Tutorato Architettura degli Elaboratori Modulo 1
Lezione 3

Francesco Pelosin

4 Novembre 2019

1 Algebra di Boole

L'aritmetica binaria è stata adottata perché i bit sono rappresentabili naturalmente tramite elementi elettronici, codificando lo 0 con uno stato di potenziale elettrico basso e l'1 con uno stato di potenziale elettrico alto. Il funzionamento dei circuiti elettronici può essere modellato tramite l'algebra di Boole dove:

- Valore logico `False` (0) $\rightarrow$ livello di potenziale basso.
- Valore logico `True` (1) $\rightarrow$ livello di potenziale alto.

Le operazioni logiche dell'algebra Booleana sono:

- Somma `OR` $(+)$
- Prodotto `AND` $(\cdot)$
- Inversione `NOT` $(\sim)$

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	$\sim A$
0	1
1	0

Infine ricordiamo le proprietà dell'algebra di Bool:

- Identità:
$$A + 0 = A$$
$$A \cdot 1 = A$$
- Nullo:
$$A + 1 = 1$$
$$A \cdot 0 = 0$$
- Idempotente:
$$A + A = A$$
$$A \cdot A = A$$
- Inverso:
$$A + (\sim A) = 1$$
$$A \cdot (\sim A) = 0$$
- Commutativa:
$$A + B = B + A$$
$$A \cdot B = B \cdot A$$
- Associativa:
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
- Distributiva:
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$
- DeMorgan:
$$\sim (A + B) = (\sim A) \cdot (\sim B)$$
$$\sim (A \cdot B) = (\sim A) + (\sim B)$$

1.1 Esercizi

Verificare le seguenti uguaglianze Booleane:

1. $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
2. $\sim (A + C \cdot D + A \cdot (\sim B)) = \sim A \cdot (\sim C + \sim D)$
3. $A \cdot (B + C) + \sim (A + \sim C) = A \cdot B + C$

Semplificare le seguenti espressioni Booleane:

4. $F = A \cdot (B + C) + \sim B \cdot (A + C)$
5. $F = \sim (\sim (A + B) \cdot C)$
6. $F = \sim A \cdot B + A \cdot \sim B + \sim (A + B \cdot C)$

1.2 Soluzioni

1. Verifichiamo l'uguaglianza confrontando le tablelle di verità di $X = A + (B \cdot C)$ e $Y = (A + B) \cdot (A + C)$:

A	B	C	B$\cdot C$	$\overbrace{(A + B \cdot C)}^{\textbf{(X)}}$	A+B	A+C	$\overbrace{(A + B) \cdot (A + C)}^{\textbf{(Y)}}$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Essendo la tabella di verità di X uguale a quella di Y possiamo affermare che l'uguaglianza $X = Y$ è vera. Verifichiamo ora l'uguaglianza applicando le proprietà dell'algebra di Bool:

$$Y = (A + B) \cdot (A + C) \stackrel{Distributiva}{=} A \cdot A + A \cdot C + B \cdot A + B \cdot C \stackrel{Idempotenza}{=}$$
$$= A + A \cdot C + B \cdot A + B \cdot C \stackrel{Distributiva}{=} A \cdot (1 + C + B) + B \cdot C \stackrel{Nullo}{=}$$
$$= A \cdot 1 + B \cdot C \stackrel{Identità}{=} A + B \cdot C = X$$

2. Verifichiamo l'uguaglianza confrontando le tablelle di verità di:

$$X = \sim (A + C \cdot D + A \cdot (\sim B))$$

$$Y = \sim A \cdot (\sim C + \sim D)$$

A	B	C	D	C·D	A·$(\sim B)$	A+C·$D + A \cdot (\sim B)$	$\overbrace{\sim (A + C \cdot D + A \cdot (\sim B))}^{\textbf{(X)}}$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0

A	B	C	D	$\sim A$	$\sim C + \sim D$	$\overbrace{\sim A \cdot (\sim C + \sim D)}^{\textbf{(Y)}}$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

Essendo la tabella di verità di X uguale a quella di Y possiamo affermare che l'uguaglianza $X = Y$ è vera. Verifichiamo ora l'uguaglianza applicando le proprietà dell'algebra di Bool:

$$X = \sim(A + C \cdot D + A \cdot (\sim B)) \overset{Distributiva}{=} \sim (A \cdot (1 + \sim B) + C \cdot D) \overset{Nullo}{=}$$
$$= \sim (A \cdot 1 + C \cdot D) \overset{Identità}{=} \sim (A + C \cdot D) \overset{DeMorgan}{=} \sim A \cdot \sim (C \cdot D) \overset{DeMorgan}{=}$$
$$= \sim A \cdot (\sim C + \sim D) = Y$$

