Teoria ed Elaborazione
02MOOOA
Prof.ssa Gabriella Bosco
Prof. Fabio Dovis

Francesco Abrami - s310570

A.A. 2025 - 2026

Versione: 22.11.3 - 25/11/2025

Politecnico di Torino

Indice

1 Introduzione Generale

1.1 Suddivisione Corso

Il corso è strutturato come molti altri evidenziando tre diversi momenti lezioni, esercitazioni ed homework. Per quanto riguarda il materiale trattato fare riferimento all'indice di questo documento.

1.2 Materiale

Questo elaborato si basa principalmente sul materiale fornito durante il corso, tra cui slide, esercizi, temi d'esami ed homework. L'elaborato segue il programma del corso nel modo più fedele possibile anche se l'ordine con cui il materiale viene trattato potrebbe non corrispondere allo svolgimento delle lezioni tenute in aula. Infine si sottolinea la presenza di vari approfondimenti sugli argomenti indicati come extra, che richiedono uno studio autonomo da parte dello studente. Queste informazioni sono state tratte in parte dai testi consigliati per il corso:

Nell'eventualità in cui il lettore in possesso di questo elaborato abbia individuato degli errori, inesattezze o voglia proporre delle migliorie non esiti a contattare il seguente indirizzo di posta elettronica: francesco.abrami@studenti.polito.it

1.3 Lezioni Esercitazioni ed Homework

Lezioni, esercitazioni ed homewrok si svolgono nelle stesse aule. Per gli homework é richiesta della preparazione preliminare al fine di svolgere correttamente tutte le attività utilizzando lo slot per verificare quanto fatto. Le sezioni finali di questo elaborato propongono riassunte le spiegazioni delle esercitazioni e degli homework affrontati durante il corso. Ricordiamo che gli homework, ovvero esercitazioni al computer, svolti con l'utilizzo di Matlab o Python sono facoltativi e possono portare fino ad un massimo di due punti al punteggio ottenuto all'esame.

Infine segue ora un velocissimo elenco delle abilità che verranno acquisite all'interno del corso:

- Classificazioni dei segnali.
- Tecniche di analisi in frequenza dei segnali a tempo continuo.
- Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI), e la loro rappresentazione nel dominio del tempo e della frequenza.
- Tipologie fondamentali di filtri lineari.
- Processi stocastici (casuali) e loro rappresentazione spettrale.
- Tecniche per il passaggio da segnali a tempo continuo ai segnali a tempo discreto, e viceversa.
- Tecniche per l'elaborazione in frequenza dei segnali a tempo discreto.
- Tecniche per l'analisi dei sistemi LTI a tempo discreto e trasformata Z.
- Tecniche di filtraggio numerico, tipologie di filtri numerici (FIR, IIR).

1.4 Prova d'Esame

L'esame finale si basa su uno scritto obbligatorio, costituito da domande ed esercizi a risposta multipla) e un orale opzionale (a discrezione dello studente o del docente).
In particolare il tempo a disposizione dello studente per la prova scritta (su piattaforma Exam o supporto cartaceo) è di 90 minuti e non è possibile consultare materiale didattico né appunti o altri testi. È consentito utilizzare esclusivamente la calcolatrice e un formulario fornito dal docente.
Infine esiste la possibilità di sostenere un'esame orale alla quale per essere ammessi occorre ottenere un voto alla prova scritta superiore o uguale a 15/30. L'orale ha una durata di circa

15 minuti, e riguarda tutti gli argomenti trattati nelle lezioni e nelle esercitazioni.

Ricordiamo infine che esempi di esami scritti degli anni precedenti saranno messi a disposizione attraverso il portale della didattica.

2 Domande

3 Concetti fondamentali

3.1 Numeri complessi

3.2 Serie numeriche

3.3 MATLAB

4 Richiami di algebra lineare e geometria - ALG

All'interno di questa sezione andremo a ripassare i concetti fondamentali dell'algebra e della geometria introdotti nel corso di Algebra Lineare e Geometria.

Questa sezione si colloca all'inizio del documento in quanto dovrebbe contenere nozioni già apprese dallo studente ma alla quale possiamo dare comunque uno sguardo per un veloce ripasso. In particolare questa parte si colloca prima della trattazione dei segnali come vettori introdotti alla fine del terzo capitolo sulla trattazione dei segnali analogici.

4.1 Metrica

Iniziamo il nostro ripasso andando a vedere come prima cosa la definizione di metrica riportata di seguito.

Definizione 4.1 (**Metrica**).

Sia V un insieme (in particolare, uno spazio vettoriale reale o complesso). Si dice metrica (o funzione distanza) su V una funzione

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$

la quale associa a ogni coppia di punti (o vettori) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ *un numero reale* $\boldsymbol{d(x,y)}$ *chiamato distanza tra x e y, tale che siano verificate le proprietà fondamentali.*

Seguono le proprietà fondamentali della metrica:

- **Non negatività:**

  $$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

  Questa proprietà conferma la non negatività dell'operazione. In altri termini, considerando la metrica come distanza, possiamo dire che non esistono distanze negative.

- **Identità dell'indiscernibile:**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Questa proprietà afferma che se la metrica tra due elementi di V è nulla allora i due elementi sono lo stesso. In altri termini, considerando la metrica come distanza, possiamo dire che un punto avente distanza nulla da un altro è il punto stesso.

