

**Teoria ed Elaborazione dei Segnali
02MOOOA**
Prof.ssa Gabriella Bosco
Prof. Fabio Dovis

Francesco Abrami - s310570

A.A. 2025 - 2026

Versione: 1.17.9 - 30-12-2025



Indice

1 Introduzione Generale	9
1.1 Suddivisione Corso	9
1.2 Materiale	9
1.3 Lezioni Esercitazioni ed Homework	9
1.4 Prova d'Esame	10
2 Domande	11
3 Concetti fondamentali	12
3.1 Richiami di algebra lineare e geometria - ALG	12
3.1.1 Metrica	12
3.1.2 Spazio vettoriale	13
3.1.3 Norma e distanza	14
3.2 Numeri complessi	14
3.3 Serie numeriche	14
3.4 MATLAB	14
4 Introduzione al corso	14
4.1 Segnali	14
4.1.1 Tipologie di segnali	14
4.2 Possibili operazioni sui segnali	15
4.3 Segnali analogici digitali e la loro trasmissione	15
4.3.1 Scomparsa dei sistemi analogici	16
4.4 Conversione analogico digitale - ADC	16
4.5 Possibili Applicazioni dell'Analisi ed Elaborazione dei Segnali	16
5 Segnali Analogici	16
5.1 Introduzione ai segnali analogici reali e complessi	16
5.1.1 Richiami sui numeri complessi	17
5.2 Classificazione dei segnali analogici	17
5.2.1 Segnali a supporto temporale limitato	17
5.2.2 Segnali ad ampiezza limitata	18
5.2.3 Segnali impulsivi	18
5.2.4 Segnale fisico	18
5.3 Energia e potenza di un segnale	18
5.3.1 Segnali ad energia finita	19
5.3.2 Segnali a potenza finita	19
5.3.3 Segnali periodici	19
5.4 Esempi numerici	19
5.4.1 Energia di un esponenziale decrescente	19
5.4.2 Potenza di un segnale sinusoidale	19
5.5 Rappresentazione vettoriale di un segnale	20

6 Rappresentazione vettoriale dei segnali	20
6.1 Esempio di applicazione della rappresentazione geometrica	20
6.1.1 La funzione porta nel tempo	20
6.2 Funzione delta di Dirac	20
6.2.1 Proprietà della delta di Dirac	20
7 La serie e le trasformate di Fourier	22
7.1 Serie di Fourier	22
7.2 Trasformata di Fourier	22
8 Sistemi	22
8.1 Introduzione ai sistemi	22
8.2 Classificazione di sistemi	24
8.2.1 Sistemi lineari	24
8.2.2 Sistemi tempo invarianti	24
8.2.3 Sistemi senza memoria	24
8.2.4 Sistemi senza memoria e tempo invarianti	24
8.3 Prodotto di convoluzione	24
8.3.1 Costruzione grafica	24
8.3.2 Convoluzione di due porte	24
8.3.3 Proprietà del prodotto di convoluzione	24
9 Sistemi LTI	24
9.1 Risposta all'impulso	24
9.2 Funzione di trasferimento	24
9.3 Tipologie di filtri realizzabili	24
10 Blocchi	24
11 Segnali Periodici e le loro trasformate	24
12 Segnali Periodici e le loro trasformate	24
13 Spettro	24
13.1 Spettro di energia	24
13.2 Spettro di potenza	24
14 Conversione DAC e ADC	24
14.1 Introduzione	25
14.2 Tipologie di segnali	25
14.3 Campionamento	25
14.4 Errore di quantizzazione	25

15 Segnali a tempo discreto	26
15.1 Introduzione	26
15.1.1 Storia dell'ENS	26
15.1.2 Applicazioni dell'ENS	26
15.2 Segnali a tempo discreto	26
15.2.1 Durata	26
15.2.2 Causalità	26
15.2.3 Parità	26
15.2.4 Periodicità	26
15.2.5 Sequenze limitate in ampiezza	26
15.2.6 Sequenze sommabili	26
15.3 Operazioni	26
15.3.1 Somma, differenza, prodotto	26
15.3.2 Traslazione e ribaltamento	26
15.3.3 Scalamento temporale	26
16 Sequenze fondamentali	27
16.1 Sequenza gradino unitario	27
16.2 Delta di Kroenecher	27
16.3 Sequenza sinc	29
16.4 Sequenza porta	29
16.5 Sequenza triangolo	30
16.6 Sequenza esponenziale	31
16.6.1 Sinusoidi ed esponenziali a tempo discreto	31
16.6.2 Esempi	32
16.6.3 Proprietà	32
16.7 Energia e potenza media	32
17 Convoluzione lineare	33
18 Analisi in frequenza di segnali a tempi discreto - DTFT	34
19 Spettro di energia e banda di un segnale a tempo discreto	35
20 DFT come realizzazione pratica della DTFT	36
21 Convoluzione circolare	37
22 Sistemi a tempo discreto	38
23 Trasformata Z	39
23.1 Introduzione	39
23.1.1 Analogia con la trasformata di Laplace	39
23.2 DFT e trasformata Z	40
23.3 Regione di convergenza - ROC	40
23.4 Tipologie di sequenza	40

23.4.1	Termine causale e anticausale	40
23.4.2	ROC di sequenze unilatere	40
23.4.3	ROC di sequenze bilatera	40
23.4.4	ROC di sequenze a supporto finito	40
23.5	Trasformate Z razionali	40
23.5.1	Poli e zeri della trasformata Z	40
23.6	Sequenze bilatera e non a supporto illimitato	40
24	Sistemi LTI e trasformata Z	41
24.1	Equazione alle differenze	41
24.2	Filtri digitali	41
24.3	Interconnessione di sistemi LTI	41
24.4	Stabilità e realizzabilità fisica	41
24.5	Sistemi inversi e a fase minima	41
25	Processi Casuali	42
25.1	Ripasso di teoria della probabilità e variabili casuali	42
25.1.1	Spazio campione	42
25.1.2	Probabilità congiunta	43
25.1.3	Probabilità condizionata	44
25.1.4	Teorema di Bayes	45
25.1.5	Variabile casuale	46
25.1.6	Funzione di distribuzione cumulativa	46
25.1.7	Densità di probabilità	46
25.1.8	Insiemi di variabili casuali	46
25.2	Distribuzione cumulativa condizionate	46
25.2.1	Valore atteso e momenti	46
25.2.2	Momenti centrali	46
25.2.3	Combinazione lineare di variabili casuali	46
25.2.4	Funzione caratteristica	46
25.2.5	Variabile Gaussiana	46
25.2.6	Densità di probabilità e istogrammi	46
25.2.7	Teorema limite centrale	46
25.3	Canale di comunicazione discreto	46
25.3.1	Caratterizzazione probabilistica del canale di comunicazione discreto .	46
25.3.2	Probabilità di errore	46
25.3.3	Attendibilità del canale discreto e canale BSC con sorgente simmetrica	46
25.4	Introduzione ai processi casuali	46
25.4.1	Esempi di applicazione	46
25.4.2	Processi casuali e sistemi	46
25.5	Definizione e tipologia di processi casuali	46
25.5.1	Descrizione probabilistica	47
25.5.2	Gaussian random walk	47
25.6	Descrizione di un processo casuale	47

25.6.1	Media	47
25.6.2	Autocorrelazione	47
25.6.3	Caratterizzazione tramite media e autocorrelazione	47
25.7	Processi stazionari	47
25.7.1	Introduzione ai processi stazionari e definizione di stazionarietà	47
25.7.2	Interpretazione stazionarietà	47
25.7.3	Processi stazionari in senso stretto e WSS	47
25.7.4	Proprietà e comportamento dell'autocorrelazione per processi WSS	47
25.7.5	Rumore termico	47
25.8	Trasformazioni dei processi casuali	47
25.8.1	Trasformazioni lineari	47
25.8.2	Trasformazione LTI su processo WSS	47
25.8.3	Trasformazione lineare su processo gaussiano	47
25.8.4	Modulazione di ampiezza	47
25.8.5	Modulazione analogica di fase	47
25.9	Densità spettrale di potenza per i processi casuali stazionari WSS	47
25.9.1	Potenza media per processi stazionari	47
25.9.2	Densità spettrale di potenza	47
25.10	Medie temporali ed ergodicità	47
25.10.1	Medie temporali	47
25.10.2	Ergodicità	47
25.11	Esempio conclusivo - Trasmissione 2-PAM	47
26	Esercitazioni - TS	48
26.1	Esercitazione 1 - 01/10/2025	48
26.1.1	Esercizio 1 - Energia di un segnale	48
26.1.2	Esercizio 2 - Potenza media di un segnale	52
26.1.3	Esercizio 3 - Distanza Euclidea tra due segnali	53
26.1.4	Esercizio 4 - Sviluppo di un segnale dalla base	54
26.1.5	Esercizio 5 - Sviluppo in serie di Fourier I	55
26.1.6	Esercizio 6 - Sviluppo in serie di Fourier II	56
26.2	Esercitazione 2 - 07/10/2025	58
26.2.1	Esercizio 1 - Trasformata di Fourier di segnali	58
26.2.2	Esercizio 2 - Trasformata e serie di Fourier di un segnale triangolare	59
26.2.3	Esercizio 3 - Passaggio da tempo a frequenza	59
26.2.4	Esercizio 4 - Energia di un segnale	59
26.3	Esercitazione 3 - 15/10/2025	60
26.3.1	Esercizio 1 - Linearità e tempo-invarianza di un sistema	60
26.3.2	Esercizio 2 - Studio sistema LTI	60
26.3.3	Esercizio 3 - Uscita di un sistema data la sua risposta impulsiva	60
26.3.4	Esercizio 4 - Uscita di un sistema data la sua risposta impulsiva I	60
26.3.5	Esercizio 5 - Risposta impulsiva di un sistema con onda quadra in ingresso	60
26.3.6	Esercizio 6 - Uscita di un sistema data la sua risposta impulsiva II	60
26.4	Esercitazione 4 - 22/10/2025	61

26.4.1 Esercizio 1 - Segnale gaussiano attraverso filtro passabasso gaussiano	61
26.4.2 Esercizio 2 - Canale distorcente	61
26.4.3 Esercizio 3 - Segnale sinusoidale attraverso un sistema LTI	61
26.4.4 Esercizio 4 - Studio di sistema I	61
26.4.5 Esercizio 5 - Studio di sistema II	61
26.5 Esercitazione 5 - 28/10/2025	62
26.5.1 Esercizio 1 - Segnale periodico filtrato da un passabasso I	62
26.5.2 Esercizio 2 - Segnale periodico filtrato da un passabasso II	62
26.5.3 Esercizio 3 - Potenza di un segnale periodico attraverso un sistema LTI	62
26.5.4 Esercizio 4 - Segnale periodico attraverso un filtro passabanda	62
26.5.5 Esercizio 5 - Segnale periodico e trasformazione LTI	63
26.5.6 Esercizio 6 - Spettro di ampiezza di un segnale	66
26.6 Esercitazione 6 - 29/10/2025	69
26.6.1 Esercizio 1 - Segnale ad energia finita e funzione di autocorrelazione	69
26.6.2 Esercizio 2 - Spettro di energia e banda -10dB	72
26.6.3 Esercizio 3 - Funzione di autocorrelazione e sistema LTI	72
26.6.4 Esercizio 4 - Potenza energia e relativi spettri di un sistema	72
26.6.5 Esercizio 5 - Segnale periodico filtrato da un sistema LTI	72
26.7 Esercitazione 7 - 4/11/2025	73
26.7.1 Esercizio 1 - Frequenza di Nyquist	73
26.7.2 Esercizio 2 - Minima frequenza di campionamento	74
26.7.3 Esercizio 3 - Segnale campionato e filtrato	74
26.7.4 Esercizio 4 - Firts-Order Sampling FOS	74
26.7.5 Esercizio 5 - Trasformata e ricostruzione di un segnale campionato	76
26.7.6 Esercizio 6 - Valore di un segnale campionato dopo un intervallo di tempo	76
26.7.7 Esercizio 7 - Campionamento e quantizzazione	77
27 Esercitazioni - ENS	78
27.1 Esercitazione 1 - 12/11/2025	78
27.1.1 Esercizio 1 - Rappresentazione grafica dei segnali	78
27.1.2 Esercizio 2 - Convoluzione di segnali a tempo discreto	82
27.1.3 Esercizio 3 - Determinazione e calcolo di potenza ed energia finite	83
27.1.4 Esercizio 4 - Sistema di riconoscimento vocale	84
27.1.5 Esercizio 5 - Periodo di un segnale a tempo discreto	84
27.2 Esercitazione 2 - 19/11/2025	85
27.2.1 Esercizio 1 - DTFT di un segnale	85
27.2.2 Esercizio 2 - Costruzione di una sequenza e calcolo DTFT	86
27.2.3 Esercizio 3 - Analisi FFT su un segnale limitato nel tempo	88
27.2.4 Esercizio 4 - Sequenza campionata e DFT	88
27.2.5 Esercizio 5 - Spettro e campionamento di un segnale attraverso FFT	89
27.2.6 Esercizio 6 - Costruzione di una sequenza e DFT	90
27.3 Esercitazione 3 - 27/11/2025	93
27.3.1 Esercizio 1 - Trasformata zeta razionale	93
27.3.2 Esercizio 2 - Trasformata zeta e regione di convergenza	93

27.3.3 Esercizio 3 - Calcolo della trasformata zeta I	93
27.3.4 Esercizio 4 - Calcolo della trasformata zeta II	94
27.3.5 Esercizio 5 - Calcolo della trasformata zeta e regione di convergenza	94
27.3.6 Esercizio 6 - Calcolo sequenza casuale associata alla trasformata zeta	94
27.3.7 Esercizio 7 - Calcolo sequenza corrispondente alla trasformata zeta	94
27.4 Esercitazione 4 - 4/12/2025	95
27.4.1 Esercizio 1 - Risposta all'impulso del filtro numerico	95
27.4.2 Esercizio 2 - Analisi filtro FIR I	97
27.4.3 Esercizio 3 - Analisi sistema LTI a tempo discreto I	100
27.4.4 Esercizio 4 - Analisi sistema LTI a tempo discreto II	100
27.4.5 Esercizio 5 - Analisi filtro FIR II	102
27.4.6 Esercizio 6 - Analisi funzione di trasferimento	103
27.4.7 Esercizio 7 - Funzione di trasferimento dato un segnale	105
28 Homework - 1	107
28.1 Procedimento	107
28.2 Grafici	108
28.3 Conclusioni	110
29 Homework - 2	111
29.1 Procedimento	111
29.2 Grafici	113
29.3 Conclusioni	116

1 Introduzione Generale

1.1 Suddivisione Corso

Il corso è strutturato come molti altri evidenziando tre diversi momenti lezioni, esercitazioni ed homework. Per quanto riguarda il materiale trattato fare riferimento all'indice di questo documento.

1.2 Materiale

Questo elaborato si basa principalmente sul materiale fornito durante il corso, tra cui slide, esercizi, temi d'esami ed homework. L'elaborato segue il programma del corso nel modo più fedele possibile anche se l'ordine con cui il materiale viene trattato potrebbe non corrispondere allo svolgimento delle lezioni tenute in aula. Infine si sottolinea la presenza di vari approfondimenti sugli argomenti indicati come extra, che richiedono uno studio autonomo da parte dello studente. Queste informazioni sono state tratte in parte dai testi consigliati per il corso:

Nell'eventualità in cui il lettore in possesso di questo elaborato abbia individuato degli errori, inesattezze o voglia proporre delle migliorie non esiti a contattare il seguente indirizzo di posta elettronica: francesco.abrami@studenti.polito.it

1.3 Lezioni Esercitazioni ed Homework

Lezioni, esercitazioni ed homework si svolgono nelle stesse aule. Per gli homework è richiesta della preparazione preliminare al fine di svolgere correttamente tutte le attività utilizzando lo slot per verificare quanto fatto. Le sezioni finali di questo elaborato propongono riassunte le spiegazioni delle esercitazioni e degli homework affrontati durante il corso. Ricordiamo che gli homework, ovvero esercitazioni al computer, svolti con l'utilizzo di Matlab o Python sono facoltativi e possono portare fino ad un massimo di due punti al punteggio ottenuto all'esame.

Infine segue ora un velocissimo elenco delle abilità che verranno acquisite all'interno del corso:

- Classificazioni dei segnali.
- Tecniche di analisi in frequenza dei segnali a tempo continuo.
- Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI), e la loro rappresentazione nel dominio del tempo e della frequenza.
- Tipologie fondamentali di filtri lineari.
- Processi stocastici (casuali) e loro rappresentazione spettrale.
- Tecniche per il passaggio da segnali a tempo continuo ai segnali a tempo discreto, e viceversa.
- Tecniche per l'elaborazione in frequenza dei segnali a tempo discreto.

- Tecniche per l'analisi dei sistemi LTI a tempo discreto e trasformata Z.
- Tecniche di filtraggio numerico, tipologie di filtri numerici (FIR, IIR).

1.4 Prova d'Esame

L'esame finale si basa su uno scritto obbligatorio, costituito da domande ed esercizi a risposta multipla) e un orale opzionale (a discrezione dello studente o del docente).

In particolare il tempo a disposizione dello studente per la prova scritta (su piattaforma Exam o supporto cartaceo) è di 90 minuti e non è possibile consultare materiale didattico né appunti o altri testi. È consentito utilizzare esclusivamente la calcolatrice e un formulario fornito dal docente.

Infine esiste la possibilità di sostenere un'esame orale alla quale per essere ammessi occorre ottenere un voto alla prova scritta superiore o uguale a 15/30. L'orale ha una durata di circa 15 minuti, e riguarda tutti gli argomenti trattati nelle lezioni e nelle esercitazioni.

Ricordiamo infine che esempi di esami scritti degli anni precedenti saranno messi a disposizione attraverso il portale della didattica.

2 Domande

3 Concetti fondamentali

3.1 Richiami di algebra lineare e geometria - ALG

All'interno di questa sezione andremo a ripassare i concetti fondamentali dell'algebra e della geometria introdotti nel corso di Algebra Lineare e Geometria.

Questa sezione si colloca all'inizio del documento in quanto dovrebbe contenere nozioni già apprese dallo studente ma alla quale possiamo dare comunque uno sguardo per un veloce ripasso. In particolare questa parte si colloca prima della trattazione dei segnali come vettori introdotti alla fine del terzo capitolo sulla trattazione dei segnali analogici.

3.1.1 Metrica

Iniziamo il nostro ripasso andando a vedere come prima cosa la definizione di metrica riportata di seguito.

Definizione 3.1 (Metrica).

Sia V un insieme (in particolare, uno spazio vettoriale reale o complesso). Si dice metrica (o funzione distanza) su V una funzione

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

la quale associa a ogni coppia di punti (o vettori) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ un numero reale $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ chiamato distanza tra x e y , tale che siano verificate le proprietà fondamentali.

Seguono le proprietà fondamentali della metrica:

- **Non negatività:**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

Questa proprietà conferma la non negatività dell'operazione. In altri termini, considerando la metrica come distanza, possiamo dire che non esistono distanze negative.

- **Identità dell'indiscernibile:**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Questa proprietà afferma che se la metrica tra due elementi di V è nulla allora i due elementi sono lo stesso. In altri termini, considerando la metrica come distanza, possiamo dire che un punto avente distanza nulla da un altro è il punto stesso.

- **Simmetria:**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

Questa proprietà afferma che la metrica è un'operazione simmetrica. Possiamo dire solo in termini informali che essa sia commutativa come le operazioni algebriche. Ragionando sempre in termini di distanza lo spazio che separa due punti è lo stesso che io lo misuri a partire dal primo o dal secondo.

- Disuguaglianza triangolare:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Questa proprietà afferma che la distanza tra due punti sia sempre minore della somma delle distanze tra i due punti passando per un terzo punto che non si trova sulla direttrice dei primi due. A livello concettuale preserva l'idea che ogni percorso intermedio è almeno lungo quanto quello diretto e assicura la coerenza geometrica dello spazio metrico.

Notiamo infine come la distanza Euclidea tra vettori soddisfa tutte le precedenti condizioni, ed è dunque una possibile metrica all'interno di uno spazio opportuno.

3.1.2 Spazio vettoriale

Passiamo ora oltre andando a definire uno spazio vettoriale (S.V.) dandone la definizione ed elencando le operazioni che è possibile effettuare su di esso.

Definizione 3.2 (Spazio vettoriale).

Sia \mathbb{K} un campo (ad esempio \mathbb{R} o \mathbb{C}). Uno spazio vettoriale su \mathbb{K} è un insieme V i cui elementi si chiamano vettori, su cui sono definite due operazioni: somma vettoriale e moltiplicazione per scalare.

Seguono le operazioni definite su uno spazio vettoriale:

- Somma vettoriale (+) :

$$V \times V \rightarrow V, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

- Moltiplicazione per scalare (\cdot) :

$$\mathbb{K} \times V \rightarrow V, \quad (\alpha, \mathbf{v}) \rightarrow \alpha \mathbf{v}$$

Queste operazioni appena elencate devono soddisfare le seguenti otto proprietà fondamentali per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Sono riportate di seguito le proprietà fondamentali della somma vettoriale e del prodotto per scalare. Le prime quattro fanno riferimento alla somma vettoriale mentre le altre quattro si riferiscono al prodotto per scalare.

- **Associatività:**
- **Commutatività:**
- **Elemento neutro:**
- **Elemento opposto:**
- **Associatività rispetto ai prodotti scalari:**
- **Elemento neutro dello scalare:**
- **Distributività rispetto alla somma di vettori:**
- **Distributività rispetto alla somma di scalari:**

3.1.3 Norma e distanza

Passiamo oltre ed andiamo ad introdurre ora i concetti di norma

3.2 Numeri complessi

3.3 Serie numeriche

3.4 MATLAB

4 Introduzione al corso

4.1 Segnali

Iniziamo ora dando un piccolo sguardo a questo corso facendo dei piccoli esempi per avvicinarci, seppur in maniera approssimativa, agli argomenti che tratteremo.

In particolare questa sezione è pensata per introdurre diversi concetti, in modo del tutto approssimativo, per gettare delle basi di quello che verrà trattato in seguito all'interno di questo documento. I concetti all'interno di questa sezione potranno sembrare buttati a caso o addirittura sopraffare il lettore ma ricordiamo che questa non è altro che un'introduzione e che tutti i concetti verranno trattati in modo esaustivo nel resto dell'elaborato.

Iniziamo dando la definizione di **segnale** che in maniera del tutto generale può essere definito come "*una funzione reale o complessa nella variabile tempo*" ed in particolare possiamo dire che l'informazione trasportata da un segnale è contenuta nella "*forma*" del segnale stesso ovvero nella sua evoluzione nel tempo.

4.1.1 Tipologie di segnali

In particolare possiamo fin da subito fare degli esempi di alcune tipologie di segnali che sono rilevanti dal punto di vista ingegneristico. Tra queste tipologie troviamo:

- Segnale **elettrico**
- Segnale **vocale**
- Segnale **audio**
- Segnale **dati**

In particolare partiamo fin da subito prendendo in esempio un segnale elettrico che nella maggior parte dei casi pratici è il segnale maggiormente utilizzato per la propagazione dell'informazione che essi trasportano ma che non per forza sia il segnale che originariamente avevamo preso in analisi.

In particolare ci è possibile passare da una tipologia di segnale ad un'altra attraverso dei componenti detti **trasduttori** ossia dispositivi che convertono una qualsiasi grandezza scalare in un segnale elettrico indipendentemente dalla loro natura (diretto, variabile, sinusoidale o pulsante). Si utilizza principalmente il segnale elettrico come output dei trasduttori in quanto

possiamo maneggiarlo in modo molto più semplice e comodo rispetto ad altre forme.
Evidenziamo ora alcune tipologie di trasduttori tra cui troviamo:

- **Pressione sonora** (audio, microfono)
- **Intensità luminosa** (immagini e video)
- **Velocità, temperatura**, etc.

4.2 Possibili operazioni sui segnali

Introdotto ora il concetto di segnale e di trasduttore andiamo a vedere alcune possibili operazioni che possiamo effettuare sul segnale che stiamo analizzando. In particolare ci è possibile effettuare principalmente operazioni di:

- **Elaborazione:** questa operazione ci permette di raggiungere vari obiettivi che possono essere: l'eliminazione di rumore, l'estrazione di componenti più rilevanti per le successive elaborazioni oppure la capacità di filtrare componenti spurie generate dai trasduttori.
- **Trasmissione:** con questa operazione ci è possibile trasportare l'informazione contenuta nel segnale per una certa distanza, al fine di essere fruita in un posto diverso da quello dove è stata generata. Questa operazione è al centro dello studio delle telecomunicazioni.
- **Memorizzazione:** capacità di conservare l'informazione contenuta nel segnale rendendola fruibile anche a distanza di tempo.

4.3 Segnali analogici digitali e la loro trasmissione

Prima di proseguire oltre andiamo a dare una doverosa definizione delle differenti tipologie di segnale che andremo ad analizzare. In particolare possiamo individuare due tipologie fondamentali di segnali:

- **Analogici:** Rientrano in questa categoria tutti quei segnali che sono continui nel tempo e nella loro ampiezza ovvero possono assumere qualsiasi valore in un qualsiasi istante di tempo. Per fare degli esempi una sinusoide è un segnale analogico in quanto è infinitamente continua nel tempo ma limitata in ampiezza. In particolare un segnale analogico in quanto continuo nel tempo ammette anche variazioni istantanee in ampiezza anche infinite in quanto ammesse dalla sua stessa definizione.
- **Digitali o Numerici:** Rientrano invece in questa categoria tutti quei segnali che assumono valori discreti nel tempo, ovvero non sono più continui, mentre in ampiezza possono assumere un numero finito di valori.

Vedremo inoltre come esista una categoria di segnali a tempo discreto ma continui in ampiezza che verranno approfonditi nella seconda parte del corso. In particolare questi segnali sono fondamentali nell'ambito dell'elaborazione numerica degli stessi.

4.3.1 Scomparsa dei sistemi analogici

4.4 Conversione analogico digitale - ADC

4.5 Possibili Applicazioni dell'Analisi ed Elaborazione dei Segnali

Concludiamo ora questa sezione andando ad elencare velocemente quali possono essere delle possibili applicazioni dell'analisi ed elaborazione dei segnali.

5 Segnali Analogici

Iniziamo ora a trattare la prima tematica che incontriamo in questo corso di teoria ed elaborazione dei segnali la quale è rappresentata dai segnali analogici.

5.1 Introduzione ai segnali analogici reali e complessi

In particolare andremo a trattare i segnali che definiremo segnali analogici a tempo continuo di cui diamo la definizione di seguito. Un segnale analogico reale a tempo continuo è una funzione reale di variabile reale (tempo) - indicata con la lettera t al posto della x - che assume valori significativi per qualunque tempo t . Inoltre il tempo non è discretizzato il che rende il segnale sempre continuo e non risulta essere composizione di una serie o un susseguirsi di tanti valori puntuali ravvicinati.

Notiamo infine come non si pongano restrizioni del segnale nel suo sviluppo - e continuità - lungo l'asse y , per quanto ne sappiamo il segnale può essere discontinuo nella sua ampiezza.

Introdotti i suddetti segnali analogici reali passiamo a considerare i segnali analogici complessi. Tali tipologie di segnali non sono altro che funzioni a valori complessi (ma sempre della variabile reale tempo "*continuo*") che mappano $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Seppur possa sembrare strano dover utilizzare una funzione a valori complessi, che ricordiamo avere invece variabile reale, per trattare lo studio di un segnale basti sapere che questa trattazione porta diversi vantaggi nello sviluppo di un modello di segnali di tipo sinusoidale o pseudo-sinusoidale ovvero modulati attorno ad una sinusoide. In particolare volendo fare un piccole esempio si pensi al seguente segnale, avente f_0 costante, introdotto nei corsi passati di Fisica II ed Elettrotecnica:

$$f(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

Per vari motivi, che vedremo in seguito, ci può essere utile rappresentare questo segnale come un segnale a valori complessi con espressione:

$$f'(t) = a(t) \cdot e^{i\phi(t)}$$

dalla quale ci è possibile, per sinusoidi pure introdurre il concetto di fasore:

$$f'(t) = a \cdot e^{i\phi}$$

Vediamo infine delle possibili rappresentazioni di segnali complessi introducendo anche alcune formule di conversione. In particolare ci è possibile trattare un segnale complesso

come un segnale composto da una parte reale ed una parte immaginaria secondo la seguente espressione:

$$f(t) = f_r(t) + i \cdot f_i(t)$$

Dove diamo per scontato, secondo la definizione, che la parte reale di $f_r(t)$ e la parte immaginaria siano le seguenti:

$$\Re[f(t)] \triangleq f_r(t) \quad \Im[f(t)] \triangleq f_i(t)$$

Infine possiamo scrivere la nostra funzione complessa in forma polare anche detta modulo-fase, la quale risulta essere:

$$f(t) = |f(t)| \cdot e^{i \cdot \arg(f(t))}$$

dove la funzione $\arg(f(t))$ è ottenuta tramite l'arcotangente del rapporto tra $f_i(t)$ e $f_r(t)$. Seguono ora per completezza le formule di conversione, calcolo del modulo e della funzione argomento.

$$\arg(f(t)) = \arctan\left(\frac{f_i(t)}{f_r(t)}\right) \quad |f(t)| = \sqrt{f_r^2(t) + f_i^2(t)}$$

$$f_r(t) = |f(t)| \cos(\arg(f(t))) \quad f_i(t) = |f(t)| \sin(\arg(f(t)))$$

5.1.1 Richiami sui numeri complessi

5.2 Classificazione dei segnali analogici

Fatta questa doverosa introduzione possiamo ora passare ad analizzare e classificare le varie tipologie di segnali analogici in base a delle loro caratteristiche specifiche. Anticipando cosa andremo a vedere tra poco elenchiamo ora i tipi di classificazione che utilizzeremo: a supporto limitato, ad ampiezza limitata, impulsivo ad energia media finita, a potenza media finita e periodico o aperiodico.