3. Verifichiamo l'uguaglianza confrontando le tablelle di verità di:

$$X = A \cdot (B + C) + \sim (A + \sim C)$$

$$Y = A \cdot B + C$$

A	B	C	B+C	A$\cdot(B+C)$	A+$\sim C$	$\sim(A+\sim C)$	$\overbrace{A \cdot (B+C) + \sim (A + \sim C)}^{\textbf{(X)}}$
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1

A	B	C	A$\cdot B$	$\overbrace{A \cdot B + C}^{\textbf{(Y)}}$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Essendo la tabella di verità di X uguale a quella di Y possiamo affermare che l'uguaglianza $X = Y$ è vera. Verifichiamo ora l'uguaglianza applicando le proprietà dell'algebra di Bool:

$$X = A \cdot (B + C) + \sim (A + \sim C) \overset{Distributiva}{=} A \cdot B + A \cdot C + \sim (A + \sim C) \overset{DeMorgan}{=}$$
$$= A \cdot B + A \cdot C + \sim A \cdot \sim\sim C = A \cdot B + A \cdot C + \sim A \cdot C \overset{Distributiva}{=}$$
$$= A \cdot B + C \cdot (A + \sim A) \overset{Inverso}{=} A \cdot B + C \cdot 1 \overset{Identità}{=} A \cdot B + C = Y$$

4. Seplifichiamo $F = A \cdot (B + C) + \sim B \cdot (A + C)$ usando le proprietà dell'algebra di Bool:

$$
\begin{aligned}
F = A \cdot (B + C) + \sim B \cdot (A + C) &\overset{Distributiva}{=} \\
= A \cdot B + A \cdot C + \sim B \cdot A + \sim B \cdot C &\overset{Distributiva}{=} \\
= A \cdot (B + \sim B) + A \cdot C + \sim B \cdot C &\overset{Inverso}{=} \\
= A \cdot 1 + A \cdot C + \sim B \cdot C &\overset{Distributiva}{=} \\
= A \cdot (1 + C) + \sim B \cdot C &\overset{Nullo}{=} \\
= A + \sim B \cdot C &
\end{aligned}
$$

5. Seplifichiamo $F = \sim (\sim (A + B) \cdot C)$ usando le proprietà dell'algebra di Bool:

$$
\begin{aligned}
F = \sim (\sim (A + B) \cdot C) &\overset{DeMorgan}{=} \\
= \sim (\sim A \cdot \sim B \cdot C) &\overset{Distributiva}{=} \\
= \sim\sim A + \sim\sim B + \sim C &\overset{Distributiva}{=} \\
= A + B + \sim C &
\end{aligned}
$$

6. Seplifichiamo $F = \sim A \cdot B + A \cdot \sim B + \sim (A + B \cdot C)$ usando le proprietà dell'algebra di Bool:

$$
\begin{aligned}
F = \sim A \cdot B + A \cdot \sim B + \sim (A + B \cdot C) &\overset{DeMorgan}{=} \\
= \sim A \cdot B + A \cdot \sim B + \sim A \cdot \sim (B \cdot C) &\overset{DeMorgan}{=} \\
= \sim A \cdot B + A \cdot \sim B + \sim A \cdot (\sim B + \sim C) &\overset{Distributiva}{=} \\
= \sim A \cdot B + A \cdot \sim B + \sim A \cdot \sim B + \sim A \cdot \sim C &\overset{Distributiva}{=} \\
= A \cdot \sim B + \sim A \cdot (B + \sim B + \sim C) &\overset{Inverso}{=} \\
= A \cdot \sim B + \sim A \cdot (1 + \sim C) &\overset{Nullo}{=} \\
= A \cdot \sim B + \sim A \cdot 1 &\overset{Identità}{=} \\
= A \cdot \sim B + \sim A &\overset{Distributiva}{=} \\
= (A + \sim A) \cdot (\sim B + \sim A) &\overset{Inverso}{=} \\
= \sim B + \sim A &
\end{aligned}
$$

2 Forme canoniche e Minimizzazione

Ogni funzione logica può essere rappresentata come tabella di verità o come equazione logica. È possibile ricavare quest'ultima a partire dalla tabella di verità tramite l'uso degli operatori `AND`, `OR` e `NOT`. Un'equazione logica può essere espressa nei seguenti due modi:

- Somma di prodotti: per ogni entry uguale ad 1 dell'output della tabella di verità generiamo un prodotto (mintermine) degli input, dove gli input uguali a 0 appaiono negati. Infine sommiamo tutti i prodotti ottenuti.
- Prodotto di somme: per ogni entry uguale ad 0 dell'ouput della tabella di verità generiamo una somma (maxtermine) degli input, dove gli input uguali a 1 appaiono negati. Infine moltiplichiamo tutti le somme ottenute.

