COGNOME ______________________		NON SCRIVERE QUI	
NOME ______________________			
MATRICOLA └┴┴┴┴┴┴┘		1 2 3 4	
CORSO AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL			

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2017-2018 — PARMA, 31 AGOSTO 2018

AN2 - 31/8/18 - 1 -

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore e mezza**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare** **la risposta ,**

---

0) **PARTE PRELIMINARE**

Completate:

a) Sia $\gamma : [-\frac{14}{3}, \frac{2}{3}] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = 6\,(-\frac{t}{2}) = -3t \\ y(t) = -2 + \sqrt{2-3t} \end{cases} \quad t \in [-\frac{14}{3}, \frac{2}{3}].$$

Il sostegno della curva γ ha equazione ..... $y = -2 + \sqrt{2+x}$

e rappresenta .. il grafico della funzione $\sqrt{x}$ spostato a sinistra di 2 e in basso di 2

Il sostegno viene percorso in verso ...... delle x decrescenti

dal punto iniziale $(14, 2)$ ... al punto finale ... $(-2, -2)$

Disegnate il sostegno di γ con precisione sul foglio a quadretti.

Il vettore tangente nel punto $P_0 = (7, 1)$ è ... $\vec{v}_{P_0} = -3\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

L'equazione cartesiana della retta normale in P_0 è: ... $y = -6x + 43$

b) (sul foglio a quadretti) Calcolate il gradiente della funzione

$$f(x,y) = 3\,y \cdot \sqrt{4\,x^2\,y^3 - 3\,x}\ .$$

c) Considerate la funzione $f(x,y) = 5 + \sqrt{49 - x^2 - y^2}$.

i) Determinate il dominio di f , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f , spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico. Stabilite per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ risulta $E_k \neq \emptyset$.

iii) La derivata direzionale di f nel punto $(x_0 = 2\sqrt{3}, y_0 = -2\sqrt{3})$ nella direzione individuata dall'angolo $\theta = \frac{4}{3}\pi$ vale ... $\frac{\sqrt{3}-3}{5}$

d) Considerate la funzione $f(x,y) = 6 - \frac{1}{8}((x-2)^2 + (y+3)^2)$.

i) Determinate il dominio di f , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f , spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura).

iii) Determinate e disegnate l'insieme di livello cui appartiene il punto $(-1, 1)$.

iv) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corrrispondente a $(x_0 = -1, y_0 = 1)$ è ... $z = \frac{3}{4}x - y + \frac{37}{8}$

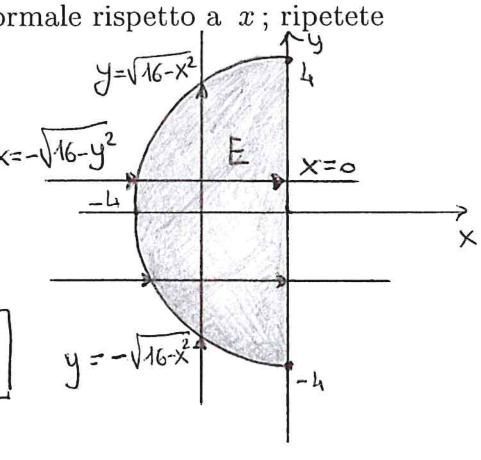
v) La retta per P_0 perpendicolare al grafico di f ha equazione ... $r \begin{cases} x = -1 + \frac{3}{4}t \\ y = 1 - t \\ z = \frac{23}{8} - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

e) Considerate l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, x \leq 0\}$ (disegnate l'insieme sul foglio a quadretti). E è la metà del CERCHIO di $C(0,0)$ $R=4$ con $x \leq 0$

Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme E come normale rispetto a x; ripetete come normale rispetto a y:

$E_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 0, -\sqrt{16-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$

$E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq y \leq 4, -\sqrt{16-y^2} \leq x \leq 0\}$



L'integrale doppio

$$\int_E |y| \, dxdy$$ vale ... $\boxed{\frac{128}{3}}$

f) Si consideri l'equazione differenziale $\frac{4}{5}y''(x) - 2y'(x) + \frac{5}{4}y(x) = 3 \operatorname{sen}(\frac{5}{4}x)$.

