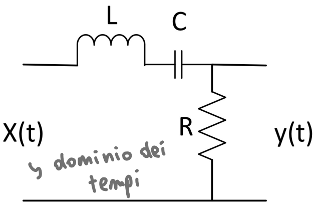
Esercizi

• Funzione di trasferimento, ampiezza e fase di una rete lineare LCR (serie) (PASSA-BANDA)



↳ dominio dei tempi

↓

($H(\omega)$ è nel dom delle frequenze) → COMPLESSA

→ impedenza sul primo ramo $Z_1 = \underbrace{j\omega L}_{\text{L: INDUTTORE}} + \underbrace{\frac{1}{j\omega C}}_{\text{C: CONDENSATORE}}$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO = TRASFORMATA DI FOURIER DELLA RISPOSTA IMPULSIVA

$H(\omega) = F[h(t)]$

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + \underbrace{Z_2}_{\text{RESISTENZA}}} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1-\omega^2 LC + j\omega CR}$$

Ampiezza: $T(\omega) = |H(\omega)| = \dfrac{|j\omega CR|}{|1-\omega^2 LC + j\omega CR|} = \dfrac{\omega CR}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$

Fase: $\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1-\omega^2 LC + j\omega CR\} - \arg\{j\omega CR\} = \arg\{1-\omega^2 LC + j\omega CR\} - \frac{\pi}{2}$

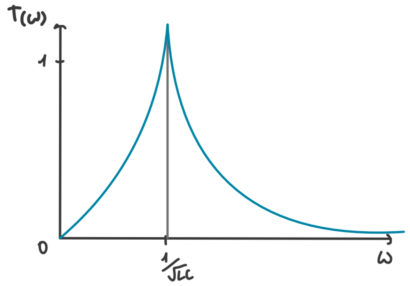
il denominatore della funzione di trasferimento ha parte reale positiva per $\omega \le \omega_0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ → PULSAZIONE DI RISONANZA

↓

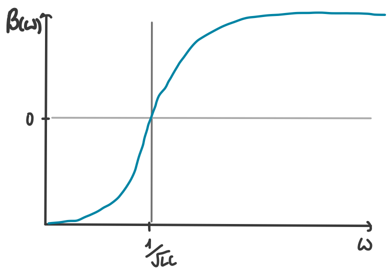
$$\arg\{1-\omega^2 LC + j\omega CR\} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\right) & \omega \le \omega_0 \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\right) + \pi & \omega > \omega_0 \end{cases} \rightarrow \beta(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\right) & \omega \le \omega_0 \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\right) + \pi & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

↑

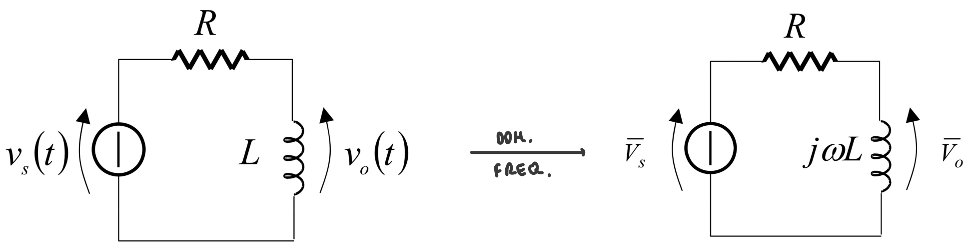
LA RETE SI COMPORTA COME UN FILTRO PASSA-BANDA REALE



CIRCUITO LCR (serie)

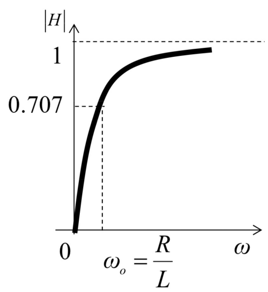


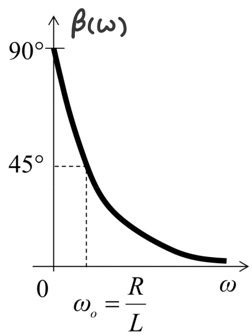
• Circuito RL: funzione di trasferimento, caratteristica di ampiezza e fase, grafico