5.2.1 Segnali a supporto temporale limitato

Iniziamo ora con la prima classificazione che utilizza come criterio la limitatezza del supporto del segnale preso come campione. Per supporto temporale o semplicemente supporto, intendiamo l'intervallo di tempo all'esterno del quale il segnale è nullo. Nello specifico un segnale si definisce a supporto limitato quando il suo supporto è finito come rappresentato nella figura seguente:

In particolare il segnale dell'immagine è limitato in quanto assume un valore diverso dallo zero per un intervallo limitato (da t_1 a t_2) ed ha inoltre una durata pari a $t_2 - t_1$.

Introdotto ora questa tipologia di segnali andiamo a fare un breve commento sulla loro applicazione in campo fisico/ingegneristico nello specifico un qualsiasi segnale ha tipicamente sempre un inizio ed una fine nel tempo il che li rende a supporto limitato.

Tuttavia, solitamente per ragioni di semplicità matematica, spesso è comodo considerarli a supporto temporale illimitato. Ci è possibile fare ciò in quanto spesso la porzione di segnale analizzata è irrilevante rispetto alla sua durata complessiva per cui possiamo considerarlo come uno con supporto illimitato.

Ad esempio: l'oscillatore che dà il clock ad una CPU è "*fisicamente*" attivo solo su un supporto temporale limitato (anche se estremamente lungo) ma lo si rappresenta spesso matematicamente come una onda quadra (o sinusoidale) di durata infinita per i motivi di cui sopra.

5.2.2 Segnali ad ampiezza limitata

5.2.3 Segnali impulsivi

5.2.4 Segnale fisico

5.3 Energia e potenza di un segnale

Introdotti le principali tipologie di segnale possiamo ora andare a definire l'energia e la potenza di un segnale come vediamo di seguito.

Teorema (Energia di un segnale).

$$E(x) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

In parole si definisce energia di un segnale l'integrale del modulo al quadrato del segnale stesso calcolato sul supporto del segnale.

Per quanto riguarda la potenza di un segnale andiamo ad introdurre delle differenze tra potenza istantanea e potenza media. Notiamo inoltre come d'ora in poi faremo riferimento a termine potenza media con il termine potenza mentre dovremo sempre specificare i casi in cui parliamo di potenza istantanea.

Teorema (Potenza di un segnale).

$$P_{ist} = |x(t)|^2$$

$$P_{avg}(x) \triangleq \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |x(t)|^2 dt$$

Date le definizioni possiamo vedere come la potenza istantanea non sia altro che una funzione del tempo che coincide con il modulo al quadrato del segnale mentre la potenza media non è più una funzione del tempo ma è un numero che corrisponde alla media "*temporale*" della potenza istantanea ovvero del quadrato del segnale.

Infine Come vedremo più nel dettaglio più avanti, è spesso utile introdurre la "*media temporale*" di una generica funzione del tempo $y(t)$ con questa definizione:

$$\langle y(t) \rangle =$$

5.3.1 Segnali ad energia finita

5.3.2 Segnali a potenza finita

5.3.3 Segnali periodici

5.4 Esempi numerici

5.4.1 Energia di un esponenziale decrescente

Si consideri ora il seguente segnale $x(t) = u(t)e^{-\alpha t}$ dove $u(t)$ è la funzione gradino unitario. Si voglia ora calcolare l'energia del segnale.

Partiamo facendo delle considerazioni sul supporto del segnale che non è limitato in quanto prima di zero è nullo ma da lì in avanti decresce come una coda di esponenziale ma non sarà mai nulla per le proprietà stesse della funzione. Detto ciò proseguiamo calcolando l'energia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

Come abbiamo visto applicando la definizione di energia al segnale ed integrando opportunamente sul suo supporto otteniamo la sua energia.

5.4.2 Potenza di un segnale sinusoidale

Passiamo ora al calcolo della potenza del generico segnale $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ con A , f_0 e ϕ generiche costanti positive diverse da zero.

Iniziamo scrivendo la definizione di potenza di un segnale:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a |x(t)|^2 dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt$$

Procediamo ora portando fuori dall'integrale le costanti e spezzando l'integrale sotto il simbolo del limite. Ricordiamo che ci è possibile spezzare questo integrale riscrivendo il seno al quadrato come uno più il seno con l'argomento anch'esso moltiplicato per due tutto fratto due.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2a} \left[\int_{-a}^a \frac{1}{2} dt + \int_{-a}^a \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2a} \left[\frac{2a}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(4\pi f_0 t + 2\phi)}{4\pi f_0} \Big|_{-a}^a \right]$$

Svolgendo i calcoli otteniamo che:

$$\frac{A^2}{2} + \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4a} \frac{\sin(4\pi f_0 a + 2\phi) - \sin(-4\pi f_0 a + 2\phi)}{4\pi f_0} = \frac{A^2}{2}$$

In definitiva possiamo dire che questo calcolo della potenza di un segnale sinusoidale verrà incontrato moltissime volte all'interno del corso motivo per cui è bene ricordarlo in quanto potrebbe ritornare utile in futuro.

5.5 Rappresentazione vettoriale di un segnale

Dopo aver affrontato gli argomenti precedenti passiamo ora all'interpretazione dei segnali a tempo continuo come spazi vettoriali. Prima di tutto ci è necessario aver ben presenti alcuni concetti fondamentali dell'algebra lineare e della geometria. Questi concetti sono riportati nel primo capitolo di questo manuale con lo scopo di essere utilizzati come ripasso al fine di affrontare questa sezione nel modo corretto.

6 Rappresentazione vettoriale dei segnali

6.1 Esempio di applicazione della rappresentazione geometrica

Concludiamo questa sezione andando ora a vedere delle particolari applicazioni delle rappresentazioni geometriche andando anche ad introdurre alcune tipologie particolari di segnali.

6.1.1 La funzione porta nel tempo

6.2 Funzione delta di Dirac

6.2.1 Proprietà della delta di Dirac

Andiamo ora a definire delle proprietà utili della funzione delta di Dirac.

Proprietà 6.1 (Area della delta di Dirac).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\Delta t}(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t = 1$$

Come possiamo vedere dalla definizione appena data la funzione delta di Dirac ha un'area pari ad uno dunque unitaria. Notiamo invece, secondo la proprietà che segue, che l'energia della delta è infinita.

Proprietà 6.2 (Energia della delta di Dirac).

$$E(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t))^2 dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (p_{\Delta t}(t))^2 dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} = \infty$$

Proprietà 6.3 (Segnale continuo moltiplicato per una delta).

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Segue la dimostrazione di quanto abbiamo appena detto.

$$Dim : \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot p_{\Delta t}(t)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot x(0) \cdot \Delta t = x(0)$$

Come abbiamo visto nel momento in cui andiamo a moltiplicare un qualsiasi segnale continuo per una delta di Dirac, opportunamente centrata in $x_0 = 0$, otterremo una delta centrata nello stesso punto ma avente un'altezza pari a quella del segnale continuo in quel dato punto. In particolare la proprietà appena vista sarà fondamentale, all'interno di questo corso, nella sua forma generalizzata mostrata di seguito.

Proprietà 6.4 (Campionamento tramite delta di Dirac).

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

Segue la dimostrazione di quanto appena detto.

$$Dim : \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot p_{\Delta t}(t - t_0)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot x(t_0) \cdot \Delta t = x(t_0)$$

In questo caso più generalizzato possiamo andare a moltiplicare un segnale continuo per una delta di Dirac posizionata in qualsiasi istante di tempo. Come per la proprietà precedente la delta moltiplicata per il segnale resta centrata nel punto originale ma assume il valore del segnale per cui è moltiplicata in quel punto.

In particolare interpretando il risultato della slide precedente, si deduce che l'integrale della moltiplicazione tra un generico segnale continuo e la delta "campiona" il valore del segnale nella posizione temporale della delta. Notiamo come useremo anche la seguente espressione relativa alla moltiplicazione per una delta:

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Proprietà 6.5 (Prodotto di convoluzione).

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(\tau - t) d\tau$$

Ricordiamo infine che c'è una differenza enorme tra il moltiplicare un segnale continuo per una delta (ovunque essa sia centrata) e fare l'integrale del loro prodotto. Il primo caso ritorna una funzione delta ma moltiplicata per una costante che dipende dal valore che il segnale assume nell'istante in cui si trova, mentre il secondo caso ritorna un valore numerico che indica il campionamento del segnale in quel dato istante.

Infine vediamo ora, anche se lo definiremo meglio più avanti, quello che chiameremo prodotto di convoluzione nel modo seguente:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

La dicitura a sinistra dell'uguale si legge come: $x(t)$ "convoluto" $y(t)$.

Infine definita la proprietà del campionamento otteniamo i seguenti risultati:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)d\tau = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t - \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \theta - \tau)d\tau = x(t - \theta)$$

In particolare notiamo come nel primo caso la convoluzione di un segnale $x(t)$ continuo con una delta fornisce il segnale di partenza $x(t)$. Il secondo caso invece indica che la convoluzione di un segnale $x(t)$ continuo con una delta traslata $\delta(t - \theta)$ fornisce il segnale di partenza traslato $x(t - \theta)$.

7 La serie e le trasformate di Fourier

7.1 Serie di Fourier

Iniziamo ora andando a dare la definizione

7.2 Trasformata di Fourier

8 Sistemi

Viste le sezioni precedente ed introdotte le proprietà della trasformata di Fourier possiamo ora affrontare il prossimo argomento ovvero i sistemi lineari (LS - Linear Systems) di cui elencheremo definizione, proprietà e caratteristiche. Come vedremo più avanti la nostra attenzione ricadrà per la maggior parte su una sottocategoria dei sistemi detti sistemi lineare tempo-invarianti.

8.1 Introduzione ai sistemi

Vista la parte precedente possiamo ora dare la definizione di sistema. In particolare un sistema nell'ambito della teoria dei segnali è un qualsiasi elemento che trasforma un segnale dato in ingresso in un'altro segnale che verrà prodotto in uscita.

Di seguito possiamo vedere una possibile rappresentazione di un sistema attraverso una rappresentazione dove il sistema è un singolo blocco. In particolare il sistema applica una generica trasformazione T al segnale in ingresso generandone un'altro in uscita.

Data la definizione di sistema possiamo ora elencarne alcuni per fornire degli esempi pratici legati al mondo reale. Sono un'esempi di sistema elementi come:

- **Amplificatori Elettronici:** Questi dispositivi sono in grado di moltiplicare il segnale in ingresso per un certo valore riproducendo in uscita lo stesso segnale ora amplificato di un certo valore.
- **Filtri Analogici:** Questi dispositivi sono in grado di filtrare alcune frequenze di un segnale andando a riprodurre in uscita solo una porzione dello spettro in frequenza del segnale posto in ingresso.
- **Sistemi di trasmissione su lunga distanza:** Anche le trasmissioni a lunghe distanze introducono delle alterazioni sui segnali che quindi possono essere modellati come delle particolari tipologie di sistema.
- **Trasduttori Fisici:** Sono dispositivi in grado di generare, solitamente una tensione o corrente, in base all'ingresso (temperatura, pressione etc...) che viene applicata ad essi.
- **Sistemi di registrazione e successiva riproduzione:** Anche la registrazione di un'immagine o di un suono passano attraverso un sistema che le memorizzi per poi essere riprodotte dopo un certo periodo di tempo.

Concludiamo ora questa prima sottosezione andando a fornire una classificazione delle varie tipologie di sistemi che potremo incontrare:

- **Lineari e non Lineari:** Con questa tipologia di sistemi facciamo riferimento ad un sistema che rispetta i principi di sovrapposizione e omogeneità ovvero che applicano una trasformazione di tipo lineare come somma, sottrazione etc. Sono esclusi da questa categoria tutti i sistemi che non rispettano tali regole. Per esempio un sistema che produce il quadrato del segnale in ingresso non è detto lineare.
- **Senza memoria e con memoria:** I sistemi senza memoria (*memoryless*) sono rappresentati dall'insieme di tutti quei sistemi dove l'uscita dipende solo dal valore istantaneo del segnale in ingresso e non conta la storia passata del segnale. Nei sistemi con memoria l'uscita dipende dal valore passato del segnale e non da quello istantaneamente assunto in quel momento.
- **Tempo varianti e tempo invarianti:** Queste tipologie di sistemi sono tali che le caratteristiche dello stesso non cambino nel tempo. Per esempio se un sistema applica un ritardo costante al segnale in ingresso è tempo invariante non lo è un sistema dove le sue caratteristiche (per esempio il valore di amplificazione) cambiano in funzione del tempo.
- **Causali e non causali:** Sono sistemi che rispettano il principio di causa effetto. In questi sistemi l'uscita dipende solo dal presente o dal passato del segnale e mai dal futuro. Per i sistemi non causali questa condizione non viene rispettata. Vediamo subito che tutti i sistemi fisici sono esclusivamente causali.
- **Reali e non reali:** Questa tipologia di sistemi lavora con grandezze reali come tensioni e correnti. Un sistema non reale utilizza valori complessi composti da una parte reale ed una immaginaria.

- **Stabili e non stabili:** Questi sistemi seguono il principio BIBO (Bounded Input Bounded Output) ovvero che ad un ingresso limitato in ampiezza, energia e potenza equivale un'uscita anch'essa limitata. I sistemi non stabili non rispettano questa regola portando alla produzione di segnali in uscita con oscillazioni infinite.

8.2 Classificazione di sistemi

Introdotte le principali classificazioni dei sistemi possiamo ora andare a vedere nel dettaglio alcune di esse.

8.2.1 Sistemi lineari

8.2.2 Sistemi tempo invarianti

8.2.3 Sistemi senza memoria

8.2.4 Sistemi senza memoria e tempo invarianti

8.3 Prodotto di convoluzione

8.3.1 Costruzione grafica

8.3.2 Convoluzione di due porte

8.3.3 Proprietà del prodotto di convoluzione

9 Sistemi LTI

9.1 Risposta all'impulso

9.2 Funzione di trasferimento

9.3 Tipologie di filtri realizzabili

10 Blocchi

11 Segnali Periodici e le loro trasformate

12 Segnali Periodici e le loro trasformate

13 Spettro

13.1 Spettro di energia

13.2 Spettro di potenza

14 Conversione DAC e ADC

Con questa sezione andiamo ad introdurre alcuni concetti fondamentali utili all'introduzione dei segnali numerici detti anche digitali. In particolare ci si soffermerà sul teorema del cam-

pionamento e sulla rispettiva conversione tra segnali analogici e digitali (Digital to Analog Conversion e Analog to Digital Conversion).

14.1 Introduzione

Fino ad ora ci siamo fermati a trattare segnali che come abbiamo visto fin dall'inizio erano segnali analogici ovvero continui sia sull'asse dei tempi che sull'asse delle ampiezze.

14.2 Tipologie di segnali

14.3 Campionamento

14.4 Errore di quantizzazione

15 Segnali a tempo discreto

Procediamo ora con il nostro percorso andando ad analizzare una nuova tipologia di segnali, e la loro elaborazione, attraverso metodi simili a quelli già visti fino ad ora.

15.1 Introduzione

Come appena detto stiamo per introdurre una nuova tipologia di segnali andando anche a trattarne la loro elaborazione. In particolare la tipologia di segnali che tratteremo d'ora in poi sono detti a tempo discreti ovvero segnali la cui definizione non è continua lungo l'asse del tempo ma è limitata ad un numero discreto (in alcuni casi finito) di punti. Procediamo ora ad una breve storia dell'elaborazione dei segnali numerici (ENS) per poi vederne delle possibili applicazione. Successivamente andremo ad definire meglio, attraverso definizioni proprietà ed operazioni, che cosa intendiamo per segnale numerico andando a fare le opportune classificazioni.

15.1.1 Storia dell'ENS

15.1.2 Applicazioni dell'ENS

15.2 Segnali a tempo discreto

15.2.1 Durata

15.2.2 Causalità

15.2.3 Parità

15.2.4 Periodicità

15.2.5 Sequenze limitate in ampiezza

15.2.6 Sequenze sommabili

15.3 Operazioni

15.3.1 Somma, differenza, prodotto

15.3.2 Traslazione e ribaltamento

15.3.3 Scalamento temporale

16 Sequenze fondamentali

Vista la sezione precedente dove abbiamo introdotto i segnali a tempo discreto andiamo ora a vedere delle sequenze, ovvero dei segnali a tempo discreto, che troveremo ed utilizzeremo spesso all'interno di questi prossimi capitoli. In particolare, come potremo osservare, queste sequenze fondamentali non sono altro che il risultato ottenuto dalla trasformazione a tempo discreto degli stessi segnali a tempo continuo visti in precedenza. Ricordiamo infine come l'operazione appena descritta non sia affatto un'operazione matematica ma piuttosto un modo di pensare questi segnali: vedremo come ci saranno opportune regole ed accorgimenti da apportare al ragionamento proposto.

16.1 Sequenza gradino unitario

Introdotto il ragionamento generale possiamo ora passare a vedere la prima sequenza rappresentata dal gradino unitario. In particolare il segnale si definisce in tempo discreto nel seguente modo:

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Riportiamo ora il grafico del segnale generato con MATLAB:

Visto che il grafico è generato attraverso del codice riteniamo opportuno riportare, almeno per questa sezione di corso, anche il codice che produce i grafici riportati all'interno di questo documento. Segue ora il codice MATLAB utilizzato per la generazione del segnale gradino unitario:

```
1 n = [-10:10];
2 y = zeros(1,21);
3 y(11:21) = 1;
4 figure
5 set(gca,'FontSize',14)
6 stem(n,y,'k')
7 xlabel('n')
8 title('u(n)')
9 axis([-10 10 -0.5 1.5])
10 grid on
```

16.2 Delta di Kroenecher

Passiamo oltre ed andiamo a vedere come il segnale delta di Dirac viene interpretato in tempo discreto. Prima di tutto, per non confonderci con le due tipologie, utilizzeremo il termine delta per indicare quello a tempo continuo mentre useremo delta di Kroenecher per indicare il segnale a tempo discreto. Questa tipologia di delta è rappresentata da un impulso unitario, centrato nell'origine, non più di ampiezza infinita ma avente ampiezza pari ad uno.

Possiamo scrivere quanto appena descritto nel seguente modo:

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo infine che la definizione della delta di Dirac $\delta(t)$ è analoga a quella appena vista ma su un supporto continuo dove la funzione assume un valore infinito nell'origine.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

Segue ora il grafico del segnale:

Come nel caso precedente riportiamo anche il codice MATLAB utilizzato per la generazione del segnale delta di Kroenecher:

```

1 n = [-10:10];
2 y = zeros(1,21);
3 y(11) = 1;
4 figure
5 set(gca,'FontSize',14)
6 stem(n,y,'k')
7 xlabel('n')
8 title('\delta(n)')
9 axis([-10 10 -0.5 1.5])
10 grid off

```

Infine prima di passare oltre possiamo notare come, a differenza dei segnali a tempo continuo, il gradino unitario e la delta di Kroenecher non creino alcuna criticità caratteristica dei corrispondenti segnali a tempo continuo.

Riportiamo infine una proprietà della delta di Kroenecher.

Proprietà (Segnale come somma di impulsi).

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$$

Questa proprietà fondamentale della delta numerica indica la possibilità di esprimere ogni segnale $x(n)$ come somma di impulsi secondo la relazione vista sopra dove il termine $\delta(n-i)$ è la delta di Kroenecher centrata nell'istante di tempo i . Ci è possibile verificare che:

$$\begin{aligned} x(n)\delta(n) &= x(0)\delta(n) \\ x(n)\delta(n-i) &= x(i)\delta(n-i) \end{aligned}$$

Infine possiamo andare ad esplicitare la relazione tra la delta numerica ed il gradino unitario. Ci è infatti possibile scrivere $\delta(n)$ come la differenza tra due gradini traslati nel seguente modo:

$$u(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta(n-i) = \delta(n) + \delta(n+1) + \delta(n+2) \dots$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1)$$

Possiamo notare infine attraverso la differenza di sequenze gradino, aventi diversi supporti, ci è possibile creare delle funzioni porta nel dominio discreto.

16.3 Sequenza sinc

Proseguendo il nostro percorso incontriamo la sequenza $\text{sinc}(n)$ che andiamo a definire nel seguente modo dove N è un numero intero positivo:

$$\text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{\sin\left(\pi\frac{n}{N}\right)}{\pi\frac{n}{N}}$$

Vista ora la definizione della sequenza andiamo a riportarne il grafico.

Come per gli esempi fatti in precedenza segue ora il codice MATLAB utilizzato per generare il grafico riportato sopra, dove abbiamo utilizzato un valore y pari a $n/3$:

```

1 n = [-10:10];
2 y = sinc(n/3);
3 figure
4 set(gca,'FontSize',14)
5 stem(n,y,'k')
6 xlabel('n')
7 title('sinc(n/3)')
8 axis([-10 10 -0.5 1.5])
9 grid on

```

Infine, per quanto riguarda la sequenza $\text{sinc}()$ riportiamo anche alcuni altri grafici ottenuti andando a cambiare il valore di y prima con $n/2$ e successivamente con n .

Come possiamo notare i grafici differiscono molto l'uno dall'altro nonostante si stia utilizzando sempre la stessa funzione per generarli. Capiremo in un esempio più avanti che cosa stia causando questo problema e cosa fare per evitarlo.

16.4 Sequenza porta

Proseguiamo ora andando ad analizzare la sequenza porta che indichiamo nel seguente modo:

$$p_{2k+1}[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq k \\ 0 & |n| > k \end{cases}$$

La definizione appena vista indica una porta di supporto pari a $2k + 1$ centrata in un punto. Notiamo come il supporto sia dato da $2k + 1$ in quanto dobbiamo considerare il punto in cui è centrata la porta più un numero pari di k punti da una parte e dall'altra per ottenere la porta. Ricordiamo che nel dominio del tempo discreto il supporto di una sequenza è dato dal numero di punti tra gli estremi composti da punti non nulli. In altre parole è dato dall'intervallo più grande che si possa ottenere considerando come estremi punti non nulli con la possibilità di avere punti nulli al suo interno.

Come fatto in precedenza andiamo a rivedere la definizione di porta nel dominio continuo del tempo:

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ora vista la sua definizione andiamo a riportarne un grafico ottenuto in MATLAB. In questo caso si è scelto di rappresentare una porta di supporto

Come per gli altri esempi si riporta di seguito il codice utilizzato per la generazione del grafico appena visto:

```

1 n = [-10:10];
2 y = zeros(1,21);
3 y(6:16) = 1;
4 figure
5 set(gca,'FontSize',14)
6 stem(n,y,'k')
7 xlabel('n')
8 title('p_{11}(n)')
9 axis([-10 10 -0.5 1.5])
10 grid on

```

16.5 Sequenza triangolo

Passiamo ora invece ad analizzare la sequenza triangolare dandone fin da subito una definizione:

$$\text{tri}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, & |n| \geq N \\ 0, & |n| < N \end{cases}$$

In particolare in base al valore scelto di N , che ricordiamo essere un numero intero positivo, si otterrà una sequenza triangolare avente supporto pari a $2N+1$. Come per i casi precedenti ricordiamo anche qui la definizione del corrispondente segnale a tempo continuo:

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \geq T \\ 0, & |t| < T \end{cases}$$

Ricordiamo che in questo caso t , ovvero la variabile tempo è continua e non discreta come succede per n .

Riportiamo di seguito il grafico della sequenza triangolare ottenuta in MATLAB:

Riportiamo anche di seguito il codice utilizzato per generare il grafico appena visto:

```

1 N = 10;
2 n = [-N:N];
3 y = 1 - abs(n)/N;
4 figure
5 set(gca,'FontSize',14)
6 stem(n,y,'k')
7 xlabel('n')
8 title('t_{21}(n)')
9 axis([-10 10 -0.5 1.5])
10 grid on

```

16.6 Sequenza esponenziale

Concludiamo ora la lista delle sequenze fondamentali andando a prendere in analisi la sequenza esponenziale decrescente. Andiamo a definire la sequenza attraverso questa formula:

$$x(n) = a^n \cdot u(n)$$

Dove, in generale, si assume che a sia un numero complesso e che se a è reale la funzione risulta avere segno costante nel caso in cui il valore di a sia strettamente maggiore di zero. Nel caso opposto la sequenza risulta essere a segni alterni.

Anche in questo caso riportiamo la definizione del segnale corrispondente a questa sequenza nel dominio discreto del tempo:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$$

Ricordiamo che in questo caso stiamo considerando funzioni esponenziali decrescenti come anche succede per quelle a tempo continuo. Nel caso a tempo continuo si assume che il valore dell'esponente sia strettamente minore di zero ovvero α deve assumere un valore strettamente positivo. Per quanto riguarda il dominio del tempo discreto si assume che la base dell'esponenziale, ovvero a sia compresa tra zero ed uno dove entrambi gli estremi sono esclusi.

Riportiamo ora una coppia di grafici in cui le sequenze rappresentate hanno lo stesso valore assoluto di a ma diverso segno.

Infine riportiamo anche il codice utilizzato per generare il grafico della sequenza sempre positiva; per ottenere quella con segno alterno basta cambiare segno al valore di a alla seconda riga.

```
1 n = [-10:10];
2 a = (2/3);
3 y = a.^n.*(n >= 0);
4 figure
5 set(gca, 'FontSize', 14)
6 stem(n,y,'k')
7 xlabel('n')
8 title('((2/3)^n)')
9 axis([-10 10 -0.5 1.5])
10 grid on
```

Concludiamo questa parte sulle sequenze esponenziali andando ad analizzare il caso in cui si utilizzi un a avente valore complesso. Nel caso in cui a assuma un valore complesso, ovvero sia pari a $Ae^{j\theta}$ si otterrà che:

$$x(n) = (Ae^{j\theta}) \cdot u(n) = A^n \cdot e^{jn\theta} \cdot u(n)$$

16.6.1 Sinusoidi ed esponenziali a tempo discreto

Vista ora la

16.6.2 Esempi

16.6.3 Proprietà

16.7 Energia e potenza media

17 Convoluzione lineare

18 Analisi in frequenza di segnali a tempi discreto - DTFT

19 Spettro di energia e banda di un segnale a tempo discreto

20 DFT come realizzazione pratica della DTFT

21 Convoluzione circolare

22 Sistemi a tempo discreto

23 Trasformata Z

23.1 Introduzione

Iniziamo ora questa nuova sezione andando ad introdurre una nuova tipologia di trasformata ovvero quella zeta. In particolare possiamo dire fin da subito che la trasformata zeta non è altro che uno strumento matematico che serve per studiare sequenze discrete, cioè definite su interi: $x[0], x[1], \dots, x[n]$, nello stesso modo in cui la trasformata di Laplace studia i segnali continui. In breve la trasformata zeta prende una sequenza e la trasforma in una funzione di una variabile complessa z .

Definizione. Si definisce trasformata zeta di una sequenza la seguente formula dove z è una generica variabile complessa definita come di seguito.

$$X(z) = Z[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

In particolare definiamo z come:

$$z = \rho \cdot e^{j\omega}$$

Possiamo duque riscrivere che:

$$X(z) = Z[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot (\rho \cdot e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \rho^{-n} \cdot e^{-j\omega n}$$

Data ora la definizione possiamo dire che $X(z)$ non è altro che una differente rappresentazione del segnale numerico preso in analisi. In particolare possiamo dire che: il coefficiente del generico termine z^{-n} è il valore del segnale all'istante n e che l'esponente di z contiene l'informazione temporale di cui abbiamo bisogno per identificare i campioni temporali del segnale in quanto è in esso che è presente la variabile tempo discreto utilizzata per i segnali non continui nel tempo.

