COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	B
MATRICOLA ⎿⎿⎿⎿⎿⎿⎿	1 2 3 4
CORSO AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL	

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2017-2018 — PARMA, 24 LUGLIO 2018

AN2-24/7/18-1

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare la risposta** .

0) **PARTE PRELIMINARE**

Completate:

a) Sia $\gamma : [-\frac{3}{2}\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da

Svolgim. a pag. h

$$\begin{cases} x(t) = -4 + 4\cos t \\ y(t) = -2 + 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [-\frac{3}{2}\pi, \pi].$$

$C(-4,-2)$ $a=4$ $b=2$

La curva percorre ...l'ellisse... di equazione ... $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

in verso ...antiorario... perchè ...davanti a sent c'è il segno positivo (con + anche davanti a cost)

per ...1 e $\frac{1}{4}$... giri perchè ... $\Delta t = \pi - (-\frac{3}{2}\pi) = \pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi = \underbrace{2\pi}_{1\text{ giro}} + \frac{\pi}{2}$) $\frac{1}{4}$ giro

Il vettore tangente nel punto $P_0 = (-4 - 2\sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$ è ... $\vec{v}_{P_0} = -2\sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$

La retta tangente in P_0 ha **equazioni parametriche**: ... $r_{tan} \begin{cases} x = -4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}t \\ y = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

I **versori normali** in P_0 sono: ... VERS $\vec{N}_{or} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ VERS $\vec{N}_{ant} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

La retta normale in P_0 ha **equazione cartesiana**: ... $y = -2x - 10 - 3\sqrt{2}$

La retta normale in $P_1 = (-4, -4)$ ha equazione: ... $x = -4$

AN2 - 24/7/18 - 2 -

b) La **lunghezza** della curva $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

Svolgim. a pag. 5

$$\begin{cases} x(t) = 6 \cos t \\ y(t) = -6 \operatorname{sen} t \\ z(t) = 1 + 2t \end{cases} \qquad t \in [0, 4\pi] \qquad \text{vale} \ldots 8\pi\sqrt{10}$$

c) Considerate la funzione $f(x,y) = 3 + \sqrt{12y + 36 - x^2 - y^2 + 6x}$.

A pag. 5-6 i) Determinate il dominio di f , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f , spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x, y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura); stabilite per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ risulta $E_k \neq \emptyset$.

iii) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corr ispondente a $(x_0 = 4, y_0 = 2)$ è ... $z = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y + \frac{21}{2}$

iv) La derivata direzionale di f nel punto $(x_0 = 4, y_0 = 2)$ nella direzione individuata dall'angolo $\theta = \frac{7}{4}\pi$ vale ... $-\frac{5}{16}\sqrt{2}$

d) Sia T il triangolo di vertici $(-2,5)$, $(2,1)$ e $(-6,5)$ (disegnate l'insieme sul foglio a quadretti). Dis. ezette a pag. 6
Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme T come normale rispetto a x ; ripetete come normale rispetto a y :

E_x $\quad E_{1,x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -6 \leq x \leq -2, \ -\frac{1}{2}x + 2 \leq y \leq 5\}$

$E_{2,x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, \ -\frac{1}{2}x + 2 \leq y \leq -x + 3\}$

$E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq y \leq 5, \ -2y + 4 \leq x \leq -y + 3\}$

e) Si consideri l'equazione differenziale $\frac{1}{2}y''(x) - \frac{1}{2}y'(x) + \frac{1}{8}y(x) = -2\cos(\frac{x}{2})$.

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 x e^{x/2}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: ... eq.^{ne} caratt. $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} = 0$ $\Delta = 0$ $t_{1,2} = \frac{1}{2}$ con molt. 2 SOL.^{ni} FOND. $y_1(x) = e^{x/2}$, $y_2(x) = x e^{x/2}$

La soluzione particolare va cercata nella forma $\bar{y}(x) = A \operatorname{sen}(\frac{x}{2}) + B \cos(\frac{x}{2})$

perchè ... il 2°m è una combinazione lineare di seno e coseno di $\frac{x}{2}$ e non si deve moltiplicare per x perchè le due sol.^{ni} FOND <u>NON SONO</u> $\operatorname{sen}(\frac{x}{2})$ e $\cos(\frac{x}{2})$

f) Si consideri l'equazione differenziale $\frac{1}{3}y''(x) + 3y(x) = (5x^3 - 6x)e^{3x}$.

