Risoluzione del compito n. 3 (Gennaio 2021/2)

PROBLEMA 1

Trovate tutte le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} |z| - \mathrm{i}w = \mathrm{i}z - |w| \\ \left|\dfrac{w}{z}\right| = \left|\dfrac{z}{w}\right| = |zw| \ . \end{cases}$$

Dalla seconda equazione (che poi sono due) si ricava

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \left|\frac{z}{w}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z, w \neq 0 \\ |z| = |w| \end{cases}$$

e quindi

$$\left|\frac{w}{z}\right| = |zw| \iff \frac{|w|}{|z|} = |z||w| \iff 1 = |z|^2$$

perciò $|z| = |w| = 1$. A questo punto la prima equazione dà

$$2 = \mathrm{i}(z + w) \iff z + w = -2\mathrm{i}\ .$$

Ora possiamo procedere in vari modi: il più veloce è osservare che

$$|z + w| = |-2\mathrm{i}| = 2$$

ma per la disuguaglianza triangolare $2 = |z + w| \leq |z| + |w| = 1 + 1 = 2$, dunque la disuguaglianza è un'uguaglianza e sappiamo che ciò accade se e solo se i due numeri hanno lo stesso argomento (sono sulla stessa semiretta dall'origine, nel piano di Gauß). Allora z e w sono multipli di $-2\mathrm{i}$ lunghi 1, ossia $z = w = -\mathrm{i}$ che è la sola soluzione del sistema. In alternativa si può ricavare che se $z = x + \mathrm{i}y$ allora $w = -z - 2\mathrm{i} = -x - (2 + y)\mathrm{i}$, ma

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |w| = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (2 + y)^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4 + 4y = 0 \end{cases}$$

da cui $y = -1$ e $x = 0$ e di nuovo $z = -\mathrm{i}$ e $w = -z - 2\mathrm{i} = -\mathrm{i}$.

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $e^x(2x^2 - 3x + 2) - \sqrt{e}$.

a) **Calcolatene i limiti agli estremi del dominio.**

b) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e i punti di massimo e/o minimo locale.**

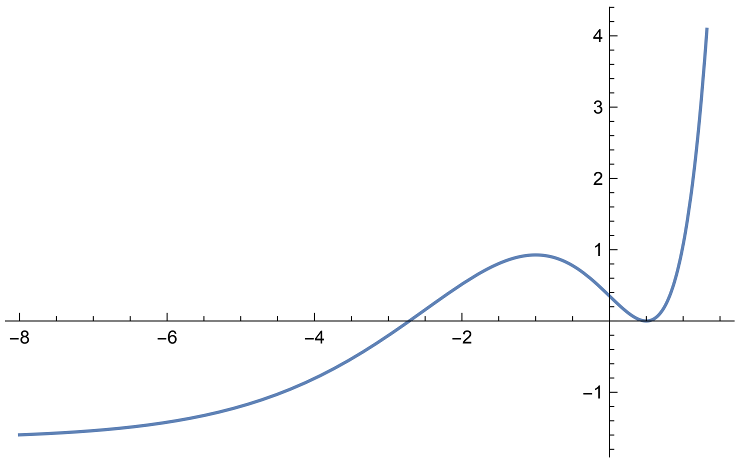
c) **Deducete quanti sono gli zeri di f.**

d) **Determinate gli intervalli di concavità e convessità di f.**

e) **Disegnate il grafico di f.**

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$, e abbiamo facilmente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\sqrt{e}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$



Dato che $f'(x) = e^x(2x^2 + x - 1)$ si annulla in -1 e $1/2$, è negativa in $]-1, 1/2[$ e positiva nel resto, la funzione cresce strettamente in $]-\infty, -1]$ e in $[1/2, +\infty[$ e decresce strettamente in $[-1, 1/2]$. In particolare è iniettiva in ciascuno di questi intervalli. I punti -1 e $1/2$ sono rispettivamente di massimo locale e di minimo locale. Dato che $f(1/2) = 0$ ed f è decrescente da -1 a $1/2$, necessariamente $f(-1) = 7/e - \sqrt{e} > 0$, mentre a $-\infty$ il limite è negativo, dinque vi è uno e un solo zero di f in $]-\infty, -1]$. Poi come abbiamo detto $f(1/2) = 0$, quindi per la stretta monotonia non vi sono altri zeri di f né in $[-1, 1/2[$ né in $]1/2, +\infty[$, quindi in totale f ha due zeri. Abbiamo poi $f''(x) = e^x(2x^2 + 5x)$ che si annulla in $-5/2$ e 0 ed è negativa fra questi due numeri, positiva all'esterno, pertanto f è strettamente convessa in $]-\infty, -5/2]$ e in $[0, +\infty[$ e strettamente concava in $[-5/2, 0]$.