2.1 Mappe di Karnaugh

Per minimizzare a mano funzioni di poche variabili, si possono rappresentare le tabelle di verità con le mappe di Karnaugh in cui:

- Ogni quadrato (cella) della mappa individua una combinazione di variabili in input.
- Il valore contenuto in una cella corrisponde al valore in output per quella particolare combinazione di variabili di input.
- Le combinazioni delle variabili in input che etichettano i due assi delle mappe differiscono di un singolo bit tra combinazioni consecutive.

Infine, raggruppando i valori 1 delle mappe di Karnaugh è possibile individuare facilmente insiemi di variabili DON'T CARE. Ricordiamo che i gruppi devono essere composti da $2^i \forall i \geq 0$ valori uguali uguali ad 1.

2.2 Esercizi

Per ogni esercizio definire la tabella delle verità della funzione logica, riportare la forma canonica in somme di prodotti e prodotti di somme e minimizzare attraverso le Mappe di Karnaugh.

1. Si vuole costruire un circuito combinatorio con le seguenti caratteristiche:
   - Tre input A, B, C e un output Y.
   - Funzione di output così definita: $Y = A \iff C = 0, Y = B \iff C = 1$.
2. Si vuole costruire un circuito combinatorio con le seguenti caratteristiche:
   - Quattro input A, B, C, D e un output Y.
   - Dato $N = ABCD$ numero binario a quattro cifre, definiamo Y come segue: $Y = 1 \iff N$ contiene un numero di 1 maggiore o uguale a 2, 0 altrimenti.

3. Si vuole costruire un circuito combinatorio con le seguenti caratteristiche:
   - Quattro input A, B, C, D e un output Y.
   - Dato $N = ABCD$ numero binario a quattro cifre espresso in complemento a due, definiamo Y come segue: $Y = 1 \iff N \leq -2$, 0 altrimenti.
4. Rappresentare le precedenti funzioni logiche con un multiplexer.

2.3 Soluzioni

1. Cominciamo scrivendo la tabella di verità della funzione:

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Per prima cosa esprimiamo l'equazione logica associata alla tabella di verità nelle due forme canoniche (somma di prodotti e prodotto di somme):

$$Y_{SP} = \sim A \cdot B \cdot C + A \cdot \sim B \cdot \sim C + A \cdot B \cdot \sim C + A \cdot B \cdot C$$

$$Y_{PS} = (A + B + C) \cdot (A + B + \sim C) \cdot (A + \sim B + C) \cdot (\sim A + B + \sim C)$$

Procediamo ora a minimizzare le due funzioni tramite mappe di Karnaugh:

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Osservando i raggruppamenti possiamo minimizzare la funzione come segue:

- $Y_{SP} = A \cdot \sim C + B \cdot C$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Osservando i raggruppamenti possiamo minimizzare la funzione come segue:

- $Y_{PS} = (A + C) \cdot (B + \sim C)$

Si lascia agli studenti come esercizio il compito di disegnare i circuiti corrispondenti.

2. Cominciamo scrivendo la tabella di verità della funzione:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Per prima cosa esprimiamo l'equazione logica associata alla tabella di verità nelle due forme canoniche (somma di prodotti e prodotto di somme):

$$
\begin{aligned}
Y_{SP} = {} & \sim A \cdot \sim B \cdot C \cdot D + \sim A \cdot B \cdot \sim C \cdot D + \sim A \cdot B \cdot C \cdot \sim D + \\
& + \sim A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot \sim B \cdot \sim C \cdot D + A \cdot \sim B \cdot C \cdot \sim D + \\
& + A \cdot \sim B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \sim C \cdot \sim D + A \cdot B \cdot \sim C \cdot D + \\
& + A \cdot B \cdot C \cdot \sim D + A \cdot B \cdot C \cdot D
\end{aligned}
$$

$$Y_{PS} = (A + B + C + D) \cdot (A + B + C + \sim D) \cdot (A + B + \sim C + D) \cdot$$
$$\cdot (A + \sim B + C + D) \cdot (\sim A + B + C + D)$$

Procediamo ora a minimizzare le due funzioni tramite mappe di Karnaugh:

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

Osservando i raggruppamenti possiamo minimizzare la funzione come segue:

- $Y_{SP} = C \cdot D + A \cdot B + B \cdot D + A \cdot D + B \cdot C + A \cdot C$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

Osservando i raggruppamenti possiamo minimizzare la funzione come segue:

- $Y_{PS} = (A + B + C) \cdot (A + C + D) \cdot (A + B + D) \cdot (B + C + D)$

Si lascia agli studenti come esercizio il compito di disegnare i circuiti corrispondenti.

