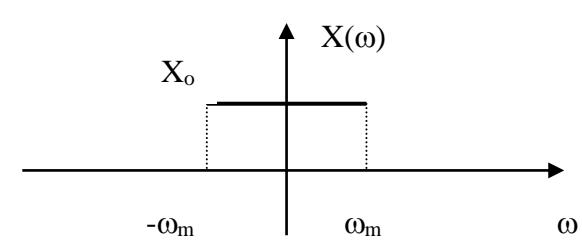
$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\frac{t}{t_o}} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{+\infty} e^{-t/t_o} e^{-j\omega t} dt = \frac{At_o}{1+j\omega t_o}$$

$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi} = \frac{At_o}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 t_o^2}} \quad \omega \geq 0$$



Antitrasformata di un impulso nelle frequenze



$$X(\omega) = \begin{cases} X_o & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad X_o > 0$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{X_o}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{X_o}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\omega_m}^{+\omega_m} = \frac{X_o \omega_m}{\pi} \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m t} = x_o \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m t} = \\ &= x_o \text{sinc}(\omega_m t / \pi) \end{aligned}$$

$$x(t) = x_o \frac{\sin[\omega_m(t-t_o)]}{\omega_m(t-t_o)} = x_o \text{sinc}[\omega_m(t-t_o) / \pi]$$

Trasformata del prodotto del segnale con una sinusoida

$$s(t) = x(t) \cos \omega_0 t$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_0 t}$$

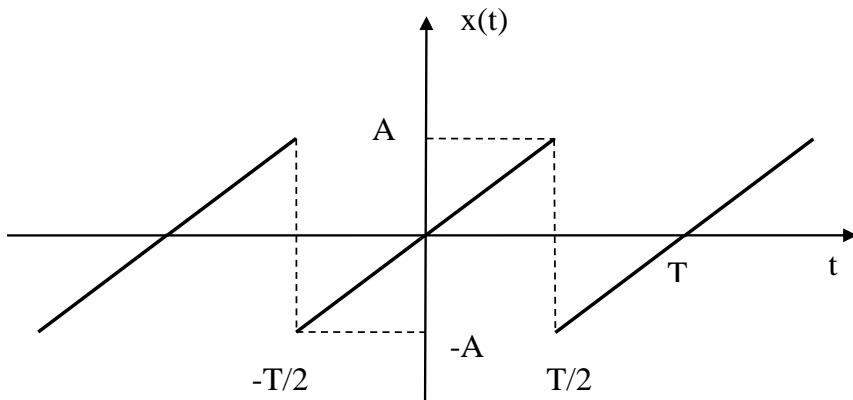
$$S(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) = \frac{I}{2} \text{sinc} \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2\pi} + \frac{I}{2} \text{sinc} \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2\pi}$$

Sviluppo in serie di un'onda a dente di sega bilanciata



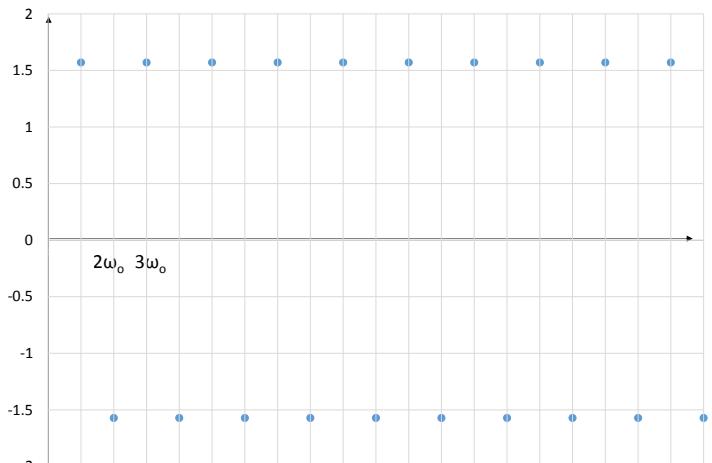
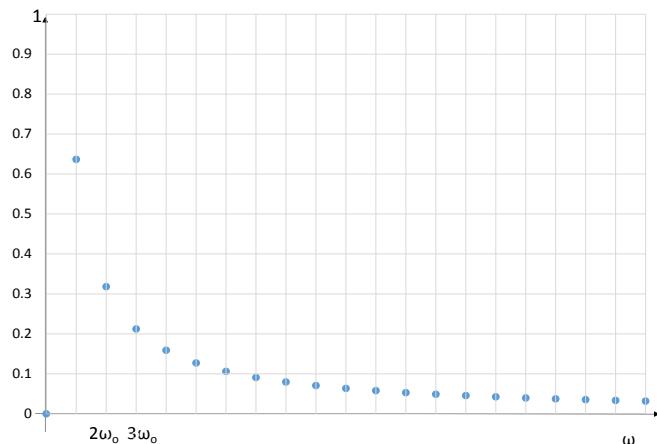
$$x(t) = \frac{2A}{T}t \quad |t| \leq \frac{T}{2}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin n\omega_o t dt = \frac{4A}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} t \sin n\omega_o t dt = \\ &= \frac{4A}{T^2} \left[\frac{-t \cos n\omega_o t}{n\omega_o} \right]_{-T/2}^{+T/2} - \frac{4A}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{-\cos n\omega_o t}{n\omega_o} dt \\ &= \frac{4A}{T^2} \left[-\frac{T}{2} \frac{2 \cos n \frac{2\pi}{T}}{n \frac{2\pi}{T}} \right] = \\ &= -\frac{2A}{n\pi} \cos n\pi \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

