

TÍTULO: **Análisis cinemático de una Cigüeña de Petróleo**

1. RESUMEN

Se realizó el cálculo de velocidades y aceleraciones en puntos de interés del mecanismo de cuatro barras que forman una bomba-varilla de petróleo^[1]. Se constató que los resultados obtenidos concuerden con el análisis de posición del mismo^[3].

Preparó		Revisó			Intervino calidad	Aprobó
F. Camussonil		J. C. Garcia	E. Ruiz Nicolini	L. Monteros	J. C. Garcia	F. Quintana

REVISIONES

Rev.	Fecha	Modificaciones
0	05/03/2020	

FECHA DE VIGENCIA:

DISTRIBUCIÓN	ESTADO DEL DOCUMENTO
Copia N°: Distribuyó: Una vez impreso este documento se considerará copia no controlada a menos que cuente con sello y firma original del responsable de Calidad de la GIN.	Fecha: Firma:

NOTA: Este documento es propiedad de CNEA y se reserva todos los derechos legales sobre él. No está permitida la explotación, transferencia o liberación de ninguna información en el contenido, ni hacer reproducciones y entregarlas a terceros sin un acuerdo previo y escrito de CNEA.

ÍNDICE

1. RESUMEN	1
2. OBJETIVO	3
3. ALCANCE	3
4. ABREVIATURAS Y DEFINICIONES	3
4.1. Abreviaturas	3
4.2. Definiciones	3
5. BIBLIOGRAFÍA	3
6. RESPONSABILIDADES	3
7. DESARROLLO	4
7.1. Introducción	4
7.2. Datos de entrada	5
7.3. Ejecución	6
7.4. Resultados	6
8. CONCLUSIONES, OTROS ESTUDIOS Y RECOMENDACIONES	14
8.1. Conclusiones	14
8.2. Otros estudios y recomendaciones	15
9. REGISTROS	15
10. ANEXO	15

2. OBJETIVO

Obtener velocidades y aceleraciones de puntos de interés del mecanismo de la bomba-varilla^[1] de un pozo petrolero, como ser los nodos de los eslabones y los centros de gravedad de los mismos. Luego, verificar que los resultados concuerden con los obtenidos en el análisis de posición.

3. ALCANCE

La presente memoria de cálculo será de aplicación para la asignatura Mecanismos correspondiente a la carrera Ingeniería Mecánica del Instituto Balseiro.

4. ABREVIATURAS Y DEFINICIONES

4.1. Abreviaturas

CG: centro de gravedad.

4.2. Definiciones

θ : ángulo medido desde la horizontal

ω : velocidad angular.

α : aceleración angular.

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \alpha$$

5. BIBLIOGRAFÍA

[1]RT-m2020-GRL-001_r0, requerimientos de trabajo, catedra Mecanismos, Instituto Balseiro.

[2]"Diseño de maquinaria", R. L. Norton, Prentice Hall. ISBN 9781456250089

[3]IN-M2020-GRL-001-r0, Analisis de posición de una bomba-varilla, Francesco Camussoni, Instituto Balseiro.

6. RESPONSABILIDADES

El alumno Francesco Camussoni respondera todas las consultas sobre este documento.

El alumno Francesco Camussoni será responsable de actualizar el contenido d este documento durante su ciclo de vida.

7. DESARROLLO

7.1. Introducción

A la hora de diseñar un mecanismo, es necesario conocer todas las velocidades en el mismo, tanto para calcular la energía cinética almacenada en los eslabones, como para determinar las aceleraciones de los mismos, que se requieren para calcular la fuerza dinámica sobre los mismos.

Para conocer la velocidad angular de cada eslabón del mecanismo es necesario derivar la posición de los nodos del mismo. Para esto se determinan los vectores entre nodos como se muestra en la **Figura 7.1**^[2].

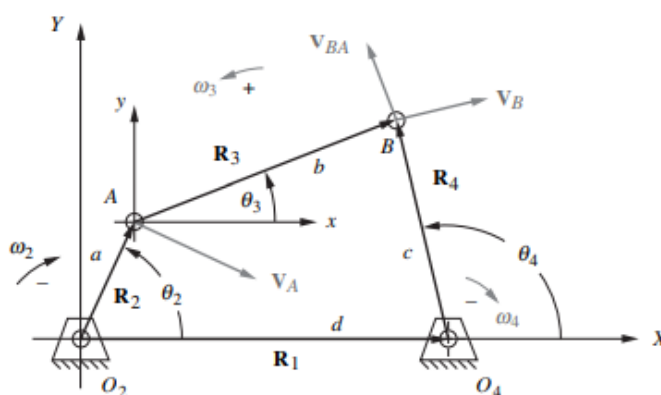


Figura 7.1: Esquema de un mecanismo genérico de 4 barras en el cual el eslabón fijo se encuentra sobre el eje X con uno de sus nodos en el origen. Se ha determinado 4 vectores correspondientes a la unión entre nodos.

Al derivar cada vector es posible obtener la velocidad de cada nodo a partir de la **Ecuación 7.1**:

$$ja\omega_2 e^{j\theta_2} + jb\omega_3 e^{j\theta_3} - jc\omega_4 e^{j\theta_4} = 0 \quad (7.1)$$

Resultando en dos ecuaciones desacopladas, al igualar parte real e imaginaria a cero, para las dos incógnitas ω_3 y ω_4 como se muestra en la **Ecuación 7.2**^[1]:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{a\omega_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{b \sin(\theta_3 - \theta_4)} \\ \omega_4 &= \frac{a\omega_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{c \sin(\theta_4 - \theta_3)} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Luego es posible obtener la velocidad de un punto cualquiera del mecanismo según la **Figura 7.2**^[1] a partir de la **Ecuación 7.3**

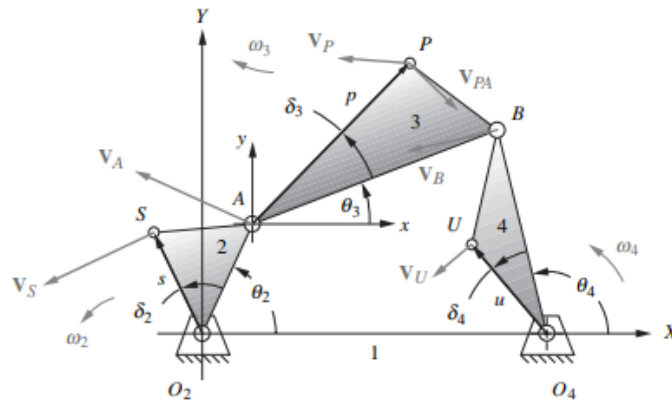


Figura 7.2: Esquema del mismo mecanismo al cual se le quiere calcular la velocidad de un punto cualquiera.

$$\tilde{V}_P = \tilde{V}_A + \tilde{V}_{PA} \quad (7.3)$$

Con \tilde{V}_{PA} y \tilde{V}_A definidos según las **Ecuaciones 7.4**:

$$\tilde{V}_{PA} = p\omega_3(-\sin(\theta_3 - \delta_3) + j\cos(\theta_3 - \delta_3)); \tilde{V}_A = a\omega_2(-\sin(\theta_2) + j\cos(\theta_2)) \quad (7.4)$$

Volviendo a derivar la **Ecuación 7.4** y la **Ecuación 7.1** es posible encontrar las aceleraciones angulares α_3 y α_4 además de la aceleración de cualquier punto del mecanismo A_p .

7.2. Datos de entrada

Se presenta un diagrama de la bomba-varilla en la **Figura 7.3**^[1].

