COGNOME	____________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	____________	1 2 3 4	
MATRICOLA	________		
CORSO	AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL		

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2018-2019 — PARMA, 24 LUGLIO 2019

AN2-24|7|19 -1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare** **la risposta** (SOLO DOVE RICHIESTA).

$\sqrt{2} \approx 1{,}4 \quad 5\sqrt{2} \approx 7{,}1 \quad \sqrt{400} = 20 \quad 6^3 = 216 \quad 6^4 = 1296$

0) **(32 PUNTI) PARTE PRELIMINARE**

Completate (dove richiesto):

a) (Sul foglio a quadretti) Considerate la curva $\gamma : [0\,,\,5] \to \mathbb{R}^3$ $(\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)))$ definita da

Svolgimento a pag. 4

$$\begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\; t^{3/2} \\ z(t) = \dfrac{2}{3}\; t^{3/2} \end{cases} \quad t \in [0\,,\,5].$$

i) Determinate la retta tangente a γ nel punto $P_0 = (-4\,,\,\frac{16}{3}\sqrt{2}\,,\,\frac{16}{3})$.

Risposta

$$r_{tan} \begin{cases} x(t) = -4 - t \\ y(t) = \frac{16}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,t \\ z(t) = \frac{16}{3} + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ii) Determinate l'equazione del piano passante per $P_1 = (-4, 0, 4)$ e perpendicolare alla retta tangente trovata.

Risposta ... $z = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}\,y + 6$

iii) La lunghezza di γ vale ... 14

AN2 - 24/7/19 - 2 -

b) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $f(x,y) = 3 + \sqrt{x^2 - 2y + y^2 + 6x - 15}$.

i) Determinate il dominio di f , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano in modo che risulti perfettamente chiaro quali punti vi appartengono.

ii) Determinate l'insieme di livello E_k cui appartiene il punto $P_0 = (2,-4)$; poi disegnate sia l'insieme di livello trovato, sia il punto P_0 .

Svolgim. a pag 5-6

iii) Determinate e disegnate il gradiente di f nel punto P_0 .

iv) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre l'insieme di livello trovato al punto ii) ed utilizzatele per determinare l'equazione cartesiana della retta normale all'insieme di livello in P_0 .

v) Utilizzate il gradiente di f per determinare di nuovo con un procedimento diverso l'equazione cartesiana della retta normale richiesta al punto iv), riportando con precisione le proprietà utilizzate nel ragionamento.

vi) La derivata direzionale di f nel punto P_0 nella direzione del punto $(-4,2)$ vale $-\sqrt{2}$

vii) Le direzioni nelle quali la derivata direzionale di f nel punto P_0 risulta nulla sono ... $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ e $\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

c) Sia E l'insieme definito da $E = E_1 \cup E_2$ con

Svolgim. a pag. 7

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 16 \,,\, x \leq 0\}$$

$$E_2 = \text{triangolo di vertici } (0,4)\,,\, (0,-4)\,,\, (4,-4)\,.$$

i) Disegnate E (sul foglio a quadretti).

ii) Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme E come normale rispetto a x ; ripetete come normale rispetto a y .

Risposta: $E_{2,x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 4,\; -4 \leq y \leq -2x+4\}$

$E_{1,x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -4 \leq x \leq 0,\; -\sqrt{16-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$

$E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -4 \leq y \leq 4,\; -\sqrt{16-y^2} \leq x \leq -\frac{1}{2}y + 2\}$

iii) L'integrale doppio $\displaystyle\int_{E_1} \frac{1}{4}\,|\,x\,|\,dxdy$ vale ... $32/3$

d) Si consideri l'equazione differenziale $\frac{3}{5}\,y''(x) + 6\,y'(x) = -15\,y(x) - 5\,x^2\,e^{-5x}$.

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono . $y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: ... A pag. 7 eq.ne caratteristica $\frac{3}{5}t^2 + 6t + 15 = 0 \rightarrow t_{1,2} = -5$ $\Delta = 0$ 1 sol.ne con molt 2

SOL.ni FONDAM. $y_1(x) = e^{-5x}$ $y_2(x) = x e^{-5x}$

La soluzione particolare va cercata nella forma ... $\bar{y}(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{-5x}$

perché ... il 2° m. dell'eq.ne è il prodotto di un polinomio di 2° grado $(-5x^2)$ per e^{kx} con $k=-5$. Essendo $k=-5$ sol.ne dell'eq.ne caratteristica con molteplicità 2 si deve poi moltiplicare per x^2.

(Non è richiesto di determinare la soluzione particolare).

e) (Sul foglio a quadretti) Sia f la funzione definita da $f(x,y) = (x - \frac{1}{4}x^2)\,(y^2 + 4y)$ (è la stessa funzione considerata nell'esercizio n.1).

