Appunti di Analisi Matematica 1

Domenico Mucci

Contents

1 Introduzione

Queste dispense contengono le definizioni, gli esempi, gli enunciati e le dimostrazioni dei risultati fondamentali del corso omonimo di 12 CFU al primo anno del Corso di Studio in Ingegneria I.E.T. presso l'Università di Parma nell'a.a. 2019/20. Alcuni argomenti, come ad esempio le successioni per ricorrenza, le funzioni convesse, la funzione integrale, l'integrale generalizzato, non sono stati svolti interamente a lezione, ma si riportano per completezza.

Ogni studente regolarmente iscritto al corso può stampare una copia delle dispense. Non è ammesso divulgare copie ad altri e, tantomeno, venderle a fini di lucro.

1.1 Programma essenziale ed indispensabile per l'esame orale

Per il superamento dell'esame orale, lo studente deve conoscere bene le seguenti definizioni e gli enunciati e dimostrazioni dei seguenti teoremi, che costituiscono la parte fondamentale del programma. Chi non conosce questi argomenti deve ripetere l'esame. Gli altri contenuti del programma sono rivolti agli studenti più meritevoli, che intendono imparare l'Analisi Matematica.

Definizioni e proprietà: solo enunciato

i) Funzione monotona e simmetrica, definizioni 2.2.1 e 2.2.6

ii) Assioma di Dedekind, definizione 3.1.1

iii) Estremo superiore, definizione 3.2.1

iv) Binomio di Newton: enunciato della proposizione 3.6.6 e formula (3.8)

v) Intorno, definizione 4.2.1

vi) Limite di successioni e sue caratterizzazioni, definizione 4.2.3 e proposizione 4.2.6

vii) Continuità di funzioni mediante successioni, definizione 4.4.1

viii) Continuità di funzioni mediante intorni e in forma esplicita, definizione 5.0.1 e formula (5.3)

ix) Punto di accumulazione, definizione 5.1.5

x) Limite di funzione, definizione 5.1.9

xi) Funzione differenziabile, definizione 6.1.1

xii) Rapporto incrementale, derivata, funzione derivabile: definizione 6.1.4

xiii) Formula di Taylor con il resto di Peano: enunciato del teorema 6.7.1

xiv) Insieme convesso e funzione convessa: definizioni 6.8.1 e 6.8.2

xv) Primitiva, definizione 7.1.1

xvi) Integrazione per parti: enunciato del teorema 7.2.1

xvii) Integrazione per sostituzione: enunciato del teorema 7.2.3 e formula (7.1)

xviii) Integrale generalizzato, definizione 7.8.9

xix) Serie, somma e convergenza: definizione 8.1.1.

Teoremi: enunciato e dimostrazione

i) Disuguaglianze triangolari, teorema 2.3.3

ii) Esistenza dell'estremo superiore, teorema 3.2.3

iii) Principio di induzione, teorema 3.4.5

iv) Esistenza di radici complesse, teorema 3.7.12

v) Esistenza del limite di successioni monotone, teorema 4.2.14

vi) Confronto e carabinieri, teoremi 4.3.6 e 4.3.8

vii) Bolzano–Weierstrass, teorema 4.9.5

viii) Cauchy per successioni, teorema 4.9.11

ix) Esistenza degli zeri, teorema 5.3.1

x) Valori intermedi, teorema 5.3.5

xi) Iniettività e monotonia, teorema 5.3.7

xii) Weierstrass, teorema 5.3.11

xiii) Heine–Cantor, teorema 5.5.9

xiv) Differenziabile equivalente a derivabile, teorema 6.1.5

xv) Operazioni con le derivate, teorema 6.3.1

xvi) Fermat, teorema 6.4.8

xvii) Rolle, teorema 6.5.1

xviii) Lagrange, teorema 6.5.4

xix) Conseguenze del teorema di Lagrange, proposizioni 6.5.5 e 6.5.7

xx) Media integrale, teorema 7.4.11

xxi) Fondamentale del calcolo integrale, teorema 7.5.9

xxii) Torricelli, teorema 7.6.1

xxiii) Criterio della radice per serie, teorema 8.4.10

xxiv) Criterio di Leibniz per serie, teorema 8.5.1

xxv) Criterio dell'integrale per serie, teorema 8.6.1

2 Argomenti preliminari

Sono date per note le nozioni fondamentali di logica, insiemistica, trigonometria, geometria analitica, nonché sulle funzioni potenze, esponenziali e logaritmiche.

2.1 Funzioni astratte

Una *funzione* $f : A \to B$ è una relazione "$f(a) = b$" tra gli insiemi A e B, detti *dominio e codominio*, tale che la *legge* f verifica $\forall\, a \in A$, $\exists! b \in B \,:\, b = f(a)$.

Per funzioni reali, i.e. tali che $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, si denota con $\operatorname{dom} f$ il dominio naturale.

La *funzione immagine* $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ è definita da $f(E) := \{f(a) \mid a \in E\}$, per ogni $E \subset A$, e si denota $\operatorname{im} f := f(A)$ l'insieme immagine.

Grafico di una funzione $f : A \to B$ è il sottinsieme $G_f \subset A \times B$ definito da $G_f := \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B,\, f(a) = b\}$.

La *funzione controimmagine* $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ è definita da $f^{-1}(F) := \{a \in A \mid f(a) \in F\}$, per ogni $F \subset B$.

La *restrizione* di una funzione $f : A \to B$ ad un insieme $E \subset A$ è la funzione $f_{|E} : E \to B$ tale che $f_{|E}(a) = f(a)$ per ogni $a \in E$.

Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ oppure, equivalentemente, se $\forall\, a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$.

Una funzione $f : A \to B$ si dice *suriettiva* se $\forall\, b \in B$, $\exists\, a \in A \,:\, f(a) = b$.

Una funzione $f : A \to B$ si dice *biiettiva o biunivoca* se è sia iniettiva che suriettiva. Quindi f è biunivoca se $\forall\, b \in B$, $\exists\,!\, a \in A \,:\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B'$ è iniettiva, allora è *invertibile*, i.e. la funzione $f : A \to B$, dove $B = f(A)$, è biunivoca. In tal caso, la *funzione inversa* è la funzione biunivoca $f^{-1} : B \to A$ tale che $f^{-1}(b) = a$ se e solo se $f(a) = b$. Inoltre il grafico dell'inversa è $G_{f^{-1}} = \{(b, a) \mid b \in B,\, a \in A,\, f(a) = b\}$ e quindi $G_{f^{-1}} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{G}_f\} \subset B \times A$.

Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B' \to C$ tali che $f(A) \cap B' \neq \emptyset$, la *funzione composta* $g \circ f$ ha per dominio $f^{-1}(f(A) \cap B')$, codominio C e legge $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

La composizione di funzioni non è commutativa ma è associativa.

La funzione identità su un insieme A è definita da $i_A : A \to A$, $i_A(a) = a$ per ogni $a \in A$.

Se $f : A \to B$ è biunivoca, allora $f^{-1} \circ f = i_A$ e $f \circ f^{-1} = i_B$.

Proposizione 2.1.1 *Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to A$ tali che $g \circ f = i_A$ e $f \circ g = i_B$, allora f è biunivoca e g è l'inversa di f.*

Dimostrazione: Poiché per ogni $b \in B$, $f(g(b)) = b$, allora posto $a = g(b) \in A$ risulta $f(a) = b$, quindi f è suriettiva. Poiché inoltre per ogni $a \in A$, $g(f(a)) = a$, se f non fosse iniettiva, esisterebbero $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 \neq a_2$ e $f(a_1) = f(a_2)$. Ma $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ da cui, posto $b_1 = f(a_1) \in B$ e $b_2 = f(a_2) \in B$, essendo g una funzione, $g(b_1) \neq g(b_2) \Longrightarrow b_1 \neq b_2$, il che è assurdo, per cui f è iniettiva. L'ultima affermazione segue facilmente. □

Proposizione 2.1.2 *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono entrambe iniettive [[suriettive]] allora la funzione composta $g \circ f : A \to C$ è iniettiva [[suriettiva]]. Quindi, se f e g sono entrambe biunivoche anche la composizione è biunivoca e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Dimostrazione: Le prime tre affermazioni sono di facile verifica. Per dimostrare che se $g \circ f$ è biunivoca allora la sua inversa è $f^{-1} \circ g^{-1}$, usando la proposizione precedente basta mostrare che $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = i_C$ e $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = i_A$. Mostriamo la prima: per ogni $c \in C$ abbiamo infatti $[(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})](c) = [g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}](c) = [g \circ i_B \circ g^{-1}](c) = (g \circ g^{-1})(c) = c = i_C(c)$. □

2.2 Funzioni reali

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale, i.e. $A \subset \mathbb{R}$. Vediamo le proprietà di *monotonia e simmetria*.

Funzioni monotone

Definizione 2.2.1 La funzione f è *monotona debolmente crescente* se $\forall\, a_1, a_2 \in A$, $a_1 < a_2 \Longrightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$, è *strettamente crescente* se $\forall\, a_1, a_2 \in A$, $a_1 < a_2 \Longrightarrow f(a_1) < f(a_2)$. Analogamente, f è *debolmente [[strettamente]] decrescente* se $\forall\, a_1, a_2 \in A$, $a_1 < a_2 \Longrightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$ $[[f(a_1) > f(a_2)]]$.

La funzione f si dice *strettamente monotona* se è strettamente crescente o decrescente.
Le funzioni costanti sono le uniche funzioni sia debolmente crescenti che debolmente crescenti.

Proposizione 2.2.2 *Se f è strettamente monotona, allora è anche iniettiva. Inoltre, la sua inversa è monotona dello stesso tipo.*

Osservazione 2.2.3 Il viceversa è falso, come si vede considerando ad esempio la funzione $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$, che è iniettiva ma non è monotona su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Osservazione 2.2.4 Se però f è monotona dello stesso tipo sugli intervalli $(a, b]$ e $[b, c)$, allora è monotona anche sull'unione degli intervalli.

Proposizione 2.2.5 *Se f e g sono funzioni monotone, allora anche la loro composizione è monotona.*

DIMOSTRAZIONE: Proviamo ad esempio che se f e g sono decrescenti, la composizione è crescente. Infatti abbiamo $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(g \circ f)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$. □

Funzioni simmetriche

Definizione 2.2.6 Sia $A \subset \mathbb{R}$ *simmetrico*, i.e. $\forall\, x \in A$, $-x \in A$. In tal caso, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *pari* se $\forall\, x \in A, f(-x) = f(x)$, si dice *dispari* se $\forall\, x \in A, f(-x) = -f(x)$.

Osservazione 2.2.7 Se f è pari, allora $(x, y) \in \mathcal{G}_f \iff (-x, y) \in \mathcal{G}_f$, quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Se invece f è dispari, allora $(x, y) \in \mathcal{G}_f \iff (-x, -y) \in \mathcal{G}_f$, quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine. La funzione potenza x^n di esponente $n \in \mathbb{N}$ è pari se n è pari, è dispari se n è dispari. La funzione $\cos x$ è pari, mentre le funzioni $\mathrm{sen}\, x$ e $\tan x$ sono dispari.

Qui di seguito, la suriettività delle funzioni potenze segue dal teorema dei valori intermedi, cf. l'osservazione 5.3.6.

Osservazione 2.2.8 Se $n \in \mathbb{N}^+$ è pari, la funzione potenza $x^n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è biunivoca e strettamente crescente. Quindi la sua inversa $x^{1/n} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è biunivoca e strettamente crescente. Se invece $n \in \mathbb{N}^+$ è dispari, la funzione potenza $x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biunivoca e strettamente crescente, per cui la sua inversa $x^{1/n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biunivoca e strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Osservazione 2.2.9 Il prodotto di funzioni simmetriche (i.e. pari o dispari) è una funzione simmetrica. Il tipo di parità del prodotto dipende dalla parità dei fattori, in base alla regola dei segni.

Equazioni e disequazioni irrazionali

Esempio 2.2.10 Consideriamo l'equazione irrazionale del tipo

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \ ,$$

dove f e g sono due funzioni reali date. Per risolvere tale equazione, per prima cosa ne troviamo il campo di esistenza. Ovviamente devono essere definite le funzioni f e g, quindi occorre che $x \in \mathrm{dom}\, f$ e $x \in \mathrm{dom}\, g$. Inoltre, poiché la funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ è definita per $t \geq 0$, occorre imporre che l'argomento della radice sia non negativo, i.e. che $f(x) \geq 0$. A questo punto, per "togliere" la radice vorremmo elevare al quadrato ambo i membri. Prima però ricordiamo che l'equazione $a = b$ è equivalente all'equazione $a^2 = b^2$ se e solo se i numeri a e b sono di segno concorde. Quindi, dal momento che al primo membro dell' equazione considerata abbiamo una quantità non negativa, essendo una radice quadrata, è sufficiente imporre che il secondo membro sia non negativo, i.e. che $g(x) \geq 0$. Infine, elevando al quadrato troviamo l'equazione equivalente $f(x) = [g(x)]^2$. Riassumendo, dobbiamo risolvere il seguente sistema misto

$$x \in \mathrm{dom}\, f \quad \mathbf{e} \quad x \in \mathrm{dom}\, g \quad \mathbf{e} \quad f(x) \geq 0 \quad \mathbf{e} \quad g(x) \geq 0 \quad \mathbf{e} \quad f(x) = [g(x)]^2 \ .$$

Esempio 2.2.11 Consideriamo una disequazione irrazionale del tipo

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \ ,$$

dove f e g sono due funzioni reali date. Per risolvere tale disequazione, per prima cosa troviamo il campo di esistenza. Dobbiamo ancora imporre $x \in \operatorname{dom} f$ e $x \in \operatorname{dom} g$. Inoltre, poiché la funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ è definita per $t \geq 0$, occorre che l'argomento della radice sia non negativo, i.e. che $f(x) \geq 0$. A questo punto, per elevare al quadrato ambo i membri, occorre che questi siano di segno concorde. Al primo membro della disequazione abbiamo una quantità non negativa, essendo una radice quadrata. Quindi è sufficiente imporre che il secondo membro sia non negativo, i.e. che $g(x) \geq 0$. Si noti che se $g(x) < 0$, allora la disequazione data non è verificata. Infatti, in tal caso avremmo una quantità non negativa a primo membro minore o uguale a una quantità negativa a secondo membro, il che non è possibile. Posto quindi $g(x) \geq 0$, poiché la funzione t^2 è strettamente crescente su $\mathbb{R}_0^+$ possiamo infine elevare ambo i membri al quadrato e risolvere la disequazione $f(x) \leq [g(x)]^2$. Concludendo, la nostra disequazione è equivalente al sistema

$$x \in \operatorname{dom} f \quad \mathbf{e} \quad x \in \operatorname{dom} g \quad \mathbf{e} \quad f(x) \geq 0 \quad \mathbf{e} \quad g(x) \geq 0 \quad \mathbf{e} \quad f(x) \leq [g(x)]^2 \ .$$

Esempio 2.2.12 Consideriamo ora il caso

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \ .$$

Posto come sopra $x \in \operatorname{dom} f$ e $x \in \operatorname{dom} g$, occorre che l'argomento della radice sia non negativo, i.e. che $f(x) \geq 0$. A questo punto osserviamo che se $g(x) < 0$, allora la disequazione è verificata e, quindi, otteniamo un primo gruppo di soluzioni dato dal sistema

$$x \in \operatorname{dom} f \quad \mathbf{e} \quad x \in \operatorname{dom} g \quad \mathbf{e} \quad f(x) \geq 0 \quad \mathbf{e} \quad g(x) < 0 \ .$$

Se invece $g(x) \geq 0$, poiché la funzione t^2 è debolmente crescente su $\mathbb{R}_0^+$ possiamo elevare al quadrato e risolvere la disequazione $f(x) \geq [g(x)]^2$. Quindi abbiamo un secondo gruppo di soluzioni dato dal sistema

$$x \in \operatorname{dom} f \quad \mathbf{e} \quad x \in \operatorname{dom} g \quad \mathbf{e} \quad f(x) \geq 0 \quad \mathbf{e} \quad g(x) \geq 0 \quad \mathbf{e} \quad f(x) \geq [g(x)]^2$$

dove la disequazione $f(x) \geq 0$ può essere omessa, essendo una conseguenza della quinta.

Trovati gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi, la loro unione ci dà la soluzione cercata.

2.3 Valore assoluto

Definizione 2.3.1 La funzione valore assoluto ha dominio e codominio uguali ad $\mathbb{R}$ ed è definita dalla legge che ad ogni numero $a \in \mathbb{R}$ associa $|a| := \max\{a, -a\}$.

Proposizione 2.3.2 *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ risulta*

1) $a \leq |a|$

2) $|a| = a$ *se* $a \geq 0$, *mentre* $|a| = -a$ *se* $a \leq 0$

3) $|a| \geq 0$

4) $|a| = 0 \iff a = 0$

5) $|a| = |-a|$

6) $-|a| \leq a \leq |a|$.

7) $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$

8) $|a| < b \iff -b < a < b$

9) $|a| \geq b \iff [(a \geq b)$ **o** $(a \leq -b)]$

10) $|a| > b \iff [(a > b)$ **o** $(a < -b)]$.

Dimostrazione: Le prime sei proprietà sono di verifica elementare. Per provare la 7), osserviamo che

$$|a| \leq b \iff \max\{a, -a\} \leq b \iff a \leq b \ \mathbf{e} \ -a \leq b \iff a \leq b \ \mathbf{e} \ -b \leq a \iff -b \leq a \leq b \, .$$

La 8) si prova in maniera analoga. La 9) si ottiene negando la 8) e la 10) negando la 7). □

Diseguaglianze triangolari

Teorema 2.3.3 *Se $A, B \in \mathbb{R}$, allora*

(*I*) $|A + B| \leq |A| + |B|$

(*II*) $\big||A| - |B|\big| \leq |A - B|$.

Dimostrazione: Scrivendo la proprietà 6) per A e per B, e sommando membro a membro, si ottiene $-(|A| + |B|) \leq A + B \leq (|A| + |B|)$. Applicando quindi la 7), con $a = A + B$ e $b = |A| + |B|$, si ottiene la (I). Per provare la (II), dalla prima disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|A| = |(A - B) + B| \leq |A - B| + |B|$$

da cui, confrontando il primo e l'ultimo membro,

$$|A| - |B| \leq |A - B| \ .$$

Prendendo poi B al posto di A ed A al posto di B, otteniamo in modo analogo che

$$|B| - |A| \leq |B - A|$$

da cui, essendo $|B - A| = |A - B|$ per la 5), e moltiplicando ambo i membri per -1,

$$-|A - B| \leq |A| - |B| \ .$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$-|A - B| \leq |A| - |B| \leq |A - B| \ ,$$

il che è equivalente a $\big||A| - |B|\big| \leq |A - B|$, per la proprietà 7) del valore assoluto applicata questa volta con $a = |A| - |B|$ e $b = |A - B|$. □

Osservazione 2.3.4 Per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $\sqrt{x^2} = |x|$, mentre ricordiamo che l'equazione $(\sqrt{x})^2 = x$ ha senso ed è verificata se e solo se $x \geq 0$. Quindi, il valore assoluto esprime la distanza tra punti. Posto $\text{dist}(x, y) := |x - y|$ per $x, y \in \mathbb{R}$, si deduce che fissati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, soluzione della disequazione $|x - x_0| < r$ sono i punti che distano da x_0 per meno di $\mathbb{R}$, i.e. l'intervallo $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Ricordiamo inoltre che una funzione del tipo $x \mapsto f(|x|)$ è pari, quindi l'insieme S delle soluzioni di $f(|x|) > 0$ è simmetrico. Inoltre si ha

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se} \quad f(x) \leq 0 \end{cases} \qquad \forall\, x \in \text{dom}\, f \, .$$

2.4 Relazioni di equivalenza e ordine

Una *relazione* su un insieme X è un sottinsieme $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $X \times X$, e scriviamo $x\mathcal{R}y$ se $(x, y) \in \mathcal{R}$. Ricordiamo le seguenti proprietà:

i) riflessiva: $\forall\, x \in X$, $x\mathcal{R}x$;

ii) simmetrica: $\forall\, x, y \in X$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$;

iii) antisimmetrica: $\forall\, x, y \in X$, $x\mathcal{R}y$ **e** $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$;

iv) transitiva: $\forall\, x, y, z \in X$, $x\mathcal{R}y$ **e** $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

Relazioni di equivalenza

Definizione 2.4.1 Una relazione è di *equivalenza* se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Una relazione di equivalenza si denota con il simbolo "$\simeq$". Data una relazione di equivalenza poniamo per ogni $x \in X$

$$[x] := \{y \in X \mid x \simeq y\} \, ,$$

l'insieme $[x]$ è detto *classe di equivalenza* di x.

Proposizione 2.4.2 *Data una relazione di equivalenza su X, allora per ogni $x, y \in X$ tali che $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ risulta $[x] = [y]$.*

Quindi le classi di equivalenza determinano una partizione di X. Possiamo dunque definire l'*insieme quoziente*

$$X/\simeq := \{[x] : x \in X\}.$$

Esempio 2.4.3 Posto $X = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, si prova che la relazione $m/n \simeq m'/n' \iff mn' = m'n$ è di equivalenza. Per ogni $m/n \in X$ la classe di equivalenza $[m/n]$ è data da tutte le frazioni equivalenti a m/n. Quindi, l'insieme quoziente definisce l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Relazioni di ordine

Definizione 2.4.4 Una relazione è di *ordine* se gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Una relazione d'ordine si denota con il simbolo "$\leq$".

Definizione 2.4.5 Una relazione d'ordine si dice *totale* se due elementi sono sempre confrontabili, i.e. se risulta: $\forall\, x, y \in X, \quad x \leq y$ **o** $y \leq x$.

Esempio 2.4.6 Se $X = \mathcal{P}(U)$, dove U è un insieme non vuoto, la relazione di inclusione "$\subset$" è di ordine, ma in generale non è totale. L'inclusione stretta $\subsetneq$ invece non è una relazione d'ordine.

Esempio 2.4.7 Se $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, la relazione usuale "$\leq$" è di ordine totale.

Sia $\leq$ una relazione d'ordine totale su X. Come modello teniamo in mente l'ultimo esempio fatto.

Definizione 2.4.8 Se $A \subset X$, si dice che un elemento $M \in X$ [[$m \in X$]] è un *maggiorante [[minorante]]* di A se

$$\forall\, a \in A,\ a \leq M \quad [[a \geq m]]\ .$$

Indicheremo poi l'insieme dei maggioranti [[minoranti]] di A con $\mathcal{M}_A$ [[m_A]].

Definizione 2.4.9 Si dice che un insieme $A \subset X$ è *limitato superiormente [[inferiormente]]* se ha dei maggioranti [[minoranti]], i.e. se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ [[$m_A \neq \emptyset$]]. Inoltre A si dice *limitato* se è limitato sia superiormente che inferiormente, i.e. se

$$\exists\, m, M \in X \ :\ \forall\, a \in A,\ m \leq a \leq M\ .$$

Se $X = \mathbb{R}$, posto $\widetilde{M} := \max\{|m|, |M|\}$, segue facilmente che $A \subset \mathbb{R}$ è limitato se e solo se

$$\exists\, \widetilde{M} \in \mathbb{R} \ :\ \forall\, a \in A,\ |a| \leq \widetilde{M}\ .$$

Definizione 2.4.10 Se $A \subset X$, si dice che un numero $M \in X$ [[$m \in X$]] è *il massimo [[il minimo]]* di A se appartiene ad A ed è un maggiorante [[minorante]] di A. In tal caso si scrive $M = \max A$ [[$m = \min A$]]. Quindi

$$M = \max A \iff \begin{cases} M \in A \\ \forall\, a \in A,\ a \leq M \end{cases} \qquad m = \min A \iff \begin{cases} m \in A \\ \forall\, a \in A,\ a \geq m\ . \end{cases}$$

Osservazione 2.4.11 Il massimo [[minimo]] può non esistere, anche se A è limitato superiormente [[inferiormente]]. Si consideri ad esempio $A = [0,1[$, per cui risulta $\mathcal{M}_A = [1, +\infty)$ e quindi $A \cap \mathcal{M}_A = \emptyset$.

Se però esiste, allora il massimo [[minimo]] di A è unico. Infatti, se $M_1 = \max A$ e $M_2 = \max A$, risulta $M_1 \leq M_2$ **e** $M_2 \leq M_1$, per cui $M_1 = M_2$.

Valgono infine le seguenti proprietà:

1) se $A_1 \subset A_2$ allora $\mathcal{M}_{A_2} \subset \mathcal{M}_{A_1}$ [[$m_{A_2} \subset m_{A_1}$]]

2) se $A_1 \subset A_2$ allora $\max A_1 \leq \max A_2$ [[$\min A_1 \geq \min A_2$]] qualora i massimi [[minimi]] esistano

3) se A e B hanno massimo [[minimo]], allora anche l'unione $A \cup B$ ha massimo [[minimo]] e risulta

$$\max(A \cup B) = \max\{\max A, \max B\} \qquad [[\min(A \cup B) = \min\{\min A, \min B\}]]\ .$$

3 Insiemi numerici

3.1 L'insieme dei numeri reali

Assiomi algebrici

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali gode delle seguenti propretà algebriche:

i) l'addizione, $+$, è associativa

ii) l'addizione è commutativa

iii) l'addizione ha elemento neutro, 0

iv) ogni numero ha inverso rispetto alla addizione (detto l'opposto)

v) la moltiplicazione, $\cdot$, è associativa

vi) la moltiplicazione è commutativa

vii) la moltiplicazione ha elemento neutro, 1

viii) ogni numero diverso da zero ha inverso rispetto alla moltiplicazione (detto il reciproco)

ix) la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione

x) se $a \leq b$, allora per ogni c si ha $a + c \leq b + c$

xi) se $a \leq b$, allora per ogni $c \geq 0$ si ha $a \cdot c \leq b \cdot c$.

L' insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è definito in modo assiomatico come un insieme $X = \mathbb{R}$ munito di due leggi di composisione interna, addizione e moltiplicazione, e di una relazione d'ordine totale tali che valgano le proprietà algebriche i)–xi) sopra elencate ed in più la seguente proprietà di separazione.

Assioma di Dedekind

Definizione 3.1.1 Se A, B sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a \leq b \tag{3.1}$$

allora

$$\exists\, c \in \mathbb{R} :\ \forall\ a \in A,\ \forall\ b \in B,\ a \leq c \leq b\ .$$

Un tale c si dice elemento separatore di A e B.

Esempio 3.1.2 Poniamo $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \ \textbf{o}\ x^2 \leq 2\}$ e $B = \mathbb{Q} \setminus A$. Gli insiemi A e B sono entrambi non vuoti e verificano (3.1). Un elemento separatore di A e B esiste ed è $c = \sqrt{2}$, dunque $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Ovviamente tutti i numeri razionali sono reali, ma l' insieme dei numeri reali contiene strettamente l' insieme dei razionali, $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Mostriamo infatti che $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proposizione 3.1.3 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

DIMOSTRAZIONE: Se per assurdo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, possiamo scrivere $\sqrt{2} = m/n$, con $m, n \in \mathbb{N}^+$ e primi tra loro. Si avrebbe $m^2/n^2 = (m/n)^2 = 2$, quindi $m^2 = 2n^2$, dunque m è pari, essendolo il suo quadrato. Scritto $m = 2s$, con $s \in \mathbb{N}^+$, abbiamo $4s^2 = m^2 = 2n^2$, da cui $n^2 = 2s^2$ ed anche n dovrebbe essere pari, essendolo il suo quadrato. Questo non è possibile, perchè m ed n sono primi tra loro. $\square$

Retta reale estesa

Definiamo la *retta reale estesa* come $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ricordando che $x < y \iff x \leq y$ **e** $x \neq y$, l'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ diventa totalmente ordinato se si pone

$$-\infty < x < +\infty \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ .$$

Estendiamo inoltre le operazioni di addizione e moltiplicazione ponendo

$$\begin{aligned} &\forall\, x < (+\infty),\ x + (-\infty) = -\infty\ , &\quad &\forall\, x > (-\infty),\ x + (+\infty) = +\infty\ , \\ &\forall\, x > 0,\ x \cdot (+\infty) = +\infty\ , &\quad &\forall\, x > 0,\ x \cdot (-\infty) = -\infty\ , \\ &\forall\, x < 0,\ x \cdot (+\infty) = -\infty\ , &\quad &\forall\, x < 0,\ x \cdot (-\infty) = +\infty\ . \end{aligned}$$

Osservazione 3.1.4 Non sono definite (e quindi non hanno senso) le operazioni

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad \text{e} \qquad 0 \cdot (\pm\infty)\ .$$

Definizione 3.1.5 Un sottoinsieme I di $\overline{\mathbb{R}}$ si dice un *intervallo* se

$$\forall\, x, y \in I \text{ con } x < y \ \Rightarrow\ \{z \in \mathbb{R} : x < z < y\} \subset I\ .$$

Si verifica facilmente che gli intervalli di $\overline{\mathbb{R}}$ sono tutti del tipo

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \qquad &]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ [a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \qquad &]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \end{aligned}$$

dove $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a \leq b$. Parlando poi di intervalli $I \subset \mathbb{R}$ di numeri reali, le scritture $[-\infty, b]$, $[a, +\infty]$ non hanno senso, come tutte quelle che comprendono $-\infty$ o $+\infty$ nell'insieme I.

3.2 Estremo superiore

Sia X un insieme dotato di un ordinamento totale. La nozione di estremo superiore generalizza il concetto di massimo di un insieme.

Definizione 3.2.1 Se $A \subset X$ è un insieme non vuoto e limitato superiormente [[inferiormente]], si dice che un numero L [[l]] in X è *estremo superiore [[inferiore]]* di A se è il più piccolo dei maggioranti [[il più grande dei minoranti]] di A. In tal caso si scrive $L = \sup A$ [[$l = \inf A$]].

Essendo $\sup A = \min \mathcal{M}_A$ e $\inf A = \max m_A$, l'estremo superiore [[inferiore]] se esiste è unico. Inoltre:

Proposizione 3.2.2 *Se A ha massimo [[minimo]], allora questo è anche l'estremo superiore [[inferiore]].*

Teorema di esistenza dell'estremo superiore

L'assioma di Dedekind implica l'esistenza dell'estremo superiore in $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2.3 *Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore.*

Dimostrazione: Posto $B = \mathcal{M}_A$, gli insiemi A e B sono entrambi non vuoti, in quanto A è limitato superiormente. Inoltre vale (3.1), dal momento che

$$\forall\, a \in A, \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_A, \quad a \leq M\ .$$

Sia $L \in \mathbb{R}$ un elemento separatore di A e B. Abbiamo

$$\forall\, a \in A, \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_A, \quad a \leq L \leq M\ .$$

La prima disequaglianza ci dice che L è un maggiorante di A mentre la seconda che L è il più piccolo tra i maggioranti di A, dunque $L = \sup A$. In particolare, l'elemento separatore di A e $\mathcal{M}_A$ è unico. □

Se $A \subset \mathbb{R}$ non è vuoto, la scrittura $\sup A = +\infty$ [[$\inf A = -\infty$]] significa che A non è limitato superiormente [[inferiormente]]. Quindi:

$$\sup A = +\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, a \in A\ :\ a > M\,, \quad \inf A = -\infty \iff \forall\, m \in \mathbb{R}, \exists\, a \in A\ :\ a < m\ .$$

Le proprietà dell'estremo inferiore sono legate a quelle dell'estremo superiore.

Definizione 3.2.4 Se $A \subset \mathbb{R}$, chiamiamo opposto di A l'insieme $-A = \{-a : a \in A\}$ degli opposti degli elementi di A.

Vale infatti la seguente

Proposizione 3.2.5 *Se A è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, allora*

$$\sup A = -\inf(-A)\ , \qquad \inf A = -\sup(-A)\ .$$

Dimostrazione: Basta osservare che $\mathcal{M}_{-A} = -m_A$ e $m_{-A} = -\mathcal{M}_A$. □

Di conseguenza, dal Teorema 3.2.3 si ottiene facilmente l'esistenza dell'estremo inferiore in $\mathbb{R}$.

Proposizione 3.2.6 *Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente ha estremo inferiore.*

Vale poi la seguente

Proposizione 3.2.7 *Se A, B sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, con $A \subset B$, allora*

$$\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B\ .$$

Dimostrazione: Basta ricordare che $\mathcal{M}_A \supset \mathcal{M}_B$ e che $m_A \supset m_B$. □

Proprietà di Archimede

Dall'esistenza dell'estremo superiore si ottiene la seguente

Proposizione 3.2.8 *Se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b > 0$ allora esiste un numero naturale positivo $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $na > b$.*

Dimostrazione: Posto $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}^+\}$, basta dimostrare che A non è limitato superiormente. In tale caso, infatti, b non è un maggiorante di A, da cui segue l'asserto. Se per assurdo supponiamo A limitato superiormente, essendo A non vuoto, per il Teorema 3.2.3 esiste $L = \sup A \in \mathbb{R}$. Il numero $L - a$ non sarebbe maggiorante di a, quindi esisterebbe $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $na > L - a$, posto dunque $x = (n+1)\,a$, risulta $x > L$, il che è assurdo in quanto $x \in A$ e L è maggiorante di A. □

Dalla proprietà di Archimede segue un utile

Corollario 3.2.9 *Se $x > 0$, allora esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $1/n < x$.*
Se invece $x \in \mathbb{R}$ verifica $\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ x \le 1/n$, allora $x \le 0$.

Dimostrazione: La prima affermazione si ottiene applicando la proprietà di Archimede con $a = x$ e $b = 1$. La seconda è la contronominale della prima. □

Osservazione 3.2.10 Dalla proprietà di Archimede segue che $\mathbb{N}$, e quindi anche $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ (e ovviamente $\mathbb{R}$) non sono limitati superiormente. Poiché $-\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ e $-\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, allora $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ (e ovviamente $\mathbb{R}$) non sono limitati inferiormente.

Caratterizzazioni

Nel caso di estremi reali, abbiamo

$$L = \sup A \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} L \in \mathcal{M}_A \\ \forall\, \lambda < L,\ \lambda \notin \mathcal{M}_A \end{cases} \qquad l = \inf A \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} l \in m_A \\ \forall\, \mu > l,\ \mu \notin m_A\ . \end{cases}$$

In modo equivalente si può dunque scrivere

$$L = \sup A \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \le L \\ \forall\, \lambda < L,\ \exists\, a \in A :\ a > \lambda \end{cases} \qquad l = \inf A \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \ge l \\ \forall\, \mu > l,\ \exists\, a \in A :\ a < \mu\ . \end{cases}$$

Vale infine la seguente caratterizzazione di maggiore utilità pratica

$$L = \sup A \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \le L \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A :\ a > L - \varepsilon \end{cases}$$

$$l = \inf A \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \ge l \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A :\ a < l + \varepsilon\ . \end{cases} \tag{3.2}$$

Esempio 3.2.11 Se $a < b$, allora $\sup[a, b[= b$ e $\inf[a, b[= \min[a, b[= a$.

Esempio 3.2.12 Posto $A = \{n/(n + 1) \, : n \in \mathbb{N}\}$, mostriamo che $\inf A = \min A = 0$ e che $\sup A = 1$.

La prima affermazione è di facile verifica, in quanto 0 è minorante di A ed appartiene ad A. Per la seconda, osserviamo che $1 \in \mathcal{M}_A$. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n/(n + 1) \leq 1 \iff n \leq n + 1 \iff 0 \leq 1$. Per provare che 1 è il più piccolo dei maggioranti di A, verifichiamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists\, n \in \mathbb{N} : \ \frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon \, .$$

Infatti, supposto $\varepsilon < 1$, altrimenti il fatto è ovvio, si ha

$$\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon \iff 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon \iff \varepsilon > \frac{1}{n+1} \iff n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \, .$$

Basta quindi applicare la proprietà di Archimede con $a = 1$ e $b = (1/\varepsilon) - 1$.

3.3 Estremi di funzioni

Mediante la nozione di immagine e controimmagine, si introduce la seguente

Definizione 3.3.1 Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale; allora

i) si dice che la funzione f è *limitata superiormente [[o inferiormente, o limitata]]* se la sua immagine $f(A)$ è un insieme limitato superiormente [[o inferiormente, o limitato]];

ii) si dice che un numero reale ξ è *il massimo [[o minimo, o estremo superiore, o estremo inferiore]] di f* se ξ è il massimo [[o minimo, o estremo superiore, o estremo inferiore]] dell' immagine $f(A)$ di f, e in tal caso si scrive $\xi = \max f$ [[oppure $\min f$, $\sup f$, $\inf f$]];

iii) se f non è limitata superiormente [[o inferiormente]] si scrive $\sup f = +\infty$ [[oppure $\inf f = -\infty$]];

iv) se f ha massimo [[o minimo]], un elemento $x_0 \in A$ si dice *punto di massimo [[o minimo]]* per f se $f(x_0) = \max f$ [[se $f(x_0) = \min f$]].

Osservazione 3.3.2 I punti di massimo o di minimo possono non essere unici.

Questi concetti si possono poi localizzare ad un sottoinsieme non vuoto $B \subset A$ come segue.

Definizione 3.3.3 Si dice che f è *limitata superiormente su B* se l' immagine $f(B)$ di B tramite f è un insieme limitato superiormente; inoltre ξ è *il massimo di f su B* se ξ è il massimo di $f(B)$, e in tal caso si scrive $\xi = \max\limits_B f$; se infine f ha massimo su B, un punto $x_0 \in B$ si dice *punto di massimo per f su B* se $f(x_0) = \max\limits_B f$.

Quindi abbiamo

$$\begin{array}{rcl}
M = \max f & \iff & \begin{cases} \exists\, x_0 \in \operatorname{dom} f : f(x_0) = M \\ \forall\, x \in \operatorname{dom} f, \ f(x) \leq M \end{cases} \\
m = \min f & \iff & \begin{cases} \exists\, x_0 \in \operatorname{dom} f : f(x_0) = m \\ \forall\, x \in \operatorname{dom} f, \ f(x) \geq m \end{cases} \\
L = \sup f \in \mathbb{R} & \iff & \begin{cases} \forall\, x \in \operatorname{dom} f, \ f(x) \leq L \\ \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, x \in \operatorname{dom} f : \ f(x) > L - \varepsilon \end{cases} \\
l = \inf f \in \mathbb{R} & \iff & \begin{cases} \forall\, x \in \operatorname{dom} f, \ f(x) \geq l \\ \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, x \in \operatorname{dom} f : \ f(x) < l + \varepsilon \end{cases} \\
\sup f = +\infty & \iff & \forall\, M \in \mathbb{R}, \ \exists\, x \in \operatorname{dom} f : f(x) \geq M \\
\inf f = -\infty & \iff & \forall\, m \in \mathbb{R}, \ \exists\, x \in \operatorname{dom} f : f(x) \leq m \\
f \quad \text{è limitata} & \iff & \exists\, H, K \in \mathbb{R} : \ \forall\, x \in \operatorname{dom} f, \ H \leq f(x) \leq K \\
& \iff & \exists\, \widetilde{M} > 0 : \ \forall\, x \in \operatorname{dom} f, \ |f(x)| \leq \widetilde{M}
\end{array}$$

e le analoghe proprietà localizzate ad un sottoinsieme non vuoto B di $\operatorname{dom} f$, sostituendo $\operatorname{dom} f$ con B dappertutto (e $M = \max\limits_B f$, etc.).

Una funzione monotona su un intervallo chiuso assume massimo e minimo agli estremi dell'intervallo.

Proposizione 3.3.4 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è debolmente crescente, allora* $\min\limits_{[a,b]} f = f(a)$ *e* $\max\limits_{[a,b]} f = f(b)$*; se f è debolmente decrescente, allora* $\min\limits_{[a,b]} f = f(b)$ *e* $\max\limits_{[a,b]} f = f(a)$.

Vale anche la seguente

Proposizione 3.3.5 *Date due funzioni reali $f, g : A \to \mathbb{R}$ e dato $B \subset A$ non vuoto, allora:*

i) $\sup_B(-f) = -\inf_B f$ *e* $\inf_B(-f) = -\sup_B f$ *;*

ii) $\inf_A f \leq \inf_B f \leq \sup_B f \leq \sup_A f$ *;*

iii) *se $f \leq g$ su B, allora* $\inf_B f \leq \inf_B g$ *e* $\sup_B f \leq \sup_B g$*;*

iv) $\inf f + \inf g \leq \inf(f + g) \leq \inf f + \sup g \leq \sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$
(se f e g sono limitate, e analogamente con $\inf_B$ *e* $\sup_B$ *ovunque).*

3.4 I principi del minimo intero e di induzione

Grazie al teorema di esistenza dell'estremo superiore (e inferiore) si dimostrano due importanti proprietà dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Il *principio del minimo intero* esprime il buon ordinamento dei naturali. Il *principio di induzione* dà senso alle definizioni ricorsive ed è utile nella verifica di proprietà che dipendono dalla scelta di un parametro naturale.

Principio del minimo intero

Proposizione 3.4.1 *Ogni insieme $A \subset \mathbb{N}$ non vuoto ha minimo.*

Dimostrazione: Se $A \subset \mathbb{N}$ è non vuoto, essendo un insieme di reali limitato inferiormente, per la Proposizione 3.2.6 ha estremo inferiore, $\exists\, l = \inf A \in \mathbb{R}$. Dobbiamo allora dimostrare che $l \in A$. Applichiamo la caratterizzazione (3.2) con $\varepsilon = 1/2$. Se per assurdo $l \notin A$, allora esiste $x \in A$ tale che $l < x < l + 1/2$. Ma non essendoci elementi di A compresi tra l ed x, in quanto x dista da l meno di $1/2$, si ottiene che l non è il più grande tra i minoranti di A, il che è impossibile. □

Come conseguenza, si ottiene facilmente l'analoga proprietà sugli interi relativi:

Corollario 3.4.2 *Sia $A \subset \mathbb{Z}$ un insieme non vuoto. Se A è limitato inferiormente, allora ha minimo. Analogamente, se A è limitato superiormente, allora ha massimo.*

Possiamo quindi definire il *successivo* di un numero intero e la *parte intera* di un numero reale:

Definizione 3.4.3 Successivo di un intero $n \in \mathbb{Z}$ è il minimo dell'insieme $A := \{m \in \mathbb{Z} \mid m > n\}$. La parte intera $\lfloor x \rfloor$ di un numero $x \in \mathbb{R}$ è definita come il massimo dell'insieme $B := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

Osservazione 3.4.4 Nell'esempio 3.2.12, se $\varepsilon \in]0, 1[$, il più piccolo n per il quale $n/(n + 1) > 1 - \varepsilon$ è dato da $n_\varepsilon := \lfloor \varepsilon^{-1} - 1 \rfloor + 1$ e quindi dipende da ε. In particolare la funzione $\varepsilon \mapsto n_\varepsilon$ è decrescente.

Principio di induzione

Teorema 3.4.5 *Sia $S \subset \mathbb{N}$ un insieme che verifica:*

1) $0 \in S$

2) per ogni $n \in S$, anche $n + 1 \in S$.

Allora $S = \mathbb{N}$.

Dimostrazione: Se $S \neq \mathbb{N}$, allora l'insieme di numeri naturali $A := \mathbb{N} \setminus S$ è non vuoto. Per il principio del minimo intero A ha minimo: $\exists\, m = \min A$. Dalla 1) sappiamo che $0 \notin A$, quindi $m \in \mathbb{N}^+$ e scriviamo $m = n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$. Poiché $n \notin A$, in quanto $n < m = \min A$, allora $n \in S$. Ma allora, per la 2) si ottiene che $m = n + 1 \in S$. Ma questo è un assurdo, in quanto $m \in A$ e per definizione $A \cap S = \emptyset$. □

Usiamo il principio di induzione per definire il *fattoriale*.

Definizione 3.4.6 La funzione fattoriale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è data da

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = (n+1) \cdot f(n) \quad \text{se } n \geq 0 \end{cases}$$

e si denota $f(n) = n!$. Quindi $0! = 1$ mentre $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Si noti poi che il simbolo ! di fattoriale ha la precedenza sulle altre operazioni: ad esempio $2 \cdot (n!) = 2n! \neq (2n)!$.

Se $\mathcal{P}(n)$ denota un predicato che dipende dal numero naturale n, la validità della proposizione $\mathcal{P}(n)$ per ogni n può essere dimostrata facendo uso della seguente forma equivalente del principio di induzione, ottenuta ponendo $S := \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(n) \text{ è vera }\}$.

Proposizione 3.4.7 *Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato definito per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che verifica le seguenti proprietà:*

1) $\mathcal{P}(0)$ è vero

2) per ogni $n \in \mathbb{N}$, supponendo vero $\mathcal{P}(n)$ risulta vero anche $\mathcal{P}(n+1)$.

Allora $\mathcal{P}(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sommatorie

Il simbolo di *sommatoria* permette di abbreviare le notazioni.

Definizione 3.4.8 Dati i numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$, denotiamo con

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j = \sum_{h=k+1}^{k+n} a_{h-k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

la somma di tali n numeri, dove gli indici i, j, h, k sono muti. Se I è un insieme finito di indici, denotiamo con $\sum_{i \in I} a_i$ la somma di tutti i numeri a_i, dove l'indice i assume tutti i valori compresi nell'insieme I.

Se I, J sono insiemi di indici, e tutti i numeri che compaiono sono numeri reali, allora:

i) se I e J sono disgiunti, $\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{j \in I} a_j$

ii) $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$

iii) $\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$.

Esempio 3.4.9 Dimostriamo per induzione la formula

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{se} \quad q \neq 1 \tag{3.3}$$

sulla somma di una progressione geometrica.

Fissato $q \neq 1$, e detta $\mathcal{P}(n)$ la proposizione $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, verifichiamo che $\mathcal{P}(0)$ è vera, in quanto $1 = \frac{1-q}{1-q}$. Supposta vera $\mathcal{P}(n)$, proviamo allora che vale $\mathcal{P}(n+1)$, i.e. che $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Infatti calcoliamo

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \;,$$

per cui dal principio di induzione segue l'asserto.

Forma equivalente del principio di induzione

Nelle applicazioni risulta utile la seguente forma equivalente del principio di induzione, ottenuta ponendo $\mathcal{P}(n) = \mathcal{Q}(n + n_0)$ nella proposizione 3.4.7:

Proposizione 3.4.10 *Dato $n_0 \in \mathbb{N}$, sia $\mathcal{Q}(n)$ un predicato definito per ogni naturale $n \geq n_0$ e che verifica le seguenti proprietà:*
1) $\mathcal{Q}(n_0)$ è vero
2) $\forall\, n \geq n_0,\ \mathcal{Q}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n+1)$.
Allora $\mathcal{Q}(n)$ è vero per ogni $n \geq n_0$.

Esempio 3.4.11 Dimostriamo la disuguaglianza di Bernoulli

$$\forall\, a \geq -1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow (1+a)^n \geq 1 + na\ . \tag{3.4}$$

Fissato $a \geq -1$, chiamiamo $\mathcal{Q}(n)$ la proposizione $(1+a)^n \geq 1 + na$. Ovviamente $\mathcal{Q}(1)$ è vera, in quanto diventa $1 + a \geq 1 + a$. Proviamo ora che $\mathcal{Q}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Poiché $\mathcal{Q}(n+1)$ si scrive come $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,a$, e $(1+a) \geq 0$ se $a \geq -1$, usando $\mathcal{Q}(n)$ abbiamo che

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)\ ,$$

per cui $Q(n+1)$ è vera in quanto

$$(1+a)(1+na) \geq 1 + (n+1)\,a \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + a + na + na^2 \geq 1 + na + a \quad \Longleftrightarrow \quad na^2 \geq 0\ .$$

3.5 I numeri razionali

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è definito mediante classi di equivalenza di frazioni, cf. l'esempio 2.4.3. Si dimostra che l'insieme dei numeri reali che hanno rappresentazione decimale periodica coincide con $\mathbb{Q}$.

Osservazione 3.5.1 Si noti però che, ad esempio, $0,\overline{9} = 1$.

Inoltre, l'esistenza del successivo, che vale sugli interi relativi, cf. la definizione 3.4.3, non vale sui razionali, in quanto dipende dal principio del minimo intero, anch'esso falso in $\mathbb{Q}$.

La proprietà di Dedekind non vale sui razionali

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali non verifica la proprietà di Dedekind. Infatti, esistono sottinsiemi $A, B \subset \mathbb{Q}$ che verificano (3.1) ma che non hanno elemento separatore in $\mathbb{Q}$, i.e. per i quali

$$\nexists\, c \in \mathbb{Q} :\ \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a \leq c \leq b\ . \tag{3.5}$$

Presi infatti A e B come nell'esempio 3.1.2, se esistesse un elemento separatore c in $\mathbb{Q}$, allora $c \in A$ **o** $c \in B$. In entrambi i casi otteniamo un assurdo.

Supposto $c \in A$, si ha $c > 0$ e $c^2 < 2$, in quanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Mostriamo che

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^+ \ :\ (c + 1/n)^2 < 2\,. \tag{3.6}$$

Questo dà l'assurdo, in quanto $a := c + 1/n \in \mathbb{Q}$ e $a^2 \leq 2$, quindi $a \in A$, ma $a > c$, per cui c non sarebbe elemento separatore di A e B. Quindi $c \notin A$.

Per provare la (3.6), osserviamo che $(c+1/n)^2 < 2 \iff c^2 + 1/n^2 + 2c/n < 2$, disequazione verificata se $c^2 + 1/n + 2c/n < 2$, in quanto $1/n^2 < 1/n$. Ora, risulta $c^2 + 1/n + 2c/n < 2 \iff 2 - c^2 > (1+2c)/n$, che essendo $2 - c^2 > 0$ e $1 + 2c > 0$ è equivalente alla disequazione $n > (1+2c)/(2-c^2)$. In conclusione, (3.6) segue applicando la proprietà di Archimede con $a = 1$ e $b = (1+2c)/(2-c^2)$.

Analogamente, supposto $c \in B$ si ottiene un assurdo mostrando che:

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^+ \ :\ (c - 1/n)^2 > 2\,. \tag{3.7}$$

Per provare la (3.7), osserviamo che $(c-1/n)^2 > 2 \iff c^2 + 1/n^2 - 2c/n > 2$, disequazione verificata se $c^2 - 1/n - 2c/n > 2$, in quanto $1/n^2 > -1/n$. Ora, risulta $c^2 - 1/n - 2c/n > 2 \iff c^2 - 2 > (2c+1)/n$, che essendo $c^2 - 2 > 0$ e $2c + 1 > 0$, in quanto $c \in B$, è equivalente alla disequazione $n > (2c+1)/(c^2-2)$. Quindi, (3.7) segue applicando la proprietà di Archimede questa volta con $a = 1$ e $b = (2c+1)/(c^2-2)$.

Osservazione 3.5.2 La non esistenza di un elemento separatore razionale si verifica in maniera analoga in prossimità di tutti i punti della retta reale. Questo corrisponde al fatto che l'insieme dei razionali è "bucherellato" e che i buchi vengono riempiti dai numeri reali, grazie all'assioma di Dedekind.

Densità dei razionali

Anche se l'insieme $\mathbb{Q}$ è "bucherellato", vicino ad ogni reale si trova sempre un razionale. Questa proprietà, detta di densità, permette di approssimare i numeri irrazionali con razionali (ad es., $\sqrt{2} \simeq 1.4142$).

Definizione 3.5.3 Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *denso in* $\mathbb{R}$ se ogni intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene almeno un punto di A.

Proposizione 3.5.4 *$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione: Se $I' \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto non limitato, esso contiene sempre un intervallo aperto limitato $I =]\alpha, \beta[$, con $\alpha < \beta$ reali. Quindi è sufficente mostrare che

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,:\, \alpha < \beta\,, \quad \exists\, q \in \mathbb{Q} \,:\, \alpha < q < \beta\,.$$

Poiché $\mathbb{Q}$ non è limitato inferiormente, il numero α non è minorante di $\mathbb{Q}$, quindi esiste $q_0 \in \mathbb{Q}$ tale che $q_0 < \alpha$. Sia $d := \beta - \alpha > 0$ e per la proprietà di Archimede scegliamo un numero $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che $n_0 > 1/d$, i.e. $1/n_0 < d$. Posto $A := \{n \in \mathbb{N} \mid q_0 + n/n_0 > \alpha\}$, l'insieme $A \subset \mathbb{N}$ è non vuoto, perchè per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > (\alpha - q_0)\, n_0$. Quindi, per il principio del minimo intero, proposizione 3.4.1, esiste $m := \min A$. Posto $q := q_0 + m/n_0 \in \mathbb{Q}$, risulta $q > \alpha$ in quanto $m \in A$. Poiché inoltre $q_0 < \alpha$, allora $m \in \mathbb{N}^+$, quindi il numero naturale $m - 1 \in \mathbb{N} \setminus A$, essendo $m = \min A$, i.e. $q_0 + (m-1)/n_0 \leq \alpha$. Ma allora $q = q_0 + (m-1)/n_0 + 1/n_0 \leq \alpha + 1/n_0 < \alpha + d = \beta$, ed in definitiva $\alpha < q < \beta$. □

3.6 Calcolo combinatorio e probabilità finita

Calcolo combinatorio

Definizione 3.6.1 Dati n oggetti distinti, disposti in fila in un certo ordine, ogni altro modo di metterli in fila si chiama *permutazione* della disposizione di partenza. Se indichiamo con P_n il numero di permutazioni di n oggetti, allora risulta $P_1 = 1$. Inoltre, presi $n+1$ oggetti da mettere in fila, possiamo scegliere (in $n+1$ modi diversi) il primo oggetto e poi, per ognuno di questi casi, sistemare gli altri n oggetti in P_n modi. Quindi $P_{n+1} = (n+1)\, P_n$ da cui segue che

$$P_n = n! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^+\,.$$

Definizione 3.6.2 Le *disposizioni di n oggetti presi a k per volta*, dove $1 \leq k \leq n$, sono i modi distinti in cui possiamo mettere in fila k oggetti scelti tra un gruppo di n. Il loro numero si denota con $D_{n,k}$ ed è dato da

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)\,.$$

Infatti, possiamo mettere in fila gli n oggetti (in P_n modi diversi) e scartare gli ultimi $n-k$. Inoltre, ad ogni disposizione dei primi k oggetti ottenuta corrispondono P_{n-k} modi diversi di disporre gli ultimi $n-k$, per cui

$$n! = P_n = D_{n,k} \cdot P_{n-k} = D_{n-k} \cdot (n-k)!$$

Osservazione 3.6.3 Ricordiamo il simbolo di *produttoria*: dati i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{1 \leq j \leq n} a_j = \prod_{h=k+1}^{k+n} a_{h-k} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ risulta $n! = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} i$, allora si ottiene $D_{n,k} = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \in \mathbb{N}\,.$

Definizione 3.6.4 Le *combinazioni di n oggetti presi a k per volta*, dove $1 \leq k \leq n$, sono i modi distinti in cui possiamo scegliere (senza badare all'ordine) k oggetti tra un gruppo di n. Il loro numero si denota con $C_{n,k}$ ed è dato da

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k}\,.$$

Infatti, presa una combinazione di k oggetti tra n, facendo permutare gli oggetti in P_k modi si ottengono le corrispondenti disposizioni, per cui $C_{n,k} \cdot P_k = D_{n,k}$, da cui segue la formula. Si noti che $C_{n,k} \in \mathbb{N}^+$.

Coefficienti binomiali

Le combinazioni si denotano anche usando i *coefficienti binomiali*, definiti per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$ da

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = 0 \\ C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{se} \quad 1 \le k \le n \\ 0 & \text{se} \quad k > n \text{ oppure } k < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Proposizione 3.6.5 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:*

i) $\binom{n}{0} = 1$ *e* $\binom{n}{n} = 1$

ii) $\forall\, k,\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

iii) $\forall\, k,\ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Dimostrazione: Proviamo la terza per $1 \le k \le n$, gli altri casi essendo immediati. Si ha

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!}{k\,(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)(n-k)!} \\ &= \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right) \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n+1}{k(n+1-k)} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

□

Il nome di coefficienti binomiali deriva dalla formula seguente, in cui si pone per convenzione $0^0 = 1$ per trattare direttamente i casi banali in cui $ab = 0$ o $a + b = 0$.

Proposizione 3.6.6 (Formula del binomio di Newton). *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\,. \tag{3.9}$$

Dimostrazione: Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $ab \neq 0$ **e** $a + b \neq 0$, denotiamo $\mathcal{P}(n)$ il predicato (3.9) e usiamo il principio di induzione. Poiché $\mathcal{P}(0)$ è ovviamente vera, per ogni $n \in \mathbb{N}$, supposto $\mathcal{P}(n)$ vera proviamo che $\mathcal{P}(n+1)$ è vera. Quindi usiamo la formula (3.9) per provare che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\,. \tag{3.10}$$

Usando la proprietà distributiva e (3.9), riscritta con h al posto di k, si ha

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^{n-h} b^h \\ &= \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^{n+1-h} b^h + \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^{n-h} b^{h+1} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h} a^{n+1-h} b^h + \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n}{h} a^{n-h} b^{h+1} + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo messo in evidenza il primo addendo della prima sommatoria e l'ultimo della seconda. Osserviamo che $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ e $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Inoltre, sostituiamo $k = h$ nella prima sommatoria e $k = h + 1$ nella seconda. Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} .\end{aligned}$$

Poiché per la proprietà iii) precedente $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, la formula (3.10) segue facilmente. □

Osservazione 3.6.7 La proprietà iii) permette di costruire il triangolo di Tartaglia con il quale si ricavano i coefficienti della potenza $(n+1)$-esima sapendo i coefficienti della potenza n-esima di un binomio. Notiamo inoltre che applicando (3.9) con $a = b = 1$ si ottiene che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^+ .$$

Disposizioni e combinazioni con ripetizioni

Dati $n, k \in \mathbb{N}^+$, le disposizioni con ripetizione $D^r_{n,k}$ di k oggetti scelti tra n sono ovviamente n^k.

Invece, per calcolare le combinazioni con ripetizione, partiamo dall'esempio di n scatole numerate in fila in cui collochiamo k oggetti uguali tra loro. Messi $n + 1$ paletti a separare le n scatole, dobbiamo mettere i k oggetti all'interno dei paletti. Quindi contiamo le posizioni di k oggetti indistinguibili in una stringa di $(n-1)+k$ entrate. Le combinazioni con ripetizione $C^r_{n,k}$ di k oggetti scelti tra n sono dunque uguali alle combinazioni di k oggetti scelti tra $n-1+k$, i.e. $C^r_{n,k} = \binom{n-1+k}{k} \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}^+$.

Probabilità finita

Nella *probabilità finita* si contempla il caso di eventi che variano in un *insieme finito di possibilità*, che assumeremo *tutte equiprobabili*. In tal caso definiremo la probabilità che un fatto accada come il rapporto

$$p = \frac{\text{numero di eventi favorevoli}}{\text{numero di eventi possibili}} .$$

Esempio 3.6.8 Calcoliamo la somma più probabile ottenuta lanciando due dadi a sei facce. Abbiamo $6^2 = 36$ eventi possibili, suddivisi nelle possibili somme da 2 a 12. Si verifica che alle somme 2 e 12 corrisponde un solo evento favorevole, alle somme 3 e 11 ne corrispondono 2, alle somme 4 e 10 ne corrispondono 3, alle somme 5 e 9 ne corrispondono 4, alle somme 6 e 8 ne corrispondono 5 e, infine, alla somma 7 ne corrispondono 6. Le corrispondenti probabilità sono rispettivamente 1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36 e infine 1/6 per la somma 7. Quindi è più probabile ottenere somma 7.

Esempio 3.6.9 Data una tavola rotonda con $n \geq 3$ posti, su cui n persone si siedono a caso, qual è la probabilità $p = p(n)$ che Tizio e Caio si siedano in due posti affiancati?

Conviene fissare il posto in cui è seduto Tizio. A questo punto le altre $n-1$ persone si possono sedere in $P_{n-1} = (n-1)!$ modi, il numero di eventi possibili. Tra questi, gli eventi favorevoli sono dati da quelli in cui Caio è a destra o a sinistra di Tizio, ad ognuno dei quali corrispondono P_{n-2} modi in cui si siedono le restanti $n-2$ persone. Quindi gli eventi favorevoli sono $2\,(n-2)!$ e la probabilità richesta è

$$p = p(n) = \frac{2\,(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1} .$$

Si noti che $p(3) = 1$ e che $p(n)$ è decrescente (i.e. decresce al crescere di n).

La *probabilità condizionata* di un evento A, sapendo che sia certo un evento B, è definita da

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} , \qquad \mathbb{P}(B) > 0 .$$

Esempio 3.6.10 Un'urna contiene 3 palline bianche e 5 rosse (numerate). Estraendo due palline a caso, calcoliamo:

i) la probabilità che siano entrambe rosse;

ii) probabilità che siano entrambe rosse, sapendo che almeno una è rossa.

L'insieme degli eventi possibili Ω ha cardinalità $\#\Omega = C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$ e detto A l'evento "entrambe le palline estratte sono rosse", abbiamo

$$\#A = C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10\,, \quad \mathbb{P}(A) = \#A/\#\Omega = 10/28 = 5/14\,.$$

Nel secondo caso, denotiamo con B l'evento "almeno una delle due palline estratte è rossa", per cui

$$\#B = C_{5,2} + C_{5,1}C_{3,1} = 10 + 5\cdot 3 = 25\,, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{25}{28}\,.$$

Pertanto, essendo $A\cap B = A$, calcoliamo la probabilità condizionata

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{10/28}{25/28} = \frac{2}{5}\,.$$

Si noti che diversa cosa è dire che, avendo già estratto una pallina rossa, nell'urna ci sono 7 palline di cui 3 bianche e 4 rosse, estraendone una delle quali la probabilità che sia rossa è 4/7.

Per *eventi indipendenti*, la probabilità si calcola mediante il *prodotto* delle probabilità dei singoli eventi. Infatti, se la conoscenza che si è verificato B non cambia la probabilità che si verifichi A, allora si deve avere $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Quindi, supposto ancora $\mathbb{P}(B) > 0$, se A e B sono indipendenti risulta

$$\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\,.$$

Esempio 3.6.11 In una gara di lancio di una moneta, vince il primo tra Tizio e Caio che arriva a quota 5 "testa" o cinque "croce", rispettivamente. Dopo sei lanci, Tizio è a 4 punti e Caio a 2 punti. Qual è la probabilità che vinca Caio?

Al settimo lancio, Caio ha probabilità 1/2 andare sul punteggio di 4 a 3 per Tizio. Nel caso a lui favorevole, all'ottavo lancio Caio ha probabilità 1/2 di pareggiare 4 a 4. Nel caso a lui favorevole, all'ottavo lancio ha ancora probabilità 1/2 di vincere per 5 a 4. In definitiva, dopo i primi sei lanci Caio ha probabilità $(1/2)^3 = 1/8$ di vincere, mentre Tizio ha probabilità di vittoria $1 - 1/8 = 7/8$.

3.7 I numeri complessi

Sono introdotti per risolvere equazioni polinomiali che non hanno soluzioni reali, come le equazioni di secondo grado con discriminante negativo, tipo $x^2 + 1 = 0$.

Forma algebrica

Definizione 3.7.1 L'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è dato da tutti i numeri della forma $a + \mathbf{i}b$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{i}$ è l'*unità immaginaria*, che verifica la proprietà

$$\mathbf{i}^2 = -1\ .$$

Per ogni numero complesso $z = a + \mathbf{i}b$ definiamo la *parte reale* e la *parte immaginaria*

$$\Re(a+\mathbf{i}b) = a \in \mathbb{R}\ , \qquad \Im(a+\mathbf{i}b) = b \in \mathbb{R}\ .$$

Quindi $z \in \mathbb{C}$ è un numero reale se e solo se $\Im z = 0$, mentre $z = 0$ se e solo se $\Re z = 0$ e $\Im z = 0$. Inoltre $a + \mathbf{i}b = c + \mathbf{i}d$ se e solo se $a = c$ e $b = d$.

Sui numeri complessi si *estendono* le operazioni di addizione e moltiplicazione in $\mathbb{R}$ come segue:

$$\begin{aligned}&(a+\mathbf{i}b) + (c+\mathbf{i}d) = (a+c) + \mathbf{i}(b+d)\\ &(a+b\mathbf{i})\cdot(c+d\mathbf{i}) = ac + \mathbf{i}ad + \mathbf{i}bc + \mathbf{i}^2bd = (ac-bd) + \mathbf{i}(ad+bc)\ .\end{aligned}$$

Sui numeri complessi valgono quindi le proprietà algebriche i)–ix) dei numeri reali, dove gli elementi neutri della addizione e moltiplicazione sono sempre 0 e 1. In particolare, il *reciproco* di un numero $a + \mathbf{i}b \neq 0$ è dato dalla formula

$$\frac{1}{a+\mathbf{i}b} = \frac{a}{a^2+b^2} + \mathbf{i}\frac{-b}{a^2+b^2}\,, \qquad a^2+b^2 > 0\,.$$

Osservazione 3.7.2 Nell'insieme $\mathbb{C}$ non è possibile definire una relazione d'ordine totale per la quale valgano ancora le proprietà algebriche x) e xi) dei numeri reali.

Coniugato, modulo e reciproco

Definizione 3.7.3 Si dice *coniugato* del numero $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$ il numero complesso

$$\bar{z} = \Re z - \mathbf{i}\Im z = a - \mathbf{i}b\,.$$

Valgono quindi le seguenti proprietà di facile verifica, dove $z, w \in \mathbb{C}$:

i) $\Re(z+w) = \Re z + \Re w$, $\Im(z+w) = \Im z + \Im w$

ii) $\Re\bar{z} = \Re z\,, \quad \Im\bar{z} = -\Im z$

iii) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}\,, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

iv) $\bar{\bar{z}} = z\,, \quad z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$

v) $\Re z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}\,, \quad \Im z = \dfrac{z-\bar{z}}{2\mathbf{i}} = -\dfrac{\mathbf{i}}{2}(z-\bar{z})$.

Definizione 3.7.4 Si dice *modulo* del numero complesso $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$ il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Quindi $z \mapsto |z|$ è una funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$, con $|z| \geq 0$ sempre e $|z| = 0 \iff z = 0$. Si noti che se $z \in \mathbb{C}$ è reale, allora $\Im z = 0$ e quindi il modulo di z coincide con il valore assoluto del numero reale z.

Valgono le seguenti proprietà:

Proposizione 3.7.5 *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha:*

i) $|z| = |\bar{z}|$

ii) $|\Re z| \leq |z|$

iii) $|\Im z| \leq |z|$

iv) $z\bar{z} = |z|^2$

v) $|zw| = |z||w|$

vi) $|z+w| \leq |z| + |w|$ *(diseguaglianza triangolare)*

vii) $|z| \leq |\Re z| + |\Im z|$.

Dimostrazione: Le prime quattro sono di facile verifica. La quinta segue osservando che $|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$. Proviamo la diseguaglianza triangolare vi) da cui segue facilmente la vii) osservando che

$$|z| = |\Re z + \mathbf{i}\Im z| \leq |\Re z| + |\mathbf{i}\Im z| = |\Re z| + |\mathbf{i}| \cdot |\Im z| = |\Re z| + |\Im z|\,.$$

La vi) è equivalente a $|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, essendo ambo i membri numeri reali non negativi. Poiché per la iv) ha

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + w\overline{z}\,,$$

mentre $(|z|+|w|)^2 = |z|^2+|w|^2+2|z||w|$, allora la vi) è equivalente a

$$|z|^2+|w|^2+z\overline{w}+w\overline{z} \le |z|^2+|w|^2+2|z||w| \iff z\overline{w}+\overline{z}w \le 2|z||w|\,.$$

Osserviamo ora che il numero complesso $z\overline{w}$ ha coniugato $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}\,\overline{\overline{w}} = \overline{z}w$, quindi ha doppio della parte reale $2\Re(z\overline{w}) = z\overline{w}+\overline{z}w$, mentre il suo modulo è $|z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|$, quindi l'ultima diseguaglianza scritta sopra è equivalente a $2\Re(z\overline{w}) \le 2|z\overline{w}|$, che per la ii) è vera in quanto $\Re(z\overline{w}) \le |\Re(z\overline{w})| \le |z\overline{w}|$. $\square$

Dalla proprietà iv) si ottiene poi un importante risultato sul quoziente di numeri complessi.

Corollario: per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si ha $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, di conseguenza per ogni $w \in \mathbb{C}$ risulta anche $\dfrac{w}{z} = \dfrac{w\,\overline{z}}{|z|^2}$.