Come possiamo vedere dopo questa prima occhiata siamo ora in grado di convertire una sequenza temporale in una funzione complessa così che sia più facile da trattare, risolvere ed analizzare. In un certo senso, come detto prima, la Z-transform altro non fa, nel tempo discreto, quello che faceva Laplace nel tempo continuo. Vista ora questa similitudine possiamo andare ad analizzare le similitudini tra la trasformata Z e quella di Laplace.

23.1.1 Analogia con la trasformata di Laplace

Andiamo ora a vedere le analogie delle due trasformate ma come prima cosa, anche se potrebbe risultare un po' poco intuitivo, andiamo a riportare le formula della trasformata di Laplace e Fourier.

Definizione. Si definisce trasformata di Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad \text{con } s = \sigma + j2\pi f_a$$

Definizione. Si definisce trasformata di Fourier

$$X(f_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f_a t} dt$$

Come possiamo notare le due trasformate, considerate nella loro forma estesa, sono molto simili e differiscono solo per un termine σ che in quella di Fourier assume il valore zero. In altri termine nella trasformata di Laplace si utilizza $s = \sigma + j\Omega$, dove $\Omega = 2\pi f_a$, il quale corrisponde ad un generico numero complesso mentre in quella di Fourier viene utilizzata una variabile puramente immaginaria pari a $j\Omega$.

Vista questa similitudine possiamo giungere alla conclusione che la trasformata di Fourier altro non sia che una particolarizzazione della trasformata di Laplace: quest'ultima è definita nel piano complesso (non su tutto, solo nella regione di convergenza), mentre la trasformata di Fourier solo sull'asse immaginario (sottoinsieme del piano complesso). Come possiamo notare quanto appena detto coincide con il ragionamento fatto sopra riguardo il complesso generico s corrispondente all'intero piano di Argand-Gauss e il numero immaginario puro $j\Omega$ corrispondente al solo asse immaginario.

Possiamo in definitiva andare a tracciare una rappresentazione di quanto appena detto nell'immagine sottostante. In figura vengono semplicemente mostrati le regioni in cui vivono, o meglio, sono definite le due trasformate.

23.2 DFT e trasformata Z

23.3 Regione di convergenza - ROC

23.4 Tipologie di sequenza

23.4.1 Termine causale e anticausale

23.4.2 ROC di sequenze unilaterali

23.4.3 ROC di sequenze bilaterali

23.4.4 ROC di sequenze a supporto finito

23.5 Trasformate Z razionali

23.5.1 Poli e zeri della trasformata Z

23.6 Sequenze bilaterali e non a supporto illimitato

24 Sistemi LTI e trasformata Z

- 24.1 Equazione alle differenze**
- 24.2 Filtri digitali**
- 24.3 Interconnessione di sistemi LTI**
- 24.4 Stabilità e realizzabilità fisica**
- 24.5 Sistemi inversi e a fase minima**

25 Processi Casuali

Presentiamo ora, come ultima sezione, quella sui processi casuali. Nel particolare questa sezione fungerà sia da ripasso ad argomenti visti in corsi precedenti sia da introduzione allo studio vero e proprio dei processi casuali declinati alla teoria dei segnali.

25.1 Ripasso di teoria della probabilità e variabili casuali

Come prima cosa, prima di introdurre i processi casuali, andiamo a fare un veloce ripasso di alcuni concetti di statistica e di probabilità. Facciamo notare infine come queste nozioni non siano incluse della sezione dei concetti preliminari in quanto sono state trattate a lezione in maniera più approfondita.

25.1.1 Spazio campione

Iniziamo ora il nostro ripasso andando ad introdurre come primo concetto lo spazio campione di cui vediamo subito la definizione.

Definizione (Spazio campione). *Lo spazio campione, spesso indicato con S o Ω , è l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento casuale. In altre parole, contiene tutte le possibilità che possono verificarsi quando si esegue un esperimento.*

In particolare dato uno spazio campione il risultato ha associato una certa probabilità P con le seguenti proprietà:

$$P(s) \in [0, 1]$$

$$\sum_{s \in S} P(s) = 1$$

Ovvero che la probabilità che un evento si realizzi è sempre contenuta nell'intervallo specificato e la somma delle probabilità degli eventi specifici deve essere per forza pari ad uno. Infine ricordiamo che i risultati dell'esperimento casuale sono sempre mutualmente esclusivi.

Immaginiamo di lanciare un dado equilibrato. Lo spazio campione è l'insieme di tutti i possibili risultati: i sei numeri sulle facce del dado, da 1 a 6. Ognuno di questi numeri rappresenta un evento possibile. Poiché il dado è equilibrato, ogni numero ha la stessa probabilità di uscire, pari a $\frac{1}{6}$. Se consideriamo tutti i possibili eventi insieme, la somma delle loro probabilità è sempre 1, perché uno dei sei numeri deve necessariamente uscire. Inoltre, quando esce un numero, è chiaro che nessun altro numero può uscire nello stesso lancio: gli eventi sono quindi mutualmente esclusivi. In questo modo, lo spazio campione ci permette di organizzare e capire tutte le possibilità che possono verificarsi in un esperimento casuale. Compresa questo concetto basilare possiamo andarlo a declinare a diversi scenari, dal più facile al più difficile per poterli comprendere al meglio.

Ricondiamo infine come faremo riferimento a questo evento o all'estrazione di alcune biglie da un sacchetto per fare degli esempi dei concetti presentati.

Prima di passare oltre possiamo vedere come un evento sia un insieme di possibili risultati ed è quindi un sottoinsieme dello spazio campione. In termini matematici possiamo dire che:

$$E = \{s_i\} \subseteq S$$

Avremo dunque che l'evento E avrà la seguente probabilità di realizzarsi:

$$P(E) = \sum_i P(s_i)$$

Possiamo inoltre considerare la probabilità di una unione di eventi la quale sarà sempre uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi. In termini matematici si ha che:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$$

In ultima istanza possiamo inoltre affermare che la probabilità dell'unione di certi eventi è minore od uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi presi in analisi. Questa proprietà viene anche detta limite dell'unione in quanto pone un limite matematico alla probabilità dell'unione di più eventi. In termini matematici si ottiene che:

$$P\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i P(E_i)$$

Nello specifico facciamo notare come la probabilità descritta sopra, ovvero quella relativa all'avvenimento di un'unione di più eventi è detta probabilità congiunta.

25.1.2 Probabilità congiunta

Come abbiamo appena detto nella sotto-sezione precedente la probabilità dell'unione di due eventi è detta probabilità congiunta. Nello specifico la definiamo nel seguente modo.

Definizione (Probabilità congiunta). *La probabilità congiunta è la probabilità che due, o più eventi si verifichino contemporaneamente. In particolare dati due eventi A e B , la probabilità congiunta è indicata con*

$$P(A, B) \triangleq P(A \cup B)$$

e rappresenta la probabilità che si verifichino sia A sia B .

Volendo fare subito un'esempio pratico possiamo porre A uguale ad una giornata soleggiata e B pari ad una giornata calda. Avremo che $P(A, B)$ sarà la probabilità che una giornata sia contemporaneamente soleggiata e calda.

Introdotto ora questo nuovo concetto possiamo andare a stabilire quando due eventi sono tra di loro statisticamente indipendenti, ovvero che non si influenzano a vicenda cioè che l'avvenire di uno no ha nulla a che vedere con il verificarsi del secondo. In particolare notiamo come il calcolo della probabilità di due eventi statisticamente indipendenti risulta essere il seguente:

$$P(A, B) \triangleq P(A) \cdot P(B)$$

Riprendendo l'esempio visto prima ovvero quello della giornata calda e soleggiata evidenzia due eventi dipendenti, e quindi non indipendenti tra di loro, in quanto la presenza del sole influisce sulla temperatura della giornata. Volessimo prendere due eventi indipendenti potremmo porre A pari ad una giornata soleggiata e B pari ad una giornata festiva.

Possiamo infine evidenziare come il concetto di indipendenza statistica sia molto importante per diverse ragioni tra cui la sua applicazione a problemi pratici dove se si suppone di avere eventi tra loro indipendenti si riesce spesso a semplificare in maniera sostanziale i calcoli.

25.1.3 Probabilità condizionata

Vista ora la probabilità che due eventi hanno di accadere allo stesso momento proseguiamo il nostro ripasso considerando la probabilità che un evento si verifichi dato il verificarsi di un'altro. Questo concetto è detto proprietà condizionata di cui diamo ora la definizione.

Definizione (Probabilità condizionata). *La probabilità condizionata misura la probabilità che un evento si verifichi sapendo che un altro evento si è già verificato. Dati due eventi S e B con $P(B) > 0$, la probabilità di S condizionata a B è definita come:*

$$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)}$$

All'atto pratico B diventa il nuovo spazio campione, e le probabilità sono normalizzate a questo spazio campione. Ovvero sapere che B è avvenuto restringe lo spazio campione ai soli casi in cui B si verifica. All'interno di questo nuovo spazio, $P(S|B)$ rappresenta la frazione dei casi in cui si verifica anche S .

Inoltre sommando le probabilità di tutti i risultati S in B si ottiene che:

$$\sum_{S \in B} P(S|B) = 1$$

Infine prima di fare un'esempio pratico notiamo come, con questa notazione, si indica la probabilità dell'evento S sapendo che è vero l'evento B . Ricordiamo inoltre che la formula si legge: "probabilità di S condizionata a B " oppure "probabilità di S dato B ".

Volendo ora fare un esempio pratico consideriamo il lancio di un dado equilibrato considerando la probabilità di ottenere uno come risultato.

$$P(\text{Lancio dado pari ad } 1) = \frac{1}{6}$$

Ora invece consideriamo la probabilità di ottenere uno condizionandola al fatto di sapere che il risultato sia un numero dispari. In altre parole con quale probabilità si verifica il primo evento dato che il numero estratto è dispari?

$$P(\text{Lancio dado pari ad } 1 | \text{Risultato dispari}) = \frac{1}{3}$$

Infine poniamo come esempio un caso molto semplice quanto importante. Ipotizziamo di calcolare la probabilità dell'uscita del numero uno condizionandola al fatto di sapere che il risultato sia un numero pari. In altre parole con quale probabilità si verifica il primo evento dato che il numero estratto è pari? Ovviamente si avrà che:

$$P(\text{Lancio dado pari ad } 1 | \text{Risultato pari}) = 0$$

25.1.4 Teorema di Bayes

Continuiamo ora il nostro ripasso andando ad analizzare i casi in cui bisogna andare a calcolare la probabilità congiunta di due eventi che non sono tra di loro statisticamente indipendenti. In particolare il teorema di Bayes implementa una formula fondamentale della probabilità che permette di aggiornare la probabilità di un evento alla luce di nuove informazioni.

Definizione (Teorema di Bayes). *Siano A e B due eventi con probabilità non nulle. La probabilità condizionata di A rispetto ad B è uguale al prodotto tra le probabilità condizionata di B rispetto ad A e le probabilità di A , tutto normalizzato rispetto la probabilità di B .*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{con} \quad P(A), P(B) \neq 0$$

- 25.1.5 Variabile casuale
- 25.1.6 Funzione di distribuzione cumulativa
- 25.1.7 Densità di probabilità
- 25.1.8 Insiemi di variabili casuali
- 25.2 Distribuzione cumulativa condizionate
 - 25.2.1 Valore atteso e momenti
 - 25.2.2 Momenti centrali
 - 25.2.3 Combinazione lineare di variabili casuali
 - 25.2.4 Funzione caratteristica
 - 25.2.5 Variabile Gaussiana
 - 25.2.6 Densità di probabilità e istogrammi
 - 25.2.7 Teorema limite centrale
- 25.3 Canale di comunicazione discreto
 - 25.3.1 Caratterizzazione probabilistica del canale di comunicazione discreto
 - 25.3.2 Probabilità di errore
 - 25.3.3 Attendibilità del canale discreto e canale BSC con sorgente simmetrica
- 25.4 Introduzione ai processi casuali
 - 25.4.1 Esempi di applicazione
 - 25.4.2 Processi casuali e sistemi
- 25.5 Definizione e tipologia di processi casuali

- 25.5.1 Descrizione probabilistica
- 25.5.2 Gaussian random walk
- 25.6 Descrizione di un processo casuale
 - 25.6.1 Media
 - 25.6.2 Autocorrelazione
 - 25.6.3 Caratterizzazione tramite media e autocorrelazione
- 25.7 Processi stazionari
 - 25.7.1 Introduzione ai processi stazionari e definizione di stazionarietà
 - 25.7.2 Interpretazione stazionarietà
 - 25.7.3 Processi stazionari in senso stretto e WSS
 - 25.7.4 Proprietà e comportamento dell'autocorrelazione per processi WSS
 - 25.7.5 Rumore termico
- 25.8 Trasformazioni dei processi casuali
 - 25.8.1 Trasformazioni lineari
 - 25.8.2 Trasformazione LTI su processo WSS
 - 25.8.3 Trasformazione lineare su processo gaussiano
 - 25.8.4 Modulazione di ampiezza
 - 25.8.5 Modulazione analogica di fase
- 25.9 Densità spettrale di potenza per i processi casuali stazionari WSS
 - 25.9.1 Potenza media per processi stazionari
 - 25.9.2 Densità spettrale di potenza
- 25.10 Medie temporali ed ergodicità
 - 25.10.1 Medie temporali
 - 25.10.2 Ergodicità
- 25.11 Esempio conclusivo - Trasmissione 2-PAM

26 Esercitazioni - TS

In questa sezione vengono riportate gli esercizi ed i relativi svolgimenti delle esercitazioni svolte in aula durante le lezioni del corso. Ad ogni sottosezione corrisponde una diversa esercitazione. Le esercitazioni sono contrassegnate dalla data di svolgimento e dagli argomenti trattati all'interno di essa. Ogni esercitazione è ulteriormente divisa nel numero di esercizi svolti comprensivi di titolo e spiegazione.

26.1 Esercitazione 1 - 01/10/2025

In questa prima esercitazione si vanno ad affrontare esercizi di base sulla teoria dei segnali come il calcolo dell'energia e della potenza. Seguono esercizi sulla distanza tra due segnali per terminare con lo sviluppo di un segnale a partire dagli elementi di una base per terminare con gli sviluppi in serie di Fourier.

26.1.1 Esercizio 1 - Energia di un segnale

All'interno del primo esercizio si chiede di calcolare l'energia dei seguenti segnali:

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} p_{2T}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_2(t) = p_1(\frac{t-2}{4}) e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_3(t) = A \cos^2(2\pi f_0 t) p_{T_0}(t - \frac{T_0}{2}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Ricordiamo infine che α , T , $f_0 = \frac{1}{T_0}$ sono tutte costanti reali positive e che la funzione porta $p_a(t)$ è definita nel modo seguente:

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & -a/2 \leq t \leq a/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Segue la rappresentazione grafica del segnale porta:

Fatta questa introduzione andiamo a capire da quali componenti è composto il primo segnale per poterlo analizzare e calcolarne l'energia. Possiamo vedere che il segnale $x_1(t)$ è composto da un'esponenziale decrescente (la costante α è positiva) moltiplicato per una porta di ampiezza $2T$ centrata nell'origine. In particolare se la porta ha supporto pari a $2T$ ed essendo centrata in zero i suoi estremi andranno da $-T$ a T .

Possiamo subito capire che il segnale $x_1(t)$ non sarà altro che un pezzo del segnale esponenziale dove la porta è uguale ad uno mentre sarà nullo dove la porta ha valore zero. Possiamo andare ad immaginare la porta come un filtro che taglia una parte del segnale a cui è moltiplicata. Intuitivamente si può capire che è così in quanto l'ampiezza della porta è pari ad 1 nel suo supporto mentre è nulla al di fuori.

Capito da che componenti è fatto il nostro segnale li andiamo a rappresentare sul piano e combinare per disegnare il segnale $x_1(t)$ come in figura.

Una volta ottenuta l'espressione del segnale possiamo andare a calcolarne l'energia come l'integrale del modulo quadro del segnale. Seguono i calcoli di quanto appena detto:

$$E(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-T}^T |e^{-\alpha t}|^2 dt = \int_{-T}^T e^{-2\alpha t} dt$$

Notiamo come gli estremi di integrazione si restringano al supporto del segnale e come l'operazione di modulo si riduca all'operazione di elevazione al quadrato in quanto il segnale è esclusivamente reale come indicato nel testo dell'esercizio. Inoltre notiamo che la porta non compare all'interno dell'integrale essa infatti scompare in quanto ci indica quali pezzi del segnale considerare. In altri termini più matematici la porta non compare in quanto la sua ampiezza è unitaria e quindi non viene influisce sul calcolo dell'energia. Risolvendo l'integrale si ottiene che:

$$E(x_1) = \int_{-T}^T e^{-2\alpha t} dt = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_{-T}^T$$

$$E(x_1) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} - \left(-\frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha T} \right) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} + \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha T} = \frac{e^{2\alpha T} - e^{-2\alpha T}}{2\alpha}$$

Non avendo alcun valore numerico da inserire all'interno del risultato trovato possiamo fermarci a questo punto ritenendo l'espressione trovata pari all'energia del segnale preso in analisi.

Passiamo ora al calcolo dell'energia del segnale $x_2(t)$ il quale notiamo essere composto da un esponenziale decrescente e da una porta di ampiezza unitaria alla quale sono state applicate alcune operazioni. Per capire come sia stata traslata e riscalata la porta andiamo a normalizzare la sua espressione nel seguente modo: partiamo dalla sua definizione ed andiamo ad inserire al posto di t il valore che troviamo nell'espressione del segnale, nel nostro caso $\frac{t-2}{4}$, andando poi a normalizzare il secondo membro per ottenere t . Segue quanto appena detto:

$$p_1(t) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$p_1\left(\frac{t-2}{4}\right) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq \frac{t-2}{4} \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Moltiplicando per 4 il secondo membro otteniamo che:

$$p_1\left(\frac{t-2}{4}\right) = \begin{cases} 1 & -2 \leq t - 2 \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Infine sommiamo due per ottenere di nuovo t :

$$p_1\left(\frac{t-2}{4}\right) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Così facendo abbiamo capito che la nostra porta è stata traslata di due unità verso destra ed ha subito un riscalamento pari a 4. Quanto appena detto si poteva capire intuitivamente guardando l'argomento della porta nell'espressione del segnale.

Andiamo ora a rappresentare le componenti separate ed il segnale $x_2(t)$.

Come nel caso precedente andiamo a calcolarne l'integrale.

$$E(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^4 e^{-4t} dt$$

$$E(x_2) = -\frac{1}{4}e^{-4t} \Big|_0^4 = -\frac{1}{4}e^{-16} + \frac{1}{4} = \frac{1 - e^{-16}}{4}$$

Come nel caso precedente il modulo si riduce ad un elevamento al quadrato e gli estremi di integrazione si restringono al supporto del segnale mentre la porta non compare all'interno dell'integrale.

Passiamo infine al terzo segnale che notiamo essere un segnale sinusoidale moltiplicato anch'esso per una porta di ampiezza T_0 a cui sono state fatte delle operazioni. Come fatto prima andiamo a normalizzare la porta.

$$p_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 & -T_0/2 \leq t \leq T_0/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$p_1(t - \frac{T_0}{2}) = \begin{cases} 1 & -T_0/2 \leq t - \frac{T_0}{2} \leq T_0/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In questo caso la porta non è stata riscalata, non è moltiplicata per nessuna costante, ma è solamente traslata di un valore pari a $\frac{T_0}{2}$ verso destra. Andiamo a sommare $\frac{T_0}{2}$ al secondo membro per normalizzarla, ed otteniamo:

$$p_1(t - \frac{T_0}{2}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In definitiva la nostra porta di ampiezza T_0 , che ricondiamo essere il periodo, è centrata in $\frac{T_0}{2}$ e si espande dall'origine fino a T_0 . Capita come è stata traslata la nostra porta andiamo a rappresentare la funzione $\cos^2(2\pi f_0 t)$ che altro non è che un periodo di un coseno di ampiezza A . Seguono le rappresentazioni delle funzioni e della loro combinazione per formare il segnale.

A questo punto non ci resta che calcolare l'energia del segnale.

$$E(x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{T_0} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) dt$$

Utilizziamo una delle due scomposizioni per riscrivere il coseno e seno al quadrato.

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\alpha)]$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1 - \sin(2\alpha)]$$

Otteniamo che:

$$E(x_3) = A^2 \cdot \int_0^{T_0} \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(4\pi f_0 t)) \right]^2 dt$$

A questo punto moltiplico la costante fuori dall'integrale per $\frac{1}{4}$ con lo scopo di togliere la costante $\frac{1}{2}$ all'interno dell'integrale. Il due diventa quattro in quanto facciamo un'estrazione di potenza.

$$E(x_3) = \frac{A^2}{4} \cdot \int_0^{T_0} \left[(1 + \cos(4\pi f_0 t)) \right]^2 dt$$

Fatto ciò posso procedere a svolgere il quadrato ed integrare i singoli componenti. Notiamo come sia possibile applicare ricorsivamente una delle scomposizioni del seno e coseno per semplificare l'espressione.

$$\begin{aligned} E(x_3) &= \frac{A^2}{4} \cdot \int_0^{T_0} 1 + \cos^2(4\pi f_0 t) + 2 \cos(4\pi f_0 t) dt = \\ &= \frac{A^2}{4} \cdot \left[\int_0^{T_0} 1 dt + \int_0^{T_0} \cos^2(4\pi f_0 t) dt + \int_0^{T_0} 2 \cos(4\pi f_0 t) dt \right] = \\ &= \frac{A^2}{4} \cdot \left[\int_0^{T_0} 1 dt \int_0^{T_0} \cos^2(4\pi f_0 t) dt + \int_0^{T_0} \frac{1}{2} [1 + \cos(8\pi f_0 t)] dt + \int_0^{T_0} 2 \cos(4\pi f_0 t) dt \right] = \\ &= \frac{A^2}{4} \cdot \left[\int_0^{T_0} 1 dt \int_0^{T_0} \cos^2(4\pi f_0 t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_0} 1 dt + \int_0^{T_0} \cos(8\pi f_0 t) dt + \int_0^{T_0} 2 \cos(4\pi f_0 t) dt \right] = \end{aligned}$$

Svolgendo gli integrali, estraendo le costanti e dividendo l'integrale su cui abbiamo operato la trasformazione al passo precedente si ottiene:

$$E(x_3) = \frac{A^2}{4} T_0 + \frac{A^2}{8} T_0 + \int_0^{T_0} \cos^2(4\pi f_0 t) dt + \int_0^{T_0} \cos(8\pi f_0 t) dt + \int_0^{T_0} 2 \cos(4\pi f_0 t) dt$$

Possiamo ignorare nei nostri calcoli gli integrali sul periodo - o suoi multipli - di funzioni trigonometriche in quanto essi sono pari a zero. Come possiamo notare tutti gli integrali sono tra zero e T_0 ed in particolare i loro periodi sono pari a $\frac{T_0}{2}$, $\frac{T_0}{4}$ e $\frac{T_0}{2}$ che corrispondono a $\frac{1}{2f_0}$, $\frac{1}{4f_0}$ e $\frac{1}{2f_0}$.

In totale l'energia del segnale è pari a:

$$E(x_3) = \frac{A^2}{4} T_0 + \frac{A^2}{8} T_0 = \frac{3}{8} A^2 T_0$$

26.1.2 Esercizio 2 - Potenza media di un segnale

Visto ora il calcolo dell'energia di un segnale passiamo a considerarne la potenza che ricordiamo essere

In particolare è ora richiesto di calcolare la potenza media del seguente segnale:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(t - 2nT_2)$$

dove

$$\phi(t) = 2 \sin\left(\frac{2\pi t}{2T_1}\right) p_{T_1}\left(t - \frac{T_1}{2}\right)$$

e T_1 e T_2 sono due costanti reali positive eventi $T_1 < 2T_2$.

Letto il testo del problema andiamo ad analizzare il segnale che ci troviamo davanti. Come prima cosa dobbiamo notare che il segnale $X(t)$ è dato dalla sommatoria di infiniti pezzi, detti $\phi(t)$. Partendo da $\phi(t)$ notiamo come esso non si altro che un segnale sinusoidale moltiplicato per una porta. Il particolare possiamo ricavare il suo periodo nel seguente modo:

$$\sin(\omega t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{2T_1}\right)$$

Nel caso di un segnale standard si ha che $\omega = 2\pi f$ mentre nel nostro caso avremo che $\omega = \frac{\pi}{T_1}$ dopo aver semplificato le costanti. Trovato il valore di omega possiamo ricavare il valore di f , ovvero la frequenza, dalla formula appena scritta.

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \frac{\pi}{T_1} = 2\pi f$$

$$f = \frac{\pi}{2\pi T_1} = \frac{1}{2T_1}$$

Inverto la frequenza ed ottengo il periodo.

$$T = \frac{1}{f} = 2T_1$$

Trovato il periodo della sinusoide andiamo ad analizzare la porta. Come possiamo vedere non è stato effettuato nessun riscalamento ma soltanto una traslazione verso destra di un valore pari a $\frac{T_1}{2}$. Questa operazione rende dunque la funzione pari ad 1 nell'intervallo compreso tra 0 e T_1 .

Otteniamo dunque che il segnale $\phi(t)$ altro non è che un la prima mezza parte di una funzione seno con ampiezza pari a 2. Segue lo schema del segnale.

Capito come è fatto il segnale $\phi(t)$ possiamo analizzare il segnale $x(t)$ il quale risulta essere un segnale avente periodo $2T_2$ formato da tante repliche o somme degli infiniti segnali $\phi(t)$ che vengono traslati infinite volte prima e dopo l'origine. Volendo rappresentare il risultato otteniamo la seguente figura:

Possiamo anche scrivere il segnale $x(t)$ effettuandone lo sviluppo attorno all'origine:

.....

In particolare sappiamo per certezza che le code dell'ennesima $\phi(t)$ non toccheranno la precedente o la successiva in quanto la funzione $x(t)$ ha periodo pari a $2T_2$, mentre le funzioni $\phi(t)$ hanno un periodo pari a T_1 che per definizione è strettamente minore del doppio di T_2 .

Andiamo ora a calcolare la potenza media del segnale attraverso due approcci diversi. Nel primo caso possiamo andare ad applicare la definizione vista prima ottenendo quanto segue.

$$P(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |x(t)| dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_2} \int_0^{2T_2} \phi^2(t) dt$$

26.1.3 Esercizio 3 - Distanza Euclidea tra due segnali

Affrontata la potenza di un segnale andiamo ora a calcolare la distanza Euclidea tra le seguenti coppie di segnali:

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$$

$$x_2(t) = 2u(t)$$

$$x_3(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{T}\right)^2 & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} -\frac{t}{T} & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ricordiamo infine la definizione di distanza Euclidea:

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt} \\ d^2(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Partiamo ora dalla prima coppia di segnali. In primo segnale è dato da un'esponenziale decrescente moltiplicato per una funzione gradino $u(t)$ che filtra, per modo di dire, l'esponenziale facendo comparire solo la sua parte positiva.

Il secondo segnale invece è definito da una funzione gradino moltiplicata per una costante. Seguono i grafici dei due segnali $x_1(t)$ e di $x_2(t)$.

Procediamo ora con il calcolo della distanza Euclidea.

$$\begin{aligned} d^2(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha t} - 2)^2 dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt + \int_0^{+\infty} 4 dt + \int_0^{+\infty} 4e^{-\alpha t} dt = +\infty \end{aligned}$$

Come possiamo vedere da quanto appena ricavato l'integrale di 4 tra 0 ed infinito è divergente facendo divergere anche la somma degli integrali e dunque la distanza Euclidea tra i due segnali.

Si poteva inoltre intuitivamente capire il risultato in due modi diversi: guardando il grafico dei segnali e notando che la differenza di area sottesa ai due segnali tendesse all'infinito con lo scorrere del tempo oppure notato che il limite verso infinito delle due funzioni fossero finiti ma aventi valori diversi.

Passiamo ora alla seconda coppia di segnali. Prima di tutto dobbiamo andare a riscrivere i segnali non più sotto forma di sistema ma utilizzando una funzione porta moltiplicata al segnale. In particolare il primo segnale dovrà assumere il suo valore tra 0 e T , dunque verrà moltiplicato per una porta di ampiezza T traslata di $\frac{T}{2}$ verso destra. Procediamo in modo analogo per il secondo segnale ottenendo i seguenti risultati.

$$x_3(t) = \left(\frac{t}{T}\right)^2 \cdot p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$x_4(t) = -\frac{t}{T} \cdot p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

In definitiva possiamo tracciare un grafico dei segnali ottenuti.