Funzione di trasferimento. $H(\omega) = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \dfrac{j\omega L}{R + j\omega L} = \dfrac{1}{1 + \frac{R}{j\omega L}}$ $\quad \omega_0 = \dfrac{R}{L} \rightarrow H(\omega) = \dfrac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$

Ampiezza: $T(\omega) = |H(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ $\quad$ Fase: $\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\left\{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}\right\} = \operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\omega}$



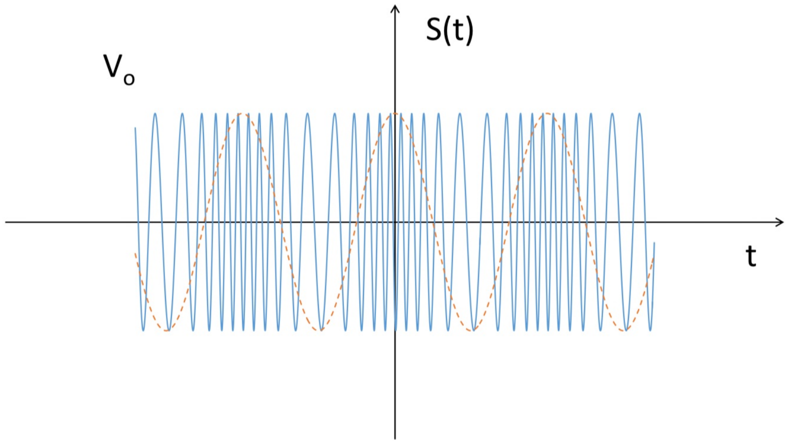


- **Modulazione FM: segnale modulante sinusoidale; cosa succede alla modulata vicino alla modulante, grafico**

$$\text{FM} \begin{cases} m(t) = 0 \\ \Delta\omega(t) = k x(t) \end{cases}$$

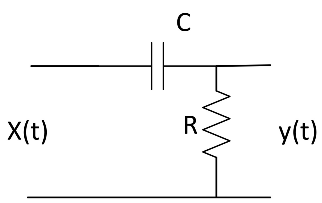
Nella modulazione di frequenza FM è la deviazione istantanea di pulsazione ad essere direttamente proporzionale al segnale modulante e non quella di fase. Dato il legame fra deviazione di fase e deviazione di frequenza in FM si ha: $\alpha(t) = k \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

$s(t) = V_o \cos\left[\omega_o t + k \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau - \varphi_o\right]$ (solo la modulazione in angolo è presente)



Se k>0 la frequenza istantanea (cioè l'infittimento dell'oscillazione modulata) segue in FM l'andamento del segnale modulante (riportato con linea tratteggiata), quindi è massima in corrispondenza dei massimi del segnale modulante, minima in corrispondenza dei minimi e uguale a quella della portante in corrispondenza degli zeri.