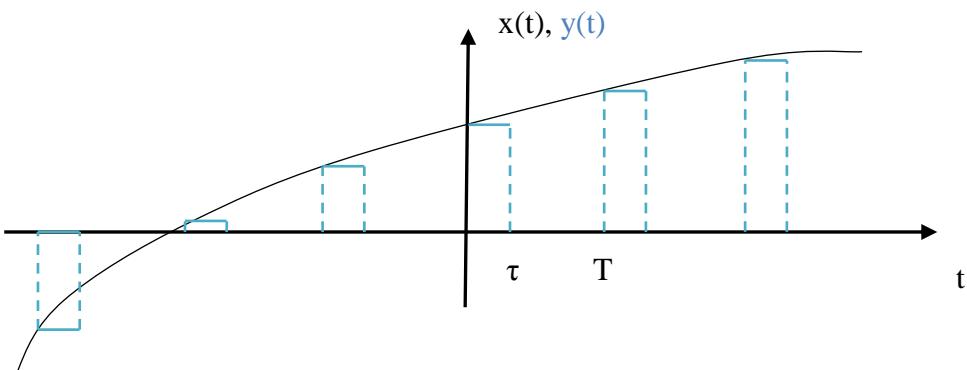
$$A_o = \frac{a_o}{2} = 0$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \frac{2A}{n\pi} \quad n \geq 1$$

$$\varphi_n = -\arg \{c_n\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & b_n > 0, n \text{ dispari} \\ -\frac{\pi}{2} & b_n < 0, n \text{ pari} \end{cases}$$



Trasformata di un segnale PAM ottenuto da una serie di campioni



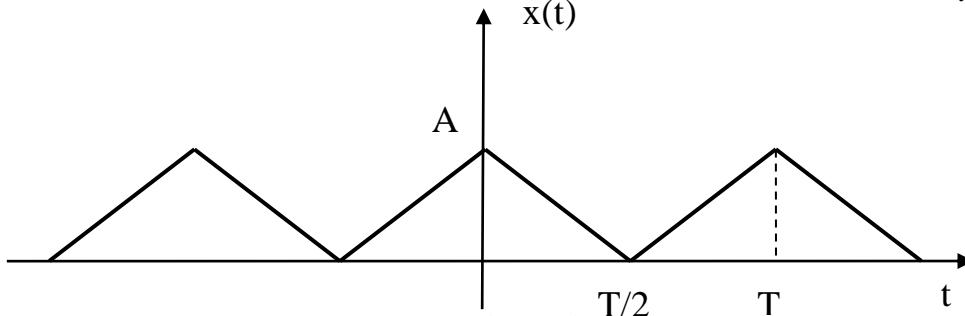
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g(t-nT) = \{x_n\} * g(t)$$

$$G(\omega) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

$$Y(\omega) = X_s(\omega)G(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_o)G(\omega)$$

Sviluppo in serie di un'onda triangolare non bilanciata

$$x(t) = A \left(1 - \frac{2}{T} t \right) \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$



$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos n\omega_o t dt = \frac{4A}{T} \int_0^{+T/2} \left(1 - \frac{2}{T} t \right) \cos n\omega_o t dt =$$

$$= \frac{4A}{T} \int_0^{+T/2} \cos n\omega_o t dt - \frac{8A}{T^2} \int_0^{+T/2} t \cos n\omega_o t dt =$$

$$= 0 - \frac{8A}{T^2} \left[\frac{t \sin n\omega_o t}{n\omega_o} \right]_0^{+T/2} + \frac{8A}{T^2} \int_0^{+T/2} \frac{\sin n\omega_o t}{n\omega_o} dt =$$

$$= - \frac{8A}{T^2} \left[\frac{T}{2} \frac{\sin n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}}{n \frac{2\pi}{T}} - 0 \right] - \frac{8A}{T^2} \left[\frac{\cos n\omega_o t}{(n\omega_o)^2} \right]_0^{+T/2} =$$

$$= 0 - \frac{8A}{T^2} \frac{\cos n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} - 1}{\left(n \frac{2\pi}{T} \right)^2} =$$

