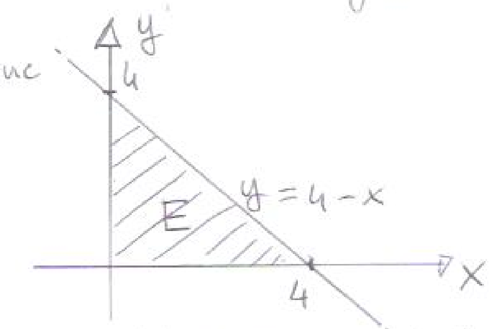
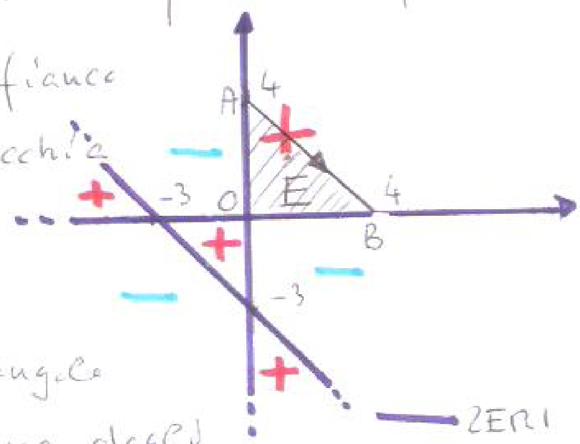
SESTA ESERCITAZIONE SULLE FUNZIONI DI 2 VARIABILI

1 Determinare, dopo averne giustificato l'esistenza, il massimo e il minimo assoluti di $\boxed{f(x,y) = x^2y + xy^2 + 3xy}$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 4-x\}$



Svolgimento: E è l'intersezione fra il 1° quadrante e il sottografico rispetto alla retta di equazione $y = 4-x$.
Si tratta quindi di triangolo di vertici $(0,0)$, $(4,0)$ e $(0,4)$.
f è CONTINUA (funzione polinomiale) su E che è CHIUSO (∂E appartiene all'insieme) e LIMITATO ($E \subset B_5(0,0)$, cerchio aperto di $C(0,0)$ e $R=5$).
Quindi, per il Teorema di WEIERSTRASS, f ha MASSIMO e MINIMO assoluti in E.
Osservando che $\boxed{f(x,y) = x^2y + xy^2 + 3xy = xy(x+y+3)}$ è la funzione di cui abbiamo studiato i punti stazionari nell'esercizio $\boxed{2}$ dell'esercitazione precedente, da pag. 5 a pag. 9, ricordiamo che $(-1,-1)$ era punto di MASSIMO locale, mentre

non c'erano punti di MINIMO LOCALI; $(\bar{-1,-1}) \notin E$.
Non ci sono quindi punti di MASSIMO o MINIMO LOCALI INTERNI ad E. Il MASSIMO e il MINIMO ASSOLUTI di f su E corrispondono quindi a punti di ∂E. Riproduciamo a fianco anche il grafico che rispecchia il segno di E: questo grafico evidenzia che i cateti del triangolo rettangolo E appartengono all'insieme degli zeri: sul segmento OA e sul segmento OB $f(x,y)$ è costante e vale 0. Dato che gli altri punti di E si trovano tutti in una zona in cui $f(x,y)>0$ è sufficiente leggere f sulla curva corrispondente al segmento AB per determinare il punto di massimo assoluto di f su E, mentre evidentemente



$$\boxed{\min_E f(x,y) = 0 = f(x,y) \quad \forall (x,y)\in OB \vee (x,y)\in OA}$$

(i punti di minimo assoluto sono infiniti)

Cerchiamo ora $\max_E f(x,y)$ relativamente ai punti interni di AB, che parametrizziamo a partire dall'equazione cartesiana:

$$\gamma: \begin{cases} x=t \\ y=4-t \end{cases} \quad t\in[0,4] \quad \text{(verso delle x crescenti)}$$

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = t(4-t)(\cancel{t}+4-\cancel{t} \quad 3)$$

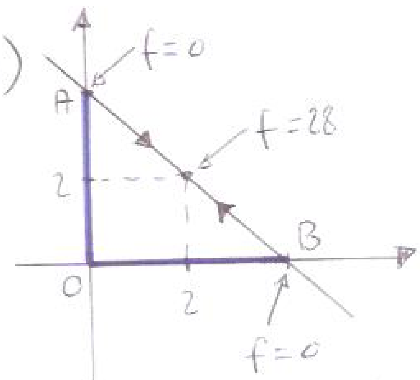
$$= \cdot\, t(4-t) = 28t - 7t^2$$

$$g'(t) = 28 - 14t = 14(2-t)$$

$$g'(t) = 0 \iff t = 2 \longrightarrow (2,2)$$

$$f(2,2) = g(2) = 56 - 28 = 28$$

Quindi $\boxed{\max_{E} f = f(2,2) = 28}$



(f=0 su tutta la linea blu)