- **Rete lineare CR: funzione di trasferimento, ampiezza, fase e grafico**

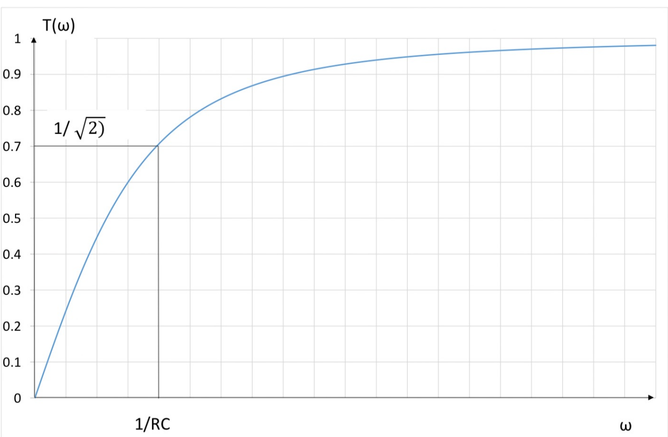


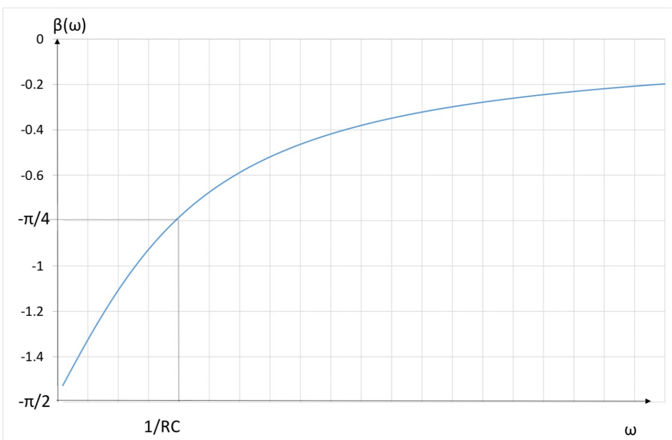
$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

Ampiezza: $T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|j\omega CR|}{|1 + j\omega CR|} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$

Fase: $\beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1 + j\omega CR\} - \arg\{j\omega CR\} = \operatorname{arctg}(\omega CR) - \frac{\pi}{2}$

La rete si comporta come un filtro passa-alto non ideale. La pulsazione di taglio è: $\omega_t = \frac{1}{RC}$



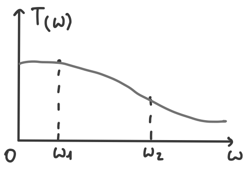


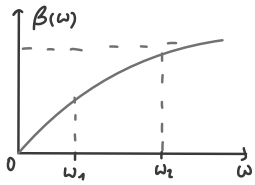
- **In una rete mando due sinusoidi: trovare la risposta**

$$x(t) = V_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + V_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \qquad y(t) = ?$$

$$y(t) = V_1 T(\omega_1) \cos[\omega_1 t - \varphi_1 - \beta(\omega_1)] + V_2 T(\omega_2) \cos[\omega_2 t - \varphi_2 - \beta(\omega_2)]$$

$$y(t) = V_1 T(\omega_1) \cos[\omega_1 t - \varphi_1 - \omega_1 \underbrace{\frac{\beta(\omega_1)}{\omega_1}}_{t_0}]$$

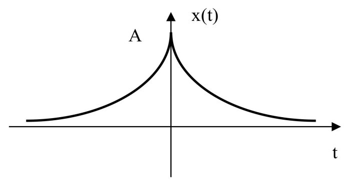




- **Trasformata di un esponenziale bilatera**

$$x(t) = Ae^{-\frac{|t|}{t_0}} \qquad t_0 > 0$$

Si tratta di una funzione reale pari, continua nei valori, tempo-continua di tipo aperiodico.



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A\int_{-\infty}^{0} e^{t/t_0} e^{-j\omega t} dt + A\int_{0}^{+\infty} e^{-t/t_0} e^{-j\omega t} dt = A\int_{-\infty}^{0} e^{t(1/t_0 - j\omega)} dt + A\int_{0}^{+\infty} e^{t(-1/t_0 - j\omega)} dt =$$

$$= A\left[\frac{e^{t(1/t_0 - j\omega)}}{1/t_0 - j\omega}\right]_{-\infty}^{0} + A\left[\frac{e^{t(-1/t_0 - j\omega)}}{-1/t_0 - j\omega}\right]_{0}^{\infty} = \frac{At_0}{1 - j\omega t_0} + \frac{At_0}{1 + j\omega t_0} = \frac{2At_0}{1 + \omega^2 t_0^2}$$

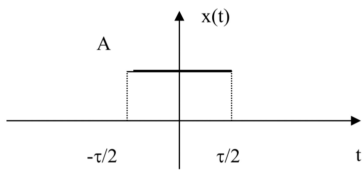
- **Trasformata di un impulso rettangolare**

Si tratta di una funzione reale pari, discreta nei valori e tempo-continua, di tipo aperiodico.

