Risoluzione del compito n. 4 (Marzo 2021)

PROBLEMA 1

Calcolate preliminarmente $\mathbf{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9}$.
a) Determinate tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $1 + z + z^2 + z^3 = 1$.
b) Determinate tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 1$.

Ricordando che per $q \neq 1$ è $1 + q + \cdots + q^k = (1 - q^{k+1})/(1 - q)$, abbiamo

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9 = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1 = 1023 .$$

Allora osserviamo che $z = 1$ non risolve alcuna delle equazioni proposte, quindi possiamo usare la formula ricordando che già sappiamo che $z \neq 1$ e otteniamo

$$1 + z + z^2 + z^3 = 1 \iff \begin{cases} z \neq 1 \\ \dfrac{1 - z^4}{1 - z} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq 1 \\ 1 - z^4 = 1 - z \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq 1 \\ z^4 = z . \end{cases}$$

L'equazione $z^4 = z$ ha come soluzione $z = 0$ oppure $z^3 = 1$, e le radici cubiche dell'unità sono $z = 1$ (che dobbiamo scartare) e $z = -1/2 \pm \sqrt{3}/2$, quindi l'equazione a) ha tre soluzioni:

$$z = 0 , \qquad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

L'equazione b) si tratta allo stesso modo, ma arriviamo a

$$\begin{cases} z \neq 1 \\ z^7 = z \end{cases}$$

per cui o $z = 0$ o $z^6 = 1$ con $z \neq 1$. Le radici seste dell'unità hanno argomenti multipli di $\pi/3$ quindi le soluzioni dell'equazione b) sono sei,

$$z = 0 , \qquad z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} , \qquad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} , \qquad z = -1 .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{2}\log(x^2 - 3x + 2) + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}}$ **.**

a) **Determinate il dominio di f, e i limiti di f agli estremi del dominio.**

b) **Determinate f', l'insieme in cui f è derivabile, e i limiti di f' agli estremi di tale insieme.**

c) **Determinate gli intervalli di monotonia di f, gli eventuali punti di massimo e minimo locale di f.**

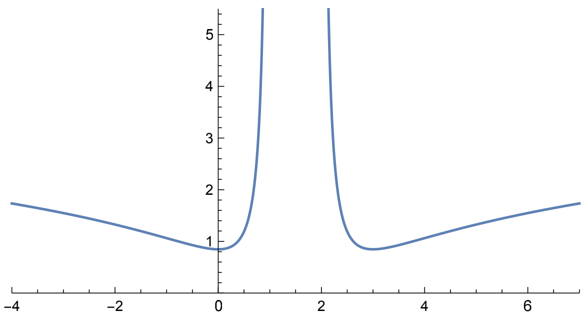
d) **Determinate il segno di f.**

e) **Senza studiare f'', spiegate perché f'' si deve annullare almeno due volte.**

f) **Tracciate il grafico di f.**

Dato che $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ e che il logaritmo è definito quando il suo argomento è maggiore di zero, il dominio di f è $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$. Per $x\to\pm\infty$ il logaritmo va all'infinito e le due frazioni a zero, quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\ .$$



Invece per $x\to 2^+$ il logaritmo tende a $-\infty$ e la prima frazione a $+\infty$, ma quest'ultima domina sul logaritmo quindi $f(x)\to+\infty$, e lo stesso accade per $x\to1^-$, dunque

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty\ .$$

Nel suo dominio, f è derivabile con derivata

$$f'(x) = \frac{x(x-3)(2x-3)}{2(x-1)^2(x-2)^2}$$

che (nel dominio) si annulla per $x=0$ e $x=3$, è positiva per $0<x<1$ e $x>3$ e negativa per $x<1$ e $2<x<3$; inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0\ , \qquad \lim_{x\to1^-} f'(x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty\ .$$

In particolare f è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$ e in $]2, 3]$, strettamente crescente in $[0, 1[$ e in $[3, +\infty[$, e ha due punti di minimo in $x = 0$ e $x = 3$. Il valore in $x = 0$ è il minimo su $]-\infty, 1[$ e quello in $x = 3$ è il minimo su $]2, +\infty[$. Dato che

$$f(0) = f(3) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2} > 0 ,$$

la funzione f è sempre positiva.
Dato infine che nell' intervallo $]-\infty, 0[$ la funzione continua f' è negativa, e tende a zero agli estremi, per un corollario del Teorema di Weierstraß ha un minimo in tale intervallo, e questo deve essere un punto in cui f'' si annulla; lo stesso ragionamento si può fare in $]3, +\infty[$ ottenendo che anche in tale intervallo c'è (almeno) un altro punto in cui f'' si annulla.

