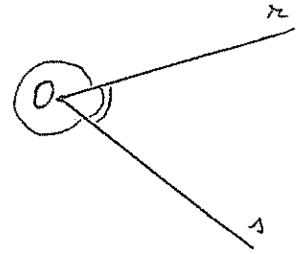
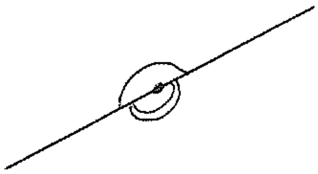
# Ripassiamo gli $\boxed{\text{ANGOLI}}$

In un piano consideriamo due semirette $r, s$ aventi la stessa origine $O$: queste semirette dividono il piano in due parti

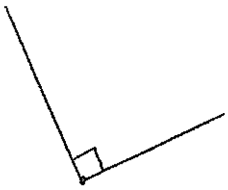



Si dice ANGOLO ciascuna delle due parti in cui il piano è diviso da due semirette distinte con l'origine in comune. Le semirette si dicono LATI dell'angolo, l'origine si dice VERTICE dell'angolo.

CASI particolari

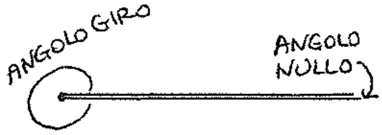


ANGOLI PIATTI (180°)



ANGOLO RETTO (90°)

Se le due semirette sono SOVRAPPOSTE generano l'angolo NULLO (0°) e l'angolo GIRO (360°)



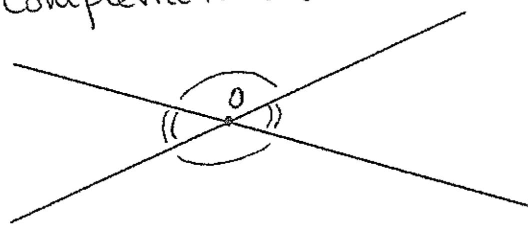

Si definisce BISETTRICE di un ANGOLO la semiretta di origine O, interna all'angolo, che divide l'angolo in due parti congruenti.

Due angoli si dicono ESPLEMENTARI se hanno per somma un angolo giro.

Due angoli si dicono SUPPLEMENTARI se hanno per somma un angolo piatto.

Due angoli si dicono COMPLEMENTARI se la loro somma è congruente ad un angolo retto.

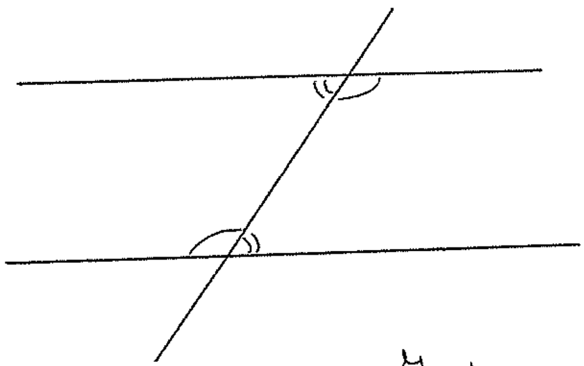
Nelle seguenti situazioni è utile saper riconoscere gli angoli congruenti, supplementari e complementari:



ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE

gli angoli indicati allo stesso modo sono congruenti (gli angoli opposti al vertice sono congruenti).

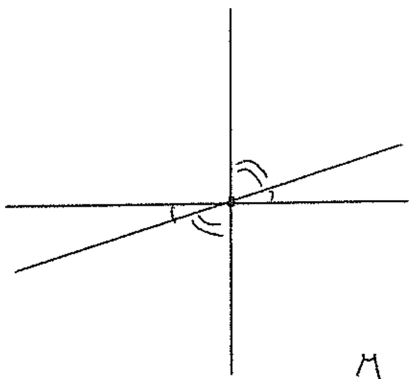
I due angoli )) e ) sono SUPPLEMENTARI.



RETTE PARALLELE TAGLIATE DA UNA RETTA OBLIQUA

Gli angoli indicati allo stesso modo (detti alterni interni) sono congruenti.

