SOLUZIONE $\boxed{\text{SCHEDA N. 10}}$

1) a) $\partial_x f = -4 + 6xy^2 - 2y^3 \qquad \partial_y f = 6x^2y - 6xy^2$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6y^2 & 12xy - 6y^2 \\ 12xy - 6y^2 & 6x^2 - 12xy \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}(6y^2) = 0 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2 - 12xy) = 12x - 12y$$

b) $\partial_x f = -e^{3y} \qquad \partial_y f = -3xe^{3y}$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -3e^{3y} \\ -3e^{3y} & -9xe^{3y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -27xe^{3y} \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = -81xe^{3y}$$

c) $\partial_x f = y^2\cos(xy^2 - 4y) \qquad \partial_y f = (2xy - 4)\cos(xy^2 - 4y)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -y^4 \operatorname{sen}(xy^2 - 4y) & 2y\cdot\cos(xy^2-4y) - y^2(2xy-4)\operatorname{sen}(xy^2-4y) \\ 2y\cdot\cos(xy^2-4y) - (2xy-4)\cdot y^2 \operatorname{sen}(xy^2-4y) & 2x\cdot\cos(xy^2-4y) - (2xy-4)^2\operatorname{sen}(xy^2-4y) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y^4 \operatorname{sen}(xy^2 - 4y)\right) = -4y^3 \operatorname{sen}(xy^2-4y) - y^4(2xy-4)\cos(xy^2-4y)$$

d) $\partial_x f = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(y+3)^2 \qquad \partial_y f = 2\sqrt{x}\,(y+3)$ $\qquad \operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ è CHIUSO

$\partial_x f$ definita su $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x > 0\}$ APERTO

(nei punti dell'asse y f non è derivabile rispetto ad x : in $(0,y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}\,(y_0+3)^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(y_0+3)^2}{\sqrt{h}} = +\infty \;).$$

ci si può avvicinare solo da destra

Invece $\partial_y f$ è definita su $\operatorname{dom} f$, f è C^1 e differenziabile <u>su A</u>

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4x^{3/2}}\cdot(y+3)^2 & \frac{1}{\sqrt{x}}(y+3) \\ \frac{1}{\sqrt{x}}(y+3) & 2\sqrt{x} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(y+3)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e) $\text{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{asse } x\}$ che è aperto

$$\partial_x f = \frac{6x^2y-1}{y} = 6x^2 - \frac{1}{y} \qquad \partial_y f = \frac{2x^3 y - (2x^3y - x)}{y^2} = \frac{x}{y^2}$$

anche $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono definite su dom$f$, $f\in C^1$ e quindi differenziabile su dom$f$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 12x & \frac{1}{y^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 12 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{6x}{y^4}$$

ES 2) Per il Teorema di Schwartz una funzione $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ ha

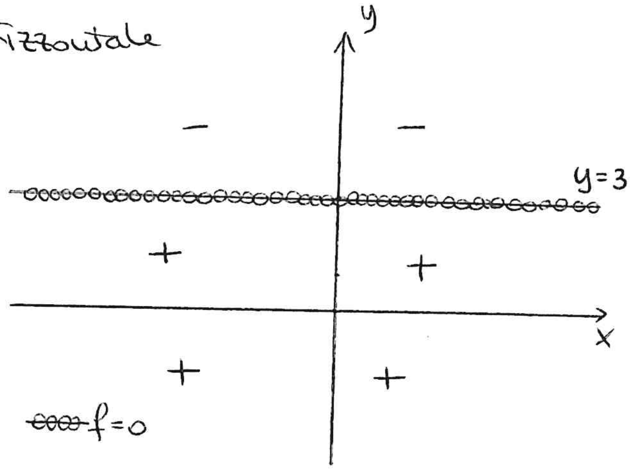
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Con le derivate parziali assegnate, invece, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4$ mentre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3$. Per essere possibile $\frac{\partial f}{\partial y}$ deve essere tale che $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4$, ad es. va bene se $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - y$ (o più in generale $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + g(y)$ con $g(y)$ una generica funzione di classe C^1 in y).

ES.3) a) $g(x,y) = 6-2y$ dom $g = \mathbb{R}^2$

$g(x,y)=0 \iff 6-2y=0 \iff y=3$ retta orizzontale

$g(x,y)>0 \iff 6-2y>0 \iff y<3$



il grafico di g è il PIANO INCLINATO

$z = 6-2y$ (Scheda N.6 es 1) $g(x,y)$)

$\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}^2} = +\infty$

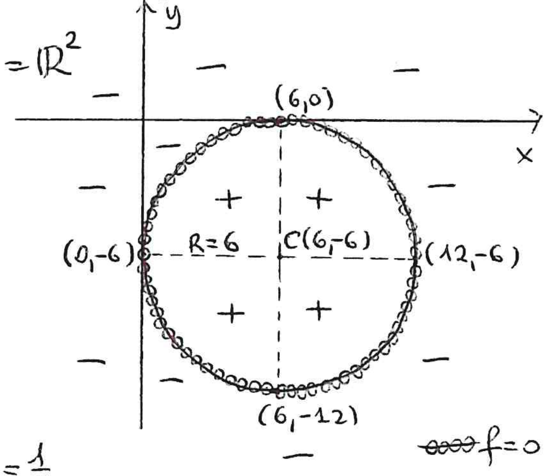
(oppure sull'asse y $g(0,y) = 6-2y \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

e $\underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$)

$\nabla g(x,y) = (0,-2) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \Rightarrow$ NON CI SONO P.^{TI} STAZIONARI

(è ovvio essendo il grafico un piano inclinato).

b) $g(x,y) = 12 - \frac{1}{3}((x-6)^2+(y+6)^2)$ dom $g = \mathbb{R}^2$



$g(x,y)=0 \iff (x-6)^2+(y+6)^2=36$
circonf $C(6,-6)$ e $R=6$

$g(x,y)>0 \iff (x-6)^2+(y+6)^2<36$
DENTRO la circonf.

il grafico di g è il PARABOLOIDE
di $V(6,-6,12)$ rivolto verso il basso, $a=\frac{1}{3}$

eq.^{ne} $z = 12-\frac{1}{3}((x-6)^2+(y+6)^2) \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} g(x,y) = -\infty$
(Scheda 6 es 1) $w(x,y)$)

$\sup_{\mathbb{R}^2} g(x,y) = 12 = \max_{\mathbb{R}^2} g(x,y) = g(6,-6)$

(oppure $g(x,y) \le 12 \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ in quanto $g(x,y) = 12 - \frac{1}{3}\underbrace{(\ )}_{\ge 0}$ e $g(6,-6)=12$;
invece sull'asse x $g(x,0) = 12-\frac{1}{3}((x-6)^2+36) = -\frac{1}{3}(x-6)^2 \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} -\infty$).

$\nabla g(x,y) = \left(-\frac{2}{3}(x-6), -\frac{2}{3}(y+6)\right)$

1 SOLO P.^{TO} STAZ $\begin{cases} -\frac{2}{3}(x-6)=0 \to x=6 \\ -\frac{2}{3}(y+6)=0 \to y=-6 \end{cases}$ $P_0=(6,-6)$ $Hg(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\det Hg(6,-6) = \frac{4}{9} > 0$ con $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(6,-6) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(6,-6) = -\frac{2}{3} < 0 \to (6,-6)$ è P.^{TO} di Massimo locale con $g(6,-6)=12$

(in realtà $(6,-6)$ è MASSIMO ASSOLUTO)

OSS. È chiaro fin dallo studio del segno che g ammette massimo assoluto su $\mathbb{R}^2$ e che il punto (o i punti) di massimo si trovano all'interno del cerchio di $C(6,-6)$ e $R=6$. Infatti, per il Teorema di Weierstraß g ammette massimo assoluto su $(x-6)^2+(y+6)^2 \leq 36$ (g è continua su $\mathbb{R}^2$, l'insieme è CHIUSO (contiene il bordo che è la circonf $(x-6)^2+(y+6)^2=36$) e LIMITATO ($\subset B_{15}(0,0)$, il punto più lontano da $(0,0)$ è $(6+3\sqrt{2}, -6-3\sqrt{2})$ che dista $6\sqrt{2}+6$ da $(0,0)$) $\approx 14{,}5$. Questo massimo trovato è anche il massimo su tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto fuori dal cerchio $(x-6)^2+(y+6)^2 \leq 36$ g assume valori negativi.

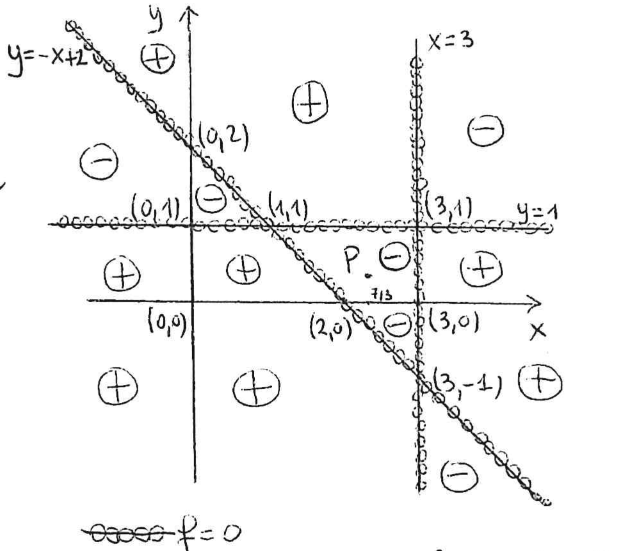
ES.3) i)

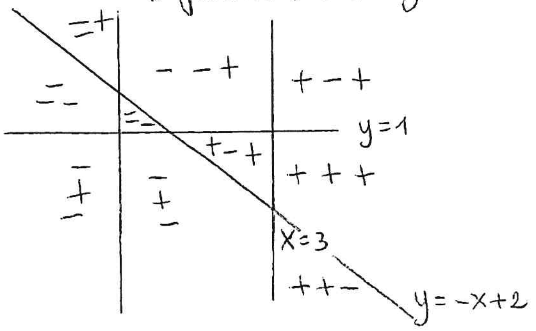
$f(x,y)=(x-3)(1-y)(x+y-2)$

$\text{dom} f=\mathbb{R}^2$

$f(x,y)=0 \iff x=3$ o $y=1$ o $y=-x+2$

$f(x,y)>0$ 1° fattore >0 se $x>3$
2° fattore >0 se $y<1$
3° fattore >0 se $y>-x+2$





$\inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$ $\quad f(x,2)=-(x-3)\cdot x=-x^2+3x \to -\infty$ $\quad x\to+\infty$, $x\to-\infty$

$\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$ $\quad f(x,0)=(x-3)(x-2)=x^2-5x+6 \to +\infty$ $\quad x\to+\infty$, $x\to-\infty$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(1-y)(x+y-2)+(x-3)(1-y)=(1-y)(x+y-2+x-3)=(1-y)(2x+y-5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-(x-3)(x+y-2)+(x-3)(1-y)=(x-3)(-x-y+2+1-y)=(x-3)(-x-2y+3)$$

P.TI STAZIONARI

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \quad \begin{cases}(1-y)(2x+y-5)=0\\ (x-3)(-x-2y+3)=0\end{cases}$$

la 1ª eq.ne si annulla se $y=1$ o $y=-2x+5$

$y=1 \to$ 2ª eq.ne $(x-3)(-x+1)=0 \iff x=1$ o $x=3$ PUNTI $\boxed{(1,1)\ (3,1)}$

$y=-2x+5 \to$ 2ª eq.ne $(x-3)(-x+4x-10+3)=0 \iff (x-3)(3x-7)=0$
$-2y=4x-10$ $\iff x=3$ o $x=\frac{7}{3}$ PUNTI $\boxed{(3,-1)\ \left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)=P}$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2(1-y) & -(2x+y-5)+(1-y)\\ (-x-2y+3)-(x-3) & -2(x-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(1-y) & -2x-2y+6\\ -2x-2y+6 & -2(x-3)\end{pmatrix} \quad f\in C^2(\mathbb{R}^2)$$

Dal segno sappiamo già che $(1,1)$ $(3,1)$ e $(3,-1)$ non possono essere punti né di massimo né di minimo. Infatti

$Hf(1,1)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ $\det Hf(1,1)=-4<0$ P.TO di SELLA $\quad Hf(3,1)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ $\det Hf(3,1)=-4<0$ P.TO di SELLA

$Hf(3,-1)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ $\det Hf(3,-1)=-4<0$ P.TO di SELLA. $f(1,1)=f(3,1)=f(3,-1)=0$.

Invece $P=\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)$ dev'essere il punto di MINIMO ASSOLUTO di f sul triangolo chiuso T di vertici $(1,1)$ $(3,1)$ $(3,-1)$: tale minimo esiste per il Teorema di Wβ ($f\in C^0(\mathbb{R}^2)$, T chiuso e limitato ($T\subset B_4(0,0)$)) essendo $f\equiv 0$ sul ∂T e $f<0$ all'interno di T. E infatti $Hf\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}4/3 & 2/3\\ 2/3 & 4/3\end{pmatrix}$ $\det Hf\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}>0$ con

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}>0 \Rightarrow \left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)$ è un P.^{to} di MINIMO LOCALE per f

in cui $f\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{8}{27}$.

• ii) $f(x,y)=(x-1)^2\cdot y+(y-2)^2-4 \quad \text{dom} f=\mathbb{R}^2$

$\partial_x f=2(x-1)y$

$\partial_y f=(x-1)^2+2(y-2)$

P.^{ti} STAZIONARI $\begin{cases} 2(x-1)y=0 \\ (x-1)^2+2(y-2)=0 \end{cases}$

la 1^a eq.^{ne} si annulla se $x-1=0$ o $y=0$

se $x=1 \to$ 2^a eq.^{ne} $2(y-2)=0 \to y=2 \qquad P_0=(1,2)$

se $y=0 \to$ 2^a eq.^{ne} $(x-1)^2-4=0 \quad (x-1)^2=4 \quad x-1=\pm 2 \quad x=1\pm 2 \quad x=-1$ o $x=3$

$P_1=(-1,0) \quad P_2=(3,0)$

$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 2y & 2(x-1) \\ 2(x-1) & 2 \end{pmatrix}$ $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\qquad Hf(1,2)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(1,2)>0$, $=8$ $\quad \partial_{xx}f=4>0$, $\partial_{yy}f=2$

$(1,2)$ P.^{to} di MIN LOC

$f(1,2)=-4$

$Hf(-1,0)=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-1,0)=-16<0$ P.^{to} di SELLA $\qquad Hf(3,0)=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(3,0)=-16<0$ P.^{to} di sella

$f(-1,0)=0=f(3,0)$

Sull'asse x $f(x,0)\equiv 0$: la funzione è nulla sull'asse x

sull'asse y $f(0,y)=y+y^2-4y+4-4=y^2-3y \underset{\substack{y\to+\infty \\ y\to-\infty}}{\longrightarrow} +\infty \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$

su $y=-x$ $f(x,-x)=(x-1)^2(-x)+(-x-2)^2-4=$

$=-x(x^2-2x+1)+x^2+4x+\cancel{4}-\cancel{4}=-x^3+3x^2+3x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

$\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$

• iii) $f(x,y)=3(x+y)-x^2-y^2 \quad \text{dom} f=\mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-3x-3y=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$ circonf di $C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ e $R=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

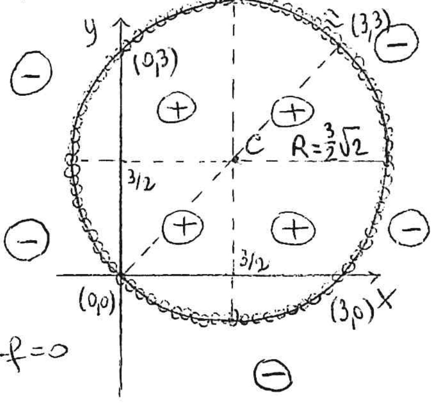
$f(x,y)>0$ se $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2<\frac{9}{2}$ cioè dentro il cerchio di $C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ $R=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

La circonferenza passa per $(0,0)$.

$f(x,y)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$ $\qquad f(x,y)=9/2-a^2-b^2$

$\sup_{\mathbb{R}^2} f=\frac{9}{2}=\max_{\mathbb{R}^2} f=f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ perchè $f(x,y)\le\frac{9}{2}$ $\forall(x,y)$

$\inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$ perchè $f(x,0)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \underset{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}}{\longrightarrow} -\infty$



In alternativa si può osservare che il grafico di f è il PARABOLOIDE CIRCOLARE di $V\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$ rivolto verso il basso e da questo seguono subito $\sup_{\mathbb{R}^2} f = \ldots$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f = \ldots$.

$\partial_x f = 3-2x \qquad \partial_y f = 3-2y$

P.^{ti} STAZIONARI $\begin{cases} 3-2x=0 \\ 3-2y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3/2 \\ y = 3/2 \end{cases}$ ovviamente l'unico punto stazionario è $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $Hf\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det Hf\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=4>0$ $\partial_{xx}f=\partial_{yy}f=-2<0$

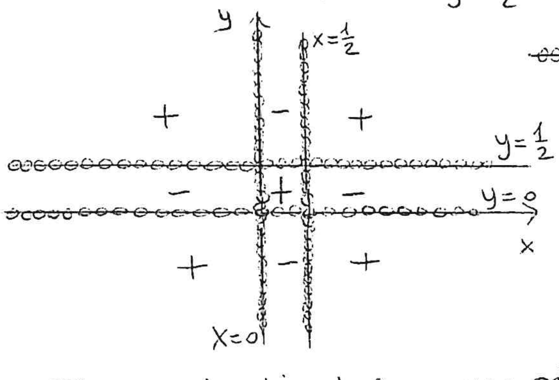
$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ P.^{to} di MAX LOCALE .

iv) $f(x,y)=(x-2x^2)\cdot(y-2y^2)$ $\quad \operatorname{dom} f=\mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=x(1-2x)\cdot y(1-2y)$

$f(x,y)=0 \iff x=0$ o $x=\frac{1}{2}$ o $y=0$ o $y=\frac{1}{2}$

$f(x,y)>0 \iff \begin{cases} x-2x^2>0 \\ y-2y^2>0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x-2x^2<0 \\ y-2y^2<0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 0<x<\frac{1}{2} \\ 0<y<\frac{1}{2} \end{cases}$ o $\begin{cases} x<0 \text{ o } x>\frac{1}{2} \\ y<0 \text{ o } y>\frac{1}{2} \end{cases}$



$\partial_x f=(1-4x)(y-2y^2)$

$\partial_y f=(x-2x^2)(1-4y)$

P.^{ti} STAZIONARI

$\begin{cases} (1-4x)(y-2y^2)=0 \\ (x-2x^2)(1-4y)=0 \end{cases}$ 1^a eq.^{ne} $x=\frac{1}{4}$ $y=0$ $y=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{4} \to 2^a \quad \frac{1}{8}(1-4y)=0 \Rightarrow y=\frac{1}{4}$

$P_0=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

$y=0 \to 2^a \quad x=0,\ x=\frac{1}{2}$

$P_1=(0,0) \quad P_2=\left(\frac{1}{2},0\right)$

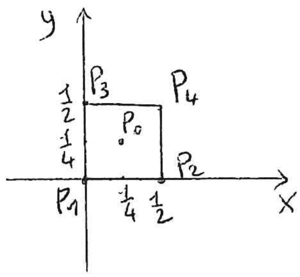
$y=\frac{1}{2} \to 2^a - (x-2x^2)=0 \to x=0 \quad x=\frac{1}{2}$

$P_3=\left(0,\frac{1}{2}\right) \quad P_4=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

OSS. Dallo studio del segno si vede che 1) P_1,P_2,P_3,P_4 non possono essere né max né minimi

2) Esiste (Teor. di Weierstrass: f continua su $\mathbb{R}^2$ (prodotto di 2 polinomi) $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le\frac{1}{2}, 0\le y\le\frac{1}{2}\}$ chiuso limitato) sicuramente $\max_Q f>0$ mentre $\min_Q f=0$ su tutto il ∂Q - Quindi P_0 è sicuramente un punto di massimo locale

$Q\subset B_R(0,0)$ $R=1$
$\operatorname{dist}(P_4,(0,0))=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} -4(y-2y^2) & (1-4x)(1-4y) \\ (1-4x)(1-4y) & -4(x-2x^2) \end{pmatrix}$ $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$Hf\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad \det Hf\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right)=\tfrac{1}{4}>0 \qquad \partial_{xx}f=\partial_{yy}f=-\tfrac{1}{2}<0$$

P_0 P.TO di MASSIMO LOCALE $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{64}$

$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ det $=-1<0$ $\quad Hf(\frac{1}{2},0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ det $=-1<0$ $\quad P_1,P_2,P_3,P_4$ punti di sella.