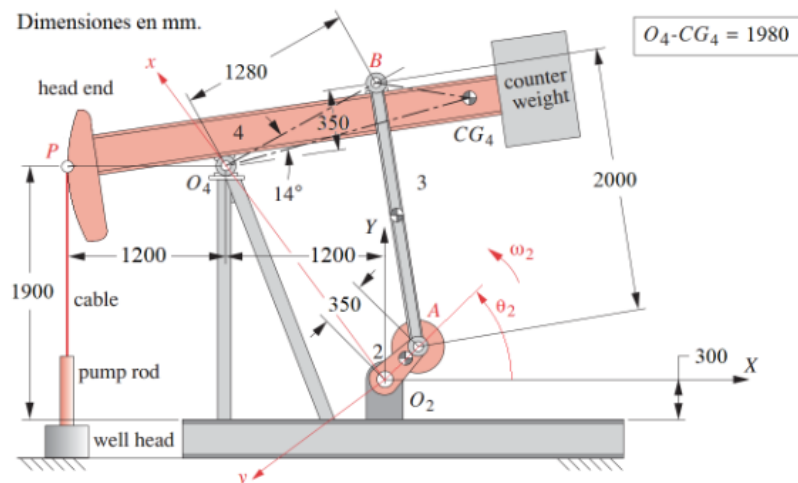


Figura 7.3: Esquema del mismo mecanismo de la bomba-varilla de un pozo petrolero.

El mecanismo de la bomba varilla es de 4 eslabones, algunos ficticios, como ser el que une los nodos O2-O4 y el que une los nodos O4-B. Todos los cuerpos que conforman a la bomba varilla se consideran cuerpos rígidos, es decir, que no pueden deformarse.

Además, a modo de simplificación, cada eslabón se considerara como una línea recta que une sus nodos. Las longitudes de dichos eslabones son 2=O2-A=350mm, 3=A-B=2000mm y 4=B-O4=1280mm y 1=O2-O4=2000mm.

Se consideran conocidos θ_3 y θ_4 para un θ_2 de entrada determinando^[3]. También son conocidas las coordenadas de puntos de interés como ser A, B, CG_2 , CG_3 y CG_4 para una vuelta completa de la manivela^[3]. Además la velocidad angular con la que rota el eslabón 2 es $\omega_2 = 4rpm = 0,416 \frac{rad}{s} = 24 \frac{s}{s}$. La aceleración angular de dicho eslabón es $\alpha_2 = 0$ ^[1].

7.3. Ejecución

Los cálculos se realizaron mediante las librerías Numpy del lenguaje de programación Python. Con dicha librería se resolvió las **Ecuaciones 7.2 y 7.4**. Los gráficos se obtuvieron a través del uso de Matplotlib, también de Python. El código de programación se encuentra en el Anexo de este documento.

7.4. Resultados

Mediante la **Ecuación 7.2** se obtuvo ω_3 y ω_4 , correspondientes al eslabón 3 y 4 respectivamente, para una vuelta completa de la manivela. Los resultados se presentan en la **Figura 7.4**.

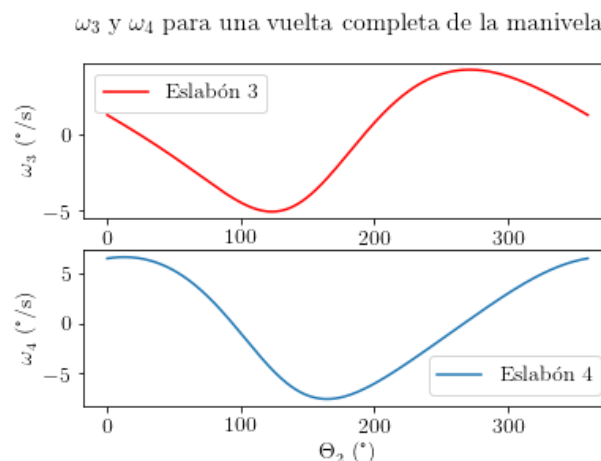


Figura 7.4: ω_3 y ω_4 para una vuelta completa de la manivela.

Luego, obtenidos ω_3 y ω_4 , es posible calcular la velocidad de cualquier punto del mecanismo mediante la **Ecuación 7.3**. Con esto se obtuvo la velocidad del punto A y B que se muestran en la **Figura 7.3**. Los resultados pueden observarse en la **Figura 7.5** y en la **Figura 7.6**

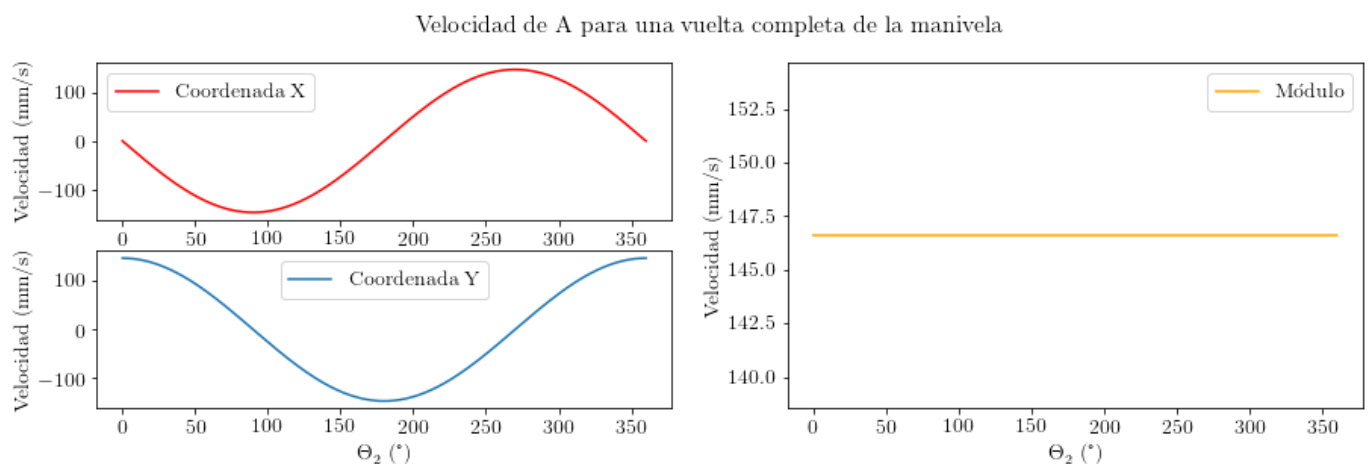


Figura 7.5: Velocidad del punto A. Se presenta la coordenada X e Y de la misma tanto como su módulo.

El módulo de la velocidad lineal del punto A es constante, como se observa en la **Figura 7.5**. Esto corresponde al caso de un movimiento circular uniforme, es decir, con $\alpha_2 = 0$.

