ESERCIZI PRIMA PARTE

Gli esercizi della prima parte sono 1 domanda teorica e 2 quesiti veloci pseudo-teorici, ovvero, quesiti dove li si può risolvere facendo i calcoli ma che con alcune nozioni di teoria si semplificano molto. Le tipologie sono:

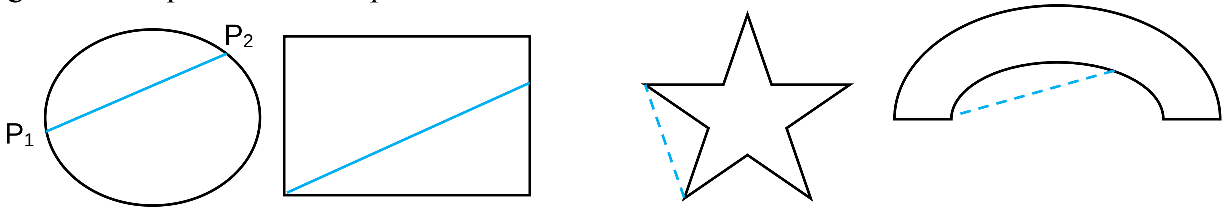
1. Studio degli insiemi
2. Integrale curvilineo
3. Piano tangente
4. Lunghezza della curva
5. Curve semplici e regolari
6. Matrice Hessiana
7. Soluzioni dell'equazioni differenziali
8. Derivata direzionale
9. Gradiente
10. Funzioni differenziabili
11. Derivata di una curva
12. Limiti
13. Mini integrali doppi/tripli/Volume dell'insieme
14. tylor

Non sono tutte le possibili tipologie ma sono alcune delle più comuni

1. Studio degli insiemi:

Il primo passo è quello di disegnare l'insieme, dopo di che si risponde alle domande

- Un insieme è **connesso** se "non ha buchi" al suo interno (definizione non bella ma pratica).
- Un insieme è **convesso** se posso prendere due punti (p_1, p_2) qualsiasi dell'insieme e connetterli con un segmento completamente compreso nell'insieme



Insieme convessi

Insieme non convessi

Esistono punti che non posso connettere con segmenti completamente compresi

- Insieme **aperto** è un insieme che non ha bordi , ma non è detto che non sia limitato. Per esempio

  E = $\{x^2 + y^2 < 1\}$

  L'insieme E è un circonferenza di raggio 1, l'insieme è limitato ed anche aperto, il bordo della circonferenza non è compreso.

  $$E = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

  L'insieme in questo caso e sia limitato che chiuso, visto che il bordo è compreso.

- Insieme **limitato** , semplicemente se non va all'infinito in qualche direzione.
- Insieme **misurabile**, nel 99% dei casi un insieme limitato è sempre misurabile.

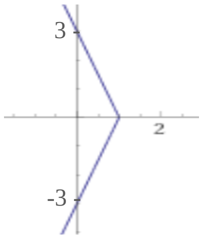
ESEMPIO:

Esercizio 1. Sia $E = \{(x, y) : 2 - |y|/3 \leq x + 1 \leq 10 - y^2\}$. Allora,

(a) E è convesso; (b) $(1, 0)$ non è punto interno; (c) E non è misurabile.

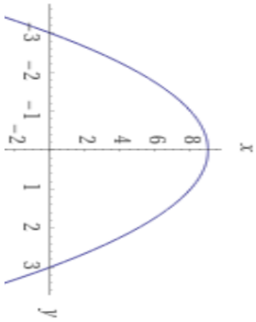
Partiamo disegnando l'insieme, per farlo tracciamo i singoli grafici delle funzioni rappresentate :

$1-\frac{|y|}{3}=x$



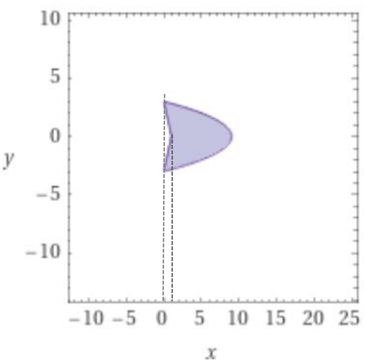
Ho sottratto -1 a tutti.