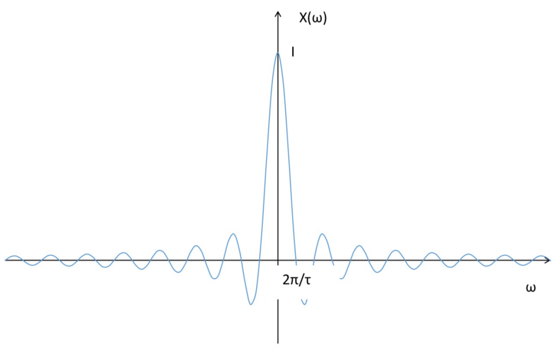
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\omega t} dt = A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = A\,\frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega} =$$

$$= A\,\frac{-2j\,\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{-j\omega} = A\tau\,\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = A\tau\,\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = I\,\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = I\,\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} =$$

$$= I\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \qquad \left(\mathrm{sinc}\, z = \frac{\mathrm{sen}\,\pi z}{\pi z}\right)$$

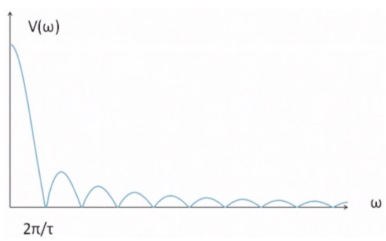


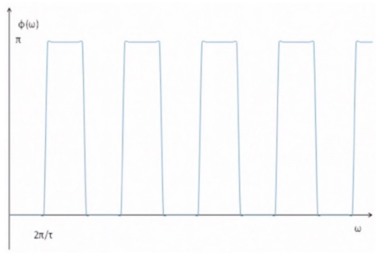
Il risultato ottenuto è reale, visto che x(t) oltre ad essere reale è pari; il grafico è quello del sinc (una sinusoide smorzata): più tau è piccolo più la banda del grafico tende ad allargarsi.



SPETTRO DI AMPIEZZA: $V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi} = \frac{I}{\pi}\left|\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right| = \frac{I}{\pi}|\mathrm{sinc}(\omega\tau/2\pi)|$

SPETTRO DI FASE: $\varphi(\omega) = -\arg\{X(\omega)\} = \begin{cases} 0 & X(\omega) > 0 \\ \pi & X(\omega) < 0 \end{cases}$





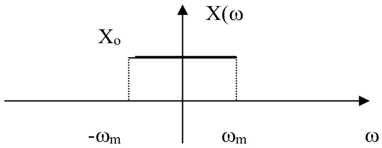
Confrontando la trasformata dell'impulso con i coefficienti dello sviluppo in serie della successione di impulsi:

$$X(\omega) = I\,\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \qquad c_n = \frac{I}{T}\,\frac{\mathrm{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \quad \rightarrow \quad c_n = \frac{1}{T} X(n\omega_0) \quad \text{RISULTATO GENERALE}$$

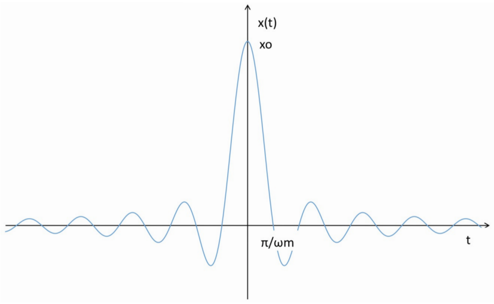
Si ottiene che i coefficienti possono essere ottenuti campionando a multipli della fondamentale la trasformata (divisa per T).

