Cognome ______________________

Nome ______________________

Matricola

Laurea   Civ Amb   Gest   Inf Eln Tlc   Mec

Non scrivere qui

1	2	3	4	5	6

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2019-2020 — Parma, 15 Gennaio 2020

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'insieme $A = \{(x, y) : \ x < y < 2x \text{ e } 1 < xy < 3\}$ è

(a) chiuso; (b) illimitato; (c) connesso.

Soluzione. L'insieme A è aperto perché è intersezione di controimmagini di intervalli aperti mediante funzioni continue (polinomi) ed è limitato poiché deve essere $x, y > 0$ e $3 > xy > x^2$ da cui segue $0 < x < \sqrt{3}$ e $\sqrt{3} < y < 2\sqrt{3}$. L'insieme A deve quindi essere connesso. Risulta infatti $A = \Phi(R)$ dove R è il rettangolo aperto $R = (1, 3) \times (1, 2)$ e $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ è il diffeomorfismo di $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ su se stesso definito da

$$\Phi^1(u, v) = \sqrt{u/v} \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(u, v) = \sqrt{uv}$$

per ogni $u, v > 0$. Essendo R convesso e quindi connesso, anche A è tale per il teorema di Darboux. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = \mathrm{e}^{x-y^2} + \operatorname{sen}(x + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nel punto di coordinate $(1, -1)$ è

(a) $2x + 3y - z = -2$; (b) $3x + 2y - z = 0$; (c) $3x - y + 2z = 6$.

Soluzione. Si ha $f(1, -1) = 1$ e

$$f_x(1, -1) = \mathrm{e}^{x-y^2} + \cos(x + y)\Big|_{x=1 \text{ e } y=-1} = 2;$$
$$f_y(\cancel{\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}}) = -2y\mathrm{e}^{x-y^2} + \cos(x + y)\Big|_{x=1 \text{ e } y=-1} = 3;$$

e quindi l'equazione del piano tangente è $z = 1 + 2(x - 1) + 3(y + 1)$ da cui segue $2x + 3y - z = -2$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 3. L'integrale curvilineo I del campo vettoriale $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f^1(x, y) = 2x+y$ e $f^2(x, y) = 4y - x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, lungo la curva parametrica $\gamma(t) = \operatorname{sen}(t)e_1 + te_2$, $t \in [0, \pi]$, è

(a) $I = 4\pi - 2$; (b) $I = 2\pi^2 - 4$; (c) $I = \pi^2 + 2$.

Soluzione. Poiché la curva γ è liscia e il campo vettoriale f è continuo, risulta

$$I = \int_\gamma f \cdot dl = \int_0^\pi \big[(2\operatorname{sen} t + t)\cos t + (4t - \operatorname{sen} t)\big]\, dt =$$
$$= \int_0^\pi (2\cos t \operatorname{sen} t + t\cos t - \operatorname{sen} t + 4t)\, dt = \left(\operatorname{sen}^2 t + t\operatorname{sen} t + 2\cos t + 2t^2\right)\Big|_0^\pi = 2\pi^2 - 4.$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

e sia

$$\Gamma = \left\{(x,y):\ 13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4\right\}.$$

Determinate

(a) Provate che Γ è una curva regolare e compatta in $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinate il minimo e il massimo globale di f su Γ.

Soluzione. (a) Si ha $\Gamma = \{(x,y):\ q_A(x,y) = 1\}$ ove q_A è la forma quadratica associata alla matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 13/4 & -3\sqrt{3}/4 \\ -3\sqrt{3}/4 & 7/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_4 = 4$ cui corrispondono gli autovettori (normalizzati) $v_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e $v_2 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$. Pertanto la forma quadratica q_A è definita positiva e Γ è l'ellisse nel piano avente come assi le rette di equazione $\sqrt{3}x - y = 0$ e $x + \sqrt{3}y = 0$ con semiassi di lunghezza 1 e $1/2$ rispettivamente. L'insieme Γ è chiuso perché controimmagine di 1 mediante il polinomio q_A ed è limitato poiché la forma quadratica q_A è definita positiva e risulta

$$(x,y) \in \Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \geq q_A(x,y) \geq \min\{\lambda_1, \lambda_2\}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right).$$

Questo prova che Γ è un insieme compatto. Infine Γ è una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ poiché il gradiente di q_A si annulla solo nell'origine e $q_A(0,0) = 0$.

(b) La funzione f è un polinomio e dunque è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ cosicché per (a) f assume minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass.

Tenuto conto che gli insiemi di livello di f sono circonferenze concentriche con centro nell'origine, da (a) segue immediatamente che i punti di minimo globale e di massimo globale di f su Γ sono le intersezioni degli assi con l'ellisse e che i valori di minimo globale e massimo globale sono $1/4$ e 1 rispettivamente.

