LEZIONE 23/4/2020

DERIVATE PARZIALI, GRADIENTE, PIANO TANGENTE

Una funzione di 2 variabili $f(x,y)$ può essere derivata sia rispetto a x sia rispetto a y, quindi ammette **DUE DERIVATE PARZIALI**

$\frac{\partial f}{\partial x}$ oppure f_x DERIVATA PARZIALE rispetto a x
si deriva rispetto a x considerando y come parametro

$\frac{\partial f}{\partial y}$ oppure f_y DERIVATA PARZIALE rispetto a y
si deriva rispetto a y considerando x come parametro

ESEMPI 1) $f(x,y) = -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5}y + 10$

$f(x,y) = -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5}y + 10$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4}{5} + 0 + 0 = -\frac{4}{5}$

$f(x,y) = -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5}y + 10$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{8}{5} + 0 = \frac{8}{5}$

$D(\text{costante}) = 0$

$D(cf(x)) = cf'(x)$

2) $f(x,y) = 2xy^3 + 3y^2$

$f(x,y) = 2xy^3 + 3y^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2y^3 + 0 = 2y^3$

$f(x,y) = 2xy^3 + 3y^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \cdot 3y^2 + 3 \cdot 2y = 6xy^2 + 6y$

OSSERVAZIONE In generale le due derivate parziali sono diverse.

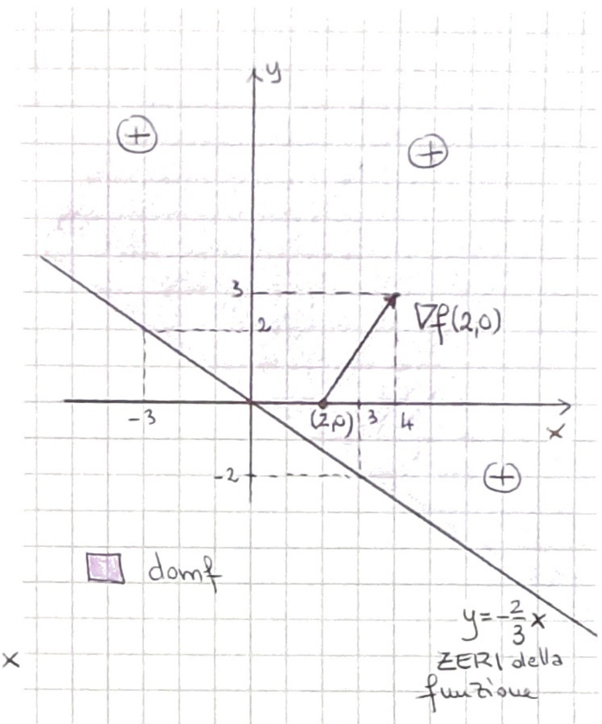
3) $f(x,y) = \frac{1}{5}x^2y - 1 - \frac{7}{2}y - \frac{1}{10}x^2y^4$

$f(x,y) = \frac{1}{5}x^2y - 1 - \frac{7}{2}y - \frac{1}{10}x^2y^4$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5} \cdot 2x \cdot y + 0 + 0 - \frac{1}{10} \cdot 2x \cdot y^4 =$

$= \frac{2}{5}xy - \frac{1}{5}xy^4$

$f(x,y) = \frac{1}{5}x^2y - 1 - \frac{7}{2}y - \frac{1}{10}x^2y^4$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{5}x^2 + 0 - \frac{7}{2} - \frac{4}{10}x^2y^3 = \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{2} - \frac{2}{5}x^2y^3$

4) $f(x,y) = 4\sqrt{2x+3y}$



$\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+3y \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -\frac{2}{3}x\}$

SOPRA LA RETTA $y = -\frac{2}{3}x$ (per $(0,0)$ di coeff. angolare $m = -\frac{2}{3}$) retta compresa. La retta passa per $(3,-2)$ e $(-3,2)$

ZERI $f(x,y) = 0 \iff 4\sqrt{2x+3y} = 0$

$\iff \sqrt{2x+3y} = 0 \iff 2x+3y = 0 \iff y = -\frac{2}{3}x$

La funzione vale 0 sulla retta

SEGNO $f(x,y) > 0 \iff 4\sqrt{2x+3y} > 0 \iff \sqrt{2x+3y} > 0 \iff y > -\frac{2}{3}x$

$f(x,y) = 4\sqrt{2x+3y}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+3y}} \cdot \underbrace{\partial_x(2x+3y)}_{2} = 4 \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x+3y}} \cdot \cancel{2} =$

$= \frac{4}{\sqrt{2x+3y}}$ $\qquad D(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$f(x,y) = 4\sqrt{2x+3y}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x+3y}} \cdot 3 = \frac{6}{\sqrt{2x+3y}}$

Per le funzioni di 1 e 2 variabili abbiamo:

1 variabile $\quad f(x)$ funzione di 1 var $\quad f'(x)$ funzione di 1 var $\quad$ $f'(x_0)$ numero $=$ coeff. angolare della $r_{tan} = m_{tan}$

2 variabili $\quad f(x,y)$ funzione di 2 var $\quad \left.\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{matrix}\right\}$ funzioni di 2 var

Se fissiamo (x_0,y_0) in cui esistano le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ sono numeri reali

I due numeri $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ hanno un SIGNIFICATO GEOMETRICO BEN PRECISO e messi insieme costituiscono un VETTORE detto $\boxed{\text{VETTORE GRADIENTE}}$.

