Preconcetti

α(radianti)	α (gradi)	senα	cosα	tangα
0	0°	0	1	0
π/6	30°	1/2	√3/2	√3/3
π/4	45°	√2/2	√2/2	1
π/3	60°	√3/2	1/2	√3
π/2	90°	1	0	N.E.
2/3π	120°	√3/2	-1/2	-√3
3/4π	135°	√2/2	-√2/2	-1
5/6π	150°	1/2	-√3/2	-√3/3
π	180°	0	-1	0

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (relazione fondamentale)

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$

Logaritmi

Prodotto: $k \log(x) = \log(x)^k$ **somma/sottrazione**: $\log(x) + \log(y) = \log(x*y)$

Logaritmo nullo: $\log(1) = 0$ $\log(x) - \log(y) = \log(x/y)$

Prodotto scalare

In $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Funzioni principali: *Con eventuale aggiunta di costanti*

Circonferenza

$\sqrt{x^2+y^2} = r$ oppure $x^2+y^2 = r^2$

Sfera

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ oppure $x^2+y^2+z^2 = r^2$ (r è il raggio)

Ellisse

$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = k$

Ellissoide

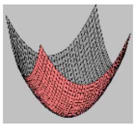
$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} = k$

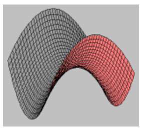
Cono

$\sqrt{x^2+y^2} = z$ (punta verso il basso)

Paraboloide

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}$

$+ \rightarrow$ 

$- \rightarrow$ 

Iperbole

$\pm\left(\frac{x}{a}\right)^2 \mp \left(\frac{y}{b}\right)^2 = r^2$ (i segni devono essere opposti)

Prima parte:

Integrale curvilineo

$$\int_\gamma f\, dl \equiv \int_a^b < f(\gamma(t)) | \gamma'(t) >$$

Oppure

$$\int_\gamma f\, dl \equiv \int_a^b f(\gamma(t)) * ||\gamma'(t)||$$

Lunghezza della curva

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt \equiv \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + [\rho'(\theta)]^2}\, d\theta \text{ (in forma polare)}$$

funzioni s. monotone

esponenziale

f. costanti cred./decr.

esponenziali disp.

radice e logaritmi

Gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = \left(f'_x\, ;\, f'_y\, ;\, f'_z\right)$$

$$\nabla \frac{1}{f}(x_0, y_0) = -\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{[f(x_0,y_0)]^2}$$

Equazione piano tangente

$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$

Derivata direzionale su un vettore v

$\delta_v f(x_0, y_0) = <\nabla f(x_0, y_0)\ |\ v>$

derivata di una curva

$\varphi'(t_0) = <\nabla f(\gamma(t_0))|\ \gamma'(t_0)>$ se $f = f(\gamma(t))$

$\varphi'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0)) * x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) * y'(t_0)$ se $f = f(x(t), y(t))$

Curva semplice

Se almeno una delle componenti è str. Monotona

curva continua

Se tutte le componenti sono continue nell'intervallo

Tylor se f(x, y) di 1° grado

$$p(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0) | \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle$$

Tylor se f(x, y) di 2° grado

$$p(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0) | \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle.$$

Seconda parte: Studio di funzione

Hessiana in 3-Dim

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yx}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

Hessiana in 3-Dim

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Funzione Lagrangiana

$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda[\gamma(x, y, z)]$

Immagine dell'insieme k

$f(k) = [f(P_{minimo}), f(P_{massimo})]$

Sistema risolutivo Lagrange in 3-DIM

$$\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda) = 0 \\ L_y(x,y,z,\lambda) = 0 \\ L_z(x,y,z,\lambda) = 0 \\ -\gamma(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Sistema risolutivo Lagrange in 2-DIM

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) = 0 \\ -\gamma(x,y) = 0 \end{cases}$$

Regole di deduzione della tipologia del punto in 2-DIM

a. se il primo elemento è negativo il punto deve essere un punto di sella

b. se il primo elemento è positivo e il determinante è positivo, allora è un minimo

c. se il primo elemento è positivo e il determinante è negativo, allora è un massimo

Regole di deduzione della tipologia del punto in 3-DIM

calcolo il determinante 1x1, 2x2, 3x3 della matrice e se:

a. Sono tutti positivi è un punto di minimo

b. Se sono positivi 1x1, 3x3 e negativi il 2x2 allora è un massimo

c. Altrimenti è un punto di sella.