$\boxed{2}$ Determinare i punti stazionari di $\boxed{f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 2x^2 + y^2}$ studiandone la natura. Poi, dopo averne giustificato la esistenza, calcolare il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + y^2 + 4x$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2y = 2y(x+1)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}$$

Applicando alla seconda equazione la legge di annullamento del prodotto otteniamo:

$$\begin{cases} 6x^2+4x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 6+y^2-4=0 \longrightarrow y^2=-2 \quad \text{IMPOSSIBILE} \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 2x(3x+2)=0 \longrightarrow x=0 \vee x=-\frac{2}{3} \\ y=0 \end{cases}$$

Punti stazionari: $O(0,0)$; $P\left(-\frac{2}{3},0\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x+4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=2y=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2x+2$$

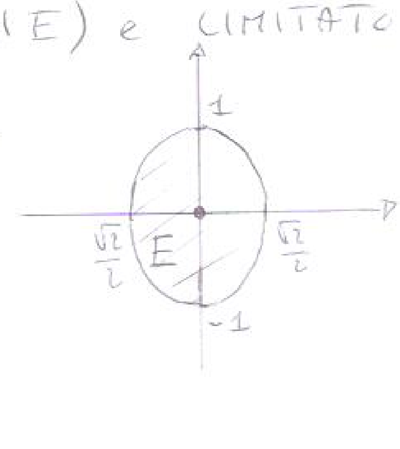
- $\det Hf(0,0)=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=8>0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=4>0$;

quindi O è punto di MINIMO LOCALE, con $f(0,0)=0$.

- $\det Hf\left(-\frac{2}{3},0\right)=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=-\frac{8}{3}<0$;

quindi P è punto di SELLA.

La funzione è CONTINUA (funz. polinomiale) ed E è CHIUSO (∂E appartiene ad E) e LIMITATO (infatti $2x^2+y^2=1 \longrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}}+y^2=1$ è un'ellisse con $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $b=1$ ed $E \subset B_2(0,0)$).



Quindi, per il Teorema di WEIERSTRASS, f ha MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI su E.

Osserviamo che il punto di MINIMO LOCALE, $(0,0)$ è interno ad E, con $f(0,0)=0$.

Cerchiamo ora i possibili punti di massimo o minimo assoluti relativamente a ∂E, che parametrizziamo in verso antiorario con $P_{in} = P_{fin} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$:

$$\gamma \begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \operatorname{sen} t\right) =$$

In questo modo i calcoli vengono abbreviati, ma si poteva anche sostituire direttamente in $f(x,y)$

teniamo conto che $f(x,y) =$
$= 2x^3 + xy^2 + 2x^2 + y^2 =$
$= x(2x^2+y^2) + 1(2x^2+y^2) =$
$= (2x^2+y^2)(x+1)$

$$= \underbrace{\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right)}_{1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + 1$$

$$g'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t$$

$$g'(t) = 0 \iff \operatorname{sen} t = 0 \longrightarrow \underbrace{t = 0 \vee t = \pi \vee t = 2\pi}_{\text{in } [0, 2\pi]}$$

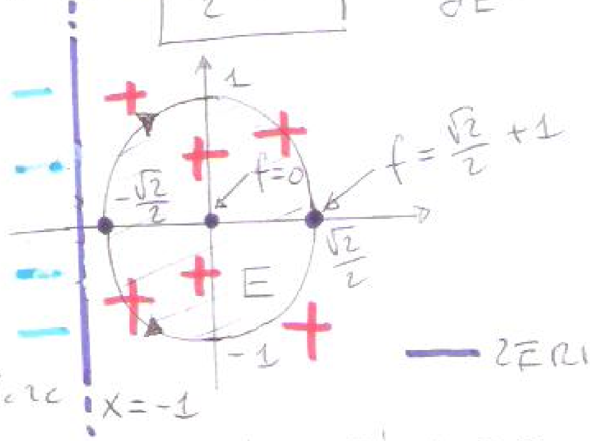
$$t=0 \qquad\qquad t=\pi \qquad\qquad t=2\pi$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},0\right) \qquad \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2},0\right) \qquad \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=g(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 0+1=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\max_{\partial E} f(x,y)$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=g(\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\pi+1=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\min_{\partial E} f(x,y)$$

Quindi su ∂E:

$$0{,}3\simeq-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\le f(x,y)\le\frac{\sqrt{2}}{2}+1\simeq 1{,}7$$



Il valore di f cresce procedendo verso destra lungo la semiellisse superiore o lungo la semiellisse inferiore, e si mantiene >0.