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = c_1 e^{5/4 x} + c_2 x e^{5/4 x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: eq.ne caratt. $\frac{4}{5}t^2 - 2t + \frac{5}{4} = 0$ $\Delta = 0$ $t_1 = \frac{5}{4}$ con molt 2 sol.ni FOND $y_1 = e^{5/4 x}$ $y_2 = x e^{5/4 x}$

La soluzione particolare va cercata nella forma ... $\bar{y} = A \operatorname{sen}(\frac{5}{4}x) + B \cos(\frac{5}{4}x)$

perchè ... il 2° m. è una combinazione lineare di seno e coseno di $\frac{5}{4}x$ e non si moltiplica per x perchè le 2 sol.ni fondam. dell'omog NON SONO $\operatorname{sen}(\frac{5}{4}x)$ e $\cos(\frac{5}{4}x)$

1) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(x^2 + (y+2)^2\right) + \frac{1}{8}x^2(y+2) - 4\,.$$

a) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

b) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 - 4 \le y \le 4\}\,.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $g(x,y) = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$.

a) Determinate il dominio di g , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g , spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6\,,\ z \ge 4\,,\ x \le 0\,,\ y \le 0\}\,.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy} , Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

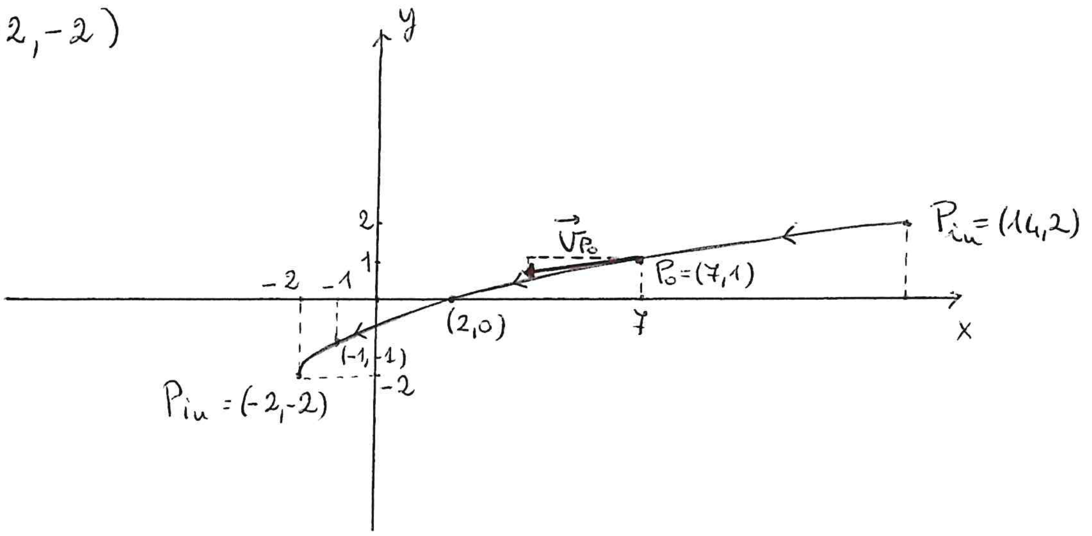
$$\begin{cases} \frac{8}{3}y''(x) - 2y'(x) = 16 - \frac{9}{2}x^2 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{5}{2}\,. \end{cases}$$

Risposta: ... $y(x) = -\frac{4}{3} + \frac{10}{3}e^{\frac{3}{4}x} + \frac{3}{4}x^3 + 3x^2$

SOLUZIONE dell'appello del 31/8/2018

es.0) a) $x = -3t$ eq.^{ne} del SOSTEGNO $y = -2 + \sqrt{2+x}$ si tratta del grafico della radice ($y = \sqrt{x}$) spostato a sinistra di 2 e in basso di 2

percorso nel verso delle x decrescenti dal $P_{in} = (14,2)$ al $P_{fin} = (-2,-2)$



passa per $(-2,-2), (-1,-1), (2,0), (7,1), (14,2)$

$P_0 = (7,1)$ corrisponde a $t_0 = -\frac{7}{3}$ $\begin{cases} 7 = -3t \\ 1 = -2 + \sqrt{2-3t} \end{cases}$ $t = -\frac{7}{3}$ $1 = -2 + \sqrt{2+7} = -2+3 = 1$ OK

$\gamma'(t) = \left(-3, \frac{-3}{2\sqrt{2-3t}}\right)$ $\vec{v}_{P_0} = \gamma'\left(-\frac{7}{3}\right) = -3\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

