COGNOME ____________________

NOME ____________________

MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

CORSO AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2017-2018 — PARMA, 13 SETTEMBRE 2018

AN2 - 13|9|18 - 1 -

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore e mezza**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate:

a) Sia $\gamma : [-\frac{3}{2}\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = -5 + \frac{5}{2}\cos t \\ y(t) = -\frac{5}{2}\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [-\frac{3}{2}\pi, 2\pi].$$

La curva percorre la circonferenza di equazione $(x+5)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ $C(-5,0)$ $R = \frac{5}{2}$

dal punto iniziale $(-5, -\frac{5}{2})$ al punto finale $(-\frac{5}{2}, 0)$

in verso orario perchè c'è il segno $-$ davanti a $\frac{5}{2}$ sen t

per 1 giro e 3/4 (giri) perchè $\Delta t = 2\pi - (-\frac{3}{2}\pi) = 2\pi + \frac{3}{2}\pi$

Il vettore tangente nel punto $P_0 = (-5 + \frac{5}{4}\sqrt{2}, \frac{5}{4}\sqrt{2})$ è $\vec{v}_{P_0} = \frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{\imath} - \frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{\jmath}$

La retta tangente in P_0 ha **equazioni parametriche**: a pag. 4

I vettori normali in P_0 sono: ... $\vec{N}_{or} = -\frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{\imath} - \frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{\jmath}$ $\quad \vec{N}_{ant} = \frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{\imath} + \frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{\jmath}$.

b) Considerate la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ $(\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)))$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = -2\cos t \\ y(t) = 3\cos t + 3\,\text{sen}\, t \\ z(t) = 6\cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

i) Il **versore** tangente a γ nel punto $P_0 = (0, -3, 0)$ è: $\vec{T}_{P_0} = -\frac{2}{7}\vec{\imath} + \frac{3}{7}\vec{\jmath} + \frac{6}{7}\vec{k}$

ii) La retta tangente a γ nel punto P_0 ha equazione: a pag. 4.

Svolgim. a pag. 5

c) Considerate la funzione $f(x,y) = 6 - \sqrt{81 - x^2 - y^2}$.

i) Determinate il dominio di f , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f , spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura); disegnate con cura il grafico di f .

iii) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corrrispondente a $(x_0 = -1\,,\, y_0 = 8)$ è ... $z = -\frac{1}{4}x + 2y - \frac{57}{4}$

iv) Il piano passante per $P_1 = (4, -2, -3)$ parallelo al piano tangente trovato al punto iii) ha equazione ... $z = -\frac{1}{4}x + 2y + 2$

d) Considerate la funzione $f(x,y) = -8 + \dfrac{4}{3}\sqrt{45 + x^2 + y^2 - 6x + 12y}$.

i) Determinate il dominio di f , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f , spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura).

iii) Determinate e disegnate l'insieme di livello cui appartiene il punto $(3\,,-9)$.

iv) Determinate e disegnate il gradiente di f nel punto $(3\,,-9)$.

vi) La derivata direzionale di f nel punto $(3\,,-9)$ nella direzione del punto $(-2\,,3)$ vale ... $-\frac{16}{13}$

e) Sia T il triangolo di vertici $(0,4)$, $(0,-4)$ e $(2,0)$ (disegnate l'insieme sul foglio a quadretti).
Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme T come normale rispetto a x ; ripetete come normale rispetto a y :

$T_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2x-4 \le y \le -2x+4\,,\ 0 \le x \le 2\}$

$T_{y,1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -4 \le y \le 0\,,\ 0 \le x \le \frac{1}{2}y + 2\}$

$T_{y,2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 4\,,\ 0 \le x \le -\frac{1}{2}y + 2\}$

L'integrale doppio

$$\int_T x^2\, dxdy \qquad \text{vale} \ldots \frac{16}{3}$$

SOL.^{ni} FOND.
$y_1(x) = e^{-x}\,\mathrm{sen}(3x)$
$y_2(x) = e^{-x}\cos(3x)$

f) Si consideri l'equazione differenziale $\dfrac{1}{5}y''(x) + \dfrac{2}{5}y'(x) + 2y(x) = 2x^3 e^{-x}$.

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono ... $y(x) = c_1 e^{-x}\,\mathrm{sen}(3x) + c_2 e^{-x}\cos(3x)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: eq.^{ne} caratt. $\frac{1}{5}t^2 + \frac{2}{5}t + 2 = 0$ $\quad t^2 + 2t + 10 = 0$ $\quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-9}}{1} = -1 \pm 3i$

La soluzione particolare va cercata nella forma ... $\bar{y}(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\,e^{-x}$

perchè ... il 2°m è nella forma $P_3(x) \cdot e^{-x}$ $\quad (P_3(x) = \text{polinomio di grado } 3 = 2x^3)$
e non si deve moltiplicare per x perchè $t = -1$ non è sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratt.

1) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{9}(x^2 + y^2 - 9)(y + 3).$$

a) Determinate il dominio di f, i punti in cui f vale 0 e il segno di f negli altri punti (illustrate i risultati con un disegno).

b) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

c) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| - 3 \le y \le 3\}.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $g(x,y) = 2 + x^2 + y^2$.

a) Determinate il dominio di g, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g, spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 + x^2 + y^2 \le z \le 6, \ z \ge 3, \ y \le 0\}.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 3\,y''(x) - \frac{3}{2}\,y'(x) = \frac{3}{4}\,\text{sen}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2}) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

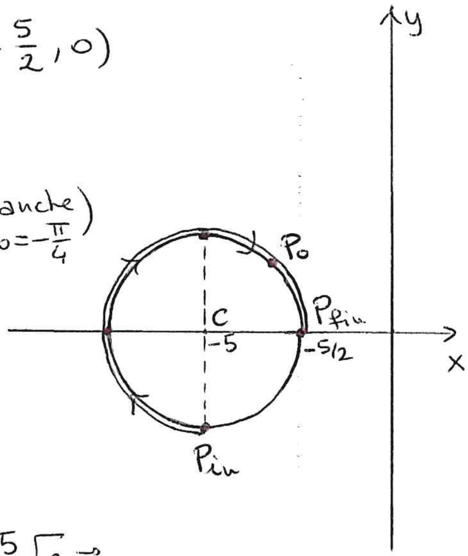
Risposta: ... $y(x) = -3 + \frac{8}{3}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{2}{3}\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

SOLUZIONE

es. 0) a) Si tratta della circonferenza di $C(-5,0)$ e $R=\frac{5}{2}$

$t_{in}=-\frac{3}{2}\pi$ $P_{in}=(-5,-\frac{5}{2})$ $t_{fin}=2\pi$ $P_{fin}=(-\frac{5}{2},0)$

$\circlearrowleft$



$P_0=(-5+\frac{5}{4}\sqrt{2},\frac{5}{4}\sqrt{2})$ corrisponde a $t_0=\frac{7}{4}\pi$ (o anche $t_0=-\frac{\pi}{4}$)

$$\begin{cases} -5+\frac{5}{4}\sqrt{2}=-5+\frac{5}{2}\cos t \\ \frac{5}{4}\sqrt{2}=-\frac{5}{2}\operatorname{sen} t \end{cases} \quad \begin{cases} \cos t=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} t=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$t\in[-\frac{3}{2}\pi,2\pi]$

$\gamma'(t)=(-\frac{5}{2}\operatorname{sen} t,-\frac{5}{2}\cos t)$ $\vec{v}_{P_0}=\gamma'(\frac{7}{4}\pi)=\frac{5}{4}\sqrt{2}\vec{i}-\frac{5}{4}\sqrt{2}\vec{j}$

$$r_{tan}\begin{cases} x=-5+\frac{5}{4}\sqrt{2}+\frac{5}{4}\sqrt{2}t \\ y=\frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{5}{4}\sqrt{2}t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

(retta tangente, equazioni parametriche)

b) $P_0=(0,-3,0)$ corrisponde a $t_0=\frac{3}{2}\pi$

$$\begin{cases} 0=-2\cos t \\ -3=3\cos t+3\operatorname{sen} t \\ 0=6\cos t \end{cases}$$

dalla 1ª e dalla 3ª $\to \cos t=0 \to t=\frac{\pi}{2}$ o $t=\frac{3}{2}\pi$

dalla 2ª $\operatorname{sen} t=-1 \to t=\frac{3}{2}\pi$.

$t\in[0,2\pi]$

$\gamma'(t)=(2\operatorname{sen} t,-3\operatorname{sen} t+3\cos t,-6\operatorname{sen} t)$

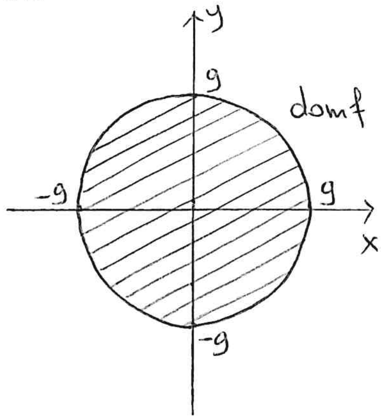
$\vec{v}_{P_0}=\gamma'(\frac{3}{2}\pi)=-2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$

$\|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{(-2)^2+3^2+6^2}=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$

$\vec{T}_{P_0}=-\frac{2}{7}\vec{i}+\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}$

$$r_{tan}\ \text{in}\ P_0\begin{cases} x=-2t \\ y=-3+3t \\ z=6t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

c) i) $\mathrm{dom}\, f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 81\}$ = CERCHIO CHIUSO di $C(0,0)$ e $R=9$



ii) eq.^{ne} del grafico $z = 6-\sqrt{81-x^2-y^2}$

si tratta della metà inferiore della superficie sferica di $C(0,0,6)$ e $R=9$

$z_{min} = 6-9=-3$.

