Risoluzione del compito n. 5 (Aprile 2020)

PROBLEMA 1

Trovate tutte le soluzioni (z,w), con $z,w\in\mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z^5 = \bar{w}^2 \\ w = \mathrm{i}\bar{z} \,. \end{cases}$$

Se $w=\mathrm{i}\bar{z}$ allora $\bar{w}=-\mathrm{i}z$ quindi $\bar{w}^2=-z^2$ e la prima equazione diviene $z^5=-z^2$ ossia

$$z^2(z^3+1)=0\,.$$

Dunque o $z=0$, da cui $w=0$, o $z^3=-1$, per cui z è una delle radici cubiche di -1,

$$z_1=-1\,,\qquad z_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui

$$w_1=-\mathrm{i}\,,\qquad w_{2,3}=\mathrm{i}\Big(\frac{1}{2}\mp\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

e le quattro soluzioni sono

$$z=w=0\,,\qquad z=1,\ w=-\mathrm{i}\,,\qquad z=\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ w=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\,.$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = 3x + \log(2x^2 - 3x + 1)$.

a) **Calcolatene il dominio ed i limiti agli estremi del dominio.**

b) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e i punti di massimo e/o minimo locale.**

c) **Determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di f .**

d) **Disegnate il grafico di f .**

e) **Scrivete l'equazione della retta tangente nel punto $\big(1/3, f(1/3)\big)$ il grafico di f .**

f) **Motivando la risposta, trovate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = -\dfrac{9}{2}x + k$.**

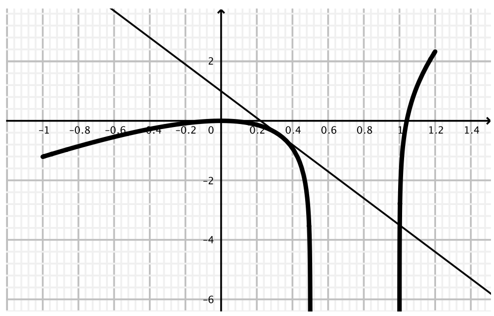
Abbiamo

$$2x^2 - 3x + 1 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad [x < 1/2 \ \mathbf{o} \ x > 1] \ ,$$

pertanto il dominio di f è $]-\infty, 1/2[\cup]1, +\infty$ e per la diversa velocità di potenze e logaritmi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to(1/2)^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = --\infty \ , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

Notiamo (non è richiesto) che non ci sono asintoti obliqui, infatti per $x \to \pm\infty$ abbiamo che $f(x)/x$ tende a 3 ma $f(x) - 3x$ tende a $+\infty$. La figura è scalata $1 : 6$ per allargarla un po'.



Dato che

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 5x}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{6x(x - 5/6)}{2x^2 - 3x + 1}$$

e che il denominatore è sempre positivo, e osservando che $0 < 1/2 < 5/6 < 1$, abbiamo subito che f cresce strettamente in $]-\infty, 0]$ e per $x > 1$, decresce strettamente in $[0, 1/2[$ ed ha un massimo locale per $x = 0$, dove vale 0 . Ora

$$f''(x) = -\frac{8x^2 - 12x + 5}{2x^2 - 3x + 1} < 0$$

dunque f è strettamente concava sia in $]-\infty, 1/2[$ che in $]1, +\infty[$.

Abbiamo $f(1/3) = 1 + \log(2/9)$ e $f'(1/3) = -9/2$ pertanto la retta tangente cercata ha equazione

$$y = f(1/3) + f'(1/3)(x - 1/3) = 1 + \log\frac{2}{9} - \frac{9}{2}\Big(x - \frac{1}{3}\Big) = \frac{5}{2} + \log\frac{2}{9} - \frac{9}{2}x\ .$$

Per l'ultimo punto, osserviamo intanto che in $]1, +\infty[$ la funzione

$$\delta(x) = f(x) - \Big(-\frac{9}{2}x + k\Big)$$

è strettamente crescente e ha limiti $-\infty$ in 1 e $+\infty$ a $+\infty$, quindi si annulla una e una sola volta: dunque per ogni k l'equazione ha esattamente una soluzione maggiore di 1. Esaminiamo ora il tratto $]-\infty, 1/3]$ — il discorso poi si ripete in $[1/3, 1/2[$ — e notiamo che per la stretta concavità di f (che si traduce nella stretta decrescenza di f') la funzione δ ha derivata strettamente positiva per $x < 1/3$ e dunque è strettamente crescente in $]-\infty, 1/3]$, e inoltre δ tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, mentre