$Hf(0,\frac{1}{2})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ det $=-1<0$ $\quad Hf(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ det $=-1<0$ $\quad f(P_1)=f(P_2)=f(P_3)=$
$=f(P_4)=0$

Sugli assi $f\equiv 0$, su $y=x$ $f(x,x)=(x-2x^2)^2 \underset{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}}{\longrightarrow} +\infty$, su $y=\frac{1}{4}$ $f(x,\frac{1}{4})=\frac{1}{8}(x-2x^2) \underset{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}}{\longrightarrow} -\infty$

$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f(x,y)=+\infty$, $\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y)=-\infty$.

v) $f(x,y)=x^2(y+1)+\dfrac{(y-1)^2}{2}$ $\quad$ dom$f=\mathbb{R}^2$ $\quad \partial_x f=2x(y+1)$ $\quad \partial_y f=x^2+(y-1)$

P.TI STAZIONARI $\begin{cases}2x(y+1)=0 \xrightarrow{1^a} x=0 \text{ o } y=-1 \\ x^2+(y-1)=0\end{cases}$ $\quad 2^a$ $x=0\to y=1$ $\quad P_0(0,1)$

$y=-1\to x^2=2$ $\quad x=\pm\sqrt{2}$

$P_1=(\sqrt{2},-1)$ $\quad P_2=(-\sqrt{2},-1)$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2(y+1) & 2x\\ 2x & 1\end{pmatrix}\qquad f\in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$Hf(0,1)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ det $=4>0$ $\quad \partial_{xx}f=4>0$, $\partial_{yy}f=1>0$ $\Rightarrow$ P_0 è MIN LOCALE
$f(0,1)=0$

$Hf(\sqrt{2},-1)=\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$ det $=-8<0$ P.TO di sella $\quad Hf(-\sqrt{2},-1)=\begin{pmatrix}0 & -2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$ det $=-8<0$ P.TO di sella

$f(\sqrt{2},-1)=2$ $\qquad f(-\sqrt{2},-1)=2$

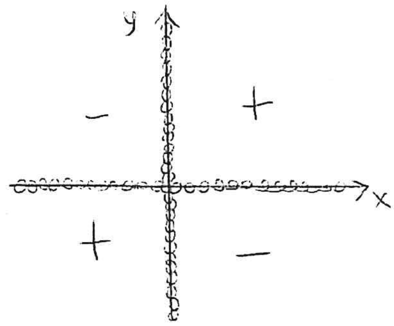
sull'asse x $\quad f(x,0)=x^2+\frac{1}{2} \underset{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}}{\longrightarrow} +\infty$

Sulla bisettrice $y=x$ $\quad f(x,x)=x^2(x+1)+\dfrac{(x-1)^2}{2}=x^3+x^2+\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}=$
$=x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ $\quad \left(e \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\right)$

$\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$, $\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$

vi) $f(x,y)=x\cdot y$ $\quad$ dom$f=\mathbb{R}^2$ $\quad$ ($z=x\cdot y$ è il grafico della FUNZIONE a SELLA ruotato in modo da essere $=0$ sugli assi)

$f(x,y)=0 \Leftrightarrow x=0$ o $y=0$ sugli assi $\quad f(x,y)>0 \Leftrightarrow x\cdot y>0$ $1^\circ q$ e $3^\circ q$



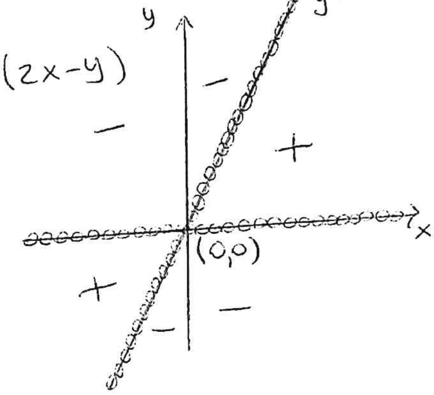
P.^{ti} stazionari $\begin{cases} \partial_x f = y = 0 \\ \partial_y f = x = 0 \end{cases}$ sol. $(0,0)$

$f(0,0)=0$ e dallo studio del segno non può essere né max né min; inoltre su $y=x$ troviamo $f(x,x)=x^2$ con $(0,0)$ minimo locale, mentre su $y=-x$ troviamo $f(x,-x)=-x^2$ con $(0,0)$ massimo locale quindi $(0,0)$ è punto di sella. Infatti $Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ det $=-1<0 \to$ P.to di SELLA.

Infine $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ (su $y=x$) $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$ (su $y=-x$).

vii) $f(x,y)=2xy-y^2$ dom $f=\mathbb{R}^2$ $f(x,y)=y(2x-y)$



$f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=0$ asse x o $y=2x$ retta

$f(x,y)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ y<2x \end{cases}$ o $\begin{cases} y<0 \\ y>2x \end{cases}$ ~~ooooo~~ $f=0$

P.^{ti} stazionari $\begin{cases} \partial_x f = 2y = \\ \partial_y f = 2x-2y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=0 \to y=0 \\ 2(x-y)=0 \quad x=0 \end{cases}$ sol $(0,0)$

dal segno si vede già che $(0,0)$ non può essere né max, né min; inoltre sull'asse y $f(0,y)=-y^2 \underset{y\to-\infty}{\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}} -\infty$, mentre sulla bisettrice $y=x$

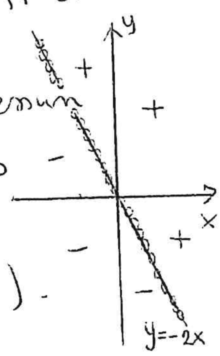
$f(x,x)=2x^2-x^2=x^2 \underset{x\to-\infty}{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}} +\infty$. Quindi esistono due direzioni su cui $(0,0)$ è di max loc e di min loc $\Rightarrow$ $(0,0)$ è un P.^{to} di SELLA.

Infine $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$.

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$
$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
det $=-4<0 \Rightarrow$ P.^{to} di sella.

Con le derivate 2^e: $Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

viii) $f(x,y)=2x+y$ dom $f=\mathbb{R}^2$ $z=2x+y$ PIANO INCLINATO, nessun punto stazionario (e infatti $\nabla f(x,y)=(2,1)$), $\inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$

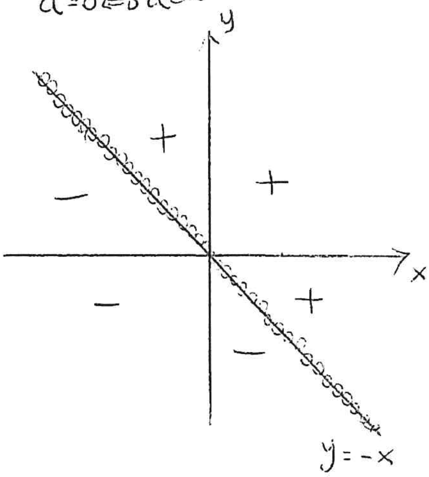


$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ (ad es. sull'asse x $f(x,0)=2x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$).

ix) $f(x,y)=(x+y)^3$ $\quad$ dom $f=\mathbb{R}^2$ $\quad$ $f(x,y)=0 \Leftrightarrow (x+y)^3=0 \Leftrightarrow x+y=0$
$\qquad\qquad a^3=0 \Leftrightarrow a=0$

$\Leftrightarrow y=-x$

$f(x,y)>0 \Leftrightarrow (x+y)^3>0 \Leftrightarrow x+y>0 \Leftrightarrow y>-x$
$\qquad a^3>0$
$\qquad \Leftrightarrow a>0$



P.TI STAZIONARI

$$\begin{cases} \partial_x f = 3(x+y)^2=0 \\ \partial_y f = 3(x+y)^2=0 \end{cases}$$

Sono ∞ e sono tutti i punti della bisettrice del 2° e 4° q $y=-x$

$f=0$

$P=(x,-x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Dallo studio del segno si vede subito che nessun punto è di massimo o di minimo. Inoltre non possono esistere due direzioni su cui il punto è in una di max loc e in una di min loc, quindi i punti non sono neanche di sella. Il grafico $z=(x+y)^3$ è il grafico di $z=x^3$ (ottenuto trascinando la cubica $z=x^3$ sul piano (x,z) rispetto a y) ruotato di $45°$ in modo che $z=0$ su $y=-x$. Quindi i punti $(x,-x)$ sono sostanzialmente dei punti di flesso con piano tangente orizzontale.

Con le derivate 2e: $\quad Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 6(x+y) & 6(x+y) \\ 6(x+y) & 6(x+y) \end{pmatrix}$ $\quad f\in C^2(\mathbb{R}^2)$

$Hf(x,-x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall x$ che non fornisce nessuna informazione.

x) $f(x,y)=x^2+y^2-4y$ $\quad$ dom $f=\mathbb{R}^2$ $\quad$ $f(x,y)=x^2+(y-2)^2-4$

il grafico $z=x^2+(y-2)^2-4$ è il paraboloide circolare di $V(0,2,-4)$ verso l'alto, di apertura 1, $\cap z=0$ su $x^2+(y-2)^2=4$ Circonf $C(0,2)$ $R=2$

$f(x,y)=0$ su $x^2+(y-2)^2=4$ $\quad C(0,2)$ $R=2$

$f(x,y)>0$ su $x^2+(y-2)^2>4$ cioè esternamente alla circonferenza

Dal grafico (oppure dal fatto che $x^2+(y-2)^2-4\geq -4$ $\forall (x,y)$) si deduce che $\min\limits_{\mathbb{R}^2} f=-4=f(0,2)$, mentre $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$ ($f(x,0)=x^2$).

L'unico punto stazionario è $(0,2)$ che corrisponde al vertice -

Infatti $\begin{cases} \partial_x f = 2x = 0 & \to x = 0 \\ \partial_y f = 2y - 4 = 0 & \to y = 2 \end{cases}$ $P(0,2)$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $Hf(0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = 4 > 0$, $\partial_{xx} f = \partial_{yy} f = 2 > 0$ $\Rightarrow$ P è di MINIMO LOCALE -

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (in realtà P è il MINIMO ASSOLUTO)

xi)
• $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$ cioè in $(0,0)$

$f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in quanto somma di quadrati

$(x^2 + (2y)^2 \geq 0 \ \forall (x,y)$ e $= 0$ solo se $x = y = 0$) -

Quindi $\min_{\mathbb{R}^2} f = 0 = f(0,0)$ $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ $(f(x,0) = x^2)$ -

L'unico punto stazionario è $(0,0)$: $\begin{cases} \partial_x f = 2x = 0 \to x = 0 \\ \partial_y f = 8y = 0 \to y = 0 \end{cases}$ $P(0,0)$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\det = 16 > 0$, $\partial_{xx} f = 2 > 0$, $\partial_{yy} f = 8 > 0$ $\Rightarrow (0,0)$ è MIN LOC (anche qui è MIN ASS.) -

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

xii)
• $f(x,y) = -x - y + 1$ $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$ $z = -x - y + 1$ è un piano inclinato
$\cap z = 0$ $y = -x + 1$

$\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$ $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ e non ci sono PUNTI STAZIONARI.

Possiamo dedurre le stesse cose osservando che $f(x,0) = -x + 1 \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$, $\xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

e calcolando $\begin{cases} \partial_x f = -1 \\ \partial_y f = -1 \end{cases}$ $\nabla f = (-1,-1) \neq (0,0)$ SEMPRE -

xiii)
• $f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$ $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$

PUNTI STAZIONARI $\begin{cases} \partial_x f = y - 1 = 0 \to y = 1 \\ \partial_y f = x - 2 = 0 \to x = 2 \end{cases}$ $P(2,1)$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = -1 < 0$ P.to di sella

sull'asse x $f(x,0) = 3 - x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$, $\xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ $\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$.

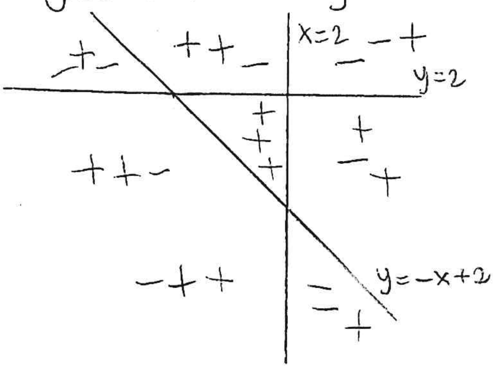
xiv) $f(x,y) = (2-x)(2-y)(x+y-2)$ dom $f = \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ o $y = 2$ o $y = -x+2$

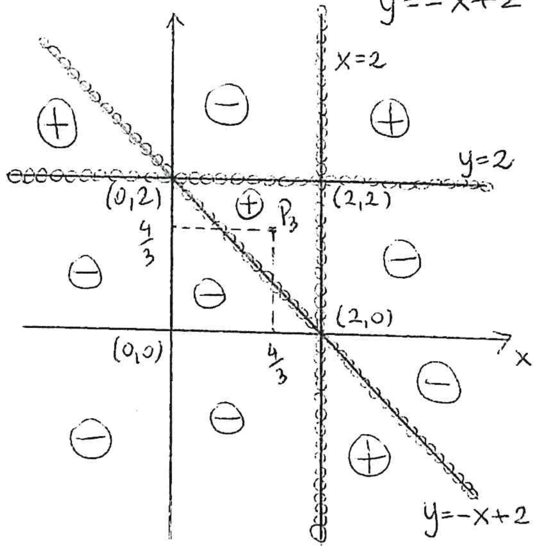
$f(x,y) > 0 \Leftrightarrow (2-x)(2-y)(x+y-2) > 0$

1° fattore > 0 se $x < 2$

2° fattore > 0 se $y < 2$

3° fattore > 0 se $y > -x+2$





P.ti STAZIONARI: $\partial_x f = -(2-y)(x+y-2) + (2-x)(2-y)$

$\partial_y f = -(2-x)(x+y-2) + (2-x)(2-y)$

$$\begin{cases} (2-y)(-x-y+2+2-x) = 0 \\ (2-x)(-x-y+2+2-y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2-y)(-2x-y+4) = 0 \\ (2-x)(-x-2y+4) = 0 \end{cases}$$

1ª eq.^{ne} $= 0$ se $y = 2$ o $y = -2x+4$

$y = 2 \to$ 2ª eq.^{ne} $(2-x)(-x) = 0 \to x = 2$ o $x = 0$ $\quad P_0 = (2,2)$ $P_1 = (0,2)$

$y = -2x+4 \to$ 2ª eq.^{ne} $(2-x)(-x+4x-8+4) = 0$ $\quad (2-x)(3x-4) = 0$

$-2y = 4x-8$ $\quad \to x = 2$ o $x = \frac{4}{3}$ $\quad P_2 = (2,0)$ $\quad P_3 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$y = -2\frac{4}{3} + 4 = \frac{4}{3}$

Dallo studio del segno si vede subito che P_0, P_1 e P_2 non possono essere né max né min locali. Invece P_3 è sicuramente un massimo locale in quanto per il Teorema di Weierstraß esistono massimo e minimo assoluti di f su $T =$ triangolo di VERTICI $(0,2), (2,0), (2,2)$ bordo compreso (f continua su $\mathbb{R}^2$ in quanto prodotto di 3 polinomi e T CHIUSO e LIMITATO $\to T \subset B_3(0,0)$) ed essendo $f = 0$ su ∂T e $f(x,y) > 0$ all'interno di T esiste di sicuro un massimo interno a T.

Infatti

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2(2-y) & \overset{2x+y-4-2+y}{-(-2x-y+4)-(2-y)} \\ \underset{-(-x-2y+4)-(2-x)}{+x+2y-4-2+x} & -2(2-x) \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 2y-4 & 2x+2y-6 \\ 2x+2y-6 & 2x-4 \end{pmatrix}$$ $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$

$Hf(2,2)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ det $=-4<0$
(2,2) p.to di sella

$Hf(0,2)=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ det $=-4<0$
(0,2) p.to di sella

$Hf(2,0)=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ det $=-4<0$
(2,0) p.to di sella

$Hf(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$ det $Hf(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{4}{3}>0$ $\Rightarrow$ $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ è p.to di
$\partial_{xx}f=\partial_{yy}f=-\frac{4}{3}<0$ Max locale -

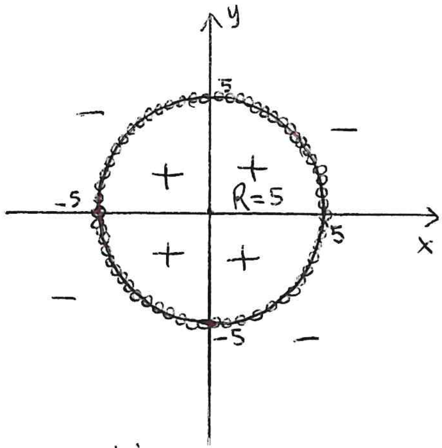
$f(2,2)=f(0,2)=f(2,0)=0$ $f(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$ -

Infine sugli assi $\underset{-2(x-2)^2}{\underset{\|}{f(x,0)}}$ e $\underset{-2(y-2)^2}{\underset{\|}{f(0,y)}}$ $\to$ sempre a $-\infty$ per $x\to\pm\infty$ $y\to\pm\infty$,
mentre sulla bisettrice $f(x,x)=(2-x)(2-x)(2x-2)=(4+x^2-4x)(2x-2)$
$=2x^3-10x^2+16x-8$ che $\underset{x\to-\infty}{\to}-\infty$ e $\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$,

quindi $\inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$, $\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$.

c) $g(x,y) = 6 - \frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2}$ dom $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$

in quanto x^2+y^2 è una somma di quadrati e come tale sempre ≥ 0



$g(x,y) = 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 5 \iff x^2+y^2 = 25$

circonf. di $C(0,0)$ $R=5$

$g(x,y) > 0 \iff 6 - \frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2} > 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} < 5$

$\iff x^2+y^2 < 25$ DENTRO IL CERCHIO $C(0,0)$ $R=5$

il grafico di g $z = 6 - \frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,6)$ verso il basso, da cui (Scheda N.6, es 1) $f(x,y)$) $\inf_{\mathbb{R}^2} g = -\infty$ $\sup_{\mathbb{R}^2} g = 6 = \max_{\mathbb{R}^2} g = g(0,0)$

In alternativa $g(x,y) \leq 6$ $\forall (x,y)$ $(g(x,y) = 6 - \underbrace{\frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2}}_{\geq 0})$ e $g(0,0) = 6$;

inoltre sull'asse x $g(x,0) = 6 - \frac{6}{5}|x| \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

$$\nabla g(x,y) = \left(-\frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{6}{5}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

in $(0,0)$ g non è derivabile (in corrispondenza del vertice del cono si ottiene un PUNTO ANGOLOSO sia nella variabile x sia nella variabile y) e quindi <u>in $(0,0)$ g NON È DIFFERENZIABILE</u>.

