PROGETTI CORSO ALGORITMI PER IL CALCOLO PARALLELO
A.A. 2019-2020

Walter Boscheri

Illustrare i risultati del progetto scelto in una breve presentazione con slides (10-15 minuti).
I punti evidenziati con (*) sono opzionali e, qualora sviluppati correttamente, saranno considerati nella valutazione finale.
Per qualsiasi chiarimento scrivere una mail a `walter.boscheri@unife.it`.

PROGETTO I. Equazione del calore su griglie strutturate. Si consideri la seguente equazione che descrive la diffusione del calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\nabla^2 T = 0, \qquad k = \frac{\lambda}{\rho c}, \tag{1}$$

con la seguente discretizzazione alle differenze finite:

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} \quad &+ \quad k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i+1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n}\right) \\ &+ \quad k\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\left(T_{i,j+1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j-1}^{n}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Il dominio di calcolo é il quadrato $\Omega = [0;1] \times [0;1]$ e il coefficiente di conduzione termica é $k = 1$. La condizione iniziale é data da

$$T(0) = \begin{cases} TL & \text{if} \quad x \le 0.5 \\ TR & \text{if} \quad x > 0.5 \end{cases}, \qquad TL = 100, \quad TR = 50. \tag{3}$$

Si svolgano i seguenti punti per il **codice seriale**:

- evolvere la soluzione fino al tempo finale $t_f = 0.1$
- confrontare i risultati con la soluzione esatta:

$$T_e = \frac{1}{2}(TR + TL) + \frac{1}{2}erf\left(\frac{x}{2\sqrt{k\,t}}\right)(TR - TL) \tag{4}$$

- (*) usare una discretizzazione *implicita* nello schema (2) e risolvere il sistema lineare con il metodo del gradiente coniugato.

PROGETTO II. Equazione dei flussi a superficie libera su griglie strutturate. Si consideri il seguente sistema di equazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu H \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu H \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu H \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu H \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \tag{6}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(H\, u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H\, v\right) = 0. \tag{7}$$

con la seguente discretizzazione alle differenze finite (posto $\nu = 0$):

$$u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} = Fu^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - g\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\eta^{n+1}_{i+1,j} - \eta^{n+1}_{i,j}\right) \tag{8}$$

$$v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = Fv^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - g\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\eta^{n+1}_{i,j+1} - \eta^{n+1}_{i,j}\right) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \eta^{n+1}_{i,j} &= \eta^{n}_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(H^n_{i+\frac{1}{2},j}\, u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} - H^n_{i-\frac{1}{2},j}\, u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}\right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(H^n_{i,j+\frac{1}{2}}\, v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2},j} - H^n_{i,j-\frac{1}{2},j}\, v^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

dove il tirante idrico dato da

$$H^n_{i+\frac{1}{2},j} = \max\left(0,\, h^n_{i+\frac{1}{2},j} + \eta^n_{i,j},\, h^n_{i+\frac{1}{2},j} + \eta^n_{i+1,j}\right),$$
$$H^n_{i,j+\frac{1}{2}} = \max\left(0,\, h^n_{i,j+\frac{1}{2}} + \eta^n_{i,j},\, h^n_{i,j+\frac{1}{2}} + \eta^n_{i,j+1}\right).$$

Il dominio di calcolo é il quadrato $\Omega = [-0.5; 0.5] \times [-0.5; 0.5]$ e la condizione iniziale é data da

$$\eta(0, x, y) = 1 + e^{-\frac{1}{2\, s^2}\left(x^2+y^2\right)}, \qquad s = 0.1. \tag{11}$$

Trascurare i termini convettivi ponendo $Fu^n_{i+\frac{1}{2},j} = u^n_{i+\frac{1}{2},j}$ e $Fv^n_{i,j+\frac{1}{2}} = v^n_{i,j+\frac{1}{2}}$.

Si svolgano i seguenti punti per il **codice seriale**:

- (*) evolvere la soluzione fino al tempo finale $t_f = 0.1$ usando una discretizzazione *semi-implicita* e risolvere il sistema lineare con il metodo del gradiente coniugato.
- (*) utilizzare un metodo upwind esplicito per la discretizzazione degli operatori $Fu^n_{i+\frac{1}{2},j}$ e $Fv^n_{i,j+\frac{1}{2}}$.

CODICE PARALLELO Parallelizzare il codice con

- direttive *OpenMP*.
- (*) direttive *MPI*.

Generare il grafico delle seguenti misure:

- speedup
$$S(p) = \frac{t_{(p=1)}}{t(p)}$$
- efficienza
$$E(p) = \frac{S(p)}{p}$$
- funzione di Kuck
$$K(p) = S(p)\, E(p)$$