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = c_1 \operatorname{sen}(3x) + c_2 \cos(3x)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: eq.^{ne} caratt. $\frac{1}{3}t^2 + 3 = 0$ $t^2 = -9$ $(\Delta < 0)$ $t = \pm 3i$ $\alpha = 0$ $\beta = 3$ SOL.^{ni} FOND. $y_1(x) = \operatorname{sen}(3x)$ $y_2(x) = \cos(3x)$

La soluzione particolare va cercata nella forma .. $\bar{y}(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{3x}$

perchè il 2°m è il prodotto di un polinomio di grado 3 per $e^{\alpha x}$ con $\alpha = 3$ e $\alpha = 3$ NON È sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratteristica (le sol.^{ni} sono $t = \pm 3i$).

AN2 - 24/7/18 - 3 -

1) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione

A pag. 4

$$f(x,y) = \ -9 + 10\sqrt{\frac{17}{4} - x^2 + y}\ .$$

a) Determinate il dominio di f e rappresentatelo nel piano in modo che risulti perfettamente chiaro quali punti vi appartengono.

b) Determinate l'insieme di livello cui appartiene il punto $(-2, 6)$; poi disegnatelo nel piano.

c) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre l'insieme di livello e utilizzatele per determinare il vettore tangente nel punto $(-2, 6)$. Disegnate il vettore tangente.

d) Determinate il gradiente di f nel punto $(-2, 6)$ e disegnatelo.

e) Determinate le direzioni nelle quali la derivata direzionale di f nel punto $(-2, 6)$ risulta nulla. Disegnate le direzioni trovate.

---

2) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione

A pag. 8-9-10

$$f(x,y) = \frac{1}{10}(x^2 + y^2 - 16)(x + 1)\,.$$

a) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

b) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 36\,,\ x \geq 0\}\,.$$

---

3) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $g(x,y) = 12 - \frac{7}{4}\sqrt{x^2 + y^2}$.

A pag. 11-12

a) Determinate il dominio di g, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g, spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x, y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16\,,\ 2 \leq z \leq 12 - \frac{7}{4}\sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ x \geq 0\,,\ y \leq 0\}\,.$$

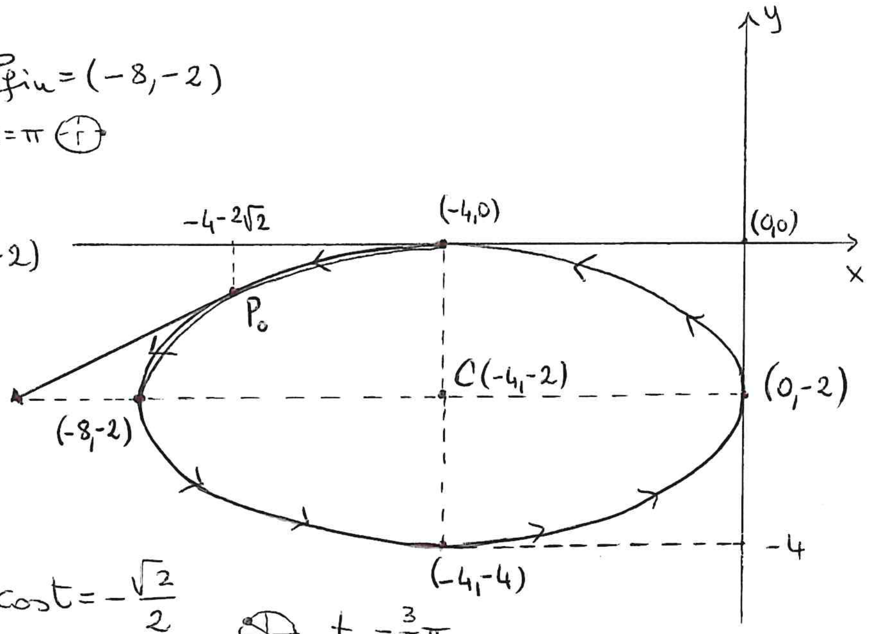
Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

AN2 - 24 luglio 2018 - Soluzione

ES.0) a) $P_{in} = (-4,0)$ $\quad P_{fin} = (-8,-2)$

$t = -\frac{3}{2}\pi \quad\quad t = \pi$



Si tratta dell'ellisse di $C(-4,-2)$

e semiassi $a=4, b=2$

$P_0 = (-4-2\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$
$\quad \approx -6{,}8 \quad \approx -0{,}6$

corrisponde a $t_0 = \frac{3}{4}\pi$

$$\begin{cases} \cancel{-4} - 2\sqrt{2} = \cancel{-4} + 4\cos t \\ \cancel{-2} + \sqrt{2} = \cancel{-2} + 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad \begin{cases} \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{sen}\,t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad t_0 = \frac{3}{4}\pi$$

