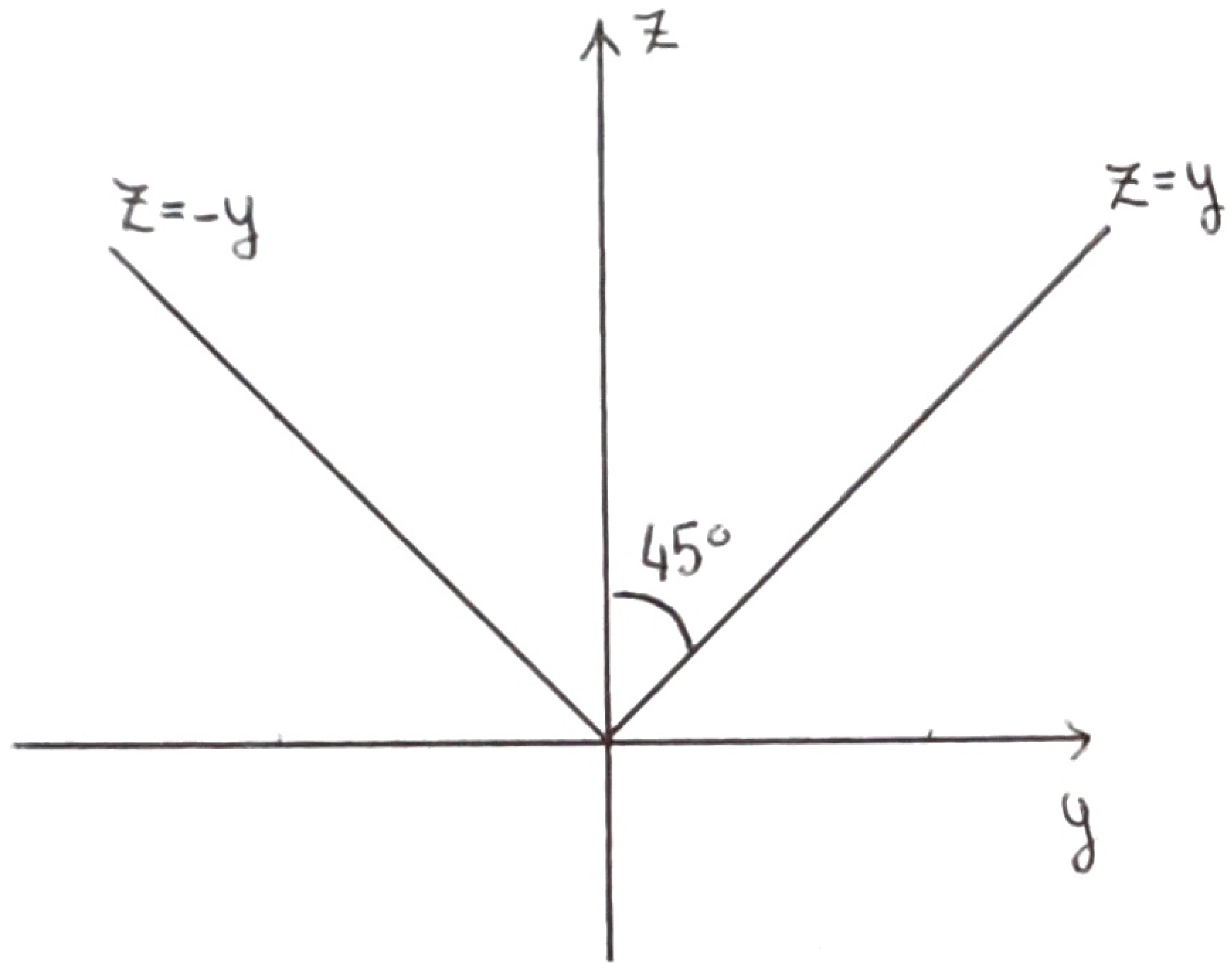
ANGOLO DI APERTURA di un CONO

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ $(a=1)$

sezione su $x=0$ (piano (y,z))