Essendo $f(x,y)=0$ in O concludiamo che

$$\boxed{\begin{aligned}\max_E f(x,y)&=\boxed{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\\ \min_E f(x,y)&=\boxed{0}=f(0,0)\end{aligned}}$$

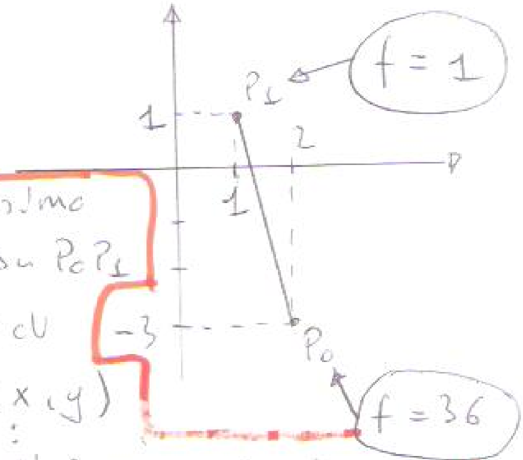
(del resto utilizzando la scomposizione della pagina precedente osserviamo che

$$f(x,y)=0 \iff (x,y)=(0,0) \vee x=-1$$

e $f(x,y)>0 \iff x>-1 \wedge (x,y)\neq(0,0)$,

quindi E sta nel semipiano in cui, a parte $(0,0)$, $f(x,y)>0$)

$\boxed{3}$ Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = x^2y^2$ sul segmento P_0P_1, con $P_0(2,-3)$ e $P_1(1,1)$ col metodo dei moltiplicatori di Lagrange: i punti di massimo e di minimo assoluti di f su P_0P_1 possono essere agli estremi di P_0P_1 oppure tra i punti (x,y) che risolvono il sistema (di 3 equazioni con 3 incognite x, y, λ)



$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} \nabla f \parallel \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Dobbiamo quindi creare una funzione $g(x,y)$ il cui insieme di livello 0 ha un'equazione che coincide con l'equaz. di P_0P_1: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -4 \longrightarrow y = y_0 + m(x - x_0) \longrightarrow$

$$\boxed{y = -4x + 5} \longrightarrow 4x + y - 5 = 0 \longrightarrow \boxed{g(x,y) = 4x + y - 5 \text{ con } \boxed{1 \le x \le 2}}$$

- I punti di massimo e di minimo (assoluti) di f sul segmento si possono trovare in $P_0(2,-3)$, (dove $\boxed{f(2,-3) = 36}$), in $P_1(1,1)$ (dove $\boxed{f(1,1) = 1}$) oppure nei punti (x,y) che risolvono il sistema $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y; \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4; \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 1 \right)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2xy^2 = 4\lambda \\ 2x^2y = \lambda \\ 4x + y - 5 = 0, \quad \boxed{1 \le x \le 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}xy^2 \\ \lambda = 2x^2y \\ 4x+y-5=0 \wedge \boxed{1 \le x \le 2} \end{cases} \quad \frac{1}{2}xy^2 = 2x^2y \to xy^2 - 4x^2y = 0$$

$$xy(y-4x) = 0$$

$$x=0 \vee y=0 \vee y=4x$$

da cui

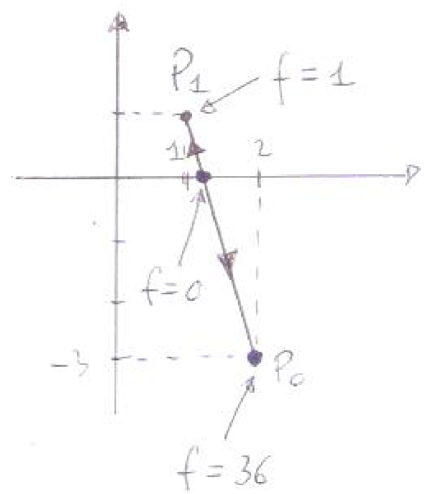
$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \\ \lambda=0 \end{cases} \vee \boxed{\begin{cases} y=0 \\ x=\frac{5}{4} \\ \lambda=0 \end{cases}} \vee \begin{cases} y=4x \\ 2y-5=0 \\ \lambda=2x^2y \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{1}{4}y=\frac{5}{8} \\ y=\frac{5}{2} \\ \lambda=\cancel{2}\cdot\frac{25}{64}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}=\frac{125}{64} \end{cases}$$

Ma $0 \notin [1,2]$ e $\frac{5}{8} \notin [1,2]$ - L'unica soluzione del sistema è quindi $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$.