Piano di Gauss e forma trigonometrica

I numeri complessi si rappresentano nel *piano di Gauss* associando al numero $z = a+\mathbf{i}b$, dove $a,b \in \mathbb{R}$, il punto di coordinate $(a,b) = (\Re z, \Im z)$. L'asse delle ascisse, di equazione $\Im z = 0$, corrisponde ai numeri reali, mentre l'asse delle ordinate, di equazione $\Re z = 0$, corrisponde ai numeri con parte reale nulla (detti immaginari puri). Vengono quindi detti *asse reale* e *asse immaginario.* Il modulo $|z|$ è la distanza del punto z dall'origine, mentre la distanza tra i punti del piano z e w è data dal modulo della differenza: $\mathrm{dist}(z,w) = |z-w|$. Inoltre, la somma tra complessi corrisponde alla somma tra vettori e la disuguaglianza triangolare dimostra una nota proprietà dei triangoli.

Definizione 3.7.6 Chiamiamo *argomento* $\arg z$ di un numero complesso $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ la misura in radianti dell'angolo che la semiretta uscente da 0 e passante per z forma con il semiasse positivo reale.

Quindi se z è diverso da 0 si può scrivere $z = |z|\big(\cos(\arg z)+\mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\arg z)\big)$.

Definizione 3.7.7 Si chiama *forma trigonometrica* di un numero complesso $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ la scrittura

$$z = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)\ ,$$

dove $\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

In tal caso allora ρ è il modulo di z e θ è argomento di z. Quindi se $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si scrive (in forma algebrica) come $z = a+\mathbf{i}b$, per passare alla forma trigonometrica si risolve

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\Re z}{|z|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{\Im z}{|z|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ . \end{cases}$$

In particolare se $a = \Re z \neq 0$ allora $\tan\theta = \dfrac{\Im z}{\Re z} = \dfrac{b}{a}$. Se $\theta = \arg z$, allora ogni numero del tipo $\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, è ancora un argomento di z. Definiamo quindi l'*argomento minimo* di z come

$$\theta = \arg\min z \iff [\theta = \arg z \quad \mathbf{e} \quad 0 \le \theta < 2\pi]\ .$$

Operazioni in forma trigonometrica

Proposizione 3.7.8 *Se $z \neq 0$ si scrive nella forma $z = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$, allora*

$$\overline{z} = \rho\big(\cos(-\theta)+\mathbf{i}\,\mathrm{sen}(-\theta)\big) \qquad e \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\big(\cos(-\theta)+\mathbf{i}\,\mathrm{sen}(-\theta)\big)\ .$$

Dimostrazione: Infatti $\overline{z} = \rho(\cos\theta - \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta) = \rho(\cos(-\theta)+\mathbf{i}\,\mathrm{sen}(-\theta))$, mentre $z^{-1} = |z|^{-2}\overline{z}$, da cui otteniamo $|z^{-1}| = |z|^{-2}|\overline{z}| = |z|^{-1}$ e dunque la seconda formula. $\square$

Proposizione 3.7.9 *Se $z,w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si scrivono in forma trigonometrica come*

$$z = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)\ , \qquad w = R(\cos\phi + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

allora il loro prodotto si scrive

$$zw = (\rho\, R)\big(\cos(\theta+\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\theta+\phi)\big)$$

il quoziente

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{R}\big(\cos(\theta-\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\theta-\phi)\big)$$

e la potenza n-esima di z come

$$z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\theta)\big)\ , \qquad n \in \mathbb{N}\ .$$

Dimostrazione: La formula del prodotto segue dalle formule di duplicazione di seno e coseno:

$$\begin{aligned} zw &= \rho\, R\,(\cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\phi + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi) \\ &= \rho\, R\,[(\cos\theta\cos\phi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) + \mathbf{i}(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi)] \\ &= \rho\, R\,[\cos(\theta+\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\theta+\phi)]\,. \end{aligned}$$

La formula del quoziente si ottiene da quella del prodotto scrivendo $z/w = z\,w^{-1}$ e ricordando che $w^{-1} = R^{-1}(\cos(-\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(-\phi))$.

La formula della potenza n-esima è ovvia per $n = 0, 1$, mentre per $n = 2$ segue applicando la formula del prodotto con $w = z$. Assumendo poi che vale per un grado $n \in \mathbb{N}$ e scrivendo $z^{n+1} = z^n z$, si ottiene facilmente che vale anche per $n+1$. Quindi, per il principio di induzione vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Osservazione 3.7.10 Se in particolare w ha modulo $R = 1$, allora il prodotto wz sta sulla circonferenza di centro l'origine cui appartiene z, e si ottiene ruotando z di un angolo di $\phi = \arg w$ radianti. Ad esempio, $\mathbf{i}z$ si ottiene ruotando z di un quarto dell'angolo giro in verso antiorario. Quindi in generale wz si scrive a partire da z mediante una rotazione di $\phi = \arg w$ seguita da un'omotetia di ragione $R = |w|$.

Radici complesse

Definizione 3.7.11 Se $n \in \mathbb{N}^+$ e $z \in \mathbb{C}$, un numero complesso w è radice n-esima di z se $w^n = z$.

Dalla formula della potenza n-esima otteniamo quindi il seguente

Teorema 3.7.12 *Per ciascun valore di $n \in \mathbb{N}^+$ ogni numero complesso z diverso da zero ha esattamente n radici n-esime distinte. Inoltre, in forma trigonometrica, se $z = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$, le radici n-esime di z sono i numeri complessi $w_k = R(\cos\phi_k + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_k)$ di modulo $R = \rho^{1/n}$ e argomento*

$$\phi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{k\cdot 2\pi}{n}\ , \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\ .$$

Dimostrazione: Sia $w = R(\cos\phi + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)$. Se $w^n = z$, allora $R^n = |w|^n = |w^n| = |z| = \rho$, quindi $R = \rho^{1/n}$. Inoltre dalla formula della potenza n-esima $w^n = R^n(\cos(n\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\phi))$ per cui, essendo $R^n = \rho$, si ha

$$w^n = z \iff R^n(\cos(n\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\phi)) = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta) \iff \cos(n\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\phi) = \cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria, ne segue che l'argomento ϕ deve essere soluzione del sistema

$$\begin{cases} \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \mathrm{sen}(n\phi) = \mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

che è risolto da $\phi_k = \theta/n + k\cdot 2\pi/n$ per ogni valore di $k \in \mathbb{Z}$. Dalla periodicità delle funzioni seno e coseno concludiamo che i valori di k per i quali si ottengono distinti numeri complessi $\cos\phi_k + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_k$ sono esattamente n, dati ad esempio da $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. □

Osservazione 3.7.13 Si noti quanto segue:

i) se $n = 2$ le due radici quadrate sono l'una l'opposta dell'altra;

ii) se $n = 2m$ è pari, trovate le prime m radici $w_0, \ldots, w_{m-1}$, le altre m sono le opposte di queste, i.e. $w_{k+m} = -w_k$ per $k = 0, \ldots, m-1$;

iii) se z è reale positivo la prima radice n-esima è la radice n-esima reale;

iv) le radici n-esime di z stanno sui vertici di un n-agono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $|z|^{1/n}$;

v) uno dei vertici si trova dividendo in n parti l'angolo θ che corrisponde all'argomento di z.

Equazioni complesse

Grazie all'esistenza delle radici quadrate complesse, possiamo risolvere le equazioni di secondo grado. Come nel campo reale, dati $a, b, c \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, e denotato con $\Delta := b^2 - 4ac$ il discriminante, scriviamo

$$az^2 + bz + c = a\Big(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\Big) = a\Big(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a^2}\Big) = a\Big[\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big].$$

Quindi un numero $z \in \mathbb{C}$ risolve l'equazione $az^2 + bz + c = 0$ se e solo se il numero $w = z + b/2a$ è una radice quadrata complessa del numero $\Delta/4a^2$. Si vede facilmente che le due radici quadrate di $\Delta/4a^2$ sono $\pm\sqrt{\Delta}/2a$, dove abbiamo indicato con $\sqrt{\Delta}$ una delle due radici quadrate in $\mathbb{C}$ del discriminante Δ.

In conclusione l'equazione $az^2 + bz + c = 0$, dove $a \neq 0$, ha due soluzioni complesse date da

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \Delta := b^2 - 4ac.$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Come conseguenza, si deduce che l'insieme dei numeri complessi è algebricamente chiuso:

Teorema 3.7.14 *Sia $P_n(z)$ un polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$ a coefficienti complessi. Allora l'equazione $P_n(z) = 0$ ha esattamente n soluzioni complesse (contate con la loro molteplicità).*

Corollario 3.7.15 *Sia $P_n(z)$ un polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$ a coefficienti reali. Se un numero $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione $P_n(z) = 0$, allora anche il coniugato $\overline{z}$ è soluzione dell'equazione $P_n(z) = 0$ (con la stessa molteplicità di z).*

Dimostrazione: Osserviamo che se $P_n(z)$ ha coefficienti reali, allora il suo coniugato è $\overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z})$. Quindi, $P_n(z) = 0 \iff P_n(\overline{z}) = 0$, da cui segue l'asserto. □

Forma esponenziale

Osservazione 3.7.16 L'esponenziale complesso $z \mapsto \mathsf{e}^z$ è una funzione con dominio e codominio $\mathbb{C}$ definita in modo tale che per ogni $b \in \mathbb{R}$ risulta $\mathsf{e}^{\mathbf{i}b} = \cos b + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\, b$, cf. l'osservazione 6.7.11. Inoltre valgono le proprietà delle potenze, nel senso che $\mathsf{e}^z = \mathsf{e}^{\Re z + \mathbf{i}\Im z} = \mathsf{e}^{\Re z}\mathsf{e}^{\mathbf{i}\Im z}$ ed anche $\mathsf{e}^z\mathsf{e}^w = \mathsf{e}^{z+w}$.

Quindi un numero complesso z di modulo ρ e argomento θ si scrive in *forma esponenziale* come $z = \rho\,\mathsf{e}^{\mathbf{i}\theta}$. Dalle formule note si ottiene dunque, in coerenza con le proprietà delle potenze: $\overline{z} = \rho\,\mathsf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$, $z^{-1} = \rho^{-1}\,\mathsf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$, $z^n = \rho^n\,\mathsf{e}^{\mathbf{i}n\theta}$ ed infine, se $w = R\,\mathsf{e}^{\mathbf{i}\phi}$, allora $zw = \rho\, R\,\mathsf{e}^{\mathbf{i}(\theta+\phi)}$. Poiché ad esempio -1 ha modulo 1 e argomento π, si ottiene la famosa equazione di Eulero $\mathsf{e}^{\mathbf{i}\pi} + 1 = 0$, che comprende i cinque numeri più importanti dell'analisi matematica.

Esempio 3.7.17 Un'onda elettromagnetica piana agisce su un conduttore elettrico rettilineo e si propaga nella direzione delle x. Dalle dalle equazioni di Maxwell si deduce che il campo elettrico e il magnetico sono ortogonali fra loro. L'onda è dunque descritta dalla funzione complessa $\phi(x,t) = \phi(x)\,\mathsf{e}^{\mathbf{i}\omega t}$, dove $\omega > 0$ è la frequenza angolare dell'onda e $\phi(x) = A\,\mathsf{e}^{\mathbf{i}\alpha x}$, dove $A > 0$ ed il numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$ dipende dalla conducibilità elettrica σ, dalla permeabilità elettrica ε e dalla permeabilità magnetica μ tramite la formula $\alpha^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \mathbf{i}\omega\delta\mu$, con $\Re\alpha > 0$ e $\Im\alpha > 0$. Abbiamo $\mathsf{e}^{\mathbf{i}\alpha x} = \mathsf{e}^{\mathbf{i}(\Re\alpha)x}\mathsf{e}^{-(\Im\alpha)\,x}$, per cui possiamo scrivere

$$\phi(x,t) = A\,\mathsf{e}^{-(\Im\alpha)\,x}\,\mathsf{e}^{\mathbf{i}[(\Re\alpha)x+\omega t]} = A\,\mathsf{e}^{-(\Im\alpha)\,x}\,\big(\cos((\Re\alpha)x + \omega t) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}((\Re\alpha)x + \omega t)\big).$$

Quindi l'onda elettromagnetica si trasferisce lungo il conduttore come una oscillazione smorzata, con uno sfasamento tra parte reale (campo elettrico) e immaginaria (campo magnetico).

4 Successioni

4.1 Successioni, monotonia, estremi

Chiamiamo *semiretta di naturali* ogni insieme del tipo

$$S := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}, \qquad n_0 \in \mathbb{N}.$$

Definizione 4.1.1 Si dice *successione* una qualsiasi applicazione (o funzione) definita su una semiretta S di $\mathbb{N}$; se il suo codominio è un insieme A, si parla di successione di elementi di A (o a valori in A). Per una successione $f : S \to A$ si usa poi la notazione $\{a_n\}_n$, dove $a_n \in A$ è dato dalla legge $n \mapsto f(n) = a_n$.

Esempio 4.1.2 La funzione fattoriale $n \mapsto n!$, cf. definizione 3.4.6, è un esempio di successione di naturali. Le applicazioni $n \mapsto n^2$ e $n \mapsto (-1)^n$ sono successioni di naturali e interi relativi. Le applicazioni $n \mapsto \sqrt{n^2 - 9}$ e $n \mapsto 1/(n-3)$ sono successioni di reali non negativi, definite nelle semiretta di naturali con punto iniziale $n_0 = 3, 4$, rispettivamente. Analogamente, per ogni ragione q, l'applicazione $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} q^k$ definisce la successione che associa ad ogni naturale la somma delle potenze di q con esponente intero da zero ad n, o somma geometrica di ragione q (detta, come vedremo, somma parziale n-esima di q^k). Invece, l'applicazione $n \mapsto (1 + (-1)^n)^{-1}$ non è una successione, in quanto $1 + (-1)^n$ vale zero per ogni n dispari.

Osservazione 4.1.3 Se non è specificato altrimenti, in generale tratteremo per semplicità *successioni di numeri reali definite su tutto* $\mathbb{N}$. Quindi scrivendo ad esempio "per ogni n", si sottintende $n \in \mathbb{N}$.

Successioni monotone

Posto dunque $a_n = f(n)$, la successione $\{a_n\}_n$ è ad esempio crescente se per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, con $n < m$, risulta $a_n \leq a_m$. Vediamo come grazie al principio del minimo intero si può caratterizzare la monotonia di successioni confrontando solo termini consecutivi.

Proposizione 4.1.4 *Una successione* $\{a_n\}_n$ *di numeri reali risulta:*

i) *crescente se e solo se* $\forall\, n$, $a_n \leq a_{n+1}$

ii) *strettamente crescente se e solo se* $\forall\, n$, $a_n < a_{n+1}$

iii) *decrescente se e solo se* $\forall\, n$, $a_n \geq a_{n+1}$

iv) *strettamente decrescente se e solo se* $\forall\, n$, $a_n > a_{n+1}$.

Dimostrazione: Proviamo la prima caratterizzazione, le altre essendo di analoga verifica. Poiché l'implicazione "$\Rightarrow$" è ovvia, basta dimostrare che se $\forall\, n$, $a_n \leq a_{n+1}$, allora la successione è debolmente crescente, i.e. per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, con $n < m$, risulta $a_n \leq a_m$.

Supponiamo per assurdo che la successione non sia debolmente crescente: allora esistono $\overline{n}, \overline{m} \in \mathbb{N}$ tali che $\overline{n} < \overline{m}$ **e** $a_{\overline{n}} > a_{\overline{m}}$. Poniano $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m > \overline{n}$ **e** $a_m < a_{\overline{n}}\}$. Poiché $\overline{m} \in A$, allora A è un insieme non vuoto di naturali. Per la proposizione 3.4.1, esso ha minimo: $\exists\, k = \min A$. Non può essere $k = \overline{n} + 1$, perchè per ipotesi sappiamo che $a_{\overline{n}+1} \geq a_{\overline{n}}$. Quindi $k > \overline{n} + 1$ e posto $k = h + 1$, allora $h = k - 1 \in \mathbb{N}$ e $h > \overline{n}$. Ma poiché $a_k < a_{\overline{n}}$, in quanto $k \in A$, abbiamo per l'ipotesi:

$$a_h \leq a_{h+1} = a_k < a_{\overline{n}} \quad \Rightarrow \quad a_h < a_{\overline{n}}$$

e dunque anche $h \in A$, il che è assurdo in quanto $h < k = \min A$. □

Esempio 4.1.5 Verifichiamo l'eventuale tipo di monotonia delle successioni dell'esempio precedente.

La successione fattoriale $a_n = n!$ è debolmente crescente, in quanto $a_0 = a_1$, mentre essendo sempre $a_n > 0$, allora $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n > a_n$ per ogni n.

La successione $a_n = n^2$ è strettamente crescente in quanto $\forall\, n$, $n^2 < (n+1)^2$.

La successione $a_n = (-1)^n$ non è monotona, in quanto $a_0 > a_1$ e $a_1 < a_2$.

La successione $a_n = \sqrt{n^2 - 9}$ è strettamente crescente. Infatti la funzione radice è strettamente crescente, quindi $\forall\, n \geq 3$, $a_n < a_{n+1} \iff (a_n)^2 < (a_{n+1})^2 \iff n^2 - 9 < (n+1)^2 - 9 \iff n^2 < (n+1)^2$.

La successione $a_n = 1/(n-3)$ è strettamente decrescente. Infatti, per ogni $n \geq 4$, $a_n > a_{n+1} \iff 1/(n-3) > 1/(n+1-3) \iff (n-2) > (n-3) \iff -2 > -3$, che è vero.

Infine, osserviamo che la successione delle somme geometriche $a_n = \sum_{k=0}^n q^k$ è strettamente crescente se $q > 0$ e non è monotona se $q < 0$. Infatti, abbiamo $a_{n+1} = a_n + q^{n+1}$, dove q^{n+1} è sempre positivo se $q > 0$, mentre cambia segno a seconda della parità di n se $q < 0$. Quindi, se $q > 0$ risulta $a_{n+1} > a_n$ per ogni n, mentre se $q < 0$ abbiamo $a_{n+1} > a_n$ se n è dispari mentre $a_{n+1} < a_n$ se n è pari.

Esempio 4.1.6 Mostriamo che la successione $n \mapsto n/(n+1)$ è strettamente crescente.

Sempre per la caratterizzazione precedente, posto $a_n = n/(n+1)$, basta mostrare che $\forall\, n$, $a_n < a_{n+1}$. Ricordando che $a_n = 1 - 1/(n+1)$, risulta $a_{n+1} = 1 - 1/(n+2)$, dunque

$$a_n < a_{n+1} \iff 1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} \iff -\frac{1}{n+1} < -\frac{1}{n+2} \iff \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} \iff n+2 > n+1$$

che è vera per ogni n, come volevamo dimostrare.

Estremi di successioni

Riscrivendo la notazione di estremi di funzioni per le successioni $\{a_n\}_n$ di numeri reali, si deduce che l'estremo superiore e inferiore di una successione, denotati $\sup_n a_n$ e $\inf_n a_n$, sono rispettivamente l'estremo superiore e inferiore dell'*insieme* $\{a_n \mid n \in S\}$ *dei punti della successione.* Analogamente per il massimo e minimo, denotati $\max_n a_n$ e $\min_n a_n$. Quindi, una successione è

i) limitata superiormente se $\exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, n\,,\ a_n \leq M\,;$

   in tal caso $L = \sup_n a_n \iff (\forall\, n,\ a_n \leq L$ **e** $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \overline{n} : a_{\overline{n}} > L - \varepsilon)\,;$

ii) limitata inferiormente se $\exists\, m \in \mathbb{R} : \forall\, n\,,\ a_n \geq m\,;$

   in tal caso $l = \inf_n a_n \iff (\forall\, n,\ a_n \geq l$ **e** $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \overline{n} : a_{\overline{n}} < l + \varepsilon)\,;$

iii) limitata se e solo se $\exists\, \widetilde{M} \in \mathbb{R} : \forall\, n\,,\ |a_n| \leq \widetilde{M}\,;$

iv) non limitata superiormente se $\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, \overline{n} : a_{\overline{n}} > M$, da cui la notazione $\sup_n a_n = +\infty\,;$

v) non limitata inferiormente se $\forall\, m \in \mathbb{R},\ \exists\, \overline{n} : a_{\overline{n}} < m$, da cui la notazione $\inf_n a_n = -\infty\,.$

Inoltre, per successioni monotone (definite su una semiretta S) si ha ovviamente:

Proposizione 4.1.7 *Se $\{a_n\}_n$ è debolmente crescente, allora* $\inf_n a_n = \min_n a_n = a_{n_0}$. *Se invece $\{a_n\}_n$ è debolmente decrescente, allora* $\sup_n a_n = \max_n a_n = a_{n_0}$.

Esempio 4.1.8 Troviamo gli estremi di alcune delle successioni degli esempi precedenti.

Per la successione fattoriale $a_n = n!$ si ottiene che $\inf_n a_n = \min_n a_n = 1$ e $\sup a_n = +\infty$, in quanto l'insieme $\{n! \mid n \in \mathbb{N}\}$ non è limitato superiormente.

Per la successione $a_n = n^2$ si ottiene che $\inf_n a_n = \min_n a_n = 0$ e $\sup a_n = +\infty$, in quanto l'insieme $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ non è limitato superiormente.

Per la successione $a_n = (-1)^n$ ovviamente $\inf_n a_n = \min_n a_n = -1$ e $\sup a_n = 1 = \max_n a_n = 1$.

Per la successione $a_n = \sqrt{n^2 - 9}$ abbiamo $\inf_n a_n = \min_n a_n = 0$ e $\sup a_n = +\infty$, in quanto l'insieme $\{\sqrt{n^2 - 9} \mid n \geq 3\}$ non è limitato superiormente.

Per la successione $a_n = 1/(n-3)$, che sappiamo essere decrescente, abbiamo $\sup_n a_n = \max_n a_n = a_4 = 1$. Proviamo ora che l'estremo inferiore dell'insieme $A = \{1/(n-3) \mid n \geq 4\}$ è uguale a zero, ma non è minimo. Da ciò segue che $\inf_n a_n = 0$. Infatti, ovviamente $1/(n-3) > 0$ per ogni $n \geq 4$. Proviamo allora che ogni numero $\varepsilon > 0$ non è minorante di A, i.e. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n \geq 4 : 1/(n-3) < \varepsilon$. Ma $1/(n-3) < \varepsilon \iff (n-3) > 1/\varepsilon \iff n > 3 + 1/\varepsilon$, per cui l'asserto segue dalla proprietà di Archimede.

Infine, per la successione $a_n = n/(n+1)$, abbiamo di fatto già provato nell'esempio 3.2.12 che $\inf a_n = \min a_n = a_0 = 1$ mentre $\sup_n a_n = 1$, che non è massimo.

Osservazione 4.1.9 L'insieme dei punti di una successione di numeri reali non va confuso con il grafico della successione (come funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$).

4.2 Limite di successioni

Il concetto di *limite di successione* risponde analiticamente alla domanda: "dove si avvicinano i punti di una successione quando l'indice n è sempre più grande". Per parlare di "vicinanza" occorre introdurre la nozione di *intorno* di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Definizione 4.2.1 Intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo aperto $]H, K[$ che contiene x_0. Invece, intorno di $x_0 = +\infty$ è una qualsiasi semiretta aperta $]a, +\infty[$, mentre intorno di $x_0 = -\infty$ è una qualsiasi semiretta aperta $]-\infty, a[$, dove $a \in \mathbb{R}$. Infine, denotiamo con il simbolo $\mathcal{I}_{x_0}$ l'insieme (o famiglia) degli intorni di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione 4.2.2 *Le famiglie di intorni verificano le seguenti proprietà:*

i) *se $x_0, x_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ sono distinti, allora $\exists\, V_0 \in \mathcal{I}_{x_0}$* **e** *$\exists\, V_1 \in \mathcal{I}_{x_1} : V_0 \cap V_1 = \emptyset$*

ii) *se $V_0, V_1 \in \mathcal{I}_{x_0}$, allora $V_0 \cap V_1 \in \mathcal{I}_{x_0}$*

iii) *se $x_0 \in \mathbb{R}$, tra gli intorni di x_0 ci sono gli intervalli aperti centrati in x_0, definiti da $I_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$*

iv) *se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora per ogni $V \in \mathcal{I}_{x_0}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $I_\varepsilon(x_0) \subset V$.*

Dimostrazione: La prima proprietà segue nel caso $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ scegliendo ad esempio $\varepsilon = |x_1 - x_0|/2$ e come intorni $V_0 := I_\varepsilon(x_0)$ e $V_1 := I_\varepsilon(x_1)$. Gli altri casi sono analoghi. La seconda e la terza proprietà sono immediate. La quarta segue scegliendo $\varepsilon = \min\{K - x_0, x_0 - H\}$, dove $V =]H, K[$. □

Definizione 4.2.3 Una successione $\{a_n\}_n$ *ha limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}$, e scriviamo $\lim_n a_n = l$, o anche $a_n \to l$, se

$$\forall\, V \in \mathcal{I}_l,\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \overline{n},\ a_n \in V\ .$$

Una successione si dice *infinitesima* se ha limite $l = 0$, si dice *convergente* se ha limite $l \in \mathbb{R}$, si dice che *diverge positivamente [[negativamente]]* se ha limite $l = +\infty$ $[[l = -\infty]]$.

Osservazione 4.2.4 Una successione può non avere limite. Ad esempio, $a_n = (-1)^n$ non ha limite, cf. esempio 4.2.13.

Proposizione 4.2.5 *Se esiste, il limite di una successione è unico.*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che una successione $\{a_n\}_n$ abbia due limiti diversi, $l_0 \neq l_1$. Fissiamo due intorni $V_0 \in \mathcal{I}_{l_0}$ e $V_1 \in \mathcal{I}_{l_1}$ tali che $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. Dalla definizione, esiste n_0 tale che $a_n \in V_0$ per ogni $n \geq n_0$, ed esiste n_1 tale che $a_n \in V_1$ per ogni $n \geq n_1$. Posto allora $\overline{n} = \max\{n_0, n_1\}$, avremmo che $a_n \in V_0 \cap V_1$ per ogni $n \geq \overline{n}$, che non può succedere in quanto $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. □

Esplicitando la nozione di intorno, otteniamo le seguenti definizioni equivalenti di limite.

Proposizione 4.2.6 *Una successione $\{a_n\}_n$ diverge positivamente, $a_n \to +\infty$, se e solo se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n} : \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n > M\ . \tag{4.1}$$

Una successione $\{a_n\}_n$ diverge negativamente, $a_n \to -\infty$, se e solo se

$$\forall\, N \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n} : \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n < N\ . \tag{4.2}$$

Una successione $\{a_n\}_n$ converge ad un limite l reale, $a_n \to l \in \mathbb{R}$, se e solo se

$$\forall\, H, K \in \mathbb{R}\ : H < l < K\,,\ \exists\, \overline{n} : \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ H < a_n < K \tag{4.3}$$

o, equivalentemente, se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \overline{n} : \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ |a_n - l| < \varepsilon\ . \tag{4.4}$$

Dimostrazione: Le prime tre seguono immediatamente dalla definizione di intorni di $\pm\infty$ e di $l \in \mathbb{R}$. Riguardo la (4.4), osserviamo che per ogni $\varepsilon > 0$

$$|a_n - l| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \iff a_n \in I_\varepsilon(l) .$$

Quindi, se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, scegliendo $V = I_\varepsilon(l) \in \mathcal{I}_l$ per ogni $\varepsilon > 0$ si ottiene la (4.4). Viceversa, se vale la (4.4), ricordiamo che per ogni intorno $V \in \mathcal{I}_l$ troviamo un numero $\varepsilon > 0$ tale che $I_\varepsilon(l) \subset V$ e osserviamo che di conseguenza $|a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_n \in I_l(\varepsilon) \Rightarrow a_n \in V$. □

Osservazione 4.2.7 Dalla (4.4) con $l = 0$ otteniamo immediatamente che per successioni infinitesime

$$a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$$

quindi $\{a_n\}_n$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ se e solo se $|a_n - l| \to 0$.

Esempio 4.2.8 Proviamo che la successione $a_n = (-1)^n/n$ è infinitesima. Per la caratterizzazione (4.4), basta mostrare che $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \overline{n} \geq 1\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ |(-1)^n/n - 0| < \varepsilon$. Ma $|(-1)^n/n - 0| = 1/n$, mentre $1/n < \varepsilon \iff n > 1/\varepsilon$. La tesi segue scegliendo ad esempio $\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1$.

Saranno utili inoltre le seguenti caratterizzazioni del limite, che seguono usando il fatto che compare il quantificatore universale "$\forall$".

Proposizione 4.2.9 *Sia fissato $K > 0$ reale. Allora $a_n \to +\infty$ se e solo se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n > K \cdot M \iff \forall\, M \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n > M \pm K\ .$$

Analogamente, $a_n \to -\infty$ se e solo se

$$\forall\, N \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n < K \cdot N \iff \forall\, N \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n < N \pm K\ .$$

Infine, $a_n \to l \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ |a_n - l| < K \cdot \varepsilon\ .$$

Sottosuccessioni di posto pari o dispari

Data una successione $\{a_n\}_n$, definiamo due nuove successioni ponendo $b_n := a_{2n}$ e $c_n := a_{2n+1}$, dette *sottosuccessioni (dei termini) di posto pari e dispari*, rispettivamente.

Osservazione 4.2.10 Sono due nuove successioni ottenute componendo la funzione $f(n) = a_n$ a destra con le *applicazioni strettamente crescenti da* $\mathbb{N}$ *in* $\mathbb{N}$ definite da $k_1(n) = 2n$ e $k_2(n) = 2n + 1$, rispettivamente. Si veda la definizione 4.9.1 di sottosuccessione.

Proposizione 4.2.11 *Se una successione $\{a_n\}_n$ ha limite l, allora anche le sottosuccessioni di posto pari e dispari hanno lo stesso limite, i.e. $b_n := a_{2n} \to l$ e $c_n := a_{2n+1} \to l$.*

Dimostrazione: Sappiamo che $a_n \to l$ significa che $\forall\, V \in \mathcal{I}_l$, $\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \overline{n}$, $a_n \in V$. Allora, poiché $k_1(n) = 2n \geq \overline{n}$ e $k_2(n) = 2n+1 \geq \overline{n}$ se $n \geq \overline{n}$, otteniamo che $\forall\, n \geq \overline{n}$, $b_n = a_{2n} \in V$ **e** $c_n = a_{2n+1} \in V$, come volevamo dimostrare. □

Tali sottosuccessioni possono essere usate per dimostrare la non esistenza del limite di una successione. Infatti, dalla contronominale si ottiene:

Corollario 4.2.12 *Data una successione $\{a_n\}_n$, se le sottosuccessioni di posto pari e dispari hanno limiti diversi, i.e. $b_n := a_{2n} \to l_1$ e $c_n := a_{2n+1} \to l_2$, con $l_1 \neq l_2$, allora la successione $\{a_n\}$ non ha limite.*

Esempio 4.2.13 La successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite, in quanto $b_n := a_{2n} \equiv 1$ e $c_n := a_{2n+1} \equiv -1$, dunque b_n e c_n hanno limiti diversi.

Limite di successioni monotone

Abbiamo visto che una successione può non avere limite. Questa patologia non accade per le successioni monotone.

Teorema 4.2.14 *Ogni successione monotona ha limite. Inoltre, se $\{a_n\}_n$ è crescente, il suo limite è uguale all'estremo superiore $\sup_n a_n$. Se invece è decrescente, il suo limite è uguale all'estremo inferiore $\inf_n a_n$.*

Dimostrazione: Facciamo prima il caso di successioni crescenti. Sia $l = \sup_n a_n$. Se $l \in \mathbb{R}$, allora abbiamo che $a_n \leq l$ per ogni n, mentre per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo che esiste $\overline{n}$ tale che $a_{\overline{n}} > l - \varepsilon$. Quindi, essendo $\{a_n\}_n$ crescente, per ogni $n \geq \overline{n}$ risulta $a_n \geq a_{\overline{n}}$. In definitiva, abbiamo ottenuto che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ si ha $l-\varepsilon < a_{\overline{n}} \leq a_n \leq l < l+\varepsilon$ e dunque $|a_n - l| < \varepsilon$. La tesi segue dalla caratterizzazione (4.4). Se invece $\sup a_n = +\infty$, i.e. la successione non è limitata superiormente, allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\overline{n}$ tale che $a_{\overline{n}} > M$. Dalla monotonia si ottiene analogamente la (4.1).

Il caso $\{a_n\}_n$ decrescente si dimostra osservando che posto $b_n = -a_n$, allora $\{b_n\}_n$ è crescente, e che $\sup_n b_n = -\inf_n a_n$. Basta quindi ricordare la caratterizzazione del limite $\pm\infty$ (con $N = -M$) e osservare invece che $|a_n - l| = |b_n - (-l)|$ nel caso $l \in \mathbb{R}$. □

Esempio 4.2.15 Da quanto visto, otteniamo immediatamente che $n! \to +\infty$, $n^2 \to +\infty$, $\sqrt{n^2-9} \to +\infty$, $1/(n-3) \to 0$, ed infine $n/(n+1) \to 1$.

Predicati definitivamente veri o frequentemente veri

Nella definizione di limite $a_n \to l$, se consideriamo il predicato $\mathcal{P}(n) := (a_n \in V)$, abbiamo scritto che $\mathcal{P}(n)$ è vera da un certo $\overline{n}$ in poi, per ogni $V \in \mathcal{I}_l$. Introduciamo quindi la seguente:

Definizione 4.2.16 Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato dipendente da $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che $\mathcal{P}(n)$ è *definitivamente vero* se esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq \overline{n}$.

Esempio 4.2.17 Quindi $a_n \to l$ se per ogni $V \in \mathcal{I}_l$ definitivamente $a_n \in V$.

Se due (o più) predicati sono definitivamente veri, allora lo è anche la loro intersezione logica.

Proposizione 4.2.18 *Dati due predicati $\mathcal{P}_1(n)$ e $\mathcal{P}_2(n)$ dipendenti da n, se $\mathcal{P}_1(n)$ e $\mathcal{P}_2(n)$ sono entrambi definitivamente veri, allora anche $\mathcal{P}_1(n)$* **e** *$\mathcal{P}_2(n)$ è definitivamente vero.*

Dimostrazione: Abbiamo: $\exists\, n_1 \,:\, \forall\, n \geq n_1\,,\, \mathcal{P}_1(n)$ ed inoltre $\exists\, n_2 \,:\, \forall\, n \geq n_2\,,\, \mathcal{P}_2(n)$. Posto $\overline{n} = \max\{n_1, n_2\}$, allora $\forall\, n \geq \overline{n}\,,\, [\mathcal{P}_1(n)\ \textbf{e}\ \mathcal{P}_2(n)]$. □

Osservazione 4.2.19 Neghiamo ora l'affermazione $\mathcal{P}(n)$ è definitivamente vero: abbiamo

$$\textbf{non}[\exists\, \overline{n} \,:\, \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ \mathcal{P}(n)] \iff [\forall\, \overline{n}\,,\, \exists\, n \geq \overline{n} \,:\, \textbf{non}\, \mathcal{P}(n)]\ . \tag{4.5}$$

Definizione 4.2.20 Sia $\mathcal{Q}(n)$ un predicato dipendente da $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che $\mathcal{Q}(n)$ è *frequentemente vero* se per ogni $\overline{n} \in \mathbb{N}$ esiste un numero $n \geq \overline{n}$ per il quale la proposizione $\mathcal{Q}(n)$ è vera.

Quindi, posto $\mathcal{Q}(n) = \textbf{non}\, \mathcal{P}(n)$, abbiamo osservato sopra che

$$\textbf{non}\, [\, \mathcal{P}(n) \text{ è definitivamente vero}\,] \iff [\, \textbf{non}\, \mathcal{P}(n) \text{ è frequentemente vero}\,]\ .$$

Esempio 4.2.21 Una successione $\{a_n\}_n$ si dice *definitivamente crescente* se esiste n_0 tale che $\forall\, n,\, m \geq n_0$ abbiamo che $n < m \Rightarrow a_n \leq a_m$. Equivalentemente, la successione è definitivamente crescente se e solo se esiste n_0 tale che $\forall\, n \geq n_0$ risulta $a_n \leq a_{n+1}$.

Osservazione 4.2.22 Da quanto visto deduciamo che il limite di una successione non dipende dai primi termini. In maniera equivalente, abbiamo:

Proposizione 4.2.23 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che definitivamente $a_n = b_n$. Allora $a_n \to l \iff b_n \to l$.*

Inoltre, dalla dimostrazione del teorema 4.2.14, usando l'argomento della proposizione 4.2.18, si deduce il seguente

Corollario 4.2.24 *Ogni successione definitivamente monotona ha limite.*

Esempio 4.2.25 Una successione $\{a_n\}_n$ si dice ad esempio *definitivamente limitata* se esiste n_0 tale che $\exists\, \widetilde{M} \in \mathbb{R} : \forall\, n \geq n_0\,,\, |a_n| \leq \widetilde{M}$. Allora si vede facilmente che:

Proposizione 4.2.26 *Ogni successione definitivamente limitata [[l. superiormente, l. inferiormente]] è anche limitata [[l. superiormente, l. inferiormente]].*

Dimostrazione: Se $\{a_n\}_n$ è definitivamente limitata, posto $\overline{M} := \max\{\widetilde{M}, |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0}|\}$, si ottiene che $|a_n| \leq \overline{M}$ per ogni n. $\square$

Osservazione 4.2.27 Abbiamo usato il fatto che *ogni insieme* finito *di numeri reali è limitato ed ha massimo e minimo*, la cui dimostrazione è una facile applicazione del principio di induzione sul numero n di elementi dell'insieme. Si noti che un insieme limitato in generale non è finito.

4.3 Teoremi di confronto e teoremi algebrici

Limitatezza e permanenza del segno

Teorema 4.3.1 *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione: Infatti, dalla caratterizzazione (4.3) si deduce che una successione convergente è definitivamente limitata e quindi limitata, cf. proposizione 4.2.26. $\square$

Analogamente, dalle caratterizzazioni (4.1) e (4.2) e dalla proposizione 4.2.26 si ottiene:

Proposizione 4.3.2 *Ogni successione che diverge positivamente [[negativamente]] è limitata inferiormente [[superiormente]].*

Il teorema di permanenza del segno afferma:

Teorema 4.3.3 *Se una successione $\{a_n\}_n$ ha limite l diverso da zero, allora $\{a_n\}_n$ ha definitivamente segno costante.*

Dimostrazione: Supponiamo $l > 0$. Se $l \in \mathbb{R}$, si sceglie $H > 0$ nella caratterizzazione (4.3), se invece $l = +\infty$, si sceglie $M > 0$ nella (4.1). Analogamente, se $l < 0$ è reale si sceglie $K < 0$ nella (4.3), mentre se $l = -\infty$ si sceglie $N < 0$ nella (4.2). $\square$

Osservazione 4.3.4 Dalla controminale dell'argomento precedente e dalla proprietà (4.5) si ottiene:

Corollario 4.3.5 *Se $a_n \to l$ e frequentemente $a_n \leq H$, allora $l \leq H$, se invece frequentemente $a_n \geq K$, allora $l \leq K$.*

Confronto e teorema dei carabinieri

Il *teorema del confronto* afferma:

Teorema 4.3.6 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che definitivamente $a_n \leq b_n$; allora*

i) $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

ii) $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$.

Dimostrazione: Proviamo solo la prima. Fissato $M \in \mathbb{R}$, dalla (4.1) esiste $\overline{n}_1$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}_1$ risulta $a_n > M$. Ma esiste $\overline{n}_2$ tale che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq \overline{n}_2$, dunque $b_n \geq a_n > M$ per ogni $n \geq \overline{n} := \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$, come volevamo dimostrare. $\square$

Esempio 4.3.7 Posto $a_n = (-1)^n - n$ e $b_n = 1 - n$, dalla definizione di limite abbiamo che $b_n \to -\infty$, mentre $a_n \le b_n$ per ogni n, dunque $a_n \to -\infty$.

Per successioni convergenti, si utilizza il cosiddetto *teorema dei carabinieri*.

Teorema 4.3.8 *Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ tre successioni e $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che:*

i) *definitivamente $b_n \le a_n \le c_n$*

ii) $b_n \to l$

iii) $c_n \to l$.

Allora anche $\{a_n\}_n$ ha limite e $a_n \to l$.

Dimostrazione: Supponiamo $l \in \mathbb{R}$, altrimenti la tesi segue (in ipotesi più generali) dal teorema di confronto 4.3.6. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla (4.4) esiste $\overline{n}_1$ tale che per ogni $n \ge \overline{n}_1$ risulta $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$ ed esiste $\overline{n}_2$ tale che per ogni $n \ge \overline{n}_2$ risulta $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$. Inoltre esiste $\overline{n}_3$ tale che $b_n \le a_n \le c_n$ per ogni $n \ge \overline{n}_3$. Posto $\overline{n} := \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3\}$, abbiamo che $l - \varepsilon < b_n \le a_n \le c_n < l + \varepsilon$ per ogni $n \ge \overline{n}$, dunque $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n \ge \overline{n}$, come volevamo dimostrare. □

Esempio 4.3.9 Calcoliamo il limite di $a_n = (1 + 2(-1)^n)/n$. Posto $b_n = -1/n$ e $c_n = 3/n$, abbiamo che $b_n \le a_n \le c_n$ per ogni $n \ge 1$, mentre per verifica diretta deduciamo che $b_n \to 0$ e $c_n \to 0$. Dunque, anche $a_n \to 0$.

Corollario 4.3.10 *Data $\{a_n\}_n$, se esistono un numero $l \in \mathbb{R}$ ed una successione $\{b_n\}_n$ tali che*

i) *definitivamente $|a_n - l| \le b_n$*

ii) $b_n \to 0$

allora anche $\{a_n\}_n$ ha limite e $a_n \to l$.

Dimostrazione: Dal teorema dei carabinieri segue ovviamente che $|a_n - l| \to 0$, dunque per l'osservazione 4.2.7 anche $(a_n - l) \to 0$ ed in definitiva $a_n \to l$. □

Esempio 4.3.11 Proviamo che la successione $a_n = (2n + 3)/(n + 1)$ converge a 2. Infatti, scriviamo $a_n = 2 + 1/(n + 1)$, dunque con $l = 2$ abbiamo $|a_n - 2| = |1/(n + 1)| = 1/(n + 1)$, dove la successione $b_n = 1/(n + 1)$ è infinitesima.

Limite e valore assoluto

Possiamo ora estendere l'osservazione 4.2.7 sulla successione dei valori assoluti in una direzione. Poniamo ovviamente $|-\infty| := +\infty$ e $|+\infty| := +\infty$.

Proposizione 4.3.12 *Se $a_n \to l$ allora $|a_n| \to |l|$.*

Dimostrazione: Se $l \in \mathbb{R}$ risulta $||a_n| - |l|| \le |a_n - l|$ per la seconda diseguaglianza triangolare, proposizione 2.3.3. Inoltre dalla definizione di limite $a_n \to l \iff (a_n - l) \to 0$. Allora l'osservazione 4.2.7 ci dà $a_n \to l \Rightarrow |a_n - l| \to 0$. Per il corollario 4.3.10, risulta dunque $|a_n| \to |l|$. Il caso $l = \pm\infty$ segue per verifica diretta, dalle caratterizzazioni (4.1) e (4.2). □

Osservazione 4.3.13 Il viceversa è falso: se $|a_n| \to |l|$ non è detto neppure che $\{a_n\}_n$ abbia limite, come si vede con $a_n = (-1)^n$.

Operazioni algebriche con i limiti

Ricordiamo che in $\overline{\mathbb{R}}$ non hanno senso le operazioni $+\infty - \infty$ e $0 \cdot (\pm\infty)$. Il *teorema sul limite della somma e del prodotto* afferma:

Teorema 4.3.14 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che $a_n \to l_a$ e $b_n \to l_b$, con $l_a, l_b \in \mathbb{R}$. Allora:*

i) *se la somma dei limiti* $l_a + l_b$ *ha senso, anche la successione somma* $\{a_n + b_n\}_n$ *ha limite e risulta* $(a_n + b_n) \to l_a + l_b$ *;*

ii) *se il prodotto dei limiti* $l_a \cdot l_b$ *ha senso, anche la successione prodotto* $\{a_n \cdot b_n\}_n$ *ha limite e risulta* $a_n \cdot b_n \to l_a \cdot l_b$ *.*

Dimostrazione: Faremo uso delle caratterizzazioni descritte nella proposizione 4.2.9. Faremo anche uso della proposizione 4.2.18. Consideriamo prima la somma, distinguendo vari casi.
Primo caso: $l_a, l_b \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$ si ha che definitivamente $|a_n - l_a| < \varepsilon$ e definitivamente $|b_n - l_b| < \varepsilon$, dunque definitivamente $|a_n - l_a| < \varepsilon$ **e** $|b_n - l_b| < \varepsilon$. Ma per la prima diseguaglianza triangolare, cf. proposizione 2.3.3, stimiamo

$$|(a_n + b_n) - (l_a + l_b)| = |(a_n - l_a) + (b_n - l_b)| \le |a_n - l_a| + |b_n - l_b|\,,$$

da cui otteniamo che definitivamente $|(a_n + b_n) - (l_a + l_b)| < 2\varepsilon$, come volevamo dimostrare.
Secondo caso: $l_a = +\infty$ e $l_b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Per il teorema di limitatezza 4.3.1 (o dalla definizione di limite nel caso $l_b = +\infty$) esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $b_n \ge K$ per ogni n. Inoltre, per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha che definitivamente $a_n > M$. Quindi definitivamente risulta $(a_n + b_n) > M + K$, come volevamo dimostrare.
Terzo caso: $l_a = -\infty$ e $l_b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Per il teorema di limitatezza 4.3.1 (o dalla definizione di limite nel caso $l_b = -\infty$) esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $b_n \le K$ per ogni n. Inoltre, per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha che definitivamente $a_n < M$. Quindi definitivamente risulta $(a_n + b_n) \le M + K$, come volevamo dimostrare.

Consideriamo ora il prodotto, distinguendo ancora tra vari casi.
Primo caso: $l_a, l_b \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, come sopra si ha che definitivamente $|a_n - l_a| < \varepsilon$ **e** $|b_n - l_b| < \varepsilon$, mentre per il teorema di limitatezza 4.3.1 esiste $M > 0$ tale che $|b_n| \le M$ per ogni n. Usando la prima diseguaglianza triangolare e le proprietà del valore assoluto questa volta stimiamo

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - l_a \cdot l_b| &= |(a_n \cdot b_n - l_a \cdot b_n) + (l_a \cdot b_n - l_a \cdot l_b)| \le |a_n \cdot b_n - l_a \cdot b_n| + |l_a \cdot b_n - l_a \cdot l_b| \\ &= |(a_n - l_a) \cdot b_n| + |l_a \cdot (b_n - l_b)| = |b_n||(a_n - l_a)| + |l_a||b_n - l_b|\,.\end{aligned}$$

Da quanto scritto sopra otteniamo che definitivamente

$$|a_n \cdot b_n - l_a \cdot l_b| \le |b_n||(a_n - l_a)| + |l_a||b_n - l_b| < M\,\varepsilon + |l_a|\,\varepsilon = (M + l_a)\,\varepsilon$$

per cui la tesi segue dalla proposizione 4.2.9 con $K = M + |l_a|$.
Secondo caso: $l_a = +\infty$ e $l_b > 0$. Osserviamo che esiste $H > 0$ reale tale che definitivamente $b_n > H$. Questo segue dalla definizione di limite se $l_b = +\infty$, mentre se $l_b > 0$ è reale, segue dalla (4.3) con $0 < H < l_b$, ad esempio scegliendo $H = l_b/2$. Inoltre, per ogni $M > 0$ reale, definitivamente $a_n > M$. Dunque, definitivamente $a_n \cdot b_n > H \cdot a_n > H \cdot M$, come volevamo dimostrare.
Terzo caso: $l_a = +\infty$ e $l_b < 0$. Prima osserviamo che esiste $K < 0$ reale tale che definitivamente $b_n < K$. Questo segue direttamente dalla definizione di limite se $l_b = -\infty$, mentre se $l_b < 0$ è reale, segue dalla (4.3) con $l_b < K < 0$, ad esempio scegliendo $K = l_b/2$. Inoltre, per ogni $M > 0$ reale, definitivamente $a_n > M$. Dunque, definitivamente $a_n \cdot b_n < K \cdot a_n < K \cdot M$, come volevamo dimostrare.
Quarto caso: $l_a = -\infty$ e $l_b < 0$. Basta applicare il secondo caso alle successioni degli opposti, definite da $\widetilde{a}_n = -a_n$ e $\widetilde{b}_n = -b_n$.
Quinto caso: $l_a = -\infty$ e $l_b > 0$. Basta applicare il terzo caso alle successioni degli opposti. □

Esempio 4.3.15 Per ogni naturale $k \in \mathbb{N}^+$ si ha che $n^k \to +\infty$ e $n^{-k} = (1/n)^k \to 0$. Infatti sappiamo che tale proprietà è vera per $k = 1$, mentre per $k = 2$ segue dal teorema sul limite del prodotto. Sapendo che è vera per un intero k, si ottiene dunque che è vera anche per l'intero successivo $k+1$. Per il principio di induzione è dunque vera per ogni k.

Osservazione 4.3.16 Analogamente, otteniamo che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ la successione $(1 + 1/n)^k$ ha limite 1, essendo prodotto di k fattori tutti convergenti ad 1. Questo non significa che la successione $\mathsf{e}_n = (1 + 1/n)^n$ ha limite 1. Infatti, vedremo nella Proposizione 4.6.1 che $\{\mathsf{e}_n\}_n$ converge al numero di Nepero e.

Nella dimostrazione del teorema 4.3.14 abbiamo di fatto provato anche le seguenti proprietà, in cui non si richiede l'esistenza del limite della successione $\{b_n\}_n$ ma si deduce comunque la divergenza della successione somma o prodotto.

Proposizione 4.3.17 *Siano date due successioni* $\{a_n\}_n$ *e* $\{b_n\}_n$.

i) *Se* $a_n \to +\infty$ *e* $\{b_n\}_n$ *è limitata inferiormente, allora* $(a_n + b_n) \to +\infty$.

ii) *Se* $a_n \to -\infty$ *e* $\{b_n\}_n$ *è limitata superiormente, allora* $(a_n + b_n) \to -\infty$.

iii) *Se* $a_n \to +\infty$ *ed esiste* $H > 0$ *tale che definitivamente* $b_n > H$, *allora* $a_n \cdot b_n \to +\infty$.

iv) *Se* $a_n \to +\infty$ *ed esiste* $K < 0$ *tale che definitivamente* $b_n < K$, *allora* $a_n \cdot b_n \to -\infty$.

v) *Se* $a_n \to -\infty$ *ed esiste* $H > 0$ *tale che definitivamente* $b_n > H$, *allora* $a_n \cdot b_n \to -\infty$.

vi) *Se* $a_n \to -\infty$ *ed esiste* $K < 0$ *tale che definitivamente* $b_n < K$, *allora* $a_n \cdot b_n \to +\infty$.

Esempio 4.3.18 Vediamo che la successione $n^2 + n(-1)^n/(n+1)$ diverge positivamente. Infatti si scrive come somma $a_n + b_n$, dove $a_n = n^2$ e $b_n = n(-1)^n/(n+1)$. Sappiamo inoltre che $a_n \to +\infty$, mentre la successione $\{b_n\}_n$ è limitata, in quanto $|b_n| = n/(n+1) \le 1$ per ogni n. Si noti che $\{b_n\}_n$ non ha limite, in quanto le sue sottosuccessioni di posto pari e dispari convergono a 1 e -1, rispettivamente.

Esempio 4.3.19 La successione $n^2[2 + (-1)^n]$ diverge positivamente. Infatti si scrive come prodotto $a_n \cdot b_n$, con $a_n = n^2$ e $b_n = 2 + (-1)^n$. Sappiamo che $a_n \to +\infty$, mentre la successione $\{b_n\}_n$ è limitata inferiormente da una costante positiva, in quanto $b_n \ge 1$ per ogni n. Si noti ancora che $\{b_n\}_n$ non ha limite, in quanto le sue sottosuccessioni di posto pari e dispari valgono identicamente 3 e -1.

Nel caso in cui un fattore è una successione infinitesima, abbiamo anche:

Proposizione 4.3.20 *Date* $\{a_n\}_n$ *e* $\{b_n\}_n$, *se* $a_n \to 0$ *e* $\{b_n\}_n$ *è limitata, allora* $a_n \cdot b_n \to 0$.

Dimostrazione: Esiste $K > 0$ reale tale che $|b_n| \le K$ per ogni n. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$, definitivamente $|a_n| < \varepsilon$. Dunque definitivamente si ha $|a_n \cdot b_n| = |a_n||b_n| \le K\,|a_n| < K\varepsilon$, come volevamo dimostrare. $\square$

Esempio 4.3.21 La successione $[2 + (-1)^n]/n$ è infinitesima. Infatti si scrive come prodotto $a_n \cdot b_n$, con $a_n = 1/n$ e $b_n = 2 + (-1)^n$. Sappiamo che $a_n \to 0$, mentre la successione $\{b_n\}_n$ pur non avendo limite è limitata, in quanto $|b_n| \le 3$ per ogni n.

Forme indeterminate

Il teorema 4.3.14 non tratta il caso in cui $l_a + l_b = +\infty - \infty$ o in cui $l_a \cdot l_b = 0 \cdot (\pm\infty)$. Infatti, in tali casi il limite della somma o del prodotto può essere un qualsiasi numero reale o può non esistere. Per questo si parla di *forme indeterminate*.

Esempio 4.3.22 Scegliamo $a_n = n$, per cui $a_n \to +\infty$, e troviamo delle successioni b_n divergenti a $-\infty$ tali che la successione somma $\{a_n + b_n\}_n$ ha i diversi comportamenti sopra descritti. Infatti, se $b_n = -n/2$, allora $(a_n + b_n) = n/2 \to +\infty$, se $b_n = c - n$, allora $(a_n + b_n) \equiv c \to c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, se $b_n = -2n$, allora $(a_n + b_n) = -n \to -\infty$ ed infine, se $b_n = (-1)^n - n$, allora $(a_n + b_n) = (-1)^n$ non ha limite.

Esempio 4.3.23 Analogamente, scegliamo $a_n = 1/n^2$, per cui $a_n \to 0$, e troviamo diverse successioni b_n divergenti in modo tale che la successione prodotto $\{a_n \cdot b_n\}_n$ ha i diversi comportamenti sopra descritti. Infatti, se $b_n = n$, allora $a_n \cdot b_n = 1/n \to 0$, se $b_n = c\,n^2$, allora $a_n \cdot b_n \equiv c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, se $b_n = \pm n^3$, allora $a_n \cdot b_n = \pm n \to \pm\infty$. Infine, se $b_n = n^2\,[2 + (-1)^n]$, allora $a_n \cdot b_n = 2 + (-1)^n$ non ha limite.

Limite del reciproco e del quoziente

Ci si aspetta che se una successione $\{b_n\}_n$ ha limite l reale non nullo, allora la successione dei reciproci $\{1/b_n\}_n$ ha limite dato dal reciproco di l. Inoltre, se $l = \pm\infty$, ci si aspetta che $\{1/b_n\}_n$ sia infinitesima. Il caso delicato è infatti $l = 0$, come illustrato qui sotto.

Esempio 4.3.24 Se $b_n = (-1)^n/n$, allora $b_n \to 0$, ma $1/b_n = n\,(-1)^n$ e dunque $1/b_n$ non ha limite. Se invece $b_n = 1/n$, allora $1/b_n = n$ e dunque $1/b_n$ ha limite $+\infty$. Analogamente, se $b_n = -1/n$, allora $1/b_n = -n$ e dunque $1/b_n$ ha limite $-\infty$. La successione del primo esempio non ha limite perchè assume frequentemente sia valori negativi che valori positivi, i.e. non è definitivamente di segno costante.

Per dimostrare i *teoremi del reciproco e del quoziente*, introduciamo allora la notazione di *limite da sopra o da sotto.*

Definizione 4.3.25 Se una successione $\{a_n\}_n$ ha limite l reale e definitivamente $a_n > l$ $[[\, a_n < l\,]]$ allora scriviamo $a_n \to l^+$ $[[\, a_n \to l^-\,]]$.

Esempio 4.3.26 Quindi abbiamo $1/n \to 0^+$ e $-1/n \to 0^-$, mentre la successione infinitesima $(-1)^n/n$ non è definitivamente positiva né definitivamente negativa.

Teorema 4.3.27 *Sia $\{b_n\}_n$ una successione tale che $b_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$. Abbiamo:*

i) *se $l = +\infty$ $[[\, l = -\infty\,]]$ allora $1/b_n \to 0^+$ $[[\, 1/b_n \to 0^-\,]]$;*

ii) *se $l = 0^+$ $[[\, l = 0^-\,]]$ allora $1/b_n \to +\infty$ $[[\, 1/b_n \to -\infty\,]]$;*

iii) *se $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $1/b_n \to 1/l$.*

Dimostrazione: Consideriamo solo i casi $l = +\infty$, $l = 0^+$ e $l > 0$ reale, gli altri casi essendo ottenuti grazie al teorema sul limite del prodotto, moltiplicando per -1.
i) Se $l = +\infty$, fissato $\varepsilon > 0$ e posto $M_\varepsilon = 1/\varepsilon$, definitivamente risulta $b_n > M_\varepsilon > 0$, da cui $0 < 1/b_n < \varepsilon$.
ii) Se $l = 0^+$, fissato $M > 0$ e posto $\varepsilon = 1/M$, definitivamente $0 < b_n < \varepsilon$, da cui $1/b_n > M$.
iii) Infine, nel caso $l > 0$ reale, mostriamo che per ogni H, K tali che $H < 1/l < K$, allora definitivamente $1/b_n \in]H, K[$. Scegliamo quindi due numeri $H' \geq H$ e tale che $0 < H' < 1/l$ e $K' \in \mathbb{R}$ tale che $1/l < K' < K$, potendo essere $H \leq 0$ o $K = +\infty$. Allora $1/K' < l < 1/H'$, i.e. $]1/K', 1/H'[$ è un intorno di l. Dunque definitivamente sappiamo che $1/K' < b_n < 1/H'$, i.e. definitivamente $H' < 1/b_n < K'$, il che implica $1/b_n \in]H', K'[\subset]H, K[$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 4.3.28 Se $b_n \to 0$ ma $\{b_n\}_n$ non ha definitivamente segno costante, cf. Esempio 4.3.24, allora si dimostra che la successione $\{1/b_n\}_n$ non ha limite.

Il teorema sul limite del quoziente a_n/b_n di due successioni segue applicando prima il teorema del reciproco alla successione $\{b_n\}_n$ e poi il teorema del prodotto, osservando che $a_n/b_n = a_n \cdot (1/b_n)$. Lo enunciamo solo nel caso in cui il limite di $\{b_n\}_n$ è positivo o $l_b = 0^+$, gli altri casi essendo ottenuti ovviamente moltiplicando per -1.

Teorema 4.3.29 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che $a_n \to l_a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $b_n \to l_b \in \overline{\mathbb{R}}$. Abbiamo:*

i) *se $l_a \in \mathbb{R}$ e $l_b \in \mathbb{R}^+$, allora $a_n/b_n \to l_a/l_b$;*

ii) *se $l_a \in \mathbb{R}$ e $l_b = +\infty$, allora $a_n/b_n \to 0$;*

iii) *se $l_a \in \mathbb{R}^+$ e $l_b = 0^+$, allora $a_n/b_n \to +\infty$;*

iv) *se $l_a \in \mathbb{R}^-$ e $l_b = 0^+$, allora $a_n/b_n \to -\infty$;*

v) *se $l_a = \pm\infty$ e $l_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0^+\}$, allora $a_n/b_n \to \pm\infty$.*

Osservazione 4.3.30 Se $l_a \neq 0$ e $l_b = 0$, ma $\{b_n\}_n$ non ha definitivamente segno costante, allora si dimostra che la successione $\{a_n/b_n\}_n$ non ha limite.

Osservazione 4.3.31 Come conseguenza, modificando l'esempio 4.3.23 si deduce che $0/0$ e ∞/∞ sono *forme indeterminate* per il limite del quoziente di successioni.

Esempio 4.3.32 Se $a_n = P_m(n)$, dove $P_m(x)$ è un polinomio di grado positivo m, il limite è $\pm\infty$ a seconda del segno del coefficiente del monomio di grado massimo. Infatti, se $P_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$, con $c_m \neq 0$, posto $\operatorname{sgn}(c_m) = c_m/|c_m|$, abbiamo

$$a_n = \sum_{k=0}^{m} c_k n^k = n^m \cdot \sum_{k=0}^{m} c_k n^{k-m} \,.$$

Per $k < m$ abbiamo $n^{k-m} \to 0$, dunque $\sum_{k=0}^m c_k n^{k-m} \to c_m$ ed in definitiva $a_n \to \operatorname{sgn}(c_m) \cdot (+\infty)$.

Esempio 4.3.33 Se invece $a_n = P_m(n)/Q_p(n)$, dove $P_m(x)$ e $Q_p(x)$ sono polinomi di grado positivo, il limite dipende dal grado dei due polinomi. Infatti, se $P_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$, con $c_m \neq 0$, e $Q_p(x) = \sum_{h=0}^p d_h x^h$, con $d_p \neq 0$, abbiamo

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^m c_k n^k}{\sum_{h=0}^p d_h n^h} = \frac{n^m \cdot \sum_{k=0}^m c_k n^{k-m}}{n^p \cdot \sum_{h=0}^p d_h n^{h-p}} = n^{m-p} \cdot \frac{\sum_{k=0}^m c_k n^{k-m}}{\sum_{h=0}^p d_h n^{h-p}} .$$

Abbiamo ancora $\sum_{k=0}^m c_k n^{k-m} \to c_m$ e $\sum_{h=0}^p d_h n^{h-p} \to d_p$, per cui il quoziente a destra ha limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^m c_k n^{k-m}}{\sum_{h=0}^p d_h n^{h-p}} = \frac{c_m}{d_p} \neq 0 .$$

Allora, se $m < p$, risulta $n^{m-p} \to 0$ e dunque $a_n \to 0$. Se invece $m = p$, allora $n^{m-p} \equiv 1$ e dunque $a_n \to c_m/d_p$. Infine, se $m > p$, risulta $n^{m-p} \to +\infty$ e dunque $a_n \to \mathrm{sgn}(c_m/d_p) \cdot (+\infty)$.

Per il calcolo dei limiti di forme indeterminate è utile la seguente notazione:

Definizione 4.3.34 Date due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ che hanno entrambe limite, con $\{b_n\}_n$ definitivamente diversa da zero, diciamo che "a_n va come b_n", e scriviamo $a_n \sim b_n$, se il limite del quoziente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 .$$

Osservazione 4.3.35 Questa notazione è utile negli argomenti basati sul principio di sostituzione. Se ad esempio $\{c_n\}_n$ è una terza successione (definitivamente non nulla) allora abbiamo che

$$\frac{a_n + b_n}{c_n} = \frac{b_n}{c_n} \cdot (a_n/b_n + 1)$$

e $(a_n/b_n + 1) \to 2$ se $a_n \sim b_n$. Quindi il limite della successione a primo membro si riconduce al calcolo del limite di $2 \cdot (b_n/c_n)$. Analogamente, deduciamo che il limite di a_n/c_n si riconduce al limite di b_n/c_n.

4.4 Continuità

Introduciamo una definizione di *continuità* per funzioni che fa uso del limite di successioni.

Definizione 4.4.1 Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale e sia $\overline{x} \in A$. Diciamo che f è *continua* in $\overline{x}$ se per *ogni* successione di punti di A che converge a $\overline{x}$, la successione dei punti ottenuti dai corrispondenti valori di f converge al valore di f in $\overline{x}$, i.e.

$$\forall \{x_n\}_n \subset A , \quad [x_n \to \overline{x} \Rightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})] . \tag{4.6}$$

Dato un insieme $B \subset A$, la funzione f si dice continua su B se è continua in ogni punto $\overline{x} \in B$, e si dice continua se è continua su tutto $A = \mathrm{dom}\, f$.

Continuità di alcune funzioni elementari

Esempio 4.4.2 *La funzione valore assoluto è continua.*

Infatti, per la seconda diseguaglianza triangolare abbiamo $||x_n| - |\overline{x}|| \leq |x_n - \overline{x}|$. Quindi se $\{x_n\}_n$ è una successione convergente ad un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$, allora $(x_n - \overline{x}) \to 0$, dunque $|x_n - \overline{x}| \to 0$ ed infine $|x_n| \to |\overline{x}|$, per il corollario al teorema dei carabinieri.

Esempio 4.4.3 *Le funzioni seno e coseno sono continue.*

Proviamo prima la continuità in $\overline{x} = 0$. Dalla trigonometria[1] sappiamo che

$$\forall x , \quad 0 \leq |\,\mathrm{sen}\, x| \leq |x| , \quad 1 - |x| \leq \cos x \leq 1 .$$

Quindi, se $x_n \to 0$, allora $|x_n| \to 0$ e $|\,\mathrm{sen}\, x_n| \to 0$, da cui $\mathrm{sen}\, x_n \to 0 = \mathrm{sen}\, 0$. Analogamente, poiché $1 - |x_n| \leq \cos x_n \leq 1$, per il teorema dei carabinieri otteniamo che $\cos x_n \to 1 = \cos 0$.

[1]Per ogni $x > 0$ abbiamo $0 < \mathrm{sen}\, x < x$ e $0 > \mathrm{sen}(-x) > -x$, per cui dalla simmetria della funzione seno otteniamo la prima diseguaglianza. Inoltre per ogni $x > 0$ abbiamo $1 - x < \cos x < 1$ e dunque, facendo l'estensione pari, vale la seconda.

Fissato ora $\overline{x} \neq 0$, e posto $d_n = x_n - \overline{x}$, abbiamo $d_n \to 0 \iff x_n \to \overline{x}$. Inoltre, usando il caso precedente e le formule sul seno e coseno della somma di due argomenti, otteniamo

$$\operatorname{sen} x_n = \operatorname{sen}(\overline{x} + d_n) = (\operatorname{sen}\overline{x}\cos d_n + \cos\overline{x}\operatorname{sen} d_n) \to (\operatorname{sen}\overline{x}\cos 0 + \cos\overline{x}\operatorname{sen} 0) = \operatorname{sen}\overline{x}$$

$$\cos x_n = \cos(\overline{x} + d_n) = (\cos\overline{x}\cos d_n - \operatorname{sen}\overline{x}\operatorname{sen} d_n) \to (\cos\overline{x}\cos 0 - \operatorname{sen}\overline{x}\operatorname{sen} 0) = \cos\overline{x}\ .$$

Esempio 4.4.4 *Le funzioni polinomiali e razionali sono continue.* Infatti, dai teoremi sul limite di somma e prodotto, se $x_n \to \overline{x} \in \mathbb{R}$ allora $P(x_n) \to P(\overline{x})$ per ogni polinomio $P(x)$. Se ora $f(x) = P(x)/Q(x)$, il suo dominio è naturale è $A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$, dunque per ogni $\overline{x} \in A$ e per ogni successione $\{x_n\}_n$ di punti di A tale che $x_n \to \overline{x}$, abbiamo $P(x_n) \to P(\overline{x})$ e $Q(x_n) \to Q(\overline{x}) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dunque $f(x_n) \to f(\overline{x})$ per il teorema sul limite del quoziente.

Ragionando come negli esempi precedenti, si dimostra facilmente la seguente

Proposizione 4.4.5 *Se due funzioni f e g sono continue su A, allora lo sono anche le funzioni valore assoluto $|f|$, somma $f+g$, prodotto fg e quoziente f/g (quest'ultima su $\{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$).*

Esempio 4.4.6 La funzione tangente è continua essendo $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$.

