



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Fisica

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

**Il fondo stocastico di onde gravitazionali generato
da incontri ravvicinati di buchi neri: caratteristiche
generali e effetti di memoria.**

Candidato

Francesco Nicolini

Relatore

Dr. Giancarlo Cella

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Sommario	v
1 Introduzione	1
1.1 Onde gravitazionali: caratteristiche generali	1
1.1.1 Determinazione dell'equazione di Einstein linearizzata	1
1.1.2 Soluzioni dell'equazione di Einstein linearizzata	3
1.1.3 Proiezione nella gauge TT	4
1.1.4 Energia trasportata da un'onda gravitazionale	4
1.2 Sviluppo in multipoli	6
1.3 Onde gravitazionali: rivelazione	10
1.4 Fondi stocastici di origine astrofisica	13
1.5 Definizione di Ω_{GW}	14
2 Incontri iperbolici	17
2.1 Spettro energetico del singolo evento	17
2.2 Calcolo del rate	25
2.3 Calcolo di Ω_{GW}	27
2.4 Determinazione della funzione $f(m)$ noto Ω_{GW}	29
2.4.1 Inversione dell'integrale	30
3 Effetti di memoria	37
3.1 Introduzione agli sviluppi post-Newtoniani	37
3.2 Primo ordine PN	39
3.3 Equazioni di Einstein rilassate	42
3.4 L'approccio di Blanchet-Damour	44
3.4.1 Soluzione all'esterno della sorgente	44
3.4.2 Soluzione nella zona vicina	48
3.4.3 Confronto tra le soluzioni	51
3.4.4 Determinazione del campo radiativo all'infinito	53
3.4.5 Interpretazione fisica dei termini ereditari	58
3.5 Calcolo della potenza	60
4 Conclusioni	67
Elenco delle figure	69
Bibliography	71

Sommario

Il lavoro presentato all'interno di questa tesi verte sullo studio di alcune caratteristiche di un particolare fondo stocastico di onde gravitazionali di origine astrofisica. Un fondo astrofisico è prodotto da una sovrapposizione di onde gravitazionali generate da eventi statisticamente indipendenti: nel caso particolare l'evento considerato è l'incontro iperbolico tra due buchi neri. Questo può avvenire con un rate elevato all'interno di zone particolarmente dense degli aloni galattici.

Dopo una prima parte dedicata alla definizione di concetti chiave impiegati in questo genere di studi, viene mostrato un metodo per effettuare il calcolo dello spettro in frequenza dell'energia trasportata da tale fondo, a condizione di considerare il solo contributo lineare delle equazioni di Einstein.

Successivamente viene presentata un'introduzione all'effetto di "memoria", che appare quando si considerano anche contributi di ordine più elevato del primo nella risoluzione delle equazioni di Einstein, e la cui determinazione, dunque, prevede l'utilizzo di espansioni post-Newtoniane.

Questo effetto si manifesta con un contributo aggiuntivo allo spettro energetico del segnale in corrispondenza delle frequenze più basse. Deve il suo nome al fatto che è possibile notare una differenza nelle proprietà della metrica tra la fase che precede l'inizio dell'emissione di onde gravitazionali da parte della sorgente, e la fase che segue lo spegnimento di quest'ultima.

Inoltre si contraddistingue per la marcata dipendenza dalla storia evolutiva del sistema, in quanto gli eventi passati forniscono contributi maggiori rispetto a quelli più recenti. Si è quindi valutato il modo in cui lo spettro del fondo varia tenendo conto di tale effetto.

Infine è stato sviluppato un algoritmo in grado di invertire la relazione che associa la densità spettrale di energia, una grandezza che si suppone possa essere direttamente osservata in un futuro prossimo, e la densità numerica di buchi neri per unità di massa. Tale inversione permette di sfruttare la conoscenza della prima quantità per ottenere informazioni sulla seconda.

Per l'inversione si è impiegato un approccio numerico, basato sulla discretizzazione delle quantità di interesse, oltre che sull'utilizzo di procedure di minimizzazione e della tecnica di decomposizione in valori singolari.

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Onde gravitazionali: caratteristiche generali

In questa sezione si presentano alcuni aspetti fondamentali nello studio delle onde gravitazionali nel limite lineare, quali la loro determinazione e l'individuazione dell'energia da essi trasportata. Come riferimento fondamentale per tale trattazione, è stato utilizzato il primo capitolo del libro di Maggiore (Maggiore, 2008).

1.1.1 Determinazione dell'equazione di Einstein linearizzata

Per poter descrivere correttamente le onde gravitazionali, è necessario partire dalle equazioni di Einstein, equazioni cardine della relatività generale, che legano la metrica, ossia il tensore la cui perturbazione è trasportata dall'onda, e il tensore energia-impulso, il quale invece è direttamente connesso alle caratteristiche del sistema sorgente di tale segnale. Tali equazioni sono pari a

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, c è la velocità della luce nel vuoto, $G_{\mu\nu}$ è il tensore di Einstein, definito da

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.2)$$

dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, che dipende esclusivamente dalla metrica $g_{\mu\nu}$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ è la curvatura scalare e $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso. Usando l'identità di Bianchi si può dimostrare che $G_{\mu\nu}$ ha divergenza covariante nulla, quindi questo deve valere anche per $T_{\mu\nu}$.

L'equazione (1.1) risulta fortemente non lineare, dato che il tensore di Ricci dipende non linearmente dalla connessione

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \quad (1.3)$$

e quindi dalla metrica

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}) \quad (1.4)$$

Tuttavia, in alcune condizioni particolari, in particolare nel limite di campi gravitazionali poco intensi, è possibile effettuare una linearizzazione. A tal fine si effettua una scomposizione della metrica in due termini, uno corrispondente alla condizione non perturbata (nel nostro caso la metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$) e uno invece impiegato per descrivere la perturbazione lineare $h_{\mu\nu}$ e che si suppone molto piccolo ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$). Quindi, trascurando tutti gli ordini successivi, si può scrivere

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

La relatività generale è una teoria invariante per un qualsiasi cambiamento del sistema di coordinate, tuttavia, nel caso che si sta considerando, è necessario limitarsi alle trasformazioni che preservano la condizione $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, che si potranno scrivere nella forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (1.6)$$

con ξ^μ piccolo. Poiché partendo dalle regole generali di trasformazione della metrica

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x), \quad (1.7)$$

si ottiene al primo ordine in ξ^μ

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu), \quad (1.8)$$

Segue che è necessario richiedere che le derivate di ξ_μ siano dello stesso ordine di grandezza delle componenti della perturbazione $h_{\mu\nu}$.

È particolarmente conveniente, per ottenere le equazioni di Einstein linearizzate, effettuare un cambio di funzione, introducendo

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (1.9)$$

dove h è la traccia del tensore $h_{\mu\nu}$, definita dalla relazione

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

In approssimazione lineare in quest'ultima equazione, così come in quelle che seguiranno, è sufficiente utilizzare la metrica di Minkowski per alzare e abbassare gli indici.

Si può ora procedere con la determinazione delle equazioni di Einstein linearizzate, effettuando uno sviluppo dell'equazione (1.1) e considerando esclusivamente i termini di ordine lineare,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} \simeq -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

dove \square indica l'operatore di d'Alembert dello spazio piatto. Tale equazione può essere ulteriormente semplificata mediante la trasformazione riportata in equazione (1.6), in particolare, è possibile scegliere il vettore ξ^μ in modo tale che sia verificata la condizione

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (1.12)$$

che identifica la gauge di Lorentz. Infatti, poiché il tensore $\bar{h}_{\mu\nu}$ trasforma come

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho), \quad (1.13)$$

ottenere un tensore $\bar{h}'_{\mu\nu}$ che soddisfi la (1.12), partendo da un $\bar{h}_{\mu\nu}$ qualsiasi, corrisponde a risolvere l'equazione per ξ^μ

$$\square \xi_\mu = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

per cui è sempre possibile individuare una soluzione, in quanto si tratta di un'equazione d'onda con un termine di sorgente. Utilizzando la condizione (1.12) nell'equazione (1.11), si ottiene quindi

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} \simeq -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.15)$$

che è anche essa un'equazione d'onda, e che è caratterizzata da una velocità di gruppo che è pari alla velocità della luce nel vuoto c .

1.1.2 Soluzioni dell'equazione di Einstein linearizzata

Le soluzioni sono degli oggetti tensoriali a due indici simmetrici e posseggono quindi un totale di dieci componenti. Tuttavia il numero di quelle effettivamente indipendenti è inferiore. Infatti è possibile sfruttare la libertà residua nella scelta della gauge (ossia della trasformazione di coordinate), per imporre ulteriori vincoli alla metrica e eliminare di conseguenza quei gradi di libertà che non possiedono alcun significato fisico, ma sono esclusivamente un effetto legato alla scelta del sistema di riferimento. In particolare, effettuando una trasformazione mediante un vettore ξ_μ con d'Alembertiano nullo, è possibile preservare la condizione (1.12) e non variare di conseguenza la forma dell'equazione (1.15), ed allo stesso tempo imporre altre quattro condizioni che devono essere soddisfatte dal tensore $\bar{h}_{\mu\nu}$.

Una scelta possibile. all'esterno della sorgente, è detta trasversale e a traccia nulla (o più semplicemente TT). Si ha

$$\bar{h}_{\mu 0} = 0, \quad \bar{h}^i_i = 0, \quad \partial^j \bar{h}_{ij} = 0, \quad (1.16)$$

Dato che $\bar{h} = 0$, il tensore $\bar{h}_{\mu\nu}$ risulta identico a $h_{\mu\nu}$.

Possiamo individuare una forma generica piuttosto semplice per le soluzioni monocromatiche dell'equazione (1.15), nello specifico, scegliendo le coordinate in modo tale che la direzione di propagazione dell'onda si a lungo quella di indice 3, si può scrivere

$$h_{ij}^{TT} = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \phi_+ \right] + h_\times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \phi_\times \right], \quad (1.17)$$

dove $t = x^0$, $z = x^3$, mentre h_+ e h_\times , gli unici gradi di libertà effettivi di un'onda gravitazionale, sono dette, rispettivamente, ampiezza della polarizzazione "più" e ampiezza della polarizzazione "croce".

1.1.3 Proiezione nella gauge TT

Frequentemente accade di individuare la forma di un'onda gravitazionale nella gauge di Lorentz, e non quindi direttamente in quella TT. In questo caso si introduce P_{ij} , il proiettore nel piano trasverso alla direzione di propagazione \hat{n} , tramite

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - n_i n_j, \quad (1.18)$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker, e a partire da questo si costruisce il tensore $\Lambda_{ij,kl}$ nel modo seguente

$$\Lambda_{ij,kl} \equiv P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}, \quad (1.19)$$

Questo è trasverso in ognuno dei quattro indici,

$$n^i \Lambda_{ij,kl} = n^j \Lambda_{ij,kl} = n^k \Lambda_{ij,kl} = n^l \Lambda_{ij,kl} = 0 \quad (1.20)$$

ed è a traccia nulla sia per la coppia (i, j) che per la coppia (k, l) . Vale inoltre $\Lambda_{ij,kl} = \Lambda_{kl,ij}$.

Date queste proprietà, è immediato dimostrare che se si applica tale tensore a una soluzione nella gauge di Lorentz, si ottiene subito il suo corrispondente nella gauge TT, quindi

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} \quad (1.21)$$

Infatti il tensore a due indici, presente a destra dell'uguale, risulta trasversale e a traccia nulla per costruzione.

1.1.4 Energia trasportata da un'onda gravitazionale

Per determinare quale sia l'energia trasportata da un'onda gravitazionale, è possibile studiare il modo in cui questa agisce sulla curvatura dello spazio-tempo di background. Tale approccio richiede di trattare quest'ultimo in modo più dinamico, rinunciando alla scomposizione presentata in equazione (1.5), che porterebbe ad interpretare una qualunque modifica della curvatura come una parte integrante dell'onda, senza consentirne dunque un'effettiva quantificazione, e utilizzando piuttosto una relazione del tipo

$$g_{\mu\nu} \simeq \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

dove $\bar{g}_{\mu\nu}$ è la metrica di background, definita in modo da non risultare necessariamente costante, e $h_{\mu\nu}(x)$ è tale per cui anche in questo caso valga la condizione $|h| \ll 1$.

Questa ridefinizione della perturbazione della metrica può comportare l'insorgere di alcune difficoltà nell'effettuare una distinzione tra ciò che è $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ e ciò che invece rientra in $h_{\mu\nu}(x)$, tuttavia esiste un modo semplice per risolvere questa problematica nel caso in cui risulti presente una marcata separazione di scale, a livello temporale o spaziale che sia, tra i due contributi alla metrica totale. A tal proposito si può prendere ad esempio il campo gravitazionale terrestre, il quale varia su tempistiche molto più ampie rispetto a quanto accade per le onde gravitazionali generate dalla coalescenza di

oggetti compatti; risulta quindi possibile effettuare una separazione tra quest'ultime e il background mediante una scomposizione di Fourier. La scomposizione della metrica in base a queste differenze di scala prende generalmente il nome di espansione ad onde corte e, nella trattazione che segue, si suppone che questa risulti applicabile.

Date queste premesse è ora possibile procedere con la determinazione del tensore energia impulso associato ad un'onda gravitazionale. Innanzitutto, calcolando la traccia dei due membri dell'equazione (1.1) si ottiene

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T, \quad (1.23)$$

ed utilizzando questa identità si può riscrivere la (1.1) nella forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (1.24)$$

dove T è la traccia di $T_{\mu\nu}$. Quindi si effettua un'espansione del tensore di Ricci in potenze della perturbazione $h_{\mu\nu}$, fino a considerare l'ordine quadratico, ossia

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (1.25)$$

È importante osservare come il termine che dipende esclusivamente dalla metrica del background, ossia $\bar{R}_{\mu\nu}$, vari, su una scala temporale o spaziale grande per costruzione, il termine lineare $R_{\mu\nu}^{(1)}$ invece su una scala piccola, mentre $R_{\mu\nu}^{(2)}$ contiene contributi di entrambe le tipologie; infatti, prendendo ad esempio delle onde monocromatiche, i termini quadratici $h_{\mu\nu}(f_1)h_{\rho\sigma}(f_2)$ contengono termini oscillanti a frequenze $f_1 + f_2$ (alte) ma anche $f_1 - f_2$ che possono essere basse.

Si può allora effettuare una scomposizione dell'equazione (1.24) in base alla scala di variazione, ottenendo

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{Low}} + \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right]^{\text{Low}} \quad (1.26)$$

e

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{High}} + \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right]^{\text{High}}. \quad (1.27)$$

Per riuscire ad operare tale separazione, è sufficiente calcolare il valore medio dei vari termini che compaiono in equazione (1.24) rispetto ad una scala che sia intermedia tra quella di $\bar{g}_{\mu\nu}$ e quella di $h_{\mu\nu}$. Tale operazione permette infatti di eliminare tutti i contributi che presentano una rapida variazione, lasciando invece sostanzialmente inalterati quelli più lenti, per cui la relazione (1.26) può essere riscritta come

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + \frac{8\pi G}{c^4} \left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right\rangle, \quad (1.28)$$

dove le parentesi angolari sono state utilizzate per indicare, a seconda dei casi, una media spaziale su molte lunghezze d'onda o una media temporale su diversi periodi. Si può ora

introdurre un tensore energia-impulso effettivo della materia $\bar{T}_{\mu\nu}$, mediante la seguente relazione

$$\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{T} \equiv \left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right\rangle, \quad (1.29)$$

dove \bar{T} è pari alla traccia di $\bar{T}_{\mu\nu}$; si può inoltre definire il tensore $t_{\mu\nu}$:

$$t_{\mu\nu} \equiv -\frac{c^4}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}R^{(2)} \right\rangle, \quad (1.30)$$

dove $R^{(2)}$ indica, analogamente a quanto fatto fino a questo momento, la traccia di $R_{\mu\nu}^{(2)}$, ossia $R^{(2)} = \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)}$. Sfruttando quindi il fatto che $\bar{g}^{\mu\nu}$ soddisfa l'uguaglianza

$$\bar{g}^{\mu\nu} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \langle \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle, \quad (1.31)$$

in quanto si tratta di un tensore che è per definizione lentamente variabile, si determina che la traccia di $t_{\mu\nu}$ è data da

$$t = \bar{g}^{\mu\nu} t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} \langle R^{(2)} \rangle, \quad (1.32)$$

e se si sostituisce l'equazione (1.32) nell'equazione (1.30) e si utilizza nuovamente la proprietà (1.31), si può infine scrivere

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \frac{8\pi G}{c^4}(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}), \quad (1.33)$$

la quale corrisponde all'equazione di Einstein per la metrica del background e in cui è possibile osservare come l'effetto sulla curvatura dovuto al passaggio di onde gravitazionali sia identico a quello associato ad un tensore energia-impulso, di conseguenza $t_{\mu\nu}$ viene interpretato come un tensore di tale tipologia.

La determinazione di quest'ultimo richiede di effettuare una serie di passaggi algebrici al fine di ricavare la forma esplicita di $R_{\mu\nu}^{(2)}$; successivamente quindi, utilizzando la gauge di Lorentz per $h_{\mu\nu}$, con l'aggiunta della condizione $h = 0$, e approssimando la metrica del background con $\eta_{\mu\nu}$, in quanto si è interessati a studiare la propagazione ad elevate distanze dalla sorgente, risulta possibile eliminare tutti gli effetti dovuti esclusivamente alla scelta del sistema di riferimento e individuare, di conseguenza, quelli realmente fisici. Procedendo in tale modo si ottiene quindi

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle. \quad (1.34)$$

1.2 Sviluppo in multipoli

Analogamente a quanto viene fatto nel caso dell'elettromagnetismo, è conveniente riscrivere le soluzioni delle equazioni linearizzate di Einstein sotto forma di sviluppi in multipoli. In questo modo, troncando lo sviluppo fino all'ordine desiderato, risulta più semplice ottenere una forma approssimata per il campo $h_{\mu\nu}$.

Innanzitutto, è conveniente introdurre una notazione che tornerà molto utile nei passaggi matematici che seguiranno. Questa, suggerita per la prima volta da Blanchet e Damour (Blanchet e Damour, 1989), prevede di utilizzare delle lettere maiuscole per scrivere in modo più compatto un tensore con un numero elevato di indici; in particolare, se quest'ultimo ne possiede l diversi ($i_1 i_2 \dots i_l$) allora lo si può rappresentare nel modo seguente

$$F_L \equiv F_{i_1 i_2 \dots i_l}. \quad (1.35)$$

Si ha anche la possibilità di scrivere tensori con indici minuscoli e indici maiuscoli, ad esempio la scrittura F_{iL} è equivalente a $F_{i i_1 i_2 \dots i_L}$, oltre a quella di utilizzare i simboli ∂_L e x_L , corrispondenti, rispettivamente, a $\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_L}$ e a $x_1 x_2 \dots x_L$. Si introduce poi l'utilizzo di parentesi tonde intorno agli indici, per indicare un'operazione di simmetrizzazione su di essi, per cui, sempre a titolo di esempio, si ha che $F_{(i_1 i_2)} \equiv (1/2)(F_{i_1 i_2} + F_{i_2 i_1})$, e di un accento circonflesso al di sopra del nome di un tensore (\hat{F}_L), per indicare che si è simmetrizzato su tutti i suoi indici e sono state poste a zero tutte le sue tracce. Quest'ultima operazione può essere indicata, per un numero limitato di indici, mediante l'introduzione di parentesi angolate intorno agli indici del tensore ($F_{\langle L \rangle}$).

Un altro ingrediente fondamentale è rappresentato dai tensori STF ("symmetric-trace-free"). Un tensore STF con l indici possiede un numero di componenti indipendenti pari a $2l + 1$ e si può dimostrare che quest'ultimo risulta essere una rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni $SO(3)$ di dimensione $2l + 1$. Si ha inoltre che le rappresentazioni irriducibili del gruppo in questione sono identificate da un numero intero positivo l e che possiedono una dimensione corrispondente pari anche essa a $2l + 1$. Unendo queste due informazioni si ricava che un set di tensori STF, che comprenda ogni possibile valore per il numero di indici, costituisce una rappresentazione completa del gruppo $SO(3)$.

In effetti è possibile verificare come ogni tensore possa essere scomposto nella somma di tensori STF. Ad esempio, nel caso più semplice da trattare, per un qualunque tensore a due indici B_{ij} si ha innanzitutto la possibilità di scomporlo in una parte totalmente simmetrica e in una parte completamente antisimmetrica

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (B_{ij} + B_{ji}) + \frac{1}{2} (B_{ij} - B_{ji}) \equiv S_{ij} + A_{ij}. \quad (1.36)$$

Introducendo il vettore $A_k \equiv \varepsilon_{ijk} A_{ij}$, dove ε_{ijk} è il tensore di Levi-Civita, e indicando con S la traccia di S_{ij} , si ottiene

$$B_{ij} = \frac{1}{3} S \delta_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_k + \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S \delta_{ij} \right) \quad (1.37)$$

in cui a destra dell'uguale compaiono esclusivamente tensori STF, ossia S , A_k e $S_{ij} - (1/3)S\delta_{ij}$.

L'equazione linearizzata di Einstein è un'equazione d'onda con un termine di sorgente, di conseguenza, la sua soluzione può essere scritta in forma integrale come

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right). \quad (1.38)$$

Al di fuori della sorgente, in cui $T_{\mu\nu} = 0$, l'equazione assume la forma

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (1.39)$$

e la soluzione più generale possibile può essere scritta come

$$\bar{h}^{00}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_L \left[\frac{F_L(t - r/c)}{r} \right], \quad (1.40)$$

$$\bar{h}^{0i}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_L \left[\frac{G_{iL}(t - r/c)}{r} \right], \quad (1.41)$$

$$\bar{h}^{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_L \left[\frac{H_{ijL}(t - r/c)}{r} \right], \quad (1.42)$$

dove $r = |\mathbf{x}|$. Si tratta della soluzione più generale possibile poiché ogni termine della sommatoria soddisfa da solo la relazione (1.39), inoltre un set costituito da tensori con tutti i possibili numeri di indici, costituisce una rappresentazione completa del gruppo delle rotazioni poiché, come si è osservato, ogni tensore può essere scomposto come la somma di tensori STF.

Comparando le due diverse soluzioni (la prima delle quali vale in ogni punto dello spazio e quindi anche al di fuori della sorgente), si ottiene

$$F_L(u) = \int d^3 y \hat{y}_L \int_{-1}^1 dz \delta_l(z) T_{00} \left(u + z \frac{|\mathbf{y}|}{c}, \mathbf{y} \right), \quad (1.43)$$

$$G_{iL}(u) = \int d^3 y \hat{y}_L \int_{-1}^1 dz \delta_l(z) T_{0i} \left(u + z \frac{|\mathbf{y}|}{c}, \mathbf{y} \right), \quad (1.44)$$

$$H_{ijL}(u) = \int d^3 y \hat{y}_L \int_{-1}^1 dz \delta_l(z) T_{ij} \left(u + z \frac{|\mathbf{y}|}{c}, \mathbf{y} \right), \quad (1.45)$$

dove u è il tempo ritardato ed è pari a $t - r/c$. La funzione δ_l è definita come

$$\delta_l(z) = \frac{(2l+1)!!}{2^{l+1}l!} (1 - z^2)^l, \quad (1.46)$$

e soddisfa le due proprietà

$$\int_{-1}^1 dz \delta_l(z) = 1 \quad (1.47)$$

e

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \delta_l(z) = \delta(z), \quad (1.48)$$

dove $\delta(z)$ è la delta di Dirac. L'integrazione in dz corrisponde ad effettuare una media temporale pesata in modo differente per ogni termine del multipolo e deriva dal differente ritardo temporale che si ha per la radiazione emessa in punti diversi della sorgente. L'equazione (1.48) mostra come tale ritardo sia trascurabile quando l è sufficientemente grande.

Sebbene sia stato possibile individuare i vari termini dello sviluppo in multipolo questi non sono sotto forma di tensori STF, infatti si ha che i tensori $G_{iL}(u)$ risultano simmetrici e a traccia nulla per gli indici $i_1 \dots i_l$, in quanto la dipendenza da questi si manifesta esclusivamente nel termine \hat{y}_L , ma non per scambi che coinvolgano l'indice i . Si può allora effettuare una scomposizione in tensori STF nel modo seguente

$$G_{iL} = U_{iL} + \frac{l}{l+1} \varepsilon_{ai\langle i_l} C_{L-1\rangle a} + \frac{2l-1}{2l+1} \delta_{i\langle i_l} D_{L-1\rangle} \quad (1.49)$$

dove $U_{iL} \equiv G_{\langle L+1\rangle}$, $C_L \equiv G_{ab\langle L-1} \varepsilon_{i_l\rangle ab}$ e $D_{L-1} \equiv G_{aaL-1}$. Si procede quindi analogamente per H_{ijL} e infine si effettua una trasformazione di gauge (mantenendo comunque la condizione $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$) così da eliminare la dipendenza da alcuni termini in \bar{h}^{0i} e \bar{h}^{ij} facendone comparire degli altri in \bar{h}^{00} . Il risultato finale è

$$\bar{h}^{00}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_L \left[\frac{M_L(u)}{r} \right], \quad (1.50)$$

$$\bar{h}^{0i}(t, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{c^3} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_{L-1} \left[\frac{M_{iL-1}^{(1)}(u)}{r} + \frac{l}{l+1} \varepsilon_{iab} \partial_a \left(\frac{S_{bL-1}(u)}{r} \right) \right], \quad (1.51)$$

$$\bar{h}^{0i}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \sum_{l=2}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_{L-2} \left[\frac{M_{ijL-2}^{(2)}(u)}{r} + \frac{2l}{l+1} \partial_a \left(\frac{\varepsilon_{ab(i} S_{j)bL-2}^{(1)}(u)}{r} \right) \right], \quad (1.52)$$

Nelle equazioni appena mostrate si è utilizzata una particolare convenzione per indicare l'operazione di derivazione rispetto ad u : data una funzione qualsiasi $F(u)$, la sua derivata n -esima si scrive come $F^{(n)}(u)$.

Introducendo la densità di massa gravitazionale attiva \varkappa e la densità di corrente di massa attiva \varkappa_i , rispettivamente come

$$\varkappa \equiv \frac{1}{c^2} (T^{00} + T^{ii}) \quad (1.53)$$

e

$$\varkappa_i \equiv \frac{1}{c} T^{0i}, \quad (1.54)$$

e, per uniformare la notazione, usando $\varkappa_{ij} \equiv T^{ij}$, è possibile scrivere gli elementi delle due famiglie di tensori M_L e S_L come

$$M_L(u) = \int d^3x \int_{-1}^1 dz \left\{ \delta_l(z) \hat{x}_L \varkappa - \frac{4(2l+1)\delta_{l+1}(z)}{c^2(l+1)(2l+3)} \hat{x}_{iL} \varkappa_i^{(1)} + \frac{2(2l+1)\delta_{l+2}(z)}{c^4(l+1)(l+2)(2l+5)} \hat{x}_{ijL} \varkappa_{ij}^{(2)} \right\} \left(u + z \frac{|\mathbf{x}|}{c}, \mathbf{x} \right), \quad (1.55)$$

$$S_L(u) = \int d^3x \int_{-1}^1 dz \varepsilon_{ab\langle i_l} \left\{ \delta_l(z) \hat{x}_{L-1\rangle a} \varkappa_b - \frac{(2l+1)\delta_{l+1}(z)}{c^2(l+2)(2l+3)} \hat{x}_{L-1\rangle ac} \varkappa_{bc}^{(1)} \right\} \left(u + z \frac{|\mathbf{x}|}{c}, \mathbf{x} \right). \quad (1.56)$$

1.3 Onde gravitazionali: rivelazione

I più sensibili rivelatori di onde gravitazionali sono attualmente di tipo interferometrico. Abbiamo in particolare i due rivelatori LIGO negli Stati Uniti (LIGO Scientific Collaboration et al., 2015) e il rivelatore VIRGO in Italia (Acernese et al., 2015) costituiti da due bracci ortogonali e identici di cui si misura costantemente la differenza di lunghezza. Infatti il transito di un'onda gravitazionale produce una differente variazione lungo direzioni ortogonali nel piano trasverso alla direzione della propagazione dell'onda. Si tratta di un effetto molto piccolo: il tipico ordine di grandezza per la variazione relativa di lunghezza è dell'ordine di

$$h = \frac{\Delta L}{L} \sim 10^{-21} \quad (1.57)$$

che è possibile comunque rivelare per interferenza.