$x=9-y^2$



(l'asse delle y è erroneamente specchiata)

NB. il < indica lo spazio sotto (o dentro) la curva, il > lo spazio sopra (o fuori).



l'unione è dunque il seguente grafico, dove si vede che non è convesso (ad esempio è impossibile tracciare un segmento completamente compreso tra i punti $[0, \pm 3]$) ed è limitato (ed chiuso) e dunque misurabile. Inoltre il punto (1,0) non è appartenente all'insieme(purtroppo si vede poco dall'immagine). La risposta è la b.

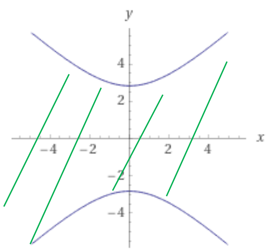
ESEMPIO:

Esercizio 1. Sia $E = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 10 \text{ e } y^2-x^2 \le 8\}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?

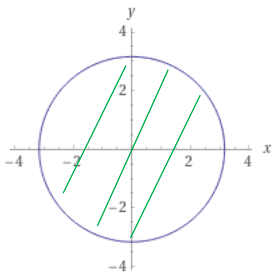
(a) E è limitato; (b) E è chiuso; (c) E è convesso.

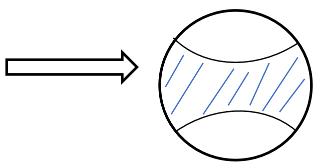
Procediamo con il disegno, il grafico è l'unione di due insiemi:

$-x^2+y^2=8$



$x^2+y^2=10$





L'insieme finale è dunque un insieme chiuso limitato ed non convesso. La risposta è la c.

2. Integrale curvilineo:

L'integrale curvilineo di f su γ si calcola con la formula: $\int_\gamma f\ dl \equiv \int_a^b < f(\gamma(t)) | \gamma'(t) >$

Dove <|> indica il prodotto scalare, γ'(t) è la derivata della curva mentre f(γ(t)) è la funzione a cui vanno sostituiti al posto delle coordinate x, y i valori delle coordinate della funzione.

ESEMPIO:

Esercizio 1. L'integrale curvilineo I del campo $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f^1(x,y) = e^x$ e $f^2(x,y) = \operatorname{sen} y$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lungo la curva parametrica $\gamma(t) = \log(\cos t) e_1 + t e_2$, $t \in [0, \pi/4]$, è

(a) non si può calcolare; (b) $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}$; (c) $I = 0$; (d) $I = \frac{\pi}{4} - 1$.

$$\int_\gamma f\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} < f(\gamma(t)) | \gamma'(t) > \ dt$$

f(t) = $(f^1, f^2) = (e^x, \text{sen } y)$ → $f(\gamma(t)) = (e^{\log(\cos t)}, \text{sen } t) = (\cos t, \text{sen } t)$

$\gamma'(t) = -\frac{sen\, t}{\cos t} e_1 + e_2$

$$< f(\gamma(t)) | \gamma'(t) > = < (\cos t\ , \text{sen } t) | \left(-\frac{sen\, t}{\cos t}, 1\right) > = -\cos t \frac{sen\, t}{\cos t} + 1 * sen\, t = 0$$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} < f(\gamma(t)) | \gamma'(t) > dt \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0\ dt = 0$, la risposta è la c.

3. Piano tangente:

In questo tipo di domande bisogna ricordare la formula del piano tangente e calcolare le varie derivate ed infine unire tutti i dati.

Equazione piano tangente: $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$

Dove f_x è la derivata parziale di f rispetto alla coordinata x (e viceversa per f_y).

