

Appunti di Analisi Matematica 1

Domenico Mucci

Contents

1	Introduzione	5
1.1	Programma essenziale ed indispensabile per l'esame orale	5
	Definizioni e proprietà: solo enunciato	5
	Teoremi: enunciato e dimostrazione	6
2	Argomenti preliminari	7
2.1	Funzioni astratte	7
2.2	Funzioni reali	7
	Funzioni monotone	8
	Funzioni simmetriche	8
	Equazioni e disequazioni irrazionali	8
2.3	Valore assoluto	9
	Diseguaglianze triangolari	10
2.4	Relazioni di equivalenza e ordine	10
	Relazioni di equivalenza	10
	Relazioni di ordine	11
3	Insiemi numerici	12
3.1	L'insieme dei numeri reali	12
	Assiomi algebrici	12
	Assioma di Dedekind	12
	Retta reale estesa	13
3.2	Estremo superiore	13
	Teorema di esistenza dell'estremo superiore	13
	Proprietà di Archimede	14
	Caratterizzazioni	14
3.3	Estremi di funzioni	15
3.4	I principi del minimo intero e di induzione	16
	Principio del minimo intero	16
	Principio di induzione	16
	Sommatorie	17
	Forma equivalente del principio di induzione	18
3.5	I numeri razionali	18
	La proprietà di Dedekind non vale sui razionali	18
	Densità dei razionali	19
3.6	Calcolo combinatorio e probabilità finita	19
	Calcolo combinatorio	19
	Coefficienti binomiali	20
	Disposizioni e combinazioni con ripetizioni	21
	Probabilità finita	21
3.7	I numeri complessi	22
	Forma algebrica	22
	Coniugato, modulo e reciproco	23
	Piano di Gauss e forma trigonometrica	24
	Operazioni in forma trigonometrica	24
	Radici complesse	25

Equazioni complesse	26
Teorema fondamentale dell'algebra	26
Forma esponenziale	26
4 Successioni	27
4.1 Successioni, monotonia, estremi	27
Successioni monotone	27
Estremi di successioni	28
4.2 Limite di successioni	29
Sottosuccessioni di posto pari o dispari	30
Limite di successioni monotone	31
Predicati definitivamente veri o frequentemente veri	31
4.3 Teoremi di confronto e teoremi algebrici	32
Limitatezza e permanenza del segno	32
Confronto e teorema dei carabinieri	32
Limite e valore assoluto	33
Operazioni algebriche con i limiti	33
Forme indeterminate	35
Limite del reciproco e del quoziente	35
4.4 Continuità	37
Continuità di alcune funzioni elementari	37
Continuità e andamento di funzioni tipo radice	38
4.5 Limiti di successioni fondamentali	39
Limiti tipo seno e coseno	39
Successioni potenze ed esponenziali	39
Criterio del rapporto per successioni	40
Confronto fra successioni divergenti	40
Criterio della radice per successioni	41
Medie aritmetiche	41
4.6 Il numero di Nepero	42
Osservazione numerica	44
La formula di Stirling	44
4.7 Esponenziale e logaritmo	44
La funzione esponenziale	44
La funzione logaritmo	45
Funzioni esponenziali	46
Funzioni logaritmiche	47
Passaggio alla forma esponenziale	48
4.8 Successioni definite per ricorrenza	48
4.9 I teoremi di Bolzano-Weierstrass e di Cauchy	49
Dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass	50
Punti limite	50
Il teorema di Cauchy per successioni	51
5 Funzioni continue e limiti	52
Una definizione equivalente di continuità	52
5.1 Dalla continuità al limite	52
Cenni di topologia	53
Limite di funzione	54
5.2 Proprietà del limite di funzioni	54
Caratterizzazione sequenziale del limite	54
Limite e continuità	55
Località	55
Limite da destra e da sinistra	56
Alcuni esempi fondamentali	56
Teoremi con i limiti	56
Limite di composizione e cambio di variabile	57

