Teoria ed Elaborazione dei Segnali
02MOOOA
Prof.ssa Gabriella Bosco
Prof. Fabio Dovis

Francesco Abrami - s310570

A.A. 2025 - 2026

Versione: 1.16.0 - 03-12-2025

Politecnico di Torino

Indice

1 Esercitazioni - ENS

Affrontare ora tutte le esercitazioni della prima parte relativa alla teoria dei segnali (TS) andiamo ad affrontare le esercitazioni relative alla sezione di elaborazione numerica dei segnali (ENS).

1.1 Esercitazione 1 - 12/11/2025

Iniziamo ora andando ad affrontare la prima esercitazione della seconda parte di corso in cui andremo a risolvere esercizi riguardo la rappresentazione dei segnali a tempo discreto e la loro energia e potenza. In particolare ci saranno molto utili i grafici con cui rappresentare i segnali trattati.

Ci sarà inoltre utile verificare, attraverso l'utilizzo di MATLAB, il corretto svolgimento degli esercizi tanto quanto la possibilità di effettuare elaborazioni su segnali a tempo discreto i quali non limitano il proprio supporto a pochi punti.

Si ricorda che come al solito tutti i codici utilizzati saranno riportati all'interno di questa sezione.

1.1.1 Esercizio 1 - Rappresentazione grafica dei segnali

In questo primo esercizio dato il segnale a tempo discreto:

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & 0 \leq n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

Si chiede di rappresentare graficamente i seguenti segnali:

a) $y[n] = x[n+5]$

b) $y[n] = x[-n+5]$

c) $y[n] = x[2n]$

d) $y[n] = x[n+10] + x[-n+10] - 10\delta[n]$

e) Scomporre $x[n]$ nella somma di un segnale pari e uno dispari e rappresentare graficamente i due segnali.

Cominciamo prima di tutto andando a rappresentare il segnale di partenza $x[n]$. Come possiamo vedere il segnale è nullo per valori negativi o maggiori di dieci. Possiamo dunque dedurre che il segnale abbia un supporto pari a 11, ottenuto contato il numero di valori per cui non è nullo ovvero tutti i punti tra zero e dieci includendo anche gli estremi.

Capito questo ci rimane molto semplice disegnare il segnale che sarà dato da una sequenza (questo il termine corretto per i segnali a tempo discreto) crescente di valori. In particolare in zero avrà valore nullo, in uno varrà uno, in due due e così via fino ad arrivare a dieci.

Riportiamo di seguito il grafico del segnale ottenuto in MATLAB:

Come al solito segue anche il codice utilizzato per la generazione del grafico appena visto:

```
n = [-15:15];
x = [zeros(1,15),0:10,zeros(1,5)];
figure(1)
stem(n,x,'LineWidth',2)
xlabel('$n$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
ylabel('$x[n]$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
grid on
set(gca,'fontsize',30)
```

Capito come è fatto il segnale di partenza $x[n]$ possiamo ora analizzare il caso **a** che altro non è che una traslazione della nostra sequenza verso sinistra di fatto anticipandola. Al fine di evitare confusione per capire se una sequenza viene anticipata o ritardata, dunque traslata verso destra o sinistra, possiamo ragionare nel seguente modo. In questo caso prendiamo la scrittura del nostro nuovo segnale:

$$y[n] = x[n + 5]$$

Andiamo a sostituire un valore di n, per esempio lo zero, ed otteniamo che:

$$y[0] = x[0 + 5] = x[5]$$

Ovvero che il segnale traslato in zero, $y[0]$ dovrà valere quanto vale il segnale originale, $x[5]$ in cinque. Anche senza andare a calcolare un secondo punto possiamo vedere come il nostro segnale si sia "spostato indietro" ottenendo di fatto il segnale riportato di seguito:

Il codice ottenuto per generare il grafico è il seguente:

```
n = [-15:15];
y = [zeros(1,31)];

for k = -5:10
    y(16 + k) = x(16 + k + 5);
end

stem(n,y,'LineWidth',2)
xlabel('$n$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
ylabel('$y[n]$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
grid on
set(gca,'fontsize',30)
```

Passiamo ora al punto **b** dove abbiamo lo stesso segnale di partenza che viene anticipato di cinque campioni effettuando però un rilbaltamento della sequenza in quanto la variabile n appare con il segno negativo. Di fatto per ottenere il grafico richiesto in questo punto possiamo andare a prendere il grafico già traslato del punto **a** e ribaltarlo ottenedo il risultato seguente:

Come di consueto segue anche il codice MATLAB per generare il grafico:

```
n = [-15:15];
y = [zeros(1,31)];

for k = -5:10
    y(16 + k) = x(16 - k + 5);
end
```

```
7
8 stem(n,y,'LineWidth',2)
9 xlabel('$n$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
10 ylabel('$y[n]$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
11 grid on
12 set(gca,'fontsize',30)
```

Come possiamo notare il codice utilizzato è identico a quello precedente ma con una sola differenza ovvero quella di aver cambiato il segno della variabile k nella seconda parte della quinta riga.

