Risoluzione del compito n. 8 (Settembre 2020)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z^2 + \mathrm{i}w = 0 \\ 4(z - \bar{w}) = \mathrm{i}\ . \end{cases}$$

Ricaviamo dalla seconda equazione

$$\bar{w} = z - \frac{\mathrm{i}}{4} \iff w = \bar{z} + \frac{\mathrm{i}}{4}\ ,$$

sostituiamolo nell'altra

$$z^2 + \mathrm{i}\bar{z} - \frac{1}{4} = 0$$

e a questo punto posto $w = x + \mathrm{i}y$ (se ne può fare a meno ma non si risparmia tempo)

$$x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy + \mathrm{i}x + y - \frac{1}{4} = 0 \iff \begin{cases} x^2 - y^2 + y - \dfrac{1}{4} = 0 \\ x(2y+1) = 0\ . \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo o $y = -1/2$ o $x = 0$. Nel primo caso la prima equazione dà $x^2 = 1$ quindi $x = \pm 1$. Nel secondo caso la prima equazione dà $(y - 1/2)^2 = 0$ da cui $y = 1/2$, e le soluzioni z sono

$$z_1 = 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\ , \quad z_2 = -1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\ , \quad z_3 = \mathrm{i}/2\ :$$

ricaviamo i corrispondenti valori di w

$$w_1 = 1 + \frac{3\mathrm{i}}{4}\ , \quad w_2 = -1 + \frac{3\mathrm{i}}{4}\ , \quad w_3 = -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

così le soluzioni sono le tre coppie

$$z = 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\ ,\ w = 1 + \frac{3\mathrm{i}}{4} \qquad z = -1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\ ,\ w_2 = -1 + \frac{3\mathrm{i}}{4}\ , \qquad z = \frac{\mathrm{i}}{2}\ ,\ w = -\frac{\mathrm{i}}{4}\ .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = 4\arctan x + x^2 - 4x - \pi$.

a) **Calcolatene i limiti agli estremi del dominio.**

b) **Determinate i punti critici di f , specificando se sono punti di massimo o minimo locale.**

c) **Determinate gli intervalli di monotonia di f .**

d) **Determinate quanti sono gli zeri di f .**

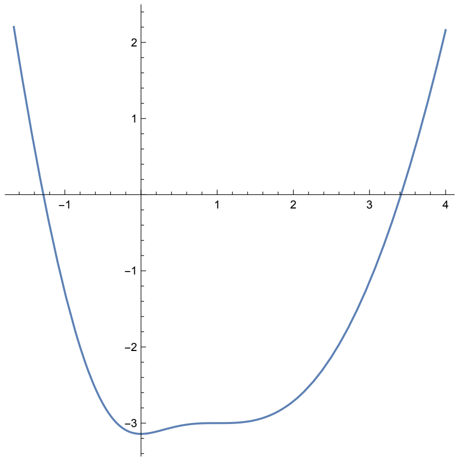
e) **Disegnate il grafico di f .**

f) **Usando le informazioni precedenti (e motivando la vostra risposta) deducete perché la funzione f ha almeno un punto di flesso nell'intervallo aperto $]0, 1[$.**

Il termine x^2 domina all'infinito, quindi i limiti per $x \to \pm\infty$ sono $+\infty$. Abbiamo

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} + 2x - 4 = \frac{2x(x-1)^2}{1+x^2}$$

che si annulla per $x = 0$ e $x = 1$, è negativa per $x < 0$ e positiva sia per $0 < x < 1$ che per $x > 1$. In particolare f è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty[$, dunque $x = 0$ è un punto di minimo assoluto, mentre $x = 1$ è un punto in cui f è crescente (è di flesso con tangente orizzontale o punto di sella).



Dato che $f(0) = -\pi < 0$ mentre i limiti a $\pm\infty$ sono positivi, per il teorema di esistenza degli zeri e per la stretta monotonia f si annulla esattamente una volta per $x < 0$, e per lo stesso motivo esattamente una per $x > 0$, dunque in totale ha due zeri. Veniamo all'ultimo punto: dato che $f'(0) = f'(1) = 0$ mentre f' è positiva in $]0, 1[$, la derivata f' ha su $[0, 1]$ un punto di massimo interno in qualche punto $x_0 \in]0, 1[$. In tale punto la derivata seconda si annulla, ed è il punto di flesso cercato — onestamente, se “flesso” è definito come un punto in cui f'' cambia segno, per mostrare che a sinistra di questo punto $f'' > 0$ e a destra $f'' < 0$ bisogna trafficare un pochino, e lo facciamo vedere solo per completezza: la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}{(1 + x^2)^2}$$