La freccia indica la crescente di f

$$\boxed{f\left(\frac{5}{4},0\right)=0}$$, per cui

$$\boxed{\max_{P_0P_1} f(x,y) = 36 = f(2,-3) \quad \text{e} \quad \min_{P_0P_1} f(x,y) = 0 = f\left(\frac{5}{4},0\right)}$$



(Parametrizzando P_0P_1 ad esempio come $\gamma: \begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=-4t+5 \end{cases}$ $t\in[1,2]$ (verso delle x crescenti)

avremmo ottenuto $g(t) = t^2(-4t+5)^2 = t^2(16t^2-40t+25)$
$= 16t^4 - 40t^3 + 25t^2$

$g'(t) = 64t^3 - 120t^2 + 50t = t(64t^2 - 120t + 50)$

$g'(t)=0 \iff t=0$ $(0\notin[1,2])$ $\vee$ $t = \frac{5}{4} \in [1,2] \to \left(\frac{5}{4},0\right)$; $t=\frac{5}{8} \notin [1,2]$ ----)

$\boxed{4}$ Data $\boxed{f(x,y) = 2x^2y - 8y}$,

a) studia zeri e segno di $f(x,y)$

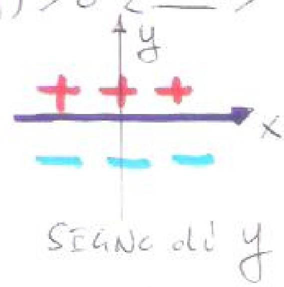
b) determina i punti stazionari di f e studia la loro natura

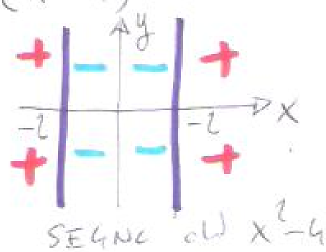
c) dopo aver giustificato la loro esistenza, determina massimo e minimo assoluti di f in $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 16\}$

Svolgimento:

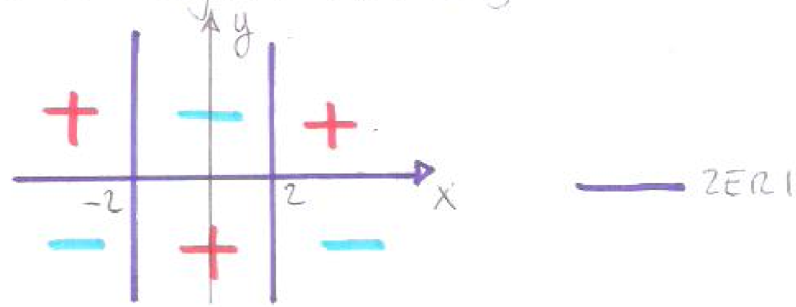
a) $f(x,y) = 0 \iff 2y(x^2-4) = 0 \rightarrow y = 0 \vee x = \pm 2$

$f(x,y) > 0 \iff 2y(x^2-4) > 0$





Costruiamo il grafico relativo a zeri e segno di f utilizzando la regola dei segni:



b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 - 8$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 4xy = 0 & \to x = 0 \lor y = 0 \\ 2x^2 - 8 = 0 & \to x = \pm 2 \end{cases}$$

Punti stazionari: $\boxed{A(2,0)}$ $\boxed{B(-2,0)}$

Non si tratta sicuramente di punti di massimo o minimo locali perché, in base allo studio di zeri e segno, appartengono entrambi all'insieme degli zeri di f e in un loro intorno la funzione cambia segno.

Li studiamo comunque con l'Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x \\ 4x & 0 \end{pmatrix}$$

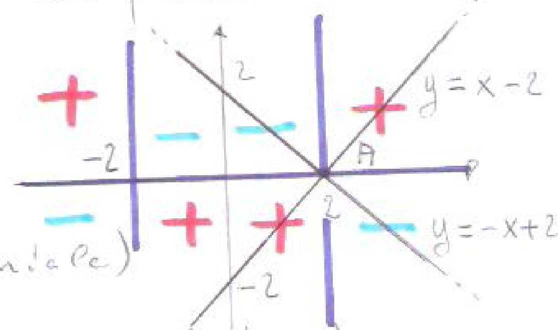
$$\det Hf(2,0) = \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0$$

$$\det Hf(-2,0) = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0.$$

Sono in effetti due <u>punti di sella</u>.

