Risoluzione del compito n. 2 (Gennaio 2020/1)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} w(\bar{z} + \mathrm{i}) = \mathrm{i}(\bar{z} + \mathrm{i}) \\ 2z\bar{w} - 3\bar{z} = 5\mathrm{i}w \,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo immediatamente $(w - \mathrm{i})(\bar{z} + \mathrm{i}) = 0$, pertanto abbiamo due casi: o $w = \mathrm{i}$ o $\bar{z} = -\mathrm{i}$ ossia $z = \mathrm{i}$. Nel primo caso, sostituendo $w = \mathrm{i}$ nella seconda equazione otteniamo $-2\mathrm{i}z - 3\bar{z} = -5$ da cui (eventualmente sostituendo $z = x + \mathrm{i}y$) si ricava $z = 3 + 2\mathrm{i}$. Nel secondo caso, sostituendo $z = \mathrm{i}$ nella seconda equazione si ricava $5w - 2\bar{w} = 3$ che ha come sola soluzione $w = 1$. Dunque il sistema ha due soluzioni (z, w), che sono

$$z = 3 + 2\mathrm{i}\,,\ w = \mathrm{i} \qquad \text{e} \qquad z = \mathrm{i}\,, \quad w = 1\,.$$

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = (x+2)^2\,\mathrm{e}^{x-1}$.

a) **Determinate il dominio di f , il segno, i limiti agli estremi del dominio.**

b) **Determinate il segno di f' , gli intervalli di monotonia di f , i punti di massimo o minimo locale.**

c) **Determinate il segno di f'' e gli intervalli di concavità e convessità di f .**

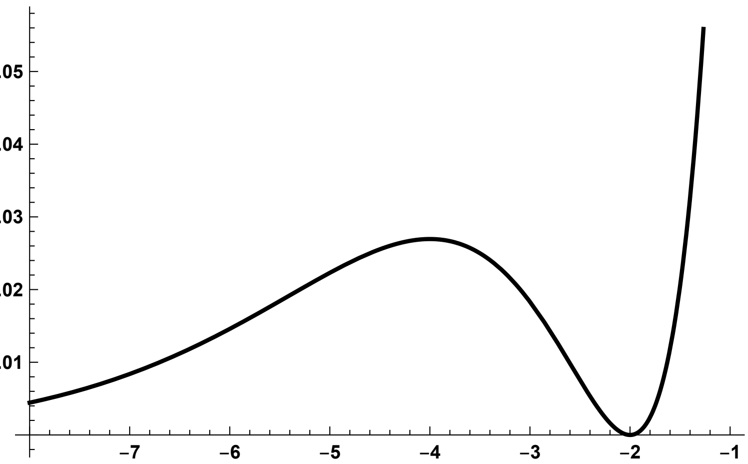
d) **Disegnate il grafico di f .**

e) **Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa 1 .**

f) **Determinate per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\int_{-\infty}^{1} \alpha f(x)\,dx = 1$.**

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, è sempre positiva salvo per $x = -2$ dove si annulla, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e tende a 0^+ per $x \to -\infty$, dato che l'esponenziale domina sulla potenza. La derivata di f è $f'(x) = (x+2)(x+4)\,\mathrm{e}^{x-1}$, dunque f risulta

$$\begin{aligned} &\text{crescente in }]-\infty, -4] \\ &\text{decrescente in } [-4,\ -2] \\ &\text{crescente in } [-2, +\infty[\ . \end{aligned}$$



Il punto $x = -2$, come già sapevamo, è di minimo assoluto, mentre si ha un massimo locale in $x = -4$, dove f vale $4\,\mathrm{e}^{-5} \sim 3/100$, per cui il grafico sopra è pesantemente fuori scala.