e ha denominatore positivo, quindi ci concentriamo sul numeratore $n(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 1$. Si tratta di una funzione strettamente convessa che quindi può annullarsi al più due volte; uno zero si trova in $x = 1$, mentre $n(0) > 0$ e $n'(1) = 2 > 0$, dunque in un intorno sinistro di $x = 1$ la funzione n è minore di $n(1) = 0$, e per il teorema di esistenza degli zeri si annulla in qualche punto $x_0 \in]0, 1[$. Per la stretta convessità x_0 e 1 sono gli unici zeri, e la funzione n (e quindi f'') è negativa in $]x_0, 1[$ e positiva nei punti esterni a questo intervallo.

PROBLEMA 3

In questo esercizio, i coefficienti dei monomi vanno semplificati ai minimi termini. Considerate le due funzioni $f(x) = \mathrm{sen}(x + x^2)$ e $g(x) = \mathrm{e}^{-(x+3x^2/2)}$.
a) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.
b) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.
c) Trovate l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$, della funzione $h(x) = f(x) + g(x) - 1$.
d) Calcolate al variare di $a \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{h(x) + ax^3}$.

Dato che $x + x^2$ è un infinitesimo di ordine 1 , abbiamo $o(x + x^2)^\alpha = o(x^\alpha)$, quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + x^2) - \frac{(x + x^2)^3}{6} + o(x + x^2)^4 = x + x^2 - \frac{x^3 + 3x^4}{6} + o(x^4) \\ &= x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \ . \end{aligned}$$

Anche l'esponente è un infinitesimo di ordine 1 , perciò

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - \Big(x + \frac{3x^2}{2}\Big) + \frac{(\cdots)^2}{2} - \frac{(\cdots)^3}{6} + \frac{(\cdots)^4}{24} + o(\cdots)^4 \\ &= 1 - x - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}\Big(x^2 + 3x^3 + \frac{9x^4}{4}\Big) - \frac{1}{6}\Big(x^3 + \frac{9x^4}{2}\Big) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 - x - x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^4}{12} + o(x^4) \ . \end{aligned}$$

Allora

$$h(x) = \frac{7x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \ ,$$

un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $7x^3/6$. Allora

$$\frac{x^4}{h(x) + ax^3} = \frac{x^4}{\frac{(7+6a)x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}$$

tende a zero se $7 + 6a \neq 0$ ossia $a \neq -7/6$, mentre tende a -12 se $a = -7/6$.

PROBLEMA 4

Considerate la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{4\alpha}{1+3\alpha^2}\Big)^n$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

a) Determinate al variare di α il carattere della serie

b) Trovate per quali valori di α la serie ha somma uguale a 2.

È una serie geometrica di ragione $q = 4\alpha/(1+3\alpha^2)$, che diverge per $q \geq 1$, è indeterminata per $q \leq -1$ e converge se e solo se $|q| < 1$ e in tal caso ha somma $1/(1-q)$. In particolare la serie ha somma 2 se e solo se $1/(1-q) = 2$ ossia $q = 1/2$ ma

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = q = \frac{4\alpha}{1+3\alpha^2} &\iff 3\alpha^2 - 8\alpha + 1 = 0 \\ &\iff \alpha = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}\ .\end{aligned}$$

La serie diverge per

$$q \geq 1 \iff 4\alpha \geq 1 + 3\alpha^2 \iff \frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1\ ,$$

è indeterminata per

$$q \leq -1 \iff 4\alpha \leq -1 - 3\alpha^2 \iff -1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{3}\ ,$$

e converge in tutti gli altri casi, cioè per

$$\alpha < -1\ , \qquad -\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{3}\ , \qquad \alpha > 1\ .$$

Esercizio 1. Le soluzioni dell'equazione $z^2 + \mathrm{i}\sqrt{3}(z+1) + z = 0$ sono:

(A) $z = -1$ e $z = -\mathrm{i}\sqrt{3}$.	(C) $z = -2$ o $z = -2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
(B) $z = 1$ e $z = \mathrm{i}\sqrt{3}$.	(D) $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ e $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Possiamo usare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado o cogliere il suggerimento e raccogliere:

$$0 = z^2 + \mathrm{i}\sqrt{3}(z+1) + z = z(z+1) + \mathrm{i}\sqrt{3}(z+1) = (z+1)\big(z + \mathrm{i}\sqrt{3}\,\big)$$

da cui subito $z = -1$ o $z = -\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Esercizio 2. Lanciando 8 monete (con Testa e Croce sulle due facce) la probabilità di ottenere 5 Testa e 3 Croce è

(A) $7/32$.	(C) $7/8$.
(B) $\dfrac{C_{8,5}}{C_{8,8}}$.	(D) $\dfrac{D_{8,5}}{2^8}$.