Seconda parte: Campo vettoriale

Campo conservativo

$$\begin{cases} \dfrac{df^1}{dy} \equiv \dfrac{df^2}{dx} \\ \dfrac{df^2}{dz} \equiv \dfrac{df^3}{dy} \\ \dfrac{df^3}{dx} \equiv \dfrac{df^1}{dz} \end{cases}$$

Potenziale del campo

$$F(x, y, z) = \int_0^x f^1(t,0,0)dt + \int_0^y f^2(x,t,0)\,dt + \int_0^z f^3(x,y,t)dt$$

Integrale curvilineo sul campo

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Seconda parte: Equazioni differenziali

Derivate fondamentali	Formule generalizzate ottenute in base al teorema di derivazione delle funzioni composte
$Dc=0$ ($c \in \mathbf{R}$), $Dx=1$, $Dx^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$	$D[f(x)]^\alpha = \alpha[f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$D\sin x = \cos x$	$D\sin f(x) = f'(x) \cdot \cos f(x)$
$D\cos x = -\sin x$	$D\cos f(x) = -f'(x) \sin f(x)$
$D\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$D\tan f(x) = f'(x)(1+\tan^2 f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$D\log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$D\log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a}$
$D\ln x = \frac{1}{x}$	$D\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$Da^x = a^x \cdot \ln a$	$Da^{f(x)} = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$
$De^x = e^x$	$De^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\arcsin f(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\arccos x = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$D\arctan f(x) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

Principali regole di derivazione
$D[f(x)+g(x)] = f'(x) + g'(x)$
$D[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$
$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$D\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Lineari di 1°

$$x(t) = e^{-A(t)}\left[\int b(t)e^{A(t)}dt\right] + c$$

Variabili separabili

$$H(x) = \int_{x0}^{x} h(z)dz \qquad G(t) = \int_{t0}^{t} \frac{1}{G(z)}dz$$

$$L_1 = \lim_{x \to k} H(x) \qquad L_2 = \lim_{x \to \pm\infty} H(x)$$

Omogenee 2°

Se $z_1 \neq z_2$ → la soluzione $x(t) = c_1e^{z_1t} + c_2e^{z_2t}$

Se $z_1 = z_2$ → la soluzione $x(t) = c_1e^{zt} + t\,c_2e^{zt}$

Se $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ → la soluzione $x(t) = c_1e^{\alpha t}\cos(bt) + c_2e^{\alpha t}\sin(bt)$

Non omogenee 2°

$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$

Metodo di somiglianza

1- Caso esponenziale:
   a. se $f(t) = k\,e^{\alpha t}$ allora $x_p(t) = c\,e^{\alpha t}$
   b. se $f(t) = k\,e^{\alpha t}$ ed α è soluzione di $x_c(t)$ allora $x_p(t) = c\,te^{\alpha t}$

2- Caso polinomio: p(t) è un polinomio qualsiasi, ci interessa solo il grado max n
   a. Se $f(t) = p(t)^n$ allora $x_p(t) = p_1(t)^n$
   b. Se $f(t) = p(t)^n$ ed $\tilde{c} = 0$ allora $x_p(t) = p_1(t)^{n-1}$
   c. Se f(t) = k bisogna lavorare come se il grado fosse 0.

   Il polinomio avrà come costanti le incognite a, b, c Es. se $p(t) = 3t^2 + 4t + 1$ → $p_1(t) = at^2 + bt + c$

3- Caso seno-coseno: dove uno tra α, β può anche essere nulla
   a. Se $f(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ allora $x_p(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$
   b. Se $f(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ ed $\tilde{b} = 0$ allora $x_p(t) = t\,[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]$

   NB. Se anche f(t) ha solo seno o coseno la soluzione ha entrambi.

