Risoluzione del compito n. 6 (Giugno 2020)

PROBLEMA 1

Trovate tutte le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z + w = -1 - \mathrm{i} \\ (z + w)^3 - 3z^2w - 3zw^2 = 2 - 2\mathrm{i}\ . \end{cases}$$

La seconda equazione si riscrive

$$-(1+\mathrm{i})^3 - 3zw(-1-\mathrm{i}) = 2-2\mathrm{i} \iff -(1+3\mathrm{i}-3-\mathrm{i}) - 3zw(-1-\mathrm{i}) = 2-2\mathrm{i} \iff zw = 0\ ,$$

quindi o $z = 0$, e dalla prima equazione ricaviamo $w = -1 - \mathrm{i}$, oppure $w = 0$ e dalla prima equazione $z = -1 - \mathrm{i}$. Le due soluzioni del sistema sono

$$z = 0\ , \quad w = -1 - \mathrm{i}\ , \qquad z = -1 - \mathrm{i}\ , \quad w = 0\ .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{x^2/(x+1)}$.

a) **Calcolatene il dominio ed i limiti agli estremi del dominio.**

b) **Determinate la derivata f' , calcolate i limiti di f' agli estremi del dominio e determinate gli asintoti di f .**

c) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e i punti di massimo e/o minimo locale.**

d) **Disegnate il grafico di f .**

e) **Determinate la derivata seconda f'' e dite se $x = -3$ si trova in un intervallo di concavità o di convessità di f .**

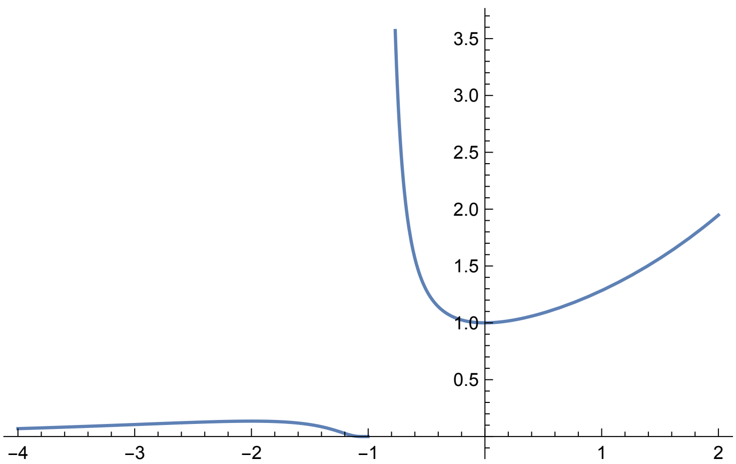
La funzione f è definita per ogni $x \neq -1$ ed è sempre positiva. Per $x \to (-1)^{\pm}$ l'esponente tende a $\pm\infty$, pertanto

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = 0^+ \ , \qquad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty \ .$$

Invece per $x \to \pm\infty$ l'esponente tende a $\pm\infty$ dunque

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \ , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

C'è un asintoto orizzontale (zero) per $x \to -\infty$, un asintoto verticale destro per $x \to (-1)^+$. Il grafico è un po' falsato in verticale, perché il ramo sinistro risulta molto schiacciato.



Abbiamo per $x \neq -1$

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^{x^2/(x+1)} \ ;$$

quindi il segno di f' è positivo per $x < -2$ e per $x > 0$, negativo per $-2 < x < -1$ e per $-1 < x < 0$, ed f' si annulla in $x = -2$ che è di massimo locale, e in $x = 0$ che è di minimo locale. Abbiamo

$$f(-2) = \mathrm{e}^{-4} << f(0) = 1 \ ,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0^+ \ , \quad \lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = 0^- \ , \quad \lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = -\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \ .$$

Dall'ultima relazione segue che f non ha asintoto obliquo a destra.
Dato poi che

$$f''(x) = \frac{x^4+4x^3+4x^2+2x+2}{(x+1)^4}\,\mathrm{e}^{x^2/(x+1)} \ ,$$

abbiamo $f''(-3) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-9/2} < 0$ dunque $x=-3$ è in un intervallo di concavità.