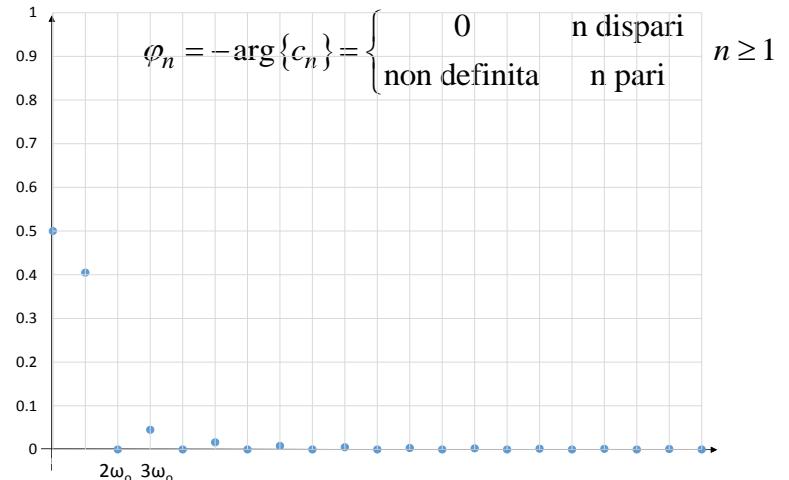
$$= - \frac{8A}{T^2} \frac{\cos n\pi - 1}{\left(n \frac{2\pi}{T} \right)^2} = \frac{2A}{n^2\pi^2} (1 - \cos n\pi) =$$

$$= \frac{2A}{n^2\pi^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4A}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

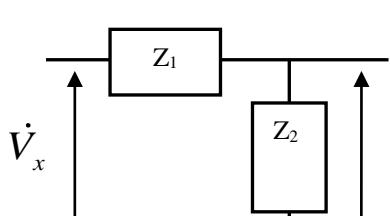
$$A_o = \frac{a_o}{2} = \frac{A}{2}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \begin{cases} \frac{4A}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \quad n > 1$$

spettro di fase 0 ad ogni n omega0



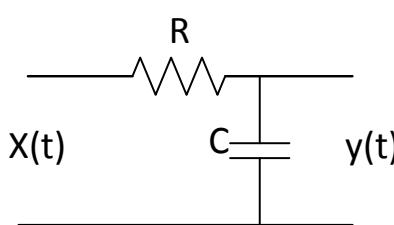
Calcolo delle funzioni di trasferimento di partitori non resistivi



$$\dot{V}_x = \dot{I}(Z_1 + Z_2) \quad \dot{V}_y = \dot{I}Z_2 \quad H(\omega) = \frac{\dot{V}_y}{\dot{V}_x} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\frac{T(\omega_t)}{\max[T(\omega)]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \square 0.7$$

Funzione di trasferimento rete RC



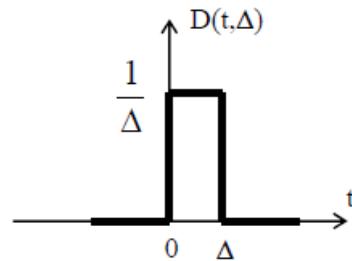
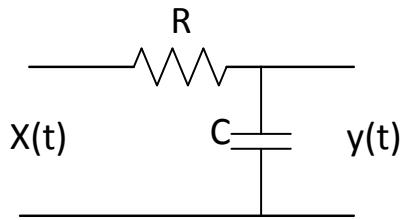
$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$\omega_t = \frac{1}{RC}$$

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1 + j\omega CR\} - \arg\{1\} = \arctg(\omega CR)$$

Risposta impulsiva e funzione di trasferimento di una rete RC



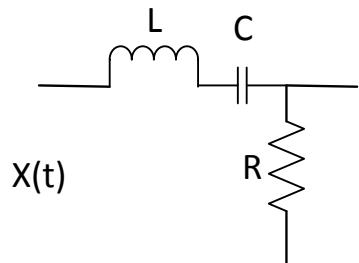
$$y_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) & 0 \leq t \leq \Delta \\ \frac{1}{\Delta} \left(1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}} \right) e^{-\frac{t-\Delta}{RC}} & t \geq \Delta \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left(1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left(1 - 1 + \frac{\Delta}{RC} + \dots \right) = \frac{1}{RC}$$

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\frac{t}{t_o}} & t \geq 0 \end{cases} \quad X(\omega) = \frac{At_o}{1 + j\omega t_o} \quad H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Funzione di trasferimento rete LCR (serie) passa banda



$$Z_1 = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

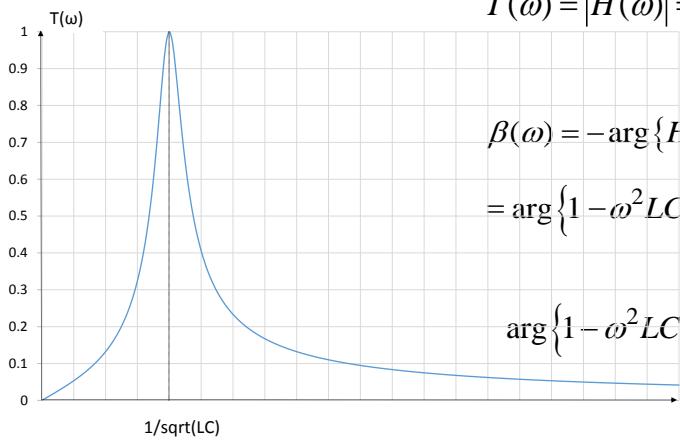
$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|j\omega CR|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} = \frac{\omega CR}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

