Soluzione SCHEDA N° 2-bis

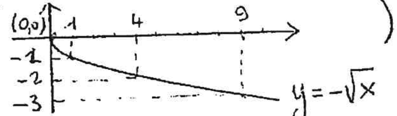
ESERCIZI sulle CURVE PIANE

1) <u>1° tratto</u>

$P_{in} \underset{t=-3}{=} (0,-2)$ $P_{fin} \underset{t=0}{=} (-3,-2)$ eq.^{ne} $\boxed{y=-2}$ La curva percorre il SEGMENTO ORIZZONTALE di estremi $(0,-2)$ e $(-3,-2)$ (sulla retta $y=-2$) nel verso delle x decrescenti

<u>2° tratto</u> $P_{in} \underset{t=0}{=} (-3,-2)$ $P_{fin} \underset{t=3}{=} (6,-5)$ eq.^{ne} $3t = x+3 \to y = -2-\sqrt{x+3}$

si tratta del grafico della radice $y=\sqrt{x}$ simmetrizzato rispetto all'asse x in

$y=-\sqrt{x}$ (

) poi spostato a sinistra di 3 e in basso di 2. Viene percorso nel verso delle x crescenti da $(-3,-2)$ a $(6,-5)$.

Passa per $(-2,-3)$, $(1,-4)$.

<u>3° tratto</u> $P_{in} \underset{t=3}{=} (6,-5)$ $P_{fin} \underset{t=9}{=} \left(0,-\frac{11}{7}\right)$

$y = -\frac{4}{7}\left(-\frac{7}{2}\right)^2+2 = -7+2$

$y = -\frac{4}{7}\left(\frac{5}{2}\right)^2+2 = -\frac{25}{7}+2 = -\frac{11}{7}$

eq.^{ne}: $t = 9-x \to y = -\frac{4}{7}\left(9-x-\frac{13}{2}\right)^2+2 = -\frac{4}{7}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2 = -\frac{4}{7}x^2+\frac{20}{7}x-\frac{11}{7}$

la curva percorre la parabola di eq.^{ne} $y = -\frac{4}{7}x^2+\frac{20}{7}x-\frac{11}{7}$ nel verso delle x decrescenti.

$V = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$

$x_V: -\frac{8}{7}x+\frac{20}{7}=0 \quad 2x-5=0$

$x_V = 5/2$

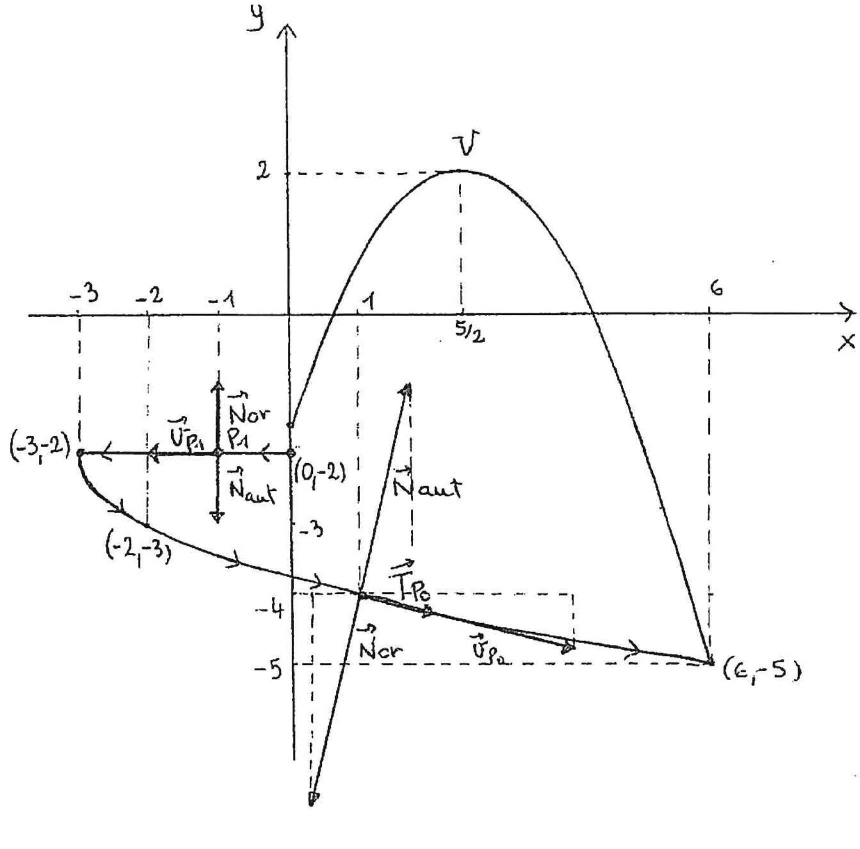
$y_V = -\frac{4}{7}\frac{25}{4}+\frac{20}{7}\cdot\frac{5}{2}-\frac{11}{7} = \frac{-25+50-11}{7} = \frac{14}{7} = 2$