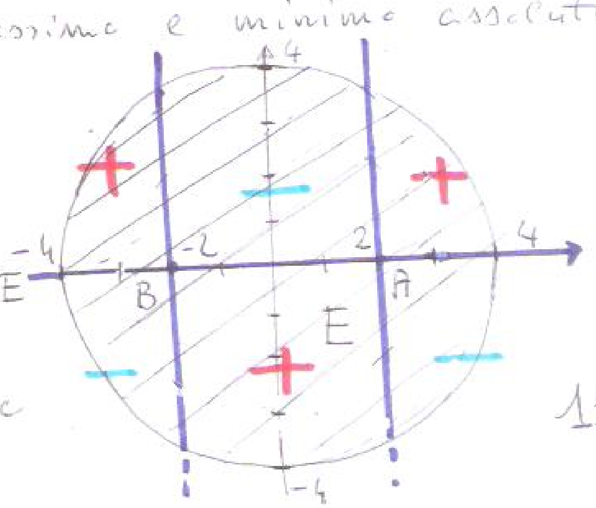
Osserviamo a questo proposito che se leggiamo f lungo la retta $\boxed{y = x - 2}$ per A otteniamo che $f(2,0) = 0$, mentre, procedendo verso sinistra o verso destra lungo la retta, $\boxed{f(x,y) > 0}$ e quindi la concavità di f è rivolta verso l'alto; invece se leggiamo f lungo $\boxed{y = -x + 2}$, per A e perpendicolare alla precedente otteniamo che $f(2,0) = 0$, mentre, procedendo verso destra o verso sinistra lungo la retta, $\boxed{f(x,y) < 0}$, e quindi la concavità di f è rivolta verso il basso: è la situazione che si verifica nei punti di sella.

Stesso discorso potremmo fare per B.



c) f è continua (polinomiale) ed E è chiuso (∂E appartiene ad E) e limitato ($E \subset B_5(0,0)$, essendo E un cerchio di centro O e raggio 4). Per il Teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo assoluto su E.

Sovrapponendo E al grafico di zeri e segno osserviamo che vi sono in E zone in cui $f > 0$ (in queste zone troveremo il punto di massimo) e



altre in cui $f<0$ (in cui troveremo il punto di minimo).

Sappiamo inoltre che non ci sono punti di massimo o minimo locali INTERNI ad E.

Dovremo quindi studiare ∂E per determinare su ∂E i punti di massimo e minimo assoluti.

Scegliamo di utilizzare i MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE: i punti di massimo e di minimo assoluti di f su ∂E si possono trovare nel punto iniziale e finale della curva o nei punti (x,y) che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Creiamo una funzione $g(x,y)$ il cui ins. di livello 0 sia $x^2+y^2=16$:

$$\boxed{g(x,y) = x^2+y^2-16}$$

(partiamo da qui perché possiamo utilizzare la legge di annullamento del prodotto)

cioè

$$\begin{cases} 4xy = 2\lambda x \\ 2x^2-8 = 2\lambda y \\ \boxed{x^2+y^2-16=0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{2xy-\lambda x=0} \\ x^2-4=\lambda y \\ x^2+y^2-16=0 \end{cases}$$

$$\boxed{2xy-\lambda x=0} \to x(2y-\lambda)=0$$

$$\boxed{x=0} \vee \boxed{\lambda=2y}$$

(prendiamo come punto iniziale e finale $(4,0) \to f(4,0)=0$)

Otteniamo 2 sistemi:

$$\begin{cases} x=0 \\ -4=ay \\ y^2=16 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2y \\ x^2-4=2y^2 \\ x^2+y^2-16=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=2y \\ x^2=2y^2+4 \\ \boxed{2y^2+4+y^2-16=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{y=\pm 4} \\ a=\mp 1 \end{cases}$$

