Teoria ed Elaborazione dei Segnali
02MOOOA
Prof.ssa Gabriella Bosco
Prof. Fabio Dovis

Francesco Abrami - s310570

A.A. 2025 - 2026

Versione: 1.10.0 - 07/11/2025

Indice

1 Introduzione Generale

1.1 Suddivisione Corso

Il corso è strutturato come molti altri evidenziando tre diversi momenti lezioni, esercitazioni ed homework. Per quanto riguarda il materiale trattato fare riferimento all'indice di questo documento.

1.2 Materiale

Questo elaborato si basa principalmente sul materiale fornito durante il corso, tra cui slide, esercizi, temi d'esami ed homework. L'elaborato segue il programma del corso nel modo più fedele possibile anche se l'ordine con cui il materiale viene trattato potrebbe non corrispondere allo svolgimento delle lezioni tenute in aula. Infine si sottolinea la presenza di vari approfondimenti sugli argomenti indicati come extra, che richiedono uno studio autonomo da parte dello studente. Queste informazioni sono state tratte in parte dai testi consigliati per il corso:

Nell'eventualità in cui il lettore in possesso di questo elaborato abbia individuato degli errori, inesattezze o voglia proporre delle migliorie non esiti a contattare il seguente indirizzo di posta elettronica: francesco.abrami@studenti.polito.it

1.3 Lezioni Esercitazioni ed Homework

Lezioni, esercitazioni ed homewrok si svolgono nelle stesse aule. Per gli homework é richiesta della preparazione preliminare al fine di svolgere correttamente tutte le attività utilizzando lo slot per verificare quanto fatto. Le sezioni finali di questo elaborato propongono riassunte le spiegazioni delle esercitazioni e degli homework affrontati durante il corso. Ricordiamo che gli homework, ovvero esercitazioni al computer, svolti con l'utilizzo di Matlab o Python sono facoltativi e possono portare fino ad un massimo di due punti al punteggio ottenuto all'esame.

Infine segue ora un velocissimo elenco delle abilità che verranno acquisite all'interno del corso:

- Classificazioni dei segnali.
- Tecniche di analisi in frequenza dei segnali a tempo continuo.
- Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI), e la loro rappresentazione nel dominio del tempo e della frequenza.
- Tipologie fondamentali di filtri lineari.
- Processi stocastici (casuali) e loro rappresentazione spettrale.
- Tecniche per il passaggio da segnali a tempo continuo ai segnali a tempo discreto, e viceversa.
- Tecniche per l'elaborazione in frequenza dei segnali a tempo discreto.

- Tecniche per l'analisi dei sistemi LTI a tempo discreto e trasformata Z.

- Tecniche di filtraggio numerico, tipologie di filtri numerici (FIR, IIR).

1.4 Prova d'Esame

L'esame finale si basa su uno scritto obbligatorio, costituito da domande ed esercizi a risposta multipla) e un orale opzionale (a discrezione dello studente o del docente).
In particolare il tempo a disposizione dello studente per la prova scritta (su piattaforma Exam o supporto cartaceo) è di 90 minuti e non è possibile consultare materiale didattico né appunti o altri testi. È consentito utilizzare esclusivamente la calcolatrice e un formulario fornito dal docente.
Infine esiste la possibilità di sostenere un'esame orale alla quale per essere ammessi occorre ottenere un voto alla prova scritta superiore o uguale a 15/30. L'orale ha una durata di circa 15 minuti, e riguarda tutti gli argomenti trattati nelle lezioni e nelle esercitazioni.

Ricordiamo infine che esempi di esami scritti degli anni precedenti saranno messi a disposizione attraverso il portale della didattica.

2 Richiami di algebra lineare e geometria

All'interno di questa sezione andremo a ripassare i concetti fondamentali dell'algebra e della geometria introdotti nel corso di Algebra Lineare e Geometria.

Questa sezione si colloca all'inizio del documento in quanto dovrebbe contenere nozioni già apprese dallo studente ma alla quale possiamo dare comunque uno sguardo per un veloce ripasso. In particolare questa parte si colloca prima della trattazione dei segnali come vettori introdotti alla fine del terzo capitolo sulla trattazione dei segnali analogici.

2.1 Metrica

Iniziamo il nostro ripasso andando a vedere come prima cosa la definizione di metrica riportata di seguito.

Definizione 2.1 (**Metrica**).

Sia V un insieme (in particolare, uno spazio vettoriale reale o complesso). Si dice metrica (o funzione distanza) su V una funzione

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$

la quale associa a ogni coppia di punti (o vettori) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ *un numero reale* ***d(x,y)*** *chiamato distanza tra x e y, tale che siano verificate le proprietà fondamentali.*

Seguono le proprietà fondamentali della metrica:

- **Non negatività:**

  $$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

  Questa proprietà conferma la non negatività dell'operazione. In altri termini, considerando la metrica come distanza, possiamo dire che non esistono distanze negative.

- **Identità dell'indiscernibile:**

  $$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

  Questa proprietà afferma che se la metrica tra due elementi di V è nulla allora i due elementi sono lo stesso. In altri termini, considerando la metrica come distanza, possiamo dire che un punto avente distanza nulla da un altro è il punto stesso.

- **Simmetria:**

  $$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

  Questa proprietà afferma che la metrica è un'operazione simmetrica. Possiamo dire solo in termini informali che essa sia commutativa come le operazioni algebriche. Ragionando sempre in termini di distanza lo spazio che separa due punti è lo stesso che io lo misuri a partire dal primo o dal secondo.

- **Disuguaglianza triangolare:**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \;\leq\; d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;+\; d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Questa proprietà afferma che la distanza tra due punti sia sempre minore della somma delle distanze tra i due punti passando per un terzo punto che non si trova sulla direttrice dei primi due. A livello concettuale preserva l'idea che ogni percorso intermedio è almeno lungo quanto quello diretto e assicura la coerenza geometrica dello spazio metrico.

Notiamo infine come la distanza Euclidea tra vettori soddisfa tutte le precedenti condizioni, ed è dunque una possibile metrica all'interno di uno spazio opportuno.

2.2 Spazio vettoriale

Passiamo ora oltre andando a definire uno spazio vettoriale (S.V.) dandone la definizione ed elencando le operazioni che è possibile effettuare su di esso.

Definizione 2.2 (Spazio vettoriale).
Sia $\mathbb{K}$ un campo (ad esempio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è un insieme V i cui elementi si chiamano vettori, su cui sono definite due operazioni: somma vettoriale e moltiplicazione per scalare.

Seguono le operazioni definite su uno spazio vettoriale:

- **Somma vettoriale (+) :**

$$V \times V \to V, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

- **Moltiplicazione per scalare (·) :**

$$\mathbb{K} \times \to V, \quad (\alpha, \mathbf{v}) \to \alpha \mathbf{v}$$

Queste operazioni appena elencate devono soddisfare le seguenti otto proprietà fondamentali per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in$ V e α, $\beta \in \mathbb{K}$. Sono riportate di seguito le proprietà fondamentali della somma vettoriale e del prodotto per scalare. Le prime quattro fanno riferimento alla somma vettoriale mentre le altre quattro si riferiscono al prodotto per scalare.