Passando oltre raggiungiamo ora il caso **c** in cui possiamo notare come sia stata effettuata un'operazione di sottocampionamento. In altri termini, allo scorrere di n, stiamo solo selezionando i valori dei campioni pari del segnale di partenza $x[n]$. Dovessimo costruire il segnale $y[n]$ pezzo per pezzo possiamo fare come fatto in precedenza ed andare a sostituire:

$$y[n] = x[2n] \rightarrow y[0] = x[2 \cdot 0] = x[0]$$
$$y[n] = x[2n] \rightarrow y[1] = x[2 \cdot 1] = x[2]$$
$$\dots$$
$$y[n] = x[2n] \rightarrow y[5] = x[2 \cdot 5] = x[10]$$

Come possiamo vedere il supporto della sequenza risultante sarà dimezzato in quanto abbiamo sottocampionato la sequenza di partenza prendendo solo alcuni campioni. In particolare otteniamo in grafico seguente:

Come di consueto segue anche il codice MATLAB usato per generare il grafico:

```
n = [-15:15];
y = [zeros(1,31)];

for k = 0:5
    y(16 + k) = x(16 + 2*k);
end

stem(n,y,'LineWidth',2)
xlabel('$n$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
ylabel('$y[n]$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
grid on
set(gca,'fontsize',30)
```

Proseguiamo ancora ad affrontiamo ora il punto **d** dove il nostro segnale è ora composto da tre parti distinte e sommate tra di loro. Come possiamo subito vedere, ricordando i casi **a** e **b**, le prime due componenti corrispondono rispettivamente ad una traslazione di dieci campioni del segnale $x[n]$ verso sinistra ed a un successivo ribaltamento.

Di seguito sono riportati, in pannelli separati, i grafici delle prime due sequenze:

Il codice utilizzato per ottenere i grafici appena visti è idenico a quello visto nei casi **a** e **b** dove invece di traslare di un numero di campioni pari a cinque di trasla di dieci. Ora che abbiamo visto come sono composte le prime due sequenze andiamo ad analizzare la terza. La terza sequenza non è altro che una delta, centrata in zero, moltiplicata per una costante pari a dieci con l'effetto di amplificarla in ampiezza.

Compresa anche questa ultima parte possiamo andare a mettere tutto assieme ottenendo il seguente grafico:

Come al solito segue anche il codice MATLAB utilizzato:

```
n = [-15:15];
x = [zeros(1,15),0:10,zeros(1,5)];

y_1 = [zeros(1,31)];
y_2 = [zeros(1,31)];
y_3 = [zeros(1,31)];

for k = -10:1
    y_1(16 + k) = x(16 + k + 10);
end

for k = 0:10
    y_2(16 + k) = x(16 - k + 10);
end

y_3(16) = 10;

hold on
stem(n,y_1,'LineWidth',2)
stem(n,y_2,'--','LineWidth',2)
stem(n,-y_3,'-.','LineWidth',2)
grid on
xlabel('$n$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
ylabel('$y_4[n]$ ','Interpreter','latex','Fontsize',20)
```

Volendo essere precisi notiamo che nell'origine le tre sequenze si sovrappongono, andiamo dunque a semplificare una delle due delta positive con quella negativa (è sottratta) ed otteniamo il seguente risultato:

Per ottenere tale risultato in MATLAB si è omessa la scrittura della delta e si è rimosso un campione di una delle due sequenze positive.

Concludiamo ora l'esercizio andando ad analizzare il punto **e**. Per riuscire a scomporre il segnale $x[n]$ in due segnali, uno pari e l'altro dispari, dobbiamo operare nel seguente modo. Prima di tutto i due segnali che indicheremo come $x_p[x]$ e $x_d[x]$ dovranno essere ottenuti tramite una qualche trasformazione di $x[n]$ moltiplicata per $\frac{1}{2}$ in quanto entrambi dovranno contribuire per metà alla creazione del segnale. In particolare possiamo ottenere il segnale pari andando a ribaltare $x[n]$ ottenendo:

$$x_p[n] = \frac{1}{2}\big(x[n] + x[-n]\big)$$

Dato che per ora il segnale ottenuto non è nullo prima dello zero ed è solo pari alla metà dall'ampiezza desiderata dobbiamo andare a sommare ancora un pezzo di sequenza alla parte positiva togliendo la sequenza negativa per ottenere il segnale $x[n]$, si ottiene che:

$$x_d[n] = \frac{1}{2}\big(x[n] - x[-n]\big)$$

Seguono i grafici dei due segnali appena descritti:

Infine come nostro solito riportiamo il codice MATLAB utilizzato per generare i grafici riportati sopra

1.1.2 Esercizio 2 - Convoluzione di segnali a tempo discreto

Si considerino le seguenti sequenze e si calcoli la convoluzione lineare discreta:

- $x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$
- $x_2[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

Verificare il risultato ottenuto attraverso un codice MATLAB utilizzando la funzione `conv(a,b)` implementata all'interno dell'ambiente di sviluppo.

