EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI (III)

EQUAZIONI NON OMOGENEE

L'equazione $y'' + py' + qy = f(x)$, dove $f(x)$ è una funzione non identicamente nulla, prende il nome di equazione non omogenea.
Dimostriamo che l'integrale generale dell'equazione non omogenea è $y(x) = z(x) + \phi(x)$, dove con $z(x)$ indichiamo l'integrale generale dell'omogenea $y'' + py' + qy = 0$, e con $\phi(x)$ una qualunque funzione che sia integrale particolare dell'equazione completa del termine noto (il ragionamento è valido per equazioni di qualunque ordine).
Per fare questo scriviamo le derivate prime e seconde dell'integrale generale

$$y(x) = z(x) + \phi(x)$$
$$y'(x) = z'(x) + \phi'(x)$$
$$y''(x) = z''(x) + \phi''(x)$$

e sostituiamo nell'equazione (tralasciando la dipendenza dalla variabile x):

$$z'' + \phi'' + p(z' + \phi') + q(z + \phi) = f\ .$$

Riordinando i termini abbiamo:

$$(z'' + pz' + qz) + \phi'' + p\phi' + q\phi = f\ .$$

Il termine $z'' + pz' + qz$ è identicamente nullo, in quanto si tratta proprio dell'equazione omogenea all'interno della quale abbiamo sostituito il suo integrale generale.
Rimane dunque

$$\phi'' + p\phi' + q\phi = f$$

che ci dimostra che $\phi(x)$ deve essere una soluzione dell'equazione non omogenea.

Facciamo alcune considerazioni: è evidente che l'integrale particolare deve essere una funzione dello stesso tipo di quella che figura a termine noto. Infatti f deve essere uguale ad una combinazione lineare di φ e delle sue derivate. Per determinare la forma esatta di φ si usa il metodo delle costanti arbitrarie. Si parte da una funzione di prova nella quale figurano alcune costanti letterali, si calcolano le derivate prima e seconda e si effettua la sostituzione nell'equazione completa di termine noto. Si uguagliano poi i termini simili tra membro di sinistra e di destra, determinando in questo modo il valore numerico delle costanti.

Termine noto polinomiale: $f(x) = P_n(x)$

Anche ϕ deve essere un polinomio: di grado n se $q \neq 0$, di grado $n + 1$ se $q = 0$.
Vediamo alcuni esempi per chiarirci le idee.

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' - 3y' + 2y = x^3 + 1.$$

L'equazione omogenea associata è $y'' - 3y' + 2y = 0$ e il suo integrale generale è $z = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.
Come integrale particolare della non omogenea prendiamo un generico polinomio di terzo grado e lo deriviamo due volte:

$$\phi = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$\phi' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\phi'' = 6ax + 2b$$

Ora sostituiamo queste funzioni nell'equazione:

$$6ax + 2b - 3(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3 + 1$$

Eseguendo i calcoli indicati si ottiene

$$2ax^3 + (-9a + 2b)x^2 + (6a - 6b + 2c)x + 2b - 3c + 2d = x^3 + 1$$

Perché due polinomi siano uguali i coefficienti delle potenze dello stesso grado devono essere uguali. Questo ci porta ad un sistema di primo grado nelle variabili *a*, *b*, *c* e *d*:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -9a + 2b = 0 \\ 6a - 6b + 2c = 0 \\ 2b - 3c + 2d = 1 \end{cases}$$

Il sistema è soddisfatto per $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{9}{4}$, $c = \frac{21}{4}$ e $d = \frac{45}{8}$.

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{45}{8}.$$

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 3y' = x^2 + 2x + 1.$$

L'integrale dell'equazione omogenea associata è $z = c_1 + c_2 e^{3x}$

In questo caso, se scegliessimo come funzione ϕ un polinomio di secondo grado, poiché nell'equazione figurano solo le derivate prime e seconda ma non la funzione incognita *y*, ci troveremmo ad avere al membro di sinistra un polinomio di primo grado e a destra uno di secondo, e quindi l'uguaglianza non sarebbe possibile.

Partiamo perciò da un polinomio di secondo grado moltiplicato per *x*.

$$\phi = x\left(ax^2 + bx + c\right) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$\phi' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\phi'' = 6ax + 2b.$$

Non ci serve avere nel polinomio un termine noto d perché comunque una costante è già presente nell'integrale generale dell'omogenea.