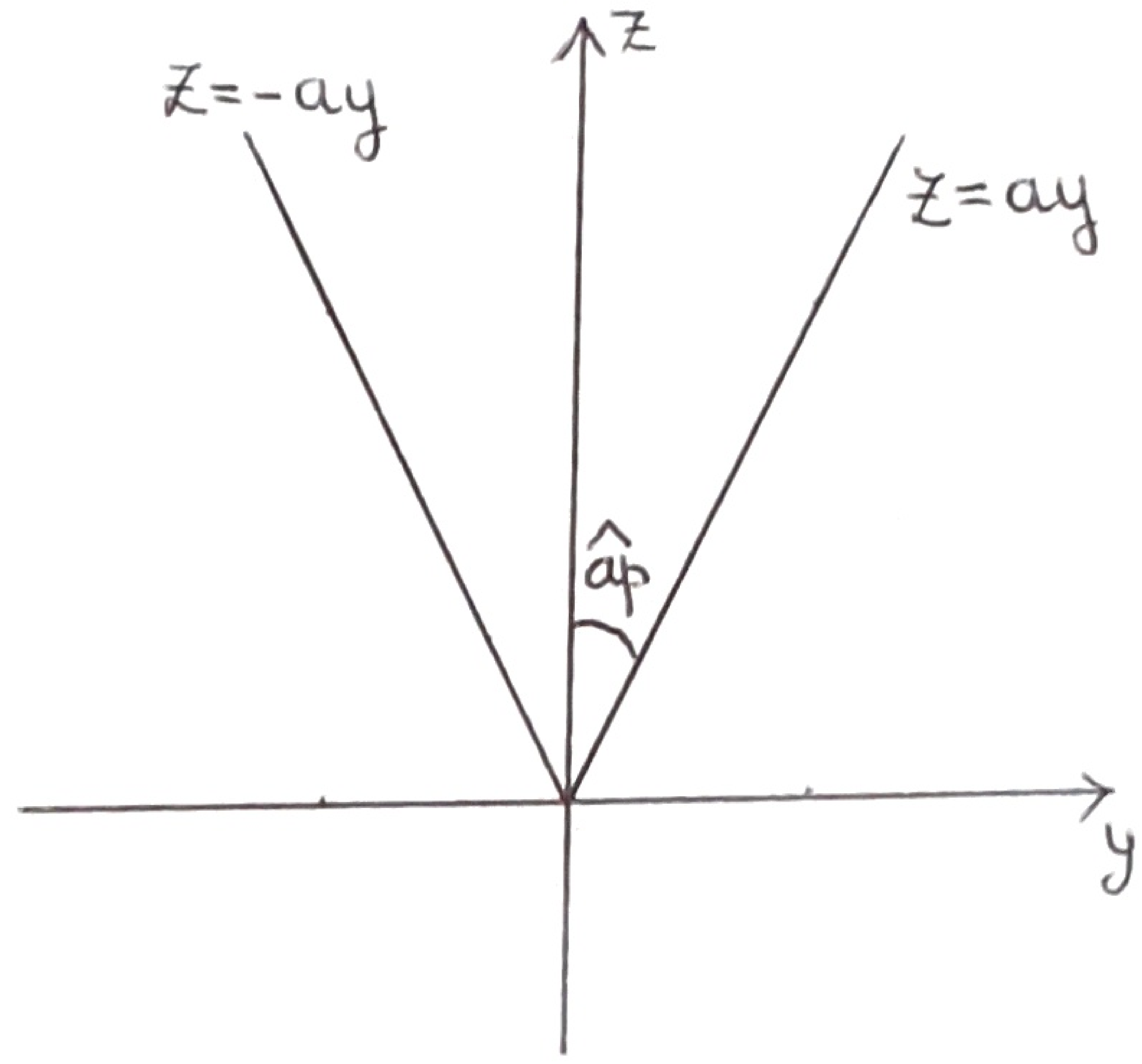
$$z = |y| = \begin{cases} y & y \geq 0 \\ -y & y < 0 \end{cases}$$



$z = a\sqrt{x^2+y^2}$

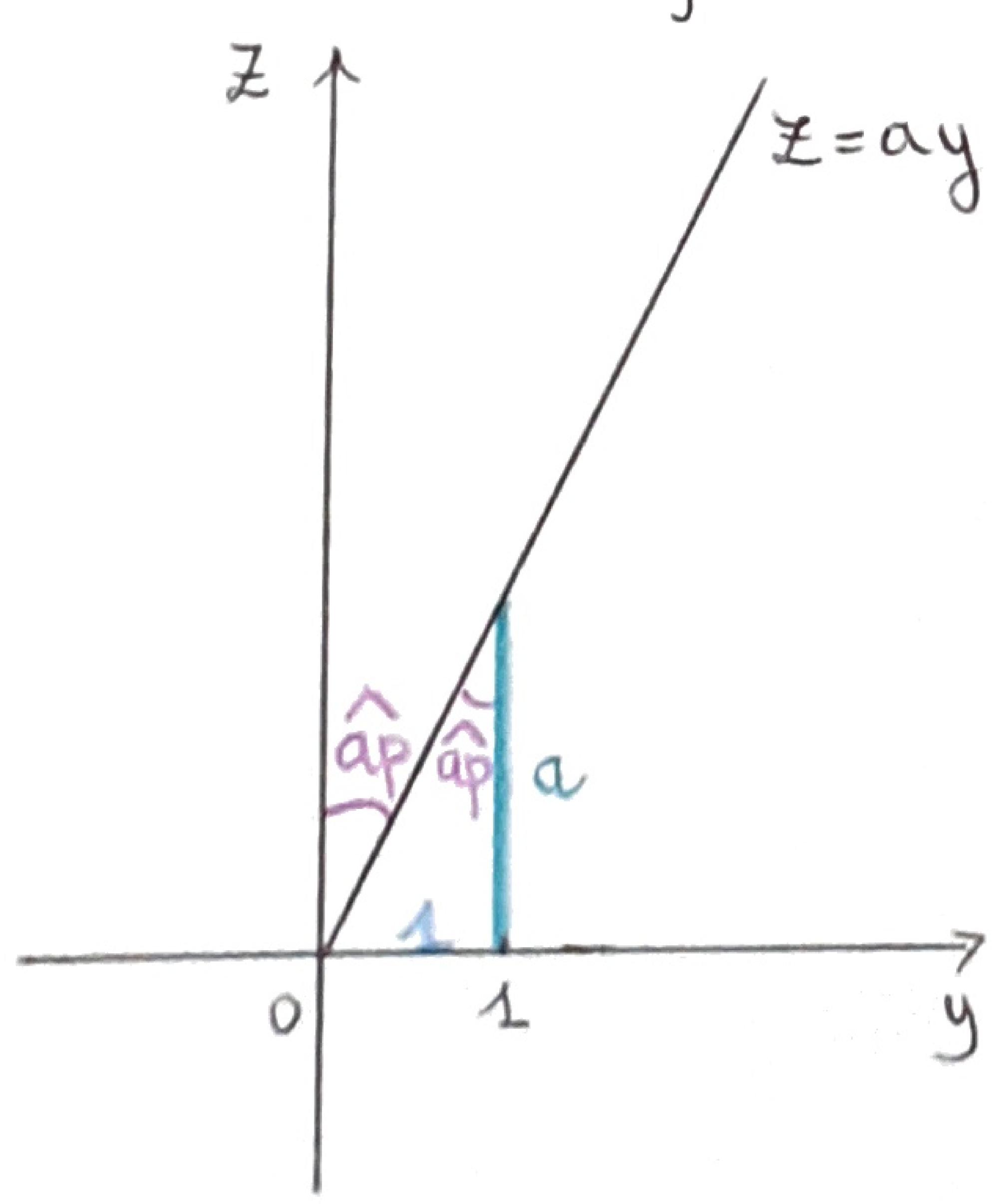
sezione su $x=0$ (piano (y,z))