A pag. 8

i) Determinate il dominio di f .

ii) Determinate i punti in cui f vale 0 e il segno di f negli altri punti (illustrate i risultati con un disegno).

iii) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

1) (Sul foglio a quadretti, 6 PUNTI) Considerate la funzione dell'esercizio 0e):

A pag. 9-10

$$f(x,y) = \left(x - \frac{1}{4}x^2\right)\left(y^2 + 4y\right)$$

Dopo averne giustificato l'esistenza, (utilizzando anche quanto ottenuto nell'esercizio n.0e) determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 5\,,\ -4 \le y \le 2\}\,.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti, 10 PUNTI) Considerate la funzione $g(x,y) = -6 + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$.

A pag 10-11

a) Determinate il dominio di g , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g , poi spiegate di quale tipo di superficie si tratta (senza dimenticare l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari precisate se l'angolo di apertura risulta minore o maggiore di 45 gradi e come si calcola); infine disegnate con cura il grafico di g .

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -6 + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 8 - \frac{1}{6}(x^2+y^2)\,,\ x \ge 0\,,\ y \le 0\}\,.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy} , Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti, 5 PUNTI) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

A pag. 12

$$\begin{cases} 16y''(x) + 4y(x) = \frac{1}{3}x^2 - 8x \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Risposta: ... $y(x) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{12}x^2 - 2x - \frac{2}{3}$

ES 0) a) i) $P_0=(-4, \frac{16}{3}\sqrt{2}, \frac{16}{3})$ corrisponde a $t_0=4$: infatti

$$\begin{cases} -4=-t \\ \frac{16}{3}\sqrt{2}=\frac{2}{3}\sqrt{2}\,t^{3/2} \\ \frac{16}{3}=\frac{2}{3}t^{3/2} \end{cases} \quad \begin{cases} t=4 \\ t^{3/2}=8 \\ t^{3/2}=8 \end{cases} \quad \begin{cases} t=4 \\ (\sqrt{t})^3=8=2^3 \\ '' \quad '' \end{cases} \quad \begin{cases} t=4 \\ \left.\begin{matrix}\sqrt{t}=2 \\ t\geq 0\end{matrix}\right\} \to t=4 \end{cases}$$

$$\gamma'(t)=\left(-1, \cancel{\tfrac{2}{3}}\sqrt{2}\,\cancel{\tfrac{3}{2}}\,t^{1/2}, \cancel{\tfrac{2}{3}}\cdot\cancel{\tfrac{3}{2}}\,t^{1/2}\right)=(-1, \sqrt{2}\sqrt{t}, \sqrt{t})$$

$$\vec{v}_{P_0}=\gamma'(4)=(-1, 2\sqrt{2}, 2)=-\vec{i}+2\sqrt{2}\vec{j}+2\vec{k}$$

$$r_{tan} \; \boxed{\begin{cases} x(t)=-4-t \\ y(t)=\frac{16}{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,t \quad t\in\mathbb{R} \\ z(t)=\frac{16}{3}+2t \end{cases}}$$

ii) Se il piano è perpendicolare alla retta, allora possiamo considerare che abbia come vettore normale il vettore $\vec{v}_{P_0}$ che dirige la retta : $\vec{N}_{piano}=\vec{v}_{P_0}=-\vec{i}+2\sqrt{2}\vec{j}+2k \qquad P_1=(-4,0,4)$

eq.^{ne} del piano $\quad (P-P_1)\cdot\vec{N}=0 \quad (x+4, y, z-4)\cdot(-1, 2\sqrt{2}, 2)=0$

$$-(x+4)+2\sqrt{2}y+2z-8=0 \qquad 2z=x-2\sqrt{2}y+12$$

<u>PIANO</u> $\boxed{z=\frac{1}{2}x-\sqrt{2}y+6}$

iii) $\gamma'(t)=(-1, \sqrt{2}\sqrt{t}, \sqrt{t}) \qquad \|\gamma'(t)\|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2}\sqrt{t})^2+(\sqrt{t})^2}=$

$$=\sqrt{1+2t+t}=\sqrt{1+3t}$$

$$L(\gamma)=\int_0^5\sqrt{1+3t}\,dt=\frac{1}{3}\int_0^5 \underbrace{3}_{f'(t)}\underbrace{\sqrt{1+3t}}_{f(t)}\,dt=\frac{1}{3}\left[\frac{(1+3t)^{3/2}}{3/2}\right]_0^5=$$

$$L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$$

$$=\frac{2}{9}\left[(1+3t)^{3/2}\right]_0^5=\frac{2}{9}\left(\underset{(\sqrt{16})^3=4^3}{16^{3/2}}-1^{3/2}\right)=\frac{2}{9}(64-1)=$$

$$=\frac{2}{\cancel{9}}\cdot\cancel{63}^{\,7}=14 \qquad \boxed{L(\gamma)=14}$$

AN2 - 24/7/19 - 5

b) i) $\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2y + y^2 + 6x - 15 \geq 0\} =$