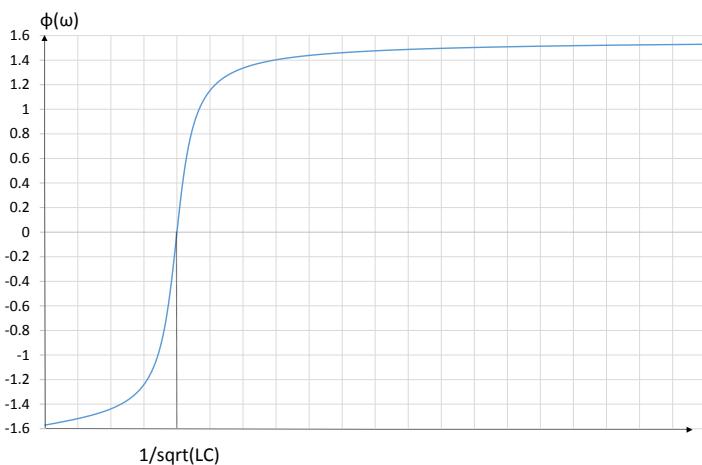
$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} - \arg\{j\omega CR\} =$$

$$= \arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} - \frac{\pi}{2}$$

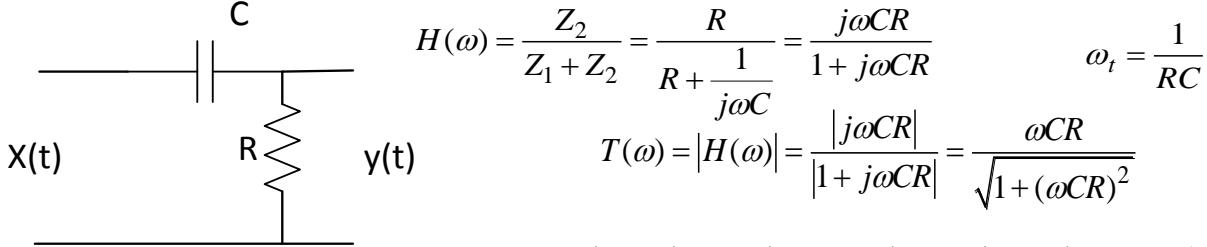
$$\arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) & \omega \leq \omega_o \\ \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) + \pi & \omega > \omega_o \end{cases}$$



$$\phi(\omega) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) - \frac{\pi}{2} & \omega \leq \omega_o \\ \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) + \frac{\pi}{2} & \omega > \omega_o \end{cases}$$

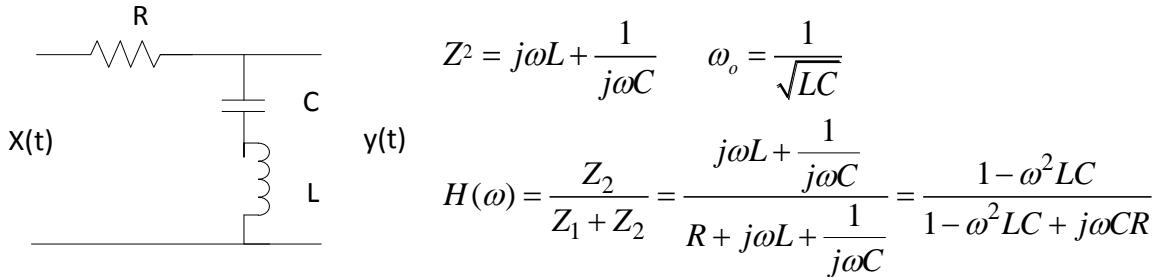


Funzione di trasferimento rete CR



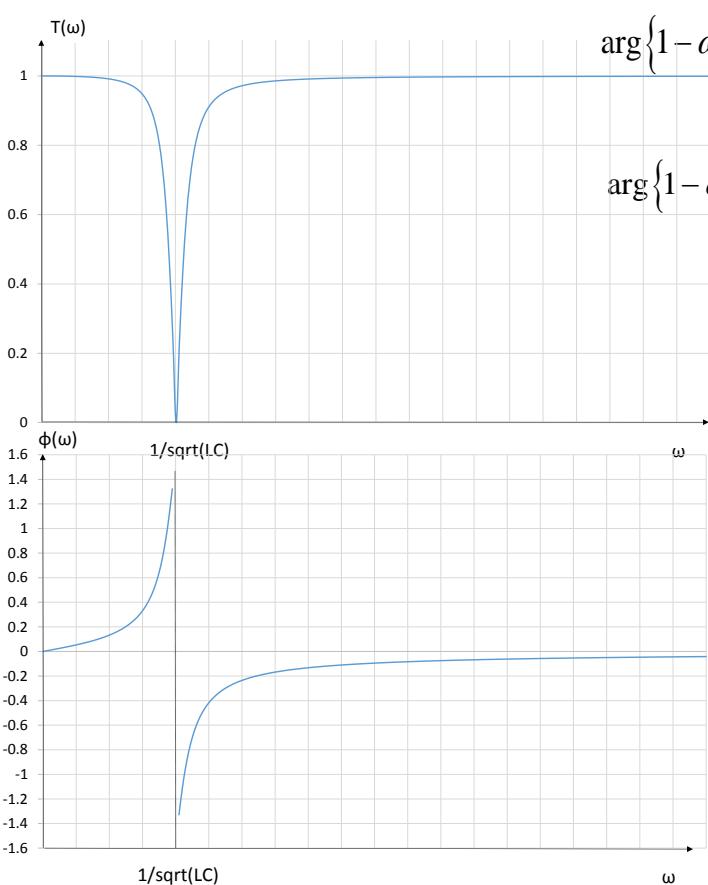
$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1 + j\omega CR\} - \arg\{j\omega CR\} = \arctg(\omega CR) - \frac{\pi}{2}$$