ESEMPIO:

Esercizio 1. L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = x\cos(x^2 + 2y^2) + y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nel punto di coordinate $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ è

(a) $x - y + z = 0$; (b) $x - 2y + z = \sqrt{\pi}$; (c) $x - 2y + z = -\sqrt{\pi}$.

Calcoliamo $f(x_0, y_0) = f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}^2 + 2 * \sqrt{\pi}^2) + \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\cos(3\pi) + \sqrt{\pi} = -\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 0$

Calcoliamo $f_x(x_0, y_0) = \cos(\sqrt{\pi}^2 + 2\sqrt{\pi}^2) - 2\sqrt{\pi}^2 \sin(\sqrt{\pi}^2 + 2\sqrt{\pi}^2) = -1 - 0 = -1$

Calcoliamo $f_y(x_0, y_0) = -4xy \sin(\sqrt{\pi}^2 + 2\sqrt{\pi}^2) + 1 = 1$

Uniamo: $z = 0 - (x - \sqrt{\pi}) + (y - \sqrt{\pi})$ → $z + x - y = 0$, la risposta corretta è la a.

4. Lunghezza della curva

Bisognerà utilizzare la giusta formula in base al caso:

- f in forma parametrica: $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt \equiv \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$
- f in forma polare: $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + [\rho'(\theta)]^2}\, d\theta$

ESEMPIO:

$\mathbf{r}(t) = (e^t, e^t + 1) \quad t \in [0, \ln(2)]$

L(γ) = $\int_a^b ||r'(t)||dt \equiv \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^{2t} + e^{2t}} = \sqrt{2} * [e^t]_0^{\ln(2)} = \sqrt{2}$

ESEMPIO:

Esercizio 2. La lunghezza L della curva parametrica γ di equazione polare $\rho(\theta) = \cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$, è

(a) $L = \pi/2$; (b) $L = \sqrt{3}\pi/2$; (c) $L = \sqrt{5}\pi/2$.

L(γ) =$\int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + [\rho'(\theta)]^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[\cos\theta - 2\mathrm{sen}\theta]^2 + [-sin\theta - 2cos\theta]^2} d\theta =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 + 4\sin^2 - 4\cos\sin + sin^2 + 4cos^2 + 4\cos sin}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\boxed{[cos^2 + sin^2]} + 4[cos^2 + sin^2]} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5}$

$= \frac{\pi}{2}\sqrt{5}$, la risposta è la c. NB. $\cos^2 + \sin^2 = 1$

5. Curve semplici e regolari

Una curva è:

- **semplice**: se almeno una delle sue componenti è str. monotona
  Alcune delle funzioni str. monotone:
  1. l'esponenziale classica e le sue simili: $k * e^{f(x)}$
  2. le funzioni costanti cresc/decres: y = x ± k, y = x
  3. funzioni con esponente dispari: x^3, $4x^5$
  4. la funzione logaritmo
  5. la funzione radice
- **regolare**: se il suo gradiente non si annulla mai nel suo dominio, il gradiente $\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right)$

ESEMPIO:

Esercizio 1. Quale tra le seguenti curve $\gamma_i\colon [-1,2] \to \mathbb{R}^2$ è semplice e regolare?

(a) $\gamma_1(t) = \sqrt{3-t}e_1 + te_2$; (b) $\gamma_2(t) = t^3 e_1 - |t|^{3/2} e_2$; (b) $\gamma_3(t) = (t^3 - t)e_1 + \mathrm{sen}\,(\pi t)e_2$.

Partiamo identificando quali sono curve semplici, cioè quali curve hanno almeno una componente str. monotona.

γ1 è composta da due componenti str. monotona quindi è sicuramente semplice, γ2 ha una componente sicuramente str. monotona quindi è semplice anch'essa. Invece γ3 è composta da due componenti non str. monotona , infatti il seno è sicuramente non monotono (se non per brevi intervalli) ed (t^3-t) non è anch'esso monotono visto che per esempio per t = ±1 → (t^3-t) = 0.

