COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI		B
NOME ______________			
MATRICOLA └┴┴┴┴┴┴┘	1 | 2 | 3 | 4 | 5		
CORSO AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL			

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2017-2018 — PARMA, 19 GIUGNO 2018

AN2-19/6/18-1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

0) **PARTE PRELIMINARE**
Completate:

a) Le **equazioni parametriche** di una curva che percorre il segmento di estremi $(1, -4)$ e $(-3, 1)$ nel verso delle x crescenti sono

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -\frac{5}{4}t - \frac{11}{4} \end{cases} \quad t \in [-3, 1] \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x(t) = -3+4t \\ y(t) = 1-5t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

DISEGNO e EQ.^ne della retta a pag. 5

b) La **lunghezza** della curva $\gamma : [-4, 0] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}t^2 \\ y(t) = \frac{1}{12}t^3 \\ z(t) = \frac{1}{12}t^3 \end{cases} \quad t \in [-4, 0] \qquad \text{vale} \ldots \frac{26}{3}$$

Calcoli: γ è definita su un intervallo chiuso e limitato $(I=[-4,0])$ ed è di classe C^1 ($x(t), y(t), z(t)$ sono polinomi) $\Rightarrow$ si può applicare il Teorema per il calcolo della lunghezza.

$\gamma'(t) = (\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t^2, \frac{1}{4}t^2)$ $\quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\frac{1}{2}t)^2 + (\frac{1}{4}t^2)^2 + (\frac{1}{4}t^2)^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{16}t^4 + \frac{1}{16}t^4} = \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^4} = \sqrt{\frac{1}{4}t^2(1+\frac{1}{2}t^2)} = \frac{1}{2}|t|\sqrt{1+\frac{1}{2}t^2}$

prosegue a p. 5

Svolgimento a pag. 5-6

c) Considerate la funzione $f(x,y) = 3 + 9\log\left(\dfrac{y^2}{36} - 1 + \dfrac{x^2}{9}\right)$.

i) (sul foglio a quadretti) Determinate il dominio di f e rappresentatelo nel piano in modo che risulti perfettamente chiaro quali punti vi appartengono.

ii) Il punto $(3, -6)$ appartiene alll'insieme di livello E_k per $k = 3$.

Tale insieme di livello ha equazione .... $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{72} = 1$

e rappresenta ... L'ELLISSE di $C(0,0)$ e SEMIASSI $a = 3\sqrt{2}, b = 6\sqrt{2}$

iii) Le equazioni parametriche di una curva che percorre l'insieme di livello trovato al punto ii) sono:

$$\begin{cases} x(t) = 3\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = 6\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

iv) La derivata direzionale di f nel punto $(x = 3, y = -6)$ nella direzione del punto $P_1 = (7, -3)$ vale 3.

d) Considerate la funzione $f(x,y) = 2 + \sqrt{12x - x^2 - y^2}$.

A pag 6-7

i) Determinate il dominio di f, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano; poi scrivete l'equazione del grafico di f.

ii) Spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico.

iii) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corrrispondente a $(x_0 = 8, y_0 = -4)$ è: ... $z = -\frac{1}{2}x + y + 14$

iv) L'equazione del piano per $P_1 = (-6, -2, 7)$ parallelo al piano tangente trovato al punto iii) è: ... $z = -\frac{1}{2}x + y + 6$.

e) I punti stazionari della funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{4}(x^2 - 4x)(y - 4)$ (esercizio 2)

sono: ... $P_0 = (0,4) \quad P_1 = (4,4)$

Calcoli: ... $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{4}(2x-4)(y-4),\ \frac{1}{4}(x^2-4x)\right)$

P.ti Staz. $\begin{cases} \frac{1}{4}(2x-4)(y-4) = 0 \\ \frac{1}{4}(x^2-4x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ x = 0 \text{ o } x = 4 \end{cases}$

$\boxed{x=0}$ ↓ 1ª eq.ne $-(y-4) = 0$, $y = 4$

$\boxed{x=4}$ ↓ 1ª eq.ne $(y-4) = 0$, $y = 4$

f) Nell'esercizio 4) le soluzioni dell'equazione omogenea associata

sono ... $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

1) Sia $\gamma : [-1, \frac{13}{3}] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da

Svolgim. a pag. 7

$$\begin{cases} x(t) = 6\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t\right) \\ y(t) = -3 + \sqrt{13 - 3t} \end{cases} \quad t \in [-1, \frac{13}{3}].$$

Disegnate con cura sul foglio a quadretti il sostegno di γ, specificando di che curva si tratta, il verso di percorrenza e l'equazione (cartesiana o implicita).