- **Associatività:**
- **Commutatività:**
- **Elemento neutro:**
- **Elemento opposto:**
- **Associatività rispetto ai prodotti scalari:**
- **Elemento neutro dello scalare:**
- **Distributività rispetto alla somma di vettori:**
- **Distributività rispetto alla somma di scalari:**

2.3 Norma e distanza

Passiamo oltre ed andiamo ad introdurre ora i concetti di norma

3 Introduzione al corso

3.1 Segnali

Iniziamo ora dando un piccolo sguardo a questo corso facendo dei piccoli esempi per avvicinarci, seppur in maniera approssimativa, agli argomenti che tratteremo.
In particolare questa sezione è pensata per introdurre diversi concetti, in modo del tutto approssimativo, per gettare delle basi di quello che verrà trattato in seguito all'interno di questo documento. I concetti all'interno di questa sezione potranno sembrare buttati a caso o addirittura sopraffare il lettore ma ricordiamo che questa non è altro che un'introduzione e che tutti i concetti verranno trattati in modo esaustivo nel resto dell'elaborato.

Iniziamo dando la definizione di **segnale** che in maniera del tutto generale può essere definito come *"una funzione reale o complessa nella variabile tempo"* ed in particolare possiamo dire che l'informazione trasportata da un segnale è contenuta nella *"forma"* del segnale stesso ovvero nella sua evoluzione nel tempo.

3.1.1 Tipologie di segnali

In particolare possiamo fin da subito fare degli esempi di alcune tipologie di segnali che sono rilevanti dal punto di vista ingegneristico. Tra queste tipologie troviamo:

- Segnale **elettrico**
- Segnale **vocale**
- Segnale **audio**
- Segnale **dati**

In particolare partiamo fin da subito prendendo in esempio un segnale elettrico che nella maggior parte dei casi pratici è il segnale maggiormente utilizzato per la propagazione dell'informazione che essi trasportano ma che non per forza sia il segnale che originariamente avevamo preso in analisi.
In particolare ci è possibile passare da una tipologia di segnale ad un'altra attraverso dei componenti detti **trasduttori** ossia dispositivi che convertono una qualsiasi grandezza scalare in un segnale elettrico indipendentemente dalla loro natura (diretto, variabile, sinusoidale o pulsante). Si utilizza principalmente il segnale elettrico come output dei trasduttori in quanto possiamo maneggiarlo in modo molto più semplice e comodo rispetto ad altre forme.
Evidenziamo ora alcune tipologie di trasduttori tra cui troviamo:

- **Pressione sonora** (audio, microfono)
- **Intensità luminosa** (immagini e video)
- **Velocità**, **temperatura**, etc.

3.2 Possibili operazioni sui segnali

Introdotto ora il concetto di segnale e di trasduttore andiamo a vedere alcune possibili operazioni che possiamo effettuare sul segnale che stiamo analizzando. In particolare ci è possibile effettuare principalmente operazioni di:

- **Elaborazione:** questa operazione ci permette di raggiungere vari obiettivi che possono essere: l'eliminazione di rumore, l'estrazione di componenti più rilevanti per le successive elaborazioni oppure la capacità di filtrare componenti spurie generate dai trasduttori.

- **Trasmissione:** con questa operazione ci è possibile trasportare l'informazione contenuta nel segnale per una certa distanza, al fine di essere fruita in un posto diverso da quello dove è stata generata. Questa operazione è al centro dello studio delle telecomunicazioni.

- **Memorizzazione:** capacità di conservare l'informazione contenuta nel segnale rendendola fruibile anche a distanza di tempo.

3.3 Segnali analogici digitali e la loro trasmissione

Prima di proseguire oltre andiamo a dare una doverosa definizione delle differenti tipologie di segnale che andremo ad analizzare. In particolare possiamo individuare due tipologie fondamentali di segnali:

- **Analogici:** Rientrano in questa categoria tutti quei segnali che sono continui nel tempo e nella loro ampiezza ovvero possono assumere qualsiasi valore in un qualsiasi istante di tempo. Per fare degli esempi una sinusoide è un segnale analogico in quanto è infinitamente continua nel tempo ma limitata in ampiezza. In particolare un segnale analogico in quanto continuo nel tempo ammette anche variazioni istantanee in ampiezza anche infinite in quanto ammesse dalla sua stessa definizione.

- **Digitali o Numerici:** Rientrano invece in questa categoria tutti quei segnali che assumo valori discreti nel tempo, ovvero non sono più continui, mentre in ampiezza possono assumere un numero finito di valori.

Vedremo inoltre come esista una categoria di segnali a tempo discreto ma continui in ampiezza che verranno approfonditi nella seconda parte del corso. In particolare questi segnali sono fondamentali nell'ambito dell'elaborazione numerica degli stessi.

3.3.1 Scomparsa dei sistemi analogici

3.4 Conversione analogico digitale - ADC

3.5 Possibili Applicazioni dell'Analisi ed Elaborazione dei Segnali

Concludiamo ora questa sezione andando ad elencare velocemente quali possono essere delle possibili applicazioni dell'analisi ed elaborazione dei segnali.

4 Segnali Analogici

Iniziamo ora a trattare la prima tematica che incontriamo in questo corso di teoria ed elaborazione dei segnali la quale è rappresentata dai segnali analogici.

4.1 Introduzione ai segnali analogici reali e complessi

In particolare andremo a trattare i segnali che definiremo segnali analogici a tempo continuo di cui diamo la definizione di seguito. Un segnale analogico reale a tempo continuo è una funzione reale di variabile reale (tempo) - indicata con la lettera t al posto della x - che assume valori significativi per qualunque tempo t. Inoltre il tempo non è discretizzato il che rende il segnale sempre continuo e non risulta essere composizione di una serie o un susseguirsi di tanti valori puntuali ravvicinati.

Notiamo infine come non si pongano restrizioni del segnale nel suo sviluppo - e continuità - lungo l'asse y, per quanto ne sappiamo il segnale può essere discontinuo nella sua ampiezza.

Introdotti i suddetti segnali analogici reali passiamo a considerare i segnali analogici complessi. Tali tipologie di segnali non sono altro che funzioni a valori complessi (ma sempre della variabile reale tempo *"continuo"*) che mappano R $\rightarrow$ C.

Seppur possa sembrare strano dover utilizzare una funzione a valori complessi, che ricordiamo avere invece variabile reale, per trattare lo studio di un segnale basti sapere che questa trattazione porta diversi vantaggi nello sviluppo di un modello di segnali di tipo sinusoidale o pseudo-sinusoidale ovvero modulati attorno ad una sinusoide. In particolare volendo fare un piccole esempio si pensi al seguente segnale, avente f_0 costante, introdotto nei corsi passati di Fisica II ed Elettrotecnica:

$$f(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

Per vari motivi, che vedremo in seguito, ci può essere utile rappresentare questo segnale come un segnale a valori complessi con espressione:

$$f'(t) = a(t) \cdot e^{i\phi(t)}$$

dalla quale ci è possibile, per sinusoidi pure introdurre il concetto di fasore:

$$f'(t) = a \cdot e^{i\phi}$$

Vediamo infine delle possibili rappresentazioni di segnali complessi introducendo anche alcune formule di conversione. In particolare ci è possibile trattare un segnale complesso come un segnale composto da una parte reale ed una parte immaginaria secondo la seguente espressione:

$$f(t) = f_r(t) + i \cdot f_i(t)$$

Dove diamo per scontato, secondo la definizione, che la parte reale di $f_r(t)$ e la parte immaginaria siano le seguenti:

$$\Re[f(t)] \triangleq f_r(t) \qquad \Im[f(t)] \triangleq f_i(t)$$

Infine possiamo scrivere la nostra funzione complessa in forma polare anche detta modulo-fase, la quale risulta essere:

$$f(t) = \big|f(t)\big| \cdot e^{i \cdot \arg(f(t))}$$

dove la funzione $\arg(f(t))$ è ottenuta tramite l'arcotangente del rapporto tra $f_i(t)$ e $f_r(t)$. Seguono ora per completezza le formule di conversione, calcolo del modulo e della funzione argomento.