La derivata seconda è $(x^2 + 8x + 14)\,\mathrm{e}^{x-1}$ e si annulla per $x = -4 \pm \sqrt{2}$, mentre è negativa fra questi due valori. Allora f risulta

$$\begin{aligned} &\text{convessa in }]-\infty,\ -4-\sqrt{2}\,] \\ &\text{concava in } [-4-\sqrt{2},\ -4+\sqrt{2}\,] \\ &\text{convessa in } [-4+\sqrt{2},\ +\infty[\ . \end{aligned}$$

Per tracciare il grafico, osserviamo che

$$-4-\sqrt{2} < -4 < -4+\sqrt{2} < -2$$

quindi (come ci si poteva aspettare) i punti di flesso si trovano uno fra $-\infty$ (dove la derivata tende a zero) e il punto di massimo locale, e uno tra il punto di massimo locale e quello di minimo.
Dato che $f(1) = 9$ e $f'(1) = 15$, la retta tangente ha equazione $y = 9 + 15(x-1) = 15x - 6$. Infine,

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= (x+2)^2\,\mathrm{e}^{x-1} - 2\int (x+2)\,\mathrm{e}^{x-1}\,dx \\ &= (x+2)^2\,\mathrm{e}^{x-1} - 2\Big((x+2)\,\mathrm{e}^{x-1} - \int \mathrm{e}^{x-1}\,dx\Big) = [(x+2)^2 - 2x - 2]\,\mathrm{e}^{x-1}\,,\end{aligned}$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = 5 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{1} \alpha f(x)\,dx = 5\alpha\,,$$

e se vogliamo che valga 1 occorre scegliere $\alpha = 1/5$.

PROBLEMA 3

Sia $\boldsymbol{f(x) = \tan(x^3) - \operatorname{sen}^3 x}$ **.**

a) **Calcolate lo sviluppo di Taylor di ordine 8 di** $\boldsymbol{f}$ **, centrato in** $\boldsymbol{x_0 = 0}$ **.**

b) **Dite quali sono l'ordine di infinitesimo e la parte principale per** $\boldsymbol{x \to 0^+}$ **della funzione**

$$\boldsymbol{g(x) = \tan\big(x\sqrt{x}\,\big) - \operatorname{sen}^3\big(\sqrt{x}\,\big) - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\ .}$$

Da $\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^6)$ e $\tan t = t + t^3/3 + o(t^4)$ segue

$$\begin{aligned}
\tan x^3 &= x^3 + \frac{x^9}{3} + o(x^{12}) = x^3 + o(x^8) \\
\operatorname{sen}^3 x &= \Big(x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^6)\Big)^3 \\
&= x^3 - 3x^2 \cdot \frac{x^3}{6} + 3x^2 \cdot \frac{x^5}{120} + o(x^8) + 3x \cdot \Big(-\frac{x^3}{6}\Big)^2 \\
&= x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{3x^7}{120} + \frac{3x^7}{36} + o(x^8) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120} + o(x^8)\ ,
\end{aligned}$$

dunque

$$f(x) = \frac{x^5}{2} - \frac{13x^7}{120} + o(x^8)\ .$$

Dato che $g(x) = f\big(\sqrt{x}\,\big) + x^2\sqrt{x}$, e che $x^2\sqrt{x} = \big(\sqrt{x}\,\big)^5$, abbiamo subito

$$g(x) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{x}\,\big)^5 - \frac{13}{120}\big(\sqrt{x}\,\big)^7 + o\big(\sqrt{x}\,\big)^8 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{x}\,\big)^5 = -\frac{13}{120}x^{7/2} + o(x^4)$$

che è un infinitesimo di ordine $7/2$ con parte principale $-\frac{13}{120}x^{7/2}$.