Il disegno deve far risultare in modo chiaro il percorso effettuato dal punto.

Completate:

il vettore tangente nel punto $P_0 = (0, -1)$ è: ... $\vec{v}_{P_0} = -3\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}$

i due vettori normali nel punto P_0 sono: ... $\vec{N}_{or} = -\frac{3}{4}\vec{i} + 3\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{ant} = \frac{3}{4}\vec{i} - 3\vec{j}$

l'equazione parametrica della retta tangente in P_0 è: .. a pag. 7

l'equazione cartesiana della retta normale in P_0 è: ... $y = -4x - 1$

Disegnate sul foglio a quadretti il punto P_0, il vettore tangente ed entrambi i vettori normali in P_0.

---

2) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione

Svolgim. a pag 8-9

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2 - 4x)(y - 4).$$

I punti stazionari sono stati trovati nell'esercizio e) e risultano tutti punti di sella.

a) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 2, x \ge -1\}.$$

---

3) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $g(x,y) = 6 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2$.

Svolgim. a pag. 9-10

a) Determinate il dominio di g, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g, spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 9, 0 \le z \le 6 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2, z \le 5, y \le 0\}.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

4) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}\, y''(x) \;-\; \frac{2}{3}\, y'(x) \;+\; \frac{2}{3}\, y(x) \;=\; 4\,\cos(2x) \;+\; 2\,\operatorname{sen}(2x) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2\,. \end{cases}$$

SOL.^{ne} : $y(x) = -\frac{5}{2}e^{2x} + 13xe^{2x} - 3\operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{2}\cos(2x)$

Risposta:

1) Eq.^{ne} omogenea associata $\frac{1}{6}y''(x) - \frac{2}{3}y'(x) + \frac{2}{3}y(x) = 0$

Eq.^{ne} caratteristica $\frac{1}{6}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} = 0$ $\quad t^2 - 4t + 4 = 0$ $\quad (t-2)^2 = 0$

$t_1 = 2$ con molt. 2

SOL.^{ni} FONDAMENTALI $y_1(x) = e^{2x}$ $\quad y_2(x) = xe^{2x}$

SOL.^{ni} EQ.^{ne} OMOGENEA $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ $\quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

2°) Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x) = A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)$ perchè il 2° m dell'eq.^{ne} è una combinazione lineare di sen(2x) e cos(2x) ma le sol.^{ni} fondam. dell'omogenea non sono sen(2x) e cos(2x) (quindi non si moltiplica per x).

$\bar{y}'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\operatorname{sen}(2x)$ $\quad \bar{y}''(x) = -4A\operatorname{sen}(2x) - 4B\cos(2x)$

Sostituendo nell'eq.^{ne} si ottiene

$$\frac{1}{6}(-4A\operatorname{sen}(2x) - 4B\cos(2x)) - \frac{2}{3}(2A\cos(2x) - 2B\operatorname{sen}(2x)) + $$
$$+ \frac{2}{3}(A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)) = 4\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{4}{3}B\operatorname{sen}(2x) - \frac{4}{3}A\cos(2x) = 4\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

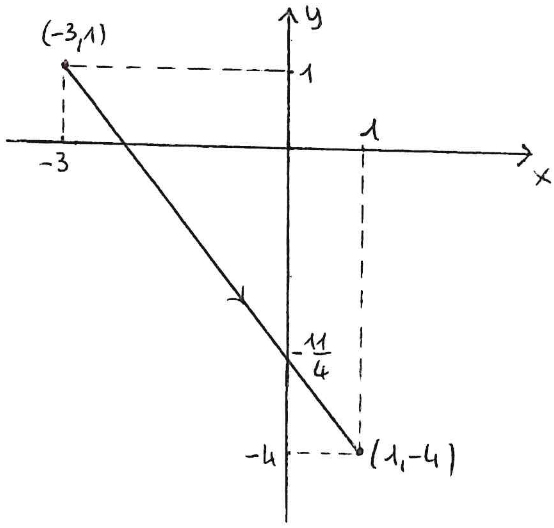
Poichè 2 combinazioni lineari di seno e coseno dello stesso argomento sono $= \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ hanno uguali entrambi i coeff. otteniamo

$$\begin{cases} \frac{4}{3}B = 2 \\ -\frac{4}{3}A = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -3 \\ B = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = -3\operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{2}\cos(2x)$$

