Risoluzione del compito n. 4 (Febbraio 2020)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} (w+1)(z+1) = \mathrm{i}(z-w-2) \\ w + \mathrm{i} = \mathrm{i}z - 1 \,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo

$$w + 1 = \mathrm{i}(z-1) \qquad \text{e} \qquad w = \mathrm{i}z - 1 - \mathrm{i}\,,$$

e sostituendo nella prima equazione

$$\mathrm{i}(z^2-1) = \mathrm{i}(z - \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i} - 2) \iff (z+1)(z-1) = z(1-\mathrm{i}) - 1 + \mathrm{i} = (z-1)(1-\mathrm{i}) \ :$$

a questo punto o $z = 1$, oppure possiamo dividere per $z - 1$ ottenendo subito $z = -\mathrm{i}$. A questi valori corrispondono rispettivamente $w = -1$ e $w = -\mathrm{i}$, per cui le soluzioni sono

$$z = 1,\ w = -1 \qquad \text{e} \qquad z = w = -\mathrm{i}\,.$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \exp\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)$.

a) **Calcolatene i limiti agli estremi del dominio.**
b) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e/o minimo locale.**
c) **Determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di f .**
d) **Disegnate il grafico di f .**
e) **Scrivete l'equazione della retta tangente il grafico di f in ognuno dei suoi punti di flesso.**

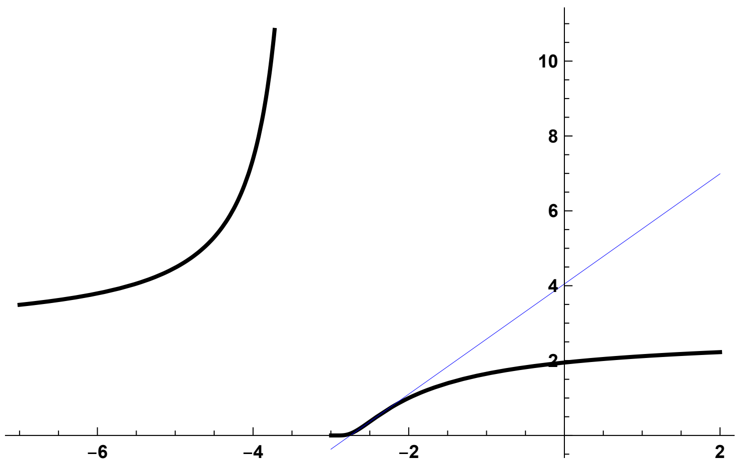
Scrivendo $x+2 = x+3-1$ si ha $f(x) = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{-1/(x+3)}$ e qualche calcolo si semplifica, ma non di molto. Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ed f è sempre positiva. Per $x \to \pm\infty$ abbiamo $(x+2)/(x+3) \to 1$ pertanto $f(x) \to \mathrm{e}$ ed ha un asintoto orizzontale. Invece per $x \to (-3)^{\pm}$ il numeratore $x+2$ tende a -1 e il denominatore a $0^{\pm}$, quindi la frazione $(x+2)/(x+3)$ tende a $\mp\infty$ e dunque

$$\lim_{x\to(-3)^-} f(x) = +\infty , \qquad \lim_{x\to(-3)^+} f(x) = 0 .$$

La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}}{(x+3)^2}\, \mathrm{e}^{-1/(x+3)}$$

che è positiva in tutto il dominio di f , quindi f è crescente sia per $x \in]-\infty, -3[$ che per $x \in]-3, +\infty[$, ma non nell'unione dato che per $x \to (-3)$ il limite da sinistra è maggiore di quello da destra. Non vi sono punti di massimo o minimo locale.



La derivata seconda risulta

$$f''(x) = \left(\frac{-2\,\mathrm{e}}{(x+3)^3} + \frac{\mathrm{e}}{(x+3)^4}\right) \mathrm{e}^{-1/(x+3)} = \frac{-2\,\mathrm{e}(x+5/2)}{(x+3)^4}\, \mathrm{e}^{-1/(x+3)} ;$$

quindi f'' si annulla solo per $x = -5/2$ dove

$$f(-5/2) = 1/\mathrm{e}\,, \qquad f'(-5/2) = 4/\mathrm{e}$$

ed f risulta

$$\begin{array}{c} \text{strettamente convessa per } x < -2 \\ \text{strettamente convessa per } -3 < x \le -5/2 \\ \text{strettamente concava per } x \ge -5/2\,. \end{array}$$

Nell'unico punto di flesso la retta tangente ha equazione

$$y = f(-5/2) + f'(-5/2)\big(x - (-5/2)\big) = \frac{4x + 11}{\mathrm{e}}\,.$$

PROBLEMA 3

Considerate le due funzioni $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$ e $g(x) = \cos\big(\mathrm{sen}(2x)\big)$.

a) Calcolate lo sviluppo di Taylor di ordine 4 di f, centrato in $x_0 = 0$.

b) Calcolate lo sviluppo di Taylor di ordine 4 di g, centrato in $x_0 = 0$.

c) Dite quali sono l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0$.

d) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \mathrm{sen}^2 x}{f(x) - g(x)}$.