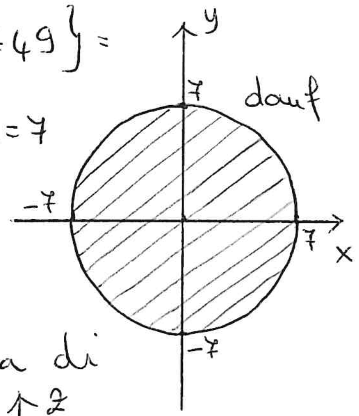
$m_{tan} = \frac{-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{1}{6}$ $m_{norm} = -6$ r_{norm} $y = 1 - 6(x-7)$

$y = -6x + 43$

b) $\nabla f(x,y) = \left(3y \cdot \dfrac{(8xy^3-3)}{2\sqrt{4x^2y^3-3x}} \,,\, 3\sqrt{4x^2y^3-3x} + 3y \cdot \dfrac{12x^2y^2}{2\sqrt{4x^2y^2-3x}} \right)$

c) i) $\mathrm{dom} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 49 - x^2 - y^2 \geq 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 49 \} =$

$=$ CERCHIO CHIUSO (interno+bordo) di $C(0,0)$ e $R=7$



ii) eq.^{ne} del grafico di f : $z = 5 + \sqrt{49-x^2-y^2}$

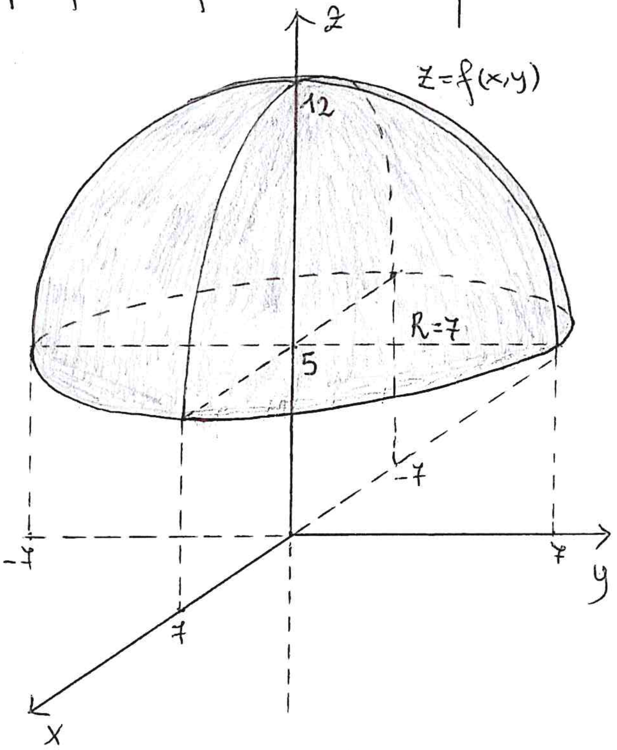
si tratta della metà superiore della superficie sferica di

$C(0,0,5)$ e $R=7$, $z_{max} = 5+7 = 12$

$\cap\, z=0\ \emptyset$ (non interseca il piano (x,y))

Dal grafico si vede subito che

$E_K \neq \emptyset \iff 5 \leq K \leq 12$



iii) $\vec{v}_\theta = \cos\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{j} =$

$= -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{x}{\sqrt{49-x^2-y^2}} \,,\, -\dfrac{y}{\sqrt{49-x^2-y^2}} \right)$

in $(x_0 = 2\sqrt{3}, y_0 = -2\sqrt{3})$ $\sqrt{49-x_0^2-y_0^2} = \sqrt{49-12-12} = \sqrt{25} = 5$

$\Rightarrow \nabla f(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) = \left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}, \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}_\theta}(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) = \nabla f(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) \cdot \vec{v}_\theta = \left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}, \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{5} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{\sqrt{3}-3}{5} \simeq -0{,}25$

d) i) dom $f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

ii) eq.^{ne} del grafico $z = 6 - \frac{1}{8}\left((x-2)^2 + (y+3)^2\right)$ si tratta del paraboloide circolare di $V(2,-3,6)$, rivolto verso il basso, di apertura $a = \frac{1}{8} < 1 \Rightarrow +$ largo del paraboloide $z = x^2 + y^2$,