$$z = a|y| = \begin{cases} ay & y \geq 0 \\ -ay & y < 0 \end{cases}$$



SIGNIFICATO GEOMETRICO della apertura a: l'apertura a è il coefficiente angolare della semiretta (quella con coefficiente angolare positivo) dalla cui rotazione si ottiene il cono.

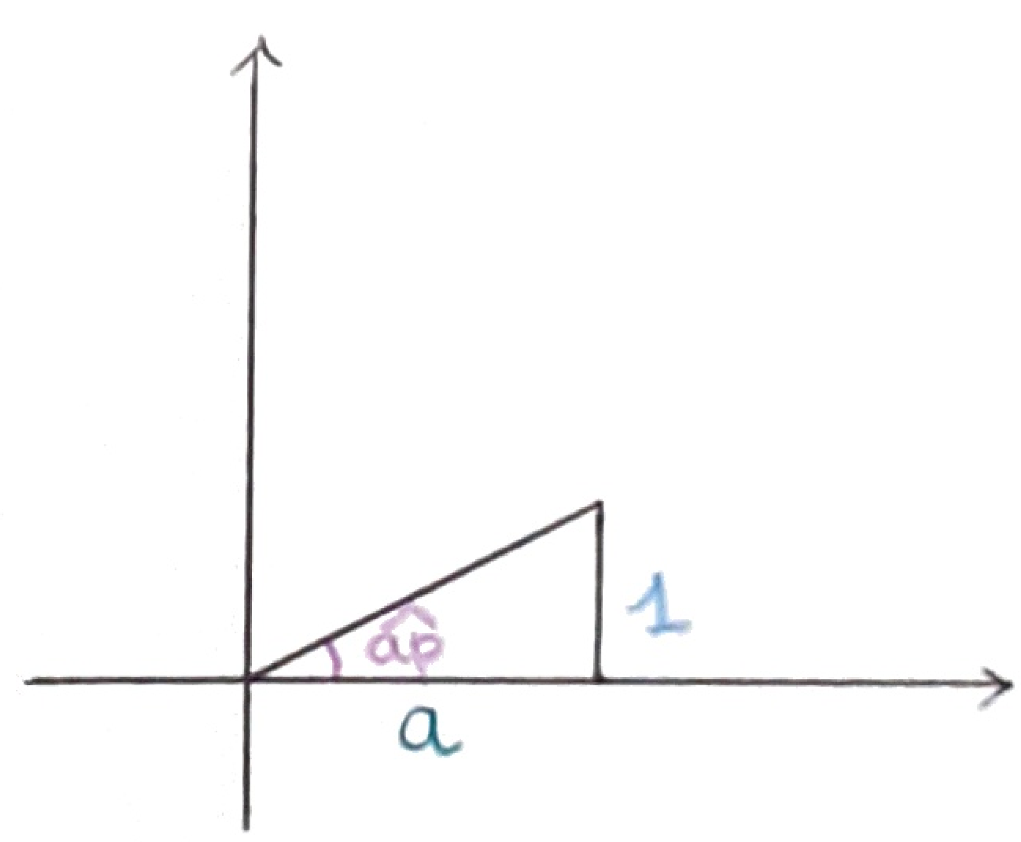
CALCOLO dell'angolo di apertura $\hat{ap}$