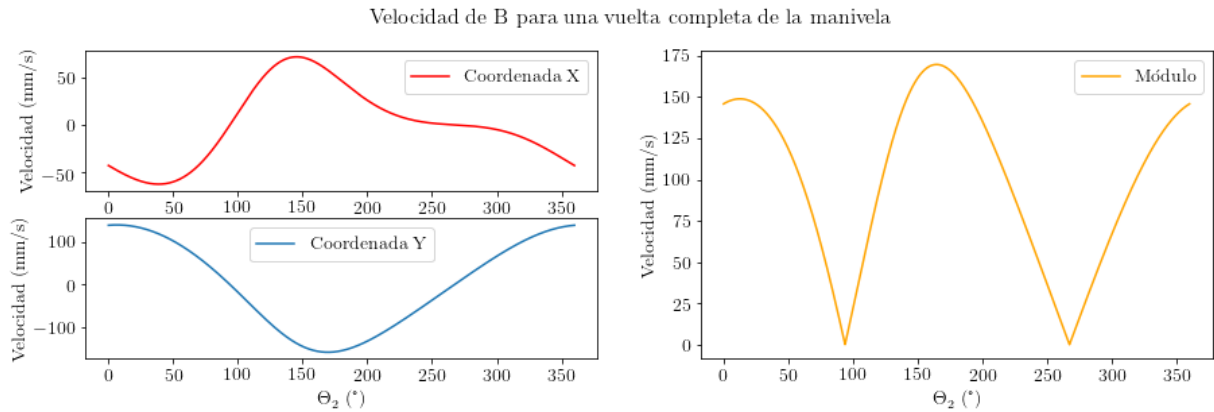


Figura 7.6: Velocidad del punto B. Se presenta la coordenada X e Y de la misma tanto como su módulo.

La velocidad del punto B es cero para $\theta_2=93.86^{\circ}$ y $\theta_2=267.22^{\circ}$, correspondiendo a las posiciones de agarrotamiento del mecanismo como se obtuvo en el informe anterior.

En las **Figuras 7.7, 7.8 y 7.9** se muestran las velocidades lineales obtenidas para los centros de gravedad de algunos de los eslabones de la bomba-varilla.

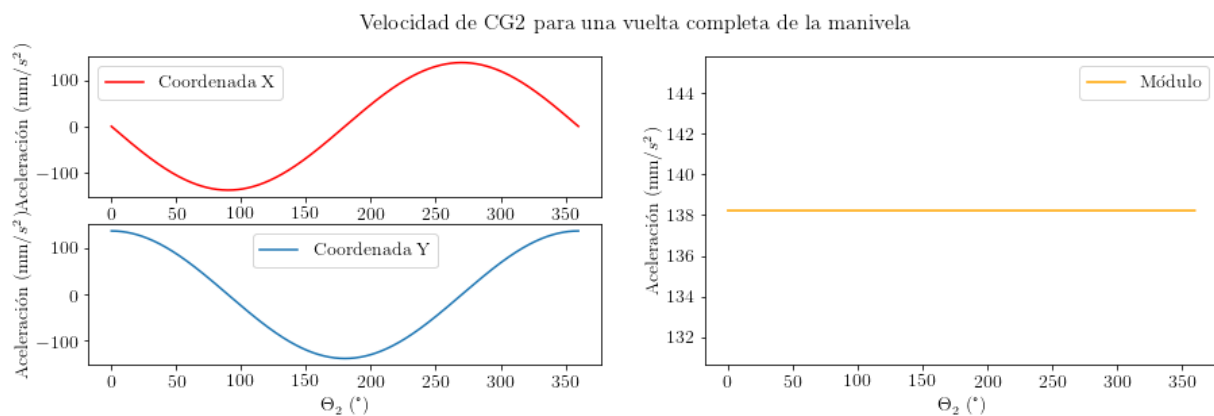


Figura 7.7: Velocidad del punto CG₂. Se presenta la coordenada X e Y de la misma tanto como su módulo.

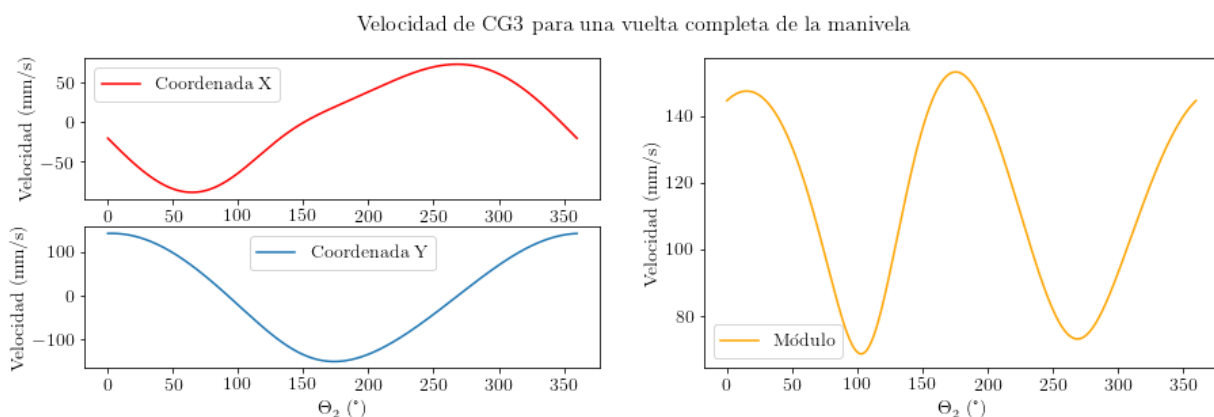


Figura 7.8: Velocidad del punto CG₃. Se presenta la coordenada X e Y de la misma tanto como su módulo.

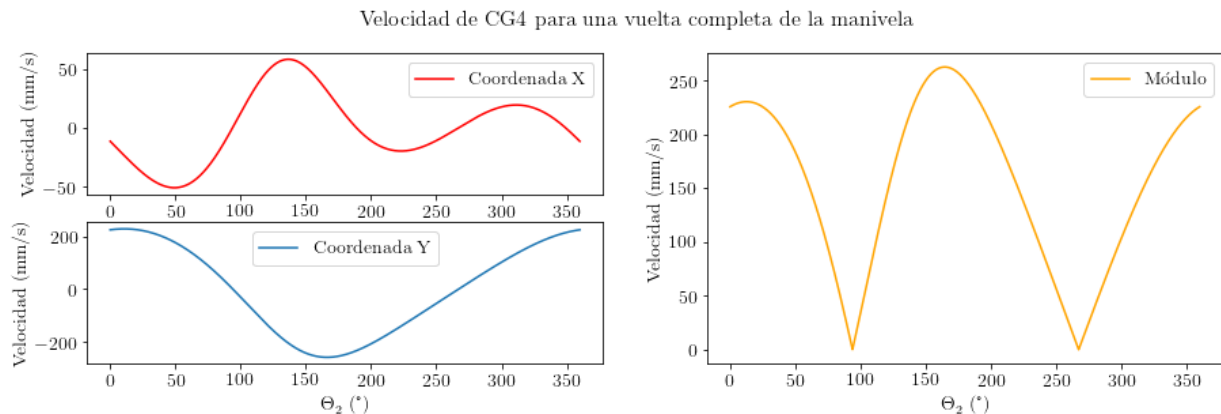


Figura 7.9: Velocidad del punto CG_4 . Se presenta la coordenada X e Y de la misma tanto como su módulo.

Nuevamente, el módulo de la velocidad de CG_2 es constante dado que es un punto perteneciente al eslabón 2. Además, el módulo de la velocidad de CG_4 es cero para las posiciones de agarrotamiento.

A continuación, se calculó la aceleración angular de los eslabones 3 y 4 para una vuelta completa de la manivela, esto es, α_3 y α_4 . Las mismas se obtienen volviendo a derivar la **Ecuación 7.1** obteniendo así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas desacopladas. Los resultados que se muestran en la **Figura 7.10**.

