EQUAZIONI DIFFERENZIALI (ESERC. 1)

Molti fenomeni della Fisica, dell'Ingegneria o di altre Scienze Applicate possono essere descritti attraverso un modello matematico, costituito da una o più relazioni che legano tra loro una funzione incognita di una certa variabile e certe sue derivate.

Ad esempio un modello di crescita della popolazione, che si basa sull'ipotesi che queste ultime crescano a un tasso proporzionale al numero di individui è dato da: $\boxed{P'(t) = k\,P(t)}$ dove t è il tempo, P il numero di individui della popolazione e k una costante di proporzionalità.

Questa è un'equazione differenziale (E.D.) cui t è la variabile indipendente e $P(t)$ una funzione incognita.

Risolvendo l'equazione troveremo l'espressione algebrica di $P(t)$.

In questo caso è facile trovare una funzione la cui derivata è proporzionale alla funzione stessa: si può infatti dimostrare che le funzioni $\boxed{P(t) = C e^{kt}}$ sono, al variare di $C \in \mathbb{R}$, soluzioni di $P'(t) = k P(t)$, dato che $P'(t) = C k e^{kt} = k (C e^{kt}) = k P(t)$. Si può dimostrare anche che queste sono tutte e sole le soluzioni. Quindi il problema ha come soluzioni tutte e sole le infinite funzioni esponenziali $\boxed{P(t) = C e^{kt}}$, al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Chiameremo soluzione generale S.G. dell'E.D l'insieme di tutte le sue infinite soluzioni.

In realtà il modello dato non rispecchia il fatto per cui la popolazione a un certo punto smette di crescere perché un certo ambiente ha risorse limitate.

L'equazione che meglio rispecchia la realtà è $\boxed{P'(t) = k P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{H}\right)}$ dove H è una costante, relativa alla capacità di assorbimento dell'ambiente. L'equazione viene detta EQUAZIONE LOGISTICA.

- In generale, un $\boxed{\text{E.D.}}$ è dunque un'equazione che contiene una funzione incognita e una o più sue derivate.
- Si dice ordine dell'E.D. l'ordine della più alta derivata che compare nell'equazione (ad es. l'equazione logistica è del 1° ordine)
- La variabile indipendente può essere t (il tempo) ma non necessariamente (di solito la indicheremo con x e la funzione con $y(x)$)
- Una funzione f si dice soluzione dell'E.D. se $\forall x \in \mathbb{R}$ l'equazione è verificata sostituendo $y = f(x)$ e le sue derivate nell'equazione (ad es. $P(t) = 3e^{kt}$ è una soluzione dell'equazione del 1° esempio $\forall t \in \mathbb{R}$; data che la variabile è t, non x e la funzione è P, non y)
- Risolvere un'E.D. significa trovare tutte le sue soluzioni, che sono infinite, al variare di una o più costanti (in numero uguale all'ordine) e costituiscono la $\boxed{\text{S.G.}}$

3

Ricapitolando:

le equazione differenziali sono equazioni classiche dove si ha una funzione al posto dell'incognita x.

$4x - 5 = 0$ **eq. classica** $4f(x) - 5 = 0$ **eq. differenziale**

Non dovrò più cercate tutte i valori per cui l'equazione ha senso, ma tutte le funzioni per cui l'equazione ha senso.

Facciamo alcuni esempi molto semplici:

(1) $y'(x) = 3x^2 - 5x - 3$: questa è la definizione di PRIMITIVA, cioè stiamo cercando tutte le primitive di $3x^2-5x-3$, ma l'ins. di tutte le primitive di una $f(x)$ è il suo integrale INDEFINITO

Quindi $y(x) = \int (3x^2 - 5x - 3)\,dx =$

$$y(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + c, \quad \boxed{S.G.}$$

Questo procedimento, applicato più volte, consente di determinare la S.G. di tutte le E.D. della forma $y'(x) = f(x)$, $y''(x) = f(x)$, ...