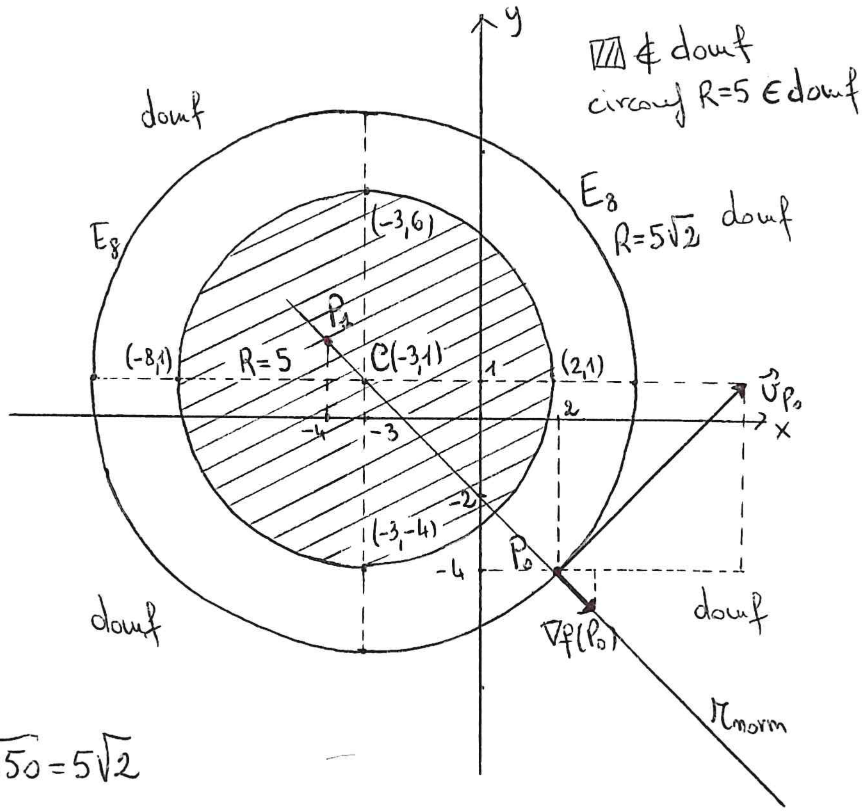
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 \geq 15\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + (y-1)^2 \geq 25\}$

ESTERNO alla CIRCONFERENZA di $C(-3,1)$ e $R=5$

CIRCONFERENZA COMPRESA nel dominio

$f(x,y) = 3 + \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2 - 25}$



ii) $P_0 = (2,-4) \in E_K$ per

$K = f(2,-4) = 3 + \sqrt{25 + \cancel{25} - \cancel{25}} =$

$= 3 + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$

$P_0 \in E_8$

$E_8 : \; 8 = 3 + \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2 - 25}$

$\sqrt{\ldots} = 5 > 0$ elevo $(\cdot)^2$

$(x+3)^2 + (y-1)^2 - 25 = 25$

$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 50$

CIRCONF. di $C(-3,1)$ e $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

iii) $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\cancel{2}(x+3)}{\cancel{2}\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2 - 25}}, \dfrac{\cancel{2}(y-1)}{\cancel{2}\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2 - 25}} \right)$

$\nabla f(P_0) = \nabla f(2,-4) = \left(\dfrac{5}{5}, \dfrac{-5}{5} \right) = (1,-1) = \vec{i} - \vec{j}$

iv) $\gamma \begin{cases} x(t) = -3 + 5\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = 1 + 5\sqrt{2}\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ 1 giro in verso antiorario

P_0 corrisponde a $t_0 = \frac{7}{4}\pi$: $\begin{cases} 2 = -3 + 5\sqrt{2}\cos t \\ -4 = 1 + 5\sqrt{2}\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $\begin{cases} 5\sqrt{2}\cos t = 5 \\ 5\sqrt{2}\,\text{sen}\,t = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\gamma'(t) = (-5\sqrt{2}\,\text{sen}\,t, 5\sqrt{2}\cos t)$ $\vec{v}_{P_0} = \gamma'\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \left(-5\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\vec{i} + 5\vec{j}$

AN2 - 24/7/19 - 6

$m_{tan} = \frac{5}{5} = 1$ $m_{norm} = -1$ r_{norm} $y = -4 - (x-2)$ $\underline{y = -x-2}$

v) Poichè il $\nabla f(P_0)$ è PERPENDICOLARE ad E_8 in P_0, tale vettore costituisce il vettore direttore della retta normale e consente di determinare $m_{norm} = \frac{-1}{1} = -1$ (da $\nabla f(P_0) = (1,-1)$).

