UNIVERSITÀ di PARMA - INGEGNERIA GESTIONALE

ANALISI MATEMATICA 2 - SCHEDA N. 8

FUNZIONI di 2 VARIABILI (DERIVATE, GRADIENTE, PIANO TANGENTE)

1) Considerate la funzione

$$f(x,y) = 3y + 2x^2y^2 - 4x^3y.$$

a) Determinate le derivate parziali di f.

b) Determinate il gradiente di f nel punto $(1, -1)$.

---

2) Determinate le derivate parziali delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \sqrt{9 - x\,(y+3)^2 - x^2}$$

$$g(x,y) = (4 - y\,e^{2x}) \cdot \cos(x^2 y - 3x)$$

$$h(x,y) = e^{x\,y^2 + 4y} \cdot \sqrt{6 - x\ \mathrm{sen}(3xy)}$$

$$p(x,y) = \frac{2x\,y^3 - y}{2y - x}$$

---

3) Considerate la funzione

$$f(x,y) = x^3 + \frac{1}{16}x^2y^4 - \frac{3}{4}y^2x + 2.$$

a) Determinate le derivate parziali di f.

b) Determinate il gradiente di f nel punto $(-1, -2)$.

c) Determinate l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto corrispondente a $(x = -1, y = -2)$, dopo aver dimostrato che ESISTE.

---

4) Per le seguenti funzioni (quasi tutte già considerate nella SCHEDA 5) calcolate:

- il gradiente di f
- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto corrispondente ai valori di x_0 e y_0 a fianco indicati (dopo aver dimostrato che ESISTE per le funzioni a) b) a titolo di esempio).

a) $f(x,y) = \sqrt{x} \cdot \log(1+y^2)$ $\quad (x_0 = 1, y_0 = 1)$

b) $f(x,y) = \log(2x - x^2 - y + 1)$ $\quad$ DOMINIO, ZERI, SEGNO $\quad (x_0 = 2, y_0 = 0)$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2} + \log(1+3y)$ $\quad (x_0 = 2, y_0 = 0)$

d) $f(x,y) = \dfrac{x}{(y-1)^2} e^{3y}$ $\quad$ DOMINIO, ZERI, SEGNO $\quad (x_0 = 2, y_0 = 0)$

e) $f(x,y) = x \cdot \log\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}(x^2+y^2)\right)$ $\quad \left(x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

f) $f(x,y) = (2x-4) \cdot y \cdot \sqrt{25 - x^2}$ $\quad (x_0 = 3, y_0 = 1)$

g) $f(x,y) = \dfrac{4x - 2y}{x - 3y}$ $\quad (x_0 = 2, y_0 = 1)$

h) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-9)(y-1)}$ $\quad (x_0 = -3, y_0 = 2)$

5) Dopo aver enunciato il Teorema del DIFFERENZIALE TOTALE, stabilite se tale teorema si può applicare alla funzione $f(x,y) = x \cdot y \cdot (x^2+y^2) - 3y$, motivando accuratamente la risposta.

6) Scrivete la definizione di derivata parziale di f rispetto a x in (x_0, y_0) e la definizione di derivata parziale di f rispetto a y nel punto (x_0, y_0). Inventate una funzione tale che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, ma $\nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

7) Scrivete la definizione di funzione differenziabile in un punto (x_0, y_0). Scrivete la definizione di funzione differenziabile in $(-1,3)$. Dite quali tra le seguenti funzioni sono differenziabili nel loro dominio, motivando accuratamente la risposta:

a) $f(x,y) = x^2 \cdot y^3 + e^{y \operatorname{sen} x}$ b) $g(x,y) = |y|$

8) Calcolate $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ nei seguenti casi:

a) $f(x,y) = y - \sqrt{x} \cdot y^2$ $P_0 = (4,1)$ $\vec{v} = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

b) $f(x,y) = e^{-2y} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$ $P_0 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

9) Calcolate la derivata direzionale di f nel punto dato e nella direzione indicata dall'angolo θ:

a) $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x-2y}$ $P_0 = (0,2)$ $\theta = \frac{3}{2}\pi$ $\theta = \frac{2}{3}\pi$

b) $f(x,y) = \log(x^2 - y)$ $P_0 = (1,-1)$ $\theta = \pi$ $\theta = \frac{5}{4}\pi$

10) Calcolate (oltre a DOMINIO, ZERI, SEGNO) la derivata direzionale in $P_0 = (-2,2)$ di $f(x,y) = \sqrt{x^2(y-1)}$ nella direzione del punto $(2,2)$ e poi nella direzione del punto $(0,1)$.

