Risoluzione del compito n. 3 (Febbraio 2021)

PROBLEMA 1

Trovate tutte le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} zw = \dfrac{\mathrm{i} - \sqrt{3}}{2} \\ z\bar{w} = \mathrm{i} \\ |z| = |w| = 1 \, . \end{cases}$$

Si risolve tranquillamente sostituendo $z = a + \mathrm{i}b$ eccetera, ma una soluzione veloce è con la forma esponenziale (o trigonometrica): dato che hanno modulo 1, abbiamo

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \, , \quad w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \quad \Rightarrow \quad zw = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} \, , \quad z\bar{w} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} \, ,$$

ma $(\mathrm{i} - \sqrt{3}\,)/2 = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}$ e $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ per cui per qualche valore di $h, k, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \theta + \phi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \theta - \phi = \frac{\pi}{2} + 2h\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 2\theta = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2(h+k)\pi \\ \phi = \theta - \frac{\pi}{2} - 2h\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} + l\pi \\ \phi = \theta - \frac{\pi}{2} - 2h\pi \end{cases}$$

pertanto (a meno di aggiungere multipli interi di 2π) abbiamo due possibilità:

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3} \, , \quad \phi_1 = \frac{\pi}{6} \qquad \text{e} \qquad \theta_2 = \frac{5\pi}{3} \, , \quad \phi_2 = \frac{7\pi}{6}$$

per cui le due soluzioni del sistema sono

$$z_1 = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \, , \quad w_1 = \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2} \qquad \text{e} \qquad z_2 = -z_1 \, , \quad w_2 = -w_1 \, .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = e^x\sqrt{|x-2|}$.

a) **Determinatene il dominio, e i limiti agli estremi del dominio.**

b) **Determinate l'insieme in cui f è derivabile, e i limiti di f' agli estremi di tale insieme.**

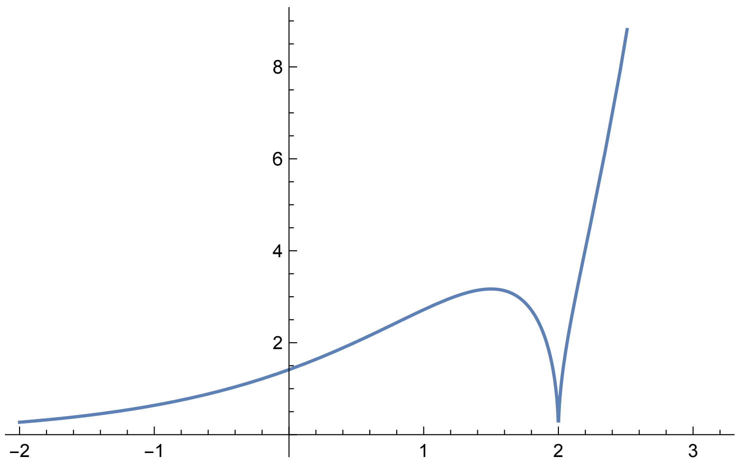
c) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e i punti di massimo e minimo locale.**

d) **Determinate gli intervalli di concavità e convessità di f .**

e) **Disegnate il grafico di f .**

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$, è sempre positiva tranne che in $x = 2$ dove si annulla, e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty .$$



La funzione è certamente derivabile per $x \neq 2$ e abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x\sqrt{|x-2|} + e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{|x-2|}} \cdot \frac{x-2}{|x-2|} = \frac{2|x-2|^2 + (x-2)}{2|x-2|^{3/2}}\, e^x \\ &= \frac{(x-2)(2x-3)}{2|x-2|^{3/2}}\, e^x = \frac{x-2}{|x-2|}\,\frac{2x-3}{2\sqrt{|x-2|}}\, e^x \; : \end{aligned}$$

vediamo che

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0^+ , \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty , \qquad \lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \mp\infty .$$