P.TI STAZIONARI : <u>NON CI SONO PUNTI STAZIONARI</u>

$$\begin{cases} -\frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ -\frac{6}{5}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$
$(x,y) \neq (0,0)$

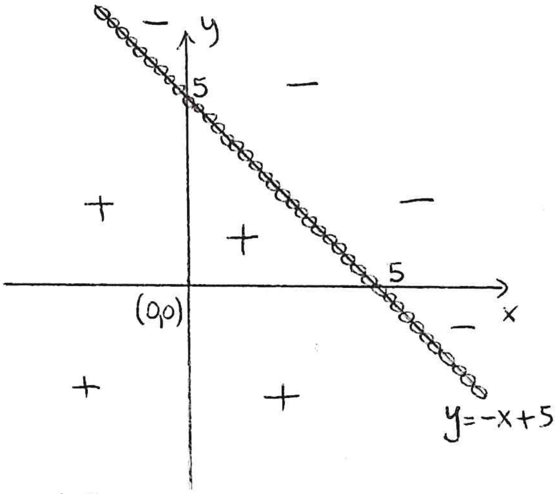
dalla 1ª $x=0$ ma sostituendo nella 2ª si ottiene $-\frac{6}{5}\frac{y}{|y|} = 0$ che è IMPOSSIBILE in quanto $\frac{y}{|y|} = \pm 1$ a seconda del segno di y

<u>OSS.</u> Nonostante NON CI SIANO PUNTI STAZIONARI esiste il MASSIMO ASSOLUTO di g su $\mathbb{R}^2$. Osserviamo innanzitutto che dallo studio del segno si capisce subito che g ammette massimo assoluto in quanto su $E: x^2+y^2 \leq 25$ (CHIUSO e LIMITATO $(E \subset B_6(0,0))$) g è continua (somma, x^2+y^2

composizione, prodotto e differenza di funzioni continue)
$\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \frac{6}{5}\cdot\sqrt{}$ $\quad 6-$

g ammette massimo assoluto per il Teorema di Weierstraß e in $x^2+y^2>25$ $g(x,y)<0$.

Inoltre il punti (o i punti) di massimo assoluto si trovano all'interno del cerchio $C(0,0)$ $R=5$. Tali punti si possono trovare nei punti stationari (ma non ce ne sono) oppure nei punti in cui g non è differentiabile. Quindi il punto di massimo assoluto (che $\exists$ sicuramente) è $(0,0)$ in cui g non è differenziabile.



d) $g(x,y)=5-x-y$ $\quad$ dom $g=\mathbb{R}^2$

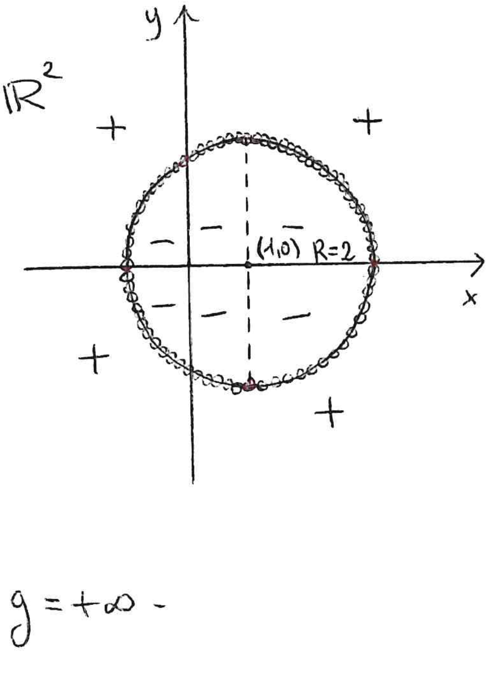
$g(x,y)=0 \iff y=-x+5$

$g(x,y)=0 \iff y<-x+5$

il grafico di g è il piano inclinato $z=5-x-y$ (per $(0,0,5)$, $(5,0,0)$ e $(0,5,0)$) per cui $\inf_{\mathbb{R}^2} g=-\infty$, $\sup_{\mathbb{R}^2} g=+\infty$.

In alternativa sull'asse x $g(x,0)=5-x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ e $\xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.

$\nabla g(x,y)=(-1,-1)\neq(0,0)$ $\forall(x,y)$ $\Rightarrow$ non ci sono PUNTI STAZIONARI.



e) $g(x,y)=x^2+y^2-2x-3=(x-1)^2+y^2-4$ $\quad$ dom $g=\mathbb{R}^2$

$g(x,y)=0 \iff (x-1)^2+y^2=4$ cf $C(1,0)$ $R=2$

$g(x,y)>0 \iff (x-1)^2+y^2>4$ FUORI dalla cf $C(1,0)$ $R=2$

il grafico di g $z=(x-1)^2+y^2-4$ è il PARABOLOIDE CIRCOLARE di $V(1,0,-4)$, $a=1$, verso l'alto, da cui

$$\inf_{\mathbb{R}^2} g=-4=\min_{\mathbb{R}^2} g=g(1,0) \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} g=+\infty.$$

In alternativa $g(x,y) \geq -4 \;\; \forall (x,y)$ in quanto $(x-1)^2+y^2 \geq 0$ e $g(1,0)=-4$; inoltre sull'asse y $g(0,y)=y^2-3 \underset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

P.ti STAZIONARI $\nabla g(x,y) = (2(x-1), 2y)$

$$\begin{cases} 2(x-1)=0 \\ 2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

1 solo P.TO STAZ $(1,0)$ che corrisponde al vertice e che è chiaramente un MINIMO LOCALE (visto che è MINIMO ASSOLUTO)

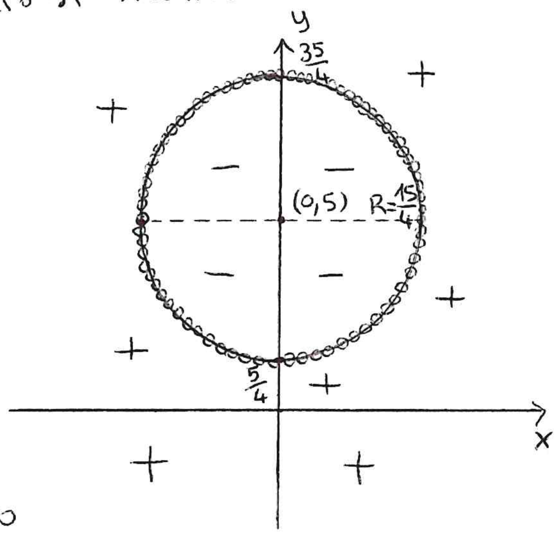
$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Hg(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det Hg(1,0) = 4 > 0 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2 > 0$$

$\Rightarrow (1,0)$ MIN LOCALE con $g(1,0)=-4$.

OSS. Come al solito dallo studio del segno è chiaro che ESISTE il MIN ASSOLUTO su $\mathbb{R}^2$ in quanto esiste il min assoluto (Teor di WB) $\underset{\text{LIM}\to CB_4}{}$ su $(x-1)^2+y^2 \leq 4$ in cui $g(x,y) \leq 0$ e su $(x-1)^2+y^2>4$ $g(x,y)>0$.

f) $g(x,y) = -3 + \frac{4}{5}\sqrt{x^2+y^2-10y+25} = -3 + \frac{4}{5}\sqrt{x^2+(y-5)^2}$

$\text{dom}\, g = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-5)^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$ in quanto si tratta di una somma di quadrati e come tale sempre ≥ 0.



$g(x,y)=0 \iff \sqrt{x^2+(y-5)^2} = \frac{15}{4}$

$\iff x^2+(y-5)^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2$ circonf $C(0,5)$ $R=\frac{15}{4}$

$g(x,y)>0 \iff \sqrt{} > \frac{15}{4} \iff x^2+(y-5)^2 > \left(\frac{15}{4}\right)^2$

fuori dalla circonf $C(0,5)$ $R=\frac{15}{4}$

Il grafico di g $z=-3+\frac{4}{5}\sqrt{x^2+(y-5)^2}$ è un CONO CIRCOLARE di $V(0,5,-3)$ verso l'alto $a=\frac{4}{5}$ $\hat{ap} \simeq 51{,}34°$ (Scheda 6, es 1) $u(x,y)$)

da cui $\min_{\mathbb{R}^2} g = -3 = \min_{\mathbb{R}^2} g = g(0,5)$ $\quad \sup_{\mathbb{R}^2} g = +\infty$

(in alternativa $g(x,y) \geq -3 \;\; \forall (x,y)$ perché $+\frac{4}{5}\sqrt{} \geq 0$, $g(0,5)=-3$; invece sull'asse x $g(x,0) = -3+\frac{4}{5}|x| \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$).

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{4}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-5)^2}}, \frac{4}{5}\frac{(y-5)}{\sqrt{x^2+(y-5)^2}} \right) \quad \forall (x,y) \neq (0,5)$$

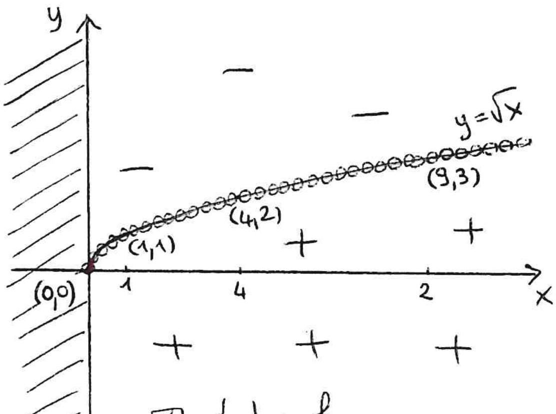
in $(0,5)$ g non è derivabile (in corrispondenza del vertice del cono si ottiene un punto angoloso sia nella variabile x sia nella variabile y) e quindi in $(0,5)$ g non è differenziabile.

P.ti STAZIONARI: NON CI SONO PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} \frac{4}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-5)^2}} = 0 \\ \frac{4}{5}\frac{(y-5)}{\sqrt{x^2+(y-5)^2}} = 0 \\ (x,y) \neq (0,5) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{non accettabile}$$

OSS. Come già visto in c) pur non essendoci punti stazionari, esiste il MINIMO ASSOLUTO in un punto in cui g non è differenziabile.
Tale minimo assoluto esiste sicuramente (provate voi: Weierstrass su $x^2+(y-5)^2 \leq \left(\frac{15}{4}\right)^2$ che è $\subset B_g(0,0)$ ecc....)

g) $g(x,y) = \sqrt{x} - y$ $\quad$ dom $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$
SEMIPIANO delle X POSITIVE O NULLE



▨ $\notin$ dom f
asse y $\in$ dom f

$g(x,y) = 0 \iff y = \sqrt{x}$ grafico della RADICE

$g(x,y) > 0 \iff y < \sqrt{x}$ SOTTO il GRAFICO.

il grafico di g non è noto.

sull'asse y $\quad g(0,y) = -y \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $\underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} g = -\infty \quad \sup_{\mathbb{R}^2} g = +\infty$

$\nabla g(x,y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, -1 \right)$ se $x > 0$ quindi la $\frac{\partial g}{\partial y} = -1$ esiste sempre, ma la $\frac{\partial g}{\partial x}$ NON ESISTE in tutti i punti dell'asse y (anche se $\in$ dom f) perché la funzione $\sqrt{x}$ non è derivabile in $x=0$. Quindi g non è derivabile nei punti dell'asse y e quindi NON è DIFFERENZIABILE in tali punti. Inoltre NON CI SONO PUNTI STAZIONARI perché $\nabla g(x,y)$ non è mai $(0,0)$: $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ mai $\quad -1 = 0$ mai.

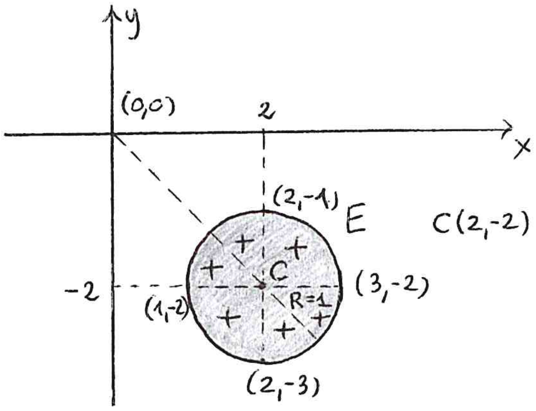
ES. 4) a) <u>1° passo</u> E è il CERCHIO <u>CHIUSO</u> (Bordo compreso)

di $C(2,-2)$ e $R=1$

E è LIMITATO ($E \subset B_4(0,0)$)

il punto di E più lontano da $(0,0)$ è $\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}, -2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

che dista $2\sqrt{2}+1$ da $(0,0)$
$\simeq 3{,}8$



f è continua su $\mathbb{R}^2$ (polinomio di 1° grado)

e quindi è continua su E. Allora per il Teorema di Weierstraß siamo sicuri che g ammette MASSIMO e MINIMO assoluti su E. Poiché $g(x,y)>0 \ \forall (x,y)\in E \Rightarrow \min_E g>0 \quad \max_E g>0$.

<u>2° passo</u> g non ha punti stazionari

<u>3° passo</u> ∂E $\quad \gamma \begin{cases} x=2+\cos t \\ y=-2+\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \quad g(t)=f(2+\cos t, -2+\operatorname{sen} t)$

$$g(t)=6-2(-2+\operatorname{sen} t)=10-2\operatorname{sen} t \qquad g'(t)=-2\cos t$$

$$g'(t)=0 \iff \cos t=0 \iff t=\frac{\pi}{2} \quad t=\frac{3}{2}\pi$$

TEMPI $\quad t=0 \quad t=\frac{\pi}{2} \quad t=\frac{3}{2}\pi \quad (t=2\pi)$ coincide con $t=0$

PUNTI $\quad (3,-2) \quad (2,-1) \quad (2,-3)$

VALORI $\quad g(3,-2)=10 \quad g(2,-1)=8 \quad g(2,-3)=12$

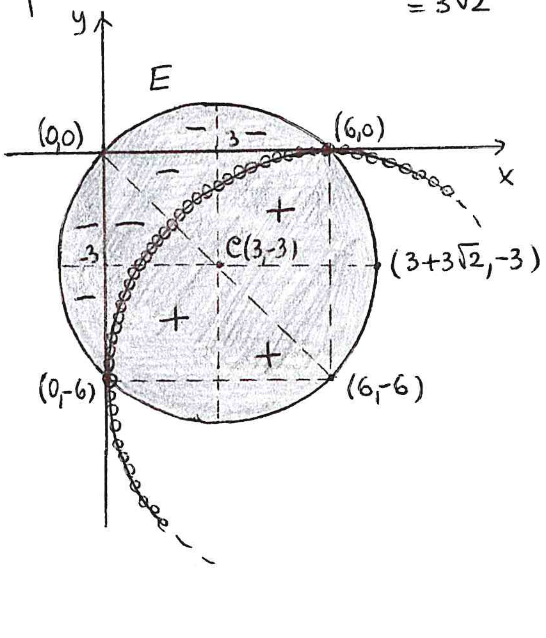
<u>4° passo</u> conclusione $\quad \min_E g(x,y)=8=f(2,-1)$

$\max_E g(x,y)=12=f(2,-3)$

$(0,0)\ (6,0)\ (6,-6)\ (0,-6)$ $\in \partial E$

b) <u>1° passo</u> E è il CERCHIO <u>CHIUSO</u> (Bordo compreso) di $C(3,-3)$ e $R=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

E è LIMITATO ($E\subset B_9(0,0)$: il punto di E più lontano da $(0,0)$ è $(6,-6)$ che dista $6\sqrt{2}$ da $(0,0)$)
$\simeq 8{,}5$



g è continua su $\mathbb{R}^2$ (e quindi su E) perché è un polinomio di grado 2

$\Rightarrow$ per il Teorema di Weierstrass siamo sicuri che g ammette MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI su E.

2° passo: non ci sono p.ti stazionari interni ad E (l'unico è $(6,-6) \in \partial E$ che è massimo locale e anche massimo assoluto)

3° passo: studio del ∂E $\gamma \begin{cases} x = 3+3\sqrt{2}\cos t \\ y = -3+3\sqrt{2}\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$g(t) = f(3+3\sqrt{2}\cos t, -3+3\sqrt{2}\,\text{sen}\,t) = 12 - \frac{1}{3}\left((-3+3\sqrt{2}\cos t)^2 + (3+3\sqrt{2}\,\text{sen}\,t)^2\right) = 12 - \frac{1}{3}\left(9 + \underline{18\cos^2 t} - 18\sqrt{2}\cos t + 9 + \underline{18\,\text{sen}^2 t} + 18\sqrt{2}\,\text{sen}\,t\right) =$$

$18\cos^2 t + 18\,\text{sen}^2 t = 18$

$$= 12 - \frac{1}{3}(27 - 18\sqrt{2}\cos t + 18\sqrt{2}\,\text{sen}\,t) =$$

$$= 3 + 6\sqrt{2}\cos t - 6\sqrt{2}\,\text{sen}\,t \qquad g'(t) = -6\sqrt{2}\,\text{sen}\,t - 6\sqrt{2}\cos t$$

$$g'(t) = 0 \iff \cos t = -\text{sen}\,t \iff t = \frac{3}{4}\pi \text{ o } t = \frac{7}{4}\pi$$

TEMPI $t=0$ $t=\frac{3}{4}\pi$ $t=\frac{7}{4}\pi$ $(t=2\pi)$ coincide con $t=0$

PUNTI $(3+3\sqrt{2},-3)$ $(0,0)$ $(6,-6)$

VALORI $g(3+3\sqrt{2},-3) = 6\sqrt{2} \simeq 8{,}45$ $g(0,0) = 12 - \frac{1}{3}(72) = -12$ $g(6,-6) = 12$

$$12 - \frac{1}{3}((-3+3\sqrt{2})^2 + (3)^2) = 12 - \frac{1}{3}(9+18-18\sqrt{2}+9) = 6\sqrt{2}$$

4° passo conclusione

$$\max_E g(x,y) = 12 = g(6,-6) \qquad \min_E g(x,y) = -12 = g(0,0).$$

• i) $f(x,y) = (x-3)(1-y)(x+y-2)$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 4, -x+2 \le y \le 1\}$

→ E è il triangolo di vertici $(1,1)$ $(4,1)$ $(4,-2)$, lati compresi.

→ f è $C^0(\mathbb{R}^2)$ in quanto prodotto di 3 polinomi, E è chiuso ($\partial E \subset E$) e limitato ($E \subset B_5(0,0)$), quindi per il Teorema di Weierstraß ESISTONO il MASSIMO e il MINIMO ASSOLUTI di f su E.

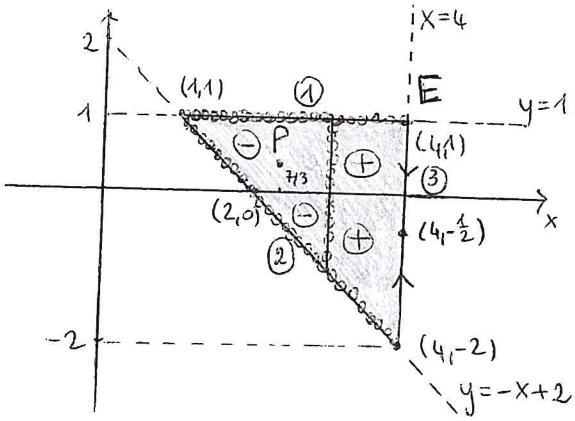
→ Il punto $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$ è punto di minimo locale interno a E con $f(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{8}{27}$. Sui due lati ① e ② $f \equiv 0$, quindi rimane solo da studiare ③

$\gamma_3 : \begin{cases} x = 4 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-2,1]$

$g(t) = f(4,t) = (1-t)(2+t) = -t^2 - t + 2$

$g'(t) = -2t - 1 \qquad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

$P_{\gamma_3}(4, -\frac{1}{2}) \quad f(4, -\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} \quad \begin{pmatrix} f(4,-2) = 0 \\ f(4,1) = 0 \end{pmatrix}$



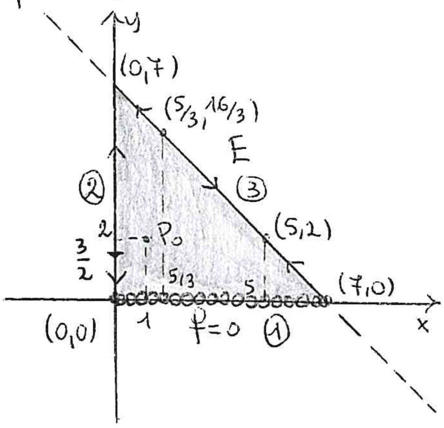
→ Conclusione

$$\min_E f(x,y) = -\frac{8}{27} = f\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad \max_E f(x,y) = \frac{9}{4} = f\left(4, -\frac{1}{2}\right)$$

ii) $f(x,y)=(x-1)^2y+(y-2)^2-4$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\ 0\leq y\leq -x+7\}$

→ E è il Triangolo di vertici $(0,0)$ $(0,7)$ $(7,0)$ lati compresi.

