Risoluzione del compito n. 2 (Gennaio 2021/1)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z,w), con $z,w\in\mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} w=|z|\bar{z} \\ (2-2\mathrm{i})z-(\mathrm{i}-1)\bar{w}=2z^2\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo immediatamente che se $z=0$ anche $w=0$ e la coppia $z=w=0$ risolve anche la seconda equazione, dunque abbiamo trovato una soluzione del sistema. Ora cerchiamo quelle con $z\neq 0$. Sostituendo $w=|z|\bar{z}$ la seconda equazione diventa $2(1-\mathrm{i})z-(\mathrm{i}-1)|z|z=2z^2\sqrt{2}$ ossia

$$z\big[(1-\mathrm{i})(2+|z|)-2z\sqrt{2}\,\big]=0$$

e dividendo per z (che ormai è diverso da zero)

$$(1-\mathrm{i})(2+|z|)=2z\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{2}(2+|z|)=2|z|\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad|z|=2$$

dove al centro abbiamo scritto l'uguaglianza fra i moduli, per cui $2z\sqrt{2}=4(1-\mathrm{i})$ e infine

$$z=(1-\mathrm{i})\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad w=2(1+\mathrm{i})\sqrt{2}\,.$$

Le due soluzioni del sistema sono

$$z=w=0\,,\qquad z=(1-\mathrm{i})\sqrt{2}\,,\quad w=2(1+\mathrm{i})\sqrt{2}\,.$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x+2}$ **.**

a) **Determinatene il dominio, il segno, i limiti agli estremi del dominio, gli eventuali asintoti**

b) **Determinate gli intervalli di monotonia di** f **e gli eventuali punti di massimo o minimo locale.**

c) **Disegnate, eventualmente dopo aver svolto il punto e), il grafico di** f **.**

d) **Determinate al variare di** $k \in \mathbb{R}$ **quante sono le soluzioni dell'equazione** $f(x) = k$ **.**

e) **Determinate gli intervalli di concavità e convessità di** f **.**

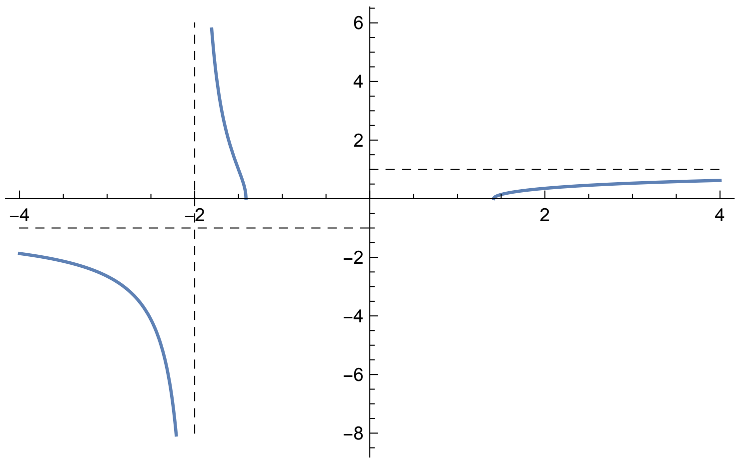
La funzione è definita se $x \neq -2$ e $x^2-2 \geq 0$, ossia su $]-\infty,-2[\cup]-2,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty[$. La funzione si annulla in $\pm\sqrt{2}$, è negativa per $x < -2$ e positiva negli altri punti del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty\ , \qquad \lim_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty$$

(asintoto verticale $x = -2$) e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1-2/x^2}}{x(1+2/x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1$$

(asintoti orizzontali $y = -1$ a sinistra e $y = 1$ a destra).



La derivata di f è

$$f'(x) = 2\frac{x+1}{(x+2)^2\sqrt{x^2-2}}$$

e risulta negativa nei punti del dominio con $x < -1$ ossia in $]-\infty,-2[\cup]-2,-\sqrt{2}]$, e positiva nei punti del dominio con $x > -1$ ossia in $[\sqrt{2},+\infty[$. Allora f risulta

$$\begin{gathered}\text{decrescente in }]-\infty,-2[\\ \text{decrescente in }]-2,\ -\sqrt{2}\,]\\ \text{crescente in } [\sqrt{2},+\infty[\ .\end{gathered}$$

Non vi sono punti interni di massimo o minimo locale, ma ve ne sono sul bordo ($x = \pm\sqrt{2}$ sono due punti di minimo locale). La derivata seconda (di cui non riportiamo il calcolo) è

$$f''(x) = -2\frac{x^2}{(x+2)^3(x^2-2)^{3/2}}(2x+3)\ ;$$

Osservando che la frazione cambia segno in -2 e tenendo presente che $-2 < -3/2 = -1.5 < -\sqrt{2} \simeq -1.4$ abbiamo che la funzione risulta

$$\begin{gathered}\text{strettamente concava in }]-\infty,\ -2[\\ \text{strettamente convessa in }]-2,-3/2]\\ \text{strettamente concava in } [-3/2,-\sqrt{2}]\\ \text{strettamente convessa in } [\sqrt{2},\ +\infty[\ .\end{gathered}$$

Vi è un punto di flesso per $x = -3/2$, poco visibile in figura.
Dalla stretta monotonia di f e dai limiti agli estremi deduciamo che in $]-\infty,-2[$ la funzione assume una e una sola volta ciascun valore $k \in]-\infty,-1[$, che in $]-2,-\sqrt{2}]$ assume una e una sola volta ciascun valore $k \geq 0$ e che in $[\sqrt{2},+\infty[$ assume una e una sola volta ciascun valore $k \in [0,1[$, dunque l'equazione $f(x) = k$ ha

$$\begin{gathered}\text{una soluzione per } k < -1\\ \text{nessuna soluzione per } -1 \leq k < 0\\ \text{due soluzioni per } 0 \leq k < 1\\ \text{una soluzione per } k \geq 1\ .\end{gathered}$$

PROBLEMA 3

In questo esercizio, i coefficienti dei monomi vanno semplificati ai minimi termini. Considerate le due funzioni $f(x) = \log_e(1 - \operatorname{sen} x)$, $g(x) = \log_e(3 - \cos x - e^x)$.

a) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.

b) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.

c) Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione $h(x) = f(x) - g(x)$.

d) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{h(x) - \alpha x^3}{x^4}$.