Ad esempio:

(2) $y''(x) = 5x - 4$

Occorre integrare 2 volte:

$$y'(x) = \int (5x-4)\,dx = \frac{5}{2}x^2 - 4x + c_1$$

$$y(x) = \int \left(\frac{5}{2}x^2 - 4x + c_1\right) dx =$$

$$y(x) = \frac{5}{6}x^3 - 2x^2 + c_1 x + c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

È fondamentale poi saper verificare se una funzione $y=f(x)$ è soluzione di una certa equazione differenziale; si procede come nell'esempio della equazione $P'(t)=kP(t)$.

es Verificare se $y(x)=e^{3x}$ e $y(x)=e^{-3x}$ sono soluzioni di $\boxed{y''(x)+5y'(x)+6y(x)=0}$

- $\boxed{y(x)=e^{3x}}$ $\quad y'(x)=3e^{3x} \quad y''(x)=9e^{3x}$

  Sostituendo nell'equazione:

  $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}},\ 9e^{3x}+5\cdot 3e^{3x}+6e^{3x}=0$

  $\forall x\in\mathbb{R},\ 30e^{3x}=0$ (evidentemente NO)

- $y(x)=e^{-3x} \quad y'(x)=-3e^{-3x} \quad y''(x)=9e^{-3x}$

  Sostituendo:

  $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}},\ 9e^{-3x}+5(-3e^{-3x})+6e^{-3x}=0$

  $\forall x\in\mathbb{R},\ 5e^{-3x}-15e^{-3x}+6e^{-3x}=0$

  $0=0$ SÌ

(l'uguaglianza deve essere vera $\forall x\in\mathbb{R}$!)

E.D. LINEARI DEL 1° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

Sono E.D. del tipo $\boxed{y'(x) + a\,y(x) = f(x)}$

- Se $f(x)=0$ l'equazione viene detta OMOGENEA e si risolve molto facilmente:

$\boxed{\text{esempio}}$: $\boxed{y'(x) + 3y(x) = 0}$ $(a=3)$

Sostituendo nell'equazione a $y(x)$ e alle sue derivate la variabile t elevata al grado corrispondente all'ordine della derivata ($y' \to t^1$; $y \to t^0 = 1$) si ottiene un'equazione algebrica detta EQUAZIONE CARATTERISTICA (E.C.)

Nel nostro caso l'E.C. è $t+3=0$

che ha soluzione $t=\boxed{-3}$. $(t=-a)$

Si può dimostrare che la S.G. dell'E.D. è $y(x) = c\,e^{\boxed{-3}x}$, con $c \in \mathbb{R}$.

$\boxed{c\,e^{-ax}}$

- Se $f(x) \neq 0$

l'equazione si dice COMPLETA e la risoluzione viene fatta in 3 passi:

1) Si determina la S.G. dell'equazione omogenea associata (ponendo $f(x)=0$)

2) Si determina una SOLUZIONE PARTICOLARE (S.P.) $\bar{y}(x)$ dell'equazione completa.

3) La S.G. dell'equazione completa si ottiene sommando la S.G. della omogenea con la S.P. della completa.

Di questi 3 passi il più difficile è sicuramente il secondo.

- La forma in cui si deve cercare $\bar{y}(x)$ dipende da $f(x)$. Come $f(x)$ potremo trovare un polinomio, un polinomio moltiplicato per una funzione esponenziale, una combinazione lineare di seno e coseno dello stesso argomento.
- In ognuno di questi tre casi $\bar{y}(x)$ avrà la stessa forma di $f(x)$, ma con coefficienti generici A, B, C, ... da determinare, a parte il caso particolare in cui occorre moltiplicare per x (vedi a pag. 8 in fondo, per le eq. del 1° ordine)

Come si scrive la forma generica di $\bar{y}(x)$, a parte i $\boxed{\text{casi particolari}}$ in cui occorre moltiplicare $\boxed{\text{per } x}$:

$\boxed{1}$ $f(x) = 5$ $\qquad \bar{y}(x) = A$ (da determinare)

$\boxed{2}$ $f(x) = 3x - 2$ $\qquad \bar{y}(x) = Ax + B$

$\boxed{3}$ $f(x) = 5x^2 - 4x - 3$ $\qquad \bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$

$\boxed{4}$ $f(x) = e^{5x}$ $\qquad \bar{y}(x) = A \cdot e^{5x}$

$\boxed{5}$ $f(x) = (5x - 4)\,e^{5x}$ $\qquad \bar{y}(x) = (Ax + B)\,e^{5x}$

$\boxed{6}$ $f(x) = 5\cos 4x$ $\qquad \bar{y}(x) = A\,\text{sen}\,4x + B\cos 4x$

$\boxed{7}$ $f(x) = 3\,\text{sen}\,4x - 2\cos 4x$

$\bar{y}(x) = A\,\text{sen}\,4x + B\cos 4x$

$\boxed{\text{Casi particolari}}$

1) Se il 2° membro è un polinomio si deve moltiplicare per x quando nel 1° membro manca $y(x)$ (ma l'equazione diventa $y'(x) = f(x)$ e conviene risolverla come nell'esempio a pag. 4).