Sostituendo abbiamo:

$$6ax + 2b - 3\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = x^2 + 2x + 1.$$

Ordiniamo i termini:

$$-9ax^2 + \left(6a - 6b\right)x + 2b - 3c = x^2 + 2x + 1.$$

Questa equazione è soddisfatta per

$$\begin{cases} -9a = 1 \\ 6a - 6b = 2 \\ 2b - 3c = 1 \end{cases}$$

cioè per $a = -\frac{1}{9}$, $b = -\frac{4}{9}$ e $c = -\frac{17}{27}$.

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è:

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{17}{27}.$$

Termine noto esponenziale: $f(x) = ae^{bx}$

La funzione φ dovrà essere una funzione esponenziale con lo stesso coefficiente davanti alla variabile *x*, ma dovrà essere linearmente indipendente rispetto alle due funzioni che figurano nell'integrale generale dell'omogenea.

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x}.$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è già stato calcolato. Cerchiamo una soluzione particolare dell'omogenea:

$$\phi = ae^{-x}$$
$$\phi' = -ae^{-x}$$
$$\phi'' = -\left(-ae^{-x}\right) = ae^{-x}$$

Sostituendo la funzione e le sue derivate nell'equazione si ha:

$$ae^{-x} - 3\left(-ae^{-x}\right) + 2ae^{-x} = 3e^{-x}$$

Eliminiamo il fattore comune e^{-x} che è sicuramente diverso da zero e otteniamo: $6a = 3$, cioè $a = \frac{1}{2}$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

In questo caso il termine noto coincide con una soluzione particolare dell'equazione omogenea. La funzione φ deve essere linearmente indipendente rispetto all'integrale generale dell'omogenea, quindi andrà diversificata seguendo lo stesso ragionamento che abbiamo fatto nel caso in cui l'equazione caratteristica ha radici reali coincidenti.

$$\phi = axe^{2x}$$
$$\phi' = ae^{2x} + 2axe^{2x}$$
$$\phi'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x} = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}$$

Sostituiamo tralasciando il fattore comune e^{2x} che è sicuramente diverso da zero:

$$4a + 4ax - 3\left(a + 2ax\right) + 2ax = 1$$

e svolgendo i calcoli otteniamo $a = 1$ (se non abbiamo fatto errori i termini contenenti *x* si devono annullare). Perciò l'integrale generale della non omogenea è

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + xe^{2x}.$$

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è $z = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$. Quindi, avendo già sia e^{-2x} che xe^{-2x} tra le soluzioni particolari contenute nell'integrale generale, dovremo scegliere una ϕ ancora diversa, in modo che sia linearmente indipendente:

$$\phi = ax^2e^{-2x}$$
$$\phi' = 2axe^{-2x} - 2ax^2e^{2x}$$
$$\phi'' = 2ae^{-2x} - 4axe^{2x} - 4axe^{-2x} + 4ax^{2x}e^{-2x} = 2ae^{-2x} - 8axe^{-2x} + 4ax^2e^{-2x}$$

Anche qui nell'eseguire la sostituzione eliminiamo il fattore e^{-2x} sicuramente diverso da zero:

$$2a - 8ax + 4ax^2 + 4\left(2ax - 2ax^2\right) + 4ax^2 = 3.$$

Se non abbiamo commesso errori i termini contenenti x e x^2 devono elidersi. Infatti dopo aver eseguito le operazioni indicate otteniamo: $2a = 3$, cioè $a = \frac{3}{2}$ L'integrale generale perciò risulta:

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{3}{2}x^2e^{-2x}.$$

Termine noto trigonometrico: $f\left(x\right) = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$

La funzione ϕ sarà una combinazione lineare di funzioni seno e coseno con la stessa frequenza di *f*; questa combinazione lineare andrà però moltiplicata per x nel caso che l'equazione caratteristica abbia come radici $\pm i\alpha$. Occorre tenere presente che se il termine noto contiene solo una funzione seno o solo una funzione coseno, la funzione ϕ deve invece contenerle entrambe in ogni caso.