$\cap\ z = 0$ su $\frac{1}{8}\left((x-2)^2 + (y+3)^2\right) = 6 \rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 48$,

circonf. di $C(2,-3)$ e $R = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \simeq 6,9$

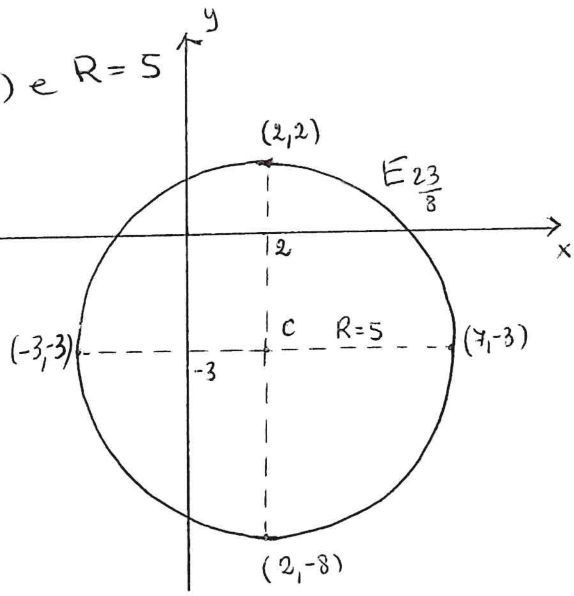
iii) $(-1,1) \in E_K$ per $K = f(-1,1) = 6 - \frac{1}{8}\left((-1-2)^2 + (1+3)^2\right) = -\frac{1}{8}(25) =$

$= 6 - \frac{25}{8} = \frac{23}{8} = 2,875$

$(-2,1) \in E_{\frac{23}{8}}$

$E_{\frac{23}{8}}$: $\frac{23}{8} = 6 - \frac{1}{8}\left((x-2)^2 + (y+3)^2\right)$ $\quad \frac{1}{8}\left((x-2)^2 + (y+3)^2\right) = \frac{25}{8}$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ circonf $C(2,-3)$ e $R = 5$



iv) $z_0 = \frac{23}{8}$ $\quad (x_0, y_0) = (-1,1)$

$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{1}{4}(x-2), -\frac{1}{4}(y+3)\right)$

$\nabla f(-1,1) = \left(\frac{3}{4}, -1\right)$

eq.^{ne} del P.T. $z = \frac{23}{8} + \frac{3}{4}(x+1) - (y-1)$

$z = \frac{3}{4}x - y + \frac{37}{8}$

v) $P_0 = \left(-1, 1, \frac{23}{8}\right)$ $\quad \vec{N}_{piano} = \left(\frac{3}{4}, -1, -1\right)$ è il vettore direttore della

retta $r_\perp \begin{cases} x = -1 + \frac{3}{4}t \\ y = 1 - t \\ z = \frac{23}{8} - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

e) $$\int_E |y|\,dx\,dy = \int_{-4}^{0}\left(\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{0}(-y)\,dy\right)dx + \int_{-4}^{0}\left(\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} y\,dy\right)dx =$$

$\downarrow$ usando E_x

e dividendo E in E_1 dove $y \geq 0$ ed E_2 dove $y \leq 0$

$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 0,\ -\sqrt{16-x^2} \leq y \leq 0\}$ su E_1 $|y| = -y$

$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$ su E_2 $|y| = y$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-4}^{0}\left[y^2\right]_{-\sqrt{16-x^2}}^{0} dx + \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}\left[y^2\right]_{0}^{\sqrt{16-x^2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-4}^{0}\left(0-(16-x^2)\right)dx + \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}\left((16-x^2)-0\right)dx =$$

OSS. È anche $= \int_{-4}^{0}(16-x^2)\,dx$ così si calcola un solo integrale.

$$= -\frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(x^2-16)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(16-x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-16x\right]_{-4}^{0} + \frac{1}{2}\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[0-\left(-\frac{64}{3}+64\right)\right] + \frac{1}{2}\left[0-\left(-64+\frac{64}{3}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left(-\frac{128}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{128}{3}\right) = \boxed{\frac{128}{3}}$$