PROBLEMA 3

In questo esercizio, i coefficienti dei monomi vanno semplificati ai minimi termini. Siano

$$f(x) = 2x^2 + \log\big(\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)\big)\ , \qquad g(x) = \operatorname{sen}\big(\log(1-2x)\big)\ .$$

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 3 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**
b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 3 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**
c) **Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, di $f(x) - g(x)$.**
d) **Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - g(x) + \alpha x^3}{x \operatorname{sen}^2 x}$.**

Dato che

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\ , \quad \operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\ , \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

abbiamo

$$\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x) = 1 - 2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + \log\Big[1 + \Big(-2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\Big)\Big] \\ &= 2x^2 + \Big(-2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\Big) - \frac{1}{2}(\cdots)^2 + \frac{1}{3}(\cdots)^3 + o(\cdots)^3\ . \end{aligned}$$

Dato che la quantità fra parentesi è di ordine 1, abbiamo $o(\cdots)^3 = o(x^3)$ e possiamo proseguire con

$$\begin{aligned} \cdots &= -2x + \frac{4x^3}{3} - \frac{1}{2}\big(4x^2 + 8x^3\big) + \frac{1}{3}(-8x^3) + o(x^3) \\ &= -2x - 2x^2 - \frac{16x^3}{3} + o(x^3)\ . \end{aligned}$$

Invece $\log(1-2x) = -2x - 2x^2 - 8x^3/3 + o(x^3)$ quindi

$$g(x) = \operatorname{sen}\Big(-2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\Big) = \Big(-2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\Big) - \frac{1}{6}(\cdots)^3 + o(\cdots)^3$$

e siccome la quantità fra parentesi è di ordine 1, abbiamo $o(\cdots)^3 = o(x^3)$ e possiamo proseguire con

$$\cdots = -2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) = -2x - 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\ .$$

Otteniamo allora

$$f(x) - g(x) = -4x^3 + o(x^3)\ ,$$

un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $-4x^3$, quindi osservando che $x \operatorname{sen}^2 x = x^3 + o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - g(x) + \alpha x^3}{x \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha - 4)x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \alpha - 4\ .$$

PROBLEMA 4

Determinate i valori di $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ per i quali la serie $\sum_n n^{3\alpha} \arctan(1/n^{\alpha^2+2})$ risulta convergente.
Determinate i valori di $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\sum_n n^{3\alpha} \arctan(1/n^{\alpha^2+k^2})$ risulta divergente per $1 \leq \alpha \leq 2$ e convergente per tutti gli altri valori di α.

Entrambe le serie sono a termini positivi. Dato che $\alpha^2+2>0$, l'argomento dell'arcotangente tende a zero, quindi

$$n^{3\alpha} \arctan(1/n^{\alpha^2+2}) \sim \frac{n^{3\alpha}}{n^{\alpha^2+2}} = \frac{1}{n^{\alpha^2-3\alpha+2}} \,,$$

e la prima serie converge se e solo se

$$\begin{aligned} \alpha^2-3\alpha+2>1 &\iff \alpha^2-3\alpha+1>0 \\ &\iff \left[\alpha < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \ \textbf{o} \ \alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] . \end{aligned}$$

Analogamente la seconda serie converge se e solo se

$$\begin{aligned} \alpha^2-3\alpha+k^2>1 &\iff \alpha^2-3\alpha+k^2-1>0 \\ &\iff \left[\alpha < \frac{3-\sqrt{13-4k^2}}{2} \ \textbf{o} \ \alpha > \frac{3+\sqrt{13-4k^2}}{2}\right] \end{aligned}$$

e diverge per

$$\frac{3-\sqrt{13-4k^2}}{2} \leq \alpha \leq \frac{3+\sqrt{13-4k^2}}{2} \ :$$

occorre dunque che questi numeri siano rispettivamente 1 e 2, il che si verifica quando $\sqrt{13-4k^2}=1$ ossia $4k^2=12$. I valori cercati sono dunque $k=\pm\sqrt{3}$. In alternativa avremmo potuto dire che se vogliamo che la disequazione $\alpha^2-3\alpha+k^2-1 \leq 0$ sia risolta per $1 \leq \alpha \leq 2$, occorre che il primo membro sia $(\alpha-1)(\alpha-2)$, che dà subito $k^2-1=2$.

Esercizio 1. Se $z = 2 - \mathrm{i}$ e $w = \dfrac{(3+\mathrm{i})z - \mathrm{i}\bar{z}}{\mathrm{i}|z|^2 - (3-3\mathrm{i})}$ allora la parte immaginaria di w è

(A) $-55/73$.	(C) $-215\mathrm{i}/793$.
(B) $-7/13$.	(D) $-39/73$.

Calcoliamo: $(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) - \mathrm{i}(2+\mathrm{i}) = 8 - 3\mathrm{i}$, $\mathrm{i}|z|^2 - (3-3\mathrm{i}) = 8\mathrm{i} - 3$ quindi

$$w = \frac{(8-3\mathrm{i})(-8\mathrm{i}-3)}{64+9} = \frac{-48-55\mathrm{i}}{73}$$

ha parte immaginaria $-55/73$.

Esercizio 2. Tre dadi hanno le facce numerate da 1 a 6; lanciandoli tutti e tre, la probabilità che la somma dei punti sia 5 è

(A) $1/36$.	(C) $3/(5\cdot 6)$.
(B) $1/72$.	(D) $\binom{6}{5}/3$.