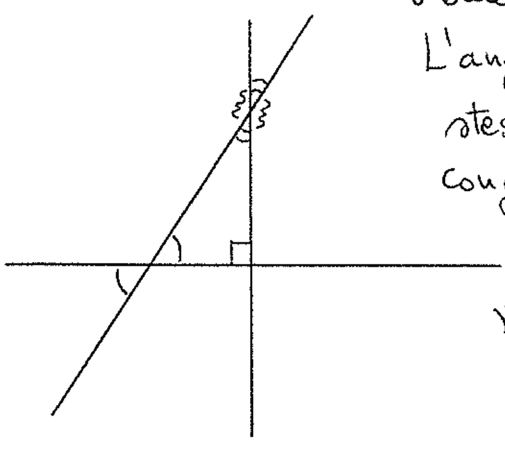
I due angoli )) e ) (detti coniugati interni) sono supplementari.



RETTE PERPENDICOLARI CON UNA RETTA OBLIQUA

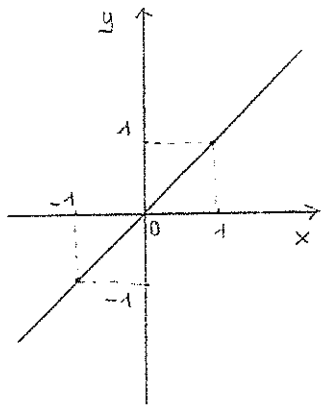
Gli angoli indicati allo stesso modo (opposti al vertice tra loro) sono congruenti.

I due angoli )) e ) sono complementari

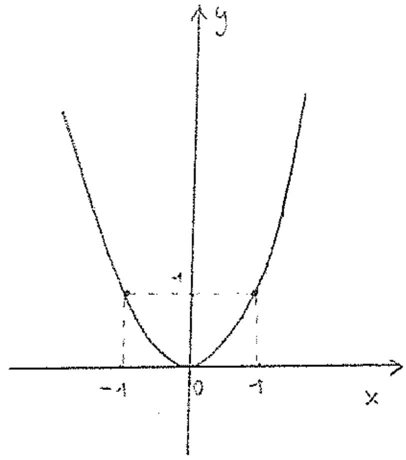


L'angolo ⌝ è retto, gli angoli indicati allo stesso modo (opposti al vertice tra loro) sono congruenti. I due angoli ) e )) sono complementari. I due angoli )) e m sono supplementari.

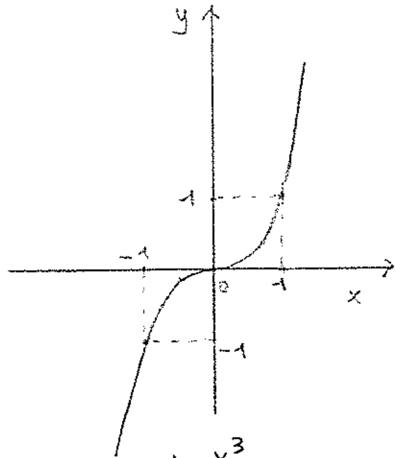
9) Ripassiamo il GRAFICO DELLE FUNZIONI ELEMENTARI