$3y^2=12 \to y^2=4$

$\boxed{y=\pm 2}$

n.b.: a ogni valore di y ne corrispondono 2 di x

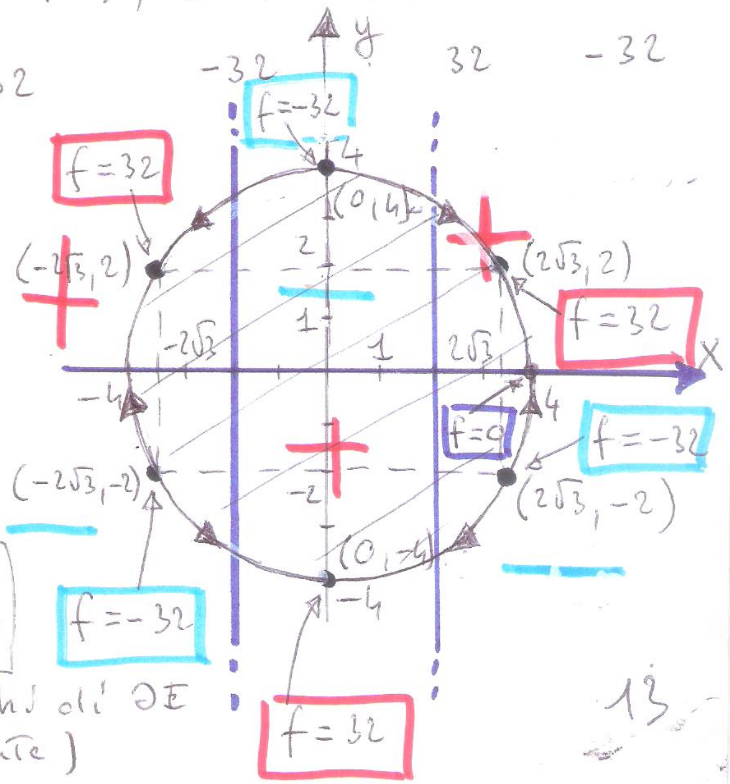
$x^2=8+4=12$

$\boxed{x=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}}$

Otteniamo 6 punti; per ognuno di essi calcoliamo $f(x,y)$:

PUNTI:	$(0,4)$	$(0,-4)$	$(2\sqrt{3},2)$	$(2\sqrt{3},-2)$	$(-2\sqrt{3},2)$	$(-2\sqrt{3},-2)$
VALORI di f:	-32	$+32$	32	-32	32	-32

$f(x,y)=2y(x^2-4)$



Quindi

$\max\limits_{E} f = 32 = f(0,-4) = f(2\sqrt{3},2) = f(-2\sqrt{3},2)$

$\min\limits_{E} f = -32 = f(0,4) = f(2\sqrt{3},-2) = f(-2\sqrt{3},-2)$

(le frecce indicano gli archi di ∂E in cui f è crescente)

Naturalmente avremmo potuto anche determinare i massimi e minimi assoluti di f su ∂E parametrizzando ∂E:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = 4\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(parametrizzazione in verso antiorario con $P_{in} = P_{fin} = (4,0)$) $\boxed{f(4,0)=0}$

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = 2y(t) \cdot \left\{ [x(t)]^2 - 4 \right\} =$$

$$= 8\,\mathrm{sen}\, t\,(16\cos^2 t - 4) = 32\,\mathrm{sen}\, t\,(4\cos^2 t - 1)$$

$$g'(t) = 32\left[\cos t\,(4\cos^2 t - 1) + \mathrm{sen}\, t\,(-8\cos t\,\mathrm{sen}\, t)\right] =$$

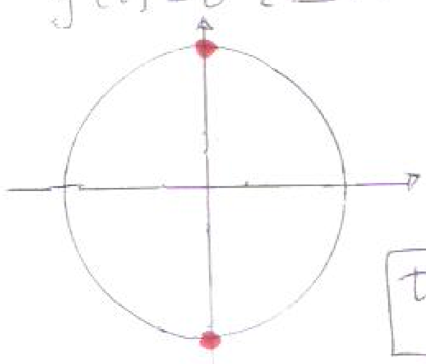
$$= 32\,(4\cos^3 t - \cos t - 8\,\mathrm{sen}^2 t\,\cos t)$$

$$= 32\left[4\cos^3 t - \cos t - 8\,(1 - \cos^2 t)\cos t\right] =$$

$$= 32\left[4\cos^3 t - \cos t - 8\cos t + 8\cos^3 t\right] =$$

$$= 32\,(12\cos^3 t - 9\cos t) = 96\cos t\,(4\cos^2 t - 3)$$

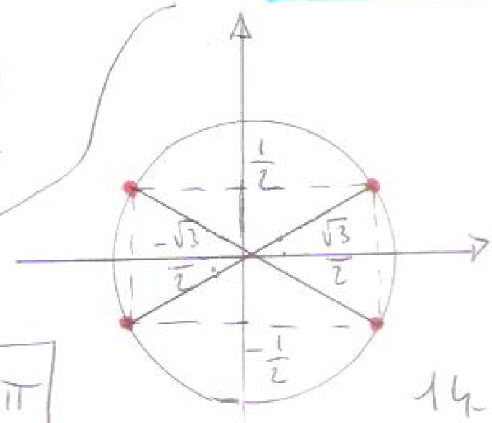
$$g'(t) = 0 \iff \boxed{\cos t = 0} \lor \cos^2 t = \frac{3}{4} \to \boxed{\cos t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