• Antitrasformata di un impulso rettangolare nelle frequenze

$$X(\omega) = \begin{cases} X_0 & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \qquad X_0 > 0$$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{X_0}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{+\omega_m} e^{j\omega t}d\omega = \frac{X_0}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-\omega_m}^{+\omega_m} = \overbrace{\frac{X_0\omega_m}{\pi}}^{X_0 \,=}\,\frac{sen(\omega_m t)}{\omega_m t} = X_0\,\frac{sen(\omega_m t)}{\omega_m t} = X_0\, \text{sinc}\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)$$



All'impulso nelle frequenze corrisponde un sinc nei tempi, viceversa ad un impulso nei tempi corrisponde un sinc nelle frequenze.

Maggiore la $\underbrace{\text{banda}}_{\omega_m}$, più stretto il sinc.

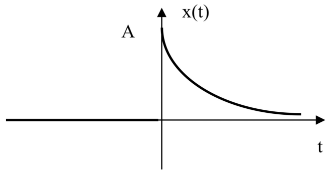
Variante dell'esercizio con aggiunta una caratteristica di fase proporzionale a ω (proprietà dei segnali ritardati):

$$X(\omega) = \begin{cases} X_0\, e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| < \omega_m \end{cases} \qquad X_0 > 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = X_0\,\frac{sen[\omega_m(t-t_0)]}{\omega_m(t-t_0)} = X_0\,\text{sinc}\left[\frac{\omega_m(t-t_0)}{\pi}\right]$$

• Trasformata di un'esponenziale monolatera

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\frac{t}{t_0}} & t \geq 0 \end{cases} \qquad t_0 > 0$$

x(t) è reale ma non è pari, quindi la trasformata risulta complessa



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t} = A\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{t_0}}\,e^{-j\omega t}dt = A\int_0^{+\infty} e^{t(-1/t_0 - j\omega)}dt = A\left[\frac{e^{t(-1/t_0 - j\omega)}}{-1/t_0 - j\omega}\right]_0^{\infty} = \frac{At_0}{1 + j\omega t_0} = \frac{2At_0}{1+\omega^2 t_0^2}$$

SPETTRO DI AMPIEZZA MONOLATERO: $V(\omega) = \dfrac{|X(\omega)|}{\pi} = \dfrac{At_0}{\pi}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2 t_0^2}} \qquad \omega \geq 0$

SPETTRO DI FASE MONOLATERO: $\varphi(\omega) = -\arg\{X(\omega)\} = -(0 - \text{arctg}\,\omega t_0) = \text{arctg}\,\omega_0 t$

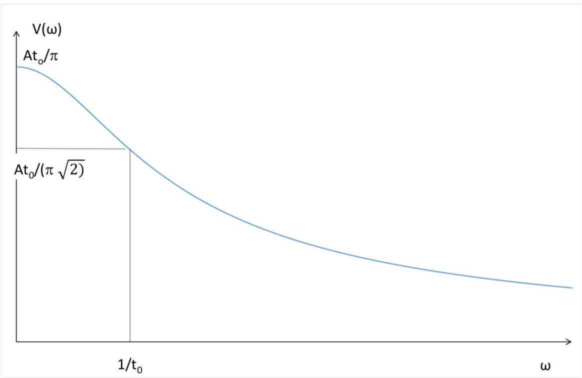


Fig.22 Spettro (densità spettrale) di ampiezza dell'esponenziale monolatera.

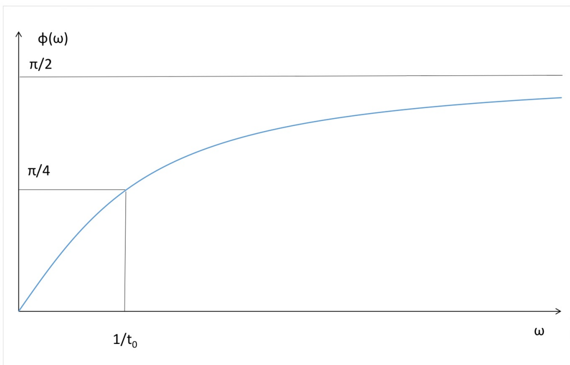
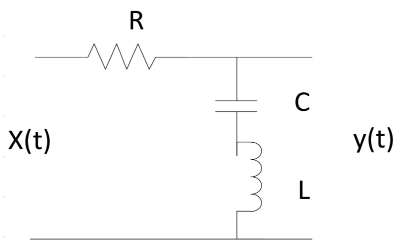


Fig.23 Spettro di fase dell'esponenziale monolatera.

