LEZIONE del 30/4/2020

TEORIA

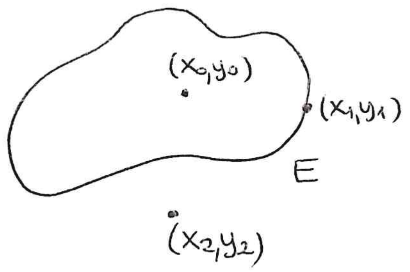
Def (INTORNO CIRCOLARE o PALLA APERTA). Dati $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e $\delta>0$, si dice INTORNO CIRCOLARE (o PALLA APERTA) di centro (x_0,y_0) e raggio δ l'insieme

$$B_\delta(x_0,y_0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}.$$

Si tratta quindi del CERCHIO (interno, bordo escluso) di centro (x_0,y_0) e raggio δ.

PUNTI INTERNI, ESTERNI, di BORDO

Sia $E\subset\mathbb{R}^2$ un insieme



(x_0,y_0) è INTERNO ad E

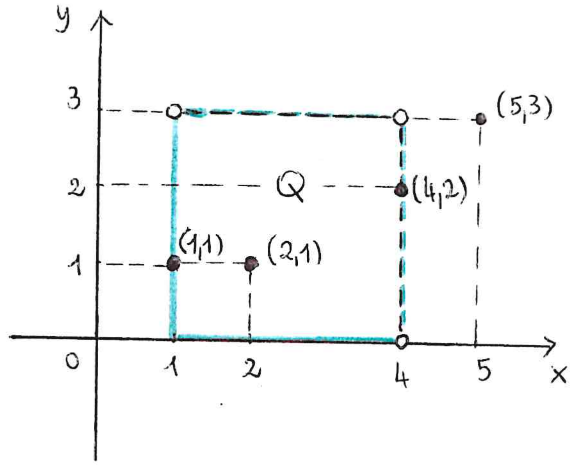
(x_1,y_1) è di BORDO (o di FRONTIERA) per E

(x_2,y_2) è ESTERNO ad E

L'insieme dei punti di bordo di E si chiama BORDO di E o FRONTIERA di E e si indica con ∂E.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Un punto di bordo di un insieme può appartenere all'insieme oppure non appartenere all'insieme (si veda l'esempio successivo), mentre i punti interni appartengono sempre all'insieme ed i punti esterni non appartengono all'insieme.

ESEMPIO. $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x < 4,\ 0 \leq y < 3\}$ è un QUADRATO



$(2,1)$ è INTERNO a Q

$(5,3)$ è ESTERNO a Q

$(4,2) \in \partial Q$ (notiamo che $(4,2) \notin Q$)

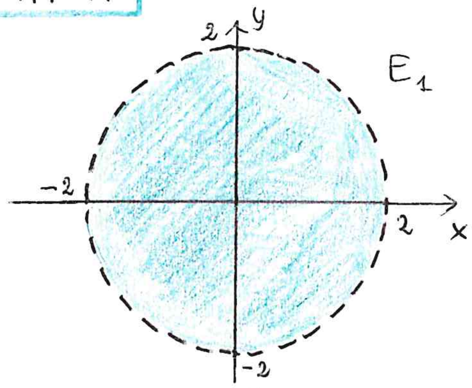
$(1,1) \in \partial Q$ (notiamo che $(1,1) \in Q$)

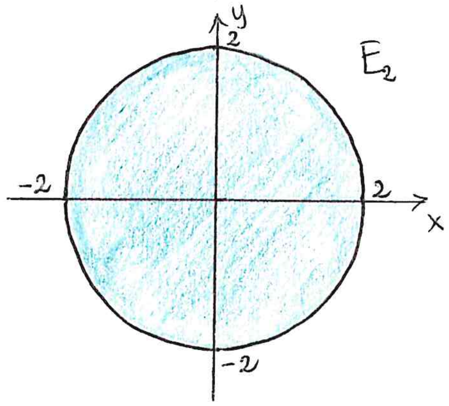
Il ∂Q è costituito dai 4 lati del quadrato.

INSIEMI APERTI, CHIUSI, LIMITATI, COMPATTI

ESEMPI $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$





Un insieme è APERTO se non contiene nessun punto del suo bordo.

E_1 è APERTO, E_2 e Q non sono APERTI

Un insieme è CHIUSO se contiene tutti i punti del suo bordo.

E_2 è CHIUSO, E_1 e Q non sono CHIUSI

Def (insieme LIMITATO). Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice LIMITATO se $\exists\, R > 0$ tale che $E \subset B_R(0,0)$.

Un insieme E è limitato se è contenuto in una palla di $C(0,0)$ e raggio $R > 0$: questo significa che tutti i punti di E distano da $(0,0)$ meno di R.