3°) Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} completa sono : $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - 3\operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{2}\cos(2x)$ $\quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Continua a pag. 7

ES. 0) a)



$$m = -\frac{5}{4}$$

$$y = -4 - \frac{5}{4}(x-1)$$

$$y = -\frac{5}{4}x - \frac{11}{4}$$

b) $L(\gamma) = \int_{-4}^{0} \frac{1}{2}|t|\sqrt{1+\frac{1}{2}t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-4}^{0} t\left(1+\frac{1}{2}t^2\right)^{1/2} dt =$

$t \in [-4,0]$, $|t| = -t$ $\qquad$ $D(1+\frac{1}{2}t^2) = t$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\frac{1}{2}t^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-4}^{0} = -\frac{1}{3}\left[(1+\frac{1}{2}t^2)^{3/2}\right]_{-4}^{0} = -\frac{1}{3}\left[1 - 9^{3/2}\right] =$$

$(\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$

$$= -\frac{1}{3}[1-27] = \boxed{\frac{26}{3}}.$$

c) i) $\operatorname{dom} f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{36} - 1 + \frac{x^2}{9} > 0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36} > 1\right\}$

ESTERNO (BORDO ESCLUSO) dell'ELLISSE di $C(0,0)$ e semiassi $a=3$ $b=6$

ii) $(3,-6) \in E_K$ per $K = f(3,-6) = 3 + 9\log\left(\frac{36}{36} - 1 + \frac{9}{9}\right) =$

$$= 3 + 9\underbrace{\log 1}_{=0} = 3$$

$(3,-6) \in E_3$

E_3 : $\cancel{3} = \cancel{3} + 9\log\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}-1\right) \Leftrightarrow 9\log\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}-1\right) = 0 \Leftrightarrow$

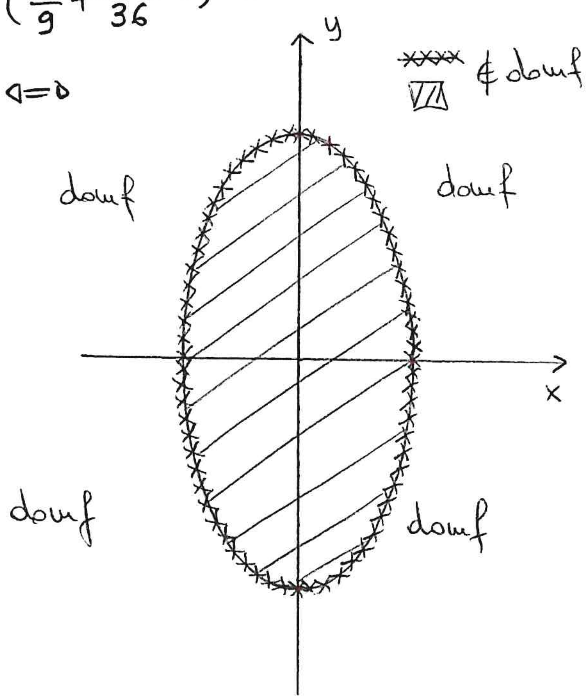
$\log\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}-1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}-1 = 1 \Leftrightarrow$

$\log 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{72} = 1$

ELLISSE di $C(0,0)$ e semiassi $a = 3\sqrt{2}$, $b = 6\sqrt{2}$

iii) $\begin{cases} x(t) = 3\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = 6\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$

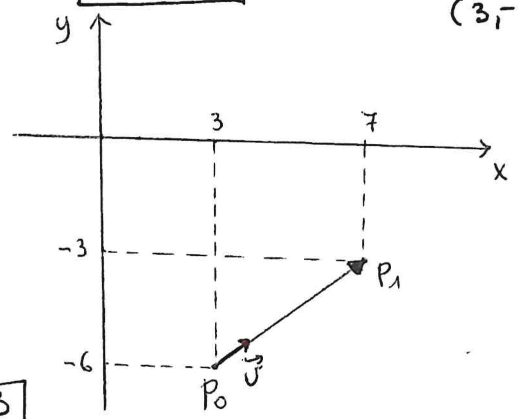


iv) $\nabla f(x,y) = \left(9 \cdot \dfrac{\frac{2}{9}x}{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}-1} \;,\; 9 \cdot \dfrac{\frac{2}{36}y}{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}-1} \right) =$