$\gamma'(t) = (-4\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t)$ $\quad \vec{v}_{P_0} = \gamma'(\frac{3}{4}\pi) = -2\sqrt{2}\,\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j}$ (punta del vettore in $(-4-4\sqrt{2}, -2)$
$\approx -9{,}7$)

eq.^{ni} param r_{tau} $\begin{cases} x = -4-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,t \\ y = -2+\sqrt{2}-\sqrt{2}\,t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$r_{normale}$ $\quad m_{tau} = \frac{-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ $\quad m_{norm} = -2$ $\quad y = -2+\sqrt{2}-2(x+4+2\sqrt{2})$

r_{norm}: $y = -2x - 10 - 3\sqrt{2}$

Vettori NORMALI $\quad \vec{N}_{ant} = \sqrt{2}\,\vec{i} - 2\sqrt{2}\,\vec{j} \quad \vec{N}_{or} = -\sqrt{2}\,\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{j}$

$\|\vec{v}_{P_0}\| = \|\vec{N}\| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+2} = \sqrt{10} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$

VERS $\vec{N}_{ant} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ $\quad$ VERS $\vec{N}_{or} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

$P_1 = (-4,-4)$ corrisponde a $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \begin{cases} \cancel{-4} = \cancel{-4} + 4\cos t \\ -4 = -2 + 2\,\mathrm{sen}\,t \\ t \in [-\frac{3}{2}\pi, \pi] \end{cases} \quad \begin{cases} \cos t = 0 \\ \mathrm{sen}\,t = -1 \\ t \in [-\frac{3}{2}\pi, \pi] \end{cases} \quad t_0 = -\frac{\pi}{2}$

$\vec{v}_{P_1} = 4\vec{i}$ $\quad m_{tau} = \frac{0}{4} = 0$ (r_{tau} orizzontale)

m_{norm} NON ESISTE r_{norm} è VERTICALE

r_{norm}: $x = -4$

b) $\gamma'(t) = (-6\,\mathrm{sen}\,t, -6\cos t, 2)$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-6\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (-6\cos t)^2 + 2^2} = \sqrt{36\,\mathrm{sen}^2 t + 36\cos^2 t + 4} =$$

$$= \sqrt{36\underbrace{(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t)}_{=1} + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$L(\gamma) = \int_0^{4\pi} 2\sqrt{10}\,dt = 8\pi\sqrt{10} \simeq 79{,}5$$

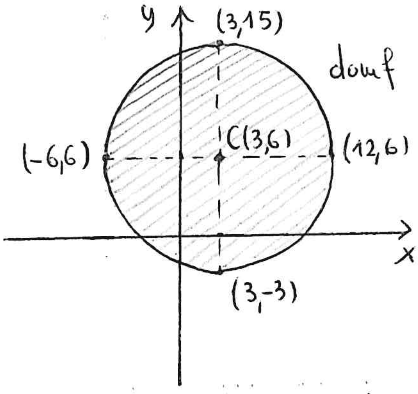
c) i) $\mathrm{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 12y + 36 - x^2 - y^2 + 6x \geq 0\} =$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 6x + y^2 - 12y - 36 \leq 0\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 - 9 + (y-6)^2 - 36 - 36 \leq 0\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y-6)^2 \leq 81\} = \text{CERCHIO CHIUSO}$$

(interno + bordo) di $C(3,6)$ e $R=9$



ii) graf f: $z = 3 + \sqrt{81 - (x-3)^2 - (y-6)^2}$

si tratta della METÀ SUPERIORE della SUPERFICIE SFERICA di $C(3,6,3)$ e $R=9$

$z_{cima} = 3 + 9 = 12$ $\quad E_K \neq \emptyset \Leftrightarrow K \in [3,12]$, da cui $\bigcap_{\text{piano } z=0} (x,y)\ \phi$

iii) $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-\cancel{2}(x-3)}{\cancel{2}\sqrt{81-(x-3)^2-(y-6)^2}}, \frac{-\cancel{2}(y-6)}{\cancel{2}\sqrt{81-(x-3)^2-(y-6)^2}} \right) =$$

$$= \left(-\frac{(x-3)}{\sqrt{81-(x-3)^2-(y-6)^2}}, -\frac{(y-6)}{\sqrt{81-(x-3)^2-(y-6)^2}} \right)$$

$$\nabla f(4,2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{64}}, -\frac{-4}{\sqrt{64}} \right) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\sqrt{81-(4-3)^2-(2-6)^2} = \sqrt{81-1-16} = \sqrt{64}$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 3 + \sqrt{64} = 3 + 8 = 11$$