Anche la composizione di funzioni continue è continua:

Proposizione 4.4.7 *Se f è continua in $\overline{x}$ e g è continua in $\overline{y} = f(\overline{x})$, allora $g \circ f$ è continua in $\overline{x}$. In particolare, $g \circ f$ è continua se lo sono f e g.*

Dimostrazione: Presa $\{x_n\}_n \subset \operatorname{dom}(g \circ f)$ tale che $x_n \to \overline{x}$, allora $f(x_n) \to f(\overline{x})$ e dunque, posto $y_n = f(x_n)$, abbiamo $g(y_n) \to g(\overline{y})$, i.e. $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(\overline{x})$, come volevamo dimostrare. □

Corollario 4.4.8 *Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la funzione potenza x^k è continua. Inoltre, se $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, abbiamo*

$$\forall\,\{x_n\}_n\,, \quad x_n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} (x_n)^k \to +\infty & \textit{se} \quad k > 0 \\ (x_n)^k \to 0^+ & \textit{se} \quad k < 0\ . \end{cases}$$

Dimostrazione: La continuità è già stata provata. La seconda affermazione segue per $k > 0$ con un argomento di induzione su k, sapendo che è vera per $k = 1$ e osservando che $(x_n)^{k+1} = x_n \cdot (x_n)^k$. Se $k < 0$ si osserva che $(x_n)^k = 1/(x_n)^{-k}$ e si passa ai reciproci. □

Continuità e andamento di funzioni tipo radice

Proposizione 4.4.9 *Per ogni $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la funzione $x^{1/k}$ è continua.*

Vedremo che la continuità delle funzioni radice $x^{1/k}$ su $[0, +\infty[$ è una conseguenza del fatto $x^{1/k}$ è l'inversa della funzione potenza $x^k : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, che è una funzione continua definita su un intervallo, cf. proposizione 5.3.9.

Proposizione 4.4.10 *Per ogni $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ abbiamo*

$$\forall\,\{x_n\}_n\,, \quad x_n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} (x_n)^{1/k} \to +\infty & \textit{se} \quad k > 0 \\ (x_n)^{1/k} \to 0^+ & \textit{se} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$\forall\,\{x_n\}_n\,, \quad x_n \to 0^+ \Rightarrow \begin{cases} (x_n)^{1/k} \to 0^+ & \textit{se} \quad k > 0 \\ (x_n)^{1/k} \to +\infty & \textit{se} \quad k < 0\ . \end{cases}$$

Dimostrazione: Se $k > 0$ e $x_n \to +\infty$ allora definitivamente $x_n > 0$, dunque $1/x_n \to 0^+$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente $0 < 1/x_n < \varepsilon^k$ e quindi per la monotonia della radice $0 < 1/(x_n)^{1/k} < \varepsilon$, da cui deduciamo che $1/(x_n)^{1/k} \to 0^+$ e dunque che $(x_n)^{1/k} \to +\infty$. Se $k < 0$ si passa ai reciproci. Il caso $x_n \to 0^+$ si riconduce al precedente, ponendo $y_n = 1/x_n$ e osservando che $(x_n)^{1/k} = 1/(y_n)^{1/k}$ e che $y_n \to +\infty$. □

Osservazione 4.4.11 Grazie alla continuità della composizione di funzioni continue ed alle proposizioni precedenti, deduciamo quindi la continuità delle funzioni potenze ad esponente razionale, $f(x) = x^{m/n}$, nonché l'andamento delle successioni tipo $f(x_n)$ quando $x_n \to +\infty$ o $x_n \to 0^+$ a seconda del segno dell'esponente.

4.5 Limiti di successioni fondamentali

Limiti tipo seno e coseno

Proposizione 4.5.1 *Se* $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$, *allora* $\dfrac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} \to 1$.

Dimostrazione: Ricordiamo[2] che per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $0 < |x| < \pi/2$ risulta $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$. Quindi, poiché definitivamente $0 < |x_n| < \pi/2$, allora definitivamente $\cos x_n < \dfrac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} < 1$. Essendo $\cos x_n \to 1$, basta applicare il teorema dei carabinieri. □

Proposizione 4.5.2 *Se* $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$, *allora* $\dfrac{1-\cos x_n}{{x_n}^2} \to \dfrac{1}{2}$.

Dimostrazione: Infatti, moltiplicando e dividendo per $(1 + \cos x_n)$ che è definitivamente diversa da zero in quanto definitivamente $0 < |x_n| < \pi/2$, abbiamo

$$\frac{1-\cos x_n}{{x_n}^2} = \frac{1-\cos^2 x_n}{(1+\cos x_n)\,{x_n}^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x_n}{{x_n}^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x_n} = \Big(\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\Big)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x_n} .$$

Poiché $\operatorname{sen} x_n/x_n \to 1$ e $(1 + \cos x_n) \to 1 + 1 = 2$, l'asserto segue dalle proprietà algebriche del limite. □

Successioni potenze ed esponenziali

Osservazione 4.5.3 Abbiamo già visto che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ le funzioni potenze x^k e $x^{1/k}$ (se $k \neq 0$) sono continue, quindi lo sono anche le funzioni x^q con $q \in \mathbb{Q}$. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 0 \\ 1 & \text{se } q = 0 \\ 0^+ & \text{se } q < 0 . \end{cases}$$

Proposizione 4.5.4 *Per le* successioni di tipo esponenziale $n \mapsto q^n$ *abbiamo:*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \textit{se } q > 1 \\ 1 & \textit{se } q = 1 \\ 0 & \textit{se } -1 < q < 1 \\ \textit{non esiste} & \textit{se } q \leq -1 . \end{cases}$$

Dimostrazione: Infatti, se $q > 1$, usando la diseguaglianza di Bernoulli 3.4 con $a = q - 1$, maggioriamo

$$q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na = 1 + n(q - 1) \to +\infty .$$

Se $q = 1$ o $q = 0$ è ovvio. Se $0 < |q| < 1$, allora

$$0 \leq |q|^n = \frac{1}{(1/|q|)^n} \to 0$$

per il teorema sul limite del reciproco, essendo $(1/|q|) > 1$. Se $q = -1$ abbiamo $q^n = (-1)^n$, che non ha limite. Infine, se $q < -1$, allora $q^{2n} = (-|q|)^{2n} = |q|^{2n} = (|q|^2)^n \to +\infty$, mentre $q^{2n+1} = (-|q|)^{2n+1} = -|q|^{2n+1} = -|q| \cdot (|q|^2)^n \to -\infty$, quindi la successione non ha limite perchè le sue sottosuccessioni di posto pari e dispari divergono positivamente e negativamente, rispettivamente. □

Esempio 4.5.5 Ricordando la formula (3.3) sulla somma di una progressione geometrica, e applicando le proprietà algebriche dei limiti, otteniamo immediatamente che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 . \end{cases}$$

[2] Se $0 < x < \pi/2$, sappiamo che $0 < \operatorname{sen} x < x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Dividendo per $\operatorname{sen} x > 0$ abbiamo anche $1 < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$ e passando ai reciproci $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$. Poiché $\cos x$ è pari, ed essendo $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se $-\pi/2 < x < 0$, otteniamo le diseguaglianze di cui sopra.

Criterio del rapporto per successioni

Proposizione 4.5.6 *Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che definitivamente $a_n > 0$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \ .$$

Allora $a_n \to 0$ se $0 \le l < 1$ e $a_n \to +\infty$ se $l > 1$.

Osservazione 4.5.7 Se il limite $l = 1$, il criterio non dice nulla sul limite: infatti, se $a_n = n$ abbiamo che $a_{n+1}/a_n = (n+1)/n = (1+1/n) \to 1$ e $a_n \to +\infty$, mentre se $b_n = 1/n$ abbiamo che $b_{n+1}/b_n = n/(n+1) \to 1$ e $b_n \to 0$.

Osserviamo che nel caso $0 \le l < 1$, scegliendo una costante $q < 1$ tale che $l < q$, ad esempio $q = (l+1)/2$, dalla definizione di limite deduciamo che definitivamente $a_{n+1}/a_n \le q$. Analogamente, nel caso $l > 1$, scegliendo questa volta una costante $q > 1$ tale che $l > q$ (ad esempio ancora $q = (l+1)/2$ se $l \in \mathbb{R}$) deduciamo che definitivamente $a_{n+1}/a_n \ge q$. Quindi la dimostrazione del criterio del rapporto si riconduce a quella del seguente criterio più generale:

Proposizione 4.5.8 *Sia $\{a_n\}_n$ una successione definitivamente positiva. Se esiste $0 < q < 1$ tale che definitivamente $a_{n+1}/a_n \le q$, allora $a_n \to 0$. Se invece esiste $q > 1$ tale che definitivamente $a_{n+1}/a_n \ge q$, allora $a_n \to +\infty$.*

Dimostrazione: Nel primo caso, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \ge \overline{n}$ risulta $0 < a_{n+1} \le q\, a_n$, con $0 < q < 1$. Allora $0 < a_{\overline{n}+1} \le q\, a_{\overline{n}}$ ed anche $0 < a_{\overline{n}+2} \le q\, a_{\overline{n}+1} \le q^2 a_{\overline{n}}$. Iterando l'argomento, per induzione segue facilmente che

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\,, \quad 0 < a_{\overline{n}+m} \le q^m a_{\overline{n}} \ .$$

Posto quindi $\overline{n} + m = n$, in maniera equivalente scriviamo che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, n \ge \overline{n}\,, \quad 0 < a_n \le q^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}} = \frac{a_{\overline{n}}}{q^{\overline{n}}} \cdot q^n \ . \tag{4.7}$$

Poiché $q^n \to 0$ e $a_{\overline{n}}/q^{\overline{n}}$ è una costante positiva, per il teorema dei carabinieri otteniamo che $a_n \to 0$.

In maniera analoga, nel secondo caso esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \ge \overline{n}$ risulta $a_{n+1} \ge q\, a_n > 0$, con $q > 1$. Quindi, come sopra otteniamo che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, n \ge \overline{n}\,, \quad a_n \ge \frac{a_{\overline{n}}}{q^{\overline{n}}} \cdot q^n \ . \tag{4.8}$$

Poiché $q^n \to +\infty$ e $a_{\overline{n}}/q^{\overline{n}}$ è una costante positiva, dal teorema del confronto segue che $a_n \to +\infty$. □

Esempio 4.5.9 Abbiamo che $n! \to +\infty$, in quanto $(n+1)!/n! = (n+1) \to +\infty$. Questo limite segue anche confrontando $n! \ge n$ per ogni n positivo. In maniera analoga, essendo $n^n \ge n$ per n positivo, deduciamo che anche $n^n \to +\infty$.

Confronto fra successioni divergenti

Abbiamo visto che le successioni potenze n^k, con $k \in \mathbb{N}$, esponenziali q^n, con base $q > 1$, ed anche $n!$ e n^n hanno tutte limite $+\infty$. Nel calcolo di limiti occorre però talvolta sapere anche quali sono più veloci. Vediamo adesso che le successioni scritte sopra sono in ordine crescente di velocità, i.e. le esponenziali dominano sulle potenze, il fattoriale sulle esponenziali ed infine n^n sul fattoriale.

Proposizione 4.5.10 *Abbiamo:*

i) *per ogni $k \in \mathbb{Q}$ risulta* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^k} = +\infty$ *se $q > 1$ ed invece* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^k} = 0$ *se $0 < |q| < 1$*

ii) *per ogni $q \in \mathbb{R}$ risulta* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0^+$.

Dimostrazione: i) Se $q > 1$ e $k \in \mathbb{Q}$, posto $a_n = q^n/n^k$ abbiamo $a_n > 0$ e $a_{n+1} = q^{n+1}/(n+1)^k$ e dunque $a_{n+1}/a_n = q/(1+1/n)^k \to q$. Quindi $a_n \to +\infty$ per il criterio del rapporto.

Se invece $0 < |q| < 1$, essendo $(1/|q|) > 1$, allora

$$0 \leq \Big|\frac{q^n}{n^k}\Big| = \Big(\frac{(1/|q|)^n}{n^{-k}}\Big)^{-1} \to 0$$

per il teorema sul limite del reciproco, da cui segue l'asserto per confronto.

ii) Posto invece $a_n = q^n/n!$, se $q > 0$ abbiamo $a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n = q/(n+1) \to 0$, quindi per il criterio del rapporto $a_n \to 0$. Per $q = 0$ è ovvio, mentre per $q < 0$ abbiamo $0 \leq |q^n/n!| = |q|^n/n! \to 0$.

iii) Osserviamo infine che per n positivo $0 < \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{2 \cdot 3 \cdots n}{n^{n-1}} \leq \dfrac{1}{n} \to 0$. □

Criterio della radice per successioni

Proposizione 4.5.11 *Per ogni $q > 0$ abbiamo che $q^{1/n} \to 1$.*

Dimostrazione: Se $q > 1$, allora $q^{1/n} > 1$. Usando la diseguaglianza di Bernoulli 3.4 con $a_n = q^{1/n} - 1 > 0$, stimiamo

$$q = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n \quad \Rightarrow \quad 0 < a_n \leq \frac{q-1}{n} \to 0$$

da cui otteniamo $a_n \to 0$ e dunque $q^{1/n} \to 1$, Se $q = 1$ la tesi è ovvia, mentre se $0 < q < 1$ scriviamo $q^{1/n} = 1/(1/q)^{1/n}$ e il limite è ancora 1 per il teorema del limite del reciproco, in quanto $(1/q) > 1$. □

Possiamo ora dimostrare il *criterio della radice per successioni.*

Proposizione 4.5.12 *Sia $\{a_n\}_n$ una successione di reali positivi. Se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ allora anche $\sqrt[n]{a_n} \to l$.*

Dimostrazione: Supponiamo $0 < l < +\infty$, i casi $l = 0$ ed $l = +\infty$ essendo più facili da dimostrare. Fissato $V =]\overline{H}, \overline{K}[\in \mathcal{I}_l$, scegliamo $H, K > 0$ tali che $\overline{H} < H < l < K < \overline{K}$. Per ipotesi esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ risulta $H < a_{n+1}/a_n < K$. Ragionando come nella dimostrazione della proposizione 4.5.8, e posti $q_0 = a_{\overline{n}}/H^{\overline{n}} > 0$ e $q_1 = a_{\overline{n}}/K^{\overline{n}} > 0$, otteniamo che

$$\forall\, n \geq \overline{n}\,, \quad H^n\, q_0 \leq a_n \leq K^n\, q_1$$

e per la monotonia della radice n-esima che

$$\forall\, n \geq \overline{n}\,, \quad H \cdot \sqrt[n]{q_0} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq K \cdot \sqrt[n]{q_1}\ .$$

Ma $H \cdot \sqrt[n]{q_0} \to H \cdot 1$ e $K \cdot \sqrt[n]{q_1} \to K \cdot 1$, dunque definitivamente $H \cdot \sqrt[n]{q_0} > \overline{H}$ e $K \cdot \sqrt[n]{q_0} < \overline{K}$. Allora abbiamo ottenuto che definitivamente

$$\overline{H} < H \cdot \sqrt[n]{q_0} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq K \cdot \sqrt[n]{q_1} < \overline{K}$$

i.e. che definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \in V$, come volevamo dimostrare. □

Esempio 4.5.13 Grazie al criterio della radice, studiamo il comportamento di successioni del tipo $\sqrt[n]{a_n}$, dove $a_n \to +\infty$ con diverse velocità.
Per ogni $q \in \mathbb{Q}^+$ abbiamo $\sqrt[n]{n^q} \to 1$. Infatti, posto $a_n = n^q$, abbiamo $a_{n+1}/a_n = [(n+1)/n]^q \to 1$, per la continuità di x^q nel punto 1.
Ovviamente $\sqrt[n]{q^n} \equiv q$ per ogni $q > 1$, mentre $\sqrt[n]{n^n} = n \to +\infty$.
Infine abbiamo $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$. Infatti, posto $a_n = n!$, otteniamo $a_{n+1}/a_n = (n+1)!/n! = (n+1) \to +\infty$.

Medie aritmetiche

Ad una successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ corrisponde la successione $\{\sigma_n\}_n$ delle *medie aritmetiche* dei primi n termini

$$\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\ .$$

Proposizione 4.5.14 *Se $a_n \to l$ allora anche $\sigma_n \to l$.*

Dimostrazione: Supponiamo $l \in \mathbb{R}$, dal momento che per $l = \pm\infty$ la dimostrazione è più facile. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{n}$ tale che $|a_i - l| < \varepsilon$ per ogni $i > \overline{n}$. Stimiamo prima

$$|\sigma_n - l| = \Big|\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) - \frac{1}{n}\cdot nl\Big| = \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - l)\Big| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i - l|$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato più volte la diseguaglianza triangolare. Quindi per $n > \overline{n}$ abbiamo

$$|\sigma_n - l| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\overline{n}}|a_i - l| + \frac{1}{n}\sum_{i=\overline{n}+1}^{n}|a_i - l| \le \frac{c}{n} + \frac{n-\overline{n}}{n}\,\varepsilon\,,$$

dove poniamo $c = \sum_{i=1}^{\overline{n}}|a_i - l|$. Poiché $c/n \to 0$ e $\frac{n-\overline{n}}{n}\,\varepsilon \to \varepsilon$, allora definitivamente $c/n + \frac{n-\overline{n}}{n} < 2\varepsilon$ e dunque definitivamente $|\sigma_n - l| < 2\varepsilon$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 4.5.15 La successione delle medie aritmetiche può avere limite anche se a_n non ha limite. Preso infatti $a_n = (-1)^n$, allora $\sigma_n = 0$ se n è pari e $\sigma_n = -1/n$ se n è dispari, dunque $|\sigma_n| \le 1/n$ ed in definitiva $\sigma_n \to 0$.

Esempio 4.5.16 Da quanto sopra deduciamo che $\dfrac{1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n}}{n} \to 0$, essendo $1/\sqrt{n} \to 0$.

4.6 Il numero di Nepero

Studiamo ora le successioni $\mathsf{e}_n := \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n$ e $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. Mostreremo che entrambe convergono ad un numero reale compreso tra 2 e 3, il *numero di Nepero* e.

Proposizione 4.6.1 *La successione $\{\mathsf{e}_n\}_n$ è strettamente crescente e limitata superiormente, inoltre $2 \le \mathsf{e}_n < 3 - 1/12$ per ogni n. Quindi $\{\mathsf{e}_n\}_n$ converge.*

Dimostrazione: Dalla diseguaglianza di Bernoulli (3.4), con $a = 1/n$, stimamo $\mathsf{e}_n \ge 1 + n(1/n) = 2$ per ogni n. Inoltre, dalla formula del binomio di Newton 3.9, con $a = 1$ e $b = 1/n$, scriviamo

$$\mathsf{e}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}$$

e dunque, per ogni $n \ge 2$,

$$\mathsf{e}_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}P_{k,n}$$

dove per ogni intero $2 \le k \le n$ abbiamo posto

$$P_{k,n} := \prod_{i=0}^{k-1}\Big(1 - \frac{i}{n}\Big) = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\,.$$

Lemma 4.6.2 *Valgono le seguenti proprietà:*

i) *per ogni k, n con $2 \le k \le n$ risulta $0 < P_{k,n} < 1$ e $P_{k,n} < P_{k,n+1}$*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{k,n} = 1$ *per ogni k*

iii) $\mathsf{e}_n \le b_n$ *per ogni $n \ge 2$*

iv) $\mathsf{e}_n < \mathsf{e}_{n+1}$ *per ogni n.*

Dimostrazione: i) Infatti $0 < (1 - i/n) < 1$ per ogni $i = 1, \dots, k-1$ e $(1 - i/n) < (1 - i/(n+1))$.
ii) Osserviamo che $(1 - i/n) \to 1$ per ogni fissato $i = 1, \dots, k-1$.
iii) Stimiamo $\mathsf{e}_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k!} P_{k,n} \le \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k!} = b_n$.
iv) Abbiamo $\mathsf{e}_1 = 2 < 9/4 = \mathsf{e}_2$, mentre per ogni $n \ge 2$, essendo $P_{k,n} < P_{k,n+1}$, maggioriamo

$$\mathsf{e}_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n} < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n+1} < 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} P_{k,n+1} = \mathsf{e}_{n+1} \, .$$

□

Troviamo ora un maggiorante per la successione strettamente crescente $\{b_n\}_n$.

Proposizione 4.6.3 *$b_n < 3 - 1/12$ per ogni n.*

Dimostrazione: Per induzione si dimostra facilmente[3] che $k! \ge 2^{k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora stimiamo per ogni $n \ge 4$

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} \le \frac{8}{3} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \, .$$

Ricordiamo ora che la somma di una progressione geometrica (3.3) con ragione $q = 1/2$ dà la stima

$$\sum_{h=0}^{m} \Big(\frac{1}{2}\Big)^h = \frac{1 - (1/2)^{m+1}}{1 - 1/2} < \frac{1}{1/2} = 2 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} \, .$$

Posto $h = k - 4$, possiamo quindi maggiorare

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=4}^{n} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1} = \sum_{h=0}^{n-4} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{h+3} = \frac{1}{8} \sum_{h=0}^{n-4} \Big(\frac{1}{2}\Big)^h < \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

e dunque $b_n < \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{35}{12} = 3 - \dfrac{1}{12}$, come volevamo dimostrare. □

Essendo quindi $\{\mathsf{e}_n\}_n$ una successione strettamente crescente e limitata superiormente da $3 - 1/12$, per il teorema 4.2.14 essa converge ad un numero reale strettamente compreso tra 2 e 3. □

Definizione 4.6.4 Chiamiamo numero di Nepero il limite e della successione $\{\mathsf{e}_n\}_n$, i.e.

$$\mathsf{e} := \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n , \qquad 2 < \mathsf{e} < 3 - 1/12. \tag{4.9}$$

Osservazione 4.6.5 Il numero e non è razionale e si approssima facilmente con $\mathsf{e} \simeq 2.7$. Si può anche dimostrare che e *non è algebrico*, i.e. che non esiste nessuna equazione polinomiale a coefficienti interi che sia risolta da e. Si noti che $\sqrt{2}$ è algebrico, in quanto risolve l'equazione $x^2 - 2 = 0$.

Esempio 4.6.6 Vediamo facilmente che $\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{n^2} = +\infty$ e che $\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \dfrac{1}{n^2}\Big)^n = 1$.
Il primo limite si ottiene dal teorema del confronto, in quanto $\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{n^2} = (\mathsf{e}_n)^n \ge 2^n \to +\infty$.
Per il secondo, scriviamo $\Big(1 + \dfrac{1}{n^2}\Big)^n = (\mathsf{e}_{n^2})^{1/n}$. Essendo $1 \le \mathsf{e}_{n^2} \le 3$ per ogni n, allora per la monotonia della funzione $x^{1/n}$ sui reali non negativi risulta $1 \le (\mathsf{e}_{n^2})^{1/n} \le 3^{1/n}$. Poiché $3^{1/n} \to 1$, basta applicare il teorema dei carabinieri.

Proposizione 4.6.7 *Anche la successione $b_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ converge al numero di Nepero e.*

[3] Tale disuguaglianza è vera per $k = 0, 1$. Inoltre, supposto che sia vera per un naturale $k \ge 1$, essa vale anche per $k+1$, in quanto $(k+1)! = (k+1)\, k! \ge (k+1)\, 2^{k-1} \ge 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$.

Dimostrazione: Osserviamo che è sufficiente mostrare che

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\,, \quad b_m \le \mathsf{e}\,. \tag{4.10}$$

Infatti, se vale (4.10), allora per la iii) definitivamente $\mathsf{e}_n \le b_n \le \mathsf{e}$ e l'asserto segue dal teorema dei carabinieri, in quanto $\mathsf{e}_n \to \mathsf{e}$. Per provare la (4.10), che è ovviamente vera per $m = 0, 1$, fissato $m \ge 2$ stimiamo per ogni $n \ge m$

$$\mathsf{e}_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\, P_{k,n} \ge b_n^{(m)}\,, \qquad b_n^{(m)} := 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\, P_{k,n}\ .$$

Dalla proprietà ii) otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(m)} = \lim_{n\to\infty} \Big(2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\, P_{k,n}\Big) = 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} = b_m$$

mentre sappiamo che $\mathsf{e}_n \to \mathsf{e}$. La successione $\{\mathsf{e}_n - b_n^{(m)}\}_n$ è non negativa ed ha limite $\mathsf{e} - b_m$. Quindi, dalla permanenza del segno, deduciamo che il limite $\mathsf{e} - b_m \ge 0$, i.e. la diseguaglianza (4.10). □

Osservazione numerica

Anche se entrambe le successioni e_n e b_n convergono ad e, la velocità di convergenza della seconda è maggiore, quindi b_n è più utile nelle stime numeriche di e. Cerchiamo ad esempio il primo elemento delle due successioni che dista meno di 10^{-3} da e. Si verifica che il primo naturale n tale che $(\mathsf{e} - \mathsf{e}_n) < 10^{-3}$ è $n = 1360$, mentre il primo naturale tale che $(\mathsf{e} - b_n) < 10^{-3}$ è $n = 6$.

Le stime sul numero di Nepero si ottengono per esempio costruendo oltre ad $\{\mathsf{e}_n\}_n$ un'altra successione $\{c_n\}_n$ che converge ad e dall'alto, i.e. decrescente. Posto infatti $c_n := (1 + 1/n)^{n+1}$, poiché $c_n = \mathsf{e}_n \cdot (1 + 1/n)$, allora ovviamente $c_n \to \mathsf{e}$. Inoltre, si può dimostrare che $c_n > c_{n+1}$ per ogni n. Allora abbiamo che

$$\forall\, n\,, \quad \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n} \le \mathsf{e} \le \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1}\ . \tag{4.11}$$

Quindi, se ad esempio e_n e c_n hanno le prime tre cifre dopo la virgola uguali, si ottiene un'approssimazione di e con errore più piccolo di 10^{-3}, i.e. con tre cifre decimali esatte.

La formula di Stirling

Per approssimare il fattoriale si usa la *formula di Stirling*

$$\forall\ n \ge 1, \quad \frac{n^n}{\mathsf{e}^n} \le n! \le n\mathsf{e}\, \frac{n^n}{\mathsf{e}^n}\ . \tag{4.12}$$

La sua dimostrazione fa uso delle diseguaglianze (4.11) e del principio di induzione.

4.7 Esponenziale e logaritmo

La funzione esponenziale

Consideriamo ora le successioni $\mathsf{e}_n(x) := \Big(1 + \dfrac{x}{n}\Big)^n$ e $b_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, entrambe dipendenti da un parametro reale $x \in \mathbb{R}$. Si noti che per $x = 1$ abbiamo $\mathsf{e}_n(1) = \mathsf{e}_n$ e $b_n(1) = b_n$. Con un po' di fatica si dimostra la seguente

Proposizione 4.7.1 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ le successioni $\{\mathsf{e}_n(x)\}_n$ e $\{b_n(x)\}_n$ convergono allo stesso limite $l(x)$, dove $l(0) = 1$ ed $l(1) = \mathsf{e}$. Inoltre $l(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e*

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad l(x_1)(x_2 - x_1) \le l(x_2) - l(x_1) \le l(x_2)(x_2 - x_1)\ .$$

Vale inoltre la seguente importante proprietà, detta di semigruppo:

Proposizione 4.7.2 *Per ogni* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $l(x_1 + x_2) = l(x_1) \cdot l(x_2)$.

Di conseguenza, possiamo ora verificare che

$$\forall\, x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}\,, \quad l(n/m) = [l(1)]^{n/m} = \mathsf{e}^{n/m}\;. \tag{4.13}$$

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo per induzione $l(nx) = (l(x))^n$, in particolare $l(n) = \mathsf{e}^n$. Inoltre, se $m \in \mathbb{N}^+$ scriviamo $\mathsf{e} = l(1) = l(m \cdot (1/m)) = [l(1/m)]^m$, dunque $l(1/m) = l(1)^{1/m} = \mathsf{e}^{1/m}$, da cui otteniamo $l(n/m) = l(1/m)^n = (l(1)^{1/m})^n = \mathsf{e}^{n/m}$. Infine osseviamo che se $-q$ è un razionale negativo, allora $l(-q)\, l(q) = l(0) = 1$, da cui $l(-q) = l(q)^{-1} = [l(1)^q]^{-1} = [l(1)]^{-q} = \mathsf{e}^{-q}$.

Definizione 4.7.3 La funzione *esponenziale* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $\exp(x) = \mathsf{e}^x := l(x)$.

Osservazione 4.7.4 Dunque la proposizione 4.7.2 esprime la prima proprietà delle potenze nel caso di base e : per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\mathsf{e}^{x_1+x_2} = \mathsf{e}^{x_1} \cdot \mathsf{e}^{x_2}$.

Proposizione 4.7.5 *La funzione* exp *è continua, positiva e strettamente crescente. Inoltre*

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{e}^{x_1}(x_2 - x_1) \le \mathsf{e}^{x_2} - \mathsf{e}^{x_1} \le \mathsf{e}^{x_2}(x_2 - x_1)\;.$$

Dimostrazione: Infatti, essendo positiva e valendo le disuguaglianze di cui sopra, segue che se $x_1 < x_2$ allora $\mathsf{e}^{x_1} < \mathsf{e}^{x^2}$, mentre se $x_1, x_2 \le M$ si stima $|\mathsf{e}^{x_2} - \mathsf{e}^{x_1}| \le \mathsf{e}^M \cdot |x_2 - x_1|$. Ora se $x_n \to \overline{x}$, la successione $\{x_n\}_n$ è limitata superiormente, quindi esiste $M > 0$ tale che $\overline{x} \le M$ e $x_n \le M$ per ogni n, per cui $|\mathsf{e}^{x_n} - \mathsf{e}^{\overline{x}}| \le \mathsf{e}^M \cdot |x_n - \overline{x}|$ per ogni n. Per confronto segue la continuità di exp in ogni $\overline{x} \in \mathbb{R}$. □

Osservazione 4.7.6 Di conseguenza, scelti $x_1 = 0$ e $x_2 = x$, e poi $x_1 = x$ e $x_2 = 0$, otteniamo

$$\begin{array}{lll} x > 0 & \Rightarrow & x \le \mathsf{e}^x - 1 \le \mathsf{e}^x \cdot x \\ x < 0 & \Rightarrow & \mathsf{e}^x \cdot (-x) \le 1 - \mathsf{e}^x \le 1 \cdot (-x) \end{array}$$

e dunque

$$\forall\, x\,, \quad x \le \mathsf{e}^x - 1 \le x\, \mathsf{e}^x\;.$$

In particolare, abbiamo che

$$\forall\, x\,, \quad \mathsf{e}^x \ge 1 + x \tag{4.14}$$

ed infine

$$\forall\, x \ne 0\,, \quad \min\{x, 1\} \le \frac{\mathsf{e}^x - 1}{x} \le \max\{1, \mathsf{e}^x\}\;. \tag{4.15}$$

Valgono allora i seguenti limiti fondamentali dell'esponenziale:

Proposizione 4.7.7 *Se* $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$, *allora* $\dfrac{\mathsf{e}^{x_n} - 1}{x_n} \to 1$.
Inoltre, $x_n \to +\infty \Rightarrow \mathsf{e}^{x_n} \to +\infty$ *ed anche* $x_n \to -\infty \Rightarrow \mathsf{e}^{x_n} \to 0^+$.

Dimostrazione: Il primo limite fondamentale segue dalla proprietà (4.15) con $x = x_n$, grazie al teorema dei carabinieri, osservando che $\mathsf{e}^{x_n} \to \mathsf{e}^0 = 1$ per continuità. Il secondo dalla (4.14), ed il terzo dall'osservazione che $\mathsf{e}^{x_n} = 1/\mathsf{e}^{-x_n}$, grazie al teorema sul limite del reciproco ed al fatto che $-x_n \to +\infty$ se $x_n \to -\infty$. □

Osservazione 4.7.8 In particolare, abbiamo che $\sup \exp = +\infty$ e $\inf \exp = 0$, che non è minimo.

La funzione logaritmo

Sappiamo che la funzione exp è continua e strettamente crescente, con $\mathsf{e}^x > 0$ per ogni x, dunque la sua immagine è contenuta in $]0, +\infty[$. Inoltre, sappiamo che $\inf \exp = 0$ e che exp non è limitata superiormente. Grazie al teorema dei valori intermedi, cf. l'osservazione 5.3.6, otterremo che la sua immagine è esattamente $]0, +\infty[$. Dunque la funzione $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è biunivoca ed invertibile.

Definizione 4.7.9 La funzione *logaritmo* $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è l'inversa della funzione esponenziale.

Quindi abbiamo

$$\forall\, x > 0\,,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\,, \quad \log x = y \iff \mathsf{e}^y = x$$

ed ovviamente

$$\forall\, x > 0\,, \quad \mathsf{e}^{\log x} = x\,, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}\,, \quad \log(\mathsf{e}^y) = y\ .$$

Inoltre la funzione log è biunivoca e crescente, come inversa di una funzione crescente. Essendo $\log 1 = 0$, abbiamo anche che $\log x > 0$ se $x > 1$ e $\log x < 0$ se $0 < x < 1$. Poiché $\mathsf{e}^y \geq 1 + y$ per ogni y, posto $y = \log x$ otteniamo che $\log x \leq x - 1$ per ogni $x > 0$. Inoltre, grazie alla proposizione 5.3.9, dedurremo che *la funzione* log *è continua*, essendo inversa di una funzione continua su $\mathbb{R}$.

Fissati $x_1, x_2 > 0$, abbiamo $\exp(\log x_1 + \log x_2) = \exp(\log x_1) \cdot \exp(\log x_2) = x_1\, x_2 = \exp(\log(x_1\, x_2))$. Quindi, per l'iniettività dell'esponenziale otteniamo che

$$\forall\, x_1, x_2 > 0\,, \quad \log(x_1\, x_2) = \log x_1 + \log x_2\ .$$

Scelto $x_1 = x > 0$ e $x_2 = 1/x_1 > 0$, essendo $\log 1 = 0$ otteniamo in particolare che

$$\forall\, x > 0\,, \quad \log(1/x) = -\log x$$

e dunque

$$\forall\, x_1, x_2 > 0\,, \quad \log(x_1/x_2) = \log x_1 - \log x_2\ .$$

Inoltre, per induzione otteniamo che $\log(x^n) = n \log x$ per ogni $x > 0$ ed $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, per ogni $x > 0$ ed $m \in \mathbb{N}^+$, scriviamo $m \log(x^{1/m}) = \log x$ e dunque che $\log(x^{1/m}) = (1/m) \log x$. Quindi $\log(x^{n/m}) = n \log(x^{1/m}) = (n/m)\, \log x$ ed infine, essendo $\log(x^{-n/m}) = -\log(x^{n/m})$, abbiamo che:

$$\forall\, q \in \mathbb{Q}\,, \quad \forall\, x > 0\,, \quad \log(x^q) = q\, \log x\ . \tag{4.16}$$

Osservazione 4.7.10 Dalla proprietà (4.16) otteniamo che $(\mathsf{e}^y)^q = \mathsf{e}^{yq}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$. Posto infatti $x = \mathsf{e}^y$, i.e. $y = \log x$, scriviamo

$$\mathsf{e}^{yq} = \exp(q\, \log x) = \exp(\log(x^q)) = x^q = (\mathsf{e}^y)^q\ .$$

Dalle proprietà dell'esponenziale, otteniamo infine i seguenti limiti fondamentali del logaritmo:

Proposizione 4.7.11 *Se* $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$*, allora* $\dfrac{\log(1 + x_n)}{x_n} \to 1$.
Inoltre, $x_n \to +\infty \Rightarrow \log x_n \to +\infty$ *ed anche* $x_n \to 0^+ \Rightarrow \log x_n \to -\infty$.

Dimostrazione: Nel primo caso, abbiamo che definitivamente $0 < |x_n| < 1$. Posto $y_n = \log(1+x_n)$, i.e. $x_n = \exp(y_n) - 1$, allora $x_n \to 0$ se e solo se $y_n \to 1$. Quindi $(\exp(y_n) - 1)/y_n \to 1$, i.e. $x_n/\log(1+x_n) \to 1$, da cui segue il primo limite, passando ai reciproci.

Posto invece definitivamente $y_n = \log x_n \iff x_n = \exp(y_n)$, allora $x_n \to +\infty \Rightarrow \exp(y_n) \to +\infty \Rightarrow y_n \to +\infty \Rightarrow \log x_n \to +\infty$. Analogamente, $x_n \to 0^+ \Rightarrow \exp(y_n) \to 0^+ \Rightarrow y_n \to -\infty \Rightarrow \log x_n \to -\infty$. □

Funzioni esponenziali

Dalla proprietà (4.16) deduciamo che per ogni $a > 0$ e $q \in \mathbb{Q}$, $\exp(q\, \log a) = \exp(\log(a^q)) = a^q$. Poiché la funzione exp è definita su tutto $\mathbb{R}$, possiamo dare la seguente

Definizione 4.7.12 Per ogni $a > 0$ la *funzione esponenziale di base* a è la funzione reale $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad a^x := \exp(x\, \log a)\ .$$

Se $a = 1$, allora $\log 1 = 0$ e dunque 1^x è la funzione costante uguale ad 1 (ad esempio, $1^\pi = 1$).

Se $a > 1$, allora $\log a > 0$, dunque $x \mapsto x \log a$ è strettamente crescente. Per la monotonia della funzione exp deduciamo quindi che a^x è strettamente crescente. Analogamente, se $0 < a < 1$, allora $\log a < 0$ e $x \mapsto x\, \log a$ è strettamente decrescente, dunque a^x è anch'essa strettamente decrescente. Inoltre a^x è continua, come composizione di funzioni continue.

Dall'andamento della funzione exp a $\pm\infty$, otteniamo immediatamente:

Proposizione 4.7.13 *Se $x_n \to +\infty$ allora $a^{x_n} \to +\infty$ se $a > 1$ e $a^{x_n} \to 0^+$ se $0 < a < 1$. Inoltre, se $x_n \to -\infty$ allora $a^{x_n} \to 0^+$ se $a > 1$ e $a^{x_n} \to +\infty$ se $0 < a < 1$.*

Poiché dunque $x \mapsto x \log a$ è suriettiva, mentre exp ha immagine $]0, +\infty[$, deduciamo che l'immagine di a^x è esattamente $]0, +\infty[$, tranne ovviamente nel caso $a = 1$.

Dal limite fondamentale di exp otteniamo anche:

Proposizione 4.7.14 *Se $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x_n \to 0$, allora $\dfrac{a^{x_n} - 1}{x_n} \to \log a$ per ogni $a > 0$.*

Dimostrazione: Se $a \neq 1$, essendo $\log a \neq 0$ abbiamo

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{\exp(x_n \log a) - 1}{x_n} = \frac{\exp(x_n \log a) - 1}{x_n \log a} \cdot \log a \to 1 \cdot \log a \ .$$

Se invece $a = 1$, allora $(1^{x_n} - 1)/x_n = 0$ per ogni n (non è una forma indeterminata!) e $\log 1 = 0$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 4.7.15 Otteniamo ora le proprietà delle potenze: per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$, $(a^x)^q = a^{xq}$. Infatti sappiamo che valgono per $a = \mathsf{e}$, per cui scriviamo $a^{x_1+x_2} = \exp((x_1 + x_2) \log a) = \exp(x_1 \log a + x_2 \log a) = \exp(x_1 \log a) \cdot \exp(x_2 \log a) = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ ed inoltre $(a^x)^q = (\exp(x \log a))^q = \exp(qx \log a) = a^{xq}$. Infine ricaviamo la terza proprietà delle potenze: per ogni $a, b > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, $a^x \cdot b^x = (ab)^x$. Scriviamo infatti $a^x \cdot b^x = \exp(x \log a) \cdot \exp(x \log b) = \exp(x \log a + x \log b) = \exp(x(\log a + \log b)) = \exp(x \log(ab)) = (ab)^x$.

Funzioni logaritmiche

D'ora in poi *supporremo sempre* $a > 0$ **e** $a \neq 1$. Abbiamo visto che la funzione $a^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è biunivoca e strettamente monotona (crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$). Quindi ha inversa:

Definizione 4.7.16 Se $a > 0$ **e** $a \neq 1$, la funzione *logaritmo di base a* è la funzione $\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ data dall'inversa della funzione esponenziale a^x.

Dalla definizione segue che per $a = \mathsf{e}$ riotteniamo $\log_{\mathsf{e}} = \log$, che è detto *logaritmo naturale.* Inoltre

$$\forall\, x > 0\,,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\,,\quad \log_a x = y \iff a^y = x$$

ed ovviamente

$$\forall\, x > 0\,,\quad a^{\log_a x} = x\,,\quad \forall\, y \in \mathbb{R}\,,\quad \log_a(a^y) = y\ .$$

Quindi $x \mapsto \log_a x$ è strettamente crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$. Inoltre $\log_a 1 = 0$ in quanto $a^0 = 1$. Allora abbiamo che se $a > 1$, $\log_a x > 0 \iff x > 1$ e $\log_a x < 0 \iff 0 < x < 1$, mentre se $0 < a < 1$, $\log_a x < 0 \iff x > 1$ e $\log_a x > 0 \iff 0 < x < 1$. Infine vedremo che la funzione $\log_a$ è continua, essendo l'inversa di una funzione continua su $\mathbb{R}$.

Osservazione 4.7.17 Presi ora $a, b > 0$, con $a \neq 1$, essendo $b = a^{\log_a b}$ e prendendo il logaritmo naturale di ambo i membri abbiamo che $\log b = \log(a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot \log a$ e dunque, essendo $\log a \neq 0$,

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}\ . \tag{4.17}$$

In particolare abbiamo che

$$\log_{1/a} b = \frac{\log b}{\log(1/a)} = \frac{\log b}{-\log a} = -\frac{\log b}{\log a} = -\log_a b\ .$$

Grazie al cambio di base (4.17) ed alle analoghe proprietà del logaritmo in base e, si ottengono immediatamente le formule sull'andamento dei logaritmi:

Proposizione 4.7.18 *Se $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x_n \to 0$, allora $\dfrac{\log_a(x_n + 1)}{x_n} \to \dfrac{1}{\log a}$.*
Inoltre, se $x_n \to +\infty$, allora $\log_a x_n \to +\infty$ se $a > 1$ e $\log_a x_n \to -\infty$ se $0 < a < 1$. Infine, se $x_n \to 0^+$, allora $\log_a x_n \to -\infty$ se $a > 1$ e $\log_a x_n \to +\infty$ se $0 < a < 1$.

Usando la (4.17) si ottengono in maniera analoga anche le proprietà dei logaritmi di base a:

i) $\forall\, x_1, x_2 > 0\,, \quad \log_a(x_1\, x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_1$

ii) $\forall\, x > 0\,, \quad \log_a(1/x) = -\log_a x$

iii) $\forall\, x_1, x_2 > 0\,, \quad \log_a(x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_1$

iv) $\forall\, q \in \mathbb{Q}\,, \quad \forall\, x > 0\,, \quad \log_a(x^q) = q\, \log_a x\,.$

Osservazione 4.7.19 Di conseguenza tutti i logaritmi si recuperano a partire da quello naturale, tramite un cambio di base. In alcune applicazioni si utilizza la base 10, in quanto se ad esempio $x \simeq 10^n$, con $n \in \mathbb{Z}$, allora $\log_{10} x \simeq \log_{10}(10^n) = n$. Da questa osservazione nascono le scale in base logaritmica usate ad esempio in chimica per stabilire il grado di acidità (detto pH) di una sostanza.

Passaggio alla forma esponenziale

Sia $\{a_n\}_n$ una successione definitivamente positiva. Allora per ogni successione $\{b_n\}_n$ possiamo scrivere che definitivamente

$$(a_n)^{b_n} = \mathrm{e}^{\log((a_n)^{b_n})} = \mathrm{e}^{b_n \log(a_n)}\,. \tag{4.18}$$

Supponendo che $a_n \to l_a$ e $b_n \to l_b$, vogliamo calcolare il limite di $(a_n)^{b_n}$.

La continuità e l'andamento dell'esponenziale a $\pm\infty$ permettono dunque di calcolare il limite di $(a_n)^{b_n}$ una volta noto il limite della successione $b_n\ \log(a_n)$. Tranne che nei casi in cui all'esponente ci sia una forma indeterminata del tipo $0 \cdot (\pm\infty)$ o $\pm\infty \cdot 0$, il limite si risolve facilmente. Osserviamo che se $b_n \to 0$, allora $\log(a_n) \to -\infty$ se $a_n \to 0^+$ mentre $\log(a_n) \to +\infty$ se $a_n \to +\infty$. Questo dà luogo alle cosiddette forme indeterminate 0^0 e ∞^0. Se invece $b_n \to \pm\infty$, allora $\log(a_n) \to 0 \iff a_n \to 1$, per cui abbiamo anche la forma indeterminata 1^∞.

Proposizione 4.7.20 *Se $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $x_n \to 0$, allora* $\lim_{n\to\infty} \big(1 + x_n\big)^{1/x_n} = \mathrm{e}$. *Se inoltre $y_n \to \pm\infty$, allora* $\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \dfrac{1}{y_n}\Big)^{y_n} = \mathrm{e}$.

Dimostrazione: Infatti, definitivamente risulta $0 < |x_n| < 1$ e dunque

$$\Big(1 + \frac{1}{x_n}\Big)^{x_n} = (1 + x_n)^{1/x_n} = \exp[\log[(1 + x_n)^{1/x_n}]] = \exp[\log(1 + x_n)/x_n] \to \exp(1) = \mathrm{e}\,.$$

Per il secondo limite basta considerare la successione $x_n = 1/y_n \to 0$. □

4.8 Successioni definite per ricorrenza

Grazie al principio di induzione abbiamo definito la successione fattoriale $a_n = n!$ mediante la formula ricorsiva $a_0 = 1$ e $a_{n+1} = (n + 1)\, a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cf. definizione 3.4.6. Vediamo ora come dalla conoscenza di una funzione reale continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si può studiare una successione $\{a_n\}_n$ definita per ricorrenza dalla formula $a_0 = \alpha$ e $a_{n+1} = f(a_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove il punto iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$ è noto.

Osserviamo prima che se $a_n = x_0$ per qualche n dove $x_0 \in \mathbb{R}$ è un *punto fisso* di f, i.e. una soluzione dell'equazione $f(x) = x$, allora la successione data è definitivamente costante.

Supponiamo ora che ci sia un intervallo $I =]x_0, x_1[$ tale che risulta $f(I) \subset I$ ed inoltre $f(x) > x$ per ogni $x \in I$. Se $a_n \in I$ per qualche n, allora definitivamente $a_n \in I$ ed inoltre definitivamente $a_{n+1} = f(a_n) > a_n$, i.e. la successione è definitivamente strettamente crescente, dunque ha limite. Se la successione converge ad $l \in \mathbb{R}$, allora passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$, e usando la continuità di f, abbiamo che $l = f(l)$, i.e. il limite l è un punto fisso di f. Quindi, se $x_1 \in \mathbb{R}$, poiché $x_0 < l \le x_1$, allora il limite l è necessariamente x_1, in quanto non ci sono punti fissi di f nell'intervallo I. In particolare, x_1 è un punto fisso di f. Se invece $x_1 = +\infty$, allora per lo stesso motivo la successione diverge positivamente.

Se ora $f(I) \subset I$ ed inoltre $f(x) < x$ per ogni $x \in I$, e $a_n \in I$ per qualche n, allora definitivamente la successione sta in I ed è strettamente decrescente. In maniera analoga, deduciamo che se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora la successione converge a x_0, che è un punto fisso di f. Se invece $x_0 = -\infty$, allora la successione diverge negativamente.

Esempio 4.8.1 Calcoliamo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite l_α della successione definita per ricorrenza dalla formula $a_0 = \alpha$ e $a_{n+1} = (a_n)^3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Abbiamo $f(x) = x^3$, i cui punti fissi sono le soluzioni dell'equazione $x^3 = x$, i.e. sono l'insieme $\{0, 1, -1\}$. I punti fissi suddividono $\mathbb{R}$ in quattro intervalli I_i, con $i = 1, 2, 3, 4$, dove $I_1 = (-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ e $I_4 =]1, +\infty[$. Studiando la disequazione $x^3 < x$ otteniamo che:

i) $f(I_1) \subset I_1$ e $f(x) < x$ per ogni $x \in I_1$

ii) $f(I_2) \subset I_2$ e $f(x) > x$ per ogni $x \in I_2$

iii) $f(I_3) \subset I_3$ e $f(x) < x$ per ogni $x \in I_3$

iv) $f(I_4) \subset I_4$ e $f(x) > x$ per ogni $x \in I_4$.

Usando l'argomento descritto sopra, deduciamo i seguenti fatti. La successione è costante se $\alpha \in \{0, 1, -1\}$. Se $\alpha \in I_1$, la successione è strettamente decrescente e diverge a $-\infty$. Se $\alpha \in I_2$, la successione è strettamente crescente e converge a 0. Se $\alpha \in I_3$, la successione è strettamente decrescente e converge a 0. Infine, se $\alpha \in I_4$, la successione è strettamente crescente e diverge a $+\infty$. In conclusione otteniamo che la successione ha limite l_α per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e risulta $l_\alpha = -\infty$ se $\alpha < 1$, $l_\alpha = 0$ se $-1 < \alpha < 1$, $l_\alpha = +\infty$ se $\alpha > 1$ ed infine che $l_\alpha = \pm 1$ se $\alpha = \pm 1$.

4.9 I teoremi di Bolzano-Weierstrass e di Cauchy

Ricordiamo che una successione di numeri reali è una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ definita su una semiretta S di naturali, per cui abbiamo posto $a_n = f(n)$. Quando abbiamo definito le sottosuccessioni di posto pari o dispari, abbiamo posto $b_n := a_{2n} = f(k_1(n))$ e $c_n := a_{2n+1} = f(k_2(n))$, dove $k_1(n) = 2n$ e $k_2(n) = 2n+1$ sono applicazioni da $\mathbb{N}$ in sé strettamente crescenti, cf. l'osservazione 4.2.10. Estendiamo tale operazione mediante la seguente

Definizione 4.9.1 Si dice *sottosuccessione* (o successione estratta) di una successione $f : S \to \mathbb{R}$ la composizione $f \circ k$ di f con una qualsiasi applicazione strettamente crescente $k : S \to \mathbb{N}$.

Posto quindi $k_n = k(n)$ e $a_n = f(n)$, allora una sottosuccessione è una nuova successione che si denota con $\{a_{k_n}\}_n$, dove $a_{k_n} = a_{k(n)}$. Osserviamo ora:

Proposizione 4.9.2 *Se $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è un'applicazione strettamente crescente, allora $k(n) \geq n$ per ogni n.*

Dimostrazione: Infatti $k(0) \geq 0$. Fissato poi n, sapendo che $k(n) \geq n$, allora otteniamo $k(n+1) > k(n) \geq n$ e dunque $k(n+1) \geq n+1$. L'asserto segue quindi dal principio di induzione. □

Di conseguenza, possiamo estendere la proposizione 4.2.11:

Proposizione 4.9.3 *Se una successione $\{a_n\}$ ha limite l, allora anche ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite l.*

Dimostrazione: Sappiamo che $a_n \to l$ significa che $\forall\ V \in \mathcal{I}_l,\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq \overline{n},\ a_n \in V$. Allora, poiché $k(n) \geq \overline{n}$ se $n \geq \overline{n}$, otteniamo che $\forall\ n \geq \overline{n},\ a_{k(n)} \in V$, come volevamo dimostrare. □

Dalla contronominale otteniamo dunque:

Corollario 4.9.4 *Data una successione $\{a_n\}_n$, se possiamo estrarre due sottosuccessioni che hanno limite diverso, allora la successione $\{a_n\}_n$ non ha limite.*

Ricordiamo ora che ogni successione convergente è limitata, ma che il viceversa è falso: esistono successioni limitate che non convergono, ad esempio $(-1)^n$. Il *teorema di Bolzano-Weierstrass* dà una risposta parziale ma fondamentale per il proseguimento della teoria.

Teorema 4.9.5 *Da ogni successione di numeri reali limitata possiamo sempre estrarre una sottosuccessione convergente.*

La sua dimostrazione si basa su un *argomento di bisezione* e fa uso del teorema 4.2.14 di esistenza del limite di successioni monotone, del teorema 4.3.8 dei carabinieri, del principio di induzione, proposizione 3.4.7, ed infine della seguente:

Proposizione 4.9.6 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia A_n un insieme* infinito *di numeri naturali, $A_n \subset \mathbb{N}$. Allora esiste una applicazione strettamente crescente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $k(n) \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione: Grazie al principio del minimo intero, poniamo $k(0) = \min A_0$. Definito poi $k(n)$, poniamo $k(n+1) = \min \widetilde{A}_{n+1}$, dove $\widetilde{A}_{n+1} := \{m \in A_{n+1} \mid m > k(n)\}$. Poiché A_{n+1} è infinito, l'insieme $\widetilde{A}_{n+1}$ è non vuoto e dunque $k(n+1)$ è ben definito. Grazie al principio di induzione, allora k è una applicazione su $\mathbb{N}$. Poiché $k(n+1) > k(n)$ in quanto $k(n+1) \in \widetilde{A}_{n+1}$, allora otteniamo che $k(n)$ definisce una successione di naturali strettamente crescente, come volevamo dimostrare. □

Dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass

Supponiamo per semplicità che $\{a_n\}_n$ sia definita su tutto $\mathbb{N}$. Essendo limitata, esistono $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, con $\alpha_0 < \beta_0$, tali che $\alpha_0 \le a_n \le \beta_0$ per ogni n.

Denotiamo allora $I_0 := [\alpha_0, \beta_0]$ e $A_0 := \{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in I_0\}$, cosicché A_0 è un insieme infinito di naturali. Detto allora $\mu_0 := (\beta_0 + \alpha_0)/2$ il punto medio dell'intervallo I_0, risulta che A_0 è unione dei due insiemi $\{m \in A_0 \mid \alpha_0 \le a_m \le \mu_0\}$ e $\{m \in A_0 \mid \mu_0 \le a_m \le \beta_0\}$. Quindi, almeno uno di questi due insiemi è infinito. Se lo è il primo, poniamo $\alpha_1 = \alpha_0$ e $\beta_1 = \mu_0$, altrimenti poniamo $\alpha_1 = \mu_0$ e $\beta_1 = \beta_0$. Detti allora $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ e $A_1 := \{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in I_1\}$, otteniamo che A_1 è un insieme infinito di naturali ed inoltre $\alpha_0 \le \alpha_1$ e $\beta_1 \le \beta_0$, con $(\beta_1 - \alpha_1) = 2^{-1}(\beta_0 - \alpha_0)$.

Dopo n passaggi di bisezione, definiamo $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ e $A_n := \{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in I_n\}$, ed otteniamo che valgono le seguenti tre proprietà, denotate in maniera sintetica con $P(n)$:

i) $\alpha_0 \le \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_n$ e $\beta_n \le \cdots \le \beta_1 \le \beta_0$

ii) $(\beta_n - \alpha_n) = 2^{-n} \cdot (\beta_0 - \alpha_0)$

iii) A_n è infinito.

Detto allora $\mu_n := (\beta_n + \alpha_n)/2$ il punto medio dell'intervallo I_n, risulta che A_n è unione dei due insiemi $\{m \in A_n \mid \alpha_n \le a_m \le \mu_n\}$ e $\{m \in A_n \mid \mu_n \le a_m \le \beta_n\}$. Quindi, essendo A_n infinito, almeno uno di questi due insiemi è infinito. Se lo è il primo, poniamo $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ e $\beta_{n+1} = \mu_n$, altrimenti poniamo $\alpha_{n+1} = \mu_n$ e $\beta_{n+1} = \beta_n$. Detti $I_{n+1} = [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$ e $A_{n+1} := \{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in I_{n+1}\}$, allora A_{n+1} è un insieme infinito di naturali ed inoltre $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$ e $\beta_{n+1} \le \beta_n$, con $(\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}) = 2^{-1}(\beta_n - \alpha_n)$. Quindi, se sappiamo che $(\beta_n - \alpha_n) = 2^{-n} \cdot (\beta_0 - \alpha_0)$, otteniamo che $(\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}) = 2^{-(n+1)} \cdot (\beta_0 - \alpha_0)$.

In definitiva, sappiamo che $P(0)$ è vera. Inoltre, supposto che $P(n)$ sia vera, tramite l'argomento di bisezione abbiamo dimostrato che anche $P(n+1)$ è vera. Allora grazie al principio di induzione abbiamo ottenuto che $P(n)$ è vera per ogni n.

Osserviamo ora che abbiamo costruito una successione $\{\alpha_n\}_n$ che è debolmente crescente e limitata superiormente, in quanto $\alpha_n \le \beta_n \le \beta_0$ per ogni n. Quindi, per il teorema sul limite di succesioni monotone, essa converge ad un numero reale, $\alpha_n \to l \in \mathbb{R}$. Anche la successione $\{\beta_n\}_n$ converge allo stesso limite l, in quanto $\beta_n = \alpha_n + 2^{-n}(\beta_0 - \alpha_0)$ per ogni n, dove $2^{-n} = (1/2)^n \to 0$.

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo costruito un insieme infinito A_n di numeri naturali. Allora, per la proposizione 4.9.6 esiste una applicazione strettamente crescente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $k(n) \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Costruiamo allora la sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ mediante tale applicazione, i.e. $a_{k_n} := a_{k(n)}$. Da quanto visto, e per la definizione di A_n, poichè $k(n) \in A_n$ allora abbiamo che

$$\forall\, n\,, \qquad a_{k_n} \in I_n \iff \alpha_n \le a_{k_n} \le \beta_n\ .$$

Ma entrambe le successioni $\{\alpha_n\}_n$ e $\{\beta_n\}_n$ convergono allo stesso numero reale l, dunque per il teorema dei carabinieri deduciamo che anche la successione $\{a_{k_n}\}_n$ converge ad l, come volevamo dimostrare.

Punti limite

Si dimostra facilmente che *da ogni successione non limitata* si può sempre estrarre una sottosuccessione divergente, a $+\infty$ se non è limitata superiormente ed a $-\infty$ se non è limitata inferiormente. Nel primo caso, fissata una successione $b_n \to +\infty$ e posto $A_n = \{m \mid a_m > b_n\}$, poiché $\{a_n\}_n$ non è limitata superiormente, allora A_n è un insieme infinito di $\mathbb{N}$ per oni n. Applicando la proposizione 4.9.6 troviamo, come nella dimostrazione del teorema 4.9.5, una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ tale che $a_{k_n} \ge b_n$ per ogni n, dunque per il teorema del confronto $a_{k_n} \to +\infty$. Quindi, grazie al teorema di Bolzano-Weierstrass deduciamo immediatamente la seguente:

Proposizione 4.9.7 *Da ogni successione di numeri reali si può sempre estrarre una sottosuccessione che ha limite.*

Definizione 4.9.8 *Punto limite* di una successione è il limite di una sua qualsiasi estratta.

Di conseguenza, ogni successione ha almeno un punto limite. Inoltre, se questa ha limite, allora per la proposizione 4.9.3 deduciamo che ha solamente un punto limite.

Se invece $\{a_n\}_n$ non ha limite, costruiamo due sottosuccessioni che hanno limite. Posto infatti

$$a_n^- := \inf\{a_m \mid m \geq n\}\,, \qquad a_n^+ := \sup\{a_m \mid m \geq n\}$$

si deduce che $\{a_n^-\}_n$ è una sottosuccesione di $\{a_n\}_n$ debolmente crescente e che $\{a_n^+\}_n$ è una sottosuccesione di $\{a_n\}_n$ debolmente decrescente. Quindi per il teorema 4.2.14 entrambe hanno limite. Detto $l^\pm$ il limite di $\{a_n^\pm\}_n$, si deduce che $-\infty \leq l^- \leq l^+ \leq +\infty$ e che sono il minimo ed il massimo dell'insieme dei punti limite. Questi vengono denotati come $l^- := \liminf_{n\to\infty} a_n$ e $l^+ := \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Esempio 4.9.9 Se $a_n = (-1)^n$, allora $l^\pm = \pm 1$ e sono gli unici punti limite. Analogamente, se $a_n = (-1)^n \cdot n/(n+1)$, otteniamo ancora che $l^\pm = \pm 1$ e che sono gli unici punti limite.

Il teorema di Cauchy per successioni

Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali convergente. Allora esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ risulta $|a_n - l| < \varepsilon/2$. Grazie alla diseguaglianza triangolare, otteniamo dunque che $|a_n - a_m| = |(a_n - l) + (l - a_m)| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ per ogni n, $m \geq \overline{n}$. Questo significa che l'oscillazione della "coda" dei punti della successione è sempre più piccola.

Definizione 4.9.10 Una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali è detta *successione di Cauchy* se

$$\forall\,\varepsilon > 0\,,\ \exists\,\overline{n} \,:\, \forall\,n, m \geq \overline{n}\,, \quad |a_n - a_m| < \varepsilon\,. \tag{4.19}$$

Quindi ogni successione convergente è di Cauchy. Vale anche il viceversa.

Teorema 4.9.11 *Una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che se vale la proprietà di Cauchy (4.19), allora la successione $\{a_n\}_n$ converge, l'altra implicazione essendo già nota. Mostriamo prima che $\{a_n\}_n$ è limitata.

Preso infatti $\varepsilon = 1$ in (4.19), esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ abbiamo $|a_n - a_{\overline{n}}| < 1$, i.e. $a_{\overline{n}} - 1 < a_n < a_{\overline{n}} + 1$, per cui la successione è definitivamente limitata e dunque limitata, per la proposizione 4.2.26.

Allora per il teorema di Bolzano-Weierstrass $\{a_n\}_n$ ammette una sottosuccesione $\{a_{k_n}\}_n$ convergente ad un numero reale $l \in \mathbb{R}$. Essendo di Cauchy, mostriamo ora che tutta la successione converge ad l.

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{n}_1(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}_1$ risulta $|a_{k_n} - l| < \varepsilon$. Posto $\overline{n}(\varepsilon)$ il numero dato da (4.19) in corrispondenza di tale scelta di ε, denotiamo $n_0(\varepsilon) := \max\{\overline{n}_1(\varepsilon), \overline{n}(\varepsilon)\}$ e osserviamo che se $n \geq n_0(\varepsilon)$ allora $k(n) \geq n \geq \overline{n}(\varepsilon)$ per la proposizione 4.9.2. Dunque abbiamo $|a_n - a_{k_n}| < \varepsilon$ ed anche $|a_{k_n} - l| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0(\varepsilon) \geq n_1(\varepsilon)$, da cui per la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$|a_n - l| = |(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - l)| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

come volevamo dimostrare. □

5 Funzioni continue e limiti

Una definizione equivalente di continuità

Abbiamo già introdotto la nozione di funzione continua in $\overline{x}$ mediante l'uso di successioni. La definizione 4.4.1 infatti afferma che una funzione reale f è continua in un punto $\overline{x}$ del suo dominio A se risulta

$$\forall \{x_n\}_n \subset A\,, \quad [x_n \to \overline{x} \Rightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})]\ . \tag{5.1}$$

Ricordiamo che la famiglia $\mathcal{I}_{x_0}$ degli intorni di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è l'insieme di tutti gli intervalli aperti $]H, K[$ che contengono x_0, cf. definizione 4.2.1. Ricordiamo poi che $x_n \to \overline{x}$ significa che "per ogni $U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}$, definitivamente $x_n \in U$" e che $f(x_n) \to f(\overline{x})$ significa che "per ogni $V \in \mathcal{I}_{f(\overline{x})}$, definitivamente $f(x_n) \in V$".

Diamo ora la definizione topologica di continuità, che risulterà essere equivalente alla precedente:

Definizione 5.0.1 Una funzione reale $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *continua* in un punto $\overline{x} \in A$ se

$$\forall V \in \mathcal{I}_{f(\overline{x})}\,,\ \exists U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}\ :\ \forall x \in U \cap A\,,\ f(x) \in V\ . \tag{5.2}$$

Proposizione 5.0.2 *Le due proprietà* (5.1) *e* (5.2) *sono equivalenti.*

Dimostrazione: Se vale la (5.1) ma non la (5.2), allora esiste un intorno $V_0 \in \mathcal{I}_{f(\overline{x})}$ tale che per ogni intorno $U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}$ possiamo trovare un punto $x \in U \cap A$ tale che $f(x) \notin V_0$. Posto $U_n =]\overline{x} - 1/n, \overline{x} + 1/n[$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ troviamo un punto $x_n \in U_n \cap A$ tale che $f(x_n) \notin V_0$. Ma $|x_n - \overline{x}| < 1/n$, dunque $x_n \to \overline{x}$ e allora $f(x_n) \to f(\overline{x})$. Ma questo implica che definitivamente $f(x_n) \in V_0$, il che è assurdo. Viceversa, se vale la (5.2) ma non la (5.1), allora esiste una successione $\{x_n\}_n \subset A$ tale che $x_n \to \overline{x}$ ma per la quale è falso che $f(x_n) \to f(\overline{x})$. Dunque, esiste un intorno $V_0 \in \mathcal{I}_{f(\overline{x})}$ tale che frequentemente $f(x_n) \notin V_0$. Ora, per la (5.2) troviamo $U_0 \in \mathcal{I}_{\overline{x}}$ tale che $f(U_0 \cap A) \subset V_0$. Ma $x_n \to \overline{x}$ implica che definitivamente $x_n \in U_0 \cap A$, dunque definitivamente $f(x_n) \in V_0$, il che dà un assurdo. □

Ricordiamo ora dalla proposizione 4.2.2 che se $x_0 \in \mathbb{R}$, tra gli intorni di x_0 ci sono gli intervalli aperti centrati in x_0, definiti da $I_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$, e che per ogni $V \in \mathcal{I}_{x_0}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $I_\varepsilon(x_0) \subset V$. Si ottiene allora facilmente che *una funzione* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua in un punto* $\overline{x} \in A$ *se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in A\,,\ |x - \overline{x}| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon\ . \tag{5.3}$$

In particolare, otteniamo facilmente la proprietà di *permanenza del segno*:

Proposizione 5.0.3 *Se* $f : A \to \mathbb{R}$ *è continua in un punto* $\overline{x} \in A$ *e* $f(\overline{x}) > 0$ $[[f(\overline{x}) < 0]]$, *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in A$ *con* $|x - \overline{x}| < \delta$, *risulta* $f(x) > 0$ $[[f(x) < 0]]$.

Dimostrazione: Se $f(\overline{x}) \neq 0$, scegliamo $\delta > 0$ in corrispondenza di $\varepsilon = |f(\overline{x})|/2 > 0$ dalla formula (5.3). Infatti la diseguaglianza $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$ è equivalente a $f(\overline{x}) - |f(\overline{x})|/2 < f(x) < f(\overline{x}) - |f(\overline{x})|/2$ che a sua volta implica $f(x) > f(\overline{x})/2 > 0$, se $f(\overline{x}) > 0$, e $f(x) < f(\overline{x})/2 < 0$, se $f(\overline{x}) < 0$. □

5.1 Dalla continuità al limite

Consideriamo la funzione reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(0) = a$ e $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ se $x \neq 0$. Essendo quoziente di funzioni continue, sappiamo già che f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre, dal limite fondamentale della funzione seno deduciamo che f è continua anche in $\overline{x} = 0$ se e solo se $a = 1$. Nondimeno, il valore 1 a cui si avvicina f quando x si avvicina a zero non dipende dalla scelta del valore di f in zero e, dunque, dalla scelta del punto a. Quindi, evitando di considerare il comportamento di f in zero, possiamo senz'altro scrivere che

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\ |x| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - 1| < \varepsilon$$

o in maniera equivalente che

$$\forall V \in \mathcal{I}_1\,,\ \exists U \in \mathcal{I}_0\ :\ \forall x \in U \setminus \{0\}\,,\ f(x) \in V\ .$$

Come vedremo, questo corrisponde ad affermare che f tende a 1 per x che tende a 0. Una volta poi che abbiamo escluso nella nozione di limite il valore di f nel punto $\overline{x}$, possiamo senz'altro supporre che f non sia neppure definita in $\overline{x}$ e, a questo punto, che il valore l cui si avvicina f sia anche $\pm\infty$ e, infine, che $\overline{x}$ sia anche $\pm\infty$. Alla luce della formula sopra, verrebbe da scrivere che "f tende ad l per x che tende ad $\overline{x}$" se risulta:

$$\forall V \in \mathcal{I}_l\,,\ \exists U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}\ :\ \forall x \in (U \cap \operatorname{dom} f) \setminus \{\overline{x}\}\,,\ f(x) \in V\ .$$

Senza ipotesi aggiuntive, però, quanto scritto non ha senso. Prendiamo infatti ad esempio la funzione $f(x) = \log x$, per la quale $\operatorname{dom} f =]0, +\infty[$. Se scegliamo un punto $\overline{x}$ negativo, allora ovviamente esiste un intorno $U_0 \in \mathcal{I}_{\overline{x}}$ tale che $U_0 \cap \operatorname{dom} f = \emptyset$, per cui la proprietà scritta sopra perde di significato, essendo banalmente vera per ogni scelta di $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Infatti, quanto scritto sopra ha senso solo se *arbitrariamente vicino al punto $\overline{x}$ ci sono sempre punti del dominio della funzione diversi dal punto $\overline{x}$*. Come vedremo nella definizione 5.1.5, questo significa che il punto $\overline{x}$ è di *accumulazione* per l'insieme $A = \operatorname{dom} f$.