$= \left(\dfrac{2x}{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}-1} \;,\; \dfrac{\frac{1}{2}y}{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}-1} \right)$ $\qquad \nabla f(3,-6) = \boxed{(6,-3)}$ $\qquad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}-1 = 1$ in $(3,-6)$

$\vec{v} = \dfrac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|} = \dfrac{(4\vec{i}+3\vec{j})}{\sqrt{16+9}} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$

$P_0 = (3,-6) \quad P_1 = (7,-3)$



$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,-6) = \nabla f(3,-6) \cdot \vec{v} =$

$= (6,-3) \cdot \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right) = \frac{24}{5} - \frac{9}{5} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$

d) i) $\operatorname{dom} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 12x - x^2 - y^2 \geq 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 12x \leq 0 \} =$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-6)^2 + y^2 \leq 36 \}$ = CERCHIO CHIUSO (interno+bordo) di $C(6,0)$ e $R = 6$

eq.ne del grafico:

$z = 2 + \sqrt{12x - x^2 - y^2} = 2 + \sqrt{36 - (x-6)^2 - y^2}$

ii) $z = 2 + \sqrt{36 - (x-6)^2 - y^2}$ è la METÀ SUPERIORE della superficie sferica di $C(6,0,2)$ e $R = 6$ $\quad \left(z = z_C + \sqrt{R^2 - (x-x_C)^2 - (y-y_C)^2} \right)$

$z_{max} = 2 + 6 = 8$, $\cap\, z = 0 \; \emptyset$ poiché $z \geq 2$.

iii) $z_0 = f(x_0, y_0) = f(8,-4) =$

$= 2 + \sqrt{36 - 4 - 16} = 2 + 4 = 6$

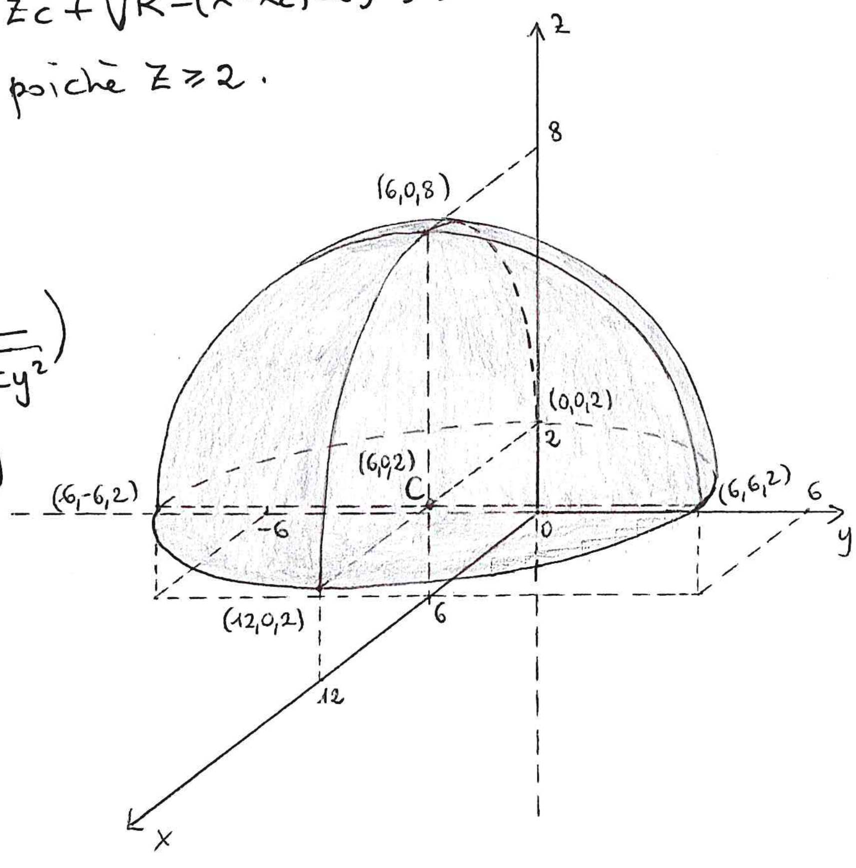
$\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{6-x}{\sqrt{12x - x^2 - y^2}} \;,\; \dfrac{-y}{\sqrt{12x - x^2 - y^2}} \right)$