Un interferometro infatti presenta al suo interno un fascio laser il quale viene inviato verso uno specchio semiriflettente e di conseguenza fatto propagare all'interno di entrambi i bracci. Alla fine di questi, sono disposti degli ulteriori specchi che fanno sì che i due fasci siano riflessi indietro, finendo per sovrapporsi nel punto in cui erano stati precedentemente separati. A questo punto quindi si misura l'interferenza così prodotta. Dal momento che il laser è attivo in modo continuo, è possibile registrare nel tempo il transito di un'onda gravitazionale, monitorando la differenza di fase tra i due fasci.

La connessione tra quanto si ottiene in uscita dall'interferometro $h(t)$ e la grandezza h_{ij} , che contiene il contributo alla metrica data dall'onda gravitazionale, è dato dalla relazione

$$h(t) = D^{ij} h_{ij}(t, \mathbf{x}_0) \quad (1.58)$$

$$D^{ij} = \frac{1}{2}(\hat{X}^i \hat{X}^j - \hat{Y}^i \hat{Y}^j), \quad (1.59)$$

dove \mathbf{x}_0 indica la posizione del centro del detector, mentre $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ sono i due versori che puntano nella direzione dei bracci del rivelatore (Allen e Romano, 1999).

Fino a questo punto non è stato ancora fatto alcun riferimento al rumore presente in ogni interferometro. Tale rumore, che chiameremo $n(t)$, viene descritto in termini statistici, in particolare si suppone almeno in prima approssimazione che sia Gaussiano, in quanto frutto della sovrapposizione di effetti diversi, stazionario, ossia che i parametri principali che lo definiscono siano costanti nel tempo, e non influenzato dal transito di un'onda gravitazionale.

Queste ipotesi non sono sempre verificate, ad esempio è possibile osservare in alcuni casi la comparsa di glitch, i quali comportano variazioni brusche nelle proprietà del rumore. Tuttavia fintanto che possono essere considerate valide, la funzione di correlazione di $n(t)$, nel dominio delle frequenze, soddisfa l'equazione

$$\langle \mathcal{F}(n)(f)^* \mathcal{F}(n)(f') \rangle = \delta(f - f') P_n(f), \quad (1.60)$$

dove la scrittura $\mathcal{F}(\dots)$ è utilizzata per indicare l'operatore trasformata di Fourier, mentre $P_n(f)$ rappresenta la densità spettrale del rumore, ossia la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione.

È già stato osservato come tale rumore non possa essere trascurato, infatti questo presenta delle ampiezze generalmente maggiori rispetto a quelle del segnale di interesse, tanto è che si è costretti ad effettuare l'analisi del segnale nel dominio delle frequenze, dove possono essere individuate delle finestre in cui è l'effetto delle onde gravitazionale ad essere più rilevante.

Data l'esistenza di questo rumore segue che nel caso in cui i rilevatori siano attraversati da un'onda gravitazionale, il segnale $s(t)$ in uscita da questi sarà dato dalla somma tra il contributo dovuti all'onda $h(t)$ e il rumore, per cui:

$$s(t) = h(t) + n(t) \quad (1.61)$$

Si può ora procedere con ad una descrizione semplificata delle tecniche impiegate per la rivelazione di onde gravitazionali.

Nel caso di un segnale prodotto da un evento singolo, è possibile ricorrere a due approcci distinti. Il primo si basa sull'effettuare un test di ipotesi per stabilire se è avvenuto o meno il passaggio di un'onda di questo tipo. Ciò quindi comporta l'uso di una statistica di test ottimale, che, in questo caso, prende il nome di "matched filter" χ e che è definita dalla relazione

$$\chi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}(s)(f)\mathcal{F}(h_{tpl})^*(f)}{P_n(f)} \quad (1.62)$$

dove h_{tpl} indica un template, ossia una forma d'onda precalcolata (Allen, Anderson et al., 2012).

I dati in uscita dal rivelatore sono continuamente testati, calcolando il "matched filter" per ognuno dei template disponibili, per poi confrontare il valore più grande che si è così ottenuto con un valore di soglia, che viene stabilito in modo da ottenere una buona probabilità di falso positivo. Qualora si abbia un superamento di tale soglia, si può affermare che il segnale è molto probabilmente dovuto al transito di un'onda gravitazionale.

I template utilizzati differiscono per alcuni parametri fondamentali, come ad esempio le masse degli oggetti che compongono il sistema e il loro spin. Questo approccio può essere impiegato per lo studio di qualsiasi evento di cui si possa prevedere con opportuna accuratezza la forma dell'onda gravitazionale prodotta.

La seconda strategia è invece quella della cosiddetta ricerca agnostica e si basa sull'effettuare una scomposizione del segnale in un'opportuna base ortonormale, per poi cercare una sovrabbondanza di potenza per qualcuno degli elementi di questa. Le ricerche agnostiche hanno il pregio di poter essere utilizzate anche in assenza di una teoria sviluppata per la descrizione del processo, tuttavia producono risultati generalmente peggiori rispetto alla ricerca tramite "matched filter".

Le onde gravitazionali frutto di un evento singolo non sono però le uniche esistenti. Si suppone infatti la presenza di fondi stocastici dati dalla sovrapposizione di segnali dovuti a sorgenti diverse e per i quali è necessario impiegare, almeno in alcuni casi che saranno specificati nella sezione successiva, delle tecniche di analisi differenti. In particolare si potrebbero riscontrare delle difficoltà nel distinguere il contributo dovuto a

tale fondo e il rumore tipico degli interferometri, in quanto tali grandezze posseggono proprietà statistiche simili e accade spesso che la seconda sia caratterizzata da intensità sensibilmente superiori.

In tali casi si combinano le misure di rivelatori differenti, cercando l'esistenza di possibili correlazioni tra di esse. In tale approccio, si effettuano una serie di ipotesi: a quelle già specificate per le proprietà statistiche di $n(t)$, si aggiunge la richiesta di indipendenza per i rumori caratteristici di rivelatori differenti, in quanto questi sono stati costruiti a distanze sufficientemente elevate gli uni dagli altri. Iniziando con il considerare il caso di due soli interferometri (Allen e Romano, 1999), si introduce la funzione di "cross correlation" S , definita come

$$S = \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t, t'), \quad (1.63)$$

dove $s_1(t) = h_1(t) + n_1(t)$ e $s_2(t) = h_2(t) + n_2(t)$ sono i segnali in uscita dai due interferometri, T è la lunghezza della finestra temporale di osservazione, mentre $Q(t, t')$ è una funzione di filtro che viene fissata in modo da massimizzare l'efficienza di rivelazione. Anche in questo caso si deve individuare una statistica di test, da massimizzare, e la scelta ricade sul rapporto segnale rumore SNR,

$$\text{SNR} = \frac{\mu_S}{\sigma_S}, \quad (1.64)$$

dove μ_S e σ_S sono rispettivamente la media e la deviazione standard di S .

Prima di presentare la forma esplicita di SNR, è necessario introdurre la "overlap reduction function" $\gamma(f)$. Questa funzione è utilizzata al fine di tenere conto della riduzione di sensibilità causata dal non allineamento dei bracci dei due rivelatori, e dal fatto che questi, trovandosi in punti della Terra distanti tra loro, saranno raggiunti dall'onda in istanti differenti. La diversa orientazione dei due detector fa sì che questi abbiano diverse sensibilità per le due polarizzazioni, mentre il ritardo nei tempi di arrivo causa una differenza nella fase del segnale raccolto, la quale, se compresa tra π e 2π , fa sì che in media si abbia un diverso segno per $h_1(t)$ e $h_2(t)$, con conseguente diminuzione di S . La funzione $\gamma(f)$ è pari a

$$\gamma(f) = \frac{5}{8\pi} \sum_{A=+, \times} \int d\hat{\mathbf{n}} e^{i2\pi f \hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta \mathbf{x}/c} F_1^A(\hat{\mathbf{n}}) F_2^A(\hat{\mathbf{n}}), \quad (1.65)$$

dove A è un indice per le due polarizzazioni dell'onda, $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie della sfera bidimensionale, $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ è il vettore che unisce i due detector, mentre le $F_i^A(\hat{\mathbf{n}})$, con $i = 1, 2$ sono le funzioni di risposta dei due rivelatori, ossia

$$F_i^A(\hat{\mathbf{n}}) = D_i^{kl} e_{kl}^A(\hat{\mathbf{n}}), \quad (1.66)$$

in cui e_{kl}^A è il tensore della polarizzazione A e D_i^{kl} è il "detector tensor" dell'interferometro i -esimo (equazione (1.59)).

Si può ora fornire la forma di SNR, dopo aver scelto la forma della funzione $Q(t, t')$ che consente di massimizzare tale statistica. Per ottenere tale rapporto segnale rumore

si ipotizza che il fondo di onde gravitazionali possa essere Gaussiano, non polarizzato, isotropo, stazionario e a media nulla, oltre che molto più piccolo in ampiezza del rumore, e così facendo si ottiene che:

$$\text{SNR} \approx \frac{3H_0^2}{10\pi^2} \sqrt{T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{\gamma^2(|f|) \Omega_{GW}^2(|f|)}{f^6 P_1(|f|) P_2(|f|)} \right]^{1/2}, \quad (1.67)$$

dove H_0 è il parametro di Hubble, $P_1(f)$ e $P_2(f)$ sono le densità spettrali dei rumori dei due interferometri, mentre $\Omega_{GW}(f)$ è una funzione direttamente connessa alla densità spettrale del fondo e che sarà meglio introdotta nella sezione 1.5. La generalizzazione al caso di un network di n detector è data da

$$\text{SNR} \approx \frac{3H_0^2}{10\pi^2} \sqrt{T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} df \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{\gamma_{ij}^2(|f|) \Omega_{GW}^2(|f|)}{f^6 P_i(|f|) P_j(|f|)} \right]^{1/2}, \quad (1.68)$$

dove γ_{ij} è la "overlap reduction function" della coppia di interferometri i, j (B. P. Abbott et al., 2016).

1.4 Fondi stocastici di origine astrofisica

Attualmente si ipotizza l'esistenza di due distinti tipi di fondi di onde gravitazionali: un primo derivante da una serie di fenomeni che hanno interessato le prime fasi di vita del nostro universo e per questo definito cosmologico, e un secondo, chiamato astrofisico, che è invece generato dalla sovrapposizione di una serie di segnali dovuti a sorgenti non risolte, a partire dall'inizio dell'attività stellare. Le sorgenti candidate per la formazione di quest'ultimo fondo sono numerose, ad esempio (Regimbau e Mandic, 2008)

- coalescenze di oggetti compatti o loro possibili incontri iperbolici;
- oscillazioni di stelle di neutroni di recente formazione che non essendo del tutto isotrope sono in grado di produrre delle onde gravitazionale tramite la loro rapida rotazione;
- collasso di stelle con elevate masse, tramite esplosioni di supernova;
- catture da parte di buchi neri supermassicci.

I fondi astrofisici possono possedere proprietà statistiche differenti, in base ai valori che assumono alcuni parametri fondamentali.

Un parametro importante, detto "duty cycle", è il rapporto tra la durata media del segnale di un singolo evento e la distanza temporale media che separa eventi successivi. Se quest'ultimo risulta superiore ad uno, allora si ha che fare con un fondo sostanzialmente continuo, che per il teorema del limite centrale, data l'indipendenza reciproca tra i vari segnali, può essere ben descritto mediante una statistica di tipo Gaussiano (Regimbau e Mandic, 2008).

Altre assunzioni che vengono usualmente fatte, almeno in prima approssimazione, riguardano l'assenza di polarizzazione, la stazionarietà, l'isotropia. Quest'ultima tuttavia è un'approssimazione più debole delle altre, in quanto è possibile riscontrare una maggiore abbondanza di galassie lungo direzioni specifiche, quali ad esempio quella che punta verso il superammasso della Vergine o verso il grande attrattore (Tania Regimbau, 2011). A partire da tali ipotesi si evince che la migliore strategia per analizzare tale tipologia di fondo, si basa sull'effettuare una "cross correlation" dei segnali prodotti da un certo numero di rivelatori differenti. In questo modo infatti è possibile distinguere il fondo dal rumore strumentale.

Quando il "duty cycle" assume valori molto più piccoli dell'unità, si ha che fare con una serie di segnali non sovrapposti e con una statistica sensibilmente diversa da quella Gaussiana. Le altre assunzioni continuano a rimanere valide, tuttavia, in questo caso, si ha la necessità di adottare tecniche di analisi differenti, nel dominio del tempo o delle frequenze, come ad esempio il "matched filtering".

L'ultima possibilità da considerare è infine quella in cui il "duty cycle" assume valori prossimi all'unità. In questo caso si ha ancora una sovrapposizione tra eventi differenti, tuttavia non sarebbe più corretto considerare il fondo Gaussiano. Si tratta di una situazione più complessa, oggetto di studio dal punto di vista delle tecniche di analisi (Drasco e Flanagan, 2003; Thrane, 2013).

In questo lavoro di tesi, si è posta particolare attenzione al caso di fondi dovuti a incontri iperbolici tra buchi neri, i quali possono verificarsi con rate elevati in ambienti particolarmente densi, come possono essere ad esempio i centri di cluster di tali oggetti. Date tali premesse, risulta dunque che questi fondi siano continui e Gaussiani e che la loro analisi si basa sulla "cross correlation" dei segnali in uscita da rivelatori diversi, (García-Bellido, Jaraba et al., 2022).

Nello studio effettuato, si è analizzato il modo in cui gli effetti di memoria (descritti nel Capitolo 3) influenzano le proprietà del fondo, tuttavia si è partiti considerando esclusivamente i contributi all'ordine dominante nella descrizione di un'onda gravitazionale. Tale semplificazione permette di sviluppare più agevolmente la struttura matematica necessaria per questo genere di calcoli, la quale potrà poi essere impiegata anche per una trattazione che tenga conto di correzioni successive.

1.5 Definizione di Ω_{GW}

Un fondo stocastico Gaussiano è per ipotesi descritto completamente dalle sue correlazioni del secondo ordine. Partendo da una decomposizione in onde piane della forma

$$h_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_A \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d\hat{\Omega}_{\mathbf{n}} \tilde{h}^A(\omega, \mathbf{n}) \epsilon_{ij}^A(\mathbf{n}) e^{i\frac{\omega}{c}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \quad (1.69)$$

dove l'indice A corrisponde alla polarizzazione e $d\hat{\Omega}_{\mathbf{n}}$ indica l'elemento di angolo solido nella direzione \mathbf{n} . Le ampiezze $\tilde{h}^A(f, \mathbf{n})$ di tutte le possibili onde piane sono variabili stocastiche Gaussianche che parametrizzano il modello. La loro statistica è quindi

completamente definita da

$$\langle h^A(\omega, \mathbf{n}) h^B(\omega', \mathbf{n}')^* \rangle \equiv \mathcal{C}^{AB}(\omega, \omega', \mathbf{n}, \mathbf{n}') \quad (1.70)$$

Per un fondo stazionario, non polarizzato e isotropo possiamo semplificare ulteriormente questa espressione, ponendo

$$\mathcal{C}^{AB}(\omega, \omega', \mathbf{n}, \mathbf{n}') = 2\pi \delta^{AB} \delta(\omega - \omega') \frac{1}{4\pi} \delta^{(2)}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \frac{1}{2} S_h(\omega) \quad (1.71)$$

Per capire il significato della quantità S_h consideriamo il segnale stocastico misurato da un dato rivelatore. Questo è dato da

$$h(t) = D^{ij} h_{ij}(\mathbf{x}_R, t) \quad (1.72)$$

dove D^{ij} è il *detector tensor* introdotto precedentemente. La autocorrelazione temporale di questo segnale sarà

$$\begin{aligned} \langle h(t) h(t') \rangle &= \sum_{A,B} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int d\hat{\Omega}_{\mathbf{n}} \int d\hat{\Omega}_{\mathbf{n}'} D^{ij} D^{pq} \epsilon_{ij}^A(\mathbf{n}) \epsilon_{pq}^B(\mathbf{n}')^* \\ &\quad \times \langle \tilde{h}^A(\omega, \mathbf{n}) \tilde{h}^B(\omega', \mathbf{n}')^* \rangle e^{i\frac{\omega}{c}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct) - i\frac{\omega'}{c}(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{x} - ct')} \end{aligned} \quad (1.73)$$

Se adesso inseriamo la definizione in (1.70) troviamo

$$\begin{aligned} \langle h(t) h(t') \rangle &= \sum_{A,B} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int d\hat{\Omega}_{\mathbf{n}} \int d\hat{\Omega}_{\mathbf{n}'} D^{ij} D^{pq} \epsilon_{ij}^A(\mathbf{n}) \epsilon_{pq}^B(\mathbf{n}')^* \\ &\quad \times 2\pi \delta(\omega - \omega') \frac{1}{4\pi} \delta^{(2)}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \frac{1}{2} S_h(\omega) e^{i\frac{\omega}{c}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct) - i\frac{\omega'}{c}(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{x} - ct')} \\ &= \frac{1}{2} \sum_A \int \frac{d\hat{\Omega}_{\mathbf{n}}}{4\pi} D^{ij} D^{pq} \epsilon_{ij}^A(\mathbf{n}) \epsilon_{pq}^A(\mathbf{n})^* \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \end{aligned} \quad (1.74)$$

Se il fondo stocastico è stazionario, la correlazione temporale dipenderà solo da $\tau = t - t'$. Inoltre la sua trasformata di Fourier rispetto a tale variabile è la correlazione spettrale. Abbiamo quindi

$$C_{hh}(\omega) = \left(\frac{1}{2} \sum_A \int \frac{d\hat{\Omega}_{\mathbf{n}}}{4\pi} D^{ij} D^{pq} \epsilon_{ij}^A(\mathbf{n}) \epsilon_{pq}^A(\mathbf{n})^* \right) S_h(\omega) \quad (1.75)$$

Utilizzando la (1.65) e la (1.59) vediamo che la correlazione spettrale tra i dati misurati $C_{hh}(\omega)$ è proporzionale al prodotto dello spettro di potenza $S_h(\omega)$ del segnale e la "overlap reduction function" $\gamma(\omega)$.

Per valutare l'intensità di un fondo statistico, generalmente si introduce la quantità adimensionale Ω_{GW} , definita come

$$\Omega_{\text{GW}} = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \ln f} \quad (1.76)$$

dove ρ_{GW} è la densità di energia del fondo, mentre ρ_c è la densità critica, che distingue tra un universo aperto ed un universo chiuso e che è pari a

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G}. \quad (1.77)$$

La funzione Ω_{GW} è strettamente legata alla funzione $S_h(f)$ dalla relazione

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{8\pi^3}{3H_0^2} f^3 S_h(f) \quad (1.78)$$

la quale quindi fornisce una tecnica di misurazione per Ω_{GW} (Allen e Romano, 1999).

Ω_{GW} può essere calcolata andando a sommare il contributo dovuto ad ognuno dei diversi eventi che si verificano nell'universo, in base alla loro distanza dall'osservatore (valutata tramite il redshift z). Tale contributo è rappresentato dalla funzione $dE_{GW}^{\text{oss}}/d \ln f^{\text{oss}}$, ossia dall'energia per unità di frequenza nel sistema di riferimento dell'osservatore, la quale, a causa dell'espansione dell'universo, assumerà un valore differente nel sistema di riferimento della sorgente, in cui risulta più semplice da determinare. Si deve quindi individuare una relazione che consenta di passare agevolmente da un sistema all'altro. Per fare ciò si può osservare che l'energia trasportata da un'onda gravitazionale trasforma, in base alla metrica di FLRW, come $E_{GW}^{\text{oss}} = E_{GW}/(1+z)$; la frequenza varia esattamente nel medesimo modo e, poiché si tratta di una trasformazione lineare, il differenziale del logaritmo di quest'ultima è lo stesso nei due sistemi di riferimento. Da tali considerazioni si può quindi concludere il seguente risultato:

$$\frac{dE_{GW}^{\text{oss}}}{d \ln f^{\text{oss}}} = \frac{1}{(1+z)} \frac{dE_{GW}}{d \ln f} \quad (1.79)$$

e si può quindi scrivere:

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{\rho_c} \int_0^\infty \frac{N(z)}{1+z} \frac{dE_{GW}}{d \ln f} dz, \quad (1.80)$$

dove $N(z)$ è il rate di incontri iperbolici tra buchi neri.

Capitolo 2

Incontri iperbolici

All'interno di questo capitolo sarà inizialmente calcolata l'andamento di Ω_{GW} al variare della frequenza, andando a considerare un fondo di onde gravitazionali prodotte da incontri iperbolici tra buchi neri. In una seconda parte sarà quindi presentato un metodo per poter risalire ad alcune proprietà della popolazione di tali oggetti, a partire da un'eventuale misura di Ω_{GW} .

Nella trattazione che segue si sono considerati esclusivamente i contributi Newtoniani alle onde gravitazionali, ossia quelli di ordine più basso. Una descrizione che tiene conto anche di correzioni successive è presentata nel Capitolo 3.

2.1 Spettro energetico del singolo evento

Una volta compreso quale sia il risultato finale che si vuole ottenere, si può procedere con la determinazione dei vari oggetti che compaiono nell'equazione (1.80), iniziando con lo spettro energetico del singolo evento. Le informazioni contenute in questa sezione sono state ottenute da (García-Bellido e Nesseris, 2018) e (De Vittori, 2015). Si è considerato, a tal proposito, un sistema di due buchi neri con massa m_1 e m_2 rispettivamente, con una velocità relativa asintotica v_0 e un parametro di impatto b . Supponendo che gli effetti della perdita di energia sotto forma di onde gravitazionali induca modifiche trascurabili sull'orbita e che le velocità in gioco siano non relativistiche, all'ordine dominante possiamo descrivere l'orbita per mezzo della meccanica newtoniana e pertanto, essendo il potenziale gravitazionale $\Phi(r)$ un potenziale centrale, concludere che il moto debba avere luogo su di un unico piano. In conseguenza a questo fatto possiamo scomporre il vettore velocità relativo nel sistema di riferimento comovente con il centro di massa \mathbf{v}_{rel} in due componenti, una tangenziale e una perpendicolare:

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\varphi}{dt} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.1)$$

e scrivere l'energia E e il momento angolare L in unità di massa nel modo seguente:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \Phi(r) \quad (2.2)$$

$$L = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.3)$$

Combinando insieme le equazioni (2.2) e (2.3) e cambiando variabile introducendo $u \equiv 1/r$ si ottiene:

$$\frac{2E}{L^2} = \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 + \frac{2\Phi(r)}{L^2} \quad (2.4)$$

ed osservando che nella trattazione classica della traiettoria sia l'energia che il momento angolare sono costanti del moto, segue che il termine a sinistra dell'uguale nell'equazione (2.4) risulta essere una costante; pertanto se si derivano entrambi i membri di tale equazione rispetto ad u e si sfrutta una relazione che discende immediatamente dal modo in cui le derivate trasformano per cambiamento di variabile, ossia:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{d\varphi}{du} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = 2 \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} = 2 \frac{d^2u}{d\varphi^2}, \quad (2.5)$$

si ottiene il seguente risultato:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{1}{L^2} \frac{d\Phi}{du} = \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{GM}{L^2} = 0, \quad (2.6)$$

dove M è la massa totale del sistema. L'equazione (2.6) è un'equazione differenziale del secondo ordine con coefficienti costanti, dunque la soluzione più generale possibile è data dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea (una sinusoidale) più una soluzione particolare (è facile verificare che $u = GM/L^2$ verifica la (2.6)), pertanto si ha che:

$$u = B \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM}{L^2}, \quad (2.7)$$

dove B è una costante, mentre φ_0 è l'angolo nel periastro. Per determinare la traiettoria è quindi sufficiente individuare r , noto u , e imporre le condizioni iniziali in modo tale da fissare il valore di B , in questo modo si ricava che:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (2.8)$$

dove a è il semi asse maggiore, legato alla velocità asintotica dalla relazione $a = (GM)/v_0^2$, e è l'eccentricità. Per determinare la legge oraria nel centro di massa è conveniente cambiare parametrizzazione. Scegliamo anzitutto $\varphi_0 = 0$ nella (2.8) in modo che l'asse dell'iperbole sia sull'asse x . Quindi passiamo dal tempo t a ξ mediante la relazione:

$$t(\xi) = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (e \sinh \xi - \xi) \quad (2.9)$$

dove μ è la massa ridotta del sistema, ossia $\mu = m_1 m_2 / M$ e α è il prodotto tra G , M e μ . Calcolando il differenziale di tale equazione è possibile convertire la derivata rispetto t che compare nell'equazione (2.3) in una derivata rispetto ξ . Si ottiene così la funzione $\varphi(\xi)$ che se sostituita nell'equazione (2.8) permette di determinare la funzione $r(\xi)$:

$$r(\xi) = a(e \cosh \xi - 1) \quad (2.10)$$

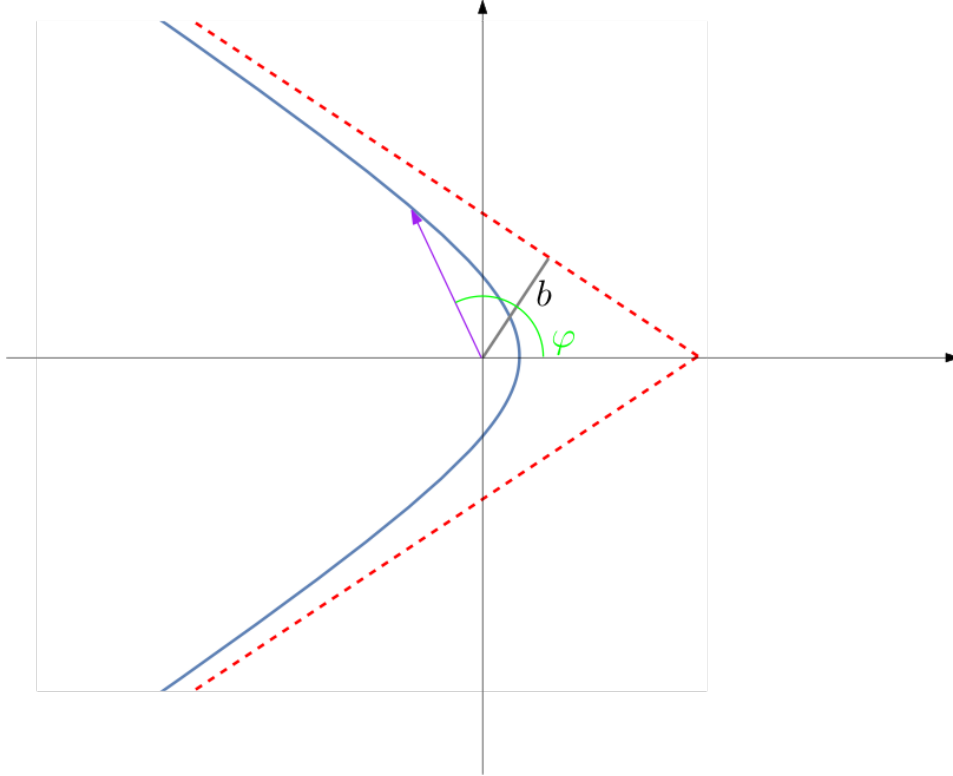


Figura 2.1: Esempio di orbita iperbolica. La parametrizzazione scelta è quella in Equazione (2.8) con $\varphi_0 = 0$ e si è indicato il parametro d'urto b .

e sfruttando il fatto che, in base alla definizione di coordinate polari vale $x = r \cos \varphi$ e $y = r \sin \varphi$, se si passa a coordinate cartesiane si ottiene:

$$x(\xi) = a(e - \cosh \xi), \quad (2.11)$$

$$y(\xi) = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh \xi. \quad (2.12)$$

Ricavata la traiettoria percorsa nel centro di massa si può procedere alla determinazione dello spettro energetico. Per il grado di approssimazione a cui si è interessati in questo primo esempio, è possibile ottenere la potenza emessa $P_{GW}(t)$ utilizzando la formula del quadrupolo di Einstein, per cui vale:

$$P_{GW}(t) = \frac{G}{45c^5} \langle \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{ij} \rangle, \quad (2.13)$$

dove gli apici a forma di punto indicano una derivata temporale, le parentesi angolate indicano un valore medio su diversi periodi dell'onda e M_{ij} è il tensore di quadrupolo definito dalle seguenti relazioni (per comodità usiamo una definizione di M_{ij} che differisce da quella più comune per un fattore 3):

$$M_{ij} = 3D_{ij} - \delta_{ij} D_{kk}, \quad (2.14)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{c^2} \int T^{00} x_i x_j d^3x. \quad (2.15)$$

La determinazione di tale tensore può essere effettuata agevolmente, in quanto, al primo ordine, l'unico contributo a T^{00} è dato dalla densità di materia, e questa, approssimando i due buchi neri a oggetti puntiformi, è pari ad una combinazione lineare di δ di Dirac. Effettuando allora tale sostituzione in equazione (2.15), e sfruttando le relazioni (2.11) e (2.12), si ricava che le uniche componenti non nulle di M_{ij} sono

$$M_{11}(t) = \frac{\mu a^2}{2} \left((3 - e^2) \cosh 2\xi(t) - 8e \cosh \xi(t) \right), \quad (2.16)$$

$$M_{12}(t) = \frac{3\mu a^2}{2} \sqrt{e^2 - 1} (2e \sinh \xi(t) - \sinh 2\xi(t)), \quad (2.17)$$

$$M_{22}(t) = \frac{\mu a^2}{2} \left((2e^2 - 3) \cosh 2\xi(t) + 4e \cosh \xi(t) \right), \quad (2.18)$$

$$M_{33}(t) = -\frac{\mu a^2}{2} \left(e^2 \cosh 2\xi(t) + 4e \cosh \xi(t) \right). \quad (2.19)$$

e l'equazione (2.13) può quindi essere riscritta come

$$P_{GW}(t) = \frac{G}{45c^5} \left(\ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 2\ddot{M}_{12}^2 + \ddot{M}_{33}^2 \right). \quad (2.20)$$

In figura 2.2 è riportato il grafico della potenza emessa in funzione del tempo, scegliendo $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = 1M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. Definendo la durata caratteristica del processo come il tempo richiesto perché avvenga l'emissione del 99% dell'energia totale, si ottiene che questo risulta pari a circa 4000s nel caso da noi considerato.