2) Se il 2° membro è un polinomio moltiplicato per e^{kx} e k è soluzione dell'E.C. allora bisogna

Importante:

Un equazione differenziale non ha mai un sola soluzione ma infinite.

moltiplicare per x.

Esempio: $\boxed{y'(x) + 3y(x) = (x^2-4)e^{-3x}}$ K

E.C.: $t+3=0 \rightarrow t=-3=K$

$$\bar{y}(x) = (\underbrace{Ax^2+Bx+c}_{\text{generico polinomio di } 2^\circ \text{ grado}})\cdot x \cdot e^{-3x} = (Ax^3+Bx^2+Cx)e^{-3x}$$

• Se $f(x)$ è somma di 2 funzioni dei casi descritti ($f(x) = f_1(x) + f_2(x)$) si determinano 2 S.P., $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(x)$ rispettivamente S.P. di $\boxed{y'(x) + a\,y(x) = f_1(x)}$ e $\boxed{y'(x) + a\,y(x) = f_2(x)}$ e $\boxed{\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)}$

Esempio: $y'(x) - 2y(x) = \underbrace{\operatorname{sen} 3x}_{f_1} - \underbrace{2e^{2x}}_{f_2}$

$\bar{y}_1(x) = A \operatorname{sen} 3x + B\cos 3x \rightarrow$ S.P. di $y'(x) - 2y(x) = \operatorname{sen} 3x$

$\bar{y}_2(x) = A\boxed{x}e^{2x} \rightarrow$ S.P. di $y'(x) - 2y(x) = -2e^{2x}$

(n.b. 2 è soluzione dell'E.C. $t-2=0$ e quindi si deve moltiplicare per x)

In questo ambito va considerato anche il caso in cui al 2° membro compaiono seno e/o coseno ma di argomenti diversi (tipo $\operatorname{sen} 3x - 2\cos 4x$) $\rightarrow$

$\bar{y}_1(x) = A\operatorname{sen} 3x + B\cos 3x$

$\bar{y}_2(x) = A\operatorname{sen} 4x + B\cos 4x$

$\boxed{1}$ $\boxed{y'(x) + 2\,y(x) = 5x^2 - 4x - 3}$

n.b.: useremo sempre le abbreviazioni:

E.D. per EQUAZIONE DIFFERENZIALE

S.P. per SOLUZIONE PARTICOLARE

S.G. per SOLUZIONE GENERALE

1 - OMOGENEA: $y'(x) + 2y(x) = 0$

E.C.: $t + 2 = 0 \longrightarrow t = -2$

$\boxed{y(x) = c\,e^{-2x}}$ S.G.

2 - $\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$

$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$; sostituendo nell'eq. completa, di cui $\bar{y}(x)$ deve essere S.P. otteniamo:

non abbiamo moltiplicato per x perché al 1° membro compare y

$$2Ax + B + 2(Ax^2 + Bx + C) = 5x^2 - 4x - 3$$

$$2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C - 5x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(2A - 5)x^2 + (2A + 2B + 4)x + B + 2C + 3 = 0$$

Affinché l'uguaglianza sia verificata $\forall x$ occorre che i 3 coefficienti valgano 0.

Quindi
$$\begin{cases} 2A - 5 = 0 \longrightarrow A = \frac{5}{2} \\ 2A + 2B + 4 = 0 \longrightarrow \cancel{2} \cdot \frac{5}{\cancel{2}} + 2B + 4 = 0 \longrightarrow B = -\frac{9}{2} \\ B + 2C + 3 = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{9}{2} + 2C + 3 = 0$$

$$2C = \frac{3}{2} \longrightarrow C = \frac{3}{4}$$

Quindi $\boxed{\bar{y}(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{4}}$

3 - $\boxed{y(x) = c\,e^{-2x} + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{4}}$ è S.G.

dell'equazione completa -

Verifica: calcoliamo $y'(x)$ relativamente alla S.G.: $\boxed{y'(x) = -2c\,e^{-2x} + 5x - \frac{9}{2}}$;

sostituiamo nell'eq. completa $y(x)$ e $y'(x)$:

$$-2c\,e^{-2x} + 5x - \frac{9}{2} + 2\left(c\,e^{-2x} + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{4}\right) =$$

$$= \cancel{-2c\,e^{-2x}} + \underline{5x} - \frac{9}{2} + \cancel{2c\,e^{-2x}} + 5x^2 - \underline{9x} + \frac{3}{2} =$$

$$= 5x^2 - 4x - 3 \quad \text{VERO}$$

È chiaro che se si fa la verifica occorre fare molta attenzione perché l'errore è sempre in agguato, ma è l'unico modo per controllare se il risultato è giusto.