$\cap\,(x,y)$ su $\sqrt{81-x^2-y^2} = \underset{\substack{\vee\\ 0}}{6}$ $\quad 81-x^2-y^2=36 \quad x^2+y^2=45$

circonf di $C(0,0)$ e $R=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\cong 6{,}7$

iii) $P_0=(-1,8,2)$

$z_0 = f(x_0,y_0)=f(-1,8)=6-\sqrt{16}=6-4=2$

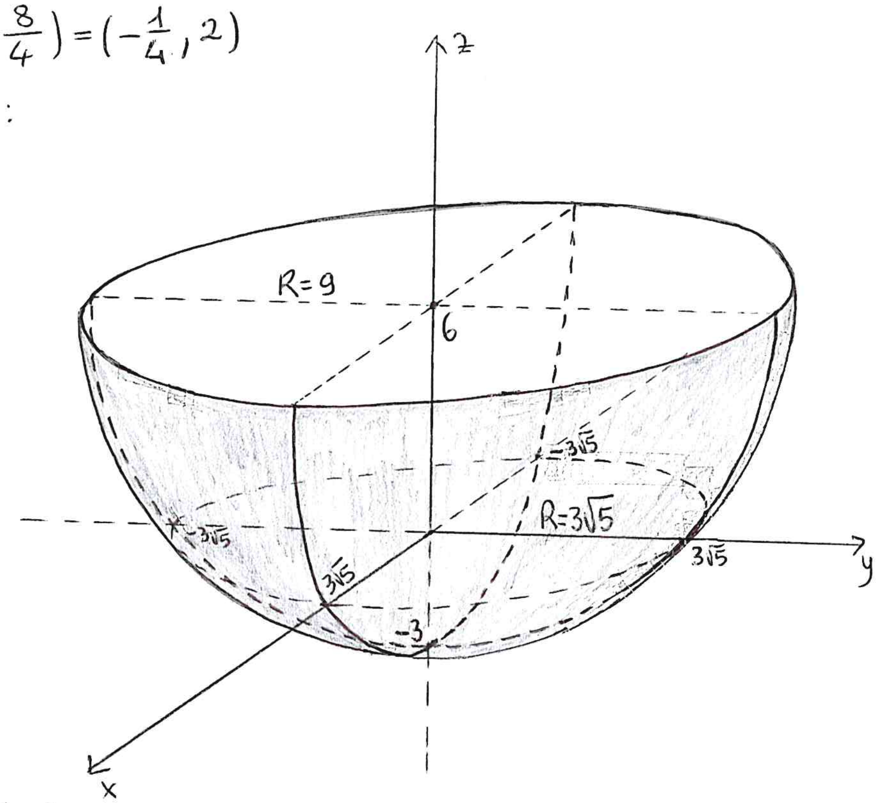
$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{81-x^2-y^2}}, -\frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{81-x^2-y^2}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{81-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{81-x^2-y^2}}\right)$$

$$\nabla f(x_0,y_0) = \nabla f(-1,8) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{8}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}, 2\right)$$

Eq.^{ne} del PIANO TANGENTE:

$z = 2-\frac{1}{4}(x+1)+2(y-8)$

$z = -\frac{1}{4}x+2y-\frac{57}{4}$



iv) se due piani sono paralleli hanno lo stesso vettore normale

$\vec{N}_{\text{pianoTang}} = \left(\frac{1}{4},-2,1\right)$

allora Piano // ha eq.^{ne}

$(P-P_1)\cdot\vec{N}=0$

$(x-4)\frac{1}{4}+(y+2)(-2)+(z+3)\cdot 1=0$

$\frac{1}{4}x-1-2y-4+z+3=0$

$z=-\frac{1}{4}x+2y+2$

d) i) $\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 45 + x^2 + y^2 - 6x + 12y \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 - 9 + (y+6)^2 - 36 + 45 \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y+6)^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$ in quanto una somma di 2 quadrati è sempre ≥ 0.

ii) eq.^{ne} del grafico $z = -8 + \frac{4}{3}\sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2}$

Si tratta di un CONO CIRCOLARE di $V(3,-6,-8)$ rivolto verso l'alto di apertura $a = \frac{4}{3}$ e angolo di apertura $\widehat{ap} = \arctan\frac{3}{4} \simeq 36{,}9°$.