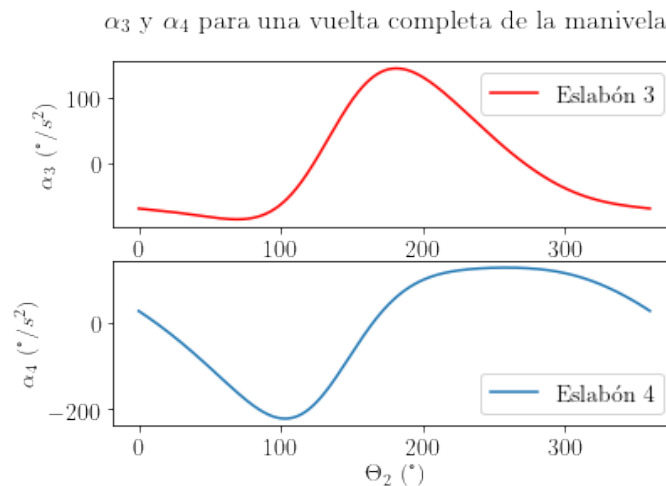


Figura 7.10: Aceleración angular α_3 y α_4 correspondientes a los eslabones 3 y 4 para una vuelta completa de la manivela.

Luego, con α_3 y α_4 conocidos para cada posición de la manivela es posible calcular la aceleración en cualquier punto del mecanismo a partir de derivar la **Ecuación 7.4** y utilizando la **Ecuación 7.3**. Así se obtuvo la aceleración normal y tangencial, así como su módulo, para los puntos A y B del mecanismo. Los resultados se muestran en las **Figuras 7.11 y 7.12**.

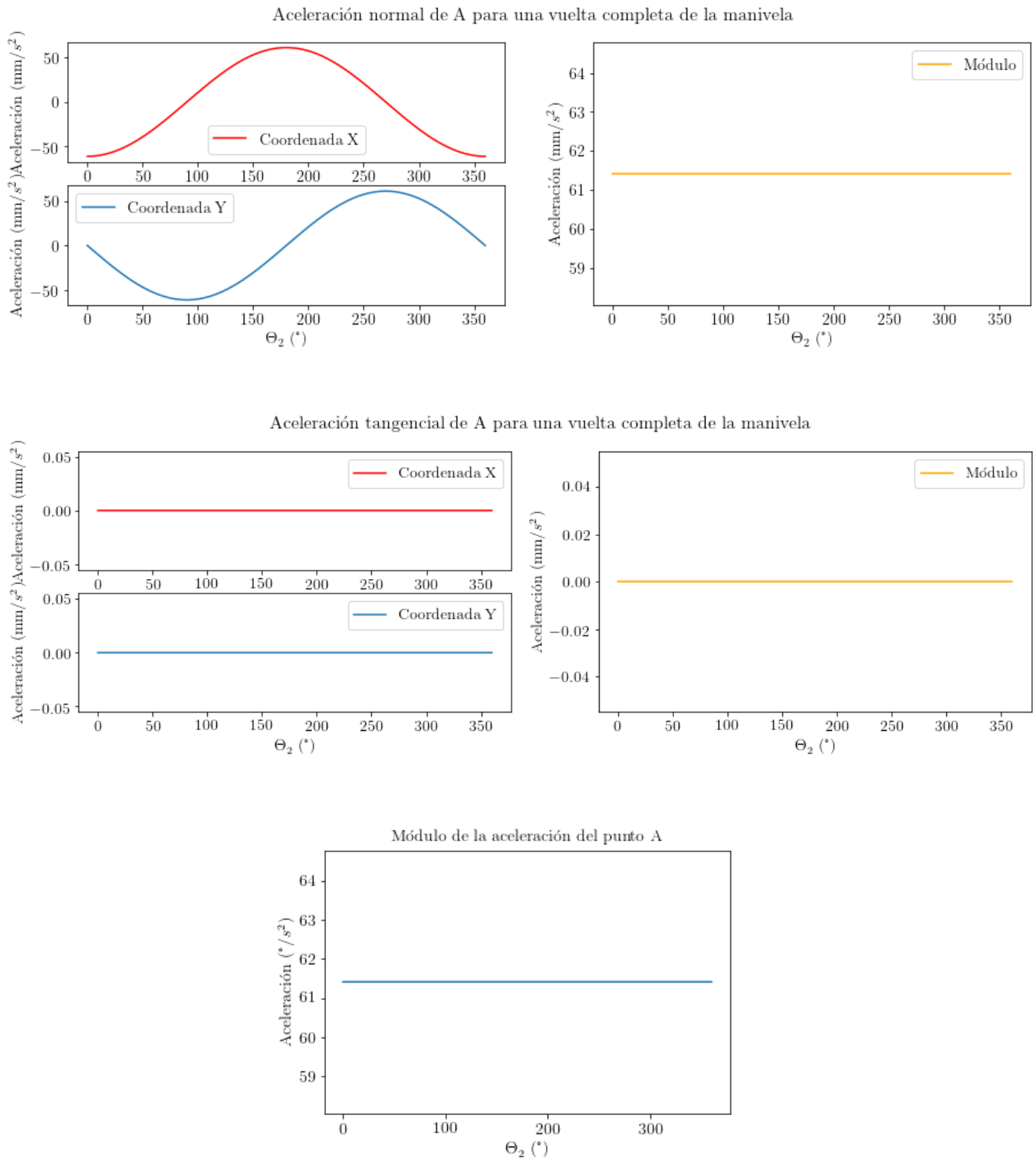


Figura 7.11: Aceleración normal, tangencial y el módulo de la misma para el punto A del mecanismo.

Como se observa, la aceleración tangencial para el punto A resulto ser cero para toda la vuelta de la manivela. Esto es debido a que dicho punto corresponde al eslabón 2 que se encuentra realizando un movimiento circular uniforme.