- **Circuito RCL in serie**



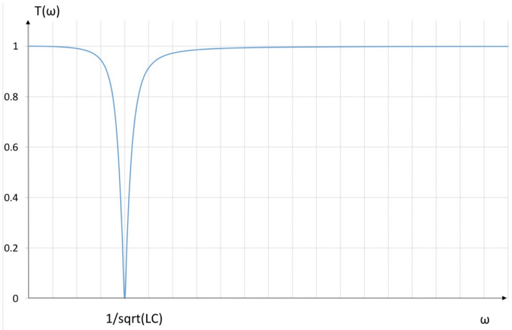
$$Z_2 = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \rightarrow H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC + j\omega CR}$$

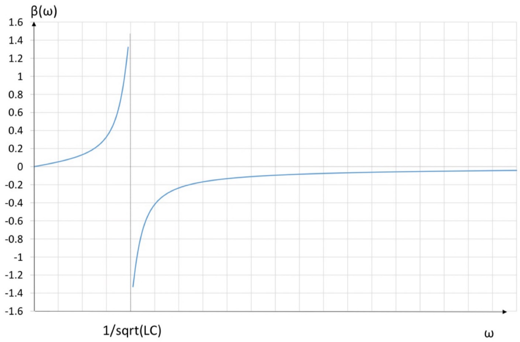
$$\text{Ampiezza: } T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|1-\omega^2 LC|}{|1-\omega^2 LC + j\omega CR|} = \frac{|1-\omega^2 LC|}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)+(\omega CR)^2}}$$

$$\text{Fase: } \beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arg\{1-\omega^2 LC + j\omega CR\} - \arg\{1-\omega^2 LC\}$$

$$\arg\{1-\omega^2 LC\} = \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_0 \\ \pi & \omega > \omega_0 \end{cases} \qquad \arg\{1-\omega^2 LC + j\omega CR\} = \begin{cases} \mathrm{arctg}(\omega CR / 1-\omega^2 LC) & \omega \leq \omega_0 \\ \mathrm{arctg}(\omega CR / 1-\omega^2 LC) + \pi & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$$\beta(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}\right)$$





- annulla le componenti alla pulsazione di risonanza
- alla pulsazione estreme lascia inalterata l'ampiezza
- si comporta come un filtro elimina-banda non ideale
- viene rappresentato solo il semiasse positivo per convenienza grafica (nelle reti reali la caratteristica di ampiezza è dispari)

- il circuito sfasa di π/2 per $\omega \rightarrow \omega-0$
- il circuito sfasa di -π/2 per $\omega \rightarrow \omega+0$
- non sfasa alle pulsazioni estreme
- viene rappresentato solo il semiasse positivo per convenienza grafica (nelle reti reali la caratteristica di fase è dispari)

- **Circuito LR: funzione di trasferimento, ampiezza/fase, grafici**

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{R}{j\omega L + R} = \frac{1}{1+j\omega L/R} \qquad T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega L/R)^2}} \qquad \beta(\omega) = -\arg\{H(\omega)\} = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

- **Circuito CL: funzione di trasferimento, caratteristiche ampiezza/fase, grafico**