Dunque f non è derivabile per $x = 2$, e presenta una cuspide (arriva dall'alto con tangente verticale e riparte verso l'alto con tangente verticale). Dato che f è continua in $x = 2$, per un corollario del Teorema di da l'Hôpital i limiti di f' sono la derivata sinistra e destra, ossia

$$f'_-(2) = -\infty , \qquad f'_+(2) = +\infty .$$

Inoltre f' è positiva per $x < 3/2$ e per $x > 2$, è negativa per $3/2 < x < 2$. Il punto $x = 3/2$, in cui f' si annulla, è di massimo relativo, mentre $x = 2$ è il punto di minimo assoluto (come già sapevamo). La funzione f è dunque strettamente crescente in $]-\infty, 3/2]$ e in $[2, +\infty[$ e strettamente decrescente in $[3/2, 2]$. Osserviamo che in ciascuno degli intervalli a sinistra e a destra di 2 la funzione $(x-2)/|x-2|$ è costante, quindi ha derivata zero. Calcoliamo allora per $x \neq 2$ (in $x = 2$ non esiste neppure f')

$$f''(x) = \frac{x-2}{|x-2|}\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{2\sqrt{|x-2|}}\,\mathrm{e}^x\right) = \frac{1}{2}\frac{x-2}{|x-2|}\frac{d}{dx}\frac{(2x-3)\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{|x-2|}}\ ,$$

ma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{(2x-3)\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{|x-2|}} &= \frac{[2\,\mathrm{e}^x + (2x-3)\,\mathrm{e}^x]\sqrt{|x-2|} - (2x-3)\,\mathrm{e}^x\frac{1}{2\sqrt{|x-2|}}\frac{x-2}{|x-2|}}{|x-2|} \\ &= \frac{(4x-2)(x-2)^2 - (2x-3)(x-2)}{2(x-2)^2\sqrt{|x-2|}}\,\mathrm{e}^x = \frac{4x^2-12x+7}{2(x-2)\sqrt{|x-2|}}\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

per cui

$$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{x-2}{|x-2|}\frac{4x^2-12x+7}{2(x-2)\sqrt{|x-2|}}\,\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{4|x-2|^{3/2}}(4x^2-12x+7)\ .$$

Allora (ricordando che lavoriamo con $x \neq 2$) la derivata seconda si annulla nei due punti $x = \bigl(3 \pm \sqrt{2}\bigr)/2$, che sono uno a sinistra e uno a destra di $x = 2$, è positiva per $x < \bigl(3-\sqrt{2}\bigr)/2$ e per $x > \bigl(3+\sqrt{2}\bigr)/2$, mentre è negativa per $\bigl(3-\sqrt{2}\bigr)/2 < x < 2$ e per $2 < x < \bigl(3+\sqrt{2}\bigr)/2$. La funzione f risulta dunque convessa in $]-\infty, \bigl(3-\sqrt{2}\bigr)/2]$ e in $[\bigl(3+\sqrt{2}\bigr)/2, +\infty[$ e concava in $[\bigl(3-\sqrt{2}\bigr)/2, 2]$ e in $[2, \bigl(3+\sqrt{2}\bigr)/2]$ — ma non nella loro unione!

PROBLEMA 3

In questo esercizio, i coefficienti dei monomi vanno semplificati ai minimi termini. Considerate le tre funzioni

$$f(x)=\log(1+2x)\cos x\ ,\quad g(x)=\,e^{2x-6x^2}\ ,\quad h(x)=\cos\bigl(x\sqrt{2}+3x^2\sqrt{2}\,\bigr)\ .$$

a) **Scrivete gli sviluppi di Taylor di ordine 3 e centrati in $x_0=0$ delle tre funzioni.**
b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 3 e centrato in $x_0=0$ della funzione $f(x)-g(x)+2h(x)$.**
c) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 3 e centrato in $x_0=0$ della funzione $\log\bigl(f(x)-g(x)+2h(x)\bigr)$.**
d) **Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\bigl(f(x)-g(x)+2h(x)\bigr)}{x^3}$.**
e) **Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\log\bigl(f(x)-g(x)+2h(x)\bigr)-\alpha x^3}{x^4}$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.**

Teniamo presente che $2x-6x^2$ è un infinitesimo di ordine 1, quindi $o(2x-6x^2)^k=o(x^k)$, e analogamente per l'argomento del coseno nella funzione h . Abbiamo subito (calcoliamo direttamente gli sviluppi di ordine 4 che servono per il punto e), per gli altri punti bastano quelli di ordine 3 che sono assai più semplici da ricavare)