4- Caso esponenziale – polinomio:
   a. Se $f(t) = k\,e^{\alpha t}\,p(t)^n$ allora $x_p(t) = a\,e^{\alpha t}\,p(t)^n$
   b. Se $f(t) = k\,e^{\alpha t}\,p(t)^n$ ed α è soluzione di $x_c(t)$ allora $x_p(t) = a\,e^{\alpha t}\,p(t)^{n+1}$

5- Caso esponenziale – seno/coseno:
   a. Se $f(t) = k\,e^{\alpha t}\,[\beta\cos(\omega t) + \gamma\sin(\omega t)]$ allora $x_p(t) = a\,e^{\alpha t}\,[b\cos(\omega t) + c\sin(\omega t)]$
   b. Se $f(t) = k\,e^{\alpha t}\,[\beta\cos(\omega t) + \gamma\sin(\omega t)]$ ed $\alpha + i\omega$ è soluzione di $x_c(t)$ allora $x_p(t) = a\,e^{\alpha t}\,[b\cos(\omega t) + c\sin(\omega t)] * t$

Disequazioni di primo grado di Bernoulli

Sono nella forma $y' + a(x)y = b(x)y^n$

1- Chiamo z = y^{n-1} , $\frac{z'}{1-n} = y^{-n} * y'$
2- Sostituisco $\frac{z'}{1-n} + a(x)z = b(x) \rightarrow z' + (1-n)a(x)z = b(x)(1-n)$
3- Risolvo con il metodo delle equazioni lineari di primo grado
4- Cambio di variabili da z a y.

Metodo delle variazioni della costanti per ED di 2°

$$\begin{cases} \psi_1'(t)y_1(t) + \psi_2'(t)y_2(t) = 0 \\ \\ \psi_1'(t)y_1'(t) + \psi_2'(t)y_2'(t) = g(t) \end{cases}$$

Grado superiore al 2

- Se $z_1, \ldots, z_n \in R^1$ e sono tutte diverse allora x(t) = $c_1e^{z_1t} + \cdots + c_ne^{z_nt}$
- Se $z_1, \ldots, z_n \in R^k$ e sono tutte diverse allora: (ho più molteplicità per ogni z)
  x(t) = $c_1e^{z_1t} + t\, c_1e^{z_1t} + t^2\, c_1e^{z_1t} + \cdots + t^{k-1}c_1e^{z_1t} + \cdots + c_ne^{z_nt} + t\, c_ne^{z_nt} + \cdots + t^{k-1}c_ne^{z_nt}$

- Se $z_1, \ldots, z_n \in C^1$ (cioè sono nella forma α + iβ) allora:
  x(t) = $[c_{1a}e^{\alpha_1t}\cos(\beta_1t) + c_{1b}e^{\alpha_1t}\sin(\beta_1t)] + \cdots + [c_{na}e^{\alpha_nt}\, cos(\beta_nt) + c_{nb}e^{\alpha_nt}\, sin(\beta_nt)]$
- Se $z_1, \ldots, z_n \in C^1$ allora il ragionamento è uguale a caso $z_1, \ldots, z_n \in R^k$

Seconda parte: Integrali tripli

Integrali immediati	Integrali immediati di funzioni composte
$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbf{R}$ con $\alpha \neq -1$	$\int f'(x)\,[f(x)]^\alpha\, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\quad \alpha \in \mathbf{R}$ con $\alpha \neq -1$
In particolare: $\int dx = x + c$	
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\|x\| + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\|f(x)\| + c$
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\int f'(x)\cos f(x)\, dx = \sin(f(x)) + c$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int f'(x)\sin f(x)\, dx = -\cos(f(x)) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\, dx = \tan f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\, dx = -\cot f(x) + c$
$\int e^x\, dx = e^x + c$	$\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int f'(x)\, a^{f(x)}\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}\, dx = \arctan f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, dx = \arcsin f(x) + c$
$\int \frac{1}{x^2+k^2}\, dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k} + c$	$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+k^2}\, dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{f(x)}{k} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{k} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{k^2-[f(x)]^2}}\, dx = \arcsin\frac{f(x)}{k} + c$

$$\int \cos(x)\sin(x)\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$$

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x + c$$

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$$

Passaggio alle coordinate polari:

Se trovo	Allora scrivo
x	$r\, cos(\sigma)$
y	$r\, sin(\sigma)$
z	$r\, cos(\sigma)\sin(\sigma)$
$(\sqrt{x^2+y^2})^k$	r^k
dxdy	$r * drd\sigma$

Integrale per parti:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\ dx$$

Integrale per sostituzione

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\cdot \underbrace{g'(x)\ dx}_{dt} = \int f(t)\ dt$$

Altri appunti e formulari: https://appuntiunipriiet.altervista.org/