	Altri limiti fondamentali	59
	Limite di funzioni monotone	60
	Asintoti	60
5.3	Funzioni continue su un intervallo	61
	Teorema di esistenza degli zeri	61
	Teorema dei valori intermedi	62
	Iniettività e monotonia	62
	Continuità dell'inversa	63
	Teorema di Weierstrass	63
5.4	Infinitesimi	65
	Ordine di infinitesimo e parte principale	65
	Proprietà degli "o piccoli"	66
	Sviluppi di Taylor	67
	Limite di quoziente di infinitesimi	69
5.5	Funzioni uniformemente continue	69
	Funzioni lipschitziane	70
	Il teorema di Heine-Cantor	70
6	Funzioni derivabili	72
6.1	Differenziale e derivata	72
	Differenziale	72
	Rapporto incrementale e derivata	72
	Derivate destra e sinistra	73
6.2	Significato geometrico e primi esempi	74
	Un atterraggio lunare	74
	Retta tangente e rette secanti	74
	Tangenti ad una curva nel piano	75
	Derivate delle funzioni elementari	75
	Funzione derivata e derivate successive	76
6.3	Operazioni algebriche con le derivate	76
	Derivata di somma, prodotto, reciproco e quoziente	76
	Derivata della composizione	78
	Derivata dell'inversa	79
	Alcuni esempi	80
	Derivate di funzioni pari o dispari	81
6.4	Derivate e proprietà locali delle funzioni	82
	Località della derivata	82
	Monotonia e derivata	82
	Punti di minimo e massimo locale	83
	Il teorema di Fermat	83
6.5	I teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy	84
	Il teorema di Rolle	84
	Il teorema di Lagrange	85
	Conseguenze del teorema di Lagrange	86
	Funzioni lipschitziane derivabili	87
	Il teorema di Cauchy	88
6.6	I teoremi di de l'Hôpital	88
	Osservazioni sui teoremi di de l'Hôpital	89
	Un corollario del teorema di de l'Hôpital	90
6.7	I teoremi di Taylor	91
	Formula di Taylor con il resto di Peano	91
	Esempi fondamentali	92
	Sulla natura di punti critici	93
	Formula di Taylor con il resto di Lagrange	94
	Serie di potenze	95
	Esponenziale complesso	96
6.8	Funzioni convesse	97

Insiemi convessi del piano	97
Funzioni convesse	97
Convessità e derivate	98
Rette e coni tangenti	99
7 Integrazione	100
7.1 Primitive	100
Integrale indefinito	100
7.2 Metodi di integrazione	101
Formula di integrazione per parti	101
Formula di integrazione per sostituzione	102
Sostituzioni implicite	103
Un problema di Cauchy	103
7.3 L'integrale definito	104
Il problema dell'area	104
Verso la nozione di area di sottografici	104
Raffinamenti	105
Funzioni integrabili secondo Riemann	106
Integrabilità delle funzioni continue	107
Integrabilità delle funzioni monotone	107
Il metodo di esaustione di Eudosso rivisitato	108
Funzioni a gradini	108
Funzioni generalmente continue	108
7.4 Proprietà delle funzioni integrabili	109
Linearità dell'integrale	110
Teorema di confronto	111
Integrale e valore assoluto	111
Il teorema di spezzamento	111
Il teorema della media integrale	112
7.5 Verso il teorema fondamentale del calcolo	113
Integrazione su intervalli non orientati	113
La funzione integrale	114
Il teorema fondamentale del calcolo	115
7.6 Conseguenze del teorema fondamentale del calcolo	115
Il teorema di Torricelli	115
Formula di integrazione per parti	116
Formula di integrazione per sostituzione	116
Integrali di funzioni simmetriche	117
Un calcolo di area	117
7.7 La funzione integrale	118
Derivate di funzioni integrali	118
Regolarità di funzioni integrali	119
Un limite con funzioni integrali	119
Sviluppi di Taylor di funzioni integrali	120
Studio qualitativo di una funzione integrale non elementare	121
7.8 Integrale generalizzato	121
Definizioni	124
Trasformata di Fourier	126
Criteri di confronto	127
8 Serie	129
8.1 Convergenza di una serie	129
8.2 Somme di serie	130
8.3 Condizioni di Cauchy	130
8.4 Serie a termini non negativi	131
8.5 Serie a termini di segno alternato	133
8.6 Criterio dell'integrale	133

1 Introduzione

Queste dispense contengono le definizioni, gli esempi, gli enunciati e le dimostrazioni dei risultati fondamentali del corso omonimo di 12 CFU al primo anno del Corso di Studio in Ingegneria I.E.T. presso l'Università di Parma nell'a.a. 2019/20. Alcuni argomenti, come ad esempio le successioni per ricorrenza, le funzioni convesse, la funzione integrale, l'integrale generalizzato, non sono stati svolti interamente a lezione, ma si riportano per completezza.