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' - 3y' + 2y = 3\sin 2x$$

All'integrale generale dell'omogenea (già calcolato) dovremo aggiungere una combinazione lineare di $\cos 2x$ e di $\sin 2x$:

$$\phi = a\cos 2x + b\sin 2x$$
$$\phi' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$$
$$\phi'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x.$$

Sostituendo abbiamo

$$-4a\cos 2x - 4b\sin 2x - 3\left(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x\right) + 2\left(a\cos 2x + b\sin 2x\right) = 3\sin 2x$$

Uguagliando separatamente i termini contenenti la funzione seno e quelli contenenti la funzione coseno si ha:

$$\begin{cases} 6a - 2b = 3 \\ -2a - 6b = 0 \end{cases}$$

Da qui otteniamo $a = \frac{9}{20}$ e $b = -\frac{3}{20}$. Perciò l'integrale generale risulta

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + \frac{9}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x.$$

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 9y = -\cos 3x$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è $z = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$. Cerchiamo una funzione del tipo:

$$\phi = ax\cos 3x + bx\sin 3x$$
$$\phi' = a\cos 3x - 3ax\sin 3x + b\sin 3x + 3bx\cos 3x = \left(a + 3bx\right)\cos 3x + \left(-3ax + b\right)\sin 3x$$
$$\phi'' = \left(-9ax + 6b\right)\cos 3x - \left(6a + 9bx\right)\sin 3x$$

Sostituendo abbiamo:

$$-9ax+6b\cos 3x-\left(6a+9bx\right)\sin 3x+9\left(ax\cos 3x+b\sin 3x\right)=-\cos 3x$$

Come è logico aspettarsi i termini contenenti *x* si elidono e rimane solo

$$6b\cos 3x-6a\sin 3x=-\cos 3x$$

Per cui $a=0$ e $b=-\frac{1}{6}$. L'integrale generale è:

$$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x-\frac{1}{6}x\sin 3x.$$

Termine noto qualunque con il metodo di variazione delle costanti

Supponiamo che sia data un'equazione del tipo

$$y''+py'+qy=f\left(x\right)$$

e supponiamo che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sia $z=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$.

Se $f\left(x\right)$ non appartiene ad una delle tipologie già discusse si deve necessariamente ricorrere ad un metodo più generale, di cui qui diamo un'idea schematica.

Cerchiamo per la nostra equazione un integrale particolare del tipo

$$\phi=c_1\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+c_2\left(x\right)e^{\lambda_2 x}$$

e con derivata prima

$$\phi'=c_1'\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+\lambda_1c_1\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+c_2'\left(x\right)e^{\lambda_2 x}+\lambda_2c_2\left(x\right)e^{\lambda_2 x}.$$

Imponiamo a questo punto che

$$c_1'\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+c_2'\left(x\right)e^{\lambda_2 x}=0.$$

Questa scelta è del <u>tutto arbitraria</u> e finalizzata alla semplificazione dei calcoli. Dato che siamo alla ricerca di una soluzione particolare, e non della più generale possibile, questa scelta è del tutto lecita. Grazie a questa condizione la derivata seconda risulta

$$\phi''=\lambda_1c_1'\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+\lambda_1^2c_1\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+\lambda_2c_2'\left(x\right)e^{\lambda_2 x}+\lambda_2^2c_2\left(x\right)e^{\lambda_2 x}.$$

Sostituendo ora nell'equazione completa, ricordando che $p=-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$ e $q=\lambda_1\lambda_2$, abbiamo:

$$\lambda_1c_1'\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+\lambda_1^2c_1\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+\lambda_2c_2'\left(x\right)e^{\lambda_2 x}+\lambda_2^2c_2\left(x\right)e^{\lambda_2 x}-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left(\lambda_1c_1\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+\lambda_2c_2\left(x\right)e^{\lambda_2 x}\right)+$$
$$+\lambda_1\lambda_2\left(c_1\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+c_2\left(x\right)e^{\lambda_2 x}\right)=f\left(x\right)$$

Ci riamane quindi da risolvere il sistema formato dalla condizione imposta e da quello che rimane nell'equazione dopo aver eliso tutti i termini opposti:

$$\begin{cases}c_1'\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+c_2'\left(x\right)e^{\lambda_2 x}=0\\ \lambda_1c_1'\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+\lambda_2c_2'\left(x\right)e^{\lambda_2 x}=f\left(x\right)\end{cases}$$

Trovate le soluzioni $c_1'\left(x\right)$ e $c_2'\left(x\right)$ non resta che integrare per ottenere le "costanti" da utilizzare nell'integrale particolare $\phi=c_1\left(x\right)e^{\lambda_1 x}+c_2\left(x\right)e^{\lambda_2 x}$.