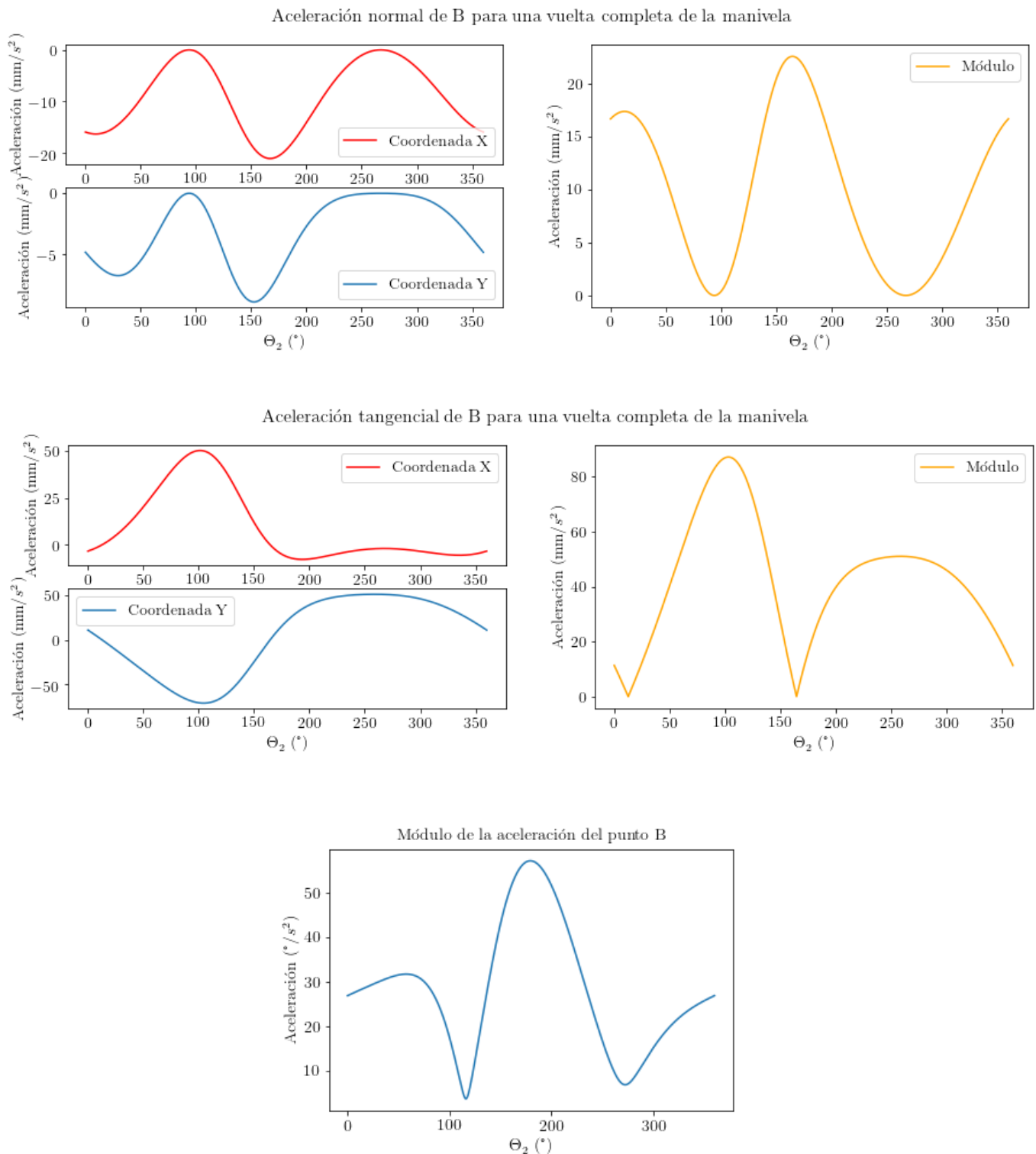


Figura 7.12: Aceleración normal, tangencial y el módulo de la misma para el punto B del mecanismo.

A diferencia del punto A, el punto B corresponde al nodo que une el eslabón 4, el balancín, con el eslabón 3, el acoplador. Dicho punto presenta una aceleración tangencial distinta de cero. Se puede observar que el módulo de la aceleración tangencial es dos veces cero. Esto se debe a que el módulo no tiene en cuenta el signo de la aceleración angular α_4 . Si consideramos el mismo se puede obtener un resultado como el que se muestra en la **Figura 7.13**.

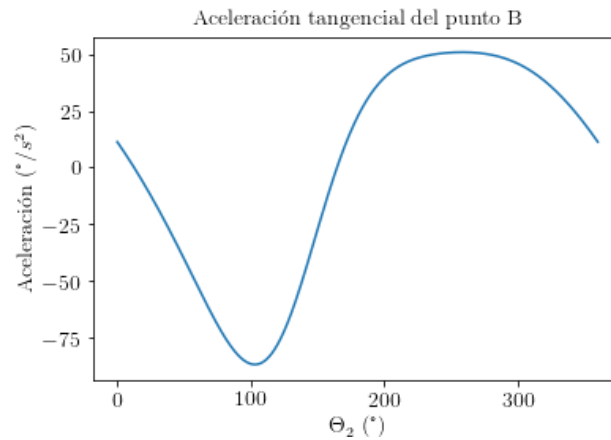
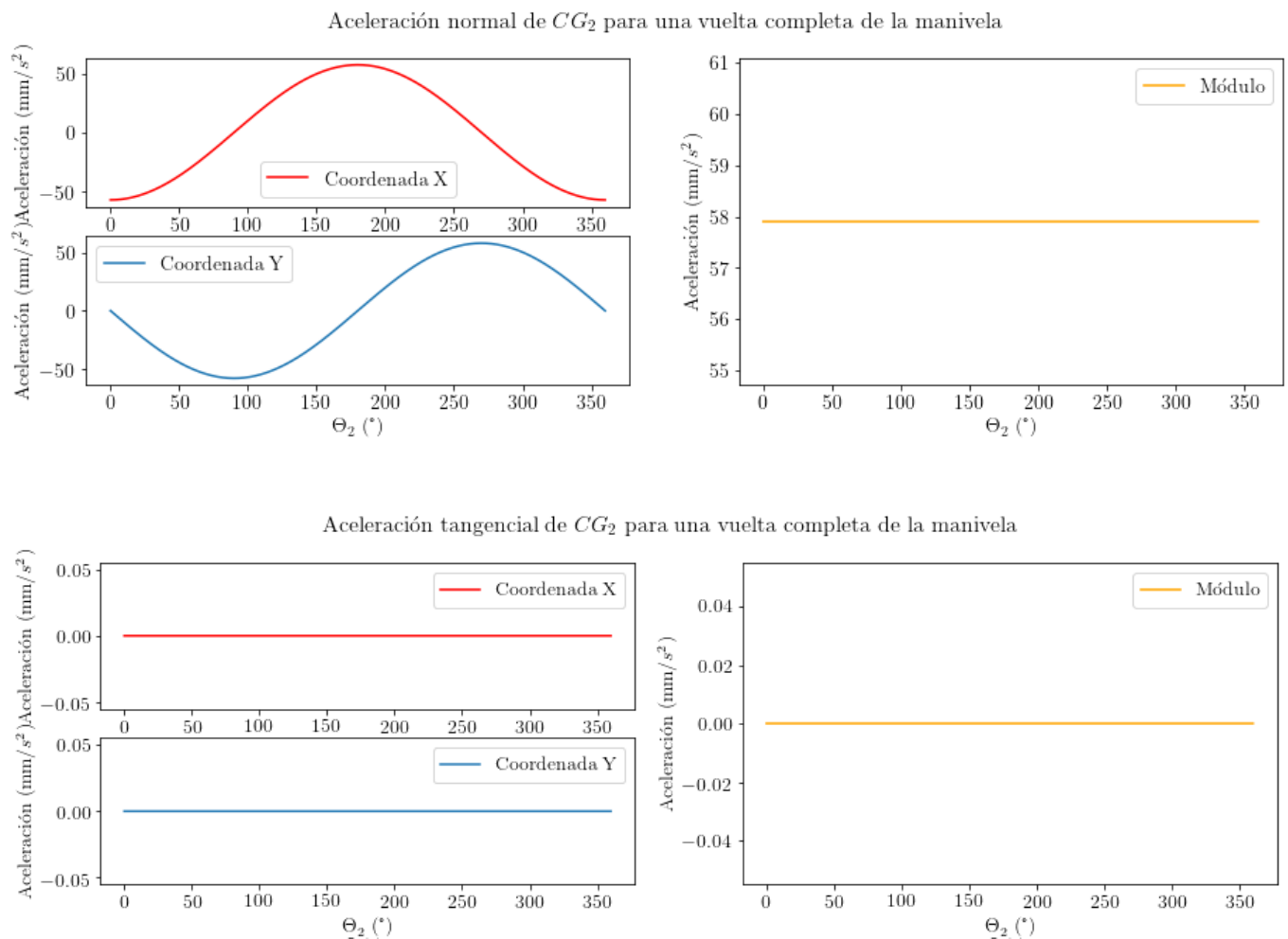


Figura 7.13: Aceleración tangencial del punto B. Valores negativos de la misma debe entenderse como valores negativos de α_4 .

Los valores de θ_2 correspondientes a cuando la aceleración tangencial del punto B es un máximo o un mínimo refieren a las posiciones de agarrotamiento del sistema, siendo estos valores los mismos que el cruce por cero de la velocidad del punto B tal como se muestra en la **Figura 7.6**.