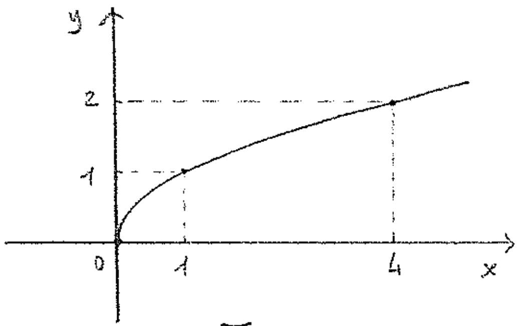
$y=x$



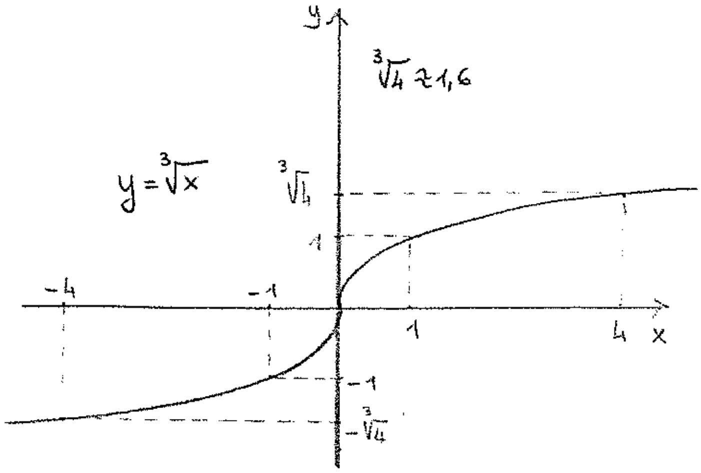
$y=x^2$



$y=x^3$

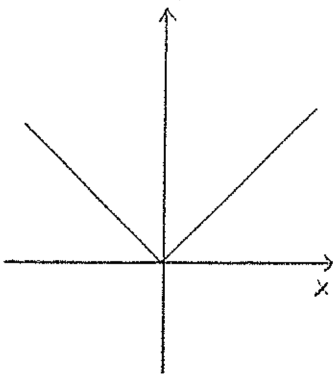


$y=\sqrt{x}$

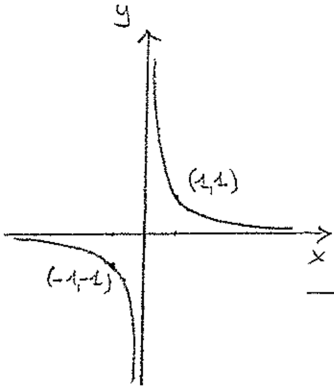


$\sqrt[3]{4} \cong 1,6$

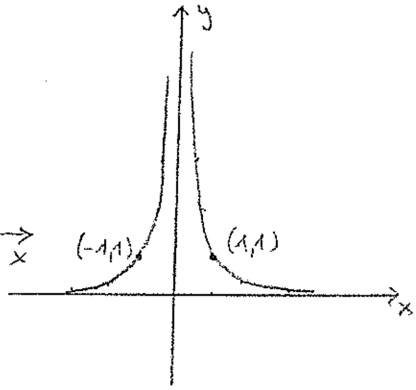
$y=\sqrt[3]{x}$



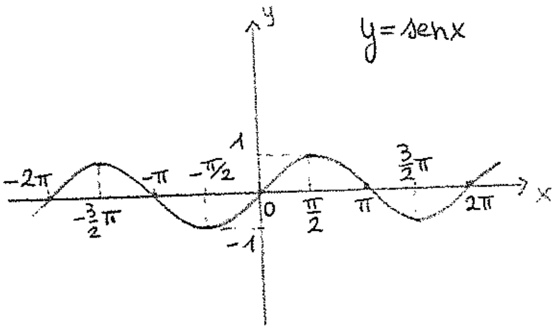
$y=|x|$



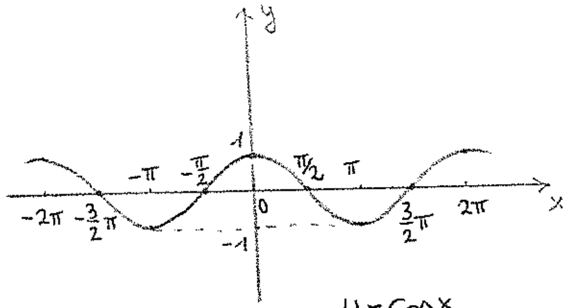
$y=\frac{1}{x}$



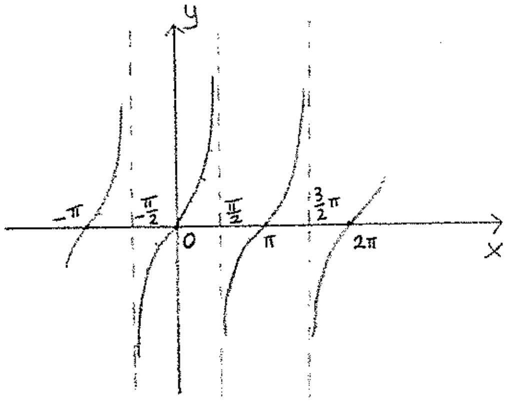
$y=\frac{1}{x^2}$



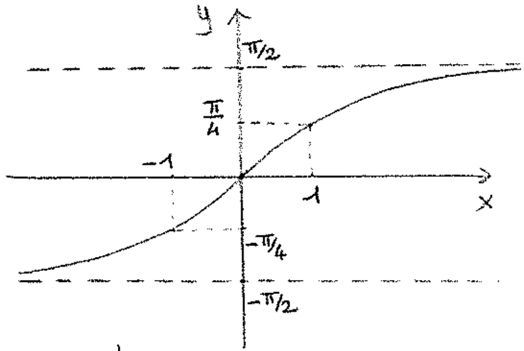

$y = \operatorname{sen} x$




$y = \cos x$

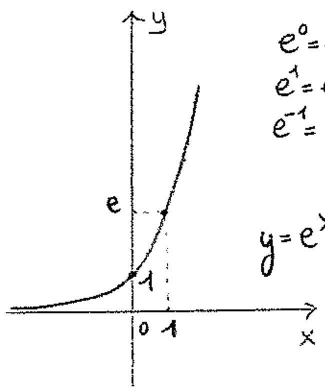



$y = \tan x$



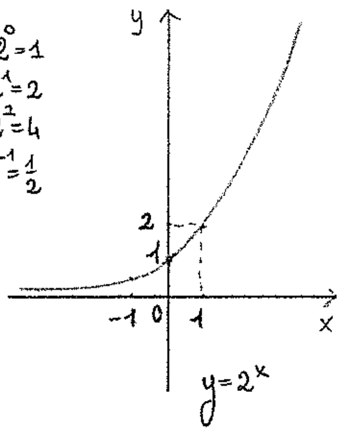

$y = \arctan x$

$e^0 = 1$