$\nabla f(8,-4) = \left(\dfrac{-2}{4} \;,\; \dfrac{4}{4} \right) = \left(-\frac{1}{2}, 1 \right)$

Eq.ne piano tangente:

$z = 6 - \frac{1}{2}(x-8) + (y+4)$

$z = -\frac{1}{2}x + y + 14$



iv) $\vec{N}_{\text{pianotang}} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$

il piano // ha lo stesso vettore normale e passa per $P_1 = (-6, -2, 7)$:

EQ.^{ne} $(P - P_1) \cdot \vec{N} = 0$ $\quad \frac{1}{2}(x+6) - (y+2) + (z-7) = 0$

$\frac{1}{2}x - y + z + 3 - 2 - 7 = 0 \qquad z = -\frac{1}{2}x + y + 6$.

ES 4) 4°) Pb. di Cauchy $\quad y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} - 6\cos(2x) - 3\,\text{sen}(2x)$

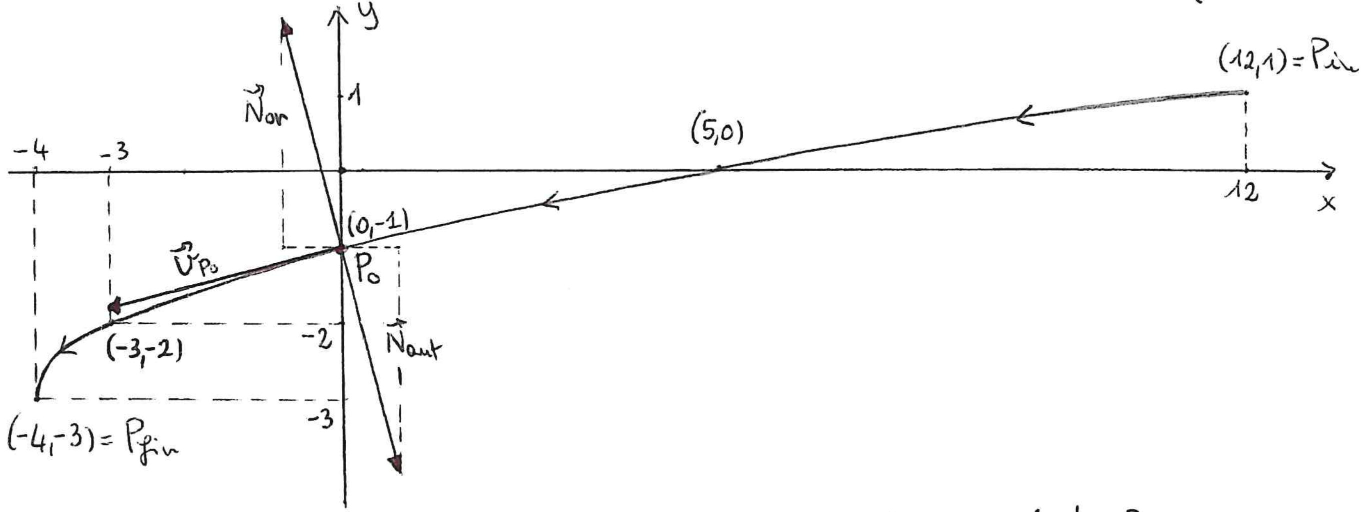
$$\begin{cases} y(0) = c_1 + \frac{3}{2} = -1 \\ y'(0) = 2c_1 + c_2 - 6 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -\frac{5}{2} \\ c_2 = 8 + 5 = 13 \end{cases}$$

SOL.^{ne} (unica) $\quad y(x) = -\frac{5}{2} e^{2x} + 13 x e^{2x} - 3\,\text{sen}(2x) + \frac{3}{2}\cos(2x)$.

ES. 1) $P_{in} = (12, 1)$ $\quad P_{fin} = (-4, -3)$ $\quad$ eq.^{ne} $y = -3 + \sqrt{13 + x - 9}$
$t = -1 \qquad t = \frac{13}{3} \qquad -3t = x - 9$

$x(t) = 9 - 3t$

$y = -3 + \sqrt{x+4}$ si tratta grafico della radice $(y = \sqrt{x})$ spostato a sinistra di 4 e in basso di 3 che viene percorso nel verso delle x decrescenti. Passa per i punti $(-4,-3)$ $(-3,-2)$ $(0,-1)$ $(5,0)$ $(12,1)$.