$\cos t = 0$

$\boxed{t = \frac{\pi}{2}} \lor \boxed{t = \frac{3}{2}\pi}$

$\boxed{t = \frac{\pi}{6}} \lor \boxed{t = \frac{5}{6}\pi} \lor \boxed{t = \frac{7}{6}\pi} \lor \boxed{t = \frac{11}{6}\pi}$



$$t = \frac{\pi}{6} \longrightarrow x(t) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$y(t) = 4\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

quindi $\gamma\left(\frac{\pi}{6}\right) = (2\sqrt{3}, 2)$

$$t = \frac{5}{6}\pi \longrightarrow x(t) = 4\cos\frac{5}{6}\pi = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y(t) = 4\,\text{sen}\,\frac{}{6}\pi = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

$$t = \frac{7}{6}\pi \longrightarrow x(t) = 4\cos\frac{7}{6}\pi = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y(t) = 4\,\text{sen}\,\frac{7}{6}\pi = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$t = \frac{11}{6}\pi \longrightarrow x(t) = 4\cos\frac{11}{6}\pi = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$y(t) = 4\,\text{sen}\,\frac{11}{6}\pi = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$t = \frac{\pi}{2} \longrightarrow x(t) = 4\cos\frac{\pi}{2} = 4\cdot 0 = 0$$

$$y(t) = 4\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 4\cdot 1 = 4$$

$$t = \frac{3}{2}\pi \longrightarrow x(t) = 4\cdot\cos\frac{3}{2}\pi = 4\cdot 0 = 0$$

$$y(t) = 4\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi = 4\cdot(-1) = -4$$

Calcoliamo poi i valori di f corrispondenti ad ognuno dei punti trovati, che sono evidentemente gli stessi ricavati con i moltiplicatori e arriviamo alle stesse conclusioni relative a massimo e minimo assoluti, però con un procedimento più laborioso e che non sempre porta ad equazioni goniometriche "facili", in cui sia semplice determinare t

$\boxed{5}$ Determinare, utilizzando i MOLTIPLICATORI di LAGRANGE, massimo e minimo (assoluti) di $\boxed{f(x,y) = x^2y^2}$ sull'ellisse di equazione $x^2+4y^2=1$ ($E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2=1\}$)

Svolgimento: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y$;

$\boxed{g(x,y) = x^2+4y^2-1}$; $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial g}{\partial y} = 8y$ -

funzione il cui insieme di livello 0 è $x^2+4y^2=1$

Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2xy^2 = 2\lambda x \\ 2x^2y = 8\lambda y \\ x^2+4y^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy^2-\lambda x = 0 \\ x^2y-4\lambda y=0 \\ x^2+4y^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(y^2-\lambda)=0 \\ y(x^2-4\lambda)=0 \\ x^2+4y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \lor \lambda = y^2 \\ y=0 \lor \lambda = \frac{1}{4}x^2 \\ x^2+4y^2-1=0 \end{cases}$$ da cui otteniamo 4 sistemi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ -1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ \lambda = \frac{1}{4}\cdot 0 = 0 \\ 4y^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = y^2 = 0 \\ y=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = y^2 \\ \lambda = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow x^2=4\lambda \\ 4\lambda+4\lambda=1 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

$\downarrow$ $y = \pm\frac{1}{2}$ $\quad$ $\downarrow$ $x = \pm 1$ $\quad$ $\downarrow$ $\lambda = \frac{1}{8}$

($P_{in} = P_{fin} = (1,0)$ $\boxed{f(1,0)=0}$)

$y = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \leftarrow x^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \leftarrow$

Otteniamo 8 punti:

PUNTI:	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$;	$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$;	$\boxed{(1,0)}$	$(-1,0)$;	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$;	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$;	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
VALORE DI f	$\downarrow$ 0	$\downarrow$ 0	$P_{in}=P_{fin}$ $\downarrow$ 0	$\downarrow$ 0	$\downarrow$ $\frac{1}{16}$	$\downarrow$ $\frac{1}{16}$	$\downarrow$ $\frac{1}{16}$	$\downarrow$ $\frac{1}{16}$

Quindi $\quad \min\limits_{E} f(x,y) = 0 = f\left(0,\pm\frac{1}{2}\right) = f(\pm 1, 0)$

$$\max_{E} f(x,y) = \frac{1}{16} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Si trattava dell'ellisse di centro O e $a=1$, $b=\frac{1}{2}$