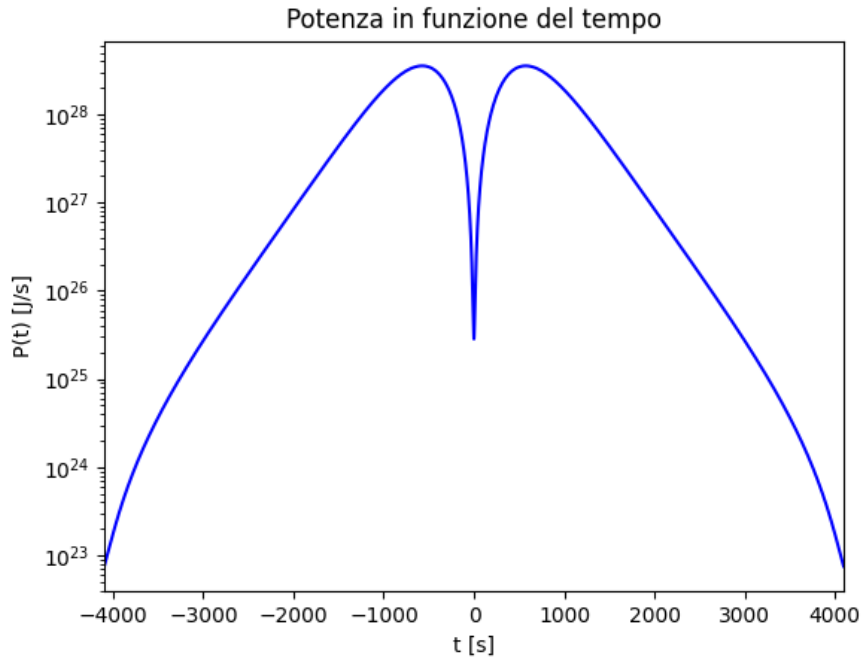


Figura 2.2: Potenza di un singolo evento con $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = 1M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportata tale potenza, mentre su quello delle ascisse il tempo.

È possibile osservare come il processo sia caratterizzata da una durata temporale di diverse migliaia di secondi. Volendo offrire una definizione per la Ad esempio il 99% dell'energia totale viene rilasciata in circa 4000s

Si può ora procedere con la determinazione dello spettro energetico $P_{GW}(f)$. Questo è definito come la quantità di energia emessa per unità di frequenza, e pertanto deve verificare una relazione del tipo

$$E_{GW} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{GW}(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} P_{GW}(f)df, \quad (2.21)$$

dove E_{GW} è l'energia totale emessa nel processo. Tale equazione permette quindi di individuare un legame tra tale funzione e $P_{GW}(t)$. In particolare, per poter determinare tale spettro, è necessario partire dagli integrali temporali dei vari termini presenti in equazione (2.13) e, sfruttando le proprietà delle trasformate di Fourier, convertire questi in integrali rispetto alla frequenza. Così facendo le funzioni integrande ottenute costituiranno i contributi da sommare per ottenere $P_{GW}(f)$.

Sfruttando il teorema di Parseval si ottiene

$$P_{GW}(f) = \frac{G}{45c^5} \left(\left| \mathcal{F}(\ddot{M}_{11}) \right|^2 + \left| \mathcal{F}(\ddot{M}_{22}) \right|^2 + 2 \left| \mathcal{F}(\ddot{M}_{12}) \right|^2 + \left| \mathcal{F}(\ddot{M}_{33}) \right|^2 \right), \quad (2.22)$$

dove la scrittura $\mathcal{F}(\dots)$ è utilizzata per indicare l'operazione di trasformata di Fourier, definita secondo la convenzione

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(A)(f) e^{-i2\pi ft} df. \quad (2.23)$$

Per il calcolo dei quattro oggetti che compaiono in equazione (2.22), si può innanzitutto utilizzare la proprietà

$$\mathcal{F}(\ddot{M}_{ij}) = i\omega^3 \mathcal{F}(M_{ij}), \quad (2.24)$$

inoltre si ha che le trasformate del seno iperbolico e del coseno iperbolico possono essere scritte in forma esplicita tramite le seguenti relazioni:

$$\mathcal{F}(\sinh \xi) = -\frac{\pi}{\omega e} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu e), \quad (2.25)$$

$$\mathcal{F}(\cosh \xi) = -\frac{\pi}{\omega} H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu e) \quad (2.26)$$

con $H_{\eta}^{(1)'}(x)$ dato da

$$H_{\eta}^{(1)'}(x) = \frac{1}{2} \left(H_{\eta-1}^{(1)}(x) - H_{\eta+1}^{(1)}(x) \right), \quad (2.27)$$

dove $H_{\eta}^{(1)}(x)$ è la funzione di Hankel del primo tipo e di ordine η ed è connessa alle funzioni di Bessel del primo ($J_{\eta}(x)$) e del secondo tipo ($Y_{\eta}(x)$) dalla relazione $H_{\eta}^{(1)}(x) = J_{\eta}(x) + Y_{\eta}(x)$, e dove $\nu \equiv \omega\nu_0$, con $\nu_0 \equiv \sqrt{a^3/(GM)}$.

Tramite le relazioni (2.25) e (2.26) si ottengono quindi i seguenti risultati per le trasformate

di Fourier delle componenti del tensore M_{ij} :

$$\mathcal{F}(M_{11})(f) = \frac{a^2 \mu \pi}{4 \omega} \left(16e H_{iv}^{(1)'}(i \nu e) + (e^2 - 3) H_{iv}^{(1)'}\left(\frac{i \nu e}{2}\right) \right), \quad (2.28)$$

$$\mathcal{F}(M_{12})(f) = -\frac{3 a^2 \mu \pi}{4 \omega e} \sqrt{e^2 - 1} \left(4e H_{iv}^{(1)}(i \nu e) - H_{iv}^{(1)}\left(\frac{i \nu e}{2}\right) \right), \quad (2.29)$$

$$\mathcal{F}(M_{22})(f) = -\frac{a^2 \mu \pi}{4 \omega} \left(8e H_{iv}^{(1)'}(i \nu e) - (3 - 2e^2) H_{iv}^{(1)'}\left(\frac{i \nu e}{2}\right) \right), \quad (2.30)$$

$$\mathcal{F}(M_{33})(f) = \frac{a^2 \mu \pi}{4 \omega} \left(8e H_{iv}^{(1)'}(i \nu e) + e^2 H_{iv}^{(1)'}\left(\frac{i \nu e}{2}\right) \right), \quad (2.31)$$

L'ultima operazione che rimane da compiere è sostituire le relazioni dalla (2.28) alla (2.31) nell'equazione (2.22) (sfruttando anche la proprietà mostrata nella equazione (2.24)). Così facendo si ottiene passando dalla variabile f alla variabile ν si ottiene per $P_{GW}(f)$:

$$P_{GW}(\nu) = \frac{4\pi^2 G^3 \mu^2 M^2}{45 a^2 c^5} \nu^4 F_e(\nu) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} F_e(\nu) = & \left| 3 \frac{e^2 - 1}{e} H_{iv}^{(1)'}(i \nu e) + \frac{i}{\nu} \frac{e^2 - 3}{e^2} H_{iv}^{(1)}(i \nu e) \right|^2 \\ & + \left| 3 \frac{e^2 - 1}{e} H_{iv}^{(1)'}(i \nu e) + \frac{i}{\nu} \frac{2e^2 - 3}{e^2} H_{iv}^{(1)}(i \nu e) \right|^2 \\ & + 18 \frac{e^2 - 1}{e^2} \left| \frac{1}{\nu} H_{iv}^{(1)'}(i \nu e) + i \frac{e^2 - 1}{e} H_{iv}^{(1)}(i \nu e) \right|^2 \\ & + \left| \frac{i}{\nu} H_{iv}^{(1)}(i \nu e) \right|^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Per valori elevati della frequenza e per piccole eccentricità, è possibile ottenere una formula più semplice per la funzione $F_e(\nu)$, in particolare, utilizzando le relazioni dalla (9.3.15) alla (9.3.20) in (Abramowitz e Stegun, 1964), si ricava

$$\nu^5 F_e(\nu) \simeq \frac{12 F(\nu)}{\pi y (1 + y^2)^2} e^{-2\nu q(y)}, \quad (2.34)$$

$$F(\nu) \equiv \nu^2 (1 - y^2 - 3\nu y^3 + 4y^4 + 9\nu y^5 + 6\nu^2 y^6), \quad (2.35)$$

$$q(y) \equiv y - \arctan y, \quad (2.36)$$

$$y \equiv \sqrt{e^2 - 1}. \quad (2.37)$$

Per concludere dunque, il termine $dE_{GW}/d \ln f$ che compare in equazione (1.80) risulta pari a

$$\frac{dE_{GW}}{d \ln f} = \frac{\nu}{\nu_0} \frac{dE_{GW}}{d\nu} = \frac{\nu}{\nu_0} P(\nu) = \frac{4\pi G^3 m_1^2 m_2^2}{45 a^2 c^5 \nu_0} \nu^5 F_e(\nu) \quad (2.38)$$

Nella figura 2.3 è riportato il grafico dello spettro energetico di un singolo evento, con la seguente scelta per i parametri: $e = 1,005$, $a = 1$ UA, $m_1 = 1M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. È possibile osservare come i contributi principali siano quelli relativi alle basse frequenze. Tale caratteristica deriva dal fatto che l'emissione di energia per incontri di questo tipo avviene con scale temporali dell'ordine di migliaia di secondi.

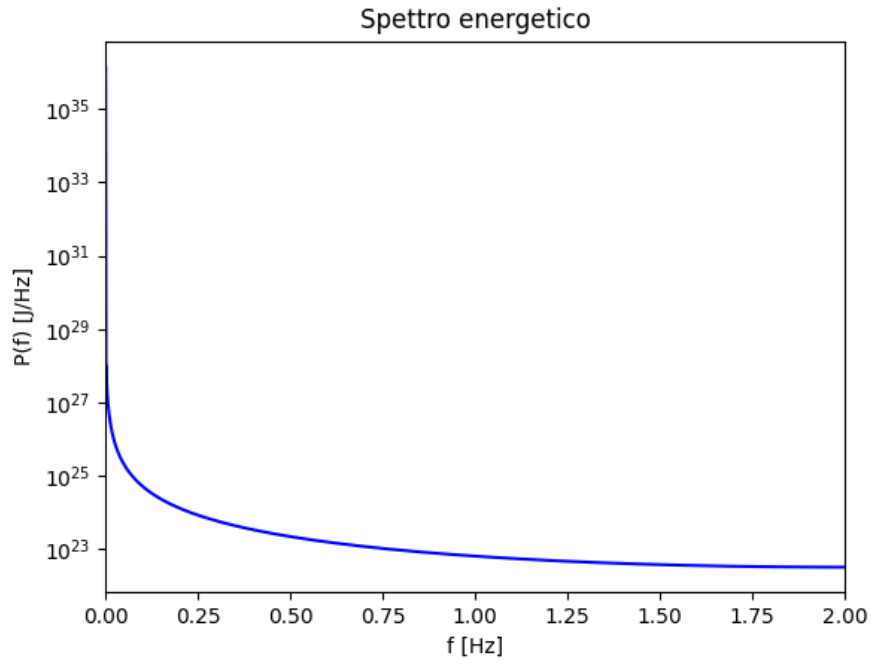


Figura 2.3: Spettro energetico di un singolo evento con $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = 1M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportato tale spettro energetico, mentre sull'asse delle ascisse la frequenza nel sistema di riferimento delle sorgente.

2.2 Calcolo del rate

Per il genere di studio da noi effettuato, è conveniente esprimere $N(z)$ in termini del rate di eventi per unità di tempo e volume comovente $\tau(z)$, in base alla relazione:

$$N(z) = \frac{\tau(z)}{(1+z)H(z)}, \quad (2.39)$$

ed esprimere quindi quest'ultimo, che è in generale funzione delle masse m_1 e m_2 dei due buchi neri coinvolti, in funzione del rate per intervallo logaritmico di massa, ossia:

$$\tau(z) = \iint \frac{dm_1}{m_1} \frac{dm_2}{m_2} \frac{d\tau}{d \ln m_1 d \ln m_2} \quad (2.40)$$

All'ordine dominante la traiettoria nel centro di massa del sistema può essere descritta per mezzo della meccanica newtoniana. Torniamo alla parametrizzazione generale della traiettoria data dalla Equazione (2.8), e selezioniamo la classe di traiettorie per le quali la direzione di arrivo per l'incontro è fissata. In questo caso abbiamo le relazioni tra i parametri b , M , v_0 , e :

$$\cos \varphi_0 = -\frac{1}{e}, \quad (2.41)$$

$$b = \frac{GM}{v_0^2} \sqrt{e^2 - 1} \quad (2.42)$$

dove b è il parametro di impatto. Utilizzando l'approssimazione di sfere rigide per i due buchi neri, si può impiegare b per effettuare una semplice stima della sezione d'urto di questo tipo di processo σ , per cui si ottiene che

$$\sigma = \pi b^2 = \pi \left(\frac{GM}{v_0^2} \right)^2 (e^2 - 1). \quad (2.43)$$

Si può quindi sfruttare la definizione di quest'ultima grandezza per concludere che il rate per un evento singolo τ_{one} può essere scritto come $\tau_{\text{one}} = \sigma v_{\text{BH}} n(m)$, dove $v_{\text{BH}} = v_0/\sqrt{2}$ e $n(m)$ è la densità numerica dei buchi neri all'interno di un cluster di tale corpi ed è legata alla densità di massa di questi $\rho(m)$, dalla relazione:

$$n(m) = \frac{d\rho(m)}{dm} \quad (2.44)$$

La velocità v_{BH} rappresenta una stima della velocità tipica di tali oggetti, infatti, per definizione, il modulo quadro della velocità relativa \mathbf{v}_{rel} è pari a:

$$|\mathbf{v}_{\text{rel}}|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 - 2|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|\cos\theta, \quad (2.45)$$

dove \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono le velocità dei due buchi neri che compongono il sistema, mentre θ è l'angolo compreso tra queste ultime. Dal momento che θ si può supporre distribuito in modo uniforme, se si media l'equazione (2.45) il termine proporzionale a $\cos\theta$ si annullerà,

inoltre è ragionevole supporre che esista una sola distribuzione per le velocità dei buchi neri e che per tanto risulta che il valore medio di $|\mathbf{v}_1|^2$ sia uguale al valore medio di $|\mathbf{v}_2|^2$. In base a queste considerazioni si può quindi scrivere che:

$$\langle |\mathbf{v}_{\text{rel}}|^2 \rangle = 2v_{BH}^2 \quad (2.46)$$

e osservando che asintoticamente $v_0^2 = \langle |\mathbf{v}_{\text{rel}}|^2 \rangle$, si può infine concludere:

$$v_{BH} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}. \quad (2.47)$$

Prima di procedere ulteriormente introduciamo la densità numerica media di buchi neri $\bar{\rho}_{DM}/m$, dove $\bar{\rho}_{DM} = \Omega_{DM}\rho_c$ è la densità di energia media della materia oscura, per cui si può porre $\Omega_{DM} \simeq 0.25$ (si è supposto che i buchi neri possano essere una componente dominante della materia oscura). Introducendo il contrasto di densità locale $\delta_{loc}(m)$, definito come il rapporto tra la densità di energia del cluster e la densità di energia media sempre di quest'ultimo, è quindi possibile scrivere:

$$n(m) = \frac{\delta_{loc}(m)\bar{\rho}_{DM}}{m} c^2. \quad (2.48)$$

Per determinare il rate totale per volume comovente è infine sufficiente moltiplicare τ_{one} per tale densità media, ottenendo:

$$\frac{d\tau}{d \ln m_1 d \ln m_2} = \frac{1}{\delta_{loc}} \sigma v_{BH} n(m_1) n(m_2) \quad (2.49)$$

In quest'ultimo conto non si è moltiplicato per $n(m)$ ma per $n(m)/\delta_{loc}$ dal momento che siamo interessati a considerare volumi più ampi di quelli che generalmente contengono i cluster di buchi neri primordiali (almeno in base alle previsioni attuali).

Un'altra grandezza utile da introdurre è la funzione logaritmica di massa dei buchi neri $f(m)$ definita dalla relazione

$$\int \frac{dm}{m} f(m) = f_{BH}. \quad (2.50)$$

Il parametro f_{BH} rappresenta il rapporto tra la densità di energia dei buchi neri e la densità di energia della materia oscura, per tanto, se si trascura il contributo dell'energia cinetica, essendo le velocità di tali corpi dell'ordine delle decine di km/s, è possibile individuare la seguente relazione:

$$f_{BH} = \frac{\Omega_{BH}}{\Omega_{DM}} = \frac{c^2}{\rho_c \Omega_{DM}} \int m n(m) dm; \quad (2.51)$$

questa può quindi essere combinata con l'equazione (2.50) per individuare un legame tra la densità numerica $n(m)$ e la funzione $f(m)$, ossia:

$$n(m) = \frac{\rho_c \Omega_{DM}}{c^2 m^2} f(m). \quad (2.52)$$

Sfruttando le equazioni (2.43), (2.49) e (2.52) è infine possibile scrivere il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d \ln m_1 d \ln m_2} &\approx 25.4 \cdot 10^{-8} \text{yr}^{-1} \text{Gpc}^{-3} h_{70}^4 \left(\frac{\Omega_{DM}}{0.25} \right)^2 \left(\frac{\delta_{loc}}{10^8} \right) \\ &\times \frac{f(m_1)}{m_1} \frac{f(m_2)}{m_2} \frac{M^2}{m_1 m_2} \frac{e^2 - 1}{(v_0/c)^3}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

dove h_{70} è un numero adimensionale che tiene conto dell'incertezza nella misura di H_0 tramite la relazione $H_0 = 70 h_{70} \text{ km/s/Mpc}$.

2.3 Calcolo di Ω_{GW}

Nelle sezioni precedenti sono stati ottenuti tutti i termini presenti nella relazione (1.80) (equazioni (2.38) e (2.53)) e per tanto è ora possibile procedere con il calcolo esplicito di Ω_{GW} . Al fine di trattare separatamente l'integrale nel redshift z , si introduce la funzione $I[y, x_0]$, nel modo seguente:

$$I[y, x_0] \equiv \frac{\pi}{12} \int_0^\infty dz \frac{\nu^5 F_e(\nu) H_0 \sqrt{\Omega_M}}{(1+z)^2 H(z)}, \quad (2.54)$$

dove $x_0 \equiv 2\pi\nu_0 f^{\text{oss}}$ e pertanto vale $\nu = x_0(1+z)$, e sfruttando il fatto che per un universo dominato dalla materia è possibile assumere $H(z) \simeq H_0 \sqrt{\Omega_M} (1+z)^{3/2}$ ed esplicitando la dipendenza della funzione $F_e(\nu)$ da ν e da y mediante l'equazione (2.34), si ottiene:

$$\begin{aligned} I[y, x_0] &\simeq \frac{\pi x_0^{5/2}}{12} \int_{x_0}^\infty d\nu \nu^{3/2} F_e(\nu) \\ &\simeq \frac{2x_0^2}{e^{2x_0 q(y)}} \left(\frac{1 - y^2 + 4y^4 + \frac{3}{2} \frac{x_0 y^6}{q(y)}}{y(1+y^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Dal momento che y è una funzione della sola eccentricità e e che x_0 è proporzionale ad f , segue che la funzione $I[y, x_0]$ nel limite di basse frequenza cresce come f^2 , raggiunge quindi un valore massimo per $x_0^{pic} \simeq 1/q(y)$ per poi decrescere all'infinito come un esponenziale (si noti infatti che la funzione $q(y)$ è sempre maggiore di zero per y maggiore di zero). Nel limite in cui y tende a zero, ossia l'eccentricità tende ad uno, è possibile approssimare la funzione $q(y)$ con il suo sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine non banale, per cui vale $q(y) \simeq y^3/3$; ciò ci permette di individuare una formula per il calcolo della frequenza corrispondente a x_0^{pic} :

$$f_{pic} = 4.3 H z \left(\frac{y}{0.01} \right)^{-3} \left(\frac{M}{2000 M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{1 \text{ AU}} \right)^{-3/2}. \quad (2.56)$$

Ridefinendo la funzione $I[y, x_0] = 2x_0^2 y^{-1} e^{-2x_0 q(y)} \tilde{I}[y, x_0]$ in modo tale che $\tilde{I}[y, x_0]$ sia dell'ordine dell'unità per frequenze piccole, è infine possibile ottenere una formula per Ω_{GW} :

$$\begin{aligned} \Omega_{GW}^{CHE}(f) \approx & 9.81 \times 10^{-12} h_{70} \left(\frac{\Omega_M}{0.3} \right)^{-1/2} \left(\frac{\Omega_{DM}}{0.25} \right)^2 \\ & \times \left(\frac{\delta_{loc}}{10^8} \right) \left(\frac{a}{1 \text{ AU}} \right) \left(\frac{f}{10 \text{ Hz}} \right)^2 \left(\frac{y}{0.01} \right) \\ & \times \iint \frac{dm_1}{1000 M_\odot} \frac{dm_2}{1000 M_\odot} f(m_1) f(m_2) e^{-2x_0 q(y)} \tilde{I}[y, x_0], \end{aligned} \quad (2.57)$$

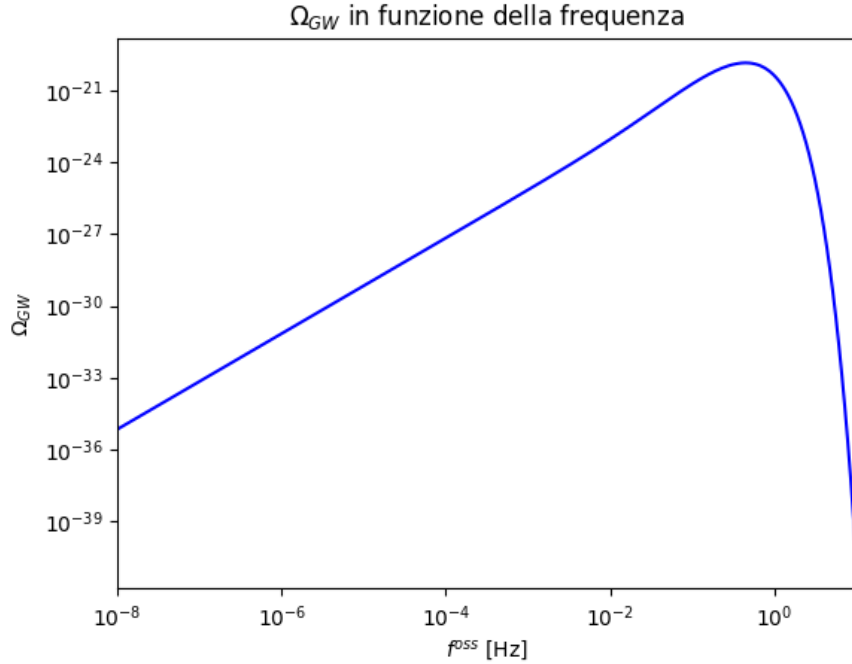


Figura 2.4: Ω_{GW} in funzione della frequenza nel sistema di riferimento dell'osservatore. Nel realizzarlo si è posto $e = 1.005$ e $a = 1 \text{ UA}$ e per la funzione $f(m)$ si optato per una Gaussiana con media $5M_\odot$ e deviazione standard $1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportata Ω_{GW} , mentre su quello delle ascisse la frequenza nel sistema di riferimento dell'osservatore.

Nella Figura 2.4 è riportato il grafico di Ω_{GW} in funzione della frequenza. Nel realizzarlo si è posto $e = 1.005$ e $a = 1 \text{ UA}$, con una distanza di minimo avvicinamento che è quindi pari a $r_{min} = 0.005 \text{ UA}$; inoltre per la funzione $f(m)$ si è scelta una forma Gaussiana, con media pari a $5M_\odot$ e deviazione standard uguale a $1M_\odot$. È possibile notare come la maggior parte dei contributi si presenti, anche in questo caso, a basse frequenze. Come già discusso, ciò è riconducibile alle durate temporali tipiche degli incontri iperbolici tra due buchi neri del tipo considerato.

2.4 Determinazione della funzione $f(m)$ noto Ω_{GW}

Quando i rivelatori di onde gravitazionali raggiungeranno sensibilità sufficientemente elevate da poter effettuare misure di Ω_{GW} , sarà possibile, mediante la relazione (2.57), determinare la forma della funzione $f(m)$. Per raggiungere tale risultato è innanzitutto conveniente introdurre la funzione $C(m_1, m_2, f)$

$$\begin{aligned} C(m_1, m_2, f) = & 9.81 \times 10^{-12} h_{70} \left(\frac{\Omega_M}{0.3} \right)^{-1/2} \left(\frac{\Omega_{DM}}{0.25} \right)^2 \\ & \times \left(\frac{\delta_{loc}}{10^8} \right) \left(\frac{a}{1 \text{ AU}} \right) \left(\frac{f}{10 \text{ Hz}} \right)^2 \left(\frac{y}{0.01} \right) \\ & \times \left(\frac{1}{1000 M_\odot} \right)^2 e^{-2x_0(m_1, m_2)q(y)} \tilde{I}[y, x_0(m_1, m_2)]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

che è pari alla funzione integranda in (2.57), esclusi $f(m_1)$ e $f(m_2)$.