Cenni di topologia

Abbiamo già visto la definizione 4.2.1 di intorno di un punto di $\overline{\mathbb{R}}$ e le proprietà delle famiglie di intorni, proposizione 4.2.2. Diamo ora alcune nozioni che si riferiscono a proprietà di un punto qualsiasi $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ rispetto ad un insieme fissato $A \subset \mathbb{R}$.

Definizione 5.1.1 Si dice che $\overline{x}$ è *interno* ad A se esiste $U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}$ tale che $U \subset A$. L'insieme dei punti interni ad A si dice *parte interna di* A e si denota con il simbolo $\operatorname{int} A$. In generale risulta $\operatorname{int} A \subset A$. Un insieme A si dice *aperto* se coincide con la sua parte interna, i.e. se $A = \operatorname{int} A$.

Ad esempio, un intervallo I di reali è un insieme aperto se è del tipo $]a, b[$, con $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Definizione 5.1.2 Si dice che $\overline{x}$ è *esterno* ad A se esiste $U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}$ tale che $U \cap A = \emptyset$. Inoltre, si dice che $\overline{x}$ è *di frontiera* per A se non è né interno né esterno ad A. L'insieme dei punti di frontiera di A si denota con il simbolo ∂A.

Poiché $U \cap B = \emptyset \iff U \subset B^c$, allora deduciamo che

$$\overline{x} \in \partial A \iff \forall U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}\,, \quad U \cap A \neq \emptyset \ \textbf{e}\ U \cap A^c \neq \emptyset\ .$$

Quindi l'insieme dei punti di frontiera di un intervallo di estremi a e b reali è dato da $\{a, b\}$.

Definizione 5.1.3 Un punto $\overline{x}$ è di *aderenza* per A se

$$\forall U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}\,, \quad U \cap A \neq \emptyset\ .$$

L'insieme dei punti di aderenza di A si denota con $\overline{A}$ e si chiama anche *chiusura di* A. Un insieme A si dice chiuso se coincide con la sua chiusura, $A = \overline{A}$.

Ovviamente $A \subset \overline{A}$. Ad esempio, la chiusura di un intervallo limitato di estremi $a < b$ è l'intervallo chiuso $[a, b]$, di una semiretta destra con punto iniziale a è l'insieme $[a, +\infty] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \ge a\}$, e di una semiretta sinistra con punto finale a è l'insieme $[-\infty, a] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \le a\}$.

Esempio 5.1.4 La chiusura di $\mathbb{R}$ è ovviamente $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dalla densità dei razionali, proposizione 3.5.4, otteniamo inoltre che $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}}$ ed anche che $\overline{A} = [a, b]$ se $A =]a, b[\cap \mathbb{Q}$. Riguardo l'insieme dei naturali, risulta $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, mentre per gli interi relativi abbiamo $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Definizione 5.1.5 Un punto $\overline{x}$ è di *accumulazione* per A se

$$\forall U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}\,, \quad (U \cap A) \setminus \{\overline{x}\} \neq \emptyset\ .$$

L'insieme dei punti di accumulazione di A si denota con il simbolo $\operatorname{acc} A$.

Quindi ovviamente $\operatorname{acc} A \subset \overline{A}$. Inoltre, ogni punto $\overline{x} \in \overline{A} \setminus \operatorname{acc} A$ appartiene necessariamente ad A ed inoltre verifica la seguente proprietà:

$$\exists U_0 \in \mathcal{I}_{\overline{x}}\ : \quad (U \cap A) = \{\overline{x}\}\,, \tag{5.4}$$

viene pertanto detto *punto isolato* di A.

Esempio 5.1.6 Ogni elemento di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{Z}$ è un punto isolato di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{Z}$, rispettivamente. Questo significa che $\operatorname{acc}\mathbb{N} = \{+\infty\}$ e $\operatorname{acc}\mathbb{Z} = \{+\infty, -\infty\}$.

Esempio 5.1.7 Se $A =]0,1] \cup \{2\}$, allora $\operatorname{acc} A = [0,1]$ e $\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$, essendo $\overline{x} = 2$ un punto isolato.

Osservazione 5.1.8 Osserviamo che $+\infty$ è punto di accumulazione di un insieme A se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un punto $x_n \in A$ tale che $x_n > n$. Quindi otteniamo facilmente che

$$+\infty \in \operatorname{acc} A \iff A \text{ non è limitato superiormente} \iff \exists \{x_n\}_n \subset A \,:\, x_n \to +\infty \,.$$

Analogamente otteniamo che

$$-\infty \in \operatorname{acc} A \iff A \text{ non è limitato inferiormente} \iff \exists \{x_n\}_n \subset A \,:\, x_n \to -\infty \,.$$

Nel caso $\overline{x} \in \mathbb{R}$, usando la proprietà della base di intorni del tipo $I_\varepsilon(\overline{x})$, e che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un naturale $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $1/n < \varepsilon$, deduciamo che $\overline{x}$ è di accumulazione per A se per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste un punto $x_n \in A \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $|x - x_n| < 1/n$ e dunque, se $\overline{x} \in \mathbb{R}$, risulta

$$\overline{x} \in \operatorname{acc} A \iff \exists \{x_n\}_n \subset A \setminus \{\overline{x}\} \;:\; x_n \to \overline{x} \,.$$

Limite di funzione

Sia allora $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita su $A \subset \mathbb{R}$. D'ora in poi, parlando di limite per $x \to \overline{x}$, con $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$, supporremo sempre che $\overline{x}$ *sia un punto di accumulazione per il dominio* A. Sia inoltre $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Definizione 5.1.9 Diciamo che f tende ad l per x che tende a $\overline{x}$, e scriviamo $f(x) \to l$ per $x \to \overline{x}$, se risulta:

$$\forall V \in \mathcal{I}_l \,,\ \exists U \in \mathcal{I}_{\overline{x}} \;:\; \forall x \in (U \cap A) \setminus \{\overline{x}\} \,,\ f(x) \in V \,. \tag{5.5}$$

Esplicitando quindi la nozione di intorno, otteniamo le seguenti definizioni equivalenti di limite di una funzione per $x \to \overline{x}$, distinguendo se $\overline{x}$ ed il limite l sono reali o $\pm\infty$.

i) $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $0 < |x - \overline{x}| < \delta$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

ii) $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e $l = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $0 < |x - \overline{x}| < \delta$, allora $f(x) > M$

iii) $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e $l = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $0 < |x - \overline{x}| < \delta$, allora $f(x) < M$

iv) $\overline{x} = +\infty$ e $l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x > N$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

v) $\overline{x} = +\infty$ e $l = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x > N$, allora $f(x) > M$

vi) $\overline{x} = +\infty$ e $l = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x > N$, allora $f(x) < M$

vii) $\overline{x} = -\infty$ e $l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x < N$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

viii) $\overline{x} = -\infty$ e $l = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x < N$, allora $f(x) > M$

ix) $\overline{x} = -\infty$ e $l = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x < N$, allora $f(x) < M$.

Come per le successioni, se $f(x) \to l$ per $x \to \overline{x}$ diremo poi che f diverge positivamente, diverge negativamente, converge, è infinitesima per $x \to \overline{x}$ se risulta $l = +\infty$, $l = -\infty$, $l \in \mathbb{R}$, o $l = 0$, rispettivamente.

5.2 Proprietà del limite di funzioni

Caratterizzazione sequenziale del limite

Analogamente alla proposizione 5.0.2, otteniamo poi un'importante *caratterizzazione sequenziale*:

Proposizione 5.2.1 *La definizione* (5.5) *di limite è equivalente alla seguente:*

$$\forall \{x_n\}_n \subset A \setminus \{\overline{x}\} \,, \quad [x_n \to \overline{x} \Rightarrow f(x_n) \to l] \,. \tag{5.6}$$

Dimostrazione: Se vale la (5.6) ma non la (5.5), allora esiste un intorno $V_0 \in \mathcal{I}_l$ tale che per ogni intorno $U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}$ possiamo trovare un punto $x \in (U \cap A) \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $f(x) \notin V_0$. Posto $U_n =]\overline{x} - 1/n, \overline{x} + 1/n[$ se $\overline{x} \in \mathbb{R}$, mentre $U_n =]n, +\infty[$ se $\overline{x} = +\infty$ e $U_n =] - \infty, -n[$ se $\overline{x} = -\infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ troviamo un punto $x_n \in (U_n \cap A) \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $f(x_n) \notin V_0$. Ma allora la successione $\{x_n\}_n \subset A \setminus \{\overline{x}\}$ è tale che $x_n \to \overline{x}$, dunque per la (5.6) otteniamo che $f(x_n) \to l$. Ma questo implica che definitivamente $f(x_n) \in V_0$, il che è assurdo.

Viceversa, se vale la (5.5) ma non la (5.6), allora esiste una successione $\{x_n\}_n \subset A \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $x_n \to \overline{x}$ ma per la quale è falso che $f(x_n) \to l$. Dunque, esiste un intorno $V_0 \in \mathcal{I}_l$ tale che frequentemente $f(x_n) \notin V_0$. Ora, per la (5.5) troviamo $U_0 \in \mathcal{I}_{\overline{x}}$ tale che $f((U_0 \cap A) \setminus \{\overline{x}\}) \subset V_0$. Ma $x_n \to \overline{x}$ implica che definitivamente $x_n \in (U_0 \cap A) \setminus \{\overline{x}\}$, dunque definitivamente $f(x_n) \in V_0$, il che è un assurdo. □

Dall'osservazione 5.1.8 deduciamo per un'altra via che la caratterizzazione sequenziale (5.6) ha senso. Infatti, se $\overline{x} \in \operatorname{acc} A$, allora esiste una successione $\{x_n\}_n \subset A \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $x_n \to \overline{x}$, il che rende la definizione (5.6) consistente.

Dall'unicità del limite di successioni, otteniamo dunque che se esiste, il limite è unico. Inoltre deduciamo che esistono funzioni che non hanno limite. Presa ad esempio $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $\overline{x} = +\infty$, se $x_n = 2n\pi$, allora $x_n \to +\infty$ e $f(x_n) \equiv 0$. Invece, se $\widetilde{x}_n = 2n\pi + \pi/2$, abbiamo ancora $\widetilde{x}_n \to +\infty$ e $f(\widetilde{x}_n) \equiv 1$. Quindi, dalla caratterizzazione (5.6) concludiamo che la funzione seno non ha limite per $x \to +\infty$.

Osservazione 5.2.2 Se f è una successione, $f(n) = a_n$, la definizione di limite di successione coincide con quella di limite di f per $x \to +\infty$. Notiamo inoltre che se S è una semiretta di numeri naturali, come per l'insieme $\mathbb{N}$ deduciamo che ogni punto di S è isolato e che l'unico punto di accumulazione di S è $+\infty$. Quindi non ha senso parlare di limite di successione tranne che per $n \to +\infty$. Infine, come vedremo sotto, una successione è automaticamente una funzione continua sulla semiretta S.

Limite e continuità

In particolare, da quanto visto sopra troviamo immediatamente una importante relazione tra le nozioni di continuità e di limite:

Corollario 5.2.3 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $\overline{x} \in A$. Se $\overline{x}$ è un punto isolato del dominio A, allora f è automaticamente continua in $\overline{x}$. Se invece $\overline{x}$ è anche un punto di accumulazione per A, allora f è continua in $\overline{x}$ se e solo se $f(x) \to f(\overline{x})$ per $x \to \overline{x}$.*

Dimostrazione: Infatti se $\overline{x}$ è isolato allora la proprietà (5.2) è banalmente verificata con $U = U_0$ dato da (5.4). In caso contrario, $\overline{x}$ è punto di accumulazione per A. Poiché dunque $f(\overline{x}) \in V$ per ogni intorno V di $f(\overline{x})$, posto $l = f(\overline{x})$ si ottiene che le proprietà (5.2) e (5.5) sono equivalenti. □

Possiamo quindi dedurre come si estende una funzione con continuità (nel caso $\overline{x} \notin A$):

Corollario 5.2.4 *Sia $\overline{x} \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x) \to l$ per $x \to \overline{x}$. Se il limite l è reale, allora la funzione $\widetilde{f} : A \cup \{\overline{x}\} \to \mathbb{R}$ definita da $\widetilde{f}(x) = f(x)$ se $x \neq \overline{x}$, e $\widetilde{f}(\overline{x}) = l$, è continua in $\overline{x}$.*

Località

Il limite di una successione, se esiste, sappiamo che non dipende dai primi termini, ma dai valori di a_n per $n \geq \overline{n}$, comunque fissiamo $\overline{n}$. In maniera analoga deduciamo la cosiddetta proprietà di *località* del limite di una funzione, che esprime il fatto che il limite non dipende dai valori che f assume "lontano" da $\overline{x}$ (oltre che dall'eventuale valore in $\overline{x}$).

Proposizione 5.2.5 *Siano f e g due funzioni reali definite su un insieme A e sia $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Se esiste un intorno $U_0 \in \mathcal{I}_{\overline{x}}$ tale che per ogni $x \in (U_0 \cap A) \setminus \{\overline{x}\}$ risulta $f(x) = g(x)$, allora:*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = l \iff \lim_{x \to \overline{x}} g(x) = l \ .$$

Dimostrazione: Per ogni successione $\{x_n\}_n \subset A \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $x_n \to \overline{x}$, allora definitivamente $x_n \in U_0$ e dunque $g(x_n) = f(x_n)$. Ma allora se f ha limite l per $x \to \overline{x}$, dalla (5.6) deduciamo che $f(x_n) \to l$ e dunque che anche $g(x_n) \to l$, in quanto definitivamente $g(x_n) = f(x_n)$, e viceversa. □

Limite da destra e da sinistra

Dalla località sappiamo quindi che se f ha limite l per $x \to x_0$, e $B \subset \operatorname{dom} f$ è tale che x_0 è punto di accumulazione di B, allora *anche la restrizione* $f_{|B}$ *ha limite* l *per* $x \to x_0$.

Se in particolare $x_0 \in \mathbb{R}$, posto $A = \operatorname{dom} f$ e detti $A^+ := \{x \in A \mid x > x_0\}$ e $A^- := \{x \in A \mid x < x_0\}$, può accadere che x_0 sia punto di accumulazione anche di $A^\pm$. In tal caso, la funzione $f_{|A^\pm}$ ha limite l per $x \to x_0$. Questo corrisponde alla nozione di *limite da destra e da sinistra:*

Definizione 5.2.6 Sia $A = \operatorname{dom} f$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $A^+ := \{x \in A \mid x > x_0\}$. Se la restrizione $f_{|A^+}$ ha limite l_d per $x \to x_0$, diciamo che $f(x) \to l_d$ per $x \to x_0^+$ *da destra.*

Se invece $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione di $A^- := \{x \in A \mid x < x_0\}$ e la restrizione $f_{|A^-}$ ha limite l_s per $x \to x_0$, diciamo che $f(x) \to l_s$ per $x \to x_0^-$ *da sinistra.*

Quindi abbiamo che:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_d \iff \forall\, V \in \mathcal{I}_{l_d}\,,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\, x \in A\,,\ x_0 < x < x_0 + \delta\ \Rightarrow f(x) \in V\,,$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_s \iff \forall\, V \in \mathcal{I}_{l_s}\,,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\, x \in A\,,\ x_0 - \delta < x < x_0\ \Rightarrow f(x) \in V\,.$$

Usando le notazioni precedenti, otteniamo allora facilmente:

Proposizione 5.2.7 *Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione di A^+ e di A^-, allora $f(x) \to l$ per $x \to x_0$ se e solo se $f(x) \to l_d$ per $x \to x_0^+$ e $f(x) \to l_s$ per $x \to x_0^-$ con $l_s = l_d$.*

Esempio 5.2.8 La funzione $f(x) = 1/x$, di dominio naturale $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, non ha limite per $x \to 0$ in quanto $1/x \to \pm\infty$ per $x \to 0^\pm$. Si noti che $x_0 = 0$ è punto di accumulazione per $A^\pm = \mathbb{R}^\pm$ e quindi anche per A.

Alcuni esempi fondamentali

Dai limiti fondamentali di successioni e grazie alla caratterizzazione sequenziale (5.6) del limite, deduciamo immediatamente la validità dei seguenti limiti fondamentali:

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,, & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\,, \\
\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathsf{e}^x - 1}{x} = 1\,, & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1\,, \\
\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \mathsf{e}^x = 0^+\,, & \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathsf{e}^x = +\infty\,, \\
\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty\,, & \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \log x = +\infty\,, \\
\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = \mathsf{e}\,, & \displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathsf{e}\,.
\end{array}$$

Teoremi con i limiti

La proprietà di località del limite suggerisce la seguente

Definizione 5.2.9 Dato un predicato $\mathcal{P}(x)$ dipendente da $x \in A$, diciamo che la proprietà $\mathcal{P}(x)$ è vera *vicino ad* x_0 (ed in A) se esiste $U_0 \in \mathcal{I}_{x_0}$ tale che per ogni $x \in (U_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ risulta che $\mathcal{P}(x)$ è vera.

Dalla definizione si deducono facilmente le proprietà di limitatezza e permanenza del segno:

Proposizione 5.2.10 *Se $f(x) \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$, e $A = \operatorname{dom} f$, allora abbiamo:*

i) *se $l \in \mathbb{R}$, esiste $\widetilde{M} > 0$ tale che vicino ad x_0 ed in A risulta $|f(x)| < \widetilde{M}$;*

ii) *se $l = +\infty$, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che vicino ad x_0 ed in A risulta $f(x) > M$;*

iii) *se $l = -\infty$, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che vicino ad x_0 ed in A risulta $f(x) < M$;*

iv) *se $l > 0$, esiste $H > 0$ reale tale che vicino ad x_0 ed in A risulta $f(x) > H$;*

v) *se $l < 0$, esiste $K < 0$ reale tale che vicino ad x_0 ed in A risulta $f(x) < K$.*

Grazie alla caratterizzazione sequenziale, si deducono poi facilmente i teoremi di confronto e dei carabinieri, che ora enunciamo.

Teorema 5.2.11 *Siano f, g ed h tre funzioni reali con stesso dominio A e sia $x_0 \in \operatorname{acc} A$. Supponiamo inoltre che vicino ad x_0 risulti $g(x) \le f(x) \le h(x)$. Allora:*

i) *se $g(x) \to l_g$ e $f(x) \to l_f$ per $x \to x_0$, allora $l_g \le l_f$*

ii) *se $g(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$, allora anche $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$*

iii) *se $h(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$, allora anche $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$*

iv) *se $g(x) \to l$ e $h(x) \to l$ per $x \to x_0$, allora anche $f(x) \to l$ per $x \to x_0$.*

Osservazione 5.2.12 Nella prima affermazione non possiamo concludere che $l_g < l_f$ anche se sappiamo che $g(x) < f(x)$ per ogni x. Presi ad esempio $g(x) \equiv 0$ e $f(x) = \mathrm{e}^x$ risulta $g(x) \to 0$ e $f(x) \to 0$ per $x \to -\infty$, ma $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

In analogia ai limiti di successioni, nel caso di limite l reale diamo la seguente:

Definizione 5.2.13 Se $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$, diciamo che $f(x) \to l^+$ $[[f(x) \to l^+]]$ per $x \to x_0$ se vicino a x_0 e in $\operatorname{dom} f$ risulta $f(x) > l$ $[[f(x) < l]]$.

In maniera analoga si ottengono i risultati sulle operazioni algebriche con i limiti.

Teorema 5.2.14 *Siano f e g due funzioni reali con stesso dominio A tali che $f(x) \to l_f$ e $g(x) \to l_g$ per $x \to x_0$, con $x_0 \in \operatorname{acc} A$. Allora abbiamo:*

i) *se $l_f + l_g$ ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$, allora $(f+g)(x) \to l_f + l_g$ per $x \to x_0$*

ii) *se $l_f \cdot l_g$ ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$, allora $(f \cdot g)(x) \to l_f \cdot l_g$ per $x \to x_0$*

iii) *se $l_g \neq 0$ o $l_g = 0^\pm$, allora $1/g$ ha limite L per $x \to x_0$ e risulta $L = 1/l_g$ se l_g è reale non nullo, $L = 0^\pm$ se $l_g = \pm\infty$ ed infine $L = \pm\infty$ se $l_g = 0^\pm$.*

Analizzando di conseguenza il limite del quoziente f/g come limite del prodotto di f con il reciproco $1/g$, otteniamo come per le successioni tutti i casi in cui il teorema precedente dà risposta affermativa. Le forme indeterminate sono dunque ancora $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$ e ∞/∞.

Limite di composizione e cambio di variabile

Sappiamo già che la composizione $g \circ f$ di due funzioni continue è continua. Ci chiediamo allora se sapendo che $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$ e $g(y) \to l$ per $y \to y_0$ possiamo concludere che $(g \circ f)(x) \to l$ per $x \to x_0$. Ovviamente dobbiamo supporre che $x_0 \in \operatorname{dom}(g \circ f)$ e che $y_0 \in \operatorname{dom} g$. Ma come mostra il seguente esempio, la risposta è in generale negativa.

Scelto infatti $f(x) \equiv y_0$ e $g(y) = l$ per $y \neq y_0$, ma $g(y_0) = l + 1$, comunque fissiamo $x_0, l \in \mathbb{R}$ dalla località del limite deduciamo che $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$ e $g(y) \to l$ per $y \to y_0$, ma $(g \circ f)(x) \equiv l + 1$ e dunque la funzione composta non ha limite l per $x \to x_0$.

In questo esempio non vale la formula sul limite della composizione a causa di due patologie che si verificano contemporaneamente. La prima è che la funzione g non è continua nel punto y_0, la seconda che non è vero che vicino a x_0 e in $\operatorname{dom} f$ la funzione f è sempre diversa da y_0.

Vediamo infatti che se almeno una delle due situazioni sopra descritte è esclusa, allora il limite della composizione è quello che ci aspettiamo.

Teorema 5.2.15 *Siano f e g due funzioni reali tali che $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$ e $g(y) \to l$ per $y \to y_0$, dove x_0 è punto di accumulazione di $\operatorname{dom}(g \circ f)$ e y_0 è punto di accumulazione di $\operatorname{dom} g$. Supponiamo che valga almeno una delle seguenti proprietà:*

i) *esiste un intorno U_0 di x_0 tale che se $x \in (U_0 \cap \operatorname{dom}(g \circ f)) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \neq y_0$*

ii) *g è continua in y_0, i.e. $y_0 \in \operatorname{dom} g$ e $l = g(y_0)$.*

Allora la funzione composta $g \circ f$ ha limite in x_0 e $(g \circ f)(x) \to l$ per $x \to x_0$.

DIMOSTRAZIONE: Fissato un intorno $V \in \mathcal{I}_l$ dobbiamo provare che

$$\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0} \ :\ \forall\, x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\}\,,\ \ g(f(x)) \in V \tag{5.7}$$

dove abbiamo posto per brevità $A = \mathrm{dom}(g \circ f)$. Poiché $g(y) \to l$ per $y \to y_0$, allora

$$\exists\, W \in \mathcal{I}_{y_0} \ :\ \forall\, y \in (W \cap \mathrm{dom}\, g) \setminus \{y_0\}\,,\ \ g(y) \in V$$

ed in corrispondenza di $W \in \mathcal{I}_{y_0}$, poiché $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$,

$$\exists\, U_1 \in \mathcal{I}_{x_0} \ :\ \forall\, x \in (U_1 \cap \mathrm{dom}\, f) \setminus \{x_0\}\,,\ \ f(x) \in W\ .$$

Detto allora $B = f(A)$, poiché $B \subset \mathrm{dom}\, g$ otteniamo che $g(y) \in V$ per ogni $y \in (W \cap B) \setminus \{y_0\}$. Analogamente, essendo $A \subset \mathrm{dom}\, f$, otteniamo che $f(x) \in W \cap B$ per ogni $x \in (U_1 \cap A) \setminus \{x_0\}$. Dunque abbiamo:

$$\begin{array}{rcl} x \in (U_1 \cap A) \setminus \{x_0\} & \Rightarrow & f(x) \in W \cap B \\ y \in (W \cap B) \setminus \{y_0\} & \Rightarrow & g(y) \in V\ . \end{array} \tag{5.8}$$

Se vale l'ipotesi aggiuntiva i), posto $U = U_1 \cap U_0$, osserviamo che U è intorno di x_0 e che dalla prima riga della (5.8) otteniamo

$$x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (W \cap B) \setminus \{y_0\}$$

dunque la tesi (5.7) segue dalla seconda riga in (5.8), ponendo $y = f(x)$.

Se invece vale la ii), allora automaticamente $g(y_0) \in V$, essendo V intorno di $l = g(y_0)$, dunque nella seconda riga in (5.8) possiamo scrivere

$$y \in W \cap B \Rightarrow g(y) \in V$$

e la tesi (5.7) segue scegliendo $U = U_1$ nella prima riga in (5.8). □

Esempio 5.2.16 Abbiamo che $\exp[(\mathrm{sen}\, x)/x] \to \mathsf{e}$ per $x \to 0$. Infatti $f(x) = (\mathrm{sen}\, x)/x \to 1$ per $x \to 0$ e l'esponenziale è continua in $y_0 = 1$.

Esempio 5.2.17 Se f è una funzione tale che $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$ e vale la proprietà i) sopra, dove $y_0 = 0$, allora ad esempio

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{sen}(f(x))}{f(x)} = 1\ , \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\mathsf{e}^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1\,, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{1 - \cos(f(x))}{f(x)^2} = \frac{1}{2}\ .$$

Infatti la funzione di cui calcoliamo il limite è la composizione $g_i \circ f$, dove nei tre casi

$$g_1(y) = \frac{\mathrm{sen}\, y}{y}\ , \qquad g_2(y) = \frac{\mathsf{e}^y - 1}{y}\,, \qquad g_3(y) = \frac{1 - \cos y}{y^2}\ .$$

Anche se le funzioni g_i non sono continue in $y_0 = 0$, valendo la i) possiamo concludere grazie ai limiti fondamentali per $y \to 0$ delle funzioni g_i.

Esempi standard di funzioni f che verificano la i) e tali che $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$ sono i seguenti:

1) *traslazioni*: $f(x) = x - x_0$, con $x_0 \in \mathbb{R}$

2) *inversioni*: $f(x) = 1/x$, con $x_0 = +\infty$ o anche $x_0 = -\infty$

3) *polinomi*: $f(x) = P(x)$, con $P(x)$ polinomio che si annulla in $x_0 \in \mathbb{R}$.

Poiché ad esempio abbiamo per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e per $t = x - x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{sen}(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{sen}\, t}{t} = 1$$

in questi casi si parla anche di *cambiamento di variabile* nel limite.

Altri limiti fondamentali

I seguenti limiti riguardano esponenziali, potenze e confronto tra di esse e con i logaritmi.

Esempio 5.2.18 Per ogni base $q > 0$ risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} q^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0^+ & \text{se } 0 < q < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} q^x = \begin{cases} 0^+ & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < q < 1 \ . \end{cases}$$

Poiché infatti $q^x = \exp(x \log q)$, sappiamo che per $x \to +\infty$ l'esponente $x \log q$ tende a $+\infty$, 0 oppure $-\infty$ a seconda che sia $q > 1$, $q = 1$ oppure $0 < q < 1$. Quindi il primo limite segue dalla continuità della funzione exp e dal suo andamento a $+\infty$ ed a $-\infty$. Per il secondo: si cambia variabile $t = -x$ e si osserva che $t \to +\infty$ e $q^x = 1/(q^t)$, quindi al denominatore si applica il caso precedente e si conclude con il limite del reciproco, teorema 5.2.14.

Esempio 5.2.19 Per ogni esponente $\beta \in \mathbb{R}$ risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > 0 \\ 1 & \text{se } \beta = 0 \\ 0^+ & \text{se } \beta < 0 \ . \end{cases}$$

Analogamente, scriviamo $x^\beta = \exp(\beta \log x)$ e osserviamo che per $x \to +\infty$ l'esponente $\beta \log x$ tende a $+\infty$, 0 oppure $-\infty$ a seconda che sia $\beta > 0$, $\beta = 0$ oppure $\beta < 0$.

Esempio 5.2.20 Se $\beta \in \mathbb{R}$ e $q > 0$, con $q \neq 1$, allora l'esponenziale domina sempre sulla potenza:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{q^x}{x^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad q > 1 \\ 0^+ & \text{se} \quad 0 < q < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{q^x}{|x|^\beta} = \begin{cases} 0^+ & \text{se} \quad q > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < q < 1 \ . \end{cases}$$

Consideriamo il primo limite nel caso $q > 1$ e $\beta > 0$, in quanto per $\beta \leq 0$ è ovvio e non c'è una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Se $0 < \beta < 1$, ricordando che $\mathsf{e}^y \geq 1 + y$ per ogni y, scriviamo $q^x = \exp(x \log q) \geq 1 + x \log q \geq x \log q$ e dunque $q^x/x^\beta \geq x^{1-\beta} \log q$ per ogni $x > 0$. Poiché $x^{1-\beta} \log q \to +\infty$ per $x \to +\infty$, l'asserto segue dal teorema del confronto.

Se invece $\beta \geq 1$, scegliamo $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $n > \beta$, poniamo $k = q^{1/n} > 1$ e $\gamma = \beta/n \in]0, 1[$ e osserviamo che per la proprietà delle potenze $q^x/x^\beta = (k^x/x^\gamma)^n$. Poiché abbiamo già provato che $k^x/x^\gamma \to +\infty$ per $x \to +\infty$, l'asserto segue dal teorema sul limite del prodotto.

Il primo limite nel caso $0 < q < 1$ segue osservando che per ogni $x > 0$ la funzione q^x/x^β è il reciproco della funzione $(1/q)^x/x^{-\beta}$, che diverge positivamente per $x \to +\infty$ essendo $1/q > 1$.

Il secondo limite segue facilmente dal primo cambiando variabile $t = -x$ e osservando che $q^x/|x|^\beta = (1/q)^t/t^{-\beta}$ se $x < 0$, avendo $1/q > 1$ se $0 < q < 1$ e $0 < 1/q < 1$ se $q > 1$.

Esempio 5.2.21 Per ogni $\beta > 0$, la potenza domina sempre sul logaritmo:

$$\lim_{x\to 0^+} (x^\beta \log x) = 0^- \ , \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{\log x} = +\infty \ .$$

Per il primo limite, che è una forma indeterminata $0\cdot\infty$, nel caso $\beta = 1$ osserviamo che $x \log x = (g \circ f)(x)$, dove $f(x) = \log x$ e $g(y) = \mathsf{e}^y y$. Poiché $f(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$ e $g(y) = -(\mathsf{e}^y/|y|^{-1})$, dunque $g(y) \to 0^-$ per $y \to -\infty$, l'asserto segue dal teorema del limite della composizione. Se invece $\beta > 0$, posto $t = x^\beta$ per ogni $x > 0$ scriviamo $x^\beta \log x = t \log(t^{1/\beta}) = (t \log t)/\beta$. Poiché $t \to 0^+$ se $x \to 0^+$, l'asserto segue ancora per cambio di variabile nel limite.

Analogamente, nel secondo limite, che presenta una forma indeterminata ∞/∞, nel caso $\beta = 1$ osserviamo che $x/\log x = (g \circ f)(x)$, dove ancora $f(x) = \log x$ e $g(y) = \mathsf{e}^y/y$. Abbiamo $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, mentre $g(y) \to +\infty$ per $y \to +\infty$. Se invece $\beta > 0$, poniamo ancora $t = x^\beta$ e per ogni $x > 0$ scriviamo $x^\beta/\log x = t/\log(t^{1/\beta}) = \beta\,(t/\log t)$ e l'asserto segue dal caso $\beta = 1$, essendo $t \to +\infty$ se $x \to +\infty$.

Esempio 5.2.22 Osserviamo che $x^x \to 1^-$ per $x \to 0^+$.

Il limite infatti è una forma indeterminata del tipo 0^0, ma possiamo scrivere $x^x = \exp(\log(x^x)) = \exp(x \log x)$ per ogni $x > 0$. Poiché l'esponente $x \log x \to 0^-$ per $x \to 0^+$, l'asserto segue dalla continuità (e dalla monotonia) della funzione exp.

Limite di funzioni monotone

Come le successioni monotone hanno limite, vediamo ora che anche le funzioni monotone hanno sempre limite da destra e da sinistra, cf. la definizione 5.2.6.

Teorema 5.2.23 *Se f è crescente in $]a,b[$, allora*

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{]a,b[} f \qquad e \qquad \exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{]a,b[} f \ .$$

Se invece f è decrescente in $]a,b[$, allora

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \sup_{]a,b[} f \qquad e \qquad \exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf_{]a,b[} f \ .$$

Dimostrazione: Verifichiamo il secondo limite. Posto $l = \sup_{]a,b[} f$, se $l \in \mathbb{R}$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{x} \in]a,b[$ tale che $f(\overline{x}) > l - \varepsilon$. Essendo f crescente, posto $\delta = b - \overline{x} > 0$ otteniamo dunque che se $\overline{x} = b - \delta < x < b$, allora $l - \varepsilon < f(\overline{x}) \leq f(x) \leq l < l + \varepsilon$, da cui $|f(x) - l| < \varepsilon$ e dunque l'asserto, per la definizione di limite per $x \to b^-$. Se invece $l = +\infty$, per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\overline{x} \in]a,b[$ tale che $f(\overline{x}) > M$, per cui posto ancora $\delta = b - \overline{x} > 0$ questa volta otteniamo che $f(x) > M$ se $\overline{x} = b - \delta < x < b$. □

Osservazione 5.2.24 In particolare se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua agli estremi dell'intervallo $[a,b]$, allora da quanto sopra deduciamo che $\inf_{]a,b[} f = f(a)$ e $\sup_{]a,b[} f = f(b)$, se f è crescente, mentre risulta $\inf_{]a,b[} f = f(b)$ e $\sup_{]a,b[} f = f(a)$, se f è decrescente.

Corollario 5.2.25 *Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione monotona e sia $c \in]a,b[$. Se f è crescente risulta*

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup_{]a,c[} f \leq f(c) \leq \inf_{]c,b[} f = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

mentre se f è decrescente risulta

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \inf_{]a,c[} f \geq f(c) \geq \sup_{]c,b[} f = \lim_{x\to c^+} f(x) \ .$$

Osservazione 5.2.26 Analogamente, da questo corollario deduciamo che se f è crescente, allora f è continua in $x_0 = c$ se e solo se $\sup_{]a,c[} f = \inf_{]c,b[} f$, mentre se f è decrescente, allora f è continua in $x_0 = c$ se e solo se $\inf_{]a,c[} f = \sup_{]c,b[} f$. Infatti, in tal caso abbiamo

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c^+} f(x) \,.$$

Esempio 5.2.27 Usando un analogo ragionamento troviamo gli estremi di $A = \{\cos(\pi/n) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$. Abbiamo $A = f(B)$ dove $f(x) = \cos x$ è continua e $B = \{\pi/n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$. Inoltre $\sup B = \max B = \pi$ e $\inf B = 0$, che non è minimo. Essendo $B \subset [0,\pi]$ con f decrescente su $[0,\pi]$, otteniamo che $\inf A = \min A = f(\pi) = -1$ e $\sup B = f(0) = 1$. Infatti 1 è ovviamente un maggiorante di A, mentre per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $\cos(\pi/n) > 1 - \varepsilon$, dal momento che $\pi/n \to 0$ ed f è continua in $\overline{x} = 0$.

Asintoti

Se una funzione reale f ha limite $l \in \mathbb{R}$ per $x \to \pm\infty$, allora la distanza "in ordinata" $|f(x) - l|$ tra il grafico di f e la retta di equazione $y = l$ è infinitesima per $x \to \pm\infty$. Quindi la retta $y = l$ si chiama *asintoto orizzontale* per $x \to \pm\infty$.

Analogamente, se f ha limite $\pm\infty$ per $x \to x_0^\pm$, allora questa volta la distanza "in ascissa" tra il grafico di f e la retta di equazione $x = x_0$ è infinitesima per $x \to x_0^\pm$. Quindi la retta $x = x_0$ si chiama *asintoto verticale* per $x \to \pm x_0^\pm$.

Vediamo ora come trovare gli eventuali *asintoti obliqui* per $x \to \pm\infty$. Se esistono, sono rette r di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, tali che la distanza "in ordinata" tra il grafico di f e la retta r è infinitesima per $x \to \pm\infty$. Quindi i numeri reali $m, q \in \mathbb{R}$ devono essere tali che $|f(x) - mx - q| \to 0$ se $x \to \pm\infty$. Se esiste un asintoto, la funzione f necessariamente deve divergere a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, con segno dato dalla pendenza della retta r. Inoltre deve verificarsi che $(f(x) - mx - q) \to 0$ se $x \to \pm\infty$ da cui, dividendo per x, anche che $(f(x)/x - m) \to 0$ se $x \to \pm\infty$. L'eventuale asintoto obliquo di f per $x \to \pm\infty$ ha dunque equazione $y = mx + q$ dove i parametri m e q sono determinati dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \textbf{e} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R} \,.$$

5.3 Funzioni continue su un intervallo

Ricordiamo la definizione 3.1.5 di intervallo di reali. Un'importante proprietà delle funzioni continue è la conservazione della connessione: l'immagine di un intervallo è sempre un intervallo, cf. teorema 5.3.5.

Teorema di esistenza degli zeri

Chiamiamo *zero di una funzione* f una soluzione $z \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = 0$.

Teorema 5.3.1 *Sia f una funzione reale continua su un intervallo $[a, b]$ e tale che $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Allora esiste un punto $z \in [a, b]$ tale che $f(z) = 0$.*

Dimostrazione: Se $f(a) \cdot f(b) = 0$ l'asserto è ovviamente vero. Se invece $f(a) \cdot f(b) < 0$, senza perdere generalità possiamo supporre $f(a) < 0 < f(b)$. Poniamo allora $A_- := \{x \in [a, b] \, : \, f(x) < 0\}$. Poiché $a \in A_-$ e $b \in \mathbb{R}$ è maggiorante di A_-, l'insieme $A_- \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e limitato superiormente. Allora per il teorema 3.2.3 di esistenza dell'estremo superiore $\exists \, z = \sup A_- \in \mathbb{R}$. Ovviamente $a \leq z \leq b$, quindi f è continua in $x_0 = z$. Mostriamo ora che $f(z) = 0$. Se fosse $f(z) < 0$, allora $z < b$ e per la permanenza del segno, proposizione 5.0.3, esisterebbe $\delta > 0$ tale che se $z < x < z + \delta$ e $x \in [a, b]$ risulta $f(x) < 0$, dunque ci sarebbero punti di A_- a destra di z, il che è assurdo perchè z è maggiorante di A_-. Analogamente, se fosse $f(z) > 0$, allora $z > a$ e per la permanenza del segno, proposizione 5.0.3, esisterebbe $\delta > 0$ tale che se $z - \delta < x < z$ e $x \in [a, b]$ risulta $f(x) > 0$, dunque ci sarebbero maggioranti di A_- a sinistra di z, il che è ancora assurdo perchè z è il più piccolo dei maggioranti di A_-. $\square$

Osservazione 5.3.2 La tesi è falsa se non vale una delle ipotesi fondamentali. Se infatti il dominio di f non è un intervallo, ad esempio $A = [-1, 1] \setminus \{0\}$, basta prendere $f(x) = x/|x|$. Se invece non è richiesto che f sia continua, basta estendere la funzione precedente ponendo ad esempio $f(0) = 1$. Infine, la tesi è falsa per funzioni continue definite su intervalli di razionali. Preso infatti $A = [0, 2] \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = x - \sqrt{2}$, allora $f(0) = -\sqrt{2} < 0 < 2 - \sqrt{2} = f(2)$, f è continua ma non si annulla mai su A. Si noti infatti che se definiamo A_- come nella dimostrazione precedente, risulta $A_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < \sqrt{2}\}$ e dunque $\sup A_- = \sqrt{2}$, che non essendo razionale non sta in A.

La dimostrazione che abbiamo visto fa uso dell'esistenza dell'estremo superiore. Vediamo ora una dimostrazione costruttiva che fa uso dell'argomento di bisezione, come nel teorema 4.9.5 di Bolzano-Weiertsrass, e dell'esistenza del limite di successioni monotone (che ricordiamo discende dall'esistenza dell'estremo superiore). Questo approccio si applica nel calcolo numerico.

Dimostrazione per bisezione: Supponiamo come sopra $f(a) < 0 < f(b)$. Posto $I_0 := [a_0, b_0]$, dove $a_0 = a$ e $b_0 = b$, denotiamo con $\mu_0 := (b_0 + a_0)/2$ il punto medio dell'intervallo I_0. Se $f(\mu_0) = 0$ la dimostrazione è terminata, se risulta $f(\mu_0) > 0$ poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = \mu_0$, se invece risulta $f(\mu_0) < 0$ poniamo $a_1 = \mu_0$ e $b_1 = b_0$. In entrambi i casi abbiamo ancora $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Detto allora $I_1 = [a_1, b_1]$ abbiamo $a_0 \leq a_1$ e $b_1 \leq b_1$, con $(b_1 - a_1) = 2^{-1} (b_0 - a_0)$.

Dopo n passaggi di bisezione, definiamo $I_n = [a_n, b_n]$ sapendo che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ e $(b_n - a_n) = 2^{-n} (b_0 - a_0)$. Denotato con $\mu_n := (b_n + a_n)/2$ il punto medio dell'intervallo I_n, se $f(\mu_n) = 0$ la dimostrazione è terminata, se risulta $f(\mu_n) > 0$ poniamo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = \mu_n$, se invece risulta $f(\mu_n) < 0$ poniamo $a_{n+1} = \mu_n$ e $b_{n+1} = b_n$. In entrambi i casi abbiamo ancora $f(a_{n+1}) \cdot f(b_{n+1}) < 0$.

Se $f(\mu_n) \neq 0$ per ogni n, per induzione abbiamo costruito una successione $\{a_n\}_n$ crescente e una successione $\{b_n\}_n$ decrescente, la prima limitata superiormente da b e la seconda limitata inferiormente da a. Allora $\{a_n\}_n$ converge ad un numero $z \in [a, b]$ ed anche $\{b_n\}_n$ converge a z, essendo $b_n = a_n + 2^{-n}(b_0 - a_0)$ per ogni n. Poiché f è continua in z, allora $f(a_n) \to f(z)$ e $f(b_n) \to f(z)$, dunque $f(a_n) \cdot f(b_n) \to [f(z)]^2$. Ma $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$ per ogni n, quindi per la permanenza del segno il limite $[f(z)]^2$ non puó essere positivo, da cui necessariamente segue $f(z) = 0$, come volevamo dimostrare. $\square$

Esempio 5.3.3 Troviamo una soluzione dell'equazione $\operatorname{sen} x = 3x - 3$ a meno di un errore controllato da 0.25. Posto $f(x) = \operatorname{sen} x - 3x + 3$, allora $f(1) = \operatorname{sen} 1 > 0$ mentre $f(2) = \operatorname{sen} 2 - 6 < 0$, per cui f si annulla nell'intervallo $[1, 2]$, essendo continua su $\mathbb{R}$. Nel punto medio dell'intervallo $[1, 2]$, che è 1.5, abbiamo $f(1.5) = \operatorname{sen}(3/2) + 3/2 > 0$, dunque f si annulla nell'intervallo $[1.5, 2]$, dal momento che agli estremi assume valori discordi. Poiché tale intervallo ha ampiezza 0.5, il suo punto medio, i.e. $z = 1.75$, ci dà uno zero di f con un errore controllato da metà dell'ampiezza dell'intervallo, come richiesto.

Corollario 5.3.4 *Sia g una funzione reale continua su un intervallo $[a, b]$ e tale che $g(a) \leq k \leq g(b)$ oppure $g(a) \geq k \geq g(b)$. Allora esiste un punto $z \in [a, b]$ tale che $g(z) = k$.*

Dimostrazione: Basta applicare il teorema precedente alla funzione $f(x) = g(x) - k$, che è continua su $[a, b]$ e verifica $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Infatti uno zero z di f è un punto in cui g assume il valore k. □

Teorema dei valori intermedi

Teorema 5.3.5 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua ed $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo di estremi $\inf_I f$ e $\sup_I f$.*

Dimostrazione: Posto $J = f(I)$, dobbiamo provare che se $\alpha, \beta \in J$, con $\alpha < \beta$, allora per ogni $k \in]\alpha, \beta[$ anche $k \in J$. Per definizione di immagine, esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) = \alpha$ ed $f(b) = \beta$. Supponiamo senza ledere di generalità che $a < b$. Infatti nell'altro caso basta considerare la funzione $-f$. Poiché I è un intervallo, allora $[a, b] \subset I$ e dunque la funzione restrizione $g = f_{|[a,b]}$ è continua. Allora essendo $g(a) \leq k \leq g(b)$, per il corollario precedente esiste $z \in [a, b]$ tale che $g(z) = k$, dunque $z \in I$ e $f(z) = k$, per cui $k \in J = f(I)$. Posti poi $L = \sup_I f$ e $l = \inf I_f$, con $l < L$ (altrimenti la funzione f è costante), allora comunque scelgo $k \in]l, L[$, esistono $\alpha, \beta \in J$ tali che $\alpha < k < \beta$, dunque $k \in J$, volevamo dimostrare. □

Osservazione 5.3.6 Il teorema dei valori intermedi implica la cosiddetta *proprietà di suriettività* delle funzioni elementari.

Ad esempio, otteniamo che l'immagine della funzione exp è la semiretta $]0, +\infty[$. Infatti, exp è continua su $\mathbb{R}$, che è un intervallo, e $\inf \exp = 0$ mentre $\sup \exp = +\infty$. Dunque l'immagine $J = \exp(\mathbb{R})$ è una semiretta di estremi 0 e $+\infty$, ma $\mathsf{e}^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque $0 \notin J$, come volevamo dimostrare.

In maniera analoga si mostra ad esempio che l'immagine di x^2 e di $x^2_{|[0,+\infty)}$ è la semiretta $[0, +\infty[$.

Iniettività e monotonia

Sappiamo che una funzione strettamente monotona è iniettiva, ma il viceversa è in generale falso. Ad esempio, la funzione $f(x) = 1/x$, definita su $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, è iniettiva ma non è monotona, pur essendo continua. Invece la sua estensione a tutto $\mathbb{R}$ tale che $f(0) = 0$ è iniettiva ma non monotona, non essendo continua. Vediamo infatti che il viceversa è vero per funzioni continue e definite su intervalli.

Teorema 5.3.7 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, allora f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona.*

Dimostrazione: Dobbiamo provare che l'iniettività implica la stretta monotonia, l'altra implicazione essendo vera in generale. Usando la contronominale, dobbiamo dunque dimostrare che data una funzione f continua su I, se f non è strettamente monotona allora f non può essere iniettiva.

Poiché f non è né strettamente crescente né strettamente decrescente, pur essendo iniettiva, allora

$$\begin{cases} \exists\, x_0, y_0 \in I \, : x_0 < y_0 \ \textbf{e} \ f(x_0) > f(y_0) \\ \exists\, x_1, y_1 \in I \, : x_1 < y_1 \ \textbf{e} \ f(x_1) < f(y_1) \, . \end{cases}$$

Consideriamo le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ definite sull'intervallo $[0, 1]$ e che parametrizzano i segmenti di estremi x_0, x_1 e y_0, y_1, rispettivamente:

$$x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)\,, \qquad y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0)\,, \qquad t \in [0, 1] \, .$$

Tali funzioni sono continue ed inoltre risulta $x(t) < y(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$. Infatti per $t = 0$ abbiamo $x(0) = x_0 < y_0 = y(0)$, mentre $x(1) = x_1 < y_1 = y(1)$ per $t = 1$. Se invece $0 < t < 1$, anche $0 < 1 - t < 1$ e scriviamo

$$y(t) - x(t) = t(y_1 - x_1) + (1 - t)(y_0 - x_0) > 0 \, .$$

Quindi per ogni $t \in [0, 1]$ l'intervallo $[x(t), y(t)]$ è non degenere e contenuto in I. Infatti, $x(t) \in I$ e $y(t) \in I$ essendo contenuti negli intervalli di estremi $x_0, x_1 \in I$ e $y_0, y_1 \in I$, dunque $[x(t), y(t)] \subset I$ per ogni t essendo I un intervallo.

Introduciamo allora la funzione $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $F(t) = f(y(t)) - f(x(t))$. Da quanto visto deduciamo che F è continua su $[0, 1]$, come somma di funzioni che sono composizione di due funzioni continue. Inoltre $F(0) = f(y_0) - f(x_0) < 0$ mentre $F(1) = f(y_1) - f(x_1) > 0$. Allora per il teorema 5.3.1 di esistenza degli zeri esiste un punto $\overline{t} \in [0,1]$ tale che $F(\overline{t}) = 0$, i.e., $f(y(\overline{t})) = f(x(\overline{t}))$, ma questo è un assurdo, in quanto f è iniettiva su I mentre $x(\overline{t}) < y(\overline{t})$, con $x(\overline{t}),\, y(\overline{t}) \in I$. □

Continuità dell'inversa

Sia ora g una funzione definita su un intervallo J. Per il teorema dei valori intermedi sappiamo già che se g è continua, allora l'immagine $g(J)$ è un intervallo. Vediamo ora che per funzioni g monotone vale anche il viceversa:

Proposizione 5.3.8 *Sia g una funzione reale monotona definita su un intervallo J. Allora g è continua se e solo se la sua immagine $g(J)$ è un intervallo.*

Dimostrazione: Poiché per ipotesi g è monotona, a meno di sostituire g con $-g$ possiamo senz'altro supporre che g sia crescente. Dobbiamo dimostrare che se $g(J)$ è in intervallo, allora g è continua su J. Per assurdo, supponiamo che esista $x_0 \in J$ tale che g non è continua in x_0. Supponiamo inoltre che x_0 sia interno a J, il caso in cui x_0 è un estremo di J essendo trattato in maniera analoga.

Per il corollario 5.2.25, posti $J^- = \{x \in J \mid x < x_0\}$ e $J^+ = \{x \in J \mid x > x_0\}$, abbiamo che

$$\lim_{x\to x_0^-} g(x) = \sup_{J^-} g =: l^- \le f(x_0) \le l^+ := \inf_{J^+} g = \lim_{x\to x_0^+} g(x)$$

dove almeno una delle due disuguaglianze $l^- \le f(x_0) \le l^+$ deve essere stretta. Se ad esempio lo è la prima, allora abbiamo che $g(J^-) \subset]-\infty, l^-]$ mentre $g(J^+ \cup \{x_0\}) \subset [g(x_0), +\infty[$. Ora gli insiemi $g(J^-)$ e $g(J^+ \cup \{x_0\})$ sono entrambi non vuoti e la loro immagine è esattamente $g(J)$. Ma $l_- < g(x_0)$, dunque $g(J)$ non potrebbe essere un intervallo, il che è un assurdo. Se è stretta la seconda diseguaglianza in $l^- \le f(x_0) \le l^+$, si ragiona in maniera analoga. □

Deduciamo allora la continuità dell'inversa di funzioni continue e invertibili definite su intervalli.

Proposizione 5.3.9 *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Allora anche la sua inversa è continua.*

Dimostrazione: Infatti, se $f : I \to \mathbb{R}$ è invertibile, significa che è iniettiva. Dunque f è strettamente monotona per il teorema 5.3.7. Inoltre per il teorema 5.3.5 dei valori intermedi l'immagine $J = f(I)$ è un intervallo. Dunque la funzione inversa $g = f^{-1}$ è definita su un intervallo J ed è monotona, essendo inversa di una funzione monotona. Poiché g ha immagine $I = g(J)$ che è un intervallo, per la proposizione 5.3.8 otteniamo che g è continua, come volevamo dimostrare. □

Esempio 5.3.10 Poiché la funzione $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è l'inversa della funzione $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ che è continua e strettamente crescente, e $\mathbb{R}$ è un intervallo, allora anche log è continua su $]0, +\infty[$.

In maniera analoga, ritroviamo ad esempio che anche la funzione radice $x^{1/2}$ è continua su $[0, +\infty[$, essendo l'inversa della funzione $x^2 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ che è continua e strettamente crescente.

Infine, anche $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$, $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to [\pi/2, \pi/2]$ e $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ sono continue essendo le inverse delle funzioni continue e strettamente monotone $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, $\operatorname{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ e $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, rispettivamente.

Teorema di Weierstrass

Una funzione continua può non essere limitata: si consideri ad esempio la funzione tan. Inoltre, anche se è limitata, non è detto abbia massimo o minimo, come succede ad esempio per la funzione arctan. Vediamo ora che se f è continua e definita su un intervallo chiuso e limitato, allora ha massimo e minimo.

Teorema 5.3.11 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato, allora f ha massimo e minimo.*

Dimostrazione: Mostriamo che f ha massimo. Posto $M = \sup f$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ poniamo $y_n = n$ se $M = +\infty$ e $y_n = M - 1/n$ se $M \in \mathbb{R}$. Per definizione di estremo superiore, esiste un punto $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > y_n$. In ogni caso $\{y_n\}_n$ e $\{x_n\}_n$ definiscono due successioni di numeri reali tali che $y_n \to M$ mentre $y_n < f(x_n) \le M$, dunque anche $f(x_n) \to M$. Inoltre $\{x_n\}_n$ è una successione di punti di $[a,b]$, che è un insieme limitato. Allora grazie al teorema 4.9.5 di Bolzano-Weiertsrass, esiste una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_n$ che converge ad un numero reale $\overline{x}$. Poiché $a \le x_n \le b$ per ogni n, allora anche $\overline{x} \in [a,b]$. Ma f è continua in $[a,b]$, dunque abbiamo che $f(x_{k_n}) \to f(\overline{x})$. Essendo $\{f(x_{k_n})\}_n$ una sottosuccessione di $\{f(x_n)\}_n$, che ha limite M, deve anch'essa avere limite M e dunque $M = f(\overline{x})$. Ma questo significa che $M \in \mathbb{R}$ è anche il massimo di f e che $\overline{x}$ è un punto di massimo. Per mostrare che f ha minimo, basta considerare $-f$. In particolare otteniamo che f è limitata. □

Corollario 5.3.12 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora l'immagine di f è l'intervallo chiuso e limitato* $[\min f, \max f]$.

Dimostrazione: Infatti sappiamo già per il teorema dei valori intermedi che l'immagine è un intervallo di estremi $\inf f$ e $\sup f$. Il teorema di Weiertsrass ci dice poi che tale intervallo è limitato e contiene gli estremi, da cui segue l'asserto. □

Osservazione 5.3.13 *Il teorema di Weierstrass vale per funzioni continue definite su un insieme A chiuso e limitato*, non importa che A sia un intervallo. Infatti se $\{x_n\}_n \subset A$, allora è ancora una successione limitata, che dunque ammette una sottosuccessione convergente ad un punto $\overline{x}$. Poiché A è chiuso, allora deve contenere tutti i punti di accumulazione di A e in particolare $\overline{x}$. Quindi f è continua in $\overline{x}$ e la dimostrazione procede in maniera analoga.

Osservazione 5.3.14 Abbiamo già visto sopra che in generale una funzione continua non ha massimo né minimo se non è definita su un insieme (intervallo) chiuso e limitato. Consideriamo ora una funzione continua $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, dove dunque l'intervallo $]a,b[$ non è chiuso e a priori nemmeno limitato, essendo in generale $-\infty \le a < b \le +\infty$. Supponiamo inoltre che esistano in $\overline{\mathbb{R}}$ seguenti limiti: $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) =: l_a$, $\exists \lim_{x\to b^-} f(x) =: l_b$. Vediamo ora che:

i) se $l_a = l_b = l \in \mathbb{R}$, allora f ha massimo o ha minimo

ii) se $l_a = l_b = +\infty$, allora f ha minimo

iii) se $l_a = l_b = -\infty$, allora f ha massimo.

i) Se f non è costante, esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che $f(x_0) \ne l$. Se $f(x_0) > l$, allora f ha massimo. Infatti, esistono $a < \widetilde{a} < \widetilde{b} < b$ tali che se $a < x < \widetilde{a}$ o $\widetilde{b} < x < b$ allora $f(x) < (f(x_0) + l)/2$, ma f ha massimo M su $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ e ovviamente $M \ge f(x_0)$, perchè $x_0 \in [\widetilde{a}, \widetilde{b}]$. Quindi $f(x) \le M$ per ogni $x \in]a,b[$, come volevamo dimostrare. Analogamente si mostra che f ha minimo se esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che $f(x_0) < l$.

ii) La funzione si dice *coerciva* ed ha minimo. Infatti, fissato $x_0 \in]a,b[$, esistono $a < \widetilde{a} < \widetilde{b} < b$ tali $f(x) > f(x_0)$ se $a < x < \widetilde{a}$ o $\widetilde{b} < x < b$. Ma f ha minimo m su $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ e ovviamente $m \le f(x_0)$, perchè $x_0 \in [\widetilde{a}, \widetilde{b}]$. Quindi $f(x) \ge m$ per ogni $x \in]a,b[$, come volevamo dimostrare.

iii) Si ragiona con $-f$.

Esempio 5.3.15 La funzione $f(x) = x^4 - x^2$ ha minimo su $\mathbb{R}$. Infatti è continua ed ha limite $+\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

Esempio 5.3.16 La funzione $f(x) = (x^2 - x)\mathsf{e}^{-|x|}$ ha massimo e minimo su $\mathbb{R}$.

Infatti tale funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre ricordiamo che l'esponenziale e^t, per $t \to +\infty$, è un infinito di ordine superiore a qualsiasi polinomio in t. Quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{\mathsf{e}^x} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x}{\mathsf{e}^{-x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2 + t}{\mathsf{e}^t} = 0 \,, \end{aligned}$$

dove nel secondo limite abbiamo usato la sostituzione $t = -x$, per cui $x \to -\infty \iff t \to +\infty$. Inoltre f assume sia valori positivi che negativi, in quanto il suo segno è determinato dal segno polinomio $x^2 - x$. Ad esempio abbiamo

$$f(1/2) = (-1/4)\mathsf{e}^{-1/2} < 0 \qquad \text{e} \qquad f(2) = 2\mathsf{e}^{-2} > 0 \,.$$

Allora, per quanto visto sopra f ha sia massimo che minimo su $\mathbb{R}$ e, in particolare, è limitata.

5.4 Infinitesimi

Parleremo solo di infinitesimi per $x \to 0$, quindi di funzioni f per le quali $0 \in \operatorname{acc}(\operatorname{dom} f)$. La dicitura "per $x \to 0$" sarà spesso sottintesa. Partiamo da questo esempio: vogliamo calcolare per ogni esponente reale β il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^\beta} \,.$$
Poiché $(x - \operatorname{sen} x) \to 0$ per $x \to 0$, allora il limite vale ovviamente zero se $\beta \leq 0$, mentre se $\beta > 0$ presenta una forma indeterminata $0/0$. Sappiamo inoltre che $\operatorname{sen} x/x \to 1$ per $x \to 0$, quindi raccogliendo $x > 0$ otteniamo
$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^\beta} = x^{1-\beta}\Big(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)$$
da cui deduciamo che il limite vale zero anche se β è positivo ma purché $\beta \leq 1$, mentre per $\beta > 1$ abbiamo ancora una forma indeterminata. Supponiamo ora di sapere che l'infinitesimo a numeratore possa scriversi come somma di due quantità: un monomio del tipo Lx^n, con $L \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$, più un infinitesimo $g(x)$ tale che $g(x)/x^n \to 0$. In tal caso, grazie al principio di sostituzione sappiamo che nella somma di infinitesimi $Lx^n + g(x)$ conta il primo addendo, in quanto raccogliendo x^n abbiamo $Lx^n + g(x) = x^n(L + g(x)/x^n)$, dove $(L + g(x)/x^n) \to L + 0 = L$ per $x \to 0$.

In effetti vedremo che ciò risulta vero con $L = 1/6$ ed $n = 3$, i.e.
$$x - \operatorname{sen} x = \frac{1}{6}x^3 + g(x) \qquad \textbf{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^3} = 0 \,.$$
Allora possiamo scrivere per ogni $x > 0$
$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^\beta} = \frac{x^3/6 + g(x)}{x^\beta} = \frac{x^3/6 + g(x)}{x^3} \cdot x^{3-\beta} = \Big(\frac{1}{6} + \frac{g(x)}{x^3}\Big) \cdot x^{3-\beta} \,.$$
Poiché $g(x)/x^3 \to 0$, allora la parentesi ha limite $1/6$ e dunque il limite dipende dal comportamento della funzione potenza $x^{3-\beta}$. Avendo infatti tolto l'indeterminazione, grazie al teorema del limite del prodotto deduciamo che:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 3 \\ 1/6 & \text{se } \beta = 3 \\ +\infty & \text{se } \beta > 3 \,. \end{cases}$$

Ordine di infinitesimo e parte principale

L'esempio precedente motiva la seguente

Definizione 5.4.1 Sia $g(x)$ una funzione infinitesima per $x \to 0$ e sia $\alpha > 0$; si dice che $g(x)$ è un *infinitesimo di ordine superiore a* x^α per $x \to 0$ se risulta
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{|x|^\alpha} = 0 \,;$$
in tal caso si scrive $g(x) = o(x^\alpha)$, che si legge *g è o piccolo di x^α*. Scriviamo inoltre $g = o(1)$ se $g(x)$ è infinitesima per $x \to 0$.

Osservazione 5.4.2 Si noti che se $\alpha = n \in \mathbb{N}^+$, essendo $x/|x| \in \{-1, 1\}$ per ogni $x \neq 0$, allora deduciamo che $g(x) = o(x^n)$ se e solo se risulta che $g(x)/x^n \to 0$ per $x \to 0$. In generale, se anche $f(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to 0$, scriveremo $g(x) = o(f(x))$ se risulta che
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \,.$$

Esempio 5.4.3 Dai limiti fondamentali deduciamo immediatamente che $\operatorname{sen} x - x = o(x)$, $\mathrm{e}^x - 1 - x = o(x)$, $\log(1 + x) - x = o(x)$, $1 - \cos x - x^2/2 = o(x^2)$.

Supponiamo ora di sapere che per qualche $n \in \mathbb{N}^+$
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = L$$

dove $L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ è un numero reale non nullo. Allora posto $g(x) = f(x) - Lx^n$, abbiamo che $g(x) = o(x^n)$, in quanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-Lx^n}{x^n} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{f(x)}{x^n} - L\Big) = 0\,.$$

Definizione 5.4.4 Una funzione $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine* n (rispetto l'infinitesimo campione x) se $n \in \mathbb{N}^+$ ed esiste $L \neq 0$ reale tale che $f(x) = Lx^n + o(x^n)$. Il monomio Lx^n si dice *parte principale* dell'infinitesimo. Quindi

$$f(x) = Lx^n + o(x^n) \iff \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = L\,, \qquad L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Esempio 5.4.5 Quindi abbiamo che $\operatorname{sen} x$, $\mathsf{e}^x - 1$, $\log(1+x)$ sono infinitesimi del primo ordine con parte principale x, mentre $1 - \cos x$ è infinitesimo del secondo ordine con parte principale $x^2/2$. Nell'esempio iniziale abbiamo utilizzato che $x - \operatorname{sen} x = x^3/6 + o(x^3)$, i.e. che $x - \operatorname{sen} x$ è un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $x^3/6$.

Proprietà degli "o piccoli"

Quando scriviamo $g(x) = o(x^\alpha)$, in realtà intendiamo che g appartiene alla famiglia di funzioni che sono infinitesimi di ordine superiore a $|x|^\alpha$ per $x \to 0$. Dovremmo quindi scrivere $g(x) \in o(x^\alpha)$, non essendo una vera uguaglianza. Infatti, se $f(x) = o(x^\alpha)$ e $g(x) = o(x^\alpha)$ non possiamo dedurre che $f(x) - g(x) = 0$. Poiché per $x \neq 0$

$$\frac{f(x)-g(x)}{|x|^\alpha} = \frac{f(x)}{|x|^\alpha} - \frac{g(x)}{|x|^\alpha}$$

deduciamo invece che $f(x) - g(x) = o(x^\alpha)$. Osserviamo inoltre che se $g(x) = o(x^\alpha)$ allora abbiamo anche che $g(x) = o(x^\beta)$ per $0 \le \beta < \alpha$, ma il viceversa ovviamente è falso. Queste ed analoghe considerazioni sono alla base delle seguenti proprietà, che vanno quindi lette come implicazioni del tipo "$\Rightarrow$".

Proposizione 5.4.6 *Se $\alpha, \beta > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, abbiamo:*

i) $k\ o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

ii) $o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

iii) $x^{\alpha+\beta} = o(x^\alpha)$

iv) $o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$

v) $o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$

vi) $o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$

vii) $o(x^\alpha + x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$

viii) $x^\alpha\ o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$

ix) $o(x^\alpha)\ o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$

x) $\dfrac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha)$.

DIMOSTRAZIONE: Per comodità trascuriamo di scrivere i valori assoluti a denominatore. La i) e la ii) sono ovvie, per la iii) osserviamo che $f(x)/x^{\alpha+\beta} \to 0 \Rightarrow f(x)/x^\alpha \to 0$. Nella iv) stiamo dicendo che se $f(x)/x^\alpha \to 0$ e $g(x)/x^{\alpha+\beta} \to 0$, allora $(f+g)(x)/x^\alpha = (f(x)/x^\alpha + x^\beta \cdot g(x)/x^{\alpha+\beta}) \to 0$. Nella v) stiamo dicendo che se $g(x)/f(x) \to 0$ e $f(x)/x^\alpha \to 0$, allora $g(x)/x^\alpha = (g(x)/f(x)) \cdot (f(x)/x^\alpha) \to 0$. Analogamente, nella vi) stiamo dicendo che se $g(x)/(f(x)+x^\alpha) \to 0$ e $f(x)/x^\alpha \to 0$, allora $g(x)/x^\alpha = (g(x)/(f(x)+x^\alpha)) \cdot (f(x)+x^\alpha)/x^\alpha \to 0$, in quanto il secondo fattore ha limite 1. La vii) segue dalla iii) e dalla vi). La viii) significa che se $f(x)/x^\alpha \to 0$ allora $(f(x)\cdot x^\beta)/x^{\alpha+\beta} \to 0$. La ix) vuol dire che se $f(x)/x^\alpha \to 0$ e $g(x)/x^\beta \to 0$, allora $(f\cdot g)(x)/x^{\alpha+\beta} \to 0$. Infine la x) riguarda il quoziente: se $f(x)/x^{\alpha+\beta} \to 0$, allora $(f(x)/x^\beta)/x^\alpha \to 0$. $\square$

Sviluppi di Taylor

Ricordiamo che un polinomio $P_n(x)$ si dice di *ordine* n se si scrive come $P_n(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n$, mentre il grado del polinomio è il più grande indice $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ tale che il coefficiente $a_i \neq 0$. Ricordiamo poi che per il principio di identità due polinomi di ordine n coincidono se e solo se hanno gli stessi coefficienti dei monomi simili (i.e. di stesso grado).

Definizione 5.4.7 Data una funzione reale $f(x)$, se esiste un polinomio $P_n(x)$ di ordine n tale che $f(x) = P_n(x)+o(x^n)$, allora $P_n(x)$ si chiama *polinomio di Taylor di ordine* n di $f(x)$ (centrato in $x_0 = 0$, detto quindi anche di Mac Laurin). La scrittura $P_n(x) + o(x^n)$ si chiama *sviluppo di Taylor di ordine* n di $f(x)$ (centrato in $x_0 = 0$).

Come vedremo, la regolarità di f determina o meno l'esistenza dello sviluppo di Taylor di ordine n. Come per il limite, la definizione precedente ha senso in quanto vale la seguente proprietà di *unicità*.