Poi come prima $y = -4-(x+2) \to y = -x-2$

In alternativa, poichè il $\nabla f(P_0)$ dirige r_{norm}:

$$r_{norm} \begin{cases} x = 2+t \\ y = -4-t \end{cases} t \in \mathbb{R} \Rightarrow t = x-2 \Rightarrow y = -4-(x-2) \Rightarrow y = -x-2.$$

vi) $\vec{v} = \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|} = \frac{-6\vec{i}+6\vec{j}}{\sqrt{36+36}} = \frac{-6\vec{i}+6\vec{j}}{\sqrt{72}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} = \vec{v}_{min}$ (è la direzione di massima pendenza negativa o massima discesa perchè è la direzione opposta al $\nabla f(P_0)$)

$P_1 = (-4,2)$ $\quad \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{v} = (1,-1)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-\sqrt{2}}$

(che infatti è $= -\|\nabla f(P_0)\|$).

vii) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = 0 \\ \|\vec{v}\| = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 - v_2 = 0 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = v_2 \\ 2v_1^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_1^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \to v_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ e $\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

In alternativa, poichè si sa che le direzioni in cui $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$ sono quelle tangenti all'insieme di livello possiamo utilizzare il vettore tangente $\vec{v}_{P_0} = 5\vec{i}+5\vec{j}$ e ricavare $\vec{v} = \vec{T}_{P_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ e

$\downarrow \|\vec{v}_{P_0}\| = 5\sqrt{2}$

$\vec{v} = -\vec{T}_{P_0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

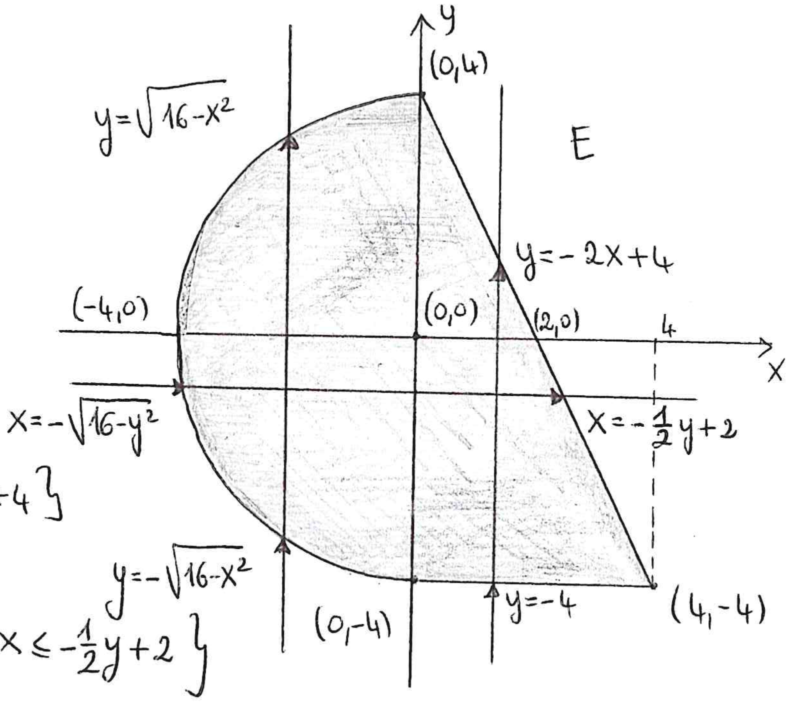
AN2 - 24/7/19 - 7

c) i) E_1 è il SEMICERCHIO di $C(0,0)$ $R=4$, la metà con $x \le 0$.

ii) retta per $(0,4)$ e $(4,-4)$

$m = -\frac{8}{4} = -2 \quad y = -2x+4$

$2x = 4-y \quad x = 2 - \frac{y}{2}$



$E_{1,x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \le x \le 0, -\sqrt{16-x^2} \le y \le \sqrt{16-x^2}\}$

$E_{2,x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4, -4 \le y \le -2x+4\}$

$E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \le y \le 4, -\sqrt{16-y^2} \le x \le -\frac{1}{2}y+2\}$

iii)
$$\int_{E_1} \frac{1}{4}|x|\,dx\,dy = -\frac{1}{4}\int_{E_1} x\,dx\,dy = -\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}\left(\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{0} x\,dx\right)dy =$$

su E_1 $|x| = -x$ perché $x \le 0$

uso E_y → $E_{1,y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \le y \le 4, -\sqrt{16-y^2} \le x \le 0\}$

$$= -\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{16-y^2}}^{0} dy = -\frac{1}{8}\int_{-4}^{4}\Big[0^2 - \underbrace{(-\sqrt{16-y^2})^2}_{-(16-y^2)}\Big]dy =$$

$$= -\frac{1}{8}\int_{-4}^{4}(y^2-16)\,dy = -\frac{1}{8}\left[\frac{y^3}{3} - 16y\right]_{-4}^{4} = -\frac{1}{8}\left[\frac{64}{3} - 64 - \left(-\frac{64}{3}+64\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{8}\left[\frac{128}{3} - 128\right] = -\frac{16}{3} + 16 = \boxed{\frac{32}{3}}$$

d) eq.^{ne} $\frac{3}{5}y''(x) + 6y'(x) + 15y(x) = -5x^2e^{-5x}$

eq.^{ne} omogenea associata $\frac{3}{5}y''(x) + 6y'(x) + 15y(x) = 0$

eq.^{ne} caratt. $\frac{3}{5}t^2 + 6t + 15 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-9}}{3/5} = -5 \quad t_1 = -5$ con molteplicità 2