→ Poichè f è $C^0(\mathbb{R}^2)$ in quanto polinomio in x e y ed E è CHIUSO ($\partial E\subset E$) e LIMITATO ($E\subset B_8(0,0)$), allora per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI di f su E.



→ $P_0=(1,2)$ punto di minimo locale con $f(1,2)=-4$

→ ∂E : sul lato ① $f\equiv 0$, sul lato ② : $\gamma_2\begin{cases}x=0\\ y=t\end{cases}$ $t\in[0,7]$

$g_2(t)=f(0,t)=t+t^2-4t=t^2-3t$ $\quad g_2'(t)=2t-3$ $\quad g_2'(t)=0 \iff t=\frac{3}{2}$

$f(0,0)=0$ $\quad f(0,\frac{3}{2})=-\frac{9}{4}$ $\quad f(0,7)=28$

sul lato ③ $\begin{cases}x=t\\ y=-t+7\end{cases}$ $t\in[0,7]$ $\quad g_3(t)=\underbrace{(t-1)^2}_{(t^2-2t+1)}(-t+7)+\underbrace{(-t+7-2)^2}_{(-t+5)^2}-4$

$g_3(t)=-t^3+7t^2+2t^2-14t-t+7+t^2-10t+25-4$

$g_3(t)=-t^3+10t^2-25t+28$ $\quad g_3'(t)=-3t^2+20t-25$

$g_3'(t)=0$ $\quad 3t^2-20t+25=0$ $\quad t_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-75}}{3}=\dfrac{10\pm5}{3}$ $\nearrow t_1=5/3$, $\searrow t_2=5$

$f(0,7)=28$ $\quad f(5/3,\frac{16}{3})=-\left(\frac{5}{3}\right)^3+10\left(\frac{5}{3}\right)^2-25\cdot\frac{5}{3}+28=-\frac{125}{27}+\frac{250}{9}-\frac{125}{3}+28=$

$=\dfrac{-125+750-1125+756}{27}=\dfrac{256}{27}\approx 9{,}5$

oppure $=\left(\frac{5}{3}-1\right)^2\cdot\frac{16}{3}+\left(\frac{16}{3}-2\right)^2-4=\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{16}{3}+\frac{100}{9}-4=\frac{64}{27}+\frac{100}{9}-4=\frac{64+300-108}{27}=\frac{256}{27}$

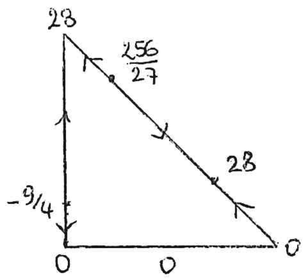
$f(5,2)=-\cancel{125}+250-\cancel{125}+28=28$ oppure $f(5,2)=(5-1)^2\cdot2+(2-2)^2-4=16\cdot2-4=28$

$f(7,0)=0$

→ Conclusione: c'è un p.to di minimo locale interno in cui $f=-4$, sul bordo f è compresa tra $-\frac{9}{4}$ e 28

Allora $\min\limits_E f(x,y)=-4=f(1,2)$

$\max\limits_E f(x,y)=28=f(0,7)=f(5,2)$

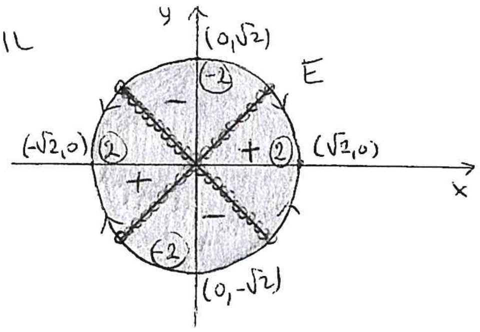


iii) $f(x,y) = x^2 - y^2$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2\}$.

→ E è il CERCHIO (INTERNO + BORDO) di $C(0,0)$ e $R=\sqrt{2}$

→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (polinomio in x,y), E CHIUSO ($\partial E \subset E$) e LIMITATO ($E \subset B_2(0,0)$)

⇒ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO E IL MINIMO ASSOLUTI di f su E



→ un solo punto stazionario (0,0) che è PUNTO di SELLA (è la funzione a SELLA)

→ ∂E $\gamma \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\quad g(t) = (\sqrt{2}\cos t)^2 - (\sqrt{2}\sin t)^2$

$g(t) = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t \qquad g'(t) = -4\sin t\cos t - 4\sin t\cos t = -8\sin t\cos t$

$g'(t) = 0 \iff \sin t \cdot \cos t = 0 \iff t=0,\ t=\frac{\pi}{2},\ t=\pi,\ t=\frac{3}{2}\pi,\ t=2\pi$

$\underset{t=0}{f(\sqrt{2},0) = 2} \qquad \underset{t=\frac{\pi}{2}}{f(0,\sqrt{2}) = -2} \qquad \underset{t=\pi}{f(-\sqrt{2},0) = 2} \qquad \underset{t=\frac{3}{2}\pi}{f(0,-\sqrt{2}) = -2}$

→ Conclusione Non ci sono punti di massimo o minimo locale interni sul bordo f è compresa tra -2 e 2. Allora

$$\min_E f(x,y) = -2 = f(0,\sqrt{2}) = f(0,-\sqrt{2})$$

$$\max_E f(x,y) = 2 = f(\sqrt{2},0) = f(-\sqrt{2},0)$$

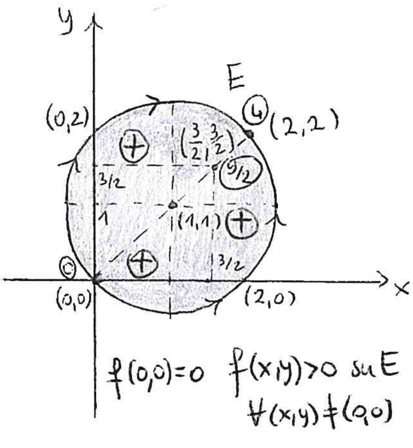
iv) $f(x,y) = 3(x+y) - x^2 - y^2$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2\}$

→ E è il CERCHIO CHIUSO di $C(1,1)$ $R=\sqrt{2}$ (passa per (0,0), (2,0), (0,2), (2,2))

→ f è CONTINUA su $\mathbb{R}^2$ (polinomio di 2° grado in x e y), E è CHIUSO (CERCHIO CHIUSO) e LIMITATO ($E \subset B_3(0,0)$) ⇒ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e IL MINIMO ASSOLUTI su E.

→ Un solo punto stazionario $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ di MASSIMO LOCALE in cui $f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$, che è INTERNO a E

$$\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 2$$



$f(0,0) = 0 \quad f(x,y) > 0$ su E $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$\to \partial E \quad \gamma \begin{cases} x = 1+\sqrt{2}\cos t \\ y = 1+\sqrt{2}\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \quad g(t) = 3(1+\sqrt{2}\cos t + 1+\sqrt{2}\,\text{sen}\,t) -$

$- (1+\sqrt{2}\cos t)^2 - (1+\sqrt{2}\,\text{sen}\,t)^2 = 6 + 3\sqrt{2}\cos t + 3\sqrt{2}\,\text{sen}\,t - 1 - 2\sqrt{2}\cos t$

$-2\cos^2 t - 1 - 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t - 2\,\text{sen}^2 t = 4 + \sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t - 2(\underbrace{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}_{=1})$

$g(t) = 2 + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t + \sqrt{2}\cos t \qquad g'(t) = \sqrt{2}\cos t - \sqrt{2}\,\text{sen}\,t$

$g'(t) = 0 \iff \cos t = \text{sen}\,t \iff t = \frac{\pi}{4} \quad t = \frac{5}{4}\pi$

$P_{iu} = (1+\sqrt{2}, 1) \quad f(1+\sqrt{2},1) = 2+\sqrt{2} \approx 3{,}4$

PUNTI: $f(2,2) = 4 \quad \left(2 + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ oppure $\left.3(2+2) - 4 - 4\right)$
$t = \frac{\pi}{4}$

$f(0,0) = 0 \quad \left(2 - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ oppure $\left.3(0+0) - 0 - 0\right)$
$t = \frac{5}{4}\pi$

$\to$ Conclusione $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ di massimo locale interno in cui $f = \frac{9}{2}$

Sul bordo f è compresa tra 0 e 4, allora

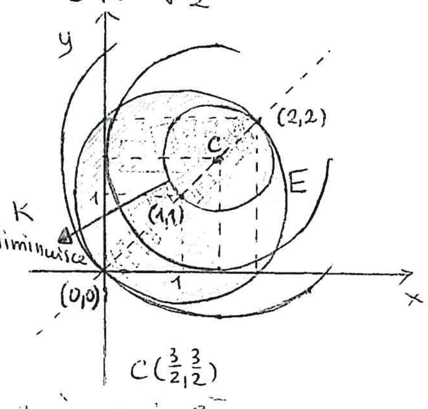
(*) $\quad \min\limits_E f(x,y) = 0 = f(0,0) \qquad \max\limits_E f(x,y) = f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$

OSS. NO Questo esercizio si può svolgere anche con il metodo degli insiemi di livello: $f(x,y) = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$

$E_K \neq \phi$ se $K \le \frac{9}{2} \quad E_K: -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} = K$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - K \ge 0$ circonf di $C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ e $R = \sqrt{\frac{9}{2} - K}$

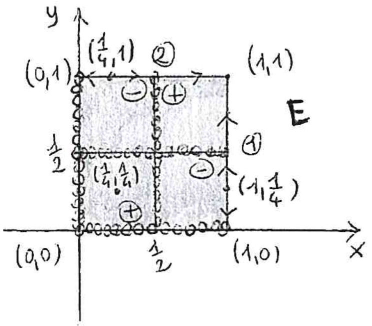
$E_{9/2} = \left\{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right\} \quad E_{\frac{1}{2}}: R = 2 \quad E_0 \; R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ecc.



K diminuisce quando il raggio della circonferenza aumenta: il punto di E più lontano da $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ è $(0,0)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) \in E$, di qui lo stesso risultato (*).
Si vede anche che su ∂E il punto in cui f è massima è $(2,2)$ (punto più vicino a C) e quello in cui è minima è $(0,0)$ (punto più lontano da C).

v) • $f(x,y) = (x-2x^2)(y-2y^2)$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

→ E è un quadrato di lato 1, bordo compreso



→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (prodotto di 2 polinomi, uno in x e uno in y), E è CHIUSO ($\partial E\subset E$) e LIMITATO ($E\subset B_2(0,0)$) ⇒ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e IL MINIMO ASSOLUTI di f su E

→ Un solo punto stazionario $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ di massimo locale in cui $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{64}$ che risulta interno a E

→ ∂E : sugli assi $f\equiv 0$, quindi studiamo gli altri due lati

lato ① $\gamma_1\begin{cases}x=1\\y=t\end{cases}$ $t\in[0,1]$ $g_1(t)=-(t-2t^2)=2t^2-t$ $g_1'(t)=4t-1$

$g_1'(t)=0 \iff t=\frac{1}{4}$ PUNTI: $f(1,0)=0$ $f(1,\frac{1}{4})=-\frac{1}{8}$ $f(1,1)=1$

lato ② $\gamma_2\begin{cases}x=t\\y=1\end{cases}$ $t\in[0,1]$ $g_2(t)=f(t,1)=(t-2t^2)(-1)=2t^2-t$

come lato ① $g_2'(t)=4t-1$, $g'(t)=0$ $t=\frac{1}{4}$

PUNTI: $f(0,1)=0$ $f(\frac{1}{4},1)=-\frac{1}{8}$ $f(1,1)=1$

→ Conclusione $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ punto di max locale in cui $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{64}$

Sul bordo f è compresa tra $-\frac{1}{8}$ e 1, allora

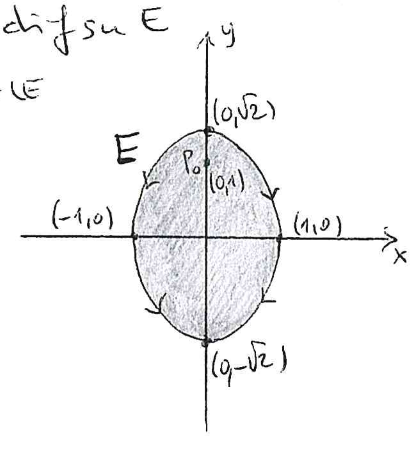
$$\min_E f(x,y)=-\frac{1}{8}=f(1,\tfrac{1}{4})=f(\tfrac{1}{4},1) \qquad \max_E f(x,y)=1=f(1,1)$$

vi) • $f(x,y)=x^2(y+1)+\frac{(y-1)^2}{2}$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 2x^2+y^2\le 2\}$

→ E : $x^2+\frac{y^2}{2}\le 1$ ELLISSE (interno + BORDO) $C(0,0)$ $a=1$ $b=\sqrt{2}$

→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (somma e prodotto di polinomi in x e y)
E è CHIUSO e LIMITATO ($E\subset B_2(0,0)$) ⇒ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MAX e MIN ASSOLUTI di f su E

→ Un punto stazionario $P_0=(0,1)$ di MIN LOCALE in cui $f(0,1)=0$ che risulta interno a E



→ ∂E $\gamma\begin{cases}x=\cos t\\y=\sqrt{2}\,\text{sen}\,t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

$$g(t)=(\cos t)^2(1+\sqrt{2}\,\text{sen}\,t)+\frac{(\sqrt{2}\,\text{sen}\,t-1)^2}{2}$$

$g(t) = \underbrace{\cos^2 t + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t\cos^2 t}_{=1} + \text{sen}^2 t - \sqrt{2}\,\text{sen}\,t + \frac{1}{2}$

$g(t) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t(\cos^2 t - 1) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t(-\text{sen}^2 t)$

$g(t) = \frac{3}{2} - \sqrt{2}\,\text{sen}^3 t \quad g'(t) = -3\sqrt{2}\,\text{sen}^2 t\cos t \quad g'(t)=0 \Leftrightarrow \text{sen}\,t = 0$ o $\cos t = 0$

$\Leftrightarrow t=0 \quad t=\frac{\pi}{2} \quad t=\pi \quad t=\frac{3}{2}\pi \quad t=2\pi$

PUNTI $(1,0)$ $(0,\sqrt{2})$ $(-1,0)$ $(0,-\sqrt{2})$

$f(1,0)=\frac{3}{2} \quad f(0,\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-\sqrt{2}$ (oppure $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}-\sqrt{2}(1)^3$
$\approx 0{,}086$ $= \frac{3}{2}-\sqrt{2}$)

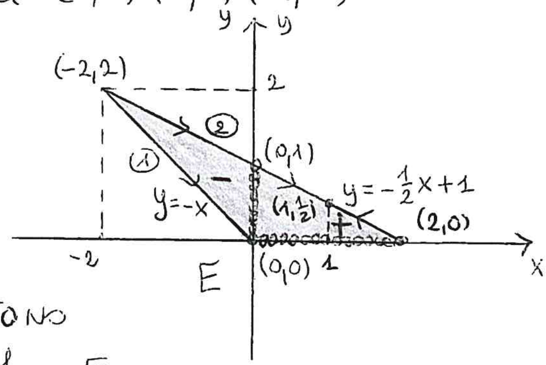
$f(-1,0)=\frac{3}{2} \quad f(0,-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2}-1)^2}{2} = 1+\sqrt{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}+\sqrt{2}$ $(g(\frac{3}{2}\pi) = \frac{3}{2}-\sqrt{2}(-1)^3)$
$\approx 2{,}9$

$\to$ Conclusione il punto $(0,1)$ è di MINLOC e $f(0,1)=0$,
Sul bordo f è compresa tra $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ e $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$, quindi

$\min_E f(x,y) = 0 = f(0,1) \qquad \max_E f(x,y) = \frac{3}{2}+\sqrt{2} = f(0,-\sqrt{2})$

VII) • $f(x,y) = xy$ su E = Triangolo chiuso di vertici $(0,0)$ $(2,0)$ $(-2,2)$

$f=0$ sugli assi



$\to$ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (prodotto di x e y)
E è CHIUSO e LIMITATO ($E \subset B_3(0,0)$)
$\Rightarrow$ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO
il MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI di f su E

$\to$ non ci sono punti di max e minimo locale su $\mathbb{R}^2$

$\to$ ∂E sull'asse x $f \equiv 0$ sul lato ① $\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$ $t \in [-2,0]$

$g_1(t) = -t^2 \quad g_1'(t) = 2t = 0 \quad t=0$ PUNTI $f(-2,2) = -4$ $f(0,0)=0$

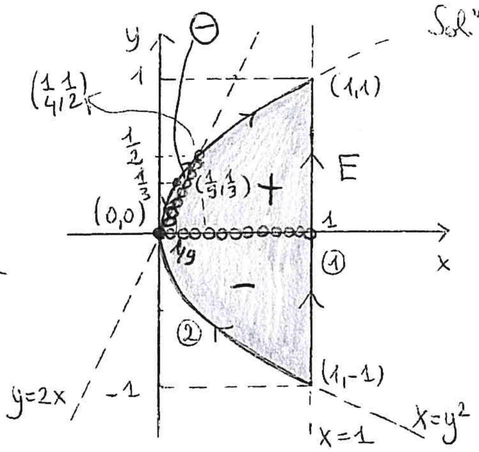
sul lato ② $\gamma_2 \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{2}t+1 \end{cases}$ $t \in [-2,2]$ $g_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$ $g_2'(t) = -t+1$
$t=1$

PUNTI: $f(-2,2) = -4$ $f(1,\frac{1}{2}) = +\frac{1}{2}$ $f(2,0)=0$

$\to$ Conclusione: nessun punto di max e min locale interno a E, sul bordo f compresa tra -4 e $\frac{1}{2}$, allora

$\min_E f(x,y) = -4 = f(-2,2) \qquad \max_E f(x,y) = \frac{1}{2} = f(1,\frac{1}{2})$

viii)
- $f(x,y) = 2xy - y^2$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le x \le 1\}$



$x = y^2$ parabola di asse x

$V(0,0)$ per $(1,1)$ e $(1,-1)$

→ E è la regione compresa tra la parabola $x = y^2$ e la retta verticale $x = 1$, bordo compreso

→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (polinomio in x,y di 2° grado)

e E è CHIUSO ($\partial E \subset E$) e LIMITATO ($E \subset B_2(0,0)$)

⇒ per il Teor. di Weierstraß ESISTONO MINIMO e MASSIMO ASSOLUTI di f su E

→ nessun punto di minimo o massimo locale su $\mathbb{R}^2$

→ ∂E sul lato ① $\gamma_1 \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$ $t \in [-1,1]$ $g_1(t) = 2t - t^2$ $g_1'(t) = 2 - 2t$

$g_1'(t) = 0 \iff t = 1$

PUNTI : $f(1,-1) = -3$ $f(1,1) = 1$

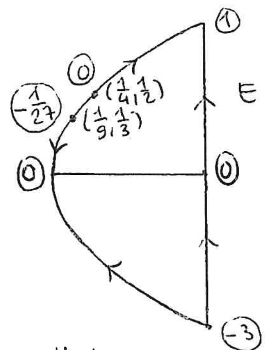
sul lato ② $\gamma_2 \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$ $t \in [-1,1]$ $g_2(t) = 2t^3 - t^2$ $g_2'(t) = 6t^2 - 2t$