$$m = a = \frac{\Delta z}{\Delta y}$$

se $\Delta y = 1$

$a = \Delta z$



$$\tan \hat{ap} = \frac{1}{a}$$

$$\boxed{\hat{ap} = \arctan \frac{1}{a}}$$

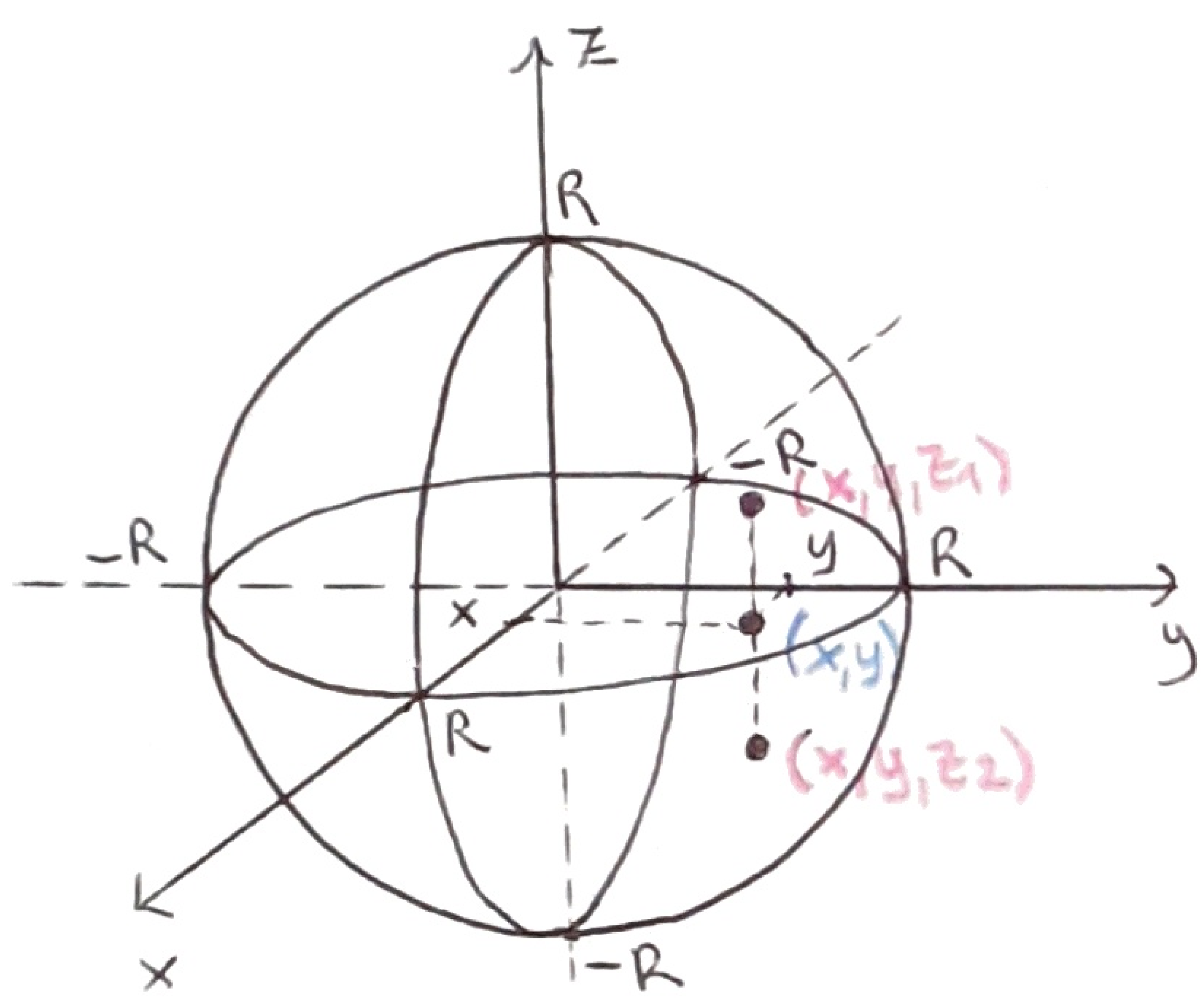
SUPERFICI SFERICHE

Equazione della **SUPERFICIE SFERICA** di $C(0,0,0)$ Raggio R

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$C(x_c, y_c, z_c)$ raggio R $\qquad (x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$

Consideriamo una SUPERFICIE SFERICA di $C(0,0,0)$ e raggio R



Se fosse il GRAFICO di una FUNZIONE (e non lo è) il DOMINIO sarebbe $\boxed{x^2+y^2\le R^2}$ cioè il CERCHIO, interno più bordo, di $C(0,0)$ e raggio R, perchè la superficie sferica "VIVE" solo su questo cerchio.

Una SUPERFICIE SFERICA NON È il grafico di una FUNZIONE perchè ad ogni (x,y) interno al cerchio $(x^2+y^2<R^2)$ corrispondono due valori di z, un valore $z_1>0$ ed un valore $z_2<0$.
Allora dobbiamo considerare separatamente le due METÀ SUPERIORE ed INFERIORE della SUPERFICIE SFERICA.

Partiamo dall'equazione $x^2+y^2+z^2=R^2$ della superficie sferica e, supposto $x^2+y^2\le R^2$, esplicitiamo z per determinare l'equazione della metà superiore e della metà inferiore.