Come è immediato verificare, questa funzione, dipende esclusivamente dalla frequenza e dalla somma delle due masse, in quanto x_0 è funzione di tale combinazione di m_1 e m_2 . Tale proprietà può essere quindi sfruttata per riscrivere la relazione in una forma più semplice, mediante un cambiamento di variabile nell'integrale doppio presente: se si sostituisce una delle due con la massa totale M e se si lascia la restante inalterata, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d m_1 d m_2 f(m_1) f(m_2) C(m_1, m_2, f) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d M C(M, f) \int_0^M d m_1 f(m_1) f(M - m_1) \end{aligned} \quad (2.59)$$

L'integrale rispetto a m_1 risulta pari al prodotto di convoluzione della funzione logaritmica di massa per se stessa, infatti, dal momento che $f(m)$ si può definire in modo che risulti nulla per valori negativi della massa, per $m_1 < 0$ $f(m_1)$ risulta nulla, e analogamente accade per $f(M - m_1)$ quando $m_1 > M$. Si definisce quindi la funzione $F(M)$

$$F(M) = \int_{-\infty}^{\infty} d m_1 f(m_1) f(M - m_1) = \int_0^M d m_1 f(m_1) f(M - m_1). \quad (2.60)$$

Se ora si considera come incognita da determinare la funzione $F(M)$, l'equazione (2.57) si può scrivere nella forma

$$\Omega_{GW}^{CH}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} d M F(M) C(M, f), \quad (2.61)$$

e il problema, prima quadratico, diviene lineare e quindi più semplice da trattare dal punto di vista numerico.

2.4.1 Inversione dell'integrale

Per poter applicare delle opportune tecniche numeriche necessarie per la risoluzione dell'equazione (2.61), si deve innanzitutto effettuare una discretizzazione dell'integrale in essa presente. Tale operazione è stata svolta mediante l'utilizzo della regola del trapezio, giudicata sufficientemente accurata nel caso da noi trattato. Innanzitutto è stato necessario limitarsi a un intervallo di integrazione di lunghezza finita $[M_0, M_{n-1}]$, scegliendo gli estremi in modo da poter trascurare eventuali contributi esterni (questa possibilità deriva dall'ipotesi che la funzione logaritmica di massa tenda abbastanza velocemente a zero al di fuori di tale intervallo). Si seleziona quindi una successione aritmetica di n valori pivotali M_i e così facendo si ricava

$$\int_{M_0}^{M_{n-1}} C(M, f) F(M) dM \approx \frac{\Delta M}{2} \left(C(M_0, f) F(M_0) + C(M_{n-1}, f) F(M_{n-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} C(M_i, f) F(M_i) \right). \quad (2.62)$$

dove ΔM è la differenza tra due elementi consecutivi della successione M_i .

Dal momento che sono stati scelti n valori per la massa totale, l'equazione ottenuta contiene n incognite indipendenti, ossia i valori che la funzione $F(M)$ assume in ogni elemento di tale successione. Sfruttando quindi la dipendenza residua dalla frequenza, è possibile costruire un sistema chiuso di equazioni uguali nella forma ma diverse nel valore scelto per tale grandezza. In particolare, con n frequenze diverse si ottiene

$$\begin{aligned} \Omega_{GW}^{CH}(f_0) &= \frac{\Delta M}{2} \left(C(M_0, f_0) F(M_0) + C(M_{n-1}, f_0) F(M_{n-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} C(M_i, f_0) F(M_i) \right) \\ \Omega_{GW}^{CH}(f_1) &= \frac{\Delta M}{2} \left(C(M_0, f_1) F(M_0) + C(M_{n-1}, f_1) F(M_{n-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} C(M_i, f_1) F(M_i) \right) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Omega_{GW}^{CH}(f_{n-1}) &= \frac{\Delta M}{2} \left(C(M_0, f_{n-1}) F(M_0) + C(M_{n-1}, f_{n-1}) F(M_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^{n-2} C(M_i, f_{n-1}) F(M_i) \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Tale sistema può poi essere riscritto come una relazione lineare che coinvolge due vettori e una matrice:

$$\underline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F} = \Omega_{\mathbf{GW}}, \quad (2.64)$$

dove $\underline{\mathbf{C}}$ è una matrice contenente i valori della funzione $C(M, f)$, calcolati per ogni combinazione di massa e frequenza, \mathbf{F} è il vettore contenente le incognite del problema, mentre $\Omega_{\mathbf{GW}}$ è un secondo vettore contenente i valori di Ω_{GW} per ogni valore della successione f_i .

Per quanto riguarda la scelta delle frequenze, è conveniente considerare i valori per cui la funzione Ω_{GW} risulta più significativa. In futuro ciò verrà effettuato mediante un'analisi dei dati raccolti su tale grandezza, nel nostro caso invece si è dovuto optare per una determinazione numerica di Ω_{GW} , basata su una scelta precisa per $f(m)$. Tale approccio presenta un secondo vantaggio. Infatti, oltre a conoscere quale sia la finestra in frequenza più rilevante, diviene nota la forma esatta di $f(m)$. Questa può quindi essere sfruttata per determinare l'efficacia dell'algoritmo costruito, effettuando un confronto con il risultato ottenuto al termine del processo.

Come ulteriore precisazione in merito alla scelta delle frequenze, si può considerare il fatto che la funzione Ω_{GW} assume valori significativi per diversi ordini di grandezza di f , ed è per tanto conveniente costruire la successione di valori di quest'ultima mediante una scala di tipo logaritmico.

Si vuole ora descrivere una delle maggiore complicazioni connesse alla realizzazione di tale algoritmo di inversione. Al fine di rendere la regola del trapezio un'approssimazione sufficientemente accurata, è necessario selezionare un valore elevato per n . Tuttavia un aumento di quest'ultimo comporta una riduzione della differenza tra gli elementi corrispondenti di due colonne limitrofe di $\underline{\mathbf{C}}$. Ciò si traduce a sua volta in una riduzione del determinante di quest'ultima, che tenderà ad assumere valori via via più vicini allo zero, e, in tali condizioni, effettuare un'inversione diretta dell'equazione (2.64), mediante il calcolo di $\underline{\mathbf{C}}^{-1}$, conduce all'ottenimento di risultati che deviano di numerosi ordini di grandezza da $f(m)$.

Per ovviare a ciò, si è deciso di sfruttare la scomposizione SVD, mediante la quale è possibile eguagliare $\underline{\mathbf{C}}$ ad un prodotto di tre altre matrici:

$$\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{B}}. \quad (2.65)$$

$\underline{\mathbf{A}}$ e $\underline{\mathbf{B}}$ sono delle matrici unitarie in generale diverse tra loro, mentre $\underline{\mathbf{D}}$ è una matrice diagonale $n \times n$ i cui elementi della diagonale principale sono detti valori singolari. È possibile effettuare la scomposizione in modo tale che questi siano disposti in ordine decrescente. Si procede quindi costruendo una nuova matrice $\hat{\underline{\mathbf{D}}}$, i cui primi elementi della diagonale principale risultino pari all'inverso dei valori singolari più significativi (si veda poi) posizionati in ordine crescente, mentre tutte le altre componenti vengono poste pari a zero. In questo modo si può ottenere una soluzione approssimata per il vettore \mathbf{F} tramite la relazione

$$\mathbf{F} = \underline{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \hat{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \Omega_{\mathbf{GW}} \quad (2.66)$$

Per determinare i valori singolari che forniscono il contributo maggiore si può effettuare la seguente operazione: partendo dal caso $r = 1$, si sommano i primi r valori singolari in senso decrescente e si calcola il rapporto tra quanto ottenuto e la somma totale di questi. Se il risultato di tale operazione risulta superiore ad una certa soglia, allora si seleziona un numero di valori singolari pari ad r , altrimenti si itera il processo dopo aver incrementato di 1 quest'ultimo. Il vantaggio di questo metodo risiede nel fatto che se si riesce ad effettuare una buona calibrazione della soglia per una particolare scelta di $f(m)$ (mediante confronto con la soluzione nota), questa poi, a meno di piccole modifiche, risulterà corretta anche per tutti gli altri casi.

Una volta determinata la funzione $F(M)$ si deve invertire la relazione (2.60) in modo da ricavare $f(m)$.

Innanzitutto, al fine di migliorare la soluzione ottenuta, si effettua un'operazione di media mobile su finestre che scorrono su tutta la lunghezza del vettore: per ogni M_i si sceglie un intervallo di lunghezza fissata, costruito simmetricamente intorno alla corrispondente componente di \mathbf{F} ; se ne determina quindi la media aritmetica e si considera quest'ultima il valore di $F(M_i)$. In seguito si passa alla componente immediatamente successiva, ripetendo quanto già descritto con un intervallo identico al precedente se non per il primo e l'ultimo valore. Tale operazione permette di eliminare i contributi dati dalle frequenze più elevate, in quanto questi, di solito, sono dovuti esclusivamente ad errori numerici e variando la lunghezza di tali intervalli si può modificare il valore della frequenza minima che avviene attenuata. Alla fine del processo la dimensione del vettore così ottenuto risulta pari a quella del vettore di partenza meno la lunghezza di un intervallo.

Dopo tale operazione, si procede all'eliminazione di tutte le strutture residue la cui origine si suppone legata ad incertezze numeriche. Generalmente ciò si traduce nel sostituire con degli zeri tutti i valori corrispondenti a masse esterne ad una certa finestra, così da rendere più stabile l'applicazione delle operazioni necessarie nei passaggi successivi.

Infine, prima di procedere con la determinazione vera e propria di $f(m)$, si effettua la sostituzione di tutti le componenti negativi di \mathbf{F} : la funzione $F(M)$ è per definizione definita positiva, tuttavia, a causa delle diverse approssimazioni utilizzate nel processo di inversione dell'equazione (2.64), è possibile che si osservi la comparsa di valori negativi. Si procede dunque con l'individuazione di tutti gli intervalli con componenti minori di zero, quindi si sostituiscono queste ultime con i valori di una parabola costruita in modo tale da essere sempre positiva su tutto l'intervallo. Il vertice di tale parabola viene posto sull'estremo dell'intervallo il cui valore corrispondente di \mathbf{F} è inizialmente inferiore.

Dopo aver eseguito tali miglioramenti si procede con l'individuazione di $f(m)$.

Una prima possibilità, a tal proposito, si basa sullo sfruttare una delle proprietà caratteristica dei prodotti di convoluzione, per cui la trasformata di Fourier di questi è pari al prodotto delle trasformate di Fourier della due funzioni di partenza, per cui si ricava

$$\mathcal{F}(F(M)) = \mathcal{F}(f(m))^2 \quad (2.67)$$

Tuttavia, procedendo con tale approccio, si è costretti ad effettuare la radice quadrata di un vettore contenente numeri complessi, e la scelta del ramo da può essere in linea di principio differente per ognuna delle componenti. Ciò rende tale metodo di risoluzione del problema piuttosto complesso, in quanto non è immediato associare questa scelta ai vincoli che si hanno per la funzione $f(m)$, ossia che risulti nulla per ogni valore negativo della massa e che non sia mai minore di zero.

Si è quindi optato per un processo di minimizzazione di una funzione che quantifichi la differenza tra quanto ottenuto per $F(M)$ e il prodotto di convoluzione di un set di variabili \mathbf{x} per se stesso. Tale set possiede una dimensione pari a quella di \mathbf{F} (N), per tanto il vettore contenente il suo prodotto di convoluzione ($\mathbf{x} * \mathbf{x}$) presenta una lunghezza pari a $2N - 1$. Per poter effettuare il confronto è allora necessario ridurre la dimensione.

Per effettuare tale operazione si aggiunge innanzitutto una componente nulla al dopo l'ultima componente di $(\mathbf{x} * \mathbf{x})$, in quanto si suppone che per il valore di M corrispondente, $F(M)$ risulta già prossimo ad essere zero. Si introduce quindi un nuovo vettore $\overline{\mathbf{X}}$ di lunghezza N , le cui componenti sono poste pari alle medie di coppie di elementi successivi di $(\mathbf{x} * \mathbf{x})$, calcolate in modo che ogni componente sia considerata una sola volta (il primo si media con il secondo, il terzo con il quarto e così via)

$$\overline{X}_i \equiv \frac{(\mathbf{x} * \mathbf{x})_{2i} + (\mathbf{x} * \mathbf{x})_{2i+1}}{2} \quad (2.68)$$

con $(\mathbf{x} * \mathbf{x})_{2n} = 0$.

A seconda della potenza di calcolo a disposizione e della sensibilità richiesta nella ricostruzione di $f(m)$, è possibile operare una scelta differente per la dimensione del set. In tale caso, si deve mutare anche il metodo utilizzato per rendere la lunghezza del suo prodotto di convoluzione pari a quella di \mathbf{F} .

La funzione da minimizzare $G(\mathbf{x})$ si è quindi definita nel modo seguente:

$$G(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} (F_i - \overline{X}_i)^2. \quad (2.69)$$

Una volta determinato il set che minimizza la funzione $G(\mathbf{x})$, si effettua una media mobile per eliminare eventuali errori numerici a frequenza elevata e si considera quanto ottenuto la ricostruzione della funzione $f(m)$.

Nella figura 2.5 viene effettuato il confronto tra il risultato che si è ottenuto applicando l'algoritmo e il risultato esatto. Nello specifico si è esaminato il caso di una funzione $f(m)$ di tipo Gaussiano con media, deviazione standard pari rispettivamente a $5M_\odot$ e a $1M_\odot$. Nella figura 2.6 viene svolta la medesima operazione considerando una funzione scalino diversa da zero solo nell'intervallo $[1, 10]M_\odot$ dove vale 3. In entrambi i casi è stato posto $e = 1.005$ e $a = 1$ UA. In entrambi i casi è possibile riscontrare una buona ricostruzione delle caratteristiche qualitative della funzione logaritmica di massa.

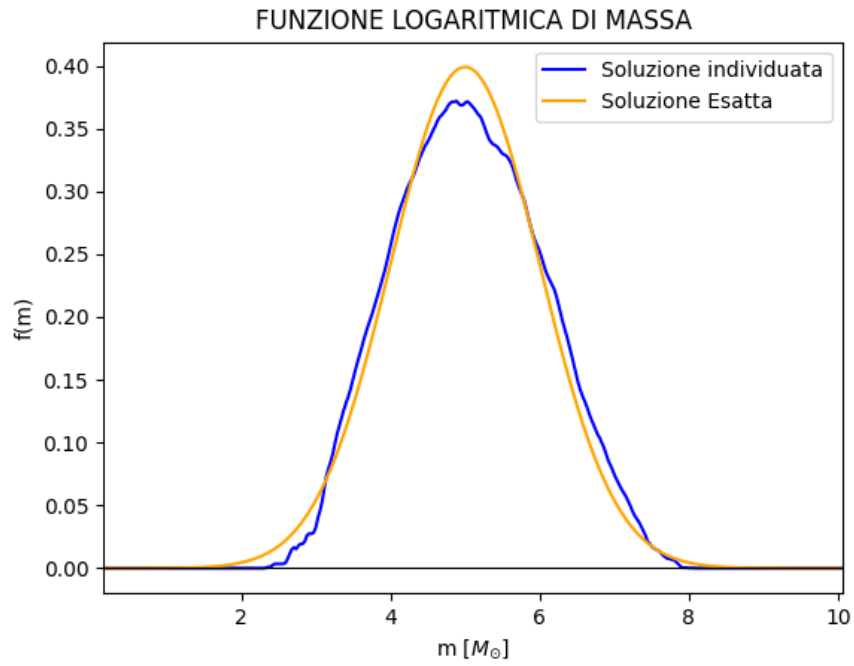


Figura 2.5: Confronto tra il risultato dell'algoritmo di inversione e la forma esatta di $f(m)$, quando quest'ultima è Gaussiana con media e deviazione standard pari rispettivamente a $5M_{\odot}$ e a $1M_{\odot}$. Per i parametri restanti invece si è posto $e = 1.005$ e $a = 1$ UA. Sull'asse delle ascisse è riportata la massa di un buco nero, mentre su quello delle ordinate la funzione logaritmica di massa.

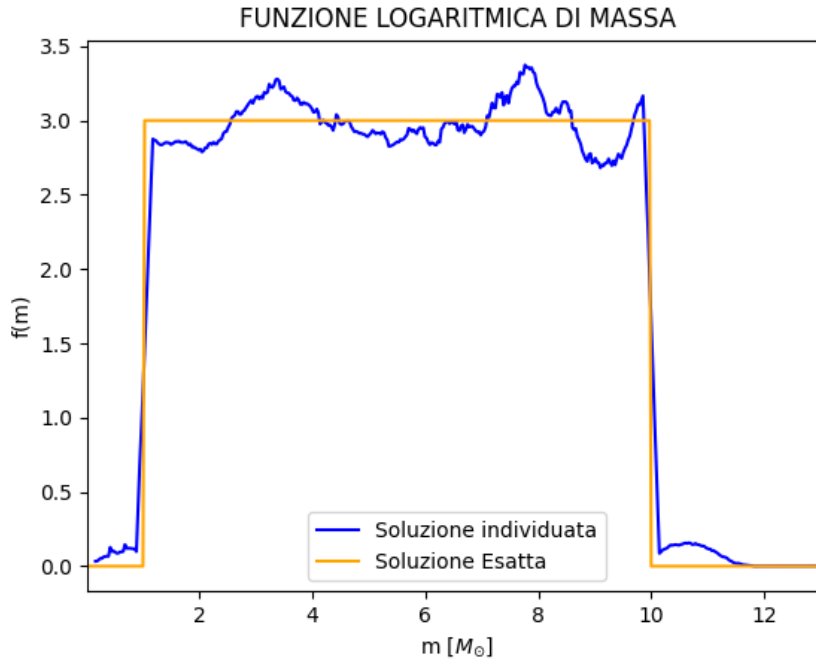


Figura 2.6: Confronto tra il risultato dell'algoritmo di inversione e la forma esatta di $f(m)$, quando quest'ultima è una funzione a gradino diversa da zero solo nell'intervallo $[1, 10]M_{\odot}$ dove vale 3. Si è posto $e = 1.005$ e $a = 1$ UA. Sull'asse delle ascisse è riportata la massa di un buco nero, mentre su quello delle ordinate la funzione logaritmica di massa.

Capitolo 3

Effetti di memoria

Nella prima parte di questo capitolo vengono presentati gli sviluppi post-Newtoniani e la determinazione, tramite essi, dell'effetto di memoria. Come riferimento principale per tale trattazione si è utilizzato il quinto capitolo del libro di Maggiore (Maggiore, 2008).

3.1 Introduzione agli sviluppi post-Newtoniani

Gli sviluppi post-Newtoniani costituiscono un valido strumento nella descrizione delle onde gravitazionali emesse da un sistema autogravitante, ma con campi gravitazionali di debole intensità e caratterizzato da velocità tipiche v sufficientemente più piccole della velocità della luce nel vuoto c . In queste condizioni è infatti possibile effettuare uno sviluppo rispetto al parametro $\beta = v/c$ o, analogamente, rispetto al parametro R_s/d , dove d indica la dimensione caratteristica del sistema, mentre R_s è il raggio di Schwarzschild. Quest'ultimo è a sua volta definito dalla seguente relazione:

$$R_s \equiv \frac{2GM}{c^2}, \quad (3.1)$$

in cui G indica la costante di gravitazione universale, mentre M rappresenta la massa totale del sistema. L'equivalenza nell'utilizzo di questi due parametri discende direttamente dal teorema del viriale, per cui si ha che:

$$\frac{1}{2}v^2 \sim \frac{GM}{d}$$

da cui segue immediatamente che:

$$\frac{v}{c} \sim \sqrt{\frac{R_s}{d}}. \quad (3.2)$$

Per poter effettuare in maniera corretta uno sviluppo post-Newtoniano, è necessario che siano verificate delle altre condizioni, in particolare si richiede che il tensore energia-impulso del sistema $T_{\mu\nu}$ sia infinitamente differenziabile, che la sorgente abbia forze interne di debole intensità, in modo che valgano le relazioni $T^{ij}/T^{00} = O(\beta^2)$ e $T^{0i}/T^{00} = O(\beta)$, e che tale tensore abbia un supporto compatto, ossia che la massa del sistema sia contenuta in un cilindro di tipo tempo, definito dalla condizione $r \leq d$ (r in questo caso indica la

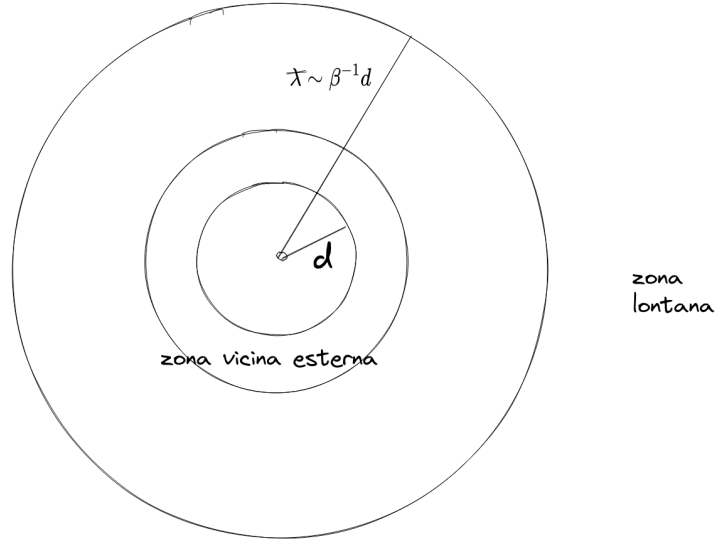


Figura 3.1: Divisione in regioni per la soluzione della equazione d'onda.

coordinata radiale nel sistema di riferimento armonico, che sarà definito nelle prossime sezioni).

Prima di procedere con la definizione di due regioni in cui si applicano differenti approcci risolutivi alle equazioni di Einstein, è necessario introdurre una relazione che lega la lunghezza d'onda ridotta λ e la dimensione del sistema d . Se si indica con ω_s la velocità angolare tipica all'interno della sorgente, allora vale $v \sim \omega_s d$, e se si considera che la frequenza di emissione dell'onda è tale per cui si ha che $\omega \sim \omega_s$ ($\omega = 2\pi f$) si ha, in termini di λ :

$$\lambda \sim \frac{c}{v}d, \quad (3.3)$$

per cui, nel limite in cui $v \ll c$, si ottiene la condizione $\lambda \gg d$.

Si possono ora introdurre la zona lontana e la zona vicina (Figura 3.1). La prima è costituita dai punti la cui distanza dalla sorgente risulta molto più grande di λ ; la seconda invece è data dalla condizione $r \ll \lambda$ e contiene la zona vicina esterna, in cui si ha che $d < r \ll \lambda$. Effettuando un'analogia con l'elettromagnetismo, è possibile prevedere come la zona lontana sia caratterizzata da fenomeni quali la propagazione di onde e in cui di conseguenza risulteranno rilevanti gli effetti di ritardo, a differenza della zona vicina in cui invece si avranno principalmente dei potenziali statici. In conclusione è necessario effettuare un'osservazione, ossia che l'emissione di onde gravitazionali comporta una variazione delle equazioni del moto rispetto alla descrizione classica, in quanto tali onde causano una fuoriuscita di energia dal sistema. La non linearità della relatività generale fa sì che i termini dello sviluppo ad un dato ordine siano sorgenti per l'emissione di onde di ordini successivi. Tali effetti complicano significativamente la risoluzione delle equazioni di Einstein, richiedendo l'utilizzo di opportuni strumenti matematici.

3.2 Primo ordine PN

Al primo ordine dello sviluppo post-Newtoniano è possibile trascurare le modifiche alle equazioni del moto dovute all'emissione di onde gravitazionali, di conseguenza il sistema risulta soggetto solo a forze conservative e, pertanto, è invariante per inversioni temporali. Questo implica che lo sviluppo in potenze di β di g^{00} e g^{ij} conterrà esclusivamente le potenze pari. Nel caso di g^{0i} compariranno solo potenze dispari, dal momento che le componenti con un indice spaziale e uno temporale cambiano segno sotto questa operazione. Si ha pertanto:

$$g_{00} = -1 + {}^{(2)}g_{00} + {}^{(4)}g_{00} + {}^{(6)}g_{00} + \dots \quad (3.4)$$

$$g_{0i} = {}^{(1)}g_{0i} + {}^{(3)}g_{0i} + {}^{(5)}g_{0i} + \dots \quad (3.5)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + {}^{(2)}g_{ij} + {}^{(4)}g_{ij} + {}^{(6)}g_{ij} + \dots, \quad (3.6)$$

e in maniera analoga per il tensore energia-impulso:

$$T^{00} = {}^{(0)}T^{00} + {}^{(2)}T^{00} + {}^{(4)}T^{00} + \dots \quad (3.7)$$

$$T^{0i} = {}^{(1)}T^{0i} + {}^{(3)}T^{0i} + {}^{(5)}T^{0i} + \dots \quad (3.8)$$

$$T^{ij} = {}^{(2)}T^{ij} + {}^{(4)}T^{ij} + {}^{(6)}T^{ij} + \dots \quad (3.9)$$

Per valutare correttamente quali termini dello sviluppo delle equazioni di Einstein appartengano allo stesso ordine, si deve considerare che le derivate temporali risultano più piccole delle derivate spaziali di un fattore β ,

$$\frac{\partial}{\partial t} = O(\beta) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.10)$$

Segue che l'operatore d'Alambertiano all'ordine più basso deve essere sostituito con un operatore Laplaciano, per cui gli effetti di ritardo sono piccole correzioni. Si potrebbe quindi immaginare il problema come la ricerca dei termini dell'espansione per piccoli ritardi di una funzione del tempo ritardato $u \equiv t - r/c$,

$$F(t - r/c) = F(t) - \frac{r}{c} \dot{F}(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{c}\right)^2 \ddot{F}(t) + \dots, \quad (3.11)$$

e poiché effettuare una derivata temporale corrisponde sostanzialmente a moltiplicare per ω , segue che il parametro dell'espansione è dato da r/λ e quindi gli sviluppi post-Newtoniani possono essere impiegati esclusivamente nella zona vicina.