$\Delta = 0$

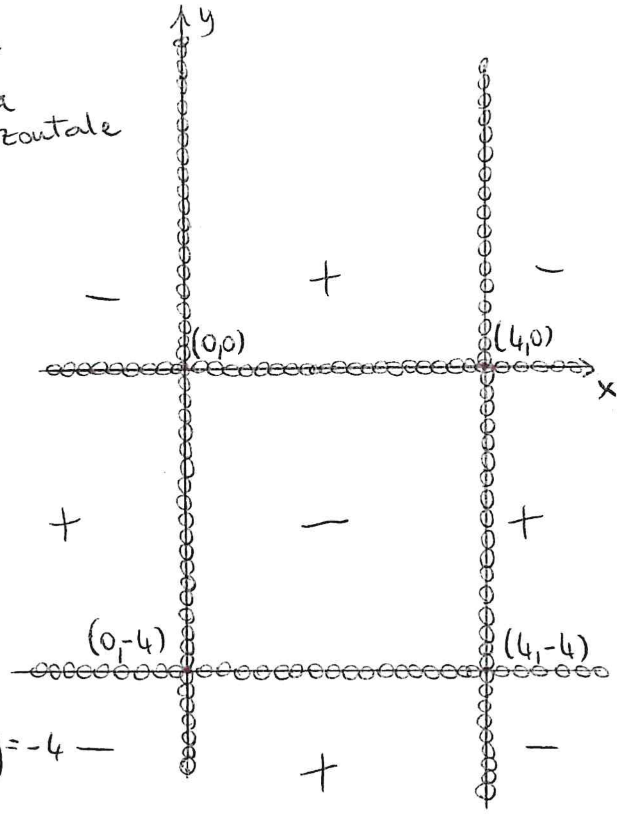
AN2 - 24/7/19 - 8

e) i) $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

ii) $f(x,y)=0 \iff \left(x-\frac{1}{4}x^2\right)\left(y^2+4y\right)=0 \iff x\left(1-\frac{1}{4}x\right)y\left(y+4\right)=0$

$\iff x=0$ o $x=4$ o $y=0$ o $y=-4$

asse y — retta verticale — asse x — retta orizzontale



$$f(x,y)>0 \iff \begin{cases} x-\frac{1}{4}x^2>0 \\ y^2+4y>0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-\frac{1}{4}x^2<0 \\ y^2+4y<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0<x<4 \\ y<-4 \text{ o } y>0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x<0 \text{ o } x>4 \\ -4<y<0 \end{cases}$$

iii) $\nabla f(x,y)=\left(\left(1-\frac{1}{2}x\right)\left(y^2+4y\right), \left(x-\frac{1}{4}x^2\right)\left(2y+4\right)\right)$

$$\text{P.ti staz.} \begin{cases} \left(1-\frac{1}{2}x\right)\left(y^2+4y\right)=0 \\ \left(x-\frac{1}{4}x^2\right)\left(2y+4\right)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \text{ o } y=0 \text{ o } y=-4 \\ x=0 \text{ o } x=4 \text{ o } y=-2 \end{cases}$$

5 PUNTI: $(2,-2)$ $(0,0)$ $(0,-4)$ $(4,0)$ $(4,-4)$

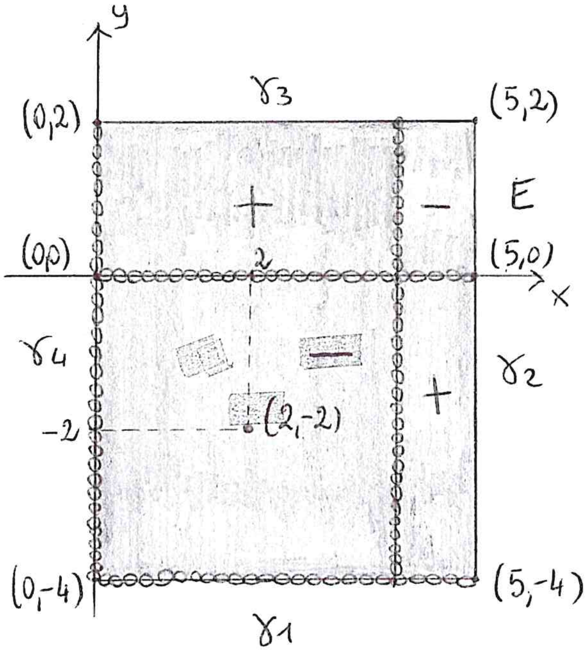
$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(y^2+4y\right) & \left(1-\frac{1}{2}x\right)\left(2y+4\right) \\ \left(1-\frac{1}{2}x\right)\left(2y+4\right) & 2\left(x-\frac{1}{4}x^2\right) \end{pmatrix}$$

$Hf(2,-2)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(2,-2)=4>0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2)>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-2)>0$ $\Rightarrow$ $(2,-2)$ è PUNTO di MINIMO LOCALE

$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=Hf(4,-4)$ $\det Hf(0,0)=\det Hf(4,-4)=-16<0$
$\Rightarrow$ $(0,0)$ e $(4,-4)$ sono PUNTI di SELLA

$Hf(0,-4)=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}=Hf(4,0)$ $\Rightarrow$ $\det Hf(0,-4)=\det Hf(4,0)=-16<0$
$\Rightarrow$ $(0,-4)$ e $(4,0)$ sono PUNTI di SELLA.