$g_2'(t) = 0 \iff 2t(3t-1) = 0$ $t = 0$ $t = \frac{1}{3}$

PUNTI $f(1,-1) = -3$ $f(0,0) = 0$ $f(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{27}$ $f(1,1) = 1$

$f(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}) = 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{27} - \frac{3}{27}$

oppure $2(\frac{1}{3})^3 - \frac{1}{9} = g(\frac{1}{3})$

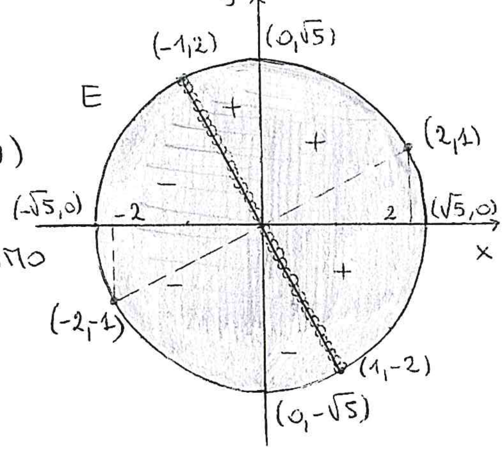


→ Conclusione nessun punto di max o min locale interno, sul bordo f è compresa tra −3 e 1, allora

$\min\limits_E f(x,y) = -3 = f(1,-1)$ $\max\limits_E f(x,y) = 1 = f(1,1)$

ix)
- $f(x,y) = 2x + y$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 5\}$

→ E è il CERCHIO CHIUSO di $C(0,0)$ $R = \sqrt{5}$



→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (polinomio di 1° grado in x,y)

E è CHIUSO e LIMITATO ($E \subset B_3(0,0)$)

⇒ per il Teor. di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e il MINIMO ASSOLUTO di f su E

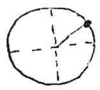
→ nessun punto stazionario su $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow \partial E \quad \gamma \begin{cases} x=\sqrt{5}\cos t \\ y=\sqrt{5}\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \qquad g(t)=2\sqrt{5}\cos t+\sqrt{5}\,\text{sen}\,t$

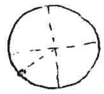
$g'(t)=-2\sqrt{5}\,\text{sen}\,t+\sqrt{5}\cos t \qquad g'(t)=0 \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,t=\cos t \Leftrightarrow \text{sen}\,t=\frac{1}{2}\cos t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,t=\frac{1}{2}\cos t \\ \text{sen}^2 t+\cos^2 t=1 \end{cases} \quad \dots \quad \frac{1}{4}\cos^2 t+\cos^2 t=1 \quad \dots \quad \cos^2 t=\frac{4}{5} \quad \dots \quad \cos t=\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow$ t è tale che $\begin{cases} \text{sen}\,t=\sqrt{5}/5 \\ \cos t=\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \text{sen}\,t=-\sqrt{5}/5 \\ \cos t=-\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{cases}$



$t \simeq 26{,}6°$



$t \simeq 206{,}6°$

PUNTI : $(x=\sqrt{5}\cos t=2,\ y=\sqrt{5}\,\text{sen}\,t=1)=(2,1)$ $\qquad P_{in}=P_{fin}=(\sqrt{5},0)$

$(x=\sqrt{5}\cos t=-2,\ y=\sqrt{5}\,\text{sen}\,t=-1)=(-2,-1)$ $\qquad f(\sqrt{5},0)=2\sqrt{5}\simeq 4{,}47$

$f(2,1)=5 \quad f(-2,-1)=-5$

$\rightarrow$ Conclusione nessun punto stazionario interno a E, sul bordo f è compreso tra -5 e 5, allora

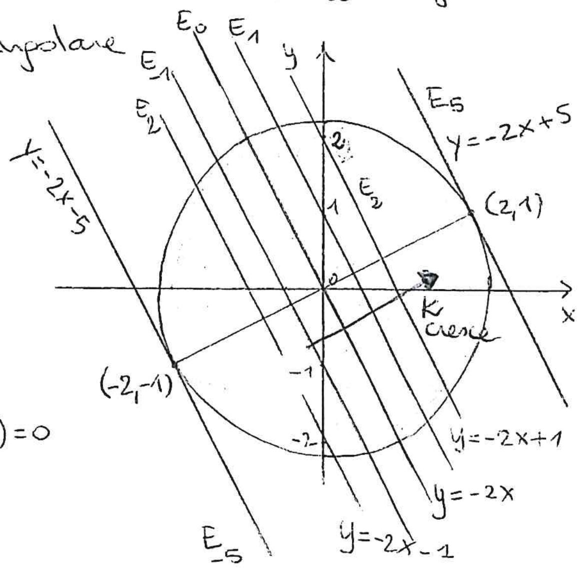
(*) $\min\limits_E f(x,y)=-5=f(-2,-1) \qquad \max\limits_E f(x,y)=5=f(2,1)$.

OSS. (NO) Questo esercizio si può svolgere anche con gli insiemi di livello : $f(x,y)=2x+y \qquad E_K\neq\emptyset\ \forall K\in\mathbb{R} \qquad E_K:\ 2x+y=K$

$E_0: y=-2x \quad E_1\ y=-2x+1 \quad E_{-1}\ y=-2x-1 \qquad y=-2x+K$

K aumenta con l'ordinata all'origine $\qquad$ retta $m=-2$ ordinata all'origine K

Si devono trovare le due rette di coeff. angolare $m=-2$ tangenti alla circonferenza perchè corrispondono al massimo e al minimo valore di K.



Tali rette si possono trovare attraverso

$\begin{cases} y=-2x+K \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ imponendo $\Delta=0$

$x^2+(-2x+K)^2=5 \qquad 5x^2-4Kx+(K^2-5)=0$

$\Delta=16K^2-20(K^2-5)=0 \quad 4K^2=100 \quad K^2=25 \quad K=\pm 5$

$K=5 \quad 5x^2-20x+20=0 \rightarrow x=2 \quad y=1$

$K=-5 \quad 5x^2+20x+20=0 \rightarrow x=-2 \quad y=-1$

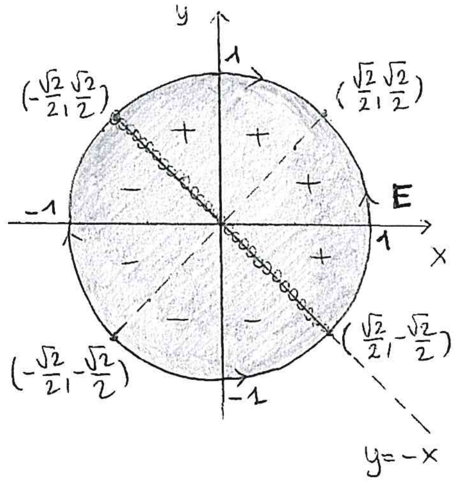
In alternativa si possono trovare prima i punti di tangenza con

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \leftarrow \text{retta per il CENTRO} \perp \text{al fascio di rette} \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ e poi i valori di K.

Si ottiene sempre il RISULTATO (*).

x)

- $f(x,y)=(x+y)^3$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$



→ E è il CERCHIO CHIUSO di $R=1$ e $C(0,0)$

→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (composizione di un polinomio di 1° grado in x,y con la funzione x^3)

E è CHIUSO e LIMITATO ($E\subset B_2(0,0)$)

⇒ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO il MASSIMO e il MINIMO ASSOLUTI di f su E.

→ ∂E $\quad \gamma\begin{cases} x=\cos t\\ y=\operatorname{sen} t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ $\quad g(t)=(\cos t+\operatorname{sen} t)^3$

$g'(t)=3(\cos t+\operatorname{sen} t)^2(-\operatorname{sen} t+\cos t)$ $\quad g'(t)=0 \iff \cos t+\operatorname{sen} t=0$ o $-\operatorname{sen} t+\cos t=0$

$\iff \operatorname{sen} t=-\cos t$ o $\operatorname{sen} t=\cos t \iff t=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$

$P_{in}=P_{fin}=(1,0)$ con $f(1,0)=1$

PUNTI : $\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$ $\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$

$f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)^3=(\sqrt2)^3=2\sqrt2$ $\quad f\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)=-2\sqrt2$

$f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)=0$

→ nessun punto di max o minimo locale interno a E

→ Conclusione : nessun p.to interno di max o min loc, sul bordo f è compresa tra $-2\sqrt2$ e $2\sqrt2$, allora

$$\min_E f(x,y)=-2\sqrt2=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right) \qquad \max_E f(x,y)=2\sqrt2=f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

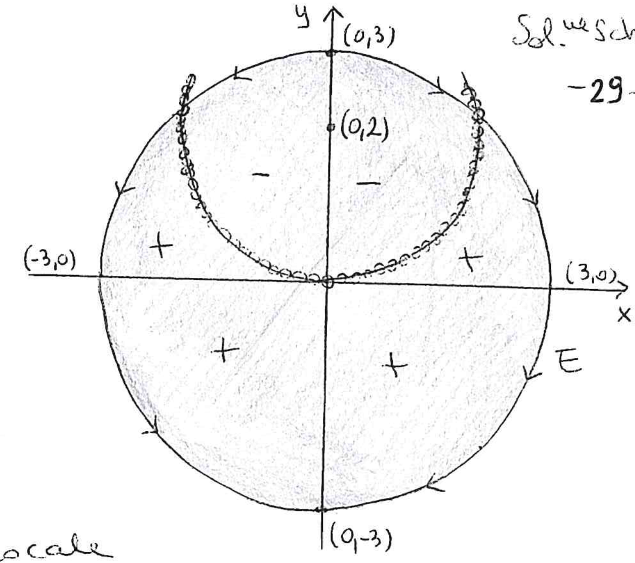
xi)

- $f(x,y)=x^2+y^2-4y$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9\}$

→ E è il CERCHIO CHIUSO di $C(0,0)$ $R=3$

→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (polinomio di 2° grado in x e y) ⇒ per il Teorema di E è CHIUSO e LIMITATO ($E\subset B_4(0,0)$) ⇒ per il Teorema di WEIERSTRAß ESISTONO IL MASSIMO E IL MINIMO ASSOLUTI di f su E

→ $(0,2)$ punto di minimo locale interno a E in cui $f(0,2)=-4$



→ ∂E $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$g(t) = 9\cos^2 t + 9\,\text{sen}^2 t - 12\,\text{sen}\,t$
$= 9(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)$
$= 9 - 12\,\text{sen}\,t$

$g'(t) = -12\cos t$ $\quad g'(t) = 0 \iff \cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2}$ $t = \frac{3}{2}\pi$

$P_{in} = P_{fin} = (3,0)$ con $f(3,0) = 9$

PUNTI $f(0,3) = -3$ $\quad f(0,-3) = 21$

→ Conclusione $(0,2)$ p.to di minimo locale interno con $f(0,2) = -4$, sul bordo f è compresa tra -3 e 21, allora

$$\min_E f(x,y) = -4 = f(0,2) \qquad \max_E f(x,y) = 21 = f(0,-3)$$

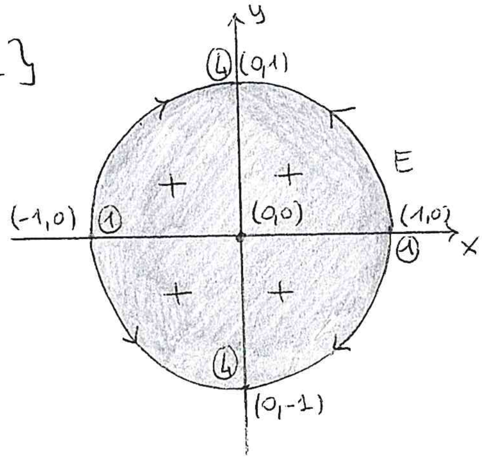
NO

OSS. Potete farlo anche con gli insiemi di livello,

$f(x,y) = x^2 + (y-2)^2 - 4$ il grafico è un PARABOLOIDE

$E_K \neq \emptyset$ $\forall K \geq -4$ $\quad E_K :\ x^2 + (y-2)^2 - 4 = K \quad x^2 + (y-2)^2 = K + 4 \geq 0$

circonf di $C(0,2)$ e $R = \sqrt{K+4}$, K aumenta allontanandosi dal C.



xii) • $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

→ E è il CERCHIO CHIUSO di $C(0,0)$ $R = 1$

→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (polinomio di 2° grado in x,y), E è CHIUSO e LIMITATO ($E \subset B_2(0,0)$) allora per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e IL MINIMO ASSOLUTI di f su E.

→ il punto $(0,0)$ è di minimo locale ed è interno a E, $f(0,0) = 0$

→ ∂E $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\quad g(t) = \cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t$ $\quad g'(t) = 6\,\text{sen}\,t \cos t$

$g'(t) = 0 \iff \text{sen}\,t \cdot \cos t = 0 \iff \text{sen}\,t = 0$ o $\cos t = 0$ $\quad t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

PUNTI $f(1,0) = 1$ $\quad f(0,1) = 4$ $\quad f(-1,0) = 1$ $\quad f(0,-1) = 4$

→ Conclusione: p.^{to} di min locale in $(0,0)$ con $f(0,0)=0$, sul bordo f è compresa tra 1 e 4, allora

(*) $\min_E f(x,y) = 0 = f(0,0)$ $\quad\max_E f(x,y) = 4 = f(0,1) = f(0,-1)$

NO

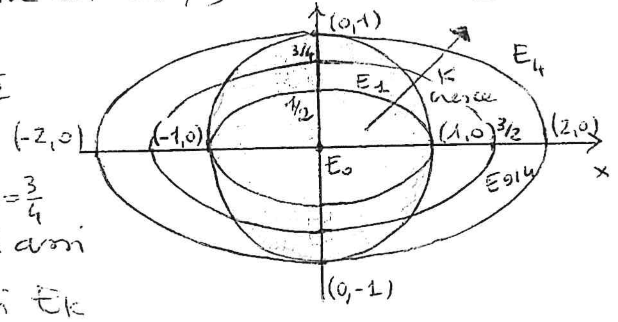
OSS. Si possono utilizzare gli insiemi di livello: $E_k \neq \emptyset$ se $k \geq 0$

E_k : $x^2+4y^2=k$ $\quad \frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k/4} = 1$ ellisse di $C(0,0)$ $a=\sqrt{k}$ $b=\frac{\sqrt{k}}{2}$

$E_0 = \{(0,0)\}$ $\quad E_1$ $x^2 + \frac{y^2}{1/4} = 1$ $a=1$ $b=\frac{1}{2}$

E_4 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ $a=2$ $b=1$ ecc.

$E_{9/4}$ $\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{9/16} = 1$ $a=\frac{3}{2}$ $b=\frac{3}{4}$



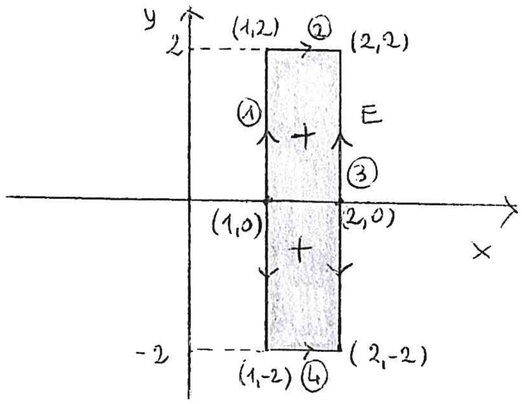
k aumenta all'aumentare dei semiassi dell'ellisse, E è coperto da tutti gli E_k con $0 \leq k \leq 4$, si riottiene il risultato (*).

xiii)

- $f(x,y) = x^2+4y^2$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$

→ E è un rettangolo CHIUSO

→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (è la stessa dell'esempio precedente), E è CHIUSO e LIMITATO ($E \subset B_3(0,0)$) ⇒ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e IL MINIMO ASSOLUTI di f su E



→ nessun punto di max o min locale interno a E

→ ∂E sul lato ① $\begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases}$ $t \in [-2,2]$ $\quad g_1(t) = 1+4t^2$ $\quad g_1'(t) = 8t$

$g_1'(t) = 0$ se $t=0$

PUNTI $f(1,-2)=17$ $\quad f(1,0)=1$ $\quad f(1,2)=17$

sul lato ② $\begin{cases} x=t \\ y=2 \end{cases}$ $t \in [1,2]$ $\quad g_2(t) = t^2+16$ $\quad g_2'(t) = 2t$ $\quad g'(t)=0$ se $t=0$

$(0,2) \notin E$

PUNTI $f(1,2)=17$ $\quad f(2,2)=20$

sul lato ③ $\begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases}$ $t \in [-2,2]$ $\quad g_3(t) = 4+4t^2$ $\quad g_3'(t) = 8t$ $\quad g'(t)=0$ se $t=0$

PUNTI $f(2,2)=20$ $\quad f(2,0)=4$ $\quad f(2,-2)=20$

sul lato ④ $\begin{cases} x=t \\ y=-2 \end{cases}$ $t\in[1,2]$ $g_4(t)=t^2+16$ $g_4'(t)=2t$ $g_4'=0$ $t=0$
$(0,-2)\notin E$

PUNTI $f(1,-2)=17$ $f(2,-2)=20$.

→ Conclusione: nessun punto stazionario interno a E, sul bordo f è compresa tra 1 e 20, allora

$$\min_E f(x,y)=1=f(1,0) \qquad \max_E f(x,y)=20=f(2,2)=f(2,-2)$$

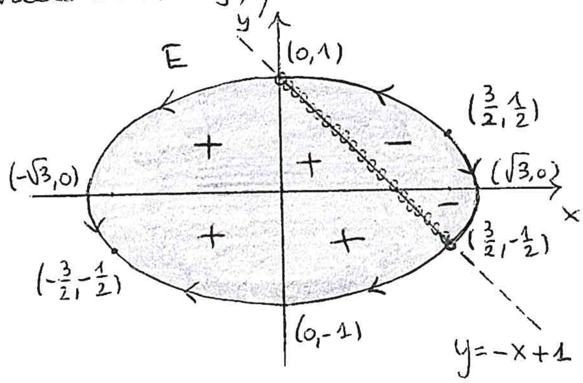
NO OSS. Provate a farlo con gli insiemi di livello, la funzione è la stessa dell'esempio precedente.

xiv) $f(x,y)=-x-y+1$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x^2}{3}+y^2\le 1\}$

→ E è l'ELLISSE (interno + BORDO) di $C(0,0)$ e $a=\sqrt{3}$, $b=1$

→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (polinomio di grado 1 in x e y), E è CHIUSO ($\partial E\subset E$) e LIMITATO ($E\subset B_2(0,0)$)

⇒ per il teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e IL MINIMO ASSOLUTI di f su E



→ nessun punto stazionario su $\mathbb{R}^2$

→ ∂E $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ $g(t)=-\sqrt{3}\cos t-\operatorname{sen} t+1$
$g'(t)=\sqrt{3}\operatorname{sen} t-\cos t$

$g'(t)=0 \iff \sqrt{3}\operatorname{sen} t-\cos t=0 \iff \underset{\cos t\neq 0}{\sqrt{3}\operatorname{sen} t=\cos t}$ $\tan t=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ se $t=\frac{\pi}{6}$ o $t=\frac{7}{6}\pi$

PUNTI: $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ $f(\frac{3}{2},\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1=-1$ $f(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})=3$

$(f(\sqrt{3},0)=-\sqrt{3}+1\simeq-0{,}73,\ f(0,1)=0,\ f(0,-1)=2,\ f(-\sqrt{3},0)=\sqrt{3}+1\simeq 2{,}73)$

→ Conclusione: nessun punto stazionario su $\mathbb{R}^2$, sul bordo f è compresa tra −1 e 3, allora

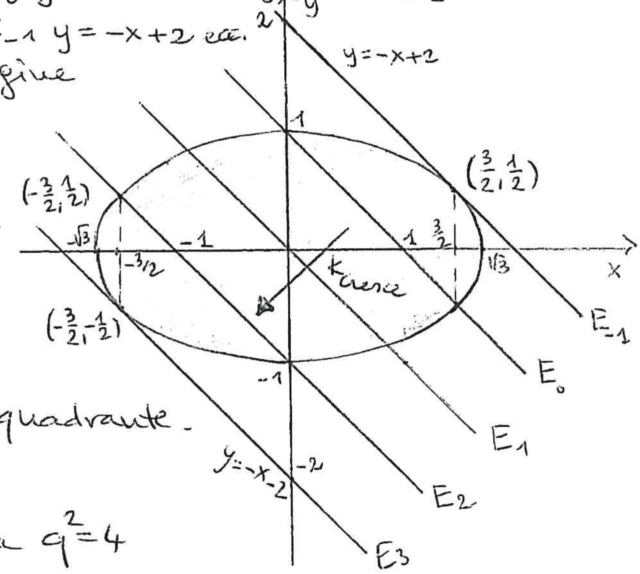
⊛ $$\min_E f(x,y)=-1=f(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}) \qquad \max_E f(x,y)=3=f(-\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2})$$

OSS. L'esercizio si svolge anche con gli insiemi di livello:

$E_k \neq \emptyset \ \forall k \in \mathbb{R}$ $\quad E_k: \ -x-y+1=k \quad y=-x+(1-k)$ rette // alla bisettrice $y=-x$ del 2° e 4° quadrante $E_0 \ y=-x+1 \quad E_1 = y=-x \quad E_2 \ y=-x-1$

$E_{-1} \ y=-x+2$ ecc.

k aumenta quando l'ordinata all'origine $q=1-k$ diminuisce.