Abbiamo subito

$$f(x) = 1 - 2x^2 + \frac{(-2x^2)^2}{2} + o(x^2)^2 = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)\ .$$

Da

$$\mathrm{sen}(2x) = (2x) - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)$$

(che è un infinitesimo di ordine 1) e $\cos t = 1 - (t^2/2) + (t^4/24) + o(t^4)$ segue

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - \frac{1}{2}\Big(2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)\Big)^2 + \frac{1}{24}(\cdots)^4 + o(\cdots)^4 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\Big(4x^2 - \frac{16x^4}{3}\Big) + \frac{1}{24}16x^4 + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{10x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\cdots$ era un infinitesimo di ordine 1 quindi $o(\cdots)^4 = o(x^4)$. Da ciò otteniamo che

$$f(x) - g(x) = -\frac{4x^4}{3} + o(x^4)$$

è un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $-4x^4/3$. Ora

$$x^2 - \mathrm{sen}^2 x = x^2 - \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big)^2 = x^2 - \Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\Big) = \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

quindi

$$\frac{x^2 - \mathrm{sen}^2 x}{f(x) - g(x)} = \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{-\frac{4x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{1 + o(x^4)/x^4}{-4 + o(x^4)/x^4} \to -\frac{1}{4}\ .$$

PROBLEMA 4

Data la funzione $g(x) = \operatorname{sen} x + \arctan x - 2x$, sia $G(x)$ la primitiva di $g(x)$ tale che $G(0) = 0$.

a) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 di g, centrato in $x_0 = 0$.

b) Calcolate il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{G(x)}{x^4}$.

c) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 di $G(x)$, centrato in $x_0 = 0$.

d) Calcolate $G(x)$.

e) Calcolate $\int_0^1 g(x)\,dx$.

Abbiamo

$$\operatorname{sen} x + \arctan x = \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big) + \Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big) = 2x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

perciò $g(x) = -x^3/2 + o(x^4)$. Il punto b) si può svolgere dopo il d), ma se ne può fare a meno: la primitiva G, che è continua per definizione e si annulla in zero, tende a zero per $x \to 0$ quindi possiamo applicare il Teorema di de l'Hôpital ottenendo per definizione di primitiva

$$\lim_{x\to 0} \frac{G(x)}{x^4} \underset{\uparrow \atop H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{G'(x)}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3/2 + o(x^4)}{4x^3} = -\frac{1}{8}\,.$$

Questa relazione di limite equivale a scrivere $G(x) = -x^4/8 + o(x^4)$ e abbiamo già lo sviluppo cercato. Ora integriamo, calcolando prima

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \log\sqrt{1+x^2} + c$$

e poi

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x (\operatorname{sen} t + \arctan t - 2t)\,dt = \big(-\cos x + x\arctan x - \log\sqrt{1+x^2} - x^2\big) - (-1) \\ &= 1 - \cos x + x\arctan x - \log\sqrt{1+x^2} - x^2\,. \end{aligned}$$

Per il Teorema di Torricelli

$$\int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0) = -\cos 1 + \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\,.$$

Esercizio 1. Un numero $z \in \mathbb{C}$ ha una radice quadrata $w \in \mathbb{C}$ di modulo $\sqrt{6}$ e argomento $7\pi/12$. Allora:

(A) $z = -3\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$.

(B) $|z| = 6$ **e** $\arg z = 7\pi/12$.

(C) $z = \sqrt{6}\big(\cos(7\pi/6) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(7\pi/6)\big)$.

(D) $z = -3\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

Se w è una radice di z vuol dire che $z = w^2$, quindi z avrà modulo 6 e argomento $7\pi/6 = \pi + \pi/6$, quindi

$$z = 6\Big(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big)\,.$$

Esercizio 2. La successione $n^\alpha\big[\log(n^2+3) - 2\log n\big]$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro,

(A) ha limite 3 se $\alpha = 2$.

(B) ha limite $+\infty$ per ogni $\alpha > 0$.

(C) ha limite negativo per almeno un valore di α.

(D) ha limite 1 per un preciso valore di α .