$$\delta(1/3) = \frac{5}{2} + \log\frac{2}{9} - k\ :$$

dunque se questo numero è minore di zero — ossia $k > (5/2) + \log(2/9)$ — la funzione δ è negativa in $]-\infty, 1/3]$ e l'equazione non ha soluzioni in quel tratto, altrimenti ne ha esattamente una. Ripetendo il discorso (ma δ ora risulta decrescente) in $[1/3, 1/2[$ concludiamo che l'equazione proposta ha:

$$\begin{aligned} &\text{una soluzione se } k > (5/2) + \log(2/9)\\ &\text{due soluzioni se } k = (5/2) + \log(2/9)\\ &\text{tre soluzioni se } k < (5/2) + \log(2/9)\ . \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

In questo esercizio, i coefficienti dei monomi vanno semplificati ai minimi termini. Siano

$$f(x) = 1 - \cos(2x)\ , \qquad g(x) = \operatorname{sen}\bigl(1 - \cos(2x)\bigr)\ .$$

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 6 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**
b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 6 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**
c) **Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, di $f(x) - g(x)$.**
d) **Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - g(x)}{x^\alpha}$.**

Abbiamo direttamente

$$f(x) = 1 - \Bigl(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \frac{(2x)^6}{720} + o(x^6)\Bigr) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + o(x^6)\ ,$$

che osserviamo essere un infinitesimo di ordine 2, pertanto

$$\begin{aligned}
g(x) = \operatorname{sen}\bigl(f(x)\bigr) &= \operatorname{sen}\Bigl(2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + o(x^6)\Bigr) \\
&= \Bigl(2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + o(x^6)\Bigr) - \frac{1}{6}(\cdots)^3 + o(\cdots)^3 \\
&= \Bigl(2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + o(x^6)\Bigr) - \frac{4}{3}x^6 + o(x^6) \qquad \Bigl(= f(x) - \frac{4}{3}x^6 + o(x^6)\Bigr) \\
&= 2x^2 - \frac{2x^4}{3} - \frac{56x^6}{45} + o(x^6)\ .
\end{aligned}$$

Come abbiamo messo in evidenza,

$$f(x) - g(x) = \frac{4}{3}x^6 + o(x^6) = x^6\Bigl(\frac{4}{3} + \frac{o(x^6)}{x^6}\Bigr)$$

è un infinitesimo di ordine 6 con parte principale $4x^6/3$, pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \Bigl(\frac{4}{3} + \frac{o(x^6)}{x^6}\Bigr)x^{6-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 6 \\ 4/3 & \text{se } \alpha = 6 \\ 0 & \text{se } \alpha < 6. \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Data la funzione $g(x) = \log(1+\sqrt{x}\,)$, sia $G(x)$ la primitiva di $g(x)$ tale che $G(0) = 0$.

a) Calcolate $G(x)$.

b) Calcolate l' integrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

c) Calcolate infine il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{G(x)}{x^{3/2}}$.

La funzione g è definita solo per $x \geq 0$; cerchiamo intanto le primitive di g , sostituendo subito $\sqrt{x} = t$ che equivale a $x = t^2$ per $t \geq 0$, e poi integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int \log(1+\sqrt{x}\,)\,dx \underset{x=t^2}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} & \int 2t\log(1+t)\,dt = t^2\log(1+t) - \int \frac{t^2+t-t-1+1}{1+t}\,dt \\ &= t^2\log(1+t) - \frac{t^2}{2} + t - \log(1+t) + c \\ &\underset{t=\sqrt{x}}{\underset{\uparrow}{=}} (x-1)\log(1+\sqrt{x}\,) + \sqrt{x} - \frac{x}{2} + c\,.\end{aligned}$$

Si vede subito che il valore di c per cui la primitiva si annulla in zero è $c = 0$, dunque

$$G(x) = (x-1)\log(1+\sqrt{x}\,) + \sqrt{x} - \frac{x}{2}\,.$$

Abbiamo subito

$$\int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0) = G(1) = \frac{1}{2}$$

mentre dalla continuità di G ricaviamo che l'ultimo limite è nella forma $0/0$, quindi possiamo tentare di applicare il Teorema di de l'Hôpital: ricordando che $G' = g$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{G(x)}{x^{3/2}} \underset{H}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{3\sqrt{x}/2} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\,.$$

Esercizio 1. Se z è un numero complesso che ha modulo 13 e parte reale 5 , allora:

(A) $\lvert z-5\rvert = 12$.	(C) $\lvert \Im z\rvert = 8$.
(B) $\Im z = \pm 12\mathrm{i}$.	(D) $\lvert z-12\mathrm{i}\rvert = 5$.