PROBLEMA 4

Sia $\boldsymbol{\alpha > 0}$ **.**

a) **Posto** $\boldsymbol{a_n = \int_0^{1/n^\alpha} 2x\,dx}$ **, determinate per quali** $\boldsymbol{\alpha}$ **converge** $\boldsymbol{\sum_n a_n}$ **.**

b) **Calcolate** $\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^x 4\,\mathrm{sen}\,t^3\,dt}$ **.**

c) **Posto** $\boldsymbol{b_n = \int_0^{1/n^\alpha} 7\tan x^3\,dx}$ **, determinate per quali** $\boldsymbol{\alpha}$ **converge** $\boldsymbol{\sum_n b_n}$ **.**

Dato che $1/n^\alpha \to 0$, per n abbastanza grande le funzioni integrande sono positive, quindi sia a_n che b_n sono maggiori di zero, ed entrambe le serie sono a termini positivi. Per la prima serie calcoliamo direttamente

$$a_n = \left[x^2\right]_0^{1/n^\alpha} = \frac{1}{n^{2\alpha}}\ ,$$

pertanto $\sum_n a_n$ è una serie armonica generalizzata, che converge se e solo se $2\alpha > 1$ ossia $\alpha > 1/2$.

Abbiamo $\lim_{x\to 0}\int_0^x 4\,\mathrm{sen}\,t^3\,dt = 0$, quindi possiamo applicare il Teorema di de l'Hôpital ottenendo per il Teoerma fondamentale del calcolo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x 4\,\mathrm{sen}\,t^3\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0^+}\frac{4\,\mathrm{sen}\,x^3}{4x^3} = 1\ .$$

Per quanto riguarda la seconda serie, analogamente a quanto appena visto abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x 7\tan t^3\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0^+}\frac{7\tan x^3}{4x^3} = \frac{7}{4}$$

e quindi, essendo $1/n^\alpha \to 0^+$ dato che $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{1/n^{4\alpha}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{1/n^\alpha} 7\tan t^3\,dt}{(1/n^\alpha)^4} = \frac{7}{4}$$

e per il criterio del confronto asintotico $\sum_n b_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_n 1/n^{4\alpha}$, che converge se e solo se $\alpha > 1/4$.

Esercizio 1. Sia $z = \dfrac{\mathrm{i}\bar{w}}{|w|^2 - 5}$, dove $w = 3 + 4\mathrm{i}$. Allora:

(A) $\Re z + \Im z = 7/20$.	(C) $\Re z = -1/5$.
(B) $|z| = 1/5$.	(D) $\Im z = 3\mathrm{i}/20$.

Dato che $|w|^2 = 25$ e che $\mathrm{i}\bar{w} = \mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i}) = 4 + 3\mathrm{i}$, si ha $z = (4/20) + (3/20)\mathrm{i}$ quindi $\mathbb{R}z = 4/20$ e $\Im z = 3/20$, e inoltre $|z| = 1/4$.

Esercizio 2. Il limite per $x \to 0^+$ della funzione $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} - \cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(5x)}$ è uguale a:

(A) $7/10$.	(C) $1/10$.
(B) $3/5$.	(D) $-\infty$.

Basta scrivere

$$\frac{\mathrm{e}^{3x} - \cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(5x)} = \frac{\mathrm{e}^{3x} - \cos\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{5x}{\operatorname{sen}(5x)} \cdot \frac{1}{5}$$

e

$$\frac{\mathrm{e}^{3x} - \cos\sqrt{x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{x} + \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} = 3\frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{3x} + \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \to 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} ,$$

quindi il limite proposto vale $(7/2) \cdot 1 \cdot (1/5) = 7/10$.

Esercizio 3. La serie $\displaystyle\sum_n \frac{1 - n\operatorname{sen}(1/n)}{n^\alpha}$

(A) converge se e solo se $\alpha > -1$.	(C) diverge se e solo se $\alpha < 0$.
(B) converge se e solo se $\alpha > 1$.	(D) converge quando $\alpha = -1$.

Dato che $\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^3)$, abbiamo

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \quad \Rightarrow \quad 1 - n\operatorname{sen}\frac{1}{n} = \frac{1}{6n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

e quindi la serie è a termini (almeno definitivamente) positivi, e per il criterio del confronto asintotico ha lo stesso carattere di $\sum_n (1/n^2)/n^\alpha = \sum_n 1/n^{\alpha+2}$, che converge se e solo se $\alpha + 2 > 1$ ossia $\alpha > -1$.