Eq.$^{\text{ne}}$ Piano tangente:

$$z = 11 - \frac{1}{8}(x-4) + \frac{1}{2}(y-2)$$

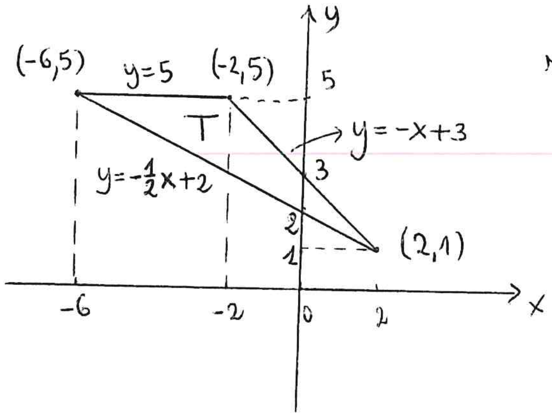
$$\boxed{z = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y + \frac{21}{2}}$$

iii) $\vec{v}_\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$\frac{7}{4}\pi$ $\quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_\theta} = \nabla f(4,2)\cdot\vec{v}_\theta = -\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{16}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = -\frac{5}{16}\sqrt{2}$

$\simeq -0,44$

d)



retta per $(-2,5)$ e $(2,1)$ $\quad m = -\frac{4}{4} = -1$

$y = -x+3 \quad (x = -y+3)$

retta per $(-6,5)$ e $(2,1)$ $\quad m = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \left(\begin{array}{l} 2y = -x+4 \\ x = -2y+4 \end{array} \right)$

AN2 - 24/7/18 - 7

ES. 1)

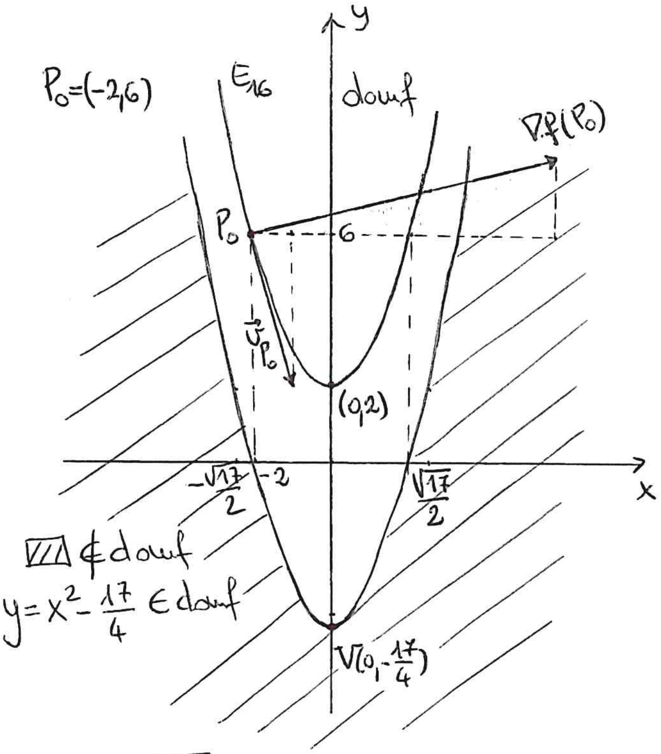
a) $\operatorname{dom} f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{17}{4} - x^2 + y \geq 0 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - \frac{17}{4} \right\}$

Il dominio è costituito dai punti al di sopra della parabola di equazione $y = x^2 - \frac{17}{4}$, parabola compresa nel dominio -

Si tratta della parabola di base abbassata di $\frac{17}{4} = 4,25$

$V\left(0, -\frac{17}{4}\right)$ verso l'alto per $\left(\pm\frac{\sqrt{17}}{2}, 0\right)$
$\approx 2,06$