$z^2=R^2-x^2-y^2\ge 0$ $\qquad$ si tratta di un'eq.ne del tipo $z^2=a\ge 0$

(ricordiamo che se $a<0$ $\quad z^2=-1$ IMPOSS
se $a=0$ $\quad z^2=0 \quad z=0$ 1 sol.ne
se $a>0$ $\quad z^2=a \quad z=\pm\sqrt{a}$ 2 sol.ni)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

Quindi $z = +\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ è l'EQ.^{ne} della METÀ SUPERIORE della SUP. SFERICA di $C(0,0,0)$ e raggio R

mentre $z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ è l'eq.^{ne} della METÀ INFERIORE della stessa SUP. SFERICA

Allora in generale

$C(0,0,z_c)$ raggio $R>0$ $\quad z = z_c \pm \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $\quad$ + METÀ SUPERIORE, − METÀ INFERIORE

$C(x_c,y_c,z_c)$ raggio $R>0$ $\quad z = z_c \pm \sqrt{R^2-(x-x_c)^2-(y-y_c)^2}$ $\quad$ + METÀ SUPERIORE, − METÀ INFERIORE

OSSERVAZIONE Se $f(x,y) = z_c \pm \sqrt{R^2-(x-x_c)^2-(y-y_c)^2}$ allora

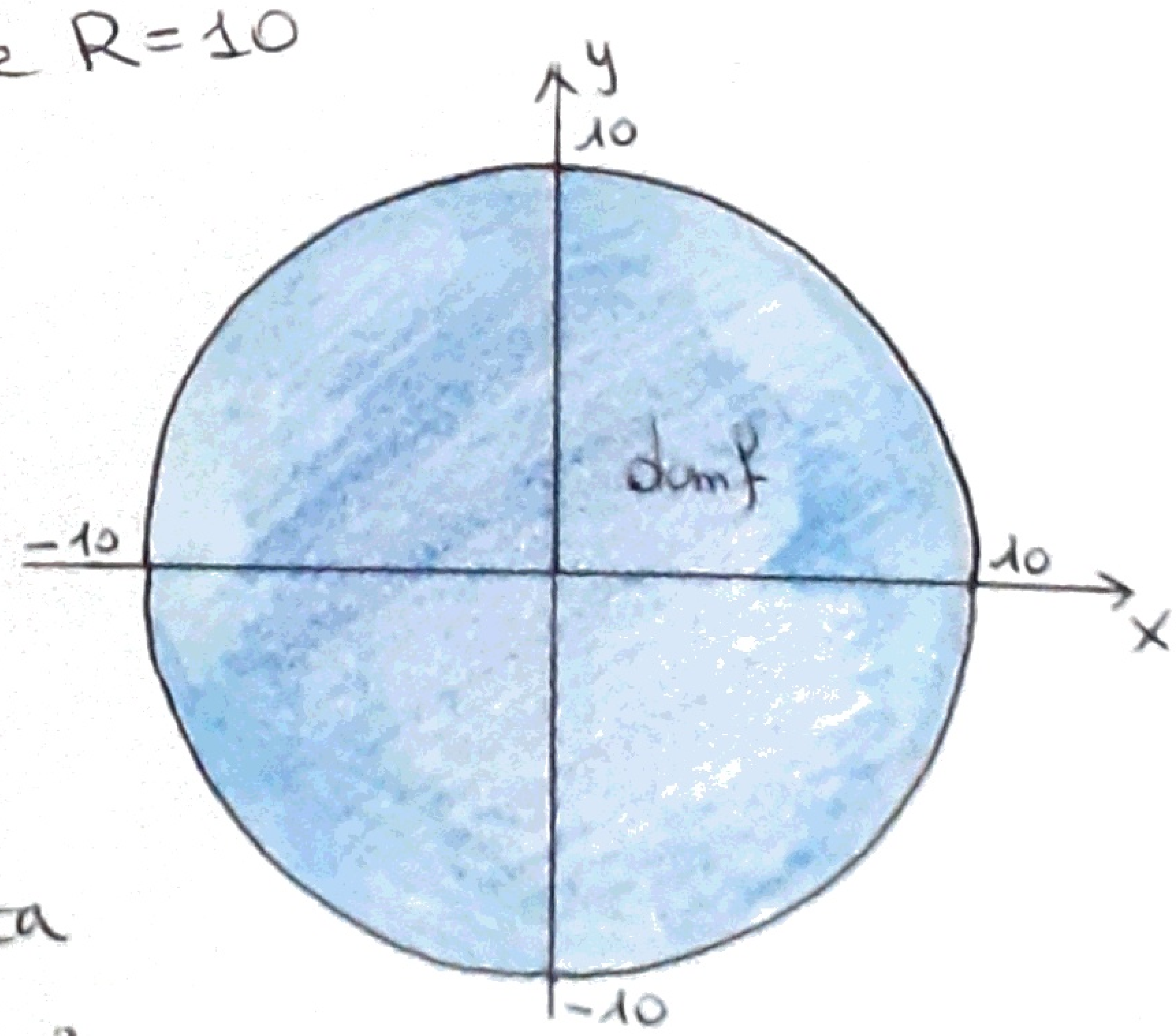
$$\operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : R^2-(x-x_c)^2-(y-y_c)^2 \geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_c)^2+(y-y_c)^2 \leq R^2\}$$

= CERCHIO (interno + bordo) di $C(x_c,y_c)$ e raggio R

ESEMPIO $f(x,y) = -6+\sqrt{100-x^2-y^2}$

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 100-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 100\} =$$

= CERCHIO (interno + bordo) di $C(0,0)$ e $R=10$



equazione del grafico $z = \underbrace{-6}_{z_c} \underbrace{+}_{\text{metà superiore}} \sqrt{\underbrace{100}_{R^2}-x^2-y^2}$