ES.1) <u>1° passo</u> E è il RETTANGOLO CHIUSO (bordi compresi) di VERTICI $(0,2)$ $(5,2)$ $(0,-4)$ $(5,-4)$



E è LIMITATO : $E \subset B_7(0,0)$ (perchè il punto più lontano da $(0,0)$ è $(5,-4)$ e $\text{dist}((0,0)(5,-4)) = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} \begin{matrix} >6 \\ <7 \end{matrix}$).

f è continua su $\mathbb{R}^2$ in quanto prodotto di due polinomi (di 2° grado in x e di 2° gr in y), quindi f è continua su E, Allora per il Teorema di Weierstrass esistono sicuramente il MASSIMO e il MINIMO ASSOLUTI di f su E.

<u>2° passo</u> $(2,-2)$ è P.TO di MIN LOCALE interno ad E con

$f(2,-2) = -4$

<u>3° passo</u> studio del bordo di E

su γ_1 e γ_4 $f \equiv 0$

$\gamma_2 \begin{cases} x = 5 \\ y = t \end{cases}$ $t \in [-4,2]$ $\quad g_2(t) = f(5,t) = \left(5 - \frac{25}{4}\right)(t^2+4t) =$

$= \left(-\frac{5}{4}\right)(t^2+4t) = -\frac{5}{4}t^2 - 5t$

$g_2'(t) = -\frac{5}{2}t - 5 \quad g_2'(t) = 0 \iff -\frac{5}{2}t - 5 = 0 \iff \frac{1}{2}t + 1 = 0 \iff t = -2$

TEMPI	$t=-4$	$t=-2$	$t=2$
PUNTI	$(5,-4)$	$(5,-2)$	$(5,2)$
VALORI	$f(5,-4)=0$	$f(5,-2)=5$	$f(5,2)=-15$

$\gamma_3 \begin{cases} x = t \\ y = 2 \end{cases}$ $t \in [0,5]$ $\quad g_3(t) = \left(t - \frac{1}{4}t^2\right) \cdot 12 = 12t - 3t^2$

$g_3'(t) = 12 - 6t \quad g_3'(t) = 0 \iff 12 - 6t = 0 \iff t = 2$

AN2 - 24/7/19 - 10

TEMPI $t=0$ $t=2$ $t=5$

PUNTI $(0,2)$ $(2,2)$ $(5,2)$

VALORI $f(0,2)=0$ $f(2,2)=12$ $f(5,2)=-15$.

4° passo: conclusione Nel punto di MINIMO LOCALE interno ad E $f(2,-2)=-4$, sul bordo f è compresa tra -15 e 12, quindi

$$\min_E f(x,y) = -15 = f(5,2) \quad \max_E f(x,y) = 12 = f(2,2).$$

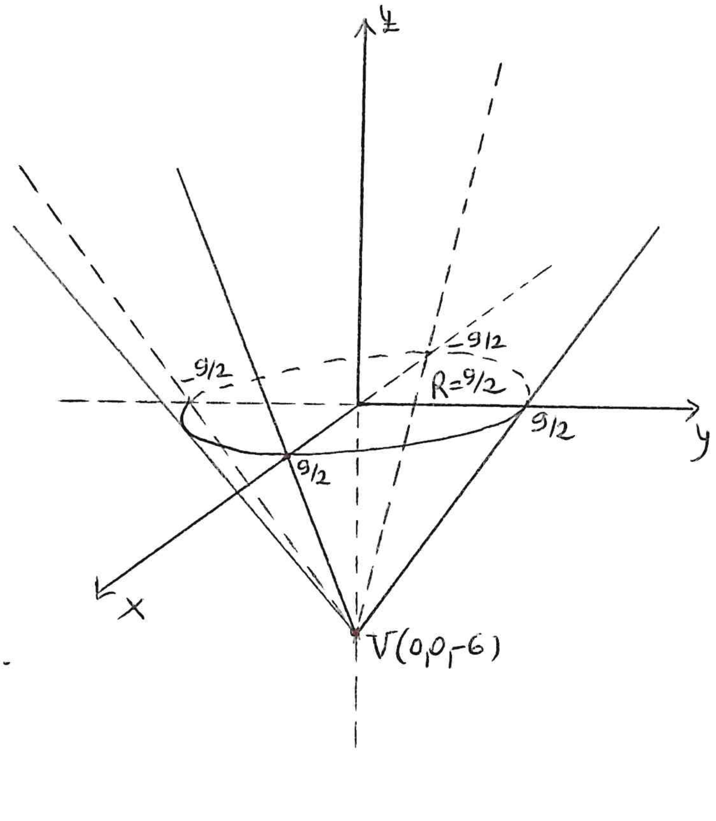
ES. 2) a) $\operatorname{dom} g = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$ perchè la condizione $x^2+y^2\geq 0$ risulta sempre verificata trattandosi di una somma di quadrati.