Per il valore minimo dobbiamo trovare la retta $y=-x+(1-k)$ tangente all'ellisse nel 1° quadrante, mentre per il massimo quella tangente nel 4° quadrante.

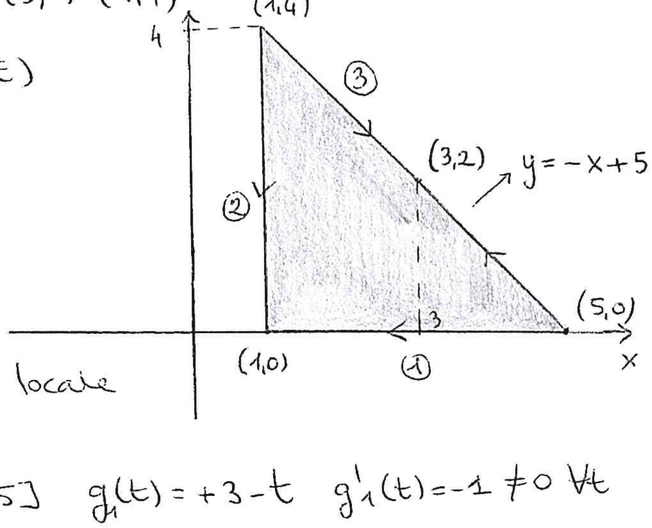
Nel sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3}+y^2=1 \\ y=-x+q \end{cases}$$ imponendo $\Delta=0$ si trova $q^2=4 \Rightarrow q=\pm 2$. Quindi si ottengono le rette $y=-x+2$ e $y=-x-2$ che corrispondono a $k=-1$ e $k=3$ rispettivamente. Poi si devono trovare anche i due punti di tangenza. Si riottiene il risultato (*).

XV)

- $f(x,y) = 3+xy-x-2y$ su $E=$ Triangolo CHIUSO di vertici $(1,0)$ $(5,0)$ $(1,4)$

→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (polinomio di grado 2 in x e y), E è CHIUSO ($\partial E \subset E$) e LIMITATO ($E \subset B_6(0,0)$) $\Rightarrow$ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e IL MINIMO ASSOLUTI di f su E



→ nessun punto di massimo o minimo locale interno a E

→ ∂E sul lato 1 $\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}$ $t\in[1,5]$ $\quad g_1(t)=+3-t \quad g_1'(t)=-1 \neq 0 \ \forall t$

PUNTI $f(1,0)=2 \quad f(5,0)=-2$

sul lato 2 $\begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases}$ $t\in[0,4]$ $\quad g_2(t)=2-t \quad g_2'(t)=-1\neq 0 \ \forall t$

PUNTI $f(1,0)=2 \quad f(1,4)=-2$

sul lato 3 $\begin{cases} x=t \\ y=-t+5 \end{cases}$ $t\in[1,5]$ $\quad g_3(t)=3+t(5-t)-t-2(5-t)=-t^2+6t-7$

$g_3'(t)=-2t+6 \quad g_3'(t)=0$ se $t=3$

PUNTI $f(1,4)=-2$ $f(3,2)=2$ $f(5,0)=-2$

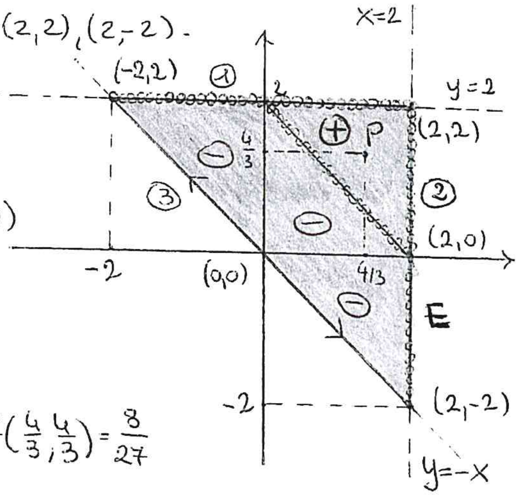
→ Conclusione nessun punto di minimo o massimo locale interno ad E, sul bordo f è compresa tra -2 e 2, allora

$$\min_E f(x,y)=-2=f(5,0)=f(1,4) \qquad \max_E f(x,y)=2=f(1,0)=f(3,2)$$

xvi)

• $f(x,y)=(2-x)(2-y)(x+y-2)$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\le 2,\ -x\le y\le 2\}$

→ E è il TRIANGOLO CHIUSO di vertici $(-2,2)$, $(2,2)$, $(2,-2)$.



→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (prodotto di 3 polinomi di grado 1 in x,y)

E è CHIUSO ($\partial E\subset E$) e LIMITATO ($E\subset B_3(0,0)$)

⇒ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e IL MINIMO ASSOLUTI di f su E

→ c'è un punto di MAX LOCALE interno a E $P(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ in cui $f(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{8}{27}$

→ ∂E sui lati ① e ② $f\equiv 0$ sul lato 3 $\gamma\begin{cases}x=t\\ y=-t\end{cases}$ $t\in[-2,2]$

$g(t)=(2-t)(2+t)(-2)=-2(4-t^2)=2t^2-8$ $g'(t)=4t$ $g'(t)=0 \iff t=0$

PUNTI : $f(-2,2)=0$ $f(0,0)=-8$ $f(2,-2)=0$

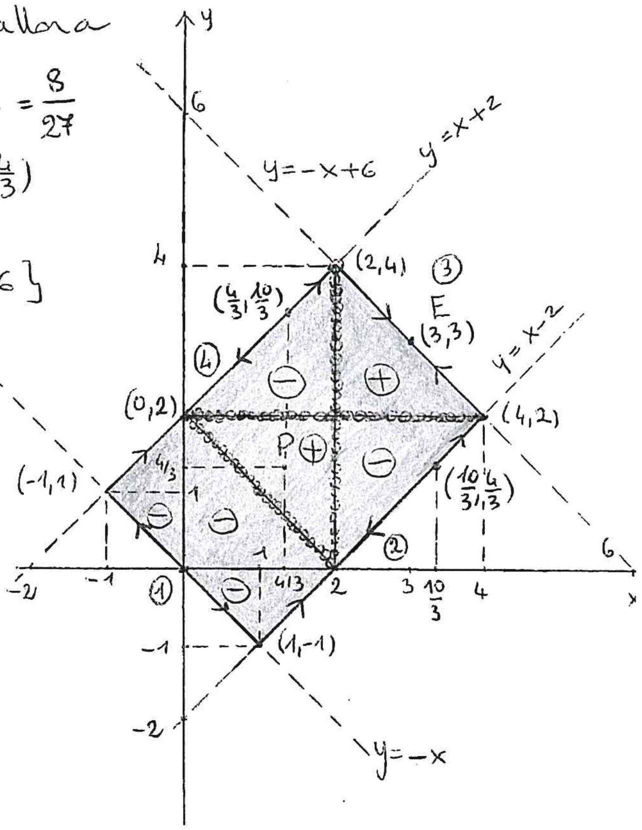
→ Conclusione p.to di max locale interno $P(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ con $f(P)=\frac{8}{27}$, sul bordo f è compresa tra -8 e 0, allora

$$\min_E f(x,y)=-8=f(0,0) \qquad \max_E f=\frac{8}{27}=f(\tfrac{4}{3},\tfrac{4}{3})$$

xvii)

• $f(x,y)=(2-x)(2-y)(x+y-2)$
su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x-2\le y\le x+2,\ -x\le y\le -x+6\}$

→ E è un RETTANGOLO CHIUSO di vertici $(2,4)$ $(4,2)$ $(-1,1)$ $(1,-1)$



→ f è continua su $\mathbb{R}^2$ (stessa funzione es. precedente) E è CHIUSO ($\partial E\subset E$) e LIMITATO ($E\subset B_5(0,0)$) ⇒ per il Teorema di Weierstraß ESISTONO IL MASSIMO e IL MINIMO LOCALE di f su E

→ punto di max locale interno $P=(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ con $f(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{8}{27}$

→ ∂E sul lato ① $\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$ $t\in[-1,1]$ $g_1(t)=2t^2-8$ $g_1'(t)=4t$

$g_1'(t)=0$ se $t=0$ PUNTI $f(-1,1)=-6$ $f(0,0)=-8$ $f(1,-1)=-6$

sul lato ② $\begin{cases} x=t \\ y=t-2 \end{cases}$ $t\in[1,4]$ $g_2(t)=\underbrace{(2-t)(4-t)}_{(t^2-6t+8)}(2t-4)$

$g_2(t)=2t^3-4t^2-12t^2+24t+16t-32=2t^3-16t^2+40t-32$

$g_2'(t)=6t^2-32t+40$ $g_2'(t)=0 \iff 3t^2-16t+20=0$ $t=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{3}=$

$=\frac{8\pm 2}{3}$ → $t_1=2$, $t_2=\frac{10}{3}$ PUNTI $f(1,-1)=-6$ $f(2,0)=0$ $f(\frac{10}{3},\frac{4}{3})=(2-\frac{10}{3})\cdot(2-\frac{4}{3})\cdot$

$\cdot(\frac{14}{3}-2)=-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{3}=-\frac{64}{27}\simeq -2{,}37$

$f(4,2)=0$

sul lato ③ $\begin{cases} x=t \\ y=-t+6 \end{cases}$ $t\in[2,4]$ $g_3(t)=\underbrace{(2-t)(t-4)}_{(-t^2+6t-8)}(4)=-4t^2+24t-32$

$g_3'(t)=-8t+24$ $g_3'(t)=0 \iff t=3$ PUNTI $f(4,2)=0$ $f(3,3)=4$ $f(2,4)=0$

sul lato ④ $\begin{cases} x=t \\ y=t+2 \end{cases}$ $t\in[-1,2]$ $g_4(t)=(2-t)(-t)(2t)=-2t^2(2-t)$

$g_4(t)=2t^3-4t^2$ $g_4'(t)=6t^2-8t$ $g_4'(t)=0 \iff t=0$ $t=4/3$

$2t(3t-4)=0$

PUNTI $f(-1,1)=-6$ $f(0,2)=0$ $f(\frac{4}{3},\frac{10}{3})=(2-\frac{4}{3})(2-\frac{10}{3})(\frac{14}{3}-2)=-\frac{64}{27}$

$f(2,4)=0$

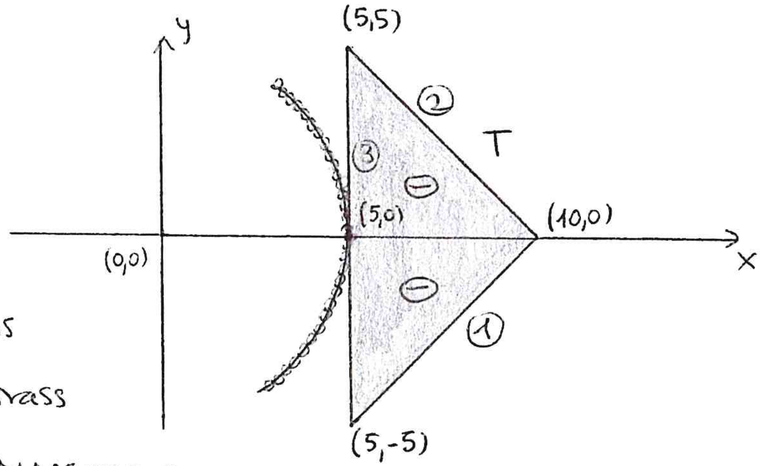
→ Conclusione un punto di max locale interno a E con $f(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{8}{27}$, sul bordo f è compresa tra -8 e 4, allora

$\min_E f(x,y)=-8=f(0,0)$ $\max_E f(x,y)=4=f(3,3)$

c) $g(x,y) = 6 - \frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2}$

1° passo T è il Triangolo CHIUSO (lati compresi) di vertici

$(5,5)\ (5,-5)\ (10,0)$



T è LIMITATO ($T \subset B_{11}(0,0)$: il punto più lontano da (0,0) è (10,0))

g è continua su $\mathbb{R}^2$ e quindi su T $\searrow$ già spiegato a pag 14-15

$\Rightarrow$ per il Teorema di Weierstrass siamo sicuri che g ammette MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI su T - Dallo studio del segno ci aspettiamo

$\max_T g = 0 = g(5,0)$ e $\min_T g < 0$.

2° passo: la funzione non ammette punti stazionari su $\mathbb{R}^2$ e il punto (0,0) in cui g non è differenziabile non è interno a T.

3° passo: ∂T lato ① $\gamma \begin{cases} x = t \\ y = t-10 \end{cases}$ $t \in [5,10]$ $g(t) = 6 - \frac{6}{5}\sqrt{t^2+(t-10)^2} =$

$= 6 - \frac{6}{5}\sqrt{2t^2-20t+100}$ g(t) è derivabile perchè l'argomento della radice $(2t^2-20t+100)$ è sempre >0 : infatti $\frac{\Delta}{4} = 100-200 < 0$

(in realtà $2t^2-20t+100 = 2(t^2-10t+50) = 2((t-5)^2+25) = 2(t-5)^2+50 \geq 50\ \forall t$)

$g'(t) = -\frac{6}{5} \frac{4t-20}{\underbrace{\sqrt{2t^2-20t+100}}_{\text{è sempre } \geq 5\sqrt{2}}}$ $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t-20 = 0$ $t = 5$

TEMPI $t=5$ $t=10$ PUNTI $(5,-5)$ $(10,0)$

VALORI $g(5,-5) = 6-6\sqrt{2} \simeq -2{,}49$ $g(10,0) = -6$

lato 2 $\begin{cases} x = t \\ y = -t+10 \end{cases}$ $t \in [5,10]$ $g(t) = 6 - \frac{6}{5}\sqrt{t^2+(-t+10)^2} = 6 - \frac{6}{5}\sqrt{2t^2-20t+100}$

come lato ① $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$

TEMPI $t=5$ $t=10$ PUNTI $(5,5)$ $(10,0)$

VALORI $g(5,5) = 6-6\sqrt{2} \simeq -2{,}49$ $g(10,0) = -6$.

lato ③ $\begin{cases} x=5 \\ y=t \end{cases}$ $t\in[-5,5]$ $g(t)=6-\frac{6}{5}\sqrt{25+t^2}$

$g(t)$ è derivabile in quanto $25+t^2\geq 25\ \forall t$ e $\sqrt{25+t^2}\geq 5\ \forall t$

$g'(t)=-\frac{6}{5}\frac{2t}{\sqrt{25+t^2}}$ $g'(t)=0 \iff 2t=0 \iff t=0$

TEMPI $t=-5$ $t=0$ $t=5$ PUNTI $(5,-5)$ $(5,0)$ $(5,5)$

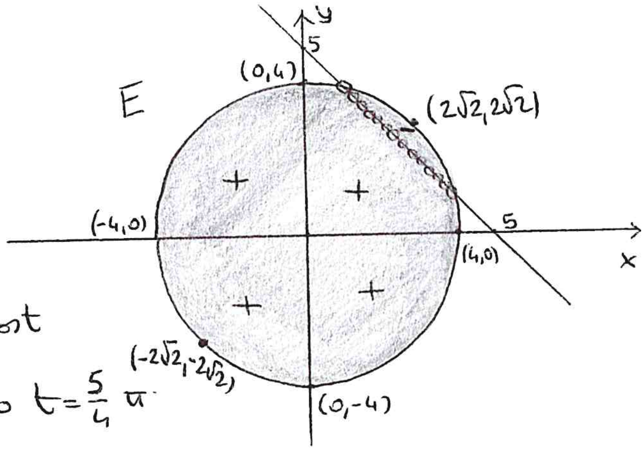
VALORI $g(5,-5)=6-6\sqrt{2}$ $g(5,0)=0$ $g(5,5)=6-6\sqrt{2}$.

4° passo conclusione Sul ∂T la funzione g è compresa tra -6 e 0

$\Rightarrow$ $\max\limits_{T} g=0=g(5,0)$ $\min\limits_{T} g=-6=g(10,0)$

d) $g(x,y)=5-x-y$ 1° passo E è il CERCHIO CHIUSO $C(0,0)$ e $R=4$

E è LIMITATO ($E\subset B_5(0,0)$), g è continua su $\mathbb{R}^2$ (e quindi su E) in quanto polinomio di 1° grado in x,y. Allora per il Teorema di Weierstraß siamo sicuri che ESISTONO il MASSIMO e il MINIMO ASSOLUTI di g su E.



2° passo: g non ammette punti stazionari su $\mathbb{R}^2$

3° passo: ∂E $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=4\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

$g(t)=5-4\cos t-4\operatorname{sen} t$ $g'(t)=4\operatorname{sen} t-4\cos t$

$g'(t)=0 \iff \operatorname{sen} t=\cos t \iff t=\frac{\pi}{4}$ o $t=\frac{5}{4}\pi$

TEMPI $t=0$ $t=\frac{\pi}{4}$ $t=\frac{5}{4}\pi$ $(t=2\pi)$

PUNTI $(4,0)$ $(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$ $(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$

VALORI $g(4,0)=1$ $g(2\sqrt{2},2\sqrt{2})=5-4\sqrt{2}\simeq -0,66$

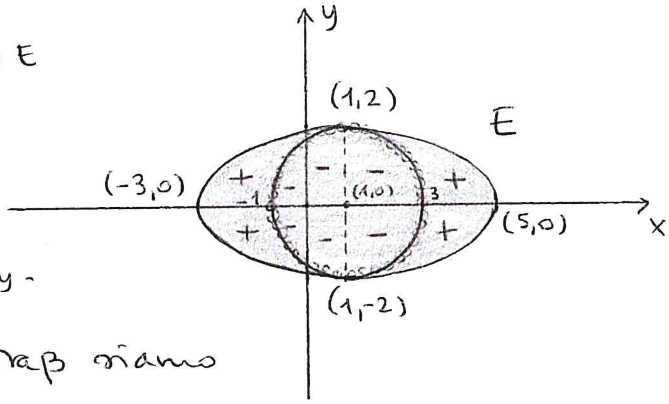
$g(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2})=5+4\sqrt{2}\simeq 10,66$.

4° passo Conclusione: sul ∂E g è compresa tra $5-4\sqrt{2}$ e $5+4\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $\min\limits_{E} g=5-4\sqrt{2}=g(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$ $\max\limits_{E} g=5+4\sqrt{2}=g(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$

e) $g(x,y) = x^2+y^2-2x-3$ 1° passo E è l'ELLISSE
$= (x-1)^2+y^2-4$
(interno + bordo $\Rightarrow$ CHIUSO) di $C(1,0)$ e semiassi $a=4$ $b=2$

E è limitato ($E \subset B_6(0,0)$: il punto di E più lontano da $(0,0)$ è $(5,0)$).
g è continua su $\mathbb{R}^2$ (e quindi su E) in quanto polinomio di 2° grado in x,y.
Allora per il Teorema di Weierstraß siamo sicuri che g ammette MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI su E.