Dato che

$$\log(n^2+3) - 2\log n = \log\frac{n^2+3}{n^2} = \log(1+3n^{-2}) = 3n^{-2} + o(1/n^2)$$

abbiamo

$$n^\alpha\big[\log(n^2+3) - 2\log n\big] = n^{\alpha-2}\Big(3 + \frac{o(1/n^2)}{1/n^2}\Big)$$

che tende a 3 se $\alpha = 2$.

Esercizio 3. Il limite per $x \to -1/2$ della funzione $\dfrac{\cos(\pi x)}{4x^2-1}$

(A) è uguale a $-\pi/4$.

(B) è uguale a $\pi/4$.

(C) è uguale a $-1/4$.

(D) non esiste.

Dato che è nella forma $0/0$ possiamo scrivere

$$\lim_{x\to(-1/2)} \frac{\cos(\pi x)}{4x^2-1} \underset{\substack{\uparrow\\ H}}{=} \lim_{x\to(-1/2)} \frac{-\pi\,\mathrm{sen}(\pi x)}{8x} = \frac{-\pi\cdot(-1)}{-4} = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Esercizio 4. Sia $F(x)$ la primitiva della funzione $3x\ \mathrm{e}^{3x}$ tale che $F(0) = 3$. Allora:

(A) $F(x) = \Big(x - \dfrac{1}{3}\Big)\ \mathrm{e}^{3x} + \dfrac{10}{3}$.

(B) $F(x) = (9x+3)\ \mathrm{e}^{3x}$.

(C) $F(x) = \Big(\dfrac{3}{2}\,x^2 + x\Big)\ \mathrm{e}^{3x} + 3$.

(D) $F(x) = \displaystyle\int 3x\ \mathrm{e}^{3x}\,dx + 3$.

Integrando per parti si trova subito che $F(x) = (x - 1/3)\,e^{3x} + c$ per qualche c, il che fa scartare subito tre risposte; controlliamo che la sola rimasta sia giusta: se $c = 10/3$

$$F(0) = -\frac{1}{3}\,e^0 + \frac{10}{3} = 3\,.$$

Esercizio 5. Se $f(x) = \begin{cases} \cos x - \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - \operatorname{sen} x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ allora

(A) f non è derivabile per $x = 0$.

(B) $f'(0) = 1$.

(C) $f'(0) = -1$.

(D) $f'(0) = 0$.

Dato che $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ mentre $f(0) = 0$, la funzione f non è continua in zero, dunque non può essere derivabile.

Esercizio 6. Sapendo che per $x = 0$ la funzione $f(x)$ ha un minimo locale ma la funzione $f(x) - 3x^2$ ha un massimo locale, quale di questi può esere lo sviluppo di Taylor di f ?

(A) $7 + 2x^2 - 3x^4 + o(x^4)$.

(B) $-7 + x + x^2 + 2x^4 + o(x^4)$.

(C) $-2 - x^2 - 3x^4 + o(x^4)$.

(D) $2 + 5x^2 + x^4 + o(x^4)$.

La funzione $-7 + x + o(x)$ è crescente in zero, mentre $-2 - x^2 + o(x^2)$ ha un massimo in zero, quindi restano le altre due, che in zero hanno un minimo. Ma se togliamo $3x^2$ la funzione $2 + 5x^2 + o(x^2)$ diviene $2 + 2x^2 + o(x^2)$, che ha ancora un minimo in zero, e la scelta giusta è $7 + 2x^2 + o(x^2)$ che diventa $7 - x^2 + o(x^2)$ e ha un massimo in zero.

Esercizio 7. Se S è l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge $\sum_n \left(\sqrt{x^2/2 - x - 1}\right)^n$ allora un elemento di S è

(A) -1.

(B) 1.

(C) 0.

(D) 4.

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\sqrt{x^2/2 - x - 1}$; la radice non esiste per $x = 1$ e $x = 0$, vale $\sqrt{3} > 1$ per $x = 4$ e $1/\sqrt{2} < 1$ per $x = -1$, che fra i punti proposti è pertanto il solo in cui la serie converge. Naturalmente perdendo un po' di tempo avremmo potuto determinare S: ricordando che l'argomento della radice non deve essere negativo, la serie (che è geometrica) converge se e solo se la ragione (che non è negativa) è minore di 1, dunque se e solo se

$$\begin{cases} x^2/2 - x - 1 \geq 0 \\ x^2/2 - x - 1 < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 4 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)^2 \geq 3 \\ (x-1)^2 < 5 \end{cases}$$

pertanto

$$S =]1 - \sqrt{5}, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{5}[$$

e il solo fra i numeri proposti ad appartenere ad S è -1.