$$\arg(f(t)) = \arctan\left(\tfrac{f_i(t)}{f_r(t)}\right) \qquad \big|f(t)\big| = \sqrt{f_r^2(t) + f_i^2(t)}$$

$$f_r(t) = \big|f(t)\big| \cos(\arg(f(t))) \qquad f_i(t) = \big|f(t)\big| \sin(\arg(f(t)))$$

4.1.1 Richiami sui numeri complessi

4.2 Classificazione dei segnali analogici

Fatta questa doverosa introduzione possiamo ora passare ad analizzare e classificare le varie tipologie di segnali analogici in base a delle loro caratteristiche specifiche. Anticipando cosa andremo a vedere tra poco elenchiamo ora i tipi di classificazione che utilizzeremo: a supporto limitato, ad ampiezza limitata, impulsivo ad energia media finita, a potenza media finita e periodico o aperiodico.

4.2.1 Segnali a supporto temporale limitato

Iniziamo ora con la prima classificazione che utilizza come criterio la limitatezza del supporto del segnale preso come campione. Per supporto temporale o semplicemente supporto, intendiamo l'intervallo di tempo all'esterno del quale il segnale è nullo. Nello specifico un segnale si definisce a supporto limitato quando il suo supporto è finito come rappresentato nella figura seguente:

In particolare il segnale dell'immagine è limitato in quanto assume un valore diverso dallo zero per un intervallo limitato (da t_1 a t_2) ed ha inoltre una durata pari a $t_2 - t_1$.

Introdotto ora questa tipologia di segnali andiamo a fare un breve commento sulla loro applicazione in campo fisico/ingegneristico nello specifico un qualsiasi segnale ha tipicamente sempre un inizio ed una fine nel tempo il che li rende a supporto limitato.

Tuttavia, solitamente per ragioni di semplicità matematica, spesso è comodo considerarli a supporto temporale illimitato. Ci è possibile fare ciò in quanto spesso la porzione di segnale analizzata è irrisoria rispetto alla sua durata complessiva per cui possiamo considerarlo come uno con supporto illimitato.

Ad esempio: l'oscillatore che dà il clock ad una CPU è *"fisicamente"* attivo solo su un supporto temporale limitato (anche se estremamente lungo) ma lo si rappresenta spesso matematicamente come una onda quadra (o sinusoidale) di durata infinita per i motivi di cui sopra.

4.2.2 Segnali ad ampiezza limitata

4.2.3 Segnali impulsivi

4.2.4 Segnale fisico

4.3 Energia e potenza di un segnale

Introdotti le principali tipologie di segnale possiamo ora andare a definire l'energia e la potenza di un segnale come vediamo di seguito.

Definizione 4.1 (Energia di un segnale).

$$E(x) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt$$

In parole si definisce energia di un segnale l'integrale del modulo al quadrato del segnale stesso calcolato sul supporto del segnale.

Per quanto riguarda la potenza di un segnale andiamo ad introdurre delle differenze tra potenza istantanea e potenza media. Notiamo inoltre come d'ora in poi faremo riferimento a termine potenza media con il termine potenza mentre dovremo sempre specificare i casi in cui parliamo di potenza istantanea.

Definizione 4.2 (Potenza di un segnale).

$$P_{ist} = \left|x(t)\right|^2$$

$$P_{avg}(x) \triangleq \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \left|x(t)\right|^2 dt$$

Date le definizioni possiamo vedere come la potenza istantanea non sia altro che una funzione del tempo che coincide con il modulo al quadrato del segnale mentre la potenza media non è più una funzione del tempo ma è un numero che corrisponde alla media *"temporale"* della potenza istantanea ovvero del quadrato del segnale.

Infine Come vedremo più nel dettaglio più avanti, è spesso utile introdurre la *"media temporale"* di una generica funzione del tempo $y(t)$ con questa definizione:

$$< y(t) >=$$

4.3.1 Segnali ad energia finita

4.3.2 Segnali a potenza finita

4.3.3 Segnali periodici

4.4 Esempi numerici

4.4.1 Energia di un esponenziale decrescente

Si consideri ora il seguente segnale $x(t) = u(t)e^{-\alpha t}$ dove $u(t)$ è la funzione gradino unitario. Si voglia ora calcolare l'energia del segnale.

Partiamo facendo delle considerazioni sul supporto del segnale che non è limitato in quanto prima di zero è nullo ma da li in avanti decresce come una coda di esponenziale ma non sarà mai nulla per le proprietà stesse della funzione. Detto ciò proseguiamo calcolando l'energia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t}\ dt = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

Come abbiamo visto applicando la definizione di energia al segnale ed integrando opportunamente sul suo supporto otteniamo la sua energia.

4.4.2 Potenza di un segnale sinusoidale

Passiamo ora al calcolo della potenza del generico segnale $x(t) = \mathrm{A} \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ con A, f_0 e ϕ generiche costanti positive diverse da zero.

Iniziamo scrivendo la definizione di potenza di un segnale:

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \left|x(t)\right|^2 dt = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi)$$

Procediamo ora portando fuori dall'integrale le costanti e spezzando l'integrale sotto il simbolo del limite. Ricordiamo che ci è possibile spezzare questo integrale riscrivendo il seno al quadrato come uno più il seno con l'argomento anch'esso moltiplicato per due tutto fratto due.

$$\lim_{a \to \infty} \frac{A^2}{2a} \left[\int_{-a}^{a} \frac{1}{2} dt + \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + \phi) dt \right] = \lim_{a \to \infty} \frac{A^2}{2a} \left[\frac{2a}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(4\pi f_0 t + 2\phi)}{4\pi f_0} \Big|_{-a}^{a} \right]$$

Svolgendo i calcoli otteniamo che:

$$\frac{A^2}{2} + \lim_{a \to \infty} \frac{A^2}{4a} \frac{\sin(4\pi f_0 a + 2\phi) - \sin(-4\pi f_0 a + 2\phi)}{4\pi f_0} = \frac{A^2}{2}$$

In definitiva possiamo dire che questo calcolo della potenza di un segnale sinusoidale verrà incontrato moltissime volte all'interno del corso motivo per cui è bene ricordarlo in quanto potrebbe ritornare utile in futuro.

4.5 Rappresentazione vettoriale di un segnale

Dopo aver affrontato gli argomenti precedenti passiamo ora all'interpretazione dei segnali a tempo continuo come spazi vettoriali. Prima di tutto ci è necessario aver ben presenti alcuni concetti fondamentali dell'algebra lineare e della geometria. Questi concetti sono riportati nel primo capitolo di questo manuale con lo scopo di essere utilizzati come ripasso al fine di affrontare questa sezione nel modo corretto.

5 Rappresentazione vettoriale dei segnali

5.1 Esempio di applicazione della rappresentazione geometrica

Concludiamo questa sezione andando ora a vedere delle particolari applicazioni delle rappresentazioni geometriche andando anche ad introdurre alcune tipologie particolari di segnali.

5.1.1 La funzione porta nel tempo

5.2 Funzione delta di Dirac

5.2.1 Proprietà della delta di Dirac

Andiamo ora a definire delle proprietà utili della funzione delta di Dirac.

