QUINTA ESERCITAZIONE SULLE FUNZIONI DI 2 VARIABILI

Iniziamo ricordando la definizione di PUNTO STAZIONARIO:

- data una funzione $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, un punto (x_0, y_0) è detto STAZIONARIO di f se (x_0, y_0) è interno a dom f e $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

- Per determinare i punti stazionari occorre quindi calcolare $\nabla f(x,y)$ e risolvere il sistema che si ottiene ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$.
- La fase successiva è la classificazione dei punti stazionari, cioè la determinazione della loro natura: un punto stazionario può essere punto di massimo locale, punto di minimo locale, punto di sella o non rientrare in nessuna di queste tre categorie.
- La strada da percorrere per studiare la natura dei punti stazionari è basata sullo studio della matrice delle derivate seconde, detta matrice Hessiana, $Hf(x,y)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

(n.b.: se f è una funzione di classe C^2 su un aperto A, allora le due derivate miste $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ coincidono $\forall (x,y) \in A$ [Teorema di SCHWARTZ])

- Lo strumento fondamentale per classificare i punti STAZIONARI è il seguente TEOREMA:
- Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 definita in un aperto A. Sia $(x_0, y_0) \in A$ un punto STAZIONARIO di f:

(i) $\det Hf(x_0,y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0 \Longrightarrow$ (x_0,y_0) è punto di MINIMO LOCALE per f

(ii) $\det Hf(x_0,y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0 \Longrightarrow$ (x_0,y_0) è punto di MASSIMO LOCALE per f

(iii) $\det Hf(x_0,y_0) < 0 \Longrightarrow (x_0,y_0)$ è punto di SELLA

(iv) $\det Hf(x_0,y_0) = 0 \Longrightarrow$ non sappiamo dire cosa sia (x_0,y_0)

(n.b.: la condizione relativa a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ può essere sostituita con la condizione analoga relativa a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$)

- Al Teorema può essere associato lo studio del segno della funzione, che però si può attuare solo in un numero limitato di casi.
- Ultima osservazione: i punti di massimo e minimo locale di una funzione f definita su tutto $\mathbb{R}^2$ si possono trovare:
  1) Tra i punti stazionari di f su $\mathbb{R}^2$ (nei quali il piano tangente è parallelo al piano xy)
  2) Tra i punti (x_0, y_0) in cui f non è differenziabile (nei quali il piano tangente non esiste)

Veniamo agli esercizi:

$\boxed{1}$ Data $\boxed{f(x,y) = x^4 + y^2 + x^2 y - 3x^2 - 3y - 5}$

determinare i punti stazionari e studiarne la loro natura.

Svolgimento: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 2xy - 6x = 2x(2x^2 + y - 3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x^2 - 3$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x(2x^2+y-3) = 0 \\ 2y + x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + x^2 - 3 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2 + y - 3 = 0 \\ 2y + x^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x^2 + 3 \\ -4x^2 + 6 + x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x^2 + 3 \\ x^2 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Punti stazionari: $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ $B(1,1)$ $C(-1,1)$

Per studiare la natura dei punti stazionari costruiamo la matrice Hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 2y - 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x$$ (è la derivata rispetto a y della derivata rispetto a x)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x$$ (è la derivata rispetto a x della derivata rispetto a y)

Osserviamo che, essendo f di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$ le due derivate miste coincidono $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ - (per il Teorema di Schwartz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

Quindi $\quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2+2y-6 & -2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$

Non è necessario calcolare $\det Hf(x,y)$ - Lo calcoleremo per ognuno dei punti stazionari:

- $\det Hf\left(0,\frac{3}{2}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 < 0 \Longrightarrow$

  A è punto di SELLA

- $\det Hf(1,1) = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 16-4 = 12 > 0$;

  essendo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 8 > 0$, B è punto di MINIMO LOCALE

- $\det Hf(-1,1) = \begin{matrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{matrix} = 12 > 0$;

  essendo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 8 > 0$, anche C è punto di MINIMO LOCALE

$\boxed{2}$ Determinare i punti stazionari di

$$\boxed{f(x,y) = x^2y + xy^2 + 3xy}$$ in $\mathbb{R}^2$ e

studiarne la natura.