Proposizione 5.4.8 *Se esiste, il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ è unico.*

Dimostrazione: Supponiamo infatti che esistano due polinomi $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ di ordine n tali che $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ ed anche $f(x) = Q_n(x) + o(x^n)$. Sottraendo membro a membro abbiamo che $0 = Q_n(x) - P_n(x) + o(x^n) - o(x^n)$, i.e. $Q_n(x) - P_n(x) = o(x^n)$. Poiché il polinomio $Q_n(x) - P_n(x)$ ha ordine n, esistono $c_0, c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ tali che $Q_n(x) - P_n(x) = c_0 + c_1x + \cdots c_nx^n$, ma allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{c_0 + c_1x + \cdots c_nx^n}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{Q_n(x) - P_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0\,.$$

Questo accade se e solo se tutti i coefficienti $c_i = 0$, i.e. se e solo se $P_n(x) = Q_n(x)$ per ogni x. □

Esempio 5.4.9 I seguenti sviluppi di Taylor si usano per risolvere i limiti utilizzando gli o piccoli:

$$\begin{aligned}
\mathsf{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)\\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)\ .
\end{aligned}$$

Osservazione 5.4.10 La loro verifica è una conseguenza del teorema 6.7.1 di Taylor, che dimostreremo più avanti. Da notare che a parte che per $\tan x$ e $(1+x)^\alpha$, la formula dello sviluppo è ricorsiva. Osserviamo poi che gli sviluppi di Taylor di funzioni dispari, come $\operatorname{sen} x$, $\arctan x$, $\tan x$, hanno nulli tutti i monomi di grado pari, mentre gli sviluppi di Taylor di funzioni pari, come $\cos x$, hanno nulli tutti i monomi di grado dispari.

Ad esempio, prendendo $n = 2$ nello sviluppo di $\operatorname{sen} x$ otteniamo che $\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^4)$, che è lo sviluppo di Taylor di ordine 4. Il polinomio di Taylor di ordine 4 di $\operatorname{sen} x$ è di grado 3. Da questa informazione otteniamo lo sviluppo agli ordini più bassi. Ad esempio, all'ordine tre otteniamo che $\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^3)$, da cui possiamo scrivere che $x - \operatorname{sen} x = x^3/6 + o(x^3)$, che abbiamo utilizzato nell'esempio all'inizio della sezione. Osservando poi che $-x^3/6 + o(x^3) = o(x^2)$, ritroviamo lo sviluppo al secondo ordine $\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$ e dunque quello al primo ordine $\operatorname{sen} x = x + o(x)$, che è equivalente all'informazione del limite fondamentale $\operatorname{sen} x/x \to 1$ per $x \to 0$. Infine all'ordine zero abbiamo che $\operatorname{sen} x = o(1)$.

Analogamente, prendendo $n = 2$ nello sviluppo di $\cos x$ otteniamo che $\cos x = 1-x^2/2+x^4/24+o(x^5)$, che è lo sviluppo di Taylor di ordine 5. Il polinomio di Taylor di ordine 5 di $\cos x$ è di grado 4. Da questa informazione all'ordine 4 otteniamo che $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$. Osservando ancora che $x^4/24 + o(x^4) = o(x^3)$, ritroviamo lo sviluppo al terzo ordine $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3)$. Essendo ancora $-x^2/2 + o(x^3) = o(x^2)$, otteniamo poi al secondo ordine che $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$, che è equivalente all'informazione del limite fondamentale $(1 - \cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$. Infine all'ordine 1 abbiamo che $\cos x = 1 + o(x)$ ed all'ordine zero che $\cos x = 1 + o(1)$. Quindi, come per la funzione exp, il termine costante dello sviluppo è ovviamente il valore 1 della funzione nel punto $x_0 = 0$.

Esempio 5.4.11 Verifichiamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la formula $\dfrac{1}{1-x} = P_n(x) + o(x^n)$, dove $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

Se $|x| < 1$, dalla formula sulla differenza $A^{n+1} - B^{n+1}$ di due potenze $(n + 1)$-esime, cf. (6.1), dove scegliamo $A = 1$ e $B = x$, e dividendo per la quantità non nulla $(1 - x^{n+1})(1 - x)$, otteniamo che

$$\frac{1}{1-x} = P_n(x) \cdot \frac{1}{1-x^{n+1}}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Osserviamo ora che l'ultimo fattore $1/(1 - x^{n+1}) \to 1$ se $x \to 0$. Più precisamente, aggiungendo e togliendo 1, abbiamo

$$\frac{1}{1-x^{n+1}} = 1 + \frac{1}{1-x^{n+1}} - 1 = 1 + \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} = 1 + o(x^n) \ ,$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x^{n+1}} = 0 \ .$$

Sostituendo, abbiamo quindi ottenuto che

$$\frac{1}{1-x} = P_n(x) \cdot \big(1 + o(x^n)\big) = P_n(x) + o(x^n)$$

in quanto $x^k \cdot o(x^n) = o(x^{n+k}) = o(x^n)$ per $k = 0, 1, \ldots, n$.

Osservazione 5.4.12 Vediamo alcuni tipici errori nell'uso degli sviluppi di Taylor e degli "o piccoli".

Sappiamo che $(\mathsf{e}^{x^2} - \cos x)/x^2 \to 3/2$ per $x \to 0$. Se ora scriviamo che $\mathsf{e}^t - 1 = t + o(t)$, allora $\mathsf{e}^{x^2} - 1 = x^2 + o(x^2)$. Inoltre $\cos x = 1 + o(x)$ in quanto $(1 - \cos x)/x \to 0$. Ora se dimentichiamo di scrivere "$o(x)$" abbiamo che $\mathsf{e}^{x^2} - \cos x = 1 + x^2 + o(x)^2 - 1 = x^2 + o(x^2)$ da cui il limite darebbe 1, risultato sbagliato. Questo è lo stesso errore che si commette se si sostituisce $\cos x$ con il suo limite 1 e si scrive che $(\mathsf{e}^{x^2} - \cos x)/x^2 = (\mathsf{e}^{x^2} - 1)/x^2 \to 1$.

Analogamente, vogliamo calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + x^3 - \operatorname{sen} x}{x^3}$. Se raccogliamo un fattore x il limite diventa $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 - (\operatorname{sen} x/x)}{x^2}$. Poiché $\operatorname{sen} x/x \to 1$, scrivendo in modo errato 1 al posto di $\operatorname{sen} x/x$ otterremmo $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 - 1}{x^2} = 1$. In maniera analoga, se scrivessimo che $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ e ci dimenticassimo di scrivere $o(x)$, avremmo in maniera errata $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + x^3 - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^3 - x - o(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1$. Altro tipo di errore: poiché x^3 è di ordine superiore a x è trascurabile e dunque lo dimentichiamo, ottenendo erroneamente $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$. In maniera corretta, poiché $\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^3)$, il numeratore diviene $x + x^3 - x + x^3/6 - o(x^3)$ e dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^3 - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^3/6 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \Big(\frac{7}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\Big) = \frac{7}{6} \ .$$

Limite di quoziente di infinitesimi

Supponiamo ora di dover calcolare un limite del tipo

$$\lim_{x\to 0}\frac{N(x)}{D(x)}$$

dove abbiamo già verificato che il numeratore $N(x)$ e il denominatore $D(x)$ sono due funzioni infinitesime. Se, come accade nell'esempio ad inizio della sezione, i limiti fondamentali non aiutano a risolvere, si procede come segue.

Al primo passo, si calcola l'ordine di infinitesimo e la parte principale di infinitesimo del denominatore, i.e., si trova $n\in\mathbb{N}^+$ tale che $D(x)=Lx+o(x^n)$, con $L\neq 0$. Ad esempio, se $D(x)=x-\operatorname{sen}x$, dallo sviluppo di Taylor al terzo ordine di $\operatorname{sen}x$ otteniamo che $D(x)=x^3/6+o(x^3)$, quindi $n=3$ ed $L=1/6$.

Al secondo passo, si scrive lo sviluppo di Taylor del numeratore $N(x)$ all'ordine n dettato dall'ordine di infinitesimo del denominatore. Nel caso $n=3$, otterremo dunque $N(x)=ax+bx^2+cx^3+o(x^3)$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$. Si noti che il polinomio di Taylor di qualsiasi ordine di $N(x)$ ha termine costante uguale a zero, altrimenti $N(x)$ non sarebbe infinitesimo per $x\to 0$.

A questo punto risolviamo il limite. Infatti, nell'esempio scriviamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{N(x)}{D(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+cx^3+o(x^3)}{x^3/6+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^{-2}+bx^{-1}+c+o(x^3)/x^3}{1/6+o(x^3)/x^3}$$

dove abbiamo diviso per $x^3\neq 0$ a numeratore e denominatore. Osserviamo che $o(x^3)/x^3\to 0$, quindi il denominatore dell'ultimo quoziente ha limite $1/6$, che è in generale il numero reale $L\neq 0$ dato dal coefficiente della parte principale di infinitesimo Lx^n di $D(x)$. Quindi per il limite del quoziente basta vedere cosa succede al numeratore dell'ultimo quoziente scritto sopra. Ora, se $a\neq 0$, i.e. $N(x)$ è un infinitesimo del primo ordine, allora il limite è $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno di a. Se invece $a=0$ **e** $b\neq 0$, i.e. $N(x)$ è un infinitesimo del secondo ordine, allora il limite non esiste ma esistono i limiti per $x\to 0^+$ e per $x\to 0^-$ che sono rispettivamente $\operatorname{sgn}(b)\cdot(\pm\infty)$, dove $\operatorname{sgn}(b)=b/|b|\in\{-1,1\}$ è il segno di b. Se invece $a=0$ **e** $b=0$, allora $N(x)=cx^3+o(x^3)$. Nel caso in cui $c\neq 0$, allora anche $N(x)$ è un infinitesimo del terzo ordine, con parte principale cx^3, ed il limite vale $c/(1/6)=6c$, che è il quoziente dei coefficienti delle parti principali di infinitesimo di $N(x)$ e $D(x)$, rispettivamente. Se invece anche $c=0$, il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore a 3 ed il limite vale zero.

5.5 Funzioni uniformemente continue

La frase "natura non facit saltus" esprime (almeno nel senso attribuito a Democrito) il fatto che un fenomeno naturale non cambia di molto se i dati al contorno cambiano di poco. Questo corrisponde a modellizare il fenomeno tramite funzioni continue. Se ad esempio $x\in A\subset\mathbb{R}$ esprime il dato iniziale, una legge $x\mapsto f(x)\in\mathbb{R}$ che descrive un determinato fenomeno come sopra è supposta continua. Quindi per la (5.3) abbiamo che

$$\forall\, x_0\in A\,,\ \forall\,\varepsilon>0\,,\ \exists\,\delta>0\ :\ \forall\, x\in A\,,\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\,. \tag{5.9}$$

Ad esempio, se $x_0\in\mathbb{R}^+$ rappresenta la lunghezza in cm di una barra di un determinato metallo a temperatura ambiente, la legge f postula quale sia la lunghezza della stessa barra una volta portata ad una temperatura di 1.000 gradi centigradi, per cui $f(x)>x$. Ma nelle misurazioni si commettono degli errori, anche se impercettibili. Se dunque vogliamo una stima con un errore più piccolo di 10^{-1} cm, si sceglie $\varepsilon=10^{-1}$ nella formula sopra e occorre quindi effettuare una misura a temperatura ambiente commettendo un errore più piccolo della quantità $\delta>0$ in corrispondenza di tale scelta di ε. Il problema è che in generale *la scelta di δ dipende anche dalla scelta del punto x_0.*

Esempio 5.5.1 Prendiamo la funzione $f(x)=x^2$. Abbiamo $|f(x)-f(x_0)|=|x^2-x_0^2|=|x-x_0||x+x_0|$. Fissato $x_0\in\mathbb{R}$, se $|x-x_0|<1$ allora $|x+x_0|\leq|x|+|x_0|\leq|x-x_0|+2|x_0|\leq 2|x_0|+1$ e dunque otteniamo $|f(x)-f(x_0)|\leq(2|x_0|+1)|x-x_0|$. Fissato $\varepsilon>0$, allora (5.9) vale se ad esempio scegliamo $\delta=\min\{1,\varepsilon/(|x_0|+1)\}$.

Dal momento però che la misura vera $x_0\in\mathbb{R}^+$ della lunghezza della barra è proprio quello che non conosciamo, se come nell'esempio sopra la scelta di δ dipende anche dalla scelta del punto x_0, allora non sapendo quanto vale x_0 non potremmo neppure scegliere il margine di errore δ.

In realtà i modelli sperimentali dicono che la legge di cui sopra è definita da una funzione di tipo affine, $f(x) = mx + n$, dove $n = 0$ ed m è poco più grande di 1, i.e. $m = 1.012$. Ora, per una funzione affine $f(x) = mx + n$ abbiamo che $|f(x) - f(x_0)| = |m(x - x_0)| \le |m||x - x_0|$ e dunque, se $m \ne 0$, altrimenti f è costante, possiamo scegliere $\delta = \varepsilon/|m|$ *in maniera indipendente dal punto* $x_0 \in \mathbb{R}$. Quindi nell'esempio della barra di metallo si ottiene che $\delta = \varepsilon \cdot 0.0988$ e dunque, volendo un errore $\varepsilon \le 10^{-1}$ cm, basta fare una misura a temperatura ambiente commettendo un errore più piccolo di $0.0988 \cdot 10^{-1}$ cm per essere sicuri che la lunghezza stimata $f(x)$ differisca dalla lunghezza reale $f(x_0)$ a mille gradi per meno di 10^{-1} cm. Ha dunque senso introdurre la seguente definizione, dove l'avverbio "uniformemente" si riferisce al fatto che la scelta di δ è uniforme rispetto alla scelta del punto x_0 in cui si verifica la proprietà di continuità.

Definizione 5.5.2 Una funzione reale $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *uniformemente continua* se

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x_0, x_1 \in A\,,\ |x_1 - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon\ . \tag{5.10}$$

Quindi una funzione uniformemente continua è ovviamente continua, ma il viceversa è falso, come vedremo nell'osservazione 5.5.6. Denotate allora con $C^0(A)$ e $\mathrm{UC}(A)$ le classi di funzioni continue su A ed uniformemente continue su A, risulta $C^0(A) \subset \mathrm{UC}(A)$ con inclusione in generale stretta.

Funzioni lipschitziane

Abbiamo visto sopra che le funzioni costanti e più in generale le funzioni affini $f(x) = mx + n$ sono tutte uniformemente continue su $\mathbb{R}$. Infatti se $m \ne 0$ basta scegliere $\delta = \varepsilon/|m|$ nella formula (5.10). Questo ci dice che un controllo uniforme di δ rispetto ad ε dipende dal reciproco della *pendenza* $|m|$ della retta corrispondente al grafico della funzione affine. Generalizzando questo esempio, introduciamo ora un'importante classe di funzioni che sono anche uniformemente continue, dette funzioni *lipschitziane* o *a pendenza limitata*.

Definizione 5.5.3 Una funzione reale $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* se

$$\exists\, L \in \mathbb{R}^+\ :\ \forall x_0, x_1 \in A\,,\ |f(x_1) - f(x_0)| \le L\,|x_1 - x_0|\ . \tag{5.11}$$

Quindi le funzioni affini sono lipschitziane: basta prendere $L = |m|$ nella formula precedente. Inoltre scegliendo ad esempio $\delta = \varepsilon/L$ nella formula (5.10), dove $L > 0$ è dato dalla formula (5.11), otteniamo:

Proposizione 5.5.4 *Se f è lipschitziana allora è anche uniformemente continua.*

Detta quindi $\mathrm{Lip}(A)$ la classe delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ lipschitziane, allora abbiamo l'inclusione $\mathrm{Lip}(A) \subset \mathrm{UC}(A)$ e dunque anche $\mathrm{Lip}(A) \subset C^0(A)$. Vedremo che anche l'inclusione $\mathrm{Lip}(A) \subset \mathrm{UC}(A)$ è stretta: esistono funzioni uniformemente continue che non sono lipschitziane, cf. l'osservazione 5.5.12.

Osservazione 5.5.5 Ovviamente se vale (5.11) per una costante reale $L > 0$, allora (5.11) è vera per ogni costante $\widetilde{L} > L$. Esiste il minimo tra le costanti $L > 0$ per le quali (5.11) è vera: si chiama *costante di Lipschitz di* f ed è denotata $L = \mathrm{Lip}(f)$.

La costante di Lipschitz di fatto controlla la pendenza del grafico di f in corrispondenza di ogni punto $x_0 \in A$. Infatti, esplicitando la formula (5.11), dove scriviamo x invece di x_1 abbiamo che $-L|x - x_0| \le f(x) - f(x_0) \le L\,|x - x_0|$. Dunque, se $x > x_0$ otteniamo che $f(x_0) - L(x - x_0) \le f(x) \le f(x_0) + L\,(x - x_0)$, mentre per $x < x_0$ abbiamo che $f(x_0) - L(x_0 - x) \le f(x) \le f(x_0) + L\,(x_0 - x)$. Questo significa che per ogni fissato $x_0 \in A$, il grafico di f è contenuto nella parte di piano compresa tra i due coni di vertice $(x_0, f(x_0))$ e dati dai grafici delle funzioni $x \mapsto f(x_0) - L|x - x_0|$ e $x \mapsto f(x_0) + L|x - x_0|$, che hanno pendenza L. Da qui il nome di funzioni a pendenza limitata.

Il teorema di Heine-Cantor

Osservazione 5.5.6 Dall'esempio 5.5.1 segue che la funzione x^2 non è uniformemente continua, pur essendo continua su $\mathbb{R}$. Questo si vede facilmente notando che x^2 non è nemmeno lipschitziana: non esiste nessun numero $L > 0$ per il quale valga la stima $|x_1^2 - x_0^2| \le L|x_1 - x_0|$ per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Preso infatti $x_1 = x_0 + 1$, con $x_0 > 0$, abbiamo $|x_1^2 - x_0^2| = 2x_0 + 1$ che non è controllato da nessuna costante positiva L se x_0 è abbastanza grande. Infatti il grafico di x^2 non ha pendenza limitata su $\mathbb{R}$.

Esempio 5.5.7 Osserviamo però che se ci limitiamo a considerare la funzione x^2 su in intervallo chiuso e limitato, ad esempio $[-a, a]$, dove $a > 0$ è fissato, allora la restrizione $f(x) = x^2_{|[-a,a]}$ è uniformrmrmrnte continua (ed anche lipschitziana). Infatti, ricordando la scelta $\delta = \min\{1, \varepsilon/(|x_0| + 1)\}$ in dipendenza $\varepsilon > 0$ per la verifica della continuità di x^2 in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, se $x_0 \in [-a, a]$ allora $|x_0| + 1 < a + 1$ e dunque $\varepsilon/(|x_0| + 1) \geq \varepsilon/(a + 1)$. Posto quindi $\delta = \min\{1, \varepsilon/(a + 1)\}$, questa scelta non dipende da $x_0 \in [a, b]$ e permette di provare che vale la proprietà (5.10) per $f(x) = x^2$ con $A = [-a, a]$.

Esempio 5.5.8 Analogamente, sappiamo che $f(x) = 1/x$ è continua su $]0, +\infty[$, essendo il reciproco di una funzione continua, ma vicino a zero il suo grafico non ha pendenza limitata. Per ogni $x_1 > x_0 > 0$ abbiamo infatti $|f(x_1)-f(x_0)| = (x_1-x_0)/(x_1x_0)$. Se però fissiamo un numero positivo $a > 0$, otteniamo che se $x_1 > x_0 > a$ allora $|f(x_1) - f(x_0)| \leq (x_1 - x_0)/a^2$. Dunque la funzione $f(x) = 1/x$ verifica la proprietà di uniforme continuità (5.10) su $A = [a, +\infty[$ scegliendo $\delta = \varepsilon/a^2$.

Questi esempi suggeriscono che per garantire che una funzione continua su A sia uniformemente continua, basta che il dominio A sia un insieme chiuso e limitato. Vale infatti il seguente

Teorema 5.5.9 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale continua e definita su un intervallo chiuso e limitato. Allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Allora, negando la proprietà (5.10), abbiamo che

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ :\ \forall\, \delta > 0\,,\ \exists\, x, y \in [a, b] \ :\ |x - y| < \delta \ \text{ e } \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0\,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, dunque, in corrispondenza di $\delta = 1/n$ troviamo due punti $x_n, y_n \in [a, b]$ tali che $|x_n - y_n| < 1/n$ ma $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$. Grazie al teorema 4.9.5 di Bolzano-Weiertsrass, poiché la successione $\{x_n\}_n$ è limitata, in quanto $a \leq x_n \leq b$ per ogni n, allora ha un'estratta $\{x_{k_n}\}_n$ convergente ad un numero reale $\overline{x}$. Essendo poi $a \leq x_n \leq b$, allora anche $\overline{x} \in [a, b]$. Vediamo ora che anche la corrispondente sottosuccessione $\{y_{k_n}\}_n$ converge al punto $\overline{x}$. Infatti per confronto abbiamo

$$|y_{k_n} - \overline{x}| \leq |y_{k_n} - x_{k_n}| + |x_{k_n} - \overline{x}| \leq \frac{1}{k_n} + |x_{k_n} - \overline{x}| \to 0$$

in quanto $k_n = k(n) \geq n$, cf. proposizione 4.9.2, e $|x_{k_n} - \overline{x}| \to 0$. Ma $\overline{x} \in [a, b]$ e dunque f è continua in $\overline{x}$, quindi $f(x_{k_n}) \to f(\overline{x})$ ed anche $f(y_{k_n}) \to f(\overline{x})$, da cui otteniamo che $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \to 0$. Ma questo dà un assurdo, dal momento che per costruzione risulta $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon_0 > 0$ per ogni n. $\Box$

Osservazione 5.5.10 Come accade per il teorema di Weierterass, anche *il teorema di Heine-Cantor vale per funzioni continue definite su un insieme A chiuso e limitato*, non essendo necessario che A sia un intervallo. Il motivo è lo stesso di quello descritto nell'osservazione 5.3.13, ovviamente questa volta riferito alla sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_n \subset A$.

Esempio 5.5.11 La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua. Infatti è continua su tutto $[0, +\infty)$, ed è uniformemente continua su $[0, 1]$ per il teorema di Heine-Cantor. Osserviamo ora che f è lipschitziana su $[1, +\infty)$. Infatti, se $x_1 \geq x_0 \geq 1$, abbiamo

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_0} = \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{1}{2}(x_1 - x_0)$$

e la costante di Lipschitz di $f_{|[1,+\infty)}$ è $1/2$. Essendo dunque f uniformemente continua su $[0, 1]$ e su $[1, +\infty)$, si deduce facilmente che f lo è anche su tutto $[0, +\infty)$, come volevamo dimostrare.

Osservazione 5.5.12 La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ di dominio $A = [0, 1]$ non è lipschitziana, pur essendo uniformemente continua per il teorema di Heine-Cantor. Scelto infatti $x_0 = 0$ e $L > 1$, per ogni $0 < x_1 \leq 1$, abbiamo che $|f(x_1) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| \iff \sqrt{x_1} \leq Lx_1 \iff x_1 \geq L^{-2} > 0$, dunque non vale la proprietà (5.11) per nessuna scelta di $L > 0$.

6 Funzioni derivabili

6.1 Differenziale e derivata

In questa sezione considereremo sempre funzioni reali $f : A \to \mathbb{R}$ definite su $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ sarà sempre un punto del dominio di f che è anche punto di accumulazione di $A = \operatorname{dom} f$.

Differenziale

Definizione 6.1.1 La funzione f si dice *differenziabile in* x_0 se esiste un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha\, h + o(h)$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in A$. Il numero α si chiama *differenziale di* f *in* x_0 e si denota con il simbolo $df(x_0)$.

Ricordiamo che $g(h) = o(h)$ se g è un infinitesimo di ordine superiore ad h, i.e. se $g(h)/h \to 0$ per $h \to 0$.

Esempio 6.1.2 Dagli sviluppi di Taylor al primo ordine delle funzioni elementari otteniamo:

i) $e^h = 1 + h + o(h) \Rightarrow \exp$ è differenziabile in $x_0 = 0$ e $d\exp(0) = 1$

ii) $\operatorname{sen} h = h + o(h) \Rightarrow \operatorname{sen}$ è differenziabile in $x_0 = 0$ e $d\operatorname{sen}(0) = 1$

iii) $\cos h = 1 + 0(h) \Rightarrow \cos$ è differenziabile in $x_0 = 0$ e $d\cos(0) = 0$

iv) $\log(1 + h) = h + o(h) \Rightarrow \log$ è differenziabile in $x_0 = 1$ e $d\log(1) = 1$

v) $\arctan(h) = h + o(h) \Rightarrow \arctan$ è differenziabile in $x_0 = 0$ e $d\arctan(1) = 1$

vi) $1/(1 - h) = 1 + h + o(h) \Rightarrow f(x) = (1 - x)^{-1}$ è differenziabile in $x_0 = 0$ e $df(0) = 1$.

Proposizione 6.1.3 *Se* f *è differenziabile in* x_0 *allora* f *è continua in* x_0.

Dimostrazione: Infatti, cambiando variabile $x = x_0 + h$, abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(f(x_0) + \alpha h + o(h)) = f(x_0)$$

da cui segue la continuità di f in x_0. □

Quindi la differenziabilità è equivalente all'esistenza dello sviluppo di Taylor di primo ordine e centrato in $h = 0$ della funzione $h \mapsto f(x_0 + h)$. Infatti se f è continua in x_0 ed $f(x_0 + h) = c + \alpha h + o(h)$, allora necessariamente $c = f(x_0)$. Dall'unicità degli sviluppi di Taylor deduciamo quindi che il differenziale, se esiste, è unico. Notiamo quindi che ci sono funzioni continue che non sono differenziabili. Preso infatti $f(x) = |x|$, se f fosse differenziabile in $x_0 = 0$, esisterebbe $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $|h| = \alpha h + o(h)$, da cui $|h|/h = \alpha + o(h)/h$. Ma facendo il limite ad ambo i membri per $h \to 0^+$ si ottiene $\alpha = 1$, mentre per $h \to 0^-$ si ottiene $\alpha = -1$, il che contraddice l'unicità del differenziale.

Rapporto incrementale e derivata

Definizione 6.1.4 Chiamiamo *rapporto incrementale di* f *in* x_0 la funzione

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

definita su $A \setminus \{x_0\}$. Chiamiamo poi *derivata di* f *in* x_0 il limite per $x \to x_0$ del rapporto incrementale di f in x_0:

$$\lim_{x\to x_0} R_{x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se questo esiste, finito o infinito che sia. Tale limite si indica con uno dei simboli

$$f'(x_0)\ , \qquad \frac{df}{dx}(x_0)\ , \qquad Df(x_0)\ .$$

Diremo poi che f è *derivabile in* x_0 se la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è finita, e diremo che f è derivabile nel sottoinsieme B di A se f è derivabile in ogni punto di B. Infine, diremo che f è derivabile se lo è in ogni punto del suo dominio A.

Vediamo ora che la derivabilità è equivalente alla differenziabilità.

Teorema 6.1.5 *Una funzione f è derivabile in x_0 se e solo se è differenziabile in x_0. In tal caso inoltre $f'(x_0) = df(x_0) \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione: Se $x \neq x_0$ ed $x \in A$, posto $x = x_0 + h$ scriviamo

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \,.$$

Quindi se f è derivabile in x_0 risulta che per $h \to 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \quad &\iff \quad \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \to 0 \\ &\iff \quad f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h) \end{aligned}$$

e dunque f è differenziabile in x_0 con $df(x_0) = f'(x_0)$. Viceversa, se f è differenziabile in x_0 esiste $\alpha = df(x_0) \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha h = o(h) \iff \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha h}{h} \to 0 \iff \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to \alpha \in \mathbb{R}$$

e dunque f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = \alpha$, come volevamo dimostrare. □

Esempio 6.1.6 Ci sono funzioni continue che non sono derivabili. Scelto infatti $x_0 = 0$, se $f(x) = |x|$ allora $R_0(x) = |x|/x = \mathrm{sgn}(x)$, dunque non esiste $f'(0)$. Inoltre, ci sono funzioni continue che hanno derivata infinita. Scelto infatti $f(x) = x^{1/3}$ abbiamo $R_0(x) = x^{-2/3}$ e dunque esiste $f'(0) = +\infty$. Infine ci sono funzioni discontinue che hanno derivata (non finita). Infatti, se $f(x) = x/|x|$ per $x \neq 0$ ed $f(0) = 0$, allora $R_0(x) = 1/|x|$ e dunque esiste $f'(0) = +\infty$.

Dall'equivalenza con la differenziabilità deduciamo quindi che la derivabilità è una proprietà di regolarità più forte della continuità, infatti:

Corollario 6.1.7 *Se f è derivabile in x_0 allora f è anche continua in x_0.*

Derivate destra e sinistra

Abbiamo visto che la funzione $|x|$ è continua in x_0 ma non è derivabile, in quanto il rapporto incrementale $R_0(x)$ vale identicamente 1 se $x > 0$ e -1 se $x < 0$. Infatti, ricordando la definizione 5.2.6, esistono i limiti da destra e da sinistra in zero di $R_0(x)$ ma sono diversi. Questo esempio giustifica la seguente

Definizione 6.1.8 Sia $A = \mathrm{dom}\, f$ e $x_0 \in A$ un punto di accumulazione di $A^+ := \{x \in A \mid x > x_0\}$. Se esiste il limite per $x \to x_0^+$ della funzione $R_{x_0}(x)$, tale limite si chiama *derivata destra* di f in x_0 e si denota col simbolo $f'_+(x_0)$. Analogamente, se x_0 è punto di accumulazione di $A^- := \{x \in A \mid x > x_0\}$ ed esiste il limite per $x \to x_0^-$ della funzione $R_{x_0}(x)$, tale limite si chiama *derivata sinistra* di f in x_0 e si denota col simbolo $f'_-(x_0)$.

Allora otteniamo facilmente:

Proposizione 6.1.9 *Se f ha derivata destra e derivata sinistra in x_0, allora f è derivabile in x_0 se e solo se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$. Inoltre, se x_0 è interno ad $A = \mathrm{dom}\, f$ ed esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ e sono entrambe finite, allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione: La prima affermazione segue dalla proposizione 5.2.7. Per la seconda osserviamo che ragionando come nella proposizione 6.1.5 otteniamo che se $h > 0$ e $x_0 + h \in A$ allora

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha_+ h + o(h) \,, \qquad \alpha_+ := f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$$

mentre se $h < 0$ e $x_0 + h \in A$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha_- h + o(h) \,, \qquad \alpha_- := f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \,.$$

Quindi $f(x_0+h) \to f(x_0)$ per $h \to 0^+$ e per $h \to 0^-$, da cui segue la continuità di f in x_0. □

Esempio 6.1.10 Vediamo ora tre esempi di funzioni continue ma non derivabili in un punto x_0 che hanno comunque derivata destra e sinistra in x_0. Fissiamo $x_0 = 0$. Se $f(x) = |x|$, allora $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Analogamente, se $f(x) = \sqrt{|x|}$ risulta $R_0(x) = |x|^{1/2}/x$ e dunque $R_0(x) = |x|^{-1/2}$ se $x > 0$ mentre $R_0(x) = -|x|^{-1/2}$ se $x < 0$. Quindi otteniamo che $f'_+(0) = +\infty$ e $f'_-(0) = -\infty$. Infine ricordiamo che se $f(x) = x^{1/3}$ allora $f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$.

Questi tre esempi descrivono in ordine quelli che si denotano come punti *angolosi*, punti *cuspidali* e punti di *flesso a tangente verticale* del grafico di una funzione.

6.2 Significato geometrico e primi esempi

Un atterraggio lunare

Supponiamo ora per semplicità che $A =]a, b[$ ed f sia derivabile in $x_0 \in]a, b[$ con derivata $f'(x_0) = m$. Guardiamo ora il grafico di f con un "microscopio" centrato in $(x_0, f(x_0))$. Formalmente questo corrisponde a quello che in matematica si chiama *procedura di scoppiamento*. Per ogni parametro $\lambda > 1$ grande consideriamo la trasformazione del piano $(x, y) \mapsto (X, Y)$ che ingrandisce di un fattore λ ogni "intorno" di $(x_0, f(x_0))$. Se (x, y) sono le coordinate reali e (X, Y) quelle dell'osservatore, allora scriviamo

$$\begin{cases} X = \lambda(x - x_0) \\ Y = \lambda(y - f(x_0)) \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + X/\lambda \\ y = f(x_0) + Y/\lambda\,. \end{cases}$$

Quindi nelle variabili dell'osservatore (X, Y) il grafico $y = f(x)$ diventa $f(x_0) + Y/\lambda = f(x_0 + X/\lambda)$, i.e.

$$Y = F_\lambda(X) := \frac{f(x_0 + X/\lambda) - f(x_0)}{X/\lambda}\, X\,, \qquad X \in]\lambda(a - x_0), \lambda(b - x_0)[$$

dove osserviamo che $X \neq 0$ se $x \neq x_0$. Tenuto conto del cambio di variabile $h = X/\lambda$ nei limiti, per $\lambda \to +\infty$ otteniamo che per ogni $X \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fissato

$$\lim_{\lambda \to +\infty} F_\lambda(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\, X = m\, X\,, \qquad m = f'(x_0)\,.$$

Quindi con un ingrandimento infinito centrato in $(x_0, f(x_0))$, il grafico di f diventa quello della retta di equazione $Y = m\, X$ nelle coordinate centrate nell'osservatore, i.e. tali che $(X, Y) = (0, 0) \iff (x, y) = (x_0, f(x_0))$. Tale retta passa per $(0, 0)$ ed ha pendenza $m = f'(x_0)$. Siamo atterrati sulla luna!

Retta tangente e rette secanti

Se f è derivabile in x_0, la funzione affine $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ fornisce un'approssimazione al primo ordine del grafico di f in x_0. Il suo grafico è una retta del piano cartesiano passante per $(x_0, f(x_0))$ e il cui coefficiente angolare $f'(x_0)$ rappresenta la pendenza del grafico di f in quel punto.

Definizione 6.2.1 Se f è derivabile in x_0 la retta di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è detta *retta tangente* al grafico di f in corrispondenza del punto $(x_0, f(x_0))$, o di ascissa $x = x_0$.

Osservazione 6.2.2 Ricordiamo anche che il rapporto incrementale $R_{x_0}(x_1)$ di una funzione f centrato in x_0 e calcolato in un punto $x_1 \neq x_0$ coincide con $R_{x_1}(x_0)$ ed è uguale al coefficiente angolare della retta secante il grafico di f per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, retta di equazione

$$y = f(x_0) + R_{x_0}(x_1) \cdot (x - x_0)\,, \qquad R_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,.$$

Quindi l'esistenza della derivata di f in x_0 significa che le rette secanti, quando $x \to x_0$, hanno pendenza $R_{x_0}(x)$ che si stabilizza ad un valore $m = f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $m \in \mathbb{R}$ la pendenza delle secanti converge a quella della tangente in x_0, mentre se $m = \pm\infty$ la pendenza delle secanti diverge a $\pm\infty$

Osservazione 6.2.3 La funzione $f(x) = x^{1/3}$ è continua in $x_0 = 0$ ma ha derivata $f'(0) = +\infty$, ed il suo grafico ha "pendenza infinita" in $(0, f(0))$. Questo suggerisce di chiamare la retta verticale di equazione $x = x_0$ come retta tangente al grafico di f in corrispondenza di un punto x_0 in cui f è continua ma ha derivata $f'(x_0) = \pm\infty$. Vediamo che questa definizione è coerente con la nozione di tangenti ad una curva continua del piano, cf. esempio 6.2.6.

Tangenti ad una curva nel piano

Consideriamo una curva Γ continua nel piano cartesiano di coordinate (x, y). Se la curva è parametrizzata da $t \in [a, b]$, significa che esistono due funzioni continue $x(t)$ e $y(t)$, con $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$, tali che il *sostegno* della curva Γ è dato dall'insieme $\{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$. Quindi si denota $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una parametrizzazione della curva.

Esempio 6.2.4 Il segmento Γ congiungente due punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) è il sostegno della curva parametrizzata da $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$ e $y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0)$, con $t \in [0, 1]$, cf. la dimostrazione del teorema 5.3.7. Se Γ è il grafico $\mathcal{G}_f$ di una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, allora una parametrizzazione di Γ è data da $\gamma(t) := (t, f(t))$, dove $t \in [a, b]$, e si parla di *curva cartesiana.*

Supponiamo per semplicità che la curva sia *semplice*, i.e. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ per ogni $a < t_1 < t_2 < b$. Questo significa che Γ non ha autointersezioni, e può accadere solo che $\gamma(a) = \gamma(b)$, nel qual caso si dice *chiusa.* Se esiste $t_0 \in]a, b[$ tale che le *componenti* $x(t)$ e $y(t)$ sono entrambe derivabili in t_0, con almeno una delle due derivate $x'(t_0)$ o $y'(t_0)$ diversa da zero, si dice che la curva è regolare nel punto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. In tal caso denotiamo con $\mathbf{t} = (x'(t_0), y'(t_0))$ il *vettore tangente* alla curva nel punto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. La retta r tangente al sostegno della curva nel punto (x_0, y_0) è la retta passante per (x_0, y_0) e parallela alla direzione di $\mathbf{t}$. Quindi, un punto (x, y) diverso da (x_0, y_0) appartiene a tale retta se e solo se il vettore $\mathbf{v} := (x - x_0, y - y_0)$ è perpendicolare al vettore tangente $\mathbf{t}$. Ricordando che in componenti $\mathbf{t} = (x'(t_0), y'(t_0))$, un vettore normale a $\mathbf{t}$ è $\mathbf{n} = (y'(t_0), -x'(t_0))$ e la relazione di perpendicolarità $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$ si scrive in coordinate come

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{n} = 0 \iff (x - x_0, y - y_0) \bullet (y'(t_0), -x'(t_0)) = 0 \iff (x - x_0) \cdot y'(t_0) + (y - y_0) \cdot (-x'(t_0)) = 0$$

dove "$\bullet$" denota il *prodotto scalare* di vettori in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Otteniamo dunque l'equazione parametrica

$$(x - x_0) \cdot y'(t_0) = (y - y_0) \cdot x'(t_0)$$

della retta tangente al sostegno della curva Γ nel punto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$.

Esempio 6.2.5 Nel caso di *curve cartesiane*, i.e. $\gamma(t) := (x(t), y(t)) = (t, f(t))$, abbiamo $x_0 = x(t_0) = t_0$ da cui $y_0 = f(t_0) = f(x_0)$, inoltre $x'(t_0) = 1$ e $y'(t_0) = f'(t_0) = f'(x_0)$. Il vettore $\mathbf{t}$ ha coordinate $\mathbf{t} = (1, f'(x_0))$, dunque $\mathbf{n} = (f'(x_0), -1)$ è un vettore normale e l'equazione parametrica della tangente si riscrive come

$$(x - x_0) \cdot f'(x_0) = (y - f(x_0)) \cdot 1 \iff y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Esempio 6.2.6 Se invece consideriamo la curva Γ grafico di $y = x^{1/3}$, essendo $x = y^3$ otteniamo una parametrizzazione mediante $\gamma(t) = (t^3, t)$. Abbiamo $\gamma(0) = (0, 0)$ e il corrispondente vettore tangente è $\mathbf{t} = (0, 1)$. Infatti vedremo che se $x(t) = t^3$ allora $x'(t) = 3t^2$ da cui $x'(0) = 0$, mentre se $y(t) = t$ allora $y'(t) = 1$ per ogni t. Essendo $\mathbf{n} = (1, 0)$, otteniamo dunque l'equazione parametrica

$$(x - 0) \cdot 1 = (y - 0) \cdot 0 \iff x = 0$$

i.e. la retta verticale $x = 0$ è tangente alla curva grafico di $y = x^{1/3}$ nel punto $(0, 0)$.

Derivate delle funzioni elementari

Grazie all'equivalenza tra derivabilità e differenziabilità, proposizione 6.1.5, mostriamo che le funzioni sen, cos, exp e le potenze ad esponente naturale sono derivabili.

Esempio 6.2.7 La funzione exp è derivabile su $\mathbb{R}$ e $D\mathsf{e}^x = \mathsf{e}^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Sappiamo già dall'esempio 6.1.2 che exp ha derivata e^0 in zero, in quanto $d\exp(0) = 1$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, scriviamo per ogni h

$$\mathsf{e}^{x_0+h} = \mathsf{e}^{x_0}\mathsf{e}^h = \mathsf{e}^{x_0}(1 + h + o(h)) = \mathsf{e}^{x_0} + \mathsf{e}^{x_0}h + o(h)\,.$$

Ma allora exp è differenziabile in x_0, quindi derivabile in x_0 con derivata data dal differenziale e^{x_0}.

Esempio 6.2.8 La funzione sen è derivabile su $\mathbb{R}$ e $D\operatorname{sen} x = \cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Come prima, l'esempio 6.1.2 dice che sen ha derivata $\cos 0$ in zero, in quanto $d\operatorname{sen}(0) = 1$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, scriviamo ora

$$\operatorname{sen}(x_0 + h) = \operatorname{sen} x_0 \cos h + \cos x_0 \operatorname{sen} h = \operatorname{sen} x_0(1 + o(h)) + \cos x_0(h + o(h)) = \operatorname{sen} x_0 + (\cos x_0)h + o(h)\,.$$

Ma allora sen è differenziabile e dunque derivabile in x_0, con derivata $\cos x_0$.

Esempio 6.2.9 La funzione cos è derivabile su $\mathbb{R}$ e $D\cos x = -\operatorname{sen} x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Come prima, l'esempio 6.1.2 dice che cos ha derivata $-\operatorname{sen} 0$ in zero, in quanto $d\cos(0) = 0$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, scriviamo ora

$$\cos(x_0+h) = \cos x_0 \cos h - \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} h = \cos x_0(1+o(h)) - \operatorname{sen} x_0(h+o(h)) = \cos x_0 + (-\operatorname{sen} x_0)h + o(h)\,.$$

Ma allora cos è differenziabile e dunque derivabile in x_0, con derivata $-\operatorname{sen} x_0$.

Esempio 6.2.10 La funzione x^n è derivabile su $\mathbb{R}$ e $Dx^n = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questa volta usiamo la definizione di derivata. Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $x \neq x_0$. Ricordiamo allora la formula sulla differenza di potenze k-esime:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+\,,\ \forall\, A, B \in \mathbb{R}\,, \quad A^n - B^n = (A - B) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i} B^i\ . \tag{6.1}$$

Scegliendo $A = x$ e $B = x_0$, e dividendo per $x - x_0$, il rapporto incrementale si scrive come

$$R_{x_0}(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} x_0^i\ .$$

Passando al limite per $x \to x_0$, ognuno degli n addendi a secondo membro converge a $x_0^{n-1-i} x_0^i = x_0^{n-1}$, dunque il limite per $x \to x_0$ del rapposto incrementale vale nx_0^{n-1}, come volevamo dimostrare.

Funzione derivata e derivate successive

Abbiamo visto che le funzioni elementari sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile su A, consideriamo la funzione $f' : A \to \mathbb{R}$ tale che $x \mapsto f'(x)$, che è detta *funzione derivata (prima)*. Se anche questa è derivabile su A, allora f si dice derivabile due volte su A e la derivata della funzione derivata prima si chiama *derivata seconda*, denotata dai simboli: $f''(x_0)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$, $D^2 f(x_0)$.

Per induzione su $n \in \mathbb{N}$, se la funzione derivata $(n-1)$-esima $f^{(n-1)} : A \to \mathbb{R}$ è derivabile su A, allora f si dice derivabile n volte su A e la derivata della funzione derivata $(n-1)$-esima si chiama *derivata n-esima*, denotata dai simboli $f^{(n)}(x_0)$, $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$, $D^n f(x_0)$.

Denotiamo poi con $C^n(A)$ la classe delle funzioni derivabili n-volte su A e con derivata n-esima continua (e con $C^0(A)$ la classe delle funzioni continue su A). Diciamo infine che f è di classe $C^\infty(A)$ se è di classe $C^n(A)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per ogni n risulta $C^\infty(A) \subset C^{n+1}(A) \subset C^n(A)$, con tutte le inclusioni strette. Infatti la funzione $|x|$ sta in $C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$, mentre la funzione $x|x|/2$, la cui derivata è $|x|$ su tutto $\mathbb{R}$, sta in $C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$.

Esempio 6.2.11 Le funzioni exp, sen, cos e, come vedremo, le funzioni polinomiali sono tutte di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre $D^n \exp = \exp$ per ogni n, mentre $D\operatorname{sen} = \cos$, $D^2 \operatorname{sen} = -\operatorname{sen}$, $D^3 \operatorname{sen} = -\cos$, $D^4 \operatorname{sen} = \operatorname{sen}$, $D^5 \operatorname{sen} = \cos$, quindi le derivate successive si ripetono ciclicamente ogni 4 interi.

6.3 Operazioni algebriche con le derivate

Derivata di somma, prodotto, reciproco e quoziente

Teorema 6.3.1 *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili in un punto x_0, allora si ha:*

i) *la funzione somma $f + g$ è derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*

ii) *per ogni costante $c \in \mathbb{R}$ la funzione prodotto $c \cdot f$ è derivabile in x_0 e $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$*

iii) *la funzione prodotto* $f \cdot g$ *è derivabile in* x_0 *e* $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

iv) *se* $g(x_0) \neq 0$*, la funzione reciproco* $1/g$ *è derivabile in* x_0 *e*

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

v) *se* $g(x_0) \neq 0$*, la funzione quoziente* f/g *è derivabile in* x_0 *e*

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \,.$$

Dimostrazione: Per ipotesi risulta $f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)$ e $g(x_0+h) = g(x_0)+g'(x_0)h+o(h)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in A$. Sommando membro a membro otteniamo che

$$(f + g)(x_0 + h) = (f + g)(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))h + o(h)\,,$$

da cui segue la i), e moltiplicando per una costante

$$(c \cdot f)(x_0 + h) = c \cdot f(x_0) + (c \cdot f'(x_0))h + o(h)$$

da cui segue la ii), per la proposizione 6.1.5. Se invece moltiplichiamo membro a membro abbiamo

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x_0 + h) &= f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) = \big(f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)\big) \cdot \big(g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)\big) \\ &= f(x_0) \cdot g(x_0) + \big(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\big)h + o(h) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\big(f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)\big)\cdot o(h) = o(h)$ e che $\big(f'(x_0)h+o(h)\big)\cdot\big(g'(x_0)h+o(h)\big) = f'(x_0)g'(x_0)h^2 + o(h^2) = o(h)$. Dalla formula sopra segue la iii).

Per la proprietà iv), usiamo invece la definizione di derivata. Osserviamo infatti che se g è derivabile è anche continua in x_0, ma allora per la permanenza del segno esiste un intorno $U_0 \in \mathcal{I}_{x_0}$ tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in U_0 \cap A$. Scriviamo allora per $x \neq x_0$ e $x \in U_0 \cap A$

$$\frac{(1/g)(x) - (1/g)(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)}\,.$$

Il primo fattore a secondo membro converge a $-g'(x_0)$, mentre il secondo converge al reciproco di $[g(x_0)]^2$, che è diverso da zero. Da qui segue la iv). Infine, scrivendo il quoziente f/g come il prodotto $f \cdot (1/g)$, la proprietà v) segue applicando la iii) e la iv). Infatti abbiamo

$$(f/g)'(x_0) = (f \cdot 1/g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot (1/g)(x_0) + f(x_0) \cdot (1/g)'(x_0)$$

e quindi si ottiene facilmente la formula per la derivata del quoziente, esplicitando $(1/g)'(x_0)$. □

Corollario 6.3.2 *Se* f *e* g *sono derivabili su* A*, allora:*

i) $f + g$ *e* $c \cdot f$ *per ogni* $c \in \mathbb{R}$ *sono derivabili su* A *ed inoltre* $D(f + g) = Df + Dg$ *e* $D(c \cdot f) = c \cdot Df$

ii) $f \cdot g$ *è derivabile su* A *ed inoltre* $D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg$

iii) f/g *e* $1/g$ *sono derivabili su* $\{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$ *ed inoltre* $D(f/g) = \big(Df \cdot g - f \cdot Dg\big)/g^2$ *e* $D(1/g) = -Dg/g^2$.

Osservazione 6.3.3 La proprietà i) esprime il fatto che la classe delle funzioni reali derivabili su A, denotata con $D(A)$, è uno *spazio vettoriale* (rispetto all'usuale somma e prodotto per uno scalare c) e che l'operatore di derivata D è lineare su $D(A)$. Si noti che anche la classe $C(A)$ delle funzioni continue su A è uno spazio vettoriale.

Esempio 6.3.4 Poiché le funzioni potenze x^n sono derivabili per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora le funzioni polinomiali $P(x)$ sono derivabili su $\mathbb{R}$. La derivata di un polinomio si calcola usando la linearità dell'operatore e la formula $Dx^n = nx^{n-1}$. Ad esempio abbiamo per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$D(3x^2 - 5x + 7) = D(3x^2) + D(-5x) + D7 = 3D(x^2) - 5Dx + 0 = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 = 6x - 5$$

ed in generale la derivata di un polinomio di grado n è un polinomio di grado $n - 1$.

Esempio 6.3.5 Analogamente, anche le funzioni razionali $P(x)/Q(x)$ sono derivabili, il loro dominio essendo l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Per il calcolo della loro derivata si usa la formula della derivata del quoziente. Ad esempio, abbiamo

$$\begin{aligned} D\frac{x^2+1}{3x^3-5x} &= \frac{D(x^2+1)\cdot(3x^3-5x)-(x^2+1)\cdot D(3x^3-5x)}{(3x^3-5x)^2} \\ &= \frac{2x\cdot(3x^3-5x)-(x^2+1)\cdot(9x^2-5)}{(3x^3-5x)^2} = -\frac{3x^4+14x^2-5}{(3x^3-5x)^2} \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $(3x^3-5x) \neq 0$, i.e. per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{5/3}, -\sqrt{5/3}\}$.

Esempio 6.3.6 La funzione tan è derivabile. Infatti $\tan x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ è quoziente di funzioni derivabili, con $D \operatorname{sen} x = \cos x$ e $D\cos x = -\operatorname{sen} x$ per ogni x. Inoltre, per ogni x tale che $\cos x \neq 0$, i.e. nel dominio della funzione tan, abbiamo

$$D\tan x = D\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{(D\operatorname{sen} x)\cdot\cos x - \operatorname{sen} x\cdot(D\cos x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Esempio 6.3.7 Le *funzioni iperboliche* sono le funzioni reali $\cosh, \operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$\cosh x := \frac{\mathsf{e}^x + \mathsf{e}^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{senh} x := \frac{\mathsf{e}^x - \mathsf{e}^{-x}}{2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Osserviamo che il coseno iperbolico è pari ed il seno iperbolico è dispari, i.e. $\cosh(-x) = \cosh x$ e $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$ per ogni x. Inoltre sono entrambe continue su $\mathbb{R}$ e dall'andamento dell'esponenziale abbiamo che $\cosh x \to +\infty$ se $x \to \pm\infty$ mentre $\operatorname{senh} x \to \pm\infty$ se $x \to \pm\infty$. Essendo coerciva, la funzione coseno iperbolico ha minimo e, essendo pari, il minimo si realizza in $x_0 = 0$, i.e. $\min\cosh = \cosh 0 = 1$, dunque $\cosh x \geq 1$ per ogni x. Inoltre dalla monotonia della funzione exp deduciamo che senh è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Essendo poi $\operatorname{senh} 0 = 0$, allora $\operatorname{senh} x > 0$ se $x > 0$ e $\operatorname{senh} x < 0$ se $x < 0$. Inoltre cosh è strettamente crescente su $[0, +\infty[$ e strettamente decrescente su $]-\infty, 0]$, quindi $\cosh x > 1$ per ogni $x \neq 0$. Infine abbiamo che $D\cos hx = \operatorname{senh} x$ e $D \operatorname{sen} hx = \cosh x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Vediamo ora perchè si chiamano funzioni iperboliche.

Poiché $4(\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x) = \mathsf{e}^{2x} + \mathsf{e}^{-2x} + 2\mathsf{e}^x\mathsf{e}^{-x} - (\mathsf{e}^{2x} + \mathsf{e}^{-2x} - 2\mathsf{e}^x\mathsf{e}^{-x}) = 4$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$. Se ora scriviamo $x(t) = \cosh t$ e $y(t) = \operatorname{senh} t$, otteniamo che $x(t)^2 - y(t)^2 = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora deduciamo che la curva piana di legge $\gamma(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$ ha sostegno contenuto nel grafico dell'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$. Poiché inoltre $x \geq 1$ per ogni x, allora il sostegno è il ramo di destra di tale iperbole. Notiamo che per t crescente il punto di coordinate $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ percorre tale ramo dell'iperbole nel verso crescente delle ordinate. Infine, il vettore tangente al tempo t_0 è $\mathbf{t} = (\operatorname{senh} t_0, \cosh t_0)$, ad esempio al tempo $t_0 = 0$ abbiamo $\mathbf{t} = (0,1)$ e la retta tangente alla curva nel punto $(1,0)$ ha equazione $x = 1$.

Derivata della composizione

Teorema 6.3.8 *Sia f una funzione derivabile in x_0 e g una funzione derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e tali che il punto x_0 è anche di accumulazione per* $\operatorname{dom}(g \circ f)$. *Allora la funzione composta $g \circ f$ risulta derivabile in x_0 e risulta*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)\,, \qquad y_0 = f(x_0)\,. \tag{6.2}$$

Dimostrazione: Usando la proposizione 6.1.5, sappiamo che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \qquad \textbf{e} \qquad g(y_0 + k) = g(y_0) + g'(y_0)k + o(k)\,.$$

Posto allora $y_0 + k = f(x_0 + h)$ possiamo scrivere

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)k + o(k)\,.$$

Ma $k = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$, dunque abbiamo $o(k) = o(f'(x_0)h + o(h)) = o(h)$ da cui

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)f'(x_0)h + g'(x_0) \cdot o(h) + o(h)$$

ed infine
$$(g\circ f)(x_0+h)=(g\circ f)(x_0)+\big(g'(y_0)f'(x_0)\big)h+o(h)\,.$$
Quindi $g\circ f$ è differenziabile e dunque anche derivabile in x_0, con derivata uguale al differenziale, i.e. vale (6.2), come volevamo dimostrare. □

Osservazione 6.3.9 Vediamo con un esempio come la notazione di Leibniz permette di calcolare senza rischio di sbagli la derivata di composizioni di funzioni. Posto $f(x)=\operatorname{sen}x$ e $g(x)=x^2$, dal teorema sopra sappiamo che le funzioni composte $g\circ f$ e $f\circ g$ sono entrambe derivabili su tutto $\mathbb{R}$. Per calcolare la derivata di $g\circ f$, denotiamo $y=f(x)=\operatorname{sen}x$ e $z=g(y)=y^2$, dunque $z=(g\circ f)(x)=(\operatorname{sen}x)^2=\operatorname{sen}^2x$. Formalmente scriviamo:
$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \tag{6.3}$$
dove abbiamo
$$\frac{dz}{dy}=\frac{dy^2}{dy}=2y\,,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{d\operatorname{sen}x}{dx}=\cos x$$
e dunque, risostituendo,
$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=2y\cdot\cos x=2\operatorname{sen}x\cos x$$
da cui deduciamo che $D(\operatorname{sen}^2x)=2\operatorname{sen}x\cos x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Analogamente, per calcolare la derivata di $f\circ g$ scriviamo $y=g(x)=x^2$ e $z=f(y)=\operatorname{sen}y$, dunque $z=(f\circ g)(x)=\operatorname{sen}(x^2)$. Questa volta abbiamo
$$\frac{dz}{dy}=\frac{d\operatorname{sen}y}{dy}=\cos y\,,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dx^2}{dx}=2x \tag{6.4}$$
e dunque, risostituendo,
$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\cos y\cdot 2x=\cos(x^2)\cdot 2x$$
da cui deduciamo che $D(\operatorname{sen}(x^2))=\cos(x^2)\cdot 2x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Osservazione 6.3.10 Lo stesso procedimento si applica per la derivata di funzioni che sono la composizione di tre o più funzioni. Ad esempio, la funzione $x\mapsto\exp(\cos(2x^3))$ è la composizione $h\circ g\circ f$, dunque possiamo scrivere $y=f(x)=2x^3$, $z=g(y)=\cos y$, $w=h(z)=\exp z$, da cui $w=\exp(\cos(2x^3))=\exp z$ con $z=\cos y$ e $y=2x^3$. Essendo le tre funzioni h,g,f derivabili su tutto $\mathbb{R}$, anche la composizione $x\mapsto\exp(\cos(2x^3))$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre scriviamo
$$\frac{dw}{dx}=\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$
dove questa volta calcoliamo
$$\frac{dw}{dz}=\frac{d\exp z}{dz}=\exp z\,,\qquad \frac{dz}{dy}=\frac{d\cos y}{dy}=-\operatorname{sen}y\,,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{d2x^3}{dx}=6x^2$$
e dunque, risostituendo,
$$\frac{dw}{dz}=(\exp z)\cdot(-\operatorname{sen}y)\cdot 6x^2=(\exp(\cos y))\cdot(-\operatorname{sen}y)\cdot 6x^2=\exp(\cos(2x^3))\cdot(-\operatorname{sen}(2x^3))\cdot 6x^2\,.$$
In conclusione abbiamo ottenuto che $D[\exp(\cos(2x^3))]=-\exp(\cos(2x^3))\operatorname{sen}(2x^3)\,6x^2$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Derivata dell'inversa

Partiamo con un esempio. Sappiamo che la funzione $f(x)=x^3$ è continua e strettamente monotona su $\mathbb{R}$, quindi invertibile con inversa continua. Ci chiediamo se la funzione inversa $f^{-1}(x)=x^{1/3}$ è anch'essa derivabile. Confrontando i grafici di x^3 e di $x^{1/3}$, osserviamo che se $y_0=f(x_0)$, la tangente al grafico di $x^{1/3}$ nel punto $(y_0,f^{-1}(y_0))$ si ottiene per riflessione rispetto alla bisettrice $y=x$ della tangente al grafico di x^3 nel punto $(x_0,f(x_0))$. Quindi se in tale punto risulta $f'(x_0)=m\neq 0$, e dunque la retta tangente è obliqua ed ha equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$, nel punto corrispondente $(y_0, f^{-1}(y_0))$ la tangente al grafico di $x^{1/3}$ avrà coefficiente angolare $1/m$ ed equazione $y = f^{-1}(y_0) + m^{-1}(x - y_0)$. Quindi questo accade se $f'(x_0) \neq 0$, i.e. per $x_0 \neq 0$. Infatti $Dx^3 = 3x^2$ si annulla solo in $x_0 = 0$. Nel punto $(0, 0)$ la retta tangente al grafico di x^3 è orizzontale, di equazione $y = 0$, e abbiamo già visto che la retta tangente al grafico di $x^{1/3}$ nel punto corrispondente $(0, 0)$ è verticale ed ha equazione $y = 0$. Questo significa che la funzione inversa $x^{1/3}$ è derivabile in ogni punto $y_0 \neq 0$, con derivata data dal reciproco $1/f'(x_0)$ della derivata $f'(x_0)$, mentre $x^{1/3}$ non è derivabile in $y_0 = 0$. Infatti, vale il seguente:

Teorema 6.3.11 *Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona. Sia $x_0 \in]a, b[$ tale che f risulti derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e risulta*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Dimostrazione: Posto $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$, usando il teorema di cambio di variabile, poiché per la stretta monotonia e la continuità di f in x_0 risulta $y \to y_0 \iff x \to x_0$, allora

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

per il teorema sul limite del reciproco, come volevamo dimostrare. □

Alcuni esempi

i) La funzione log è derivabile su $]0, +\infty[$ e $D \log x = 1/x$ per ogni $x > 0$.

Infatti scriviamo $y = \log x \iff x = \mathsf{e}^y$ per ogni $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, essendo log l'inversa della funzione exp, che è continua e strettamente crescente, con derivata $D\mathsf{e}^y = \mathsf{e}^y > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Allora la funzione log è derivabile in ogni punto $x > 0$. Inoltre, calcoliamo

$$D \log x = \frac{1}{D\mathsf{e}^y} = \frac{1}{\mathsf{e}^y} = \frac{1}{x} \qquad \forall\, x > 0\,.$$

ii) La funzione $\log |f|$ è derivabile in ogni $x_0 \in \operatorname{dom} f$ in cui f è derivabile e $f(x_0) \neq 0$. Inoltre in tali punti risulta $D \log |f| = Df/f$, che è la cosiddetta derivata logaritmica. Infatti osserviamo che la funzione valore assoluto $x \mapsto |x|$ è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con derivata $D|x| = \operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ per ogni $x \neq 0$, da cui segue la prima affermazione. Inoltre, essendo $|f|^2 = f^2$, calcoliamo

$$D \log |f| = \frac{1}{|f|} \cdot D|f| = \frac{1}{|f|} \cdot \operatorname{sgn} f \cdot Df = \frac{1}{|f|} \cdot \frac{f}{|f|} \cdot Df = \frac{Df}{f}\,.$$

iii) La funzione arctan è derivabile su $\mathbb{R}$ e $D \arctan x = 1/(1 + x^2)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Infatti scriviamo $y = \arctan x \iff x = \tan y$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in] - \pi/2, \pi/2[$, essendo arctan l'inversa della funzione $\tan_{|]-\pi/2,\pi/2[}$, che è continua e strettamente crescente, con derivata $D \tan y = 1 + \tan^2 y$ per ogni $y \in] - \pi/2, \pi/2[$. Allora la funzione arctan è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$D \arctan x = \frac{1}{D \tan y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

iv) La funzione arcsen è continua su $[-1, 1]$ e derivabile su $] - 1, 1[$ con derivata $D \operatorname{arcsen} x = 1/\sqrt{1 - x^2}$ per ogni $x \in] - 1, 1[$.

Infatti scriviamo $y = \operatorname{arcsen} x \iff x = \operatorname{sen} y$ per ogni $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, essendo arcsen l'inversa della funzione biunivoca e strettamente crescente $\operatorname{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$. Poiché sen è continua, allora anche arcsen è continua, cf. proposizione 5.3.9. Inoltre $D \operatorname{sen} y = \cos y \geq 0$ per ogni $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, e $D \operatorname{sen} y = 0$ se $y = \pm\pi/2$. Quindi nel teorema precedente dobbiamo escludere i punti $x \in [-1, 1]$ corrispondenti mediante la relazione $x = \operatorname{sen} y$ ai punti $y = \pm\pi/2$, i.e. $x = \pm 1$, dove arcsen non è derivabile. Invece arcsen è derivabile su $] - 1, 1[$ e risulta

$$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{D \operatorname{sen} y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall\, x \in] - 1, 1[$$

dove abbiamo usato che $\cos y > 0$ se $y \in] - \pi/2, \pi/2[$ nella formula $|\cos y| = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$.

v) Analogamente si deduce che la funzione arccos è continua su $[-1,1]$ e derivabile su $]-1,1[$ con derivata $D \arccos x = -1/\sqrt{1-x^2}$ per ogni $x \in]-1,1[$.

vi) Per ogni esponente $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione x^α è derivabile su $]0,+\infty[$ e risulta $Dx^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1}$ per ogni $x > 0$. Infatti sappiamo che $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$, quindi x^α è derivabile su $]0,+\infty[$ come composizione di funzioni derivabili. Inoltre calcoliamo per ogni $x > 0$

$$Dx^\alpha = D\exp(\alpha \log x) = \exp(\alpha \log x) \cdot D(\alpha \log x) = \exp(\alpha \log x) \cdot (\alpha\, x^{-1}) = x^\alpha \cdot (\alpha\, x^{-1}) = \alpha\, x^{\alpha-1}\,.$$

vii) Per ogni base $a > 0$ la funzione a^x è derivabile su $\mathbb{R}$ e risulta $Da^x = a^x \log a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti sappiamo che $a^x = \exp(x \log a)$, quindi a^x è derivabile su $\mathbb{R}$ come composizione di funzioni derivabili. Inoltre calcoliamo per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$Da^x = D\exp(x \log a) = \exp(x \log a) \cdot D(x \log a) = \exp(x \log a) \cdot \log a = a^x \log a\,.$$

viii) Per ogni base $a > 0$ **e** $a \neq 1$ la funzione $\log_a x$ è derivabile su $]0,+\infty[$ e risulta $D\log_a x = 1/(x \log a)$ per ogni $x > 0$. Infatti sappiamo dal cambiamento di base che $\log_a x = \log x / \log a$, da cui segue l'asserto per linearità della derivata.

ix) La funzione x^x è derivabile su $]0,+\infty[$ e risulta $D(x^x) = x^x(1+\log x)$ per ogni $x > 0$. Infatti scriviamo $x^x = \exp(\log(x^x)) = \exp(x \log x)$, da cui segue la derivabilità. Inoltre calcoliamo

$$D(x^x) = D\exp(x \log x) = \exp(x \log x) \cdot D(x \log x) = \exp(x \log x) \cdot (1 \cdot \log x + x \cdot 1/x) = x^x(1+\log x)\,.$$

x) Più in generale, la funzione $f(x)^{g(x)}$ è derivabile in ogni punto $x_0 \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ in cui sia f che g sono derivabili e $f(x_0) > 0$. Infatti formalmente abbiamo $f^g = \exp(g \log f)$, per cui

$$\begin{aligned} D(f^g) &= D\exp(g \log f) = \exp(g \log f) \cdot D(g \log f) \\ &= \exp(g \log f) \cdot [Dg \cdot \log f + g \cdot D(\log f)] = f^g \cdot [Dg \cdot \log f + g \cdot Df/f] \end{aligned}$$

che ci dà la formula generale per la derivata in ogni tale punto x_0.

Esempio 6.3.12 Studiamo l'inversa della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.

Osserviamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente, come somma di funzioni strettamente crescenti. Inoltre è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ con derivata $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infine $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, quindi per il teorema 5.3.5 dei valori intermedi e per l'osservazione 5.3.6 ha immagine $\mathbb{R}$. La funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dunque biunivoca, strettamente crescente, continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Si noti che non conosciamo esplicitamente la legge di f^{-1}. Infatti, l'equazione $y = \mathrm{e}^x + x$ non è risolvibile esplicitamente in x per ogni $y \in \mathbb{R}$ fissato. Nondimeno, possiamo trovare l'approssimazione al primo ordine di f^{-1} in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Se ad esempio scegliamo $x_0 = 1$, osserviamo che $f^{-1}(1) = 0$ in quanto $f(0) = 1$. Poiché inoltre $f'(0) = \mathrm{e}^0 + 1 = 2$, allora $(f^{-1})'(1) = 1/f'(0) = 1/2$. Dunque l'equazione della tangente al grafico di f^{-1} in corrispondenza del punto $x_0 = 1$ è

$$y = f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x-1) \iff y = \frac{1}{2}(x-1)\,.$$

Osserviamo che la retta $y = (1/2)(x-1)$ si ottiene per riflessione rispetto alla bisettrice $y = x$ dalla retta $y = 2x+1$, che è la tangente al grafico di f in corrispondenza del punto $(0, f(0))$.

Derivate di funzioni pari o dispari

Ricordiamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita su un insieme simmetrico $A = -A$ si dice pari [[dispari]] se per ogni $x \in A$ risulta $f(-x) = f(x)$ [[$f(-x) = -f(x)$]].

Proposizione 6.3.13 *Sia f una funzione pari [[dispari]] e derivabile in un punto x_0. Allora f è derivabile anche in $-x_0$ e risulta $f'(-x_0) = -f'(x_0)$ [[$f'(-x_0) = f'(x_0)$]].*

Dimostrazione: Se f è pari, il rapporto incrementale centrato in $-x_0$ si riscrive con $k = -h$ come

$$\frac{f(-x_0+h) - f(-x_0)}{h} = \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h} = -\frac{f(x_0+k) - f(x_0)}{k}\,.$$

Passando al limite per $h \to 0$, e sostituendo $k = -h$, si ottiene che il limite della funzione a destra è uguale a $-f'(x_0)$. Se invece f è dispari, scriviamo analogamente con $k = -h$

$$\frac{f(-x_0+h)-f(-x_0)}{h} = \frac{-f(x_0-h)+f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}$$

e per $h \to 0$ il limite della funzione a destra è uguale a $f'(x_0)$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 6.3.14 Sappiamo che se una funzione dispari è definita anche in $x_0 = 0$ allora in tale punto vale zero. Dalla proposizione precedente deduciamo quindi che *se f è pari ed è derivabile in $x_0 = 0$, allora $f'(0) = 0$.* Più in generale, se $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ è derivabile n volte, allora se f è pari risulta $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni indice di derivazione k dispari, mentre se f è dispari risulta $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k pari.

Esempio 6.3.15 La funzione $x^{1/3}$ è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed ha derivata $Dx^{1/3} = 1/(3\sqrt[3]{x^2})$ per ogni $x \neq 0$. Infatti sappiamo già che $x^{1/3}$ è derivabile su $]0, +\infty[$ con derivata $Dx^{1/3} = x^{-2/3}/3$. Essendo pari, allora $x^{1/3}$ è derivabile anche su $]-\infty, 0[$ e la derivata sui punti $x < 0$ è ottenuta facendo l'estensione pari di $(1/3)x^{-2/3}$, come volevamo dimostrare.