3. Cominciamo scrivendo la tabella di verità della funzione:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Per prima cosa esprimiamo l'equazione logica associata alla tabella di verità nelle due forme canoniche (somma di prodotti e prodotto di somme):

$$
\begin{aligned}
Y_{SP} = {} & A \cdot \sim B \cdot \sim C \cdot \sim D + A \cdot \sim B \cdot \sim C \cdot D + A \cdot \sim B \cdot C \cdot \sim D + \\
& + A \cdot \sim B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \sim C \cdot \sim D + A \cdot B \cdot \sim C \cdot D + \\
& + A \cdot B \cdot C \cdot \sim D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{PS} = {} & (A + B + C + D) \cdot (A + B + C + \sim D) \cdot (A + B + \sim C + D) \cdot \\
& \cdot (A + B + \sim C + \sim D) \cdot (A + \sim B + C + D) \cdot (A + \sim B + C + \sim D) \\
& \cdot (A + \sim B + \sim C + D) \cdot (A + \sim B + \sim C + \sim D) \cdot \\
& \cdot (\sim A + \sim B + \sim C + \sim D)
\end{aligned}
$$

Procediamo ora a minimizzare le due funzioni tramite mappe di Karnaugh:

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	1	1

Osservando i raggruppamenti possiamo minimizzare la funzione come segue:

- $Y_{SP} = A \cdot \sim B + A \cdot \sim C + A \cdot \sim D$

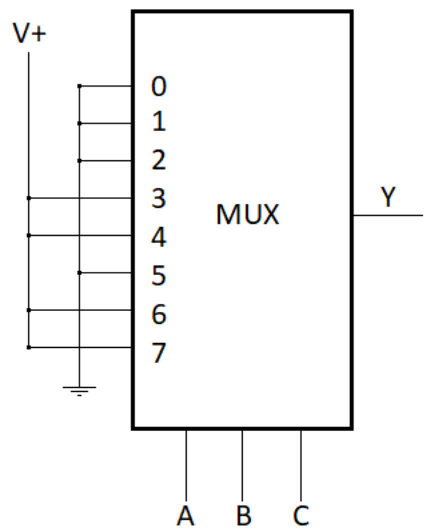
$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	1	1

Osservando i raggruppamenti possiamo minimizzare la funzione come segue:

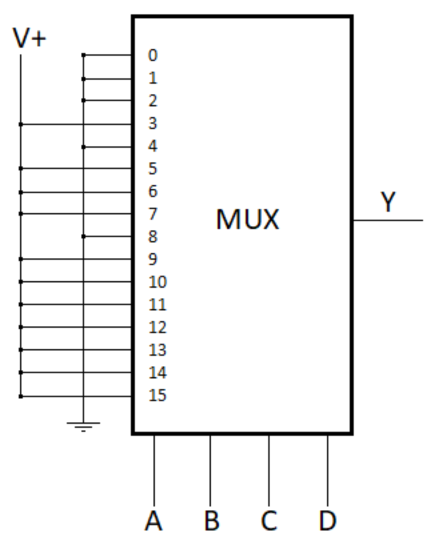
- $Y_{PS} = A \cdot (\sim B + \sim C + \sim D)$

Si lascia agli studenti come esercizio il compito di disegnare i circuiti corrispondenti.

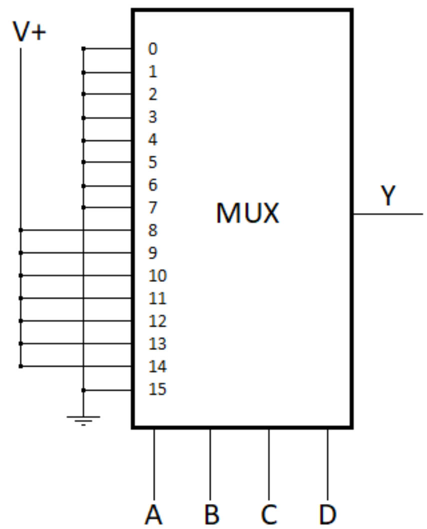
4. Per rappresentare la funzione logica del primo esercizio dobbiamo utilizzare un multiplexer 8:1:



Per rappresentare la funzione logica del secondo esercizio dobbiamo utilizzare un multiplexer 16:1:



Per rappresentare la funzione logica del terzo esercizio dobbiamo utilizzare un multiplexer 16:1:



In generale, gli ingressi del multiplexer sono i valori della funzione da rappresentare. Ogni ingresso del multiplexer viene selezionato dalla corrispondente combinazione delle variabili di input della funzione, che diventano quindi i segnali di controllo del multiplexer. Ad esempio la linea 5 del terzo multiplexer viene selezionata da: A=0, B=1, C=0, D=1 (valori di ingresso della funzione logica) a cui deve corrispondere Y=0 (valore di uscita nella corrispettiva tabella di verità). Di conseguenza l'ingresso 5 del multiplexer deve essere collegato al valore fisico corrispondente allo 0 (massa).