Risoluzione del compito n. 7 (Luglio 2020)

PROBLEMA 1

Trovate tutte le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z^3 = w \\ \bar{w} = 4z \ . \end{cases}$$

Bata scrivere $z^3 = 4\bar{z}$ da cui $|z|^3 = 4|z|$ per cui $|z| = 0$ o $|z| = 2$. Nel primo caso $z = 0$ e quindi $w = 0$. Nel secondo moltiplicando per z l'uguaglianza $z^3 = 4\bar{z}$ otteniamo $z^4 = 4|z|^2 = 16$, dunque z è una delle radici quarte di 16, che sono ± 2 e $\pm 2\mathrm{i}$. Ricavando i w corrispondenti otteniamo le cinque soluzioni:

$$z = 0,\ w = 0 \quad z = 2,\ w = 8 \quad z = -2,\ w = -8 \quad z = 2\mathrm{i},\ w = -8\mathrm{i} \quad z = -2\mathrm{i},\ w = 8\mathrm{i}\ .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \log\left(\frac{x}{2}\right) - \arctan(x-3) - \frac{\pi}{4}$.

a) Calcolatene il dominio ed i limiti agli estremi del dominio.

b) Determinate gli intervalli di monotonia di f e i punti di massimo e/o minimo locale.

c) Disegnate il grafico di f.

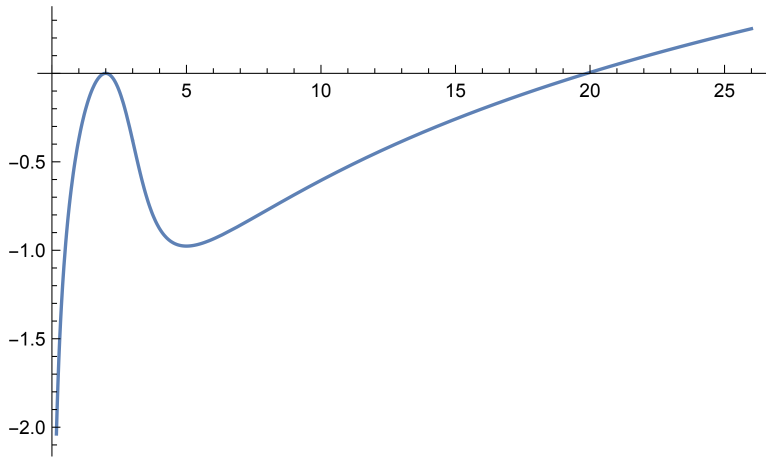
d) Determinate quanti sono gli zeri della funzione f.

e) Trovate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Il dominio è $]0, +\infty[$ e i limiti sono $-\infty$ per $x \to 0^+$ e $+\infty$ per $x \to +\infty$. La derivata di f vale

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+(x-3)^2} = \frac{x^2 - 7x + 10}{x(x^2 - 6x + 10)}$$

(osserviamo che il denominatore è sempre positivo nel dominio di f) che è nulla per $x = 2$ e $x = 5$ e negativa fra 2 e 5, pertanto f è strettamente crescente in $]0, 2]$ e in $[5, +\infty[$ e strettamente decrescente in $[2, 5]$. Ha un massimo locale per $x = 2$ dove vale zero, e un minimo locale per $x = 5$ dove vale $m := \log(5/2) - \arctan 2 - \pi/4$, useremo poi questo m. La figura è molto fuori scala, dato che il logaritmo sale molto lentamente.



Per lo studio precedente e il teorema di esistenza degli zeri, la funzione in $[5, +\infty[$ si annulla una volta (e una sola), mentre prima di 5 si annulla una e una sola volta, per $x = 2$. Dunque in totale si annulla due volte. In generale l'equazione $f(x) = k$ ha:

una soluzione	se $k > 0$ oppure se $k < m$
due soluzioni	se $k = 0$ o $k = m$
tre soluzioni	se $m < k < 0$.

PROBLEMA 3

In questo esercizio, i coefficienti dei monomi vanno semplificati ai minimi termini. Considerate le due funzioni $f(x) = e^{2x} \operatorname{sen} x$, $g(x) = \log(1 - 2x)$.

a) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.

b) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.

c) Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione $h(x) = x + f(x) + g(x)$.

d) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x) + \alpha x^3}{x^4}$.

Abbiamo

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) , \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

quindi

$$f(x) = x + 2x^2 + \frac{11x^3}{6} + x^4 + o(x^4) .$$

Invece

$$g(x) = -2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} - 4x^4 + o(x^4)$$

quindi

$$h(x) = -\frac{5x^3}{6} - 3x^4 + o(x^4)$$

è un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $-5x^3/6$. Allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x) + \alpha x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha - 5/6)x^3 - 3x^4}{x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 5/6 \\ -3 & \text{se } \alpha = 5/6 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 5/6. \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Data la funzione $g(x) = \log\bigl(1 + \sqrt{x}\,\bigr)$, sia $G(x)$ la primitiva di $g(x)$ tale che $G(0) = 0$.

a) Calcolate $G(x)$.

b) Calcolate l'integrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

c) Motivando la risposta, determinate per quali valori dell'esponente $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\ell = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} G(x)$$

risulta reale e diverso da zero. Calcolate infine tale limite ℓ.