Si può ora procedere con la determinazione della prima correzione post-Newtoniana. A tal fine è conveniente utilizzare il sistema di coordinate armonico, corrispondente alla gauge di De Donder, la quale implica la seguente condizione per la metrica:

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0, \quad (3.12)$$

dove g indica il determinante di tale tensore. Operando nelle equazioni di Einstein la sostituzione delle varie grandezze presenti con i loro sviluppi, riportati in equazione

(3.4) e (3.7), ed eguagliando i termini dello stesso ordine, è possibile ricavare l'equazione Newtoniana valida per g_{00} :

$$\nabla^2 ({}^{(2)}g_{00}) = -\frac{8\pi G}{c^4} {}^{(0)}T^{00}, \quad (3.13)$$

dove ∇^2 rappresenta l'operatore Laplaciano dello spazio-tempo piatto e gli indici sono alzati e abbassati mediante la metrica di Minkowski; e le equazioni delle prima correzioni post-Newtoniani:

$$\nabla^2 ({}^{(2)}g_{ij}) = -\frac{8\pi G}{c^4} \delta_{ij} {}^{(0)}T^{00}, \quad (3.14)$$

$$\nabla^2 ({}^{(3)}g_{0i}) = -\frac{16\pi G}{c^4} {}^{(1)}T^{0i}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 ({}^{(4)}g_{00}) = & \partial_0^2 ({}^{(2)}g_{00}) + {}^{(2)}g_{ij} \partial_i \partial_j ({}^{(2)}g_{00}) - \partial_i ({}^{(2)}g_{00}) \partial_i ({}^{(2)}g_{00}) \\ & - \frac{8\pi G}{c^4} ({}^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{ii} - 2 {}^{(2)}g_{00} {}^{(0)}T^{00}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

Le equazioni (3.13), (3.14) e (3.15) sono di immediata risoluzione se come condizione al contorno si richiede che nel limite di distanza infinita dalla sorgente, la metrica diventi pari alla metrica di Minkowski. Si ottiene quindi rispettivamente:

$${}^{(2)}g_{00} = -2\phi, \quad (3.17)$$

$${}^{(3)}g_{0i} = \xi_i, \quad (3.18)$$

$${}^{(2)}g_{ij} = -2\phi \delta_{ij}, \quad (3.19)$$

dove $\phi(t, \mathbf{x})$ e $\xi_i(t, \mathbf{x})$ sono pari a

$$\phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{G}{c^4} \int d^3x' \frac{{}^{(0)}T^{00}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (3.20)$$

$$\xi_i(t, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{{}^{(1)}T^{0i}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.21)$$

La risoluzione dell'equazione (3.16) risulta più complessa, infatti è necessario effettuare qualche passaggio preliminare prima di poterla scrivere sotto forma di equazione di Laplace con un termine di sorgente. Innanzitutto si sostituiscono a ${}^{(2)}g_{00}$ e a ${}^{(2)}g_{ij}$ le soluzioni appena individuate, quindi si introduce il nuovo potenziale $\psi(t, \mathbf{x})$ definito dalla relazione

$${}^{(4)}g_{00} = -2(\phi^2 + \psi). \quad (3.22)$$

In questo modo, impiegando l'identità

$$\partial_i \phi \partial_i \phi = \frac{1}{2} \nabla^2 \phi^2 - \phi \nabla^2 \phi, \quad (3.23)$$

si può riscrivere l'equazione (3.16) nella forma cercata, ossia:

$$\nabla^2 \psi = \partial_0^2 \phi + \frac{4\pi G}{c^4} [{}^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{ii}], \quad (3.24)$$

la cui soluzione è data da

$$\psi(t, \mathbf{x}) = - \int \frac{d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left\{ \frac{1}{4\pi} \partial_0^2 \phi + \frac{G}{c^4} \left[{}^{(2)}T^{00}(t, \mathbf{x}') + {}^{(2)}T^{ii}(t, \mathbf{x}') \right] \right\}. \quad (3.25)$$

Le soluzioni così ottenute sono scritte in termini di potenziali istantanei, i quali, per quanto discusso precedentemente, costituiscono i termini dello sviluppo di un potenziale ritardato. Può essere allora utile risalire alla forma di quest'ultimo, in modo da rendere più semplice la determinazione degli ordini successivi dello sviluppo post-Newtoniano. Innanzitutto è possibile combinare le equazioni (3.17) e (3.22) ottenendo

$$g_{00} = -1 - 2(\phi + \psi) - 2\phi^2 + O(\beta^6) \quad (3.26)$$

Poiché analizzando l'equazione (3.20) e l'equazione (3.25) si ricava che il potenziale ϕ è di ordine 2, mentre il potenziale ψ è di ordine 4, si ha che sia il termine $\psi\phi$ che il termine ψ^2 sono di ordine superiore o pari al sesto e, pertanto, che nell'equazione (3.26) si può operare la sostituzione $\phi^2 \rightarrow (\phi + \psi)^2$. In questo modo, introducendo il potenziale $V(t, \mathbf{x})$, tramite la relazione $V = -c^2(\phi + \psi)$, si può scrivere

$$g_{00} = -1 + \frac{2V}{c^2} - \frac{2V^2}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \quad (3.27)$$

dove $O(1/c^n)$ ha lo stesso significato di $O(\beta^n)$, e in cui si può notare una corrispondenza, almeno per i primi due termini, con lo sviluppo della funzione esponenziale, per cui

$$g_{00} = -e^{-2V/c^2} + O\left(\frac{1}{c^6}\right). \quad (3.28)$$

Combinando le equazioni (3.13) e (3.24) e sfruttando la possibilità di aggiungere un termine $\partial_0^2 \psi$ che possiede un grado pari al sesto, si ottiene che il potenziale V soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} \square V &= - \frac{4\pi G}{c^2} \left[{}^{(0)}T^{00} + {}^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{ii} \right] \\ &= - \frac{4\pi G}{c^2} \left[T^{00} + T^{ii} \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

in cui il secondo uguale discende dal fatto che la trattazione è implicitamente limitata ai primi ordini, e in cui il simbolo \square è utilizzato per indicare l'operatore di d'Alembert dello spazio-tempo piatto. La soluzione di tale equazione è data dall'integrale ritardato

$$V(t, \mathbf{x}) = \frac{G}{c^2} \int d^3 x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[T^{00} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) + T^{ii} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) \right]. \quad (3.30)$$

Quanto fatto per g_{00} può essere ripetuto per le altre componenti della metrica, ottenendo

$$g_{0i} = -\frac{4}{c^3} V_i + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad (3.31)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{2}{c^2} V \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (3.32)$$

dove il potenziale $V_i(t, \mathbf{x})$ è definito dalla relazione

$$V_i(t, \mathbf{x}) = \frac{G}{c} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T^{0i} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right). \quad (3.33)$$

L'equazione (3.31) è particolarmente semplice da ricavare, in quanto nella (3.18) gli effetti del ritardo sono di ordine superiore a quello considerato, e pertanto, senza effettuare ulteriori operazioni, è sufficiente sostituire la funzione ξ_i con V_i .

Il metodo presentato fino ad ora consente di ricavare le prime correzioni post-Newtoniane, tuttavia risulta fallimentare se si vuole impiegarlo per la determinazione degli ordini più elevati. Tale impossibilità sorge da due aspetti fondamentali.

Innanzitutto si può osservare che le relazioni che si ottengono per i vari termini dello sviluppo, possono essere scritti nella forma:

$$\square^{(n)} h_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}^{(m)} h, \quad (3.34)$$

sfruttando le equazioni rilassate di Einstein, come sarà meglio discusso nella sezione successiva a questa. Nell'equazione (3.34) si può osservare come il termine di sorgente $S_{\mu\nu}^{(m)} h$ dipenda, in generale, sia dal tensore energia-impulso, sia dagli ordini dello sviluppo della metrica inferiori a n (m indica un set di valori interi minori di quest'ultimo), e mentre ciò non implica alcun problema nel caso del primo ordine, lo stesso non vale per le correzioni successive. Infatti per il primo termine dello sviluppo, $S_{\mu\nu}^{(m)} h$ dipende esclusivamente da $T^{\mu\nu}$, che è per definizione compatto, e per tanto l'inversione della relazione può essere eseguita nel modo usuale, dovendo semplicemente effettuare il calcolo di un integrale convergente. Per gli ordini successivi invece, il termine di sorgente inizia a dipendere anche da funzioni che risultano in generale estese a tutto lo spazio; inoltre, accrescere l'ordine dello sviluppo, implica considerare termini associati a potenze maggiori nell'espansione in multipoli delle correzioni al campo gravitazionale, e tali termini sono caratterizzati dalla presenza di un fattore $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')$ elevato al loro ordine. Questi due aspetti fanno sì che, procedendo con l'utilizzo del metodo usuale di risoluzione, si ottengano, da un certo punto in poi, esclusivamente degli integrali divergenti.

La seconda questione da considerare è invece l'impossibilità di applicare in modo corretto le condizioni al contorno all'infinito, quali il vincolo dell'assenza di un'onda entrante. Ciò può essere compreso osservando che nell'equazione (3.11) il parametro dello sviluppo, ossia r/λ , diverge quando $r \rightarrow \infty$ e di conseguenza, come già discusso, l'espansione post-Newtoniana, può essere applicata esclusivamente nella zona vicina. Risulta quindi necessario adottare un altro tipo di sviluppo nella zona lontana e confrontare poi le due soluzioni in una regione in cui possono essere entrambe considerate valide.

3.3 Equazioni di Einstein rilassate

La risoluzione del problema risulta agevolata se si riscrivono le equazioni di Einstein in una forma differente: si introduce il campo $h^{\mu\nu}$ (diverso da $h_{\mu\nu}$),

$$h^{\mu\nu} \equiv (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}, \quad (3.35)$$

e lo si utilizza come nuova incognita da individuare. Riscrivendo quindi le equazioni di Einstein in termini di $h^{\mu\nu}$ e utilizzando l'equazione (3.12), che riscritta in termini del nuovo campo risulta pari a

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0, \quad (3.36)$$

si ottiene la seguente relazione esatta, detta di Landau-Lifshitz:

$$\square h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu}, \quad (3.37)$$

dove $\tau^{\mu\nu}$ è definito da

$$\tau^{\mu\nu} \equiv (-g)T^{\mu\nu} + \frac{c^4}{16\pi G} \Lambda^{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

Il tensore $\Lambda^{\mu\nu}$ non dipende dalla distribuzione della materia della sorgente, dal momento che è funzione esclusivamente della metrica, infatti:

$$\Lambda^{\mu\nu} \equiv \frac{16\pi G}{c^4} (-g)^{1/2} t_{LL}^{\mu\nu} + (\partial_\alpha h^{\mu\beta} \partial_\beta h^{\nu\alpha} - h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\mu\nu}), \quad (3.39)$$

dove $t_{LL}^{\mu\nu}$ è lo pseudotensore energia-impulso di Landau-Lifshitz, a sua volta definito dalla relazione:

$$\begin{aligned} \frac{16\pi G}{c^4} t_{LL}^{\mu\nu} \equiv & g_{\lambda\alpha} g^{\beta\rho} \partial_\beta h^{\mu\lambda} \partial_\rho h^{\nu\alpha} + \frac{1}{2} g_{\lambda\alpha} g^{\mu\nu} \partial_\rho h^{\lambda\beta} \partial_\beta h^{\rho\alpha} \\ & - g_{\alpha\beta} (g^{\lambda\mu} \partial_\rho h^{\nu\beta} + g^{\lambda\nu} \partial_\rho h^{\mu\beta}) \partial_\lambda h^{\rho\alpha} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$+ \frac{1}{8} (2g^{\mu\lambda} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\alpha}) (2g_{\beta\rho} g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma} g_{\beta\tau}) \partial_\lambda h^{\beta\tau} \partial_\alpha h^{\rho\sigma}. \quad (3.41)$$

Si può ora effettuare un confronto tra le relazioni appena individuate e le equazioni di Einstein scritte nella forma più comune, ossia

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (3.42)$$

Dal momento che a causa dell'identità di Bianchi, il termine a sinistra dell'uguale nella (3.42) ha divergenza covariante nulla, segue che da tale equazione discende immediatamente la relazione

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.43)$$

(il simbolo D_μ è utilizzato per indicare l'operatore derivata covariante), la quale risulta essere un'equazione del moto per la materia. Lo stesso accade se si risolvono insieme, l'equazione (3.37) e la condizione di gauge (3.36), tuttavia dal punto di vista matematico si può decidere di risolvere esclusivamente la prima delle due, ossia è possibile trovare una soluzione di quest'ultima, senza particolari richieste sulla dipendenza temporale delle componenti del tensore $T^{\mu\nu}$. Per questa loro caratteristica le dieci componenti dell'equazione (3.37) sono dette equazioni di Einstein rilassate.

3.4 L'approccio di Blanchet-Damour

Nell'introduzione di questo capitolo si è discusso in merito all'esistenza di diverse scale di lunghezza di interesse nello studio delle onde gravitazionali generate da un sistema autogravitante, con campi gravitazionali deboli e velocità tipiche molto minori della velocità della luce nel vuoto. In particolare si è osservato come possano essere definite due regioni, in cui i campi presentano comportamenti molto diversi: la zona vicina, valida per $d < r \ll \lambda$ e in cui è possibile cercare una soluzione sotto forma di uno sviluppo post-Newtoniano, è una zona lontana, che si estende invece per valori di $r \gg \lambda$ e per la quale è necessario l'utilizzo di un altro approccio risolutivo. A tal proposito, si può sfruttare l'assunzione da noi fatta che il campo gravitazionale sia debole anche all'interno della sorgente, per cui, già per valori di r maggiori di d , la metrica non risulta molto distante dalla metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Segue dunque che può essere individuata una soluzione in tale regione (che comprende anche la zona lontana) nella forma di uno sviluppo rispetto ad un parametro che tiene conto delle deviazioni dallo spazio-tempo piatto, detta espansione post-Minkowskiana; inoltre poiché nella regione $d < r \ll \lambda$ sono applicabili entrambi gli sviluppi, segue che in essa è possibile raccordarle.

3.4.1 Soluzione all'esterno della sorgente

Come parametro per lo sviluppo della soluzione nella regione esterna alla sorgente, si può utilizzare il rapporto tra il raggio di Schwarzschild R_s e la distanza dal centro della sorgente stessa r . In questa regione infatti, la metrica sarà caratterizzata solo da piccole variazioni rispetto ad $\eta_{\mu\nu}$, le quali potranno essere quantificate proprio da tale parametro (nel limite $r \rightarrow \infty$, $g^{\mu\nu}$ diviene pari alla metrica di Minkowski). Poiché R_s è proporzionale alla costante di gravitazione universale G , si può scrivere l'espansione post-Minkowskiana nella forma di uno sviluppo in potenze di quest'ultima.

Utilizzando come campo incognito $h^{\mu\nu}$, definito in equazione (3.35), si scrive il seguente sviluppo:

$$h^{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} G^n h_n^{\mu\nu}, \quad (3.44)$$

in cui il termine di ordine zero risulta assente, in quanto esso corrisponde al caso in cui $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$, e si può procedere con la sua sostituzione all'interno dell'equazione (3.37), la quale risulta semplificata dall'assenza del tensore energia-impulso (si sta cercando una soluzione valida al di fuori della sorgente) e quindi pari a

$$\square h^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\nu}. \quad (3.45)$$

Per quanto riguarda il tensore $\Lambda^{\mu\nu}$, questo dipende in modo fortemente non lineare da $h^{\mu\nu}$ e contiene di conseguenza tutte le sue possibili potenze a partire dalla seconda; si avrà pertanto un'espansione del tipo

$$\Lambda^{\mu\nu} = N^{\mu\nu}[h, h] + M^{\mu\nu}[h, h, h] + L^{\mu\nu}[h, h, h, h] + O(h^5), \quad (3.46)$$

dove i vari termini presenti possono essere determinati andando a sostituire lo sviluppo di $h^{\mu\nu}$ nella forma esplicita di $\Lambda^{\mu\nu}$. Per il tensore $N^{\mu\nu}[h, h]$ vale ad esempio

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}[h, h] = & -h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu h_{\alpha\beta}\partial^\nu h^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\partial^\mu h\partial^\nu h \\ & - \partial^\mu h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\nu\beta} - \partial^\nu h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\mu\beta} + \partial_\beta h^{\mu\alpha}(\partial^\beta h_\alpha^\nu + \partial_\alpha h^{\nu\beta}) \\ & + \eta^{\mu\nu}\left[-\frac{1}{4}\partial_\rho h_{\alpha\beta}\partial^\rho h^{\alpha\beta} + \frac{1}{8}\partial_\alpha h\partial^\alpha h + \frac{1}{2}\partial_\alpha h_{\beta\rho}\partial^\beta h^{\alpha\rho}\right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

dove il h è la traccia di $h^{\mu\nu}$ e gli indici sono alzati ed abbassati mediante la metrica di Minkowski, così che tale operazione non comporti una variazione dell'ordine dell'oggetto a cui è applicata.

Poiché nello sviluppo di $\Lambda^{\mu\nu}$ non è presente un termine lineare in $h^{\mu\nu}$, si ha che $h_1^{\mu\nu}$ soddisfa un'equazione d'onda senza termini di sorgente, ossia

$$\square h_1^{\mu\nu} = 0, \quad (3.48)$$

mentre per ordini più elevati si ottengono le equazioni

$$\square h_2^{\mu\nu} = N^{\mu\nu}[h_1, h_1], \quad (3.49)$$

$$\square h_3^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}[h_1, h_1, h_1] + N^{\mu\nu}[h_1, h_2] + N^{\mu\nu}[h_2, h_1], \quad (3.50)$$

e così via. In generale, per l'ordine n -esimo, l'equazione corrispondente si scrive

$$\square h_n^{\mu\nu} = \Lambda_n^{\mu\nu}[h_1, h_2, \dots, h_n]. \quad (3.51)$$

Possiamo ora procedere con lo sviluppo di un metodo risolutivo per le equazioni dei vari termini di un'espansione post-Minkowskiana, iniziando dal primo. Quest'ultimo, come è già stato evidenziato, verifica un'equazione d'onda senza termine di sorgente, di conseguenza è necessario individuare la soluzione più generale possibile per questa, che soddisfi allo stesso tempo anche la condizione di gauge. Si può verificare che, utilizzando la notazione introdotta nel capitolo 1 e imponendo la condizione all'infinito di onda entrante assente, la soluzione più generale della (3.48) è

$$h_1^{\mu\nu} = \sum_{l=0}^{\infty} \partial_L \left[\frac{1}{r} \hat{K}_L^{\mu\nu}(t - r/c) \right], \quad (3.52)$$

infatti, dal momento che l'operatore di d'Alembert commuta con ∂_L , si ha che per qualunque valore di l , $\hat{K}_L^{\mu\nu}(t - r/c)$ soddisfa tale equazione; inoltre i tensori completamente simmetrici, a traccia nulla e con un numero qualunque di indici costituiscono un set completo per le rappresentazioni del gruppo delle rotazioni. Rimane solo da imporre che sia soddisfatta anche l'equazione $\partial_\nu h_1^{\mu\nu} = 0$, e così facendo si ottiene il seguente risultato per $h_1^{\mu\nu}$

$$h_1^{\mu\nu} = k_1^{\mu\nu} + \partial^\mu \varphi_1^\nu + \partial^\nu \varphi_1^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \varphi_1^\alpha, \quad (3.53)$$

dove, indicando con u il tempo ritardato e utilizzando la convenzione $f^{(n)}(u) \equiv d^n f / du^n$, sia ha che le componenti di $k_1^{\mu\nu}$ sono date dalle seguenti relazioni:

$$k_1^{00} = -\frac{4}{c^2} \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_L \left[\frac{1}{r} I_L(u) \right], \quad (3.54)$$

$$k_1^{0i} = \frac{4}{c^3} \sum_{l \geq 1} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_{L-1} \left[\frac{1}{r} I_{iL-1}^{(1)}(u) + \frac{l}{l+1} \varepsilon_{iab} \partial_a \left(\frac{1}{r} J_{bL-1}(u) \right) \right], \quad (3.55)$$

$$k_1^{ij} = -\frac{4}{c^4} \sum_{l \geq 2} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_{L-2} \left[\frac{1}{r} I_{ijL-2}^{(2)}(u) + \frac{2l}{l+1} \partial_a \left(\frac{1}{r} \varepsilon_{ab(i} J_{j)bL-2}^{(1)}(u) \right) \right]. \quad (3.56)$$

Si noti come nelle equazioni dalla (3.54) alla (3.56) compaia una dipendenza rispetto a due famiglie di tensori completamente simmetrici e a traccia nulla $I_L(u)$ e $J_L(u)$:

$$I_L(u) = \{I, I_i, I_{ij}, I_{ijk}, \dots\}, \quad (3.57)$$

$$J_L(u) = \{J, J_i, J_{ij}, J_{ijk}, \dots\}; \quad (3.58)$$

le quali sono funzioni arbitrarie di u , se non per il fatto che la condizione di gauge impone che I , I_i e J_i siano indipendenti dal tempo, in modo che sia verificata, rispettivamente, la conservazione della massa totale, dell'impulso totale e del momento angolare totale.

Per quanto riguarda φ_1^μ invece, si ha che le sue componenti sono:

$$\varphi_1^0 = \frac{4}{c^3} \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_L \left[\frac{1}{r} W_L(u) \right], \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^i &= -\frac{4}{c^4} \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_{iL} \left[\frac{1}{r} X_L(u) \right] \\ &\quad - \frac{4}{c^4} \sum_{l \geq 1} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_{L-1} \left[\frac{1}{r} Y_{iL-1}(u) + \frac{l}{l+1} \varepsilon_{iab} \partial_a \left(\frac{1}{r} Z_{bL-1}(u) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Applicando una trasformazione di gauge lineare del tipo $x^\mu \rightarrow x^\mu + \varphi^\mu(x)$, diviene possibile eliminare la dipendenza per φ^μ nell'equazione (3.53), il che e potrebbe condurre all'erronea conclusione che tale termine sia dovuto esclusivamente alla scelta della gauge e che non possieda di conseguenza alcun significato fisico. In realtà questo non può essere trascurato, infatti le correzioni successive al primo ordine, che si ottengono partendo da un $h_1^{\mu\nu}$ funzione esclusivamente del tensore $k_1^{\mu\nu}$, e quelle che derivano invece da un $h_1^{\mu\nu}$ che contiene anche la dipendenza da φ_1^μ , non sono connesse dall'invarianza sotto trasformazioni di gauge che tengano conto di tutti gli ordini considerati, e pertanto non sono equivalenti dal punto di vista fisico.

Si noti ora che, a differenza di quanto accade per il primo ordine, nelle correzioni successive risulta necessario impiegare dei nuovi metodi risolutivi, infatti, per poter utilizzare opportunamente la funzione di Green dell'operatore di d'Alembert, sarebbe necessario conoscere il termine $\Lambda_n^{\mu\nu}[h_1, h_2, \dots, h_n]$ dell'equazione (3.51) in tutto lo spazio, mentre le soluzioni ottenute si possono considerare valide solo per $r > d$. Anche effettuando un'estensione fino all'origine, si incontrerebbero comunque delle divergenze:

poiché si sta operando all'esterno della sorgente, è possibile scomporre i vari termini dell'espansione post-Minkowskiana tramite uno sviluppo in multipoli, ognuno dei quali contiene una potenza positiva di $1/r$; di conseguenza il termine a destra dell'uguale nella (3.51) risulta fortemente singolare in $r = 0$.

Per ovviare a tali problematiche, si ricorre all'utilizzo di un metodo chiamato espansione post-Minkowskiana multipolare, il quale è basato sull'osservazione che, poiché si è interessati a determinare un preciso ordine, è possibile sostituire i vari termini dello sviluppo di $h^{\mu\nu}$ all'interno di $\Lambda_n^{\mu\nu}[h_1, h_2, \dots, h_n]$ con la loro espansione in multipoli troncata al medesimo ordine. Questo implica automaticamente, che è sempre possibile individuare un numero reale e positivo B , sufficientemente grande da far sì che $r^B \Lambda_n^{\mu\nu}$ sia regolare nell'origine, e che di conseguenza l'integrale ritardato $I_n^{\mu\nu}(B)$ definito come

$$I_n^{\mu\nu}(B) \equiv \square_{ret}^{-1}(r^B \Lambda_n^{\mu\nu}) \quad (3.61)$$

sia ben definito. Il simbolo \square_{ret}^{-1} è utilizzato in questo caso per indicare la convoluzione con la funzione di Green ritardata, ossia

$$(\square_{ret}^{-1}f)(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}'). \quad (3.62)$$

È possibile dimostrare che $I_n^{\mu\nu}(B)$ ammette un'unica continuazione analitica nel piano complesso, ad eccezione di alcuni valori interi di B ; in particolare si osserva la comparsa di alcuni poli nel limite in cui B tende a zero, per cui in un intorno dell'origine si può scrivere lo sviluppo di Laurent per $I_n^{\mu\nu}(B)$,

$$I_n^{\mu\nu}(B) = \sum_{p=p_0}^{\infty} B^p \iota_{n,p}^{\mu\nu}, \quad (3.63)$$

dove i \square_{ret}^{-1} sono i coefficienti di tale sviluppo, e se si applica l'operatore di d'Alembert ad entrambi i termini dell'uguaglianza, si ottiene

$$r^B \Lambda_n^{\mu\nu} = \sum_{p=p_0}^{\infty} B^p \square \iota_{n,p}^{\mu\nu}. \quad (3.64)$$

Se adesso si scrive r^B come $e^{B \log r}$, si effettua l'espansione dell'esponenziale, e si eguagliano i termini con la stessa potenza di B , si ottiene $\square \iota_{n,p}^{\mu\nu} = 0$ quando $p_0 < p < -1$, mentre per $p \geq 0$, si ricava

$$\square \iota_{n,p}^{\mu\nu} = \frac{(\log r)^p}{p!} \Lambda_n^{\mu\nu}. \quad (3.65)$$

Per il caso $p = 0$, si ottiene immediatamente che $u_n^{\mu\nu} \equiv \iota_{n,p=0}^{\mu\nu}$ soddisfa l'equazione (3.51), ossia che una soluzione per quest'ultima è rappresentata dal coefficiente di ordine zero nello sviluppo di Laurent della funzione $I_n^{\mu\nu}$. Tale operazione, che prende il nome di parte finita in $B = 0$ dell'integrale ritardato, viene generalmente indicata con $FB_{B=0}$, e si ha pertanto

$$u_n^{\mu\nu} = FP_{B=0}\{\square_{ret}^{-1}[r^B \Lambda_n^{\mu\nu}]\}, \quad (3.66)$$

che può essere scritta in modo più compatto mediante l'introduzione del simbolo \mathcal{FP} , definito dalla relazione seguente

$$\mathcal{FP} \square_{ret}^{-1} f \equiv F P_{B=0} \{ \square_{ret}^{-1} [r^B f] \}. \quad (3.67)$$

L'ultimo tassello richiesto per giungere all'ottenimento di $h_n^{\mu\nu}$ è l'imposizione della condizione di gauge, infatti, solitamente la soluzione trovata in (3.66), non verifica automaticamente anche quest'ultima, ed è pertanto necessario aggiungere una funzione $v_n^{\mu\nu}$ che soddisfi l'equazione omogenea e per cui valga

$$\partial_\mu v_n^{\mu\nu} = -\partial_\mu u_n^{\mu\nu}. \quad (3.68)$$

Si osservi come per il momento i vari tensori che compaiono nelle soluzioni individuate, non posseggano alcun legame con le caratteristiche della sorgente. Relazioni di questo tipo potranno essere infatti dedotte solo dopo aver effettuato un confronto tra quanto trovato fino a questo punto e la soluzione nella zona vicina.