- **Simmetria:**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

Questa proprietà afferma che la metrica è un'operazione simmetrica. Possiamo dire solo in termini informali che essa sia commutativa come le operazioni algebriche. Ragionando sempre in termini di distanza lo spazio che separa due punti è lo stesso che io lo misuri a partire dal primo o dal secondo.

- **Disuguaglianza triangolare:**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \;\leq\; d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;+\; d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Questa proprietà afferma che la distanza tra due punti sia sempre minore della somma delle distanze tra i due punti passando per un terzo punto che non si trova sulla direttrice dei primi due. A livello concettuale preserva l'idea che ogni percorso intermedio è almeno lungo quanto quello diretto e assicura la coerenza geometrica dello spazio metrico.

Notiamo infine come la distanza Euclidea tra vettori soddisfa tutte le precedenti condizioni, ed è dunque una possibile metrica all'interno di uno spazio opportuno.

4.2 Spazio vettoriale

Passiamo ora oltre andando a definire uno spazio vettoriale (S.V.) dandone la definizione ed elencando le operazioni che è possibile effettuare su di esso.

Definizione 4.2 (**Spazio vettoriale**).
Sia $\mathbb{K}$ un campo (ad esempio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è un insieme V i cui elementi si chiamano vettori, su cui sono definite due operazioni: somma vettoriale e moltiplicazione per scalare.

Seguono le operazioni definite su uno spazio vettoriale:

- **Somma vettoriale** $(+)$ **:**

$$V \times V \to V, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

- **Moltiplicazione per scalare** $(\cdot)$ **:**

$$\mathbb{K} \times \to V, \quad (\alpha, \mathbf{v}) \to \alpha\mathbf{v}$$

Queste operazioni appena elencate devono soddisfare le seguenti otto proprietà fondamentali per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in$ V e α, $\beta \in \mathbb{K}$. Sono riportate di seguito le proprietà fondamentali della somma vettoriale e del prodotto per scalare. Le prime quattro fanno riferimento alla somma vettoriale mentre le altre quattro si riferiscono al prodotto per scalare.

- **Associatività:**
- **Commutatività:**
- **Elemento neutro:**
- **Elemento opposto:**
- **Associatività rispetto ai prodotti scalari:**
- **Elemento neutro dello scalare:**
- **Distributività rispetto alla somma di vettori:**
- **Distributività rispetto alla somma di scalari:**

4.3 Norma e distanza

Passiamo oltre ed andiamo ad introdurre ora i concetti di norma

5 Introduzione al corso

5.1 Segnali

Iniziamo ora dando un piccolo sguardo a questo corso facendo dei piccoli esempi per avvicinarci, seppur in maniera approssimativa, agli argomenti che tratteremo.
In particolare questa sezione è pensata per introdurre diversi concetti, in modo del tutto approssimativo, per gettare delle basi di quello che verrà trattato in seguito all'interno di questo documento. I concetti all'interno di questa sezione potranno sembrare buttati a caso o addirittura sopraffare il lettore ma ricordiamo che questa non è altro che un'introduzione e che tutti i concetti verranno trattati in modo esaustivo nel resto dell'elaborato.

Iniziamo dando la definizione di **segnale** che in maniera del tutto generale può essere definito come *"una funzione reale o complessa nella variabile tempo"* ed in particolare possiamo dire che l'informazione trasportata da un segnale è contenuta nella *"forma"* del segnale stesso ovvero nella sua evoluzione nel tempo.

5.1.1 Tipologie di segnali

In particolare possiamo fin da subito fare degli esempi di alcune tipologie di segnali che sono rilevanti dal punto di vista ingegneristico. Tra queste tipologie troviamo:

- Segnale **elettrico**

- Segnale **vocale**
- Segnale **audio**
- Segnale **dati**

In particolare partiamo fin da subito prendendo in esempio un segnale elettrico che nella maggior parte dei casi pratici è il segnale maggiormente utilizzato per la propagazione dell'informazione che essi trasportano ma che non per forza sia il segnale che originariamente avevamo preso in analisi.
In particolare ci è possibile passare da una tipologia di segnale ad un'altra attraverso dei componenti detti **trasduttori** ossia dispositivi che convertono una qualsiasi grandezza scalare in un segnale elettrico indipendentemente dalla loro natura (diretto, variabile, sinusoidale o pulsante). Si utilizza principalmente il segnale elettrico come output dei trasduttori in quanto possiamo maneggiarlo in modo molto più semplice e comodo rispetto ad altre forme.
Evidenziamo ora alcune tipologie di trasduttori tra cui troviamo:

- **Pressione sonora** (audio, microfono)
- **Intensità luminosa** (immagini e video)
- **Velocità**, **temperatura**, etc.

5.2 Possibili operazioni sui segnali

Introdotto ora il concetto di segnale e di trasduttore andiamo a vedere alcune possibili operazioni che possiamo effettuare sul segnale che stiamo analizzando. In particolare ci è possibile effettuare principalmente operazioni di:

- **Elaborazione:** questa operazione ci permette di raggiungere vari obiettivi che possono essere: l'eliminazione di rumore, l'estrazione di componenti più rilevanti per le successive elaborazioni oppure la capacità di filtrare componenti spurie generate dai trasduttori.
- **Trasmissione:** con questa operazione ci è possibile trasportare l'informazione contenuta nel segnale per una certa distanza, al fine di essere fruita in un posto diverso da quello dove è stata generata. Questa operazione è al centro dello studio delle telecomunicazioni.
- **Memorizzazione:** capacità di conservare l'informazione contenuta nel segnale rendendola fruibile anche a distanza di tempo.