Ricordiamo che deve essere $x \ge 0$ e poniamo $x = t^2 \iff t = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
\int \log\bigl(1+\sqrt{x}\,\bigr)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ x=t^2}}{=} \int 2t\log(1+t)\,dt &= t^2\log(1+t) - \int \frac{t^2+t-t-1+1}{1+t}\,dt \\
&= (t^2-1)\log(1+t) - \frac{t^2}{2} + t + c \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ t=\sqrt{x}}}{=} (x-1)\log\bigl(1+\sqrt{x}\,\bigr) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} + c\,.
\end{aligned}$$

Per avere la primitiva che si annulla in zero bisogna scegliere $c = 0$ quindi

$$G(x) = (x-1)\log\bigl(1+\sqrt{x}\,\bigr) - \frac{x}{2} + \sqrt{x}$$

e $\int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0) = G(1) = 1/2$. Per l'ultimo punto osserviamo che certamente il limite vale zero se $\alpha \ge 0$, mentre per $\alpha < 0$ usiamo il Teorema di de l'Hôpital nella forma $0/0$, ricordando che $G' = g$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{G(x)}{x^{-\alpha}} \underset{\substack{\uparrow\\ H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\bigl(1+\sqrt{x}\,\bigr)}{-\alpha x^{-\alpha-1}}\,.$$

Il numeratore è un infinitesimo di ordine $1/2$ dunque occorre che lo sia anche il denominatore: $-\alpha - 1 = 1/2 \iff \alpha = -3/2$ e in tal caso

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\bigl(1+\sqrt{x}\,\bigr)}{(3/2)x^{1/2}} = \frac{2}{3}\,.$$

Esercizio 1. Quante soluzioni distinte $z \in \mathbf{C}$ ha l'equazione $z^6 = z^3$?

(A) 4 .
(B) 3 .
(C) 2 .
(D) 6 .

Una soluzione è $z = 0$, e ora cerchiamo le altre: dato che adesso $z \neq 0$ possiamo dividere per z^3 ottenendo $z^3 = 1$, e da qui abbiamo altre tre soluzioni (le radici cubiche dell'unità), in totale quattro.

Esercizio 2. Un collezionista possiede 3 vasi identici, e 5 statue di 5 diverse divinità. In quanti modi può mettere in fila gli 8 oggetti?

(A) $\dfrac{8!}{3!}$.
(B) $\dbinom{8}{3}$.
(C) $\dfrac{8!}{5!}$.
(D) $\dfrac{5!\,3!}{8!}$.

Dobbiamo scegliere in quali degli 8 posti mettere i vasi, e questo si fa in $\binom{8}{3}$ modi. Per ciascuna scelta, a questo punto nei 5 posti rimanenti vanno le statue, permutate in tutti i modi possibili che sono $5!$ e in totale abbiamo

$$\binom{8}{3} \cdot 5! = \frac{8!}{3!\,5!} \cdot 5! = \frac{8!}{3!}$$

modi.

Esercizio 3. La successione $\sqrt{4n^2 - 3n} - 2n$ ha limite

(A) $-3/4$.
(B) $-3/2$.
(C) 0 .
(D) $+\infty$.

Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{4n^2 - 3n} + 2n$ e otteniamo

$$\sqrt{4n^2 - 3n} - 2n = \frac{(4n^2 - 3n) - (4n^2)}{\sqrt{4n^2 - 3n} + 2n} = \frac{-3n}{n\big(\sqrt{4 - 3/n} + 2\big)} \to -\frac{3}{4} \, .$$

Esercizio 4. I valori di a, b per i quali la funzione $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 1 & \text{se } x \leq -1 \\ 2ax + b & \text{se } |x| < 1 \\ bx^2 - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ risulta continua su tutto $\mathbf{R}$ sono

(A) $a = -1$, $b = -2$.
(B) $a = 0$, $b = -1$.
(C) $a = 1$, $b = -2$.
(D) $a = 1$, $b = 2$.

Gli unici punti in cui controllare la continuità sono -1 e 1. Per avere continuità in -1 occorre che $-a-1=-2a+b$, e per averla in 1 occorre che $2a+b=b-2$, pertanto deve essere $a=-1$, $b=-2$.

Esercizio 5. Per quale di queste successioni a_n la serie $\sum_n a_n$ è convergente?

(A) $a_n = \dfrac{1-\cos(1/n)}{2}$.

(B) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(C) $a_n = \operatorname{sen}\dfrac{3}{n}$.

(D) $a_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

Abbiamo

$$\frac{1-\cos(1/n)}{2} \sim \frac{1}{4n^2}\,, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}\,, \qquad \operatorname{sen}\frac{3}{n} \sim \frac{3}{n}\,, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$

dunque tutte le serie sono a termini positivi e possiamo usare il criterio del confronto asintotico, dal quale deduciamo che l'unica che converge è quella il cui termine generale si comporta come $1/n^2$.

Esercizio 6. La retta tangente al grafico di $\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$ per $x=\pi$ ha equazione

(A) $x+y=\pi+1$.

(B) $x=1-y$.

(C) $\mathrm{e}y=\pi-x$.

(D) $y=1-\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\pi)$.

Intanto $\mathrm{e}^{\operatorname{sen}\pi} = \mathrm{e}^0 = 1$, poi la derivata $\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\cos x$ per $x=\pi$ vale -1 dunque l'equazione è

$$y = 1+(-1)(x-\pi) = -x+\pi+1 \iff x+y=\pi+1\,.$$

Esercizio 7. L'integrale definito $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x\ \mathrm{e}^{x^2}\,dx$ vale:

(A) $\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2}$.

(B) $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}}{2}$.

(C) $\dfrac{\mathrm{e}}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$.

(D) $\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)$.

Intanto $\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \mathrm{e}^{x^2}/2+c$, quindi l'integrale vale $\mathrm{e}^2/2-\mathrm{e}^1/2=(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})/2$.