Dobbiamo ora capire quale delle due è regolare. Calcoliamo il gradiente di γ1 = ($-\frac{1}{2}(3-t)^{-\frac{1}{2}}$, 1) si nota già da subito che il gradiente non potrà mai essere nullo visto che una delle sue componenti è costante è pari ad 1.

Per completezza vediamo anche che il gradiente di γ2 = (3t, $-\frac{\frac{3}{2}\sqrt{t}|t|}{t}$) che si annulla per t = 0.

6. matrice hessiana

In questo tipo di esercizio devo verificare quale delle successivi matrici hessiane identifica il punto in questione, per farlo basta seguire alcune regole:

La matrice deve essere **simmetrica**, dunque se non lo è sicuramente è l'opzione sbagliata.

Suddividiamo ora il problema in due casi; se la matrice è 2x2 allora:

- se il primo elemento è negativo il punto deve essere un punto di sella
- se il primo elemento è positivo e il determinante è positivo, allora è un minimo
- se il primo elemento è positivo e il determinante è negativo, allora è un massimo

se la matrice è 3x3 allora, calcolo il determinante 1x1, 2x2, 3x3 della matrice e se:

- Sono tutti positivi è un punto di minimo
- Se sono positivi 1x1, 3x3 e negativo il 2x2 allora è un massimo
- Altrimenti è un punto di sella.

Nb. per determinante 1x1 intendiamo il punto in alto a destra, 2x2 è la matrice in altro a destra di dimensione 2 e 3x3 è la matrice completa.

$$\begin{array}{ccc} 7 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & 1 \end{array}$$

Il determinante di una matrice 2x2 è [det = (1,1)*(2,2) – (2,1)*(1,2)], in questo caso det = (7*3)-(4*4) = 5

Per le matrici 3x3 si usa il metodo di Sarrus.

ESEMPIO:

Esercizio 3. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ una funzione che ha nell'origine un punto di minimo locale. Quale tra le seguenti matrici H può essere la matrice hessiana di f in $(0, 0, 0)$?

(a) $H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

A non è simmetrica e dunque è da scartare. Di b abbiamo il det1x1 = 4, det2x2 = 7, det3x3 = 3, di c abbiamo det1x1 = 4, det2x2 = -9, det3x3 = 5. La matrice rappresentante un minimo è dunque la b.

7. Soluzioni dell'equazioni differenziali

Data una soluzione di un'equazione differenziale bisogna trovare quale è la l'equazione che l'ha generata, per farlo calcolo la derivata prima e seconda e poi vado a sostituire.

ESEMPIO:

Esercizio 3. Quale tra le seguenti equazioni differenziali ha la funzione $x(t) = t^2 + e^{3t}$, $t \in \mathbb{R}$, come soluzione?

(a) $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$; (b) $x'(t) = 2tx(t) + 2t$; (c) $x''(t) - 3x'(t) = 2 - 6t$.

x'(t) = 2t + 3e^{3t}, x''(t) = 2 + 9e^{3t}

sostituiamo nella prima: 2 + 9e^{3t} – 4[2t + 3e^{3t}] + 3[t^2 + e^{3t}] = 0 che non è corretta

nella seconda: 2t + 3e^{3t} = 2t[t^2 + e^{3t}] +2t falsa

nella terza: 2 + 9e^{3t} – 3[2t + 3e^{3t}] = 2- 6t → 2 – 6t = 2 – 6t vera.

Un secondo caso possibile è il limite delle soluzioni di un equazione differenziale, in questo caso bisognerà calcolare le vari soluzioni e fare poi lo studio dei limiti:

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$. Tutte le soluzioni dell'equazioni differenziale $x''(t) + 2ax'(t) + x(t) = 1$ hanno limite finito per $t \to +\infty$ se e solo se

(a) $a > 0$; (b) $a > 0$ e $a \neq 1$; (c) $0 < a < 1$.