E_1 è LIMITATO perché $E_1 \subset B_2(0,0)$

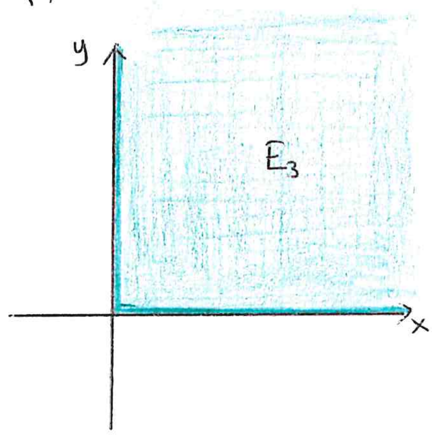
E_2 è LIMITATO perché $E_2 \subset B_3(0,0)$ oppure $E_2 \subset B_R(0,0)$ $\forall R>2$ (però E_2 NON è contenuto in $B_2(0,0)$ perché la circonferenza $x^2+y^2=4$ appartiene a E_2 ma non $B_2(0,0)$).

Q è LIMITATO perché $Q \subset B_5(0,0)$ (il punto sul bordo di Q che è più lontano da $(0,0)$ è $(4,3)$ e $\text{dist}((4,3),(0,0)) = \sqrt{16+9} = 5$).

Se consideriamo $Q_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 3\}$ che è il quadrato di prima ma chiuso, cioè con tutti i bordi compresi, allora Q_1 è limitato perché $Q_1 \subset B_6(0,0)$ oppure $Q_1 \subset B_R(0,0)$ $\forall R>5$, ma non si può considerare $B_5(0,0)$.

Un insieme NON LIMITATO è ad esempio

$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0\}$. E_3 è CHIUSO



Def. (insieme COMPATTO). Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice COMPATTO se è CHIUSO e LIMITATO.

E_2 e Q_1 sono COMPATTI, E_1, Q e E_3 <u>non</u> sono COMPATTI.

Teorema (di WEIERSTRASS).

Sia $f: \mathrm{dom} f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili e sia $E \subseteq \mathrm{dom} f$ un insieme COMPATTO, cioè CHIUSO e LIMITATO. Se f è CONTINUA su E allora f ammette MASSIMO e MINIMO assoluti su E.

Questo significa che ESISTE il VALORE MINIMO assunto dalla funzione su E, ESISTE il VALORE MASSIMO assunto dalla funzione su E e risulta

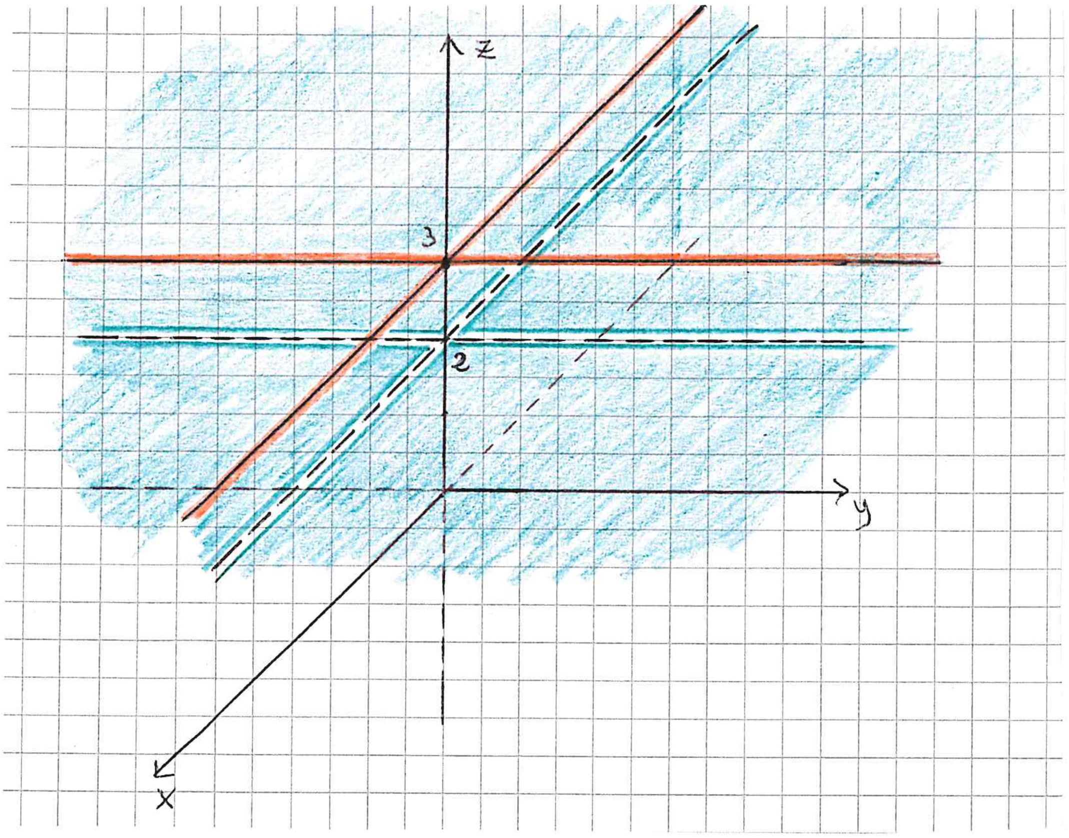
$$\min_E f \leq f(x,y) \leq \max_E f \qquad \forall (x,y) \in E.$$

Un punto (x_1,y_1) tale che $f(x_1,y_1) = \min_E f$ si dice PUNTO di MINIMO ASSOLUTO.

