Risoluzione del compito n. 3 (Gennaio 2020/2)

PROBLEMA 1

Trovate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} 2z^2 + 2\bar{w} + 1 = \mathrm{i}\sqrt{3} \\ w = 2\bar{z} \,. \end{cases}$$

Ricaviamo subito w dalla seconda equazione e sostituiamolo nella prima, che diventa

$$2z^2 + 4z + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^2 + 2z + \Big(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 0 \ :$$

la soluzione dell'equazione di secondo grado dà

$$z = -1 \pm \sqrt{1 - \Big(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} \ ,$$

ma il numero sotto radice ha modulo 1 e argomento $\pi/3$, quindi una sua radice (dell'altra si occupa il $\pm$) ha modulo 1 e argomento $\pi/6$, dunque

$$z = -1 \pm \Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\Big) = \begin{cases} -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2} \Rightarrow w = -2 + \sqrt{3} - \mathrm{i} \\ -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2} \Rightarrow w = -2 - \sqrt{3} + \mathrm{i} \,. \end{cases}$$

Le soluzioni sono dunque

$$z = \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \quad w = -2 + \sqrt{3} - \mathrm{i} \qquad \text{e} \qquad z = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2} \quad w = -2 - \sqrt{3} + \mathrm{i} \,.$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \arctan(x+1) - \log\left|\dfrac{x+4}{4}\right| - \dfrac{\pi}{4}$.

a) **Calcolatene i limiti agli estremi del dominio.**

b) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e i punti di massimo e/o minimo locale.**

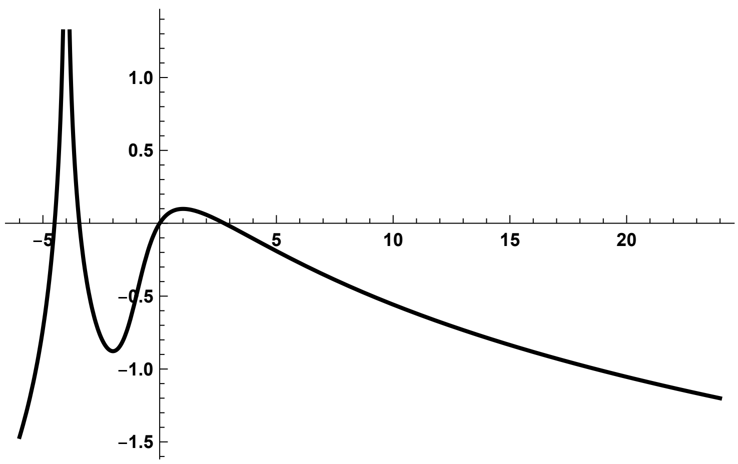
c) **Disegnate il grafico di f .**

d) **Determinate quanti sono gli zeri della funzione f .**

e) **Trovate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.**

La funzione f è definita per $x+4 \neq 0$, e abbiamo facilmente

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to -4} f(x) = +\infty \ .$$



Dato che

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{x+4} = -\frac{x^2+x-2}{(x+4)\big(1+(x+1)^2\big)} = -\frac{(x-1)(x+2)}{(x+4)\big(1+(x+1)^2\big)} \ ,$$

la derivata si annulla per $x=-2$ e $x=1$, è positiva per $x<-4$ e in $]-2,1[$ e negativa altrove, quindi f è strettamente crescente in $]-\infty,-4[$ e in $[-2,1]$, strettamente decrescente in $]-4,-2]$ e in $[1,+\infty[$ ed ha un minimo locale per $x=-2$ e un massimo locale per $x=1$. Notiamo che

$$f(-2) = \arctan(-1) - \log\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \log 2 - \frac{\pi}{2} < 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$
$$f(1) = \arctan 2 - \log\frac{3}{4} - \frac{\pi}{4} = \arctan 2 + \log\frac{4}{3} - \arctan 1 > 0 \ .$$

La funzione f , per la stretta monotonia, si annulla esattamente una volta prima di $x=-4$, esattamente una fra -4 e -2 , esattamente una (in $x=0$) fra -2 e 1 ed esattamente una dopo 1, in totale quattro volte. Più in generale l'equazione $f(x) = k$ ha:

$$\begin{aligned} \text{due soluzioni per } & k < f(2) \\ \text{tre soluzioni per } & k = f(2) \\ \text{quattro soluzioni per } & f(2) < k < f(1) \\ \text{tre soluzioni per } & k = f(1) \\ \text{due soluzioni per } & k > f(1)\,. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

Siano $f(x) = \log(1+2x)$, $g(x) = \log\bigl(1+\operatorname{sen}(2x)\bigr)$.

a) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.

b) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.

c) Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione $f(x) - g(x)$.

d) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{f(x)-g(x)}$.