3.4.2 Soluzione nella zona vicina

Il primo termine post-Newtoniano del tensore $g^{\mu\nu}$ è stato già determinato e fornito nelle equazioni (3.27), (3.31) e (3.32), tuttavia risulta conveniente riesprimerlo in termini del campo $h^{\mu\nu}$, così da ottenere una soluzione che sia immediatamente confrontabile con lo sviluppo post-Minkowskiano valido all'esterno della sorgente. A tal fine si può sfruttare il fatto che la relazione che collega queste due grandezze risulta particolarmente semplice al primo ordine, per cui si ricava immediatamente che $h^{00} = -4V/c^2 + O(1/c^4)$, $h^{0i} = O(1/c^3)$ e $h^{ij} = O(1/c^4)$, e si possono sostituire tali relazioni all'interno dell'equazione (3.37), ottenendo

$$\square h^{00} = \frac{16\pi G}{c^4} \left(1 + \frac{4V}{c^2} \right) T^{00} - \frac{14}{c^4} \partial_k V \partial_k V + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \quad (3.69)$$

$$\square h^{0i} = \frac{16\pi G}{c^4} T^{0i} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad (3.70)$$

$$\square h^{ij} = \frac{16\pi G}{c^4} T^{ij} + \frac{4}{c^4} \left(\partial_i V \partial_j V - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_k V \partial_k V \right) + O\left(\frac{1}{c^6}\right). \quad (3.71)$$

Le soluzioni di queste ultime sono date, rispettivamente, da

$$h^{00} = -\frac{4}{c^2} V + \frac{4}{c^4} (W - 2V^2) + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \quad (3.72)$$

$$h^{0i} = -\frac{4}{c^2} V_i + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad (3.73)$$

$$h^{ij} = -\frac{4}{c^4} W_{ij} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \quad (3.74)$$

dove V e V_i sono forniti nelle equazioni (3.30) e (3.33), mentre W_{ij} è definito nel modo seguente

$$W_{ij} \equiv G \int \frac{d^3 x}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[T_{ij} + \frac{1}{4\pi G} \left(\partial_i V \partial_j V - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_k V \partial_k V \right) \right] \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right). \quad (3.75)$$

È interessante osservare come tale procedura ci consenta di ottenere h_{ij} direttamente fino al sesto ordine, a differenza di quanto accadeva in equazione (3.32). Si deve segnalare inoltre che i vari integrali che compaiono nelle soluzioni ottenute sono tutti ben definiti: quelli presenti nella definizione di V e nella definizione di V_i sono infatti caratterizzati da funzioni integrande aventi un supporto compatto, mentre nel caso di W_{ij} , nonostante si abbia una dipendenza da V , la funzione integranda ha comunque un andamento all'infinito che evita l'insorgere di divergenze, infatti si ha che quando $|\mathbf{x}'| \rightarrow +\infty$

$$V\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right) \rightarrow \frac{GM}{|\mathbf{x}'|}, \quad (3.76)$$

dove

$$M = \int d^3y \frac{[T^{00} + T^{ii}](-\infty, \mathbf{y})}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad (3.77)$$

è la massa inerziale del sistema.

Si può ora procedere alla determinazione di un ordine qualsiasi dell'espansione post-Newtoniana. A tal proposito si scrive

$$h^{\mu\nu} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{c^n} {}^{(n)}h^{\mu\nu}, \quad (3.78)$$

dove i vari termini ${}^{(n)}h^{\mu\nu}$ sono definiti in modo tale da poter estrarre e scrivere esplicitamente la potenza di $1/c$ corrispondente all'ordine n -esimo. Analogamente si procede con $\tau^{\mu\nu}$, con la differenza che l'espansione di quest'ultimo inizia da $n = -2$, dal momento che la componente 00, all'ordine dominante, contiene il contributo all'energia totale dato dalla massa a riposo. Se si sostituiscono tale espansioni all'interno delle equazioni di Einstein e se si eguagliano i termini che possiedono il medesimo ordine, si ottengono delle equazioni del tipo

$$\nabla^2 {}^{(n)}h^{\mu\nu} = 16\pi G {}^{(n-4)}\tau^{\mu\nu} + \partial_t^2 {}^{(n-2)}h^{\mu\nu}, \quad (3.79)$$

le quali, a differenza di quanto accade per gli sviluppi post-Minkowskiani, sono equazioni di Poisson. Tale differenza è del tutto coerente con il fatto che nella zona vicina, gli effetti dei ritardi costituiscono solo delle piccole correzioni ad un campo principalmente istantaneo, e a riprova di ciò, si può osservare come i termini di derivata temporale del campo $h^{\mu\nu}$ presenti, coinvolgano esclusivamente ordini inferiori rispetto a quello della correzioni che si sta cercando al momento.

Come si è discusso in precedenza, tali equazioni non possono essere risolte mediante l'utilizzo dell'integrale di Poisson, in quanto ciò condurrebbe a delle divergenze che non posseggono alcun significato fisico, ma sono solo la conseguenza di un'errata scelta del metodo risolutivo. Infatti, nel caso da noi considerato, lo sviluppo di $h^{\mu\nu}$ è operato rispetto ad un parametro che diverge all'infinito e per tanto non è possibile richiedere che tale campo si annulli nel limite in cui r assume valori molto grandi (condizione necessaria per scrivere la soluzione dell'equazione (3.79) come convoluzione del termine di sorgente e della funzione di Green). L'unico modo che quindi si ha per imporre correttamente le condizioni al contorno, è mediante confronto con la soluzione ottenuta sotto forma

di sviluppo post-Minkowskiano. Ciò è applicabile a patto di riuscire a individuare la soluzione più generale possibile sia all'esterno della sorgente, sia nella zona vicina, in modo tale che l'imposizione della condizione di uguaglianza tra le due espansioni nella regione in cui sono entrambe valide, conduca all'ottenimento di una soluzione effettiva.

La soluzione più generale possibile può essere scritta come la somma di una soluzione particolare e della soluzione più generale possibile dell'equazione omogenea. Quest'ultima è ben nota nel caso dell'equazione di Poisson, mentre la prima si può ottenere con una procedura simile a quella già vista nel caso dello sviluppo post-Minkowskiano. Nello specifico, data una funzione f , si considera l'integrale

$$[\Delta^{-1}(r^B f)](\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} |\mathbf{x}'|^B f(\mathbf{x}'). \quad (3.80)$$

Se si sceglie un valore di B negativo e sufficientemente grande in modulo, il termine $|\mathbf{x}'|^B$ regolarizza qualunque possibile divergenza all'infinito possegga la funzione f . Nel nostro caso infatti, f corrisponde alla sorgente nell'equazione (3.79) e poiché si considerano in essa esclusivamente i termini che possiedono un ordine pari o inferiore a n , tale funzione all'infinito cresce come una qualche potenza positiva di $|\mathbf{x}'|$. Anche in questo caso si può dimostrare che l'integrale in equazione (3.80), se visto come una funzione di B , ammette un'unica continuazione analitica la piano complesso, fatta eccezione per il punto $B = 0$, per cui si osserva invece la comparsa di poli, e procedendo con la determinazione dello sviluppo di Laurent, si ricava, in modo analogo a quanto già fatto nella sottosezione precedente, che il coefficiente u_{zero} del termine B^0 soddisfa l'equazione $\nabla^2 u_{zero} = f$ e costituisce per tanto la soluzione particolare ricercata. Anche in questo caso quindi si ricorre all'operatore $\text{FB}_{B=0}$ e si scrive dunque

$$u_{zero} = \text{FP}_{B=0} \Delta^{-1}[r^B f]. \quad (3.81)$$

Poiché l'operatore $\text{FP}_{B=0} \Delta^{-1}[r^B f]$ coincide con $\Delta^{-1}f$ quando l'integrale di Poisson converge, si ha che le soluzioni ottenute per il primo ordine post-Newtoniano vengono riottenute con questo metodo generale.

Indicando con $\bar{h}^{\mu\nu}$ l'espansione di $h^{\mu\nu}$ fino all'ordine n -esimo, ossia

$$\bar{h}^{\mu\nu} \equiv \sum_{m=2}^n \frac{1}{c^m} {}^{(m)}h^{\mu\nu}, \quad (3.82)$$

se si sommano i primi n termini dell'equazione (3.79), è possibile scrivere la soluzione particolare $\bar{h}_{part}^{\mu\nu}$, appena individuata, in una forma più compatta:

$$\bar{h}_{part}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \mathcal{FP} \square^{-1} \bar{\tau}^{\mu\nu}, \quad (3.83)$$

dove $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ è la somma dei primi n termini dello sviluppo di $\tau^{\mu\nu}$.

L'ultima operazione da svolgere è quindi aggiungere alla soluzione particolare appena trovata la soluzione generale dell'omogenea $h_{hom}^{\mu\nu}$. Dal momento che è necessario imporre una condizione di regolarità nell'origine, si ha che quest'ultima è pari a

$$h_{hom}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \partial_L \left[\frac{\hat{R}_L^{\mu\nu}(t - r/c) - \hat{R}_L^{\mu\nu}(t + r/c)}{2r} \right], \quad (3.84)$$

dove gli $\hat{R}_L^{\mu\nu}(t-r/c)$ sono tensori qualsiasi, completamente simmetrici e con tutte le tracce pari a zero. È interessante osservare come tale soluzione risulti dispari sotto inversioni temporali e sia associata, di conseguenza, al modo in cui l'emissione di radiazione gravitazionale modifichi le equazioni del moto degli elementi della sorgente, come si è discusso nel testo che precede l'equazione (3.4)

3.4.3 Confronto tra le soluzioni

Una volta ottenuta sia la soluzione nella regione esterna, espressa sotto forma di espansione post-Minkowskiana, sia una soluzione per la zona vicina, scritta invece come espansione post-Newtoniana, non rimane che effettuare un confronto tra le due nella regione di sovrapposizione, ossia nella zona vicina esterna. Procedendo in questo modo, diviene possibile individuare una connessione tra il tensore energia-impulso della sorgente e i tensori introdotti nelle relazioni che vanno dalla (3.54) alla (3.60) e che compaiono anche nelle correzioni di ordine superiore al primo a causa della natura ricorsiva delle equazioni studiate.

Nella regione di sovrapposizione si ha $d/r < 1$ e pertanto è possibile scrivere ogni termine dell'espansione post-Newtoniana sotto forma di uno sviluppo in multipoli (espansione multipolare post-Newtoniana); inoltre, sempre nella medesima regione, è possibile scomporre ogni correzione post-Minkowskiana sotto forma di un'espansione post-Newtoniana, ossia in potenze di v/c . Si può quindi dimostrare che le componenti dell'elemento n -esimo dello sviluppo post-Minkowskiana $h_n^{\mu\nu}$, quando riespansi in potenze di v/c , sono dei seguenti ordini

$$h_n^{00} = O\left(\frac{1}{c^{2n}}\right), \quad (3.85)$$

$$h_n^{0i} = O\left(\frac{1}{c^{2n+1}}\right), \quad (3.86)$$

$$h_n^{ij} = O\left(\frac{1}{c^{2n}}\right), \quad (3.87)$$

per cui, se si è interessati alla determinazione della correzione di un dato ordine, si deve considerare solo un numero finito di termini dello sviluppo post-Minkowskiano.

Date queste premesse è ora possibile procedere con il confronto dello sviluppo multipolare post-Newtoniano e la riespansione post-Newtoniana della soluzione espressa sotto

forma di sviluppo post-Minkowskiano, ottenendo per i tensori I_L e J_L i seguenti risultati:

$$I_L(u) = \mathcal{FP} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-1}^1 dz \left\{ \delta_l(z) \hat{x}_L \Sigma - \frac{4(2l+1)\delta_{l+1}(z)}{c^2(l+1)(2l+3)} \hat{x}_{iL} \Sigma_i^{(1)} + \frac{2(2l+1)\delta_{l+2}(z)}{c^4(l+1)(l+2)(2l+5)} \hat{x}_{ijL} \Sigma_{ij}^{(2)} \right\} \left(u + z \frac{|\mathbf{x}|}{c}, \mathbf{x} \right), \quad (3.88)$$

$$J_L(u) = \mathcal{FP} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-1}^1 dz \varepsilon_{ab\langle i_l} \left\{ \delta_l(z) \hat{x}_{L-1\rangle a} \Sigma_b - \frac{(2l+1)\delta_{l+1}(z)}{c^2(l+2)(2l+3)} \hat{x}_{L-1\rangle ac} \Sigma_{bc}^{(1)} \right\} \left(u + z \frac{|\mathbf{x}|}{c}, \mathbf{x} \right), \quad (3.89)$$

dove Σ , Σ_i e Σ_{ij} sono dati da

$$\Sigma = \frac{\bar{\tau}^{00} + \bar{\tau}^{ii}}{c^2}, \quad (3.90)$$

$$\Sigma_i = \frac{\bar{\tau}^{0i}}{c}, \quad (3.91)$$

$$\Sigma_{ij} = \bar{\tau}^{ij}, \quad (3.92)$$

in cui si è usata la notazione introdotta nell'equazione (3.82); le derivate rispetto alla variabile u sono state indicate come nel paragrafo che segue l'equazione (3.53); la funzione $\delta_l(z)$ è definita invece come

$$\delta_l(z) \equiv \frac{(2l+1)!!}{2^{l+1}l!} (1-z^2)^l. \quad (3.93)$$

Quest'ultima possiede due proprietà significative: la prima è che il suo integrale nell'intervallo $[-1, 1]$ è pari ad uno, mentre la seconda è che nel limite $z \rightarrow \infty$ tende alla funzione delta di Dirac. Per poter effettuare le integrazioni rispetto alla variabile z , è conveniente introdurre la seguente relazione

$$\int_{-1}^1 dz \delta_l(z) f(u + z|\mathbf{x}|/c, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2l+1)!!}{2^k k! (2l+2k+1)!!} \left(\frac{|\mathbf{x}|}{c} \frac{\partial}{\partial u} \right)^{2k} \quad (3.94)$$

che ci consente di riesprimere tali termini in una serie di potenze di $1/c$. Inoltre è ora possibile ricavare la funzione $R_L^{\mu\nu}$, introdotta in equazione (3.84), ottenendo

$$R_L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{FP} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \hat{x}'_L \int_1^{+\infty} dz \delta_l(z) \mathcal{M}(\tau^{\mu\nu})(u - z|\mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}'), \quad (3.95)$$

dove $\mathcal{M}(\dots)$ indica lo sviluppo in multipoli della funzione tra parentesi.

Prima di procedere oltre è necessario effettuare un'ultima considerazione in merito alla possibilità di applicare l'approccio di Blanchet-Damour. Si è visto infatti come sia possibile effettuare un confronto tra la soluzione ottenuta nella regione esterna e quella

valida nella zona vicina solo a patto di disporre di una regione di sovrapposizione in cui entrambe sono valide; in particolare è necessario che il limite della seconda, pari sostanzialmente a λ , si trovi all'esterno della sorgente. Fintanto che si ha a che fare con sorgenti materiali, la condizione $v/c < 1$, assicura l'applicabilità dell'approccio almeno al primo ordine, tuttavia lo stesso non vale a priori per i termini successivi. Infatti per la correzione n -esima è necessario considerare tutti i termini dello sviluppo in multipoli fino a quello di ordine n , al quale corrisponde un'emissione distribuita su un certo set di frequenze, di cui il valore massimo è pari a $f_n = n(\omega_s/2\pi)$, dove ω_s è la velocità angolare tipica della sorgente. In questo caso quindi, il parametro che deve essere maggiore della dimensione tipica della sorgente, non è più λ , ma la lunghezza d'onda tagliata associata a f_n , ossia λ/n ed è possibile che quest'ultima sia effettivamente più piccola di d . Si può dunque concludere che l'espansione post-Newtoniana non può spingersi oltre l'ordine corrispondente al rapporto v/c . Ciò non rappresenta un particolare problema nel caso in cui la velocità tipica della sorgente sia molto più piccola della velocità della luce nel vuoto, in quanto i termini più rilevanti sono quelli aventi ordini più bassi; quando invece v/c si avvicina ad 1, non è più possibile trascurare le correzioni di ordine più elevato, le quali però, per quanto appena discusso, non possono essere calcolate con l'approccio di Blanchet-Damour. Segue dunque che in tali situazioni, non sia possibile impiegare tale tecnica risolutiva.

3.4.4 Determinazione del campo radiativo all'infinito

Per poter determinare le correzioni alla propagazione delle onde gravitazionali e i vari effetti derivanti dai termini successivi dell'espansione post-Newtoniana, è necessario studiare le proprietà della soluzione da noi ottenuta in un infinito nullo futuro, ossia quando $r \rightarrow \infty$, con $u = t - r/c$ mantenuto fisso. In tale limite, si determina, per l'elemento n -esimo, la seguente formula

$$h_n^{\mu\nu} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n-1} G_{L(kpn)}^{\mu\nu}(u) \frac{\hat{n}_L (\log r)^p}{r^k}. \quad (3.96)$$

Grazie ai lavori di Bondi, Sachs e Penrose, è noto come la presenza del termine $(\log r)^p$ sia riconducibile esclusivamente alla scelta del sistema di coordinate utilizzato e che per tanto non possieda alcun significato fisico; si può allora sfruttare l'esistenza di opportune coordinate, dette radiative, che consentono di eliminare la dipendenza da tale termine. Queste ultime vengono indicate mediante l'utilizzo di lettere maiuscole, in particolare si ha $X^\mu = (T, \mathbf{X})$, la distanza dall'origine $R = |\mathbf{X}|$, il tempo ritardato $U = T - R/c$ e il versore $\mathbf{N} = \mathbf{X}/R$, inoltre, in tale sistema di coordinate, la metrica si scrive $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}$. Effettuando tale sostituzione si ottiene quindi

$$H_n^{\mu\nu} = \sum_{k=1}^{+\infty} K_{L(kn)}^{\mu\nu}(U) \frac{\hat{N}_L}{R^k}, \quad (3.97)$$

una relazione, che se confrontato con l'equazione (3.96) può essere sfruttato per determinare, ordine per ordine, la trasformazione che consente di passare da coordinate

armoniche a coordinate radiative.

Si può ora procedere con l'introduzione di due famiglie di tensori completamente simmetrici e a traccia nulla, detti momenti di multipolo radiativi o momenti di multipolo all'infinito, e che verranno indicati con U_L e V_L . Questi si definiscono trascurando tutti i termini di H_{ij} proporzionali ad una potenza di $1/R$ maggiore o uguale alla seconda, e proiettando quanto ottenuto nella gauge TT mediante l'operatore Λ_{ijab} , (definito in equazione (1.19)), così da ottenere la relazione

$$H_{ij}^{TT}(U, \mathbf{N}) = \frac{4G}{c^2 R} \Lambda_{ijab}(\mathbf{N}) \sum_{l=2}^{+\infty} \frac{1}{c^l l!} \left\{ N_{L-2} U_{abL-2}(U) - \frac{2l}{c(l+1)} N_{cL-2} \varepsilon_{cd(a} V_{b)dL-2}(U) \right\}. \quad (3.98)$$

La determinazione di tali tensori al primo ordine in $1/c$ è particolarmente semplice, in quanto, nella prima correzione post-Minkowskiana data in equazione (3.53), è possibile trascurare il termine φ^μ , essendo questo solamente un effetto di gauge a livello lineare, e quindi vale l'uguaglianza $h_1^{ij} = k_1^{ij}$, inoltre dall'equazione (3.96), si evince che a questo ordine, le coordinate radiative coincidono con quelle armoniche. Sfruttando quindi la relazione valida per le funzioni della variabile u

$$\partial_L f(u) = \frac{(-1)^l}{c^l} n_L f^{(l)}(u), \quad (3.99)$$

estraendo il termine $1/r$ e applicando l'operatore Λ_{ijab} , si ricava immediatamente che

$$U_L(U) = I_L^{(l)}(U), \quad (3.100)$$

$$V_L(U) = J_L^{(l)}(U). \quad (3.101)$$

Per quanto riguarda invece la determinazione delle correzioni del secondo ordine, si utilizza il metodo iterativo presentato nelle sezioni precedenti, iniziando da $h_1^{\mu\nu}$ e considerando esclusivamente i termini I e I_{ij} , che fino all'ordine 2.5 post-Newtoniano coincidono rispettivamente con la massa totale del sistema M e il quadrupolo di massa M_{ij} . Si scompone allora la dipendenza da questi due termini, introducendo i due tensori $h_{(M)}^{\mu\nu}$ e $h_{(M_{ij})}^{\mu\nu}$, tramite

$$h_1^{\mu\nu} \equiv h_{(M)}^{\mu\nu} + h_{(M_{ij})}^{\mu\nu}, \quad (3.102)$$

e le cui componenti possono essere determinate esplicitamente mediante le equazioni dalla (3.54) alla (3.56):

$$h_{(M)}^{00} = -\frac{4M}{c^2 r}, \quad (3.103)$$

$$h_{(M)}^{0i} = 0, \quad (3.104)$$

$$h_{(M)}^{ij} = 0, \quad (3.105)$$

$$h_{(M_{ij})}^{00} = -\frac{2}{c^2} \partial_k \partial_l \left[\frac{1}{r} M_{kl}(u) \right], \quad (3.106)$$

$$h_{(M_{ij})}^{0i} = \frac{2}{c^3} \partial_k \left[\frac{1}{r} M_{ki}^{(1)}(u) \right], \quad (3.107)$$

$$h_{(M_{ij})}^{ij} = -\frac{2}{c^4} \frac{1}{r} M_{ij}^{(2)}(u). \quad (3.108)$$

Il termine $h_2^{\mu\nu}$ si determina quindi risolvendo l'equazione (3.49), la quale è caratterizzata dalla presenza di un termine di sorgente $N^{\mu\nu}[h_1, h_1]$ quadratico e che può per tanto essere scisso nella somma di tre distinti contributi: il primo ($h_{(M \times M)}^{\mu\nu}$) derivante esclusivamente dal termine di monopolo, il secondo ($h_{(M_{ij} \times M_{kl})}^{\mu\nu}$) legato esclusivamente del termine di quadrupolo e il terzo ($h_{(M \times M_{ij})}^{\mu\nu}$) dipendente da entrambi. Si può dunque scrivere:

$$h_2^{\mu\nu} = h_{(M \times M)}^{\mu\nu} + h_{(M \times M_{ij})}^{\mu\nu} + h_{(M_{ij} \times M_{kl})}^{\mu\nu}. \quad (3.109)$$

La determinazione del primo termine che compare in equazione (3.109) è particolarmente semplice, infatti l'unica componente non nulla del tensore $h_{(M)}^{\mu\nu}$ è $h_{(M)}^{00}$ e di conseguenza è immediato, utilizzando l'equazione (3.47), determinare $N^{\mu\nu}[h_{(M)}, h_{(M)}]$. Si ha ad esempio

$$N^{00}[h_{(M)}, h_{(M)}] = -\frac{14M^2}{c^4 r^4}, \quad (3.110)$$

che se sostituito nella (3.49) conduce all'equazione

$$\square h_{(M \times M)}^{00} = -\frac{14M^2}{c^4 r^4}, \quad (3.111)$$

e osservando il fatto che il termine a destra di quest'ultima risulta indipendente sia dalla coordinata temporale e che dalle coordinate angolari, si ottiene infine la seguente equazione

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r h_{(M \times M)}^{00}] = -\frac{14M^2}{c^4 r^4}, \quad (3.112)$$

la cui soluzione, corrispondente alla condizione al contorno che la metrica tenda all'infinito a $\eta_{\mu\nu}$, è data da:

$$h_{(M \times M)}^{00} = -\frac{7M^2}{c^4 r^2}. \quad (3.113)$$

Procedendo in maniera analoga si ottiene anche

$$h_{(M \times M)}^{0i} = 0, \quad (3.114)$$

$$h_{(M \times M)}^{ij} = -\frac{n_i n_j M^2}{c^4 r^2}, \quad (3.115)$$

e si può dunque concludere che il termine $h_{(M \times M)}^{\mu\nu}$ non dà alcun contributo nel limite infinito futuro, in quanto le sue componenti non nulle sono comunque proporzionali ad $1/r^2$ e di conseguenza trascurabili.

Per quanto riguarda invece il termine misto, si ha che la corrispondente sorgente, in generale, assume una forma del tipo

$$N^{\mu\nu}[h_{(M)}, h_{(M_{ij})}] = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{n_L}{r^k} H_L^{(k)}(u), \quad (3.116)$$

dove $H_L^{(k)}(u)$ è una qualche funzione; tale proprietà deriva dal fatto che $h_{(M)}^{\mu\nu}$ è pari ad una costante per $1/r$, mentre $h_{(M_{ij})}^{\mu\nu}$ è data dalla somma di termini proporzionali al prodotto tra una potenza negativa di r e una funzione di u , infine la presenza di derivate spaziali applicate a tali funzioni comporta la comparsa del fattore n_L , infatti $\partial_i r = n_i$. Per determinare il tensore $h_{(M \times M_{ij})}^{\mu\nu}$ è quindi necessario risolvere l'equazione corrispondente ad ogni termine che compare nella relazione (3.116) e sommare poi tutte le soluzioni così ottenute. In questo caso la risoluzione prevede, come già discusso, l'utilizzo dell'approccio di Blanchet-Damour e quindi si deve effettuare il calcolo della parte finita dell'integrale ritardato, ossia

$$\square_{ret}^{-1}[n_L r^{B-k} H(u)], \quad (3.117)$$

il cui risultato varia molto se si considera il caso $k = 2$, o il caso $k \geq 3$. Infatti, per quest'ultimo, con l'aggiunta della condizione $k \leq l + 2$, che è sempre verificata nei casi particolari che sono stati considerati, si ottiene

$$FP_{B=0} \square_{ret}^{-1}[n_L r^{B-k} H(u)] = n_L \sum_{j=0}^{k-3} \frac{c_{ijk}}{r^{j+1}} \frac{d^{k-3-j}}{du^{k-3-j}} H(u), \quad (3.118)$$

dove sono stati introdotti dei coefficienti indicati con c_{jkl} e definiti tramite la relazione seguente

$$c_{jkl} = -\frac{2^{k-3-j} (k-3)! (l+2-k)! (l+j)!}{(l+k-2)! j! (l-j)!}. \quad (3.119)$$

Tale soluzione ha la proprietà di essere locale nel tempo, nel senso che il valore che assume ad un dato u , dipende esclusivamente dalla funzione $H(u)$ (per indicare il fatto che non si sta sommando su l , si sono omessi gli indici di $H_L(u)$) e da un numero finito di derivate di quest'ultima, calcolate per lo stesso valore del tempo ritardato, per tanto tali termini vengono detti "istantanei".

Per il caso $k = 2$, si ottiene invece la seguente soluzione

$$\square_{ret}^{-1} \left[\frac{n_L}{r^2} H \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = -\frac{n_L}{r} \int_r^{+\infty} dz Q_l \left(\frac{z}{r} \right) H \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad (3.120)$$

dove Q_l è la funzione di Legendre del secondo tipo, la cui presenza fa sì che l'integrale ritardato divenga convergente e di conseguenza uguale alla parte finita di se stesso, e che presenta un comportamento asintotico del tipo

$$Q_l(x) = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-1}{2} \right) - a_l + O[(x-1) \log(x-1)], \quad (3.121)$$

dove $a_l \equiv \sum_{k=1}^l k^{-1}$. Se si sostituisce tale sviluppo nell'integrale e si effettua un cambio di variabile di integrazione, passando da z a $y \equiv (z - r)/c$, si ottiene

$$\square_{ret}^{-1} \left[\frac{n_L}{r^2} H \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{cn_L}{2r} \int_0^{+\infty} dy H \left(t - \frac{r}{c} - y \right) \left[\log \left(\frac{cy}{2r} \right) + 2a_l \right] + O \left(\frac{\log r}{r^2} \right), \quad (3.122)$$

che scala come $1/r$ e che di conseguenza contribuisce al campo radiativo. È interessante osservare come in questo caso la soluzione non dipenda esclusivamente dal valore che la funzione $H(u)$ assume istantaneamente, ma che al contrario, si abbia un contributo per ogni valore di u da $-\infty$ a $t - r/c$ con t il tempo attuale; tale influenza da parte della storia passata della sorgente, fa sì che questi termini vengano definiti "ereditari".

Si può ora effettuare il calcolo delle componente 00 di $h_{(M \times M_{ij})}^{\mu\nu}$, iniziando con la determinazione della funzione sorgente a partire da quanto è stato ricavato per $h_{(M)}$ e $h_{(M_{ij})}$, ossia

$$N^{00}[h_{(M)}, h_{(M_{ij})}] = -\frac{8M}{r^2 c^4} n_i n_j M_{ij}^{(4)} + O \left(\frac{1}{r^3} \right), \quad (3.123)$$

che se sostituito in equazione (3.120), consente di ottenere

$$h_{(M \times M_{ij})}^{00} = \frac{8M}{rc^4} n_i n_j \int_r^{+\infty} dz Q_2 \left(\frac{z}{r} \right) M_{ij}^{(4)}(t - z/c) + \dots, \quad (3.124)$$

in cui è stato omesso il contributo dato dai termini istantanei, tenendo conto esclusivamente di quelli ereditari. Procedendo in modo analogo è possibile determinare anche le altre componenti di $h_{(M \times M_{ij})}^{\mu\nu}$, oltre a quelle di $h_{(M_{ij} \times M_{kl})}^{\mu\nu}$, verificando che anche queste possiedono dei termini ereditari.