PROBLEMA 3

Considerate le tre funzioni

$$f(x) = \cos(2x + x^2)\ , \qquad g(x) = \mathrm{e}^{2x+x^2}\ , \qquad h(x) = \mathrm{sen}(2x + 5x^2)\ .$$

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 3 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**
b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 3 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**
c) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 3 e centrato in $x_0 = 0$ di $h(x)$.**
d) **Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x) + h(x)}{x^3}$.**
e) **Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - g(x) + h(x) + \alpha x^3}{x^4}$.**

Per l'ultimo punto conviene calcolare direttamente gli sviluppi di ordine 4. Osserviamo che sia $2x+x^2$ che $2x+5x^2$ sono infinitesimi di ordine 1, pertanto $o(2x+ax^2)^k = o(x^k)$. Abbiamo velocemente

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 - \frac{(2x+x^2)^2}{2} + \frac{(\cdots)^4}{24} + o(\cdots)^4 \\
&= 1 - 2x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{16x^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\
g(x) &= 1 + (2x + x^2) + \frac{(\cdots)^2}{2} + \frac{(\cdots)^3}{6} + \frac{(\cdots)^4}{24} + o(\cdots)^4 \\
&= 1 + 2x + x^2 + 2x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{8x^3}{6} + \frac{12x^4}{6} + \frac{16x^4}{24} + o(x^4) \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + \frac{10x^3}{3} + \frac{19x^4}{6} + o(x^4) \\
h(x) &= (2x + 5x^2) - \frac{(\cdots)^3}{6} + o(\cdots)^4 = 2x + 5x^2 - \frac{4x^3}{3} - 10x^4 + o(x^4)\ .
\end{aligned}$$

Allora

$$f(x) - g(x) + h(x) = -\frac{20x^3}{3} - 13x^4 + o(x^4)$$

pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x) + h(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{20x^3}{3} - 13x^4 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{20}{3}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - g(x) + h(x) + \alpha x^3}{x^4} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\alpha - \frac{20}{3}\right)x^3 - 13x^4 + o(x^4)}{x^4} \\
&= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 20/3 \\ -13 & \text{se } \alpha = 20/3 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 20/3. \end{cases}
\end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Considerate la funzione integrale $\boldsymbol{F(x) = \int_0^x \left(2 - \frac{\text{sen}(2t)}{t}\right) dt}$ **.**

a) **Calcolate** $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}}$ **.**

b) **Posto** $\boldsymbol{a_n = F(1/n)}$ **, determinate il carattere della serie** $\boldsymbol{\sum_n a_n}$ **.**

c) **Posto** $\boldsymbol{b_n = F(n^\beta)}$ **, determinate per quali valori dell'esponente** $\boldsymbol{\beta \in \mathbb{R}}$ **risulta convergente la serie** $\boldsymbol{\sum_n b_n}$ **.**

Posto per il momento $f(x) = 2 - \frac{\text{sen}(2x)}{x}$, di modo che $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, osserviamo intanto che

$$f(x) = 2 - \frac{2x - 8x^3/6 + o(x^4)}{x} = \frac{4x^2}{3} + o(x^3)$$

e in particolare $f(x) \to 0$ per $x \to 0$. Allora conviene estendere f ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{\text{sen}(2x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ed f risulta continua in zero. Allora $F(x) \to 0$ per $x \to 0$, per il teorema della media (o mille altri motivi) dunque il limite $F(x)/x^3$ si presenta nella forma $0/0$ e possiamo applicare il Teorema di de l'Hôpital. Ricordando che per il Teorema fondamentale del calcolo $F'(x) = f(x)$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3} \underset{\substack{\uparrow \\ H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2/3 + o(x^3)}{3x^2} = \frac{4}{9} \, .$$

Da questo segue che F è un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $4x^3/9$, ossia

$$F(x) = \frac{4x^3}{9} + o(x^3) \, .$$

In particolare

$$a_n = F(1/n) = \frac{4}{9n^3} + o(1/n^3)$$

(che è una quantità positiva almeno per n grande), quindi applichiamo il criterio del confronto asintotico fra a_n e $1/n^3$ ottenendo che $\sum_n a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_n 1/n^3$, che converge. Per b_n il discorso è più articolato: se $\beta > 0$ abbiamo che $n^\beta \to +\infty$ e visto che la funzione integranda va a 2 per $x \to +\infty$ anche $b_n \to +\infty$ e la serie diverge positivamente. Se $\beta = 0$ il termine b_n è costante e non nullo (positivo) quindi la serie diverge positivamente. Invece per $\beta < 0$, analogamente al caso di a_n , la serie $\sum_n b_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_n n^{3\beta} = \sum_n 1/n^{-3\beta}$, che converge se e solo se $-3\beta > 1$ ossia $\beta < -1/3$, mentre (essendo a termini positivi) diverge positivamente per gli altri valori di $\beta < 0$. In conclusione la serie converge per $\beta < -1/3$ e diverge positivamente per $\beta \geq -1/3$. Il caso a_n corrispondeva a $\beta = -1$.