Possiamo procedere in vari modi; supponiamo le monete siano numerate; mettendo in fila i risultati delle otto monete otteniamo delle ottuple di lettere T e C, in totale 2^8 . Quelle che desideriamo sono tante quanti i modi in cui scegliere 3 (o 5, che è lo stesso) di queste otto posizioni, in totale $\binom{8}{3} = 8 \cdot 7 \cdot 6/6 = 7 \cdot 2^3$, e la probabilità risulta $7/2^5 = 7/32$.

Esercizio 3. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log_{\mathrm{e}}(x^2 - x - 2) > \log_{\mathrm{e}}(x+6)$. Allora:

(A) $[-5,-3] \subset S$.	(C) S è un intervallo di numeri reali.
(B) $-8 \in S$.	(D) S è limitato superiormente.

La disequazione equivale a (nel secondo sistema abbiamo omesso la prma disuguaglianza, che segue dalle altre due)

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x + 6 > 0 \\ x^2 - x - 2 > x + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -6 \\ (x-4)(x+2) > 0 \end{cases} \iff [-6 < x < -2 \ \textbf{o} \ x > 4] ,$$

e l'insieme contiene $[-5,-3]$.

Esercizio 4. Se α è un esponente reale, la serie $\displaystyle\sum_n n^\alpha \Big(1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\Big)$ risulta

(A) divergente per $\alpha = 1$.	(C) convergente se e solo se $\alpha < 0$.
(B) divergente per ogni $\alpha > 0$.	(D) indeterminata per almeno un valore di α .

Sappiamo che $\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^3)$ quindi

$$1 - n \operatorname{sen}\frac{1}{n} = 1 - 1 + \frac{1}{6n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

e in particolare la serie è almeno definitivamente a termini positivi, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico ottenendo

$$n^\alpha\Big(1 - n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\Big) \simeq \frac{1}{6n^{2-\alpha}}\ ,$$

che converge se e solo se $2-\alpha > 1 \iff \alpha < 1$, dunque la serie diverge per $\alpha = 1$ e le altre risposte sono errate.

Esercizio 5. Il limite per $x \to +\infty$ della funzione $\dfrac{x\cos\frac{2}{x} - x}{\sqrt{\dfrac{9}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}}}$ vale

(A) $-2/3$.	(C) $+\infty$.
(B) $2/3$.	(D) 0.

Dato che $x \to +\infty$, raccogliendo $9/x^2$ nella radice al denominatore abbiamo

$$\frac{x\cos(2/x) - x}{\sqrt{\dfrac{9}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}}} = \frac{x^2}{3}\,\frac{\cos(2/x) - 1}{\sqrt{1 + (1/9x^2)}} = -\frac{1}{3}\,\frac{\frac{1-\cos(2/x)}{(2/x)^2}\cdot 4}{\sqrt{1+(1/9x^2)}}$$

ma $\big(1 - \cos(2/x)\big)/(2/x)^2 \to 1/2$ quindi il limite vale $-2/3$.

Esercizio 6. L'equazione della retta tangente il grafico di $f(x) = \arctan(3x)$ in corrispondenza del punto di ascissa $x_0 = 1/3$ si può scrivere nella forma:

(A) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{\pi - 2}{4}$.	(C) $y = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{18-\pi}{12}$.
(B) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3\pi - 2}{12}$.	(D) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{\pi - 1}{2}$.

Abbiamo $f(x_0) = \arctan 1 = \pi/4$; poi $f'(x) = 3/(1+9x^2)$ quindi $f'(x_0) = 3/2$, dunque l'equazione risulta

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\Big(x - \frac{1}{3}\Big) = \frac{3}{2}x + \frac{\pi - 2}{4}\ .$$

Esercizio 7. L'integrale definito $\displaystyle\int_{1/6}^{2/3} \operatorname{sen}(\pi x)\,dx$ vale:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\pi}$.	(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$.
(B) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\pi}$.	(D) 0.

Abbiamo immediatamente

$$\int_{1/6}^{2/3} \operatorname{sen}(\pi x)\,dx = \Big[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big]_{1/6}^{2/3} = -\frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big] = \frac{\sqrt{3}+1}{2\pi}\,.$$