Funzione di trasferimento rete RCL (serie) elimina banda



$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{|1 - \omega^2 LC + j\omega CR|} = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} - \arg\{1 - \omega^2 LC\}$$



$$\arg\{1 - \omega^2 LC\} = \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_o \\ +\pi & \omega > \omega_o \end{cases}$$

$$\arg\{1 - \omega^2 LC + j\omega CR\} = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) & \omega \leq \omega_o \\ \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) + \pi & \omega > \omega_o \end{cases}$$

$$\beta(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right)$$

Funzione di trasferimento rete RLC (parallelo) passa banda

$$Z_2 = \frac{1}{Y_2} = \frac{1}{Y_L + Y_L} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}}{R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}} = \frac{j\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|j\omega L|}{|R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L|} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\left\{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L\right\} - \frac{\pi}{2}$$

$$\beta(\omega) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}\right) - \frac{\pi}{2} & \omega \leq \omega_o \\ \arctg\left(\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}\right) + \frac{\pi}{2} & \omega > \omega_o \end{cases}$$

Capitolo 6 Rappresentazione digitale dei segnali: PCM Equation Section (Next)

Conversione analogico digitale tecnica PCM

La conversione di un segnale analogico in un segnale digitale (A/D), ed in particolare in una serie di bit, è di importanza fondamentale non solo nei sistemi di telecomunicazione moderni, ma anche nell'industria discografica, in quella fotografica, nella realizzazione di strumenti di misura e in moltissimi altri campi. I vantaggi dei segnali digitali sono molteplici, ma forse il più importante è la molto maggiore facilità di elaborazione e di memorizzazione, attuabile con tecniche di tipo informatico, cioè con algoritmi operanti su hardware generico o su appositi processori (DSP, Digital Signal Processor) e su supporti dello stesso tipo (CD, DVD, HD, SSD...). Le tecniche di conversione analogico digitale sono diverse; qui esamineremo quella di base, detta anche PCM (Pulse Code Modulation) per motivi storici.

Da un punto di vista logico la conversione analogico-digitale PCM prevede tre passaggi: campionamento, quantizzazione e codifica, riassunti nello schema a blocchi della figura sotto.

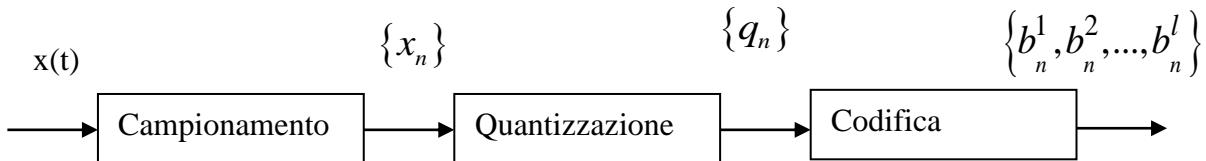


Fig.87 Schema a blocchi della conversione A/D (tecnica PCM).

Campionamento

Per prima cosa è necessario passare da un segnale tempo continuo ad un segnale tempo discreto. Questo è il compito del campionatore, che campionerà quindi il segnale $x(t)$ ad una frequenza di campionamento f_o prefissata, ottenendo la serie temporale $\{x_n\}$ $x_n = x(nT)$. Il teorema di Shannon ci assicura che non si ha perdita di informazione, cioè l'operazione è reversibile, se la frequenza di campionamento è superiore al doppio della massima frequenza f_m a cui è apprezzabile lo spettro del segnale stesso:

$$f_o > 2f_m \quad (6.1)$$

La condizione sopra è condizione sufficiente per evitare l'aliasing nel dominio delle frequenze e per poter quindi ricostruire il segnale originario. Il rispetto della condizione può avvenire in due modi: o aumentando la frequenza di campionamento fino a soddisfare la condizione (con un certo margine, necessario per l'operazione inversa), oppure, nel caso in cui la frequenza di campionamento sia fissa, anteponendo al campionatore un filtro passa-basso in grado di ridurre la frequenza massima del segnale.