Proprietà 5.1 (**Area della delta di Dirac**).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\Delta t}(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t = 1$$

Come possiamo vedere dalla definizione appena data la funzione delta di Dirac ha un'area pari ad uno dunque unitaria. Notiamo invece, secondo la proprietà che segue, che l'energia della delta è infinita.

Proprietà 5.2 (**Energia della delta di Dirac**).

$$E(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t))^2 dt = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (p_{\Delta t}(t))^2 dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot \Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} = \infty$$

Proprietà 5.3 (**Segnale continuo moltiplicato per una delta**).

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Segue la dimostrazione di quanto abbiamo appena detto.

$$Dim: \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot p_{\Delta t}(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot x(0) \cdot \Delta t = x(0)$$

Come abbiamo visto nel momento in cui andiamo a moltiplicare un qualsiasi segnale continuo per una delta di Dirac, opportunamente centrata in $x_0 = 0$, otterremo una delta centrata nello stesso punto ma avente un'altezza pari a quella del segnale continuo in quel dato punto. In particolare la proprietà appena vista sarà fondamentale, all'interno di questo corso, nella sua forma generalizzata mostrata di seguito.

Proprietà 5.4 (Campionamento tramite delta di Dirac).

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

Segue la dimostrazione di quanto appena detto.

$$Dim: \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot p_{\Delta t}(t-t_0)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot x(t_0) \cdot \Delta t = x(t_0)$$

In questo caso più generalizzato possiamo andare a moltiplicare un segnale continuo per una delta di Dirac posizionata in qualsiasi istante di tempo. Come per la proprietà precedente la delta moltiplicata per il segnale resta centrata nel punto originale ma assume il valore del segnale per cui è moltiplicata in quel punto.

In particolare interpretando il risultato della slide precedente, si deduce che l'integrale della moltiplicazione tra un generico segnale continuo e la delta *"campiona"* il valore del segnale nella posizione temporale della delta. Notiamo come useremo anche la seguente espressione relativa alla moltiplicazione per una delta:

$$x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$$

Proprietà 5.5 (Prodotto di convoluzione).

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(\tau - t)\, d\tau$$

Ricordiamo infine che c'è una differenza enorme tra il moltiplicare un segnale continuo per una delta (ovunque essa sia centrata) e fare l'integrale del loro prodotto. Il primo caso ritorna una funzione delta ma moltiplicata per una costante che dipende dal valore che il segnale assume nell'istante in cui si trova, mentre il secondo caso ritorna un valore numerico che indica il campionamento del segnale in quel dato istante.

Infine vediamo ora, anche se lo definiremo meglio più avanti, quello che chiameremo prodotto di convoluzione nel modo seguente:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

La dicitura a sinistra dell'uguale si legge come: x(t) *"convoluto"* y(t).

Infine definita la proprietà del campionamento otteniamo i seguenti risultati:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t-\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\theta-\tau)d\tau = x(t-\theta)$$

In particolare notiamo come nel primo caso la convoluzione di un segnale $x(t)$ continuo con una delta fornisce il segnale di partenza $x(t)$. Il secondo caso invece indica che la convoluzione di un segnale $x(t)$ continuo con una delta traslata $\delta(t-\theta)$ fornisce il segnale di partenza traslato $x(t-\theta)$.

6 La serie e le trasformate di Fourier

6.1 Serie di Fourier

Iniziamo ora andando a dare la definizione

6.2 Trasformata di Fourier

7 Sistemi

Viste le sezioni precedente ed introdotte le proprietà della trasformata di Fourier possiamo ora affrontare il prossimo argomento ovvero i sistemi lineari (LS - Linear Systems) di cui elencheremo definizione, proprietà e caratteristiche. Come vedremo più avanti la nostra attenzione ricadrà per la maggiorparte su una sottocategoria dei sistemi detti sistemi lineare tempo-invarianti.

7.1 Introduzione ai sistemi

Vista la parte precedente possiamo ora dare la definizione di sistema. In particolare un sistema nell'ambito della teoria dei segnali è un qualsiasi elemento che trasforma un segnale dato in ingresso in un'altro segnale che verrà prodotto in uscita.

Di seguito possiamo vedere una possibile rappresentazione di un sistema attraverso una rappresentazione dove il sistema è un singolo blocco. In particolare il sistema applica una generica trasformazione T al segnale in ingresso generandone un'altro in uscita.

Data la definizione di sistema possiamo ora elencarne alcuni per fornire degli esempi pratici legati al mondo reale. Sono un'esempi di sistema elementi come:

- **Amplificatori Elettronici:** Questi dispositivi sono in grado di moltiplicare il segnale in ingresso per un certo valore riproducendo in uscita lo stesso segnale ora amplificato di un certo valore.

- **Filtri Analogici:** Questi dispositivi sono in grado di filtrare alcune frequenze di un segnale andando a riprodurre in uscita solo una porzione delle spettro in frequenza del segnale posto in ingresso.

- **Sistemi di trasmissione su lunga distanza:** Anche le trasmissioni a lunghe distanze introducono delle alterazioni sui segnali che quindi possono essere modellati come delle particolari tipologie di sistema.

- **Trasduttori Fisici:** Sono dispositivi in grado di generare, solitamente una tensione o corrente, in base all'ingresso (temperatura, pressione etc...) che viene applicata ad essi.

- **Sistemi di registrazione e successiva riproduzione:** Anche la registrazione di un'immagine o di un suono passano attraverso un sistema che le memorizzi per poi essere riprodotte dopo un certo periodo di tempo.

Concludiamo ora questa prima sottosezione andando a fornire una classificazione delle varie tipologie di sistemi che potremo incontrare:

- **Lineari e non Lineari**: Con questa tipologia di sistemi facciamo riferimento ad un sistema che rispetta i principi di sovrapposizione e omogeneità ovvero che applicano una trasformazione di tipo lineare come somma, sottrazione etc. Sono esclusi da questa categoria tutti i sistemi che non rispettano tali regole. Per esempio un sistema che produce il quadrato del segnale in ingresso non è detto lineare.

- **Senza memoria e con memoria**: I sistemi senza memoria (m emoryless) sono rappresentati dall'insieme di tutti quei sistemi dove l'uscita dipende solo dal valore istantaneo del segnale in ingresso e non conta la storia passata del segnale. Nei sistemi con memoria l'uscita dipende dal valore passato del segnale e non da quello istantaneamente assunto in quel momento.

- **Tempo varianti e tempo invarianti**: Queste tipologie di sistemi sono tali che le caratteristiche dello stesso non cambino nel tempo. Per esempio se un sistema applica un ritardo costante al segnale in ingresso è tempo invariante non lo è un sistema dove le sue caratteristiche (per esempio il valore di amplificazione) cambiano in funzione del tempo.

- **Causali e non causali**: Sono sistemi che rispettano il principio di causa effetto. In questi sistemi l'uscita dipende solo dal presente o dal passato del segnale e mai dal futuro. Per i sistemi non causali questa condizione non viene rispettata. Vediamo subito che tutti i sistemi fisici sono esclusivamente causali.

- **Reali e non reali**: Questa tipologia di sistemi lavora con grandezze reali come tensioni e correnti. Un sistema non reale utilizza valori complessi composti da una parte reale ed una immaginaria.

- **Stabili e non stabili**: Questi sistemi seguono il principio BIBO (Bounded Input Bounded Output) ovvero che ad un ingresso limitato in ampiezza, energia e potenza equivale un'uscita anch'essa limitata. I sistemi non stabili non rispettano questa regola portando alla produzione di segnali in uscita con oscillazioni infinite.