$a > 1 \Rightarrow 0 < \widehat{ap} < 45°$

$\cap\ (x,y)$ su $\frac{4}{3}\sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2} = 8$ $\quad \sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2} = 6 > 0$

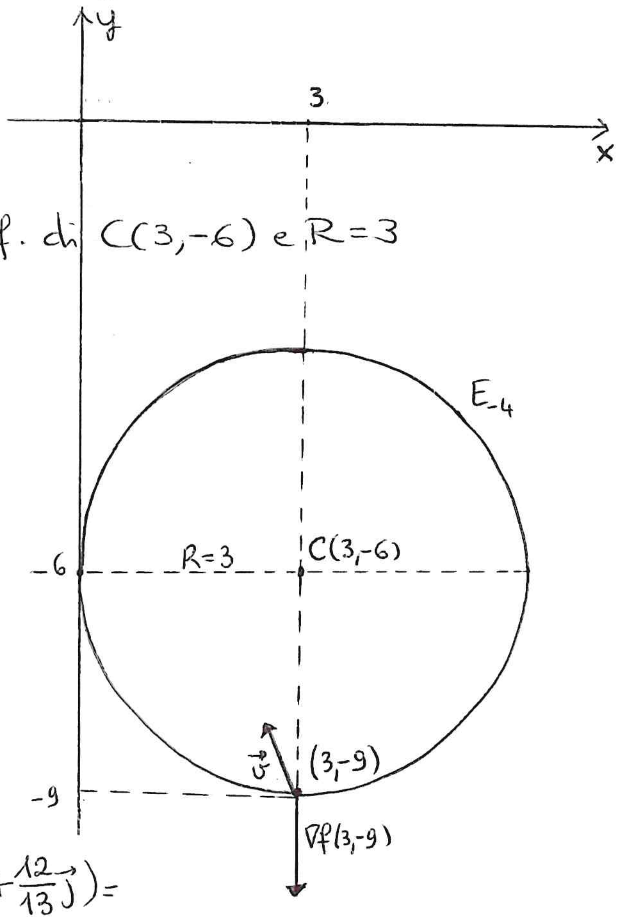
$(x-3)^2 + (y+6)^2 = 36$ circonf di $C(3,-6)$ e $R = 6$

iii) $(3,-9) \in E_K$ per $K = f(3,-9) = -8 + \frac{4}{3}\sqrt{0+9} = -8 + 4 = -4$

$(3,-9) \in E_{-4}$

E_{-4} : $-8 + \frac{4}{3}\sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2} = -4$

$\sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2} = 3$ $\quad (x-3)^2 + (y+6)^2 = 9$ circonf. di $C(3,-6)$ e $R = 3$



iv) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{4}{3}\frac{\cancel{2}(x-3)}{\cancel{2}\sqrt{\dots}}, \frac{4}{3}\cdot\frac{\cancel{2}(y+6)}{\cancel{2}\sqrt{\dots}}\right)$

$= \left(\frac{4}{3}\frac{(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2}}, \frac{4}{3}\frac{(y+6)}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2}}\right)$

$\nabla f(3,-9) = \left(0, \frac{4}{3}\cdot\frac{-3}{3}\right) = \left(0, -\frac{4}{3}\right)$

$= -\frac{4}{3}\vec{j}$

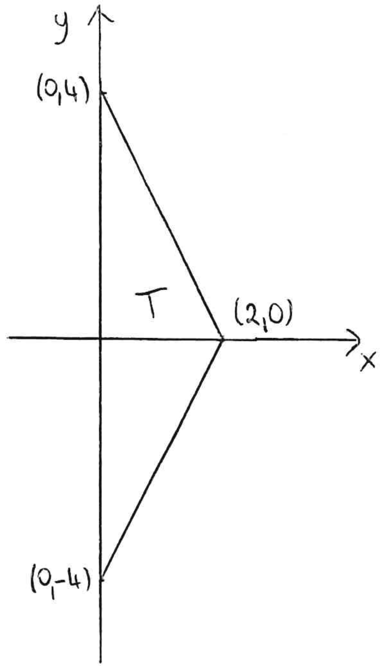
v) $\vec{v} = \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|} = \frac{-5\vec{i} + 12\vec{j}}{\sqrt{25+144}} = -\frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j}$

$P_0 = (3,-9)$ $P_1 = (-2,3)$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,-9) = \nabla f(3,-9) \cdot \vec{v} = \left(-\frac{4}{3}\vec{j}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j}\right) =$

$= -\frac{4}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{\cancel{12}^4}{13} = -\frac{16}{13} \simeq -1{,}23$

e)



retta per $(0,-4)$ e $(2,0)$ $m=2$

$y=-4+2x=2x-4 \quad \rightarrow x=\frac{1}{2}y+2$

retta per $(0,4)$ e $(2,0)$ $m=-2$

$y=-2x+4 \quad \rightarrow x=-\frac{1}{2}y+2$

$$\int_T x^2 dx dy = \int_0^2 \left(\int_{2x-4}^{-2x+4} x^2 dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left(\int_{2x-4}^{-2x+4} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 x^2 \underbrace{(-2x+4-(2x-4))}_{-4x+8} dx = \int_0^2 x^2(-4x+8)\, dx = \int_0^2 (-4x^3+8x^2)\, dx =$$

$$= \left[-x^4 + \frac{8}{3}x^3 \right]_0^2 = -16 + \frac{64}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