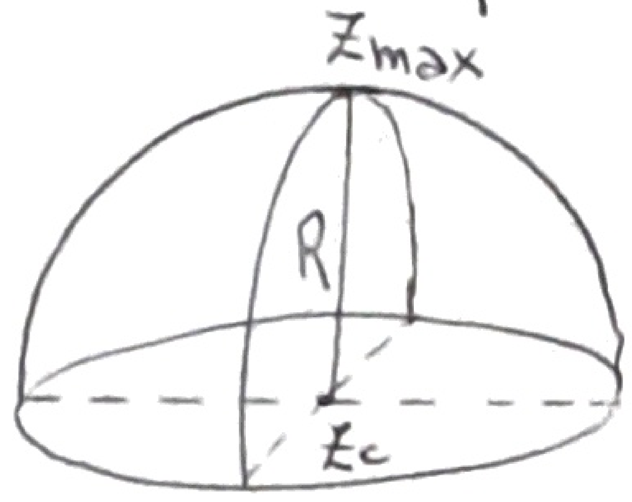
Si tratta della METÀ SUPERIORE della superficie sferica di $C(0,0,-6)$ e $R=10$.

Interseca il piano (x,y) nella circonferenza

$0 = -6+\sqrt{100-x^2-y^2}$ $\quad \sqrt{100-x^2-y^2} = 6 > 0$ elevo $(\cdot)^2$

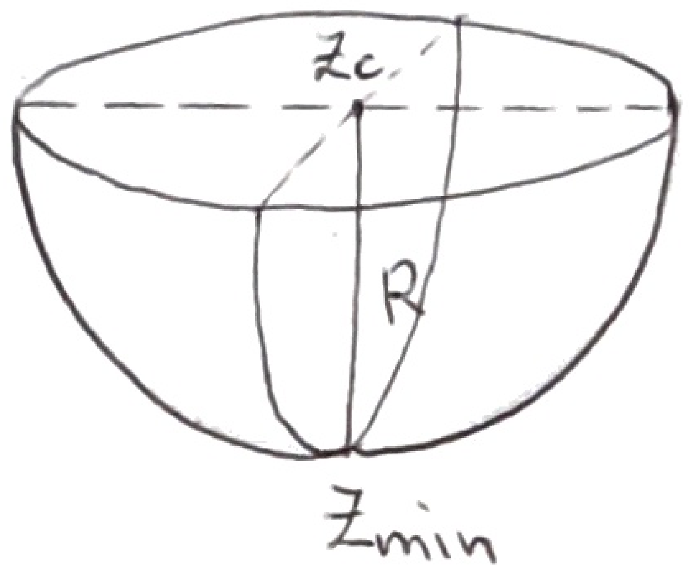
$100-x^2-y^2 = 36$ $\quad x^2+y^2 = 64$ $\quad C(0,0)$ $\quad R=8$

Per la metà superiore è necessario calcolare z_{max}:



$$z_{max} = z_c + R,$$

mentre per la metà inferiore z_{min}



$$z_{min} = z_c - R.$$

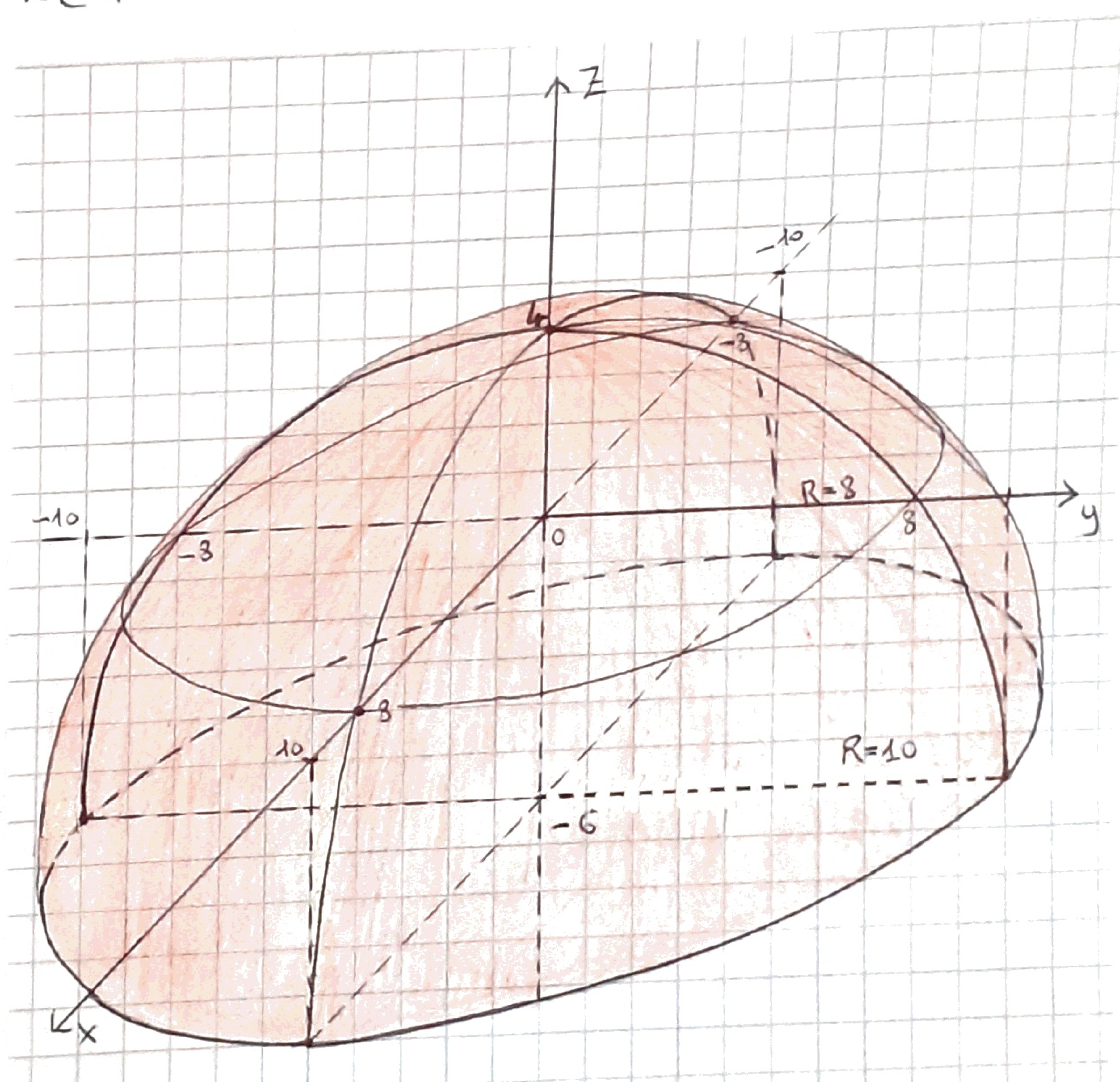
Nel nostro caso $z_{max} = z_c + R = -6 + 10 = 4$