5.3 Segnali analogici digitali e la loro trasmissione

Prima di proseguire oltre andiamo a dare una doverosa definizione delle differenti tipologie di segnale che andremo ad analizzare. In particolare possiamo individuare due tipologie fondamentali di segnali:

- **Analogici:** Rientrano in questa categoria tutti quei segnali che sono continui nel tempo e nella loro ampiezza ovvero possono assumere qualsiasi valore in un qualsiasi istante di tempo. Per fare degli esempi una sinusoide è un segnale analogico in quanto è infinitamente continua nel tempo ma limitata in ampiezza. In particolare un segnale analogico in quanto continuo nel tempo ammette anche variazioni istantanee in ampiezza anche infinite in quanto ammesse dalla sua stessa definizione.

- **Digitali o Numerici:** Rientrano invece in questa categoria tutti quei segnali che assumo valori discreti nel tempo, ovvero non sono più continui, mentre in ampiezza possono assumere un numero finito di valori.

Vedremo inoltre come esista una categoria di segnali a tempo discreto ma continui in ampiezza che verranno approfonditi nella seconda parte del corso. In particolare questi segnali sono fondamentali nell'ambito dell'elaborazione numerica degli stessi.

5.3.1 Scomparsa dei sistemi analogici

5.4 Conversione analogico digitale - ADC

5.5 Possibili Applicazioni dell'Analisi ed Elaborazione dei Segnali

Concludiamo ora questa sezione andando ad elencare velocemente quali possono essere delle possibili applicazioni dell'analisi ed elaborazione dei segnali.

6 Segnali Analogici

Iniziamo ora a trattare la prima tematica che incontriamo in questo corso di teoria ed elaborazione dei segnali la quale è rappresentata dai segnali analogici.

6.1 Introduzione ai segnali analogici reali e complessi

In particolare andremo a trattare i segnali che definiremo segnali analogici a tempo continuo di cui diamo la definizione di seguito. Un segnale analogico reale a tempo continuo è una funzione reale di variabile reale (tempo) - indicata con la lettera t al posto della x - che assume valori significativi per qualunque tempo t. Inoltre il tempo non è discretizzato il che rende il segnale sempre continuo e non risulta essere composizione di una serie o un susseguirsi di tanti valori puntuali ravvicinati.

Notiamo infine come non si pongano restrizioni del segnale nel suo sviluppo - e continuità - lungo l'asse y, per quanto ne sappiamo il segnale può essere discontinuo nella sua ampiezza.

Introdotti i suddetti segnali analogici reali passiamo a considerare i segnali analogici complessi. Tali tipologie di segnali non sono altro che funzioni a valori complessi (ma sempre della variabile reale tempo *"continuo"*) che mappano R $\rightarrow$ C.

Seppur possa sembrare strano dover utilizzare una funzione a valori complessi, che ricordiamo avere invece variabile reale, per trattare lo studio di un segnale basti sapere che questa trattazione porta diversi vantaggi nello sviluppo di un modello di segnali di tipo sinusoidale o pseudo-sinusoidale ovvero modulati attorno ad una sinusoide. In particolare volendo fare un piccole esempio si pensi al seguente segnale, avente f_0 costante, introdotto nei corsi passati di Fisica II ed Elettrotecnica:

$$f(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

Per vari motivi, che vedremo in seguito, ci può essere utile rappresentare questo segnale come un segnale a valori complessi con espressione:

$$f'(t) = a(t) \cdot e^{i\phi(t)}$$

dalla quale ci è possibile, per sinusoidi pure introdurre il concetto di fasore:

$$f'(t) = a \cdot e^{i\phi}$$

Vediamo infine delle possibili rappresentazioni di segnali complessi introducendo anche alcune formule di conversione. In particolare ci è possibile trattare un segnale complesso come un segnale composto da una parte reale ed una parte immaginaria secondo la seguente espressione:

$$f(t) = f_r(t) + i \cdot f_i(t)$$

Dove diamo per scontato, secondo la definizione, che la parte reale di $f_r(t)$ e la parte immaginaria siano le seguenti:

$$\Re[f(t)] \triangleq f_r(t) \qquad \Im[f(t)] \triangleq f_i(t)$$

Infine possiamo scrivere la nostra funzione complessa in forma polare anche detta modulo-fase, la quale risulta essere:

$$f(t) = \big|f(t)\big| \cdot e^{i \cdot \arg(f(t))}$$

dove la funzione $\arg(f(t))$ è ottenuta tramite l'arcotangente del rapporto tra $f_i(t)$ e $f_r(t)$. Seguono ora per completezza le formule di conversione, calcolo del modulo e della funzione argomento.

$$\arg(f(t)) = \arctan\left(\tfrac{f_i(t)}{f_r(t)}\right) \qquad \big|f(t)\big| = \sqrt{f_r^2(t) + f_i^2(t)}$$

$$f_r(t) = \big|f(t)\big| \cos(\arg(f(t))) \qquad f_i(t) = \big|f(t)\big| \sin(\arg(f(t)))$$

6.1.1 Richiami sui numeri complessi

6.2 Classificazione dei segnali analogici

Fatta questa doverosa introduzione possiamo ora passare ad analizzare e classificare le varie tipologie di segnali analogici in base a delle loro caratteristiche specifiche. Anticipando cosa andremo a vedere tra poco elenchiamo ora i tipi di classificazione che utilizzeremo: a supporto limitato, ad ampiezza limitata, impulsivo ad energia media finita, a potenza media finita e periodico o aperiodico.