Un punto (x_2,y_2) tale che $f(x_2,y_2) = \max_E f$ si dice PUNTO di MASSIMO ASSOLUTO.

I punti di minimo assoluti (o di massimo assoluto) possono essere più di uno o anche infiniti.

ESEMPIO di funzione derivabile in (x_0,y_0) ma non continua in (x_0,y_0)



$$f(x,y)=\begin{cases} 3 & \text{se } x=0 \text{ oppure } y=0 \text{ (cioè nei punti } \in \text{ assi)} \\ 2 & \text{se } xy\neq 0 \text{ (cioè nei quadranti, assi esclusi)} \end{cases}$$

in $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

ma f non è CONTINUA in $(0,0)$

(perchè vicino a $(0,0)$ la funzione salta).

FUNZIONI DIFFERENZIABILI

L'equazione generale di un PIANO non verticale passante per $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = P_0$ è

$$z = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0).$$

OSS. Il piano tangente può NON ESISTERE, come ad esempio nel VERTICE di un CONO.

Def (PIANO TANGENTE). Sia $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili e sia $(x_0,y_0) \in \mathrm{dom} f$. Il piano $z = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)$ si dice TANGENTE al grafico di f in $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ se

$$f(x,y) - (f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)) = o\left(\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}_{= \, dist((x,y),(x_0,y_0))}\right)$$

o piccolo

per $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0$.

OSS. Il PIANO TANGENTE è UNICO.

Def (FUNZIONE DIFFERENZIABILE). Sia $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili e sia $(x_0,y_0) \in \mathrm{dom} f$. Si dice che f è DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0) se

$$(*) \quad f(x,y) - (f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)) = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

per $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0$.

SIGNIFICATO f si dice DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0) se il grafico di f ammette, in $P_0 = (x_0, y_0, z_0 = f(x_0,y_0))$, PIANO TANGENTE NON VERTICALE.

OSSERVAZIONE Per definizione di o piccolo $(*)$ significa

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - (f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

CONSEGUENZE

Si dimostra che

$$f \text{ differenziabile in } (x_0,y_0)$$

$$\Downarrow$$

1) f è CONTINUA in (x_0,y_0)

2) f è DERIVABILE in (x_0,y_0) cioè $\exists \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=a$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=b$

3) f ammette PIANO TANGENTE (non verticale) in $P_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ di equazione

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

4) f è derivabile in (x_0,y_0) in ogni direzione $\vec{v}$ con

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{v}$$

TEOREMA del DIFFERENZIALE TOTALE

È troppo complicato verificare la differenziabilità utilizzando la definizione. Si utilizza il seguente teorema.

TEOREMA (del DIFFERENZIALE TOTALE). Sia $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili e sia $A \subseteq \mathrm{dom} f$. Allora

$$f \in C^1(A) \Rightarrow f \text{ differenziabile in ogni punto } (x_0, y_0) \in A.$$

$f \in C^1(A)$ se
- f è continua su A
- f è derivabile (esistono le due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$) in ogni punto di A
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue su A.

OSSERVAZIONE Si utilizza questo teorema per verificare l'esistenza del piano tangente e la possibilità di applicare la formula con il prodotto scalare per il calcolo della derivata direzionale.

ESEMPIO $f(x,y) = 3x \cdot \mathrm{sen}(y^2) + e^{2xy}$ $\quad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2$

f è CONTINUA su $\mathbb{R}^2$ perchè somma, prodotto e composizione di funzioni continue ($3x, y^2, 2xy$ sono polinomi, le funzioni seno e esponenziale sono continue).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\,\mathrm{sen}(y^2) + 2y\,e^{2xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x \cdot 2y \cos(y^2) + 2x\,e^{2xy} = 6xy \cdot \cos(y^2) + 2x\,e^{2xy}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sono CONTINUE su $\mathbb{R}^2$ perchè somma, prodotto e composizione di funzioni continue ($y^2, 2y, 2xy, 6xy, 2x$ sono polinomi, le funzioni seno, coseno ed esponenziale sono continue)

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f \text{ è DIFFERENZIABILE in ogni punto di } \mathbb{R}^2$$