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{j\omega L}{1/j\omega C + j\omega L} = \frac{j\omega L}{\frac{1+j^2\omega^2 CL}{j\omega C}} = \frac{j^2\omega^2 CL}{1-\omega^2 CL} = \frac{\omega^2 CL}{\omega^2 CL - 1} \qquad T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|\omega^2 CL|}{|\omega^2 CL - 1|} = \frac{\omega^2 CL}{\omega^2 CL - 1}$$

$$\beta(\omega) = -\arg\{T(\omega)\} = \arg\{\omega^2 CL\} - \arg\{\omega^2 CL\} = \mathrm{arctg}\left\{\frac{0}{\omega^2 CL - 1}\right\} - \mathrm{arctg}\left\{\frac{0}{\omega^2 CL}\right\} \longrightarrow \mathrm{arctg}\left\{\frac{0}{\omega^2 CL - 1}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } H(\omega) > 0 \\ \pi & \text{se } H(\omega) < 0 \end{cases}$$

- **Trasformata di Fourier s(t) = x(t) cos(ω0t) dove x(t) = gradino unitario simmetrico**

Si esprime il coseno come somma di due esponenziali complessi coniugati: $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$

$$s(t) = \frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}$$

Si ottiene la trasformata del segnale:

$$S(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt = \frac{1}{2}x(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}x(\omega+\omega_0)$$

Prendendo il valore della trasformata di Fourier del gradino unitario simmetrico 1(t): $X(\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$$S(\omega) = \frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega+\omega_0)} = \frac{1}{2j}\left(\frac{2\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right) = \frac{1}{j}\left(\frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right)$$

Da cui lo spettro di ampiezza monolatero è: $V(\omega) = \frac{|S(\omega)|}{\pi} = \frac{|\omega|}{\pi\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}} \quad \omega \geq 0$

E lo spettro di fase monolatero: $\varphi(\omega) = -\arg\{S(\omega)\} = \arg\{\omega_0^2-\omega^2\} - \arg\{j\omega\} = \mathrm{arctg}\left\{\frac{0}{\omega_0^2-\omega^2}\right\} - \mathrm{arctg}\{\omega\}$

$$\mathrm{arctg}\{\omega\} = \begin{cases} \pi & \omega \geq 0 \\ \text{non pertinente} & \omega < 0 \end{cases} \qquad \mathrm{arctg}\left\{\frac{\omega^2-\omega_0^2}{0}\right\} = \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_0 \\ \pi & \omega > \omega_0 \end{cases} \longrightarrow \varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \omega \leq \omega_0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

- **Spettro ampiezza monolatero di s(t) = x(t) sin(ω0t) dove x(t) = gradino unitario simmetrico**

Si esprime il seno come somma di due esponenziali complessi coniugati: $\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2j}$

$$s(t) = \frac{1}{2j}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2j}x(t)e^{-j\omega_0 t}$$

Si ottiene la trasformata del segnale:

$$S(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt = \frac{1}{2}x(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}x(\omega+\omega_0)$$

Prendendo il valore della trasformata di Fourier del gradino unitario simmetrico 1(t): $X(\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$$S(\omega) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}\right) - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega+\omega_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) = \frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Da cui lo spettro di ampiezza monolatero è: $V(\omega) = \frac{|S(\omega)|}{\pi} = \frac{|\omega|}{\pi\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}} \quad \omega \geq 0$

- **Trasformata di Fourier di s(t) = x(t) sin(ω0t) con x(t) impulso rettangolare di durata τ**

Si esprime il seno come somma di due esponenziali complessi coniugati: $\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2j}$

$$s(t) = \frac{1}{2j}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2j}x(t)e^{-j\omega_0 t}$$

Si ottiene la trasformata del segnale:

$$S(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt = \frac{1}{2}x(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}x(\omega+\omega_0)$$

Prendendo il valore della trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare: $X(\omega) = I\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$

$$S(\omega) = \frac{1}{2j}I\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2\pi}\right) + \frac{1}{2j}I\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2\pi}\right)$$

Si ottiene lo spettro di ampiezza monolatero: $V(\omega) = \frac{|S(\omega)|}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left|I\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2\pi}\right)\right| - \frac{1}{2\pi}\left|I\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2\pi}\right)\right|$