A continuación, se obtuvo la aceleración de los centros de gravedad de los eslabones que se muestran en la **Figura 7.3**. Los resultados se muestran en las **Figuras 7.14, 7.15 y 7.16**.



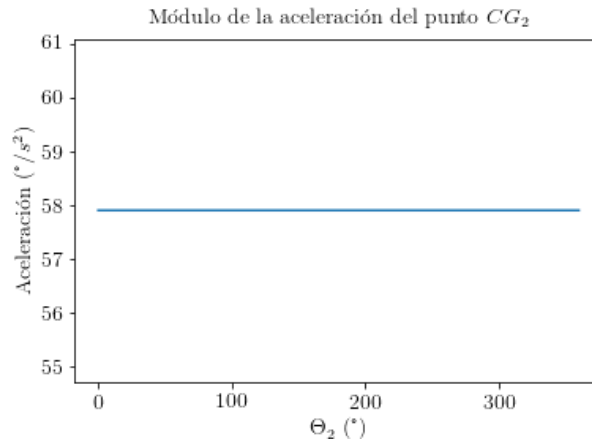


Figura 7.14: Aceleración normal, tangencial y el módulo de la misma para el punto CG_2 del mecanismo.

Como se observa, para el punto CG_2 ocurre algo similar que para el punto A, dado que corresponden a puntos del mismo eslabón. Aquí también la aceleración tangencial es cero para cualquier θ_2

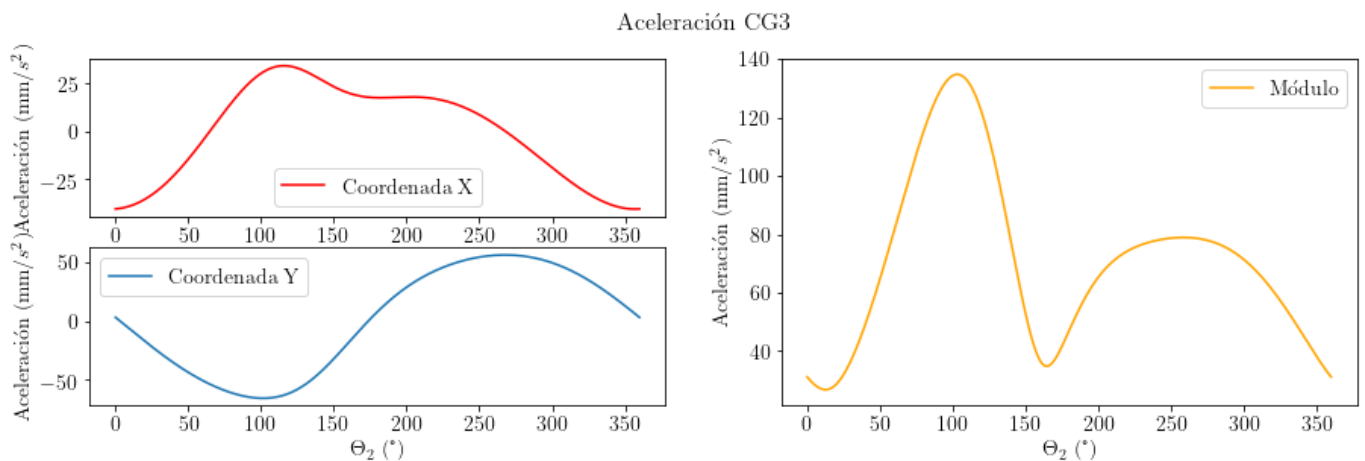


Figura 7.15: Aceleración del punto CG_3 del mecanismo.

A diferencia del eslabón 2 y 4, el eslabón 3, el acoplador, realiza un movimiento complejo de rotación+traslación. Es por esto que el centro instantáneo del eslabón varía con el tiempo por lo que no tiene sentido explicitar la aceleración normal y tangencial del mismo. En la **Figura 7.15** se presenta la coordenada X e Y de la aceleración, así como el módulo de la misma.

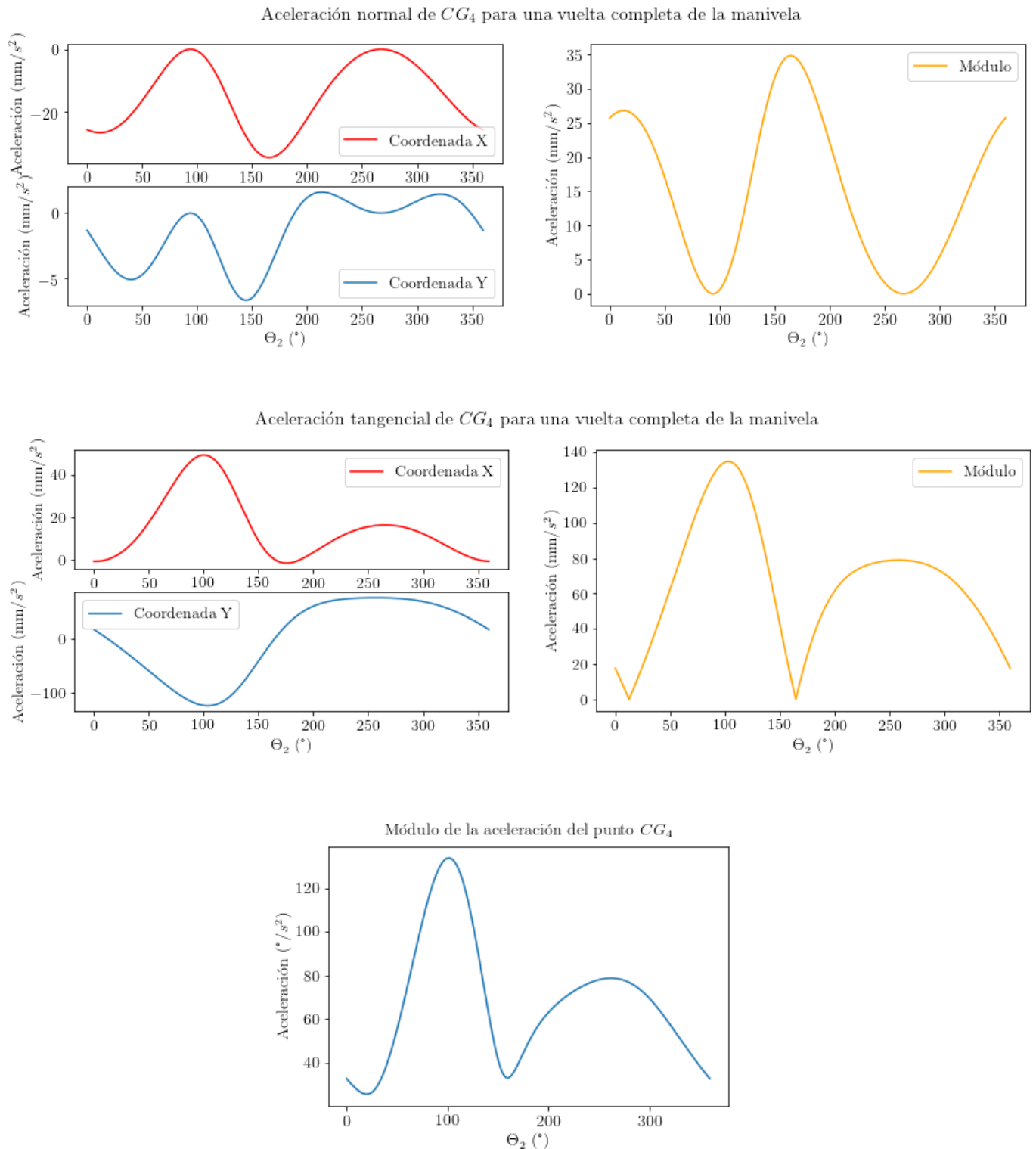


Figura 7.16: Aceleración normal y tangencial para el punto CG_4 del mecanismo.

