UNIVERSITÀ di PARMA - INGEGNERIA GESTIONALE

ANALISI MATEMATICA 2 - SCHEDA N. 11

INTEGRALI DOPPI

ES1) Calcolate i seguenti integrali doppi sul rettangolo a fianco indicato

a) $\int_E 3\,dx\,dy \qquad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -2\le x\le 2,\ 1\le y\le 6\}$ R. 60

b) $\int_E (5-x)\,dx\,dy \qquad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 5,\ 0\le y\le 3\}$ R. $\frac{75}{2}$

c) $\int_E (4-2y)\,dx\,dy \qquad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ R. 3

d) $\int_E x^2\cdot y\,dx\,dy \qquad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 3,\ 1\le y\le 2\}$ R. $\frac{27}{2}$

e) $\int_E (x-3y^2)\,dx\,dy \qquad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$ R. -12

f) $\int_E \left(3-\frac{1}{3}x^2\right)dx\,dy \qquad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -3\le x\le 3,\ -2\le y\le 2\}$ R. 48

g) $\int_E \sqrt{x+y}\,dx\,dy \qquad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3\}$ R. $\frac{4}{15}(31-9\sqrt{3})$

h) $\int_E 2xy\cos(y^2)\,dx\,dy \qquad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le x\le 3,\ 0\le y\le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$ R. 4

ES2) Per gli integrali doppi dell'es. 1) a) b) c), calcolateli interpretandoli come volume di un solido in maniera elementare, senza usare la teoria dell'integrazione.

ES.3) Disegnate i seguenti sottoinsiemi del piano e scriveteli come NORMALI rispetto a x (eventualmente suddividendo) e come NORMALI rispetto a y (eventualmente suddividendo).

a) Triangolo di VERTICI $(1,1)$ $(2,2)$ $(2,1)$

b) Triangolo di VERTICI $(0,0)$ $(1,1)$ $(0,2)$

c) Triangolo di VERTICI $(1,1)$ $(5,1)$ $(4,4)$

d) E = regione delimitata da $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$

e) E = regione delimitata da $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=2$

f) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4,\ x\leq 0\}$

g) E = regione delimitata da $y=1$, $y=x^2$

h) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1,\ y\geq 0\}$

i) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq x\}$

j) E = regione delimitata da $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $y=\sqrt{2}$

k) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9,\ x\leq 0, y\leq 0\}$

l) E = regione delimitata da $y=2x$, $y=-x$, $y=1$, $y=3$

m) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$

n) E = regione delimitata da $y=\log x$, $y=0$, $x=e$

ES.4) Disegnate i seguenti sottoinsiemi del piano, scriveteli sia come normali rispetto a x che come normali rispetto a y; poi calcolate l'integrale doppio a fianco indicato in entrambi i modi (cioè per riduzione sia rispetto a x sia rispetto a y)-

a) E = regione delimitata da $y=2x$ e $y=x^2$ $\quad \int_E (x^2+y^2)\,dx\,dy$ $\quad$ R. $\frac{216}{35}$

b) E = regione delimitata da $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ $\int_E (x+y)\,dx\,dy$ R. $\frac{3}{10}$

c) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\le 0\}$ $\int_E (2x-y)\,dx\,dy$ R. 8

d) E = triangolo di VERTICI (0,0) (2,0) (0,2) $\int_E (2x+3y)\,dx\,dy$ R. $\frac{20}{3}$

ES.5) Disegnate la regione di integrazione e calcolate l'integrale invertendo l'ordine di integrazione (perchè nell'ordine proposto l'integrale è impossibile o molto difficile da calcolare).

a) $\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2}dx\right)dy$ R. $\frac{1}{6}(e^9-1)$ b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,dx\right)dy$ R. $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$

c) $\int_0^3 \left(\int_{y^2}^9 y\cdot\cos(x^2)\,dx\right)dy$ R. $\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(81)$ d) $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x^3\,\mathrm{sen}(y^3)\,dy\right)dx$ R. $\frac{1}{12}(1-\cos 1)$

e) $\int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}dx\right)dy$ R. $\frac{1}{4}(e^{16}-1)$