7.2 Classificazione di sistemi

Introdotte le principali classificazioni dei sistemi possiamo ora andare a vedere nel dettaglio alcune di esse.

7.2.1 Sistemi lineari

7.2.2 Sistemi tempo invarianti

7.2.3 Sistemi senza memoria

7.2.4 Sistemi senza memoria e tempo invarianti

7.3 Prodotto di convoluzione

7.3.1 Costruzione grafica

7.3.2 Convoluzione di due porte

7.3.3 Proprietà del prodotto di convoluzione

8 Sistemi LTI

8.1 Risposta all'impulso

8.2 Funzione di trasferimento

8.3 Tipologie di filtri realizzabili

9 Blocchi

10 Segnali Periodici e le loro trasformate

11 Segnali Periodici e le loro trasformate

12 Spettro

12.1 Spettro di energia

12.2 Spettro di potenza

13 Conversione DAC e ADC

Con questa sezione andiamo ad introdurre alcuni concetti fondamentali utili all'introduzione dei segnali numerici detti anche digitali. In particolare ci si soffermerà sul teorema del campionamento e sulla rispettiva conversione tra segnali analogici e digitali (Digital to Analog Conversion e Analog to Digital Conversion).

13.1 Introduzione

Fino ad ora ci siamo fermati a trattare segnali che come abbiamo visto fin dall'inizio erano segnali analogici ovvero continui sia sull'asse dei tempi che sull'asse delle ampiezze.

13.2 Tipologie di segnali

13.3 Campionamento

13.4 Errore di quantizzazione

14 Segnali numerici

15 Sequenze fondametali

16 Esercitazioni

In questa sezione vengono riportate gli esercizi ed i relativi svolgimenti delle esercitazioni svolte in aula durante le lezioni del corso. Ad ogni sottosezione corrisponde una diversa esercitazione. Le esercitazioni sono contrassegnate dalla data di svolgimento e dagli argomenti trattati all'interno di essa. Ogni esercitazione è ulteriormente divisa nel numero di esercizi svolti compresivi di titolo e spiegazione.

16.1 Esercitazione 1 - 01/10/2025

In questa prima esercitazione si vanno ad affrontare esercizi di base sulla teoria dei segnali come il calcolo dell'energia e della potenza. Seguono esercizi sulla distanza tra due segnali per terminare con lo sviluppo di un segnale a partire dagli elementi di una base per terminare con gli sviluppi in serie di Fourier.

16.1.1 Esercizio 1 - Energia di un segnale

All'interno del primo esercizio si chiede di calcolare l'energia dei seguenti segnali:

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} p_{2T}(t) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

$$x_2(t) = p_1(\tfrac{t-2}{4}) e^{-2t} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

$$x_3(t) = A\cos^2(2\pi f_0 t) p_{T_0}(t - \tfrac{T_0}{2}) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

Ricordiamo infine che α, T, $f_0 = \frac{1}{T_0}$ sono tutte costanti reali positive e che la funzione porta $p_a(t)$ è definita nel modo seguente:

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & -a/2 \le t \le a/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Segue la rappresentazione grafica del segnale porta:

Fatta questa introduzione andiamo a capire da quali componenti è composto il primo segnale per poterlo analizzare e calcolarne l'energia. Possiamo vedere che il segnale $x_1(t)$ è composto da un'esponenziale decrescente (la costante α è positiva) moltiplicato per una porta di ampiezza $2T$ centrata nell'origine. In particolare se la porta ha supporto pari a $2T$ ed essendo centrata in zero i suoi estremi andranno da $-T$ a T.

Possiamo subito capire che il segnale $x_1(t)$ non sarà altro che un pezzo del segnale esponenziale dove la porta è uguale ad uno mentre sarà nullo dove la porta ha valore zero. Possiamo andare ad immaginare la porta come un filtro che taglia una parte del segnale a cui è moltiplicata. Intuitivamente si può capire che è così in quanto l'ampiezza della porta è pari ad 1 nel suo supporto mentre è nulla al di fuori.

Capito da che componenti è fatto il nostro segnale li andiamo a rappresentare sul piano e combinare per disegnare il segnale $x_1(t)$ come in figura.

Una volta ottenuta l'espressione del segnale possiamo andare a calcolarne l'energia come l'integrale del modulo quadro del segnale. Seguono i calcoli di quanto appena detto:

$$E(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-T}^{T} \left|e^{-\alpha t}\right|^2 dt = \int_{-T}^{T} e^{-2\alpha t} dt$$

Notiamo come gli estremi di integrazione si restringano al supporto del segnale e come l'operazione di modulo si riduca all'operazione di elevazione al quadrato in quanto il segnale è esclusivamente reale come indicato nel testo dell'esercizio. Inoltre notiamo che la porta non compare all'interno dell'integrale essa infatti scompare in quanto ci indica quali pezzi del segnale considerare. In altri termini più matematici la porta non compare in quanto la sua ampiezza è unitaria e quindi non viene influisce sul calcolo dell'energia. Risolvendo l'integrale si ottiene che:

$$E(x_1) = \int_{-T}^{T} e^{-2\alpha t} dt = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_{-T}^{T}$$

$$E(x_1) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} - \left(-\frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha T}\right) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} + \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha T} = \frac{e^{2\alpha T} - e^{-2\alpha T}}{2\alpha}$$

Non avendo alcun valore numerico da inserire all'interno del risultato trovato possiamo fermarci a questo punto ritenendo l'espressione trovata pari all'energia del segnale preso in analisi.

Passiamo ora al calcolo dell'energia del segnale $x_2(t)$ il quale notiamo essere composto da un esponenziale decrescente e da una porta di ampiezza unitaria alla quale sono state applicate alcune operazioni. Per capire come sia stata traslata e riscalata la porta andiamo a normalizzare la sua espressione nel seguente modo: partiamo dalla sua definizione ed andiamo ad inserire al posto di t il valore che troviamo nell'espressione del segnale, nel nostro caso $\frac{t-2}{4}$, andando poi a normalizzare il secondo membro per ottenere t. Segue quanto appena detto:

$$p_1(t) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$p_1(\frac{t-2}{4}) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq \frac{t-2}{4} \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Moltiplicando per 4 il secondo membro otteniamo che:

$$p_1(\frac{t-2}{4}) = \begin{cases} 1 & -2 \leq t-2 \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Infine sommiamo due per ottenere di nuovo t:

$$p_1(\frac{t-2}{4}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Così facendo abbiamo capito che la nostra porta è stata traslata di due unità verso destra ed ha subito un riscalamento pari a 4. Quanto appena detto si poteva capire intuitivamente guardando l'argomento della porta nell'espressione del segnale.

Andiamo ora a rappresentare le componenti separate ed il segnale $x_2(t)$.

Come nel caso precedente andiamo a calcolarne l'integrale.

$$E(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_0^4 e^{-4t} dt$$

$$E(x_2) = -\frac{1}{4}e^{-4t}\bigg|_0^4 = -\frac{1}{4}e^{-16} + \frac{1}{4} = \frac{1-e^{-16}}{4}$$

Come nel caso precedente il modulo si riduce ad un elevamento al quadrato e gli estremi di integrazione si restringono al supporto del segnale mentre la porta non compare all'interno dell'integrale.