Alternativamente, essendo Γ una curva regolare, possiamo determinare il minimo globale e il massimo globale di f su Γ con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 2x - \lambda(26x - 6\sqrt{3}y) = 0 \\ 2y - \lambda(14y - 6\sqrt{3}x) = 0 \\ 13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} (1 - 13\lambda)x + 3\sqrt{3}\lambda y = 0 \\ 3\sqrt{3}\lambda x + (1 - 7\lambda)y = 0 \\ 13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4. \end{cases}$$

Affinché il sistema lineare formato dalle prime due equazioni abbia altre soluzioni oltre alla soluzione $x = y = 0$, deve essere

$$\det\begin{pmatrix} 1 - 13\lambda & 3\sqrt{3}\lambda \\ 3\sqrt{3}\lambda & 1 - 7\lambda \end{pmatrix} = 64\lambda^2 - 20\lambda + 1 = 0$$

e ciò avviene per $\lambda = 1/16$ e $\lambda = 1/4$.

Nel primo caso $\lambda = 1/16$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti (x,y) tali che $x = -\sqrt{3}y$. Imponendo che tali punti stiano su Γ, si trovano i punti di coordinate $P_\pm = (\mp\sqrt{3}/4, \pm 1/4)$.

Nell'altro caso $\lambda = 1/4$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti (x,y) tali che $y = \sqrt{3}x$ e, imponendo che tali punti stiano su Γ, si trovano i punti di coordinate $Q_\pm = (\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$.

Risulta infine $f(P_\pm) = 1/4$ e $f(Q_\pm) = 1$ come previsto e conseguentemente il minimo globale di f su Γ è assunto nei punti $P_\pm$ mentre il massimo globale è assunto nei punti $Q_\pm$.

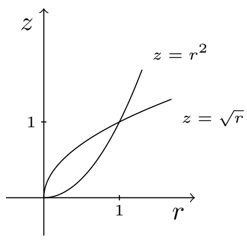
Gli insiemi di livello $\{f = 1\}$, $\{f = 1/4\}$ e il bordo di Γ sono rappresentati nella seguente figura.

Esercizio 5. Sia
$$K = \left\{ (x\,,y\,,z): \; x^2 + y^2 \le z \le \sqrt[4]{x^2+y^2} \text{ e } |y| \le x \right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K xz dm_3(x\,,y\,,z)$ e $J = \int_K yz dm_3(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione del poliedro definito da $|y| \le x$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra la parabola $z = r^2$ e il grafico della funzione $z = \sqrt{r}$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. Le funzioni f e g definite da
$$f(x\,,y\,,z) = xz \qquad \text{e} \qquad g(x\,,y\,,z) = yz$$
per ogni $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$ sono polinomi e quindi sono integrabili in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la porzione di cerchio
$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x\,,y): \; x^2+y^2 \le 1 \text{ e } |y| \le x \right\}$$
e per ogni $(x\,,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è il segmento
$$K_{(x,y)} = \left[x^2+y^2\,, \sqrt[4]{x^2-y^2} \right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$
Per la formula di riduzione si ha allora
$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt[4]{x^2+y^2}} xz dz \right) dm_2(x\,,y) = \frac{1}{2} \int_{\pi_{xy}(K)} x \left[\sqrt{x^2+y^2} - \left(x^2+y^2\right)^2 \right] dm_2(x\,,y)$$
e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta
$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta \int_0^1 r^2 \left(r - r^4\right) dr = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{7} r^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{56}.$$
Infine, per il calcolo di J osserviamo che, posto
$$K_\pm = \left\{ (x\,,y\,,z): \; \pm\, y \ge 0 \right\},$$
risulta $K = K_+ \cup K_-$ e $|K_+ \cap K_-| = 0$ cosicché da
$$(x\,,y\,,z) \in K_+ \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x\,,-y\,,z) \in K_-$$
e da $g(x\,,-y\,,z) = -g(x\,,y\,,z)$ per ogni $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$ dalla formula di cambiamento di variabili si ricava
$$\begin{aligned} J &= \int_{K_+} g(x\,,y\,,z)\, dm_3(x\,,y\,,z) + \int_{K_-} g(x\,,y\,,z)\, dm_3(x\,,y\,,z) = \\ &= \int_{K_+} g(x\,,y\,,z)\, dm_3(x\,,y\,,z) - \int_{K_+} g(x\,,y\,,z)\, dm_3(x\,,y\,,z) = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2t\left([x(t)]^3 + x(t)\right) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta può essere risolta come equazione a variabili separabili o come equazione di Bernoulli. Procediamo in questo secondo modo.
La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = 2tx + 2tx^3, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

ed è di classe $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. La funzione

$$y(t) = [x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha,\beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha,\beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$, risulta

$$y'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}x'(t) = 2t\lambda[x(t)]^{\lambda-1}\left([x(t)]^3 + x(t)\right) = 2t\lambda y(t) + 2t\lambda[x(t)]^{\lambda+2}$$

con $y(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Scegliendo $\lambda = -2$, la funzione $y(t)$ per $t \in (\alpha,\beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = -4tz(t) - 4t \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è

$$z(t) = \mathrm{e}^{-2t^2}\left\{1 - \int_0^t 4s\mathrm{e}^{2s^2}\,ds\right\} = 2\mathrm{e}^{-2t^2} - 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto (α,β) contenente l'origine in cui risulta $z(t) > 0$. Risolvendo tale disequazione si trova

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{-2t^2} - 1, \qquad |t| < \sqrt{\log\sqrt{2}},$$

e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{\sqrt{2 - \mathrm{e}^{2t^2}}}, \qquad |t| < \sqrt{\log\sqrt{2}}.$$