Esercizio 1. Una delle soluzioni dell'equazione $2(1-\mathrm{i})z^2+8=-\mathrm{i}-3(1-2\mathrm{i})z$ è

(A) $-\mathrm{i}$.	(C) -1 .
(B) i .	(D) 1 .

Bisogna controllare quale dei quattro numeri risolve l'equazione: per $z=\pm 1$ questa diventa

$$\begin{aligned} z=1 \quad &\Rightarrow 2-2\mathrm{i}-8=-\mathrm{i}+(3-6\mathrm{i}) \iff -6-\mathrm{i}=3-6\mathrm{i} \\ z=-1 \quad &\Rightarrow 2-2\mathrm{i}-8=-\mathrm{i}-(3-6\mathrm{i}) \iff -6-\mathrm{i}=-3+6\mathrm{i}\ , \end{aligned}$$

e nessuno dei due casi dà una uguaglianza vera. Per $z=\pm\mathrm{i}$ abbiamo

$$\begin{aligned} z=\mathrm{i} \quad &\Rightarrow 6+2\mathrm{i}=-\mathrm{i}-3(\mathrm{i}+2) \iff 6+2\mathrm{i}=-6-4\mathrm{i} \\ z=-\mathrm{i} \quad &\Rightarrow 6+2\mathrm{i}=-\mathrm{i}+3(\mathrm{i}+2) \iff 6+2\mathrm{i}=6+2\mathrm{i}\ , \end{aligned}$$

perciò la soluzione cercata è $z=-\mathrm{i}$.

Esercizio 2. La successione $\left(\dfrac{n^n+3n!}{2+n^n}\right)^{n^n/n!}$ tende a

(A) e^3 .	(C) 1 .
(B) e^{-2} .	(D) e .

Dato che la quantità fra parentesi tende a 1 e l'esponente a $+\infty$, possiamo scrivere la successione in forma esponenziale:

$$\left(\frac{n^n+3n!}{2+n^n}\right)^{n^n/n!}=\left(1+\frac{3n!-2}{2+n^n}\right)^{n^n/n!}=\exp\left[\frac{n^n}{n!}\log\left(1+\frac{3n!-2}{2+n^n}\right)\right]\ .$$

A questo punto studiamo l'esponente

$$\frac{n^n}{n!}\log\left(1+\frac{3n!-2}{2+n^n}\right)=\frac{\log\left(1+\frac{3n!-2}{2+n^n}\right)}{\frac{3n!-2}{2+n^n}}\cdot\frac{3n!-2}{2+n^n}\,\frac{n^n}{n!}\to 3\ ,$$

pertanto la successione tende a e^3 .

Esercizio 3. Se $f(x)=\begin{cases}2x-\operatorname{sen}x & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{se } x>0\end{cases}$ allora

(A) $f'(0)=1$.	(C) $f'(0)=0$.
(B) $f'(0)=-1$.	(D) f non è derivabile per $x=0$.

Applichiamo un corollario del Teorema di de l'Hôpital: intanto

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(2x-\operatorname{sen}x)=0=f(0)=\lim_{x\to0^+}(1-\mathrm{e}^{-x})=\lim_{x\to0^+}f(x)\ ,$$

dunque f è continua, poi

$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}(2-\cos x)=1 \quad\Rightarrow\quad f'_-(0)=1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-x} = 1 \quad \Rightarrow \quad f'_+(0) = 1$$

dunque f è derivabile in $x = 0$ con derivata 1.

Esercizio 4. A una corsa partecipano 10 cavalli, e vengono premiati i primi tre classificati. Qual è la probabilità che vengano premiati i cavalli numero 4, 5 e 8?

(A) $1/120$.

(B) $1/720$.

(C) $C_{10,3}$.

(D) $\binom{3}{10}$.

I casi possibili sono i sottoinsiemi fatti scegliendo tre dei 10 cavalli, che sono $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8/3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, e i casi favorevoli solo uno (quello in cui il sottoinsieme scelto è $\{4,\ 5,\ 8\}$), pertanto la probabilità è $1/120$.

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2 - 2x - 8} < 4$. Allora:

(A) $]-4, -2] \subset S$.

(B) $[-2, 4] \subset S$.

(C) $-4 \in S$.

(D) S è un intervallo.

La disequazione equivale a

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 8 < 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -2 \ \textbf{o} \ x \geq 4 \\ -4 < x < 6 \end{cases} \iff [-4 < x \leq -2 \ \textbf{o} \ 4 \leq x < 6],$$

pertanto $S =]-4, -2] \cup [4, 6[$.

Esercizio 6. Al variare dell' esponente reale α, la serie $\sum_n n^{\alpha^2-\alpha-5}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ risulta

(A) convergente se e solo se $-2 < \alpha < 3$.

(B) convergente se e solo se $-1 < \alpha < 2$.

(C) convergente se e solo se $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < \alpha < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

(D) divergente per ogni $\alpha > 0$.

Dato che $0 \leq 1 - \cos(1/n) = 1/2n^2 + o(1/n^2)$, applicando il criterio del confronto asintotico la serie ha lo stesso carattere di

$$\sum_n n^{\alpha^2-\alpha-5} \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_n \frac{1}{n^{-\alpha^2+\alpha+7}},$$

una serie armonica generalizzata che converge se e solo se

$$-\alpha^2 + \alpha + 7 > 1 \iff \alpha^2 - \alpha - 6 < 0 \iff -2 < \alpha < 3.$$

Esercizio 7. L'integrale definito $\displaystyle\int_0^{\pi^2/16} \cos\sqrt{x}\,dx$ vale:

(A) $\left(\dfrac{\pi}{4}+1\right)\sqrt{2}-2\,.$

(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$

(C) $\left(\dfrac{\pi}{4}-1\right)\sqrt{2}+2\,.$

(D) $\cos 0-\cos\dfrac{\pi}{4}\,.$

Integriamo con la sostituzione $\sqrt{x}=t$ ossia $x=t^2$, cui corrisponde il cambiamento dei differenziali $dx=2t\,dt$, e l'integrale diventa

$$\int_0^{\pi^2/16} \cos\sqrt{x}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ x=t^2}}{=} \int_0^{\pi/4} 2t\cos t\,dt = \Big[2t\,\mathrm{sen}\,t\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 2\,\mathrm{sen}\,t\,dt$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \Big[-2\cos t\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} - 2\,.$$