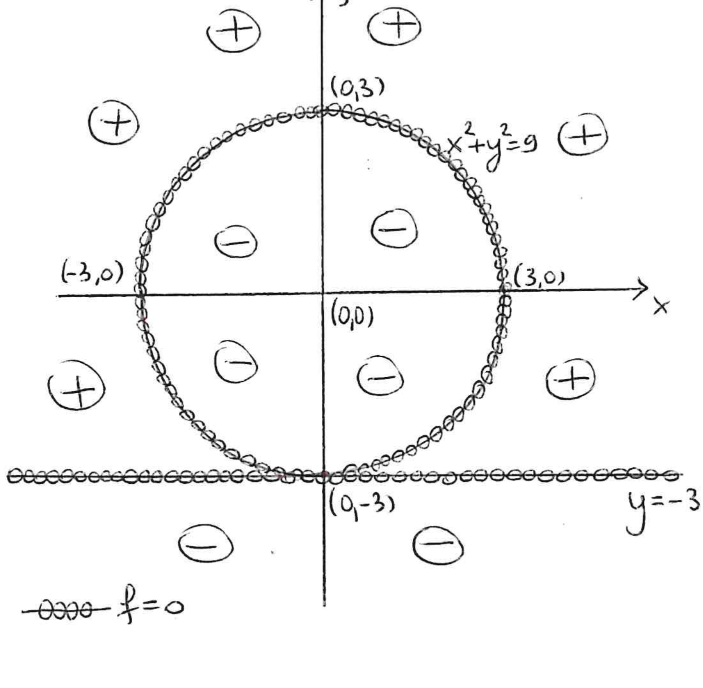
ES.1) a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

$f(x,y)=0 \iff \frac{1}{9}(x^2+y^2-9)(y+3)=0 \iff x^2+y^2=9$ o $y=-3$

quindi $f=0$ sulla circonf. $C(0,0)$ $R=3$
e sulla retta orizzontale $y=-3$

$f(x,y)>0 \iff \begin{cases} x^2+y^2>9 \\ y>-3 \end{cases}$ o $\begin{cases} x^2+y^2<9 \\ y<-3 \end{cases}$

cioè fuori dalla circonf e sopra $y=-3$, oppure dentro la circonf. e sotto $y=-3$ (quest'ultima possibilità non si presenta mai)



b) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{9} \cdot 2x \cdot (y+3), \frac{1}{9} \cdot 2y\,(y+3) + \frac{1}{9}(x^2+y^2-9) \right) =$

$$= \left(\frac{2}{9} x (y+3), \frac{2}{9} y\,(y+3) + \frac{1}{9}(x^2+y^2-9) \right)$$

P.ti stazionari : $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{2}{9} x\,(y+3) = 0 \\ \frac{2}{9} y\,(y+3) + \frac{1}{9}(x^2+y^2-9) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1^a \iff x=0 \text{ o } y=-3 \\ \dots \end{matrix}$$

Se $x=0$ la 2ª diventa $\frac{2}{9}y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}y^2 - 1 = 0$ $\quad \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}y - 1 = 0$

$y^2+2y-3=0 \quad (y-1)(y+3)=0 \iff y=-3$ o $y=1$ $\quad$ 2 P.ti $P_0 = (0,-3)$ $P_1 = (0,1)$

Se $y=-3$ la 2ª diventa $\frac{1}{9}(x^2+9-9)=0 \quad \frac{1}{9}x^2=0 \quad x^2=0 \quad x=0$ e troviamo di nuovo P_0.

Quindi ci sono 2 P.TI STAZIONARI : $P_0=(0,-3)$ e $P_1=(0,1)$.

STUDIO DEI PUNTI

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}(y+3) & \frac{2}{9}x \\ \frac{2}{9}x & \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

P_0 $\quad Hf(0,-3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ $\quad \det Hf(0,-3) = 0$

non possiamo dire nulla sulla natura del punto (ma dallo studio degli zeri e del segno risulta che non è né un p.to di max, né un punto di min e neanche un punto di sella)

in qualunque intorno di $(0,-3)$ esistono sia punti in cui $f>0$ sia $f<0$ e $f(0,-3)=0$

non esiste una retta su cui $(0,-3)$ sia MIN LOC.