$\cap\ y=0 \quad 4x^2-20x+11=0$

$x_{1,2} = \frac{10\pm\sqrt{100-44}}{4} = \frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{56}}{4} = \frac{5}{2}\pm\frac{2\sqrt{14}}{4} = \frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$ $x_1 \simeq 0{,}63$ $x_2 \simeq 4{,}37$

$\cap\ x=0 \quad \left(0,-\frac{11}{7}\right)$

$\simeq -1{,}57$



$P_0=(1,-4)$ corrisponde a $t_0=\frac{4}{3}$ $\quad$ $\underline{P_0\in 2^\circ \text{tratto}}$

$\begin{cases} 1=3t-3 \\ -4=-2-\sqrt{3t} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3t=4 \to t_0=\frac{4}{3} \\ -4=-2-\sqrt{4}=-2-2 \ \underline{\text{ok}} \end{cases}$

$\gamma_2'(t)=\left(3,-\frac{3}{2\sqrt{3t}}\right)$ $\quad \vec{v}_{P_0}=3\vec{i}-\frac{3}{2\sqrt{4}}\vec{j}=3\vec{i}-\frac{3}{4}\vec{j}$ vettore tangente in P_0

velocità scalare $=\|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{9+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{153}{16}}=\frac{3}{4}\sqrt{17}$

versore tangente $\vec{T}_{P_0}=\frac{4}{\sqrt{17}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j}$

eq.^{ni} param r_{tan} $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-4-\frac{3}{4}t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

eq.^{ne} cartesiana r_{tan} : $m_{tan}=\frac{-3/4}{3}=-\frac{1}{4}$ $\quad y=-4-\frac{1}{4}(x-1)$

$y=-\frac{1}{4}x-\frac{15}{4}$

$m_{norm}=-\frac{1}{m_{tan}}=4 \quad y=4x-8$

(oppure r_{norm} : $(P-P_0)\cdot\vec{v}_{P_0}=0 \quad (x-1,y+4)\cdot\left(3,-\frac{3}{4}\right)=0$

$3(x-1)-\frac{3}{4}(y+4)=0 \quad 3x-3-\frac{3}{4}y-3=0 \quad \frac{3}{4}y=3x-6$

$y=4x-8$).

in P_0

$\vec{N}_{or}=-3/4\,\vec{i}-3\vec{j} \qquad \vec{N}_{aut}=\frac{3}{4}\vec{i}+3\vec{j}$

$t_1=-2 \ \underline{\in 1^\circ \text{tratto}} \to P_1=(-1,-2) \quad \gamma'(-2)=\vec{v}_{P_1}=-\vec{i}=\vec{T}_{P_1}$

$\gamma_1'(t)=(-1,0)$

in P_1 $\quad \vec{N}_{or}=\vec{j} \quad \vec{N}_{aut}=-\vec{j}$

$m_{tan}=\frac{0}{-1}=0 \to y=-2$ retta orizzontale

$m_{norm}=\frac{1}{0}=$ IMPOSSIBILE $\to$ retta verticale $x=-1$

2) **(PUNTI da -1 a 3)** Sia γ una curva nel piano.