$$\begin{aligned}f(x)&=\Bigl(2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}-4x^4+o(x^4)\Bigr)\Bigl(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Bigr)\\&=2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}-4x^4+o(x^4)-x^3+x^4\\&=2x-2x^2+\frac{5x^3}{3}-3x^4+o(x^4)\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x)&=1+(2x-6x^2)+\frac{1}{2}(\cdots)^2+\frac{1}{6}(\cdots)^3+\frac{1}{24}(\cdots)^4+o(\cdots)^4\\&=1+(2x-6x^2)+\frac{1}{2}(4x^2-24x^3+36x^4)+\frac{1}{6}(8x^3-72x^4)+\frac{1}{24}(16x^4)+o(x^4)\\&=1+2x-4x^2-\frac{32x^3}{3}+\frac{20x^4}{3}+o(x^4)\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(x)&=1-\frac{1}{2}\bigl(x\sqrt{2}+3x^2\sqrt{2}\,\bigr)^2+\frac{1}{24}(\cdots)^4+o(\cdots)^4\\&=1-x^2-6x^3-\frac{53x^4}{6}+o(x^4)\ .\end{aligned}$$

Allora

$$f(x)-g(x)+2h(x)=1+\frac{x^3}{3}-\frac{82x^4}{3}+o(x^4)$$

e

$$\log\bigl(f(x)-g(x)+2h(x)\bigr)=\frac{x^3}{3}-\frac{82x^4}{3}+o(x^4)$$

(il termine successivo sarebbe in x^6); in particolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\bigl(f(x)-g(x)+2h(x)\bigr)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\bigl(f(x)-g(x)+2h(x)\bigr)-\alpha x^3}{x^4} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(-\alpha+1/3)x^3-82x^4/3+o(x^4)}{x^4} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<1/3 \\ -82/3 & \text{se } \alpha=1/3 \\ -\infty & \text{se } \alpha>-1/3. \end{cases}\end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Studiate al variare di $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_n \Big(|\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{1}|^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{n}^{-\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}} \Big) \,.$$

Studiate poi al variare di $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_n \Big(|\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{1}|^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n}^{-\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}} \Big) \,.$$

Intanto osserviamo che la prima serie è somma di due a termini positivi, una geometrica e l'altra armonica, e le studiamo separatamente. Poniamo

$$A = \sum_n |\alpha + 1|^{2n} \,, \qquad B = \sum_n n^{-\alpha-2\alpha^2} = \sum_n \frac{1}{n^{2\alpha^2+\alpha}}$$

per poterle richiamare in seguito. La serie A è geometrica e converge se e solo se $|\alpha+1| < 1$ ossia per $-2 < \alpha < 0$. La serie B è armonica generalizzata, e converge se e solo se $2\alpha^2 + \alpha > 1$ ossia per $\alpha < -1$ e per $\alpha > 1/2$. Allora la serie $A + B$ converge se convergono entrambe (ossia per $-2 < \alpha < -1$) e altrimenti diverge positivamente.
Più delicata la situazione per $A - B$. Infatti
se $\alpha \le -2$ la serie A diverge positivamente e B converge, quindi possiamo applicare il teorema sulla somma di serie ottenendo che $A - B$ diverge positivamente;
se $-2 < \alpha < -1$ entrambe le serie convergono, e $A - B$ converge;
se $-1 \le \alpha < 0$ la serie A converge e B diverge positivamente, quindi $A - B$ diverge negativamente;
se $\alpha = 0$ la serie $A - B$ ha termini tutti nulli, quindi converge;
se $0 < \alpha \le 1/2$, non possiamo spezzare la serie in due, dato che avremmo la differenza di due serie che divergono positivamente, ma la base $|\alpha + 1| =: q > 1$ fa sì che il primo termine domini sul secondo, quindi

$$a_n := |\alpha + 1|^{2n} - n^{-\alpha-2\alpha^2} = q^n \Big(1 - \frac{n^{-\alpha-2\alpha^2}}{q^n} \Big) =: q^n c_n$$

con $c_n \to 1$: in particolare per il teorema di permanenza del segno definitivamente $a_n > 0$, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico fra $\sum a_n$ e $\sum q^n$ e otteniamo che la serie proposta diverge positivamente.
se $\alpha > 1/2$ la serie A diverge positivamente mentre B converge, quindi la differenza diverge positivamente.
In conclusione la serie differenza converge per $-2 < \alpha < -1$ e per $\alpha = 0$, diverge positivamente per $\alpha \le -2$ e per $\alpha > 0$, diverge negativamente per $-1 \le \alpha < 0$.