6.4 Derivate e proprietà locali delle funzioni

Abbiamo già visto che se una funzione è derivabile allora è anche continua, ma che esistono funzioni continue che non sono derivabili. Inoltre sappiamo che esistono funzioni che hanno derivata infinita in un punto x_0 ma che non sono continue in x_0.

Località della derivata

Poiché la derivata è definita tramite un processo di limite, dalla proprietà di località del limite deduciamo immediatamente:

Proposizione 6.4.1 *Siano f e g due funzioni reali definite su un insieme A e sia $x_0 \in A$ un punto di accumulazione per A. Se esiste un intorno $U_0 \in \mathcal{I}_{x_0}$ tale che per ogni $x \in (U_0 \cap A)$ risulta $f(x) = g(x)$, allora f ha derivata in x_0 se e solo se g ha derivata in x_0 e, in tal caso, risulta $f'(x_0) = g'(x_0)$.*

Dimostrazione: Infatti, le funzioni rapporto incrementale di f e g centrate in x_0 coincidono per ogni $x \in U_0 \setminus \{x_0\}$. L'asserto segue allora dalla proposizione 5.2.5. □

Monotonia e derivata

Dato che la pendenza del grafico è dettata dalla derivata, otteniamo la seguente:

Proposizione 6.4.2 *Se f è crescente [[decrescente]] su A ed ha derivata in x_0, allora risulta $f'(x_0) \geq 0$ [[$f'(x_0) \leq 0$]].*

Dimostrazione: Se f è crescente su A, allora $x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$ e $x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$. Quindi la funzione rapporto incrementale centrata in x_0 è non negativa, $R_{x_0}(x) \geq 0$ per ogni $x \neq x_0$. Per la permanenza del segno, il suo limite $f'(x_0)$ è non negativo. Analogamente, se f è decrescente su A, allora $R_{x_0}(x) \leq 0$ per ogni $x \neq x_0$, da cui otteniamo che $f'(x_0) \leq 0$. □

Osservazione 6.4.3 Anche se f è strettamente crescente [[decrescente]] su A ed è derivabile in x_0, non possiamo dedurre che $f'(x_0) > 0$ [[$f'(x_0) < 0$]]. Ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ ma ha derivata nulla in $x_0 = 0$.

D'altra parte, il segno della derivata determina l'andamento della funzione vicino al punto x_0.

Proposizione 6.4.4 *Se una funzione f ha derivata $f'(x_0)$ diversa da zero in un punto x_0, allora esiste $\delta > 0$ tale per ogni $x \in A = \operatorname{dom} f$ tale che $|x - x_0| < \delta$ risulta:*

i) $\big(x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ **e** $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)\big)$, *se $f'(x_0) > 0$*

ii) $\big(x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ **e** $x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)\big)$, *se* $f'(x_0) < 0$.

Dimostrazione: Ricordiamo che $I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Se $f'(x_0) > 0$, essendo $f'(x_0)$ il limite del rapporto incrementale, per il teorema della permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in A \cap I_\delta(x_0)$ e $x \neq x_0$ allora $R_{x_0}(x) > 0$. Per questi valori di x, se $x > x_0$, essendo il denominatore $(x - x_0)$ positivo, allora anche il numeratore $f(x) - f(x_0)$ è positivo, i.e. $f(x) > f(x_0)$. Se invece $x < x_0$, essendo il denominatore $(x - x_0)$ negativo, allora anche il numeratore $f(x) - f(x_0)$ è negativo, i.e. $f(x) < f(x_0)$. Il caso $f'(x_0) < 0$ si tratta in maniera analoga. □

Osservazione 6.4.5 Vedremo in seguito che la monotonia di f su un intervallo è garantita se la funzione ha derivata di segno costante su tutto l'intervallo.

Punti di minimo e massimo locale

Estendiamo ora il concetto di punto di minimo o di massimo.

Definizione 6.4.6 Sia $f : A \to \mathbb{R}$; si dice che $x_0 \in A$ è *punto di minimo [[massimo]] locale* (o relativo) per f se esiste un intorno U di x_0 tale che x_0 è punto di minimo [[massimo]] per la restrizione $f_{|U}$, i.e. se

$$\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0} : \ \forall\, x \in A \cap U, \quad f(x_0) \le f(x) \qquad [[f(x_0) \ge f(x)]] \ . \tag{6.5}$$

Se in particolare risulta

$$\forall\, x \in A \cap U \setminus \{x_0\}, \quad f(x_0) < f(x) \qquad [[f(x_0) > f(x)]]$$

allora x_0 è punto di minimo [[massimo]] locale *stretto*. Infine si dice che x_0 è punto di minimo [[massimo]] locale *interno* se x_0 è di minimo [[massimo]] locale ed è anche interno ad A, i.e. esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A.

Osservazione 6.4.7 Ovviamente un eventuale punto di massimo o minimo di f è anche di massimo o minimo locale, mentre il viceversa è in generale falso.

Il teorema di Fermat

Teorema 6.4.8 *Sia x_0 un punto di minimo o di massimo locale interno per una funzione f che risulti derivabile in x_0. Allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione: Sostituendo f con $-f$ possiamo restringerci al caso in cui x_0 è di massimo locale interno per f. Allora da (6.5) deduciamo che la funzione rapporto incrementale $R_{x_0}(x)$ non è positiva prima di x_0 e non è negativa dopo x_0, i.e.

$$\forall\, x \in U \cap \operatorname{dom} f\,, \qquad \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \\ x > x_0 \Rightarrow & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0\,. \end{cases}$$

Dalla permanenza del segno, passando al limite per $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$ otteniamo che $f'_-(x_0) \le 0$ e $f'_+(x_0) \ge 0$. Dalla derivabilità di f in x_0, essendo $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, concludiamo che $f'(x_0) = 0$. □

Osservazione 6.4.9 Una funzione continua può avere un punto di minimo o massimo locale interno in cui non è derivabile, come ad esempio $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

Ragionando come sopra, otteniamo più in generale:

Proposizione 6.4.10 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$ un punto di minimo [[massimo]] locale per f. Se esiste $f'_+(x_0)$, allora $f'_+(x_0) \ge 0$ [[≤ 0]]. Analogamente, se esiste $f'_-(x_0)$, allora $f'_-(x_0) \le 0$ [[≥ 0]].*

Inoltre, applicando la proposizione 6.4.4 agli estremi del dominio di f deduciamo immediatamente:

Corollario 6.4.11 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 = a$. Se $f'(a) > 0$ allora l'estremo a è un punto di minimo locale stretto, mentre se $f'(a) < 0$ allora a è un punto di massimo locale stretto. Analogamente, se f è derivabile in $x_0 = b$ ed $f'(b) > 0$, l'estremo b è un punto di massimo locale stretto, mentre se $f'(b) < 0$ allora b è un punto di minimo locale stretto.*

Più in generale, nei punti interni otteniamo:

Corollario 6.4.12 *Sia f una funzione definita in un intervallo I e $x_0 \in I$ un punto interno ad I in cui esistono le derivate destra e sinistra di f. Se $f'_-(x_0) < 0 < f'_+(x_0)$ allora x_0 è un punto di minimo locale stretto. Analogamente, se $f'_-(x_0) > 0 > f'_+(x_0)$ allora x_0 è un punto di massimo locale stretto.*

Osservazione 6.4.13 Il viceversa del teorema 6.4.8 è falso. Se f ha derivata nulla in un punto x_0 interno al dominio di f, non è detto che x_0 sia un punto di massimo o minimo locale. Si prenda ad esempio $f(x) = \pm x^3$ e $x_0 = 0$. Un punto x_0 in cui f è derivabile con derivata nulla si dice punto *critico* o *stazionario* di f. Se un punto critico interno non è né di massimo né di minimo locale per f, allora viene detto punto di *sella*.

Esempio 6.4.14 La funzione $f(x) = |x|/(1+x^2)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in quanto $x \mapsto |x|$ è derivabile per $x \neq 0$. Poiché inoltre $f(x) = x/(1 + x^2)$ per ogni $x > 0$, calcoliamo

$$f'(x) = D\frac{x}{(1+x^2)} = \frac{Dx \cdot (1+x^2) - x \cdot D(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

per ogni $x > 0$. Poiché inoltre f è pari, la derivata di f per $x < 0$ si ottiene facendo l'estensione dispari di $f'(x)$, su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dunque

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{x}{|x|} \qquad \forall\, x \neq 0\,.$$

Inoltre il rapporto incrementale centrato in $x_0 = 0$ vale $R_0(x) = (\operatorname{sgn} x)/(1 + x^2)$ e dunque, per $x \to 0^+$ e per $x \to 0^-$, deduciamo che $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Dunque $x_0 = 0$ è un punto angoloso di f.

Vogliamo ora calcolare il massimo ed il minimo di f sull'intervallo $[-2, 4]$. Poiché $[-2, 4]$ è chiuso e limitato, per il teorema 5.3.11 di Weierstrass sappiamo che f ha massimo e minimo su $[-2, 4]$. Inoltre, grazie al teorema 6.4.8, deduciamo che i punti di massimo o minimo di f vanno cercati tra i seguenti:

i) i punti dell'intervallo aperto $]-2, 4[$ in cui f è derivabile ed ha derivata nulla

ii) gli estremi dell'intervallo $[-2, 4]$

iii) i punti dell'intervallo aperto $]-2, 4[$ in cui f non è derivabile .

Per il caso i), abbiamo $f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x = \pm 1$, con $f(\pm 1) = 1/2$. Per il caso ii), abbiamo $f(-2) = 2/5$ e $f(4) = 4/17$. Infine, per il caso iii) abbiamo solo $x_0 = 0$ e $f(0) = 0$. Poiché $f(x) \geq 0$ per ogni x, allora $\min_{[-2,4]} f = 0 = f(0)$. Invece, confrontando i valori $4/17 < 2/5 < 1/2$ deduciamo che $\max_{[-2,4]} f = 1/2 = f(\pm 1)$. Si noti che essendo $f'(-2) > 0$ e $f'(4) < 0$, allora $x_0 = -2$ e $x_0 = 4$ sono rispettivamente punti di minimo e di massimo locale per f. Notiamo infine che

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)\,, \qquad f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x)\,.$$

6.5 I teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Il teorema di Rolle

Se una funzione è sufficientemente regolare ed assume lo stesso valore agli estremi di un intervallo, allora c'è almeno un punto z all'interno dell'intervallo tale che $f'(z) = 0$, quindi la retta tangente al grafico in $(z, f(z))$ è orizzontale.

Teorema 6.5.1 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:*

1) *f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;*

2) *f è derivabile almeno nell'intervallo aperto $]a, b[$;*

3) *$f(a) = f(b)$.*

Allora esiste almeno un punto $z \in]a, b[$ tale che $f'(z) = 0$.

Dimostrazione: Per il teorema 5.3.11 di Weiertsrass, dall'ipotesi 1) deduciamo che f ha massimo e minimo. Denotiamo $M = \max f_{[a,b]}$ e $m = \max f_{[a,b]}$. Se $m = M$ allora f è costante e dunque ha derivata nulla su tutto $[a,b]$. Se invece $m < M$, allora almeno un punto di massimo o di minimo di f deve essere all'interno dell'intervallo $]a,b[$, altrimenti non varrebbe l'ipotesi 3). Se dunque $z \in]a,b[$ è tale che $f(z) = m$ o $f(z) = M$, allora $x_0 = z$ è un punto di massimo o di minimo locale interno di f. Ma dall'ipotesi 2) otteniamo che f è derivabile in z. Allora per il teorema 6.4.8 di Fermat concludiamo che $f'(z) = 0$. □

Osservazione 6.5.2 Le tre ipotesi sono tutte necessarie: esistono infatti funzioni definite su $[-1,1]$ che verificano solo due delle tre ipotesi ma per le quali la tesi è falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = x$ se $-1 < x \leq -1$ e $f(-1) = 1$ verifica la 2) e la 3) ma non la 1), non essendo continua in $x_0 = -1$, e $f'(x) = 1$ per ogni $x \in]-1,1[$. Invece la funzione $f(x) = |x|$ verifica la 1) e la 3) ma non la 2), non essendo derivabile in $x_0 = 0$, e non c'è alcun punto $z \in]-1,1[$ in cui $f'(z) = 0$. Infine, la funzione $f(x) = x$ verifica la 2) e la 3) ma non la 1) e $f'(x) = 1$ per ogni x.

Otteniamo subito un'importante proprietà di iniettività per funzioni definite su intervalli.

Corollario 6.5.3 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e derivabile all'interno dell'intervallo I. Se $f'(x) \neq 0$ in ogni punto x interno ad I, allora la funzione f è iniettiva.*

Dimostrazione: Se per assurdo esistessero due punti $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$, poiché $[x_1, x_2] \subset I$, essendo I un intervallo, allora la restrizione $f_{|[x_1,x_2]}$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle. Dunque esisterebbe un punto $z \in]x_1, x_2[$ in cui la restrizione $f_{|[x_1,x_2]}$ ha derivata nulla e dunque, per la località della derivata, un punto z interno ad I in cui $f'(z) = 0$, che dà una contraddizione. □

Il teorema di Lagrange

Nel prossimo risultato si rimuove l'ipotesi 3) dal teorema di Rolle e si deduce l'esistenza di un punto z in cui la funzione ha derivata uguale al coefficiente angolare m della retta r secante il grafico nei punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Questo significa che troviamo un punto $(z, f(z))$ in cui la retta tangente al grafico di f è parallela alla secante r. Per la vastità delle sue conseguenze, il *teorema di Lagrange* è forse il risultato più importante dell'Analisi Matematica per funzioni di una variabile reale.

Teorema 6.5.4 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora esiste almeno un punto $z \in]a,b[$ tale che*

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,.$$

Dimostrazione: Consideriamo la funzione affine

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

il cui grafico è la retta secante r passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Consideriamo la funzione $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = f(x) - r(x)$. Si vede immediatamente che la funzione h verifica le ipotesi del teorema 6.5.1 di Rolle, in quanto $h(a) = f(a) - r(a) = 0$ e $h(b) = f(b) - r(b) = 0$, mentre le ipotesi 1) e 2) valgono separatamente sia per $f(x)$ che per $r(x)$. Allora esiste un punto $z \in]a,b[$ in cui $h'(z) = 0$. Ma $h'(x) = f'(x) - r'(x)$ per ogni $x \in]a,b[$, dove

$$r'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} =: m \,.$$

Allora $h'(z) = 0 \Rightarrow f'(z) = r'(z) = m$, come volevamo dimostrare. □

Il teorema di Lagrange si chiama anche teorema del *valor medio*. Infatti, moltiplicando ambo i membri per $(b - a) \neq 0$ troviamo l'esistenza di un punto $z \in]a,b[$, detto valor medio di f su $[a,b]$, tale che

$$f(b) - f(a) = f'(z) \cdot (b - a) \,.$$

Conseguenze del teorema di Lagrange

I seguenti risultati esprimono proprietà di funzioni derivabili su un intervallo I. Otteniamo subito un importante "viceversa parziale" del fatto che ogni funzione costante abbia derivata nulla.

Proposizione 6.5.5 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e derivabile all'interno dell'intervallo I. Se $f'(x) = 0$ per ogni punto x interno ad I, allora f è costante su I.*

Dimostrazione: Fissati $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, poiché $[x_1, x_2] \subset I$ allora la restrizione $f_{|[x_1,x_2]}$ verifica le ipotesi del teorema di Lagrange. Dunque esiste $z \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(z) \cdot (x_2 - x_1) . \tag{6.6}$$

Essendo $f'(z) = 0$, in quanto z è interno ad I, allora dalla (6.6) deduciamo che $f(x_1) = f(x_2)$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 6.5.6 La tesi è falsa se il dominio di f non è un intervallo. Ad esempio, la funzione $f(x) = x/|x|$ è derivabile con derivata sempre nulla su tutto $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che non è un intervallo, ma f non è costante su A.

Deduciamo poi la monotonia di una funzione che abbia derivata di segno costante su un intervallo.

Proposizione 6.5.7 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e derivabile all'interno dell'intervallo I. Abbiamo:*

i) *se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \operatorname{int} I$, allora f è strettamente crescente su I*

ii) *se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \operatorname{int} I$, allora f è debolmente crescente su I*

iii) *se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \operatorname{int} I$, allora f è strettamente decrescente su I*

iv) *se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \operatorname{int} I$, allora f è debolmente decrescente su I.*

Dimostrazione: Mostriamo solo la prima proprietà, le altre essendo di analoga verifica. Come nella proposizione precedente, fissati $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, esiste $z \in]x_1, x_2[$ per il quale vale la (6.6). Questa volta $f'(z) > 0$ per cui, essendo $(x_2 - x_1) > 0$, deduciamo che $f(x_2) - f(x_1) > 0$ e dunque che $f(x_1) < f(x_2)$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 6.5.8 La tesi è falsa se il dominio di f non è un intervallo. Ad esempio, la funzione $f(x) = -1/x$ è derivabile con derivata $f'(x) = 1/x^2$ sempre positiva su tutto $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che non è un intervallo, ma f non è strettamente crescente (e neppure monotona) su A.

Osservazione 6.5.9 Più in generale, si può dimostrare che *se f è continua su I e $f'(x) > 0$ [[< 0]] all'interno di I eccetto al più in un numero finito di punti (in cui f' può anche non esistere), allora f risulta strettamente crescente [[decrescente]] su I.* Ad esempio si ritrova in questo modo la stretta monotonia di $x^{1/3}$ su $\mathbb{R}$.

Usando ancora l'argomento precedente, si dimostra il seguente risultato sulla natura dei punti critici.

Corollario 6.5.10 *Sia f una funzione derivabile su un intervallo I, e sia x_0 un punto interno ad I tale che $f'(x_0) = 0$. Si ha:*

1) se $f' < 0$ in un intorno sinistro di x_0 ed $f' > 0$ in un intorno destro di x_0, allora x_0 è di minimo locale stretto per f;

2) se $f' > 0$ in un intorno sinistro di x_0 ed $f' < 0$ in un intorno destro di x_0, allora x_0 è di massimo locale stretto per f;

3) se f' non cambia segno in un intorno di x_0, allora f è monotona in un intorno di x_0 e quindi x_0 non è né di massimo né di minimo relativo stretto.

Esempio 6.5.11 La funzione $f(x) = x^4$ ha derivata $f'(x) = 4x^3$ che si annulla in zero, è negativa prima di zero e positiva dopo zero. Quindi $x_0 = 0$ è punto di minimo locale stretto per f. Analogamente, le funzioni $-x^4$ e x^3 forniscono esempi in cui si può applicare i punti 2) e 3), rispettivamente.

Se f è derivabile due volte, il corollario precedente si può riformulare come segue:

Corollario 6.5.12 *Se f è una funzione derivabile su un intervallo I, e x_0 è un punto interno ad I tale che $f'(x_0) = 0$ ed esiste $f''(x_0)$, si ha:*

1') se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è di minimo locale stretto per f;

2') se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è di massimo locale stretto per f;

3') se x_0 è di minimo locale per f allora $f''(x_0) \geq 0$;

4') se x_0 è di massimo locale per f allora $f''(x_0) \leq 0$.

Dimostrazione: Applicando la proposizione 6.4.4 alla funzione derivata, se $f'(x_0) = 0$ **e** $f''(x_0) > 0$ deduciamo che esiste $\delta > 0$ tale per ogni $x \in I$ risulta:

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \ \textbf{e} \ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f(x_0) = 0\,.$$

Quindi la 1') segue dalla corrispondente proprietà 1) nel corollario precedente. La 2') si deduce in maniera analoga dalla 2). Le 3') e 4') si ottengono dalle contronominali delle 2') e 1'), rispettivamente. □

Osservazione 6.5.13 Quest'ultimo corollario è più debole del precedente, in quanto si applica ad esempio alle funzioni $f(x) = \pm x^2$ in $x_0 = 0$ ma non alle funzioni $f(x) = \pm x^4$, che hanno derivata seconda nulla in $x_0 = 0$. Inoltre le funzioni $\pm x^4$ in $x_0 = 0$ mostrano che in un punto di massimo o minimo locale stretto non si può concludere che $f''(x_0) < 0$ o $f''(x_0) > 0$, rispettivamente.

Funzioni lipschitziane derivabili

Ricordando la definizione (5.11), dal teorema di Lagrange otteniamo anche:

Corollario 6.5.14 *Se f è una funzione derivabile su un intervallo I, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

i) *f è lipschitziana con costante di Lipschitz minore o uguale ad L*

ii) *$|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in I$.*

Dimostrazione: Se vale la i), osserviamo che la (5.11) si riscrive come

$$\forall\, x, x_0 \in I\,,\ x \neq x_0\,, \qquad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq L\,. \tag{6.7}$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si deduce che $|f'(x_0)| \leq L$ e dunque vale la ii). Viceversa, per il teorema di Lagrange abbiamo che

$$\forall\, x, x_0 \in I\,,\ x \neq x_0\,,\ \exists\, z \in I\ :\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(z)$$

con z compreso tra x ed x_0. Poiché $|f'(z)| \leq L$, allora vale la stima (6.7) che è equivalente alla i). □

Di conseguenza si ottiene un caso particolare del teorema 5.5.9 di Heine-Cantor.

Corollario 6.5.15 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 su $[a, b]$ chiuso e limitato, allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione: Infatti la funzione derivata f' è continua su $[a, b]$ e dunque, per il teorema 5.3.11 di Weierstrass, è limitata. Ma allora per il corollario precedente f è lipschitziana ed in definitiva è uniformemente continua. □

Il teorema di Cauchy

Il teorema di Lagrange è un caso particolare del *teorema di Cauchy* sulle funzioni derivabili, ottenuto scegliendo $g(x) = x$ qui sotto. Questo risultato sarà utilizzato nella dimostrazione dei teoremi di de l'Hôpital e di Taylor.

Teorema 6.5.16 *Siano f e g due funzioni reali continue nell'intervallo $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Allora esiste almeno un punto $z \in]a,b[$ tale che*

$$\big(f(b)-f(a)\big)\,g'(z) = \big(g(b)-g(a)\big)\,f'(z)\ .$$

Se poi si ha $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora risulta $g(b) \neq g(a)$ e possiamo anche scrivere:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}\ .$$

Dimostrazione: Consideriamo la funzione

$$h(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\,g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\,f(x)\,.$$

Si vede facilmente che h verifica le ipotesi del teorema 6.5.1 di Rolle. Infatti h è sufficientemente regolare e risulta $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$. Allora esiste $z \in]a,b[$ tale che $h'(z) = 0$, da cui segue la prima affermazione. Se inoltre $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a,b[$, per il corollario 6.5.3 sappiamo che $g(b) \neq g(a)$ e la seconda uguaglianza segue dividendo per le quantità non nulle $\big(g(b)-g(a)\big)$ e $g'(z)$. □

6.6 I teoremi di de l'Hôpital

Il seguente risultato tratta le forme indeterminate di tipo 0/0.

Teorema 6.6.1 *Siano $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni continue e sia $\overline{x} \in]a,b[$ tale che $f(\overline{x}) = g(\overline{x}) = 0$. Supponiamo che*

i) *f e g siano derivabili su $]a,b[\setminus \{\overline{x}\}$*

ii) *$g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a,b[\setminus \{\overline{x}\}$*

iii) *esista il limite $\displaystyle\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Allora risulta $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a,b[\setminus \{\overline{x}\}$, esiste il limite per $x \to \overline{x}$ di f/g e risulta

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = l\ .$$

Dimostrazione: La condizione $g(x) \neq 0$ per $x \neq \overline{x}$ segue dal corollario 6.5.3 al teorema di Rolle, grazie alle ipotesi i) e ii), essendo $g(\overline{x}) = 0$. Usando la caratterizzazione sequenziale (5.6), dobbiamo allora provare che per ogni successione $\{x_n\}_n \subset]a,b[\setminus \{\overline{x}\}$ tale che $x_n \to \overline{x}$, risulta $f(x_n)/g(x_n) \to l$. Grazie al teorema 6.5.16 di Cauchy, per ogni n esiste un punto z_n compreso tra x_n e $\overline{x}$ tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(\overline{x})}{g(x_n)-g(\overline{x})} = \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}\ .$$

Ma $|z_n - \overline{x}| \leq |x_n - \overline{x}|$, dunque essendo $x_n \to \overline{x}$, anche $z_n \to \overline{x}$. Ma allora per l'ipotesi iii) risulta $f'(z_n)/g'(z_n) \to l$ ed infine anche $f(x_n)/g(x_n) \to l$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 6.6.2 Il teorema vale ancora se f e g non sono definite in $\overline{x}$, purché risulti $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ per $x \to \overline{x}$. In tal caso, basta estendere per continuità le funzioni ponendo $f(\overline{x}) = g(\overline{x}) = 0$. Quindi il teorema di de l'Hôpital resta valido anche se $\overline{x} = a$ o $\overline{x} = b$. Nel caso di un punto interno $x_0 \in]a,b[$, vale un analogo enunciato per i limiti $x \to x_0^\pm$ da destra o da sinistra, separatamente. Infine vale anche se $a=-\infty$ oppure se $b=+\infty$. Infatti, nel caso ad es. del limite $x\to+\infty$, bisogna applicare in $\overline{x}=0^+$ il teorema 6.6.1 alle funzioni $\widetilde{f}(x)=f(1/x)$ e $\widetilde{g}(x)=g(1/x)$ ed osservare che per $x>0$

$$\frac{\widetilde{f}'(x)}{\widetilde{g}'(x)}=\frac{f'(1/x)}{g'(1/x)}$$

per cui l'asserto segue cambiando variabile $t=1/x$ e ricordando che $1/x\to+\infty$ se $x\to0^+$.

Con un po' più di fatica, si può dimostrare (si veda il libro di testo per la dimostrazione) la *seconda forma* del teorema di de l'Hôpital, che tratta le forme indeterminate di tipo ∞/∞.

Teorema 6.6.3 *Siano $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili e tali che $f(x)\to\pm\infty$ e $g(x)\to\pm\infty$ per $x\to a$. Supponiamo che*

i) $g'(x)\neq0$ *per ogni* $x\in]a,b[$

ii) *esiste il limite* $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\overline{\mathbb{R}}$.

Allora si ha anche $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

Osservazione 6.6.4 Anche il secondo teorema di de l'Hôpital resta valido se $\overline{x}=b$ o se $x_0\in]a,b[$, nel qual caso vale un analogo enunciato per i limiti $x\to x_0^\pm$ da destra o da sinistra, separatamente. Infine vale anche se $a=-\infty$ oppure se $b=+\infty$. Si noti che non si può dedurre la tesi applicando la prima forma del teorema scrivendo il quoziente $f/g=(1/g)/(1/f)$. Infatti il rapporto delle derivate nell'ultimo quoziente dà $\big(f^2(x)/g^2(x)\big)\cdot\big(g'(x)/f'(x)\big)$ che non c'entra nulla con il rapporto f'/g' delle derivate.

Osservazioni sui teoremi di de l'Hôpital

Osservazione 6.6.5 I teoremi di de l'Hôpital vanno usati con cautela. Infatti, ad esempio il limite

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathsf{e}^{x^3}\cos(x^2-x)\operatorname{sen}x}{x\log(\mathsf{e}+\sqrt{3x\operatorname{sen}x})}=1\,,$$

come si vede subito, è difficilmente ricostruibile calcolando il limite del rapporto delle derivate.

Osservazione 6.6.6 Occorre sempre verificare le ipotesi. Ad esempio, otteniamo facilmente il limite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1+\operatorname{sen}x}{x}=+\infty$$

ma se calcoliamo il limite del quoziente delle derivate abbiamo

$$\lim_{x\to0^+}\frac{D(1+\operatorname{sen}x)}{Dx}=\lim_{x\to0^+}\cos x=1\,.$$

Infatti, il limite proposto NON presenta una forma indeterminata del tipo $0/0$ o ∞/∞.

Osservazione 6.6.7 I teoremi di de l'Hôpital sono *condizioni sufficienti* ma non necessarie. Precisamente, può succedere che esista il limite di una forma indeterminata $f(x)/g(x)$ anche se non esiste il limite di $f'(x)/g'(x)$. Se ad esempio scegliamo $f(x)=x^\beta\operatorname{sen}(1/x)$ e $g(x)=x$, con $\overline{x}=0^+$, abbiamo

$$D(x^\beta\operatorname{sen}(1/x))=\beta x^{\beta-1}\operatorname{sen}(1/x)+x^\beta\cos(1/x)\cdot(-x^{-2})=\beta x^{\beta-1}\operatorname{sen}(1/x)-x^{\beta-2}\cos(1/x)\qquad(6.8)$$

per ogni $x>0$. In particolare, per $\beta=2$ risulta $D(x^2\operatorname{sen}(1/x))=2x\operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x)$ per ogni $x>0$. Essendo poi $g'(x)\equiv1$, otteniamo

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{D(x^2\operatorname{sen}(1/x))}{Dx}=2x\operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x)$$

che non ha limite per $x\to0^+$. Infatti, dal momento che $2x\operatorname{sen}(1/x)\to0$ per $x\to0^+$, se tale funzione avesse limite l, per il teorema sul limite della somma dovrebbe avere limite l per $x\to0^+$ anche la funzione $\cos(1/x)$, il che è falso. Ciononostante, togliendo l'indeterminazione abbiamo direttamente che

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{x}=\lim_{x\to0^+}x\operatorname{sen}(1/x)=0\,.$$

Osservazione 6.6.8 Nel calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\mathsf{e}^{-1/x}}{x^2}$ che presenta una forma indeterminata $0/0$, sono verificate le ipotesi del teorema 6.6.1. Se però calcoliamo per $x>0$ il quoziente delle derivate, abbiamo

$$\frac{D\mathsf{e}^{-1/x}}{Dx^2} = \frac{\mathsf{e}^{-1/x}x^{-2}}{2x} = \frac{\mathsf{e}^{-1/x}}{2x^3}$$

e otteniamo ancora una forma indeterminata $0/0$ che è anche più complicata di quella che vogliamo calcolare. Se invece trasformiamo il limite nella forma indeterminata ∞/∞, i.e. scriviamo per $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathsf{e}^{-1/x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-2}}{\mathsf{e}^{1/x}}$$

possiamo applicare due volte il teorema 6.6.3 ottenendo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-2}}{\mathsf{e}^{1/x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{Dx^{-2}}{D\mathsf{e}^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{-3}}{\mathsf{e}^{1/x}(-x^{-2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{-1}}{\mathsf{e}^{1/x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{D(2x^{-1})}{D\mathsf{e}^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{-2}}{\mathsf{e}^{1/x}(-x^{-2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\mathsf{e}^{1/x}} = 0\,.\end{aligned}$$

Osservazione 6.6.9 Il teorema 6.6.1 può essere usato per calcolare l'ordine di infinitesimo e la sua parte principale. Ad esempio, supponiamo che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sia una funzione derivabile tre volte su $\mathbb{R}$ e tale che $f(x)\to 0$, $f'(x)\to 0$ e $f''(x)\to 0$ per $x\to 0$, ma $f^{(3)}(x)\to\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ per $x\to 0$. Applicando tre volte il teorema 6.6.1, scriviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(3)}(x)}{6} = \frac{\lambda}{6}\,.$$

Posto $L=\lambda/6$, abbiamo infatti ottenuto che $f(x)=Lx^3+o(x^3)$.

Esempio 6.6.10 Ragionando come sopra calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

e dunque $x-\operatorname{sen} x = x^3/6+o(x^3)$, da cui deduciamo che $\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^3)$. Questo suggerisce, come vedremo, che il calcolo dei coefficienti degli sviluppi di Taylor è legato al teorema 6.6.1.

Osservazione 6.6.11 Alcuni limiti si calcolano preferibilmente con il teorema di de l'Hôpital, come:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(x+1)} = 1\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x} = 0\,.$$

Sono entrambe forme indeterminate ∞/∞ e valgono le ipotesi del teorema 6.6.3. Per il primo abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{D\log x}{D\log(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1/(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1\,.$$

Per il secondo, verifichiamo che anche $\log(\log x)\to+\infty$ se $x\to+\infty$, e numeratore e denominatore sono derivabili su $]1,+\infty[$, con $D\log x\neq 0$ per ogni $x>1$. Poiché inoltre

$$\frac{D\log(\log x)}{D\log x} = \frac{(1/\log x)(1/x)}{1/x} = \frac{1}{\log x} \to 0$$

se $x\to+\infty$, allora il secondo limite esiste e vale 0.

Un corollario del teorema di de l'Hôpital

Il teorema 6.6.1 di de l'Hôpital ha un' importante conseguenza:

Corollario 6.6.12 *Sia f una funzione continua in un intorno di x_0, che è anche derivabile ma solo per $x\neq x_0$. Se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x)=l\in\overline{\mathbb{R}}$, allora esiste anche la derivata $f'(x_0)$ ed è uguale ad l. Se invece $f'(x_0)\to l_+$ per $x\to x_0^+$ [[$f'(x_0)\to l_-$ per $x\to x_0^-$]], allora esiste $f'_+(x_0)=l_+$ [[esiste $f'_-(x_0)=l_-$]].*

Dimostrazione: Per la continuità di f in x_0, la funzione rapporto incrementale

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

presenta una forma indeterminata $0/0$. Inoltre al denominatore abbiamo $D(x - x_0) = 1$ mentre a numeratore $D(f(x) - f(x_0)) = f'(x)$ per $x \neq x_0$. Quindi il quoziente delle derivate è uguale a $f'(x)$ e l'asserto segue dal teorema 6.6.1. □

Prima di applicare il corollario precedente occorre verificare la continuità della funzione nel punto x_0. Inoltre, anche il corollario al teorema di de l'Hôpital è una condizione sufficiente ma non necessaria.

Esempio 6.6.13 Consideriamo per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\beta \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e ci chiediamo per quali valori di β è continua, derivabile e di classe C^1 su $\mathbb{R}$.

Ovviamente f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ ma è continua anche in $x_0 = 0$ se e solo se $\beta > 0$. Per la località della derivata deduciamo poi che f è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e dalla formula (6.8) abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \beta x^{\beta-1} \operatorname{sen}(1/x) - x^{\beta-2} \cos(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Supposto $\beta > 0$, per cui f è continua in $x_0 = 0$, deduciamo che $f'_-(0) = 0$, mentre dal corollario 6.6.12, se $\beta > 2$ abbiamo anche:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \big(\beta x^{\beta-1} \operatorname{sen}(1/x) - x^{\beta-2} \cos(1/x)\big) = 0\,.$$

Dunque per ogni $\beta > 2$ la funzione è derivabile anche in $x_0 = 0$ ed essendo f' continua su $\mathbb{R}$, allora $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Osserviamo ora che non esiste il limite di $f'(x)$ per $x \to 0^+$ se $0 < \beta \leq 2$, ma questo non significa che per tali valori del parametro la funzione non è derivabile in $x_0 = 0$. Infatti per $x > 0$ il rapporto incrementale centrato in $x_0 = 0$ si scrive

$$R_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^\beta \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x} = x^{\beta-1} \operatorname{sen}(1/x)$$

e dunque $R_0(x)$ ha limite zero per $x \to 0^+$ se $\beta > 1$, mentre ovviamente non ha limite se $0 \leq \beta < 1$. Quindi anche per $1 < \beta \leq 2$ la funzione è derivabile in $x_0 = 0$ con derivata $f'(0) = 0$, ma per tali valori f' non è continua in $x_0 = 0$, dunque f non è di classe $C^1(\mathbb{R})$ pur essendo derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

6.7 I teoremi di Taylor

Siano f una funzione continua su $]a, b[$ e $x_0 \in]a, b[$. Sappiamo che se f è derivabile una volta in x_0, allora

$$f(x_0 + h) = P_{1,x_0}(h) + o(h^1)\,, \qquad P_{1,x_0}(h) := f(x_0) + f'(x_0)h\,, \qquad h = x - x_0\,.$$

La differenziabilità si generalizzerà nel teorema 6.7.1. Invece, per il teorema 6.5.4 di Lagrange, se f è derivabile in ogni punto $x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$, allora per $x \neq x_0$ esiste $z = z(x)$ compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(z) \cdot (x - x_0) = P_{0,x_0}(x - x_0) + f^{(1)}(z) \cdot (x - x_0)\,, \qquad P_{0,x_0}(x - x_0) = f(x_0)$$

che si generalizzerà nel teorema 6.7.7.

Formula di Taylor con il resto di Peano

Teorema 6.7.1 *Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in]a, b[$. Supponiamo che la funzione f sia derivabile n volte nel punto x_0, ed $n - 1$ volte nel resto dell'intervallo $]a, b[$. Posto*

$$\begin{aligned} P_{n,x_0}(x - x_0) = &\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ = &\; f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,, \end{aligned}$$

risulta

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_{n,x_0}(x-x_0)}{(x-x_0)^n}=0\ . \tag{6.9}$$

Osservazione 6.7.2 Quindi, posto $x=x_0+h$, abbiamo che (6.9) è equivalente alla scrittura

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-P_{n,x_0}(h)}{h^n}=0\,,\qquad P_{n,x_0}(h):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k \tag{6.10}$$

e dunque, per ogni h tale che $x_0+h\in]a,b[$, scriviamo $f(x_0+h)=P_{n,x_0}(h)+o(h^n)$. Quindi, in coerenza con la definizione 5.4.7 per il caso $x_0=0$, il polinomio $P_{n,x_0}(x-x_0)=P_{n,x_0}(h)$ si chiama *polinomio di Taylor di ordine* n di f centrato in x_0. La scrittura $P_{n,x_0}(h)+o(h^n)$ si chiama *sviluppo di Taylor di ordine* n di f centrato in x_0. Ragionando come nella proposizione 5.4.8 per il caso $x_0=0$, si dimostra che se esiste *il polinomio di Taylor è unico.*

Dimostrazione del teorema 6.7.1 Proveremo la formula (6.10) per induzione sull'ordine $n\in\mathbb{N}^+$. Posto allora $\mathcal{P}(n)$ l'enunciato all'ordine n, sappiamo che $\mathcal{P}(1)$ è vero per la proposizione 6.1.5, in quanto $P_{1,x_0}(h)=f(x_0)+f'(x_0)h$. Supposto $\mathcal{P}(n-1)$ vero per $n\geq 2$ intero , i.e.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-P_{n-1,x_0}(h)}{h^{n-1}}=0\,,\qquad P_{n-1,x_0}(h):=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$$

dobbiamo provare che vale $\mathcal{P}(n)$, i.e. (6.10). Effettuando il cambio di variabile $h(x)=x-x_0$ nella derivazione (che è un limite), ed essendo $dh(x)/dx=1$, deduciamo che

$$P_{n-1,x_0}(0)=f(x_0)\,,\quad P'_{n-1,x_0}(0)=f'(x_0)\,,\quad P^{(k)}_{n-1,x_0}(0)=f^{(k)}(x_0)\quad \forall\, k=0,\dots,n-2$$

mentre $P^{(n-1)}_{n-1,x_0}(h)=f^{(n-1)}(x_0)$ per ogni h, essendo il polinomio di ordine $n-1$. Allora, applicando $n-1$ volte il teorema 6.6.1 di de l'Hôpital alle funzioni nella variabile h, scriviamo

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-P_{n-1,x_0}(h)}{h^n} &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-P'_{n-1,x_0}(h)}{nh^{n-1}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)-P''_{n-1,x_0}(h)}{n(n-1)h^{n-2}}=\cdots\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-P^{(n-1)}_{n-1,x_0}(h)}{n!h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{n!}\cdot\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}
\end{aligned}$$

dove l'ultimo limite segue dalla definizione di derivata della funzione $h\mapsto f^{(n-1)}(x_0+h)$ in $h=0$. Poiché inoltre

$$P_{n,x_0}(h)=P_{n-1,x_0}(h)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

allora otteniamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-P_{n,x_0}(h)}{h^n}=\lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(x_0+h)-P_{n-1,x_0}(h)}{h^n}-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Big)=0$$

come volevamo dimostrare. □

Esempi fondamentali

Per $x_0=0$ gli sviluppi di Taylor si chiamano anche di Mac Laurin e si scrivono come

$$f(h)=P_n(h)+o(h^n)\,,\qquad P_n(h):=P_{n,0}(h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}h^k\,.$$

Quindi per le funzioni elementari ritroviamo le formule riportate nell'esempio 5.4.9 e già utilizzate per il calcolo di limiti di quozienti di infinitesimi.

Se $f(x) = \mathsf{e}^x$, risulta $f^{(k)}(x) = \mathsf{e}^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, dunque si ha $f^{(k)}(0) = \mathsf{e}^0 = 1$ ed infine

$$\mathsf{e}^h = P_n(h) + o(h^n), \qquad P_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.$$

Se invece $f(x) = \operatorname{sen} x$, risulta $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(k+4)}(x) = f^{(k)}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. Dunque si ha $f^{(k)}(0) = \pm \operatorname{sen} 0 = 0$ se k è pari, mentre se k è dispari, posto $k = 2m+1$ con $m \in \mathbb{N}$, abbiamo $f^{(k)}(0) = f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m \cos 0 = (-1)^m$. Quindi, ad esempio per $n = 6$, otteniamo che

$$\operatorname{sen} h = P_6(h) + o(h^6), \qquad P_6(h) = \frac{h}{1!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} = h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120}$$

e più in generale ritroviamo la formula già scritta nell'esempio 5.4.9.

Analogamente, se $f(x) = \cos x$, risulta $f^{(1)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(2)}(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(k+4)}(x) = f^{(k)}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. Dunque si ha $f^{(k)}(0) = \pm \operatorname{sen} 0 = 0$ se k è dipari, mentre se k è pari, posto $k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$, abbiamo $f^{(k)}(0) = f^{(2m)}(0) = (-1)^m \cos 0 = (-1)^m$. Quindi, ad esempio per $n = 5$, otteniamo che

$$\cos h = P_5(h) + o(h^5), \qquad P_5(h) = \frac{h^0}{0!} - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}$$

e più in generale ritroviamo la formula già scritta nell'esempio 5.4.9.

Osservazione 6.7.3 Grazie all'osservazione 6.3.14 otteniamo che se una funzione f è pari e "liscia", allora il suo polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ ha nulli tutti i monomi di grado dispari, essendo $f^{(k)}(0) = 0$ per k dispari. Analogamente, deduciamo che il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di una funzione f dispari ha nulli tutti i monomi di grado pari, essendo questa volta $f^{(k)}(0) = 0$ per k pari.

Osservazione 6.7.4 Se una funzione reale f verifica la proprietà $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ in un intorno di $x_0 = 0$, allora deduciamo che $f(0) = a$, $f'(0) = b$, $f''(0) = 2c$, $f^{(3)}(0) = 6d$. Infatti, la funzione $P(x) := a + bx + cx^2 + dx^3$ è il polinomio di Taylor di f di ordine tre centrato in $x_0 = 0$ e dunque, per il teorema 6.7.1, e per l'unicità degli sviluppi di Taylor, il coefficiente del monomio di x^k in $P(x)$ deve essere uguale a $f^{(k)}(0)/k!$ per $k = 0, 1, 2, 3$.

In maniera analoga, se risulta $f(x) = P(x) + g(x)$ in un intorno di x_0, dove

$$P(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3 \quad \text{e} \quad g(x_0 + h) = o(h^3)$$

allora deduciamo ancora che $f(x_0) = a$, $f'(x_0) = b$, $f''(x_0) = 2c$, $f^{(3)}(x_0) = 6d$. Infatti, questa volta $P(x)$ è il polinomio di Taylor di f di ordine tre centrato in x_0 e dunque come sopra deduciamo che il coefficiente del monomio $(x - x_0)^k$ in $P(x)$ deve essere uguale a $f^{(k)}(x_0)/k!$.

Osservazione 6.7.5 Quindi l'argomento precedente può essere usato per calcolare derivate di ordine alto di una funzione conoscendone gli sviluppi. Consideriamo la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(1 - \mathsf{e}^{-x}) + \log(1 - 2x)$, il cui sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di ordine 5 vale

$$f(x) = \operatorname{sen}(1 - \mathsf{e}^{-x}) + \log(1 - 2x) = -x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^3 - \frac{91}{24}x^4 + o(x^4).$$

Dunque otteniamo rapidamente che $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2 \cdot (-5/2) = -5$, $f^{(3)}(0) = 6 \cdot (-8/3) = -16$ ed infine $f^{(4)}(0) = 24 \cdot (-91/24) = -91$.

Sulla natura di punti critici

Sappiamo che se una funzione "liscia" f ha un punto critico interno in x_0 e $f''(x_0) \neq 0$, il segno della derivata seconda stabilisce se è di massimo o minimo locale, mentre se $f''(x_0) = 0$, come accade con x^3 e $\pm x^4$ in $x_0 = 0$, non possiamo concludere nulla a priori. Vediamo ora che la conoscenza del cosiddetto primo *getto* non nullo di f risolve la questione.

Proposizione 6.7.6 *Sia f derivabile n volte in $]a, b[$ e sia $x_0 \in]a, b[$ tale che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k = 1, \ldots n - 1$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, con $n \geq 2$ intero. Si ha:*

i) *se n è dispari, allora x_0 non è né di massimo né di minimo locale, i.e. è un punto di sella per f;*

ii) *se n è pari, allora x_0 è un punto di massimo locale stretto se $f^{(n)}(x_0) < 0$, di minimo locale stretto se $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

Dimostrazione: Dallo sviluppo di Taylor scriviamo che $f(x_0 + h) = f(x_0) + \bigl(f^{(n)}(x_0)/n!\bigr)\, h^n + o(h^n)$ e quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0\,.$$

Ma allora, per la permanenza del segno sappiamo che esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < |h| < \delta$ la quantità

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^n}$$

ha segno costante. Ora, se n è dispari il denominatore h^n cambia segno con h e dunque il numeratore cambia segno con h. Se infatti $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora risulta $f(x_0 + h) > f(x_0)$ se $0 < h < \delta$ e $f(x_0 + h) < f(x_0)$ se $-\delta < h < 0$, dunque x_0 non è né di massimo né di minimo locale. Analogamente si ragiona se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0$. Se invece n è pari, il denominatore h^n è positivo e dunque il numeratore ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$. Quindi se $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora risulta $f(x_0 + h) > f(x_0)$ per $0 < |h| < \delta$ e x_0 è un punto di minimo locale stretto. Se invece $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora $f(x_0 + h) < f(x_0)$ per $0 < |h| < \delta$ e x_0 è un punto di massimo locale stretto. □

Formula di Taylor con il resto di Lagrange

Nella formula di Taylor con il resto di Peano abbiamo trovato la funzione polinomiale di ordine n che meglio approssima una funzione f sufficientemente regolare vicino ad un punto x_0. Quindi, scrivendo $P_{n,x_0}(h)$ al posto di $f(x_0+h)$, sappiamo che l'errore commesso $o(h^n)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad h^n per $h \to 0$. Nel seguente risultato diamo una stima quantitativa dell'errore

$$R_{n,x_0}(h) := f(x_0 + h) - P_{n,x_0}(h) = o(h^n)\,. \tag{6.11}$$

Osserviamo che se $n = 0$ il teorema 6.5.4 di Lagrange afferma che

$$R_{1,x_0} := f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(z)\cdot(x - x_0) = f'(z)\cdot h\,,$$

dove $z = z(x)$ è un punto compreso tra x_0 ed $x = x_0 + h$. Per questo motivo il prossimo risultato è noto come *formula di Taylor con il resto di Lagrange.*

Teorema 6.7.7 *Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in]a, b[$. Supponiamo che la funzione f sia derivabile $n + 1$ volte nell'intervallo $]a, b[$, e sia $P_{n,x_0}(x - x_0)$ il polinomio di Taylor di ordine n e centrato in x_0 associato ad f. Allora per ogni $x \in]a, b[$ esiste un punto $z(x)$ compreso tra x_0 e x tale che*

$$f(x) = P_{n,x_0}(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}\bigl(z(x)\bigr)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}\ .$$

Dimostrazione: Consideriamo il caso in cui $x_0 = 0$, la dimostrazione generale essendo ottenuta mediante una traslazione $x = x_0 + h$. Poniamo allora

$$g(h) := f(h) - P_n(h)\,, \qquad \varphi_k(h) = h^k\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

ed osserviamo che risulta:

i) $g(0) = 0$ e $g^{(k)}(0) = 0$ per $k = 1, \ldots, n$, essendo $P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$;

ii) $g^{(n+1)}(h) = f^{(n+1)}(h)$ per ogni $h \in]a, b[$, essendo $P_n(h)$ un polinomio di ordine n;

iii) $\varphi_k'(h) = k\,\varphi_{k-1}(h)$ e $\varphi_k(0) = 0$ se $k \geq 1$, mentre $\varphi_0(h) \equiv 1$.

Per il teorema di Cauchy 6.5.16 esiste z_1 compreso tra 0 ed h tale che

$$\frac{f(h)-P_n(h)}{h^{n+1}}=\frac{g(h)}{\varphi_{n+1}(h)}=\frac{g(h)-g(0)}{\varphi_{n+1}(h)-\varphi_{n+1}(0)}=\frac{g'(z_1)}{\varphi'_{n+1}(z_1)}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{g'(z_1)}{\varphi_n(z_1)}\,.$$

Riapplicando il teorema 6.5.16 esiste z_2 compreso tra 0 e z_1 tale che

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{g'(z_1)}{\varphi_n(z_1)}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{g'(z_1)-g'(0)}{\varphi_n(z_1)-\varphi_n(0)}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{g''(z_2)}{\varphi'_n(z_2)}=\frac{1}{(n+1)\,n}\cdot\frac{g''(z_2)}{\varphi_{n-1}(z_2)}\,.$$

Iterando $n+1$ volte l'argomento, troviamo un punto z_{n+1} compreso tra 0 e z_n tale che

$$\frac{f(h)-P_n(h)}{h^{n+1}}=\cdots=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{g^{(n)}(z_n)}{\varphi_1(z_n)}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{g^{(n)}(z_n)-g^{(n)}(0)}{\varphi_1(z_n)-\varphi_1(0)}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{g^{(n+1)}(z_{n+1})}{\varphi'_1(z_{n+1})}\,.$$

Poiché $g^{(n+1)}(z_{n+1})=f^{(n+1)}(z_{n+1})$ mentre $\varphi'_1(z_{n+1})=1$, abbiamo ottenuto che

$$\frac{f(h)-P_n(h)}{h^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(z)\,,\qquad z=z_{n+1}\,.$$

Moltiplicando per h^{n+1}, e sostituendo $h=x$, possiamo dunque scrivere:

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}\big(z(x)\big)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

dove $z(x)$ è compreso tra 0 e x, che dà la formula richiesta nel caso $x_0=0$. □

Osservazione 6.7.8 In base alla notazione in (6.11), e ponendo $x=x_0+h$, il teorema afferma che

$$R_{n,x_0}(h):=f(x_0+h)-P_{n,x_0}(h)=\frac{f^{(n+1)}\big(z(x)\big)}{(n+1)!}h^{n+1}=o(h^n)\,,\qquad |z(x)-x|<h\,.$$

Serie di potenze

Una serie di potenze in campo reale è una serie dipendente da $x\in\mathbb{R}$ della forma $\sum_n a_nx^n$, dove i coefficienti $a_n\in\mathbb{R}$. Se una funzione reale f definita in un intorno $]-r,r[$ dell'origine è di classe $C^\infty(]-r,r[)$ ed esiste una successione $\{a_n\}_n$ tale che risulta

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\qquad\forall\,x\in]-r,r[$$

allora si dice che f è *sviluppabile in serie di potenze* o *analitica* in $]-r,r[$ (ed il numero $r>0$ massimale viene detto *raggio di convergenza* della serie di potenze). Applicando il teorema 6.7.7 in $x_0=0$, determiniamo la convergenza di alcune serie di potenze alle funzioni analitiche fondamentali.

Se $f(x)=\mathsf{e}^x$, per ogni $x\neq0$ ed $n\in\mathbb{N}^+$, esiste $z(x)$ compreso tra 0 ed x tale che

$$\mathsf{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x)\,,\qquad R_n(x):=\frac{\mathsf{e}^{z(x)}}{(n+1)!}x^{n+1}\,.$$

Ma per $x>0$ stimiamo

$$|R_n(x)|\leq\mathsf{e}^x\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to0$$

per $n\to\infty$, dunque $R_n(x)\to0$ per $n\to\infty$ comunque fissiamo $x>0$. Lo stesso ovviamente accade per $x<0$, essendo in tal caso $|\mathsf{e}^{z(x)}|<1$. Quindi passando al limite abbiamo che

$$\mathsf{e}^x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}\,.$$

Se ora $f(x) = \operatorname{sen} x$, per ogni $x \neq 0$ ed $n \in \mathbb{N}^+$, esiste $z(x)$ compreso tra 0 ed x tale che

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n}(x)\,, \qquad R_{2n}(x) := (-1)^n \frac{\cos(z(x))}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,.$$

Otteniamo ancora che $R_{2n}(x) \to 0$ se $n \to \infty$ per ogni $x \neq 0$. Quindi passando al limite abbiamo che

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Analogamente, se $f(x) = \cos x$, per ogni $x \neq 0$ ed $n \in \mathbb{N}^+$, esiste $z(x)$ compreso tra 0 ed x tale che

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n-1}(x)\,, \qquad R_{2n-1}(x) := (-1)^n \frac{\cos(z(x))}{(2n)!} x^{2n}\,.$$

Otteniamo ancora che $R_{2n-1}(x) \to 0$ se $n \to \infty$ per ogni $x \neq 0$, per cui questa volta otteniamo

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Dunque le funzioni exp, sen e cos sono funzioni analitiche reali.

Osservazione 6.7.9 Non tutte le funzioni di classe C^∞ sono analitiche. Consideriamo ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathsf{e}^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$. Se poniamo $f(0) = 0$, allora f è continua su $\mathbb{R}$, essendo $f(x) \to 0$ per $x \to 0$. Inoltre risulta $f'(x) = 2x^{-3}\mathsf{e}^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$, per cui anche $f'(x) \to 0$ per $x \to 0$. Allora per il corollario 6.6.12 al teorema di de l'Hôpital deduciamo che $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f'(0) = 0$. In maniera analoga, si verifica che $f \in C^n(\mathbb{R})$ con $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque f è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Ma il suo polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di ogni ordine n è identicamente nullo. In particolare risulta $f(x) = o(x^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dall'unicità degli sviluppi di Taylor, questa informazione ci dice che non esiste nessun raggio $r > 0$ e nessuna successione $\{a_n\}_n \subset \mathbb{R}$ tale che la serie di potenze $\sum_n a_n x^n$ converga a $f(x)$ per ogni $x \in]-r, r[$. Infatti, per quanto visto sopra dovrebbe essere $a_n = 0$ per ogni n, mentre $f(x) \neq 0$ per $x \neq 0$.

Osservazione 6.7.10 Vediamo ora che se la successione $|a_n|^{1/n}$ converge ad un numero reale $L \geq 0$, allora il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_n a_n x^n$ è dato da $r = 1/L$ se $L > 0$, ed $r = +\infty$ se $L = 0$. Questo significa che la serie di potenze è assolutamente convergente per ogni $x \in]-r, r[$.

Infatti, nel caso $L > 0$, se $x \in]-r, r[$, scelto $q > 0$ tale che $|x| < q < r$, poiché $r/q > 1$, definitivamente $|a_n|^{1/n} \leq Lr/q = 1/q$, dunque definitivamente $|a_n x^n| < |x/q|^n$, dove $|x/q| < 1$. L'assoluta convergenza della serie $\sum_n a_n x^n$ segue dal confronto con la serie geometrica $\sum_n |x/q|^n$ di ragione $|x/q| < 1$.

Esponenziale complesso

Se ora sostituiamo la variabile reale $x \in \mathbb{R}$ con la variabile complessa $z \in \mathbb{C}$, e definiamo la convergenza di successioni (e di serie) in campo complesso utilizzando il modulo invece del valore assoluto per stimare le distanze, deduciamo che una serie di potenze in campo complesso è una serie dipendente da $z \in \mathbb{C}$ della forma $\sum_n a_n z^n$, dove i coefficienti $a_n \in \mathbb{C}$. L'osservazione 6.7.10 vale anche in campo complesso, con le dovute modifiche: la serie converge se $|z| < r$ con r definito allo stesso modo.

Si può quindi definire la funzione esponenziale complessa $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come la somma della serie

$$\mathsf{e}^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

In maniera analoga, si definiscono le funzioni trigonometriche complesse $\operatorname{sen} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Infatti, si può dimostrare argomentando come in campo reale che le serie di potenze sopra scritte risultano convergenti per ogni $z \in \mathbb{C}$, avendo raggio di convergenza $r = +\infty$. Le funzioni somma sono un'estensione al campo $\mathbb{C}$ delle funzioni reali exp, sen e cos.

Osservazione 6.7.11 In particolare se $z = \mathbf{i}x$, con $x \in \mathbb{R}$, risulta

$$\mathsf{e}^{\mathbf{i}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{i})^k x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dove abbiamo usato che $\mathbf{i}^k = (-1)^n$ se $k = 2n$ e $\mathbf{i}^k = \mathbf{i} \cdot (-1)^n$ se $k = 2n+1$. Ma a secondo membro abbiamo scritto le serie di potenze convergenti a $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, per cui ricaviamo che

$$\mathsf{e}^{\mathbf{i}x} = \cos x + \mathbf{i} \operatorname{sen} x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Pasto allora $x = \theta$ e fissato $\rho > 0$, cf. l'osservazione 3.7.16, ricaviamo la formula

$$\rho\, \mathsf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \rho(\cos\theta + \mathbf{i} \operatorname{sen}\theta)$$

che esprime un numero complesso di modulo ρ e argomento θ in forma esponenziale.

6.8 Funzioni convesse

Insiemi convessi del piano

Definizione 6.8.1 Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice *convesso* se, contenendo due punti $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^2$, allora contiene l'intero segmento $[P_0, P_1]$ di estremi P_1 e P_2. Si dice *strettamente convesso* se inoltre A contiene al suo interno tutti i punti interni al segmento.

In coordinate, posto $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, il segmento $[P_0, P_1]$ è il sostegno della curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, dove $x(t) = tx_1 + (1-t)x_0$ e $y(t) = ty_1 + (1-t)y_0$, al variare di $t \in [0,1]$. Quindi A è convesso se per ogni $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in A$, con $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$, risulta

$$\big(tx_0 + (1-t)x_1, ty_0 + (1-t)y_1\big) \in A \qquad \forall\, t \in]0,1[$$

ed è strettamente convesso se ogni tale punto è contenuto in $\operatorname{int} A$. Un disco è strettamente convesso e un quadrato è convesso ma non strettamente convesso, perchè la sua frontiera ha regioni diritte.

Funzioni convesse

La [[stretta]] convessità di una funzione reale f è caratterizzata dalla [[stretta]] convessità del suo *epigrafico*, che è definito da

$$\operatorname{epi}(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \operatorname{dom} f \;\; \mathbf{e} \;\; y > f(x)\}\,.$$

Quindi ovviamente una funzione convessa deve avere come dominio un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, che è un insieme convesso di $\mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che la proprietà di convessità vale se ci si restringe a considerare segmenti i cui estremi P_0, P_1 stanno sulla frontiera dell'epigrafico, i.e. sul grafico di f. Posti allora $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$, con $x_0, x_1 \in I$ e $x_0 \neq x_1$, la convessità si riscrive come

$$\big(tx_0 + (1-t)x_1, tf(x_0) + (1-t)f(x_1)\big) \in \operatorname{epi}(f) \qquad \forall\, t \in]0,1[$$

e dunque con la condizione

$$x_0 \neq x_1 \quad \Rightarrow \quad tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \geq f(tx_0 + (1-t)x_1) \qquad \forall\, t \in]0,1[\,. \tag{6.12}$$

Definizione 6.8.2 Una funzione reale f definita su un intervallo I si dice *convessa* se per ogni $x_0, x_1 \in I$ e $x_0 \neq x_1$ vale la diseguaglianza (6.12). Si dice *strettamente convessa* se la diseguaglianza di convessità (6.12) è sempre stretta. Infine, la funzione f è [[*strettamente*]] *concava* se $-f$ è [[*strettamente*]] *convessa*.

Osservazione 6.8.3 Quindi tra due punti qualsiasi x_0 e x_1 dell'intervallo I il grafico di una funzione [[strettamente]] convessa su I non può stare sopra [[sta sotto]] la retta secante r_{x_0,x_1}. Indicata infatti con $r_{x_0,x_1}(z)$ la funzione affine

$$r_{x_0,x_1}(z) := f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0}{x_1 - x_0}(z - x_0)\,, \qquad z \in \mathbb{R}$$

che rappresenta la retta secante il grafico di f nei punti di ascissa x_0 e x_1, la diseguaglianza di [[stretta]] convessità (6.12) significa che $f(z) \geq r_{x_0,x_1}(z)$ [[>]] se z è compreso tra x_0 e x_1. Infatti tali punti si riscrivono come $z = z(t) = tx_0 + (1-t)x_1$, dove $t \in]0,1[$. Osserviamo poi che se $x_0 < x_1$, allora $z(t)$ denota i punti a sinistra di x_0 per $t > 1$ e a destra di x_1 per $t < 0$.

Esempio 6.8.4 Quindi una funzione affine $f(x) = mx+n$ è convessa (ed anche concava). Anche $x \mapsto |x|$ è convessa: infatti essendo $(1-t) > 0$ se $0 < t < 1$, dalla diseguaglianza triangolare abbiamo

$$|tx_0 + (1-t)x_1| \le t|x_0| + (1-t)|x_1| \qquad \forall\, x_0 \neq x_1\,, \quad \forall\, t \in]0,1[\,.$$

Ma anche $|x|$, come le funzioni affini, non è strettamente convessa, in quanto nella disuguaglianza sopra vale sempre l'uguaglianza se x_0 e x_1 sono di segno concorde.

Vedremo che la funzione x^2 è strettamente convessa. Inoltre esistono funzioni convesse che non sono continue: ad esempio la funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ che vale 0 se $x \in]-1,1[$ e vale 1 se $x = \pm 1$.

Ovviamente la somma $f+g$ di due funzioni convesse f e g è anch'essa convessa. Ma in generale il prodotto $f \cdot g$ non lo è. Ad esempio, x^2 è convessa, quindi anche x^2-1 è convessa, ma si vede facilmente dal corollario 6.8.11 che il suo quadrato $f(x) = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ non è una funzione convessa, avendo derivata seconda $f''(x) = 12x^2 - 4$ che cambia segno.

La caratterizzazione geometrica delle funzioni convesse è precisata dal seguente teorema, che dice che a sinistra di x_0 e a destra di x_1 il grafico di f sta sopra la retta secante r_{x_0,x_1}.

Teorema 6.8.5 *Se f è una funzione definita su un intervallo I, allora f è convessa se e solo se per ogni $x_0 < x_1$ in I risulta*

$$f(x) \le r_{x_0,x_1}(x) \quad \forall\, z \in]x_0,x_1[\quad \textbf{e} \quad f(x) \ge r_{x_0,x_1}(z) \quad \forall\, x \in I \setminus [x_0,x_1]\,.$$

Invece f è strettamente convessa se e solo se le disuguaglianze sopra sono sempre strette.

Dimostrazione: Presi ad esempio tre punti $x_0 < x_1 < x_2$ in I, poiché $f(x_1) \le r_{x_0,x_2}(x_1)$ mentre ovviamente $r_{x_0,x_1}(x_1) = f(x_1)$, allora le due rette r_1 ed r_2 di equazione rispettivamente $y = r_{x_0,x_1}(x)$ e $y = r_{x_0,x_2}(x)$, entrambe passanti per il punto $(x_0, f(x_0))$, sono tali che in corrispondenza di x_1 la prima non passa al di sopra [[passa al di sotto]] della seconda, e dunque lo stesso accade in x_2 che è a destra di x_1. Dunque abbiamo $r_{x_0,x_1}(x) \le r_{x_0,x_2}(x)$ [[<]] se $x > x_0$ e $r_{x_0,x_1}(x) \ge r_{x_0,x_2}(x)$ [[>]] se $x < x_0$. In particolare scrivendo la prima diseguaglianza per $x = x_2$ otteniamo che $r_{x_0,x_1}(x_2) \le f(x_2) = r_{x_0,x_2}(x_2)$ [[<]]. Un argomento analogo vale se $x_2 < x_0 < x_1$. □

Il grafico di una funzione [[strettamente]] convessa passante per due punti A e B del piano è tale che nella parte di piano compresa tra le due rette verticali passanti per i punti A e B non sta sopra [[sta sotto]] alla retta $r_{A,B}$ passante per i due punti, mentre al di fuori di tali due rette verticali non sta sotto [[sta sopra]] alla retta $r_{A,B}$. Se inoltre c'è almeno un punto all'interno del segmento $[A,B]$ congiungente i due punti che appartiene anche al grafico della funzione, allora tutto il segmento $[A,B]$ appartiene al grafico di f e ne determina una "zona diritta". Questo accade se la funzione è convessa ma non strettamente convessa. Infine, se il grafico di una funzione convessa interseca una retta r del piano in tre punti, allora tutto il segmento passante per quei tre punti di r appartiene al grafico di f. In particolare, *se una funzione è strettamente convessa, il suo grafico interseca una qualsiasi retta r del piano in al più due punti.*

Convessità e derivate

La proprietà di convessità è caratterizzata dalla monotonia della funzione rapporto incrementale, definita per ogni punto $x_0 \in I$ da

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}\,.$$

Proposizione 6.8.6 *Una funzione f definita su un intervallo I è [[strettamente]] convessa se e solo se per ogni $x_0 \in I$ la funzione rapporto incrementale $R_{x_0}(x)$ è [[strettamente]] crescente su $I \setminus \{x_0\}$.*

Dimostrazione: Se f è [[strettamente]] convessa su I, dobbiamo provare per ogni $x_0 \in I$ che se $x_1 < x_2$ sono punti di $I \setminus \{x_0\}$, allora $R_{x_0}(x_1) \le R_{x_0}(x_2)$ [[<]] . Osserviamo che $R_{x_0}(x_1)$ è il coefficiente angolare della retta r_{x_0,x_1} e $R_{x_0}(x_2)$ di r_{x_0,x_2}. Ma dalla dimostrazione del teorema 6.8.5 sappiamo che se $x_0 < x_1 < x_2$ la retta r_{x_0,x_1} ha pendenza non maggiore [[minore]] della pendenza della r_{x_0,x_2}. Se $x_1 < x_2 < x_1$ si ragiona in maniera analoga. Invece, se $x_1 < x_0 < x_2$ osserviamo che $R_{x_i}(x_j) = R_{x_j}(x_i)$ per ogni $i \neq j$ e dunque, da quanto già dimostrato, otteniamo che

$$R_{x_0}(x_1) = R_{x_1}(x_0) \le R_{x_1}(x_2) = R_{x_2}(x_1) \le R_{x_2}(x_0) = R_{x_0}(x_2)$$

[[con "$<$" due volte nel caso di stretta convessità]]. Il viceversa si dimostra in maniera analoga, ripercorrendo l'argomento a ritroso. □

Corollario 6.8.7 *Sia f una funzione convessa definita su un intervallo I e x_0 un punto interno ad I. Allora esistono finite le derivate sinistra e destra $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ e risulta $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$.*

Dimostrazione: Essendo crescente su $I \setminus \{x_0\}$, la funzione rapporto incrementale $R_{x_0}(x)$ ha limite per $x \to x_0^-$ e per $x \to x_0^+$, entrambi sono reali ed il primo è minore o uguale al secondo, cf. teorema 5.2.23 e corollario 5.2.25. □

Dalla proposizione 6.1.9 otteniamo allora:

Corollario 6.8.8 *Sia f una funzione convessa definita su un intervallo I e x_0 un punto interno ad I; allora f è continua in x_0.*

Osservazione 6.8.9 Una funzione [[strettamente]] convessa può non essere continua agli estremi dell'intervallo I. Si veda ad esempio la funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ che vale 0 se $x \in]-1,1[$ e vale 1 se $x = \pm 1$. Analogamente, se $I = [a,b]$, una funzione convessa f ha derivate $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$ ma la prima può valere $-\infty$ e la seconda $+\infty$. Si veda ad esempio la funzione strettamente convessa $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$, il cui grafico è una semicirconferenza e per la quale risulta $f'_+(-1) = -\infty$ e $f'_-(1) = +\infty$.