L'ipotesi equivale a $13^2 = 5^2 + (\Im z)^2$, pertanto $\Im z = \pm 12$ e $z = 5 \pm 12\mathrm{i}$, dunque $\lvert z-5\rvert = 12$.

Esercizio 2. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{2x^2+3x-2} \leq x+2$. Allora:

(A) $]3/5, \mathrm{e}] \subset S$.	(C) $\pi \in S$.
(B) $1/3 \in S$.	(D) $]-2, 3[\subset S$.

Conviene risolvere la disequazione:

$$\begin{cases} 2x^2+3x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 2x^2+3x-2 \leq (x+2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -2 \ \textbf{o} \ x \geq 1/2 \\ x \geq -2 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

dunque $S = \{-2\} \cup [1/2, 3] \supset]3/5, \mathrm{e}]$.

Esercizio 3. La successione $n^2 \log[\cos(4/n)]$ ha limite:

(A) -8 .	(C) $-\infty$.
(B) 1 .	(D) -16 .

Possiamo usare gli sviluppi di Taylor o i limiti notevoli: osserviamo che $\cos(4/n) \to 1$ e scriviamo

$$n^2 \log[\cos(4/n)] = n^2 \frac{\log[1+(\cos\frac{4}{n}-1)]}{\cos\frac{4}{n}-1} \, \frac{\cos\frac{4}{n}-1}{(4/n)^2} \Big(\frac{4}{n}\Big)^2 \to 1 \cdot \Big(-\frac{1}{2}\Big) \cdot 16 = -8 \, .$$

Esercizio 4. La funzione $f(x) = x^4 + \dfrac{8x^3}{3} + 2x^2 + 7$

(A) è decrescente nella semiretta $]-\infty, 0]$.	(C) ha almeno un punto di massimo locale (o relativo).
(B) è convessa nell'intervallo $[-1, -1/3]$.	(D) non è limitata inferiormente.

La funzione è continua su $\mathbb{R}$ e tende a $+\infty$ agli estremi, quindi per un corollario del Teorema di Weierstraß ha minimo, dunque è limitata inferiormente. Per decidere fra le altre, calcoliamo

$$f'(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x = 4x(x+1)^2$$

che è negativa per $x < 0$ tranne in un punto, dunque f è decrescente in $]-\infty, 0]$.

Esercizio 5. Al variare dell' esponente reale α , la serie $\sum_n n^{\alpha^2-2\alpha-8} \cdot \frac{\sqrt{n}+n}{\sqrt{n}+n^2}$ risulta

(A) convergente se e solo se $-2 < \alpha < 4$.

(B) convergente se $\alpha = -3$.

(C) divergente se e solo se $\alpha \leq 1-2\sqrt{2}$ oppure $\alpha \geq 1+2\sqrt{2}$.

(D) divergente per ogni $\alpha < 0$.

Osserviamo che la serie è a termini positivi e che da

$$\frac{\sqrt{n}+n}{\sqrt{n}+n^2} \simeq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} ,$$

segue che, per il criterio del confronto asintotico, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_n n^{\alpha^2-2\alpha-9}$ che converge se e solo se

$$-\alpha^2+2\alpha+9 > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2 < \alpha < 4 .$$

Esercizio 6. Sia F la funzione integrale $F(x) = \int_0^x (t^2 - 2|t|)\, dt$. Allora:

(A) F è decrescente su $[-2,2]$.

(B) F è derivabile due volte in $[-3,3]$.

(C) $F(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

(D) $F(-x) = F(x)$ per ogni x reale.

La derivata di F è la funzione $f(x) = x^2 - 2|x|$, che è pari (quindi F non è pari), non è derivabile in zero (quindi F non è derivabile due volte), è negativa in $[-2,2]$ salvo un punto quindi F è decrescente in tale intervallo. In particolare $F(2) < F(0) = 0$ ma poi F tende a $+\infty$ quindi si annulla ancora.

Esercizio 7. Fissato l'esponente reale α , il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x \cos x}{x^\alpha}$

(A) vale $1/6$ se $\alpha = 3$.

(B) vale $+\infty$ se $\alpha = 2$.

(C) vale 0 se $\alpha = 3$.

(D) è un numero reale se $\alpha = 4$.

Con gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned} &1+\operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x \cos x \\ &\quad = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big) \\ &\quad = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

e il limite vale $1/6$ se $\alpha = 3$.