In alternativa si possono utilizzare le COORDINATE POLARI considerando che $|\operatorname{sen}\theta| = \begin{cases} \operatorname{sen}\theta & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ -\operatorname{sen}\theta & \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

$$\int_E |y|\,dx\,dy = \int_E \rho^2 |\operatorname{sen}\theta|\,d\rho\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \cdot \int_0^4 \rho^2\,d\rho +$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(-\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \cdot \int_0^4 \rho^2\,d\rho = \left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^4 + \left[\cos\theta\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^4 =$$

$$= \Big[\underbrace{-\cos\pi}_{1} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\Big] \cdot \frac{64}{3} + \Big[\underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{0} - \underbrace{\cos\pi}_{+1}\Big] \cdot \frac{64}{3} = \frac{64}{3} + \frac{64}{3} = \boxed{\frac{128}{3}}$$

ES1) a) dom $f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{4}(2x) + \frac{1}{4}x(y+2),\ \frac{1}{2}(y+2) + \frac{1}{8}x^2 \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x\,(\underbrace{2+y+2}_{y+4}),\ \frac{1}{2}(y+2) + \frac{1}{8}x^2 \right)$$

P.TI STAZIONARI : $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x(y+4) = 0 \\ \frac{1}{2}(y+2) + \frac{1}{8}x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \ \text{o} \ y=-4 \\ \text{se } x=0 \rightarrow 2^a \text{eq}^{ue}\ \frac{1}{2}(y+2)=0 \quad y=-2 \end{cases}$$

$\rightarrow P_0 = (0,-2)$

se $y=-4 \Rightarrow 2^a \text{eq}^{ue}\ -1 + \frac{1}{8}x^2 = 0 \quad x^2 = 8 \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\rightarrow P_1 = (2\sqrt{2}, -4) \quad P_2 = (-2\sqrt{2}, -4)$

3 PUNTI STAZIONARI

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}y+1 & \frac{1}{4}x \\ \frac{1}{4}x & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \underset{(0,-2)}{Hf(P_0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\det Hf(0,-2) = \frac{1}{4} > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow P_0$ è PUNTO di MINIMO LOCALE per f

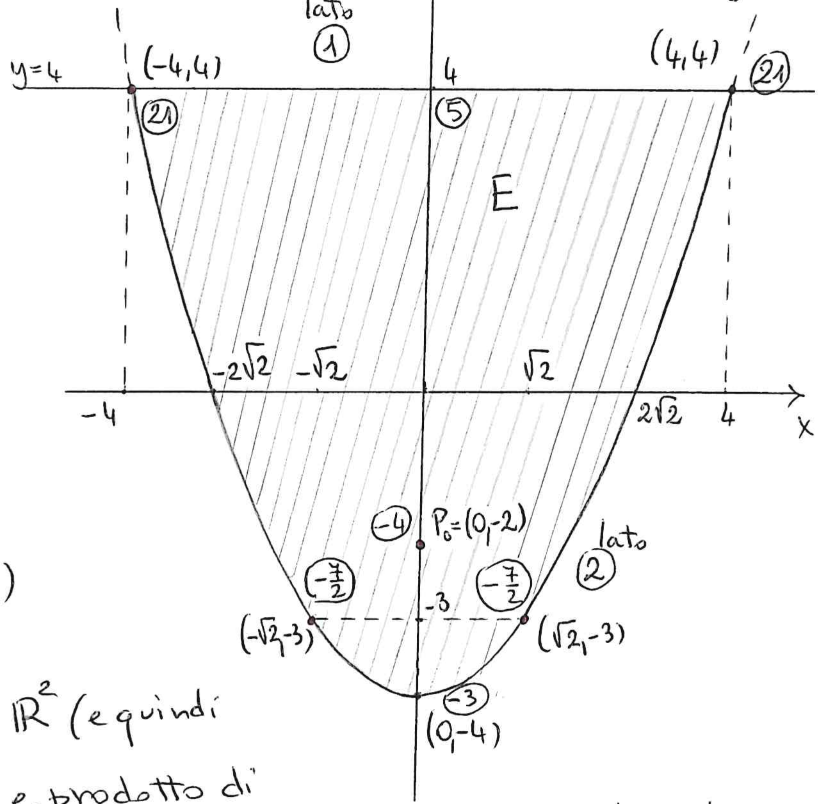
$$\underset{P_1}{Hf(2\sqrt{2},-4)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \det Hf(P_1) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow P_1 \text{ è P.}^{\text{TO}} \text{ di SELLA}$$

$$\underset{P_2}{Hf(-2\sqrt{2},-4)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \det Hf(P_2) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow P_2 \text{ è P.}^{\text{TO}} \text{ di SELLA.}$$

b) <u>1° passo</u>: E è la regione compresa tra la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ (verso l'alto, $V(0,-4)$, $\cap$ asse x $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $\cap\ y=4$ $x=\pm 4$) e la retta orizzontale $y=4$.