Ora non ci resta che calcolare la distanza Euclidea tra i segnali ottenuti.

$$\begin{aligned} d^2(x_3, x_4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x_3(t) - x_4(t)|^2 dt = \int_0^T \left[\frac{t^2}{T^2} + \frac{t}{T} \right]^2 dt = \\ &= \int_0^T \frac{t^4}{T^4} dt + \int_0^T \frac{t^2}{T^2} dt + 2 \int_0^T \frac{t^3}{T^3} dt = \\ &\quad \left. \frac{t^5}{5T^4} \right|_0^T + \left. \frac{t^3}{3T^2} \right|_0^T + 2 \left. \frac{t^4}{4T^3} \right|_0^T = \\ &= \frac{T}{5} + \frac{T}{3} + \frac{T}{2} = \frac{31}{30}T \end{aligned}$$

In definitiva si avrà che la distanza Euclidea sarà pari a $\sqrt{\frac{31}{30}T}$.

26.1.4 Esercizio 4 - Sviluppo di un segnale dalla base

Dati i segnali ortonormali riportati di seguito si sviluppi la funzione $z(t)$:

$$z(t) = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) + \sin(\pi t)$$

Come abbiamo visto in precedenza sviluppare una funzione $z(t)$ su una base ortonormale $(w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t))$ significa scrivere $z(t)$ come combinazione lineare dei segnali che compongono la base come:

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(t) = \alpha_1 w_1(t) + \alpha_2 w_2(t) + \alpha_3 w_3(t)$$

In particolare i coefficienti si ottengono tramite l'operazione di prodotto scalare così definito:

$$\alpha_i = \langle z, w_i \rangle \text{ con } i = 1, \dots, n$$

Infine prima di iniziare a fare i calcoli possiamo notare come la funzione $z(t)$ sia scomponibile come somma di tre pezzi diversi. Andremo dunque - essendo il prodotto scalare dotato di proprietà di linearità - a calcolare il prodotto scalare di ogni elemento della base per ognuno delle tre funzioni che compongono $z(t)$.

Prima di iniziare andiamo a rappresentare le tre funzioni che sommate ci danno $z(t)$.

$$z_1(t) = \frac{1}{2} \quad z_2(t) = \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) \quad z_3(t) = \sin(\pi t)$$

Procediamo ora svolgendo i prodotti scalari così definiti secondo la proprietà di linearità:

$$\begin{aligned} \langle z, w_1 \rangle &= \langle z_1, w_1 \rangle + \langle z_2, w_1 \rangle + \langle z_3, w_1 \rangle \\ \langle z, w_2 \rangle &= \langle z_1, w_2 \rangle + \langle z_2, w_2 \rangle + \langle z_3, w_2 \rangle \\ \langle z, w_3 \rangle &= \langle z_1, w_3 \rangle + \langle z_2, w_3 \rangle + \langle z_3, w_3 \rangle \end{aligned}$$

Seguono i calcoli di tutti i prodotti scalari sopra riportati. Si noti come per alcuni di essi è stato adottato un approccio grafico andando a moltiplicare una delle parti della funzione $z(t)$ con uno degli elementi della base.

Iniziamo con l'elemento di base w_1 .

$$\langle z_1, w_1 \rangle = \int_0^4 z_1(t)w_1(t) dt = 0$$

In particolare analizzando il grafico del segnale prodotto dentro il segno di integrale notiamo essere dispari rispetto la centro dell'intervallo di integrazione dunque il suo valore è nullo.

$$\langle z_2, w_1 \rangle = 2 \int_0^2 \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) dt = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{t\pi}{4}\right) \Big|_0^2 = 0$$

26.1.5 Esercizio 5 - Sviluppo in serie di Fourier I

Dato il segnale a energia finita $x(t) = p_\tau(t)$ con $\tau < T$. Se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $(-T, T)$, ossia:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \text{ con } \mu_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

Iniziamo subito andando a vedere che il segnale $x(t)$ è una porta di ampiezza unitaria e larghezza pari a τ che si espande da $-\frac{\tau}{2}$ a $\frac{\tau}{2}$.

Capito che segnale stiamo trattando andiamo subito a calcolare il valore di μ_n ovvero il valore dei coefficienti.

$$\mu_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \frac{T}{-j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{-j2\pi n} [e^{-j\frac{2\pi}{T}n\frac{\tau}{2}} - e^{j\frac{2\pi}{T}n\frac{\tau}{2}}]$$

Possiamo riscrivere il risultato ricordando che:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \\ \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \end{cases}$$

Otteniamo dunque che:

$$\frac{1}{-j2\pi n} [-2j \sin(n\pi \frac{\tau}{T})]$$

Semplificando le costanti abbiamo che:

$$\frac{\sin(n\pi \frac{\tau}{T})}{\pi n}$$

Moltiplico numeratore e denominatore entrambi per $\frac{\tau}{T}$

$$\frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\pi \frac{\tau}{T})}{\pi n \frac{\tau}{T}}$$

Ricordiamo ora la definizione della funzione $\text{sinc}(x)$ nel modo seguente:

$$\text{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Si ottiene dunque che:

$$\frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\pi \frac{\tau}{T})}{\pi n \frac{\tau}{T}} = \frac{\tau}{T} \text{sinc}(n \frac{\tau}{T})$$

In definitiva, calcolati ora i coefficienti μ_n possiamo scrivere lo sviluppo in serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_n = \text{sinc}(n \frac{\tau}{T}) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}$$

Notiamo infine come si sia alleggerita la notazione sulla sommatoria dove scriveremo solo n con lo scopo di intendere la sommatoria di tutti gli n da $-\infty$ a $+\infty$.

26.1.6 Esercizio 6 - Sviluppo in serie di Fourier II

Arriviamo ora all'ultimo esercizio dove dato il segnale $f(t)$ ad energia finita riportato nella figura sottostante viene chiesto di calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier. È inoltre noto che il segnale è definito sull'intervallo $(-3T, +3T)$ ed assume ampiezza pari a $2A$ nella porta centrata nell'origine mentre assume ampiezza pari ad A sulle due porte centrate in $-2T$ e $+2T$. Sappiamo infine che le porte anno tutte supporto pari a τ .

Prima di cominciare a fare calcoli andiamo a fare delle considerazioni che potrebbero aiutarci nella risoluzione dell'esercizio. In particolare notiamo come ci sia possibile sviluppare in serie di Fourier la funzione $p_\tau(x)$ - opportunamente traslata e riscalata - per poi inserire lo

sviluppo calcolato nell'espressione di $f(t)$.

Possiamo dunque riscrivere la funzione $f(t)$ - ovvero come la somma delle tre porte - nel modo seguente:

$$f(t) = A[2p_\tau(t) + p_\tau(t - 2T) + p_\tau(t + 2T)]$$

26.2 Esercitazione 2 - 07/10/2025

In questa esercitazione andremo ad affrontare alcuni esercizi sul calcolo della trasformata di Fourier prima applicandone la definizione e poi utilizzando trasformate a noi già note a cui applicheremo le giuste proprietà per ottenere il risultato voluto. Infine vedremo anche come in alcuni casi il calcolo di potenza ed energia possa essere svolto anche nello spazio delle frequenze e non in quello dei tempi.

26.2.1 Esercizio 1 - Trasformata di Fourier di segnali

Iniziamo ora con il primo esercizio dove ci viene chiesto di calcolare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali:

$$\begin{aligned}s_1(t) &= e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0 \\s_2(t) &= e^{-2t+4} u(t-2) \\s_3(t) &= e^{-\frac{t}{2}} \cos(100\pi t) u(t) \\s_4(t) &= 10 \operatorname{sinc}^2(t) \cos(300\pi t + \frac{\pi}{6}) \\s_5(t) &= \operatorname{tri}(\frac{t-1}{2}) e^{-j200\pi t}\end{aligned}$$

Iniziamo dal primo segnale alla quale andremo ad applicare la definizione di trasformata di Fourier svolgendo il calcolo dell'integrale. Seguendo la definizione della trasformata vista sopra possiamo procedere:

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha+j2\pi f)} dt$$

Risolviamo ora l'integrale notando come l'intervallo di integrazione sia limitato da zero ad infinito dato che la funzione risulta essere nulla al di fuori di esso. Calcoliamo la trasformata:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha+j2\pi f)} dt = -\frac{1}{\alpha+j2\pi f} e^{-t(\alpha+j2\pi f)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha+j2\pi f}$$

In particolare notiamo come l'integrale dunque la trasformata esiste solo nel caso il cui il valore di α sia strettamente maggiore di zero facendo convergere l'integrale. Inoltre il termine che andiamo a calcolare in zero e $+\infty$ possiamo scomporlo con due esponenziali - modulo e fase - notando come quando si sostituisce infinito il modulo tenda a zero mentre la fase oscilli ad frequenza infinita. Quando invece sostituiamo il valore 0 otteniamo 1 come semplificazione dei due esponenziali cambiati di segno.

D'ora in poi non andremo quasi mai ad utilizzare la definizione di trasformata di Fourier attraverso il calcolo integrale ma utilizzando trasformate di funzioni già note unite tra loro attraverso opportune proprietà. Detto ciò passiamo al calcolo delle altre trasformate.

$$s_2(t) = e^{-2t+4} u(t-2)$$

Come possiamo vedere il segnale è formato da un'esponenziale decrescente moltiplicato per un gradino traslato verso destra di due unità. Il segnale risulta avere il seguente grafico:

In particolare possiamo notare come l'esponenziale possa essere riscritto come $e^{2(t-2)}$ e sostituendo il valore $t - 2$ con t si ottiene una nuova funzione equivalente

Infine possiamo comunque mostrare come si potesse arrivare allo stesso risultato attraverso il calcolo integrale e la definizione di trasformata di Fourier.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_2^{+\infty} e^{-2t+4} e^{-j2\pi ft} dt = e^4 \cdot \int_2^{+\infty} e^{-t(2+j2\pi f)} dt$$

Imponendo che $a = 2 + j2/\pi f$ si ottiene il seguente integrale:

$$\int_2^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{e^{-2a}}{a}$$

Sostituendo si ottiene che:

$$e^4 \cdot \int_2^{+\infty} e^{-t(2+j2\pi f)} dt = e^4 \frac{e^{-2(2+j2\pi f)}}{2 + j2\pi f} = \frac{e^{4-4} e^{-j2\pi f}}{2 + j2\pi f} = \frac{e^{-j2\pi f}}{2 + j2\pi f}$$

Passiamo ora al segnale successivo

$$s_3(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos(100\pi t) u(t)$$

Proseguiamo con il prossimo segnale:

$$s_4(t) = 10 \operatorname{sinc}^2(t) \cos(300\pi + \frac{\pi}{6})$$

Iniziamo analizzando il segnale proposto composto da un segnale $\operatorname{sinc}()$ moltiplicato per un segnale sinusoidale $\cos()$ avente una fase diversa da zero la quale implica che non si possa utilizzare la modulazione come nell'esempio visto in precedenza.

26.2.2 Esercizio 2 - Trasformata e serie di Fourier di un segnale triangolare

Passiamo ora al secondo esercizio andando a calcolare la trasformata di Fourier del segnale onda triangolare riportato di seguito calcolando anche i coefficienti delle serie di Fourier del segnale stesso.

26.2.3 Esercizio 3 - Passaggio da tempo a frequenza

26.2.4 Esercizio 4 - Energia di un segnale

26.3 Esercitazione 3 - 15/10/2025

- 26.3.1 Esercizio 1 - Linearità e tempo-invarianza di un sistema**
- 26.3.2 Esercizio 2 - Studio sistema LTI**
- 26.3.3 Esercizio 3 - Uscita di un sistema data la sua risposta impulsiva**
- 26.3.4 Esercizio 4 - Uscita di un sistema data la sua risposta impulsiva I**
- 26.3.5 Esercizio 5 - Risposta impulsiva di un sistema con onda quadra in ingresso**
- 26.3.6 Esercizio 6 - Uscita di un sistema data la sua risposta impulsiva II**

26.4 Esercitazione 4 - 22/10/2025

- 26.4.1 Esercizio 1 - Segnale gaussiano attraverso filtro passabasso gaussiano**
- 26.4.2 Esercizio 2 - Canale distorcente**
- 26.4.3 Esercizio 3 - Segnale sinusoidale attraverso un sistema LTI**
- 26.4.4 Esercizio 4 - Studio di sistema I**
- 26.4.5 Esercizio 5 - Studio di sistema II**

26.5 Esercitazione 5 - 28/10/2025

In questa esercitazione si andranno ad affrontare problemi relativi ai segnali periodici nel tempo studiandone il comportamento attraverso filtri e sistemi LTI.

26.5.1 Esercizio 1 - Segnale periodico filtrato da un passabasso I

Dato il segnale:

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(t - 2iT)$$

dove

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{3|t|}{4T} & \text{per } |t| < 2T/3 \\ 1/2 & \text{per } 2T/3 < |t| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il segnale $y(t)$ viene successivamente filtrato con un filtro passabasso ideale la cui funzione di trasferimento vale 1 per $|f| < B = \frac{3}{4T}$ e 0 altrove. Calcolare l'espressione del segnale $z(t)$ in uscita dal filtro.

26.5.2 Esercizio 2 - Segnale periodico filtrato da un passabasso II

26.5.3 Esercizio 3 - Potenza di un segnale periodico attraverso un sistema LTI

26.5.4 Esercizio 4 - Segnale periodico attraverso un filtro passabanda

In questo esercizio ci viene dato il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{2t}{T} - 2k\right)$$

dove $\Pi(t) = 1$ se $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e zero altrove. Il segnale viene posto in ingresso ad un filtro passabanda ideale con frequenza centrale $f_c = L/T$, L intero positivo e banda $\frac{1}{2T}$. Viene richiesto di scrivere l'espressione $y(t)$ del segnale d'uscita.

Letta la descrizione del problema passiamo ora a vedere una possibile soluzione dapprima andando a riscrivere l'espressione del segnale $x(t)$ per vederlo in un'altra forma.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{2t}{T} - 2k\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{2}{T}(t - kT)\right)$$

In questo caso abbiamo riscritto il segnale in una forma più simile a quella dei segnali periodici a cui siamo abituati solitamente. Infine possiamo anche definire funzione $s(t)$ per andare a scrivere il segnale nel modo seguente:

$$x(t) = \sum_k s(t - kT)$$

In particolare si avrebbe $s(t)$ definita nel seguente modo:

$$s(t) = \Pi\left(\frac{2t}{T}\right) = \Pi\left(\frac{t}{T/2}\right) = p_{T/2}(T)$$

Nello specifico abbiamo riscritto il

26.5.5 Esercizio 5 - Segnale periodico e trasformazione LTI

In questo esercizio dato il segnale

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i p_T(t - iT)$$

dove $p_T(t)$ vale 1 per $|t| < T/2$ e 0 altrove. Il segnale subisce una trasformazione LTI caratterizzata da $H(f) = 1$ per $|f| < B$ e 0 altrove. Nel caso in cui $BT = 1/3$ quanto vale il segnale $y(t)$ ottenuto in uscita?

Letta la descrizione del problema passiamo ora a vedere una possibile soluzione del problema. Iniziamo andando ad analizzare il nostro segnale $x(t)$ che a prima vista può sembrare periodico composto dalla sommatoria di più parti, ma guardano meglio, ci rendiamo conto essere il prodotto di due segnali diversi. In particolare ci troviamo davanti ad un segnale periodico di periodo T che è moltiplicato per 1 o -1 in base all'indice della sommatoria che lo compone. Segue quanto appena detto.

$$(-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}$$

Nel nostro caso, essendo il segnale una costante di valore unitario moltiplicata per una costante unitaria che varia solo di segno, otteniamo una sequenza di porte di supporto T e di altezza 1 centrate in multipli pari di T intervallate da una sequenza di porte identiche alle precedenti ma aventi altezza pari a -1. Ci è quindi possibile vedere il segnale sia come una successione di porte ma anche come una onda quadra avente periodo pari a $2T$. Segue una rappresentazione di quanto appena detto.

Possiamo inoltre notare come fosse anche possibile vedere il segnale $x(t)$ come la differenza tra due segnali. Ci è possibile riscrivere il segnale come differenza tra $z(t)$ e $z(t - T)$. In particolare scrivendo $z(t)$ come:

$$z(t) = \sum_i p_T(t - 2iT)$$

In altre parole stiamo considerando il segnale $x(t)$ come la differenza tra tante porte translate alla quale vengono tolte, per modo di dire, altrettante porte in modo intermittente al fine di ottenere l'onda quadra rappresentata prima. Vedremo nel prossimo esercizio come ci

sarà possibile utilizzare questa scrittura per risolvere il problema in modo alternativo rispetto a quanto faremo ora.

Proseguendo con la risoluzione del problema notiamo come l'onda quadra che abbiamo generato non è più periodica su un periodo pari a T ma lo è su un'intervallo di valori pari a $2T$. In particolare considerando ora il segnale $2T$ -periodico possiamo scriverlo come sommatoria su i di un dato segnale $q(t)$ opportunamente traslato:

$$x(t) = \sum_i q(t - 2iT)$$

in particolare sappiamo che $q(t)$ è dato da una porta di supporto T seguita da una seconda porta con lo stesso supporto traslata e moltiplicata per un valore negativo. In altri termini stiamo descrivendo la salita e la discesa della nostra onda quadra limitata al suo primo "ciclo". In termini matematici otteniamo che:

$$q(t) = p_T(t) - p_T(t - T)$$

Ottenuto ora il segnale possiamo passare nello spazio delle frequenze per risolvere il problema in quanto nello spazio dei tempi si incontrerebbero delle convoluzioni per delle funzioni $\text{sinc}(t)$ che risulterebbero molto difficili da trattare. Procediamo con la formula seguente che utilizzeremo sempre per questa forma di esercizio:

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_i Q\left(\frac{i}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{i}{T}\right)$$

In particolare con questa formula stiamo andando a moltiplicare la trasformata di Fourier del nostro segnale iniziale con una delta traslata nella frequenza ottenendo così lo spettro del segnale che essendo periodico nel tempo produrrà uno spettro discreto in frequenza. Notiamo infine che il valore di T dovrà essere poi sostituito con il periodo trattato prima ovvero $2T$.

Proseguiamo ora effettuando come prima cosa la trasformata del segnale limitato ad un suo singolo periodo, otteniamo dunque:

$$q(t) = p_T(t) - p_T(t - T)\mathcal{F}$$

$$\mathcal{F}(q(t)) = Q(f) = T \text{sinc}(fT) - T \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi fT} = T \text{sinc}(fT) \cdot [1 - e^{-j2\pi fT}]$$

Effettuando la trasformata delle due porte che compongono il singolo periodo della nostra onda quadra otteniamo due funzioni $\text{sinc}()$ moltiplicate per un valore T ed opportunamente traslata in frequenza come accade per la seconda porta. Ricordiamo che la traslazione nel tempo diventa una moltiplicazione per un'esponenziale in frequenza. Fatto ciò andiamo a riprendere la formula generale e sostituiamo opportunamente i valori di T e di $Q(f)$.

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_i Q\left(\frac{i}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{i}{T}\right)$$

Sostituendo T con $2T$ ottengo che:

$$X(f) = \frac{1}{2T} \sum_i Q\left(\frac{i}{2T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{i}{2T}\right)$$

Sostituisco la funzione $Q(f)$ appena trovata all'interno dell'espressione ottenendo:

$$X(f) = \frac{1}{2T} \sum_i T \operatorname{sinc}\left(\frac{i}{2T} \cdot T\right) \cdot (1 - e^{-j2\pi \frac{i}{2T} T}) \cdot \delta\left(f - \frac{i}{2T}\right)$$

Semplificando alcuni termini arriviamo ad ottenere che:

$$X(f) = \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{sinc}\left(\frac{i}{2}\right) \cdot (1 - e^{-ji\pi}) \cdot \delta\left(f - \frac{i}{2T}\right)$$

Notiamo come prima abbiamo sostituito T con $2T$, abbiamo poi sostituito $Q(f)$ con la funzione trovata andando anche a sostituire f all'interno di quest'ultima in base al valore trovato nell'espressione generale. Possiamo da subito notare come questi passaggi vadano fatti in un certo ordine per evitare confusione ed errori.

Arrivati a questo punto notiamo che il termine $e^{-ji\pi}$ non si altro che un numero complesso avente parte immaginaria nulla e parte reale variabile in base all'esponente i . Ci è possibile dire ciò ricordando che $e^{-ji\pi} = -1$ ottenuto dalla formula di Eulero. In particolare assieme all'altro termine all'interno della parentesi il valore dell'espressione assume i valori seguenti:

$$1 - (-1)^i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}$$

Come possiamo notare quando i è dispari annulla la componente in frequenza motivo per cui possiamo riscrivere la nostra sommatoria. Utilizzeremo ora una sommatoria di soli numeri dispari k definiti in questo modo $i = 2k + 1$. Otteniamo dunque che:

$$X(f) = \sum_k \operatorname{sinc}\left(\frac{2k+1}{2}\right) \cdot 2 \cdot \delta\left(f - \frac{2k+1}{2T}\right)$$

Possiamo infine scomporre la funzione $\operatorname{sinc}()$ ed ottenere un'espressione semplificata:

$$X(f) = \sum_k \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \pi\right)}{\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \pi\right)} \cdot 2\delta\left(f - \frac{2k+1}{2T}\right)$$

Ci è possibile riscrivere il seno al numeratore nel modo seguente:

$$\sin\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

Otteniamo dunque questa espressione:

$$\frac{2}{\pi} \sum_k \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \delta\left(f - \frac{2k+1}{2T}\right)$$

Arrivati a questo punto possiamo interpretate il segnale in questo modo. Dato che il segnale preso in esempio è periodico nel tempo sappiamo che avremo uno spettro di frequenza discreto. In particolare ogni delta - ovvero componente in frequenza - sarà moltiplicata per

una costante $\frac{2}{\pi}$ posta prima della sommatoria che contiene tutte le componenti spaziate di $\frac{T}{2}$ e centrate in tutti i punti $\frac{\pm i}{2T}$ dove il termine i è ottenuto dalla sommatoria vista in precedenza. In definitiva otteniamo il seguente grafico:

In definitiva possiamo notare come la trasformazione LTI - ovvero un filtro passabasso ideale - avente una banda bilatera pari a $B = \frac{1}{3T}$ sia troppo stretta per permettere il passaggio di qualsiasi componente in frequenza. Notiamo come l'unica componente che potrebbe essere filtrata sarebbe quella continua ma in questo caso è moltiplicata per zero.

In definitiva in temrini matematici otteniamo che:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = 0$$

In modo immediato otteniamo che se il segnale il uscita è nullo nelle frequenze lo sarà anche nel tempo, avremo dunque che $y(t) = 0$.

26.5.6 Esercizio 6 - Spettro di ampiezza di un segnale

Affrontiamo ora l'ultimo problema di questa esercitazione dove dato un segnale

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i r(t - iT)$$

dove la funzione $r(t)$ ha la seguente espressione

$$r(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

ci viene chiesto di calcolarne lo spettro in ampiezza. Si richiede di dire se sia possibile ottenere dal segnale $x(t)$ un segnale sinusoidale di frequenza f_0 operando opportune operazioni di filtraggio. Infine motivare la risposta escludendo il caso elementare in cui $f_0 = 0$, qual è il minimo valore di f_0 ottenibile?

Iniziamo andando a capire come è composto il singolo elemento di $x(t)$ ovvero $r(t)$. Il segnale $r(t)$ è composto da un'esponenziale decrescente (si suppone che $x \in \mathbb{R}^+$) moltiplicato per una funzione gradino pari ad 1 per $x \geq 0$ e pari a zero per $x < 0$. Si ottiene il seguente grafico:

Possiamo inoltre andare subito ad effettuarne la trasformata di Fourier in quanto è una funzione a noi nota. Otteniamo dunque che:

$$\mathcal{F}(r(t)) = R(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$$

Fatto ciò passiamo ora ad analizzare il segnale $x(t)$ composto, come visto in precedenza, da due segnali moltiplicati tra di loro. Possiamo notare come il segnale sia composto da una serie di esponenziali decrescenti - come quelli di $r(t)$ - traslati, sommati o sottratti in modo alternato per un valore pari a 1 o -1 in base all'indice i della sommatoria che lo genera.

Compresa questa situazione possiamo andare a scrivere il nostro segnale come sommatoria di esponenziali positivi a cui viene sottratta una sommatoria degli altri segnali che risultano

essere negativi. Riscrivendo l'espressione del segnale utilizzando due sommatorie separate su un valore n e sostituendo al valore di i l'espressione $2n$ in una e $2n + 1$.

$$x(t) = \sum_i (-1)^i \cdot r(t - iT) = \sum_n (-1)^{2n} \cdot r(t - 2nT) + \sum_n (-1)^{2n+1} \cdot r(t - (2n+1)T)$$

Semplifichiamo i valori ottenuti dagli esponenziali si ottiene che:

$$x(t) = \sum_n r(t - 2nT) - \sum_n r(t - 2nT - T)$$

Semplifichiamo infine la nostra espressione andando a scriverla in questo modo:

$$x(t) = y(t) - y(t - T) \quad \text{dove } y(t) = \sum_n r(t - 2nT)$$

A questo punto ci rimane estremamente semplice trasformare il segnale $x(t)$ nello spazio delle frequenze con Fourier:

$$\mathcal{F}(x(t)) = X(f) = Y(f) - Y(f) \cdot e^{-j2\pi fT}$$

Otteniamo dunque la differenza tra le due trasformate con la traslazione nello spazio dei tempi che diventa una moltiplicazione per l'esponenziale complesso in frequenza.

Ora come per ogni problema riguardante i segnali periodici andiamo ad applicare la formula seguente facendo i soliti accorgimenti sul periodo:

$$Y(f) = \frac{1}{2T} \sum_n R\left(\frac{n}{2T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

Semplificando e sostituendo si ottiene che:

$$Y(f) = \frac{1}{2T} \sum_n \frac{1}{\alpha + j2\pi \frac{n}{2T}} \cdot \delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

Andiamo ora a calcolare il segnale $Y(f)$ in uscita ricordando l'espressione vista in precedenza dove $X(f) = Y(f) \cdot [1 - e^{-j2\pi fT}]$. Scrivendo l'espressione otteniamo che:

$$Y(f) = \frac{1}{2T} \sum_n \frac{1}{\alpha + j\frac{\pi n}{T}} \cdot \delta\left(f - \frac{n}{2T}\right) \cdot [1 - e^{-j\pi n}]$$

Notiamo come il termine tra le parentesi quadre può assumere due valori in base all'indice della sommatoria. In particolare:

$$1 - e^{-j\pi n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dato che le componenti in frequenza quando n è pari risultano essere nulle in quanto moltiplicate per zero andiamo a riscrivere la sommatoria con un'indice k sostituendo n all'interno con $2k + 1$ otteniamo che:

$$X(f) = \frac{1}{2T} \sum_k \frac{1}{\alpha + j\pi \frac{2k+1}{T}} \cdot 2 \cdot \delta\left(f - \frac{2k+1}{2T}\right)$$

Semplificando otteniamo che:

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_k \frac{1}{\alpha + j\pi \frac{2k+1}{T}} \cdot \delta\left(f - \frac{2k+1}{2T}\right)$$

A questo punto possiamo andare ad interpretare il nostro spettro attraverso un grafico.

26.6 Esercitazione 6 - 29/10/2025

In questa esercitazione si andranno ad affrontare problemi relativi ai segnali periodici nel tempo studiandone il comportamento attraverso filtri e sistemi LTI facendo ora attenzione agli spettri ed alle funzioni di correlazione.

26.6.1 Esercizio 1 - Segnale ad energia finita e funzione di autocorrelazione

Iniziamo con il primo esercizio dove dato un segnale $x(t)$ ad energia finita si chiede di indicare quale tra le seguenti $R_x(\tau)$ non può rappresentare una sua funzione di autocorrelazione:

- a) $R_x(\tau) = \text{sinc}(\tau/T)$
- b) $R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$
- c) $R_x(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T}$ per $|\tau| < T$
- d) $R_x(\tau) = \cos(2\pi\tau/T)p_{T/2}(\tau)$

Per risolvere questo esercizio dobbiamo prima di tutti ricordare i criteri per cui un segnale $R_x(\tau)$ può essere una funzione di autocorrelazione di un dato segnale per poi andare ad analizzare ogni opzione possibile. Ricordiamo subito quali sono le proprietà che devono essere rispettate:

- $R_x(\tau)$ deve essere pari
- $R_x(\tau)$ deve ammettere un massimo nell'origine
- I valori assunti da $S_x(f)$ devono essere maggiori o uguali da zero. Ricordiamo che $S_x(f)$ altro non è che la trasformata di Fourier di $R_x(\tau)$.

Iniziamo andando ad analizzare il primo segnale **a**. Sappiamo che la funzione $\text{sinc}(t)$ è composta da un $\sin(\pi t)$ al numeratore fratto una funzione t . Essendo entrambe dispari possiamo dire che la funzione risultante, ovvero la $\text{sinc}(t)$ è pari soddisfando così il primo punto.

Sappiamo inoltre che la $\text{sinc}(t)$ ha un massimo nell'origine soddisfando il secondo punto. Infine dalle tavole sappiamo che la trasformata è rappresentata da una porta che è sempre maggiore o uguale a zero soddisfando così anche la terza condizione.