Passiamo infine al terzo segnale che notiamo essere un segnale sinusoidale moltiplicato anch'esso per una porta di ampiezza T_0 a cui sono state fatte delle operazioni. Come fatto prima andiamo a normalizzare la porta.

$$p_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 & -T_0/2 \leq t \leq T_0/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$p_1(t - \frac{T_0}{2}) = \begin{cases} 1 & -T_0/2 \leq t - \frac{T_0}{2} \leq T_0/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In questo caso la porta non è stata riscalata, non è moltiplicata per nessuna costante, ma è solamente traslata di un valore pari a $\frac{T_0}{2}$ verso destra. Andiamo a sommare $\frac{T_0}{2}$ al secondo membro per normalizzarla, ed otteniamo:

$$p_1(t - \frac{T_0}{2}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In definitiva la nostra porta di ampiezza T_0, che ricondiamo essere il periodo, è centrata in $\frac{T_0}{2}$ e si espande dall'origine fino a T_0. Capita come è stata traslata la nostra porta andiamo a rappresentare la funzione $\cos^2(2\pi f_0 t)$ che altro non è che un periodo di un coseno di ampiezza A. Seguono le rappresentazioni delle funzioni e della loro combinazione per formare il segnale.

A questo punto non ci resta che calcolare l'energia del segnale.

$$E(x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_0^{T_0} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) dt$$

Utilizziamo una delle due scomposizioni per riscrivere il coseno e seno al quadrato.

$$\cos^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}\left[1 + \cos(2\alpha)\right]$$
$$\sin^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}\left[1 - \sin(2\alpha)\right]$$

Otteniamo che:

$$E(x_3) = A^2 \cdot \int_0^{T_0} \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(4\pi f_0 t))\right]^2 dt$$

A questo punto moltiplico la costante fuori dall'integrale per $\frac{1}{4}$ con lo scopo di togliere la costante $\frac{1}{2}$ all'interno dell'integrale. Il due diventa quattro in quanto facciamo un'estrazione di potenza.

$$E(x_3) = \frac{A^2}{4} \cdot \int_0^{T_0} \left[(1 + \cos(4\pi f_0 t))\right]^2 dt$$

Fatto ciò posso procedere a svolgere il quadrato ed integrare i singoli componenti. Notiamo come sia possibile applicare ricorsivamente una delle scomposizioni del seno e coseno per semplificare l'espressione.

$$E(x_3) = \frac{A^2}{4} \cdot \int_0^{T_0} 1 + \cos^2(4\pi f_0 t) + 2\cos(4\pi f_0 t)\, dt =$$
$$= \frac{A^2}{4} \cdot \left[\int_0^{T_0} 1\, dt + \int_0^{T_0} \cos^2(4\pi f_0 t)\, dt + \int_0^{T_0} 2\cos(4\pi f_0 t)\, dt\right] =$$

$$= \frac{A^2}{4} \cdot \left[\int_0^{T_0} 1\, dt \int_0^{T_0} \cos^2(4\pi f_0 t)\, dt + \int_0^{T_0} \frac{1}{2}\left[1 + \cos(8\pi f_0 t)\right] dt + \int_0^{T_0} 2\cos(4\pi f_0 t)\, dt\right] =$$

$$= \frac{A^2}{4} \cdot \left[\int_0^{T_0} 1\, dt \int_0^{T_0} \cos^2(4\pi f_0 t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} 1\, dt + \int_0^{T_0} \cos(8\pi f_0 t)\right] dt + \int_0^{T_0} 2\cos(4\pi f_0 t)\, dt\right] =$$

Svolgendo gli integrali, estraendo le costanti e dividendo l'integrale su cui abbiamo operato la trasformazione al passo precedente si ottiene:

$$E(x_3) = \frac{A^2}{4} T_0 + \frac{A^2}{8} T_0 + \int_0^{T_0} \cos^2(4\pi f_0 t)\, dt + \int_0^{T_0} \cos(8\pi f_0 t)\right]\, dt + \int_0^{T_0} 2\cos(4\pi f_0 t)\, dt$$

Possiamo ignorare nei nostri calcoli gli integrali sul periodo - o suoi multipli - di funzioni trigonometriche in quanto essi sono pari a zero. Come possiamo notare tutti gli integrali sono tra zero e T_0 ed in particolare i loro periodi sono pari a $\frac{T_0}{2}$, $\frac{T_0}{4}$ e $\frac{T_0}{2}$ che corrispondono a $\frac{1}{2f_0}$, $\frac{1}{4f_0}$ e $\frac{1}{2f_0}$.

In totale l'energia del segnale è pari a:

$$E(x_3) = \frac{A^2}{4}T_0 + \frac{A^2}{8}T_0 = \frac{3}{8}A^2T_0$$

16.1.2 Esercizio 2 - Potenza media di un segnale

Visto ora il calcolo dell'energia di un segnale passiamo a considerarne la potenza che ricordiamo essere

In particolare è ora richiesto di calcolare la potenza media del seguente segnale:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(t - 2nT_2)$$

dove

$$\phi(t) = 2\sin\left(\frac{2\pi t}{2T_1}\right)p_{T_1}\left(t - \frac{T_1}{2}\right)$$

e T_1 e T_2 sono due costanti reali positive eventi $T_1 < 2T_2$.

Letto il testo del problema andiamo ad analizzare il segnale che ci troviamo davanti. Come prima cosa dobbiamo notare che il segnale $X(t)$ è dato dalla sommatoria di infiniti pezzi, detti $\phi(t)$. Partendo da $\phi(t)$ notiamo come esso non si altro che un segnale sinusoidale moltiplicato per una porta. Il particolare possiamo ricavare il suo periodo nel seguente modo:

$$\sin(\omega t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{2T_1}\right)$$

Nel caso di un segnale standard si ha che $\omega = 2\pi f$ mentre nel nostro caso avremo che $\omega = \frac{\pi}{T_1}$ dopo aver semplificato le costanti. Trovato il valore di omega possiamo ricavare il valore di f, ovvero la frequenza, dalla formula appena scritta.

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \frac{\pi}{T_1} = 2\pi f$$

$$f = \frac{\pi}{2\pi T_1} = \frac{1}{2T_1}$$

Inverto la frequenza ed ottengo il periodo.

$$T = \frac{1}{f} = 2T_1$$

Trovato il periodo della sinusoide andiamo ad analizzare la porta. Come possiamo vedere non è stato effettuato nessun riscalamento ma soltanto una traslazione verso destra di un valore pari a $\frac{T_1}{2}$. Questa operazione rende dunque la funzione pari ad 1 nell'intervallo compreso tra 0 e T_1.

Otteniamo dunque che il segnale $\phi(t)$ altro non è che un la prima mezza parte di una funzione seno con ampiezza pari a 2. Segue lo schema del segnale.

Capito come è fatto il segnale $\phi(t)$ possiamo analizzare il segnale $x(t)$ il quale risulta essere un segnale avente periodo $2T_2$ formato da tante repliche o somme degli infiniti segnali $\phi(t)$ che vengono traslati infinite volte prima e dopo l'origine. Volendo rappresentare il risultato otteniamo la seguente figura:

Possiamo anche scrivere il segnale $x(t)$ effettuandone lo sviluppo attorno all'origine:

$$\ldots\ldots$$

In particolare sappiamo per certezza che le code dell'ennesima $\phi(t)$ non toccheranno la precedente o la successiva in quanto la funzione $x(t)$ ha periodo pari a $2T_2$, mentre le funzioni $\phi(t)$ hanno un periodo pari a T_1 che per definizione è strettamente minore del doppio di T_2.