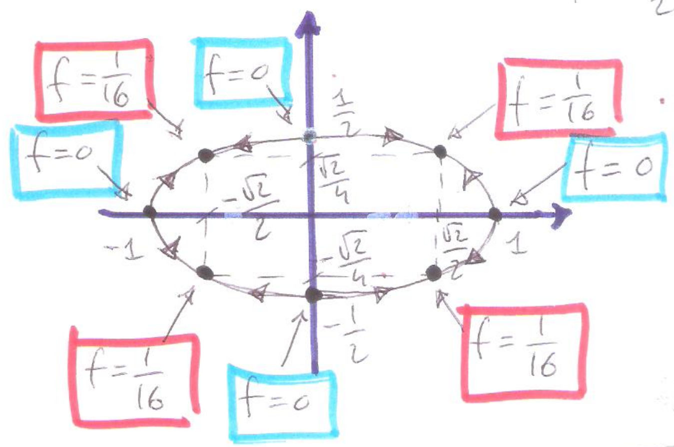
Era evidente che

$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

e che $f(x,y) = 0$

$\Updownarrow$

$x=0 \vee y=0$



(Osservazione) Utilizzando il metodo delle parametrizzazioni di $x^2 + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ avremmo

ottenuto $\gamma: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ (verso antiorario da $(1,0)$)

$\uparrow$
$f(1,0)=0$

e $g(t) = f(x(t), y(t)) = \cos^2 t \cdot \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t =$

$= \frac{1}{4}\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t$

$g'(t) = \frac{1}{4}\left(-2\cos t \operatorname{sen}^3 t + 2\cos^3 t \operatorname{sen} t\right)$

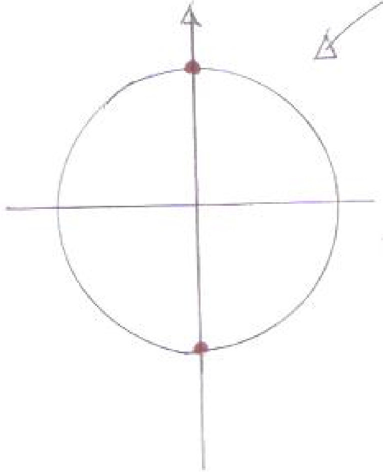
$= \frac{1}{2}\cos t \operatorname{sen} t \left(-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)$

n.b.:
$\frac{d}{dt}\left((\cos t)^2\right) =$
$= 2\cos t(-\operatorname{sen} t)$
$\frac{d}{dt}\left((\operatorname{sen} t)^2\right) =$
$= 2\operatorname{sen} t \cos t$

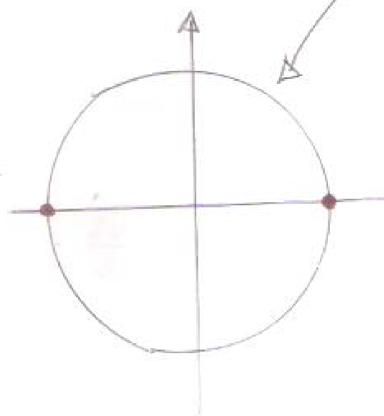
$$g'(t) = 0 \iff (\cos t = 0) \vee (\operatorname{sen} t = 0) \vee \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 0$$

$$(\cos t - \operatorname{sen} t)(\cos t + \operatorname{sen} t) = 0$$

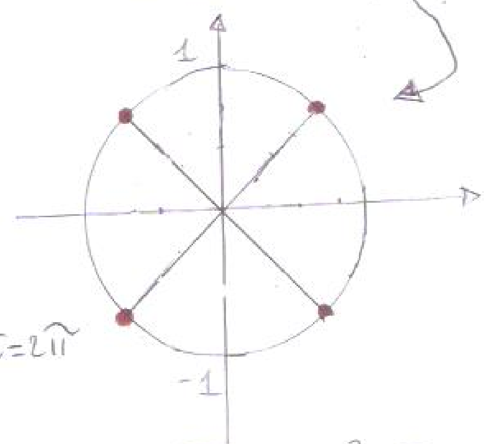
$$\cos t = \operatorname{sen} t \vee \cos t = -\operatorname{sen} t$$



$t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3}{2}\pi$



$t = 0 \vee t = \pi \vee t = 2\pi$



$t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{3}{4}\pi \vee t = \frac{5}{4}\pi \vee t = \frac{7}{4}\pi$

$t = \frac{\pi}{2} \to x(t) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \to \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$t = \frac{3}{2}\pi \to x(t) = \cos\frac{3}{2}\pi = 0 \qquad y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -\frac{1}{2} \to \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$t = 0 \to x(t) = \cos 0 = 1 \qquad y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 0 = 0 \quad (1, 0)$

e così via: otteniamo gli 8 punti già ricavati coi moltiplicatori, calcoliamo i valori di f, oltre al valore relativo a $P_{in} = P_{fin}$ ed arriviamo alle stesse conclusioni.