6.2.1 Segnali a supporto temporale limitato

Iniziamo ora con la prima classificazione che utilizza come criterio la limitatezza del supporto del segnale preso come campione. Per supporto temporale o semplicemente supporto, intendiamo l'intervallo di tempo all'esterno del quale il segnale è nullo. Nello specifico un segnale si definisce a supporto limitato quando il suo supporto è finito come rappresentato nella figura seguente:

In particolare il segnale dell'immagine è limitato in quanto assume un valore diverso dallo zero per un intervallo limitato (da t_1 a t_2) ed ha inoltre una durata pari a $t_2 - t_1$.

Introdotto ora questa tipologia di segnali andiamo a fare un breve commento sulla loro applicazione in campo fisico/ingegneristico nello specifico un qualsiasi segnale ha tipicamente sempre un inizio ed una fine nel tempo il che li rende a supporto limitato.

Tuttavia, solitamente per ragioni di semplicità matematica, spesso è comodo considerarli a supporto temporale illimitato. Ci è possibile fare ciò in quanto spesso la porzione di segnale analizzata è irrisoria rispetto alla sua durata complessiva per cui possiamo considerarlo come uno con supporto illimitato.

Ad esempio: l'oscillatore che dà il clock ad una CPU è *"fisicamente"* attivo solo su un supporto temporale limitato (anche se estremamente lungo) ma lo si rappresenta spesso matematicamente come una onda quadra (o sinusoidale) di durata infinita per i motivi di cui sopra.

6.2.2 Segnali ad ampiezza limitata

6.2.3 Segnali impulsivi

6.2.4 Segnale fisico

6.3 Energia e potenza di un segnale

Introdotti le principali tipologie di segnale possiamo ora andare a definire l'energia e la potenza di un segnale come vediamo di seguito.

Teorema (Energia di un segnale).

$$E(x) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt$$

In parole si definisce energia di un segnale l'integrale del modulo al quadrato del segnale stesso calcolato sul supporto del segnale.

Per quanto riguarda la potenza di un segnale andiamo ad introdurre delle differenze tra potenza istantanea e potenza media. Notiamo inoltre come d'ora in poi faremo riferimento a termine potenza media con il termine potenza mentre dovremo sempre specificare i casi in cui parliamo di potenza istantanea.

Teorema (Potenza di un segnale).

$$P_{ist} = \left|x(t)\right|^2$$

$$P_{avg}(x) \triangleq \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \left|x(t)\right|^2 dt$$

Date le definizioni possiamo vedere come la potenza istantanea non sia altro che una funzione del tempo che coincide con il modulo al quadrato del segnale mentre la potenza media non è più una funzione del tempo ma è un numero che corrisponde alla media *"temporale"* della potenza istantanea ovvero del quadrato del segnale.

Infine Come vedremo più nel dettaglio più avanti, è spesso utile introdurre la *"media temporale"* di una generica funzione del tempo $y(t)$ con questa definizione:

$$< y(t) >=$$

6.3.1 Segnali ad energia finita

6.3.2 Segnali a potenza finita

6.3.3 Segnali periodici

6.4 Esempi numerici

6.4.1 Energia di un esponenziale decrescente

Si consideri ora il seguente segnale $x(t) = u(t)e^{-\alpha t}$ dove $u(t)$ è la funzione gradino unitario. Si voglia ora calcolare l'energia del segnale.

Partiamo facendo delle considerazioni sul supporto del segnale che non è limitato in quanto prima di zero è nullo ma da li in avanti decresce come una coda di esponenziale ma non sarà mai nulla per le proprietà stesse della funzione. Detto ciò proseguiamo calcolando l'energia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}\ dt = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha} \bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

Come abbiamo visto applicando la definizione di energia al segnale ed integrando opportunamente sul suo supporto otteniamo la sua energia.

6.4.2 Potenza di un segnale sinusoidale

Passiamo ora al calcolo della potenza del generico segnale $x(t) = \mathrm{A} \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ con A, f_0 e ϕ generiche costanti positive diverse da zero.

Iniziamo scrivendo la definizione di potenza di un segnale:

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \left|x(t)\right|^2 dt = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi)$$

Procediamo ora portando fuori dall'integrale le costanti e spezzando l'integrale sotto il simbolo del limite. Ricordiamo che ci è possibile spezzare questo integrale riscrivendo il seno al quadrato come uno più il seno con l'argomento anch'esso moltiplicato per due tutto fratto due.

$$\lim_{a\to\infty} \frac{A^2}{2a} \left[\int_{-a}^{a} \frac{1}{2} dt + \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + \phi) dt \right] = \lim_{a\to\infty} \frac{A^2}{2a} \left[\frac{2a}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(4\pi f_0 t + 2\phi)}{4\pi f_0} \Bigg|_{-a}^{a} \right]$$

Svolgendo i calcoli otteniamo che:

$$\frac{A^2}{2} + \lim_{a\to\infty} \frac{A^2}{4a} \frac{\sin(4\pi f_0 a + 2\phi) - \sin(-4\pi f_0 a + 2\phi)}{4\pi f_0} = \frac{A^2}{2}$$

In definitiva possiamo dire che questo calcolo della potenza di un segnale sinusoidale verrà incontrato moltissime volte all'interno del corso motivo per cui è bene ricordarlo in quanto potrebbe ritornare utile in futuro.