Prima di cominciare con i calcoli andiamo a rappresentare graficamente queste due sequenze. Come possibile intuire si ottengono i seguenti grafici:

Segue anche il codice MATLAB utilizzato per crearli.

Adesso che abbiamo i due operandi possiamo andare a scrivere l'operazione di convoluzione seguendo la definizione, si ottiene che:

$$z[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$$

Come possiamo vedere la convoluzione tra queste due sequenze risulta essere il prodotto tra la prima sequenza $x_1[n]$ e la seconda ribaltata e traslata ovvero $x_2[n-k]$. Adesso possiamo procedere in due modi diversi: facendo il prodotto attraverso operazioni grafiche oppure attraverso il calcolo vettoriale.

Per semplicità svolgeremo il calcolo con la notazione vettoriale e riporteremo solo uno schema dello svolgimento grafico. Ricordiamo che l'algoritmo che viene eseguito è lo stesso e che non cambia assolutamente nulla tra un metodo e l'altro. In particolare il metodo vettoriale risulta più comodo e veloce ma forse meno intuitivo.

Prima di tutto andiamo a scrivere i nostri vettori di partenza. Come sappiamo, dovendo far scorrere un vettore lungo l'altro, abbiamo bisogno di inserire degli zeri ai lati dei nostri vettori che facciamo scorrere per evitare che siano troppo corti. Nel nostro caso essendo entrambi i vettori di lunghezza tre, e volendo rappresentare come primo ed ultimo scenario il caso in cui si ha una sola sovrapposizione, dobbiamo andare ad aggiungere, ad ogni lato, un numero pari di zeri alla lunghezza del vettore più corto togliendo uno. Il secondo vettori si ottiene aggiungendo un numero di zeri opportuno. Ricordiamo che questo ragionamento vale quando a scorrere è il vettore di lunghezza minore. Fatti i passaggi appena elencati otteniamo dunque che:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_2[n] &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Adesso non ci basta altro che moltiplicare i due vettori e sommare le singole componenti. Seguono ora tutti i casi andando ad esplicitare la definizione di convoluzione sottolineando i numeri che si sovrappongono. Ricordando che il prodotto per zero è nullo i valori che si sovrappongono con degli zeri vengono ignorati.

$$x_1[k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x_2[0-k] &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \underline{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
x_2[1-k] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \underline{2} & \underline{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
x_2[2-k] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
x_2[3-k] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \underline{2} & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
x_2[4-k] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Andiamo ora a fare le moltiplicazioni tra i termini in sovrapposizione:

$$z[0] = \sum_k^\infty = x_1[k] \cdot x_2[0-k] = 3 \cdot 1 = 3$$
$$z[1] = \sum_k^\infty = x_1[k] \cdot x_2[1-k] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$
$$z[2] = \sum_k^\infty = x_1[k] \cdot x_2[2-k] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8$$
$$z[3] = \sum_k^\infty = x_1[k] \cdot x_2[3-k] = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$$
$$z[4] = \sum_k^\infty = x_1[k] \cdot x_2[4-k] = 1 \cdot 1 = 1$$

Ottenuti ora i valori del vettore $z[n]$ abbiamo che:

$$z[n] = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo anche riscrivere la sequenza ottenuta così:

$$z[n] = x_1[n] * x_2[n] = 3\delta[n] + 8\delta[n-1] + 8\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

Verifichiamo ora il risultato ottenuto attraverso MATLAB. Per verificare il risultato andiamo ad utilizzare il seguente codice:

Il risultato che otteniamo è identico a quello calcolato in precedenza il che conferma l'esattezza del calcolo. Infine possiamo andare ad eseguire un plot della sequenza $z[n]$ ottenendo il seguente risultato:

Infine riportiamo uno schema che riassume quanto appena fatto ma operando graficamente:

1.1.3 Esercizio 3 - Determinazione e calcolo di potenza ed energia finite

Passiamo ora all'esercizio successivo dove ci è chiesto di determinare se le seguenti sequenze sono a energia finita o a potenza finita e calcolarne energia e potenza.

a) $x[n] = \begin{cases} e^{-n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

b) $x[n] = A$

c) $x[n] = Ae^{-j2\pi \frac{n}{N}}$

d) $x[n] = \begin{cases} A & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

e) $x[n] = \begin{cases} A & n \geq 0 \\ 0 & \quad n < 0 \end{cases}$

1.1.4 Esercizio 4 - Sistema di riconoscimento vocale

1.1.5 Esercizio 5 - Periodo di un segnale a tempo discreto

1.2 Esercitazione 2 - 19/11/2025

In questa seconda esercitazione si continueranno ad affrontare problemi riguardo l'elaborazione di segnali discreti. In particolare all'interno di questa esercitazione ci concentreremo sulle operazioni di convoluzione lineare, DTFT di un segnale, FFT di un segnale e DTF di un segnale andando ad analizzarne i particolari.