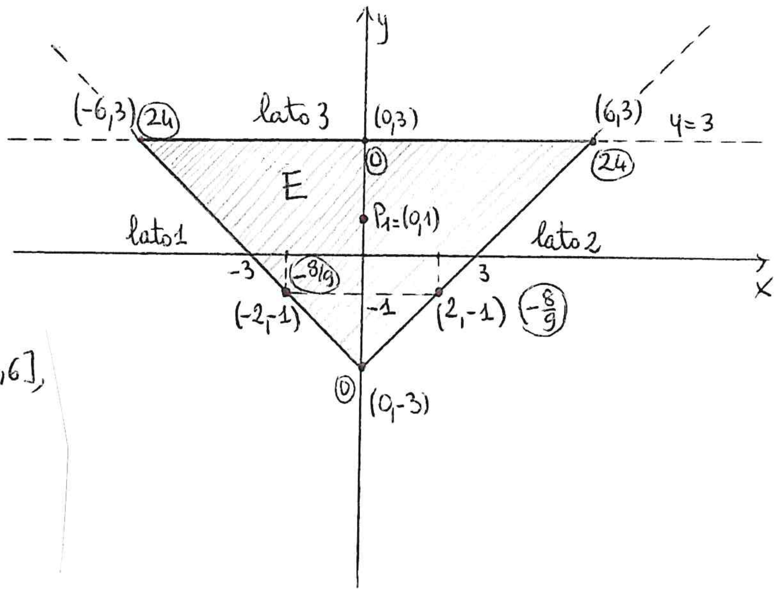
$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad \det Hf(0,1) = \frac{32}{27} > 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{8}{9} > 0$$

$\Rightarrow P_1 = (0,1)$ è un <u>PUNTO</u> di <u>MINIMO LOCALE</u>

b) <u>1° passo</u> E è il TRIANGOLO di VERTICI $(0,-3)$, $(6,3)$, $(-6,3)$

($y \le 3$ sotto la retta orizzontale $y=3$, $y \ge |x|-3$ sopra il grafico del valore assoluto $y=|x|$ abbassato di 3 che passa per $(-6,3)$ $(-3,0)$ $(0,-3)$ $(3,0)$ $(6,3)$). Tutti i lati del triangolo sono compresi in E.

AN2 - 13/9/18 - 9



E è CHIUSO in quanto contiene tutti i punti del suo bordo (costituito dai 3 lati del triangolo: $y=3$ $x\in[-6,6]$, $y=-x-3$ $x\in[-6,0]$ e $y=x-3$ $x\in[0,6]$)

E è LIMITATO perchè $E\subset B_7(0,0)$ (i punti di E più distanti dall'origine sono $(\pm 6,3)$ con distanza $\sqrt{45}=3\sqrt{5}\approx 6,7$).

La funzione f è CONTINUA su $\mathbb{R}^2$ (e quindi anche su E) in quanto prodotto di una costante per un polinomio di 2° grado in x e y per un polinomio di 1° grado in y. Allora per il Teorema di Weierstraß siamo sicuri che f ammette MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI su E.

2° passo: in $P_1=(0,1)$ c'è un PUNTO di MINIMO LOCALE INTERNO ad E in cui $f(0,1)=-\frac{32}{9}\simeq -3,56$.

3° passo: Studio del bordo di E

① $\begin{cases} x=t \\ y=-t-3 \end{cases}$ $t\in[-6,0]$ $g_1(t)=f(t,-t-3)=\frac{1}{9}(t^2+(-t-3)^2-9)(-t-3+3)=$

$=\frac{1}{9}(t^2+t^2+6t+\cancel{9}-\cancel{9})(-t)=$

$=\frac{1}{9}(2t^2+6t)(-t)=-\frac{2}{9}t^3-\frac{2}{3}t^2$

$g_1'(t)=-\frac{2}{3}t^2-\frac{4}{3}t$ $g_1'(t)=0 \iff \frac{2}{3}t(t+2)=0 \iff t=0$ o $t=-2$

tempi $t=-6$ $t=-2$ $t=0$ PUNTI: $(-6,3)$ $(-2,-1)$ $(0,-3)$

VALORI: $f(-6,3)=24$ $f(-2,-1)=-\frac{4}{9}\cdot 2=-\frac{8}{9}$ $f(0,-3)=0$

② $\begin{cases} x=t \\ y=t-3 \end{cases}$ $t\in[0,6]$ $g_2(t)=f(t,t-3)=\frac{1}{9}(t^2+(t-3)^2-9)(t-3+3)=$

$=\frac{1}{9}(2t^2-6t)t=\frac{2}{9}t^3-\frac{2}{3}t^2$

AN2 - 13/9/18 - 10

$g_2'(t) = \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t \quad g_2'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}t(t-2)=0 \Leftrightarrow t=0 \text{ o } t=2$

tempi $t=0 \quad t=2 \quad t=6$ PUNTI: $(0,-3) \quad (2,-1) \quad (6,3)$

VALORI $f(0,-3)=0 \quad f(2,-1) = -\frac{8}{9} \quad f(6,3) = 24$

(3) $\begin{cases} x=t \\ y=3 \end{cases} \quad t\in[-6,6] \quad g_3(t) = f(t,3) = \frac{1}{9}(t^2+\cancel{9}-\cancel{9})(3+3) =$
$= \frac{2}{3}t^2$

$g_3'(t) = \frac{4}{3}t \quad g_3'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$

tempi $t=-6 \quad t=0 \quad t=6$ PUNTI $(-6,3) \quad (0,3) \quad (6,3)$

valori $f(-6,3)=24 \quad f(0,3)=0 \quad f(6,3)=24$

4° passo conclusione: nel punto di MIN LOCALE INTERNO risulta $f(0,1) = -\frac{32}{9}$, sul ∂E f è compresa tra $-\frac{8}{9}$ e 24, allora