2° passo: $(1,0)$ minimo locale interno a E con $g(1,0) = -4$

3° passo: ∂E $\begin{cases} x = 1+4\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$ $g(t) = 16\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t - 4 =$

$= 16\cos^2 t + 4(1-\cos^2 t) - 4 = 12\cos^2 t + 4$

$g'(t) = -24\,\text{sen}\,t\cos t$ $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,t \cdot \cos t = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,t = 0$ o $\cos t = 0$
$\Leftrightarrow t = 0$ o $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \pi$ o $t = \frac{3}{2}\pi$ o $t = 2\pi$

PUNTI $(5,0)$ $(1,2)$ $(-3,0)$ $(1,-2)$

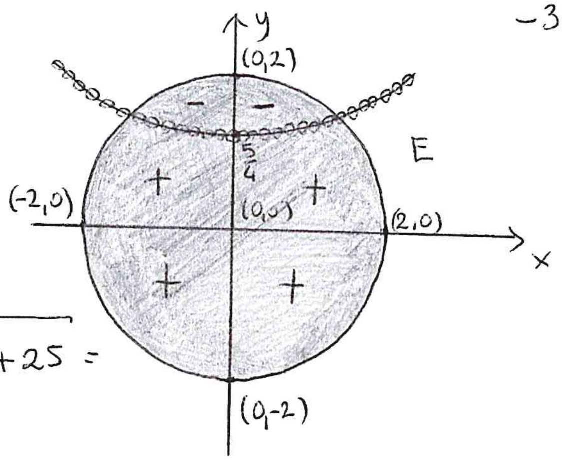
VALORI $g(5,0) = 12$ $g(1,2) = 0$ $g(-3,0) = 12$ $g(1,-2) = 0$

4° passo conclusione: nel minimo locale interno $g(1,0) = -4$, su ∂E g è compresa tra 0 e 12 $\Rightarrow$

$\min_E g = -4 = g(1,0)$ $\max_E g = 12 = g(5,0) = g(-3,0)$.

f) 1° passo E è il CERCHIO CHIUSO di $C(0,0)$ e $R=2$, E è limitato ($E \subset B_3(0,0)$), g è continua su $\mathbb{R}^2$ (composizione di un polinomio di 2° grado in x,y con $\sqrt{\ }$, poi moltiplicazione e somma con costanti) e quindi su E.
Allora per il Teorema di Weierstraß siamo sicuri che g ammette MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI su E.

2° passo g non ha punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ e il punto (0,5) in cui g non è differenziabile non è interno a E



3° passo : ∂E $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$g(t) = -3 + \frac{4}{5}\sqrt{\underbrace{4\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t}_{=4} - 20\operatorname{sen} t + 25} =$$
$$= -3 + \frac{4}{5}\sqrt{29 - 20\operatorname{sen} t}$$

g(t) è derivabile perchè $29 - 20\operatorname{sen} t \geq 9$ $\forall t$ ($\operatorname{sen} t \leq 1 \rightarrow -\operatorname{sen} t \geq -1$)

$$g'(t) = \frac{4}{5}\,\frac{-20\cos t}{\sqrt{29 - 20\operatorname{sen} t}} = -\frac{16\cos t}{\sqrt{\dots}} \qquad g'(t) = 0 \iff \cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} \text{ o } t = \frac{3}{2}\pi$$

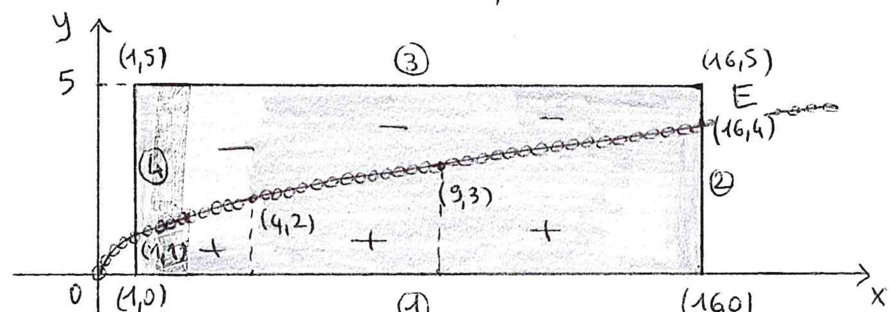
TEMPI $t = 0$ $t = \frac{\pi}{2}$ $t = \frac{3}{2}\pi$ PUNTI (2,0) (0,2) (0,-2)

VALORI $g(2,0) = -3 + \frac{4}{5}\sqrt{29} \simeq 1{,}31$ $g(0,2) = -3 + \frac{12}{5} = -\frac{3}{5} = -0{,}6$ $g(0,-2) = -3 + \frac{28}{5} = \frac{13}{5} = 2{,}6$

4° passo conclusione: sul ∂E g è compresa tra $-\frac{3}{5}$ e $\frac{13}{5}$ $\Rightarrow$ $\min_E g = -\frac{3}{5} = g(0,2)$ $\max_E g = \frac{13}{5} = g(0,-2)$.

$\rightarrow g(x,y) = \sqrt{x} - y$

g) 1° passo E è un RETTANGOLO CHIUSO (lati compresi), E è limitato (E ⊂ $B_{17}(0,0)$: il punto di E più lontano da (0,0) è (16,5) che dista $\sqrt{16^2 + 5^2} = \sqrt{281} \simeq 16{,}76$) g è continua sul suo dominio ($x \geq 0$) perchè differenza di funzioni continue. Allora per il Teorema di Weierstrass siamo sicuri che g ammette massimo e minimo assoluti su E.



2° passo: g non ha nessun punto stazionario

3° passo : ∂E ① $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $t \in [1, 16]$ $g(t) = \sqrt{t}$ g(t) è derivabile perchè $t \geq 1$, $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0$ $\forall t > 0$

quindi $g'(t)$ non si annulla mai

TEMPI $t=1$ $t=16$ PUNTI $(1,0)$ $(16,0)$

VALORI $g(1,0)=1$ $g(16,0)=4$

② $\begin{cases} x=16 \\ y=t \end{cases}$ $t\in[0,5]$ $g(t)=4-t$ $g'(t)=-1\neq 0$ $\forall t$

TEMPI $t=0$ $t=5$ PUNTI $(16,0)$ $(16,5)$

VALORI $g(16,0)=4$ $g(16,5)=-1$

③ $\begin{cases} x=t \\ y=5 \end{cases}$ $t\in[1,16]$ $g(t)=\sqrt{t}-5$ $g(t)$ è derivabile perchè $t\geq 1$

$g'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-5\neq 0$ $\forall t\geq 1$ perche $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\leq\dfrac{1}{2}$

oppure $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=5$ $2\sqrt{t}=\dfrac{1}{5}$ $\sqrt{t}=\dfrac{1}{10}$ $t=\dfrac{1}{100}$ non accettabile $\notin[1,16]$

TEMPI $t=1$ $t=16$ PUNTI $(1,5)$ $(16,5)$

VALORI $g(1,5)=-4$ $g(16,5)=-1$

④ $\begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases}$ $t\in[0,5]$ $g(t)=1-t$ $g'(t)=-1\neq 0$ $\forall t$

TEMPI $t=0$ $t=5$ PUNTI $(1,0)$ $(1,5)$

VALORI $g(1,0)=1$ $g(1,5)=-4$.

<u>4° passo</u> conclusione: sul ∂E g è compresa tra -4 e 4 $\Rightarrow$

$\min_E g(x,y)=-4=g(1,5)$ $\max_E g(x,y)=4=g(16,0)$.

ES. 5) MOLTIPLICATORI di LAGRANGE

a) Poichè la funzione si chiama $g(x,y)$ usiamo $v(x,y)$ per costruire il VINCOLO

$\nabla g(x,y) = (0,-2)$

$v(x,y) = (x-2)^2+(y+2)^2-1 \qquad \nabla v(x,y) = (2(x-2), 2(y+2))$

$$\begin{cases} 0 = 2(x-2)\lambda \\ -2 = 2(y+2)\lambda \\ (x-2)^2+(y+2)^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1^a \rightarrow x=2 \text{ o } \lambda=0 \\ \text{se } \boxed{x=2} \rightarrow 3^a \quad (y+2)^2=1 \quad y+2=\pm 1 \\ \qquad y=-2\pm 1 \swarrow y=-3 \quad \searrow y=-1 \end{cases}$$

2 P.ti $(2,-1)$ $(2,-3)$ corrispondenti a $\lambda=-1$ $\lambda=1$

(dalla 2^a $\lambda = -\dfrac{1}{y+2}$: $y=-1 \rightarrow \lambda=-1$, $y=-3 \rightarrow \lambda=1$)

se $\boxed{\lambda=0}$ la 2^a eq.^{ne} è IMPOSSIBILE. Allora abbiamo trovato gli stessi punti di pag. 18 $P_{in}=(3,-2)=P_{fin}$ $(2,-1)$ $(2,-3)$.

b) $\nabla g(x,y) = \left(-\frac{2}{3}(x-6), -\frac{2}{3}(y+6)\right)$

$v(x,y) = (x-3)^2+(y+3)^2-18 \qquad \nabla v(x,y) = (2(x-3), 2(y+3))$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}(x-6) = \lambda \cdot 2(x-3) \\ -\frac{2}{3}(y+6) = \lambda \cdot 2(y+3) \\ (x-3)^2+(y+3)^2=18 \end{cases}$$

ricaviamo x dalla 1^a e y dalla 2^a

1^a $6-x = 3\lambda(x-3)$ $(3\lambda+1)x = 6+9\lambda$

posso ricavare x a condizione che $\boxed{3\lambda+1\neq 0}$

$x = \dfrac{6+9\lambda}{1+3\lambda}$

2^a $-(y+6) = 3\lambda(y+3)$ $(3\lambda+1)y = -6-9\lambda$ $y = \dfrac{-6-9\lambda}{3\lambda+1}$ a cond che $\boxed{3\lambda+1\neq 0}$

Sostituiamo nella 3^a eq.^{ne} $\left(\dfrac{6+9\lambda}{1+3\lambda}-3\right)^2+\left(\dfrac{-6-9\lambda}{3\lambda+1}+3\right)^2=18$

$$\left(\frac{6+\cancel{9\lambda}-3-\cancel{9\lambda}}{1+3\lambda}\right)^2+\left(\frac{-6-\cancel{9\lambda}+\cancel{9\lambda}+3}{3\lambda+1}\right)^2=18$$

$$\frac{9}{(1+3\lambda)^2}+\frac{9}{(1+3\lambda)^2}=18 \qquad (1+3\lambda)^2=1$$

$$3\lambda+1=\pm 1 \qquad 3\lambda=-1\pm 1 \nearrow \lambda=0 \quad \searrow \lambda=-\frac{2}{3}$$

Troviamo 2 PUNTI : $(6,-6)$ con $\lambda=0$

$(0,0)$ con $\lambda=-\frac{2}{3}$

Se $\boxed{3\lambda+1=0}$ cioè $\lambda=-\frac{1}{3}$ la 1^a eq.^{ne} diventa $-\frac{2}{3}(x-6)=-\frac{2}{3}(x-3)$ che è IMPOSSIBILE $(4=2)$

Quindi troviamo gli stessi punti di pag. 19

$P_{in}=(3+3\sqrt{2},-3)=P_{fin}$ $(0,0)$ $(6,-6)$

i) $f(x,y) = (x-3)(1-y)(x+y-2)$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le 4, -x+2\le y\le 1\}$

sul lato 3 $\quad g(x,y)=x-4 \quad (g(x,y)=0 \Leftrightarrow x=4) \quad \nabla g(x,y)=(1,0)$

$\nabla f(x,y) = ((1-y)(2x+y-5), (x-3)(-x-2y+3))$

$$\begin{cases}(1-y)(2x+y-5)=\lambda\\(x-3)(-x-2y+3)=0\\x=4\end{cases}\quad \begin{cases}(1-y)(8+y-5)=\lambda\\(-2y-1)=0\\x=4\end{cases}\quad \begin{cases}x=4\\y=-\frac{1}{2}\\\lambda=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{4}\end{cases}$$

oltre agli estremi 1 solo punto $\boxed{(4,-\frac{1}{2})}$ corrispondente a $\lambda=\frac{15}{4}$

ii) $f(x,y)=(x-1)^2 y+(y-2)^2-4$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0, 0\le y\le -x+7\}$

Sul lato 2 $\quad g(x,y)=x \quad (g(x,y)=0 \Leftrightarrow x=0$ ance $y) \quad \nabla g(x,y)=(1,0)$

$\nabla f(x,y) = (2(x-1)y, (x-1)^2+2(y-2))$

$$\begin{cases}2(x-1)y=\lambda\\(x-1)^2+2(y-2)=0\\x=0\end{cases}\quad \begin{cases}x=0\\1+2y-4=0\\\dots\end{cases}\quad \begin{cases}x=0\\y=3/2\\\lambda=2(-1)\frac{3}{2}=-3\end{cases}$$

oltre agli estremi 1 solo punto $\boxed{(0,3/2)}$ corrispondente a $\lambda=-3$

sul lato 3 $\quad g(x,y)=x+y-7 \quad (g(x,y)=0 \Leftrightarrow y=-x+7)$

$\nabla g(x,y)=(1,1)$

$$\begin{cases}2(x-1)y=\lambda\\(x-1)^2+2(y-2)=\lambda\\y=-x+7\end{cases}$$

eliminando λ

$2(x-1)\cdot y=(x-1)^2+2(y-2)$

con $y=-x+7$

$2(x-1)(-x+7)=x^2-2x+1+2(\underbrace{-x+7-2}_{5})$

$-x^2+8x-7$

$3x^2-20x+25=0 \quad x_1=\frac{5}{3} \quad x_2=5 \quad \to y_1=\frac{16}{3} \quad y_2=2 \quad \to \lambda_1=\frac{64}{9} \quad \lambda_2=16$

oltre agli estremi 2 PUNTI $(\frac{5}{3},\frac{16}{3})$ corrispondente a $\lambda_1=\frac{64}{9}$ e $(5,2)$ corrispondente a $\lambda_2=16$

iii) $f(x,y)=x^2-y^2$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2\}$

$g(x,y)=x^2+y^2-2 \quad (g(x,y)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=2) \quad \nabla g(x,y)=(2x,2y)$

$\nabla f(x,y)=(2x,-2y)$

$$\begin{cases}2x=2\lambda x\\-2y=2\lambda y\\x^2+y^2=2\end{cases}\quad \begin{cases}2(1-\lambda)x=0\\2(1+\lambda)y=0\\x^2+y^2=2\end{cases}$$

$\to x=0$ o $\lambda=1$

se $x=0 \to 3^a \; y^2=2 \quad y=\pm\sqrt{2}$

nella $2^a \; \lambda=-1$

2 PUNTI $\boxed{(0,\pm\sqrt{2})}$ corrispondenti a $\lambda=-1$

Se $\lambda=1 \Rightarrow$ dalla 2^a $y=0 \to$ nella 3^a $x^2=2 \to x=\pm\sqrt{2}$

altri 2 PUNTI $(\pm\sqrt{2},0)$ corrispondenti a $\lambda=1$

iv) $f(x,y)=3(x+y)-x^2-y^2$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x-1)^2+(y-1)^2\le 2\}$

$g(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2-2 \qquad \nabla g(x,y)=(2(x-1),2(y-1))$

$\nabla f(x,y)=(3-2x,3-2y)$

$$\begin{cases} 3-2x=2\lambda(x-1)\\ 3-2y=2\lambda(y-1)\\ (x-1)^2+(y-1)^2=2\end{cases}$$

Sicuramente $x\neq1$ perchè se $x=1$ la 1^a eq.^{ne} diventa $1=0$ IMP

per lo stesso motivo $y\neq1$

Allora 1^a $2\lambda=\dfrac{3-2x}{x-1}$ 2^a $2\lambda=\dfrac{3-2y}{y-1}$

$\Rightarrow \dfrac{3-2x}{x-1}=\dfrac{3-2y}{y-1} \to (3-2x)(y-1)=(3-2y)(x-1)$ $3y-\cancel{2xy}-\cancel{3}+2x=$
$=3x-\cancel{2xy}-\cancel{3}+2y$

$\to \boxed{y=x}$

dalla 3^a eq.^{ne} otteniamo i punti $2(x-1)^2=2 \quad (x-1)^2=1 \quad x-1=\pm1$

$x=1\pm1 \to \quad x=0$ e $x=2$

2 PUNTI $\boxed{(0,0)}$ e $\boxed{(2,2)}$ corrispondenti a $\lambda_1=-\frac{3}{2}$ e $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ rispettivamente.

v) $f(x,y)=(x-2x^2)(y-2y^2)$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le1,\ 0\le y\le1\}$

sul lato 1 $\quad g(x,y)=x-1 \quad \nabla g(x,y)=(1,0)$

$\nabla f(x,y)=((1-4x)(y-2y^2),(x-2x^2)(1-4y))$

$$\begin{cases}(1-4x)(y-2y^2)=\lambda\\ (x-2x^2)(1-4y)=0 \xrightarrow[x=1]{2^a} (4y-1)=0 \to y=\frac{1}{4}\\ x=1\end{cases}$$

oltre agli estremi 1 solo PUNTO $\boxed{(1,\frac{1}{4})}$ corrispondente a $\lambda=-3\cdot(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})=-\frac{3}{8}$

sul lato 2 $\quad g(x,y)=y-1 \quad \nabla g(x,y)=(0,1)$

$$\begin{cases}(1-4x)(y-2y^2)=0 \xrightarrow[y=1]{1^a} 4x-1=0 \quad x=\frac{1}{4}\\ (x-2x^2)(1-4y)=\lambda\\ y=1\end{cases}$$

oltre agli estremi 1 solo PUNTO $(\frac{1}{4},1)$ corrispondente a $\lambda=(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})(-3)=-\frac{3}{8}$

vi) $f(x,y) = x^2(y+1) + \dfrac{(y-1)^2}{2}$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 \le 2\}$

$g(x,y) = 2x^2+y^2-2$ $\quad \nabla g(x,y) = (4x, 2y)$

$\nabla f(x,y) = (2x(y+1), x^2+(y-1))$

$$\begin{cases} 2x(y+1) = 4\lambda x \\ x^2+(y-1) = 2\lambda y \\ 2x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

$2x(y+1-2\lambda) = 0$ 1ª è verificata per $x=0$ o $\lambda = \frac{1}{2}(y+1)$

se $\boxed{x=0} \to 3^a$ $y^2 = 2$ $y = \pm\sqrt{2}$

2 PUNTI $\boxed{(0,\sqrt{2})}$ corrispondente a $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$

$(\sqrt{2}-1) = 2\lambda\sqrt{2}$ (2ª eq.^{ne})

$\boxed{(0,-\sqrt{2})}$ corrispondente a $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$

2ª eq.^{ne} $(-\sqrt{2}-1) = 2\lambda(-\sqrt{2})$

se $\lambda = \frac{1}{2}(y+1) \to$ 2ª eq.^{ne} $x^2+\cancel{y}-1 = 2\cdot\frac{1}{2}(y+1)\cdot y = (y+1)\cdot y = y^2+\cancel{y}$

$\to y^2 = x^2-1 \to$ nella 3ª eq.^{ne} $2x^2+x^2-1 = 2$ $\quad 3x^2 = 3$ $\quad x^2 = 1$ $\quad x = \pm 1$

altri 2 PUNTI $\boxed{(1,0)}$ corrispondente a $\lambda = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$