1.2.1 Esercizio 1 - DTFT di un segnale

Si calcoli la DTFT del segnale:

$$x[n] = u[n] - u[n-10] + n \cdot e^{-n} u[n]$$

Cominciamo con la risoluzione dell'esercizio andando, come prima cosa, a disegnare il segnale $x[n]$ formato da tre parti che tratteremo in modo separato in quanto vale la proprietà di linearità. In particolare i tre pezzi che compongono $x[n]$ sono un gradino $u[n]$, un gradino ritardato di dieci campioni ed infine una sequenza esponenziale decrescente non nulla solo per valori positivi e moltiplicata a sua volta per un valore n. La differenza delle prime due sequenze genera, come abbiamo già visto, una porta definita tra l'origine ed $n = 9$.

Possiamo ora, per linearità, andare a trasformare i singoli pezzi per poi ricomporli più tardi. In particolare denominando con $x_1[n]$ la porta definita dalla prime due sequenze e $x_2[n]$ la restante parte otteniamo che:

$$X_1(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

Posso riscrivere l'espressione appena vista come:

$$\sum_{n=0}^{9} e^{-j2\pi n f} = \frac{1 - e^{-j2\pi f \cdot 10}}{1 - e^{-j2\pi f}}$$

Arrivati a questo punto possiamo trasformare il secondo pezzo denominato $x_2[n]$. In particolare scrivendo $x_2[n]$ come:

$$x_2[n] = n \cdot z[n] \qquad \text{con} \qquad z[n] = e^{-n} \cdot u[n]$$

Possiamo ottenere il risultato appena visto in quanto a lezione

Passando alla seconda parte, ovvero $x_2[n]$, possiamo andare ad applicare la proprietà della derivazione in frequenza secondo la seguente formula dove:

$$n \cdot x[n] \rightarrow \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} X(e^{j2\pi f})$$

Possiamo quindi calcolare la trasformata del termine $e^{-n} \cdot u[n]$ parte ottenendo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n} \cdot u[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

Sapendo che moltiplico il tutto per un gradino unitario limito la mia sommatoria ad indici positivi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cdot e^{-j2\pi fn}$$

utilizzando le proprietà degli esponenti ottengo che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cdot e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\cdot(2j\pi f+1)}$$

In definitiva arriviamo al risultato seguente attraverso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\cdot(2j\pi+1)} = \frac{1}{1-e^{-(2j\pi f+1)}}$$

Ora scomponendo l'esponenziale al denominatore ed applicando la proprietà sopracitata si ottiene che:

$$\frac{j}{2\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} X(e^{j2\pi f}) = \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} \frac{1}{1-e^{-1}e^{-2j\pi f}}$$

Ora non ci basta che calcolare la derivata come indicato di seguito, utilizzando le opportune tecniche di derivazione, in questo caso si utilizza la regola di derivazione di un rapporto.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

Segue lo svolgimento del calcolo:

$$\frac{j}{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} \frac{1}{1-e^{-1}e^{-2j\pi f}} = \frac{j}{2\pi} \frac{e^{-1} \cdot e^{-j2\pi f} \cdot (-j2\pi)}{(1-e^{-1}e^{-2j\pi f})^2}$$

A questo punto il denominatore resta invariato, se non per la semplificazione di 2π con il numeratore, mentre al numeratore avviene la semplificazione di $-j \cdot j$ ad 1. Otteniamo in definitiva il seguente risultato:

$$\frac{e^{-1} \cdot e^{-j2\pi f}}{(1-e^{-1}e^{-2j\pi f})^2}$$

Arrivati a questo risultato il risultato atteso, ovvero la trasformata di $x[n]$, è stato raggiunto concludendo di fatto l'esercizio.

1.2.2 Esercizio 2 - Costruzione di una sequenza e calcolo DTFT

Si consideri una sequenza $x[n]$ con DTFT pari a $X(e^{j2\pi f})$. Si costruisca una sequenza $y[n]$ a partire da $x[n]$ con la regola:

$$y[2n] = x[n]$$

$$y[2n+1] = -x[n]$$

Si calcoli ora la DTFT di $y[n]$.

Iniziamo la risoluzione dell'esercizio notando come la regola descritta sopra opera su una sequenza qualsiasi $x[n]$ ritornando il valore assunto della sequenza nel caso in cui il campione sia pari mentre il valore cambiato di segno nel caso in cui il campione sia dispari. Compreso ora come opera la nostra regola possiamo andare avanti considerando la generica sequenza $x[n]$ come la sommatoria di due sequenze, una a termini pari ed una a termini dispari, separate tra di loro.