$\max f = 4 = f(0,0)$

il massimo è $z=4$
raggiunto nel punto $(0,0)$
che è il punto di max

$\min f = -6 = f(x,y)$
$\forall (x,y) : x^2+y^2=100$

il minimo è $z=-6$
raggiunto in infiniti punti di minimo che sono tutti i punti della circonf. di $C(0,0)$ e $R=10$.



Dal disegno del grafico si può anche dedurre che $\underline{E_K \neq \emptyset \iff -6 \leq K \leq 4}$.

Proviamo a verificare questo fatto con i calcoli:

$E_K = \{ (x,y) \in \text{dom} f : -6 + \sqrt{100-x^2-y^2} = K \}$ $\quad \sqrt{100-x^2-y^2} = K+6$

1ª condizione

$K+6 \geq 0$

$\boxed{K \geq -6}$

Se $k \geq -6$ $\sqrt{100-x^2-y^2} = k+6 \geq 0$ posso $(\cdot)^2$ ottenendo

$100-x^2-y^2=(k+6)^2$ cioè $x^2+y^2=100-(k+6)^2$ che rappresenta una

circonferenza di $C(0,0)$ e $R=\sqrt{100-(k+6)^2}$ solo a condizione che

<u>2ª condizione</u> $100-(k+6)^2 \geq 0$ cioè $(k+6)^2 \leq 100$ $-10 \leq k+6 \leq 10$

$\boxed{-16 \leq k \leq 4}$

Mettendo a SISTEMA le due condizioni otteniamo $\begin{cases} k \geq -6 \\ -16 \leq k \leq 4 \end{cases}$ $\boxed{-6 \leq k \leq 4}$

Per $-6 \leq k \leq 4$ $E_k \neq \emptyset$ ed è la circonferenza di $C(0,0)$ e $R=\sqrt{100-(k+6)^2}$.

Verifichiamo il risultato ottenuto con ad esempio

$k=-6$ $R=\sqrt{100}=10$ $k=0$ $R=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$

$k=4$ $R=\sqrt{100-100}=0$.

Possiamo trovare la circonferenza a qualsiasi k desideriamo:

ad es. se $k=2$ $R=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$ e così via.

<u>OSSERVAZIONE</u> Se la semi-superficie sferica considerata fosse

stata $z=2+\sqrt{100-x^2-y^2}$, cioè la metà superiore della

superficie sferica di $C(0,0,2)$ e $R=10$, non avrebbe senso

cercare l'intersezione con il piano (x,y). Infatti la superficie

si trova tutta tra $z_C=2$ e $z_{max}=z_C+R=2+10=12$.

Se cerchiamo $\cap\, z=0$ otteniamo $\sqrt{100-x^2-y^2}=-2<0$ che è

IMPOSSIBILE.

<u>ATTENZIONE</u>: elevando erroneamente al quadrato la semisuperficie sferica si trasforma nell'intera superficie sferica che interseca il piano (x,y)!

ESERCIZIO $f(x,y) = 5 - \frac{5}{4}\sqrt{x^2+y^2+8y+16}$

$\text{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+\underbrace{y^2+8y+16}_{(y+4)^2} \geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y+4)^2 \geq 0\}$