Per funzioni derivabili la caratterizzazione della proposizione 6.8.6 diventa:

Corollario 6.8.10 *Sia f una funzione derivabile su un intervallo I. Allora f è [[strettamente]] convessa se e solo se la funzione derivata f' è [[strettamente]] crescente su I.*

Di conseguenza, in ipotesi di maggior regolarità otteniamo:

Corollario 6.8.11 *Sia f una funzione derivabile due volte su un intervallo I. Allora f è convessa se e solo se $f'' \ge 0$ su I. Inoltre se $f'' > 0$ su I allora f è strettamente convessa.*

Analogamente, poiché una funzione f è convessa se e solo se $-f$ è concava, deduciamo:

Corollario 6.8.12 *Sia f una funzione derivabile su un intervallo I. Allora f è [[strettamente]] concava se e solo f' è [[strettamente]] decrescente su I. Se inoltre f è derivabile due volte su un intervallo I, allora f è concava se e solo se $f'' \le 0$ su I. Infine se $f'' < 0$ su I allora f è strettamente concava.*

Rette e coni tangenti

Proposizione 6.8.13 *Sia f una funzione convessa su un intervallo I e sia $x_0 \in I$. Allora per ogni $x \in I$*

$$x \le x_0 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)\,, \qquad x \ge x_0 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)\,.$$

In particolare, se f è derivabile in x_0, allora

$$\forall\, x \in I\,, \quad f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Infine, se f è strettamente convessa le diseguaglianze precedenti sono strette quando $x \ne x_0$.

Dimostrazione: Proviamo la seconda per $x > x_0$, essendo ovvia per $x = x_0$. Dalla proposizione 6.8.6 sappiamo che $R_{x_0}(z) \le R_{x_0}(x)$ per ogni $z \in]x_0, x[$, dunque

$$f'_+(x_0) = \lim_{z \to x_0^+} R_{x_0}(z) \le R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

da cui segue la diseguaglianza richiesta, moltiplicando per il denominatore $(x - x_0) > 0$. Se f è strettamente convessa osserviamo che $R_{x_0}(z) < R_{x_0}(x)$ per ogni $z \in]x_0, x[$. La prima diseguaglianza si ottiene similmente, mentre la terza è un'ovvia conseguenza. □

Quindi il grafico di una funzione convessa f sta sempre al di sopra del *cono tangente* di vertice $(x_0, f(x_0))$ definito dalle semirette di equazioni $y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$ e $y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$, la prima per $x \le x_0$ e la seconda per $x \ge x_0$. Tale cono tangente è piatto e diventa la retta tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ se f è derivabile in x_0.

Infine, se f è strettamente convessa, al di fuori del punto $(x_0, f(x_0))$ il grafico di f non tocca mai il cono tangente (e dunque la retta tangente, nel caso di derivabilità in x_0).

7 Integrazione

7.1 Primitive

Il primo esempio di equazione differenziale è della forma $y'(x) = f(x)$, dove f è una funzione nota definita su un intervallo I e $y = y(x)$ è l'incognita. Risolvere tale equazione su I significa trovare una funzione $y = y(x)$ derivabile su I e tale che la sua derivata $y'(x)$ sia uguale a $f(x)$ per ogni $x \in I$.

Ad esempio se $f(x) = \operatorname{sen} x$ la funzione $y(x) = -\cos x + c$ risolve l'equazione differenziale comunque scegliamo la costante additiva $c \in \mathbb{R}$. Se l'equazione differenziale è accoppiata ad una condizione del tipo $y(x_0) = y_0$, dove $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ sono dati, allora si parla di *problema di Cauchy* del primo ordine. Se nell'esempio precedente richiediamo che $y(0) = 3$, allora il problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione su tutto $\mathbb{R}$ data da $y(x) = -\cos x + 4$.

Definizione 7.1.1 Se f è una funzione definita su un insieme A, si dice che una funzione $F : A \to \mathbb{R}$ è una *primitiva* di f su A se F è derivabile su A e risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Se $f(x)$ ha una primitiva $F(x)$, allora anche $F(x) + c$ è primitiva, per ogni $c \in \mathbb{R}$. Infatti l'operatore di derivata è lineare e $Dc = 0$. Ad esempio, le funzioni $F(x) = -\cos x + c$ sono tutte primitive di $f(x) = \operatorname{sen} x$ su $\mathbb{R}$ e ci aspettiamo che *ogni* primitiva di $\operatorname{sen} x$ sia di quella forma. Questo in generale è falso.

Esempio 7.1.2 La funzione $f(x) = 1/x$ ha primitiva $F(x) = \log |x|$ su tutto il suo dominio naturale $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo poi che anche la funzione $G : A \to \mathbb{R}$ definita da $G(x) = \log x$ se $x > 0$ e $G(x) = 1 + \log(-x)$ se $x < 0$ è primitiva di f su A, ma non esiste nessuna costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = \log |x| + c$ per ogni $x \in A$.

Il motivo è che nell'esempio precedente l'insieme A non è un intervallo e dunque se una funzione ha derivata nulla su A non possiamo concludere che sia costante su A. Infatti abbiamo:

Proposizione 7.1.3 *Sia f una funzione definita su un intervallo I. Se una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è primitiva di f, allora ogni altra primitiva di f su I è della forma $F(x) + c$, dove $c \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione: Se $G : I \to \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f, risulta $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Ma allora per la proposizione 6.5.5 la funzione $G - F$ è costante sull'intervallo I, i.e. $G(x) - F(x) = c$ per ogni $x \in I$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 7.1.4 Grazie al *teorema fondamentale del calcolo*, teorema 7.5.9, dedurremo che l'esistenza di primitive è garantita dalla continuità della funzione $f : I \to \mathbb{R}$. Vediamo ora che una funzione non continua può non avere primitive. Posto infatti $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$, allora una eventuale primitiva F di f su $\mathbb{R}$ deve essere tale che $F'(x) = 1$ su entrambe le semirette $]0, +\infty[$ e $]-\infty, 0[$, dunque esistono due costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $F(x) = x + c_1$ se $x > 0$ e $F(x) = x + c_2$ se $x < 0$. Dovendo essere derivabile anche in $x_0 = 0$, allora F deve essere continua e dunque $c_1 = c_2 = c$. Ma la funzione $F(x) = x + c$ ha derivata 1 in $x_0 = 0$, mentre $f(0) = 0$.

Integrale indefinito

Definizione 7.1.5 Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo, chiamiamo *integrale indefinito* la famiglia di tutte le primitive di f su I e denotiamo tale famiglia con il simbolo

$$\int f(x)\, dx\,.$$

Quindi, nota una primitiva F di f su I, sappiamo che $\displaystyle\int f(x)\, dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ e con un abuso di notazione (come per gli "o piccoli") scriveremo per brevità:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c\,.$$

Ad esempio sappiamo che $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c\,.$

Poiché inoltre l'operatore di derivata è lineare, con un abuso di notazione scriveremo per ogni $f, g \in C^0(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\,, \qquad \int \lambda\, f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx$$

dove la somma e il prodotto per una costante vanno intesi nel senso di famiglie di funzioni.

Ad esempio scriviamo: $\displaystyle\int \big(2 \operatorname{sen} x - 3\mathrm{e}^x\big)\, dx = 2 \int \operatorname{sen} x\, dx - 3 \int \mathrm{e}^x\, dx = -2\cos x - 3\mathrm{e}^x + c\,.$

Esempio 7.1.6 Conoscendo le derivate delle funzioni fondamentali $f(x)$, otteniamo immediatamente le corrispondenti famiglie di primitive. Per ogni $k \neq 0$:

$$\begin{array}{lll}
f(x) = x^n & F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c\,, & n \in \mathbb{N} \\
f(x) = x^\alpha & F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \alpha \neq -1\,, x > 0 \\
f(x) = \mathrm{e}^{kx} & F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{k} + c & \\
f(x) = \operatorname{sen}(kx) & F(x) = -\dfrac{\cos(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \cos(kx) & F(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \operatorname{senh}(kx) & F(x) = \dfrac{\cosh(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \cosh(kx) & F(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \dfrac{k}{x} & F(x) = k \log|x| + c\,, & x > 0 \text{ oppure } x < 0 \\
f(x) = \dfrac{1}{1+k^2x^2} & F(x) = \dfrac{\arctan(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} & F(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(kx)}{k} + c\,, & x \in]-1/k, 1/k[\,.
\end{array}$$

Osservazione 7.1.7 Quindi per linearità si ottengono le primitive delle funzioni che sono combinazioni lineari di quelle scritte sopra, ad esempio le primitive di un polinomio di grado tre

$$\int (4x^3 - 7x^2 + 3x + 2)\ dx = 4 \int x^3\ dx - 7 \int x^2\ dx + 3 \int x\ dx + 2 \int 1\ dx = x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$$

sono polinomi di grado 4 che differiscono tra loro per una costante additiva $c \in \mathbb{R}$.

Osservazione 7.1.8 Usando ancora la formula della derivata della composizione si possono dedurre facilmente le primitive di altre funzioni. Ad esempio, se $\varphi(x) = 1 + x^2$ abbiamo $\varphi'(x) = 2x$ e dunque

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\ dx = \log(1 + x^2) + c\,.$$

Infatti per ogni funzione φ di classe C^1 sappiamo che $D \log|\varphi(x)| = \varphi'(x)/\varphi(x)$ in ogni punto $x \in \operatorname{dom}\varphi$ in cui $\varphi(x) \neq 0$.

7.2 Metodi di integrazione

Per integrazione si intende il calcolo esplicito dell'integrale indefinito, ossia delle primitive di una funzione. Oltre alle proprietà di linearità, esistono due procedimenti importanti che fanno riferimento alla formula della derivata del prodotto e della composizione di funzioni: i metodi di *integrazione per parti* e *per sostituzione*.

Formula di integrazione per parti

Siano f e g due funzioni definite su un intervallo I, con f continua e g di classe C^1. Sia inoltre F una primitiva di f su I. Derivando il prodotto $F \cdot g$ otteniamo

$$(F \cdot g)'(x) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x) \qquad \forall\, x \in I$$

e dunque la funzione $F(x)g(x)$ è una primitiva di $f(x)g(x)+F(x)g'(x)$ e possiamo scrivere

$$\int \big(f(x)g(x)+F(x)g'(x)\big)\,dx = F(x)g(x)+c\,.$$

Usando la proprietà di linearità dell'integrale indefinito rispetto alla somma, e "portando a secondo membro" il secondo integrale ottenuto, deduciamo allora:

Teorema 7.2.1 *Se $f\in C^0(I)$ e $g\in C^1(I)$ allora*

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su I.

Esempio 7.2.2 Calcoliamo le primitive di $x\cos x$. Poniamo $f(x)=\cos x$, che viene quindi detto *fattore integrante*, e $g(x)=x$, che viene quindi detto *fattore differenziale*. Poiché $F(x)=\operatorname{sen} x$ è una primitiva di $\cos x$, mentre $g'(x)\equiv 1$, scriviamo

$$\int x\cos x\,dx = (\operatorname{sen} x)\cdot x - \int (\operatorname{sen} x)\cdot 1\,dx = x\operatorname{sen} x - (-\cos x + c) = x\operatorname{sen} x + \cos x + c$$

dove conveniamo che $c\in\mathbb{R}$ è una qualsiasi costante additiva reale.

Formula di integrazione per sostituzione

Nell'osservazione 7.1.8 abbiamo visto che se $\varphi(x)=1+x^2$ la funzione $2x/(1+x^2)$ ha come primitiva la funzione $\log(1+x^2)$. Infatti abbiamo scritto $2x/(1+x^2)=\varphi'(x)/\varphi(x)$ con $\varphi(x)=1+x^2$. La formula di integrazione per sostituzione parte da un'estensione di questo esempio, i.e. dalla formula della derivata di una composizione di funzioni.

Teorema 7.2.3 *Siano I e J due intervalli di numeri reali, $f: I\to\mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi: J\to I$ una funzione di classe C^1. Allora indicando con $F: I\to\mathbb{R}$ una primitiva di f su J risulta*

$$\int (f\circ\varphi)(x)\,\varphi'(x)\,dx = (F\circ\varphi)(x)+c\,,\qquad x\in J\,.$$

Dimostrazione: La funzione $F\circ\varphi: J\to\mathbb{R}$ è di classe C^1, essendo composizione di funzioni di classe C^1. Per ogni $x\in J$ calcoliamo

$$(F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = (f\circ\varphi)(x)\,\varphi'(x)$$

essendo $F'(t)=f(t)$ per ogni $t\in I$. La tesi segue dunque dalla definizione di integrale indefinito. □

Se ora cambiamo variabile $t=\varphi(x)$, dove φ viene detta funzione di transizione, la formula precedente si riscrive come

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(t)+c\,,\qquad t=\varphi(x)\in I\,,\quad x\in J$$

ma sappiamo che $\int f(t)\;dt = F(t)+c$ se $t\in I$, dunque riscriviamo la *formula di integrazione per sostituzione* come:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\;dt \qquad \text{con}\quad t=\varphi(x) \tag{7.1}$$

dove abbiamo sottinteso gli intervalli di variazione $t\in I$ e $x\in J$.

Esempio 7.2.4 Troviamo le primitive di $\mathsf{e}^x\cos(\mathsf{e}^x)$ su $\mathbb{R}$.

Posto $f(t)=\cos t$ e $\varphi(x)=\mathsf{e}^x$, abbiamo $f(\varphi(x))=\cos(\mathsf{e}^x)$ e $\varphi'(x)=\mathsf{e}^x$ per ogni x, dunque $\mathsf{e}^x\cos(\mathsf{e}^x)=(f\circ\varphi)(x)\,\varphi'(x)$ e scriviamo per sostituzione

$$\int \mathsf{e}^x\cos(\mathsf{e}^x)\,dx = \int \cos t\;dt \qquad \text{con}\quad t=\mathsf{e}^x\,.$$

Poiché $\int\cos t\;dt = \operatorname{sen} t + c$, risostituendo $t=\mathsf{e}^x$ otteniamo che

$$\int \mathsf{e}^x\cos(\mathsf{e}^x)\,dx = \operatorname{sen}(\mathsf{e}^x)+c\,.$$

Osservazione 7.2.5 Nella formula (7.1), osserviamo che se $t = \varphi(x)$ allora con le notazioni di Leibniz

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\,\varphi(x) = \varphi'(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad dt = \varphi'(x)\; dx$$

dove la formula a destra è nota come *uguaglianza tra i differenziali.* Infatti con $t = \varphi(x)$ nell'integrale a primo membro della (7.1) scriviamo $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) = f(t)$ e $\varphi'(x)\; dx = dt$, ottenendo l'integrale a secondo membro. Nell'esempio precedente abbiamo infatti $\cos(\mathsf{e}^x) = \cos t$ per $t = \mathsf{e}^x$ e dunque

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d\mathsf{e}^x}{dx} = \mathsf{e}^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad dt = \mathsf{e}^x\; dx\,.$$

Sostituzioni implicite

Ci sono funzioni per la quali il calcolo delle primitive avviene mediante una *sostituzione implicita.*

Esempio 7.2.6 Per trovare le primitive di $\mathsf{e}^{\sqrt{x}}$ su $[0, +\infty[$, osserviamo che se poniamo $t = \sqrt{x}$, la funzione di transizione $t = \varphi(x)$ è biunivoca da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$ e la sua inversa è $x = \psi(t) = t^2$, la cui derivata è $\psi'(t) = 2t$ per ogni $t \geq 0$. Quindi con le notazioni di Leibniz scriviamo l'uguaglianza tra i differenziali

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\psi(t) = \psi'(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad dx = \psi'(t)\; dt$$

e nel nostro esempio $x = t^2 \iff dx = 2t\; dt$. Sostituendo abbiamo quindi

$$\int \mathsf{e}^{\sqrt{x}}\; dx = \int \mathsf{e}^t 2t\; dt \qquad \text{con} \quad t = \sqrt{x}\ .$$

Poiché inoltre integrando per parti

$$\int \mathsf{e}^t 2t\; dt = 2\mathsf{e}^t t - 2\int \mathsf{e}^t\; dt = 2\mathsf{e}^t(t-1) + c$$

risostituendo $t = \sqrt{x}$ otteniamo:

$$\int \mathsf{e}^{\sqrt{x}}\; dx = 2\mathsf{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c\ .$$

In generale, se $\varphi : J \to I$ è di classe C^1 e biunivoca, l'inversa $\psi = \varphi^{-1} : I \to J$ è anch'essa di classe C^1 e otteniamo per ogni funzione continua $f : J \to \mathbb{R}$

$$\int f(x)\; dx = \int f(\psi(t))\,\psi'(t)\; dt \qquad \text{con} \quad x = \psi(t)\ \text{ e }\ dx = \psi'(t)\; dt\ . \tag{7.2}$$

Un problema di Cauchy

Risolviamo il problema di Cauchy

$$y'(x) = \frac{\log(1 + \mathsf{e}^x)}{1 + \mathsf{e}^{-x}} \qquad \text{e} \qquad y(0) = 0\,.$$

Dobbiamo trovare l'unica funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 0$ e $f'(x) = \dfrac{\log(1 + \mathsf{e}^x)}{1 + \mathsf{e}^{-x}}$. Per cercare le primitive di $\log(1 + \mathsf{e}^x)/(1 + \mathsf{e}^{-x})$, posto $t = \mathsf{e}^x$ abbiamo $x = \log t$ e $dx = (1/t)\; dt$ da cui, sostituendo,

$$\int \frac{\log(1 + \mathsf{e}^x)}{1 + \mathsf{e}^{-x}}\; dx = \int \frac{\log(1 + t)}{1 + t^{-1}} \cdot \frac{1}{t}\; dt = \int \frac{\log(1 + t)}{1 + t}\; dt = \frac{1}{2}\log^2(1 + t) + c\ ,$$

con $t = \mathsf{e}^x$. Quindi risostituendo abbiamo che una generica primitiva è $f(x) = \dfrac{1}{2}\log^2(1 + \mathsf{e}^x) + c$. Imponendo la condizione $f(0) = 0$ abbiamo $(1/2)\log^2 2 + c = 0 \iff c = -(1/2)\log^2 2$ e dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2}\big(\log^2(1 + \mathsf{e}^x) - \log^2 2\big)\ .$$

7.3 L'integrale definito

Il problema dell'area

Se Ω è un sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ abbastanza regolare, vogliamo mostrare come è possibile dare una buona definizione di area di Ω. Se Ω è un triangolo o un rettangolo sappiamo come calcolarne l'area. Quindi per un insieme generico Ω, se supponiamo che sia limitato, allora esiste un numero $M > 0$ (intero) tale che $\Omega \subset [-M, M]^2 := [-M, M] \times [-M, M]$. Per ogni fissato $n \in \mathbb{N}^+$, dividiamo il quadrato $[-M, M]^2$ in $(2Mn)^2$ quadratini di lato $1/n$. Chiamiamo poi $P_n^-(\Omega)$ l'unione dei quadratini di lato $1/n$ che sono contenuti in Ω e $P_n^+(\Omega)$ l'unione dei quadratini di lato $1/n$ che contengono elementi di Ω. Ovviamente $P_n^-(\Omega) \subset A \subset P_n^+(\Omega)$ per ogni n e denotando con $|P_n^\pm(\Omega)|$ l'area di $P_n^\pm(\Omega)$ (che è la somma delle aree dei quadratini di $P_n^\pm(\Omega)$) allora $|P_n^-(\Omega)| \leq |P_n^+(\Omega)|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo poi che se ogni quadratino di lato $1/n$ viene suddiviso in 4 quadratini di lato $1/(2n)$, allora ovviamente si deduce che $P_n^-(\Omega) \subset P_{2n}^-(\Omega)$ e $P_n^+(\Omega) \supset P_{2n}^+(\Omega)$, dunque otteniamo che $|P_n^-(\Omega)| \leq |P_{2n}^-(\Omega)| \leq |P_{2n}^+(\Omega)| \leq |P_{2n}^+(\Omega)|$. Quindi facendo un "raffinamento" della quadrettatura, la stima per difetto tende a crescere e la stima per eccesso a decrescere. Si può allora definire come migliore stima per difetto dell'area di Ω il numero

$$\mathbf{A}^-(\Omega) := \lim_{n\to\infty} |P_n^-(\Omega)| = \sup_n |P_n^-(\Omega)|$$

mentre la miglior stima per eccesso è data dal numero

$$\mathbf{A}^+(\Omega) := \lim_{n\to\infty} |P_n^+(\Omega)| = \inf_n |P_n^+(\Omega)| \,.$$

Poiché inoltre per ogni n risulta $|P_n^-(\Omega)| \leq |P_n^+(\Omega)|$, allora ovviamente

$$\mathbf{A}^-(\Omega) \leq \mathbf{A}^+(\Omega) \,.$$

Ora, se l'insieme Ω è abbastanza regolare (l'unione di triangoli o di parti di dischi, ad esempio), accade che $\mathbf{A}^-(\Omega) = \mathbf{A}^+(\Omega)$ e tale numero rappresenta l'area $\mathbf{A}(\Omega)$ di Ω. Questo è essenzialmente il metodo di esaustione di Eudosso per il calcolo dell'area di figure piane. Con tale approccio ci si accorge che se l'insieme Ω contiene delle parti "filiformi" (o di "dimensione" più piccola di due) allora queste parti non sono rilevanti per la nozione di area. Inoltre, anche la frontiera di Ω è irrilevante per il calcolo dell'area, se è sufficientemente regolare.

Osservazione 7.3.1 D'altra parte esistono degli insiemi $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitati che non sono "misurabili" nel senso precedente, i.e. tali che $\mathbf{A}^-(\Omega) \leq \mathbf{A}^+(\Omega)$. Se ad esempio consideriamo $\Omega = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times [0, 1]$, con $M = 1$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $P_n^-(\Omega) = \emptyset$ e $P_n^+(\Omega) = [0, 1]^2$, dato che ogni quadratino della suddivisione n-esima contiene sia punti con ascissa razionale che punti con ascissa irrazionale. Ma allora facilmente otteniamo che $\mathbf{A}^-(\Omega) = 0$ mentre $\mathbf{A}^+(\Omega) = 1$, quindi tale insieme si dice non misurabile.

In conclusione, una buona nozione di area (ad esempio la *misura di Peano-Jordan*) deve verificare le seguenti proprietà:

i) l'area $\mathbf{A}(\Omega)$ è ben definita per insiemi Ω limitati abbastanza regolari (detti insiemi *misurabili*);

ii) se Ω è un triangolo o un rettangolo, l'area $\mathbf{A}(\Omega)$ coincide con l'area elementare $|\Omega|$, mentre se Ω ha "dimensione" più piccola di due, allora $\mathbf{A}(\Omega) = 0$;

iii) l'area è invariante rispetto a moti rigidi del piano: se Ω è misurabile e $\widetilde{\Omega}$ è ottenuto da Ω mediante una traslazione, rotazione o riflessione, allora anche $\widetilde{\Omega}$ è misurabile e $\mathbf{A}(\widetilde{\Omega}) = \mathbf{A}(\Omega)$;

iv) l'area è monotona rispetto l'inclusione: se $\Omega_1 \subset \Omega_2$ sono due insiemi del piano limitati e misurabili, allora $\mathbf{A}(\Omega_1) \leq \mathbf{A}(\Omega_2)$;

v) l'unione disgiunta $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ di insiemi misurabili è ancora misurabile e $\mathbf{A}(\Omega) = \mathbf{A}(\Omega_1) + \mathbf{A}(\Omega_2)$.

Verso la nozione di area di sottografici

Nel seguito della teoria considereremo sempre funzioni reali $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitate e definite su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato.

Se f è non negativa, il *sottografico* di f è dato dall'insieme

$$\Gamma(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \le x \le b \ \mathbf{e} \ 0 \le y \le f(x)\}\,.$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è limitato e abbastanza regolare, si vede facilmente che Ω si suddivide nell'unione e differenza di un numero finito di parti del piano che sono *sottografici* di funzioni come sopra.

Ad esempio, se Ω è un cerchio di raggio $r > 0$, fissatone il centro (a meno di una traslazione) nel punto $(0,r)$, si può vedere Ω (a meno del suo bordo) come la differenza insiemistica $\Gamma(f^+) \setminus \Gamma(f^-)$ tra i sottografici delle due funzioni $f^\pm : [-r,r] \to \mathbb{R}$ definite da $f^\pm(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

Quindi in generale il problema dell'area di insiemi limitati del piano si riconduce al problema dell'*area del sottografico* di funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo chiuso e limitato che sono continue e non negative. Infine per un sottografico $\Gamma(f)$ come sopra, invece di fare una quadrettatura del piano, visto che due dei lati del bordo di $\Gamma(f)$ sono verticali, al fine di trovare figure regolari approssimanti è sufficiente suddividere l'intervallo $[a,b]$ in un numero finito di intervalli e suddividere poi il sottografico di f in "strisce" mediante le rette verticali passanti per i punti di tale suddivisione.

Definizione 7.3.2 Chiamiamo *suddivisione* di $[a,b]$ ogni insieme finito e ordinato di punti di $[a,b]$

$$\mathcal{A} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n \mid a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}\ .$$

Denotiamo poi con $\mathcal{D}[a,b]$ la famiglia di tali suddivisioni. Per ogni suddivisione $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]$ in seguito indicheremo

$$I_i := [x_{i-1}, x_i]\,, \qquad (\delta x)_i := (x_i - x_{i-1}) \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n\,.$$

per rendere la notazione più agevole. Le quantità

$$S^-(f,\mathcal{A}) := \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \cdot \inf_{I_i} f\,, \qquad S^+(f,\mathcal{A}) := \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \cdot \sup_{I_i} f$$

sono dette rispettivamente *somma inferiore e superiore di f rispetto alla suddivisione* $\mathcal{A}$. Chiamiamo infine

$$S^-(f) = \sup\{S^-(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]\} \qquad S^+(f) = \inf\{S^+(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]\}$$

rispettivamente *somma integrale inferiore e superiore* (secondo Riemann) *di f su* $[a,b]$.

Osservazione 7.3.3 Se f è non negativa, allora $S^\pm(f,\mathcal{A})$ è uguale all'area elementare $|P^\pm(f,\mathcal{A})|$ del *plurirettangolo* dato da:

$$P^-(f,\mathcal{A}) := \bigcup_{i=1}^n I_i \times [0, \inf_{I_i} f]\,, \qquad P^+(f,\mathcal{A}) := \bigcup_{i=1}^n I_i \times [0, \sup_{I_i} f]$$

e osserviamo che $P^-(f,\mathcal{A}) \subset \Gamma(f) \subset P^+(f,\mathcal{A})$ per ogni $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]$. Quindi la somma integrale inferiore e superiore $S^\pm(f)$ sono le migliori misure per difetto e per eccesso che possiamo ottenere al fine di calcolare, se possibile, l'*area* del sottografico di f.

Raffinamenti

Date due suddivisioni $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a,b]$, diciamo che $\mathcal{B}$ è un *raffinamento* di $\mathcal{A}$ se risulta che $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Vediamo ora che un raffinamento migliora le stime per difetto e per eccesso.

Proposizione 7.3.4 *Se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a,b]$ sono tali che $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, allora*

$$S^-(f,\mathcal{A}) \le S^-(f,\mathcal{B})\,, \qquad S^+(f,\mathcal{B}) \le S^+(f,\mathcal{A})\,.$$

Dimostrazione: Infatti scelto un punto c tale che $x_{i-1} < c < x_i$, risulta

$$(\delta x)_i \cdot \inf_{I_i} f \le (c - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1},c]} f + (x_i - c) \cdot \inf_{[c,x_i]} f$$
$$(\delta x)_i \cdot \sup_{I_i} f \ge (c - x_{i-1}) \cdot \sup_{[x_{i-1},c]} f + (x_i - c) \cdot \sup_{[c,x_i]} f\,.$$

Quindi la tesi è vera se $\mathcal{B}$ contiene un solo punto c oltre a quelli di $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{B}$ contiene n punti in più oltre a quelli di $\mathcal{A}$, l'asserto segue per induzione ripetendo l'argomento precedente. □

Osservazione 7.3.5 Date due suddivisioni $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{D}[a,b]$, un *raffinamento comune* ad entrambe è dato ad esempio dalla suddivisione individuata dai punti $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Quindi risulta

$$\forall\,\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{D}[a,b]\,,\quad S^-(f,\mathcal{A})\le S^-(f,\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\le S^+(f,\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\le S^+(f,\mathcal{B})\,. \tag{7.3}$$

In particolare, per definizione di estremo superiore abbiamo che $S^-(f)\le S^+(f,\mathcal{B})$ per ogni $\mathcal{B}\in\mathcal{D}[a,b]$ e dunque, per definizione di estremo inferiore,

$$-\infty<S^-(f)\le S^+(f)<+\infty\,.$$

Osservazione 7.3.6 In generale può accadere che $S^-(f)<S^+(f)$. Se ad esempio $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ è la funzione di Dirichlet definita da

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0 & \text{se } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases} \tag{7.4}$$

allora risulta $S^-(f,\mathcal{A})=0$ e $S^+(f,\mathcal{A})=1$ per ogni $\mathcal{A}\in\mathcal{D}[0,1]$, in quanto ogni intervallo chiuso non degenere di numeri reali contiene sia razionali che irrazionali. Dunque $S^-(f)=0$ e $S^+(f)=1$. Si noti che il sottografico $\Gamma(f)$ della funzione di Dirichlet è uguale (a meno di un segmento orizzontale) al sottinsieme non misurabile Ω di $[0,1]^2$ dell'osservazione 7.3.1.

Funzioni integrabili secondo Riemann

Definizione 7.3.7 Una funzione limitata $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice *integrabile* (secondo Riemann) su $[a,b]$ se risulta $S^-(f)=S^+(f)$. In tal caso il valore comune $\mathbb{I}(f)$ ottenuto viene detto *integrale (definito) di f su* $[a,b]$ e si denota con il simbolo

$$\mathbb{I}(f)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Denotiamo poi con $\mathcal{R}(a,b)$ la classe delle funzioni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitate e integrabili (secondo Riemann).

Osservazione 7.3.8 Quindi la funzione di Dirichlet vista sopra non è integrabile. Inoltre, se f è non negativa e integrabile su $[a,b]$, dal momento che la somma integrale inferiore e superiore $S^\pm(f)$ danno le migliori stime per difetto e per eccesso del sottografico di f, allora definiamo *area del sottografico* di f

$$\mathbf{A}(\Gamma(f)):=\int_a^b f(x)\;dx\qquad\forall\,f\in\mathcal{R}(a,b)\,,\quad f\ge 0\,.$$

In generale, se $f\in\mathcal{R}(a,b)$ cambia segno, denotati

$$\Omega_f^+:=\{(x,y)\mid a\le x\le b\ \textbf{e}\ 0\le y\le f(x)\}\,,\qquad \Omega_f^-:=\{(x,y)\mid a\le x\le b\ \textbf{e}\ f(x)\le y\le 0\} \tag{7.5}$$

allora l'integrale rappresenta la somma dell'area di Ω_f^+ con l'opposto dell'area di Ω_f^-, i.e.

$$\mathbb{I}(f)=\int_a^b f(x)\,dx=\mathbf{A}(\Omega_f^+)-\mathbf{A}(\Omega_f^-)\,.$$

Ci aspettiamo poi che una sufficiente regolarità di una funzione f garantisca la sua integrabilità. Vediamo quindi prima un importante criterio. Denotiamo per ogni suddivisione $\mathcal{A}\in\mathcal{D}[a,b]$ come sopra

$$\Delta S(f,\mathcal{A}):=S^+(f,\mathcal{A})-S^-(f,\mathcal{A})=\sum_{i=1}^n(\delta x)_i\cdot\operatorname{osc}(f,I_i)\,,$$

dove $\operatorname{osc}(f,I_i)$ denota l'*oscillazione* di f sull'intervallo I_i, i.e.

$$\operatorname{osc}(f,I_i):=\Big(\sup_{I_i}f-\inf_{I_i}f\Big)\,.$$

Teorema 7.3.9 *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è una funzione limitata, allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

i) $f\in\mathcal{R}(a,b)$

ii) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a,b]$ *tali che* $S^+(f,\mathcal{B}) - S^-(f,\mathcal{A}) < \varepsilon$

iii) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{D}[a,b]$ *tale che* $\Delta S(f,\widetilde{\mathcal{A}}) < \varepsilon$.

Dimostrazione: Per definizione di sup e inf, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a,b]$ tali che $S^-(f,\mathcal{A}) > S^-(f) - \varepsilon/2$ e $S^+(f,\mathcal{B}) < S^+(f) + \varepsilon/2$. Se vale i), allora $S^-(f) = S^+(f)$ e dunque

$$S^+(f,\mathcal{B}) - S^-(f,\mathcal{A}) < S^+(f) + \frac{\varepsilon}{2} - S^-(f) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e dunque vale la ii). Se vale la ii), posto $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ dalla (7.3) otteniamo che

$$\Delta S(f,\widetilde{\mathcal{A}}) = S^+(f,\widetilde{\mathcal{A}}) - S^-(f,\widetilde{\mathcal{A}}) \leq S^+(f,\mathcal{B}) - S^-(f,\mathcal{A}) < \varepsilon$$

e dunque vale la iii). Se invece vale la iii), allora in corrispondenza di $\varepsilon = 1/n$ troviamo $\mathcal{A}_n \in \mathcal{D}[a,b]$ tale che $\Delta S(f,\mathcal{A}_n) < 1/n$ e dunque

$$S^+(f) \leq S^+(f,\mathcal{A}_n) \text{ e } S^-(f) \geq S^-(f,\mathcal{A}_n) \quad \Longrightarrow \quad S^+(f) - S^-(f) \leq \Delta S(f,\mathcal{A}_n) \leq \frac{1}{n}$$

e dunque, per la proprietà di Archimede, $S^+(f) - S^-(f) \leq 0$. Essendo sempre $S^+(f) - S^-(f) \geq 0$, ne segue che $S^+(f) = S^-(f)$ e dunque vale la i). □

Integrabilità delle funzioni continue

Vediamo ora che le funzioni continue sono integrabili.

Teorema 7.3.10 *Ogni funzione continua su* $[a,b]$ *è anche integrabile.*

Dimostrazione: Per il teorema 5.3.11 di Weierstrass sappiamo che f è limitata ed inoltre, per ogni suddivisione $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]$ e per ogni intervallo chiuso I_i della suddivisione risulta

$$\inf_{I_i} f = \min_{I_i} f\,, \quad \sup_{I_i} f = \max_{I_i} f\,, \quad \operatorname{osc}(f, I_i) = \max_{I_i} f - \min_{I_i} f\,.$$

Poiché inoltre per il teorema 5.5.9 di Heine-Cantor f è anche uniformemente continua, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che se I_i è un intervallo di ampiezza minore di δ, allora $\operatorname{osc}(f, I_i) < \varepsilon/(b-a)$. Scelta quindi una suddivisione $\mathcal{A}$ tale che ogni intervallino I_i della suddivisione abbia ampiezza minore di $\delta = \delta(\varepsilon)$, allora risulta

$$\Delta(f,\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \cdot \operatorname{osc}(f, I_i) < \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n (\delta x)_i = \varepsilon\,.$$

Per il criterio 7.3.9 concludiamo che $f \in \mathcal{R}(a,b)$. □

Integrabilità delle funzioni monotone

Vediamo ora che le anche le funzioni monotone e limitate sono integrabili.

Teorema 7.3.11 *Ogni funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monotona e limitata è integrabile.*

Dimostrazione: Supponiamo f debolmente crescente e limitata. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo una suddivisione $\mathcal{A}_n \in \mathcal{D}[a,b]$ in n intervalli I_i di uguale ampiezza $(\delta x)_i = (b-a)/n$. Questa è ovviamente ottenuta ponendo

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\, i \qquad i = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{7.6}$$

Poiché f è crescente, per ogni intervallo I_i risulta

$$\inf_{I_i} f = f(x_{i-1})\,, \qquad \sup_{I_i} f = f(x_i)\,, \qquad \operatorname{osc}(f, I_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

per cui otteniamo

$$\Delta S(f, \mathcal{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(b) - f(a)\big) .$$

Per l'arbitrarietà di n, essendo $0 \le f(b) - f(a) < \infty$, la tesi segue ancora grazie al criterio 7.3.9 di integrabilità. □

Il metodo di esaustione di Eudosso rivisitato

L'argomento alla base della dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni monotone è lo stesso usato da Eudosso per il calcolo di aree. Supponiamo infatti di voler calcolare l'area della parte di piano Ω compresa tra l'asse delle ascisse, il grafico della funzione $f(x) = x^2$ e due rette verticali di equazione $x = a$ e $x = b$, con $0 < a < b < \infty$. L'insieme Ω è dunque il sottografico della funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di legge $f(x) = x^2$. Se sappiamo calcolare l'area del sottografico di x^2 tra le rette $x = 0$ e $x = b$, che risulterà uguale a $b^3/3$, per differenza otteniamo che l'area di Ω è uguale a $(b^3 - a^3)/3$. In termini di integrali, otteniamo quindi:

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3} .$$

Posto infatti $a = 0$ e definiti x_i come in (7.6), risulta $f(x_i) = (b/n)^2 i^2$ e dunque

$$S^+(x^2_{|[0,b]}, \mathcal{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot \frac{b^2 i^2}{n^2} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ,$$

dove abbiamo usato che la somma dei quadrati dei numeri interi da 1 ad n vale $n(n + 1)(2n + 1)/6$. Passando al limite in n otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} S^+(x^2_{|[0,b]}, \mathcal{A}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{3} .$$

In maniera analoga si mostra che anche la somma integrale inferiore $S^-(x^2_{|[0,b]}, \mathcal{A}_n) \to b^3/6$ se $n \to \infty$. Quindi concludiamo che

$$\int_0^b x^2\ dx = \frac{b^3}{3} .$$

Funzioni a gradini

Ci aspettiamo che né la continuità né la monotonia siano condizioni necessarie per l'integrabilità.

Esempio 7.3.12 Infatti, se consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione a gradini $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = a_i$ per ogni $x \in [i - 1, i[$ e $i = 1, \dots, n$, allora è evidente che f è integrabile e

$$\mathbb{I}(f) = \int_0^n f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Funzioni generalmente continue

Nell'esempio precedente non abbiamo specificato il valore della funzione a gradini nel punto $x_0 = n$. Infatti in generale si ha:

Proposizione 7.3.13 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e continua nell'intervallo $]a, b]$. Allora $f \in \mathcal{R}(a, b)$ e l'integrale $\mathbb{I}(f)$ di f su $[a, b]$* non dipende *dal valore $f(a)$.*

Dimostrazione: Nella dimostrazione non scriveremo esplicitamente la restrizione di f ad un intervallo contenuto in $[a, b]$. Per ipotesi esiste $M > 1$ tale che $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in [a, b]$. Fissato $\varepsilon > 0$ e posto $\delta = \min\{\varepsilon/(4M), (b-a)/M\}$, poiché $f \in C^0([a+\delta, b])$ allora $f \in \mathcal{R}(a+\delta, b)$ per il teorema 7.3.10. Quindi per il teorema 7.3.9 esiste $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a+\delta, b]$ tale che $\Delta(f, \mathcal{A}) < \varepsilon/2$. Ora l'insieme di punti $\widetilde{\mathcal{A}} = \{a\} \cup \mathcal{A}$ è una suddivisione di $[a, b]$ per la quale risulta che

$$\Delta(f, \widetilde{\mathcal{A}}) = \Delta(f, \mathcal{A}) + \delta \cdot \mathrm{osc}(f, [a, a+\delta]) , \qquad \mathrm{osc}(f, [a, a+\delta]) := \sup_{[a,a+\delta]} f - \inf_{[a,a+\delta]} f .$$

Ma dalla limitatezza di f sappiamo che l'oscillazione $\mathrm{osc}(f, [a, a+\delta]) \le 2M$ e dunque deduciamo che

$$\Delta(f, \widetilde{\mathcal{A}}) \le \Delta(f, \mathcal{A}) + \delta \cdot 2M < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

essendo $\delta \cdot 2M < \varepsilon/2$. Dunque $f \in \mathcal{R}(a, b)$, per il teorema 7.3.9.

Proviamo ora che l'integrale $\mathbb{I}(f)$ non dipende dal valore $f(a)$. Infatti se $\widetilde{f}$ è ottenuta da f cambiando il valore nel punto $x_0 = a$, scelto $M > 1$ in modo tale che sia anche $|\widetilde{f}(a)| < M$, con le notazioni precedenti abbiamo ovviamente che

$$S^+(f, \mathcal{A}) = S^+(\widetilde{f}, \mathcal{A}) , \qquad S^-(f, \mathcal{A}) = S^-(\widetilde{f}, \mathcal{A})$$

mentre anche l'oscillazione $\mathrm{osc}(\widetilde{f}, [a, a+\delta]) \le 2M < \varepsilon/2$ e dunque non solo $\Delta S(f, \widetilde{A}) < \varepsilon$ ma anche $\Delta S(\widetilde{f}, \widetilde{A}) < \varepsilon$. Da ciò si deduce facilmente che $|\mathbb{I}(f) - S^+(f, \widetilde{\mathcal{A}})| < \varepsilon$ e $|\mathbb{I}(\widetilde{f}) - S^+(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{A}})| < \varepsilon$. Inoltre per la funzione differenza otteniamo che $\mathrm{osc}(\widetilde{f} - f, [a, a+\delta]) < 4M$, essendo $f = \widetilde{f}$ su $]a, b]$, e dunque

$$|S^+(f, \widetilde{\mathcal{A}}) - S^+(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{A}})| < \delta \cdot 4M \le \varepsilon .$$

Ma allora stimiamo

$$|\mathbb{I}(f) - \mathbb{I}(\widetilde{f})| \le |\mathbb{I}(f) - S^+(f, \widetilde{A})| + |S^+(f, \widetilde{A}) - S^+(\widetilde{f}, \widetilde{A})| + |\mathbb{I}(\widetilde{f}) - S^+(\widetilde{f}, \widetilde{A})| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

e l'uguaglianza $\mathbb{I}(f) = \mathbb{I}(\widetilde{f})$ segue dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

Osservazione 7.3.14 Nella dimostrazione non abbiamo usato la continuità di f su $]a, b]$ ma l'ipotesi più generale che f sia *integrabile su* $[a', b]$ *per ogni* $a' > a$. Inoltre, la proposizione precedente vale ancora se il punto di discontinuità è $x_0 = b$ oppure un punto x_0 interno ad $[a, b]$. Otteniamo quindi una vasta classe di funzione integrabili.

Definizione 7.3.15 Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice *generalmente continua* se f è limitata e continua su tutto $[a, b]$ tranne al più un numero finito di punti.

Infatti, iterando l'argomento precedente, otteniamo immediatamente:

Corollario 7.3.16 *Ogni funzione generalmente continua su* $[a, b]$ *è anche integrabile su* $[a, b]$ *ed il valore dell'integrale* $\mathbb{I}(f)$ *non dipende dal valore di* f *nei punti di discontinuità o negli estremi di* $[a, b]$.

Osservazione 7.3.17 Data una funzione limitata su $[a, b]$, ci possiamo chiedere "quanti" punti di discontinuità può avere affinché risulti integrabile. La risposta a tale domanda è stata ottenuta dal matematico modenese G. Vitali che ha dimostrato che se D denota l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione limitata f su $[a, b]$, allora $f \in \mathcal{R}(a, b)$ se e solo se l'insieme D ha misura nulla $\mathcal{L}^1(D) = 0$ rispetto alla *misura di Lebesgue* $\mathcal{L}^1$. Questo accade se D è finito o anche numerabile, ad esempio $D = \mathbb{Q} \cap [a, b]$. Si noti che l'insieme dei punti di discontinuità della funzione di Dirichlet definita in (7.4) è $D = [0, 1]$ e dunque $\mathcal{L}^1(D) = 1$.

7.4 Proprietà delle funzioni integrabili

La prima proprietà, che non dimostreremo in dettaglio, segue facilmente dalla permamenza del segno, grazie ad un argomento per assurdo.

Proposizione 7.4.1 *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è continua e non negativa, con* $a < b$*, allora* $\mathbb{I}(f) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

Dimostrazione: Infatti se esistesse $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) > 0$, allora troveremmo un intervallo centrato in x_0 in cui $f > 0$. Ma allora si dedurrebbe che $S^-(f) > 0$, il che è assurdo. □

Osservazione 7.4.2 La tesi è falsa se f cambia segno: si prenda ad esempio la funzione continua $f(x) = x$ su un intervallo simmetrico $[-a, a]$ con $a > 0$. Ricordiamo infatti dalla notazione (7.5) che

$$\int_{-a}^{a} x\,dx = \mathbf{A}(\Omega_f^+) - \mathbf{A}(\Omega_f^-)\,,$$

dove Ω_f^+ è il triangolo di vertici $(0, 0), (a, 0), (0, a)$, di area $a^2/2$, mentre Ω_f^- è un triangolo equivalente ad Ω_f^+, dunque $\mathbb{I}(f) = 0$ anche se f non è la funzione identicamente nulla.

Linearità dell'integrale

L'insieme $\mathcal{R}(a, b)$ è uno *spazio vettoriale* su $\mathbb{R}$ e l'operatore $f \mapsto \mathbb{I}(f)$ è *lineare* su $\mathcal{R}(a, b)$.

Teorema 7.4.3 *Se $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$, allora $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$ e $\lambda f \in \mathcal{R}(a, b)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, inoltre risulta*

$$\mathbb{I}(f + g) = \mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g)\,, \qquad \mathbb{I}(\lambda f) = \lambda\, \mathbb{I}(f)\,.$$

Dimostrazione: Consideriamo prima la somma. Per ogni suddivisione $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{D}[a, b]$ risulta

$$S^-(f, \widetilde{\mathcal{A}}) + S^-(g, \widetilde{\mathcal{A}}) \le S^-(f + g, \widetilde{\mathcal{A}}) \le S^+(f + g, \widetilde{\mathcal{A}}) \le S^+(f, \widetilde{\mathcal{A}}) + S^+(g, \widetilde{\mathcal{A}})\,.$$

Basta infatti ricordare, proposizione 3.3.5, che per ogni intervallo I_i individuato dalla suddivisione

$$\inf_{I_i} f + \inf_{I_i} g \le \inf_{I_i}(f + g) \le \sup_{I_i}(f + g) \le \sup_{I_i} f + \sup_{I_i} g\,.$$

Quindi prese due suddivisioni $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a, b]$, e indicato con $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ il raffinamento comune, dalla formula (7.3), applicata sia ad f che a g, deduciamo che

$$S^-(f, \mathcal{A}) + S^-(g, \mathcal{A}) \le S^-(f + g, \widetilde{\mathcal{A}}) \qquad \mathbf{e} \qquad S^+(f + g, \widetilde{\mathcal{A}}) \le S^+(f, \mathcal{B}) + S^+(g, \mathcal{B})$$

Essendo $S^-(f + g, \widetilde{\mathcal{A}}) \le S^-(f + g)$ e $S^+(f + g) \le S^+(f + g, \widetilde{\mathcal{A}})$, per definizione di integrale inferiore e superiore otteniamo che

$$S^-(f) + S^-(g) \le S^-(f + g) \qquad \mathbf{e} \qquad S^+(f + g) \le S^+(f) + S^+(g)$$

da cui, essendo $S^\pm(f) = \mathbb{I}(f)$ e $S^\pm(g) = \mathbb{I}(g)$, otteniamo che

$$S^+(f + g) \le \mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g) \le S^-(f + g)\,.$$

Essendo ovviamente $S^-(f + g) \le S^+(f + g)$, abbiamo ottenuto che $f + g$ è integrabile e che

$$\mathbb{I}(f + g) \le \mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g) \le \mathbb{I}(f + g)$$

che dà l'uguaglianza richiesta.

Per quanto riguarda l'integrabilità di λf, se $\lambda > 0$ abbiamo

$$S^-(\lambda f, \mathcal{A}) = \lambda\, S^-(f, \mathcal{A}) \qquad \mathbf{e} \qquad S^+(\lambda f, \mathcal{A}) = \lambda\, S^+(f, \mathcal{A}) \qquad \forall\, \mathcal{A} \in \mathcal{D}[a, b]$$

essendo $\sup_I(\lambda f) = \lambda \sup_I f$ e $\inf_I(\lambda f) = \lambda \inf_I f$. Invece se $\lambda < 0$ otteniamo

$$S^-(\lambda f, \mathcal{A}) = \lambda\, S^+(f, \mathcal{A}) \qquad \mathbf{e} \qquad S^+(\lambda f, \mathcal{A}) = \lambda\, S^-(f, \mathcal{A}) \qquad \forall\, \mathcal{A} \in \mathcal{D}[a, b]$$

essendo $\sup_I(\lambda f) = \lambda \inf_I f$ e $\inf_I(\lambda f) = \lambda \sup_I f$, cf. la proposizione 3.3.5. Quindi abbiamo

$$S^+(\lambda f) = \lambda\, S^+(f) \qquad \mathbf{e} \qquad S^-(\lambda f) = \lambda\, S^-(f)$$

se $\lambda > 0$, mentre se $\lambda < 0$ otteniamo

$$S^+(\lambda f) = \lambda\, S^-(f) \qquad \mathbf{e} \qquad S^-(\lambda f) = \lambda\, S^+(f)\,.$$

In ogni caso, essendo $S^+(f) = S^+(f) = \mathbb{I}(f)$, deduciamo che $S^-(\lambda f) = S^+(\lambda f)$, dunque λf è integrabile, e $\mathbb{I}(\lambda f) = \lambda\, \mathbb{I}(f)$, come volevamo dimostrare. $\square$

Teorema di confronto

In maniera ovvia si dimostra:

Teorema 7.4.4 *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni limitate tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $S^-(f) \leq S^-(g)$ e $S^+(f) \leq S^+(g)$. In particolare, se $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ allora $\mathbb{I}(f) \leq \mathbb{I}(g)$.*

Integrale e valore assoluto

Introduciamo ora le funzioni parte positiva f^+ e parte negativa f^- definite per ogni $x \in [a, b]$ da $f^\pm(x) := \max\{\pm f(x), 0\}$. Quindi $f^\pm = \Phi^\pm \circ f$, dove $\Phi^\pm$ è la funzione continua definita da

$$\Phi^+(y) := \begin{cases} y & \text{se} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y \leq 0 \end{cases} \qquad \Phi^-(y) := \begin{cases} -y & \text{se} \quad y \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y \geq 0 \,. \end{cases}$$

Quindi ovviamente $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$, mentre $0 \leq f^\pm \leq f$.

Teorema 7.4.5 *Se $f \in \mathcal{R}(a, b)$, allora anche $f^+, f^-, |f| \in \mathcal{R}(a, b)$. Inoltre risulta*

$$\Big| \int_a^b f(x)\, dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \,.$$

Dimostrazione: La dimostrazione della prima parte è un po' tecnica e non la faremo. Osserviamo solo che se f è in particolare generalmente continua, allora lo sono anche f^+, f^- e $|f|$, che dunque sono integrabili. Sapendo allora che $f^+, f^-, |f| \in \mathcal{R}(a, b)$, per i teoremi 7.4.3 e 7.4.4 di linearità e di confronto, essendo $-|f| \leq f \leq |f|$, risulta

$$-\mathbb{I}(|f|) = \mathbb{I}(-|f|) \leq \mathbb{I}(f) \leq \mathbb{I}(|f|) \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\mathbb{I}(f)| \leq \mathbb{I}(|f|) \,,$$

come volevamo dimostrare. □

Osservazione 7.4.6 Il viceversa è falso: *la funzione $|g|$ può essere integrabile anche se non lo è g.* Ad esempio, se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è la funzione di Dirichlet data dalla formula (7.4), la funzione $g := f - 1/2$ non è integrabile su $[0, 1]$, perchè altrimenti lo sarebbe anche $f = g + 1/2$, per il teorema 7.4.3. Ma la funzione $|g|$ vale costantemente $1/2$, dunque $|g|$ è integrabile su $[0, 1]$.

Il teorema di spezzamento

Teorema 7.4.7 *Se $f \in \mathcal{R}(a, b)$ e $c \in]a, b[$, allora f è integrabile su $[a, c]$ e su $[b, c]$ e risulta*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \,. \tag{7.7}$$

Viceversa, se f è integrabile su $[a, c]$ e su $[b, c]$, allora $f \in \mathcal{R}(a, b)$ e vale la formula di spezzamento (7.7).

Dimostrazione: Se $f \in \mathcal{R}(a, b)$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a, b]$ tale che $\Delta S(f, \mathcal{A}) < \varepsilon$. Posto $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{c\}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cap [a, c]$ e $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \cap [c, b]$, otteniamo che $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono suddivisioni di $[a, c]$ e di $[c, b]$, rispettivamente. Ma allora per la proposizione 7.3.4 risulta

$$S^-(f, \mathcal{A}) \leq S^-(f, \mathcal{B}) = S^-(f, \mathcal{B}_1) + S^-(f, \mathcal{B}_2) \leq S^+(f, \mathcal{B}_1) + S^+(f, \mathcal{B}_2) = S^+(f, \mathcal{B}) \leq S^+(f, \mathcal{A}) \,. \tag{7.8}$$

Quindi, usando che $-\infty < a \leq b \leq c \leq d < +\infty \Rightarrow (c - b) \leq (d - a)$, possiamo scrivere che

$$\big[S^+(f, \mathcal{B}_1) + S^+(f, \mathcal{B}_2)\big] - \big[S^-(f, \mathcal{B}_1) + S^-(f, \mathcal{B}_2)\big] \leq S^+(f, \mathcal{A}) - S^-(f, \mathcal{A})$$

che è equivalente a scrivere

$$\Delta S(f, \mathcal{B}_1) + \Delta S(f, \mathcal{B}_2) \leq \Delta S(f, \mathcal{A}) < \varepsilon \,.$$

Essendo gli addendi a primo membro non negativi, otteniamo che $\Delta S(f, \mathcal{B}_1) < \varepsilon$ e $\Delta S(f, \mathcal{B}_2) < \varepsilon$, dunque $f \in \mathcal{R}(a, c)$ e $f \in \mathcal{R}(c, b)$. Ma allora dalla (7.8) otteniamo che per ogni $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a, b]$

$$S^-(f, \mathcal{A}) \leq S^-(f, \mathcal{B}_1) + S^-(f, \mathcal{B}_2) \leq \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \leq S^+(f, \mathcal{B}_1) + S^+(f, \mathcal{B}_2) \leq S^+(f, \mathcal{A}) \,.$$

Prendendo l'estremo superiore ed inferiore rispetto ad $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]$ al primo ed ultimo membro dell'ultima catena di diseguagilanze, rispettivamente, deduciamo che

$$S^-(f) \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leq S^+(f)$$

e dunque la formula (7.7), essendo $S^-(f) = S^+(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Viceversa, se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e $f \in \mathcal{R}(a,b)$, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{D}[a,c]$ e $\mathcal{B}_2 \in \mathcal{D}[c,b]$ tali che $\Delta S(f,\mathcal{B}_1) < \varepsilon/2$ e $\Delta S(f,\mathcal{B}_2) < \varepsilon/2$. Posto allora $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \cup B_2$, risulta $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]$ ed anche $S^\pm(f,\mathcal{A}) = S^\pm(f,\mathcal{B}_1) + S^\pm(f,\mathcal{B}_2)$, per cui $\Delta S(f,\mathcal{A}) = \Delta S(f,\mathcal{B}_1) + \Delta S(f,\mathcal{B}_2) < \varepsilon$ e dunque $f \in \mathcal{R}(a,b)$. La formula di spezzamento (7.7) si ottiene poi come sopra. □

Il teorema della media integrale

Definizione 7.4.8 Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$, chiamiamo *media integrale* di f su $[a,b]$ il numero $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\,.$

Osservazione 7.4.9 Se $f : [0,n] \to \mathbb{R}$ è una funzione a gradini come nell'esempio 7.3.12, essendo $(b-a) = n$ allora la media integrale è uguale alla media aritmetica $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$. Se invece f è non negativa, allora la media integrale è uguale all'altezza h di un rettangolo di base lunga $(b-a)$ e la cui area è uguale all'area del sottografico di f.

Esempio 7.4.10 In *teoria dei segnali*, un segnale è descritto da una funzione generalmente continua dipendente dalla variabile tempo, $t \mapsto x(t)$. La media temporale nell' intervallo $[t_1,t_2]$ è la media integrale

$$\langle x(t)\rangle_{[t_1,t_2]} := \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\;dt\,, \qquad t_1 < t_2$$

e la *media temporale dell'impulso* è data, qualora esista, dal limite

$$\langle x(t)\rangle := \lim_{T\to+\infty}\langle x(t)\rangle_{[-T/2,T/2]} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt\,.$$

Se il segnale è periodico di periodo T_0, ad esempio, $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - t_0)$, dove $\omega > 0$ e $T_0 = 2\pi/\omega$, allora la media temporale è uguale alla media su un intervallo di ampiezza T_0, i.e. $\langle x(t)\rangle = \langle x(t)\rangle_{[-T_0/2,T_0/2]}$.

Teorema 7.4.11 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata ed integrabile. Allora*

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f\,.$$

Se in particolare f è anche continua su $[a,b]$, allora esiste $z \in [a,b]$ tale che

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione: Posti $l = \inf_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$ e $L = \sup_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$, allora $l \leq f(x) \leq L$ per ogni $x \in [a,b]$ e dunque, per il teorema 7.4.4 di confronto, e per linearità,

$$l\cdot(b-a) = \int_a^b l\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b L\,dx = L\cdot(b-a)$$

e dunque la prima diseguaglianza segue dividendo per la quantità positiva $(b-a) > 0$. Se in particolare $f \in C^0([a,b])$, per il teorema 5.3.5 dei valori intermedi sappiamo che l'immagine di f è uguale all'intervallo chiuso $[l,L]$. Detta $h \in \mathbb{R}$ la media integrale, poiché sappiamo che $h \in [l,L]$, allora $h = f(z)$ per qualche $z \in [a,b]$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 7.4.12 La seconda parte del *teorema della media integrale* è falsa in generale se f non è continua su tutto $[a,b]$. Infatti, se $f : [0,n[\to \mathbb{R}$ è una funzione a gradini, l'immagine di f è l'insieme $\{a_1,\ldots,a_n\}$ e in generale la media aritmetica (che coincide con la media integrale) non è uguale a nessuno dei numeri a_i.

7.5 Verso il teorema fondamentale del calcolo

In questa sezione considereremo funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ che siano *localmente integrabili su* I, i.e. tali che per ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$ la restrizione della funzione ad $[a, b]$ è integrabile. Questo accade se ad esempio f è continua su I oppure se è limitata e con un numero finito di punti di discontinuità su I o anche se f è monotona e limitata su I.

Integrazione su intervalli non orientati

Per una funzione f come sopra, vogliamo definire l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ per ogni scelta di $a, b \in I$, i.e. anche se $a \geq b$. Allora basta porre per ogni $a, b, c \in I$, con $a \neq b$,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,, \qquad \int_c^c f(x)\,dx = 0\,, \tag{7.9}$$

dove nella prima formula uno dei due integrali (il secondo se $a < b$ e il primo se $a > b$) è già stato definito.

Proposizione 7.5.1 *Valgono le seguenti proprietà per ogni $a, b, c \in I$:*

i) LINEARITÀ: $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda\, f(x) + \mu\, g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$ *per ogni* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

ii) CONFRONTO: *se $f \leq g$ nell'intervallo chiuso di estremi a e b, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \quad \textit{se } a \leq b \qquad \textbf{e} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx \quad \textit{se } a \geq b\,;$$

iii) CONTINUITÀ: $\displaystyle\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \Big|\int_a^b |f(x)|\,dx\Big|$;

iv) ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO: $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$;

v) TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE: *se $a \neq b$, allora la media integrale* $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ *è compresa tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f sull'intervallo chiuso di estremi a e b; se poi f è continua allora esiste un punto $z \in I$ compreso tra a e b tale che*

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione: Le prime tre proprietà sono un'ovvia conseguenza dei teoremi già visti, alla luce della definizione (7.9). Proviamo la formula di additività rispetto al dominio. Se $a < c < b$ non è altro che la formula di spezzamento (7.7). Supponiamo ora che $b < c < a$. In tal caso infatti abbiamo

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \qquad \textbf{e} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

e l'additività rispetto al dominio segue applicando la (7.7) con $b < c < a$ invece di $a < c < b$, che si scrive: $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$, moltiplicando per -1. Gli altri casi si provano in maniera analoga. Infine, poiché per $a > b$ abbiamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

allora il teorema 7.4.11 della media integrale vale ancora nella forma scritta sopra. □

La funzione integrale

Definizione 7.5.2 Se $f : I \to \mathbb{R}$ è localmente integrabile, la *funzione integrale* di f di punto iniziale $a \in I$ è la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in I\,.$$

Osservazione 7.5.3 Per quanto visto sopra, se f è localmente integrabile su I, l'intervallo chiuso di estremi a e x è contenuto in I e dunque l'integrale a secondo membro è ben definito per ogni $a, x \in I$. Abbiamo usato la lettera t dentro l'integrale non potendo usare x, che denota la variabile indipendente e dunque compare solo al secondo estremo di integrazione. Infatti per ogni $a, b \in I$ possiamo scrivere

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

essendo la variabile dentro l'integrale una lettera "muta".

Esempio 7.5.4 Se $f(t) = t^2$ e $a = 0$, allora abbiamo visto che per $x > 0$ risulta

$$F(x) = \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3}\,.$$

Poiché t^2 è pari, per $x < 0$ l'area del sottografico di f ristretta a $[x, 0]$ è uguale all'area del sottografico di f ristretta a $[0, -x]$ e dunque

$$\int_x^0 t^2\,dt = -\frac{x^3}{3} \qquad \forall\, x < 0$$

per cui deduciamo che $F(x) = x^3/3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 7.5.5 Nell'esempio precente abbiamo che la funzione integrale F è una primitiva di f, in quanto $F'(x) = D(x^3/3) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Vedremo nel teorema fondamentale del calcolo che questo accade ogni volta che f è continua, mentre è falso in generale se f non è continua.

Esempio 7.5.6 Se $f(t) = 1$ se $t > 0$ e $f(t) = 0$ se $t \le 0$, scelto $a = 0$ abbiamo $F(0) = 0$, $F(x) = x$ se $x > 0$ e $F(x) = 0$ se $x < 0$. Quindi F non è derivabile su $\mathbb{R}$. In particolare, F è continua su $\mathbb{R}$ ed è derivabile per $x_0 \neq 0$, dove $x_0 = 0$ è l'unico punto di discontinuità di f.

Proposizione 7.5.7 *Se f è localmente integrabile su I e F è la funzione integrale di punto iniziale $a \in I$, allora*

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt \qquad \forall\, x_0\,, x_1 \in I\,. \tag{7.10}$$

Dimostrazione: Scriviamo infatti

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt$$

dove abbiamo usato la definizione (7.9) e l'additività rispetto al dominio, che generalizza la formula di spezzamento (7.7). □

Il prossimo corollario motiva (almeno in parte) il nome "continuità" dato alla proprietà iii) della proposizione 7.5.1.

Corollario 7.5.8 *Se in particolare f è limitata su I, allora la funzione integrale F è lipschitziana su I con costante di Lipschitz $L := \sup_I |f|$.*

Dimostrazione: Scelti infatti due punti $x_0 < x_1$ in I, risulta

$$|F(x_1) - F(x_0)| = \Big|\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt\Big| \le \int_{x_0}^{x_1} |f(t)|\,dt \le \int_{x_0}^{x_1} L\,dt = L \cdot (x_1 - x_0) = L \cdot |x_1 - x_0|\,,$$

dove abbiamo usato la diseguaglianza del teorema 7.4.5. Poiché per $x_1 < x_0$ risulta $|F(x_1) - F(x_0)| = |F(x_0) - F(x_1)|$ e $|x_1 - x_0| = |x_0 - x_1|$, la tesi segue dalla definizione (5.11) di funzione lipschitziana. □

Il teorema fondamentale del calcolo

Grazie a questo risultato fondamentale, mediante la teoria dell'integrazione si risolve il problema di esistenza delle primitive.

Teorema 7.5.9 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e $F : I \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di punto iniziale $a \in I$, cf. definizione* 7.5.2. *Allora F è una primitiva di f su I, i.e. F è derivabile su I e $F'(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in I$.*

Dimostrazione: Fissato $x_0 \in I$, per ogni $x \in I$ con $x \neq x_0$, dalla formula (7.10), con $x_1 = x$, deduciamo che la funzione rapporto incrementale di F centrata in x_0 e calcolata in x verifica l'uguaglianza

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

quindi coincide con la media integrale di f sull'intervallo di estremi x_0 e x. Poiché f è continua in tale intervallo, essendo continua su tutto l'intervallo I, allora per la forma generale del teorema della media integrale, cf. la parte v) della proposizione 7.5.1, esiste un punto $z(x)$ compreso tra x_0 ed x tale che

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = f(z(x))\,.$$

Poiché $|z(x) - x_0| \leq |x - x_0|$, allora per il teorema di confronto sui limiti deduciamo che $z(x) \to x_0$ se $x \to x_0$. Usando ancora la continuità di f in x_0, otteniamo che $f(z(x)) \to f(x_0)$ se $x \to x_0$. In definitiva abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \lim_{x \to x_0} f(z(x)) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

e dunque esiste $F'(x_0) = f(x_0)$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 7.5.10 Concludiamo osservando che mediante la funzione integrale si definiscono funzioni *non elementari*. Questo accade tutte le volte che troviamo funzioni continue le cui primitive non sono ricavate a partire dalle funzioni elementari mediante somme, prodotti, quozienti o composizioni. Esempi sono le seguenti funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt\,, \quad x \mapsto \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt\,, \quad x \mapsto \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt$$

e quelle che si ottengono da queste integrando per parti o per sostituzione, cf. esempio 7.7.6.

7.6 Conseguenze del teorema fondamentale del calcolo

Il teorema di Torricelli

Come prima conseguenza, deduciamo che il calcolo degli integrali di funzioni continue si riconduce al problema del calcolo di primitive.

Teorema 7.6.1 *Sia f una funzione continua su I e sia $G : I \to \mathbb{R}$ una qualsiasi primitiva di f su I. Allora per ogni $\alpha, \beta \in I$ risulta*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = G(\beta) - G(\alpha) =: [G(x)]_\alpha^\beta\,.$$

Dimostrazione: Detta F la funzione integrale definita in 7.5.2, per il teorema 7.5.9 anche F è una primitiva di f su I. Ma allora dalla proposizione 7.1.3 sappiamo che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in I$. Quindi per ogni $\alpha, \beta \in I$ otteniamo che

$$G(\beta) - G(\alpha) = \big(F(\beta) + c\big) - \big(F(\alpha) + c\big) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx\,,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà (7.10) con $x_1 = \beta$ e $x_0 = \alpha$. □

Esempio 7.6.2 Calcoliamo $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{2}{4+x^2}\,dx$. Poiché $D\arctan(x/2) = 2/(4+x^2)$, allora

$$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{2}{4+x^2}\,dx = \Big[\arctan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big]_2^{2\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\,.$$

Formula di integrazione per parti

Dal teorema 7.2.1 e grazie al teorema 7.6.1 di Torricelli, otteniamo immediatamente

Corollario 7.6.3 *Se $f \in C^0(I)$ e $g \in C^1(I)$ allora per ogni $\alpha, \beta \in I$ risulta*

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx = \big[F(x)g(x)\big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)\,dx$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su I e $\big[F(x)g(x)\big]_\alpha^\beta := F(\beta)g(\beta) - F(\alpha)g(\alpha)$.