$x = \pm\frac{5}{2} \rightarrow y = \frac{25}{4} - \frac{17}{4} = 2$



b) $(-2,6) \in E_K$ per $K = f(-2,6) =$

$= -9 + 10\sqrt{\frac{17}{4} - 4 + 6} = -9 + 10\sqrt{\frac{25}{4}} =$

$= -9 + 10 \cdot \frac{5}{2} = -9 + 25 = 16$

$(-2,6) \in E_{16}$

E_{16} : $16 = -9 + 10\sqrt{\frac{17}{4} - x^2 + y} \iff \sqrt{\frac{17}{4} - x^2 + y} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} > 0$

$\underset{(\cdot)^2}{\iff} \frac{17}{4} - x^2 + y = \frac{25}{4} \iff y = x^2 + 2$ parabola di $V(0,2)$ verso l'alto per $(\pm 1, 3)$ e $(\pm 2, 6)$

c) $\gamma \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $P_0 = (-2,6)$ corrisponde a $t_0 = -2$ $\begin{cases} -2 = t_0 \\ 6 = 2 + t_0^2 \end{cases}$ $\gamma'(t) = (1, 2t)$

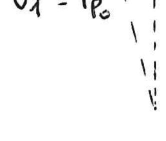
$\vec{v}_{P_0} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$

d) $\nabla f(x,y) = \left(10 \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{\frac{17}{4} - x^2 + y}}, \overset{5}{\cancel{10}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{17}{4} - x^2 + y}} \right)$ $\nabla f(P_0) = \left(\frac{20}{\frac{5}{2}}, \frac{5}{5/2} \right) = (8,2)$

$\nabla f(P_0) = 8\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

e) Le direzioni nelle quali la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ è nulla sono quelle tangenti all'insieme di livello in P_0 ossia

$\vec{v}_1 = \vec{T}_{P_0}$ versore tangente e $\vec{v}_2 = -\vec{T}_{P_0}$ $\quad \|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{17}$



$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{\imath} - \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{\jmath}$ $\quad \vec{v}_2 = -\frac{1}{\sqrt{17}}\vec{\imath} + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{\jmath}$

ES. 2) a) $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{10}(2x)(x+1) + \frac{1}{10}(x^2+y^2-16),\ \frac{1}{10}(2y)(x+1) \right)$$

P.ti STAZIONARI

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x(x+1) + \frac{1}{10}(x^2+y^2-16) = 0 \\ \frac{1}{5}y(x+1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ y=0 \ \text{o} \ x=-1 \end{cases}$$

Se $\boxed{y=0} \to 1^a$ eq.ne $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{8}{5} = 0 \quad 3x^2+2x-16=0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{3} = \frac{-1 \pm 7}{3} \begin{matrix} \nearrow x_1 = -\frac{8}{3} \\ \searrow x_2 = \frac{6}{3} = 2 \end{matrix}$$

$P_0 = (-\frac{8}{3}, 0) \quad P_1 = (2,0)$

Se $\boxed{x=-1} \to 1^a$ eq.ne $0 + \frac{1}{10}(1+y^2-16) = 0 \quad y^2 = 15 \quad y = \pm\sqrt{15}$

$P_2 = (-1, \sqrt{15}) \quad P_3 = (-1, -\sqrt{15})$ 4 PUNTI STAZIONARI

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} & \frac{1}{5}y \\ \frac{1}{5}y & \frac{1}{5}(x+1) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}x$$

$Hf(-\frac{8}{3},0) = \begin{pmatrix} -7/5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\det Hf(-\frac{8}{3},0) = \frac{7}{15} > 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{7}{5} < 0$ $\Rightarrow$ P_0 è P.to di Massimo locale