Otteniamo dunque che la DTFT della sequenza $y[t]$ é:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j2\pi fn}$$

Scrivendo la sequenza $y[t]$ come combinazione di due sommatoria, una pari l'altra dispari, di $x[t]$ ottengo che:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=\text{ pari}}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j2\pi fn} + \sum_{n=\text{ dispari}}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j2\pi fn}$$

Esplicitiamo ora la dicitura pari e dispari andando a riscrivere le sommatorie in modo opportuno utilizzando sempre la variabile n. Ottengo che:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[2n] \cdot e^{-j2\pi f2n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[2n+1] \cdot e^{-j2\pi f(2n+1)}$$

Arrivati a questo punto possiamo andare a sostituire le sequenze $y[2n]$ e $y[2n+1]$ con $x[n]$ e $-x[n]$, ottenendo che:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f2n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f(2n+1)}$$

Possiamo a questo punto unire tutto sotto un'unico simbolo di sommatoria e distribuendo l'argomento del secondo esponenziale, ottenendo che:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \left(e^{-j2\pi f2n} - e^{-j2\pi f2n} \cdot e^{-j2\pi f}\right)$$

Effettuo ora un raccoglimento:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f2n}(1 - e^{-j2\pi f})$$

Arrivati a questo punto notiamo come

1.2.3 Esercizio 3 - Analisi FFT su un segnale limitato nel tempo

Un segnale praticamente limitato nel tempo per $0 \leq t \leq T_1$ con $T_1 = 1$ s e limitato in banda per $|f| \leq B_x$ con $B_x = 32$ Hz viene campionato alla frequenza di Nyquist $\frac{1}{T_0} = 2B_x$.
I campioni $x_n = x(nT_0)$, dove T_0 è il periodo di campionamento, vengono usati per valutare numericamente lo spettro del segnale mediante una FFT a radice due. Si richiede una risoluzione in frequenza $\Delta f = 0.5$ Hz. Dire quale delle seguente affermazioni è corretta:

1) Per conseguire la risoluzione in frequenza richiesta è necessario elaborare almeno $N = 128$ campioni e può essere necessario estendere il segnale nel tempo con campioni nulli.

2) Non è possibile in alcun modo conseguire la risoluzione in frequenza richiesta.

3) Non è possibile conseguire la risoluzione in frequenza richiesta se non campionando il segnale ad una frequenza superiore alla frequenza di Nyqvist.

4) Nessuna delle altre risposte è corretta.

1.2.4 Esercizio 4 - Sequenza campionata e DFT

Si consideri la sequenza $x[n]$ di $N = 10$ campioni che vale 1 per $n = 0, 2, 8$ e zero altrove. Si calcoli $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$.

Iniziamo con la risoluzione dell'esercizio andando a rappresentare la sequenza data in analisi. Segue il grafico della sequenza:

Come nostro solito riportiamo anche il codice MATLAB utilizzato per generarla:

Arrivati a questo punto possiamo andare a calcolare la DFT della sequenza secondo la formula seguente:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{9} x[n] \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{10}}$$

In particolare notiamo come $x[n]$ assuma valori non nulli solo in tre punti (0,2,8) potendo dunque esplicitare i singoli valori della sommatoria nel modo seguente:

$$n = 0 \rightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi 0 \frac{k}{10}} = 1 \cdot 1 = 1$$
$$n = 2 \rightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{2k}{10}}$$
$$n = 8 \rightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{8k}{10}}$$

Sommando i termini ottengo che:

$$X[k] = 1 + e^{-j2\pi \frac{2k}{10}} + e^{-j2\pi \frac{8k}{10}}$$

Ora possiamo sommare o sottratte un valore di k intero all'ultimo esponenziale per ottenere un'argomento pari a quello di quello precedente in modulo ma non in segno. Ottengo che:

$$X[k] = 1 + e^{-j2\pi \frac{2k}{10}} + e^{-j2\pi \frac{8k}{10} - \frac{10k}{10}} = 1 + e^{-j2\pi \frac{2k}{10}} + e^{j2\pi \frac{2k}{10}}$$

A questo punto, utilizzando la notazione dei numeri complessi, riscrivere $X[k]$ come:

$$X[k] = 1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi k}{10}\right)$$

In particolare notiamo come il segnale ottenuto sia una sinusoide traslata di 1 verso l'alto. Segue un grafico di $X[k]$ con evidenziati i 10 campioni ottenuti sostituendo a k un valore dell'intervallo $[0, 9]$.

Segue anche il codice MATLAB utilizzato per generarlo:

1.2.5 Esercizio 5 - Spettro e campionamento di un segnale attraverso FFT

Si consideri un segnale $x(t)$ il cui spettro $X(f)$ è nullo per $|f| > f_x$, con $f_x = 10$ Hz. Si costruisca il segnale $y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_y t)$ con $f_y = 50$ Hz. Si vuole valutare lo spettro $Y(f)$ a partire da opportuni campioni di $y(t)$, usando una FFT a radice 2. Volendo ottenere una risoluzione in frequenza di 3 Hz, si valuti il passo di campionamento da scegliere per $y(t)$, il numero di campioni N e la risoluzione finale ottenuta.

Iniziamo a risolvere questo esercizio andando a considerare un segnale analogico $x(t)$ generico in modo tale da avere qualcosa su cui poter visualizzare le operazioni che faremo. Inoltre sapendo che lo spettro di tale è finito andiamo a rappresentare la sua porzione di banda avente un supporto pari all'intervallo $(-f_x; f_x)$ ovvero tra -10 e 10 Hz. Segue il grafico della regione di banda del segnale.