Prima di fare un altro esempio ragioniamo un attimo sul PROBLEMA DI CAUCHY, che è il problema, che si presenta soprattutto relativamente a problemi di fisica,

di Trovare una soluzione di un'E.D.
che soddisfi una condizione del tipo
$\boxed{y(x_0) = y_0}$, detta anche "condizione iniziale"
perché spesso x in problemi fisici è il
tempo e y una variabile che dipende dal
tempo.

- Supponiamo quindi che al problema precedente sia associata la condizione $\boxed{y(0)=3}$

Conosciamo già la S.G.:

$$\boxed{y(x) = c\,e^{-2x} + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{4}}$$

Calcoliamo $y(0) = c\,e^0 + \frac{5}{2}\cdot 0 - \frac{9}{2}\cdot 0 + \frac{3}{4}$

Quindi $y(0) = \boxed{c + \frac{3}{4} = 3}$, da cui $c = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

La soluzione del PROBLEMA di CAUCHY
è quindi $\boxed{y(x) = \frac{9}{4}e^{-2x} + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{4}}$,
che è l'unica sol. che verifica la condizione
data: è una ben precisa funzione, con un
suo ben preciso grafico, che passa per
il punto di R^2 avente coordinate $(0,3)$,
è l'unica tra le ∞ funzioni corrispondenti alla
S.G. il cui grafico passa per $(0,3)$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} \boxed{y'(x) - 3y(x) = (5x-4)\,e^{\boxed{5}x}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

1) E.C. OMOGENEA: $t - 3 = 0 \longrightarrow t = 3$

$y(x) = c\,e^{3x}$ S.G. OMOGENEA

2) 5 non è soluzione dell'E.C., quindi

$\bar{y}(x) = (Ax + B)\cdot e^{5x}$ (non dobbiamo moltiplicare per x)

$\bar{y}'(x) = A\cdot e^{5x} + (Ax+B)\cdot 5e^{5x} =$

$= e^{5x}(A + 5Ax + 5B)$

Sostituendo nell'eq. completa:

$e^{5x}(A + 5Ax + 5B) - 3(Ax + B)\cdot e^{5x} = (5x-4)e^{5x}$

$e^{5x}(A + 5Ax + 5B - 3Ax - 3B) = e^{5x}(5x-4)$

da cui $\boxed{A + 5Ax + 5B - 3Ax - 3B - 5x + 4 = 0}$

Abbiamo diviso entrambi i membri per e^{5x} perché $e^{5x} \neq 0 \ \forall x$

$(2A - 5)x + A + 2B + 4 = 0$

$\begin{cases} 2A - 5 = 0 \longrightarrow A = \frac{5}{2} \\ A + 2B + 4 = 0 \longrightarrow \frac{5}{2} + 2B + 4 = 0 \end{cases}$

$2B = -\frac{13}{2} \longrightarrow B = -\frac{13}{4}$

$$\boxed{\bar{y}(x) = \left(\frac{5}{2}x - \frac{13}{4}\right)e^{5x}}$$ è la S.P. della completa

3) $$\boxed{y(x) = c\,e^{3x} + \left(\frac{5}{2}x - \frac{13}{4}\right)e^{5x}}$$ è S.G. dell'E.D.

4) Risolviamo il problema di CAUCHY:

$$y(0) = c\,e^{0} + \left(\frac{5}{2}\cdot 0 - \frac{13}{4}\right)e^{0} = \boxed{c - \frac{13}{4} = 2}$$

$$c = 2 + \frac{13}{4} = \frac{21}{4}$$

L'unica sol. del problema è quindi:

$$\boxed{y(x) = \frac{21}{4}\,e^{3x} + \left(\frac{5}{2}x - \frac{13}{4}\right)e^{5x}}$$