Da $\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^4)$ e $\log(1-t) = -t - t^2/2 - t^3/3 - t^4/4 + o(t^4)$, tenendo conto che $\big(x - x^3/6 + o(x^4)\big)$ è un infinitesimo di ordine 1 quindi $o(\cdots)^4 = o(x^4)$ segue

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log\big[1 - \big(x - x^3/6 + o(x^4)\big)\big] \\
&= -\big(x - x^3/6 + o(x^4)\big) - (\cdots)^2/2 - (\cdots)^3/3 - (\cdots)^4/4 + o(\cdots)^4 \\
&= -\big(x - x^3/6 + o(x^4)\big) - (x^2 - x^4/3)/2 - x^3/3 - x^4/4 \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Invece da $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ e $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + o(x^4)$ segue che

$$3 - \cos x - e^x = 1 - \big(x + x^3/6 + x^4/12 + o(x^4)\big)$$

(la parte fra parentesi è un infinitesimo di ordine 1) da cui

$$\begin{aligned}
g(x) &= \log\big[1 - \big(x + x^3/6 + x^4/12 + o(x^4)\big)\big] \\
&= -\big(x + x^3/6 + x^4/12 + o(x^4)\big) - (\cdots)^2/2 - (\cdots)^3/3 - (\cdots)^4/4 + o(\cdots)^4 \\
&= -\big(x + x^3/6 + x^4/12 + o(x^4)\big) - (x^2 + x^4/3)/2 - x^3/3 - x^4/4 \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Allora

$$h(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{12} + o(x^4)$$

è un infinitesimo di ordione 3 con parte principale $x^3/3$. Infine

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} \frac{h(x) - \alpha x^3}{x^4} &= \lim_{x\to0^+} \frac{\big(\frac{1}{3} - \alpha\big)x^3 + \frac{5x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{3} - \alpha}{x} + \frac{5}{12} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1/3 \\ 5/12 & \text{se } \alpha = 1/3 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1/3. \end{cases}
\end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Considerate la funzione integrale $\boldsymbol{F(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2} - \cos t}{t}\, dt}$ **.**

a) **Calcolate** $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2}}$ **.**

b) **Posto** $\boldsymbol{a_n = F(1/n)}$ **, determinate il carattere della serie** $\boldsymbol{\sum_n a_n}$ **.**

c) **Posto** $\boldsymbol{b_n = F(n^\beta)}$ **, determinate per quali valori dell'esponente** $\boldsymbol{\beta \in \mathbb{R}}$ **risulta convergente la serie** $\boldsymbol{\sum_n b_n}$ **.**

Posto per il momento $f(x) = (e^{x^2} - \cos x)/x$, di modo che $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, osserviamo intanto che

$$f(x) = \frac{\big(1 + x^2 + o(x^2)\big) - \big(1 - x^2/2 + o(x^2)\big)}{x} = \frac{3}{2}x + o(x)$$

e in particolare $f(x) \to 0$ per $x \to 0$. Allora conviene estendere f ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ed f risulta continua in zero. Allora $F(x) \to 0$ per $x \to 0$, per il teorema della media (o mille altri motivi) dunque il limite $F(x)/x^2$ si presenta nella forma $0/0$ e possiamo applicare il Teorema di de l'Hôpital. Ricordando che per il Teorema fondamentale del calcolo $F'(x) = f(x)$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x/2 + o(x)}{2x} = \frac{3}{4}\ .$$

Da questo segue che F è un infinitesimo di ordine 2 con parte principale $3x^2/4$, ossia

$$F(x) = \frac{3x^2}{4} + o(x^2)\ .$$

In particolare

$$a_n = F(1/n) = \frac{3}{4n^2} + o(1/n^2)$$

(che è una quantità positiva almeno per n grande), quindi applichiamo il criterio del confronto asintotico fra a_n e $1/n^2$ ottenendo che $\sum_n a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_n 1/n^2$, che converge. Per b_n il discorso è più articolato: se $\beta > 0$ abbiamo che $n^\beta \to +\infty$ e visto che la funzione integranda va all'infinito per $x \to +\infty$ anche $b_n \to +\infty$ e la serie diverge positivamente. Se $\beta = 0$ il termine b_n è costante e non nullo (positivo) quindi la serie diverge positivamente. Invece per $\beta < 0$, analogamente al caso di a_n , la serie $\sum_n b_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_n n^{2\beta} = \sum_n 1/n^{-2\beta}$, che converge se e solo se $-2\beta > 1$ ossia $\beta < -1/2$, mentre (essendo a termini positivi) diverge positivamente per gli altri valori di $\beta < 0$. In conclusione la serie converge per $\beta < -1/2$ e diverge positivamente per $\beta \geq -1/2$. Il caso a_n corrispondeva a $\beta = -1$.