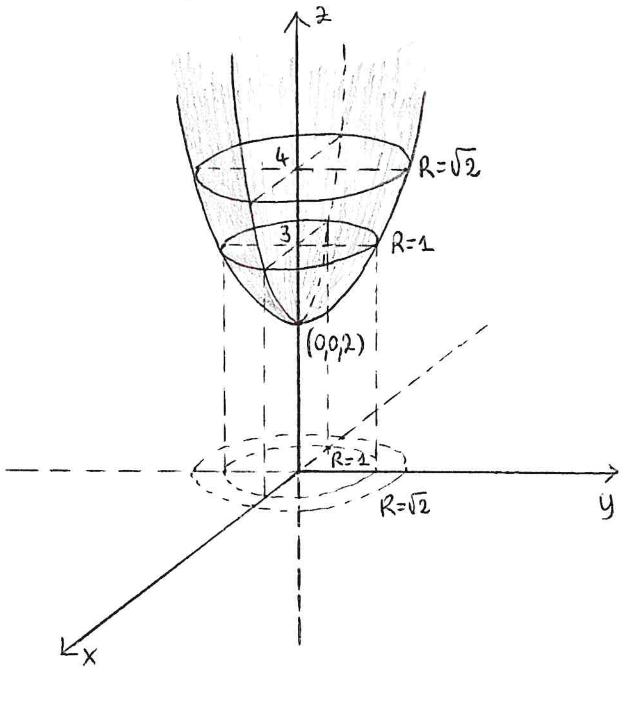
$\max_E f(x,y) = 24 = f(\pm 6,3) \quad \min_E f(x,y) = -\frac{32}{9} = f(0,1)$ -

ES.2) a) dom $g = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

b) eq.ne del grafico di g : $z = (x^2+y^2)+2$ si tratta di un paraboloide circolare di $V(0,0,2)$ rivolto verso l'alto (è il paraboloide di base $z=x^2+y^2$ spostato in alto di 2)

$\cap (x,y)\ \phi$ se $x^2+y^2=1 \quad z=3$

$z=4$ su $4 = x^2+y^2+2$
$x^2+y^2=2 \quad R=\sqrt{2}$



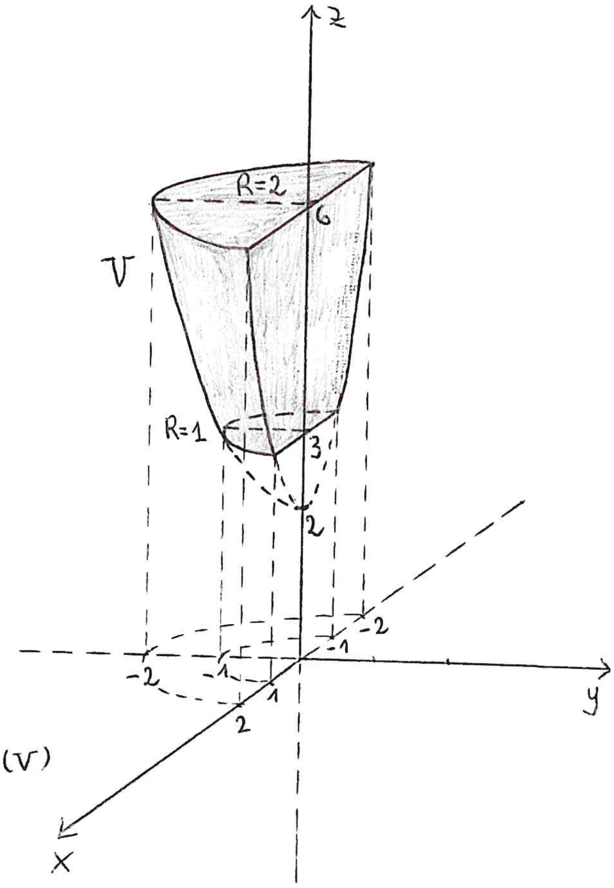
AN2 - 13/9 U8 - 11

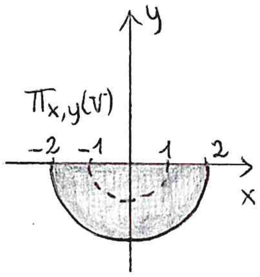
c) Se $z=6 \to 6 = 2+x^2+y^2$

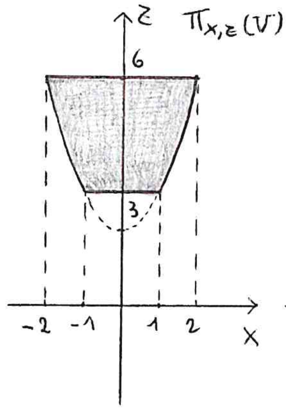
$x^2+y^2=4 \quad R=2$

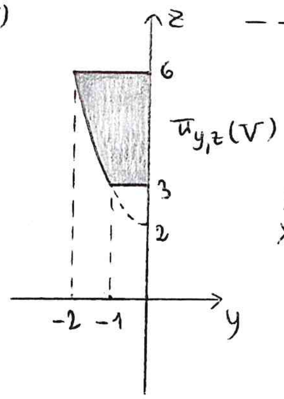
A $z=3 \to R=1$ (visto prima)

