Calcolo di M11 dallo schema a blocchi

Sia il seguente schema lo schema a blocchi del nostro sistema a ciclo chiuso. Il sistema G è stato realizzato in spazio di stato, con la sola incertezza k (m1 ed m2 nominali).

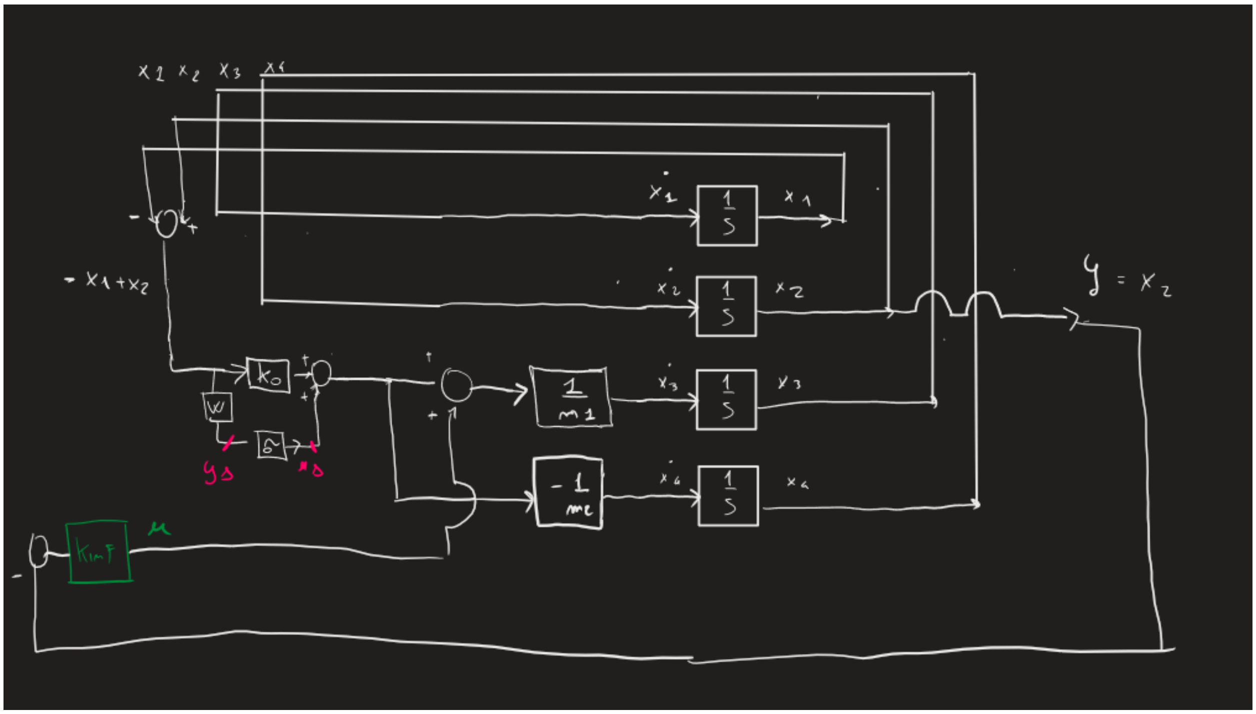

Figure 1: Schema a blocchi del sistema dinamico

Vogliamo trovare la relazione tra y_Δ e u_Δ.

Si vede dallo schema che:

$$y_\Delta = W \cdot (x_2 - x_1) = W \cdot X \tag{1}$$

dove abbiamo chiamato la quantità $(x_2 - x_1) = X$

Calcoliamo X:

$$X = (x_2 - x_1) = \frac{1}{s}(\dot{x_2} - \dot{x_1}) = \frac{1}{s}(x_4 - x_3) = \frac{1}{s^2}(\dot{x_4} - \dot{x_3}) \tag{2}$$

Dallo schema a blocchi:

$$\dot{x_4} = -\frac{1}{m_2}(k_0 X + u_\Delta) \tag{3}$$

$$\dot{x_3} = \frac{1}{m_1}(k_0 X + u_\Delta - k_{inf} y)$$

Per esplicitare $\dot{x_3}$ esplicitiamo la y:

$$y = x_2 = \frac{1}{s}\dot{x_2} = \frac{1}{s}x_4 = \frac{1}{s^2}\dot{x_4}$$

da cui per la 3

$$y = -\frac{1}{m_2}\frac{1}{s^2}(k_0 X + u_\Delta) \tag{4}$$

Sostituendo 4 al calcolo di $\dot{x_3}$ abbiamo

$$\dot{x_3} = \frac{1}{m_1}(k_0 X + u_\Delta - k_{inf} y) = \frac{1}{m_1}[k_0 X + u_\Delta - k_{inf} \cdot (-\frac{1}{m_2}\frac{1}{s^2}(k_0 X + u_\Delta)]$$

che con aggiusto dei segni diventa

$$\dot{x_3} = \frac{1}{m_1}[k_0 X + u_\Delta + k_{inf} \cdot (\frac{1}{m_2}\frac{1}{s^2}(k_0 X + u_\Delta)] \tag{5}$$

Posso ora sostituire 3 e 5 in 2

$$X = \frac{1}{s^2}\left(-\frac{1}{m_2}(k_0 X + u_\Delta) - \frac{1}{m_1}[k_0 X + u_\Delta + k_{inf} \cdot (\frac{1}{m_2}\frac{1}{s^2}(k_0 X + u_\Delta)]\right) \tag{6}$$

Nella 6 noto che ho tutto in funzione di X e u_Δ. Porto i termini con X a sinistra e tengo gli u_Δ a destra. Per semplicità nei conti porto $1/s^2$ a sinistra.

Ottengo:

$$X\left(s^2 + \frac{k_0}{m_2} + \frac{k_0}{m_1} + \frac{k_{inf} \cdot k_0}{s^2 \cdot m_1 m_2}\right) = u_\Delta\left(-\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} - \frac{k_{inf}}{s^2 \cdot m_1 m_2}\right)$$

Dividendo per il coefficiente della X, otteniamo la relazione genrica tra X e u_Δ, ma prima, per semplificare i calcoli, operiamo le sostituzioni con i valori del problema $k_0 = 1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$

$$X\left(s^2 + 1 + 1 + \frac{k_{inf}}{s^2}\right) = u_\Delta\left(-1 - 1 - \frac{k_{inf}}{s^2}\right)$$

da cui ricaviamo, raccogliendo il '-' e dividendo

$$X = -\frac{2 + \frac{k_{inf}}{s^2}}{s^2 + 2 + \frac{k_{inf}}{s^2}} u_\Delta = -\frac{2s^2 + k_{inf}}{s^4 + 2s^2 + k_{inf}} u_\Delta \tag{7}$$

Ricordando che W = 0.5, in quanto siamo considerando la variabile incerta $k = k_0 \pm 0.5$, a questo punto, ci basta sostituire la 7 nella 1:

$$y_\Delta = -0.5 \frac{2s^2 + k_{inf}}{s^4 + 2s^2 + k_{inf}} u_\Delta \tag{8}$$

Questa è la nostra M11, relazione tra y_Δ e u_Δ.