Verifica: $y'(x) = \frac{21}{4}\cdot 3\,e^{3x} + \frac{5}{2}\cdot e^{5x} + \left(\frac{5}{2}x - \frac{13}{4}\right)\cdot 5e^{5x}$

da cui, sostituendo nel 1° membro dell'E.D.:

$$\frac{63}{4}e^{3x} + \frac{5}{2}e^{5x} + \frac{25}{2}x\,e^{5x} - \frac{65}{4}e^{5x} - 3\cdot\left(\frac{21}{4}e^{3x} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{2}x\,e^{5x} - \frac{13}{4}e^{5x}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{63}{4}e^{3x}} + \frac{5}{2}e^{5x} + \frac{25}{2}xe^{5x} - \frac{65}{4}e^{5x} - \cancel{\frac{63}{4}e^{3x}} +$$

$$- \frac{15}{2}xe^{5x} + \frac{39}{4}e^{5x} = 5xe^{5x} + \frac{10-65+39}{4}e^{5x} =$$

$$= (5x-4)\,e^{5x}$$ O.K

$$y(0) = \frac{21}{4}e^{0} + \left(\frac{5}{2}\cdot 0 - \frac{13}{4}\right)e^{0} = \frac{21}{4} - \frac{13}{4} = 2$$ O.K

$\boxed{3}$ $$\boxed{y'(x) - 2y(x) = \operatorname{sen} 3x - 2e^{2x}}$$

Attenzione: quando al 2° membro compare una combinazione lineare di seno e coseno NELLE EQUAZIONI DEL 1° ORDINE non si deve MAI moltiplicare per x

1) E.C.: $t - 2 = 0 \rightarrow t = 2$

$$\boxed{y(x) = c\,e^{2x}}$$ S.G. OMOGENEA

2) Come da Esempio a pag. 9,

• $$\boxed{\bar{y}_1(x) = A \operatorname{sen} 3x + B\cos 3x}$$

$$\bar{y}_1'(x) = 3A\cos 3x - 3B\operatorname{sen} 3x$$

Sostituendo in $\boxed{y'(x) - 2y(x) = \operatorname{sen} 3x}$:

$$3A\cos 3x - 3B\operatorname{sen} 3x - 2(A\operatorname{sen} 3x + B\cos 3x) = \operatorname{sen} 3x$$

$$3A\cos 3x - 3B\operatorname{sen} 3x - 2A\operatorname{sen} 3x - 2B\cos 3x - \operatorname{sen} 3x = 0$$

$$(3A - 2B)\cos 3x + (-3B - 2A - 1)\operatorname{sen} 3x = 0$$

Affinché l'uguaglianza valga $\forall x$ occorre che
$$\begin{cases} 3A - 2B = 0 \\ +3B + 2A + 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow A = \frac{2}{3}B$$

$$3B + \frac{4}{3}B = -1$$

$$\frac{13}{3}B = -1 \rightarrow B = \boxed{-\frac{3}{13}}$$

$$A = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{13}\right) = \boxed{-\frac{2}{13}}$$

Quindi $\boxed{\bar{y}_1(x) = -\frac{2}{13}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{13}\cos 3x}$

- $\boxed{\bar{y}_2(x) = A x e^{2x}}$ (perché 2 è soluz. dell'E.C.)

Sostituendo in $\boxed{y'(x) - 2y(x) = -2e^{2x}}$

$$\bar{y}_2'(x) = A\left(e^{2x} + 2x e^{2x}\right)$$

$$A e^{2x} + \cancel{2Axe^{2x}} - \cancel{2Axe^{2x}} = -2e^{2x}$$

$$A e^{2x} = -2e^{2x} \longrightarrow A = -2$$

Quindi $\boxed{\bar{y}_2(x) = -2x e^{2x}}$ e:

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) = \boxed{-\frac{2}{13}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{13}\cos 3x - 2xe^{2x}}$$

3) $\boxed{y(x) = c e^{2x} - \frac{2}{13}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{13}\cos 3x - 2x e^{2x}}$

è la S.G. dell'eq. completa.

Verifica:

$$y'(x) = 2ce^{2x} - \frac{6}{13}\cos 3x + \frac{9}{13}\operatorname{sen} 3x - 2\left[e^{2x} + 2xe^{2x}\right]$$

Sostituendo nel 1° membro dell'E.D.:

$$2ce^{2x} - \frac{6}{13}\cos 3x + \frac{9}{13}\operatorname{sen} 3x - 2e^{2x} - 4xe^{2x} +$$

$$-2\left(ce^{2x} - \frac{2}{13}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{13}\cos 3x - 2xe^{2x}\right) =$$

$$= \cancel{2ce^{2x}} - \cancel{\frac{6}{13}\cos 3x} + \frac{9}{13}\operatorname{sen} 3x - 2e^{2x} - \underline{4xe^{2x}} +$$

$$- \cancel{2ce^{2x}} + \frac{4}{13}\operatorname{sen} 3x + \cancel{\frac{6}{13}\cos 3x} + \underline{4xe^{2x}} =$$

$$= \operatorname{sen} 3x - 2e^{2x}$$

O.K