Procedendo invece alla determinazione del contributo radiativo dato da $h_2^{\mu\nu}$, è sufficiente sfruttare lo sviluppo asintotico contenuto in (3.122), che se confrontato con la definizione di U_L , permette di ricavare

$$U_L(u) = M_L^{(l)}(u) + \frac{2GM}{c^3} \int_0^\infty d\tau M_L^{(l+2)}(u - \tau) \left[\log \left(\frac{c\tau}{2r} + \kappa_l \right) \right] + O \left(\frac{1}{c^5} \right), \quad (3.125)$$

dove si è introdotta la costante κ_l , definita come

$$\kappa_l = \frac{2l^2 + 5l + 4}{l(l+1)(l+2)} + \sum_{k=1}^{l-2} \frac{1}{k}. \quad (3.126)$$

Il termine $\log(c\tau/2r)$, come si è già osservato all'inizio della sezione, può essere eliminato passando a coordinate radiative, per le quali si scopre che il tempo ritardato U è connesso alle coordinate armoniche (t, r) dalla relazione

$$U = t - \frac{r}{c} - \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + O(G^2), \quad (3.127)$$

dove r_0 è una costante qualunque che non possiede alcuna interpretazione fisica, potendo essere liberamente scelto nella definizione delle coordinate radiative, e da cui quindi la

soluzione finale non può dipendere. Effettuando il cambio di sistema di coordinate, si ottiene quindi

$$U_L(U) = M_L^{(l)}(U) + \frac{2GM}{c^3} \int_0^\infty d\tau M_L^{(l+2)}(U - \tau) \left[\log \left(\frac{c\tau}{2r_0} + \kappa_l \right) \right] + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad (3.128)$$

e similmente si ricava per $V_L(U)$

$$V_L(U) = S_L^{(l)}(U) + \frac{2GM}{c^3} \int_0^{+\infty} d\tau S_L^{(l+2)}(U - \tau) \left[\log \left(\frac{c\tau}{2r_0} + \pi_l \right) \right] + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad (3.129)$$

dove la costante π_l è pari a

$$\pi_l = \frac{l-1}{l(l+1)} + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{k}. \quad (3.130)$$

Ottenuto il risultato generale, si può considerare un caso particolare: si supponga di voler studiare la produzione di onde gravitazionali da parte di un sistema binario fino all'ordine 3PN (un termine di ordine $O(1/c^n)$ può anche essere detto di ordine $n/2$ PN); per poter riuscire in tale obiettivo, è necessario determinare il tensore U_{ij} fino al medesimo ordine e ciò può essere fatto utilizzando proprio le relazioni individuate, infatti si ottiene

$$\begin{aligned} U_{ij} = & M_{ij}^{(2)} + \frac{2GM}{c^3} \int_0^{+\infty} d\tau M_{ij}^{(4)}(U - \tau) \left[\log \left(\frac{c\tau}{2r_0} \right) + \frac{11}{12} \right] \\ & - \frac{2G}{7c^5} \int_0^{+\infty} d\tau M_{a\langle i}^{(3)}(U - \tau) M_{j\rangle a}^{(3)}(U - \tau) \\ & - \frac{G}{c^5} \left[\frac{2}{7} M_{a\langle i}^{(3)} M_{j\rangle a}^{(2)} + \frac{5}{7} M_{a\langle i}^{(4)} M_{j\rangle a}^{(1)} - \frac{1}{7} M_{a\langle i}^{(5)} M_{j\rangle a} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ab\langle i} M_{j\rangle a}^{(4)} S_b \right] \\ & + \frac{2G^2 M^2}{c^6} \int_0^{+\infty} d\tau M_{ij}^{(5)}(U - \tau) \left[\log^2 \left(\frac{c\tau}{2r_0} \right) + \frac{57}{70} \log \left(\frac{c\tau}{2r_0} \right) \right. \\ & \left. + \frac{124627}{44100} \right] + O\left(\frac{1}{c^7}\right), \end{aligned} \quad (3.131)$$

in cui si può osservare la presenza di tre termini ereditari: uno di ordine 1.5PN nella prima riga e che deriva dal termine $N^{\mu\nu}[h_{(M)}, h_{(M_{ij})}]$; un secondo di ordine 2.5PN contenuto nella seconda riga e che è connesso a $N^{\mu\nu}[h_{(M_{ij})}, h_{(M_{ij})}]$; infine un ultimo nella penultima e nell'ultima riga, il quale corrisponde ad una seconda correzione post-Minkowskiana $h_3^{\mu\nu}$, essendo originato da un termine $M^{\mu\nu}[h_{(M)}, h_{(M)}, h_{(M_{ij})}]$ (vedi equazione (3.50)). Nella terza riga dell'equazione (3.131) è inoltre possibile notare la presenza di un termine istantaneo, il quale è anche esso associato alla sorgente $N^{\mu\nu}[h_{(M_{ij})}, h_{(M_{ij})}]$.

3.4.5 Interpretazione fisica dei termini ereditari

L'interpretazione fisica dei termini ereditari non è immediata, in quanto è risaputo che se si ha un'onda che propaga all'interno di uno spazio-tempo piatto e alla velocità della luce nel vuoto c , allora il valore che assume il campo trasportato, in un determinato

istante t_0 e ad una distanza r_0 dalla sorgente, dipende esclusivamente dalle caratteristiche di quest'ultima al tempo ritardato $u_0 = t_0 - r_0/c$, mentre, come si è già osservato, nei termini ereditari compare una dipendenza da tutta la storia evolutiva della sorgente fino all'istante u_0 . Tale comportamento anomalo va ricondotto al fatto che il sistema che produce le onde gravitazionali genera inevitabilmente anche una curvatura nello spazio-tempo, la quale, a sua volta, causa l'insorgenza di una serie di fenomeni che comportano l'introduzione di ritardi nella propagazione. Complessivamente quindi si ha che tali onde non viaggiano esclusivamente con una velocità pari a c , ma con tutte le possibili velocità maggiori o uguali a quest'ultima.

Volendo entrare più nel dettaglio, è conveniente effettuare un parallelo con la teoria dei campi e, in particolare, introdurre i gravitoni, ossia le particelle che sono associate all'interazione gravitazionale, nonostante non siano stati ancora osservati, ne tanto meno sia stato possibile individuare una teoria in grado di descriverne opportunamente le eventuali proprietà. Tali particelle, in una teoria dei campi, sono associate al termine di quadrupolo M_{ij} , per cui si ha che il contributo nella prima linea dell'equazione (3.131), dipendendo sia da quest'ultimo tensore, che da M , può essere interpretato come uno scattering dei gravitoni sulla curvatura esterna generata dalla sorgente; in modo analogo, il termine nella seconda linea può essere visto come uno scattering gravitone-gravitone, mentre il termine associato a $M^{\mu\nu}[h_{(M)}, h_{(M)}, h_{(M_{ij})}]$ come una correzione successiva allo scattering dei gravitoni sulla curvatura generata dalla sorgente. In questo modo quindi i gravitoni propagano localmente sempre alla velocità della luce, ma vengono introdotti dei ritardi che causano una trasmissione su scale più ampie a velocità che possono risultare anche inferiori a c .

Si può ora effettuare una distinzione tra due tipologie di termini ereditari, a seconda che nel loro integrale compaia o meno il logaritmo della variabile di integrazione. Ad esempio il termine contenuto nella seconda riga dell'equazione (3.131) non contiene tale fattore; allora effettuando un cambio di variabile, passando da τ a $V \equiv U - \tau$, si ottiene

$$F_{ij} \equiv \int_{-\infty}^U dV M_{a\langle i}^{(3)}(V) M_{j\rangle a}^{(3)}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} dV \mathcal{K}(U, V) M_{a\langle i}^{(3)}(V) M_{j\rangle a}^{(3)}(V), \quad (3.132)$$

dove $\mathcal{K}(U, V)$ è pari a 0 per $V > U$ e ad 1 se altrimenti. Se ora si considera un sistema che inizialmente presenta tutti i momenti di multipolo costanti nel tempo, che quindi inizia ad un certo istante ad emettere onde gravitazionali per poi interromperne la produzione ad un tempo che corrisponde, per un osservatore a distanza r , al tempo ritardato U_0 , allora per un qualunque U successivo ad U_0 è possibile scomporre l'integrale in equazione (3.132) nella somma di due termini distinti, sfruttando la proprietà $\int_{-\infty}^U dV = \int_{-\infty}^{U_0} dV + \int_{U_0}^U dV$, e poiché il secondo di questi è pari a zero, in quanto si ha per ipotesi che la funzione integranda si annulla nell'intervallo temporale corrispondente, si ottiene il significativo risultato $F_{ij}(U) = F_{ij}(U_0)$ per ogni $U \geq U_0$.

Tale tipologia di termine ereditario viene detto effetto di memoria, a causa del fatto che, per la presenza di $\mathcal{K}(U, V)$ nella funzione integranda, il contributo principale proviene dalla storia passata e non da quella recente, in particolar modo esso causa la presenza di un segnale anche in seguito allo spegnimento della sorgente (Chakraborty e Kar, 2022; Christodoulou, 1991).

Come ultima considerazione in merito all'effetto di memoria, è interessante osservare come, invece, la derivata di F_{ij} risulti istantanea, facendo quindi sì che anche il flusso di energia, funzione di \dot{h}_{ij}^{TT} , sia istantaneo.

Passiamo adesso alla seconda tipologia di termine ereditario, di cui fa ad esempio parte il tensore contenuto nella prima riga dell'equazione (3.131). Anche in questo caso si può attuare la sostituzione $\tau \rightarrow V \equiv U - \tau$, ottenendo

$$G_{ij} \equiv \int_{-\infty}^U dV M_{ij}^{(4)}(V) \log \left(\frac{U - V}{2P_0} \right), \quad (3.133)$$

con $P_0 \equiv r_0/c$, e se poi si scompone l'integrale tramite $\int_{-\infty}^U dV = \int_{-\infty}^{U-2P} dV + \int_{U-2P}^U dV$, dove P è un numero positivo, integrando due volte per parti il primo termine e sfruttando il fatto che le derivate di M_{ij} sono nulle all'infinito, si ottiene

$$\begin{aligned} G_{ij} = & \frac{1}{2P} M_{ij}^{(2)}(U - 2P) + \int_{U-2P}^U dV M_{ij}^{(4)}(V) \log \left(\frac{U - V}{2P_0} \right) \\ & - \int_{-\infty}^{U-2P} \frac{dV}{(U - V)^2} M_{ij}^{(2)}(V). \end{aligned} \quad (3.134)$$

In tale equazione si può effettuare una distinzione tra i termini nella prima riga, che si riferiscono esclusivamente ad un passato "recente" $U - 2P \leq V \leq U$, e il termine nella seconda riga, che contiene invece i contributi di un passato più distante; questi ultimi sono contraddistinti dalla presenza all'interno dell'integrale di un fattore $1/(U - V)^2$ che, a differenza di quanto avviene per l'effetto di memoria, riduce il contributo dato da tutto ciò che è accaduto a partire da una certa distanza temporale dall'istante considerato. Inoltre si deve osservare che i termini nella prima linea, pur riferendosi ad una fase evolutiva della sorgente più vicina al momento dell'osservazione, sono comunque contraddistinti da una velocità di propagazione inferiore a c , infatti si ha, ad esempio, che il tensore $M_{ij}^{(2)}$ non è valutato in U , ma al contrario, in $U - 2P$. Complessivamente tale contributo viene detto integrale di "coda".

Volendo concludere è possibile riconoscere tre distinte fasi nell'osservazione delle onde gravitazionali prodotte da una sorgente che ad un certo punto si spegne: un fronte d'onda dovuto a termini istantanei, una coda che si propaga ad una velocità inferiore e la cui intensità si riduce nel tempo, e infine un contributo costante dovuto dall'effetto di memoria.

3.5 Calcolo della potenza

Per determinare le correzioni alla potenza nel dominio della frequenza, non è necessario calcolare mediante tecniche numeriche, le correzioni alla metrica. Infatti, la relazione che permette di calcolare la frequenza, è in questo caso

$$\begin{aligned} P_{GW}(t) = & \frac{G}{45c^5} \left\langle \partial_t \left(\ddot{M}_{ij}(t) - \frac{2G}{7c^5} \int_{-\infty}^t dV \ddot{M}_{a(i}(V) \ddot{M}_{j)a}(V) \right) \right. \\ & \left. \times \partial_t \left(\ddot{M}_{ij}(t) - \frac{2G}{7c^5} \int_{-\infty}^t dV \ddot{M}_{a(i}(V) \ddot{M}_{j)a}(V) \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.135)$$

e svolgendo le due derivate che interessano tutti i termini contenuti nelle due parentesi tonde, si ottiene

$$P_{GW}(t) = \frac{G}{45c^5} \left\langle \left(\ddot{M}_{ij}(t) - \frac{2G}{7c^5} \ddot{M}_{a\langle i}(t) \ddot{M}_{j\rangle a}(t) \right) \right. \\ \left. \times \left(\ddot{M}_{ij}(t) - \frac{2G}{7c^5} \ddot{M}_{a\langle i}(t) \ddot{M}_{j\rangle a}(t) \right) \right\rangle. \quad (3.136)$$

Nello svolgere il prodotto che compare in equazione (3.136), è possibile trascurare il termine proporzionale a $\langle \ddot{M}_{a\langle i}(t) \ddot{M}_{j\rangle a}(t) \ddot{M}_{b\langle i}(t) \ddot{M}_{j\rangle b}(t) \rangle$, in quanto di ordine superiore a quello considerato nello studio che si sta svolgendo. Si ricava quindi

$$P_{GW}(t) \simeq \frac{G}{45c^5} \langle \ddot{M}_{ij}(t) \ddot{M}_{ij}(t) \rangle - \frac{4G^2}{315c^{10}} \langle \ddot{M}_{ij}(t) \ddot{M}_{a\langle i}(t) \ddot{M}_{j\rangle a}(t) \rangle \quad (3.137)$$

e di conseguenza la correzione alla potenza connessa all'effetto di memoria $\Delta P_{GW}(t)$ è data da

$$\Delta P_{GW}(t) = -\frac{4G^2}{315c^{10}} \langle \ddot{M}_{ij}(t) \ddot{M}_{a\langle i}(t) \ddot{M}_{j\rangle a}(t) \rangle. \quad (3.138)$$

Il tensore $\ddot{M}_{ai}(t) \ddot{M}_{ja}(t)$ è simmetrico per scambio dei due indici i e j , tuttavia la sua traccia non è nulla, pertanto si può scrivere (senza indicare esplicitamente la dipendenza da U)

$$\ddot{M}_{a\langle i} \ddot{M}_{j\rangle a} = \ddot{M}_{ai} \ddot{M}_{ja} - \frac{1}{3} \left[\left(\ddot{M}_{11} \right)^2 + 2 \left(\ddot{M}_{12} \right)^2 + \left(\ddot{M}_{22} \right)^2 \right] \delta_{ij} \quad (3.139)$$

e di conseguenza

$$\ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{a\langle i} \ddot{M}_{j\rangle a} = \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{ai} \ddot{M}_{ja} - \frac{1}{3} \left[\left(\ddot{M}_{11} \right)^2 + 2 \left(\ddot{M}_{12} \right)^2 + \left(\ddot{M}_{22} \right)^2 \right] \text{Tr} [\ddot{M}_{ij}]. \quad (3.140)$$

Poiché la determinazione della traccia è un operatore lineare, si ha che $\text{Tr}[\ddot{M}_{ij}] = \text{Tr}[\ddot{M}_{ji}] = 0$, dove il secondo uguale discende dalla definizione di M_{ij} ; per tanto, effettuando in modo esplicito le tre sommatorie presenti nell'equazione (3.140), si determina la seguente formula per $\Delta P_{GW}(t)$

$$\Delta P_{GW}(t) = -\frac{4G^2}{315c^{10}} \left[\left(\ddot{M}_{11} \right)^3 + \left(\ddot{M}_{22} \right)^3 + \left(\ddot{M}_{33} \right)^3 + 3\ddot{M}_{11} \left(\ddot{M}_{12} \right)^2 + 3\ddot{M}_{22} \left(\ddot{M}_{12} \right)^2 \right] \quad (3.141)$$

Nel grafico in figura 3.2 si riporta tale correzione alla potenza scegliendo $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = 1M_\odot$ e $m_e = 1M_\odot$. A differenza di quanto accade per il termine di ordine dominante, tale contributo risulta dispari per inversione temporale. Tale proprietà discende dalla caratteristica fondamentale dell'effetto di memoria, ossia il mutamento che si osserva nella metrica tra la fase che precede l'inizio dell'emissione di onde gravitazionali e quella che segue lo spegnimento della sorgente.

Per determinare la potenza emessa per unità di frequenza è conveniente partire dalla relazione valida per l'energia totale emessa ΔE

$$\Delta E_{GW} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{GW}(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} P_{GW}(f) df \quad (3.142)$$

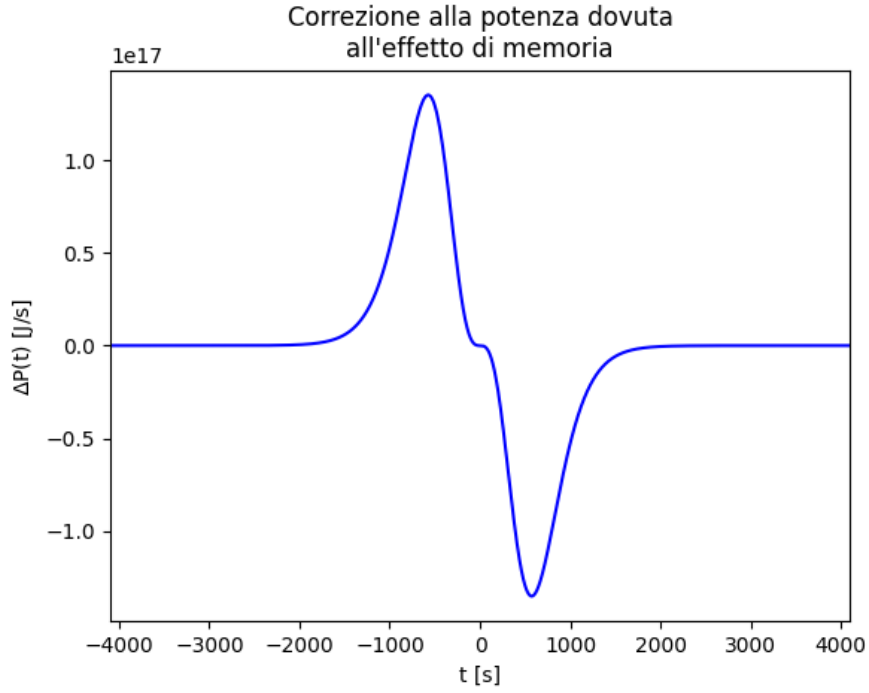


Figura 3.2: Correzione alla potenza di un singolo evento dovuta all'effetto di memoria. I valori dei parametri scelti sono $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportata tale correzione alla potenza, mentre su quello delle ascisse è presente il tempo.

la quale permette di individuare un legame tra la grandezza da noi ricercata e la funzione $P(t)$. È quindi necessario, sfruttando le proprietà delle trasformate di Fourier, convertire gli integrali temporali dei vari termini presenti in equazione (3.141) in integrali nel dominio delle frequenze. I passaggi matematici richiesti per ognuno di essi sono sostanzialmente identici, per tanto si riporta il calcolo effettivo solo per il termine $(M_{11}^{(3)})^3$, ossia

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\ddot{M}_{11}(t) \right)^3 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} df' \int_{-\infty}^{+\infty} df'' \\
 &\quad \times \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right)^* (f) \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right) (f') \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right) (f'') e^{-i(-f+f'+f'')t} \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} df' \int_{-\infty}^{+\infty} df'' \\
 &\quad \times \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right)^* (f) \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right) (f') \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right) (f'') \delta(f'' - (f - f')) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} df' \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right) (f') \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right) (f - f') \right] \\
 &\quad \times \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right)^* (f), \tag{3.143}
 \end{aligned}$$

dove il simbolo $*$ è utilizzato per indicare il complesso coniugato di un numero. La relazione appena scritta può essere ulteriormente semplificata sfruttando una serie di proprietà valide per le trasformate di Fourier: per una funzione qualsiasi A , si ha

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(A))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \mathcal{F}(A) e^{ift} = 2\pi A(-t), \tag{3.144}$$

un'uguaglianza da cui discende immediatamente un legame diretto tra l'operatore trasformata e l'operatore antitrasformata, ossia

$$\mathcal{F}^{-1}(A)(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(A)(-t). \tag{3.145}$$

Utilizzando la relazione (3.144) e (3.145) è quindi possibile ottenere il seguente risultato per il prodotto di convoluzione delle trasformate di due funzioni A e B

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(A) * \mathcal{F}(B))(t) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}(A) * \mathcal{F}(B))(-t) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}(A))(-t) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{F}(B))(-t) \\
 &= 2\pi A(t) \cdot B(t), \tag{3.146}
 \end{aligned}$$

da cui discende immediatamente che

$$(\mathcal{F}(A) * \mathcal{F}(B))(f) = 2\pi \mathcal{F}(A \cdot B)(f). \tag{3.147}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\ddot{M}_{11}(t) \right)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11}^2 \right) (f) \cdot \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right)^* (f), \tag{3.148}$$

Complessivamente si ottiene quindi per la correzione allo spettro di potenza dovuto all'effetto di memoria $\Delta P_{GW}(f)$

$$\begin{aligned} \Delta P_{GW}(f) = & -\frac{4G^2}{315c^{10}} \left\{ \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11}^2 \right) (f) \cdot \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right)^* (f) \right. \\ & + \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{22}^2 \right) (f) \cdot \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{22} \right)^* (f) \\ & + \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{33}^2 \right) (f) \cdot \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{33} \right)^* (f) \\ & \left. + 3\mathcal{F} \left(\ddot{M}_{12}^2 \right) (f) \cdot \left[\mathcal{F} \left(\ddot{M}_{11} \right) (f) + \mathcal{F} \left(\ddot{M}_{22} \right) (f) \right]^* \right\} \end{aligned} \quad (3.149)$$

La funzione $\Delta P_{GW}(f)$ è stata calcolata numericamente, partendo dalle derivate cubiche delle componenti del quadrupolo che risultano pari a

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{11}(t) = & ma^2 \{ [(3 - e^2) \sinh 2\xi(t) - 4e \sinh \xi(t)] \ddot{\xi}(t) \\ & + 6 [(3 - e^2) \cosh 2\xi(t) - 2e \cosh \xi(t)] \dot{\xi}(t) \ddot{\xi}(t) \\ & + 4 [(3 - e^2) \sinh 2\xi(t) - e \sinh \xi(t)] [\dot{\xi}(t)]^3 \}, \end{aligned} \quad (3.150)$$

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{12}(t) = & -3ma^2 \sqrt{e^2 - 1} \{ [\cosh 2\xi(t) - e \cosh \xi(t)] \ddot{\xi}(t) \\ & + 3 [2 \sinh 2\xi(t) - e \sinh \xi(t)] \dot{\xi}(t) \ddot{\xi}(t) \\ & + [4 \cosh 2\xi(t) - e \cosh \xi(t)] [\dot{\xi}(t)]^3 \}, \end{aligned} \quad (3.151)$$

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{22}(t) = & ma^2 \{ [(2e^2 - 3) \sinh 2\xi(t) + 2e \sinh \xi(t)] \ddot{\xi}(t) \\ & + 6 [(2e^2 - 3) \cosh 2\xi(t) + e \cosh \xi(t)] \dot{\xi}(t) \ddot{\xi}(t) \\ & + 2 [2(2e^2 - 3) \sinh 2\xi(t) + e \sinh \xi(t)] [\dot{\xi}(t)]^3 \}, \end{aligned} \quad (3.152)$$

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{33}(t) = & -ma^2 \{ [e^2 \sinh 2\xi(t) + 2e \sinh \xi(t)] \ddot{\xi}(t) \\ & + 6 [e^2 \cosh 2\xi(t) + e \cosh \xi(t)] \dot{\xi}(t) \ddot{\xi}(t) \\ & + 2 [2e^2 \sinh 2\xi(t) + e \sinh \xi(t)] [\dot{\xi}(t)]^3 \}, \end{aligned} \quad (3.153)$$

dove

$$t = A[e \sinh(\xi(t)) - \xi(t)], \quad (3.154)$$

$$\dot{\xi}(t) = \frac{1}{A[e \cosh \xi(t) - 1]}, \quad (3.155)$$

$$\ddot{\xi}(t) = -\frac{e \sinh \xi(t)}{A^2[e \cosh \xi(t) - 1]^3}, \quad (3.156)$$

$$\ddot{\xi}(t) = e \frac{2e \sinh^2 \xi(t) + \cosh \xi(t) - e}{A^3[e \cosh \xi(t) - 1]^5}. \quad (3.157)$$

Nelle diverse derivate di ξ in cui A è una costante definita come

$$A \equiv \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}. \quad (3.158)$$

Scegliendo $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = 1M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$, è stato realizzato un grafico di $\Delta P(f)$, che è riportato in figura 3.3. L'ultima operazione svolta è stato quindi il calcolo

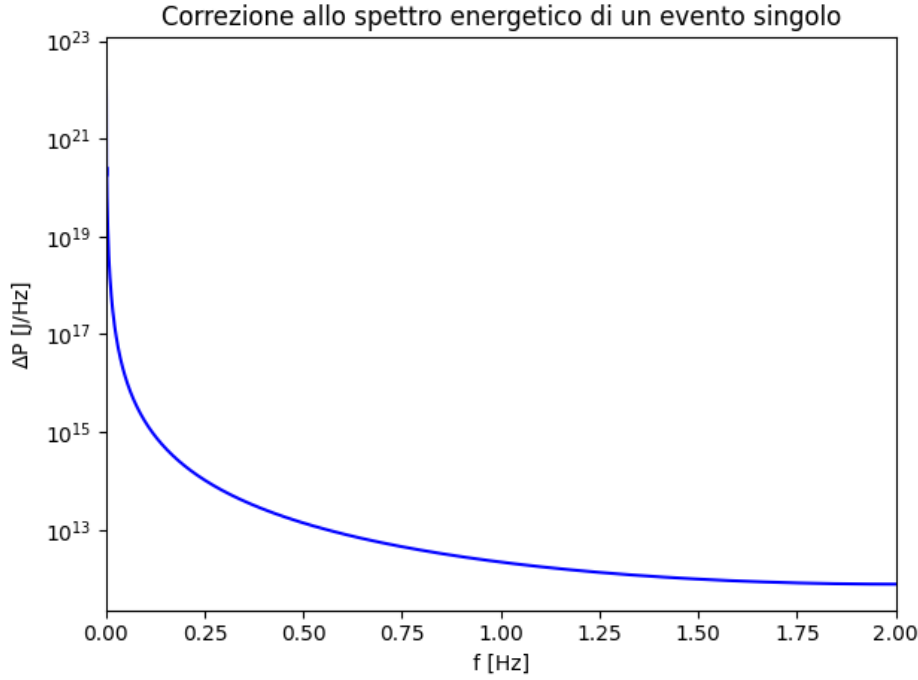


Figura 3.3: Correzione allo spettro energetico di un singolo evento dovuta all'effetto di memoria. I valori dei parametri scelti sono $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportata tale correzione allo spettro energetico, mentre su quello delle ascisse è contenuta la frequenza nel sistema di riferimento delle sorgenti.

della correzione ad Ω_{GW} , ossia $\Delta\Omega_{GW}$ dovuta all'effetto di memoria. A tal proposito si sono considerate ipotesi del tutto analoghe a quelle già descritte nel capitolo 2, per tanto si omettono i vari passaggi richiesti per ottenere il risultato finale, il quale è dato dalla relazione

$$\Delta\Omega_{GW}(f^{oss}) = W \int_0^{+\infty} \frac{dm_1}{m_1} f(m_1) \int_0^{+\infty} \frac{dm_2}{m_2} \times f(m_2)(m_1 + m_2)^{1/2} Q(f^{oss}, m_1, m_2). \quad (3.159)$$

Nell'equazione appena scritta, W è una costatante pari a

$$W = 25.4 \cdot 10^{-8} \text{yr}^{-1} \text{Gpc}^{-3} h_{70}^4 \frac{a^{3/2} c^3}{G^{3/2}} \frac{(e^2 - 1)}{\rho_c \sqrt{\Omega_M} H_0} \left(\frac{\Omega_{DM}}{0.25} \right)^2 \left(\frac{\delta_{loc}}{10^8} \right), \quad (3.160)$$

mentre la funzione $Q(f^{oss}, m_1, m_2)$ è definita come

$$Q(f^{oss}, m_1, m_2) = (f^{oss})^{5/2} \int_{f^{oss}}^{+\infty} \frac{df}{f^{5/2}} P_{GW}(f, m_1, m_2), \quad (3.161)$$

dove si è esplicitata la dipendenza dalle due masse che compongono il sistema per la funzione $P_{GW}(f)$. Nella figura 3.4 si riporta il grafico di tale correzione, scegliendo

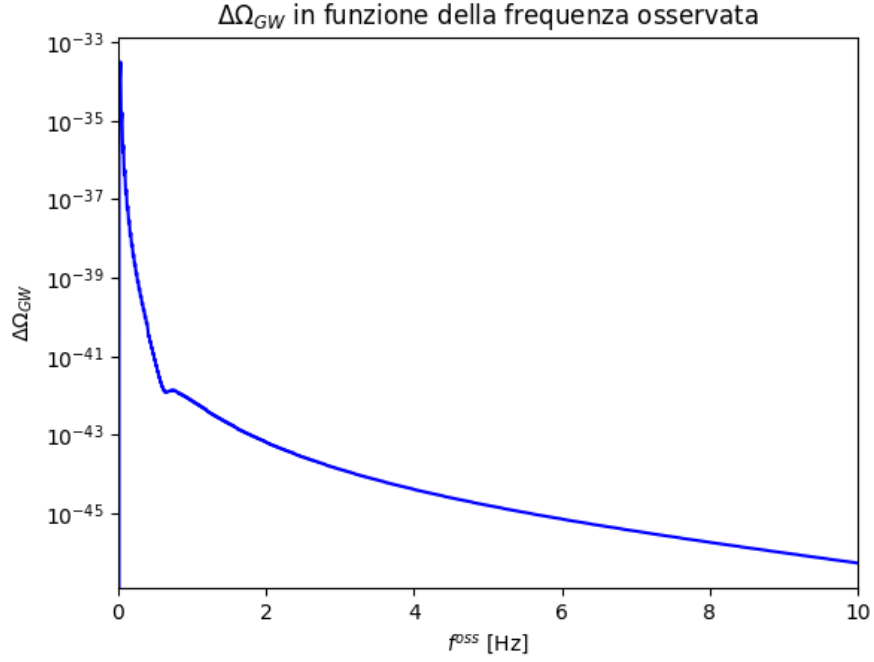


Figura 3.4: Correzione ad Ω_{GW} dovuta all'effetto di memoria. I valori dei parametri scelti sono $e = 1.005$, $a = 1$ UA, e per $f(m)$ si è scelta una forma gaussiana con media $5M_\odot$ e deviazione standard $1M_\odot$. Nell'asse delle ordinate è riportata tale correzione ad Ω_{GW} , mentre su quello delle ascisse è contenuta la frequenza nel sistema di riferimento dell'osservatore.