6.5 Rappresentazione vettoriale di un segnale

Dopo aver affrontato gli argomenti precedenti passiamo ora all'interpretazione dei segnali a tempo continuo come spazi vettoriali. Prima di tutto ci è necessario aver ben presenti alcuni concetti fondamentali dell'algebra lineare e della geometria. Questi concetti sono riportati nel primo capitolo di questo manuale con lo scopo di essere utilizzati come ripasso al fine di affrontare questa sezione nel modo corretto.

7 Rappresentazione vettoriale dei segnali

7.1 Esempio di applicazione della rappresentazione geometrica

Concludiamo questa sezione andando ora a vedere delle particolari applicazioni delle rappresentazioni geometriche andando anche ad introdurre alcune tipologie particolari di segnali.

7.1.1 La funzione porta nel tempo

7.2 Funzione delta di Dirac

7.2.1 Proprietà della delta di Dirac

Andiamo ora a definire delle proprietà utili della funzione delta di Dirac.

Proprietà 7.1 (**Area della delta di Dirac**).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\Delta t}(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t = 1$$

Come possiamo vedere dalla definizione appena data la funzione delta di Dirac ha un'area pari ad uno dunque unitaria. Notiamo invece, secondo la proprietà che segue, che l'energia della delta è infinita.

Proprietà 7.2 (**Energia della delta di Dirac**).

$$E(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t))^2 dt = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (p_{\Delta t}(t))^2 dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot \Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} = \infty$$

Proprietà 7.3 (**Segnale continuo moltiplicato per una delta**).

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Segue la dimostrazione di quanto abbiamo appena detto.

$$Dim: \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot p_{\Delta t}(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot x(0) \cdot \Delta t = x(0)$$

Come abbiamo visto nel momento in cui andiamo a moltiplicare un qualsiasi segnale continuo per una delta di Dirac, opportunamente centrata in $x_0 = 0$, otterremo una delta centrata nello stesso punto ma avente un'altezza pari a quella del segnale continuo in quel dato punto. In particolare la proprietà appena vista sarà fondamentale, all'interno di questo corso, nella sua forma generalizzata mostrata di seguito.

Proprietà 7.4 (**Campionamento tramite delta di Dirac**).

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

Segue la dimostrazione di quanto appena detto.

$$Dim: \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot p_{\Delta t}(t - t_0)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot x(t_0) \cdot \Delta t = x(t_0)$$

In questo caso più generalizzato possiamo andare a moltiplicare un segnale continuo per una delta di Dirac posizionata in qualsiasi istante di tempo. Come per la proprietà precedente la delta moltiplicata per il segnale resta centrata nel punto originale ma assume il valore del segnale per cui è moltiplicata in quel punto.

In particolare interpretando il risultato della slide precedente, si deduce che l'integrale della moltiplicazione tra un generico segnale continuo e la delta *"campiona"* il valore del segnale nella posizione temporale della delta. Notiamo come useremo anche la seguente espressione relativa alla moltiplicazione per una delta:

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Proprietà 7.5 (**Prodotto di convoluzione**).

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(\tau - t)\, d\tau$$

Ricordiamo infine che c'è una differenza enorme tra il moltiplicare un segnale continuo per una delta (ovunque essa sia centrata) e fare l'integrale del loro prodotto. Il primo caso ritorna una funzione delta ma moltiplicata per una costante che dipende dal valore che il segnale assume nell'istante in cui si trova, mentre il secondo caso ritorna un valore numerico che indica il campionamento del segnale in quel dato istante.

Infine vediamo ora, anche se lo definiremo meglio più avanti, quello che chiameremo prodotto di convoluzione nel modo seguente:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

La dicitura a sinistra dell'uguale si legge come: x(t) *"convoluto"* y(t).

Infine definita la proprietà del campionamento otteniamo i seguenti risultati:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)d\tau = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t - \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \theta - \tau)d\tau = x(t - \theta)$$

In particolare notiamo come nel primo caso la convoluzione di un segnale $x(t)$ continuo con una delta fornisce il segnale di partenza $x(t)$. Il secondo caso invece indica che la convoluzione di un segnale $x(t)$ continuo con una delta traslata $\delta(t-\theta)$ fornisce il segnale di partenza traslato $x(t - \theta)$.

8 La serie e le trasformate di Fourier

8.1 Serie di Fourier

Iniziamo ora andando a dare la definizione

8.2 Trasformata di Fourier

9 Sistemi

Viste le sezioni precedente ed introdotte le proprietà della trasformata di Fourier possiamo ora affrontare il prossimo argomento ovvero i sistemi lineari (LS - Linear Systems) di cui elencheremo definizione, proprietà e caratteristiche. Come vedremo più avanti la nostra attenzione ricadrà per la maggiorparte su una sottocategoria dei sistemi detti sistemi lineare tempo-invarianti.

