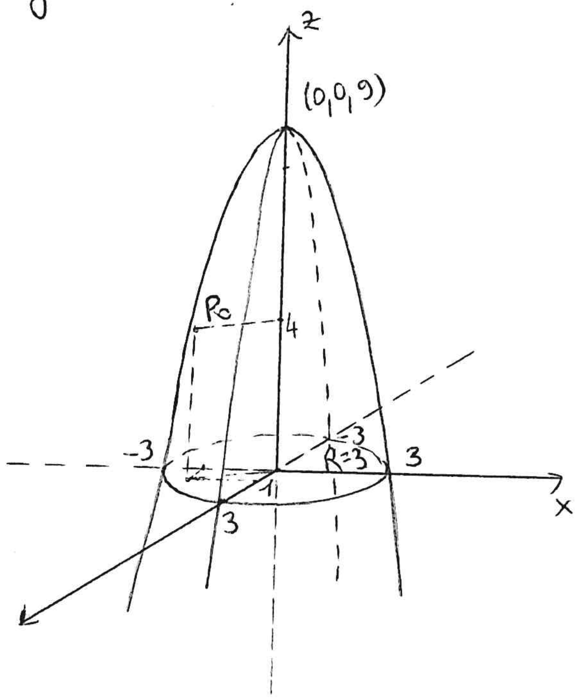
Sol.^{ne} Scheda N.7

ES1) $g(x,y) = 9 - (x^2+y^2)$

a) $\text{dom} g = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni) eq.^{ne} grafico $z = 9 - (x^2+y^2)$

b) $z = 9 - (x^2+y^2)$ è un paraboloide circolare di $V(0,0,9)$ rivolto verso il basso, $a=1$ (è il paraboloide di base $z = x^2+y^2$ capovolto e alzato di 9). $\cap z=0$ su $x^2+y^2=9$ $R=3$



c) $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, y_0, 4)$ con $y_0 < 0$

$P_0 \in \text{graf}\, g \rightarrow 4 = 9 - (1 + y_0^2)$

$y_0^2 = 4 \quad y_0 = \pm 2 \underset{y_0<0}{\rightarrow} y_0 = -2$

$P_0 = (1, -2, 4)$

$z_0 = 4$

$\nabla g(x,y) = (-2x, -2y) \quad \nabla g(1,-2) = (-2, 4)$

$\nabla g(1,-2) = -2\vec{i} + 4\vec{j}$

eq.^{ne} Piano tangente $z = 4 - 2(x-1) + 4(y+2)$ $\quad z = -2x + 4y + 14$

d) se $r \perp \text{graf}\, g \Rightarrow r$ ha come vettore direttore il vettore NORMALE al piano tangente

piano tang $\quad 2x - 4y + z - 14 = 0 \quad \vec{N} = (2, -4, 1) \Rightarrow \vec{v}_r = (2, -4, 1)$

$$r \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 4t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + t \end{cases}$$

e) sostituendo le coordinate di Po nell'eq.^{ne} della retta otteniamo $\begin{cases} -2 = -2 \cdot 1 \text{ OK} \\ 4 = 1 + 3 \text{ OK} \end{cases}$ sono verificate $\Rightarrow P_0 \in S$

cerchiamo un vettore direttore di s per controllare se $s \parallel r$:

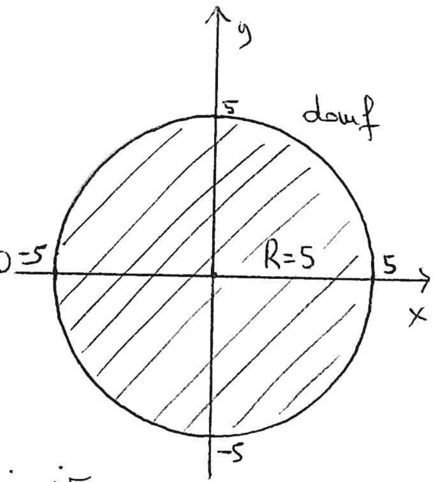
$P_1 = (-2, 4, 1)$ $\vec{v}_s = P_1 - P_0 = (-3, 6, -3)$ $\vec{v}_s$ e $\vec{v}_r$ sono lin. indip.

$x = -2$

(*) quindi le due rette <u>NON SONO parallele</u> e pertanto

s NON è perpendicolare al graf g in P_0.