$e = 1.005$ e $a = 1$ UA, e considerando una forma gaussiana per $f(m)$ con media pari a $5M_\odot$ e deviazione standard $1M_\odot$.

Capitolo 4

Conclusioni

In questa tesi ci siamo occupati di studiare alcuni aspetti di un peculiare fondo astrofisico di onde gravitazionali (Regimbau e Mandic, 2008), generato da incontri ravvicinati di buchi neri.

Un fondo astrofisico è prodotto dalla sovrapposizione dei segnali generati, in modo non coerente, da un numero elevato di eventi. La struttura statistica del segnale è in generale complicata (Meacher et al., 2014). Se il "duty cycle" è abbastanza elevato, si ottiene un segnale stocastico che risulta completamente caratterizzato dallo spettro di potenza. Questo ultimo contiene in linea di principio informazioni che dipendono dalla struttura del segnale prodotto da un singolo evento, e dalla distribuzione di probabilità dei parametri che lo caratterizzano.

È importante determinare quante di queste informazioni sia possibile ricavare dalle quantità misurate, che, nel caso di un fondo Gaussiano, si limitano, come già detto, al solo spettro. Per questa ragione nel Capitolo 2 è stata studiata la relazione che lega lo spettro alla distribuzione di probabilità per la massa dei due buchi neri coinvolti in un incontro ravvicinato, ed è stato elaborato un algoritmo per invertirla.

Si tratta di un problema inverso non ben condizionato, che richiede una opportuna regolarizzazione. La soluzione scelta si basa sulla fattorizzazione SVD applicata ad un set di relazioni lineari che legano le variabili usate per discretizzare le quantità di interesse. Si sono ottenuti risultati promettenti, che possono essere un buon punto di partenza per la soluzione del problema completo, nel quale compaiono altri parametri oltre le masse, ad esempio quelli orbitali, e si deve tenere conto del rumore associato a una misura realistica dello spettro.

Infine nel Capitolo 3 si è calcolato una peculiare correzione allo spettro, legato ai cosiddetti "effetti di memoria". Il contributo è una piccola correzione, che ha però la caratteristica di generare una variazione permanente della metrica. Questo fatto potrebbe rendere interessante un ulteriore approfondimento dello studio, nel contesto dei fondi stocastici. Infatti la sovrapposizione di un gran numero di eventi di questo tipo potrebbe generare effetti cumulativi potenzialmente importanti e osservabili.

Elenco delle figure

Sommario	v
1 Introduzione	1
2 Incontri iperbolici	17
2.1 Esempio di orbita iperbolica. La parametrizzazione scelta è quella in Equazione (2.8) con $\varphi_0 = 0$ e si è indicato il parametro d'urto b	19
2.2 Potenza di un singolo evento con $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = 1M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportata tale potenza, mentre su quello delle ascisse il tempo.	21
2.3 Spettro energetico di un singolo evento con $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = 1M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportato tale spettro energetico, mentre sull'asse delle ascisse la frequenza nel sistema di riferimento delle sorgente.	24
2.4 Ω_{GW} in funzione della frequenza nel sistema di riferimento dell'osservatore. Nel realizzarlo si è posto $e = 1.005$ e $a = 1$ UA e per la funzione $f(m)$ si optato per una Gaussiana con media $5M_\odot$ e deviazione standard $1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportata Ω_{GW} , mentre su quello delle ascisse la frequenza nel sistema di riferimento dell'osservatore.	28
2.5 Confronto tra il risultato dell'algoritmo di inversione e la forma esatta di $f(m)$, quando quest'ultima è Gaussiana con media e deviazione standard pari rispettivamente a $5M_\odot$ e a $1M_\odot$. Per i parametri restanti invece si è posto $e = 1.005$ e $a = 1$ UA. Sull'asse delle ascisse è riportata la massa di un buco nero, mentre su quello delle ordinate la funzione logaritmica di massa.	34
2.6 Confronto tra il risultato dell'algoritmo di inversione e la forma esatta di $f(m)$, quando quest'ultima è una funzione a gradino diversa da zero solo nell'intervallo $[1, 10]M_\odot$ dove vale 3. Si è posto $e = 1.005$ e $a = 1$ UA. Sull'asse delle ascisse è riportata la massa di un buco nero, mentre su quello delle ordinate la funzione logaritmica di massa.	35
3 Effetti di memoria	37
3.1 Divisione in regioni per la soluzione della equazione d'onda.	38
3.2 Correzione alla potenza di un singolo evento dovuta all'effetto di memoria. I valori dei parametri scelti sono $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportata tale correzione alla potenza, mentre su quello delle ascisse è presente il tempo.	62

3.3	Correzione allo spettro energetico di un singolo evento dovuta all'effetto di memoria. I valori dei parametri scelti sono $e = 1.005$, $a = 1$ UA, $m_1 = M_\odot$ e $m_2 = 1M_\odot$. Sull'asse delle ordinate è riportata tale correzione allo spettro energetico, mentre su quello delle ascisse è contenuta la frequenza nel sistema di riferimento delle sorgente.	65
3.4	Correzione ad Ω_{GW} dovuta all'effetto di memoria. I valori dei parametri scelti sono $e = 1.005$, $a = 1$ UA, e per $f(m)$ si è scelta una forma gaussiana con media $5M_\odot$ e deviazione standard $1M_\odot$. Nell'asse delle ordinate è riportata tale correzione ad Ω_{GW} , mentre su quello delle ascisse è contenuta la frequenza nel sistema di riferimento dell'osservatore.	66
4	Conclusioni	67
	Bibliography	71

Bibliography

- Abbott, B. P. et al. (mar. 2016). «GW150914: Implications for the Stochastic Gravitational-Wave Background from Binary Black Holes». In: *Phys. Rev. Lett.* 116 (13), p. 131102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.131102. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.131102>.
- Abramowitz, Milton e Irene A. Stegun (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth Dover printing, tenth GPO printing. New York: Dover.
- Acernese, F., M. Agathos, K. Agatsuma, D. Aisa et al. (gen. 2015). «Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector». In: *Classical and Quantum Gravity* 32.2, 024001, p. 024001. DOI: 10.1088/0264-9381/32/2/024001. arXiv: 1408.3978 [gr-qc].
- Allen, Bruce, Warren G. Anderson, Patrick R. Brady, Duncan A. Brown e Jolien D. E. Creighton (giu. 2012). «FINDCHIRP: An algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries». In: *Phys. Rev. D* 85, p. 122006. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.122006. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.122006>.
- Allen, Bruce e Joseph D. Romano (mar. 1999). «Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities». In: *Phys. Rev. D* 59 (10), p. 102001. DOI: 10.1103/PhysRevD.59.102001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.102001>.
- Blanchet, L. e T. Damour (1989). «Post-newtonian generation of gravitational waves». In: *Annales de l'I.H.P. Physique théorique* 50.4, pp. 377–408.
- Chakraborty, Indranil e Sayan Kar (2022). «A simple analytic example of the gravitational wave memory effect». In: *Eur. Phys. J. Plus* 137.4, p. 418. DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-02593-y. arXiv: 2202.10661 [gr-qc].
- Christodoulou, Demetrios (set. 1991). «Nonlinear nature of gravitation and gravitational-wave experiments». In: *Phys. Rev. Lett.* 67 (12), pp. 1486–1489. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.1486. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.1486>.
- De Vittori, Lorenzo (2015). «Gravitational Waves Memory from Hyperbolic Black Holes Binaries». Ph. D. Thesis. Zurich University. DOI: 10.5167/uzh-119512.
- Drasco, Steve e Eanna E. Flanagan (2003). «Detection methods for nonGaussian gravitational wave stochastic backgrounds». In: *Phys. Rev. D* 67, p. 082003. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.082003. arXiv: gr-qc/0210032 [gr-qc].
- García-Bellido, Juan, Santiago Jaraba e Sachiko Kuroyanagi (2022). «The stochastic gravitational wave background from close hyperbolic encounters of primordial black holes in dense clusters». In: *Physics of the Dark Universe* 36, p. 101009. ISSN: 2212-

6864. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dark.2022.101009>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686422000322>.
- García-Bellido, Juan e Savvas Nesseris (set. 2018). «Gravitational wave energy emission and detection rates of Primordial Black Hole hyperbolic encounters». In: *Physics of the Dark Universe* 21, p. 61. DOI: 10.1016/j.dark.2018.06.001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1016/j.dark.2018.06.001>.
- LIGO Scientific Collaboration, J. Aasi, B. P. Abbott, R. Abbott et al. (apr. 2015). «Advanced LIGO». In: *Classical and Quantum Gravity* 32.7, 074001, p. 074001. DOI: 10.1088/0264-9381/32/7/074001. arXiv: 1411.4547 [gr-qc].
- Maggiore, M. (2008). *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Gravitational Waves. OUP Oxford. ISBN: 9780198570745. URL: <https://books.google.it/books?id=AqVpQgAACAAJ>.
- Meacher, Duncan, Eric Thrane e Tania Regimbau (apr. 2014). «Statistical properties of astrophysical gravitational-wave backgrounds». In: *Phys. Rev. D* 89 (8), p. 084063. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.084063. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.084063>.
- Regimbau, T e V Mandic (set. 2008). «Astrophysical sources of a stochastic gravitational-wave background». In: *Classical and Quantum Gravity* 25.18, p. 184018. DOI: 10.1088/0264-9381/25/18/184018. URL: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/18/184018>.
- Regimbau, Tania (mar. 2011). «The astrophysical gravitational wave stochastic background». In: *Research in Astronomy and Astrophysics* 11.4, pp. 369–390. DOI: 10.1088/1674-4527/11/4/001. URL: <https://doi.org/10.1088/1674-4527/11/4/001>.
- Thrane, Eric (2013). «Measuring the non-Gaussian stochastic gravitational-wave background: a method for realistic interferometer data». In: *Phys. Rev. D* 87.4, p. 043009. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.043009. arXiv: 1301.0263 [astro-ph.IM].

Lista dei simboli

- a Semi asse maggiore. 18
- a_l Coefficiente che compare nella forma asintotica della funzione di Legendre del secondo tipo. 57
- \mathbf{A} Matrice unitarie che compare nella scomposizione SVD di \mathbf{C} . 31
- b Parametro di impatto. 17, 25
- β Rapporto tra la v e c . 37
- \square Operatore d'Alembert nello spazio-tempo piatto. 41
- \square_{ret}^{-1} Operatore convoluzione con la funzione di Green ritardata. 47
- \mathbf{B} Matrice unitarie che compare nella scomposizione SVD di \mathbf{C} . 31
- c Velocità della luce nel vuoto. 1, 37
- χ Statistica ottimale del "matched filter". 11
- c_{jkl} Coefficienti che compaiono nel termine istantanei. 56
- $C(m_1, m_2, f)$ Funzione introdotta per la determinazione di $f(m)$ noto Ω_{GW} . 29
- \mathbf{C} Matrice contenente li valori discretizzati della funzione $C(m_1, m_2, f)$. 30
- d Dimensione caratteristica del sistema. 37
- $\delta(z)$ Delta di Dirac. 8
- δ_{ij} Delta di Kronecker. 4
- δ_l Funzione che compare nella forma integrale dei vari multipoli. 8
- $\delta_{loc}(m)$ Contrasto di densità locale. 26
- $\Delta P_{GW}(f)$ Correzione allo spettro di potenza dovuto all'effetto di memoria. 64
- $\Delta P_{GW}(t)$ Correzione alla potenza dovuta all'effetto di memoria. 61
- D_μ Derivata covariante. 43

- $\underline{\mathbf{D}}$ Matrice diagonale che compare nella scomposizione SVD di $\underline{\mathbf{C}}$. 31
- $\hat{\underline{\mathbf{D}}}$ Matrice diagonale le cui componenti non nulle sulla diagonale principale sono pari all'inverso dei valori singolari più significativi. 31
- E Energia per unità di massa nel sistema di riferimento del centro di massa. 17
- e Eccentricità. 18, 25
- E_{GW} Energia trasportata da un'onda gravitazionale nel sistema di riferimento della sorgente. 16, 22
- E_{GW}^{oss} Energia trasportata da un'onda gravitazionale nel sistema di riferimento dell'osservatore. 16
- $\eta_{\mu\nu}$ Metrica di Minkowski. 2
- f_{BH} Rapporto tra la densità di energia dei buchi neri e la densità di energia della materia oscura. 26
- \mathbf{F} Vettore contenente i valori discretizzati della funzione $F(M)$. 30
- $F_i^A(\hat{\mathbf{n}})$ Funzione di risposta di un rivelatore. 12
- F_{ij} Tensore proporzionale al primo termine dovuto all'effetto di "memoria". 59
- $F(M)$ Prodotto di convoluzione della funzione $f(m)$ per se stessa. 29
- $f(m)$ Funzione logaritmica di massa dei buchi neri. 26
- $\mathcal{F}(\dots)$ Operatore trasformata di Fourier. 10, 22
- \mathcal{FP} Composizione dell'operatore $\text{FB}_{B=0}$ con l'operatore \square_{ret}^{-1} . 48
- $\text{FB}_{B=0}$ Parte intera in $B = 0$. 47, 50
- G Costante di gravitazione universale. 1, 37
- g Determinante della metrica. 39
- $G(\mathbf{x})$ Funzione da minimizzare per la determinazione di $f(m)$. 33
- $\gamma(f)$ "Overlap reduction function". 12
- G_{ij} Tensore proporzionale al primo integrale di "coda". 60
- $G_{\mu\nu}$ Tensore di Einstein. 1
- $g_{\mu\nu}$ Metrica. 1

- $\bar{g}_{\mu\nu}$ Metrica del background. 4
- h Traccia di $h_{\mu\nu}$. 2
- H_0 Parametro di Hubble. 13
- h_{70} Parametro che tiene conte dell'incertezza nella misura di H_0 . 27
- h_{\times} Ampiezza della polarizzazione "croce". 3
- $H_{\eta}^{(1)'}(x)$ Combinazione lineare di funzioni di Hankel del primo tipo di diverso ordine. 22
- $H_{\eta}^{(1)}(x)$ Funzione di Hankel del primo tipo e di ordine η . 22
- $H_L^{(k)}(u)$ Funzione da cui dipende $N^{\mu\nu}[h_{(M)}, h_{(M_{ij})}]$. 56
- $h_{\mu\nu}$ Perturbazione lineare alla metrica di background. 2, 42
- h_{+} Ampiezza della polarizzazione "più". 3
- $h(t)$ Funzione che descrive l'effetto sull'uscita di un interferometro prodotto dal passaggio di un'onda gravitazionale. 10
- $h^{\mu\nu}$ Tensore funzione della metrica, utilizzato come incognita nelle equazioni di Einstein rilassate. 42
- $I_L(u)$ Famiglia di tensori da cui dipende $k_1^{\mu\nu}$. 46
- $I_n^{\mu\nu}(B)$ Integrale ritardato impiegato nello sviluppo di un metodo per la determinazione delle correzione post-Minkowskiane ad ogni ordine. 47
- \square_{ret}^{-1} Coefficienti dello sviluppo di Laurent di $I_n^{\mu\nu}(B)$. 47
- $J_{\eta}(x)$ Funzione di Bessel del primo tipo. 22
- $J_L(u)$ Famiglia di tensori da cui dipende $k_1^{\mu\nu}$. 46
- $k_1^{\mu\nu}$ Tensore che compare nella prima correzione post-Minkowskiana. 46
- κ_l Costante da cui dipendono gli U_L . 57
- $\hat{K}_L^{\mu\nu}(t - r/c)$ Famiglia di tensori che compare nella soluzione più generale possibile all'esterno della sorgente per l'equazione d'onda nel vuoto. 45
- $\mathcal{K}(U, V)$ Funzione pari a 0 per $V > U$ e ad 1 altrimenti. 59
- L Momento angolare per unità di massa nel sistema di riferimento del centro di massa. 17

Lista dei simboli

λ Lunghezza d'onda ridotta. 38

$\Lambda_{ij,kl}$ Proiettore nella gauge TT. 4

$\Lambda^{\mu\nu}$ Contributo a $\tau_{\mu\nu}$ che non dipende dalla distribuzione della materia della sorgente.
43

$L^{\mu\nu}[\mathbf{h}, \mathbf{h}, \mathbf{h}, \mathbf{h}]$ Termine quartico dello sviluppo del tensore $\Lambda_{\mu\nu}$. 44

M Massa totale del sistema dei due buchi neri. 18, 25, 37

m_1 Massa del primo buco nero che compone il sistema. 25

m_2 Massa del secondo buco nero che compone il sistema. 25

M_{ij} Quadrupolo di massa. 20

$M^{\mu\nu}[\mathbf{h}, \mathbf{h}, \mathbf{h}]$ Termine cubico dello sviluppo del tensore $\Lambda_{\mu\nu}$. 44

$\mathcal{M}(\dots)$ Sviluppo in multipoli. 52

μ Massa ridotta del sistema dei due buchi neri. 18

∇^2 Operatore di Laplace dello spazio-tempo piatto. 40

$n(m)$ Densità numerica di un cluster di buchi neri. 25

$N^{\mu\nu}[\mathbf{h}, \mathbf{h}]$ Termine quadratico dello sviluppo del tensore $\Lambda_{\mu\nu}$. 44

$n(t)$ Funzione che descrive l'effetto sull'uscita di un interferometro prodotto dal rumore.
10

ν Variabile proporzionale alla frequenza. 22

ν_0 Costante di proporzionalità che lega ν alla frequenza. 22

ω Frequenza di emissione dell'onda moltiplicata per 2π . 38

ω_s Velocità angolare tipica all'interno della sorgente. 38

Ω_{DM} Rapporto tra la densità di materia oscura e ρ_c . 26

Ω_{GW} Vettore contenente i valori discretizzati della funzione Ω_{GW} . 30

Ω_{GW} Spettro in potenza di un fondo di onde gravitazionali. 15

$P_{\text{GW}}(f)$ Spettro energetico di un evento singolo. 22, 23

$P_{\text{GW}}(t)$ Potenza emessa sotto forma di onde gravitazionali. 20

- $\Phi(r)$ Potenziale gravitazionale. 17
- $\phi(t, \mathbf{x})$ Potenziale introdotto per descrivere le prime correzioni post-Newtoniane della metrica. 40
- P_{ij} Proiettore nel piano trasverso alla direzione di propagazione. 4
- π_l Costante da cui dipendono i V_L . 58
- $P_n(f)$ Densità spettrale del rumore. 10
- $\psi(t, \mathbf{x})$ Potenziale introdotto per descrivere le prime correzioni post-Newtoniane della metrica. 40
- Q_l Funzione di Legendre del secondo tipo. 56
- R Curvatura scalare. 1
- ρ_c Densità critica dell'universo. 15, 26
- ρ_{DM} Densità di energia media di materia oscura. 26
- $\Delta\Omega_{GW}$ Correzione ad Ω_{GW} dovuta all'effetto di memoria. 65
- ρ_{GW} Densità di energia del fondo stocastico. 15
- $\rho(m)$ Densità di energia del cluster buchi neri. 25
- $\hat{R}_L^{\mu\nu}(t - r/c)$ Famiglia di tensori da cui dipende $h_{hom}^{\mu\nu}$. 51
- $R_{\mu\nu}$ Tensore di Ricci. 1
- R_s Raggio di Schwarzschild. 37
- S "Cross correlation" del segnale in uscita da due interferometri diversi. 12
- Σ Rapporto tra la somma di $\bar{\tau}^{00}$ e $\bar{\tau}^{ii}$ e c^2 . 52
- σ Sezione d'urto. 25
- Σ_i Rapporto tra la somma di $\bar{\tau}^{0i}$ e c . 52
- Σ_{ij} Tensori pari a $\bar{\tau}^{ij}$. 52
- $S_{\mu\nu}^{(m)}[h]$ Termine di sorgente dell'equazione per l' n -esimo ordine post-Newtoniano. 42
- SNR Rapporto segnale rumore per la rivelazione di fondi di onde gravitazionali. 12
- $s(t)$ Segnale in uscita da un interferometro. 11

- T Traccia di $T_{\mu\nu}$. 5
- $\tau^{\mu\nu}$ Tensore presente a destra dell'uguale nelle equazioni di Einstein rilassate. 43
- $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ Espansione di $\tau^{\mu\nu}$ fino all'ordine n -esimo post-Newtoniano. 50
- τ_{one} Rate per un evento singolo. 25
- $\tau(z)$ Rate di incontri iperbolici tra buchi neri per intervallo logaritmico di massa. 25
- $h_{(\mathbf{M}_{ij} \times \mathbf{M}_{kl})}^{\mu\nu}$ Contributo alla seconda correzione post-Newtoniana dovuta esclusivamente al termine di quadrupolo. 55
- $h_{(\mathbf{M}_{ij})}^{\mu\nu}$ Contributo alla prima correzione post-Newtoniana dovuta al termine di quadrupolo. 54
- $h_{(\mathbf{M} \times \mathbf{M}_{ij})}^{\mu\nu}$ Contributo alla seconda correzione post-Newtoniana dovuta sia al termine di monopolo che al termine di quadrupolo. 55
- $h_{(\mathbf{M} \times \mathbf{M})}^{\mu\nu}$ Contributo alla seconda correzione post-Newtoniana dovuta esclusivamente al termine di monopolo. 55
- $h_{(\mathbf{M})}^{\mu\nu}$ Contributo alla prima correzione post-Newtoniana dovuta al termine di monopolo. 54
- $\bar{h}^{\mu\nu}$ Espansione di $h^{\mu\nu}$ fino all'ordine n -esimo post-Newtoniano. 50
- $h_{\text{hom}}^{\mu\nu}$ Soluzione omogenea delle equazioni per le correzioni post-Newtoniane. 50
- $\bar{h}_{\text{part}}^{\mu\nu}$ Somma delle soluzioni particolari delle prime n correzioni post-Newtoniane. 50
- $t_{LL}^{\mu\nu}$ Pseudotensore energia-impulso di Landau-Lifshitz. 43
- $T_{\mu\nu}$ Tensore energia-impulso. 1, 37
- $t_{\mu\nu}$ Tensore energia-impulso associato ad un'onda gravitazionale. 6
- u Tempo ritardato. 8, 39
- $u_n^{\mu\nu}$ Coefficiente di ordine zero dello sviluppo di Laurent di $I_n^{\mu\nu}(B)$. 47
- v Velocità tipiche del sistema. 37
- v_0 Velocità relativa asintotica. 17, 25
- \mathbf{v}_1 Velocità del primo buco nero che compone il sistema. 25
- \mathbf{v}_2 Velocità del secondo buco nero che compone il sistema. 25

- ε_{ijk} Tensore di Levi-Civita. 7
- \varkappa La densità di massa gravitazionale attiva. 9
- \varkappa_i La densità di corrente di massa attiva. 9
- φ_0 Angolo nel periastro. 18
- φ_1^μ Quadrivettore che compare nella prima correzione post-Minkowskiana. 46
- v_{BH} Stima della velocità tipica dei buchi neri. 25
- $V_i(t, \mathbf{x})$ Potenziale introdotto per descrivere le prime correzioni post-Newtoniane della metrica sotto forma di potenziali ritardati. 42
- \mathbf{v}_{rel} Velocità relativa nel sistema del centro di massa. 17, 25
- $V(t, \mathbf{x})$ Potenziale introdotto per descrivere le prime correzioni post-Newtoniane della metrica sotto forma di potenziali ritardati. 41
- W_{ij} Potenziale introdotto per descrivere il primo ordine post-Newtoniano in termini di $h^{\mu\nu}$. 48
- $\overline{\mathbf{X}}$ Vettore contenente il prodotto di convoluzione di \mathbf{x} per se stesso dopo che è avvenuto il ridimensionamento. 33
- \mathbf{x} Vettore che è variabile della funzione $G(\mathbf{x})$. 32
- ξ Variabile utilizzata per parametrizzare la legge oraria di un moto iperbolico. 18
- $\xi_i(t, \mathbf{x})$ Potenziale introdotto per descrivere le prime correzioni post-Newtoniane della metrica. 40
- $Y_\eta(x)$ Funzione di Bessel del secondo tipo. 22
- $N(z)$ Rate di incontri iperbolici tra buchi neri. 16
- z Red shift. 16