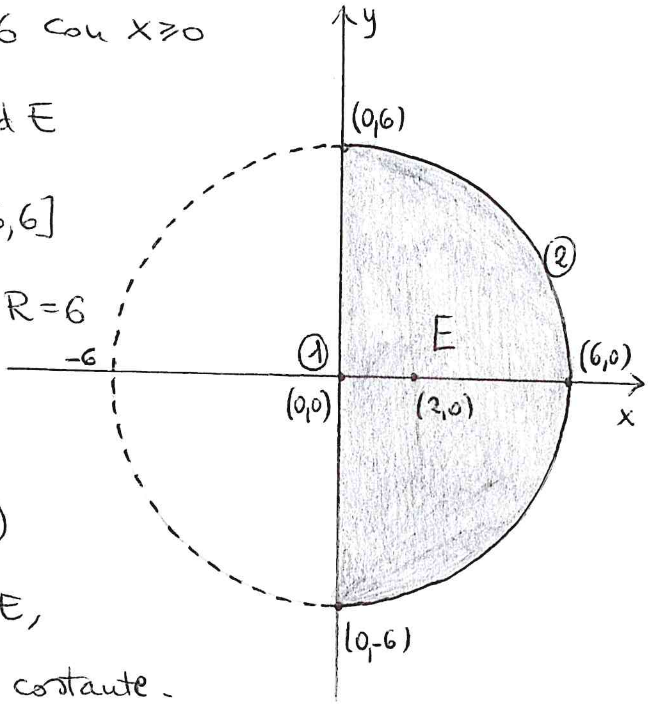
$Hf(2,0) = \begin{pmatrix} 7/5 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ $\det Hf(2,0) = \frac{21}{25} > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{7}{5} > 0 \Rightarrow$ P_1 è P.to di Minimo locale

$Hf(-1,\sqrt{15}) = \begin{pmatrix} -2/5 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-1,\sqrt{15}) = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5} < 0 \Rightarrow P_2$ è P.to di SELLA

$Hf(-1,-\sqrt{15}) = \begin{pmatrix} -2/5 & -\frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-1,-\sqrt{15}) = -\frac{3}{5} < 0 \Rightarrow P_3$ è P.to di SELLA

b) $\underset{\text{1° passo}}{}$ E è il SEMICERCHIO di $C(0,0)$, $R=6$ con $x \geq 0$



E è CHIUSO perchè ∂E appartiene ad E

(∂E è costituito dall'asse y per $y \in [-6,6]$

e dalla semicirconferenza di $C(0,0)$ e $R=6$

per $x \geq 0$)

E è LIMITATO ($E \subset B_7(0,0)$: i punti

della semicirconferenza distano 6 da $(0,0)$)

f è continua su $\mathbb{R}^2$, e quindi anche su E,

perchè prodotto di 2 polinomi per una costante.

Allora per il Teorema di Weierstrass siamo sicuri che f

ammette MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI su E.

2° passo Il punto $P_1 = (2,0)$ è di MINIMO LOCALE per f ed è INTERNO

a E : $f(2,0) = \frac{1}{10}(4-16) \cdot 3 = -\frac{36}{10} = -\frac{18}{5} = -3{,}6$

3° passo: Studio del bordo di E

$\gamma_1 \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ $t \in [-6,6]$ $g_1(t) = f(0,t) = \frac{1}{10}(t^2 - 16) = \frac{1}{10}t^2 - \frac{8}{5}$

$g_1'(t) = \frac{1}{5}t$ $g_1'(t) = 0 \iff t = 0$

TEMPI	$t=-6$	$t=0$	$t=6$
PUNTI	$(0,-6)$	$(0,0)$	$(0,6)$

VALORI $f(0,-6) = f(0,6) = \frac{1}{10}(36-16) = 2$

$f(0,0) = -\frac{16}{10} = -\frac{8}{5} = -1{,}6$

$\gamma_2 \begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 6\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $g_2(t) = f(6\cos t, 6\,\text{sen}\,t) =$

$= \frac{1}{10}(\underbrace{36\cos^2 t + 36\,\text{sen}^2 t}_{36\underbrace{(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}_{=1}} - 16)(6\cos t + 1) =$

$$g_2(t) = \frac{1}{10}(36-16)(6\cos t+1) = 2(6\cos t+1)$$

$$g'_2(t) = 2(-6\,\text{sen}\,t) = 0 \iff \text{sen}\,t = 0 \iff t = 0$$

TEMPI	$t=-\frac{\pi}{2}$	$t=0$	$t=\frac{\pi}{2}$
PUNTI	$(0,-6)$	$(6,0)$	$(0,6)$

VALORI $f(0,-6) = f(0,6) = 2$

$$f(6,0) = \frac{1}{10}(36-16)(6+1) = 2\cdot 7 = 14$$

<u>4° passo</u> Conclusione

In $(2,0)$ f vale $-\frac{18}{5}$, sul ∂E f è compresa tra $-\frac{8}{5}$ e 14,

allora

$$\min_E f(x,y) = -\frac{18}{5} = f(2,0) \qquad \max_E f(x,y) = 14 = f(6,0)$$

Studio del ∂E con i <u>MOLTIPLICATORI di LAGRANGE</u>:

① $g(x,y) = x$ $\quad \nabla g(x,y) = (1,0)$ $\quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{3}{10}x^2+\frac{1}{10}y^2+\frac{1}{5}x-\frac{8}{5}, \frac{1}{5}y(x+1)\right)$

$$\begin{cases} \frac{3}{10}x^2+\frac{1}{10}y^2+\frac{1}{5}x-\frac{8}{5} = \lambda \\ \frac{1}{5}y(x+1) = 0 \\ x = 0 \quad (y\in[-6,6]) \end{cases}$$

Se $x=0$ dalla 2^a $y=0$
e dalla 1^a $\lambda = -\frac{8}{5}$
$(0,0)$ con $\lambda = -\frac{8}{5}$

PUNTI $(0,-6)$ $(0,0)$ $(0,6)$

② $g(x,y) = x^2+y^2-36$ $\quad \nabla g(x,y) = (2x, 2y)$

$$\begin{cases} \frac{3}{10}x^2+\frac{1}{10}y^2+\frac{1}{5}x-\frac{8}{5} = 2\lambda x \\ \frac{1}{5}y(x+1) = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 36 \quad (x\geq 0) \end{cases}$$

2^a $\left(\frac{1}{5}(x+1)-2\lambda\right)\cdot y = 0 \iff y=0$ o $\lambda = \frac{1}{10}(x+1)$

se $\boxed{y=0}$ dalla 3^a $x=\pm 6$ (-6 non acc.)

$\to \boxed{(6,0)}$ con $\lambda = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{10}\cdot 36+\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\right) = \frac{1}{12}\cdot\frac{52}{5} = \frac{13}{15}$ (dalla 1^a)

Se $\boxed{\lambda = \frac{1}{10}(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} 1^a \ \frac{3}{10}x^2+\frac{1}{10}y^2+\cancel{\frac{1}{5}x}-\frac{8}{5} = \cancel{\frac{1}{5}x}+\frac{1}{5} \\ 3^a \ x^2+y^2 = 36 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2+y^2 = 18 \\ x^2+y^2 = 36 \end{cases}$$

<u>$1^a - 2^a$</u> $2x^2 = -18$ IMPOSSIBILE

PUNTI

$(0,-6)$ $(6,0)$ $(0,6)$.

ES.3) a) $\underline{\text{dom}\, g} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 0\} = \underline{\mathbb{R}^2}$ in quanto x^2+y^2 è una somma di quadrati e come tale sempre maggiore o uguale a 0.

b) $z = 12 - \frac{7}{4}\sqrt{x^2+y^2}$ è l'equazione del grafico di g

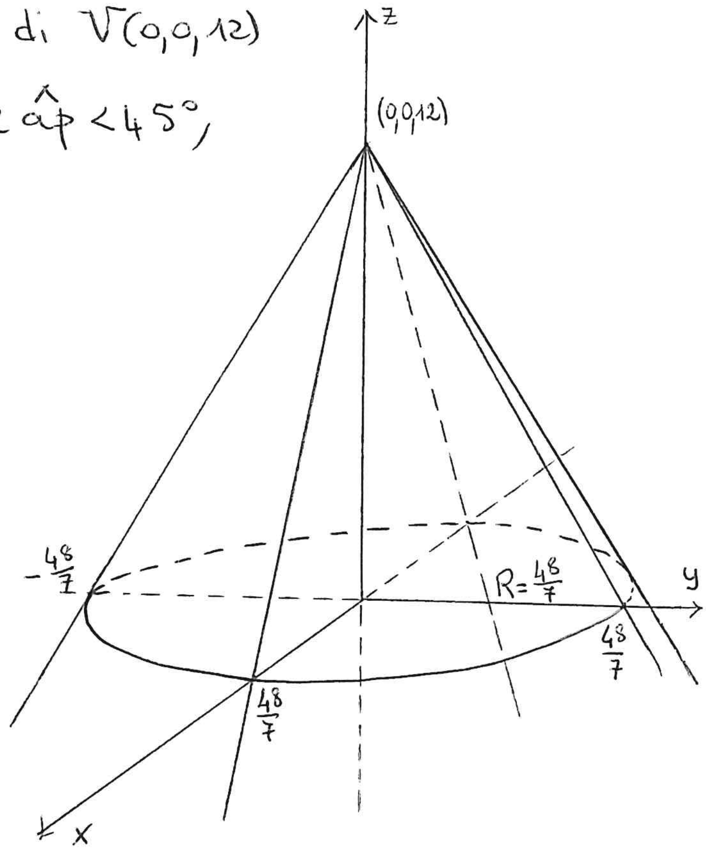
si tratta del CONO CIRCOLARE di $V(0,0,12)$

verso il basso, $a = \frac{7}{4} > 1 \rightarrow 0 < \hat{ap} < 45°$,

$\hat{ap} = \arctan\left(\frac{4}{7}\right) \simeq 29{,}7°$

$\cap\, z=0$ su $0 = 12 - \frac{7}{4}\sqrt{x^2+y^2}$ $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{48}{7}$