Se nel punto $P_0=(-2,3)$ il vettore tangente è $\mathbf{v}=-\frac{5}{3}\mathbf{i}-4\mathbf{j}$, allora

la velocità scalare in P_0 è: $\|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+(-4)^2}=\sqrt{\frac{25}{9}+16}=\sqrt{\frac{169}{9}}=\frac{13}{3}$

i **versori** normali in P_0 sono: $\underline{\text{VETTORI}}$ NORMALI $\vec{N}_{or}=-4\vec{i}+\frac{5}{3}\vec{j} \quad \vec{N}_{aut}=4\vec{i}-\frac{5}{3}\vec{j}$ $\quad$ VERS $\vec{N}_{or}=-\frac{12}{13}\vec{i}+\frac{5}{13}\vec{j}$ $\quad$ VERS $\vec{N}_{aut}=\frac{12}{13}\vec{i}-\frac{5}{13}\vec{j}$

e la retta normale in P_0 ha equazione cartesiana $y=-\frac{5}{12}x+\frac{13}{6}$

$m_{tan}=-4/-5/3=12/5 \quad m_{norm}=-5/12 \quad y=3-5/12(x+2)$

CURVE NEL PIANO

3) Sia $\gamma : [-\pi\,,\,\frac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da

calcoli e
disegno a p.4

$$\begin{cases} x(t) = -\,3 + 4\cos t \\ y(t) = -2 - 4\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [-\pi\,,\,\tfrac{3}{2}\pi].$$

Disegnate con cura sul foglio a quadretti il sostegno di γ, specificando di che curva si tratta, il verso di percorrenza e l'equazione (cartesiana o implicita).

Il disegno deve far risultare in modo chiaro il percorso effettuato dal punto.

Completate dove richiesto:

$\vec{v}_{P_0} = 2\sqrt{2}\,\vec{i} - 2\sqrt{2}\,\vec{j}$

Il vettore tangente o vettore velocità nel punto $P_0 = (-3 + 2\sqrt{2}\,,\,-2 + 2\sqrt{2})$ è:

$\approx -0{,}17$ $\approx 0{,}83$

Disegnate sul foglio a quadretti il punto P_0 e il vettore tangente.

La velocità scalare in P_0 è: $\|\vec{v}_{P_0}\| = 4$

I due vettori normali in P_0 sono: $\vec{N}_{or} = -2\sqrt{2}\,\vec{i} - 2\sqrt{2}\,\vec{j}$ $\vec{N}_{aut} = 2\sqrt{2}\,\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{j}$

L'equazione vettoriale della retta tangente in P_0 è:

Le equazioni parametriche della retta tangente in P_0 sono:

L'equazione cartesiana della retta tangente in P_0 è: $m_{tau} = -1$ $y = -x - 5 + 4\sqrt{2}$

L'equazione cartesiana della retta normale in P_0 è: $m_{norm} = 1$ $y = x + 1$

Il vettore tangente o vettore velocità nel punto $P_1 = (-3,-6)$ corrispondente a $t_1 = \frac{\pi}{2}$ è: $\vec{v}_{P_1} = -4\vec{i}$

Disegnate sul foglio a quadretti il punto P_1 e il vettore tangente.

$\cos = -\frac{1}{2}$ $\mathrm{sen} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Al valore del parametro $t_2 = -\frac{2}{3}\pi$ corrisponde il punto $P_2 = (\ldots -5 \ldots, -2+2\sqrt{3})$

$\approx 1{,}46$

Disegnate sul foglio a quadretti il punto P_2.

I due vettori normali in P_1 sono: $\vec{N}_{or} = 4\vec{j}$ $\vec{N}_{aut} = -4\vec{j}$

Disegnate sul foglio a quadretti entrambi i vettori normali.