(per il momento tralasciamo come si risolvono le E.D. perché lo trattiamo in un testo a parte)

Le soluzioni di questa ED sono nella forma x(t) = $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + 1$, con $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

L'esponenziale tende a 0 quando l'esponente tende a -∞, dunque per t che tende a +∞ ci serve che $\lambda_{1,2}$ siano < 0 e questo accade solo per a > 0. La risposta è la a.

Una terza tipologia consistite nell'identificare alcune caratteristiche specifiche delle soluzioni, per esempio nell'esercizio successivo viene richiesto di trovare quale soluzione non ammette alcuna soluzione costante.

Esercizio 3. Quale delle seguenti equazioni differenziali non ammette alcuna soluzione costante definita su tutto $\mathbb{R}$?

(a) $x''(t) - x'(t) = 2$; (b) $x'(t) = \log\left([x(t)]^2 + 1\right)$; (c) $x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$.

NB. in questo particolare caso la richiesta sarebbe di più facile risoluzione visto che l'unico modo per cui una soluzione sia costante e che vi sia presente nell'equazione differenziale il termine x(t). in questo caso x(t) e presente sia nella seconda che nella terza e dunque l'unica equazione che non ammette soluzione costante è la prima (perché priva di x(t)).

Procediamo comunque con i calcoli, la prima ha soluzione nella forma: x(t) =$c_1 + c_2 e^{-t} + 2t$, che è una soluzione per cui non riesco mai ad eliminare $c_{1,2}$ per un qualunque t e dunque la soluzione non è costante.

8. Derivata direzionale

In questo tipo di esercizi viene chiesto la derivata direzionale di una funzione lungo un vettore. Per risolvere il questi bisogna:

- Calcolare il gradiente di f
- Calcolare il prodotto scalare tra ∇f e il vettore v.

ESEMPIO:

siano f(x, y) e v tali che:

$$f(x, y) = \{x^2 y - 2, 2 x y\} \qquad v = \{5, 4\}$$

Allora la derivata direzionale $\delta_v f(1, 0)$ vale?

∇f(x,y) = (2xy, 2x) → $\delta_v f(1, 0)$ = <∇f(x,y) | v > = <(0, 1)|(5, 4)> = 4.

9. Gradiente

In questi esercizi vengono richiesti alcuni calcoli o concetti più specifici sul gradiente. Ad esempio il Gradiente della funzione inversa oppure casi complessi di calcolo.

ESEMPIO:

Esercizio 3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $f(0,0) = -1$ e $\nabla f(0,0) = (2, -1/2)$. Allora, il gradiente di $1/f$ in $(0,0)$

(a) non si può calcolare; (b) è $\nabla(1/f)(0,0) = (-2, 1/2)$; (c) è $\nabla(1/f)(0,0) = (1/2, 2)$.

- **Se $f(x_0, y_0) \neq 0$ posso calcolare il gradiente inverso**. In questo caso f(0,0) = -1 quindi posso.
- Il **gradiente inverso** vale: $\nabla \frac{1}{f}(x_0, y_0) = -\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{[f(x_0,y_0)]^2}$

  In questo caso $\nabla \frac{1}{f}(0,0) = -\frac{\nabla f(0,0)}{[f(0,0)]^2} = -\frac{\left(2,-\frac{1}{2}\right)}{[-1]^2} = (-2, \frac{1}{2})$, la risposta è la b

ESEMPIO:

Esercizio 2. Siano $\varphi, \Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tali che $\varphi(0,0) = 0$, $\nabla\varphi(0,0) = (1,-1)$ e $\nabla\Phi(0,0) = (-1, 2)$. Allora, il gradiente di

$$f(x,y) = \Phi(x + \varphi(x,y), x\varphi(x,y)), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

in $(0,0)$ è

(a) $\nabla f(0,0) = (0,1)$; (b) $\nabla f(0,0) = (-1,2)$; (c) $\nabla f(0,0) = (-2,1)$.