$x^2+y^2 = \left(\frac{48}{7}\right)^2$ $R = \frac{48}{7} \simeq 6{,}9$



c) $x^2+y^2=16$ CILINDRO di asse z e $R=4$

si deve considerare l'interno più la superficie

$$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z = 12 - \frac{7}{4}\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{CIL} \cap \text{CONO}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z = 12 - \frac{7}{4}\cdot 4 = 12-7 = 5 \end{cases}$$ si $\cap$ a $z=5$ sulla circonf di $R=4$

Dovendo considerare $2 \leq z \leq 12 - \frac{7}{4}\sqrt{x^2+y^2}$

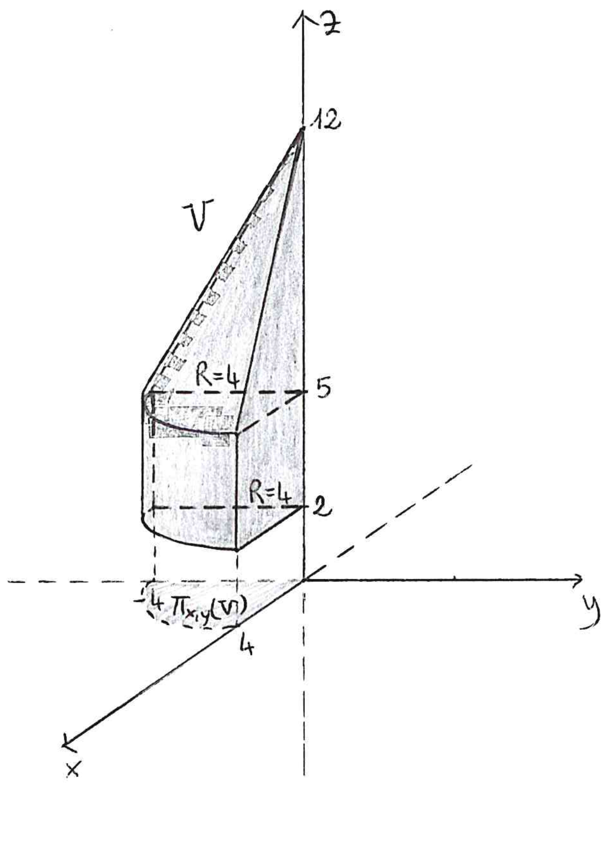
cioè tra il piano orizzontale $z=2$ e il cono

$\Rightarrow$ il SOLIDO è formato dal

CILINDRO $R=4$ $2 \leq z \leq 5$

CONO $5 \leq z \leq 12$

Le condizioni $x \geq 0, y \leq 0$ prendono solo il quarto di solido relativo al 4°q



$\Pi_{x,y}(V)$: $x^2+y^2\le 16$ $\quad x\ge 0, y\le 0$ $\quad$ in coord polari $\quad 0\le\rho\le 4$, $\frac{3}{2}\pi\le\theta\le 2\pi$

$$\text{VOLUME di } V = \int_{\Pi_{x,y}(V)} \left(12-\frac{7}{4}\sqrt{x^2+y^2}-2\right)dx\,dy = \int_{\substack{x^2+y^2\le 16\\ x\ge 0,\, y\le 0}} \left(10-\frac{7}{4}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy =$$

$$= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(\int_0^4 \underbrace{\left(10-\frac{7}{4}\rho\right)\rho}_{10\rho-\frac{7}{4}\rho^2}\,d\rho\right)d\theta = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(\left[5\rho^2-\frac{7}{12}\rho^3\right]_0^4\right)d\theta =$$

$$= \left(2\pi-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot\left(5\cdot 16-\frac{7}{\cancel{12}_{3}}\cdot\cancel{64}^{16}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(80-\frac{112}{3}\right) = \frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{128}^{64}}{3} = \boxed{\frac{64}{3}\pi}$$