PROBLEMA 3

In questo esercizio, i coefficienti dei monomi vanno semplificati ai minimi termini. Siano

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\ , \qquad g(x) = \cos(1 - \cos x)\ , \qquad h(x) = f(x) - xg(x)\ .$$

a) **Determinate lo sviluppo di Taylor di f di ordine 6, centrato in $x_0 = 0$.**
b) **Determinate lo sviluppo di Taylor di g di ordine 6, centrato in $x_0 = 0$.**
c) **Determinate lo sviluppo di Taylor di h di ordine 6, centrato in $x_0 = 0$.**
d) **Determinate al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il valore di $\lim_{x\to 0} \dfrac{h(x) + \beta x^3}{x^5}$.**

Possiamo anticipare che, essendo f dispari, nello sviluppo vedremo solo i termini di ordine dispari, ed essendo g pari nel suo sviluppo vedremo solo termini di ordine pari; ma se g è pari, $xg(x)$ e quindi anche h sono dispari, e anche nello sviluppo di h vedremo solo termini di ordine dispari.
Ricordiamo che $o\big(x + o(x)\big)^k = o(x^k)$, dunque abbiamo direttamente

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\Big) \\
&= \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\Big) - \frac{1}{6}(\cdots)^3 + \frac{1}{120}(\cdots)^5 + o(\cdots)^6 \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) - \frac{1}{6}\Big(x^3 - 3\frac{x^5}{6}\Big) + \frac{1}{120}x^5 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^6)\ .
\end{aligned}$$

Dato poi che $1 - \cos x = x^2/2 - x^4/24 + o(x^5)$ è un infinitesimo di ordine 2, ricordando che $o\big(hx^2 + o(x^2)\big)^k = o(x^{2k})$ abbiamo

$$\begin{aligned}
g(x) &= \cos\Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)^2 + o(\cdots)^3 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^7)\Big) + o(x^6) = 1 - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + o(x^6)\ ,
\end{aligned}$$

per cui

$$h(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^6) - x + \frac{x^5}{8} = -\frac{x^3}{3} + \frac{9x^5}{40} + o(x^6)\ .$$

Allora

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{h(x) + \beta x^3}{x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\beta - 1/3)x^3 + 9x^5/40 + o(x^6)}{x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\beta - 1/3) + 9x^2/40 + o(x^3)}{x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > 1/3 \\ 9/40 & \text{se } \beta = 1/3 \\ -\infty & \text{se } \beta < 1/3. \end{cases}
\end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Considerate la successione $a_n = \log \dfrac{1}{n^7} - \log \dfrac{1}{n^7 + n^\alpha}$.

a) **Calcolate $\lim_{n\to+\infty} a_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.**

b) **Studiate la convergenza della serie $\sum_n a_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.**

c) **Posto $b_n = n^{\alpha-7} - a_n$, studiate la convergenza della serie $\sum_n b_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.**

Abbiamo

$$a_n = \log \frac{n^7 + n^\alpha}{n^7} = \log\bigl(1 + n^{\alpha-7}\bigr) .$$

Vediamo subito che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 7 \\ \log 2 & \text{se } \alpha = 7 \\ 0 & \text{se } \alpha < 7. \end{cases}$$

Dato che $1 + n^{\alpha-7} > 1$, la prima serie è a termini positivi, e per quanto appena visto diverge positivamente se $\alpha \geq 7$ dato che il termine generale non è infinitesimo, e dobbiamo studiarla per $\alpha < 7$. In tal caso $n^{\alpha-7} \to 0$ quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha-7}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\bigl(1 + n^{\alpha-7}\bigr)}{n^{\alpha-7}} = 1$$

quindi per il criterio del confronto asintotico la serie ha lo stesso carattere di $\sum_n n^{\alpha-7} = \sum_n 1/n^{7-\alpha}$, dunque converge per $7 - \alpha > 1$ ossia $\alpha < 6$, e diverge positivamente altrimenti (il criterio dice solo che diverge per $6 \leq \alpha < 7$ dato che per $\alpha \geq 7$ non possiamo applicarlo perché il logaritmo NON si comporta come $n^{\alpha-7}$; peraltro per $\alpha \geq 7$ sapevamo già tutto). In conclusione la prima serie converge se $\alpha < 6$ e diverge positivamente se $\alpha \geq 6$. Invece la seconda serie ha termine generale

$$b_n = n^{\alpha-7} - \log\bigl(1 + n^{\alpha-7}\bigr)$$

(che è sempre positivo dato che $\log(1 + x) \leq x$), e distinguiamo due (anzi, tre) casi: se $\alpha - 7 > 0$ il termine $n^{\alpha-7}$ tende a $+\infty$ e domina sul logaritmo, quindi $b_n \to +\infty$ e la serie diverge positivamente. Se $\alpha = 7$ abbiamo $b_n \equiv 1 - \log 2 > 0$ e di nuovo la serie diverge positivamente. Invece per $\alpha < 7$ abbiamo $n^{\alpha-7} \to 0$ e ricordando che $\log(1 + t) = t - t^2/2 + o(t^2)$ possiamo scrivere

$$b_n = n^{\alpha-7} - \left(n^{\alpha-7} - \frac{1}{2} n^{2(\alpha-7)} + o\bigl(n^{2(\alpha-7)}\bigr)\right) = \frac{1}{2} n^{2(\alpha-7)} + o\bigl(n^{2(\alpha-7)}\bigr)$$

e per il criterio del confronto asintotico $\sum_n b_n$ ha lo stesso carattere di

$$\sum_n n^{2(\alpha-7)} = \sum_n \frac{1}{n^{14-2\alpha}}$$

che converge se e solo se $14 - 2\alpha > 1$ ossia $\alpha < 13/2$. Riunendo (come prima) i tre casi otteniamo che $\sum_n b_n$ converge per $\alpha < 13/2$ e diverge positivamente per $\alpha \geq 13/2$.