Svolgimento: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 + 3y = y(2x+y+3)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy + 3x = x(x+2y+3)$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y(2x+y+3) = 0 \\ x(x+2y+3) = 0 \end{cases}$$

da cui derivano 4 sistemi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x+2y+3 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+y+3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+y+3 = 0 \\ x+2y+3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x-3 \\ x-4x-6+3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x-3 \\ -3x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Punti stazionari:

$A(0,0)$ $B(-3,0)$ $C(0,-3)$ $D(-1,-1)$

Per studiare la natura dei punti stazionari dobbiamo calcolare le derivate parziali seconde.

Partiamo dalle derivate prime in forma polinomiale:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x+2y+3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

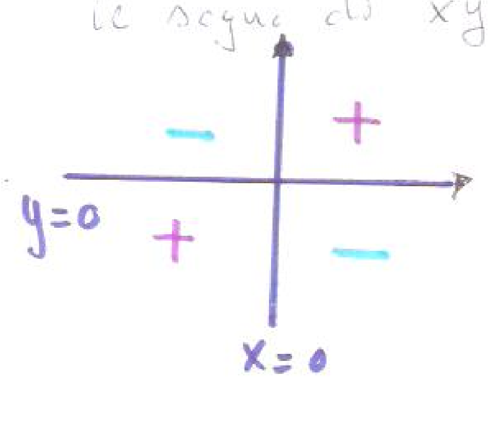
(ovviamente coincidono per il Teorema di Schwartz, essendo f di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$, ma è sempre meglio calcolarle entrambe)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y+3 \\ 2x+2y+3 & 2x \end{pmatrix}$$

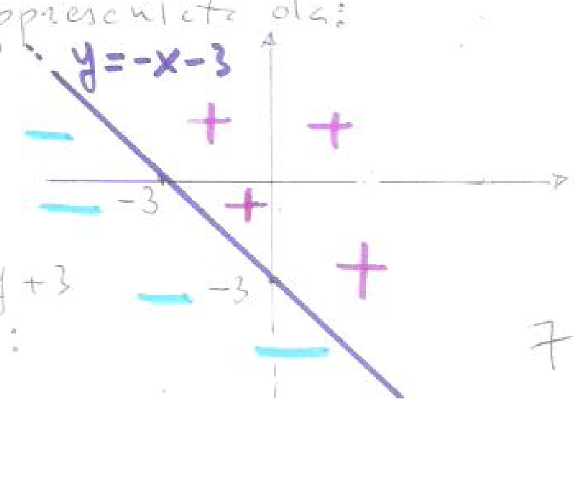
- $\det Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Longrightarrow$ A punto di SELLA
- $\det Hf(-3,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Longrightarrow$ B punto di SELLA
- $\det Hf(0,-3) = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Longrightarrow$ C punto di SELLA
- $\det Hf(-1,-1) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$;

essendo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -2 < 0$, D è punto di MASSIMO LOCALE

In questo caso è utile lo studio del segno di f: infatti $f(x,y) = xy\,(x+y+3)$; osserviamo che gli zeri della funzione corrispondono a $x=0$, $y=0$, $y=-x-3$, mentre il segno di xy è rappresentato da:



mentre quello di $x+y+3$ da:

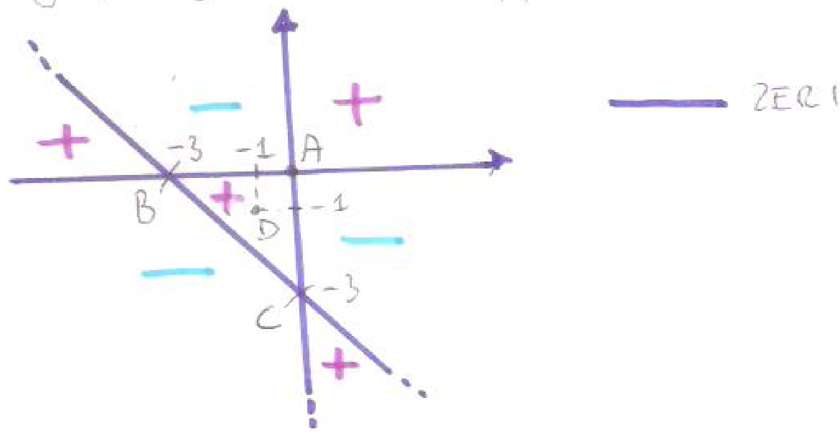


Infatti $x+y+3>0$ per $y>-x-3$ cioè nel

SOPRAGRAFICO di $y=-x-3$ -

In base alla regola dei segni, il segno di

$f(x,y) = xy\,(x+y+3)$ è rappresentato da:



Osserviamo che A, B e C appartengono all'ins. degli zeri ($f(x,y)=0$) e in un intorno di A, o di B, o di C, la funzione cambia segno e quindi non si può trattare né di punti di massimo locale, né di punti di minimo locale -

D invece appartiene al Triangolo ABC in cui $f(x,y)\geq 0$, con $f(x,y)=0$ sui lati e $f(x,y)>0$ all'interno: non può - essere che un punto di massimo locale con $f(-1,-1)=1$ -

È utile interpretare il grafico precedente come mappa di un territorio, in cui le zone $+$ stanno sopra il livello del mare e le zone $-$ sotto il livello del mare, che è rappresentato dalle rette — degli zeri -

D è un punto della mappa a cui, in un grafico tridimensionale di $f(x,y)$ corrisponde una vetta all'interno di un "isoletta" delimitata dai due assi e da $y=-x-3$.

Ricordiamo che il grafico di una funzione di due variabili è $\boxed{z=f(x,y)}$, cioè una SUPERFICIE in $\mathbb{R}^3$.

Prima di proseguire, vediamo di definire cosa si intende per punto di MASSIMO o di MINIMO ASSOLUTO per una funzione $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in un sottinsieme $E \subset \text{dom} f$, con f CONTINUA in dom f ed E CHIUSO e LIMITATO.

- (x_0,y_0) è punto di MASSIMO ASSOLUTO per f in E se $f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \ \forall (x,y) \in E$
- (x_0,y_0) è punto di MINIMO ASSOLUTO per f in E se $f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \ \forall (x,y) \in E$.

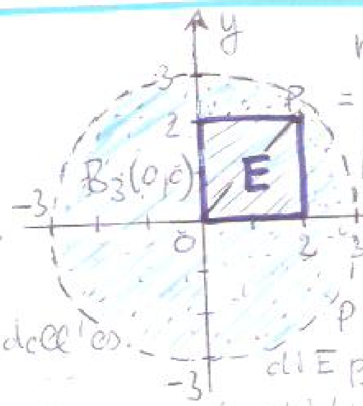
Nelle ipotesi fatte (f CONTINUA ed E CHIUSO e LIMITATO) vale il Teorema di WEIERSTRASS e quindi siamo sicuri che f ammette

Massimo e minimo assoluti su E -

I punti di MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI si possono trovare

1) Tra i punti STAZIONARI di f interni a E
2) Tra i punti (x_0, y_0) in cui f non è differenziabile
3) Tra i punti del BORDO di E (∂E)

Proseguiamo con gli esercizi:



n.b.: $\overline{OP} = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}8$ $\boxed{2\sqrt{2} < 3}$

fig. 1

P è il punto di E più lontano da O

$\boxed{3}$ Relativamente alla funz. $\boxed{f(x,y) = x^4 + y^2 + x^2 y - 3x^2 - 3y - 5}$ dell'es. $\boxed{1}$ determinare, dopo averne giustificato l'esistenza, il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

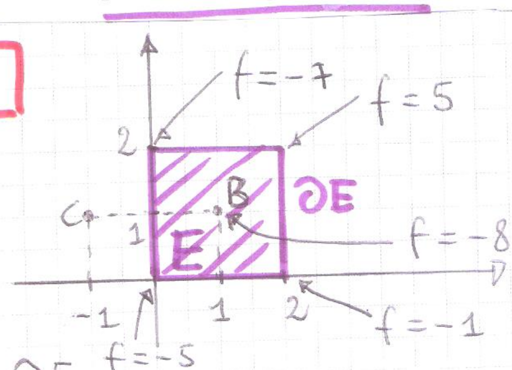
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\} \ -$$

Svolgimento 1 La funzione è continua, come ogni funzione polinomiale, in dom $f = \mathbb{R}^2$, e l'insieme E è chiuso (il bordo appartiene ad E) e limitato ($E \subset B_3(0,0)$, cerchio aperto di centro O e raggio 3 (vedi fig. 1)). Le ipotesi del Teorema di WEIERSTRASS sono quindi verificate e

$f(x,y)$ ha in E massimo e minimo assoluti.