9.1 Introduzione ai sistemi

Vista la parte precedente possiamo ora dare la definizione di sistema. In particolare un sistema nell'ambito della teoria dei segnali è un qualsiasi elemento che trasforma un segnale dato in ingresso in un'altro segnale che verrà prodotto in uscita.

Di seguito possiamo vedere una possibile rappresentazione di un sistema attraverso una rappresentazione dove il sistema è un singolo blocco. In particolare il sistema applica una generica trasformazione T al segnale in ingresso generandone un'altro in uscita.

Data la definizione di sistema possiamo ora elencarne alcuni per fornire degli esempi pratici legati al mondo reale. Sono un'esempi di sistema elementi come:

- **Amplificatori Elettronici:** Questi dispositivi sono in grado di moltiplicare il segnale in ingresso per un certo valore riproducendo in uscita lo stesso segnale ora amplificato di un certo valore.

- **Filtri Analogici:** Questi dispositivi sono in grado di filtrare alcune frequenze di un segnale andando a riprodurre in uscita solo una porzione delle spettro in frequenza del segnale posto in ingresso.

- **Sistemi di trasmissione su lunga distanza:** Anche le trasmissioni a lunghe distanze introducono delle alterazioni sui segnali che quindi possono essere modellati come delle particolari tipologie di sistema.

- **Trasduttori Fisici:** Sono dispositivi in grado di generare, solitamente una tensione o corrente, in base all'ingresso (temperatura, pressione etc...) che viene applicata ad essi.

- **Sistemi di registrazione e successiva riproduzione:** Anche la registrazione di un'immagine o di un suono passano attraverso un sistema che le memorizzi per poi essere riprodotte dopo un certo periodo di tempo.

Concludiamo ora questa prima sottosezione andando a fornire una classificazione delle varie tipologie di sistemi che potremo incontrare:

- **Lineari e non Lineari**: Con questa tipologia di sistemi facciamo riferimento ad un sistema che rispetta i principi di sovrapposizione e omogeneità ovvero che applicano una trasformazione di tipo lineare come somma, sottrazione etc. Sono esclusi da questa categoria tutti i sistemi che non rispettano tali regole. Per esempio un sistema che produce il quadrato del segnale in ingresso non è detto lineare.

- **Senza memoria e con memoria**: I sistemi senza memoria (m emoryless) sono rappresentati dall'insieme di tutti quei sistemi dove l'uscita dipende solo dal valore istantaneo del segnale in ingresso e non conta la storia passata del segnale. Nei sistemi con memoria l'uscita dipende dal valore passato del segnale e non da quello istantaneamente assunto in quel momento.

- **Tempo varianti e tempo invarianti**: Queste tipologie di sistemi sono tali che le caratteristiche dello stesso non cambino nel tempo. Per esempio se un sistema applica un ritardo costante al segnale in ingresso è tempo invariante non lo è un sistema dove le sue caratteristiche (per esempio il valore di amplificazione) cambiano in funzione del tempo.

- **Causali e non causali**: Sono sistemi che rispettano il principio di causa effetto. In questi sistemi l'uscita dipende solo dal presente o dal passato del segnale e mai dal futuro. Per i sistemi non causali questa condizione non viene rispettata. Vediamo subito che tutti i sistemi fisici sono esclusivamente causali.

- **Reali e non reali**: Questa tipologia di sistemi lavora con grandezze reali come tensioni e correnti. Un sistema non reale utilizza valori complessi composti da una parte reale ed una immaginaria.

- **Stabili e non stabili**: Questi sistemi seguono il principio BIBO (Bounded Input Bounded Output) ovvero che ad un ingresso limitato in ampiezza, energia e potenza equivale un'uscita anch'essa limitata. I sistemi non stabili non rispettano questa regola portando alla produzione di segnali in uscita con oscillazioni infinite.

9.2 Classificazione di sistemi

Introdotte le principali classificazioni dei sistemi possiamo ora andare a vedere nel dettaglio alcune di esse.

9.2.1 Sistemi lineari

9.2.2 Sistemi tempo invarianti

9.2.3 Sistemi senza memoria

9.2.4 Sistemi senza memoria e tempo invarianti

9.3 Prodotto di convoluzione

9.3.1 Costruzione grafica

9.3.2 Convoluzione di due porte

9.3.3 Proprietà del prodotto di convoluzione

10 Sistemi LTI

10.1 Risposta all'impulso

10.2 Funzione di trasferimento

10.3 Tipologie di filtri realizzabili

11 Blocchi

12 Segnali Periodici e le loro trasformate

13 Segnali Periodici e le loro trasformate

14 Spettro

14.1 Spettro di energia

14.2 Spettro di potenza

15 Conversione DAC e ADC

Con questa sezione andiamo ad introdurre alcuni concetti fondamentali utili all'introduzione dei segnali numerici detti anche digitali. In particolare ci si soffermerà sul teorema del campionamento e sulla rispettiva conversione tra segnali analogici e digitali (Digital to Analog Conversion e Analog to Digital Conversion).

15.1 Introduzione

Fino ad ora ci siamo fermati a trattare segnali che come abbiamo visto fin dall'inizio erano segnali analogici ovvero continui sia sull'asse dei tempi che sull'asse delle ampiezze.