Passano all'opzione **b** possiamo dire che ci troviamo davanti a due rami di esponenziale decrescente. In particolare la funzione $R_x(\tau)$ risulta essere simmetrica in quanto all'esponente è presente un valore assoluto il quale unito al segno negativo porta la funzione ad assumere il suo valore massimo nell'origine soddisfando le prime due condizioni. Effettuiamo ora la trasformata di Fourier del segnale $R_x(t)$:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

Notiamo in modo immediato come la funzione sia data dal rapporto tra due quantità che sono sempre positive dunque risulta essere soddisfatta anche la terza condizione.

Passiamo ad analizzare il terzo segnale **c**. Prendendo in analisi il terzo caso possiamo subito vedere che il segnale è composto da due parti. La prima parte tra $-T$ e zero è una retta di equazione $\tau + 1$ mentre la seconda parte tra 0 e T è definita da una retta di equazione $-\tau + 1$. Unendo le due parti notiamo che il nostro segnale è equivalente ad un segnale triangolare che possiamo scrivere così:

$$R_x(\tau) = \text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

Possiamo dunque dire immediatamente che $R_x(\tau)$ rispetta le prime due condizioni in quanto è pari ed ha massimo nell'origine. Possiamo infine analizzare il terzo punto andando a fare al trasformata di Fourier del segnale ottenendo il seguente risultato:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = T \text{sinc}^2(fT)$$

Notiamo fin da subito che la funzione che assume solo valori positivi ed uguali a zero è moltiplicata per una costante positiva che ci porta a confermare anche la terza condizione.

Passiamo infine ad analizzare l'ultima opzione ovvero l'opzione **d**.

Iniziamo analizzando il segnale dato notando che esso si compone di una sinusoide moltiplicata per una porta di supporto $\frac{T}{4}$, in particolare il segnale $R_x(\tau)$ sarà dato dalla parte centrale di un coseno di periodo T ma della quale consideriamo solo i primi $\frac{T}{4}$ prima e dopo dell'origine. Analizzando quanto appena detto possiamo dire che le prime due condizioni risultano vere in quanto la funzione coseno è pari quindi una sua sezione attorno all'origine rimane pari ed ammette massimo nell'origine. Fatto ciò passiamo ad effettuare l'ultima condizione trasformando $R_x(\tau)$ secondo Fourier. Come abbiamo detto il segnale è composto da una sinusoide ($R_{x1}(\tau)$) e da una porta ($R_{x2}(\tau)$) moltiplicate tra di loro. Sapendo la trasformata di $R_{x2}(\tau)$ e riscrivendo il coseno nella forma esponenziale:

$$\mathcal{F}(R_{x2}(\tau)) = \frac{T}{2} \text{sinc}\left(f \cdot \frac{T}{2}\right)$$

$$R_{x1}(\tau) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi\tau/T} + e^{-j2\pi\tau/T})$$

Applico ora la proprietà della modulazione sapendo che $X(f)$ è la trasformata di Fourier di $x(t)$ ottengo che $x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$ risulta essere uguale a $X(f - f_0)$. Possiamo anche vedere la modulazione in questo modo più affine al nostro caso:

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

Applico quanto detto al caso in esempio:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{2} \left[\text{sinc}\left(\left(f - \frac{1}{T}\right) \cdot \frac{T}{2}\right) + \text{sinc}\left(\left(f + \frac{1}{T}\right) \cdot \frac{T}{2}\right) \right]$$

Possiamo semplificare nel modo seguente:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = \frac{T}{4} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{fT}{2} - \frac{1}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{fT}{2} + \frac{1}{2}\right) \right]$$

Per semplicità sostituisco $\frac{fT}{2}$ con la variabile x_1 ed ottengo:

$$\frac{T}{4} \left[\operatorname{sinc}(x_1 - \frac{1}{2}) + \operatorname{sinc}(x_1 + \frac{1}{2}) \right]$$

Ricordando la scrittura della $\operatorname{sinc}(x_1)$ come $\frac{\sin(\pi x_1)}{\pi x_1}$ riscrivo quanto trovato sopra:

$$\frac{T}{4} \left[\frac{\sin(\pi(x_1 - \frac{1}{2}))}{x_1 - \frac{1}{2}} + \frac{\sin(\pi(x_1 + \frac{1}{2}))}{x_1 + \frac{1}{2}} \right]$$

Possiamo ora sviluppare ai numeratori usando la seguente formula di somma e differenza:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

Ponendo $\alpha = \pi x$ e $\beta = \pi/2$ otteniamo che:

$$\sin[\pi(x - \frac{1}{2})] = \sin(\pi x) \cos(\pi/2) - \cos(\pi x) \sin(\pi/2) = 0 - \cos(\pi x)$$

$$\sin[\pi(x + \frac{1}{2})] = \sin(\pi x) \cos(\pi/2) + \cos(\pi x) \sin(\pi/2) = 0 + \cos(\pi x)$$

Sostituendo ottengo che:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = \frac{T}{4\pi} \left[\frac{-\cos(\pi x)}{x_1 - \frac{1}{2}} + \frac{\cos(\pi x)}{x_1 + \frac{1}{2}} \right]$$

Fattorizzo $\cos(\pi x)$:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = \frac{T \cos(\pi x)}{4\pi} \left[\frac{-1}{x_1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{2}} \right]$$

Sommo ora le frazioni tra parentesi e moltiplico:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = \frac{T \cos(\pi x)}{4\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4} - x^2}$$

Semplificando la costante 4 e semplificando ottengo che:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = \frac{T \cos(\pi x)}{\pi(1 - 4\pi x^2)}$$

Ricordando la sostituzione fatta in precedenza otteniamo che $x - 1 = \frac{fT}{2}$:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = \frac{T \cos(\pi \frac{fT}{2})}{\pi(1 - 4\pi (\frac{fT}{2})^2)}$$

Effettuando i calcoli si ottiene il risultato finale pari a:

$$\mathcal{F}(R_x(\tau)) = S_x(f) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cos(\pi fT/2)}{1 - (fT)^2}$$

Possiamo notare come per alcuni valori la funzione assuma valori negativi in quanto il numeratore potrebbe assumere valori negativi ed anche il denominatore dato che il coseno ritorna valori compresi tra $[-1; +1]$. In definitiva possiamo dire che il segnale non rispetta l'ultima condizione in quanto la sua trasformata assume valori negativi per alcune frequenze.

26.6.2 Esercizio 2 - Spettro di energia e banda -10dB

Passiamo ora al secondo esercizio dove dato il segnale

$$x(t) = \frac{1}{K_1} \cdot e^{\left| \frac{t-t_0}{K_2} \right|}$$

si chiede di calcolare lo spettro di energia di $S_x(f)$. Viene inoltre chiesto di calcolare la banda a -10dB del segnale $x(t)$, definita come frequenza $B_{10\text{ dB}}$ tale per cui $S_x(B_{10\text{ dB}}) = \frac{1}{10} \cdot S_{x,\max}$ dove $S_{x,\max}$ è il massimo valore assunto da $S_x(f)$.

26.6.3 Esercizio 3 - Funzione di autocorrelazione e sistema LTI

26.6.4 Esercizio 4 - Potenza energia e relativi spettri di un sistema

26.6.5 Esercizio 5 - Segnale periodico filtrato da un sistema LTI

26.7 Esercitazione 7 - 4/11/2025

Con questa esercitazione andiamo a concludere la parte di corso relativa ai segnali analogici a tempo continuo avvicinandoci, seppur di poco, alla trattazione dei segnali numerici/digitali. In particolare all'interno della seguente esercitazione ci si focalizzerà su argomenti quali: la frequenza di Nyquist, filtraggio e campionamento di un segnale per concludere trattando problemi riguardanti la quantizzazione.

26.7.1 Esercizio 1 - Frequenza di Nyquist

Iniziamo con il primo esercizio dove con il termine frequenza di Nyquist si indica la minima frequenza di campionamento necessaria per la ricostruzione di un segnale analogico senza aliasing. Calcolare la frequenza di Nyquist f_N dei seguenti segnali analogici:

a) $x_a(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$

b) $x_b(t) = \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$

c) $x_c(t) = \left[\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t} \right]^2$

Iniziamo analizzando il segnale **a** ricordando la scrittura di un segnale sinusoidale è $x_i(t) = \sin(2\pi ft)$. In questo caso le frequenze dei due segnali sinusoidali saranno pari a 1000 e a 2000. Ora non ci basta altro che trasformare il segnale con Fourier, calcolarne la massima componente in frequenza ed ottenere la frequenza di Nyquist. Essendo sinusoidi - dunque periodiche nel tempo - otteniamo uno spettro discreto in frequenza. In particolare lo costante unitaria rappresenterà la componente continua con una delta centrata in zero. Le due sinusoidi trasformate saranno delle delta centrate in ± 1000 e ± 2000 . Dato che la frequenza massima del nostro segnale è $f_{\max} = 2000$ Hz otteniamo che:

$$f_N = f_{\max}$$

$$f_{s,\min} \geq 2 \cdot f_N \Rightarrow f_{s,\min} \geq 4000 \text{ Hz}$$

Ricordiamo che $f_{s,\min}$ indica la minima frequenza di campionamento (sampling) di un segnale al fine di non essere affetto da aliasing.

Passiamo ora al caso **b** dove analizzeremo il segnale $x_b(t)$.

Notiamo come il segnale $x_b(t)$ possa anche essere visto come una funzione $\text{sinc}(Bt)$ dove il valore di B è 4000π . In particolare ricordiamo la relazione seguente per effettuare la trasformata di Fourier:

$$\text{sinc}(Bt) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|B|} \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

Applicando la formula al segnale $x_b(t) = 4000 \cdot \text{sinc}(4000\pi t)$ si ottiene che:

$$X(f) = 4000 \cdot \frac{1}{|4000|} \cdot \text{rect}\left(\frac{1}{4000}\right) = \text{rect}\left(\frac{1}{4000}\right)$$

Come possiamo vedere abbiamo una porta di supporto 2000 Hz. Questo significa che come prima la f_{\max} è pari a 2000 Hz. In definitiva si ottiene che:

$$f_N = f_{\max}$$

$$f_{s,\min} \geq 2 \cdot f_N \Rightarrow f_{s,\min} \geq 4000 \text{ Hz}$$

Passiamo ora al caso **c**. Come abbiamo appena visto il segnale $x_c(t)$ è identico al segnale del caso **b** se non per il fatto che è elevato al quadrato. Sapendo che l'operazione di elevazione al quadrato corrisponde alla moltiplicazione del segnale per se stesso possiamo dedurre che la trasformata del segnale, dato dalla moltiplicazione di due segnali nel tempo, sarà ottenuta dalla convoluzione delle trasformate in frequenza. Dato che la trasformata di un segnale $\text{sinc}(t)$ è una porta la convoluzione delle due porte sarà data da uno spettro triangolare. In particolare dato che la porta ha supporto pari a 2000 Hz la loro convoluzione avrà un supporto pari alla somma dei supporti ovvero 4000 Hz che sarà pari al valore massimo ovvero f_{\max} .

Utilizzando la relazione vista prima otteniamo che:

$$f_N = f_{\max}$$

$$f_{s,\min} \geq 2 \cdot f_N \Rightarrow f_{s,\min} \geq 8000 \text{ Hz}$$

26.7.2 Esercizio 2 - Minima frequenza di campionamento

Andiamo ora ad affrontare il secondo esercizio dove considerato $x(t)$ un segnale reale e pari, con banda $B = 1$ kHz. Si costruisca il segnale $y(t) = 2x(t) \cos^2(2\pi f_x t)$, dove $f_x = 5$ kHz. Qual'è la minima frequenza di campionamento necessaria per campionare $y(t)$? Si supponga di campionare $y(t)$ con una frequenza di campionamento uguale a 8 kHz e di ricostruire un segnale analogico con la nota operazione di filtraggio, utilizzando un filtro ideale con funzione di trasferimento $H(f) = 1$, per $|f| < 4$ kHz e nulla altrove. Valutare il segnale ricostruito $z(t)$ in funzione del tempo, mettendone in evidenza la dipendenza da $x(t)$.

26.7.3 Esercizio 3 - Segnale campionato e filtrato

Passando ora al terzo esercizio dato il segnale

$$x(t) = 2f_0 \text{sinc}^2(f_0 t) \cdot \cos(6\pi f_0 t)$$

il quale viene campionato idealmente con passo di campionamento $T_c = \frac{1}{4f_0}$, e viene successivamente filtrato con un filtro passabasso ideale avente banda $[-2f_0; +2f_0]$. Calcolare l'espressione analitica del segnale in uscita dal filtro.

26.7.4 Esercizio 4 - Firts-Order Sampling FOS

In questo esercizio andiamo ora ad affrontare un problema legato al campionamento reale in quanto il segnale che useremo per campionare non sarà più dato da un treno di delta ideale ma da un segnale periodico triangolare.

In particolare dato il segnale $x(t)$, avente banda B_x , viene campionato ogni T_s secondi ed il seguente segnale:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \cdot \text{tri}(t - nT_s)$$

è generato dove:

$$\text{tri}\left(\frac{t}{T_s}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_s} & \text{per } |t| \leq T_s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo tipo di campionamento è detto *First-Oder Sampling* (FOS). Si richiede di:

- Trovare la trasformata di Fourier di $x_p(t)$.
- Sotto quali condizioni è possibile ricostruire il segnale analogico $x(t)$ a partire da $x_p(t)$?
- Trovare il filtro che consente la ricostruzione perfetta del segnale $x(t)$ a partire da $x_p(t)$.

Iniziamo la soluzione dell'esercizio andando come prima cosa a capire da che componenti è composto il nostro segnale $x_p(t)$. Come possiamo notare il segnale è composto da una prima parte $x(nT_s)$ moltiplicata per una funzione triangolare $\text{tri}(t - nT_s)$ che grazie alla sommatoria genera un segnale triangolare periodico di supporto $2T_s$. Possiamo ora per semplicità rinominare questa ultima parte come $q(t)$ in quanto ci tornerà utile per calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x_p(t)$.

Andiamo ora a calcolare la trasformata del segnale $x_p(t)$ come nella formula seguente. Ricordiamo che la trasformata di un segnale triangolare $\text{tri}(t)$ è una funzione $\text{sinc}^2(t)$.

$$\mathcal{F}(x_p(t)) = X_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_n Q(f) \cdot X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

Sostituendo la trasformata di $q(t)$ ottengo che:

$$X_p(f) = \frac{1}{T_s} \cdot T_s \text{sinc}^2(fT_s) \cdot X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

Semplificando ottengo infine che:

$$X_p(f) = \text{sinc}^2(fT_s) \cdot X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

Trovata ora la trasformata del segnale campionato possiamo andare a creare un grafico per capire la situazione in cui ci troviamo. Ricordiamo che stiamo trattando lo spettro del segnale $x_p(t)$ ovvero quello campionato dunque conoscendo solo la banda B_x del segnale originale andremo a disegnare delle "coppette" nello spettro di $x_p(t)$.

In particolare possiamo notare come lo spettro ottenuto sia composto da una "coppetta" con supporto $[-B_x; +B_x]$ centrata in zero con le sue relative repliche traslate di un periodo e centrate in tutti i valori pari a $\pm \frac{n}{T_s}$. Infine possiamo andare ad aggiungere al nostro grafico la funzione $\text{sinc}^2(fT_s)$ ovvero una funzione $\text{sinc}(t)$ che si annullerà, assumendo valore pari a zero, in ogni punto in cui è centrata una delle "coppette" replicate. Illustrando tutto con un grafico otteniamo il seguente risultato:

Possiamo infine, come illustrato nel grafico precedente, andare a moltiplicare le "coppette" per la funzione $\text{sinc}(t)$. Otterremo una funzione nulla al di fuori delle repliche mentre al loro interno otterremo due "gobbe" in quanto sono moltiplicate per una funzione, ovvero la $\text{sinc}(t)$ che va a zero in quel punto. Per quanto riguarda la parte di spettro centrata rispetto all'origine rimarrà leggermente attenuata in quanto moltiplicata per una funzione che assume valori minori di uno.

Compresa la situazione possiamo andare a rispondere alle ultime due domande. In particolare sappiamo che per poter ricostruire il segnale non dobbiamo avere sovrapposizione delle repliche dunque il lato sinistro della prima replica $\frac{1}{T_s} - B_x$ deve essere più grande del lato destro dello spettro centrale B_x . Si ottiene dunque che:

$$\frac{1}{T_s} - B_x \geq B_x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_s} \geq 2 \cdot B_x$$

Infine calcoliamo l'espressione del filtro ricostruttore per ricostruire il segnale di partenza in modo da ottenere $x(t)$ dal segnale campionato $x_p(t)$. Per ricostruire in modo perfetto il segnale $x(t)$ dal segnale campionato $x_p(t)$ dobbiamo andare a filtrare con un filtro passabasso lo spettro centrale del segnale campionato senza includere nessuna delle repliche. Notiamo come il problema dell'aliasing non si pone in quanto abbiamo supposto che le repliche siano opportunamente distanziate. Possiamo quindi considerare un filtro passabasso con supporto $[-\frac{1}{2T_s}; \frac{1}{2T_s}]$ che non sarà ideale, ovvero piatto, ma dovrà compensare, equalizzando opportunamente il segnale, per correggerlo dalla moltiplicazione con la funzione $\text{sinc}(t)$.

Otteniamo dunque questa espressione:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{\text{sinc}^2(f T_s)} & \text{per } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si riporta per completezza il grafico completo comprensivo di tutti i segnali sopra descritti.

26.7.5 Esercizio 5 - Trasformata e ricostruzione di un segnale campionato

Il segnale $x(t)$ avente banda B_x viene campionato alla frequenza di Nyquist di $1/T_s$. In seguito si genera il seguente segnale:

$$x_p(t) = (-1)^n x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

Si richiede di:

- Trovare la trasformata di Fourier di $x_p(t)$
- Dire se è possibile ricostruire $x(t)$ da $x_p(t)$, utilizzando un sistema LTI.

26.7.6 Esercizio 6 - Valore di un segnale campionato dopo un intervallo di tempo

Si consideri il segnale $s(t)$ di tipo passabasso con banda $B = 50\text{Hz}$; tale segnale viene campionato senza perdita alla minima frequenza di campionamento $f_{c,\min}$, dando luogo ad una serie di campioni:

$$s(nT_c) = \begin{cases} -1 & n = -2, -1 \\ 1 & n = +2, +1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede di determinare il valore del segnale nell'istante $t = 0.005\text{s}$.

26.7.7 Esercizio 7 - Campionamento e quantizzazione

Concludiamo con l'ultimo esercizio dove il segnale sinusoidale $x(t) = 2 \sin(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = 3\text{ kHz}$ viene campionato senza perdite e quantizzato usando un quantizzatore uniforme a 256 livelli, seguito da un codificatore alla cui uscita è presente un flusso di bit. Quale è la minima velocità $R_{b,\min}$ di generazione dei bit?

27 Esercitazioni - ENS

Affrontare ora tutte le esercitazioni della prima parte relativa alla teoria dei segnali (TS) andiamo ad affrontare le esercitazioni relative alla sezione di elaborazione numerica dei segnali (ENS).

27.1 Esercitazione 1 - 12/11/2025

Iniziamo ora andando ad affrontare la prima esercitazione della seconda parte di corso in cui andremo a risolvere esercizi riguardo la rappresentazione dei segnali a tempo discreto e la loro energia e potenza. In particolare ci saranno molto utili i grafici con cui rappresentare i segnali trattati.

Ci sarà inoltre utile verificare, attraverso l'utilizzo di MATLAB, il corretto svolgimento degli esercizi tanto quanto la possibilità di effettuare elaborazioni su segnali a tempo discreto i quali non limitano il proprio supporto a pochi punti.

Si ricorda che come al solito tutti i codici utilizzati saranno riportati all'interno di questa sezione.

27.1.1 Esercizio 1 - Rappresentazione grafica dei segnali

In questo primo esercizio dato il segnale a tempo discreto:

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & 0 \leq n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

Si chiede di rappresentare graficamente i seguenti segnali:

- a) $y[n] = x[n + 5]$
- b) $y[n] = x[-n + 5]$
- c) $y[n] = x[2n]$
- d) $y[n] = x[n + 10] + x[-n + 10] - 10\delta[n]$
- e) Scomporre $x[n]$ nella somma di un segnale pari e uno dispari e rappresentare graficamente i due segnali.

Cominciamo prima di tutto andando a rappresentare il segnale di partenza $x[n]$. Come possiamo vedere il segnale è nullo per valori negativi o maggiori di dieci. Possiamo dunque dedurre che il segnale abbia un supporto pari a 11, ottenuto contando il numero di valori per cui non è nullo ovvero tutti i punti tra zero e dieci includendo anche gli estremi.

Capito questo ci rimane molto semplice disegnare il segnale che sarà dato da una sequenza (questo il termine corretto per i segnali a tempo discreto) crescente di valori. In particolare in zero avrà valore nullo, in uno varrà uno, in due due e così via fino ad arrivare a dieci.

Riportiamo di seguito il grafico del segnale ottenuto in MATLAB:

Come al solito segue anche il codice utilizzato per la generazione del grafico appena visto:

```

1 n = [-15:15];
2 x = [zeros(1,15), 0:10, zeros(1,5)];
3 figure(1)
4 stem(n,x,'LineWidth',2)
5 xlabel('$n$', 'Interpreter', 'latex', 'Fontsize', 20)
6 ylabel('$x[n]$', 'Interpreter', 'latex', 'Fontsize', 20)
7 grid on
8 set(gca, 'fontsize', 30)

```

Capito come è fatto il segnale di partenza $x[n]$ possiamo ora analizzare il caso **a** che altro non è che una traslazione della nostra sequenza verso sinistra di fatto anticipandola. Al fine di evitare confusione per capire se una sequenza viene anticipata o ritardata, dunque traslata verso destra o sinistra, possiamo ragionare nel seguente modo. In questo caso prendiamo la scrittura del nostro nuovo segnale:

$$y[n] = x[n + 5]$$

Andiamo a sostituire un valore di n , per esempio lo zero, ed otteniamo che:

$$y[0] = x[0 + 5] = x[5]$$

Ovvero che il segnale traslato in zero, $y[0]$ dovrà valere quanto vale il segnale originale, $x[5]$ in cinque. Anche senza andare a calcolare un secondo punto possiamo vedere come il nostro segnale si sia "spostato indietro" ottenendo di fatto il segnale riportato di seguito:

Il codice ottenuto per generare il grafico è il seguente:

```

1 n = [-15:15];
2 y = [zeros(1,31)];
3
4 for k = -5:10
5     y(16 + k) = x(16 + k + 5);
6 end
7
8 stem(n,y,'LineWidth',2)
9 xlabel('$n$', 'Interpreter', 'latex', 'Fontsize', 20)
10 ylabel('$y[n]$', 'Interpreter', 'latex', 'Fontsize', 20)
11 grid on
12 set(gca, 'fontsize', 30)

```

Passiamo ora al punto **b** dove abbiamo lo stesso segnale di partenza che viene anticipato di cinque campioni effettuando però un rilbaltamento della sequenza in quanto la variabile n appare con il segno negativo. Di fatto per ottenere il grafico richiesto in questo punto possiamo andare a prendere il grafico già traslato del punto **a** e ribaltarlo ottenendo il risultato seguente:

Come di consueto segue anche il codice MATLAB per generare il grafico:

```

1 n = [-15:15];
2 y = [zeros(1,31)];
3
4 for k = -5:10
5     y(16 + k) = x(16 - k + 5);
6 end

```

```

7
8 stem(n,y,'LineWidth',2)
9 xlabel('$n$', 'Interpreter','latex','FontSize',20)
10 ylabel('$y[n]$', 'Interpreter','latex','FontSize',20)
11 grid on
12 set(gca,'fontsize',30)

```

Come possiamo notare il codice utilizzato è identico a quello precedente ma con una sola differenza ovvero quella di aver cambiato il segno della variabile k nella seconda parte della quinta riga.

Passando oltre raggiungiamo ora il caso **c** in cui possiamo notare come sia stata effettuata un'operazione di sottocampionamento. In altri termini, allo scorrere di n , stiamo solo selezionando i valori dei campioni pari del segnale di partenza $x[n]$. Dovessimo costruire il segnale $y[n]$ pezzo per pezzo possiamo fare come fatto in precedenza ed andare a sostituire:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[2n] \rightarrow y[0] = x[2 \cdot 0] = x[0] \\ y[n] &= x[2n] \rightarrow y[1] = x[2 \cdot 1] = x[2] \\ &\dots \\ y[n] &= x[2n] \rightarrow y[5] = x[2 \cdot 5] = x[10] \end{aligned}$$

Come possiamo vedere il supporto della sequenza risultante sarà dimezzato in quanto abbiamo sottocampionato la sequenza di partenza prendendo solo alcuni campioni. In particolare otteniamo in grafico seguente:

Come di consueto segue anche il codice MATLAB usato per generare il grafico:

```

1 n = [-15:15];
2 y = [zeros(1,31)];
3
4 for k = 0:5
5     y(16 + k) = x(16 + 2*k);
6 end
7
8 stem(n,y,'LineWidth',2)
9 xlabel('$n$', 'Interpreter','latex','FontSize',20)
10 ylabel('$y[n]$', 'Interpreter','latex','FontSize',20)
11 grid on
12 set(gca,'fontsize',30)

```

Proseguiamo ancora ad affrontiamo ora il punto **d** dove il nostro segnale è ora composto da tre parti distinte e sommate tra di loro. Come possiamo subito vedere, ricordando i casi **a** e **b**, le prime due componenti corrispondono rispettivamente ad una traslazione di dieci campioni del segnale $x[n]$ verso sinistra ed a un successivo ribaltamento.

Di seguito sono riportati, in pannelli separati, i grafici delle prime due sequenze:

Il codice utilizzato per ottenere i grafici appena visti è idenico a quello visto nei casi **a** e **b** dove invece di traslare di un numero di campioni pari a cinque di trasla di dieci. Ora che abbiamo visto come sono composte le prime due sequenze andiamo ad analizzare la terza. La

terza sequenza non è altro che una delta, centrata in zero, moltiplicata per una costante pari a dieci con l'effetto di amplificarla in ampiezza.

Compresa anche questa ultima parte possiamo andare a mettere tutto assieme ottenendo il seguente grafico:

Come al solito segue anche il codice MATLAB utilizzato:

```

1 n = [-15:15];
2 x = [zeros(1,15), 0:10, zeros(1,5)];
3
4 y_1 = [zeros(1,31)];
5 y_2 = [zeros(1,31)];
6 y_3 = [zeros(1,31)];
7
8 for k = -10:1
9     y_1(16 + k) = x(16 + k + 10);
10 end
11
12 for k = 0:10
13     y_2(16 + k) = x(16 - k + 10);
14 end
15
16 y_3(16) = 10;
17
18 hold on
19 stem(n,y_1,'LineWidth',2)
20 stem(n,y_2,'--','LineWidth',2)
21 stem(n,-y_3,'-.','LineWidth',2)
22 grid on
23 xlabel('$n$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 20)
24 ylabel('$y_4[n]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 20)

```

Volendo essere precisi notiamo che nell'origine le tre sequenze si sovrappongono, andiamo dunque a semplificare una delle due delta positive con quella negativa (è sottratta) ed otteniamo il seguente risultato:

Per ottenere tale risultato in MATLAB si è omessa la scrittura della delta e si è rimosso un campione di una delle due sequenze positive.

Concludiamo ora l'esercizio andando ad analizzare il punto **e**. Per riuscire a scomporre il segnale $x[n]$ in due segnali, uno pari e l'altro dispari, dobbiamo operare nel seguente modo. Prima di tutto i due segnali che indicheremo come $x_p[x]$ e $x_d[x]$ dovranno essere ottenuti tramite una qualche trasformazione di $x[n]$ moltiplicata per $\frac{1}{2}$ in quanto entrambi dovranno contribuire per metà alla creazione del segnale. In particolare possiamo ottenere il segnale pari andando a ribaltare $x[n]$ ottenendo:

$$x_p[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

Dato che per ora il segnale ottenuto non è nullo prima dello zero ed è solo pari alla metà dall'ampiezza desiderata dobbiamo andare a sommare ancora un pezzo di sequenza alla parte positiva togliendo la sequenza negativa per ottenere il segnale $x[n]$, si ottiene che:

$$x_d[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

Seguono i grafici dei due segnali appena descritti:

Infine come nostro solito riportiamo il codice MATLAB utilizzato per generare i grafici riportati sopra

27.1.2 Esercizio 2 - Convoluzione di segnali a tempo discreto

Si considerino le seguenti sequenze e si calcoli la convoluzione lineare discreta:

- $x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n - 1] + \delta[n - 2]$
- $x_2[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n - 1] + \delta[n - 2]$

Verificare il risultato ottenuto attraverso un codice MATLAB utilizzando la funzione `conv(a,b)` implementata all'interno dell'ambiente di sviluppo.