L'equazione cartesiana della retta tangente nel punto P_1 è: $m_{tau} = \frac{0}{-4} = 0$ retta orizz
$y = -6$

L'equazione cartesiana della retta normale nel punto P_1 è:

$m_{norm} = -\frac{1}{0}$ IMPOSS.

coeff angolare non definito $\Rightarrow$ retta verticale $x = -3$

ES. 3) $P_{in} = (-7,-2)$ $P_{fin} = (-3,2)$ la curva percorre la circonf. di $C(-3,-2)$ e $R=4$ per 1 giro e $\frac{1}{4}$ in verso orario $\left(\Delta t = \frac{3}{2}\pi + \pi = \frac{5}{2}\pi\right)$

$t=-\pi$

eq.^{ne} $(x+3)^2+(y+2)^2=16$

$\left(t=-\frac{\pi}{2}\ (-3,2) \quad t=0\ (1,-2) \quad t=\frac{\pi}{2}\ (-3,-6) \quad t=\pi\ (-7,-2) \right)$

$P_0 = (-3+2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$ corrisponde a $t_0 = -\frac{\pi}{4}$

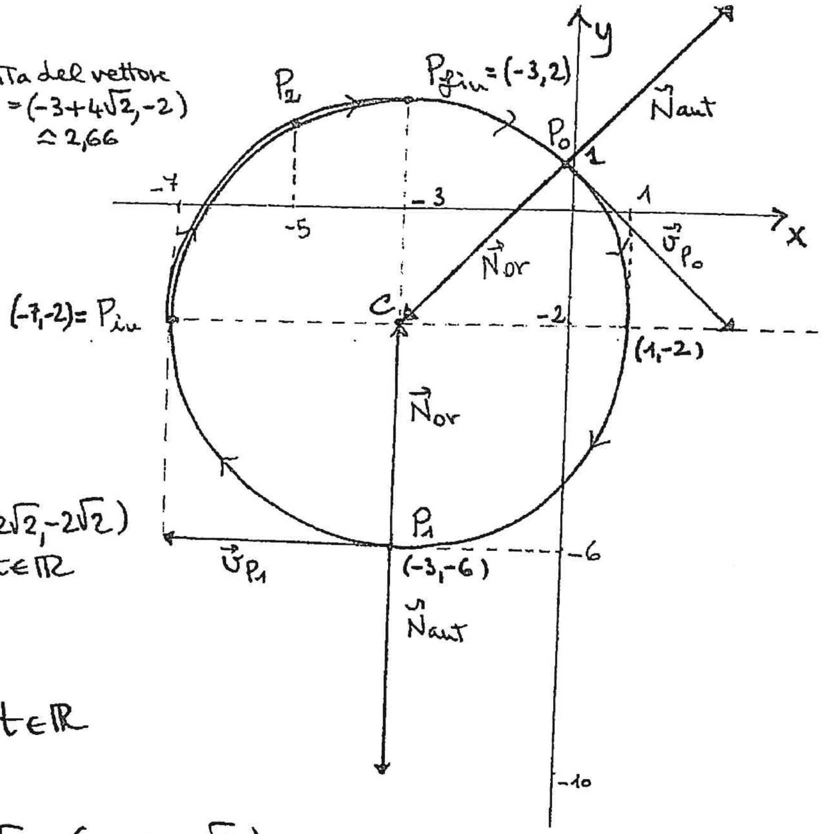
$$\begin{cases} -3+2\sqrt{2} = -3+4\cos t \\ -2+2\sqrt{2} = -2-4\,\mathrm{sen}\,t \\ t\in[-\pi, \frac{3}{2}\pi] \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{sen}\,t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ t\in[-\pi, \frac{3}{2}\pi] \end{cases} \qquad t_0 = -\frac{\pi}{4}$$

$\gamma'(t) = (-4\,\mathrm{sen}\,t, -4\cos t)$

$\vec{v}_{P_0} = 2\sqrt{2}\,\vec{i} - 2\sqrt{2}\,\vec{j}$

punta del vettore $=(-3+4\sqrt{2},-2)$ $\simeq 2{,}66$

$\|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$



Eq.^{ne} vett. r_{tan}:

$P = P_0 + t\,\vec{v}_{P_0}$ $t\in\mathbb{R}$

$P = (-3+2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}) + t(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ $t\in\mathbb{R}$