$P_0 = (0, -1)$ corrisponde a $t_0 = 3$ $\quad \begin{cases} 0 = 9 - 3t \\ -1 = -3 + \sqrt{13 - 3t} \end{cases} \quad \begin{cases} t = 3 \\ -1 = -3 + 2 \ \underline{\text{OK}} \end{cases}$

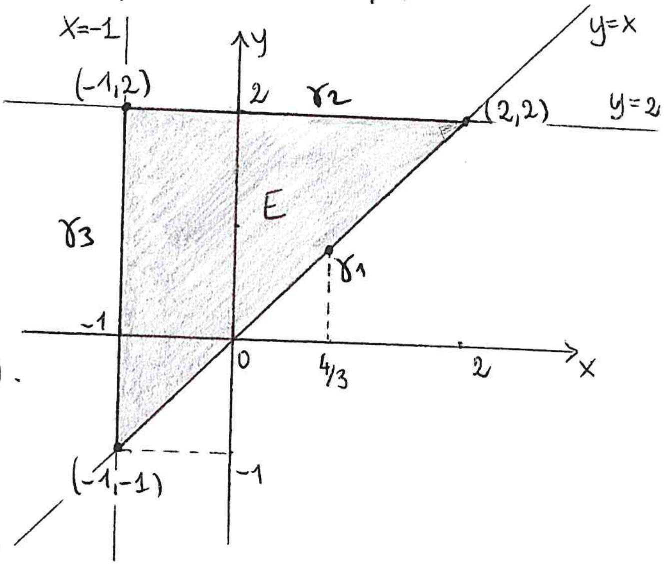
$\gamma'(t) = \left(-3, \dfrac{-3}{2\sqrt{13 - 3t}}\right)$

$\vec{v}_{P_0} = \gamma'(3) = -3\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j} \qquad r_{tan}$ (eq.^{ni} param.) $\begin{cases} x = -3t \\ y = -1 - \frac{3}{4}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$m_{tan} = \frac{1}{4} \qquad m_{norm} = -4 \qquad r_{norm} \ y = -1 - 4x$

ES.2) <u>1° passo</u> E è il Triangolo di Vertici (2,2) (−1,−1) e (−1,2)

E è un TRIANGOLO <u>CHIUSO</u> (tutti e 3 i lati sono compresi in E) e LIMITATO perché $E \subset B_3(0,0)$ (il punto più lontano da (0,0) di E è (2,2) e $\text{dist}((2,2),(0,0)) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$).



Inoltre f è continua su $\mathbb{R}^2$ in quanto prodotto di un polinomio di 2° grado in x per un polinomio di 1° grado in y (oltre alla costante $\frac{1}{4}$) e quindi in particolare è continua su E. Si può applicare pertanto il Teorema di Weierstrass che garantisce l'esistenza del massimo e del minimo assoluti di f su E -

<u>2° passo</u>: non ci sono punti di max o minimo locale interni ad E (i due punti stazionari sono esterni ad E e comunque sono entrambi punti di sella - Quindi il massimo e il minimo sono assunti sul bordo -

<u>3° passo</u>: studio del ∂E $\quad \gamma_1 \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \quad t \in [-1,2] \quad g_1(t) = f(t,t) =$

$$= \frac{1}{4}(t^2-4t)(t-4) = \frac{1}{4}t^3 - 2t^2 + 4t \qquad g_1'(t) = \frac{3}{4}t^2 - 4t + 4$$

$$g_1'(t) = 0 \iff 3t^2 - 16t + 16 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{3} = \frac{8 \pm 4}{3} \begin{matrix} \nearrow t_1 = \frac{4}{3} \\ \searrow t_2 = 4 \text{ NON ACC.} \end{matrix}$$

$(t \in [-1,2])$

TEMPI $\quad t=-1 \quad t=\frac{4}{3} \quad t=2$

PUNTI $\quad (-1,-1) \quad \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) \quad (2,2)$