Prima di cominciare con i calcoli andiamo a rappresentare graficamente queste due sequenze. Come possibile intuire si ottengono i seguenti grafici:

Segue anche il codice MATLAB utilizzato per crearli.

Adesso che abbiamo i due operandi possiamo andare a scrivere l'operazione di convoluzione seguendo la definizione, si ottiene che:

$$z[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n - k]$$

Come possiamo vedere la convoluzione tra queste due sequenze risulta essere il prodotto tra la prima sequenza $x_1[n]$ e la seconda ribaltata e traslata ovvero $x_2[n - k]$. Adesso possiamo procedere in due modi diversi: facendo il prodotto attraverso operazioni grafiche oppure attraverso il calcolo vettoriale.

Per semplicità svolgeremo il calcolo con la notazione vettoriale e riporteremo solo uno schema dello svolgimento grafico. Ricordiamo che l'algoritmo che viene eseguito è lo stesso e che non cambia assolutamente nulla tra un metodo e l'altro. In particolare il metodo vettoriale risulta più comodo e veloce ma forse meno intuitivo.

Prima di tutto andiamo a scrivere i nostri vettori di partenza. Come sappiamo, dovendo far scorrere un vettore lungo l'altro, abbiamo bisogno di inserire degli zeri ai lati dei nostri vettori che facciamo scorrere per evitare che siano troppo corti. Nel nostro caso essendo entrambi i vettori di lunghezza tre, e volendo rappresentare come primo ed ultimo scenario il caso in cui si ha una sola sovrapposizione, dobbiamo andare ad aggiungere, ad ogni lato, un numero pari di zeri alla lunghezza del vettore più corto togliendo uno. Il secondo vettore si ottiene aggiungendo un numero di zeri opportuno. Ricordiamo che questo ragionamento vale quando a scorrere è il vettore di lunghezza minore. Fatti i passaggi appena elencati otteniamo dunque che:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_2[n] &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Adesso non ci basta altro che moltiplicare i due vettori e sommare le singole componenti. Seguono ora tutti i casi andando ad esplicitare la definizione di convoluzione sottolineando i numeri che si sovrappongono. Ricordando che il prodotto per zero è nullo i valori che si sovrappongono con degli zeri vengono ignorati.

$$x_1[k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2[0 - k] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \underline{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2[1 - k] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \underline{2} & \underline{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2[2 - k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2[3 - k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \underline{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2[4 - k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Andiamo ora a fare le moltiplicazioni tra i termini in sovrapposizione:

$$z[0] = \sum_k^{\infty} = x_1[k] \cdot x_2[0 - k] = 3 \cdot 1 = 3$$

$$z[1] = \sum_k^{\infty} = x_1[k] \cdot x_2[1 - k] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$

$$z[2] = \sum_k^{\infty} = x_1[k] \cdot x_2[2 - k] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8$$

$$z[3] = \sum_k^{\infty} = x_1[k] \cdot x_2[3 - k] = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$z[4] = \sum_k^{\infty} = x_1[k] \cdot x_2[4 - k] = 1 \cdot 1 = 1$$

Ottenuti ora i valori del vettore $z[n]$ abbiamo che:

$$z[n] = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo anche riscrivere la sequenza ottenuta così:

$$z[n] = x_1[n] * x_2[n] = 3\delta[n] + 8\delta[n - 1] + 8\delta[n - 2] + 4\delta[n - 3] + \delta[n - 4]$$

Verifichiamo ora il risultato ottenuto attraverso MATLAB. Per verificare il risultato andiamo ad utilizzare il seguente codice:

Il risultato che otteniamo è identico a quello calcolato in precedenza il che conferma l'esattezza del calcolo. Infine possiamo andare ad eseguire un plot della sequenza $z[n]$ ottenendo il seguente risultato:

Infine riportiamo uno schema che riassume quanto appena fatto ma operando graficamente:

27.1.3 Esercizio 3 - Determinazione e calcolo di potenza ed energia finite

Passiamo ora all'esercizio successivo dove ci è chiesto di determinare se le seguenti sequenze sono a energia finita o a potenza finita e calcolarne energia e potenza.

a) $x[n] = \begin{cases} e^{-n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

b) $x[n] = A$

c) $x[n] = Ae^{-j2\pi \frac{n}{N}}$

d) $x[n] = \begin{cases} A & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

e) $x[n] = \begin{cases} A & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

27.1.4 Esercizio 4 - Sistema di riconoscimento vocale

27.1.5 Esercizio 5 - Periodo di un segnale a tempo discreto

27.2 Esercitazione 2 - 19/11/2025

In questa seconda esercitazione si continueranno ad affrontare problemi riguardo l'elaborazione di segnali discreti. In particolare all'interno di questa esercitazione ci concentreremo sulle operazioni di convoluzione lineare, DTFT di un segnale, FFT di un segnale e DTF di un segnale andando ad analizzarne i particolari.

27.2.1 Esercizio 1 - DTFT di un segnale

Si calcoli la DTFT del segnale:

$$x[n] = u[n] - u[n - 10] + n \cdot e^{-n} u[n]$$

Cominciamo con la risoluzione dell'esercizio andando, come prima cosa, a disegnare il segnale $x[n]$ formato da tre parti che tratteremo in modo separato in quanto vale la proprietà di linearità. In particolare i tre pezzi che compongono $x[n]$ sono un gradino $u[n]$, un gradino ritardato di dieci campioni ed infine una sequenza esponenziale decrescente non nulla solo per valori positivi e moltiplicata a sua volta per un valore n . La differenza delle prime due sequenze genera, come abbiamo già visto, una porta definita tra l'origine ed $n = 9$.

Possiamo ora, per linearità, andare a trasformare i singoli pezzi per poi ricomporli più tardi. In particolare denominando con $x_1[n]$ la porta definita dalla prime due sequenze e $x_2[n]$ la restante parte otteniamo che:

$$X_1(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

Posso riscrivere l'espressione appena vista come:

$$\sum_{n=0}^9 e^{-j2\pi n f} = \frac{1 - e^{-j2\pi f \cdot 10}}{1 - e^{-j2\pi f}}$$

Arrivati a questo punto possiamo trasformare il secondo pezzo denominato $x_2[n]$. In particolare scrivendo $x_2[n]$ come:

$$x_2[n] = n \cdot z[n] \quad \text{con} \quad z[n] = e^{-n} \cdot u[n]$$

Possiamo ottenere il risultato appena visto in quanto a lezione

Passando alla seconda parte, ovvero $x_2[n]$, possiamo andare ad applicare la proprietà della derivazione in frequenza secondo la seguente formula dove:

$$n \cdot x[n] \rightarrow \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} X(e^{j2\pi f})$$

Possiamo quindi calcolare la trasformata del termine $e^{-n} \cdot u[n]$ parte ottenendo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n} \cdot u[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

Sapendo che moltiplico il tutto per un gradino unitario limito la mia sommatoria ad indici positivi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cdot e^{-j2\pi f n}$$

utilizzando le proprietà degli esponenti ottengo che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cdot e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n \cdot (2j\pi f + 1)}$$

In definitiva arriviamo al risultato seguente attraverso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n \cdot (2j\pi f + 1)} = \frac{1}{1 - e^{-(2j\pi f + 1)}}$$

Ora scomponendo l'esponenziale al denominatore ed applicando la proprietà sopracitata si ottiene che:

$$\frac{j}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} X(e^{j2\pi f}) = \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} \frac{1}{1 - e^{-1}e^{-2j\pi f}}$$

Ora non ci basta che calcolare la derivata come indicato di seguito, utilizzando le opportune tecniche di derivazione, in questo caso si utilizza la regola di derivazione di un rapporto.

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Segue lo svolgimento del calcolo:

$$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} \frac{1}{1 - e^{-1}e^{-2j\pi f}} = \frac{j}{2\pi} \frac{e^{-1} \cdot e^{-j2\pi f} \cdot (-j2\pi)}{(1 - e^{-1}e^{-2j\pi f})^2}$$

A questo punto il denominatore resta invariato, se non per la semplificazione di 2π con il numeratore, mentre al numeratore avviene la semplificazione di $-j \cdot j$ ad 1. Otteniamo in definitiva il seguente risultato:

$$\frac{e^{-1} \cdot e^{-j2\pi f}}{(1 - e^{-1}e^{-2j\pi f})^2}$$

Arrivati a questo risultato il risultato atteso, ovvero la trasformata di $x[n]$, è stato raggiunto concludendo di fatto l'esercizio.

27.2.2 Esercizio 2 - Costruzione di una sequenza e calcolo DTFT

Si consideri una sequenza $x[n]$ con DTFT pari a $X(e^{j2\pi f})$. Si costruisca una sequenza $y[n]$ a partire da $x[n]$ con la regola:

$$y[2n] = x[n]$$

$$y[2n+1] = -x[n]$$

Si calcoli ora la DTFT di $y[n]$.

Iniziamo la risoluzione dell'esercizio notando come la regola descritta sopra opera su una sequenza qualsiasi $x[n]$ ritornando il valore assunto della sequenza nel caso in cui il campione sia pari mentre il valore cambiato di segno nel caso in cui il campione sia dispari. Compresa ora come opera la nostra regola possiamo andare avanti considerando la generica sequenza $x[n]$ come la sommatoria di due sequenze, una a termini pari ed una a termini dispari, separate tra di loro.

Otteniamo dunque che la DTFT della sequenza $y[t]$ è:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j2\pi fn}$$

Scrivendo la sequenza $y[t]$ come combinazione di due sommatorie, una pari l'altra dispari, di $x[t]$ ottengo che:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=\text{pari}}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j2\pi fn} + \sum_{n=\text{dispari}}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j2\pi fn}$$

Esplicitiamo ora la dicitura pari e dispari andando a riscrivere le sommatorie in modo opportuno utilizzando sempre la variabile n . Ottengo che:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[2n] \cdot e^{-j2\pi f2n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[2n+1] \cdot e^{-j2\pi f(2n+1)}$$

Arrivati a questo punto possiamo andare a sostituire le sequenze $y[2n]$ e $y[2n+1]$ con $x[n]$ e $-x[n]$, ottenendo che:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f2n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f(2n+1)}$$

Possiamo a questo punto unire tutto sotto un'unico simbolo di sommatoria e distribuendo l'argomento del secondo esponenziale, ottenendo che:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot (e^{-j2\pi f2n} - e^{-j2\pi f2n} \cdot e^{-j2\pi f})$$

Effettuo ora un raccoglimento:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f2n} (1 - e^{-j2\pi f})$$

Arrivati a questo punto notiamo come

27.2.3 Esercizio 3 - Analisi FFT su un segnale limitato nel tempo

Un segnale praticamente limitato nel tempo per $0 \leq t \leq T_1$ con $T_1 = 1$ s e limitato in banda per $|f| \leq B_x$ con $B_x = 32$ Hz viene campionato alla frequenza di Nyquist $\frac{1}{T_0} = 2B_x$.

I campioni $x_n = x(nT_0)$, dove T_0 è il periodo di campionamento, vengono usati per valutare numericamente lo spettro del segnale mediante una FFT a radice due. Si richiede una risoluzione in frequenza $\Delta f = 0.5$ Hz. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

- 1) Per conseguire la risoluzione in frequenza richiesta è necessario elaborare almeno $N = 128$ campioni e può essere necessario estendere il segnale nel tempo con campioni nulli.
- 2) Non è possibile in alcun modo conseguire la risoluzione in frequenza richiesta.
- 3) Non è possibile conseguire la risoluzione in frequenza richiesta se non campionando il segnale ad una frequenza superiore alla frequenza di Nyqvist.
- 4) Nessuna delle altre risposte è corretta.

27.2.4 Esercizio 4 - Sequenza campionata e DFT

Si consideri la sequenza $x[n]$ di $N = 10$ campioni che vale 1 per $n = 0, 2, 8$ e zero altrove. Si calcoli $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$.

Iniziamo con la risoluzione dell'esercizio andando a rappresentare la sequenza data in analisi. Segue il grafico della sequenza:

Come nostro solito riportiamo anche il codice MATLAB utilizzato per generarla:

Arrivati a questo punto possiamo andare a calcolare la DFT della sequenza secondo la formula seguente:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^9 x[n] \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{10}}$$

In particolare notiamo come $x[n]$ assuma valori non nulli solo in tre punti (0,2,8) potendo dunque esplicitare i singoli valori della sommatoria nel modo seguente:

$$\begin{aligned} n = 0 &\rightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi 0 \frac{k}{10}} = 1 \cdot 1 = 1 \\ n = 2 &\rightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{2k}{10}} \\ n = 8 &\rightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{8k}{10}} \end{aligned}$$

Sommando i termini ottengo che:

$$X[k] = 1 + e^{-j2\pi \frac{2k}{10}} + e^{-j2\pi \frac{8k}{10}}$$

Ora possiamo sommare o sottrarre un valore di k intero all'ultimo esponenziale per ottenere un'argomento pari a quello di quello precedente in modulo ma non in segno. Ottengo che:

$$X[k] = 1 + e^{-j2\pi \frac{2k}{10}} + e^{-j2\pi \frac{8k}{10} - \frac{10k}{10}} = 1 + e^{-j2\pi \frac{2k}{10}} + e^{j2\pi \frac{2k}{10}}$$

A questo punto, utilizzando la notazione dei numeri complessi, riscrivere $X[k]$ come:

$$X[k] = 1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi k}{10}\right)$$

In particolare notiamo come il segnale ottenuto sia una sinusode traslata di 1 verso l'alto. Segue un grafico di $X[k]$ con evidenziati i 10 campioni ottenuti sostituendo a k un valore dell'intervallo $[0, 9]$.

Segue anche il codice MATLAB utilizzato per generarlo:

27.2.5 Esercizio 5 - Spettro e campionamento di un segnale attraverso FFT

Si consideri un segnale $x(t)$ il cui spettro $X(f)$ è nullo per $|f| > f_x$, con $f_x = 10$ Hz. Si costruisca il segnale $y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_y t)$ con $f_y = 50$ Hz. Si vuole valutare lo spettro $Y(f)$ a partire da opportuni campioni di $y(t)$, usando una FFT a radice 2. Volendo ottenere una risoluzione in frequenza di 3 Hz, si valuti il passo di campionamento da scegliere per $y(t)$, il numero di campioni N e la risoluzione finale ottenuta.

Iniziamo a risolvere questo esercizio andando a considerare un segnale analogico $x(t)$ generico in modo tale da avere qualcosa su cui poter visualizzare le operazioni che faremo. Inoltre sapendo che lo spettro di tale è finito andiamo a rappresentare la sua porzione di banda avente un supporto pari all'intervallo $(-f_x; f_x)$ ovvero tra -10 e 10 Hz. Segue il grafico della regione di banda del segnale.

Ora possiamo andare a costruire il segnale $y(t)$ come indicato dal testo del problema. In particolare dato un generico $x(t)$ e sfruttando la modulazione si ottiene che:

$$Y(f) = \frac{1}{2} \left[X(f - f_y) + X(f + f_y) \right]$$

Quindi, come ormai dovremmo sapere, lo spettro di $x(t)$ viene traslato attorno a $\pm f_y$ e dimezzato in ampiezza. Se prima aveva un'ampiezza arbitraria pari ad A ora le due repliche traslate hanno ampiezza $\frac{A}{2}$.

Iniziamo ora analizzando il primo punto dove ci viene chiesto di valutare passo di campionamento del segnale $y(t)$ appena generato. Come ci viene detto se $\Delta f \leq 3$ Hz si avrà che:

$$\Delta f = \frac{1}{T} \leq 3 \text{ Hz} \rightarrow T \geq \frac{1}{3} \text{ s}$$

Si ottiene dunque che il passo di campionamento usato deve essere pari a circa 0.33 s

Procediamo oltre trovando la massima componente in frequenza pari a $f_{max} = f_y + f_x$ con la quale possiamo andare a calcolare, secondo Nyquist, la frequenza di campionamento opportuna al fine di evitare aliasing. In particolare otteniamo che:

$$f_s \geq 2 \cdot f_{max} \rightarrow f_s = 2 \cdot (f_y + f_x) = 2 \cdot (50 + 10) = 120 \text{ Hz}$$

Ora non ci basta che calcolare il numero di punti, ovvero campioni, necessari affinché siano sufficienti per una corretta analisi. In particolare sapendo che la risoluzione di una FFT è:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

Possiamo ora calcolare il numero di punti necessari al fine di ottenere una risoluzione minore di $\delta f = 3$ Hz. In particolare si ha che:

$$N \geq \frac{f_s}{\Delta f} \rightarrow N \geq \frac{120 \text{ Hz}}{3 \text{ Hz}} \rightarrow N \geq 40$$

Ricordiamo ora che il testo richiedeva l'utilizzo di una FFT a radice 2 il che comporta l'utilizzo di un numero di campioni pari ad una potenza di due. Arrotondiamo quindi il risultato ottenuto alla potenza di due più vicina. Ricordiamo che la potenza di due più vicina deve essere maggiore del valore di N trovato; nel caso in cui non lo sia non staremo più rispettando i parametri di risoluzione richiesti. In definitiva andiamo a considerare $N = 64$.

Infine calcoliamo la corrispettiva risoluzione in frequenza pari a:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{120 \text{ Hz}}{64} = 1.875 \text{ Hz}$$

27.2.6 Esercizio 6 - Costruzione di una sequenza e DFT

A partire dal segnale analogico $x(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ (con A_1 e A_2 costanti positive) si costruisce la sequenza $x[n] = x(nT_c)$ con $T_c = 1/(2f_0)$. Si considerino $N = 10$ campioni di $x[n]$ nell'intervallo $0 \leq n \leq 9$ e la sequenza $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa:

- 1) La sequenza campionata vale $x[n] = A_1 e^{j\pi n}$
- 2) $X[k] = 0$ per $0 \leq k \leq 5$
- 3) $X[k] = 0$ per $0 \leq k < 5$
- 4) $X[k] = 10 \cdot A_1$ per $k = 5$

Andiamo ora a ad analizzare il problema e tentare una soluzione. Come prima andiamo ad analizzare il nostro segnale analogico $x(t)$. Il segnale dato in esame è composto dalla somma di due sinusoidi, aventi stessa frequenza, moltiplicate per due costanti che ne modificano l'ampiezza. Ora che abbiamo capito come è composto il nostro segnale dobbiamo andare ad ottenere la sequenza $x[n]$ tramite un campionamento dove consideriamo i primi 10 campioni. In particolare esplicitando l'operazione di campionamento si ottiene:

$$x[n] = x(nT_c) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_0 n T_c) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_0 n T_c)$$

Sapendo che il valore di T_c è pari a $\frac{1}{2f_0}$ andiamo a sostituire tale valore nell'espressione appena trovata:

$$x[n] = x(nT_c) = x\left(\frac{n}{2f_0}\right) = A_1 \cdot \cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{2f_0}\right) + A_2 \cdot \sin\left(2\pi f_0 \frac{n}{2f_0}\right)$$

Andiamo ora a semplificare, ottenendo:

$$x[n] = A_1 \cdot \cos(\pi n) + A_2 \cdot \sin(\pi n)$$

A questo punto essendo n un numero intero possiamo riscrivere il coseno ed il seno nel modo seguente in quanto il coseno di $n\pi$ è sempre pari a -1 o +1 mentre il seno è sempre nullo. Otteniamo dunque:

$$x[n] = A_1 \cdot (-1)^n$$

Ci è infine possibile riscrivere $x[n]$ utilizzando un'esponenziale complesso, otteniamo infine che:

$$x[n] = A_1 \cdot e^{j\pi n}$$

Arrivati a questo punto possiamo dire che l'opzione **1)** risulta essere corretta motivo per cui dobbiamo controllare quelle successive. Come possiamo vedere le restanti tre opzioni fanno riferimento a $X[k]$ che altro non è che la DTF di $x[n]$ motivo per cui ora la calcoleremo. Seguono i passaggi effettuati:

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} \quad \text{con} \quad x[n] = A_1 \cdot e^{j\pi n}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^9 x[n] \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}$$

Sostituisco i valori di N e di $x[n]$, ottengo che:

$$X[k] = \sum_{n=0}^9 A_1 \cdot e^{j\pi n} \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{10}}$$

Porto ora fuori la costante A_1 e raccolgo n all'esponente:

$$X[k] = A_1 \cdot \sum_{n=0}^9 (e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{10}})^n$$

A questo punto possiamo verificare il punto **4)** in quanto, essendo una sommatoria, basta che il valore elevato ad n sia pari ad 1 per il valore di $k = 5$ così da ottenere una sommatoria di 10 volte uno. Segue la verifica di quanto appena detto:

$$e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{10}} = 1 \quad \text{con} \quad k = 5$$

$$e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{5}{10}} = e^{j\pi} \cdot e^{-j\pi}$$

Entrambi gli esponenziali complessi sono pari ad uno per l'identità di Eulero. Si verifica quindi quanto detto prima.

Arrivati a questo punto dobbiamo solo verificare i valori assunti al variare di k . In particolare, come fatto anche in precedenza, possiamo riscrivere la sommatoria utilizzando la serie geometrica troncata di cui riportiamo la formula:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1 - r^N}{1 - r}$$

Sostituendo r con $e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{10}}$ ed N con 10 ottengo che:

$$A_1 \cdot \sum_{n=0}^9 (e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{10}})^n = A_1 \cdot \frac{1 - (e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{10}})^{10}}{1 - e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{10}}}$$

A questo punto possiamo verificare le opzioni rimanenti semplicemente andando a variare il valore di k . Iniziamo cercando di capire quale delle due opzioni rimanente è vera.

Possiamo riscrivere la sommatoria nel modo seguente:

$$A_1 \cdot \sum_{n=0}^9 (e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{10}})^n = A_1 \cdot \sum_{n=0}^9 e^{j2\pi n(\frac{1}{2} - \frac{k}{10})}$$

Sapendo che la ragione della sommatoria è $r = e^{j2\pi n(\frac{1}{2} - \frac{k}{10})}$ ci troviamo nei due casi seguenti.

Nel caso in cui $r \neq 1$ ottengo il risultato seguente:

$$X_n = A_1 \cdot \sum_{n=0}^9 r^n = A_1 \cdot \frac{1 - r^{10}}{1 - r}$$

Essendo r^{10} pari a $e^{j2 \cdot 10\pi n(\frac{1}{2} - \frac{k}{10})}$ ovvero pari a $e^{j2\pi(5-k)}$ dato che $5 - k$ risulta essere intero la sommatoria assume sempre un valore nullo in quanto al numeratore compare il valore 1 - 1. Nel caso in cui $r = 1$ tutti i termini della sommatoria sono 1 ed otteniamo un valore pari a 10. In particolare l'uguaglianza $r = 1$ si verifica quando $\frac{1}{2} - \frac{k}{10}$ è un numero relativo in quanto porta l'esponenziale complesso, scrivibile come somma di funzioni trigonometriche, ad un valore nullo. La condizione citata sopra è soddisfatta per tutti i valori di k pari a $5 + m10$ dove m assume un qualsiasi valore relativo.

In alternativa al calcolo appena fatto si poteva ragionare nel modo seguente. Sapendo dall'opzione 4) che $x[k]$ assumeva un valore non nullo, in quanto A_1 è positiva per definizione si poteva dedurre che l'opzione 2) fosse falsa in quanto in contraddizione sul valore assunto a $k = 5$.

27.3 Esercitazione 3 - 27/11/2025

27.3.1 Esercizio 1 - Trasformata zeta razionale

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- 1) Per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo.
- 2) Per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo.
- 3) Per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo.
- 4) Per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo.

27.3.2 Esercizio 2 - Trasformata zeta e regione di convergenza

Calcolare la trasformata zeta e la regione di convergenza dei seguenti segnali discreti:

$$1) \ x[n] = \alpha^{|n|}$$

$$2) \ x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$3) \ x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N \\ 2N-n & N+1 \leq n \leq 2N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

27.3.3 Esercizio 3 - Calcolo della trasformata zeta I

Calcolare la trasformata zeta delle sequenze calcolando gli zeri ed i poli per ognuna di esse:

- 1) $x[n] = \alpha^n \cdot u[n]$
- 2) $x[n] = \sin[\omega_0 n] \cdot u[n]$
- 3) $x[n] = \cos[\omega_0 n] \cdot u[n]$
- 4) $x[n] = \alpha^n \cdot \cos[\omega_0 n] \cdot u[n]$
- 5) $x[n] = n\alpha^n \cdot u[n]$
- 6) $x[n] = n^2\alpha^n \cdot u[n]$

27.3.4 Esercizio 4 - Calcolo della trasformata zeta II

Sia data la sequenza $x[n] = (-a) \cdot n \cdot u[n]$ con $u[n]$ la sequenza gradino unitario e $a = 0.5$. La trasformata z di $x[n]$, $X(z)$:

- a) Non ha poli
- b) Non ha zeri e ha due poli semplici reali in $z = \pm 0.5$
- c) Ha uno zero nell'origine, uno zero reale in $z = -0.5$ e due poli complessi coniugati in $z = \pm j0.5$
- d) Ha uno zero nell'origine e due poli complessi coniugati in $z = \pm j0.5$
- e) Ha uno zero nell'origine e un polo reale semplice in $z = -0.5$

27.3.5 Esercizio 5 - Calcolo della trasformata zeta e regione di convergenza

Calcolare la trasformata zeta e la regione di convergenza dei seguenti segnali discreti:

$$1) \quad x[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] \cdot u[n - 10]$$

$$2) \quad x[n] = \begin{cases} 1 & -10 \leq n \leq 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

27.3.6 Esercizio 6 - Calcolo sequenza casuale associata alla trasformata zeta

Determinare le sequenze casuali associate alle seguenti trasformate zeta:

$$1) \quad X_a(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$2) \quad X_b(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

$$3) \quad X_c(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

27.3.7 Esercizio 7 - Calcolo sequenza corrispondente alla trasformata zeta

Calcolare la sequenza corrispondente alle seguenti trasformate zeta:

$$1) \quad X(z) = (1 + 2z) \cdot (1 + 3z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})$$

$$2) \quad X(z) = \frac{3z}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{4})} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$3) \quad X(z) = \frac{2z^3 + z^2}{(z + 3)(z - 1)} \quad |z| > 3$$

27.4 Esercitazione 4 - 4/12/2025

27.4.1 Esercizio 1 - Risposta all'impulso del filtro numerico

Calcolare la risposta all'impulso del filtro numerico specificato dalla seguente equazione ricorsiva:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{3}{2} \cdot y[n-1]$$

Iniziamo la risoluzione di questo esercizio andando a disegnare il circuito che implementa il filtro numerico rappresentato sopra. Come possiamo vedere l'uscita del filtro è composta dalla sommatoria dello stesso segnale in ingresso da una sua copia ritardata di un campione e da una reazione amplificata del campione precedente. Ottenute queste informazioni possiamo rappresentare il circuito equivalente del filtro numerico come di seguito in figura:

Fatto ciò possiamo andare a calcolare la risposta all'impulso del filtro numerico in due modi diversi: come prodotto di convoluzione oppure attraverso la trasformata Z. Di seguito andremo ad usare entrambi i modi.

Iniziamo ora andando ad usare la trasformata Z. Come prima cosa andiamo a fare la trasformata del filtro, ottenendo che:

$$Z\{y[n]\} = Y(z) = X(z) - X(z) \cdot z^{-1} + \frac{3}{2}Y(z) \cdot z^{-1}$$

Arrivati a questo punto possiamo andare a portare tutti i termini $Y(z)$ al primo membro effettuando un raccoglimento, si ottiene che:

$$Y(z)\left[1 - \frac{3}{2} \cdot z^{-1}\right] = X(z)\left[1 - z^{-1}\right]$$

Ricordando ora che:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Si ottiene che:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{3}{2} \cdot z^{-1}}$$

Separo il risultato ottenuto in due frazioni sottratte tra di loro nel modo seguente:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{3}{2} \cdot z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \cdot z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1 - \frac{3}{2} \cdot z^{-1}}$$

Arrivati a questo punto possiamo andare ad antitrasformare il risultato ottenuto per avere la risposta all'impulso $h(n)$. Come possiamo vedere, le frazioni ottenute sopra, sono simili tra loro a differenza di un termine z^{-1} il quale introdurrà un ritardo di un campione. A questo punto utilizzando la seguente relazione, disponibile sulle tavole andiamo ad antitrasformare:

$$\frac{1}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} = \alpha^n \cdot u[n]$$

Otteniamo che:

$$\frac{1}{1 - \frac{3}{2} \cdot z^{-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot u[n]$$

Mentre che:

$$\frac{z^{-1}}{1 - \frac{3}{2} \cdot z^{-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

Otteniamo infine che:

$$h(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot u[n] - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

Possiamo inoltre riscrivere la soluzione ottenuta in funzione di $[n-1]$ andando a interpretare $u[n]$ nel seguente modo:

$$u[n] = \delta[n] + u[n-1]$$

Si ottiene che:

$$h(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot [\delta[n] + u[n-1]] - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

Riscrivo la prima potenza in termini di $[n-1]$:

$$h(n) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot [\delta[n] + u[n-1]] - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

Esplicito i prodotti:

$$h(n) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \delta[n] + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1] - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

A questo punto posso andare a semplificare il primo termine in quanto $\delta[n]$ è non nulla solo in $n = 0$. Quando la condizione di verifica le die frazioni si elidono lasciandoci la sola delta. Otteniamo che:

$$h(n) = \delta[n] + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1] - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

Effettuo il raccoglimento al termine rimanente, ottengo che:

$$h(n) = \delta[n] + \left(\frac{3}{2} - 1\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

Semplificando e svolgendo i calcoli ottengo che:

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

Ottenuto questo risultato andiamo ora ad effettuare il procedimento operando nel dominio del tempo discreto.