Quantizzazione

La serie temporale $\{x_n\}$ è un segnale tempo-discreto, ma non discreto nei valori. Assumendo $x(t)$ bilanciato, con valori compresi nell'intervallo $[-M, M]$, i campioni risulteranno anch'essi compresi in detto intervallo, potendo assumere qualsiasi valore all'interno di esso. Per poter procedere, è necessario ridurre il numero dei valori da infinito a finito, passando da una serie temporale continua nei valori ad una discreta nei valori. L'operazione viene detta quantizzazione, e consiste in una approssimazione dei valori ottenuti. L'intervallo di variabilità $[-M, M]$ dei valori campionati viene suddiviso in un numero finito di intervalli (intervalli di quantizzazione) e tutti i valori interni a

ciascuno di questi vengono identificati con uno di essi, che indichiamo con q_n . L'operazione di quantizzazione non è evidentemente reversibile, in quanto non è possibile risalire da un valore quantizzato al campione che l'ha generato. L'intervallo su cui opera il quantizzatore, $[-M_q, M_q]$ viene detto dinamica del quantizzatore, ed è opportuno che coincida con quella del segnale, come verrà mostrato in seguito. Spesso, ma non necessariamente, la dinamica del quantizzatore è suddivisa in intervalli uguali, nel qual caso si dice "uniforme". In caso contrario, si dice "non-uniforme". Il valore rappresentativo di ogni intervallo è arbitrario, ma spesso viene scelto per simmetria il valore centrale. La differenza fra campione e valore quantizzato corrispondente si dice "errore" di quantizzazione.

$$e_n = x_n - q_n \quad (6.2)$$

Scegliendo come rappresentativo il valore centrale dell'intervallo il suo valore massimo è pari alla metà dell'intervallo stesso. Ogni altra scelta porta ad un errore massimo maggiore.

L'operazione di quantizzazione può essere rappresentata sia ad una (Fig.88) che a due dimensioni (Fig.89).

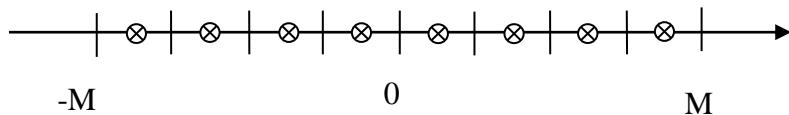


Fig.88 Esempio di legge di quantizzazione uniforme a 8 livelli "midriser" con valori rappresentativi centrali (crocette).

Two types of quantization: (a) midtread and (b) midrise.

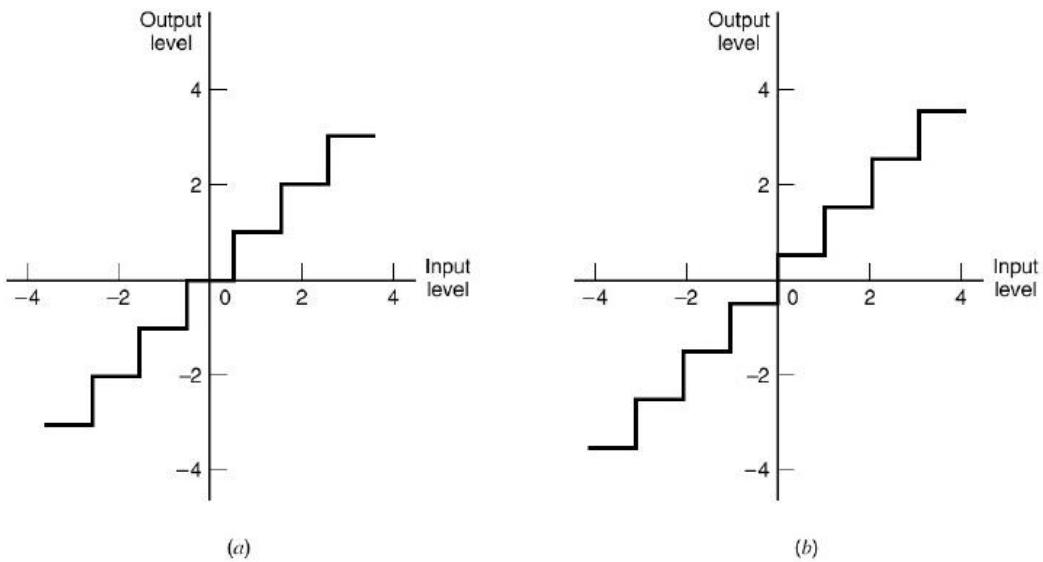


Fig.89 Esempi di legge di quantizzazione uniforme "midtread" e "midriser" con valori rappresentativi centrali.

La rappresentazione in due dimensioni mette in evidenza il legame funzionale fra campioni e valori quantizzati, detto "legge di quantizzazione"

$$q_n = f(x_n) \quad (6.3)$$

I valori assumibili dalla variabile q_n vengono anche detti “livelli” di quantizzazione, per motivi ovvi guardando l’andamento a scala della funzione di quantizzazione. La scelta del quantizzatore ottimo, cioè della miglior legge di quantizzazione, intendendo per migliore quella che minimizza gli effetti del errore di quantizzazione, dipende dalla statistica dei campioni, ed è un argomento che verrà trattato in seguito. Per la sua semplicità, viene spesso usato il quantizzatore uniforme, anche quando non ottimo. Risulta evidente che maggiore è il numero di livelli, L , minore sarà in generale l’errore di quantizzazione. L’aumento di L , tuttavia, comporta come vedremo fra un attimo un aumento dei bit necessari a rappresentare il segnale, per cui si impone un compromesso fra qualità e numero di bit.

Codifica

I primi due passi della conversione A/D ci permettono di ottenere una serie tempo discreta e discreta nei valori, a partire da un segnale analogico, quindi tempo continuo e continuo nei valori. Il passo successivo è trasformare la serie dei valori quantizzati in una serie di bit.