Il primo dado può presentare un qualunque punteggio fra 1 e 6; indipendentemente da questo punteggio, anche il secondo e il terzo dado fanno lo stesso: in totale le terne primo-secondo-terzo dado sono dunque 6^3. I punteggi favorevoli sono quelli in cui un dado fa 3 e gli altri due 1 (tre possibilità, a seconda di quale dado fa 3) o quelli in cui un dado fa 1 e gli altri due dadi 2 (altre 3 possibilità), in totale 6. Dunque la probabilità è $6/6^3 = 1/36$.

Esercizio 3. La successione $\dfrac{n^4\bigl(1-2/\sqrt{n}\bigr) - n^3\bigl(n+3\sqrt{n}\bigr)}{n^6\,\mathrm{sen}\bigl(5/n^4\bigr) + n^4\,\mathrm{sen}\bigl(5/\sqrt{n}\bigr)}$ ha limite:

(A) -1.	(C) $+\infty$.
(B) 0.	(D) $-2/5$.

Il numeratore si riscrive $-2n^4/\sqrt{n} - 3n^3\sqrt{n} = -5n^{7/2}$, e al denominatore

$$n^6\,\mathrm{sen}\bigl(5/n^4\bigr) \simeq 5n^2\,, \qquad n^4\,\mathrm{sen}\bigl(5/\sqrt{n}\bigr) \simeq 5n^4/\sqrt{n} = 5n^{7/2}\,,$$

quindi domina il secondo addendo e il limite vale -1.

Esercizio 4. I valori di a, b per i quali la funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}(3x) + \mathrm{e}^{-x} & \text{se } x < 0 \\ 2ax^2 - bx + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ risulta derivabile su tutto $\mathbf{R}$ sono

(A) $b = -2$, a qualsiasi.	(C) $b = -3$, $a = 0$.
(B) $b = -2a$, a qualsiasi.	(D) $b = -3$, $a = -1$.

Osserviamo che per qualunque a, b i limiti da sinistra e da destra di f in zero e il valore in zero coincidono, quindi f è continua. Poi certamente per $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 3\cos(3x) - \mathrm{e}^{-x} & \text{se } x < 0 \\ 2ax - b & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -b\,, \end{cases}$$

dunque f è derivabile anche in zero (con derivata 2) se e solo se $-b = 2$, indipendentemente dal valore di a.

Esercizio 5. I valori di $\alpha > 0$ per i quali converge l'integrale $\int_1^{+\infty} x^{2-\alpha^2} \arctan x^{2\alpha}\, dx$ sono

(A) $\alpha > \sqrt{3}$.	(C) $0 < \alpha < \sqrt{3}$.
(B) $-3 < \alpha < 3$.	(D) $\sqrt{3} < \alpha < 3$.

La sola improprietà è all'infinito, dove

$$\alpha > 0 \Rightarrow x^{2\alpha} \to +\infty \Rightarrow \arctan x^{2\alpha} \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow x^{2-\alpha^2} \arctan x^{2\alpha} \sim x^{2-\alpha^2} = \frac{1}{x^{\alpha^2-2}} ,$$

quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha^2 - 2 > 1$ che, ricordando che $\alpha > 0$, equivale a $\alpha > \sqrt{3}$.

Esercizio 6. La derivata di $\displaystyle\int_7^{2x} \operatorname{sen}^7 t\, dt$ per $x = \pi/4$ vale

(A) 2.	(C) $1/8(\sqrt{2})^8$.
(B) 1.	(D) $1/(\sqrt{2})^7$.

Posto $F(x) = \int_7^x \operatorname{sen}^7 t\, dt$, la funzione da derivare è $F(2x)$ e per il teorema fondamentale del calcolo $F'(x) = \operatorname{sen}^7 x$, dunque

$$\frac{d}{dx}F(2x) = 2F'(2x) = 2\operatorname{sen}^7(2x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}F(2x)\Big|_{x=\pi/4} = 2\operatorname{sen}^7(\pi/2) = 2 .$$

Esercizio 7. Se f è debolmente crescente, allora f^2 è debolmente crescente?

(A) Solo se f è non negativa.	(C) Solo se f ha segno costante.
(B) Sì, sempre.	(D) No, mai.

Se $f \geq 0$ allora ricordando che per numeri non negativi la funzione quadrato è strettamente crescente si ha

$$x < y \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f(x) \leq f(y) \quad \Rightarrow \quad f^2(x) \leq f^2(y) .$$

Invece se f ha segno costante ma negativo la funzione f^2 è debolmente decrescente: infatti sui numeri non positivi la funzione quadrato è strettamente decrescente pertanto

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f^2(x) \geq f^2(y) .$$