E è CHIUSO in quanto contiene tutti i punti del suo bordo (costituito dalla parabola per $x \in [-4,4]$ e dal segmento orizzontale da $(-4,4)$ a $(4,4)$).

E è LIMITATO perchè $E \subset B_6(0,0)$ (i punti di E più distanti dall'origine sono $(\pm 4, 4)$ con distanza $\sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}6$).



La funzione f è CONTINUA su $\mathbb{R}^2$ (e quindi anche su E) in quanto somma e prodotto di polinomi di 2° grado in x o in y. Allora per il Teorema di Weierstraß siamo sicuri che f ammette MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI su E.

2° passo: in $P_0 = (0,-2)$ c'è un PUNTO di MINIMO LOCALE INTERNO ad E in cui $f(0,-2) = -4$.

3° passo: Studio del bordo di E

① $\begin{cases} x = t \\ y = 4 \end{cases}$ $t \in [-4,4]$ $\quad g_1(t) = f(t,4) = \frac{1}{4}(t^2+36) + \frac{1}{8}t^2 \cdot 6 - 4 =$

$$= \frac{1}{4}t^2 + 9 + \frac{3}{4}t^2 - 4 = t^2 + 5$$

$g_1'(t) = 2t \qquad g_1'(t) = 0 \iff t = 0$

TEMPI : $t=-4 \qquad t=0 \qquad t=4$

PUNTI : $(-4,4) \quad (0,4) \quad (4,4)$

VALORI : $f(-4,4) = \frac{1}{4}(16+36) + \frac{1}{8}16 \cdot 6 - 4 = 13 + 12 - 4 = 21$

$f(4,4) = 21$

$f(0,4) = \frac{1}{4}36 - 4 = 5$

② $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t^2 - 4 \end{cases}$ $t \in [-4,4]$ $\quad g_2(t) = f(t, \frac{1}{2}t^2 - 4) = \frac{1}{4}\left(t^2 + \left(\frac{1}{2}t^2 - 2\right)^2\right) +$

$$+ \frac{1}{8}t^2\left(\frac{1}{2}t^2 - 2\right) - 4$$

$$g_2(t)=\cancel{\frac{1}{4}t^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}t^4-2t^2+4\right)+\frac{1}{16}t^4-\cancel{\frac{1}{4}t^2}-4=$$

$$=\frac{1}{16}t^4+\frac{1}{16}t^4-\frac{1}{2}t^2+1-4=\frac{1}{8}t^4-\frac{1}{2}t^2-3$$

$g_2'(t)=\frac{1}{2}t^3-t \quad g_2'(t)=0 \iff t\left(\frac{1}{2}t^2-1\right)=0 \iff t_1=0,\ t_{2,3}=\pm\sqrt{2}$

TEMPI $\quad t=-4 \quad t=-\sqrt{2} \quad t=0 \quad t=\sqrt{2} \quad t=4$

PUNTI $\quad (-4,4) \quad (-\sqrt{2},-3) \quad (0,-4) \quad (\sqrt{2},-3) \quad (4,4)$

VALORI $\quad f(-4,4)=f(4,4)=21$

$$f(-\sqrt{2},-3)=f(\sqrt{2},-3)=\frac{1}{4}(2+1)+\frac{1}{8}\cdot 2(-1)-4=\frac{3}{4}-\overset{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}-4=-\frac{7}{2}=-3{,}5$$

$$f(0,-4)=\frac{1}{4}\cdot 4+0-4=-3$$

4° passo: conclusione: nel punto di MIN LOCALE INTERNO risulta $f(0,-2)=-4$, sul ∂E f è compresa tra $-\frac{7}{2}$ e 21, allora

$\max\limits_E f(x,y)=21=f(\pm 4,4) \qquad \min\limits_E f(x,y)=-4=f(0,-2)$.