La codifica associa ad ognuno degli L livelli che possono essere assunti dai valori quantizzati una parola formata da un certo numero di bit, in modo da avere una corrispondenza biunivoca fra valori ed “etichette” binarie. Non considerando qui volutamente le codifiche entropiche per semplicità, si assume che tutte le etichette siano formate dallo stesso numero di bit, che dovrà essere quindi messo in relazione al numero di livelli L

$$l \geq \log_2 L \quad (6.4)$$

Di norma conviene prendere L potenza di due o potenza di due meno uno, in modo da avere rispettivamente $L=2^l$ o $L=2^l - 1$. La prima scelta è preferita quando si vuole che l’origine si trovi al confine fra due intervalli diversi (“quantizzatore “midriser”), la seconda quando si vuole inserire un intervallo a cavallo dell’origine (quantizzatori “midstep”). La seconda scelta ha il vantaggio di rendere nullo il segnale ricostruito quando i campioni sono molto piccoli e cioè vicinissimi all’origine (ad esempio per eliminare il fruscio in assenza di segnale utile).

Ciò premesso, il codificatore assocerà ad ogni elemento della serie $\{q_n\}$ una parola di l bit, ottenendo una serie di parole binarie $\{b_n^1 b_n^2 \dots b_n^l\}$. Ovviamente gli elementi di tale serie, anziché a blocchi di l possono essere pensati come singoli bit, cioè come elementi di una serie binaria con intervallo fra bit, detto tempo di bit, ridotto di un fattore l ,

$$T_b = T / l \quad (6.5)$$

La frequenza di bit, f_b , essendo $f_b = 1/T_b$, risulterà invece

$$f_b = f_o l \quad (6.6)$$

Essa rappresenta il numero di bit necessari a rappresentare (quindi sia a trasmettere che memorizzare) un secondo del segnale, ed è evidentemente un fattore fondamentale nella valutazione di un sistema di conversione A/D. Si noti che aumentando il numero L di livelli, cioè diminuendo l’errore di quantizzazione, aumenta tuttavia con legge logaritmica la frequenza di bit. Il progetto di un sistema A/D consiste nel bilanciare quindi qualità (in termini di rapporto segnale rumore di quantizzazione, introdotto in seguito), frequenza di bit e, terzo ma non ultimo, complessità dei circuiti e/o degli algoritmi.

Esempi

Nel caso di segnale telefonico la banda netta è di 300-3400 Hz (standard europeo). Gli standard richiedono $f_o=8000$ Hz e prevedono 255 livelli ($=2^8-1$) di quantizzazione (quantizzatore non uniforme “midstep”) cioè 8 bit per campione. La frequenza di bit risulta $f_b=64000$ bit/s.

Nel caso di segnale CD (mono) lo standard richiede $f_o=44100$ Hz e 65536 livelli di quantizzazione (quantizzatore uniforme “midriser”) cioè 16 bit per campione. La frequenza di bit risulta $f_b=705600$ bit/s, cioè più di un ordine di grandezza superiore rispetto al caso telefonico. Ovviamente la qualità, sia in termini di banda riproducibile, sia in termini di rapporto segnale rumore di quantizzazione è molto più elevata.

Perché PCM (Pulse Code Modulation)

La conversione A/D appena vista prende il nome di PCM, Pulse Code Modulation perché in origine era associata alla creazione di un segnale PAM binario (con impulso rettangolare RZ o NRZ, vedi in seguito) a partire dalla serie di bit ottenuta nella conversione A/D. Questo segnale binario rappresentava l’alternativa, “in codice”, al segnale PAM che si sarebbe potuto ottenere dalla convoluzione dei valori quantizzati con un impulso dello stesso tipo. Questo in particolare nell’ambito dei segnali telefonici.

In realtà, la serie di bit ottenuta dal processo di conversione A/D non viene necessariamente trasmessa, e se trasmessa non necessariamente tramite un segnale PCM. Le applicazioni in cui i bit vengono memorizzati anziché trasmessi sono certamente altrettanto importanti. Inoltre, negli strumenti di misura, viene spesso dato in tempo reale un valore specifico del segnale $x(t)$, ad esempio il valore attuale, oppure quello massimo o minimo. Anche in questo caso non vi è, a valle della conversione A/D la trasmissione di nessun segnale.

Conversione digitale analogica tecnica PCM

La conversione digitale analogica (D/A) consiste nella ricostruzione del segnale originario $x(t)$ a partire dal corrispondente messaggio numerico, cioè dai bit che lo rappresentano. Essa prevede due soli passi: decodifica e ricostruzione del segnale. Si noti che la quantizzazione non ha inverso, essendo irreversibile.