2) Tra i tre punti stazionari interni ad E $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$ è di SELLA, mentre $B(1,1)$ e $C(-1,1)$ sono di MINIMO LOCALE. Il punto di sella non ci interessa, mentre tra B e C soltanto B è interno ad E, con $\boxed{f(1,1)=-8}$

3) Non ci sono punti in cui f non sia derivabile quindi occorre studiare la situazione relativamente a ∂E.



E è un quadrato. Prima di tutto calcoliamo $f(x,y)$ relativamente ai 4 vertici di E:

$f(0,0)=-5$

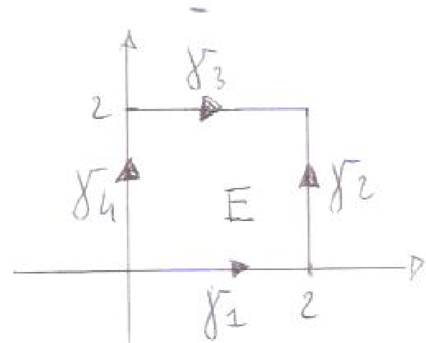
$f(2,0)=16-12-5=-1$

$\boxed{f(2,2)=16+4+8-12-6-5=5}$

$f(0,2)=4-6-5=-7$

Per ora il minimo valore trovato è $-8=f(1,1)$ e il massimo è $5=f(2,2)$, ma dobbiamo ancora vedere cosa succede all'interno dei 4 lati del bordo. A questo scopo parametrizziamo ogni tratto del bordo, non importa in quale verso.

Per ogni tratto leggiamo f sulla curva ottenuta, allo scopo di determinare eventuali punti di massimo o minimo locali interni al tratto considerato. In tali punti la funzione $g(t) = f(x(t), y(t))$ ha derivata nulla.



1° tratto: $\gamma_1 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0,2]$

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f(t,0) = t^4 - 3t^2 - 5$$

$$g'(t) = 4t^3 - 6t = 2t(2t^2 - 3)$$

$$g'(t) = 0 \iff t = 0 \ \vee \ t = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \simeq \pm 1{,}2$$

$$(0,0) \qquad \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right) \qquad \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} \notin [0,2]\right)$$

$f(0,0) = -5$, (già calcolato)

$$\underbrace{f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)}_{g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} - 5 = \frac{9 - 18 - 20}{4} = -\frac{29}{4} = -7{,}25$$

2° tratto: $\gamma_2 \begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [0,2]$

$$g(t) = f(2,t) = 16 + t^2 + 4t - 12 - 3t - 5 = t^2 + t - 1$$

$$g'(t) = 2t + 1 \qquad g'(t) = 0 \iff t = -\frac{1}{2} \notin [0,2]$$

(n.b.: se i valori trovati non appartengono all'intervallo di variabilità di T non vanno considerati)

3° Tratto : $\gamma_3 \begin{cases} x=t \\ y=2 \end{cases} \quad t\in[0,2]$

$g(t) = f(t,2) = t^4+4+2t^2-3t^2-6-5 = t^4-t^2-7$

$g'(t) = 4t^3-2t = 2t(2t^2-1)$

$g'(t)=0 \iff t=0 \;\vee\; 2t^2-1=0 \longrightarrow t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(0,2)$ $\quad (\frac{\sqrt{2}}{2},2)$ $\quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}\notin[0,2])$