Andiamo ora a calcolare la potenza media del segnale attraverso due approcci diversi. Nel primo caso possiamo andare ad applicare la definizione vista prima ottenendo quanto segue.

$$P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \left|x(t)\right| dt = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2T_2} \int_{0}^{2T_2} \phi^2(t)\, dt$$

16.1.3 Esercizio 3 - Distanza Euclidea tra due segnali

Affrontata la potenza di un segnale andiamo ora a calcolare la distanza Euclidea tra le seguenti coppie di segnali:

$$x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > 0$$

$$x_2(t) = 2u(t)$$

$$x_3(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{T}\right)^2 & \text{se } 0 \le t \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} -\frac{t}{T} & \text{se } 0 \le t \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ricordiamo infine la definizione di distanza Euclidea:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left|x_1(t) - x_2(t)\right|^2 dt}$$

$$d^2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x_1(t) - x_2(t)\right|^2 dt$$

Partiamo ora dalla prima coppia di segnali. In primo segnale è dato da un'esponenziale decrescente moltiplicato per una funzione gradino $u(t)$ che filtra, per modo di dire, l'esponenziale facendo comparire solo la sua parte positiva.

Il secondo segnale invece è definito da una funzione gradino moltiplicata per una costante. Seguono i grafici dei due segnali $x_1(t)$ e di $x_2(t)$.

Procediamo ora con il calcolo della distanza Euclidea.

$$d^2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x_1(t) - x_2(t)\right|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-\alpha t} - 2\right)^2 dt =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt \ + \int_{0}^{+\infty} 4 \, dt \ + \int_{0}^{+\infty} 4e^{-\alpha t} \, dt = +\infty$$

Come possiamo vedere da quanto appena ricavato l'integrale di 4 tra 0 ed infinito è divergente facendo divergere anche la somma degli integrali e dunque la distanza Euclidea tra i due segnali.

Si poteva inoltre intuitivamente capire il risultato in due modi diversi: guardando il grafico dei segnali e notando che la differenza di area sottese ai due segnali tendesse all'infinito con lo scorrere del tempo oppure notato che il limite verso infinito delle due funzioni fossero finiti ma aventi valori diversi.

Passiamo ora alla seconda coppia di segnali. Prima di tutto dobbiamo andare a riscrivere i segnali non più sotto forma di sistema ma utilizzando una funzione porta moltiplicata al segnale. In particolare il primo segnale dovrà assumere il suo valore tra 0 e T, dunque verrà moltiplicato per una porta di ampiezza T traslata di $\frac{T}{2}$ verso destra. Procediamo in modo analogo per il secondo segnale ottenendo i seguenti risultati.

$$x_3(t) = \left(\frac{t}{T}\right)^2 \cdot \ p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$x_4(t) = -\frac{t}{T} \cdot p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

In definitiva possiamo tracciare un grafico dei segnali ottenuti.

Ora non ci resta che calcolare la distanza Euclidea tra i segnali ottenuti.

$$d^2(x_3, x_4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x_3(t) - x_4(t)\right|^2 dt = \int_{0}^{T} \left[\frac{t^2}{T^2} + \frac{t}{T}\right]^2 dt =$$

$$= \int_{0}^{T} \frac{t^4}{T^4} dt \ + \int_{0}^{T} \frac{t^2}{T^2} dt \ + 2 \int_{0}^{T} \frac{t^3}{T^3} dt \ =$$

$$\left.\frac{t^5}{5T^4}\right|_0^T + \left.\frac{t^3}{3T^2}\right|_0^T + 2\left.\frac{t^4}{4T^3}\right|_0^T =$$

$$= \frac{T}{5} + \frac{T}{3} + \frac{T}{2} = \frac{31}{30}T$$

In definitiva si avrà che la distanza Euclidea sarà pari a $\sqrt{\frac{31}{30}T}$.

16.1.4 Esercizio 4 - Sviluppo di un segnale dalla base

Dati i segnali ortonormali riportati di seguito si sviluppi la funzione $z(t)$:

$$z(t) = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) + \sin(\pi t)$$

Come abbiamo visto in precedenza sviluppare una funzione $z(t)$ su una base ortonormale $(w_1(t),\ w_2(t),\ \ldots,\ w_n(t)$ significa scrivere $z(t)$ come combinazione lineare dei segnali che compongono la base come:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i(t) = \alpha_1 w_1(t) + \alpha_2 w_2(t) + \alpha_3 w_3(t)$$

In particolare i coefficienti si ottengono tramite l'operazione di prodotto scalare così definito:

$$\alpha_i = \langle z, w_i \rangle \ \text{ con } \ i = 1,\ \ldots,\ n$$

Infine prima di iniziare a fare i calcoli possiamo notare come la funzione $z(t)$ sia scomponibile come somma di tre pezzi diversi. Andremo dunque - essendo il prodotto scalare dotato di proprietà di linearità - a calcolare il prodotto scalare di ogni elemento della base per ognuno delle tre funzioni che compongono $z(t)$.

Prima di iniziare andiamo a rappresentare le tre funzioni che sommate ci danno $z(t)$.

$$z_1(t) = \frac{1}{2} \qquad z_2(t) = \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) \qquad z_3(t) = \sin(\pi t)$$

Procediamo ora svolgendo i prodotti scalari così definiti secondo la proprietà di linearità:

$$\langle z, w_1 \rangle = \langle z_1, w_1 \rangle + \langle z_2, w_1 \rangle + \langle z_3, w_1 \rangle$$
$$\langle z, w_2 \rangle = \langle z_1, w_2 \rangle + \langle z_2, w_2 \rangle + \langle z_3, w_2 \rangle$$
$$\langle z, w_3 \rangle = \langle z_1, w_3 \rangle + \langle z_2, w_3 \rangle + \langle z_3, w_3 \rangle$$

Seguono i calcoli di tutti i prodotti scalari sopra riportati. Si noti come per alcuni di essi è stato adottato un approccio grafico andando a moltiplicare una delle parti della funzione $z(t)$ con uno degli elementi della base.

Iniziamo con l'elemento di base w_1.

$$\langle z_1, w_1 \rangle = \int_0^4 z_1(t) w_1(t)\, dt = 0$$

In particolare analizzando il grafico del segnale prodotto dentro il segno di integrale notiamo essere dispari rispetto la centro dell'intervallo di integrazione dunque il suo valore è nullo.

$$\langle z_2, w_1 \rangle = 2 \int_0^2 \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) dt = \frac{4}{\pi} \sin\left(\right)$$

16.1.5 Esercizio 5 - Sviluppo in serie di Fourier I

Dato il segnale a energia finita $x(t) = p_\tau(t)$ con $\tau < T$. Se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $(-T, T)$, ossia:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{2T}nt} \text{ con } \mu_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) e^{j\frac{2\pi}{2T}nt} dt$$

Iniziamo subito andando andando a vedere che il segnale $x(t)$ è una porta di ampiezza unitaria e larghezza pari a τ che si espande da $-\frac{\tau}{2}$ a $\frac{\tau}{2}$.