Eq.^{ni} param r_{tan}:

$$\begin{cases} x = -3+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,t \\ y = -2+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$m_{tan} = -1$ $\qquad y = -2+2\sqrt{2}-(x+3-2\sqrt{2})$

$y = -x-5+4\sqrt{2}$

$P_1 = (-3,-6)$ $\quad \vec{v}_{P_1} = -4\vec{i}$

ES.4) <u>1° tratto</u> : $P_{in} = (10, 9)$ $\quad P_{fin} = (1, 0)$
$t=-3 \quad 12-3 \qquad t=0 \quad 3-3$

$x = -3t+1$

EQ.^{NE} $3t = 1-x \quad t = \frac{1}{3} - \frac{x}{3} \quad \rightarrow$ nella 2ª $\quad y = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3} + 1\right)^2 - 3 =$

$= 3\left(\frac{4}{3} - \frac{x}{3}\right)^2 - 3 = 3\left(\frac{16}{9} + \frac{x^2}{9} - \frac{8}{9}x\right) - 3 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$

La curva percorre la PARABOLA di equazione $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 7$ (verso l'alto, $V(4, -3)$: $\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \rightarrow x_v = 4$, $\cap$ asse x $x=1$ $x=7$) nel

$y_v = \frac{16}{3} - \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = -\frac{9}{3} = -3$

verso delle x decrescenti -

$P_0 = (6, -\frac{5}{3}) \in$ 1° tratto per $t_0 = -\frac{5}{3}$ $\quad \left(\begin{cases} 6 = -3t+1 \\ -\frac{5}{3} = 3(t+1)^2 - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3t = -5 \quad t_0 = -\frac{5}{3} \\ 3(-\frac{5}{3}+1)^2 - 3 = 3(-\frac{2}{3})^2 - 3 = \\ = 3 \cdot \frac{4}{9} - 3 = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3} \text{ ok} \end{cases} \right)$

$\gamma_1'(t) = (-3, 6t+6)$

$x(t) = -3t+1 \quad y(t) = 3t^2 + 6t + 3 - 3 = 3t^2 + 6t$

$\vec{v}_{P_0} = \gamma_1'(-\frac{5}{3}) = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ $\qquad \|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

$(6 \cdot (-\frac{5}{3}) + 6 = -10 + 6 = -4)$

I vettori normali in P_0 sono : $\vec{N}_{or} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{ant} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

L'equazione cartesiana della r_{tan} in P_0 si può scrivere come

$(P - P_0) \cdot \vec{N}_{or} = 0$ cioè $(x-6)(-4) + (y + \frac{5}{3})(3) = 0$ da cui

$-4x + 24 + 3y + 5 = 0 \quad 3y = 4x - 29 \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{29}{3}$.

Le eq.^{ni} parametriche della retta normale in P_0 sono :

$r_{norm} \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -\frac{5}{3} + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

2° tratto : $P_{in} \underset{t=0}{=} (1,0)$ $P_{fin} \underset{t=\pi}{=} (-5,0)$

La curva percorre l'ellisse di $C(-2,0)$ e semiassi $a=3$, $b=6$

(eq.ne implicita $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y)^2}{36} = 1$) in verso ANTIORARIO per $\frac{1}{2}$ giro.

$t_1 = \frac{\pi}{2}$ corrisponde al 2° tratto e al punto $P_1 = (-2,+6)$

$\gamma_2'(t) = (-3\,\text{sen}\,t,\ 6\cos t)$ $\quad \vec{v}_{P_1} = \gamma_2'(\frac{\pi}{2}) = -3\vec{\imath}$

$\vec{N}_{or} = 3\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{aut} = -3\vec{j}$

r_{tan} : $m_{tan} = \frac{0}{-3} = 0$ retta orizzontale $y = +6 + 0(x+2) = 6$ $\boxed{y=6}$

r_{norm} : $m_{norm} = -\frac{-3}{0} = \frac{3}{0}$ IMPOSSIBILE se una retta è priva di coefficiente angolare, allora è verticale e quindi ha eq.ne $\boxed{x=-2}$.