Formula di integrazione per sostituzione

Dal teorema 7.2.3 otteniamo invece:

Corollario 7.6.4 *Siano I e J due intervalli di numeri reali, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi : J \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Allora risulta per ogni $\alpha, \beta \in J$*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt\,.$$

Dimostrazione: Infatti il teorema 7.2.3 afferma che se G è una primitiva di f su I, allora $(G \circ \varphi)(x)$ è una primitiva di $(f \circ \varphi)(x)\,\varphi'(x)$ su J. Quindi per il teorema 7.6.1 di Torricelli scriviamo

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \Big[(G\circ\varphi)(x)\Big]_\alpha^\beta = (G\circ\varphi)(\beta) - (G\circ\varphi)(\alpha) = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha))\,.$$

Ma ancora per il teorema 7.6.1 sappiamo che

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha))$$

da cui segue l'asserto. □

Esempio 7.6.5 Calcoliamo $\displaystyle\int_4^{16} \frac{1}{x\log x}\,dx$. Posto $t = \varphi(x) = \log x$, poiché $\varphi'(x) = 1/x$, per sostituzione abbiamo $\varphi(4) = \log 4$ e $\varphi(16) = \log 16$ e dunque

$$\begin{aligned}\int_4^{16} \frac{1}{x\log x}\,dx &= \int_{\log 4}^{\log 16} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\log t\Big]_{\log 4}^{\log 16} = \log(\log 16) - \log(\log 4)\\ &= \log(\log(2^4)) - \log(\log(2^2)) = \log(4\log 2) - \log(2\log 2) = \log\Big(\frac{4\log 2}{2\log 2}\Big) = \log 2\,.\end{aligned}$$

In alternativa, dalla formula per sostituzione sugli integrali indefiniti abbiamo che per $x \in]0,+\infty[$

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log t + c = \log(\log x) + c$$

e dunque deduciamo che $\log(\log x)$ è una primitiva di $1/(x\log x)$ su $]1,+\infty[$, per cui scriviamo direttamente

$$\int_4^{16} \frac{1}{x\log x}\,dx = \Big[\log(\log x)\Big]_4^{16} = \log(\log 16) - \log(\log 4) = \log 2\,.$$

Esempio 7.6.6 Calcoliamo $\displaystyle\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx$. Per $x > -1$, posto $\sqrt{1+x} = t \iff 1+x = t^2 \iff x = t^2 - 1$, abbiamo $dx = 2t\,dt$. Inoltre ($x = 3 \iff t = 2$) e ($x = 8 \iff t = 3$) da cui, sostituendo,

$$\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx = \int_2^3 t\cdot 2t\,dt = \Big[\frac{2}{3}t^3\Big]_2^3 = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}\,.$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto come sopra notando che $(2/3)(1+x)^{3/2}$ è una primitiva di $\sqrt{1+x}$.

Integrali di funzioni simmetriche

La seguente osservazione è utile per semplificare i calcoli.

Proposizione 7.6.7 *Sia $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Se f è dispari si ha*

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \textit{e dunque} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,,$$

mentre se f è pari risulta

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \textit{e dunque} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione: Cambiando variabile $t = -x$ scriviamo

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-1)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt\,.$$

Se f è dispari risulta $f(-t) = -f(t)$ per ogni t e dunque

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

mentre se f è pari risulta $f(-t) = f(t)$ per ogni t e dunque

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

da cui segue l'asserto, per l'additività dell'integrale rispetto al dominio. □

Un calcolo di area

Dopo avere disegnato l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le 1 - \sqrt{2|x| - x^2}\}\ ,$$

ne calcoliamo l'area.

Osserviamo che se $(x, y) \in A$ allora $-1 \le x \le 1$. Inoltre A è l'insieme ottenuto per estensione simmetrica rispetto all'asse delle ordinate dell'unione degli insiemi B e C dati da

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\ ,\ \ x^2-1 \le y \le 0\}\,, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\ ,\ \ 0 \le y \le 1-\sqrt{2x - x^2}\}\,.$$

Quindi l'area di A è il doppio della somma delle aree di B e C. Osserviamo inoltre che l'area di B è uguale all'area dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 - x^2\}$$

ottenuto da B mediante una riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Poiché dunque D è il sottografico della funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che manda $x \mapsto (1-x^2)$, mentre C è il sottografico della funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che manda $x \mapsto (1 - \sqrt{2x - x^2})$, allora deduciamo che

$$\mathbf{A}(A) = 2(\mathbf{A}(B) + \mathbf{A}(C))\,, \quad \mathbf{A}(B) = \int_0^1 (1 - x^2)\ dx\,, \quad \mathbf{A}(C) = \int_0^1 (1 - \sqrt{2x - x^2})\ dx\ .$$

Calcoliamo quindi

$$\mathbf{A}(B) = \int_0^1 (1 - x^2)\ dx = \Big[x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ .$$

Riguardo poi il secondo integrale, dal momento che $2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2$, posto $(x - 1) = \operatorname{sen} t \iff t = \varphi(x) = \operatorname{arcsen}(x - 1)$, allora $\varphi : [0, 1] \to [-\pi/2, 0]$ è crescente, con $\varphi(0) = -\pi/2$ e $\varphi(1) = 0$. Inoltre

$\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = |\cos t| = \cos t$, in quanto $\cos t > 0$ se $t \in [-\pi/2, 0]$, ed infine $dx = \cos t\ dt$. Quindi otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(C) &= \int_0^1 (1 - \sqrt{2x - x^2})\ dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\ dx = 1 - \int_{-\pi/2}^0 \cos^2 t\ dt \\ &= 1 - \frac{1}{2}\Big[t + \operatorname{sen} t \cos t\Big]_{-\pi/2}^0 = 1 - \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2}\Big] = 1 - \frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

In conclusione abbiamo che

$$\mathbf{A}(A) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{10}{3} - \frac{\pi}{2}\ .$$

Osserviamo infine che l'area di C poteva essere ottenuta senza calcolare integrali, ma osservando che C è dato dai punti del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ che non stanno nel cerchio di centro $(1,1)$ e raggio 1.

7.7 La funzione integrale

Esempio 7.7.1 Studiamo la funzione integrale $F : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ , \qquad \text{dove} \qquad f(t) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \le t < 0 \\ -2t & \text{se} \quad 0 \le t \le 1 \\ 2t - 4 & \text{se} \quad 1 < t \le 2 \\ 1 & \text{se} \quad 2 < t < 3 \\ 1/2 & \text{se} \quad t = 3\ , \end{cases}$$

specificando in quali punti F non è continua o non è derivabile.

Poiché f è limitata, allora F è Lipschitziana con costante $L = \sup |f| = 2$ e quindi F è continua. Inoltre per il teorema fondamentale del calcolo sappiamo che F è sicuramente derivabile in tutti i punti in cui f è continua, e quindi su $[-1, 0[\cup]0, 2[\cup]2, 3[$. Abbiamo $F(0) = 0$. Inoltre se $x \in [-1, 0[$ risulta $F(x) = \int_0^x (-1)\, dt = -x$, mentre se $x \in]0, 1]$ risulta $F(x) = \int_0^x (-2t)\, dt = -x^2$. In particolare $F(1) = -1$. Se invece $x \in]1, 2]$, allora scriviamo

$$F(x) = F(1) + \int_1^x f(t)\, dt = -1 + \int_1^x (2t - 4)\, dt = -1 + \Big[t^2 - 4t\Big]_1^x = x^2 - 4x + 2\ .$$

In particolare risulta $F(2) = -2$. In modo analogo, se $x \in]2, 3[$ scriviamo

$$F(x) = F(2) + \int_2^x f(t)\, dt = -2 + \int_2^x 1\, dt = -2 + \Big[t\Big]_2^x = x - 4\ .$$

Infine, dal momento che il valore dell'integrale non dipende dal valore della funzione f in un punto, abbiamo che $F(3) = -1$ e che quindi F è derivabile anche nel punto 3. In conclusione risulta

$$F(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \\ -x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ x^2 - 4x + 2 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \\ x - 4 & \text{se} \quad 2 < x \le 3\ . \end{cases}$$

Derivate di funzioni integrali

Sia ora $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I e $\alpha, \beta : J \to I$ due funzioni di classe C^1 su J. Allora è ben definita la funzione $F : J \to \mathbb{R}$ data dalla legge

$$F(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt\ , \qquad x \in J\ .$$

Infatti l'intervallo di estremi $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ è contenuto in I per ogni $x \in J$. Inoltre, grazie al teorema 7.6.1 possiamo scrivere che $F(x) = G(\beta(x)) - G(\alpha(x))$ per ogni $x \in J$, dove $G : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su I. Ma allora derivando otteniamo che per ogni $x \in J$

$$F'(x) = (G \circ \beta)'(x) - (G \circ \alpha)'(x) = G'(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - G'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

e dunque possiamo scrivere

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x) \qquad \forall\, x\in J\,. \tag{7.11}$$

Esempio 7.7.2 Calcoliamo

$$\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2}\sqrt{1-t^2}\,dt = \sqrt{1-(x^2)^2}\,Dx^2 - \sqrt{1-(2x)^2}\,D(2x) = 2(x\sqrt{1-x^4}-\sqrt{1-4x^2})\,.$$

Regolarità di funzioni integrali

Sia $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x)=\int_0^x g(t)\,dt\,,$$

dove g è una funzione continua e limitata su $[-a,a]\setminus\{0\}$. Dimostriamo che:

a) f è continua in 0 e $f(0)=0$;

b) se g è pari [[dispari]] allora f è dispari [[pari]];

c) se $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni a valori in $[-a,a]$ e tali che $\big(b(x)-a(x)\big)\to 0$ per $x\to 0$, allora

$$\lim_{x\to 0}\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,dt = 0\,.$$

a) Poiché g è limitata, esiste $M>0$ tale che $|g(t)|<M$ per ogni $t\in[-a,a]\setminus\{0\}$. Dal momento che l'integrale non dipende dal valore della funzione g in un punto, poniamo $g(0)=0$. Quindi abbiamo $f(0)=\int_0^0 g(t)\;dt=0$ e per $x\neq 0$

$$0\le|f(x)|\le\int_0^{|x|}|g(t)|\;dt<\int_0^{|x|}M\;dt=M|x|\to 0$$

se $x\to 0$, per cui f è continua in 0.
b) Basta ragionare come nel corollario 7.6.3, con $a=x$. Infatti otteniamo che se g è pari allora $f(-x)=-f(x)$, i.e. f è dispari, mentre se g è dispari allora $f(-x)=f(x)$, i.e. f è pari.
c) Abbiamo

$$0\le\Big|\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,dt\Big|\le\Big|\int_{a(x)}^{b(x)}|g(t)|\,dt\Big|\le\Big|\int_{a(x)}^{b(x)} M\,dt\Big|\le M|b(x)-a(x)|$$

e quindi basta applicare il teorema del confronto.

Un limite con funzioni integrali

Indicata con f la funzione definita da $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-f(2x)}{x-f(x)}\,.$$

Poiché $|\operatorname{sen} t/t|<1$ per $t\neq 0$, allora per l'esempio precedente abbiamo che $f(x)\to 0$ per $x\to 0$. Da questo deduciamo che il limite ha una forma indeterminata $0/0$. Inoltre prendendo $M=1$ nel caso a) dell'esercizio precedente, deduciamo che $|f(x)|<|x|$ e quindi il denominatore è diverso da 0 per $x\neq 0$. Poiché $\operatorname{sen} t/t$ è continua, allora per il teorema fondamentale del calcolo f è derivabile per $x\neq 0$, con $f'(x)=\operatorname{sen} x/x$. Poiché infine $D\big(x-f(x)\big)=1-\operatorname{sen} x/x\neq 0$ se $x\neq 0$, allora sono verificate le ipotesi del teorema 6.6.1 di de l'Hôpital. Abbiamo quindi

$$\frac{D\big(2f(x)-f(2x)\big)}{D\big(x-f(x)\big)}=\frac{2f'(x)-f'(2x)\cdot 2}{1-f'(x)}=\frac{2(\operatorname{sen} x/x)-\big(\operatorname{sen}(2x)/2x\big)\cdot 2}{1-\operatorname{sen} x/x}\,.$$

Inoltre $\operatorname{sen} x/x = 1 - x^2/6 + o(x^2)$ e $\operatorname{sen}(2x)/x = 2 - 8x^2/6 + o(x^2)$ per cui

$$\frac{2(\operatorname{sen} x/x) - \big(\operatorname{sen}(2x)/2x\big) \cdot 2}{1 - \operatorname{sen} x/x} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2/6 + o(x^2)} \to 6$$

se $x \to 0$. In conclusione, per il teorema di de l'Hôpital il limite vale 6.

Sviluppi di Taylor di funzioni integrali

Risulta utile la seguente osservazione.

Proposizione 7.7.3 *Sia f una funzione continua su un intervallo I contenente l'origine e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ la sua funzione integrale con punto iniziale $a = 0$. Se $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ con $P_n(x)$ un polinomio di ordine $n \in \mathbb{N}$, allora risulta*

$$F(x) = \int_0^x P_n(t)\,dt + o(x^{n+1}) \qquad \forall\, x \in I\,.$$

Dimostrazione: Osserviamo che la funzione $g(x) = f(x) - P_n(x)$ è anch'essa continua su I, dunque integrabile vicino all'origine. In particolare, se $a > 0$ è tale che $[-a, a] \subset I$, allore g è anche limitata su $[-a, a]$. Ma allora la funzione $x \mapsto \int_0^x g(t)\,dt$ è derivabile su $[-a, a]$ e vale zero per $t = 0$. Allora per il teorema 6.6.1 di de L'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt}{x^{n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{D\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt}{Dx^{n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{(n+1)\,x^n} = 0\,,$$

essendo per ipotesi $g(x) = o(x^n)$, e dunque

$$F(x) - \int_0^x P_n(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt = o(x^{n+1})\,,$$

come volevamo dimostrare. □

Esempio 7.7.4 Determiniamo ordine e parte principale per $x \to 0$ dell'infinitesimo $\operatorname{sen} x - \displaystyle\int_0^x \mathsf{e}^{-t^2}\,dt$.

Abbiamo $\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + o(x^3)$. Poiché inoltre $\mathsf{e}^{-t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$, allora

$$\int_0^x \mathsf{e}^{-t^2}\,dt = \int_0^x \big(1 - t^2 + o(t^2)\big)\,dt = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\;.$$

In conclusione otteniamo

$$\operatorname{sen} x - \int_0^x \mathsf{e}^{-t^2}\,dt = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

e quindi l'ordine di infinitesimo è 3 e la parte principale $x^3/6$.

Esempio 7.7.5 Calcoliamo $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \displaystyle\int_0^x \big(\mathsf{e}^{-t^2} + \operatorname{sen}^2 t\big)\,dt}{x(x^2 - \operatorname{sen}^2 x)}$.

A denominatore abbiamo $\operatorname{sen}^2 x = \big(x - x^3/3! + o(x^3)\big)^2 = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$ e quindi $x(x^2 - \operatorname{sen}^2 x) = x\big(x^4/3 + o(x^4)\big) = x^5/3 + o(x^5)$. Inoltre a numeratore abbiamo $\mathsf{e}^{-t^2} + \operatorname{sen}^2 t = 1 - t^2 + t^4/2 + t^2 - t^4/3 + o(t^4) = 1 + t^4/6 + o(t^4)$ e quindi

$$x - \int_0^x \big(\mathsf{e}^{-t^2} + \operatorname{sen}^2 t\big)\,dt = x - \int_0^x \Big(1 + \frac{t^4}{6} + o(t^4)\Big)\,dt = x - x - \frac{x^5}{30} + o(x^5) = -\frac{x^5}{30} + o(x^5)\;,$$

per cui il limite si scrive come

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^5/30 + o(x^5)}{x^5/3 + o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1/30 + o(x^5)/x^5}{1/3 + o(x^5)/x^5} = -\frac{1}{10}\;.$$

Studio qualitativo di una funzione integrale non elementare

Esempio 7.7.6 Studiamo la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathsf{e}^{-t^2}\, dt$.

Ricordiamo che F non è una funzione elementare. Facciamo comunque uno studio qualitativo.

Poiché $f(t) = \mathsf{e}^{-t^2}$ è continua, allora f è integrabile nell'intervallo di estremi 0 ed x per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque F è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché la sua derivata è f, che è di classe $C^n(\mathbb{R})$ per ogni n, allora F è di classe C^∞. Inoltre la funzione F è dispari. Infatti f è pari e dunque, come nella proposizione 7.6.7, deduciamo che $F(-x) = -F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione F è strettamente crescente. Infatti per il teorema fondamentale del calcolo sappiamo che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma f è positiva su tutto $\mathbb{R}$. Poiché $F(0) = 0$, allora $F(x) > 0$ se $x > 0$ e $F(x) < 0$ se $x < 0$.

La funzione F è strettamente convessa su $[0, +\infty[$ e strettamente concava su $]-\infty, 0]$. Infatti $F''(x) = f'(x) = D(\mathsf{e}^{-x^2}) = \mathsf{e}^{-x^2} \cdot (-2x)$ e dunque $F''(x) < 0$ se $x > 0$ e $F''(x) > 0$ se $x < 0$. Il punto $x_0 = 0$ è un flesso a tangente obliqua; in particolare $F'(0) = f(0) = 1$ e dunque la tangente in $(0, 0)$ è la retta di equazione $y = x$. Dalla stretta convessità deduciamo poi che $F(x) < x$ se $x > 0$ e $F(x) > x$ se $x < 0$.

Essendo F crescente, allora esiste il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

ed è un numero reale positivo oppure è $+\infty$. Essendo dispari, inoltre, ponendo $z = -x$ abbiamo anche

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{z\to+\infty} F(-z) = \lim_{z\to+\infty} (-F(z)) = -L\,.$$

Il valore del limite L non si calcola con argomenti di Analisi matematica 1. Vediamo ora che mediante un argomento di confronto possiamo comunque concludere che $L \in \mathbb{R}$ e dare una maggiorazione di L. Fissato infatti $x > 1$, scriviamo mediante uno spezzamento

$$F(x) = \int_0^1 \mathsf{e}^{-t^2}\, dt + \int_1^x \mathsf{e}^{-t^2}\, dt\,.$$

Ora per $0 \le t \le 1$ risulta $0 < \mathsf{e}^{-t^2} \le 1$ e dunque, per il confronto, $\int_0^1 \mathsf{e}^{-t^2}\, dt \le 1$. Invece per $t \ge 1$ risulta $-t^2 \le -t$ e dunque $\mathsf{e}^{-t^2} \le \mathsf{e}^{-t}$. Quindi abbiamo

$$\int_1^x \mathsf{e}^{-t^2}\, dt \le \int_1^x \mathsf{e}^{-t}\, dt = \big[-\mathsf{e}^{-t}\big]_1^x = \mathsf{e}^{-1} - \mathsf{e}^{-x}\,.$$

In definitiva abbiamo ottenuto che $F(x) \le g(x) := 1 + \mathsf{e}^{-1} - \mathsf{e}^{-x}$ per ogni $x > 0$ e dal momento che $g(x) \to 1 + \mathsf{e}^{-1}$ per $x \to +\infty$, per il teorema del confronto deduciamo che il limite L è un numero reale positivo e non maggiore di $1 + \mathsf{e}^{-1}$. Quindi le rette di equazione $y = L$ e $y = -L$ sono asintoti orizzontali di $F(x)$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, rispettivamente. Infine, per la stretta monotonia concludiamo che $-L < F(x) < L$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque F ha immagine uguale a $]-L, L[$.

Osservazione 7.7.7 Con argomenti di Analisi Matematica 2 si calcola che $L = \sqrt{\pi}/2$.

7.8 Integrale generalizzato

La teoria dell'integrazione di Riemann tratta funzioni limitate e definite su intervalli $]a, b[$ limitati. Vediamo ora con alcuni esempi come si può generalizzare la nozione di integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ a funzioni (continue) definite su intervalli non limitati oppure che non sono limitate in prossimità degli estremi del dominio $]a, b[$ di integrazione.

Esempio 7.8.1 Nell'ultimo esempio 7.7.6 abbiamo visto che esiste ed è finito il limite

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M \mathsf{e}^{-x^2}\, dx = L \in \mathbb{R}\,.$$

Per ogni $M > 0$ l'integrale $\int_0^M \mathsf{e}^{-x^2}\, dx$ rappresenta l'area del sottografico Ω_M di e^{-x^2} compresa tra le rette $x = 0$ e $x = M$, i.e.

$$\int_0^M \mathsf{e}^{-x^2}\, dx = \mathbf{A}(\Omega_M)\,, \qquad \Omega_M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \le x \le M\,,\ 0 \le y \le \mathsf{e}^{-x^2}\}\,.$$

Da questo deduciamo che la parte di piano che sta nel primo quadrante sotto il grafico di e^{-x^2} è finita:

$$\mathbf{A}(\Omega) = L < \infty\,, \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \geq 0\,,\ 0 \leq y \leq \mathsf{e}^{-x^2}\}\,.$$

Questo dà senso alla notazione

$$\int_0^{+\infty} \mathsf{e}^{-x^2} = L \in \mathbb{R}\,.$$

Dalla simmetria della funzione e^{-x^2}, ponendo $t = -x$, in maniera analoga otteniamo:

$$\int_{-\infty}^0 \mathsf{e}^{-x^2}\,dx := \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^0 \mathsf{e}^{-x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \mathsf{e}^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \mathsf{e}^{-t^2}\,dt = L \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi, estendendo la proprietà di additività rispetto al dominio, scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{e}^{-x^2}\,dx := \int_{-\infty}^0 \mathsf{e}^{-x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \mathsf{e}^{-x^2}\,dx = L + L = \sqrt{\pi}\,.$$

Esempio 7.8.2 Se invece consideriamo una successione $\{a_i\}_i$ di numeri reali e la funzione a gradini $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = a_i$ per ogni $x \in [i-1, i[$ e $i \in \mathbb{N}$, sappiamo dall'esempio 7.3.12 che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\int_0^n f(x)\,dx = S_n := \sum_{i=1}^n a_i\,.$$

Allora deduciamo che esiste il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\,dx$ se e solo se la successione delle somme parziali ha limite S, cf. la definizione 8.1.1. In tal caso ha senso la notazione

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e dunque l'*integrale generalizzato* di f nella semiretta $[0,+\infty[$ è uguale alla somma S della serie. In particolare, l'integrale generalizzato di una funzione a gradini è finito se e solo se la serie $\sum_n a_n$ converge.

Esempio 7.8.3 Consideriamo ora la funzione $f(x) = 1/(1+x^2)$. Per ogni $M > 0$ risulta

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_0^M = \arctan M\,, \quad \int_{-M}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_{-M}^0 = \arctan M\,,$$

in quanto $\arctan(-M) = -\arctan M$ e $\arctan 0 = 0$, essendo arctan dispari e continua. Allora passando al limite per $M \to +\infty$, poiché $\arctan M \to \pi/2$, ha senso scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx := \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx := \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

ed infine, estendendo la proprietà di additività rispetto al dominio, anche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx := \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,.$$

Questo significa che l'area della parte di piano compresa tra l'asse delle ascisse ed il grafico della funzione $1/(1+x^2)$ è finita:

$$\mathbf{A}(\Omega) = \pi\,, \qquad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 1/(1+x^2)\}\,.$$

Esempio 7.8.4 Consideriamo ora la funzione $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x^\alpha$, dove l'esponente $\alpha \in \mathbb{R}$. Tale funzione è continua (e limitata) in ogni intervallo $[a,b]$ tale che $0 < a < b < +\infty$, ma se $\alpha > 0$ sappiamo che non è limitata vicino a zero, in quanto $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Quindi per dare senso all'integrale di f nella semiretta $]0,+\infty[$ è opportuno suddividere la semiretta nei due intervalli $]0,1]$ e $[1,+\infty[$ e trattarli separatamente. Ragionando come sopra, mostriamo ora che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \ \alpha>1 \\ +\infty & \text{se } \ \alpha\le 1 \end{cases} \qquad \textbf{e} \qquad \int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \ \alpha<1 \\ +\infty & \text{se } \ \alpha\ge 1\,. \end{cases}$$

Infatti, nel caso $\alpha\neq 1$ scriviamo per ogni $M>1$ e $0<\varepsilon<1$

$$\int_1^{M} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\big[x^{1-\alpha}\big]_1^M = \frac{1}{1-\alpha}\big[M^{1-\alpha}-1\big]\,, \qquad \int_\varepsilon^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\big[x^{1-\alpha}\big]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\big[1-\varepsilon^{1-\alpha}\big]\,.$$

Passando quindi al limite per $M\to+\infty$ scriviamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^{M} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\big[M^{1-\alpha}-1\big] = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \ \alpha>1 \\ +\infty & \text{se } \ \alpha<1 \end{cases}$$

mentre passando al limite per $\varepsilon\to 0^+$ scriviamo

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{1-\alpha}\big[1-\varepsilon^{1-\alpha}\big] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \ \alpha<1 \\ +\infty & \text{se } \ \alpha>1\,. \end{cases}$$

Se invece $\alpha=1$, otteniamo similmente

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^{M} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\big[\log x\big]_1^M = \lim_{M\to+\infty}\log M = +\infty$$

ed anche

$$\int_0^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\big[\log x\big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0^+}[-\log\varepsilon] = +\infty\,.$$

Osservazione 7.8.5 Il motivo per cui nell'esempio precedente si trattano separatamente le improprietà in $x_0=0$ e $x_0=+\infty$ è evidente se consideriamo ad esempio l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ della funzione $f(x)=x$. Se trattiamo separatamente le improprietà a $-\infty$ e $+\infty$, come sopra otteniamo ovviamente che

$$\int_0^{+\infty} x\,dx = +\infty \qquad \textbf{e} \qquad \int_{-\infty}^{0} x\,dx = -\infty\,.$$

Se invece calcolassimo il limite per $M\to+\infty$ dell'integrale di f nell'intervallo $[-M,M]$, poiché f è dispari sappiamo che $\int_{-M}^{M} x\,dx = 0$ per ogni $M>0$ e dunque otterremmo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} x\,dx = 0\,.$$

Ma allora non varrebbe più la proprietà di additività rispetto al dominio, che diventerebbe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{+\infty} x\,dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = -\infty+\infty\,.$$

Questo approccio definirebbe l'integrale generalizzato alla Cauchy, che non ci interessa perchè vogliamo conservare la proprietà di additività rispetto al dominio. Quindi, non avendo senso in $\overline{\mathbb{R}}$ la somma $-\infty+\infty$, in questo caso concludiamo che l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ *non ha senso.*

Esempio 7.8.6 Analogamente deduciamo che *non ha senso* l'integrale $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\tan x\,dx$. Infatti, usando ad esempio che $-\log(\cos x)$ è una primitiva di $\tan x$ su $]-\pi/2,\pi/2[$, abbiamo che

$$\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx = \lim_{M\to\pi/2^-}\int_0^{M} \tan x\,dx = \lim_{M\to\pi/2^-}\big[-\log(\cos x)\big]_0^M = \lim_{M\to\pi/2^-}[\log 1-\log(\cos M)] = +\infty$$

essendo $\cos M \to 0^+$ per $M \to \pi/2^-$, e analogamente, essendo $\tan x$ dispari,

$$\int_{-\pi/2}^{0} \tan x\, dx = \lim_{M\to\pi/2^-} \int_{-M}^{0} \tan x\, dx = -\lim_{M\to\pi/2^-} \int_{0}^{M} \tan x\, dx = -\infty\,.$$

Se non spezziamo l'integrale (seguendo l'approccio alla Cauchy) otteniamo che $\int_{-M}^{M} \tan x\, dx \to 0$ se $M \to \pi/2^-$, in quanto $\int_{-M}^{M} \tan x\, dx = 0$ per ogni $M \in]0, \pi/2[$, essendo $\tan x$ dispari. Ma allora l'additività rispetto al dominio darebbe ancora $0 = +\infty - \infty$, che non ha senso.

Esempio 7.8.7 Vediamo similmente che *non ha senso* definire l'integrale $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$. Infatti, usando che $1/x$ è dispari, otteniamo che

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx = +\infty \qquad \textbf{e} \qquad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\, dx = -\infty\,.$$

Quindi se facessimo la somma dei due integrali ottenuti avremmo ancora una forma indeterminata $+\infty - \infty$. Osserviamo ancora che se invece calcolassimo il limite per $\varepsilon \to 0^+$ della somma degli integrali di f negli intervalli $[-1, -\varepsilon]$ e $[\varepsilon, 1]$, dove $0 < \varepsilon < 1$, avremmo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx \Big) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \big(\big[\log|x|\big]_{-1}^{-\varepsilon} + \big[\log|x|\big]_{\varepsilon}^{1} \big) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\log\varepsilon - \log\varepsilon) = 0\,.$$

D'altronde, se applicassimo erroneamente (e senza controllare le ipotesi) il teorema di Torricelli, scriveremmo che $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = [\log|x|]_{-1}^{1} = 0$. Ma questo è falso perchè $\log|x|$ non è una primitiva di $1/x$ su $[-1, 1]$, comunque estendiamo la funzione $1/x$ in $x_0 = 0$.

Esempio 7.8.8 Può succedere che non abbia senso definire l'integrale sulla semiretta $[0, +\infty[$ anche nel caso di funzioni continue e limitate, come $f(x) = \cos x$. Infatti per ogni $M > 0$ risulta

$$\int_{0}^{M} \cos x\, dx = \big[\operatorname{sen} x\big]_{0}^{M} = \operatorname{sen} M$$

ma sappiamo che il limite di $\operatorname{sen} M$ per $M \to +\infty$ *non esiste.*

Definizioni

Motivati dagli esempi precedenti, procediamo come segue.

Definizione 7.8.9 Se $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua (non necessariamente limitata), dove b può essere anche $+\infty$, allora diremo che f *è integrabile in senso generalizzato*, o improprio, su $[a, b[$ se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{\beta\to b^-} \int_{a}^{\beta} f(x)\ dx\ ,$$

che in tal caso viene denotato $\int_a^b f(x)\ dx$. Se invece tale limite esiste ed è uguale a $+\infty$ [[a $-\infty$]] allora diremo che l' integrale *diverge positivamente* [[*negativamente*]], e scriveremo $\int_a^b f(x)\ dx = +\infty$ [[$-\infty$]]. Se infine tale limite non esiste, allora diremo che l' integrale $\int_a^b f(x)\ dx$ *non ha senso.*

Osservazione 7.8.10 Dalla definizione ricaviamo immediatamente che se esiste l'integrale generalizzato di f su $[a, b[$, allora esiste anche l'integrale generalizzato di λf su $[a, b[$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, se due funzioni f e g sono integrabili in senso generalizzato su $[a, b[$, allora lo sono anche $f + g$ e λf per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

In modo analogo, mediante il limite $\displaystyle\lim_{\alpha\to a^+} \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx$ si tratta il caso di funzioni continue $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, e non necessariamente limitate, dove a può essere anche $-\infty$.

Se invece l' improprietà dell' integrale di f si verifica in entrambi gli estremi di $]a, b[$, allora per conservare la proprietà di additività rispetto al dominio si usa la seguente

Definizione 7.8.11 Se f è continua su $]a,b[$ e $c \in]a,b[$ è un qualsiasi punto, allora diremo che f è integrabile (in senso generalizzato) su $]a,b[$ se essa è integrabile su $]a,c]$ e su $[c,b[$, nel senso generalizzato sopra descritto, ed in tal caso porremo

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ .$$

Se uno degli integrali $\int_a^c f(x)\ dx$ $\int_c^b f(x)\ dx$ è finito e l'altro diverge positivamente [[negativamente]], o se sono entrambi divergenti positivamente [[entrambi divergenti negativamente]], diremo che $\int_a^b f(x)\ dx$ diverge positivamente [[negativamente]]. In tutti gli altri casi, diremo che $\int_a^b f(x)\ dx$ non ha senso.

Osservazione 7.8.12 La definizione precedente non dipende dalla scelta del punto $c \in]a,b[$. Infatti, scelto un altro punto $c' \in]a,b[$, poiché l'integrale definito $\int_c^{c'} f(x)\,dx$ esiste ed è un numero reale, allora per l'additività rispetto al dominio deduciamo che f è integrabile in senso generalizzato su $]a,c]$ se e solo se lo è su $]a,c']$ e, analogamente, f è integrabile in senso generalizzato su $[c,b[$ se e solo se lo è su $[c',b[$. Analogamente, l'integrale $\int_a^c f(x)\ dx$ diverge positivamente [[negativamente]] se e solo se l'integrale $\int_a^{c'} f(x)\ dx$ diverge positivamente [[negativamente]], et cetera. Da questo segue che la precedente è una buona definizione.

Osservazione 7.8.13 Se invece $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ presenta un'improprietà dell'integrale anche in punti interni ad $]a,b[$, allora *occorre trattare separatamente tutte le improprietà di f*. Ad esempio, se f è una funzione razionale con denominatore che si annulla in due punti $d_1 < d_2$, dunque $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{d_1, d_2\}$, si fissano tre punti $c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < c_3$, si suddivide il dominio di f negli intervalli $]-\infty, c_1[$, $]c_1, d_1[$, $]d_1, c_2[$, $]c_2, d_2[$, $]d_2, c_3[$, $]c_3, +\infty[$ e si vede prima se sono definiti in $\overline{\mathbb{R}}$ gli integrali di f negli intervalli scritti sopra:

$$\int_{-\infty}^{c_1} f(x)\,dx\,,\quad \int_{c_1}^{d_1} f(x)\,dx\,,\quad \int_{d_1}^{c_2} f(x)\,dx\,,\quad \int_{c_2}^{d_2} f(x)\,dx\,,\quad \int_{d_2}^{c_3} f(x)\,dx\,,\quad \int_{c_3}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Se questo accade, inoltre, il *carattere* di ognuno degli integrali (i.e. il fatto che sia reale o $\pm\infty$) non dipende dalla scelta effettuata dei punti c_i. Ma allora, volendo conservare la proprietà di additività rispetto al dominio, è ben definito l'integrale di f su $\mathbb{R}$ se e solo se la somma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{d_1} f(x)\,dx + \int_{d_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{d_2} f(x)\,dx + \int_{d_2}^{c_3} f(x)\,dx + \int_{c_3}^{+\infty} f(x)\,dx$$

ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$, i.e. non presenta forme indeterminate del tipo $+\infty - \infty$. Se poi tale somma è reale, i.e. l'integrale di f converge su $\mathbb{R}$, il valore dell'integrale ottenuto dalla precedente formula non dipende dalla scelta effettuata dei punti c_i. Infine, lo stesso accade se la somma vale $\pm\infty$.

Osservazione 7.8.14 Abbiamo visto nell'esempio 7.8.8 che l'integrale di una funzione continua sulla semiretta $[0,+\infty[$ può non avere senso anche per funzioni continue e limitate. Questo accade per funzioni come $f(x) = \cos x$ che non hanno segno costante in nessun intorno di $+\infty$.

Vediamo ora che se f è non negativa [[non positiva]] su $]a,b[$, allora l' integrale $\int_a^b f(x)\ dx$ ha sempre senso ed è convergente oppure divergente positivamente [[negativamente]].

Infatti, nella definizione 7.8.9 osserviamo che la funzione integrale $F(\beta) := \int_a^\beta f(x)\ dx$ è monotona su $[a,b[$, crescente se $f \geq 0$ e decrescente se $f \leq 0$, dunque il suo limite per $\beta \to b^-$ esiste sempre ed è reale non negativo o $+\infty$ nel primo caso, reale non positivo o $-\infty$ nel secondo caso.

In particolare, per funzioni $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue e non negative, scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx < +\infty\,, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = +\infty$$

per distinguere se l'integrale generalizzato è convergente o diverge positivamente.

Esempio 7.8.15 Come nell'esempio 7.8.4 si prova che la funzione $f(x) = |x - x_0|^\alpha$ è integrabile in un intorno di x_0 se e solo se $\alpha > -1$, mentre è integrabile in un intorno di $+\infty$ o di $-\infty$ se e solo se $\alpha < -1$.

Esempio 7.8.16 Calcoliamo al variare dell'esponente $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$I_\beta := \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\,(\log x)^\beta}\,dx\,.$$

Per ogni $M > 2$, sostituendo $t = \log x$, per cui $dt = (1/x)\,dx$, se $\beta = 1$ calcoliamo

$$\int_2^M \frac{1}{x\,\log x}\,dx = \int_{\log 2}^{\log M} \frac{1}{t}\,dt = \big[\log t\big]_{\log 2}^{\log M} = \log(\log M) - \log\log 2$$

mentre se $\beta \neq 1$ risulta

$$\int_2^M \frac{1}{x\,(\log x)^\beta}\,dx = \int_{\log 2}^{\log M} \frac{1}{t^\beta}\,dt = \frac{1}{1-\beta}\big[t^{1-\beta}\big]_{\log 2}^{\log M} = \frac{1}{1-\beta}\big((\log M)^{1-\beta} - (\log 2)^{1-\beta}\big)\,.$$

Poiché $\log M \to +\infty$ se $M \to +\infty$, allora deduciamo che $I_\beta = +\infty$ se $\beta \leq 1$, mentre se $\beta > 1$

$$I_\beta = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{1-\beta}\big((\log M)^{1-\beta} - (\log 2)^{1-\beta}\big) = \frac{1}{\beta - 1}\,(\log 2)^{1-\beta}\,.$$

Trasformata di Fourier

In varie branchie della fisica e dell'ingegneria (ad esempio in teoria dei segnali) si utilizza la *trasformata di Fourier*, al fine di decomporre (e poi ricomporre mediante l'antitrasformata) un segnale generico in una somma infinita di sinusoidi con frequenze, ampiezze e fasi diverse.

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, si dice che appartiene alla classe di Schwartz se all'infinito tutte le sue derivate sono infinitesime di ordine superiore ad ogni potenza negativa, i.e. se per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta che $f^{(n)}(x)/x^m \to 0$ se $x \to \pm\infty$, per ogni $m \in \mathbb{N}$. La trasformata di Fourier di una funzione di Schwartz è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ dall'integrale generalizzato (o meglio di Lebesgue)

$$\widehat{f}(t) = \mathcal{F}\{f\}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathsf{e}^{-ixt}\,dx\,, \qquad \mathsf{e}^{-ixt} = \cos(xt) - \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(xt)\,.$$

Quindi $\widehat{f}$ è definita su $\mathbb{R}$ ed è a valori in $\mathbb{C}$ e si decompone

$$\widehat{f}(t) = \Re\widehat{f}(t) + \mathbf{i}\Im\widehat{f}(t)$$

in funzione parte reale e parte immaginaria, dove

$$\Re\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\cos(xt)\,dx\,, \quad \Im\widehat{f}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(xt)\,dx\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Inoltre, entrambe le funzioni $t \mapsto \Re\widehat{f}(t)$ e $t \mapsto \Im\widehat{f}(t)$ sono di Schwartz.

Più in generale la formula precedente ha senso per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $|f|$ è integrabile in senso generalizzato. Se poi anche entrambe le funzioni $t \mapsto |\Re\widehat{f}(t)|$ e $t \mapsto |\Im\widehat{f}(t)|$ sono integrabili in senso generalizzato su tutto $\mathbb{R}$, allora (mediante l'antitrasformata) risulta

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)\,\mathsf{e}^{ixt}\,dt \qquad \forall\,x \in \mathbb{R}\,, \qquad \mathsf{e}^{ixt} = \cos(xt) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(xt)\,.$$

Esempio 7.8.17 Se $f(x) = 1$ per $x \in [-1, 1]$ e $f(x) = 0$ altrimenti, risulta

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(t) = \int_{-1}^{1} \big(\cos(xt) - \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(xt)\big)\,dx = \frac{2\,\mathrm{sen}\,t}{t} + \mathbf{i}\cdot 0 = \frac{2\,\mathrm{sen}\,t}{t}$$

per ogni $t \neq 0$ e $\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(0) = 2$. Si noti che $\widehat{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Criteri di confronto

L'andamento del limite a $+\infty$ dà informazioni sull'integrale di una funzione su una semiretta destra.

Proposizione 7.8.18 *Se $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ è continua e $f(x) \to l$ se $x \to +\infty$, abbiamo:*

i) *se $l > 0$ allora* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

ii) *se $l < 0$ allora* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$

iii) *se f è integrabile in senso generalizzato su $]a,+\infty[$, allora $l = 0$.*

Dimostrazione: Se il limite l è positivo, esistono un numero positivo N_0 e un numero reale $M_0 > a$ tali che $f(x) > N$ per ogni $x > M_0$. Ma allora per ogni $M > M_0$ risulta

$$\int_a^M f(x)\,dx = \int_a^{M_0} f(x)\,dx + \int_{M_0}^M f(x)\,dx \geq \int_a^{M_0} f(x)\,dx + \int_{M_0}^M N_0\,dx = \int_a^{M_0} f(x)\,dx + N_0 \cdot (M - M_0)\,.$$

Poiché $N_0 \cdot (M - M_0) \to +\infty$ se $M \to +\infty$, allora per confronto otteniamo che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,dx = +\infty\,.$$

Analogamente, se $l < 0$ otteniamo che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$. Ma allora se l'integrale di f converge il limite l è necessariamente uguale a zero. $\square$

Osservazione 7.8.19 Il viceversa del punto iii) è falso: se $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ non è detto che f sia integrabile vicino a $+\infty$. Infatti, dall'esempio 7.8.4 sappiamo che $f(x) = 1/x^\alpha$ è integrabile su $[1,+\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$, ma è infinitesima per $x \to +\infty$ per ogni $\alpha > 0$.

Confrontiamo ora due funzioni non negative, nel caso della definizione 7.8.9.

Proposizione 7.8.20 *Se $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in]a,b[$, allora vale il seguente* criterio di confronto*:*

$$\begin{array}{lcl} \displaystyle\int_a^b g(x)\ dx < +\infty & \Longrightarrow & 0 \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx < +\infty \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = +\infty & \Longrightarrow & \displaystyle\int_a^b g(x)\ dx = +\infty\ . \end{array}$$

Dimostrazione: Infatti per ogni $\beta \in]a,b[$ risulta

$$F(\beta) \leq G(\beta)\,, \qquad F(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx\,, \quad G(\beta) = \int_a^\beta g(x)\,dx$$

e sia F che G sono crescenti e non negative su $]a,b[$, cf. osservazione 7.8.14. Ma allora

$$0 \leq \lim_{\beta\to b^-} F(\beta) \leq \lim_{\beta\to b^-} G(\beta) \leq +\infty$$

per cui l'asserto segue dalla definizione 7.8.9. $\square$

In generale è preferibile utilizzare il seguente *criterio di confronto asintotico*:

Proposizione 7.8.21 *Siano $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni continue, non negative in un intorno di b e tali che per $x \to b^-$ risulta $f(x) \sim l\ g(x)$ con $l > 0$ reale, i.e.*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in]0,+\infty[\ .$$

Allora f è integrabile in senso generalizzato su $[a,b[$ se e solo se lo è g.

Dimostrazione: Dall'ipotesi esiste $a' \in]a, b[$ tale che

$$\frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2l \qquad \forall x \in]a', b[$$

e dunque, moltiplicando per $g(x) > 0$,

$$\frac{l}{2} \cdot g(x) \leq f(x) \leq 2l \cdot g(x) \qquad \forall x \in]a', b[\,.$$

L'asserto segue quindi dal criterio del confronto, tenuto conto dell'osservazione 7.8.10. □

Osservazione 7.8.22 Nelle applicazioni del criterio di confronto asintotico, si considera separatamente tutte le improprietà della funzione, ragionando come nell'osservazione 7.8.13. Per dedurre la convergenza mediante il confronto asintotico, si fa poi riferimento alle funzioni test date dall'esempio 7.8.4, per improprietà vicino a zero o $\pm\infty$, ed all'esempio 7.8.15 per improprietà vicino a un numero reale $x_0 \neq 0$.

Esempio 7.8.23 La funzione

$$f(x) = \frac{(1 + \mathsf{e}^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1 + x\sqrt{x}) + 1 - \cos x}$$

è continua e positiva nel suo dominio naturale, che è la semiretta $]0, +\infty[$. Inoltre notiamo che $f(x) \to +\infty$ se $x \to 0^+$ e $f(x) \to 0^+$ se $x \to +\infty$. Spezzando il dominio nei due intervalli $]0, 1]$ e $[1, +\infty[$, vediamo ora che f è integrabile in entrambi gli intervalli e, dunque, è integrabile in senso generalizzato sulla semiretta $]0, +\infty[$.

Infatti, per $x \to 0^+$ abbiamo $(1 + \mathsf{e}^{-x})\sqrt{x^3(x+1)} \sim 2 \cdot x^{3/2}$ e $x^2(1 + x\sqrt{x}) + 1 - \cos x \sim x^2 + x^2/2 = 3x^2/2$, dunque $f(x) \sim (4/3) \cdot x^{-1/2}$ per $x \to 0^+$. Ma $(4/3) \cdot x^{-1/2}$ è integrabile su $]0, 1]$ e quindi lo è anche f su $]0, 1]$, per confronto asintotico.

Inoltre, per $x \to +\infty$ abbiamo $(1 + \mathsf{e}^{-x})\sqrt{x^3(x+1)} \sim 1 \cdot x^{4/2} = x^2$ e $x^2(1 + x\sqrt{x}) + 1 - \cos x \sim x^2 \cdot x^{3/2} = x^{7/2}$, essendo $1 - \cos x$ limitata. Quindi $f(x) \sim x^2/x^{7/2} = x^{-3/2}$ per $x \to +\infty$. Ma $x^{-3/2}$ è integrabile su $[1, +\infty[$ e quindi lo è anche f su $[1, +\infty[$, ancora per confronto asintotico.

Nal caso di funzioni che cambiano segno, vale il seguente *criterio di assoluta convergenza*:

Proposizione 7.8.24 *Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni continue e tali che $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b[$. Inoltre, supponiamo che g sia integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$. Allora anche $|f|$ e f sono integrabili in senso generalizzato in $[a, b[$ e risulta*

$$\Big| \int_a^b f(x)\, dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx < +\infty\,.$$

Dimostrazione: Infatti, ricordando la nozione di parte positiva e negativa, abbiamo che $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$, con $0 \leq f^\pm \leq |f|$. Dunque per il criterio di confronto le funzioni continue e non negative f^- e f^+ sono integrabili in senso generalizzato su $[a, b[$. Ma allora lo sono anche la loro somma e la loro differenza, i.e. le funzioni $|f|$ ed f . Essendo poi per ogni $\beta \in]a, b[$

$$\Big| \int_a^\beta f(x)\, dx \Big| \leq \int_a^\beta |f(x)|\, dx \leq \int_a^\beta g(x)\, dx\,,$$

la catena di diseguaglianze nella tesi è ottenuta passando al limite per $\beta \to b^-$. □

Esempio 7.8.25 La funzione $f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)/\sqrt{|x|}$ è integrabile in senso generalizzato su $[-1, 1]$. Infatti risulta $|f(x)| \leq 2/|x|^{1/2}$, che è integrabile in senso generalizzato sia su $[0, 1]$ che su $[-1, 0]$.

Osservazione 7.8.26 Il criterio precedente non ha un viceversa: esistono infatti funzioni f integrabili in senso generalizzato pur non essendolo $|f|$. Un esempio, di cui non daremo la verifica, è la funzione $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ nella semiretta $[1, +\infty[$.

8 Serie

Le serie numeriche formalizzano il concetto di somma di infiniti termini.

8.1 Convergenza di una serie

Definizione 8.1.1 Data una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali (definita per $n \geq n_0$) si dice serie associata ad $\{a_n\}_n$, o serie di termine generale a_n, la successione $\{S_n\}_n$ delle *somme parziali n-esime*

$$S_n = \sum_{i=n_0}^{n} a_i \ .$$

Gli elementi a_i si chiamano termini della serie. Se esiste il limite di $\{S_n\}_n$, il valore S di tale limite è detto *somma della serie* e viene indicato con il simbolo $S = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Diremo che la serie *converge* se la sua somma è finita, mentre diremo che la serie *diverge positivamente [[negativamente]]* se la sua somma è $+\infty$ $[[-\infty]]$; diremo infine che la serie è *indeterminata* se la successione $\{S_n\}_n$ non ha limite.

In seguito useremo la notazione $\sum_n a_n$ per indicare la serie di termine generale a_n. Date poi due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, diremo che hanno lo stesso carattere se sono entrambe convergenti, entrambe divergenti o entrambe indeterminate. Si noti che il carattere di una serie non dipende dalla scelta del punto iniziale n_0, mentre la somma dipende ovviamente da tale scelta nel caso di serie convergenti.

Esempio 8.1.2 Posto $a_n = 1/n!$, abbiamo $S_n = \sum_{i=0}^{n} 1/i! = b_n$, con $b_n \to \mathsf{e}$, cf. proposizione 4.6.7, dunque scriviamo $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathsf{e}$. In maniera analoga abbiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathsf{e}^x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per questo motivo viene denotata *serie esponenziale.*

Esempio 8.1.3 Posto $a_n = q^n$, abbiamo $S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$ e sappiamo che $S_n = (1-q^{n+1})/(1-q)$ se $q \neq 1$, mentre $S_n = n+1$ se $q = 1$, cf. (3.3). Allora, cf. esempio 4.5.5, abbiamo ottenuto che la *serie geometrica* $\sum_n q^n$ diverge positivamente se $q \geq 1$, è indeterminata se $q \leq -1$, mentre converge se $-1 < q < 1$ e in tal caso la sua somma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \,, \qquad -1 < q < 1 \ .$$

Esempio 8.1.4 La serie $\sum_n 1/n^\alpha$ è detta *serie armonica* generalizzata (serie armonica se $\alpha = 1$). Grazie al *criterio* 8.6.1 *dell'integrale*, nell'esempio 8.6.2 vedremo che tale serie diverge positivamente se $\alpha \leq 1$ e converge se $\alpha > 1$, ottenendo per tali valori anche una stima sulla sua somma.

Esempio 8.1.5 Grazie al *criterio* 8.5.1 *di Leibniz*, vedremo che la serie a segni alternati $\sum_n (-1)^n/n^\alpha$ converge per ogni $\alpha > 0$.

Dai teoremi algebrici sui limiti di successioni, otteniamo immediatamente i seguenti fatti:

i) se una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ha somma S, allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} c \cdot a_n$ ha somma $c \cdot S$ per ogni $c \in \mathbb{R}$

ii) se due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergono, allora converge anche la serie $\sum_n (a_n + b_n)$ e vale la formula $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$

iii) se la serie $\sum_n a_n$ diverge positivamente [[negativamente]] e la serie $\sum_n b_n$ converge oppure diverge positivamente [[negativamente]], allora anche la serie $\sum_n (a_n + b_n)$ diverge positivamente [[negativamente]].

Osservazione 8.1.6 Se la serie $\sum_n a_n$ diverge positivamente e la serie $\sum_n b_n$ diverge negativamente, non possiamo concludere nulla in generale sul carattere della serie $\sum_n (a_n + b_n)$. Inoltre, non c'è alcuna relazione tra la somma delle serie di termine generale a_n e b_n e la serie dei prodotti $\sum_n a_n \cdot b_n$. Infatti, se ad esempio $a_n = (-1)^n + 1$ e $b_n = (-1)^n - 1$, si vede facilmente che $\sum_n a_n = +\infty$ e $\sum_n b_n = -\infty$, ma $a_n \cdot b_n = 0$ per ogni n, dunque $\sum_n a_n \cdot b_n = 0$.

8.2 Somme di serie

Oltre alle serie esponenziali e geometriche, ci sono altre serie, dette *telescopiche*, di cui si può calcolare facilmente la somma. Se sappiamo che $a_n = b_{n+1} - b_n$ per ogni $n \geq n_0$, allora otteniamo che

$$S_n = \sum_{i=n_0}^{n} a_i = \sum_{i=n_0}^{n} (b_{i+1} - b_i) = b_{n+1} - b_{n_0} \qquad \forall\, n > n_0 .$$

Quindi se $b_n \to b$ deduciamo che $S_n \to b - b_{n_0}$ e la serie telescopica ha somma $S = b - b_{n_0}$.

Esempio 8.2.1 Calcoliamo la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
Osserviamo che $a_i = 1/\big(i(i+1)\big) = 1/i - 1/(i+1)$ e quindi otteniamo

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \to 1 \ .$$

8.3 Condizioni di Cauchy

La *condizione necessaria di convergenza* di Cauchy afferma:

Proposizione 8.3.1 *Se una serie converge, allora il termine generale è infinitesimo.*

Dimostrazione: Infatti abbiamo che $S_n - S_{n-1} = a_n$ per ogni $n > n_0$. Quindi, se la serie converge, i.e. $S \in \mathbb{R}$, passando al limite a primo membro abbiamo che $(S_n - S_{n-1}) \to S - S = 0$, dunque $a_n \to 0$. □

Scrivendo il criterio di Cauchy, teorema 4.9.11, per la successione delle somme parziali, osservando che per ogni k intero positivo $S_{n+k} = S_n + (a_{n+1} + \cdots + a_{n+k})$, otteniamo immediatamente:

Teorema 8.3.2 *Una serie $\sum_n a_n$ converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ risulta $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$.*

Definizione 8.3.3 Una serie $\sum_n a_n$ si dice *assolutamente convergente* se converge la serie $\sum_n |a_n|$ di termine generale $|a_n|$.

La definizione è motivata dalla *condizione sufficiente di convergenza di Cauchy*:

Teorema 8.3.4 *Ogni serie assolutamente convergente risulta convergente. In tal caso, inoltre, abbiamo*

$$\Big|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \ .$$

Dimostrazione: Fissato $\varepsilon > 0$, applicando il criterio di Cauchy otteniamo che se la serie $\sum_n |a_n|$ converge, allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ risulta

$$(|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|) = ||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon .$$

Ma per la disuguaglianza triangolare stimiamo

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq (|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|) ,$$

dunque ancora per il criterio di Cauchy deduciamo che la serie $\sum_n a_n$ converge. La stima sulla somma segue passando al limite ad ambo i membri della diseguaglianza tra le somme parziali n-esime

$$\Big|\sum_{i=n_0}^{n} a_i\Big| \leq \sum_{i=n_0}^{n} |a_i| \qquad \forall\, n \ .$$

e usando la continuità del valore assoluto nonché la permanenza del segno. □

Osservazione 8.3.5 Il viceversa è falso: una serie può convergere anche se non è assolutamente convergente: posto infatti $a_n = (-1)^n/n$, la serie $\sum_n (-1)^n/n$ converge (per il criterio di Leibniz) ma la serie dei valori assoluti è la serie armonica $\sum_n 1/n$, che diverge positivamente (per il criterio dell'integrale).

8.4 Serie a termini non negativi

Consideriamo ora serie con termine generale non negativo. Dato che la somma della serie è definita come limite di una successione, osserviamo che quanto detto sotto vale sostanzialmente (con le opportune modifiche) anche per le serie di segno non positivo o per le serie tali che definitivamente $a_n \geq 0$. Per semplicità di notazione nei risultati seguenti considereremo sempre serie di termine generale a_n definito per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 8.4.1 *Se $a_n \geq 0$ per ogni n, allora la serie $\sum_n a_n$ converge oppure diverge positivamente.*

Dimostrazione: Infatti abbiamo $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ per ogni n, dunque $S_n \leq S_{n+1}$ per ogni n e la successione $\{S_n\}_n$ delle somme parziali è debolmente crescente. Allora per il teorema 4.2.14 sul limite di successioni monotone, $\{S_n\}_n$ converge o diverge positivamente, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 8.4.2 Quindi per una serie a termini non negativi si utilizza la notazione $\sum_n a_n < +\infty$ e $\sum_n a_n = +\infty$ per distinguerne il carattere.

Dalla condizione necessaria di convergenza di Cauchy otteniamo allora:

Corollario 8.4.3 *Se $a_n \geq 0$ per ogni n ed inoltre la successione $\{a_n\}_n$ non è infinitesima, allora la serie $\sum_n a_n$ diverge positivamente.*

Dimostrazione: Infatti la serie non converge altrimenti avremmo che $a_n \to 0$. Quindi la serie diverge positivamente. □

Esempio 8.4.4 Le serie $\sum_n n^n$, $\sum_n n!$, $\sum_n q^n/n^k$ dove $q > 1$, $\sum_n n/(n+1)$ divergono positivamente, in quanto sono di termine generale non negativo che non è infinitesimo.

La permamenza del segno dà un importante *criterio di confronto*:

Teorema 8.4.5 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni di numeri reali non negativi tali che definitivamente $a_n \leq b_n$. Allora abbiamo*

$$\sum_n b_n < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty \,, \qquad \sum_n a_n = +\infty \Rightarrow \sum_n b_n = +\infty \ .$$

Dimostrazione: Per ipotesi esiste $\overline{n}$ tale che $a_n \leq b_n$ per ogni $n > \overline{n}$. Chiamiamo A_n e B_n le somme parziali n-esime relative alle successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$. Abbiamo $A_n = A_{\overline{n}} + (A_n - A_{\overline{n}})$ e $B_n = B_{\overline{n}} + (B_n - B_{\overline{n}})$ per ogni $n > \overline{n}$, dove

$$(A_n - A_{\overline{n}}) = \sum_{i=\overline{n}+1}^{n} a_i \leq \sum_{i=\overline{n}+1}^{n} b_i = (B_n - B_{\overline{n}}) \ .$$

Di conseguenza scriviamo

$$A_n \leq A_{\overline{n}} + (B_n - B_{\overline{n}}) = B_n + (A_{\overline{n}} - B_{\overline{n}}) \qquad \forall n > \overline{n} \ . \tag{8.1}$$

Ricordiamo inoltre che le successioni $\{A_n\}_n$ e $\{B_n\}_n$ sono entrambe debolmente crescenti. Se la serie $\sum_n b_n$ converge, allora la successione $\{B_n\}_n$ è limitata superiormente, quindi per la stima (8.1) lo è anche la successione la successione $\{A_n\}_n$, che dunque converge, i.e. la serie $\sum_n a_n$ è anch'essa convergente. La contronominale dà la seconda affermazione, tenuto conto della proposizione 8.4.1. □

Osservazione 8.4.6 Se $\sum_n b_n$ converge e $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n > \overline{n}$, passando al limite nella disequaglianza (8.1) otteniamo la seguente stima sulla somma delle due serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n + \sum_{n=0}^{\overline{n}} (a_n - b_n) \ .$$

Nelle applicazioni si usa spesso il *criterio del confronto asintotico*:

Corollario 8.4.7 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni di numeri reali positivi tali che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[\ .$$

Allora le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere, i.e.

$$\sum_n a_n < +\infty \iff \sum_n b_n < +\infty \, , \qquad \sum_n a_n = +\infty \iff \sum_n b_n = +\infty \ .$$

Dimostrazione: Infatti, essendo $]l/2, 2l[$ un intorno di l, limite reale positivo, definitivamente $a_n/b_n \in]l/2, 2l[$, quindi esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$

$$\frac{l}{2} \cdot b_n \le a_n \le 2l \cdot b_n \, .$$

Se la serie $\sum_n b_n$ converge, allora converge anche la serie $\sum_n 2l\, b_n$. Grazie al criterio del confronto la diseguaglianza di destra implica che anche la serie $\sum_n a_n$ converge. Viceversa, se la serie $\sum_n b_n$ diverge positivamente, allora diverge positivamente anche la serie $\sum_n (l/2)\, b_n$ e la diseguaglianza di sinistra implica che anche la serie $\sum_n a_n$ diverge positivamente. □

Esempio 8.4.8 Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, verifichiamo che la serie $\sum_n n^\alpha \operatorname{sen}(1/n)$ converge se $\alpha < 0$ e diverge positivamente se $\alpha \ge 0$.

Infatti il termine generale è positivo, essendo $\operatorname{sen}(1/n) > 0$ per ogni n, mentre $n^\alpha \operatorname{sen}(1/n) \sim n^{\alpha-1}$. Quindi se $\alpha - 1 \ge 0$ la serie diverge positivamente perchè il suo termine generale non è infinitesimo. Se invece $\alpha < 1$, poiché la serie armonica generalizzata $\sum_n n^{\alpha-1}$ converge se e solo se l'esponente $\alpha - 1$ è minore di -1, i.e. per $\alpha < 0$, l'asserto segue dal criterio del confronto asintotico.

Esempio 8.4.9 La serie $\sum_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$ converge se $\alpha > 2$ e diverge positivamente se $\alpha \le 2$.

Infatti il termine generale è positivo e $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^{-1}$, dunque $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sim 2n^{-1/2}$ ed infine $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha \sim 2^\alpha n^{-\alpha/2}$. Quindi se $\alpha \le 0$ la serie diverge positivamente perchè il suo termine generale non è infinitesimo. Se invece $\alpha > 0$, poiché la serie armonica generalizzata $\sum_n n^{-\alpha/2}$ converge se e solo se l'esponente $-\alpha/2$ è minore di -1, i.e. per $\alpha > 2$, l'asserto segue ancora dal criterio del confronto asintotico.

Confrontando con le serie geometriche, si deduce facilmente il *criterio della radice n-esima*:

Teorema 8.4.10 *Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi tale che $(a_n)^{1/n} \to L$, con $0 \le L \le +\infty$. Allora si ha*

$$L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n < +\infty \, , \qquad L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n = +\infty \ .$$

Dimostrazione: Se $0 \le L < 1$, posto $q = (L+1)/2$ abbiamo $L < q < 1$. Quindi definitivamente $(a_n)^{1/n} < q$, i.e. $0 \le a_n \le q^n$. Poiché la serie geometrica $\sum_n q^n$ converge, essendo $0 < q < 1$, per il criterio del confronto converge anche la serie $\sum_n a_n$. Se invece $L > 1$, definitivamente $(a_n)^{1/n} > 1$, da cui $a_n \ge 1$. Allora la serie $\sum_n a_n$ diverge positivamente perchè il suo termine generale non è infinitesimo. □

Osservazione 8.4.11 Nel caso $L = 1$ non possiamo concludere nulla sul carattere della serie. Posto infatti $a_n = 1/n$ e $b_n = 1/n^2$, allora $(a_n)^{1/n} \to 1$ e $(b_n)^{1/n} \to 1$, ma la serie $\sum_n 1/n$ diverge positivamente mentre la serie $\sum_n 1/n^2$ converge.

Grazie al criterio della radice per successioni, cf. proposizione 4.5.12, otteniamo subito il *criterio del rapporto per serie*:

Proposizione 8.4.12 *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali positivi tale che $a_{n+1}/a_n \to L$, con $0 \le L \le +\infty$. Allora si ha*

$$L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n < +\infty \, , \qquad L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n = +\infty \ .$$

Infatti, dalla proposizione 4.5.12 otteniamo che $(a_n)^{1/n} \to L$, quindi la tesi segue dal criterio della radice n-esima. Diamo invece una dimostrazione diretta, che non fa uso della proposizione 4.5.12.

Dimostrazione: Se $0 \leq L < 1$, come nella dimostrazione del criterio del rapporto per successioni otteniamo la stima (4.7): esiste una costante $c > 0$ e una ragione $0 < q < 1$ tali che definitivamente $0 < a_n \leq c \cdot q^n$. Quindi poiché la serie geometrica $\sum_n q^n$ converge, per il criterio del confronto converge anche la serie $\sum_n a_n$. Se invece $L > 1$, otteniamo la stima (4.8): esiste una costante $c > 0$ e una ragione $q > 1$ tali che definitivamente $a_n \geq c \cdot q^n$. Quindi poiché la serie geometrica $\sum_n q^n$ diverge positivamente, per il criterio del confronto anche la serie $\sum_n a_n$ diverge positivamente, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 8.4.13 Nel caso $L = 1$ non possiamo concludere nulla sul carattere della serie. Posto infatti come prima $a_n = 1/n$ e $b_n = 1/n^2$, allora $a_{n+1}/a_n = n/(n+1) \to 1$ e $b_{n+1}/b_n = n^2/(n^2+1) \to 1$, ma la serie $\sum_n 1/n$ diverge positivamente mentre la serie $\sum_n 1/n^2$ converge.

Esempio 8.4.14 Verifichiamo che la serie $\sum_n x^n/n!$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Posto infatti $a_n = x^n/n!$, se $x > 0$ risulta $a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n = x/(n+1) \to 0$. Se $x = 0$ la serie ovviamente converge, mentre se $x < 0$ allora $|a_n| = |x|^n/n!$ e dunque la serie è assolutamente convergente.

8.5 Serie a termini di segno alternato

Vale il seguente *criterio di Leibniz*:

Teorema 8.5.1 *Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi, debolmente decrescente e infinitesima; allora la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ risulta convergente.*

Dimostrazione: Osserviamo che, dette S_n le somme parziali, si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+2} = S_n + (-1)^{n+1} a_{n+1} + (-1)^{n+2} a_{n+2} = S_n + (-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2})$$

e per ipotesi $(a_{n+1} - a_{n+2}) \geq 0$, quindi otteniamo che $S_{n+2} \leq S_n$ se n è pari e $S_{n+2} \geq S_n$ se n è dispari. In altri termini la sottosuccessione $\{S_{2n}\}_n$ dei termini di posto pari è debolmente decrescente mentre la sottosuccessione $\{S_{2n+1}\}_n$ dei termini di posto dispari è debolmente crescente. Essendo poi $S_1 \leq S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$, allora $\{S_{2n}\}_n$ è limitata inferiormente e $\{S_{2n+1}\}_n$ è limitata superiormente. Allora entrambe convergono a due numeri reali, detti S_p e S_d, rispettivamente. Poiché infine $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$, dove $a_{2n+1} \to 0$ (essendo estratta di una successione infinitesima), allora passando al limite otteniamo che $S_d = S_p$. Se dunque le sottosuccessioni $\{S_{2n}\}_n$ e $\{S_{2n+1}\}_n$ convergono allo stesso limite, allora anche la successione $\{S_n\}_n$ converge, come volevamo dimostrare. □

Esempio 8.5.2 Per il criterio di Leibniz la serie $\sum_n (-1)^n/n^\alpha$ converge per ogni $\alpha > 0$.

8.6 Criterio dell'integrale

C'è un forte legame tra la teoria degli integrali generalizzati e quella delle serie. Basti pensare che la somma parziale $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ di una serie è uguale all'integrale nell'intervallo di estremi 0 ed $n+1$ della funzione *a gradini* che vale a_i all'interno dell'intervallo $]i, i+1[$, per ogni $i = 0, \ldots, n$. Quindi, se esiste, la somma della serie ci restituisce l'integrale generalizzato della corrispondente funzione a gradini sulla semiretta dei reali positivi. Il *criterio dell'integrale* esprime più in generale la relazione tra convergenza di serie e di integrali generalizzati.

Teorema 8.6.1 *Sia $f : [n_0, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione non negativa e debolmente decrescente, e sia $a_n = f(n)$ per ogni $n \geq n_0$. Allora la serie $\sum_n a_n$ risulta convergente se e solo se la funzione f è integrabile in senso generalizzato sulla semiretta $[n_0, +\infty[$. Inoltre vale la stima*

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \,, \qquad a_n = f(n) \,. \tag{8.2}$$

Dimostrazione: Osserviamo prima che f è integrabile su $[n_0, n]$ per ogni $n > n_0$, essendo monotona e limitata. Inoltre, sia la serie che l'integrale convergono oppure divergono positivamente, essendo f non negativa. Dalla decrescenza di f abbiamo poi che $a_{i+1} = f(i+1) \leq f(x) \leq f(i) = a_i$ per ogni $x \in [i, i+1]$ e per ogni $i \geq n_0$ intero. Integrando su $[i, i+1]$ otteniamo quindi

$$a_{i+1} \leq \int_i^{i+1} f(x)\,dx \leq a_i \qquad \forall\, i \geq n_0$$

da cui, sommando sugli interi tra n_0 ed n, per l'additività dell' integrale otteniamo

$$\sum_{j=n_0+1}^{n+1} a_j = \sum_{i=n_0}^{n} a_{i+1} \leq \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{i=n_0}^{n} a_i \qquad \forall\, n > n_0\,,$$

dove abbiamo posto $j = i+1$ nella prima diseguaglianza. Ora, se la successione delle somme parziali converge, dalla diseguaglianza di destra deduciamo la convergenza dell'integrale generalizzato. Per il viceversa, si usa la diseguaglianza di sinistra. Passando infine al limite per $n \to \infty$ si ottiene la (8.2). □

Esempio 8.6.2 Posto $f(x) = x^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$, ed $n_0 = 1$, poiché f è positiva e decrescente su $[1, +\infty[$ possiamo applicare il criterio dell'integrale. Dal momento quindi che $f(x) = x^{-\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato su $[1, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$, concludiamo che la serie armonica generalizzata $\sum_n n^{-\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$. Poiché inoltre per $\alpha > 1$ abbiamo

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

la (8.2) diventa:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

Essendo poi

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\,,$$

otteniamo una stima sulla somma della serie armonica generalizzata:

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad \forall\, \alpha > 1\,.$$

Esempio 8.6.3 Per ogni $\beta > 0$ la funzione $f(x) = (x \log^\beta x)^{-1}$ è positiva e decrescente su $[2, +\infty[$, avendo derivata $f'(x)$ negativa per ogni $x > 2$. Inoltre, nell'esempio 7.8.16 abbiamo ottenuto che f è integrabile in senso generalizzato su $[2, +\infty[$ se e solo se $\beta > 1$. Allora per il criterio dell' integrale deduciamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log^\beta n}$ è convergente se $\beta > 1$ e diverge positivamente se $0 < \beta \leq 1$. Per ogni $\beta > 1$, dalla formula (8.2) si può infine ricavare come sopra una stima per difetto e per eccesso sulla somma della serie, a partire dal valore dell'integrale generalizzato $I_\beta = \int_2^{+\infty} (x \log^\beta x)^{-1}\,dx$, già calcolato nell'esempio 7.8.16.