VALORI $\quad f(-1,-1) = \frac{1}{4}\cdot 5 \cdot (-5) = -\frac{25}{4}$

$$f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{16}{9} - \frac{16}{3}\right)\left(\frac{4}{3} - 4\right) = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \left(-\frac{\overset{8}{\cancel{32}}}{9}\right)\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27} \approx 2{,}37$$

$$f(2,2) = \frac{1}{4}(4-8)(2-4) = 2$$

$\gamma_2 \begin{cases} x=t \\ y=2 \end{cases}$ $t\in[-1,2]$ $g_2(t)=f(t,2)=\frac{1}{4}(t^2-4t)(2-4)=$
$=-\frac{1}{2}t^2+2t$

$g_2'(t)=-t+2$ $g_2'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$

TEMPI $t=-1$ $t=2$ PUNTI $(-1,2)$ $(2,2)$

VALORI $f(-1,2)=\frac{1}{4}(5)(-2)=-\frac{5}{2}$

$\gamma_3 \begin{cases} x=-1 \\ y=t \end{cases}$ $t\in[-1,2]$ $g_3(t)=f(-1,t)=\frac{1}{4}(+5)(t-4)=\frac{5}{4}t-5$
$g_3'(t)=\frac{5}{4}\neq 0 \ \forall t$

TEMPI $t=-1$ $t=2$ PUNTI $(-1,-1)$ $(-1,2)$

VALORI $f(-1,-1)=-\frac{25}{4}$ $f(-1,2)=-\frac{5}{2}$

4° passo: Conclusione il massimo e il minimo sono assunti sul ∂E, sul ∂E f è compresa tra $-\frac{25}{4}$ e $\frac{64}{27}$, allora

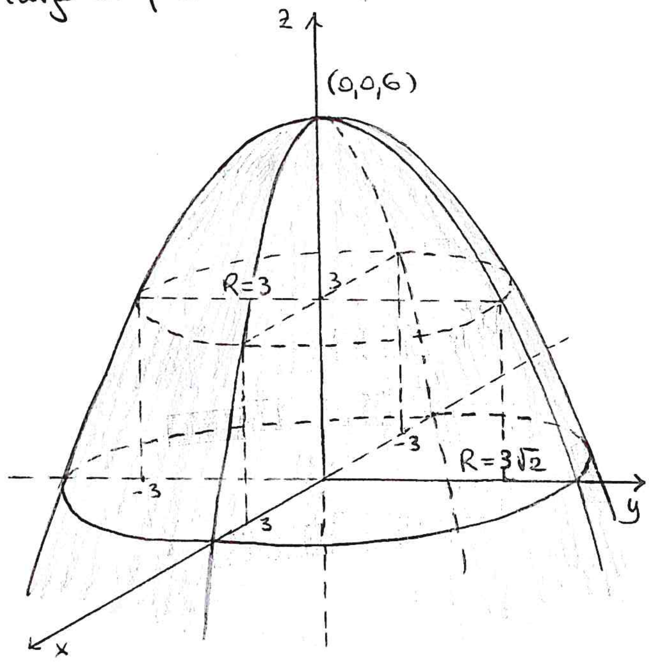
$$\min_E f=-\frac{25}{4}=f(-1,-1) \quad e \quad \max_E f=\frac{64}{27}=f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right).$$

ES.3) a) dom $g=\mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni).

b) grafico di g $z=6-\frac{1}{3}(x^2+y^2)$ è un PARABOLOIDE CIRCOLARE di $V(0,0,6)$ verso il basso, $a=\frac{1}{3}$ (più largo di quello di base), $\cap\, z=0$ su $x^2+y^2=18$ $R=3\sqrt{2}\simeq 4,2$

c) Il solido è costituito dai punti dello spazio tra il piano (x,y) e il grafico del paraboloide. La condizione $x^2+y^2\leq 9$ rappresenta un CILINDRO (interno + superficie) di asse z e $R=3$. Poichè

par $\cap$ CIL $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=6-\frac{1}{3}(x^2+y^2) \end{cases}$ si intersecano



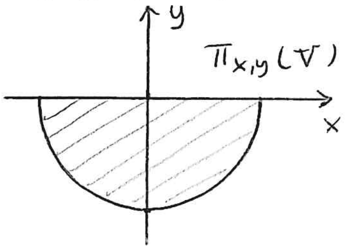
sulla circonf $x^2+y^2=9$ $(R=3)$ a quota $z=6-\frac{1}{3}\cdot 9=3$ il solido risulta costituito da un cilindro di $R=3$ $(0\leq z\leq 3)$ con sopra il paraboloide.