$\boxed{(-1,0)}$ " " $\lambda = \frac{1}{2}$

vii) $f(x,y) = x\cdot y$ su E = Triangolo chiuso di vertici $(0,0)$ $(2,0)$ $(-2,2)$

sul lato ① $\quad g(x,y) = x+y$ $\quad \nabla g(x,y) = (1,1)$ $\quad \nabla f(x,y) = (y,x)$

$$\begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ y = -x \end{cases}$$

$\to$ eliminando λ $y = x$ ma con la 3ª eq.^{ne} $y = -x$ il sistema risulta verificato solo per $x=y=0$

oltre agli estremi 1 SOLO PUNTO $\boxed{(0,0)}$ corrispondente a $\lambda = 0$

sul lato ② $\quad g(x,y) = y+\frac{1}{2}x-1$ $\quad \nabla g(x,y) = (\frac{1}{2}, 1)$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}\lambda \\ x = \lambda \\ y = -\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$$

$\to$ eliminando λ $y = \frac{1}{2}x$ nella 3ª eq.^{ne} $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x+1$ $\quad x=1$

1 SOLO PUNTO $\boxed{(1,\frac{1}{2})}$ corrispondente a $\lambda = 1$, oltre agli estremi.

viii) $f(x,y) = 2xy-y^2$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le x \le 1\}$

Sul lato ① $\quad g(x,y) = x-1$ $\quad \nabla g(x,y) = (1,0)$ $\quad \nabla f(x,y) = (2y, 2x-2y)$

$$\begin{cases} 2y = \lambda \\ 2x-2y = 0 \to y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

1 PUNTO $\boxed{(1,1)}$ corrispondente a $\lambda = 2$

oltre all'altro estremo $(1,-1)$

sul lato ② $g(x,y) = x - y^2$ $\nabla g(x,y) = (1, -2y)$

$$\begin{cases} 2y = \lambda \\ 2x - 2y = -2\lambda y \\ x = y^2 \end{cases}$$

dalla 1ª $\lambda = 2y$ → nella 2ª $2x - 2y = -4y^2$

dalla 3ª $x = y^2$ → $2y^2 - 2y = -4y^2$

$6y^2 - 2y = 0$ $2y(3y-1) = 0$ $y = 0$ e $y = \frac{1}{3}$

2 PUNTI $\boxed{(0,0)}$ corrispondente a $\lambda = 0$

$\boxed{\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)}$ corrispondente a $\lambda = \frac{2}{3}$ oltre agli estremi.

ix)

- $f(x,y) = 2x + y$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 5$ $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ $\nabla f(x,y) = (2,1)$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda \\ 2y = \lambda \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$\}$ $2x = 4y$ $x = 2y$ nella 3ª $4y^2 + y^2 = 5$ $y^2 = 1$ $y = \pm 1$

2 PUNTI $\boxed{(2,1)}$ corrispondente a $\lambda = 2$

$\boxed{(-2,-1)}$ corrispondente a $\lambda = -2$

x)

- $f(x,y) = (x+y)^3$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ $\nabla f(x,y) = (3(x+y)^2, 3(x+y)^2)$

$$\begin{cases} 3(x+y)^2 = 2\lambda x \\ 3(x+y)^2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\}$ $2\lambda x = 2\lambda y$ → $2\lambda(y-x) = 0$ verificata per $\lambda = 0$ e $y = x$

se $\lambda = 0$ $3(x+y)^2 = 0$ → $y = -x$ nella 3ª $2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 PUNTI $\boxed{\begin{matrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{matrix}}$ corrispondenti a $\lambda = 0$

se $y = x$ ⇒ 3ª $2x^2 = 1$ $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ altri 2 PUNTI

$\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ corrispondente a $\lambda = 3\sqrt{2}$

$\left(2\lambda \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot 2 = 6 \quad \lambda = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\right)$

$\boxed{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ corrispondente a $\lambda = -3\sqrt{2}$

xi)

- $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$ $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y - 4)$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y-4 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases}$$

$\to$ 1ª $2x(1-\lambda)=0$ vera se $x=0$ e $\lambda=1$

se $x=0$ dalla 3ª $y^2=9$ $y=\pm 3$

2 PUNTI $\boxed{(0,3)}$ corrispondente a $\lambda=\frac{1}{3}$

$6-4=2\lambda\cdot 3$ $\lambda=\frac{1}{3}$

$\boxed{(0,-3)}$ corrispondente a $\lambda=5/3$

$(-6-4=2\lambda\cdot(-3))$

se $\lambda=1 \to$ 2ª non è MAI VERIFICATA $(-4=0) \Rightarrow$ non ci sono altri punti.

xii)

• $f(x,y)=x^2+4y^2$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$

$g(x,y)=x^2+y^2-1$ $\nabla g(x,y)=(2x,2y)$ $\nabla f(x,y)=(2x,8y)$

$$\begin{cases} 2x=2\lambda x \\ 8y=2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\to 2x(1-\lambda)=0$ $x=0$ o $\lambda=1$

se $x=0 \to y^2=1$ $y=\pm 1$

2 PUNTI $\boxed{(0,1)}$ $\boxed{(0,-1)}$ corrispondenti a $\lambda=4$

$(8\cancel{y}=2\lambda \cancel{y} \to \lambda=4)$

se $\lambda=1 \to$ 2ª $8y=2y \to y=0 \to$ 3ª $x^2=1$ $x=\pm 1$

altri 2 PUNTI $\boxed{(\pm 1,0)}$ corrispondenti a $\lambda=1$

xiii)

• $f(x,y)=x^2+4y^2$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2, -2\le y\le 2\}$

sul lato ① $g(x,y)=x-1$ $\nabla g(x,y)=(1,0)$ $\nabla f(x,y)=(2x,8y)$

$$\begin{cases} 2x=\lambda \\ 8y=0 \to y=0 \\ x=1 \to x=1 \end{cases}$$

oltre agli estremi

1 SOLO PUNTO $\boxed{(1,0)}$ corrispondente a $\lambda=2$

sul lato ② $g(x,y)=y-2$ $\nabla g(x,y)=(0,1)$

$$\begin{cases} 2x=0 \to x=0 \\ 8y=\lambda \\ y=2 \to y=2 \end{cases}$$

oltre agli estremi

1 solo PUNTO $\boxed{(0,2)}$ corrispondente a $\lambda=16$

che però $\boxed{\notin E}$

sul lato ③ $g(x,y)=x-2$ $\nabla g(x,y)=(1,0)$

$$\begin{cases} 2x=\lambda \\ 8y=0 \to y=0 \\ x=2 \end{cases}$$

oltre agli estremi

1 Solo PUNTO $\boxed{(2,0)}$ corrispondente a $\lambda=4$

sul lato ④ $g(x,y)=y+2$ $\nabla g(x,y)=(0,1)$

$$\begin{cases} 2x=0 \to x=0 \\ 8y=\lambda \\ y=-2 \end{cases}$$

1 solo PUNTO $\boxed{(0,-2)}$ corrispondente a $\lambda=-16$

che però $\notin E$, allora solo i due estremi.

xiv)

- $f(x,y) = -x-y+1$ su $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3}+y^2 \le 1\}$

$g(x,y) = \frac{x^2}{3}+y^2-1$ $\nabla g(x,y) = (\frac{2}{3}x, 2y)$ $\nabla f(x,y) = (-1,-1)$

$$\begin{cases} -1 = \frac{2}{3}\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ \frac{x^2}{3}+y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix}\lambda \ne 0 \\ x \ne 0\end{matrix} \quad \lambda = -\frac{3}{2x} \rightarrow 2^a \quad -1 = 2\cdot\left(-\frac{3}{2x}\cdot y\right) \quad 3\frac{y}{x} = 1$$

$\xleftarrow{x\ne 0}$ $\boxed{y = \frac{x}{3}}$

nella 3^a $\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{9} = 1$ $\frac{4}{9}x^2 = 1$ $x^2 = \frac{9}{4}$ $x = \pm\frac{3}{2}$

2 PUNTI $\boxed{\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}$ corrispondente a $\lambda = -1$

$\boxed{\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)}$ corrispondente a $\lambda = 1$

xv)

- $f(x,y) = 3+xy-x-2y$ su E = Triangolo CHIUSO di VERTICI $(1,0)\,(5,0)\,(1,4)$

sul lato ① $g(x,y) = y$ $\nabla g(x,y) = (0,1)$ $\nabla f(x,y) = (y-1, x-2)$

$$\begin{cases} y-1 = 0 \\ x-2 = \lambda \\ y = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ impossibile, nessuna sol.^{ne} $\Rightarrow$ solo gli estremi

sul lato ② $g(x,y) = x-1$ $\nabla g(x,y) = (1,0)$

$$\begin{cases} y-1 = \lambda \\ x-2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ impossibile, nessuna sol.^{ne} $\Rightarrow$ solo gli estremi

sul lato ③ $g(x,y) = x+y-5$ $\nabla g(x,y) = (1,1)$

$$\begin{cases} y-1 = \lambda \\ x-2 = \lambda \\ y = -x+5 \end{cases} \quad y-1 = x-2 \quad y = x-1 \rightarrow 3^a \quad x-1 = -x+5 \rightarrow x = 3$$

1 PUNTO $\boxed{(3,2)}$ corrispondente a $\lambda = 1$, oltre agli estremi.

xvi)

- $f(x,y) = (2-x)(2-y)(x+y-2)$ su $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le 2, -x\le y\le 2\}$

sul lato ③ $g(x,y) = x+y$ $\nabla g(x,y) = (1,1)$

$\nabla f(x,y) = \left((2-y)(-2x-y+4), (2-x)(-x-2y+4)\right)$

$$\left.\begin{cases} (2-y)(-2x-y+4) = \lambda \\ (2-x)(-x-2y+4) = \lambda \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{eliminando } \lambda} (2-y)(-2x-y+4) = (2-x)(-x-2y+4)$$

$\cancel{-4x}+\cancel{2xy}-2y+y^2\cancel{+8}\cancel{-4y} = -2x+x^2\cancel{-4y}+\cancel{2xy}\cancel{+8}\cancel{-4x}$

$y = -x$ $\rightarrow y^2-2y+2x-x^2 = 0$ con 3^a $y = -x$

si ottiene $\cancel{x^2}+2x+2x-\cancel{x^2} = 0$ $4x = 0$ P.^{to} $\boxed{(0,0)}$ corrispondente a $\lambda = 8$

xvii) • $f(x,y) = (2-x)(2-y)(x+y-2)$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2 \le y \le x+2,\ -x \le y \le -x+6\}$

sul lato ① $\quad g(x,y) = x+y \quad \nabla g(x,y) = (1,1)$

come esercizio precedente solo $\boxed{(0,0)}$ corrispondente a $\lambda = 8$, oltre agli estremi.

sul lato ② $\quad g(x,y) = x-y-2 \quad \nabla g(x,y) = (1,-1)$

$$\begin{cases} (2-y)(-2x-y+4) = \lambda \\ (2-x)(-x-2y+4) = -\lambda \\ y = x-2 \end{cases}$$

eliminando λ $\rightarrow (2-y)(-2x-y+4) = -(2-x)(-x-2y+4)$

con $y = x-2$ $\quad (4-x)(-3x+6) = (x-2)(-3x+8)$

$3x^2 - 18x + 24 = -3x^2 + 14x - 16$

$6x^2 - 32x + 40 = 0 \quad 3x^2 - 16x + 20 = 0 \quad x_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{3} = \dfrac{8 \pm 2}{3}$ $\nearrow x_1 = 2$, $\searrow x_2 = \frac{10}{3}$

oltre agli estremi

2 PUNTI $\boxed{(2,0)}$ corrispondente a $\lambda = 0$

$\boxed{\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)}$ corrispondente a $\lambda = (2-\frac{4}{3})(-\frac{20}{3} - \frac{4}{3} + 4) = \frac{2}{3} \cdot (-4) = -\frac{8}{3}$

sul lato ③ $\quad g(x,y) = x+y-6 \quad \nabla g(x,y) = (1,1)$

$$\begin{cases} (2-y)(-2x-y+4) = \lambda \\ (2-x)(-x-2y+4) = \lambda \\ y = -x+6 \end{cases}$$

eliminando λ $\rightarrow (2-y)(-2x-y+4) = (2-x)(-x-2y+4)$

con $y = -x+6$ $\quad (x-4)(-x-2) = (2-x)(x-8)$

3a

$\cancel{-x^2} + 4x - 2x + 8 = 2x \cancel{-x^2} - 16 + 8x$

$-8x + 24 = 0 \quad x = 3$

oltre agli estremi

1 PUNTO $\boxed{(3,3)}$ corrispondente a $\lambda = 5$

sul lato ④ $\quad g(x,y) = x-y+2 \quad \nabla g(x,y) = (1,-1)$

$$\begin{cases} (2-y)(-2x-y+4) = \lambda \\ (2-x)(-x-2y+4) = -\lambda \\ y = x+2 \end{cases}$$

eliminando λ $\rightarrow (2-y)(-2x-y+4) = -(2-x)(-x-2y+4)$

con $y = x+2$ $\quad (-x)(-3x+2) = (x-2)(-3x)$

$3x^2 - 2x = -3x^2 + 6x \quad 6x^2 - 8x = 0$

$2x(3x-4) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4}{3}$

oltre agli estremi

2 PUNTI $\boxed{(0,2)}$ corrispondente a $\lambda = 0$

$\boxed{\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)}$ corrispondente a $\lambda = (-\frac{4}{3})(-\frac{8}{3} - \frac{10}{3} + 4) = -\frac{4}{3} \cdot (-2) = \frac{8}{3}$

c) $\nabla g(x,y) = \left(-\frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{6}{5}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

① $v(x,y) = y - x + 10 \qquad \nabla v(x,y) = (-1,1)$

$$\begin{cases} -\frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\lambda \\ -\frac{6}{5}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \\ y = x - 10 \end{cases}$$

eliminando λ $\quad \frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{6}{5}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

semplificando per $\frac{6}{5}$ e per $\sqrt{x^2+y^2}$ che è $\neq 0$ in ogni punto del lato ①

otteniamo $y = -x$

nella 3ª $\quad -x = x - 10 \quad 2x = 10 \quad x = 5 \quad \Rightarrow$ solo gli estremi $(5,-5)$ e $(10,0)$

② $v(x,y) = y + x - 10 \qquad \nabla v(x,y) = (1,1)$

$$\begin{cases} -\frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \\ -\frac{6}{5}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \\ y = -x + 10 \end{cases}$$

eliminando λ e procedendo come lato ①

otteniamo $y = x$

nella 3ª $\quad x = -x + 10 \quad x = 5$

di nuovo gli estremi $(5,5)$ e $(10,0)$

③ $v(x,y) = x - 5 \qquad \nabla v(x,y) = (1,0)$

$$\begin{cases} -\frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \\ -\frac{6}{5}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ x = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3^a \ x = 5 \\ 2^a \ y = 0 \\ 1^a \ \lambda = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

oltre agli estremi 1 P.TO $(5,0)$ corrisp. a $\lambda = -\frac{6}{5}$

d) $\nabla g(x,y) = (-1,-1) \qquad v(x,y) = x^2 + y^2 - 16 \qquad \nabla v(x,y) = (2x, 2y)$

$$\begin{cases} -1 = 2\lambda x \rightarrow \lambda \neq 0 \ x \neq 0 \\ -1 = 2\lambda y \rightarrow \lambda \neq 0 \ y \neq 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

ricavo $\lambda = -\frac{1}{2x}$, $\lambda = -\frac{1}{2y}$ $\rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \rightarrow y = x$

nella 3ª $\quad 2x^2 = 16 \quad x^2 = 8 \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

2 PUNTI $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ e $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ corrispondenti a

$$\lambda = -\frac{1}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \quad e \quad \lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

e) $\nabla g(x,y) = (2(x-1), 2y) \qquad v(x,y) = \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1$

$\nabla v(x,y) = \left(\frac{1}{8}(x-1), \frac{1}{2}y \right)$

$$\begin{cases} 2(x-1) = \frac{1}{8}\lambda(x-1) \\ 2y = \frac{1}{2}\lambda y \\ \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1^a \ (x-1)(2-\frac{1}{8}\lambda) = 0 \iff (*) \\ 2^a \ y(2-\frac{1}{2}\lambda) = 0 \iff y=0 \ \text{o} \ \lambda = 4 \end{cases}$$

(*) $x=1$ o $\lambda=16$ se $\boxed{x=1}$ nella 3^a $y^2=4$ $y=\pm 2$

2 p.ti $\boxed{(1,2)}$ $\boxed{(1,-2)}$ corrispondenti a $\lambda=4$ (ovvio perché se $y\neq 0$ deve essere $\lambda=4$)
(dalla 2^a $\frac{1}{2}\lambda \cdot 2 = 4$ e $\frac{1}{2}\lambda(-2) = -4$)

se $\boxed{\lambda=16}$ nella 2^a $y=0$ $\to$ nella 3^a $(x-1)^2=16$ $x-1=\pm 4$

$x = 1 \pm 4$ $\nearrow x=-3$, $\searrow x=5$ 2 p.ti $(-3,0)$ $(5,0)$ con $\lambda=16$.

f) $\nabla g(x,y) = \left(\frac{4}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-5)^2}}, \frac{4}{5}\frac{(y-5)}{\sqrt{x^2+(y-5)^2}} \right)$

$v(x,y) = x^2+y^2-4$ $\nabla v(x,y) = (2x, 2y)$

$$\begin{cases} \frac{4}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-5)^2}} = 2\lambda x \\ \frac{4}{5}\frac{y-5}{\sqrt{x^2+(y-5)^2}} = 2\lambda y \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1^a \ 2x\left(\frac{2}{5\sqrt{x^2+(y-5)^2}} - \lambda\right) = 0 \iff \end{cases}$$

$x=0$ o $\lambda = \frac{2}{5\sqrt{x^2+(y-5)^2}}$

Se $\boxed{x=0}$ $\to$ nella 3^a $y^2=4$ $y=\pm 2$ 2 p.ti $(0,2)$ $(0,-2)$ corrispond. a $\lambda = -\frac{1}{5}$ $\lambda=\frac{1}{5}$

2^aeq.^{ne} $2\lambda \cdot 2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{-3}{3} = -\frac{4}{5} \to \lambda = -\frac{1}{5}$

$2\lambda(-2) = \frac{4}{5}\cdot\frac{-7}{7} = -\frac{4}{5} \to \lambda = \frac{1}{5}$

Se $\boxed{\lambda = \frac{2}{5\sqrt{x^2+(y-5)^2}}}$

nella 2^a $\frac{4}{5}\frac{y-5}{\sqrt{x^2+(y-5)^2}} = \frac{4y}{5\sqrt{x^2+(y-5)^2}}$ semplificando per $\frac{4}{5}$ e per

$\sqrt{x^2+(y-5)^2} \neq 0$ su $x^2+y^2=4$ $\left(\sqrt{x^2+(y-5)^2} = 0 \iff (x=0, y=5) \right)$

otteniamo $y-5=y$ che è IMPOSSIBILE.

g) $\nabla g(x,y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, -1\right)$

① $\varphi(x,y) = y \quad \nabla\varphi(x,y) = (0,1)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \longrightarrow \text{IMPOSSIBILE } (x \in [1,16]) \Rightarrow \text{solo gli estremi} \\ -1 = \lambda \\ y = 0 \end{cases}$$

② $\varphi(x,y) = x - 16 \quad \nabla\varphi(x,y) = (1,0)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lambda \\ -1 = 0 \longrightarrow \text{IMPOSSIBILE} \Rightarrow \text{solo gli estremi} \\ x = 16 \end{cases}$$

③ $\varphi(x,y) = y - 5 \quad \nabla\varphi(x,y) = (0,1)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \text{IMPOSSIBILE} \Rightarrow \text{solo gli estremi} \\ -1 = \lambda \\ y = 5 \end{cases}$$

④ $\varphi(x,y) = x - 1 \quad \nabla\varphi(x,y) = (1,0)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lambda \\ -1 = 0 \rightarrow \text{IMPOSSIBILE} \Rightarrow \text{solo gli estremi} \\ x = 1 \end{cases}$$