15.2 Tipologie di segnali

15.3 Campionamento

15.4 Errore di quantizzazione

16 Segnali a tempo discreto

Procediamo ora con il nostro percorso andando ad analizzare una nuova tipologia di segnali, e la loro elaborazione, attraverso metodi simili a quelli già visti fino ad ora.

16.1 Introduzione

Come appena detto stiamo per introdurre una nuova tipologia di segnali andando anche a trattarne la loro elaborazione. In particolare la tipologia di segnali che tratteremo d'ora in poi sono detti a tempo discreti ovvero segnali la cui definizione non è continua lungo l'asse del tempo ma è limitata ad un numero discreto (in alcuni casi finito) di punti. Procediamo ora ad una breve storia dell'elaborazione dei segnali numerici (ENS) per poi vederne delle possibili applicazione. Successivamente andremo ad definire meglio, attraverso definizioni proprietà ed operazioni, che cosa intendiamo per segnale numerico andando a fare le opportune classificazioni.

16.1.1 Storia dell'ENS

16.1.2 Applicazioni dell'ENS

16.2 Segnali a tempo discreto

16.2.1 Durata

16.2.2 Causalità

16.2.3 Parità

16.2.4 Periodicità

16.2.5 Sequenze limitate in ampiezza

16.2.6 Sequenze sommabili

16.3 Operazioni

16.3.1 Somma, differenza, prodotto

16.3.2 Traslazione e ribaltamento

16.3.3 Scalamento temporale

17 Sequenze fondamentali

Vista la sezione precedente dove abbiamo introdotto i segnali a tempo discreto andiamo ora a vedere delle sequenze, ovvero dei segnali a tempo discreto, che troveremo ed utilizzeremo spesso all'interno di questi prossimi capitoli. In particolare, come potremo osservare, queste sequenze fondamentali non sono altro che il risultato ottenuto dalla trasformazione a tempo discreto degli stessi segnali a tempo continuo visti in precedenza. Ricordiamo infine come l'operazione appena descritta non sia affatto un'operazione matematica ma piuttosto un modo di pensare questi segnali: vedremo come ci saranno opportune regole ed accorgimenti da apportare al ragionamento proposto.

17.1 Sequenza gradino unitario

Introdotto il ragionamento generale possiamo ora passare a vedere la prima sequenza rappresentata dal gradino unitario. In particolare il segnale si definisce in tempo discreto nel seguente modo:

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Riportiamo ora il grafico del segnale generato con MATLAB:

Visto che il grafico è generato attraverso del codice riteniamo opportuno riportare, almeno per questa sezione di corso, anche il codice che produce i grafici riportati all'interno di questo documento. Segue ora il codice MATLAB utilizzato per la generazione del segnale gradino unitario:

```
n = [-10:10];
y = zeros(1,21);
y(11:21) = 1;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('u(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

17.2 Delta di Kroenecher

Passiamo oltre ed andiamo a vedere come il segnale delta di Dirac viene interpretato in tempo discreto. Prima di tutto, per non confonderci con le due tipologie, utilizzeremo il termine delta per indicare quello a tempo continuo mentre useremo delta di Kroenecher per indicare il segnale a tempo discreto. Questa tipologia di delta è rappresentata da un impulso unitario, centrato nell'origine, non più di ampiezza infinita ma avente ampiezza pari ad uno.

Possiamo scrivere quanto appena descritto nel seguente modo:

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo infine che la definizione della delta di Dirac $\delta(t)$ è analoga a quella appena vista ma su un supporto continuo dove la funzione assume un valore infinito nell'origine.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

Segue ora il grafico del segnale:

Come nel caso precedente riportiamo anche il codice MATLAB utilizzato per la generazione del segnale delta di Kroenecher:

```
n = [-10:10];
y = zeros(1,21);
y(11) = 1;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('\delta(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid off
```

Infine prima di passare oltre possiamo notare come, a differenza dei segnali a tempo continuo, il gradino unitario e la delta di Kroenecher non creino alcuna criticità caratteristica dei corrispondenti segnali a tempo continuo.

Riportiamo infine una proprietà della delta di Kroenecher.

Proprietà (Segnale come somma di impulsi).

$$x(n) = \sum_{i\,=\,-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-1)$$

Questa proprietà fondamentale della delta numerica indica la possibilità di esprimere ogni segnale $x(n)$ come somma di impulsi secondo la relazione vista sopra dove il termine $\delta(n-i)$ è la delta di Kroenecher centrata nell'istante di tempo i. Ci è possibile verificare che:

$$x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n)$$

$$x(n)\delta(n-i) = x(i)\delta(n-1)$$

Infine possiamo andare ad esplicitare la relazione tra la delta numerica ed il gradino unitario. Ci è infatti possibile scrivere $\delta(n)$ come la differenza tra due gradini traslati nel seguente modo:

$$u(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta(n-i) = \delta(n) + \delta(n+1) + \delta(n+2) \dots$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

Possiamo notare infine attraverso la differenza di sequenze gradino, aventi diversi supporti, ci è possible creare delle funzioni porta nel dominio discreto.

17.3 Sequenza sinc

Proseguendo il nostro percorso incontriamo la sequenza $\text{sinc}(n)$ che andiamo a definire nel seguente modo dove N è un numero intero positivo:

$$\text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{\sin\left(\pi\frac{n}{N}\right)}{\pi\frac{n}{N}}$$

Vista ora la definizione della sequenza andiamo a riportarne il grafico.

Come per gli esempi fatti in precedenza segue ora il codice MATLAB utilizzato per generare il grafico riportato sopra, dove abbiamo utilizzato un valore y pari a $n/3$:

```
n = [-10:10];
y = sinc(n/3);
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('sinc(n/3)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

Infine, per quanto riguarda la sequenza $sinc()$ riportiamo anche alcuni altri grafici ottenuti andando a cambiare il valore di y prima con $n/2$ e successivamente con n.