b) Il grafico di g ha eq.ne $z=-6+\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$: si tratta di un CONO CIRCOLARE rivolto verso l'alto di vertice $V(0,0,-6)$, apertura $a=\frac{4}{3}>1$ da cui si deduce che l'angolo $0<\hat{ap}<45°$ e si calcola mediante $\hat{ap}=\arctan\frac{3}{4}$. L'intersezione con il piano (x,y) è $\cap z=0$ $-6+\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}=0$ $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$

$x^2+y^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2$ circonf $C(0,0)$ $R=\frac{9}{2}=4{,}5$.

c) V è il SOLIDO compreso tra il cono del punto b) e il PARABOLOIDE $z=8-\frac{1}{6}(x^2+y^2)$ di $V(0,0,8)$ verso il basso ($\cap z=0$ su $x^2+y^2=48$ $R=4\sqrt{3}\simeq 6{,}9$)

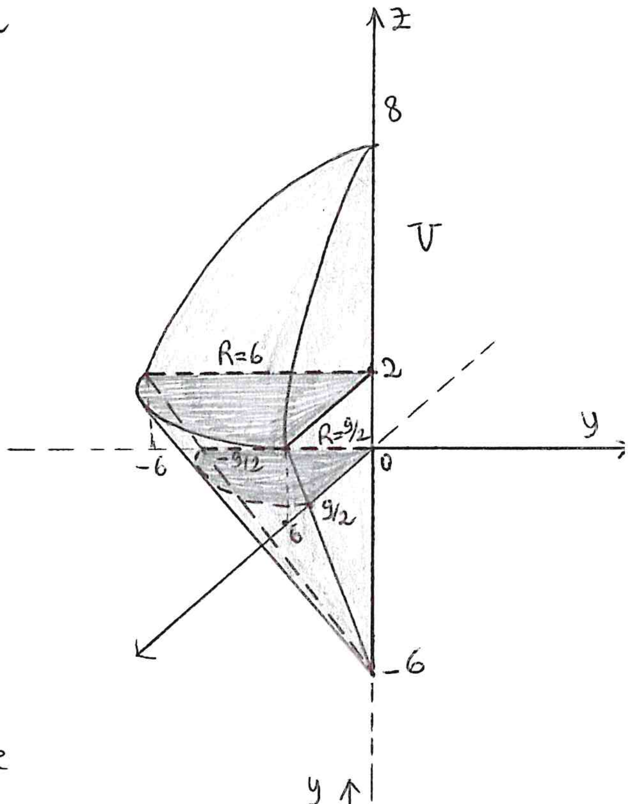
Per disegnare il solido è necessario determinare l'intersezione tra CONO e PARABOLOIDE che avviene in una circonferenza posta ad una determinata quota z.



AN2 - 24/7/19 - 11

$$\begin{cases} z = -6 + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} \\ z = 8 - \frac{1}{6}(x^2+y^2) \end{cases} \quad \dots\dots -6+\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} = 8 - \frac{1}{6}(x^2+y^2)$$

posta $x^2+y^2=R^2$ la circonf su cui si intersecano
si ha $\sqrt{x^2+y^2}=R$



$-6+\frac{4}{3}R = 8-\frac{1}{6}R^2 \quad \frac{1}{6}R^2+\frac{4}{3}R-14=0$

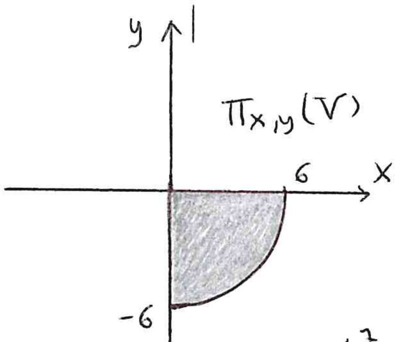
$R^2+8R-84=0 \quad R_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{1}=$

$= -4\pm\sqrt{100} = -4\pm 10 \quad \begin{matrix} \nearrow R_1=6 \\ \searrow R_2=-14<0 \\ \text{NON ACC.} \end{matrix}$

Cono e parab. si $\cap$ su $x^2+y^2=36$
$R=6$
a quota $z=2$:

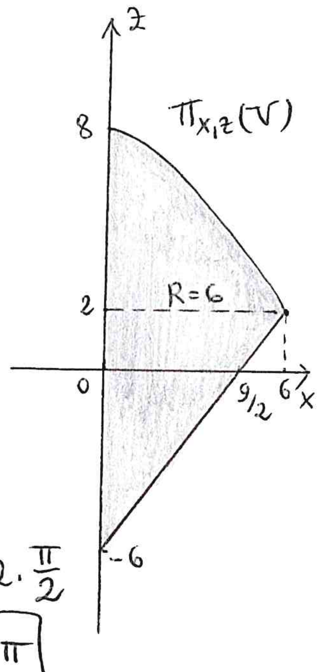
$$\begin{cases} z_{cono} = -6+\frac{4}{3}\cdot 6 = -6+8=2 \\ z_{par} = 8-\frac{1}{6}\cdot 36 = 8-6=2 \end{cases}$$

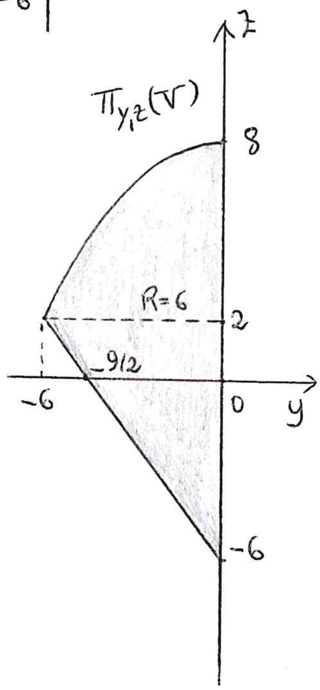
$x\geq 0 \ y\leq 0$ riduce il solido al 4° quadrante



d) Volume di $V = \int\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 36 \\ x\geq 0\ y\leq 0}} \left(8-\frac{1}{6}(x^2+y^2)-\left(-6+\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dx\,dy =$

$\underset{\substack{0\leq\rho\leq 6 \\ \frac{3}{2}\pi\leq\theta\leq 2\pi}}{\overset{\text{Coord POLARI}}{=}} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^6 \left(14\rho-\frac{1}{6}\rho^3-\frac{4}{3}\rho^2\right)d\rho\right)d\theta =$





$= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left[7\rho^2 - \frac{\rho^4}{24} - \frac{4}{9}\rho^3\right]_0^6 d\theta =$

$= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left[7\cdot 36 - \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{6}}{\underset{2\ 1}{\cancel{4}\cdot\cancel{6}}} - \frac{4\cdot\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\overset{2}{\cancel{6}}\cdot 6}{\underset{\cancel{3}\ 1}{\cancel{9}}}\right]d\theta =$

$= [\underbrace{252-54}_{198}-96]\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} d\theta = 102\left(2\pi-\frac{3}{2}\pi\right) = 102\cdot\frac{\pi}{2}$

$= \boxed{51\pi}$

AN2 - 24/7/19 - 12

ES. 3) eq.^{ne} omogenea associata: $16y''(x)+4y(x)=0$

eq.^{ne} caratteristica $16t^2+4=0$ $t^2=-\frac{1}{4}$ $\Delta<0$ nessuna sol.^{ne} reale

$t=\pm\frac{1}{2}i$ $\alpha=0$ $\beta=\frac{1}{2}$

SOL.^{ni} FONDAM. $y_1(x)=e^{0\cdot x}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)=\operatorname{sen}(\frac{x}{2})$

$y_2(x)=e^{0x}\cos(\frac{1}{2}x)=\cos(\frac{x}{2})$

Sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea: $y(x)=c_1\operatorname{sen}(\frac{x}{2})+c_2\cos(\frac{x}{2})$

$(c_1,c_2\in\mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare: $\bar{y}(x)=Ax^2+Bx+C$ perchè il 2°m dell' eq.^{ne} ($f(x)=\frac{1}{3}x^2-8x$) è un POLINOMIO di 2° grado e non si deve moltiplicare per x perchè nell' eq.^{ne} COMPARE $y(x)$.

$\bar{y}'(x)=2Ax+B$ $\bar{y}''(x)=2A$ Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo

$16\cdot 2A+4(Ax^2+Bx+C)=\frac{1}{3}x^2-8x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$4Ax^2+4Bx+(32A+4C)=\frac{1}{3}x^2-8x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Per il principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases}4A=\frac{1}{3}\\4B=-8\\32A+4C=0\end{cases}\qquad\begin{cases}A=\frac{1}{12}\\B=-2\\4C=-32A=-\frac{32}{12}=-\frac{8}{3}\end{cases}\quad C=-\frac{2}{3}$$

$\bar{y}(x)=\frac{1}{12}x^2-2x-\frac{2}{3}$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} sono:

$y(x)=c_1\operatorname{sen}(\frac{x}{2})+c_2\cos(\frac{x}{2})+\frac{1}{12}x^2-2x-\frac{2}{3}$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$

Cauchy $y'(x)=\frac{1}{2}c_1\cos(\frac{x}{2})-\frac{1}{2}c_2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})+\frac{1}{6}x-2$

$$\begin{cases}y(0)=c_2-\frac{2}{3}=-2\\y'(0)=\frac{1}{2}c_1-2=0\end{cases}\qquad\begin{cases}c_1=4\\c_2=-2+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

Sol.^{ne} a pag. 3