In questo caso dobbiamo solamente calcolare il gradiente, in problema risiede nella complessità dei calcoli.

Ci servirà identificare le derivate parziali di Φ lungo i suoi assi che non sappiamo quali sono (e non ci interessano) dunque supponiamo che Φ si sviluppi su due assi (u, v) (potevo chiamarli come volevo, mi servono solo per differenziarli). Utilizziamo dunque ora le regole di derivazioni delle funzioni composte.

$f_x(x,y) = \boxed{\frac{d}{du}\Phi(x + \varphi(x, y), x\,\varphi(x, y))}\boxed{[1+ \varphi_x(x, y)]} + \boxed{\frac{d}{dv}\Phi(x + \varphi(x, y), x\,\varphi(x, y))}\boxed{[\varphi(x, y)+ x\varphi_x(x, y)]}$

dove abbiamo utilizzato

regola di derivazione delle funzioni composte: df(g(x)) = f'(g(x)) ∗ g'(x), ripetuta due volte perché Φ ha due componenti (u, v).

$f_y(x, y) = \frac{d}{du}\Phi(x + \varphi(x, y), x\,\varphi(x, y))\,[\varphi_y(x, y)] + \frac{d}{dv}\Phi(x + \varphi(x, y), x\,\varphi(x, y))[x\varphi_y(x, y)]$

quindi ∇f(0, 0) = (-1∗[1 + 1]+ 2∗[0 + 0], -1∗[-1] + 2∗[0]) = [- 2, 1], la risposta corretta è la x.

10. Funzioni differenziabili

In questi esercizi è richiesto quali funzioni sono differenziabili. Spara a caso hai più probabilità di indovinarlo.

11. Derivata di una curva

La formula da usare per calcolare la derivata di una curva è:

- se $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ → $\varphi'(t_0) = \langle\nabla f(\gamma(t_0))|\, \gamma'(t_0)\rangle$
- se $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ → $\varphi'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0)) * x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) * y'(t_0)$

ESEMPIO

Esercizio 2. Sia γ la curva piana di componenti

$$x(t) = t^5 + 312t^4 + 61t^3 - 213t^2 + t + 1 \qquad \text{e} \qquad y(t) = t^8 - 317t^4 + 29t^2 - 5t + 2$$

e sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ ove $f(x,y) = ye^{x^3 y}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora,

(a) $\varphi'(0) = -3e^2$; (b) $\varphi'(0) = -11e^2$; (c) $\varphi'(0) = 2e^6 - 5e$.

$\varphi'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0)) * x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) * y'(t_0)$

$\varphi'(0) = f_x(x(0), y(0)) * x'(0) + f_y(x(0), y(0)) * y'(0)$

$\varphi'(0) = f_x(1, 2)) * 1 + f_y(1, 2)) * (-5) = 12e^2 - 15e^2 = -3e^2$

12. Limiti

Per quanto riguardo lo studio dei limiti bisogna fare un po' ricorso a tutti quei ragionamenti che si utilizzavano in analisi 1 ed arrivare alla soluzione per ragionamento. Alcune nozioni importanti

- velocita delle funzioni (più lenta → veloce): log(x), √x, x, x^2, e^x, x^x.
- $\frac{n}{0} \to \pm\infty$, $\frac{n}{\infty} \to \pm 0$
- Le 4 regole del calcolo dei limiti:
    1. Il limite della somma algebrica è uguale alla somma algebrica dei limiti:
    $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$
    2. Il limite del prodotto di una funzione per una costante è uguale alla costante per il limite della funzione:
    $$\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$
    3. Il limite del prodotto/rapporto è uguale al prodotto/rapporto dei limiti:
    $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$$
    $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$
    4. Limite delle funzioni composte:
    $$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$
- Limiti di funzioni di base:

Dominio	Limite sinistro sul dominio	Funzione	Limite destro sul dominio
[-∞, +∞]	+∞	Esponenziale pari	+∞
[-∞, +∞]	-∞	Esponenziale dispari	+∞
[0, +∞]	-∞	Logaritmo (base > 1)	+∞
[-∞, +∞]	0	Esponenziale (base > 1) (Es. e^x)	+∞
[0, +∞]	0	Radice pari	+∞
[-∞, +∞]	-∞	Radice pari	+∞
[- 1, + 1]	π	Arcoseno	0
[- 1, + 1]	$-\frac{\pi}{2}$	Arcocoseno	$+\frac{\pi}{2}$

$[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$	$-\infty$	Tangente	$+\infty$
$[-\infty, +\infty]$	$-\frac{\pi}{2}$	Arcotangente	$+\frac{\pi}{2}$

13. Mini integrali doppi/tripli

Sono da risolvere come gli integrali tripli soliti, solo che solitamente sono più immediati.

Esercizio 3. Il volume V dell'insieme $K = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ è

(a) $V = 1$; (b) $V = 1/3$; (c) $V = 1/6$; (d) $V = 1/27$.

In questo caso la lettura degli estremi è abbastanza semplice visto che abbiamo che:

- x varia tra 0 e y
- y varia tra 0 e z
- z varia tra 0 e 1

Dunque l'integrale finale sarà:

$$V = \int_K 1\, dV_3(x, y, z) = \int_0^1 \left(\boxed{\int_0^z \left(\boxed{\int_0^y 1\, dx} \right) dy} \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^z y\, dy \right) dz = \int_0^1 z^2/2\, dz = 1/6.$$

ES.

Nel caso invece di coordinate cilindriche (cioè quando nella descrizione c'è almeno un $\sqrt{x^2 + y^2}$ o sue potenze) lo studio è leggermente più complesso.

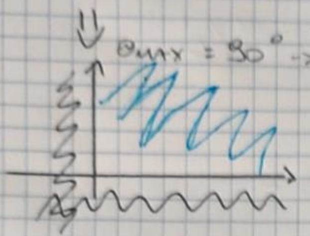
Esercizio 2. Il volume dell'insieme $K = \left\{(x, y, z) : 3\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 \text{ e } x, y \geq 0\right\}$ è

(a) $2\pi/3$; (b) $9\pi/64$; (c) $2\pi/27$.

Coordinate cilindriche trattate meglio in un altro pdf

DA $X, Y \geq 0$

$\Downarrow$



$\Rightarrow$ Θ VARIA TRA 0 E $\pi/2$

$(3r \leq z \leq 2)$

$\Downarrow$ UGUAGLIO

IL MODULO $r = \sqrt{x^2+y^2}$ LO RICAVIAMO DA $3r = 2$

$r = 2/3 \Rightarrow 0 < r < 2/3$ DUNQUE:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2/3} \int_{3\sqrt{x^2+y^2}}^{2} 1 \cdot dz (r\,dr, d\Theta) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2/3} (2-3r) \cdot r \, dr\, d\Theta$$

$$= \frac{\pi}{2} (r^2 - r^3) \Big|_0^{2/3} = \frac{2\pi}{27}$$

14. Tylor

Per taylor in più variabili basta applicare le formule e calcolare.

Se la funzione è di grado 1:

$$p(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0) | \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle$$

Se la funzione è di grado 2:

$$p(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0) | \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle.$$

Esercizio 2. Il ponomio di Taylor di ordine due con centro nell'origine di $f(x,y) = x + 2y + \cos(xy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è

(a) $p(x,y) = 1+x+2y+x^2+y^2$; (b) $p(x,y) = 1+x+2y$; (c) $p(x,y) = 1+x+2y+x^2+2xy+y^2$.

La funzione è di grado 1, dunque ci serve:

f(0,0) = 1

∇f(0, 0) = (1 - ysin(xy) , 2 – xcos(xy)) = (1, 2) → $<\nabla f(0, 0) | \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}>$ = x + 2y

P(x, y) = 1 + x +2y