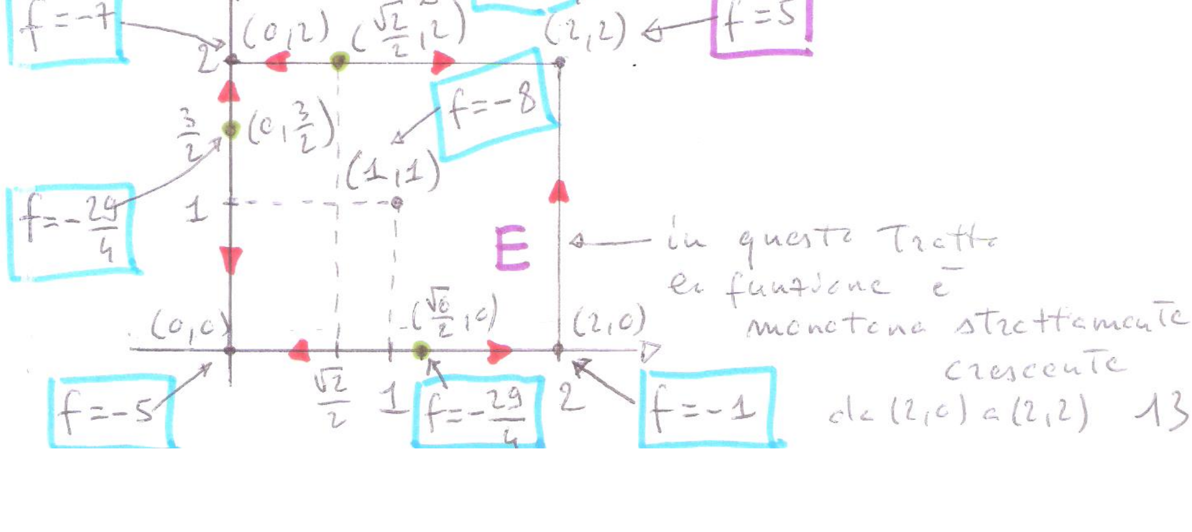
$f(0,2) = -7$ (già calcolato) $\quad f(\frac{\sqrt{2}}{2},2) = \underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-7}_{g(\frac{\sqrt{2}}{2})} = -\frac{29}{4}$ $\quad (\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0,7)$

4° Tratto : $\gamma_4 \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} \quad t\in[0,2]$

$g(t) = f(0,t) = t^2-3t-5 \qquad g'(t)=2t-3$

$g'(t)=0 \iff t=\frac{3}{2} \longrightarrow (0,\frac{3}{2})$

$f(0,\frac{3}{2}) = g(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}-\frac{9}{2}-5 = -\frac{29}{4}$



Nel grafico le frecce rosse rappresentano la crescenza della funzione, i punti verdi i punti di minimo relativo interni ai 4 tratti.

Tra gli 8 punti presi in considerazione notiamo che solo per $(2,2)$ la funzione è positiva ("siamo sopra il livello del mare"), mentre negli altri 7 è negativa e il minimo valore si ha per $(1,1)$ ("sotto il livello del mare")

4) Concludiamo quindi che, oltre che sul bordo f è compresa tra $-\frac{29}{4}$ e 5, mentre c'è un punto di minimo locale interno in cui $f(1,1)=-8$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\limits_{E} f(x,y) = -8 = f(1,1) \\ \max\limits_{E} f(x,y) = 5 = f(2,2) \end{array}}$$

Osservazione: guardando il grafico di pag 13 possiamo vedere come la mappa di una vasca con una parte emersa e una sommersa, con profondità massima -8, al centro e quota massima 5 nella parte emersa. Percorrendo il bordo da $(0,0)$ in verso antiorario scendiamo da -5 a $-7{,}25$ per risalire poi a -1 nel 1° tratto; risaliamo fino a 5, riemergendo nel 2° tratto; ci reimmergiamo fino a tornare a $-7{,}25$ per $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$ nel terzo tratto, poi risaliamo, sempre nel terzo tratto, ma di poco, fino a -7, per poi scendere, di poco, fino a $-7{,}25$ e risalire fino a -5 nel quarto tratto. Ci potrebbe interessare determinare l'insieme degli zeri, cioè la linea che separa le zone "emerse" da quelle "subacquee", ma dovremmo risolvere l'equazione con 2 incognite $y^4+2x^2-4y^2+4x-2=0$ ...