VETTORE GRADIENTE Data una funzione di due variabili $f: \text{dom} f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0,y_0) \in \text{dom} f$, se esistono entrambe le derivate parziali di f in (x_0,y_0) allora si dice VETTORE GRADIENTE di f in (x_0,y_0) il vettore che ha per componenti le derivate parziali

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{j} \, .$$

ESEMPIO - Determinate e disegnate il gradiente di $f(x,y) = 4\sqrt{2x+3y}$ nel punto $(2,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4}{\sqrt{2x+3y}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6}{\sqrt{2x+3y}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = \frac{6}{\sqrt{4}} = 3$$

GRADIENTE di f in $(2,0) = \nabla f(2,0) = (2,3) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Disegnato in $(2,0)$ ha la punta in $(4,3)$.

5) $f(x,y) = \text{sen}(x^2 y)$

$$f(x,y) = \text{sen}(x^2 y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2 y) \cdot \partial_x (x^2 y) = 2xy \cdot \cos(x^2 y)$$

$$f(x,y) = \text{sen}(x^2 y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2 y) \cdot \partial_y (x^2 y) = x^2 \cdot \cos(x^2 y)$$

6) $f(x,y) = \sqrt{y} \cdot e^{3x-y^2}$

$D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{y} \cdot e^{3x-y^2} \cdot 3 = 3\sqrt{y} \cdot e^{3x-y^2}$$

$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot e^{3x-y^2} + \sqrt{y} \cdot e^{3x-y^2} \cdot (-2y) =$$

$$= e^{3x-y^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - 2y\sqrt{y}\right)$$

Calcoliamo il gradiente in $P_0 = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{3}, 1\right) = 3\sqrt{1} \cdot e^{3\frac{1}{3}-1} = 3 \cdot e^0 = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{3}, 1\right) = e^0 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1}} - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}\right) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\nabla f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \left(3, -\frac{3}{2}\right) = 3\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}.$$

DEFINIZIONI

RICHIAMO ANALISI 1 - Data una funzione $f(x)$ si dice che f è derivabile in $x_0 \in \mathrm{dom} f$ se ESISTE FINITO il LIMITE

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{h = x - x_0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ (Derivate parziali, f derivabile) Sia $f: \mathrm{dom} f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili e sia $(x_0, y_0) \in \mathrm{dom} f$.

Si dice che f è derivabile rispetto a x in (x_0, y_0) se esiste FINITO

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \underset{h = x - x_0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

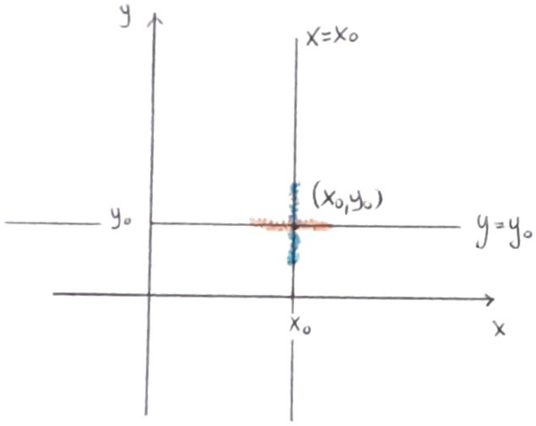
Si dice che f è derivabile rispetto a y in (x_0, y_0) se esiste FINITO

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \underset{k = y - y_0}{=} \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

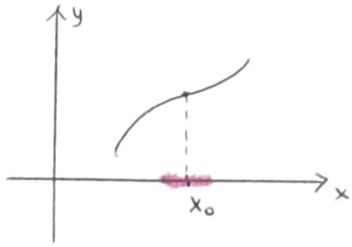
Si dice che f è **DERIVABILE in (x_0,y_0)** se è derivabile in (x_0,y_0) sia rispetto a x sia rispetto a y.

Si dice che f è DERIVABILE in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se è derivabile in ogni $(x,y) \in A$.

<u>OSSERVAZIONE</u> Nel calcolare la derivata $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ si utilizza il valore di $f(x,y)$ <u>SOLO</u> nei punti della retta orizzontale $y=y_0$ vicini a x_0. Allo stesso modo per calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ si considera $f(x,y)$ SOLO nei punti della retta verticale $x=x_0$ vicini a y_0.



Quindi l'esistenza delle derivate parziali fornisce informazioni solo su pochi punti, non su tutti i punti vicini a (x_0,y_0). La situazione è molto diversa rispetto alle funzioni di 1 variabile per cui la derivata considera tutto l'intorno di x_0.



In particolare se noi modifichiamo la funzione $f(x,y)$ tranne che sulle rette $x=x_0$ e $y=y_0$ le due derivate parziali in (x_0,y_0) non cambiano.

Questo ci permetterà di costruire una funzione di due variabili che sia derivabile in un punto (x_0,y_0), ma NON CONTINUA in tale punto.

È una delle più grandi differenze tra le funzioni di 1 variabile e quelle di 2 (o più) variabili.

Ricordiamo infatti che per funzioni di 1 variabile vale:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

(invece il viceversa è falso: $f(x)=|x|$ è continua su $\mathbb{R}$ ma non è derivabile in $x_0=0$ perché presenta un punto angoloso).

Questo fatto ci dice anche che la definizione di derivabilità in un punto (x_0,y_0) data chiedendo che esistano le due derivate parziali è più debole di quello che dovrebbe essere e non estende adeguatamente a due variabili il concetto di funzione derivabile in una variabile. Introdurremo in seguito il concetto di

FUNZIONE DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0).