Decodifica

E’ ovviamente il processo inverso della codifica, mediante il quale si ricostruiscono i valori quantizzati $\{q_n\}$, a partire dalle parole di codice $\{b_n^1 b_n^2 \dots b_n^l\}$. Essendo la quantizzazione una operazione non reversibile, la serie $\{q_n\}$ deve necessariamente essere trattata come se fosse la serie $\{x_n\}$ dei valori campionati. L’errore di quantizzazione farà però sì che il segnale ricostruito differisca da quello originale: la differenza prenderà il nome di rumore di quantizzazione:

$$e(t) = x_r(t) - x(t) \quad (6.7)$$

Ricostruzione del segnale

Generazione del segnale PAM

Dal punto di vista teorico il segnale potrebbe essere ricostruito a partire dalla conoscenza dei suoi campioni utilizzando la serie di Shannon. In pratica questo procedimento non viene seguito per una serie di motivi, fra cui la necessità (teorica) di poter disporre di tutti i campioni per calcolare la formula. Risulta molto più conveniente ricostruire il segnale a partire dal segnale PAM ottenuto come prodotto di convoluzione della serie dei valori quantizzati, equivalenti ai campioni, a meno

dell'errore dovuto alla quantizzazione (qui momentaneamente trascurato per poter procedere con la dimostrazione), con un impulso rettangolare $g(t)$, di ampiezza unitaria, con origine a $t=0$. Si ottiene quindi il segnale PAM già considerato nel capitolo 4 (vedi Fig.47):

$$s(t) = \{x_n\}^* g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g(t - nT) \quad (6.8)$$

Filtratura passa-basso

Mostriamo ora come sia possibile ricostruire il segnale $x(t)$ a partire da quello PAM. Richiamando i risultati ottenuti per la trasformata di un segnale PAM:

$$Y(\omega) = X_s(\omega)G(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_o)G(\omega) \quad (6.9)$$

Poiché il campionamento di $x(t)$ deve essere stato effettuato in accordo con la condizione del teorema di campionamento, i termini della ripetizione periodica della trasformata del segnale devono essere non sovrapposti (assenza di aliasing nelle frequenze). L'impiego di un filtro passa-basso consente di isolare il termine centrale. La frequenza di campionamento è bene sia un po' superiore al doppio della frequenza del segnale per consentire un raccordo continuo da banda passante $[0, f_m]$ a banda attenuata $[f_o - f_m, \infty]$ (un filtro reale non può avere caratteristica di ampiezza discontinua).

Si ha quindi in uscita al filtro (trascurando il ritardo da esso introdotto):

$$S_f(\omega) = X(\omega) \frac{G(\omega)}{T} \quad (6.10)$$

Eventuale equalizzazione

Per ottenere il segnale originario occorre porre in cascata al filtro passa-basso una rete equalizzatrice la cui funzione di trasferimento è data da:

$$H_e(\omega) = \begin{cases} \frac{T}{G(\omega)} & |\omega| \leq \omega_m \\ \text{qualsiasi} & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad (6.11)$$

Tuttavia, se la durata τ dell'impulso $g(t)$ è molto minore di T , la sua trasformata $G(\omega)$ è praticamente costante ed eguale a τ nella banda del segnale, in quanto ha un andamento a lobi, in cui il primo punto di nullo è a $2\pi/\tau >> 2\pi/T = \omega_o > 2\omega_m$. La rete equalizzatrice può quindi essere omessa, dato che si ottiene comunque $x(t)$ in uscita al filtro passa-basso, a meno di una costante moltiplicativa.

In altri termini, per ricostruire a meno di una costante moltiplicativa e del ritardo introdotto dal circuito il segnale originario a partire dal segnale PAM, è sufficiente un filtro passa-basso. Nel caso telefonico (standard europeo) questo filtro ha banda passante fino a 3400 Hz e banda attenuata che inizia a 4600 Hz

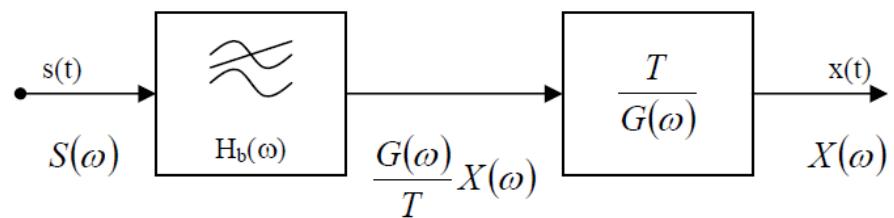
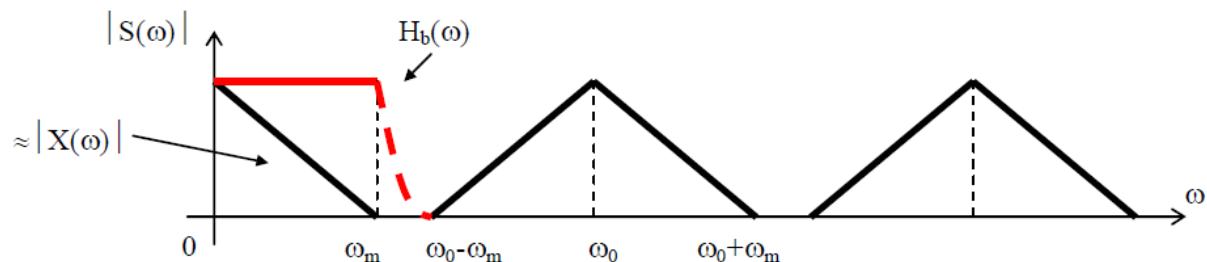


Fig.90 Funzione del filtro passa-basso e della rete equalizzatrice nella conversione D/A PCM.