11) Scrivete la definizione di derivata direzionale di una generica funzione $f(x,y)$ nel punto $(-2,1)$ e nella direzione $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Calcolate con la definizione tale derivata direzionale nel caso in cui $f(x,y) = 3x^2y - 3$.
Tale derivata si può calcolare anche in un altro modo?
In caso affermativo motivate accuratamente la risposta e poi calcolate di nuovo la derivata.
Cosa si potrebbe dire per la direzione $\vec{w} = (-1,0)$? Calcolate $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(-2,1)$ in tutti i modi possibili (sono 3).

Calcolate con la definizione e con la formula

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,1)$ nella direzione generica $\vec{v}=(v_1,v_2)$.

12) Si consideri la funzione $f(x,y) = 4 - \frac{1}{9}(x^2+y^2)$:

- determinate il dom f, l'equazione del grafico e disegnate il grafico
- Considerate $P_0=(6,0)$: calcolate $\nabla f(P_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ con $\vec{v}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, disegnate $\nabla f(P_0)$ e $\vec{v}$
- Considerate $P_1=(3\sqrt{2},3\sqrt{2})$: calcolate la massima pendenza del grafico in P_1 e la direzione nella quale tale pendenza viene raggiunta; determinate l'insieme di livello cui appartiene P_1, disegnatelo e verificate che $\nabla f(P_1)$ è ortogonale a tale insieme in P_1.
- Calcolate $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_1)$ nella direzione generica $\vec{v}=(v_1,v_2)$ in due modi diversi.

13) Calcolate la massima pendenza del grafico e la direzione nella quale viene raggiunta per la funzione $f(x,y)=\operatorname{sen}(\frac{5}{3}x+4y)$ nel punto $P_0=(-3,\frac{5}{4})$.

14) Considerate la funzione $f(x,y)=-3x-4y+6$:

- determinate il dominio, l'equazione del grafico e disegnatelo
- considerate $P_0=(0,0)$: determinate e disegnate l'insieme di livello cui appartiene P_0, poi determinate $\nabla f(P_0)$ e verificate che è perpendicolare all'insieme di livello trovato in P_0.
- determinate la direzione di massima salita e la pendenza massima del grafico in P_0
- in $P_1=(1,\frac{3}{4})$ calcolate $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_1)$ con $\vec{v}=$ direz di max salita; $\vec{v}=-\vec{i}$
- in P_1 calcolate le direzioni in cui $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_1)=-3$

Illustrate sul disegno.

15) Come es. 14) per la funzione $f(x,y) = 7 - \frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2}$ nel punto $P_0 = (5,0)$.

Poi determinate la massima pendenza negativa del grafico in P_0 e la direzione in cui viene raggiunta.

Inoltre calcolate $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ con $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Illustrate sul disegno.

16) Sia $f(x,y)$ una funzione tale che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$, $f(1,1) = 5$, $E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 2\}$. Dite, motivando accuratamente la risposta, quale tra i seguenti vettori può essere $\nabla f(1,1)$:

$\vec{v} = (2, \sqrt{2})$ $\quad \vec{w} = (-1, \sqrt{2})$ $\quad \vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

17) Considerate la funzione $f(x,y) = \sqrt{8x^2+18y^2}$:

- determinate $\operatorname{dom} f$
- determinate $\nabla f(3,2)$
- determinate l'insieme di livello cui appartiene il punto $(3,2)$
- utilizzate $\nabla f(3,2)$ per determinare un vettore tangente all'insieme di livello in $(3,2)$ e da questo l'equazione cartesiana della retta tangente
- Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre l'insieme di livello e da queste calcolate le eq.ni parametriche e l'equazione cartesiana della retta tangente in $(3,2)$.