(*) $-\frac{2}{3}\vec{v}_s = (2, -4, 2) \neq \vec{v}_r = (2, -4, 1)$



2) $f(x,y) = 3 + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

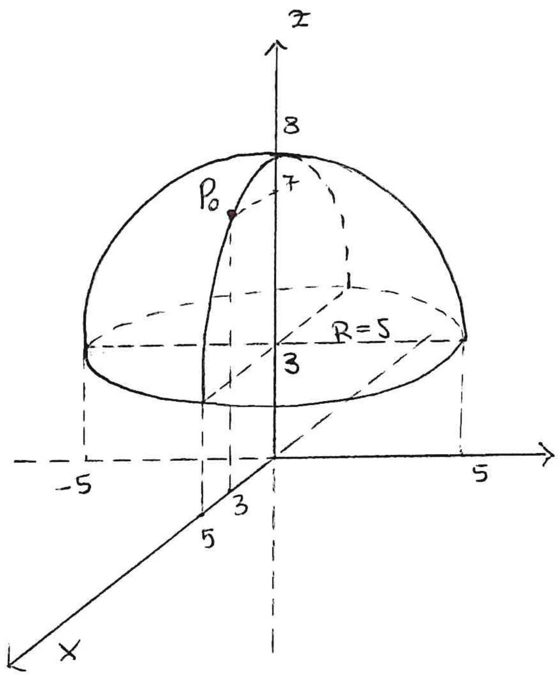
a) $\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 25\}$ = CERCHIO CHIUSO (interno + bordo) di $C(0,0)$ $R = 5$

eq.^ne del grafico $z = 3 + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

b) si tratta della metà superiore della SUPERFICIE SFERICA di $C(0,0,3)$ e $R = 5$, $z_{cima} = 8$, $\cap z = 0$ ϕ

c) $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $y_0 = 0$ $x_0 > 0$

se $(x_0, y_0) \in E_7 \Rightarrow z_0 = 7$



$P_0 = (x_0, 0, 7)$

nell'eq.^ne $7 = 3 + \sqrt{25 - x_0^2}$

$\sqrt{25 - x_0^2} = 4$ $25 - x_0^2 = 16$ $x_0^2 = 9$

$x_0 = \pm 3 \to x_0 = 3$ ($x_0 > 0$)

$P_0 = (3, 0, 7)$

$z_0 = 7$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \right)$$

$\nabla f(3,0) = \left(-\frac{3}{4}, 0\right) = -\frac{3}{4}\vec{i}$ eq.^ne Piano Tan $z = 7 - \frac{3}{4}(x-3) + 0(y-0)$

$z = -\frac{3}{4}x + \frac{37}{4}$

piano inclinato per $(0, 0, \frac{37}{4})$ ($= 9,25$) e $(\frac{37}{3}, 0, 0)$ ($\approx 12,3$), $\cap$ asse y ϕ con la caratteristica di essere indip. da y (quindi si ottiene dalla retta $z = -\frac{3}{4}x + \frac{37}{4}$ nel piano (x, z) trascinata nella direzione dell'asse y.

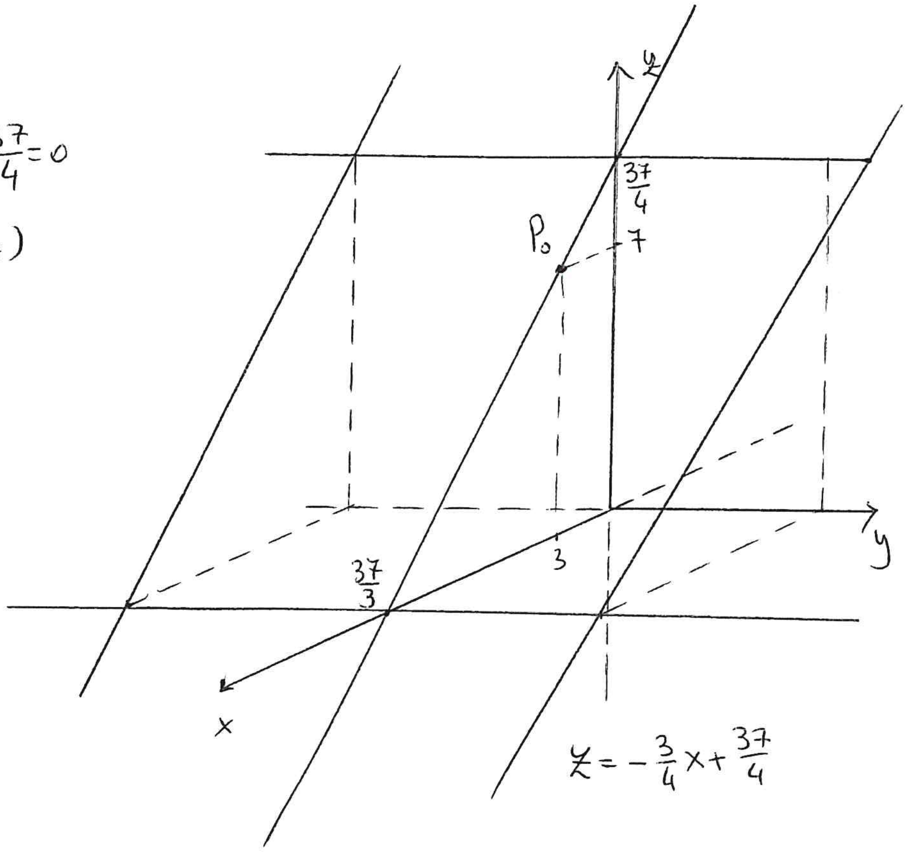
d) $r \perp$ graf f

$\vec{v}_r = \vec{N}_{\text{Piano tang}}$ $\quad \frac{3}{4}x + z - \frac{37}{4} = 0$