Come possiamo notare i grafici differiscono molto l'uno dall'altro nonostante si stia utilizzando sempre la stessa funzione per generarli. Capiremo in un esempio più avanti che cosa stia causando questo problema e cosa fare per evitarlo.

17.4 Sequenza porta

Proseguiamo ora andando ad analizzare la sequenza porta che indichiamo nel seguente modo:

$$p_{2k+1}[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq k \\ 0 & |n| > k \end{cases}$$

La definizione appena vista indica una porta di supporto pari a $2k+1$ centrata in un punto. Notiamo come il supporto sia dato da $2k+1$ in quanto dobbiamo considerare il punto in cui è centrata la porta più un numero pari di k punti da una parte e dall'altra per ottenere la porta. Ricordiamo che nel dominio del tempo discreto il supporto di una sequenza è dato dal numero di punti tra gli estremi composti da punti non nulli. In altre parole è dato dall'intervallo più grande che si possa ottenere considerando come estremi punti non nulli con la possibilità di avere punti nulli al suo interno.

Come fatto in precedenza andiamo a rivedere la definizione di porta nel dominio continuo del tempo:

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ora vista la sua definizione andiamo a riportarne un grafico ottenuto in MATLAB. In questo caso si è scelto di rappresentare una porta di supporto

Come per gli altri esempi si riporta di seguito il codice utilizzato per la generazione del grafico appena visto:

```
n = [-10:10];
y = zeros(1,21);
y(6:16) = 1;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('p_{11}(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

17.5 Sequenza triangolo

Passiamo ora invece ad analizzare la sequenza triangolare dandone fin da subito una definizione:

$$\text{tri}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, & |n| \geq N \\ 0\ , & |n| < N \end{cases}$$

In particolare in base al valore scelto di N, che ricordiamo essere un numero intero positivo, si otterrà una sequenza triangolare avente supporto pari a $2N+1$. Come per i casi precedenti ricordiamo anche qui la definizione del corrispondente segnale a tempo continuo:

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \geq T \\ 0\ , & |t| < T \end{cases}$$

Ricordiamo che in questo caso t, ovvero la variabile tempo è continua e non discreta come succede per n.

Riportiamo di seguito il grafico della sequenza triangolare ottenuta in MATLAB:

Riportiamo anche di seguito il codice utilizzato per generare il grafico appena visto:

```
N = 10;
n = [-N:N];
y = 1 - abs(n)/N;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('t_{21}(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

17.6 Sequenza esponenziale

Concludiamo ora la lista delle sequenze fondamentali andando a prendere in analisi la sequenza esponenziale decrescente. Andiamo a definire la sequenza attraverso questa formula:

$$x(n) = a^n \cdot u(n)$$

Dove, in generale, si assume che a sia un numero complesso e che se a è reale la funzione risulta avere segno costante nel caso in cui il valore di a sia strettamente maggiore di zero. Nel caso opposto la sequenza risulta essere a segni alterni.

Anche in questo caso riportiamo la definizione del segnale corrispondente a questa sequenza nel dominio discreto del tempo:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$$

Ricordiamo che in questo caso stiamo considerando funzioni esponenziali decrescenti come anche succede per quelle a tempo discreto. Nel caso a tempo continuo si assume che il valore dell'esponente sia strettamente minore di zero ovvero α deve assumere un valore strettamente positivo. Per quanto riguarda il dominio del tempo discreto si assume che la base dell'esponenziale, ovvero a sia compresa tra zero ed uno dove entrambi gli estremi sono esclusi.

Riportiamo ora una coppia di grafici in cui le sequenze rappresentate hanno lo stesso valore assoluto di a ma diverso segno.

Infine riportiamo anche il codice utilizzato per generare il grafico della sequenza sempre positiva; per ottenere quella con segno alterno basta cambiare segno al valore di a alla seconda riga.

```
1  n = [-10:10];
2  a = (2/3);
3  y = a.^n.*(n >= 0);
4  figure
5  set(gca,'FontSize',14)
6  stem(n,y,'k')
7  xlabel('n')
8  title('(2/3)^n')
9  axis([-10 10 -0.5 1.5])
10 grid on
```

Concludiamo questa parte sulle sequenze esponenziali andando ad analizzare il caso in cui si utilizzi un a avente valore complesso. Nel caso in cui a assuma un valore complesso, ovvero sia pari a $Ae^{j\theta}$ si otterrà che:

$$x(n) = \left(Ae^{j\theta}\right) \cdot u(n) = A^n \cdot e^{jn\theta} \cdot u(n)$$

17.6.1 Sinusoidi ed esponenziali a tempo discreto

Vista ora la

17.6.2 Esempi

17.6.3 Proprietà

17.7 Energia e potenza media

18 Convoluzione lineare