2) a) $\operatorname{dom} g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\geq 0\}=\mathbb{R}^2$ in quanto x^2+y^2 è una somma di quadrati e come tale sempre >0 o $=$ a 0

b) eq.^{ne} del grafico $z=2+\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,2)$, verso l'alto, $\cap\ z=0\ \emptyset$, $a=\frac{2}{3}$ (apertura)

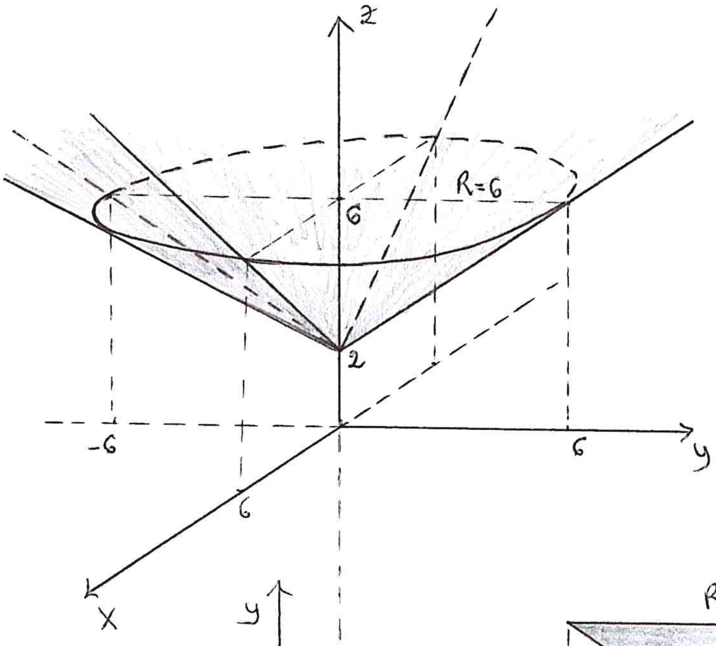
$a<1 \to \hat{ap}>45°$ $\quad \hat{ap}=\arctan\frac{3}{2}\approx 56{,}3°$, $\cap\ z=6$ su $x^2+y^2=36$ $R=6$.

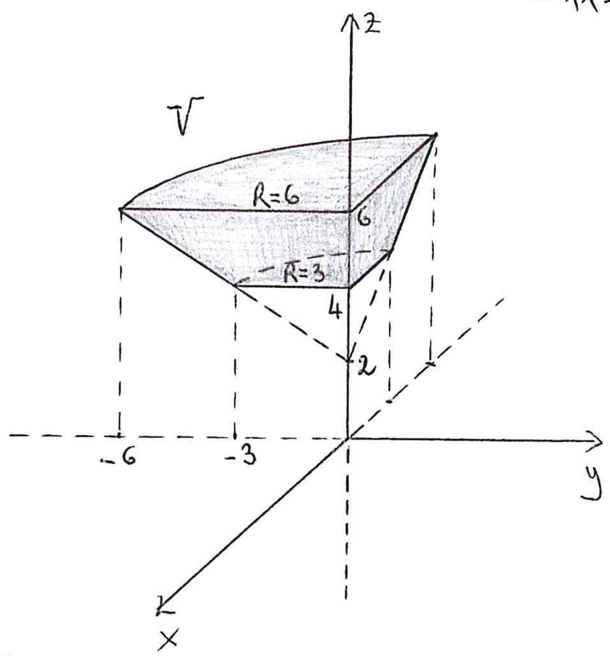
Disegno a pag. 11

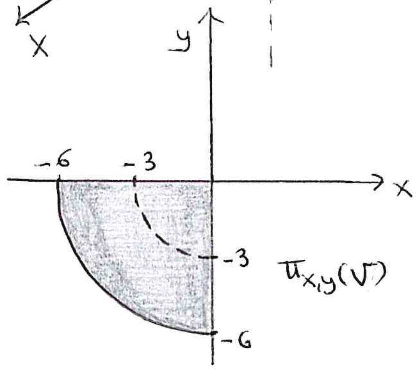
c) Le condizioni $4\leq z\leq 6$ $\to$ tronco di CONO