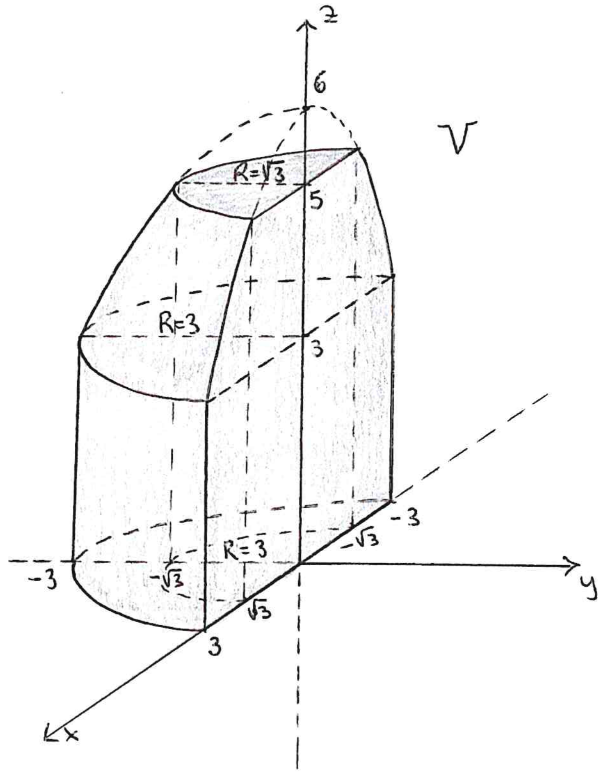
La condizione $z \leq 5$ taglia la punta al paraboloide in una circonf. di raggio $\sqrt{3}$ (a quota $z=5$)

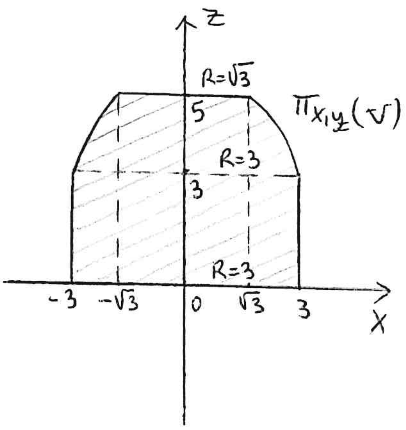
$$\begin{cases} z=5 \\ z=6-\frac{1}{3}(x^2+y^2) \end{cases} \quad \begin{cases} z=5 \\ 5=6-\frac{1}{3}(x^2+y^2) \rightarrow \frac{1}{3}(x^2+y^2)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} z=5 \\ x^2+y^2=3 \quad R=\sqrt{3}. \end{cases}$$

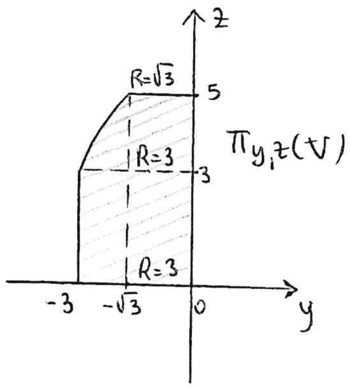
par $\cap\, z=5$

Infine la condizione $y \leq 0$ divide il solido in due, considerando solo la metà con l'ordinata negativa.









$$\text{Volume di } V = \int_{x^2+y^2\leq 3} (5-0)\,dx\,dy + \int_{3\leq x^2+y^2\leq 9} \left(6-\frac{1}{3}(x^2+y^2)-0\right)dx\,dy =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3}} 5\rho\, d\rho\right)d\vartheta + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_{\sqrt{3}}^{3}\left(6\rho-\frac{1}{3}\rho^3\right)d\rho\right)d\vartheta =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi}\left[5\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} d\vartheta + \int_{\pi}^{2\pi}\left[3\rho^2-\frac{\rho^4}{12}\right]_{\sqrt{3}}^{3} d\vartheta =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\pi\left[\rho^2\right]_0^{\sqrt{3}} + \pi\left[3\rho^2-\frac{\rho^4}{12}\right]_{\sqrt{3}}^{3} = \frac{15}{2}\pi + \pi\Big(27 - \overbrace{\frac{27}{4}}^{18} \underbrace{-9+\frac{3}{4}}_{-6}\Big) =$$

$$= \frac{15}{2}\pi + 12\pi = \boxed{\frac{39}{2}\pi}$$