Dobbiamo considerare la porzione di paraboloide (solido pieno) compresa tra $z=3$ e $z=6$ con la condizione $y \le 0$ che divide il solido a metà.









d) volume $V = \displaystyle\int_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ y \le 0}} (6-3)\,dx\,dy + \int_{\substack{1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ y \le 0}} 6-(2+x^2+y^2)\,dx\,dy =$

$$= \int_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ y \le 0}} 3\,dx\,dy + \int_{\substack{1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ y \le 0}} (4-(x^2+y^2))\,dx\,dy = 3 \text{ area}\left(\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ y \le 0}\right) +$$

$$+ \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_1^2 (4-\rho^2)\rho\,d\rho = 3 \cdot \frac{1}{2}\pi \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{R^2} + \pi \int_1^2 (4\rho-\rho^3)\,d\rho =$$

$$= \frac{3}{2}\pi + \pi \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{2}\pi + \pi\left(8-4-\left(2-\frac{1}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\pi + \left(2+\frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3}{2}\pi + \frac{9}{4}\pi = \boxed{\frac{15}{4}\pi}$$

ES.3) eq.^{ne} omog. associata $3y''(x) - \frac{3}{2}y'(x) = 0$

eq.^{ne} caratt. $3t^2 - \frac{3}{2}t = 0 \quad 3t(t - \frac{1}{2}) = 0 \quad t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{1}{2}$

SOL.^{ni} FOND. $y_1(x) = e^{0 \cdot x} = 1, \; y_2(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ (*)

Sol.^{ni} dell'eq.^{ne} omogenea: $y(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare: $\bar{y}(x) = A\,\mathrm{sen}(\frac{x}{2}) + B\cos(\frac{x}{2})$ perchè il 2° m dell' eq.^{ne} $f(x) = \frac{3}{4}\mathrm{sen}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})$ è una combinazione lineare di seno e coseno di $\frac{x}{2}$ $(M = \frac{3}{4}, N = \frac{1}{4})$ e non si deve moltiplicare per x perchè le due sol.^{ni} fondamentali dell'omogenea ((*) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^{\frac{1}{2}x}$) <u>non sono</u> $\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$ e $\cos(\frac{x}{2})$.

$\bar{y}'(x) = \frac{1}{2}A\cos(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}B\,\mathrm{sen}(\frac{x}{2}) \quad \bar{y}''(x) = -\frac{1}{4}A\,\mathrm{sen}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{4}B\cos(\frac{x}{2})$

Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo

$$3\left(-\frac{1}{4}A\,\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2}) - \frac{1}{4}B\cos(\tfrac{x}{2})\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}A\cos(\tfrac{x}{2}) - \frac{1}{2}B\,\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2})\right) = \frac{3}{4}\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2}) + \frac{1}{4}\cos(\tfrac{x}{2}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{3}{4}A\,\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2}) - \frac{3}{4}B\cos(\tfrac{x}{2}) - \frac{3}{4}A\cos(\tfrac{x}{2}) + \frac{3}{4}B\,\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2}) = \frac{3}{4}\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2}) + \frac{1}{4}\cos(\tfrac{x}{2})$$

$$\left(\frac{3}{4}B - \frac{3}{4}A - \frac{3}{4}\right)\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2}) + \left(-\frac{3}{4}B - \frac{3}{4}A - \frac{1}{4}\right)\cos(\tfrac{x}{2}) = 0 \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R}}$$

Poichè una combinazione lineare di seno e coseno dello stesso argomento è $= 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \iff$ entrambi i coeff. sono nulli otteniamo

$$\begin{cases} \frac{3}{4}B - \frac{3}{4}A - \frac{3}{4} = 0 \\ -\frac{3}{4}B - \frac{3}{4}A - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1^a + 2^a: \; -\frac{3}{2}A - 1 = 0 \\ B = A + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \bar{y}(x) = -\frac{2}{3}\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2}) + \frac{1}{3}\cos(\tfrac{x}{2})$$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne}: $y(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{2}x} - \frac{2}{3}\mathrm{sen}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{3}\cos(\frac{x}{2}) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$y'(x) = \frac{1}{2}c_2 e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{3}\cos(\frac{x}{2}) - \frac{1}{6}\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$

Pb. di Cauchy:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{3} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -c_2 - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}c_2 = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$\boxed{\text{SOL.}^{ne}}$ $\boxed{y(x) = -3 + \frac{8}{3}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{2}{3}\mathrm{sen}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{3}\cos(\frac{x}{2})}$