Capito che segnale stiamo trattando andiamo subito a calcolare il valore di μ_n ovvero il valore dei coefficienti.

$$\mu_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\, dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \frac{T}{-j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{-j2\pi n} \left[e^{-j\frac{2\pi}{T}n\frac{\tau}{2}} - e^{j\frac{2\pi}{T}n\frac{\tau}{2}}\right]$$

Possiamo riscrivere il risultato ricordando che:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \\ \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \end{cases}$$

Otteniamo dunque che:

$$\frac{1}{-j2\pi n} \left[-2j \sin(n\pi \frac{\tau}{T}) \right]$$

Semplificando le costanti abbiamo che:

$$\frac{\sin(n\pi \frac{\tau}{T})}{\pi n}$$

Moltiplico numeratore e denominatore entrambi per $\frac{\tau}{T}$

$$\frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\pi\frac{\tau}{T})}{\pi n\frac{\tau}{T}}$$

Ricordiamo ora la definizione della funzione $\mathrm{sinc}(x)$ nel modo seguente:

$$\mathrm{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Si ottiene dunque che:

$$\frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\pi\frac{\tau}{T})}{\pi n\frac{\tau}{T}} = \frac{\tau}{T}\,\mathrm{sinc}(n\frac{\tau}{T})$$

In definitiva, calcolati ora i coefficienti μ_n possiamo scrivere lo sviluppo in serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_n = \mathrm{sinc}(n\frac{\tau}{T}) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}$$

Notiamo infine come si sia alleggerita la notazione sulla sommatoria dove scriveremo solo n con lo scopo di intendere la sommatoria di tutti gli n da $-\infty$ a $+\infty$.

16.1.6 Esercizio 6 - Sviluppo in serie di Fourier II

Arriviamo ora all'ultimo esercizio dove dato il segnale $f(t)$ ad energia finita riportato nella figura sottostante viene chiesto di calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier. È inoltre noto che il segnale è definito sull'intervallo $(-3T, +3T)$ ed assume ampiezza pari a $2A$ nella porta centrata nell'origine mentre assume ampiezza pari ad A sulle due porte centrate in $-2T$ e $+2T$. Sappiamo infine che le porte anno tutte supporto pari a τ.

Prima di cominciare a fare calcoli andiamo a fare delle considerazioni che potrebbero aiutarci nella risoluzione dell'esercizio. In particolare notiamo come ci sia possibile sviluppare in serie di Fourier la funzione $p_\tau(x)$ - opportunamente traslata e riscalata - per poi inserire lo sviluppo calcolato nell'espressione di $f(t)$.

Possiamo dunque riscrivere la funzione $f(t)$ - ovvero come la somma delle tre porte - nel modo seguente:

$$f(t) = A[2p_\tau(t) + p_\tau(t-2T) + p_\tau(t+2T)]$$

16.2 Esercitazione 2 - 07/10/2025

In questa esercitazione andremo ad affrontare alcuni esercizi sul calcolo della trasformata di Fourier prima applicandone la definizione e poi utilizzando trasformate a noi già note a cui applicheremo le giuste proprietà per ottenere il risultato voluto. Infine vedremo anche come in alcuni casi il calcolo di potenza ed energia possa essere svolto anche nello spazio delle frequenze e non in quello dei tempi.

16.2.1 Esercizio 1 - Trasformata di Fourier di segnali

Iniziamo ora con il primo esercizio dove ci viene chiesto di calcolare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali:

$$s_1(t) = e^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > 0$$
$$s_2(t) = e^{-2t+4}u(t-2)$$
$$s_3(t) = e^{-\frac{t}{2}}\cos(100\pi t)u(t)$$
$$s_4(t) = 10\,\mathrm{sinc}^2(t)\ \cos(300\pi t + \frac{\pi}{6})$$
$$s_5(t) = \ \mathrm{tri}(\tfrac{t-1}{2})e^{-j200\pi t}$$

Iniziamo dal primo segnale alla quale andremo ad applicare la definizione di trasformata di Fourier svolgendo il calcolo dell'integrale. Seguendo la definizione della trasformata vista sopra possiamo procedere:

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t(\alpha+j2\pi f)}\,dt$$

Risolviamo ora l'integrale notando come l'intervallo di integrazione sia limitato da zero ad infinito dato che la funzione risulta essere nulla al di fuori di esso. Calcoliamo la trasformata:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t(\alpha+j2\pi f)}\,dt = -\frac{1}{\alpha+j2\pi f}e^{-t(\alpha+j2\pi f)}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha+j2\pi f}$$

In particolare notiamo come l'integrale dunque la trasformata esiste solo nel caso il cui il valore di α sia strettamente maggiore di zero facendo convergere l'integrale. Inoltre il termine che che andiamo a calcolare in zero e $+\infty$ possiamo scomporlo con due esponenziali - modulo e fase - notando come quando si sostituisce infinito il modulo tenda a zero mentre la fase oscilli ad frequenza infinita. Quando invece sostituiamo il valore 0 otteniamo 1 come semplificazione dei due esponenziali cambiati di segno.

D'ora in poi non andremo quasi mai ad utilizzare la definizione di trasformata di Fourier attraverso il calcolo integrale ma utilizzando trasformate di funzioni già note unite tra loro attraverso opportune proprietà. Detto ciò passiamo al calcolo delle altre trasformate.

$$s_2(t) = e^{-2t+4}u(t-2)$$

Come possiamo vedere il segnale è formato da un'esponenziale decrescente moltiplicato per un gradino traslato verso destra di due unità. Il segnale risulta avere il seguente grafico:

In particolare possiamo notare come l'esponenziale possa essere riscritto come $e^{2(t-2)}$ e sostituendo il valore $t-2$ con t si ottiene una nuova funzione equivalente

Infine possiamo comunque mostrare come si potesse arrivare allo stesso risultato attraverso il calcolo integrale e la definizione di trasformata di Fourier.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{2}^{+\infty} e^{-2t+4}e^{-j2\pi ft}\,dt = e^4 \cdot \int_{2}^{+\infty} e^{-t(2+j2\pi f)}\,dt$$

Imponendo che $a = 2 + j2/\pi f$ si ottiene il seguente integrale:

$$\int_{2}^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{e^{-2a}}{a}$$

Sostituendo si ottiene che:

$$e^4 \cdot \int_{2}^{+\infty} e^{-t(2+j2\pi f)}\,dt = e^4 \frac{e^{-2(2+j2\pi f)}}{2+j2\pi f} = \frac{e^{4-4}e^{-j2\pi f}}{2+j2\pi f} = \frac{e^{-j2\pi f}}{2+j2\pi f}$$

Passiamo ora al segnale successivo

$$s_3(t) = e^{-\frac{t}{2}}\cos(100\pi t)u(t)$$

Proseguiamo con il prossimo segnale:

$$s_4(t) = 10\,\mathrm{sinc}^2(t)\cos(300\pi + \frac{\pi}{6})$$

Iniziamo analizzando il segnale proposto composto da un segnale sinc() moltiplicato per un segnale sinusoidale cos() avente una fase diversa da zero la quale implica che non si possa utilizzare la modulazione come nell'esempio visto in precedenza.

16.2.2 Esercizio 2 - Trasformata e serie di Fourier di un segnale triangolare

Passiamo ora al secondo esercizio andando a calcolare la trasformata di Fourier del segnale onda triangolare riportato di seguito calcolando anche i coefficienti delle serie di Fourier del segnale stesso.

16.2.3 Esercizio 3 - Passaggio da tempo a frequenza

16.2.4 Esercizio 4 - Energia di un segnale

16.3 Esercitazione 3 - 15/10/2025

16.3.1 Esercizio 1 - Linearità e tempo-invarianza di un sistema

16.3.2 Esercizio 2 - Studio sistema LTI

16.3.3 Esercizio 3 - Uscita di un sistema data la sua risposta impulsiva

16.3.4 Esercizio 4 - Uscita di un sistema data la sua risposta impulsiva I

16.3.5 Esercizio 5 - Risposta all'impulso di un sistema con onda quadra in ingresso

16.3.6 Esercizio 6 - Uscita di un sistema data la sua risposta impulsiva II