Da $\log(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - t^4/4 + o(t^4)$ e osservando che $\operatorname{sen} t = t - t^3/6 + o(t^4)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) &= 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)\\
f(x) = \log(1+2x) &= 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} - 4x^4 + o(x^4)\\
g(x) = \log\bigl(1+\operatorname{sen}(2x)\bigr) &= 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4) - \frac{1}{2}\Bigl(4x^2 - \frac{16x^4}{3}\Bigr) + \frac{1}{3}8x^3 - \frac{1}{4}16x^4\\
&= 2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^4}{3} + o(x^4)\\
f(x) - g(x) &= \frac{4x^3}{3} - \frac{8x^4}{3} + o(x^4)
\end{aligned}$$

quindi $f - g$ è un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $4x^3/3$. In particolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{f(x)-g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{\frac{f(x)-g(x)}{4x^3/3}\frac{4x^3}{3}} = \frac{3}{4}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^3} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 3\\ 3/4 & \text{se } \alpha = 3\\ 0 & \text{se } \alpha > 3.\end{cases}$$

PROBLEMA 4

Considerate la funzione $g(x) = \arctan\sqrt{x}$.
a) Determinate la primitiva $G(x)$ di $g(x)$ tale che $G(1) = 0$.
b) Calcolate $\int_0^1 g(x)\,dx$.

Abbiamo

$$\int \arctan\sqrt{x}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \sqrt{x}=t}}{=} \int 2t\arctan t\,dt = t^2\arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$

e scrivendo $t^2 = (t^2+1) - 1$

$$\cdots = t^2\arctan t - t + \arctan t + c \underset{\substack{\uparrow\\ t=\sqrt{x}}}{=} (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + c\,.$$

Dobbiamo determinare c in modo che posto

$$G(x) = (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + c$$

si abbia $G(1) = 0$, ma $G(1) = 2\arctan 1 - 1 + c = (\pi/2) - 1 + c$, dunque deve essere $c = 1 - \pi/2$ e

$$G(x) = (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1 - \frac{\pi}{2}\,.$$

A questo punto

$$\int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0) = -G(0) = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

Esercizio 1. Sia $S = \{x \in \mathbb{R} : \log(4x^2 - 4x + 1) \le 0\}$. Allora:

(A) $]1/2, 1[\subset S$.
(B) $S = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1/2| \le 1\}$.
(C) $0 \notin S$.
(D) S è un intervallo chiuso.

Occorre che sia $4x^2 - 4x + 1 > 0$ per l'esistenza del logaritmo, e $4x^2 - 4x + 1 \le 1 = \mathrm{e}^0$ per la disuguaglianza, quindi

$$\begin{cases} (2x-1)^2 > 0 \\ x^2 - x \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ne 1/2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow S = [0, 1/2[\cup]1/2, 1].$$

Esercizio 2. La successione $\dfrac{\sqrt{n^3+5n} - n^{3/2}}{\operatorname{sen}(7/\sqrt{n})}$ ha limite

(A) $5/14$.
(B) $5/7$.
(C) 0.
(D) $+\infty$.

Scriviamo

$$\frac{\sqrt{n^3+5n} - n^{3/2}}{\operatorname{sen}(7/\sqrt{n})} = \frac{\left(\sqrt{n^3+5n} - n^{3/2}\right)\left(\sqrt{n^3+5n} + n^{3/2}\right)}{\left(\sqrt{n^3+5n} + n^{3/2}\right)\operatorname{sen}(7/\sqrt{n})}$$
$$= \frac{5n}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+5/n^2}+1\right)} \frac{7/\sqrt{n}}{\operatorname{sen}(7/\sqrt{n})} \frac{1}{7/\sqrt{n}} \to \frac{5}{2\cdot 7}.$$

Esercizio 3. Il limite per $x \to 0^+$ della funzione $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2^x}{\operatorname{sen}(3x)}$ è uguale a:

(A) $(2 - \log 2)/3$.
(B) $2/3$.
(C) $\dfrac{2}{3}\log 2$.
(D) $+\infty$.