Come prima cosa ricordiamo che la risposta all'impulso altro non è che il segnale prodotto in uscita da un sistema, in questo caso il filtro, quando viene posta un'impulso al suo ingresso. Inoltre poniamo come ipotesi che

Detto ciò e fatte le opportune premesse andiamo a sostituire $x[n]$ con la sequenza desiderata ovvero $\delta[n]$. Ricordiamo inoltre che la reazione si trasforma anch'essa contribuendo a sua volta come risposta all'impulso.

Otteniamo dunque che:

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \frac{3}{2} \cdot h[n-1]$$

Andiamo ora a calcolare la risposta all'impulso in modo ricorsivo come di seguito:

$$\begin{aligned} h[0] &= \delta[0] - \delta[-1] + \frac{3}{2} \cdot h[-1] = 1 - 0 + 0 = 1 \\ h[1] &= \delta[1] - \delta[0] + \frac{3}{2} \cdot h[0] = 0 - 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ h[2] &= \delta[2] - \delta[1] + \frac{3}{2} \cdot h[1] = 0 - 0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ h[3] &= \delta[3] - \delta[2] + \frac{3}{2} \cdot h[2] = 0 - 0 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dopo alcuni passaggi possiamo notare che con il proseguire dei passi il risultato risulta essere pari a:

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

In particolare la sequenza $\delta[n]$ ha il solo scopo di portare il risultato ad uno con $n = 0$. Dobbiamo ora fare una sola ultima aggiunta in quanto nelle premesse avevamo ipotizzato che la risposta all'impulso fosse nulla per ogni campione $n < 0$. In altri termini abbiamo ipotizzato che il sistema fosse scarico. Per risolvere questo problema andiamo a moltiplicare quanto ottenuto per una sequenza gradino ritardata di un solo campione.

Si ottiene che:

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

Arrivati a questo punto notiamo come il risultato ottenuto ora sia analogo a quello ottenuto in precedenza dimostrando la validità di entrambi i processi.

27.4.2 Esercizio 2 - Analisi filtro FIR I

Dato il filtro FIR:

$$y[n] = x[n] - x[n-4]$$

- 1) Calcolare e disegnare il modulo e la fase della funzione di trasferimento $H(f) = H(e^{2j\pi f})$

2) Calcolare la sequenza in uscita dal filtro quando in ingresso abbiamo la sequenza:

$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]$$

3) Giustificare il risultato di **2)** utilizzando il risultato di **1)**

Iniziamo la risoluzione di questo esercizio andando a disegnare il circuito equivalente del filtro. Riportiamo di seguito il risultato ottenuto.

A questo punto possiamo andare a calcolare la funzione di trasferimento utilizzando la relazione vista in precedenza:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Dove $Y(z)$ è la trasformata Z del filtro che è pari a:

$$Z\{x[n]\} = Y(z) = X(z) = X(z) \cdot z^{-4}$$

Otteniamo in modo immediato che:

$$H(z) = 1 - z^{-4}$$

A questo punto non ci rimane che andare a calcolare la funzione di trasferimento alla frequenza richiesta:

$$H(f) = H(e^{j2\pi f}) = 1 - z^{-4}|_{e^{j2\pi f}}$$

Si ottiene che:

$$H(e^{j2\pi f}) = 1 - z^{-j8\pi f}$$

Possiamo riscrivere il risultato come somma di sinusoidi secondo le proprietà dei numeri complessi, otteniamo che:

$$H(e^{j2\pi f}) = 1 - \cos(8\pi f) + j \cdot \sin(8\pi f)$$

Così facendo abbiamo esplicitato parte reale e parte immaginaria che risultano essere rispettivamente i primi due termini e il terzo termine moltiplicato per l'unità immaginaria j .

A questo punto calcoliamo il modulo e la fase. Calcolo il modulo quadro come somma dei quadrati delle parti reali ed immaginarie.

$$|H(e^{j2\pi f})|^2 = [1 - \cos(8\pi f)]^2 + \sin^2(8\pi f)$$

$$|H(e^{j2\pi f})|^2 = 1 - 2\cos(8\pi f) + \cos^2(8\pi f) + \sin^2(8\pi f)$$

Semplificando le funzioni trigonometriche elevate a quadrato ottengo che:

$$|H(e^{j2\pi f})|^2 = 2 - 2\cos(8\pi f)$$

Nel caso in cui si volesse ottenere il modulo basta effettuare la radice quadrata al risultato appena ottenuto come indicato di seguito:

$$|H(e^{j2\pi f})| = \sqrt{2 - 2 \cos(8\pi f)}$$

Passando oltre andiamo ora a calcolare la fase come arcotangente del rapporto tra parte immaginaria e reale:

$$\angle H(e^{j2\pi f}) = \arctan \left(\frac{\sin(8\pi f)}{1 - \cos(8\pi f)} \right)$$

Andiamo ora a tracciare i grafici di modulo e fase appena ottenuti.

Come possiamo vedere i grafico della fase si annulla in ogni punto in cui vale la relazione seguente:

$$2 - 2 \cos(8\pi f) = 0$$

Ovvero dove la funzione $\cos(8\pi f)$ è pari ad uno. Questo succede in ogni $2\pi k$ punto. Sostituendo si ottiene che $f = \frac{k}{4}$ e che quindi il grafico avrà uno zero in ogni punto come $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \dots$ e così via. Infine notiamo come il grafico del modulo sia traslato di 2 verso l'alto e moltiplicato del doppio in ampiezza.

Passando alla fase otteniamo il grafico visto in precedenza. In particolare notiamo come dove la fase è massima il modulo è nullo mentre dove la fase è nulla il modulo è massimo.

Andiamo infine a rispondere al secondo punto andando a calcolare l'uscita del filtro nel momento in cui si pone in ingresso la sequenza $x[n]$ vista prima. Per calcolare la sequenza in ingresso andiamo a sostituire $x[n]$ con la sequenza fornita. Applicando i ritardi opportuni si ottiene che:

$$y[n] = \cos \left[\frac{\pi}{2}n \right] + \cos \left[\frac{\pi}{4}n \right] - \cos \left[\frac{\pi}{2}(n-4) \right] + \cos \left[\frac{\pi}{2}(n-4) \right]$$

Esplicito le moltiplicazioni all'interno delle funzioni trigonometriche:

$$y[n] = \cos \left[\frac{\pi}{2}n \right] + \cos \left[\frac{\pi}{4}n \right] - \cos \left[\frac{\pi}{2}n - 2\pi \right] + \cos \left[\frac{\pi}{2}n - 2\pi \right]$$

Come possiamo vedere per gli ultimi due termini contengono la sottrazione di un valore pari a 2π il che non fa variare il loro valore. Possiamo dunque scrivere che:

$$y[n] = \cos \left[\frac{\pi}{2}n \right] + \cos \left[\frac{\pi}{4}n \right] - \cos \left[\frac{\pi}{2}n \right] + \cos \left[\frac{\pi}{2}n \right]$$

Raccogliendo ed eliminando i termini opposti otteniamo che:

$$y[n] = 2 \cos \left[\frac{\pi}{4}n \right]$$

27.4.3 Esercizio 3 - Analisi sistema LTI a tempo discreto I

Si consideri un sistema LTI a tempo discreto, descritto dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = \alpha x(n-1) + 2\beta y(n-1) - \beta^2 y(n-2)$$

dove α e β sono numeri reali.

Si richiede di:

- 1) Disegnare lo schema circuitale del sistema.
- 2) Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ e discutere la stabilità del sistema al variare dei parametri α e β .
- 3) Calcolare la risposta all'impulso $h(n)$ e la risposta in frequenza $H(e^{j2\pi f})$.
- 4) Ponendo $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{2}$, calcolare l'uscita $y(n)$ quando all'ingresso è posto il segnale $x(n)$ ottenuto dal campionamento della sinusoide analogica $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ con frequenza di campionamento pari al quadruplo della frequenza di Nyquist.

Iniziamo la risoluzione di questo esercizio andando a disegnare il circuito equivalente implementato dal filtro preso in analisi. Come possiamo vedere il filtro applica subito un ritardo al segnale in ingresso moltiplicandolo per la prima costante α . In seguito sono presenti due reazioni rispettivamente ritardate di uno e due campioni e moltiplicate per le costanti 2β e $-\beta^2$ per poi essere successivamente sommate. Otteniamo dunque il seguente circuito:

27.4.4 Esercizio 4 - Analisi sistema LTI a tempo discreto II

Si consideri il sistema LTI discreto con la seguente relazione tra ingresso e uscita:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] + x[n-1] - 2x[n-2]$$

Si richiede di:

- 1) Studiare poli e zeri della funzione di trasferimento.
- 2) Dire se il sistema è di tipo FIR o IIR.
- 3) Dire se il filtro è a fase minima.

Andiamo ora ad affrontare la risoluzione dell'esercizio proposto. Come prima cosa per ottenere la funzione di trasferimento di cui dovremo studiarne zeri e poli andiamo a trasformare nel dominio della trasformata Z la relazione ingresso uscita del filtro. Otteniamo che:

$$Y(z) - \frac{1}{4}Y(z) \cdot z^{-1} = X(z) + X(z) \cdot z^{-1} - 2X(z) \cdot z^{-2}$$

Effettuiamo il raccoglimento:

$$Y(z) \left[1 - \frac{1}{4}z^{-1} \right] = X(z) \left[1 + z^{-1} - 2z^{-2} \right]$$

Calcolo ora la funzione $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1} - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Raccolgo il termine z^{-2} al numeratore e z^{-1} al denominatore per riscrivere la relazione in termini di z . Ottengo dunque che:

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{z^{-1}} \cdot \frac{z^2 + z - 2}{z - \frac{1}{4}} = \frac{z^2 + z - 2}{z \cdot (z - \frac{1}{4})}$$

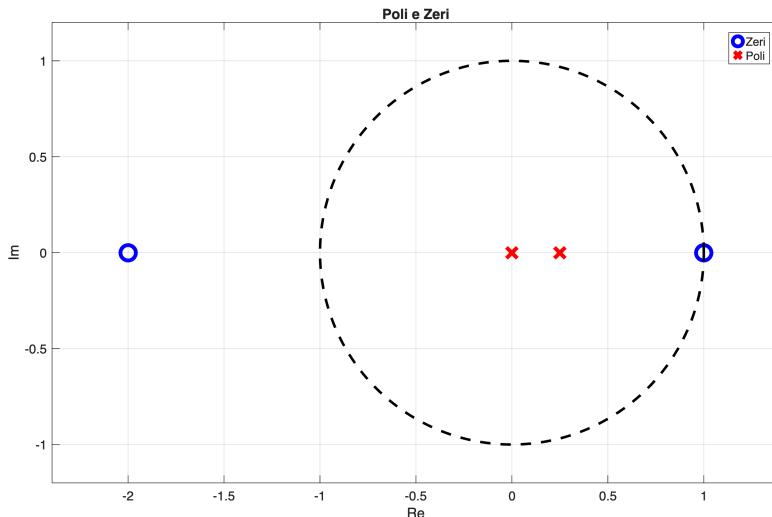
A questo punto possiamo calcolare gli zeri ed i poli. In particolare gli zeri saranno dati da:

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

I poli invece saranno dati da:

$$z \cdot \left(z - \frac{1}{4}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

A questo punto possiamo andare a riportare i valori ottenuti sulla circonferenza di raggio unitario. In particolare prendiamo in considerazione il polo con il valore maggiore per definire la regione di convergenza ROC. Si avrà dunque che $|z| > \frac{1}{4}$. Riportiamo anche di seguito il grafico generato in MATLAB.



In aggiunta a quanto detto prima possiamo andare a dire che la relazione ingresso uscita è causale in quanto fa riferimento sempre a valori passati della sequenza.

Ora procediamo con il secondo punto dove dobbiamo dire se il sistema è di tipo FIR o IIR. Come possiamo vedere dalla relazione ingresso uscita è presente una retroazione che, seppur

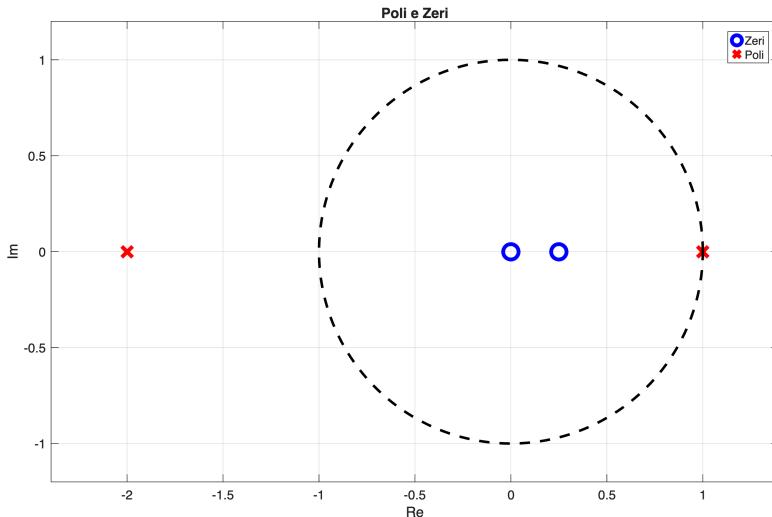
moltiplicata per un fattore minore di uno, rende la risposta del filtro infinita. Arriviamo dunque alla conclusione che il sistema sia di tipi IIR.

Passiamo all'ultimo punto dove andiamo a verificare se il sistema è a fase minima. Per effettuare questa verifica riprendiamo la relazione $H(z)$ andandola ad invertire per trovarne l'opposto ovvero $H^{-1}(z)$. Fatto ciò possiamo verificare se quel dato sistema sia stabile nel caso in cui lo sia possiamo dire che il sistema di partenza è a fase minima. In particolare abbiamo che:

$$H(z) = \frac{z^2 + z - 2}{z \cdot (z - \frac{1}{4})}$$

$$H^{-1}(z) = \frac{z \cdot (z - \frac{1}{4})}{z^2 + z - 2}$$

Effettuando questa operazione notiamo come valori di poli e zeri siano invertiti. In particolare notiamo come i valori ricadano al di fuori della circonferenza unitaria e che quindi essendo $|z| > 1$ il sistema non risulta essere stabile. Come detto in precedenza se il sistema non è stabile non si ha fase minima. Riportiamo per completezza il grafico dei poli e zeri di $H^{-1}(z)$:



27.4.5 Esercizio 5 - Analisi filtro FIR II

Si consideri il filtro di tipo FIR con $H(z)$ come riportata di seguito.

$$H(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})$$

Si richiede di:

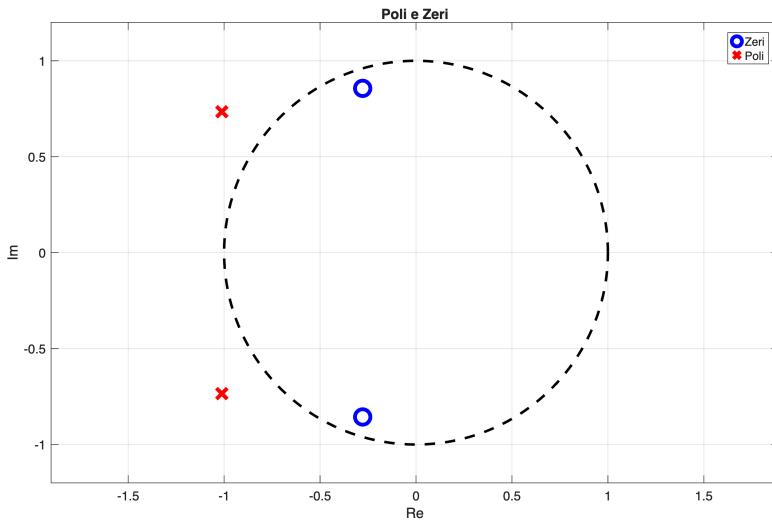
- 1) Studiare poli e zeri di $H(z)$.
- 2) Studiare la stabilità del sistema inverso $H^{-1}(z)$.

Cominciamo ora con la risoluzione dell'esercizio proposto. Come prima cosa possiamo notare come ci sia possibile effettuare il raccoglimento del termine z^{-1} . Si ottiene che:

$$H(z) = \frac{1}{z^4} \cdot (1 - 0.9e^{j0.6\pi})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi})(1 - 1.25e^{j0.8\pi})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi})$$

Portando il termine raccolto al denominatore possiamo subito individuare i poli di $H(z)$, essi sono quattro e tutti pari a zero.

Passando oltre notiamo come i valori dei moduli degli esponenziali complessi contenuti all'interno delle parentesi siano uguali. Possiamo andare a calcolare gli zeri di $H(z)$ a coppie. Otteniamo che gli zeri saranno pari a $0.9e^{\pm j0.6\pi}$ ed a $1.25e^{\pm j0.8\pi}$. Notiamo infine come le due coppie siano composte da numeri complessi coniugati tra loro. Infine riportiamo il grafico come fatto anche in precedenza:



Arrivati a questo punto possiamo andare a studiare la funzione inversa, ovvero $H^{-1}(z)$ la quale risulta avere poli e zeri invertiti rispetto alla precedente. Come possiamo notare ora gli zeri risulterebbero al di fuori della circonferenza unitaria in quanto aventi modulo maggiore di 1. Questa condizione ci porta a definire il sistema come instabile e dunque non avente fase minima.

27.4.6 Esercizio 6 - Analisi funzione di trasferimento

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Si richiede di:

- 1) Studiare zeri e poli e discutere la stabilità.
- 2) Calcolare il modulo della funzione di trasferimento $|H(e^{j2\pi f})|$

Passiamo ora alla risoluzione del penultimo esercizio. Come prima cosa per studiare la stabilità della funzione andiamo a riscrivere la relazione in funzione di z nel modo seguente:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}z}{z - \frac{1}{3}}$$

Ci è ora possibile andare a individuare gli zeri ed i poli. In particolare avremo un polo in $z = \frac{1}{3}$ ed uno zero in $z = 3$.

A questo punto per capire se la funzione è stabile andiamo a studiarne la causalità. Nello specifico data:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Posso ricavare che:

$$Y(z)[1 - \frac{1}{3}z^{-1}] = X(z)[z^{-1} - \frac{1}{3}]$$

Svolgo il prodotto:

$$Y(z) - \frac{1}{3} \cdot Y(z) \cdot z^{-1} = X(z) \cdot z^{-1} - \frac{1}{3} \cdot X(z)$$

Riordino i termini:

$$Y(z) = X(z) \cdot z^{-1} - \frac{1}{3} \cdot X(z) + \frac{1}{3} \cdot Y(z) \cdot z^{-1}$$

A questo punto antitrasformo:

$$y[n] = x[n-1] - \frac{1}{3}x[n] + \frac{1}{3}y[n-1]$$

Arrivati a questo punto possiamo dire che la relazione trovata è causale in quanto considera solo campioni passati e non futuri. In aggiunta alla causalità possiamo dire che il sistema risulta essere stabile.

Passiamo ora oltre ed andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $|H(e^{j2\pi f})|$. Ripartendo dalla funzione $H(z)$ andiamo a sostituire il valore di z con quello indicato, si ottiene che:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \\ |H(e^{j2\pi f})| &= H(z)|_{e^{j2\pi f}} = \frac{e^{-j2\pi f} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j2\pi f}} \end{aligned}$$

A questo punto possiamo andare a riscrivere gli esponenziali complessi con le funzioni trigonometriche corrette. Otteniamo che:

$$H(e^{j2\pi f}) = \frac{\cos(2\pi f) - j \sin(2\pi f) - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}[\cos(2\pi f) - j \sin(2\pi f)]}$$

Svolgo i prodotti:

$$H(e^{j2\pi f}) = \frac{\cos(2\pi f) - \frac{1}{3} - j \sin(2\pi f)}{1 - \frac{1}{3} \cdot \cos(2\pi f) + j \frac{1}{3} \cdot \sin(2\pi f)}$$

Trovata ora $H(e^{j2\pi f})$ ne posso andare a calcolare il modulo quadro:

$$|H(e^{j2\pi f})|^2 = \frac{(\cos(2\pi f) - \frac{1}{3})^2 + \sin^2(2\pi f)}{(1 - \frac{1}{3} \cos(2\pi f))^2 + \frac{1}{3} \sin^2(2\pi f)}$$

Svolgiamo le potenze:

$$|H(e^{j2\pi f})|^2 = \frac{\cos^2(2\pi f) - \frac{2}{3} \cdot \cos(2\pi f) + \frac{1}{9} + \sin^2(2\pi f)}{1 - \frac{2}{3} \cos(2\pi f) + \frac{1}{9} \cdot \cos^2(2\pi f) + \frac{1}{9} \sin^2(2\pi f)}$$

Notiamo come le funzioni trigonometriche seno e coseno al quadrato si semplifichino ad 1, otteniamo che:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \cdot \cos(2\pi f)}{1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \cdot \cos(2\pi f)} = 1$$

Il modulo quadro e di conseguenza il modulo risulta essere uguale ad 1.

27.4.7 Esercizio 7 - Funzione di trasferimento dato un segnale

La funzione di trasferimento di un sistema numerico vale:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

Al sistema viene messo in ingresso il segnale:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n] + u[-n - 1]$$

Si richiede di:

- 1) Calcolare la risposta all'impulso $h[n]$ del sistema.
- 2) Calcolare l'uscita $y[n]$.
- 3) Dire se il sistema è stabile.

Iniziamo ora la risoluzione di questo ultimo esercizio. Come prima cosa, come fatto in precedenza, andiamo a riscrivere la relazione in funzione di z dividendola in frazioni, otteniamo che:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} - z^{-1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

Possiamo subito notare come ci siano presenti uno zero in $z = 0$ e un polo in $z = -\frac{3}{4}$.

Passiamo ora al punto **2)** e calcoliamo la relazione ingresso/uscita. In particolare sapendo che:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Otteniamo che:

$$Y(z)[1 + \frac{3}{4}z^{-1}] = X(z)[1 - z^{-1}]$$

Svolgo i prodotti:

$$Y(z) + \frac{3}{4} \cdot Y(z) \cdot z^{-1} = X(z) - X(z) \cdot z^{-1}$$

Riordino i termini:

$$Y(z) = X(z) - X(z) \cdot z^{-1} - \frac{3}{4} \cdot Y(z) \cdot z^{-1}$$

Infine effettuo l'antitrasformata, ottenendo che:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] - \frac{3}{4} \cdot x[n-1]$$

Concludiamo affrontando ora il punto **3)** dove dobbiamo stabilire se il sistema è stabile oppure no. Come prima cosa notiamo che il segnale $x[n]$ posto in ingresso è per una parte causale mentre per un'altra è anticausale.

Notata questa caratteristica possiamo andare a moltiplicare $H(z)$ con $X(z)$ per ottenere il risultato voluto.

A questo punto possiamo andare a calcolare $X(z)$ antitrasformando il segnale posto in ingresso, utilizzando le tavole otteniamo che:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Effettuo il prodotto:

$$X(z) = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Calcolo ora $Y(z)$ come prodotto di $X(z)$ e di $H(z)$, ottengo che:

$$Y(z) = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - z^{-1})} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

28 Homework - 1

All'interno di questa sezione viene presentato un possibile svolgimento del primo homework presentato durante le lezioni dell'anno accademico 2025/2026.

28.1 Procedimento

Per l'esecuzione dell' esercitazione è stato adottato il seguente procedimento. Come prima cosa sono stati scelti due brani di generi differenti sui cui poter effettuare l'elaborazione richiesta. In particolare è stato scelto un brano di genere hard-techno e uno di musica classica.

Il primo vero passo è stato quello di caricare i brani all'interno di MATLAB attraverso la funzione di libreria `audioread()`.

Successivamente si è passati alla conversione dei brani da formato stereo a mono, in modo da poter lavorare su un singolo canale. Questa effettuare questa operazione ed evitare possibili distorsioni introdotte dalla conversione basata sulla media tra i canali sinistro e destro, si è optato per utilizzare direttamente il solo canale sinistro come segnale di riferimento in quanto attraverso l'operazione `mean()` si sarebbero potute creare distorsioni nel caso in cui fossero presenti strumenti diversi o, più semplicemente, componenti diversi su canali diversi.

In seguito, per ciascun brano, è stato calcolato il numero di campioni per finestra e il numero totale di finestre ottenibili in base alla durata della finestra scelta (pari a M secondi) e, per ogni finestra, è stata calcolata la FFT utilizzando la funzione di libreria fornita da MATLAB.

Successivamente è stata calcolata la DFT utilizzando la seguente formula:

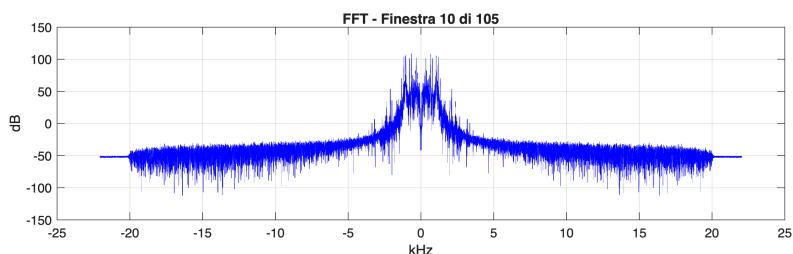
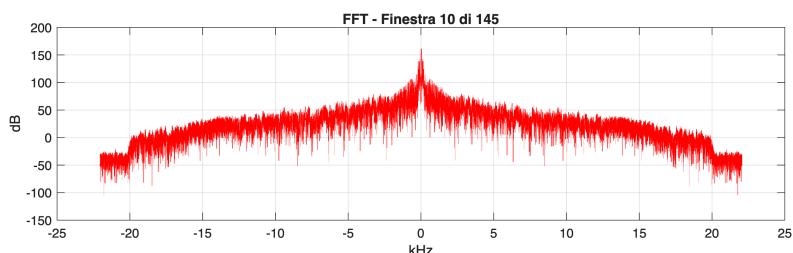
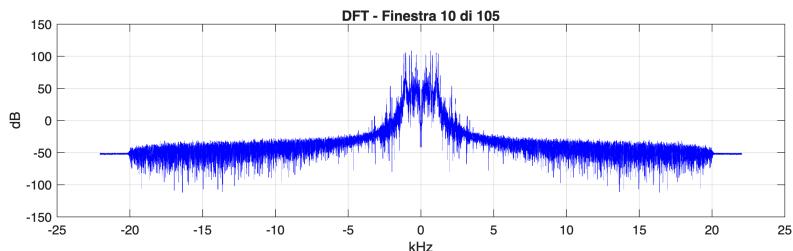
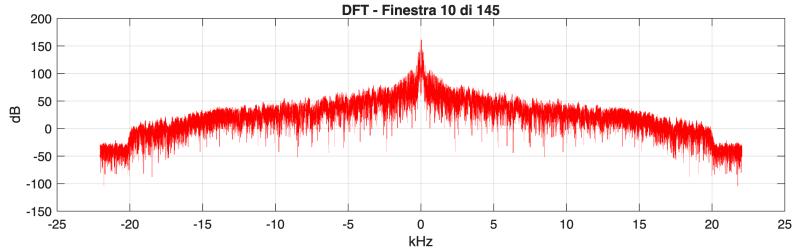
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

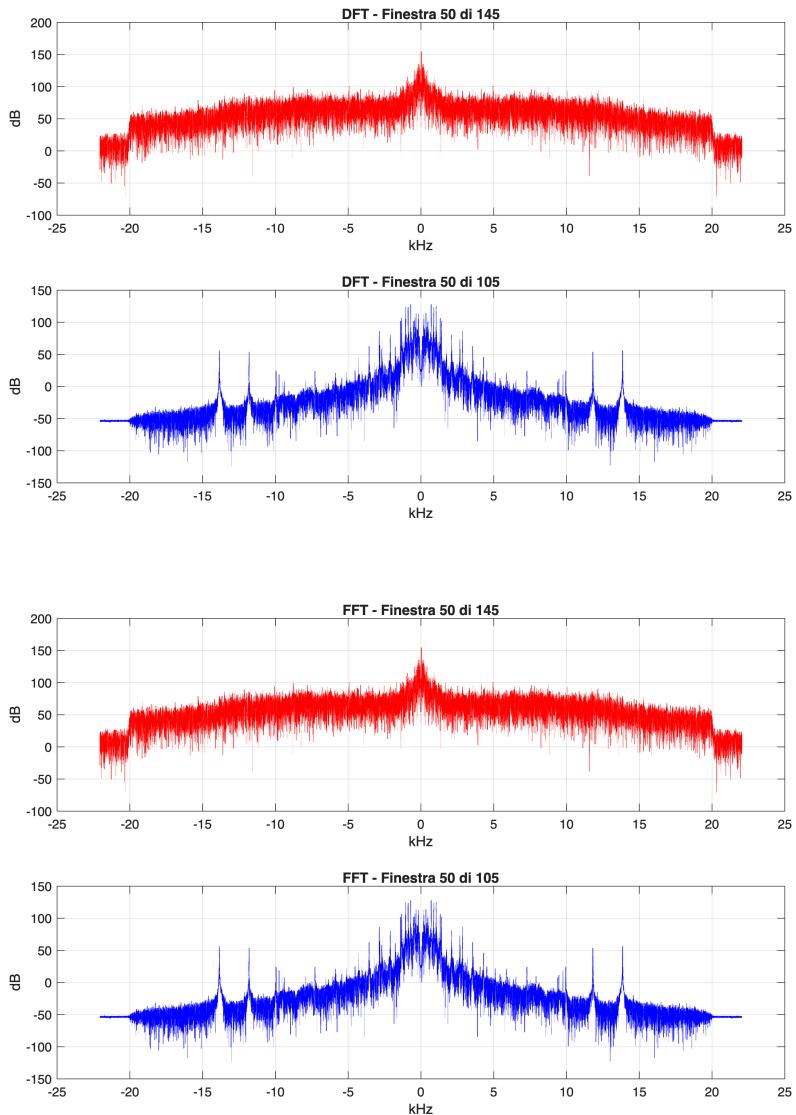
In un primo momento, la formula della DFT è stata implementata utilizzando due cicli for annidati, approccio che ha subito mostrato la sua inefficienza dovuta al costo $O(N^2)$. Per migliorare l'efficienza, l'implementazione è stata successivamente riscritta in forma vettoriale, sfruttando le capacità di parallelizzazione intrinseche ai vettori MATLAB. Grazie a queste modifiche, il tempo di computazione di una DFT si è ridotto significativamente, soprattutto per finestre M di dimensioni superiori al secondo. Notiamo comunque come la complessità asintotica dell'algoritmo sia sempre la stessa del caso precedente, in questo caso si è solo più veloci in quanto si utilizzato meglio le risorse hardware disponibili.