Esercizio 4. All'appello di Gennaio prendono parte i 100 studenti con numero di matricola da 300˙001 a 300˙100 , e ne vengono promossi 70 . Qual è la probabilità che i promossi siano proprio quelli con numero di matricola da da 300˙001 a 300˙070 ?

(A) $\left[\binom{100}{70}\right]^{-1}$.	(C) $\dfrac{70!}{100!}$.
(B) $\dfrac{70}{100}$.	(D) $\binom{70}{30}$.

I casi possibili sono i gruppetti di 70 studenti scelti fra i 100, e questi gruppetti sono le combinazioni di 100 oggetti presi a 70 per volta. Il caso favorevole è uno solo, quello in cui il gruppetto scelto è formato dai primi 70. Allora la probabilità è

$$1/\binom{100}{70}.$$

Esercizio 5. Se $a_n \to 0^+$ e $b_n \to 2$ allora $(1 + a_n b_n)^{1/a_n}$

(A) tende a e^2.	(C) tende a $1/b_n$.
(B) tende a $1/2$.	(D) tende a 1.

Basta scrivere

$$(1 + a_n b_n)^{1/a_n} = \exp\Big(\frac{\log(1 + a_n b_n)}{a_n}\Big) = \exp\Big(\frac{\log(1 + a_n b_n)}{a_n b_n} \cdot b_n\Big),$$

ma $a_n b_n \to 0$ quindi la frazione tende a 1 e quindi l'argomento dell'esponenziale tende a $1 \cdot 2 = 2$, dunque per la continuità dell'esponenziale il limite vale e^2.

Esercizio 6. Se $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile che ha immagine $[1, 3]$ e se $f(-1) = f(1) = 2$ allora

(A) f' si annulla almeno due volte.	(C) anche $f(0) = 2$.
(B) f si annulla almeno una volta.	(D) f è debolmente crescente.

Dato che f ha massimo 3 e minimo 1, e agli estremi dell'intervallo vale 2, i punti di massimo e minimo assoluto sono interni all'intervallo, quindi vi sono almeno due punti in cui la derivata si annulla. Le altre risposte sono o inverosimili (se f ha immagine $[1, 3]$ non si può certo annullare, e se parte e arriva a quota 2 non può certo essere monotona a meno di non essere costante, che non è) o implausibili (e perché mai $f(0)$ non potrebbe valere 3 o qualunque altro numero?).

Esercizio 7. L'integrale $\displaystyle\int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}} \operatorname{sen}(\log_e x)\,dx$ vale

(A) $e^{\pi/2}/2$.	(C) $\big(1 - \sqrt{2}\big)/2$.
(B) $1 - \sqrt{2}/2$.	(D) $e^{\pi/4}(e^{\pi/4} - 1)/2$.

Si può sostituire $x = e^t$, che porta a calcolare $\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^t \operatorname{sen} t\,dt$, oppure (tanto, i calcoli sono analoghi) integrare direttamente per parti

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx &= x \operatorname{sen}(\log x) - \int \cos(\log x)\,dx \\ &= x \operatorname{sen}(\log x) - x \cos(\log x) - \int \operatorname{sen}(\log x)\,dx\end{aligned}$$

da cui $\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx = x\big(\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)\big)/2 + c$ e

$$\int_{\mathrm{e}^{\pi/4}}^{\mathrm{e}^{\pi/2}} \operatorname{sen}(\log_{\mathrm{e}} x)\,dx = \left[\frac{x}{2}\big(\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)\big)\right]_{\mathrm{e}^{\pi/4}}^{\mathrm{e}^{\pi/2}} = \mathrm{e}^{\pi/2}/2 - 0\ .$$