Scriviamo

$$\frac{\mathrm{e}^{2x} - 2^x}{\operatorname{sen}(3x)} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x\log 2}}{3x}\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} = \frac{1}{3}\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)}\mathrm{e}^{x\log 2}\frac{\mathrm{e}^{(2-\log 2)x} - 1}{x}$$

che tende a $(2 - \log 2)/3$.

Esercizio 4. Se $z = 2 - \mathrm{i}$ e $w = \dfrac{\bar{z}(\mathrm{i}z - \bar{z} - 1)}{z(\mathrm{i}\bar{z} + z)}$ allora

(A) $\Re w = -3/2$.
(B) $\Im w = -1/2$.
(C) $\Re w = 1/2$.
(D) $\Im w = 3/2$.

Abbiamo

$$\bar{z}(\mathrm{i}z - \bar{z} - 1) = (2+\mathrm{i})\big(2\mathrm{i} + 1 - (2+\mathrm{i}) - 1\big) = (2+\mathrm{i})(-2+\mathrm{i}) = \mathrm{i}^2 - 4 = -5$$

$$z(\mathrm{i}\bar{z}+z) = (2-\mathrm{i})(2\mathrm{i}-1+2-\mathrm{i}) = (2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 3+\mathrm{i}$$

quindi

$$w = \frac{-5}{3+\mathrm{i}} = \frac{-5(3-\mathrm{i})}{3^2+1^2} = -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\,.$$

Esercizio 5. Domenico ha preso un foglio di carta e ha tracciato alcune righe, dividendolo in 10 zone. Emilio ne colora 3 di rosso e 2 di blu, lasciando bianche le altre. In quanti modi diversi può risultare colorato il foglio?

(A) $\binom{10}{3}\binom{7}{2}$.	(C) $\binom{10}{3\cdot 2}$.
(B) $10\cdot 3\cdot 2$.	(D) $\binom{10}{5}\binom{5}{3}\binom{5}{2}$.

Emilio può scegliere le tre zone da colorare in rosso in $\binom{10}{3}$ modi diversi. Per ciascuno di questi modi, può scegliere fra le 7 zone restanti le due da colorare in blu in $\binom{7}{2}$ modi, poi non ha altro da fare. I modi sono quindi $\binom{10}{3}\binom{7}{2}$.

Esercizio 6. Se $f^{(4)}(0) = 6$ allora il coefficiente di x^4 nello sviluppo di Taylor di f centrato in $x_0 = 0$ è

(A) $1/4$.	(C) $1/24$.
(B) 6.	(D) 144.

Il coefficiente di x^4 è $f^{(4)}(0)/4! = 6/24 = 1/4$.

Esercizio 7. Sia A l'insieme degli $\alpha\in\mathbb{R}$ tali che la serie geometrica $\sum_n \left(\frac{\alpha^2+1}{3\alpha+1}\right)^n$ risulta convergente. Allora:

(A) $[1,2]\subset A$.	(C) A non è limitato superiormente.
(B) $[-2,-1]\subset A$.	(D) $A =]0,3[$.

Occorre che la ragione della serie geometrica esista (quindi $3\alpha+1\neq 0$) e sia minore di 1 in valore assoluto. Tenendo a mente la condizione di esistenza, calcoliamo

$$1 > \left|\frac{\alpha^2+1}{3\alpha+1}\right| = \frac{\alpha^2+1}{|3\alpha+1|} \iff |3\alpha+1| > \alpha^2+1\,,$$

che si traduce in

$$\big([3\alpha+1>\alpha^2+1]\ \mathbf{o}\ [3\alpha+1<-\alpha^2-1]\big) \iff \big([\alpha^2-3\alpha<0]\ \mathbf{o}\ [\alpha^2+3\alpha+2<0]\big)\,.$$

La prima disequazione ha soluzione $0<\alpha<3$, la seconda $-2<\alpha<-1$, dunque (osservando che comunque risulta $\alpha\neq -1/3$) abbiamo $A =]-2,-1[\cup]0,3[$.