Giunti a questo punto, ottenute le rispettive FFT e DFT delle varie finestre prese in analisi, si è passato al calcolo dello spettro d'energia come richiesto dal testo. Ottenuto lo spettro si sono generati i relativi grafici tramite l'utilizzo della funzione `fftshift()`.

28.2 Grafici

Passiamo ora all'analisi dei grafici ottenuti nella sezione precedente. Di seguito riportiamo i grafici relativi alla DFT ed FFT dei due brani relativi ad un paio delle finestre prese in considerazione utilizzando un valore di M pari ad 1.





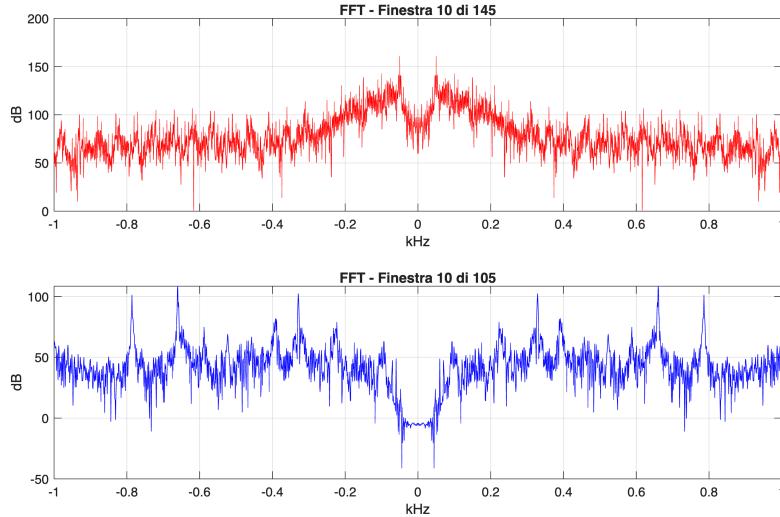
I grafici riportati sono in scala logaritmica lungo l'asse verticale che è quotato in dB mentre per l'asse orizzontale si utilizza la scala lineare quotando l'asse in kHz. Si è deciso di utilizzare la scala logaritmica in quanto più significativa rispetto a quella lineare dato che riesce a mostrare meglio le componenti presenti.

Da evidenziare come gli spettri generati attraverso la FFT e DFT sono estremamente simili tra di loro come confermato da questa semplice operazione `sum(abs(E_1_DFT - E_2_DFT))` che ritorna un valore molto piccolo il quale indica una differenza minima tra i due vettori.

Possiamo vedere come lo spettro della canzone di genere classico abbia accentuate, e dunque presenti nel brano, solo le componenti in frequenza più basse mentre la canzone hard-techno abbia uno spettro più uniforme dove anche componenti con frequenza più alta contribuiscono in modo significativo. Questa prima analisi può essere giustificata riconoscendo che in una brano di musica classica non sono presenti strumenti che generano suoni ad

alta frequenza cosa che non è vera in un brano hard-techno dove diversi suoni presentano frequenze molto elevate.

In particolare effettuando un ingrandimento attorno alle frequenze più basse possiamo notare come nel brano hard-techno siano presenti una grande quantità di basse frequenze assenti nel brano di musica classica.



Infine possiamo notare diversi picchi nel grafico dello spettro del brano di musica classica i quali corrispondono alla frequenze delle note musicali che lo compongono. In ultima aggiunta possiamo giustificare la differenza tra grafici di finestre differenti in quanto considerano momenti nel brano differenti.

28.3 Conclusioni

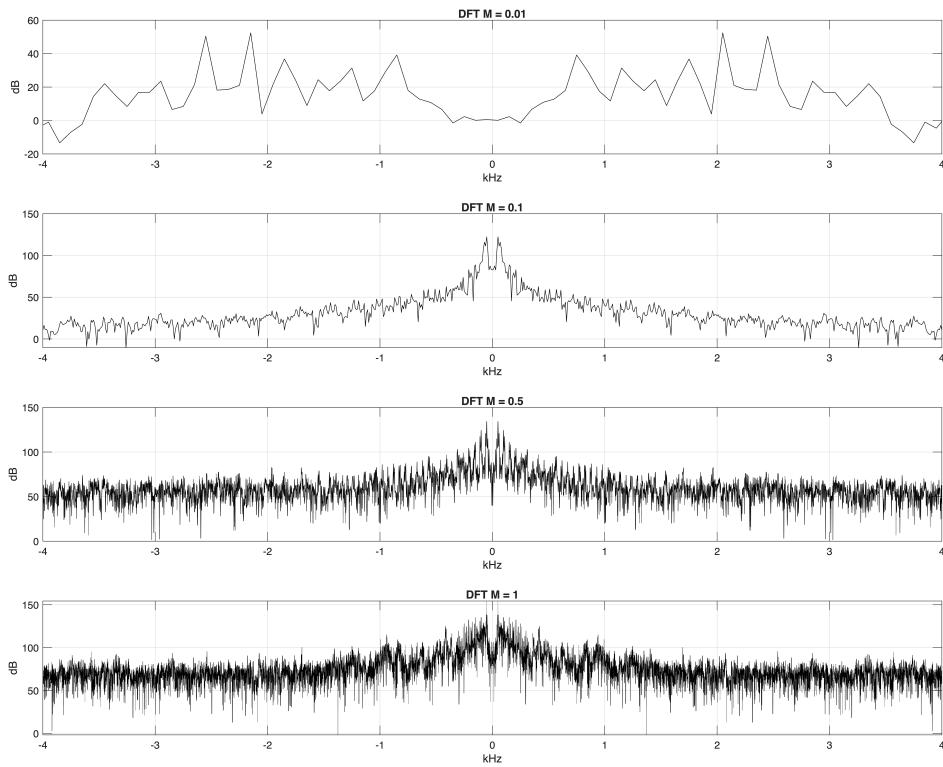
Arriviamo ora alle conclusioni dell'analisi svolta in particolare andandoci a concentrare di come variano i risultati al variare del parametro M . Per capire cosa succede al variare del parametro abbiamo eseguito il codice che genera lo spettro di energia di una finestra diverse volte con valori di M differenti.

Come possiamo vedere dai grafici riportati sopra più è piccola M , ovvero la durata in secondi del segnale che analizziamo, più lo spettro risultante sarà meno risoluto. Questo è dovuto alla risoluzione, come riportato in seguito:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{T}$$

Come possiamo vedere, più è grande il supporto, minore sarà la differenza tra le frequenze ottenute.

Ricordiamo infine che i grafici riportati sono solo alcuni di quelli generati in quanto molto simili tra di loro. Inoltre quelli presenti sono tutti stati generati utilizzando DFT e FFT di segnali aventi come supporto $M = 1$.



29 Homework - 2

Lo scopo di questo homework era quello di applicare un filtraggio lineare a due segnali audio reali, analizzando gli effetti dei filtri sui segnali in uscita nel dominio del tempo e della frequenza. Attraverso il confronto tra diverse tecniche di filtraggio, sono stati osservati e interpretati i risultati mediante rappresentazioni spettrali e verifica percettiva tramite ascolto.

29.1 Procedimento

Come prima cosa, abbiamo caricato i due brani, uno di musica classica e l'altro di musica techno, con le stesse modalità impiegate nell'homework precedente. Successivamente, per ognuno dei tre filtri, abbiamo definito il vettore che ne rappresentava la risposta all'impulso nel dominio del tempo discreto, e ne abbiamo fatto la convoluzione con una finestra di ogni brano.

Il primo filtro è costituito da una porta di durata $T = 0.001$ s. Come richiesto da consegna, questo parametro è stato scelto in modo da avere il primo zero a 1 kHz, infatti sostituendo questo valore all'interno della seguente formula, otteniamo il valore esatto di T da utilizzare per avere tale frequenza di taglio:

$$T = \frac{1}{f_{cut} \cdot 1000}$$

Abbiamo dunque calcolato il numero di campioni (N) ottenuti nel tempo scelto, campionando secondo la frequenza dei due brani ($Fs_1 = Fs_2 = 44.1$ kHz), e poi abbiamo creato un vettore di tanti uni quanti il valore appena trovato.

Successivamente per effettuare la convoluzione con i brani, è stato necessario normalizzare la porta, così da evitare che ogni campione del segnale in uscita risultasse uguale alla somma degli N campioni precedenti. Dividendo dunque la porta per N , la somma dei coefficienti risulta essere 1, portando un guadagno unitario a 0 Hz.

Il secondo filtro, invece, è dato da un coseno rialzato, di cui abbiamo scritto la funzione secondo definizione e l'abbiamo poi campionata grazie a un vettore dei tempi compreso tra $-10T$ e $+10T$ con elementi distanti $\frac{1}{Fs_1}$. Segue il segmento di codice relativo a quanto appena descritto:

```

1 T_2 = 0.0005;           % Durata di T per avere taglio a 1kHz
2 fr = 1/T_2;
3 banda = 1/(2*T_2);
4 beta = 0.001;
5
6 h2 = @(t) ...
7     fr .* sinc(fr * t) .* (cos(pi*beta*t*fr) ./ (1 - (2*beta*t*fr).^2)) .* (t
8     ~= T_2/(2*beta) & t ~= -T_2/(2*beta)) + ...
9     (pi/(4*T_2)) .* sinc(1/(2*beta)) .* (t == T_2/(2*beta)) + ...
10    (pi/(4*T_2)) .* sinc(1/(2*beta)) .* (t == -T_2/(2*beta));
11 tempi = -(10*T_2):dt:(10*T_2);      % Vettore tempi
12 h2_discreta = h2(tempi);
13 h2_filtro = h2_discreta / sum(h2_discreta);    % Normalizzazione

```

In questo caso, per avere nuovamente la frequenza di taglio a 1 kHz, è necessario avere $T = 0.0005$ s, in quanto la funzione sinc ha una risposta in frequenza rettangolare tra $-\frac{fr}{2}$ e $\frac{fr}{2}$, pertanto ponendo $\frac{fr}{2} = 1000$ Hz segue che $fr = 2000$ Hz, che sostituita nella relazione $T = \frac{1}{fr}$, dà il risultato ottenuto. Gli estremi dei valori del vettore tempo sono stati scelti in modo tale da troncare poi il segnale, al momento del campionamento, mantenendo un numero sufficiente di lobi laterali per una rappresentazione accurata.

È poi bene sottolineare come, grazie ai toolbox messi a disposizione da MATLAB, non è stato necessario che definissimo manualmente anche la funzione sinc, la quale avrebbe richiesto delle accortezze maggiori dal momento che MATLAB assegna un valore non numerico alla forma indefinita 0/0. Per lo stesso motivo descritto per la funzione porta è stato necessario, anche in questo caso, effettuare la normalizzazione del filtro.

Per l'ultimo filtro, definito come $1 - H_2(f)$, abbiamo sfruttato la linearità della trasformata di Fourier per scrivere la risposta all'impulso direttamente nel dominio del tempo. Abbiamo definito una delta di Dirac come un vettore di zero avente un "1" all'indice corrispondente ad un massimo in $h(n)$, a cui successivamente abbiamo sottratto il vettore, corrispondente ad $h_2(n)$, calcolato per il filtro precedente, evitando di passare per la definizione nel dominio delle frequenze.

Per effettuare la convoluzione tra la risposta all'impulso di un filtro con un brano musicale, è necessario che entrambi i segnali siano causali. Per una ragione di maggiore facilità nella rappresentazione, per il secondo e il terzo filtro abbiamo inizialmente considerato gli assi del tempo simmetrici rispetto all'origine, ma essendo un vettore di per sé concettualmente

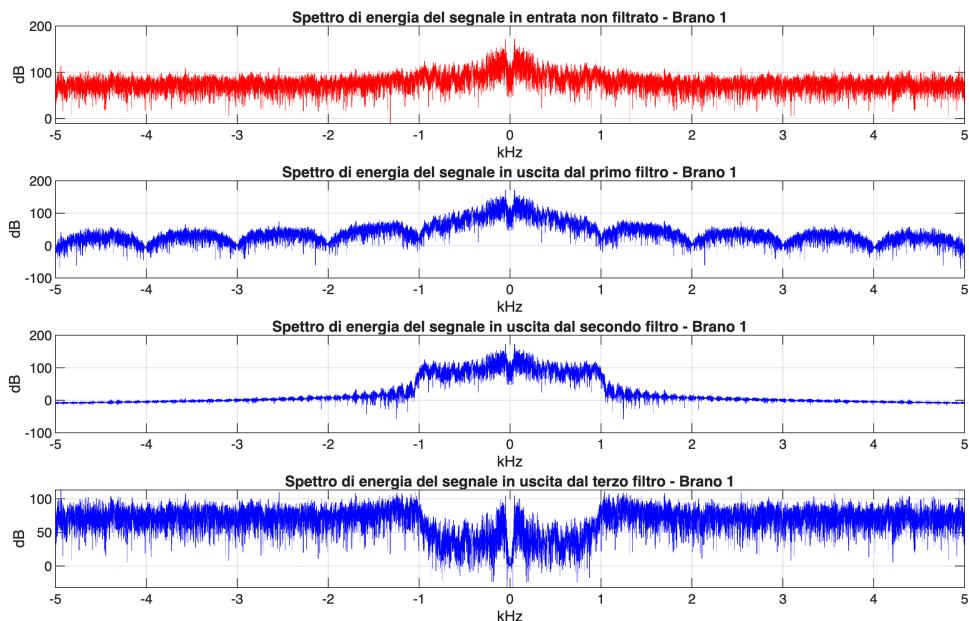
causale, non è stato necessario alcun intervento dal punto di vista dei calcoli al momento della convoluzione, ma sono stati necessari degli accorgimenti solamente al momento della visualizzazione dei grafici.

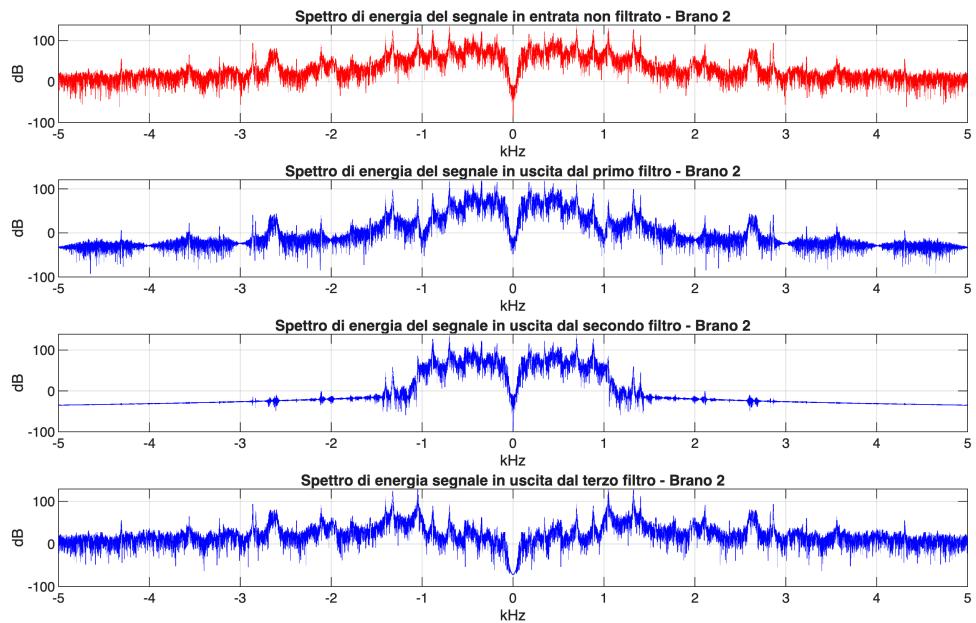
Infine ottenuti gli spettri in ingresso ed uscita dei filtri siamo andati a calcolare le funzioni di trasferimento dei filtri considerati. In particolare notiamo come si sia utilizzato come segnale preso in analisi un rumore bianco gaussiano al fine di risolvere parzialmente il problema numerico dove per frequenze prossime allo zero $X(f) \approx 0$ ci si ritrova in una situazione del tipo $\frac{0}{0}$ che può dare risultati numericamente "casuali".

Infine, per ogni filtro, abbiamo preso in esame un segnale di rumore bianco, ne abbiamo calcolato gli spettri dei segnali in ingresso e uscita, per poi ricavare la risposta all'impulso dei filtri in esame. Per questa parte dell'homework non abbiamo utilizzato i segnali audio dati dai due brani al fine di risolvere parzialmente il problema numerico dove per frequenze prossime allo zero $X(f) \approx 0$ ci si ritrova in una situazione del tipo $\frac{0}{0}$ che può dare risultati numericamente "casuali".

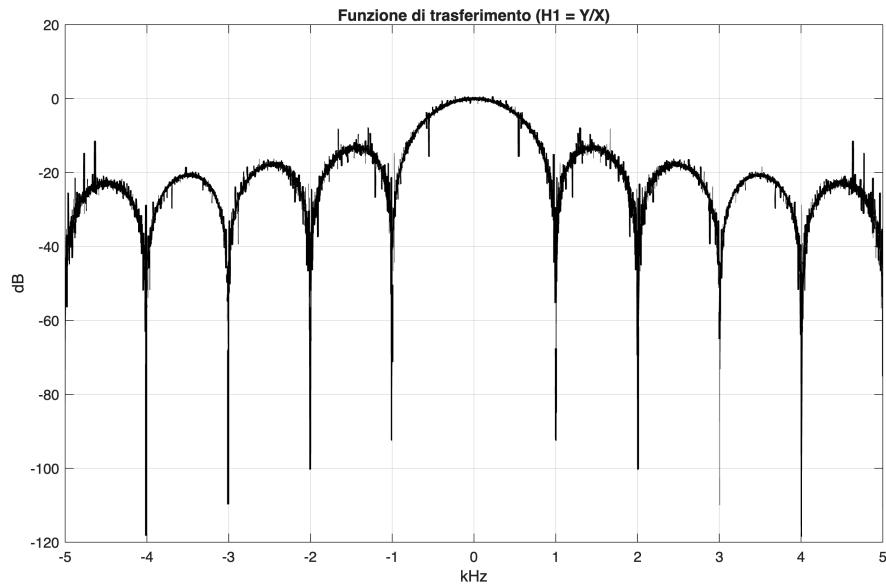
29.2 Grafici

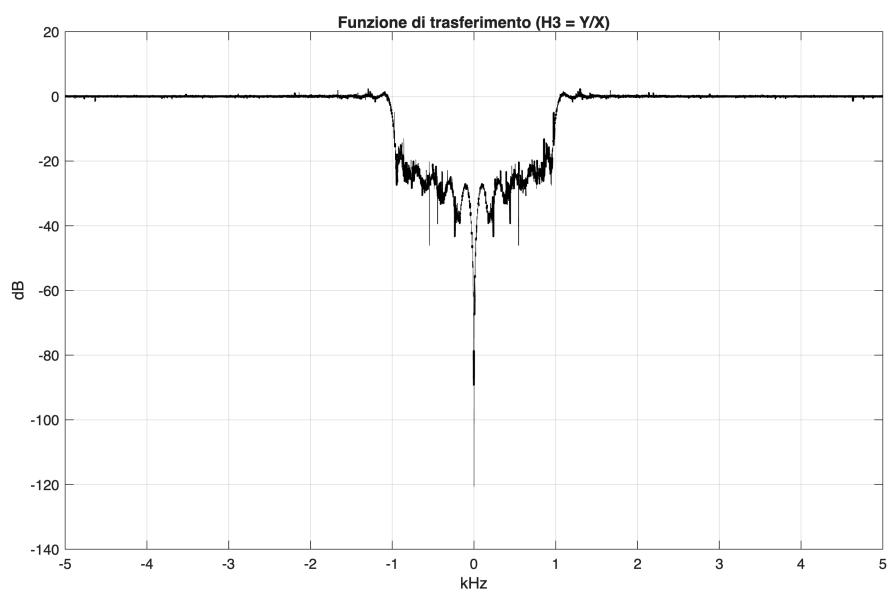
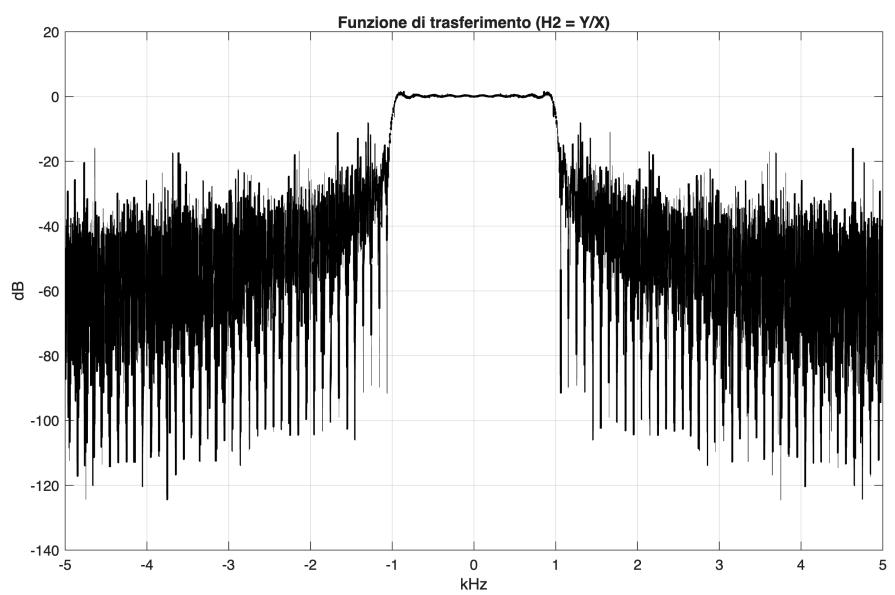
Riportiamo ora i grafici ottenuti dal procedimento descritto sopra. Come primo caso riportiamo gli spettri in entrata ed uscita ai vari filtri per una finestra di durata 2.5 secondi per entrambi i brani presi in considerazione. In particolare il primo grafico fa riferimento al brano di genere techno mentre il secondo si riferisce al brano di musica classica.





Si riportano ora i grafici ottenuti attraverso plottaggio delle stime delle funzioni di trasferimento calcolate come descritto in precedenza. Notiamo come H_1 , H_2 ed H_3 facciano riferimento ai filtri richiesti all'interno della consegna.





29.3 Conclusioni

Con questo elaborato sono stati analizzati gli effetti di diversi filtri digitali applicati a segnali audio reali, sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza.

L'utilizzo di una porta e di un coseno rialzato, consentono di realizzare un filtro passa-basso capaci di omettere dal segnale in uscita le componenti con frequenza, nel nostro caso, superiori ad 1 kHz.

L'impiego del filtro a coseno rialzato ha invece permesso un maggiore controllo sulla banda passante. Questo, permette di ridurre le discontinuità spettrali e le oscillazioni laterali tipiche dei filtri basati su finestre rettangolari, producendo una risposta in frequenza meglio definita e più regolare. Però, come possiamo vedere dai grafici riportati in precedenza, lo spettro dei segnali in uscita dei due filtri è ben differente l'uno dall'altro, nonostante ci si aspetterebbe un comportamento simile. Queste differenze sono dovute principalmente alle forme assunte dai due filtri nel dominio delle frequenze: il primo filtro è dato da una funzione sinc mentre il secondo da un segnale piatto nella banda passante e molto più smorzato all'esterno. Per entrambi abbiamo impostato i parametri in modo tale da avere una frequenza di taglio a circa 1 kHz, ma appunto viste le differenze tra i due, nel secondo caso è apprezzabile un taglio più netto, pulito.

Nel primo caso, il filtro è ottenuto tramite una porta nel dominio del tempo; la sua trasformata di Fourier corrisponde a una funzione sinc, caratterizzata da un lobo principale e da lobi laterali oscillanti a supporto infinito. Questo comportamento introduce inevitabilmente oscillazioni nello spettro del segnale filtrato e un taglio in frequenza meno marcato e meno ben delineato.

Nel secondo caso, invece, il filtro è definito direttamente nel dominio della frequenza mediante un coseno rialzato, che presenta una risposta piatta nella banda passante e una transizione più smorzata al di fuori di essa. Di conseguenza, il taglio in frequenza risulta più marcato e meglio delineato, con una significativa riduzione delle oscillazioni spettrali.

Per quanto riguarda il terzo filtro, essendo definito come $1 - H_2(f)$, risulta essere un filtro passa alto. Possiamo confermare quanto appena detto attraverso l'analisi del suo spettro in frequenza dove notiamo un significativo smorzamento delle componenti appartenenti alla banda centrale di 1 kHz.

Per verificare quanto appena detto abbiamo utilizzato la funzione `soundsc()` di MATLAB per andare a riprodurre alcune finestre dei brani considerati prima e dopo averle sottoposte ai filtri descritti in precedenza.

Il brano di genere techno risulta ovattato nei primi due filtri, mantenendo intoccate le componenti a basse frequenze, mentre attraverso il terzo filtro rimangono udibili soltanto le componenti acute, che risultano in una traccia audio molto alterata.

Per quanto riguarda il brano di musica classica i primi due filtri restituiscono un segnale audio ovattato, come nel caso precedente, ma con un effetto minore dovuto al fatto che questo brano racchiude le sue componenti in frequenza principali all'interno della banda che viene fatta passare dal filtro. Attraverso il terzo filtro otteniamo invece una traccia audio priva delle sue componenti principali lasciando inalterate quelle poche componenti ad alta frequenza prodotte da alcuni strumenti che non erano udibili nel caso precedente.

Infine notiamo come i grafici delle funzioni di trasferimento siano molto disturbati e rumorosi in alcune zone dello spettro.

Questo comportamento è dovuto al fatto che tali funzioni siano state stimate come il rapporto tra gli spettri di uno stesso segnale, filtrato con uno non filtrato (uscita $Y(f)$ ed ingresso $X(f)$). Come possiamo notare, nonostante si sia utilizzato un rumore bianco gaussiano di svariati campioni, nelle zone in cui lo spettro viene portato a valori prossimi allo zero dal filtro implementato, il rapporto restituisce valori numerici non accurati che appaiono come rumorosi. Questo effetto è particolarmente visibile negli ultimi due grafici per i valori di frequenze che vengono attenuate dai filtri.