Ogni studente regolarmente iscritto al corso può stampare una copia delle dispense. Non è ammesso divulgare copie ad altri e, tantomeno, venderle a fini di lucro.

1.1 Programma essenziale ed indispensabile per l'esame orale

Per il superamento dell'esame orale, lo studente deve conoscere bene le seguenti definizioni e gli enunciati e dimostrazioni dei seguenti teoremi, che costituiscono la parte fondamentale del programma. Chi non conosce questi argomenti deve ripetere l'esame. Gli altri contenuti del programma sono rivolti agli studenti più meritevoli, che intendono imparare l'Analisi Matematica.

Definizioni e proprietà: solo enunciato

- i) Funzione monotona e simmetrica, definizioni 2.2.1 e 2.2.6
- ii) Assioma di Dedekind, definizione 3.1.1
- iii) Estremo superiore, definizione 3.2.1
- iv) Binomio di Newton: enunciato della proposizione 3.6.6 e formula (3.8)
- v) Intorno, definizione 4.2.1
- vi) Limite di successioni e sue caratterizzazioni, definizione 4.2.3 e proposizione 4.2.6
- vii) Continuità di funzioni mediante successioni, definizione 4.4.1
- viii) Continuità di funzioni mediante intorni e in forma esplicita, definizione 5.0.1 e formula (5.3)
- ix) Punto di accumulazione, definizione 5.1.5
- x) Limite di funzione, definizione 5.1.9
- xi) Funzione differenziabile, definizione 6.1.1
- xii) Rapporto incrementale, derivata, funzione derivabile: definizione 6.1.4
- xiii) Formula di Taylor con il resto di Peano: enunciato del teorema 6.7.1
- xiv) Insieme convesso e funzione convessa: definizioni 6.8.1 e 6.8.2
- xv) Primitiva, definizione 7.1.1
- xvi) Integrazione per parti: enunciato del teorema 7.2.1
- xvii) Integrazione per sostituzione: enunciato del teorema 7.2.3 e formula (7.1)
- xviii) Integrale generalizzato, definizione 7.8.9
- xix) Serie, somma e convergenza: definizione 8.1.1.

Teoremi: enunciato e dimostrazione

- i) Disuguaglianze triangolari, teorema 2.3.3
- ii) Esistenza dell'estremo superiore, teorema 3.2.3
- iii) Principio di induzione, teorema 3.4.5
- iv) Esistenza di radici complesse, teorema 3.7.12
- v) Esistenza del limite di successioni monotone, teorema 4.2.14
- vi) Confronto e carabinieri, teoremi 4.3.6 e 4.3.8
- vii) Bolzano–Weierstrass, teorema 4.9.5
- viii) Cauchy per successioni, teorema 4.9.11
- ix) Esistenza degli zeri, teorema 5.3.1
- x) Valori intermedi, teorema 5.3.5
- xi) Iniettività e monotonia, teorema 5.3.7
- xii) Weierstrass, teorema 5.3.11
- xiii) Heine–Cantor, teorema 5.5.9
- xiv) Differenziabile equivalente a derivabile, teorema 6.1.5
- xv) Operazioni con le derivate, teorema 6.3.1
- xvi) Fermat, teorema 6.4.8
- xvii) Rolle, teorema 6.5.1
- xviii) Lagrange, teorema 6.5.4
- xix) Conseguenze del teorema di Lagrange, proposizioni 6.5.5 e 6.5.7
- xx) Media integrale, teorema 7.4.11
- xxi) Fondamentale del calcolo integrale, teorema 7.5.9
- xxii) Torricelli, teorema 7.6.1
- xxiii) Criterio della radice per serie, teorema 8.4.10
- xxiv) Criterio di Leibniz per serie, teorema 8.5.1
- xxv) Criterio dell'integrale per serie, teorema 8.6.1