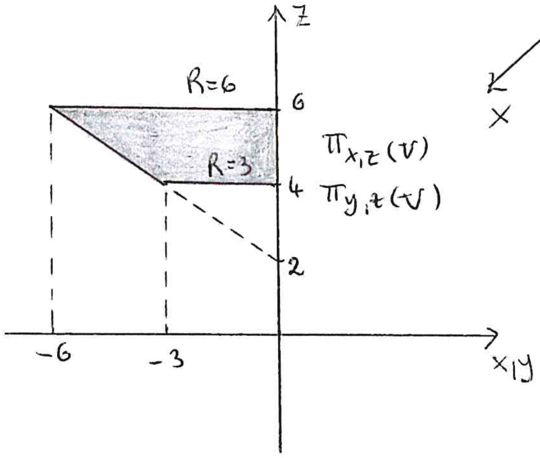
$z=6 \to R=6$

$z=4 \to 4=2+\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \to \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}=2 \to \sqrt{x^2+y^2}=3 \to x^2+y^2=9 \quad R=3$









$$\text{VOLUME di } V = \int_{\substack{x^2+y^2\le 9\\ x\le 0,\, y\le 0}} (6-4)\,dx\,dy + \int_{\substack{9\le x^2+y^2\le 36\\ x\le 0,\, y\le 0}} \left(6-\left(2+\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dx\,dy =$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\int_0^3 2\rho\,d\rho\right)d\theta + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\int_3^6 \underbrace{\left(4-\frac{2}{3}\rho\right)\rho}_{4\rho-\frac{2}{3}\rho^2}\,d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left[\rho^2\right]_0^3 d\theta + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left[2\rho^2-\frac{2}{9}\rho^3\right]_3^6 d\theta =$$

$$= 9\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left[2\cdot 36 - \frac{2}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}}\cdot \overset{2}{\cancel{6}}\cdot\overset{2}{\cancel{6}}\cdot 6 - \left(2\cdot 9 - \frac{2}{\cancel{3^2}}\cdot \cancel{3^3}\right)\right]\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\pi + \left[\underbrace{72-48}_{24} - (18-6)\right]\frac{\pi}{2} = \frac{9}{2}\pi + \left[24-12\right]\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{9}{2}\pi + \overset{6}{\cancel{12}}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} = \frac{9}{2}\pi + 6\pi = \boxed{\frac{21}{2}\pi}$$

ES.3) eq.^{ne} omogenea associata $\frac{8}{3}y''(x) - 2y'(x) = 0$

eq.^{ne} caratteristica $\frac{8}{3}t^2 - 2t = 0$ $\quad t(\frac{8}{3}t - 2) = 0$ $\quad t_1 = 0$ $\quad t_2 = \frac{3}{4}$

SOL.^{ni} FONDAM. $y_1(x) = 1$ $\quad y_2(x) = e^{\frac{3}{4}x}$

SOL.^{ni} eq.^{ne} OMOGENEA $y(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{3}{4}x}$ $\quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

SOL.^{ne} PARTICOLARE $\bar{y}(x) = x \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

perchè il 2° m dell'eq.^{ne} è un polinomio di 2° grado ($\Rightarrow Ax^2 + Bx + C$)

e poi si deve moltiplicare per x perchè nell'eq.^{ne} non compare

y(x) ma compare y'(x).

$\bar{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$ $\quad \bar{y}''(x) = 6Ax + 2B$

Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo

$\frac{8}{3}(6Ax + 2B) - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = 16 - \frac{9}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$-6Ax^2 + (16A - 4B)x + (\frac{16}{3}B - 2C) = -\frac{9}{2}x^2 + 16 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Per il principio di identità dei polinomi, due polinomi sono uguali su $\mathbb{R}$ solo se hanno tutti gli stessi coefficienti $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -6A = -\frac{9}{2} \\ 16A - 4B = 0 \\ \frac{16}{3}B - 2C = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 6A = \frac{9}{2} \quad A = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \\ 12 - 4B = 0 \quad\quad B = 3 \\ 16 - 2C = 16 \rightarrow C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{3}{4} \\ B = 3 \\ C = 0 \end{cases} \quad \bar{y}(x) = \frac{3}{4}x^3 + 3x^2$$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} sono $y(x) = c_1 + c_2 e^{3/4 x} + \frac{3}{4}x^3 + 3x^2$ $\quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Pb. di Cauchy $\quad y'(x) = \frac{3}{4}c_2 e^{\frac{3}{4}x} + \frac{9}{4}x^2 + 6x$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 2 \\ y'(0) = \frac{3}{4}c_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 2 - c_2 = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3} \\ c_2 = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$\boxed{\text{SOL.}^{ne}}$ $\quad \boxed{y(x) = -\frac{4}{3} + \frac{10}{3}e^{\frac{3}{4}x} + \frac{3}{4}x^3 + 3x^2}$