$3x + 4z - 37 = 0 \quad \vec{N} = (3,0,4)$

$\vec{v}_r = (3,0,4)$

$$r \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 0 \\ z = 7 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



e) $P_0 \in s$ per $t_0 = 1$

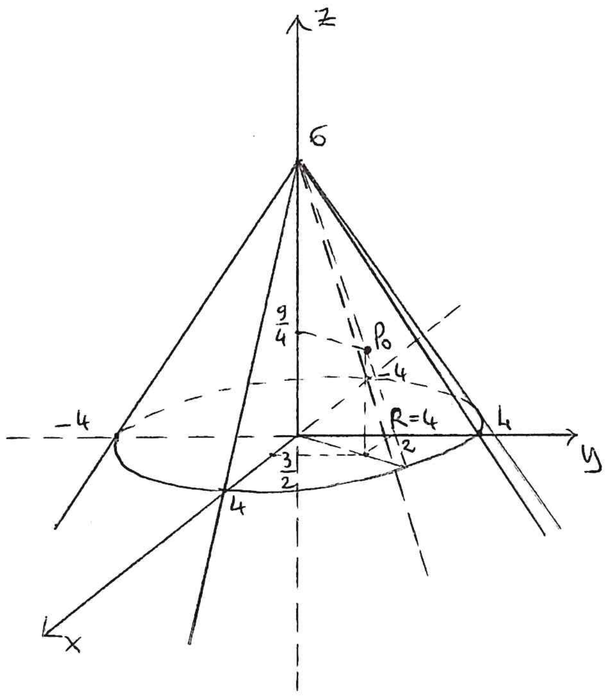
$$\begin{cases} 3 = 3t \to t = 1 \\ 0 = 0 \\ 7 = 3 + 4t \to t = 1 \end{cases}$$

s è scritta in forma parametrica come la retta per $(0,0,3)$ di vettore direttore $\vec{v}_s = (3,0,4)$
essendo $\vec{v}_s = \vec{v}_r$ le due rette s e r sono parallele, da cui s è $\perp$ grafico di f in P_0. Dunque s e r sono la stessa retta.

3) $g(x,y) = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

a) $\text{dom}\, g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$ in quanto x^2+y^2 è una somma di quadrati e allora è sempre ≥ 0

eq.^ne del graf g $\quad z = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$



b) rappresenta un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,6)$ verso il basso,
apertura $a = \frac{3}{2} > 1$ $\left(0 < \hat{ap} < 45°,\right.$
$\left.\hat{ap} = \arctan\frac{2}{3} \approx 33{,}7°\right)$, $\cap\, z=0$ su $x^2+y^2 = 4^2 \quad R=4$

c) $z_0 = g\left(\frac{3}{2}, 2\right) = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+4} = 6 - \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} = 6 - \frac{15}{4} = \frac{9}{4}$

$P_0 = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}\right)$ cerco un vettore direttore di r che costituirà il vettore normale al piano tangente

$P_1 = \left(3, 4, \frac{47}{12}\right)$ $\vec{v}_r = P_1 - P_0 = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{20}{12}\right) = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{3}\right)$

$y=4$

Essendo $r \perp$ al grafico di g posso considerare $\vec{N}_{pianotang} = \vec{v}_r$

$\vec{N} = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{3}\right)$

Piano tg : $(P - P_0)\cdot\vec{N} = 0$ $\frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + 2(y-2) + \frac{5}{3}\left(z - \frac{9}{4}\right) = 0$

$\frac{5}{3}z = -\frac{3}{2}x - 2y + \underbrace{\frac{9}{4} + 4 + \frac{15}{4}}_{+10}$ $z = -\frac{9}{10}x - \frac{6}{5}y + 6$

d) $\nabla g(x,y) = \left(\frac{-\frac{3}{2}x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-\frac{3}{2}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ $\nabla g\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \left(\frac{-\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}}, \frac{-3}{\frac{5}{2}}\right) = \left(-\frac{9}{10}, -\frac{6}{5}\right)$

Piano tang $z = \frac{9}{4} - \frac{9}{10}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{6}{5}(y-2)$ $z = -\frac{9}{10}x - \frac{6}{5}y + \underbrace{\frac{9}{4} + \frac{27}{20} + \frac{12}{5}}_{\frac{45+27+48}{20} = \frac{120}{20} = 6}$

$z = -\frac{9}{10}x - \frac{6}{5}y + 6$.

e) $\vec{N}_{pianotang} = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{3}\right)$ o anche $\vec{N} = \left(\frac{9}{10}, \frac{6}{5}, 1\right)$

o $\vec{N} = (9, 12, 10)$

Piano // Piano tang ha lo stesso vettore normale

$\Rightarrow$ $(P - P_1)\cdot\vec{N} = 0$ $9(x-4) + 12(y-4) + 10(z-2) = 0$

$10z = -9x - 12y + \underbrace{36 + 48 + 20}_{104}$ $z = -\frac{9}{10}x - \frac{6}{5}y + \frac{52}{5}$