Ora possiamo andare a costruire il segnale $y(t)$ come indicato dal testo del problema. In particolare dato un generico $x(t)$ e sfruttando la modulazione si ottiene che:

$$Y(f) = \frac{1}{2}\Big[X(f - f_y) + X(f + f_y)\Big]$$

Quindi, come ormai dovremmo sapere, lo spettro di $x(t)$ viene traslato attorno a $\pm f_y$ e dimezzato in ampiezza. Se prima aveva un'ampiezza arbitraria pari ad A ora le due repliche traslate hanno ampiezza $\frac{A}{2}$.

Iniziamo ora analizzando il primo punto dove ci viene chiesto di valutare passo di campionamento del segnale $y(t)$ appena generato. Come ci viene detto se $\Delta f \leq 3$ Hz si avrà che:

$$\Delta f = \frac{1}{T} \leq 3\,\text{Hz} \rightarrow T \geq \frac{1}{3}\,\text{s}$$

Si ottiene dunque che il passo di campionamento usato deve essere pari a circa 0.33 s

Procediamo oltre trovando la massima componente in frequenza pari a $f_{max} = f_y + f_x$ con la quale possiamo andare a calcolare, secondo Nyquist, la frequenza di campionamento opportuna al fine di evitare aliasing. In particolare otteniamo che:

$$f_s \geq 2 \cdot f_{max} \rightarrow f_s = 2 \cdot (f_y + f_x) = 2 \cdot (50 + 10) = 120\,\text{Hz}$$

Ora non ci basta che calcolare il numero di punti, ovvero campioni, necessari affinché siano sufficienti per una corretta analisi. In particolare sapendo che la risoluzione di una FFT è:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

Possiamo ora calcolare il numero di punti necessari al fine di ottenere una risoluzione minore di $\delta f = 3$ Hz. In particolare si ha che:

$$N \geq \frac{f_s}{\Delta f} \rightarrow N \geq \frac{120\,\text{Hz}}{3\,\text{Hz}} \rightarrow N \geq 40$$

Ricordiamo ora che il testo richiedeva l'utilizzo di una FFT a radice 2 il che comporta l'utilizzo do un numero di campioni pari ad una potenza di due. Arrotondiamo quindi il risultato ottenuto alla potenza di due più vicina. Ricordiamo che la potenza di due più vicina deve essere maggiore del valore di N trovato; nel caso in cui non lo sia non staremo più rispettando i parametri di risoluzione richiesti. In definitiva andiamo a considerare $N = 64$.

Infine calcoliamo la corrispettiva risoluzione in frequenza pari a:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{120\,\text{Hz}}{64} = 1.875\,\text{Hz}$$

1.2.6 Esercizio 6 - Costruzione di una sequenza e DFT

A partire dal segnale analogico $x(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ (con A_1 e A_2 costanti positive) si costruisce la sequenza $x[n] = x(nT_c)$ con $T_c = 1/(2f_0)$. Si considerino $N = 10$ campioni di $x[n]$ nell'intervallo $0 \leq n \leq 9$ e la sequenza $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa:

1) La sequenza campionata vale $x[n] = A_1 e^{j\pi n}$

2) $X[k] = 0$ per $0 \leq k \leq 5$

3) $X[k] = 0$ per $0 \leq k < 5$

4) $X[k] = 10 \cdot A_1$ per $k = 5$

Andiamo ora a ad analizzare il problema e tentare una soluzione. Come prima andiamo ad analizzare il nostro segnale analogico $x(t)$. Il segnale dato in esame è composto dalla somma di due sinusoidi, aventi stessa frequenza, moltiplicate per due costanti che ne modificano l'ampiezza. Ora che abbiamo capito come è composto il nostro segnale dobbiamo andare ad ottenere la sequenza $x[n]$ tramite un campionamento dove consideriamo i primi 10 campioni. In particolare esplicitando l'operazione di campionamento si ottiene:

$$x[n] = x(nT_c) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_0 n T_c) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_0 n T_c)$$

Sapendo che il valore di T_c è pari a $\frac{1}{2f_0}$ andiamo a sostituire tale valore nell'espressione appena trovata:

$$x[n] = x(nT_c) = x(\frac{n}{2f_0}) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_0 \frac{n}{2f_0}) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_0 \frac{n}{2f_0})$$

Andiamo ora a semplificare, ottenendo:

$$x[n] = A_1 \cdot \cos(\pi n) + A_2 \cdot \sin(\pi n)$$

A questo punto essendo n un numero intero possiamo riscrivere il coseno ed il seno nel modo seguente in quanto il coseno di $n\pi$ è sempre pari a -1 o +1 mentre il seno è sempre nullo. Otteniamo dunque:

$$x[n] = A_1 \cdot (-1)^n$$

Ci è infine possibile riscrivere $x[n]$ utilizzando un'esponenziale complesso, otteniamo infine che:

$$x[n] = A_1 \cdot e^{j\pi n}$$

Arrivati a questo punto possiamo dire che l'opzione **1)** risulta essere corretta motivo per cui dobbiamo controllare quelle successive. Come possiamo vedere le restanti tre opzioni fanno riferimento a $X[k]$ che altro non è che la DTF di $x[n]$ motivo per cui ora la calcoleremo. Seguono i passaggi effettuati:

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} \quad \text{con} \quad x[n] = A_1 \cdot e^{j\pi n}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{9} x[n] \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}$$

Sostituisco i valori di N e di $x[n]$, ottengo che:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{9} A_1 \cdot e^{j\pi n} \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{10}}$$

Porto ora fuori la costante A_1 e raccolgo n all'esponente:

$$X[k] = A_1 \cdot \sum_{n=0}^{9} (e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{10}})^n$$

A questo punto possiamo verificare il punto **4)** in quanto, essendo una sommatoria, basta che il valore elevato ad n sia pari ad 1 per il valore di $k = 5$ così da ottenere una sommatoria di 10 volte uno. Segue la verifica di quanto appena detto:

$$e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{10}} = 1 \quad \text{con} \quad k = 5$$

$$e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{5}{10}} = e^{j\pi} \cdot e^{-j\pi}$$

Entrambi gli esponenziali complessi sono pari ad uno per l'identità di Eulero. Si verifica quindi quanto detto prima.

Arrivati a questo punto dobbiamo solo verificare i valori assunti al variare di k. In particolare, come fatto anche in precedenza, possiamo riscrivere la sommatoria utilizzando la serie geometrica troncata di cui riportiamo la formula:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r}$$

Sostituendo r con $e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi\frac{k}{10}}$ ed N con 10 ottengo che:

$$A_1 \cdot \sum_{n=0}^{9} (e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi\frac{k}{10}})^n = A_1 \cdot \frac{1 - \left(e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi\frac{k}{10}}\right)^{10}}{1 - e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi\frac{k}{10}}}$$

A questo punto possiamo verificare le opzioni rimanenti semplicemente andando a variare il valore di k. Iniziamo cercando di capire quale delle due opzioni rimanente è vera.

Possiamo riscrivere la sommatoria nel modo sguente:

$$A_1 \cdot \sum_{n=0}^{9} (e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi\frac{k}{10}})^n = A_1 \cdot \sum_{n=0}^{9} e^{j2\pi n(\frac{1}{2}-\frac{k}{10})}$$

Sapendo che la ragione della sommatoria è $r = e^{j2\pi n(\frac{1}{2}-\frac{k}{10})}$ ci troviamo nei due casi seguenti.

Nel caso in cui $r \neq 1$ ottengo il risultato seguente:

$$Xn = A_1 \cdot \sum_{n=0}^{9} r^n = A_1 \cdot \frac{1-r^{10}}{1-r}$$

Essendo r^{10} pari a $e^{j2\cdot 10\pi n(\frac{1}{2}-\frac{k}{10})}$ ovvero pari a $e^{j2\pi(5-k)}$ dato che $5-k$ risulta essere intero la sommatoria assume sempre un valore nullo in quanto al numeratore compare il valore $1-1$. Nel caso in cui $r = 1$ tutti i termini della sommatoria sono 1 ed otteniamo un valore pari a 10. In particolare l'uguaglianza $r = 1$ si verifica quando $\frac{1}{2} - \frac{k}{10}$ è un numero relativo in quanto porta l'esponenziale complesso, scrivibile come somma di funzioni trigonometriche, ad un valore nullo. La condizione citata sopra è soddisfatta per tutti i valori di k pari a $5 + m10$ dove m assume un qualsiasi valore relativo.

In alternativa al calcolo appena fatto si poteva ragionare nel modo seguente. Sapendo dall'opzione **4)** che $x[k]$ assumeva un valore non nullo, in quanto A_1 è positiva per definizione si poteva dedurre che l'opzione **2)** fosse falsa in quanto in contraddizione sul valore assunto a $k = 5$.

1.3 Esercitazione 3 - 27/11/2025

1.3.1 Esercizio 1 - Trasformata zeta razionale

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

1) Per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo.

2) Per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo.

3) Per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo.

4) Per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo.

1.3.2 Esercizio 2 - Trasformata zeta e regione di convergenza

Calcolare la trasformata zeta e la regione di convergenza dei seguenti segnali discreti:

1) $x[n] = \alpha^{|n|}$

2) $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

3) $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N \\ 2N-n & N+1 \leq n \leq 2N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

1.3.3 Esercizio 3 - Calcolo della trasformata zeta I

Calcolare la trasformata zeta delle sequenze calcolando gli zeri ed i poli per ognuna di esse:

1) $x[n] = \alpha^n \cdot u[n]$

2) $x[n] = \sin[\omega_0 n] \cdot u[n]$

3) $x[n] = \cos[\omega_0 n] \cdot u[n]$

4) $x[n] = \alpha^n \cdot \cos[\omega_0 n] \cdot u[n]$

5) $x[n] = n\alpha^n \cdot u[n]$

6) $x[n] = n^2\alpha^n \cdot u[n]$

1.3.4 Esercizio 4 - Calcolo della trasformata zeta II

Sia data la sequenza $x[n] = (-a) \cdot n \cdot u[n]$ con $u[n]$ la sequenza gradino unitario e $a = 0.5$. La trasformata z di $x[n]$, $X(z)$:

a) Non ha poli

b) Non ha zeri e ha due poli semplici reali in $z = \pm 0.5$

c) Ha uno zero nell'origine, uno zero reale in $z = -0.5$ e due poli complessi coniugati in $z = \pm j0.5$

d) Ha uno zero nell'origine e due poli complessi coniugati in $z = \pm j0.5$

e) Ha uno zero nell'origine e un polo reale semplice in $z = -0.5$

1.3.5 Esercizio 5 - Calcolo della trasformata zeta e regione di convergenza

Calcolare la trasformata zeta e la regione di convergenza dei seguenti segnali discreti:

1) $x[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \cdot u[n-10]$

2) $x[n] = \begin{cases} 1 & -10 \leq n \leq 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

1.3.6 Esercizio 6 - Calcolo sequenza casuale associata alla trasformata zeta

Determinare le sequenze casuali associate alle seguenti trasformate zeta:

1) $X_a(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

2) $X_b(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$

3) $X_c(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

1.3.7 Esercizio 7 - Calcolo sequenza corrispondente alla trasformata zeta

Calcolare la sequenza corrispondente alle seguenti trasformate zeta:

1) $X(z) = (1+2z) \cdot (1+3z^{-1}) \cdot (1-z^{-1})$

2) $X(z) = \frac{3z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})} \quad |z| > \frac{1}{2}$

3) $X(z) = \frac{2z^3+z^2}{(z+3)(z-1)} \quad |z| > 3$

1.4 Esercitazione 4 - 4/12/2025

1.4.1 Esercizio 1 - Risposta all'impulso del filtro numerico

Calcolare la risposta all'impulso del filtro numerico specificato dalla seguente equazione ricorsiva:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{3}{2} \cdot y[n-1]$$

1.4.2 Esercizio 2 - Analisi filtro FIR I

Dato il filtro FIR:

$$y[n] = x[n] - x[n-4]$$

1) Calcolare e disegnare il modulo e la fase della funzione di trasferimento $H(f) = H(e^{2j\pi f})$

2) Calcolare la sequenza in uscita dal filtro quando in ingresso abbiamo la sequenza:

$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]$$

3) Giustificare il risultato di **2)** utilizzando il risultato di **1)**

1.4.3 Esercizio 3 - Analisi sistema LTI a tempo discreto I

Si consideri un sistema LTI a tempo discreto, descritto dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = \alpha x(n-1) + 2\beta y(n-1) - \beta^2 y(n-2)$$

dove α e β sono numeri reali.
Si richiede di:

1) Disegnare lo schema circuitale del sistema.

2) Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ e discutere la stabilità del sistema al variare dei parametri α e β.

3) Calcolare la risposta all'impulso $h(n)$ e la risposta in frequenza $H(e^{j2\pi f})$.

4) Ponendo $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{(}2)$, calcolare l'uscita l'uscita $y(n)$ quando all'ingresso è posto il segnale $x(n)$ ottenuto dal campionamento della sinusoide analogica $x(t) = cos(2\pi f_0 t)$ con frequenza di campionamento pari al quadruplo della frequenza di Nyquist.

1.4.4 Esercizio 4 - Analisi sistema LTI a tempo discreto II

Si consideri il sistema LTI discreto con la seguente relazione tra ingresso e uscita:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] + x[n-1] - 2x[n-2]$$

Si richiede di:

1) Studiare poli e zeri della funzione di trasferimento.

2) Dire se il sistema è di tipo FIR o IIR.

3) Dire se il filtro è a fase minima.

1.4.5 Esercizio 5 - Analisi filtro FIR II

Si consideri il filtro di tipo FIR con $H(z)$ come riportata di seguito.

$$H(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})$$

Si richiede di:

1) Studiare poli e zeri di $H(z)$.

2) Studiare la stabilità del sistema inverso $H^{-1}(z)$.

1.4.6 Esercizio 6 - Analisi funzione di trasferimento

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Si richiede di:

1) Studiare zeri e poli e discutere la stabilità.

2) Calcolare il modulo della funzione di trasferimento $\left|H(e^{j2\pi f})\right|$

1.4.7 Esercizio 7 - Funzione di trasferimento dato un segnale

La funzione di trasferimento di un sistema numerico vale:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

Al sistema viene messo in ingresso il segnale:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n] + u[-n-1]$$

Si richiede di:

1) Calcolare la risposta all'impulso $h[n]$ del sistema.

2) Calcolare l'uscita $y[n]$.

3) Dire se il sistema è stabile.

2 Homework 1 - Analisi in frequenza FFT e DTF

3 Homework 2 -