A diferencia del eslabón 3, el eslabón 4, el balancín, tiene un centro instantáneo constante con el tiempo. Aquí se presenta las componentes de aceleración normal y tangencial. Se observa que para el módulo de la aceleración tangencial ocurre lo mismo que para el punto B en el cual los puntos de quiebre de la función se deben a un cambio de signo de la aceleración angular α_4 .

Finalmente, se verificó gráficamente que las soluciones obtenidas sean correctas. Para esto se realizó el lazo

de velocidades y aceleraciones del punto B. Los resultados se muestran en las **Figuras 7.17 y 7.18**.

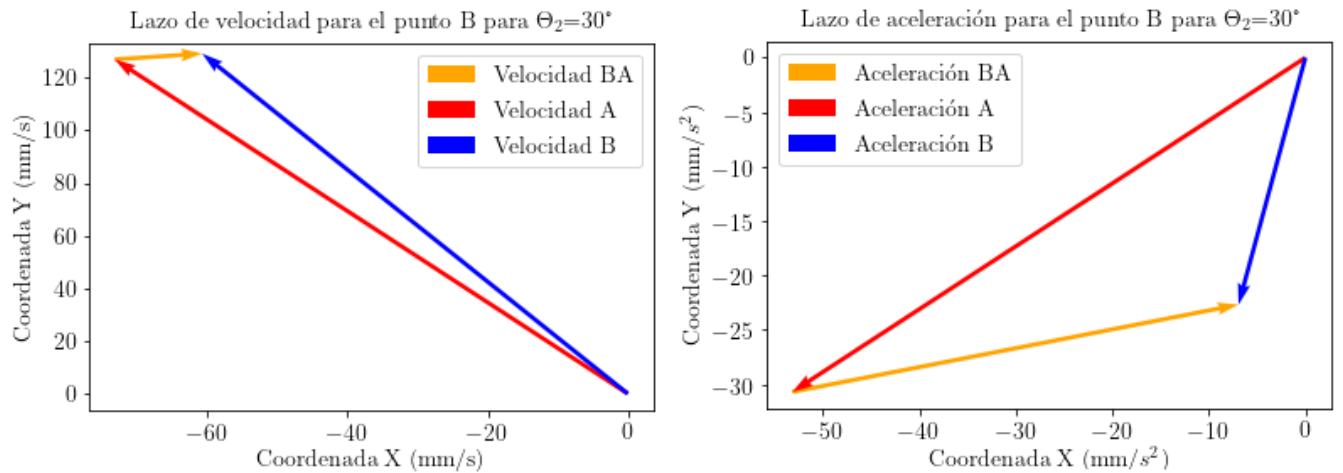


Figura 7.17: Lazos de velocidad y aceleración para el punto B cuando $\Theta_2 = 300$.

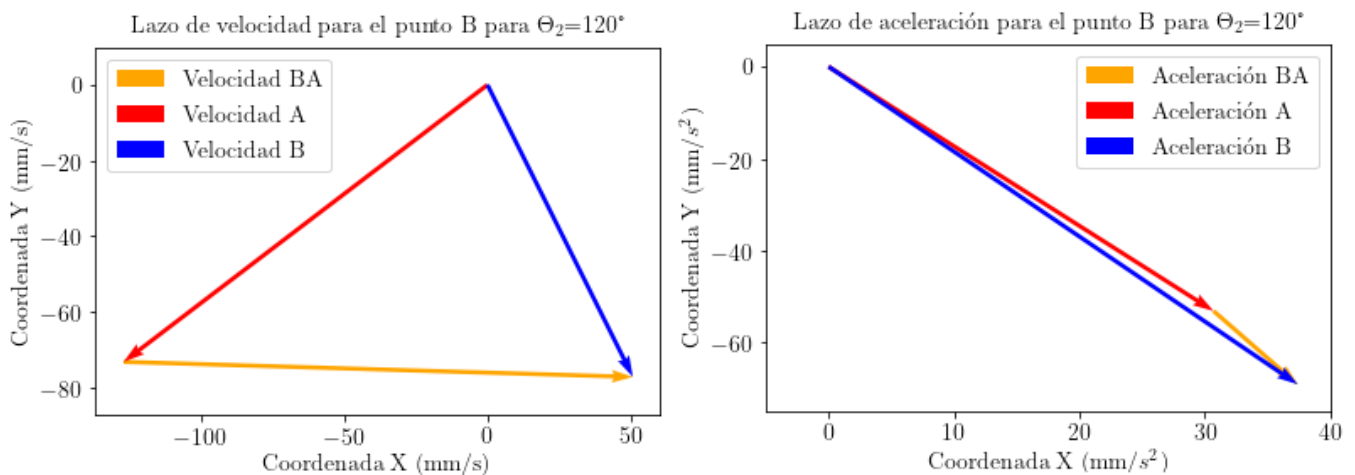


Figura 7.18: Lazos de velocidad y aceleración para el punto B cuando $\Theta_2 = 120$.

Como se observa, todos los lazos son cerrados. El análisis para los otros puntos de interés resulta análogo.

8. CONCLUSIONES, OTROS ESTUDIOS Y RECOMENDACIONES

8.1. Conclusiones

Se obtuvo las velocidades angulares ω_3 y ω_4 de los eslabones 3 y 4 respectivamente para una vuelta completa de la manivela. Con dichos resultados se obtuvo la velocidad lineal en puntos de interés como ser el punto A y B, también para una vuelta completa de la manivela. Además se calculó la velocidad para los CGs de los eslabones del mecanismo. Luego, conocidos ω_3 y ω_4 se obtuvo α_3 y α_4 y con esto se calculó la aceleración de los puntos nombrados anteriormente.

Se constató que la velocidad del punto B y del CG_4 es cero para los θ_2 que corresponden a la posición de agarrotamiento. Además la aceleración de dichos puntos resultó tener máximos o mínimos para los mismos θ_2 .

Todos los puntos pertenecientes al eslabón 2 resultaron tener aceleración tangencial cero debido a que el mismo

realiza un movimiento circular uniforme. Los puntos que pertenecen al eslabón 4 tienen componentes de aceleración normal y tangencial distinto de cero dado que $\alpha_4 \neq 0$. Finalmente, dado que el eslabón 3 realiza un movimiento de complejo de traslación+rotación, no tiene sentido descomponer su aceleración en normal y tangencial y solo se obtuvo su módulo.

8.2. Otros estudios y recomendaciones

No aplica.

9. REGISTROS

No aplica.

10. ANEXO

Librerías utilizadas.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve
```

Solver de posición.

```
def equations(semilla, *args):
    theta3, theta4 = semilla
    #arg0=a, arg1=b, arg2=c, arg3=d, arg4=thetal, arg4=theta2
    eq1=args[0]*np.cos(args[5])+args[1]*np.cos(theta3)-args[2]*np.cos(theta4)-args[3]*np.cos(args[4])
    eq2=args[0]*np.sin(args[5])+args[1]*np.sin(theta3)-args[2]*np.sin(theta4)-args[3]*np.sin(args[4])
    return [eq1, eq2]
```

Datos de entrada.