ES.6) Calcolate i seguenti integrali doppi scegliendo il metodo che ritenete più opportuno (per a) c) g) l) n) scriveteli sia come normali rispetto a x sia rispetto a y eventualmente suddividendo).

a) $\int_E x^2y\,dx\,dy$ $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le y\le 2,\ y\ge |x|\}$ R. $\frac{62}{15}$

b) $\int_E 2xy\,dx\,dy$ $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\le x\le 0,\ 0\le y\le e^x\}$ R. $\frac{5}{4e^4}-\frac{1}{4}$

c) BARICENTRO di $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ge y^2-1,\ y\le -x+1\}$ R. area $=9/2$, $x_B=3/5$, $y_B=-1/2$

d) $\int_E \left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy$ $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 4\}$ R. $\frac{8}{3}\pi$

e) $\int_E x^2\cdot y\,dx\,dy$ $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\le 0,\ x^2+y^2\le 1\}$ R. $-\frac{2}{15}$

f) $\int_E y^2 dxdy$ $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le 0, y\ge 0, 4\le x^2+y^2\le 9\}$ R. $\frac{65}{16}\pi$

g) $\int_E \frac{x\cdot y}{3} dxdy$ $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 2, 0\le x\le 3, xy\le 2\}$ R. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log 3$

h) BARICENTRO di $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le y^3, y\le 1\}$ R. area $=2$
$x_B=-3/7$
$y_B=1/5$

i) $\int_E x^2 dxdy$ $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 9, x\le -|y|\}$ R. $\frac{81}{16}\pi+\frac{81}{8}$

j) $\int_E 2\, dxdy$ $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-3)^2+(y-3)^2\le 4\}$ R. 8π

k) $\int_E \sqrt{36-x^2-y^2}\, dxdy$ $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 36\}$ R. 144π

l) area di E
$\int_E x dxdy$ con $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4x\le y\le\sqrt{-x^2-4x}\}$
R. area $=2\pi+\frac{32}{3}$
$\int_E x dxdy = -\frac{64}{3}-4\pi$

m) BARICENTRO di $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le\sqrt{|x|}\}$ R. area $2/3$
$x_B=0$ $\quad y_B=\frac{9}{20}$

n) BARICENTRO di $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2y^2\le x, 2y^2\le 3-2x\}$ R. area $=\sqrt{2}$
$x_B=\frac{4}{5}$ $\quad y_B=0$

o) $\int_E e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\le y\le 2, 0\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$ R. $\pi(e^2+1)$

p) $\int_E \frac{x}{1+x^2+y^2} dxdy$ $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1, -\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x\}$
R. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

q) $\int_E xy\, dxdy$ $\quad E=$ triangolo di vertici $(1,1)$ $(4,1)$ $(1,2)$ R. $\frac{31}{8}$

r) $\int_E x^2 dxdy$ $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+(y-2)^2\le 8, (x-1)^2+(y-1)^2\ge 1\}$
R. $\frac{187}{4}\pi$

s) $\int_E x^2 dxdy \quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1, -1\le y\le 1, |x|+|y|\ge 1\}$ R. 1

t) $\int_E x^2 y\, dxdy \quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1, -1\le y\le 1+x^2, x\le y^2\}$ R. $\frac{19}{35}$

u) $\int_E (3x+4y^2)\, dxdy \quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge 0, 1\le x^2+y^2\le 4\}$ R. $\frac{15}{2}\pi$

v) $\int_E y^2 dxdy \quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\le |y|\le 2+\sqrt{4-x^2}\}$

area di E

BARICENTRO di E

R. $20\pi+\frac{128}{3}$ Area $=4\pi$ $B=(0,0)$

w) area di E

$\int_E x\, dxdy \quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, e^{-x}-1\le y\le\sqrt{2x-x^2}\}$

R. area $=\frac{1}{e}+\frac{\pi}{4}$ $\int_E x\,dxdy=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{e}-\frac{5}{6}$

ES. 7) Come es. 2) per gli integrali doppi dell'es. 6) d) j) k).