$= \mathbb{R}^2$ perchè una somma di due quadrati è sempre maggiore o uguale a 0

$f(x,y) = 5 - \frac{5}{4}\sqrt{x^2+(y+4)^2}$

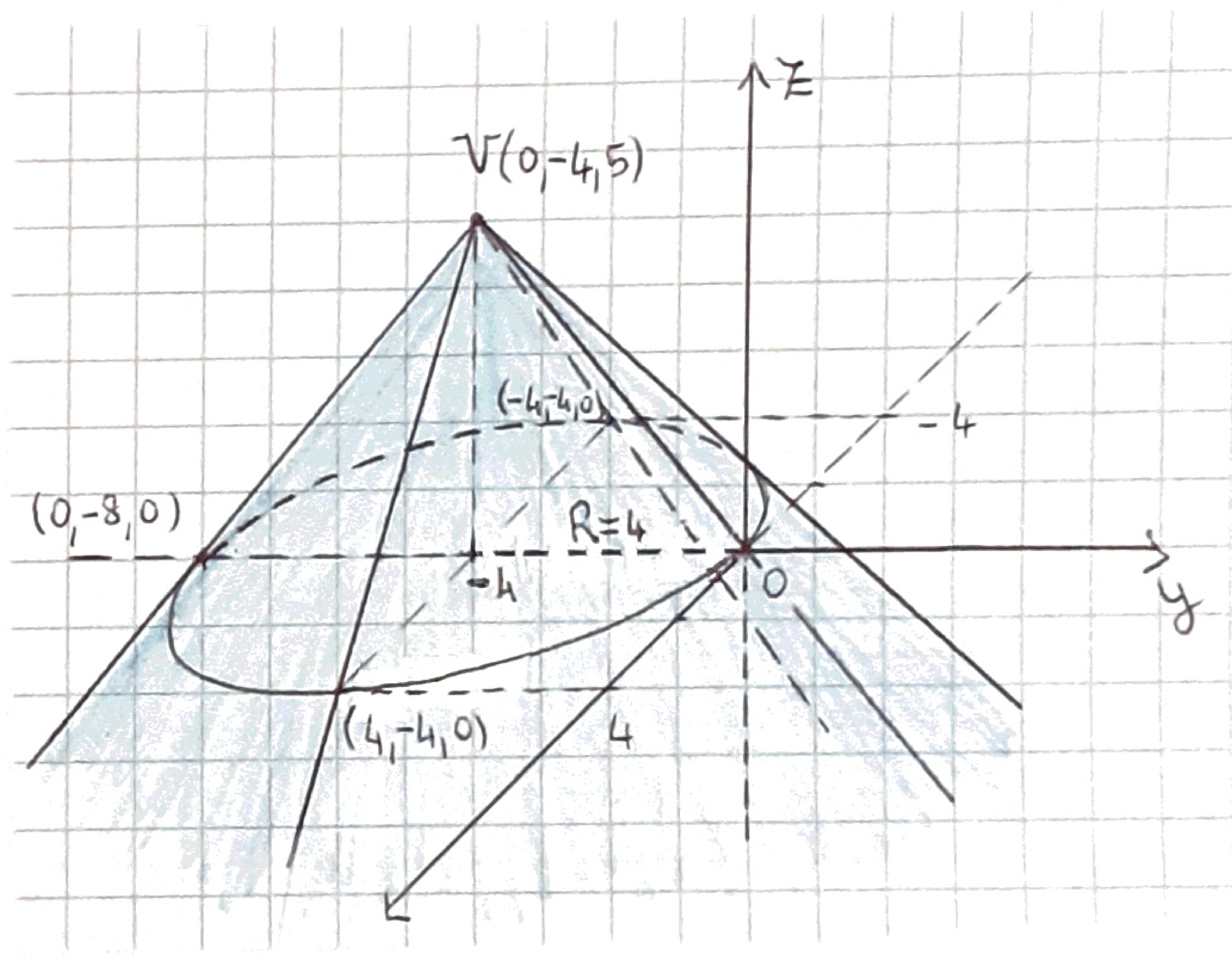
eq^{ne} del grafico $z = 5 - \frac{5}{4}\sqrt{x^2+(y+4)^2}$

si tratta del CONO CIRCOLARE di $V(0,-4,5)$, rivolto verso il basso, di apertura $a = \frac{5}{4}$ ($a>1 \Rightarrow 0<\hat{ap}<45°$, $\hat{ap} = \arctan\frac{4}{5} \approx 38{,}7°$),

che interseca il piano (x,y) nella circonferenza

$0 = 5 - \frac{5}{4}\sqrt{x^2+(y+4)^2}$ $\quad \sqrt{x^2+(y+4)^2} = 4 > 0$ elevo $(\cdot)^2$

$x^2+(y+4)^2 = 16$ $\quad C(0,-4)$ e $R=4$.



Dal disegno possiamo dedurre che

$\max f = 5 = f(0,-4)$ il massimo

e $z=5$ raggiunto nel punto di massimo $(0,-4)$

$\inf f = -\infty$ $\quad$ $\min f$ NON ESISTE

$E_K \neq \emptyset \iff K \leq 5$

Verifichiamo con i calcoli:

$E_K = \{(x,y)\in \underset{\mathbb{R}^2}{\text{dom} f} : 5 - \frac{5}{4}\sqrt{x^2+(y+4)^2} = K\}$ $\quad \frac{5}{4}\sqrt{x^2+(y+4)^2} = 5-K$

$\sqrt{x^2+(y+4)^2} = \frac{4}{5}(5-K)$ <u>Condizione</u> $\frac{4}{5}(5-K) \geq 0$ $\quad 5-K \geq 0$ $\quad \boxed{K \leq 5}$

se ≥ 0 posso $(\cdot)^2$ $\quad x^2+(y+4)^2 = \frac{16}{25}(5-K)^2$ che è <u>SEMPRE</u> (quindi non ci sono altre condizioni) la circonferenza di $C(0,-4)$ e $R = \frac{4}{5}(5-K)$. Ad esempio

$K=0 \quad R=4$

$K=5 \quad R=0$

$K=-5 \quad R=8$.