```
theta2=np.pi
thetal=np.arctan(1200/1600)+np.pi/2
d=2000
a=350
b=2000
c=1280
e=1980
delta=np.deg2rad(14)
omega2=4*2*np.pi/60
alfa2=0
l=[a, b, c, d]
semilla=[0, 0]
[theta3, theta4]=fsolve(equations, semilla, (a, b, c, d, thetal, theta2))
theta2_lista=np.linspace(0,2*np.pi,10000)
resultados = [fsolve(equations, semilla, (a, b, c, d, thetal, theta2)) for theta2 in theta2_lista]
theta3_lista=[resultados[x][0] for x in range(len(resultados))]
theta4_lista=[resultados[x][1] for x in range(len(resultados))]
```

Cálculo de ω_3 y ω_4 .

```
omega3_lista=[(a*omega2*np.sin(theta4_lista[i]-theta2_lista[i]))/(b*np.sin(theta3_lista[i]-theta4_lista[i])) for i in range(len(theta2_lista))]
omega4_lista=[(a*omega2*np.sin(theta2_lista[i]-theta3_lista[i]))/(c*np.sin(theta4_lista[i]-theta3_lista[i])) for i in range(len(theta2_lista))]
```

Cálculo de la velocidad del punto A y B.

```
VA_X=-a*omega2*np.sin(theta2_lista)
VA_Y=a*omega2*np.cos(theta2_lista)
VA=[a*omega2]*len(theta2_lista)
VB_X=[-a*omega2*np.sin(theta2_lista[i])-b*omega3_lista[i]*np.sin(theta3_lista[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
VB_Y=[a*omega2*np.cos(theta2_lista[i])+b*omega3_lista[i]*np.cos(theta3_lista[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
VB=[np.sqrt(VB_X[i]**2+VB_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
```

Cálculo de la velocidad de los CGs.

```
VCG2_X=-a*omega2*np.sin(theta2_lista)/2
VCG2_Y=a*omega2*np.cos(theta2_lista)/2
VCG2=[a*omega2/2]*len(theta2_lista)
VCG3_X=[-a*omega2*np.sin(theta2_lista[i])-b/2*omega3_lista[i]*np.sin(theta3_lista[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
VCG3_Y=[a*omega2*np.cos(theta2_lista[i])+b/2*omega3_lista[i]*np.cos(theta3_lista[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
VCG3=[np.sqrt(VCG3_X[i]**2+VCG3_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
VCG4_X=[-e*omega4_lista[i]*np.sin(theta4_lista[i]-delta) for i in range(len(theta2_lista))]
VCG4_Y=[e*omega4_lista[i]*np.cos(theta4_lista[i]-delta) for i in range(len(theta2_lista))]
VCG4=[np.sqrt(VCG4_X[i]**2+VCG4_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
```

Cálculo de α_3 y α_4 .

```
A=c*np.sin(theta4_lista)
B=b*np.sin(theta3_lista)
C=a*alfa2*np.sin(theta2_lista)+a*omega2**2*np.cos(theta2_lista)+b*np.array(omega3_lista)**2*np.cos(theta4_lista)
D=c*np.cos(theta4_lista)
E=b*np.cos(theta3_lista)
F=a*alfa2*np.cos(theta2_lista)-a*omega2**2*np.sin(theta2_lista)-b*np.array(omega3_lista)**2*np.sin(theta3_lista)+c*np.array(omega4_lista)**2*np.sin(theta4_lista)
alfa3_lista=[(C[i]*D[i]-A[i]*F[i])/(E[i]*A[i]-B[i]*D[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
alfa4_lista=[(C[i]*E[i]-B[i]*F[i])/(E[i]*A[i]-B[i]*D[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
```

Cálculo de las aceleraciones de los puntos A y B.

```
AAc_X=-a*omega2**2*np.cos(theta2_lista)
AAc_Y=-a*omega2**2*np.sin(theta2_lista)
AAc=[np.sqrt(AAc_X[i]**2+AAc_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
AAt_X=-a*alfa2*np.sin(theta2_lista)
AAt_Y=a*alfa2*np.cos(theta2_lista)
AAt=[np.sqrt(AAt_X[i]**2+AAt_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
AA_real=AAc_X+AAt_X
AA_img=AAc_Y+AAt_Y
AA=np.sqrt(np.array(AA_real)**2+np.array(AA_img)**2)
ABc_X=[-c*omega4_lista[i]**2*np.cos(theta4_lista[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
ABc_Y=[-c*omega4_lista[i]**2*np.sin(theta4_lista[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
ABc=[np.sqrt(ABc_X[i]**2+ABc_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
ABt_X=[-c*alfa4_lista[i]*np.sin(theta4_lista[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
ABt_Y=[c*alfa4_lista[i]*np.cos(theta4_lista[i]) for i in range(len(theta2_lista))]
ABt=[np.sqrt(ABt_X[i]**2+ABt_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
ABt_signo=[-ABt[i] if alfa4_lista[i]<0 else ABt[i] for i in range(len(theta2_lista))]
AB_real=[ABc_X[i]+ABt_X[i] for i in range(len(theta2_lista))]
AB_img=[ABc_Y[i]+ABt_Y[i] for i in range(len(theta2_lista))]
AB=np.sqrt(np.array(AB_real)**2+np.array(AB_img)**2)
```

Cálculo de las aceleraciones de los CGs.

```
ACG2c_X=-a/2*omega2**2*np.cos(theta2_lista)
ACG2c_Y=-a/2*omega2**2*np.sin(theta2_lista)
ACG2c=[np.sqrt(ACG2c_X[i]**2+ACG2c_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
ACG2t_X=-a*alfa2*np.sin(theta2_lista)
ACG2t_Y=a*alfa2*np.cos(theta2_lista)
ACG2t=[np.sqrt(ACG2t_X[i]**2+ACG2t_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
```



```
ACG2_real=ACG2c_X+ACG2t_X
ACG2_img=ACG2c_Y+ACG2t_Y
ACG2=np.sqrt(np.array(ACG2_real)**2+np.array(ACG2_img)**2)
AACG3_X=np.array([c/2*(-alfa3_lista[i]*np.sin(theta3_lista[i])-omega3_lista[i]**2*np.cos(theta3_lista[i]))
for i in range(len(theta2_lista))])
AACG3_Y=np.array([c/2*(alfa3_lista[i]*np.cos(theta3_lista[i])-omega3_lista[i]**2*np.sin(theta3_lista[i]))
for i in range(len(theta2_lista))])
ACG3_X=AA_real+AACG3_X
ACG3_Y=AA_img+AACG3_Y
ACG3=np.sqrt(ACG3_X**2+ACG3_Y**2)
ACG4c_X=[-e*omega4_lista[i]**2*np.cos(theta4_lista[i]-delta) for i in range(len(theta2_lista))]
ACG4c_Y=[e*omega4_lista[i]**2*np.sin(theta4_lista[i]-delta) for i in range(len(theta2_lista))]
ACG4c=[np.sqrt(ACG4c_X[i]**2+ACG4c_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
ACG4t_X=[-e*alfa4_lista[i]*np.sin(theta4_lista[i]-delta) for i in range(len(theta2_lista))]
ACG4t_Y=[e*alfa4_lista[i]*np.cos(theta4_lista[i]-delta) for i in range(len(theta2_lista))]
ACG4t=[np.sqrt(ACG4t_X[i]**2+ACG4t_Y[i]**2) for i in range(len(theta2_lista))]
ACG4_real=np.array(ACG4c_X)+np.array(ACG4t_X)
ACG4_img=np.array(ACG4c_Y)+np.array(ACG4t_Y)
ACG4=np.sqrt(np.array(ACG4_real)**2+np.array(ACG4_img)**2)
```