$e^1 = e \simeq 2{,}7$
$e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0{,}37$



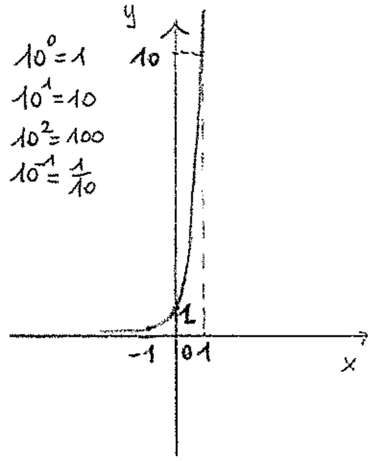

$y = e^x$

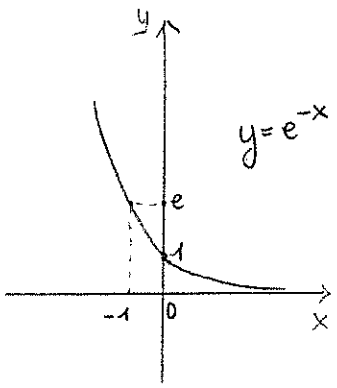
$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^{-1} = \frac{1}{2}$




$y = 2^x$

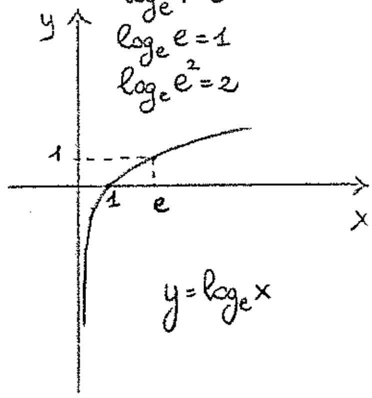
$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^{-1} = \frac{1}{10}$



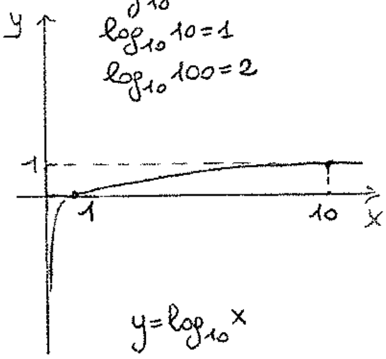

$y = e^{-x}$

$\log_e 1 = 0$
$\log_e e = 1$
$\log_e e^2 = 2$




$y = \log_e x$

$\log_{10} 1 = 0$
$\log_{10} 10 = 1$
$\log_{10} 100 = 2$




$y = \log_{10} x$

Riprendiamo gli esercizi

Il logaritmo log è sempre inteso in base e : $\log_e$

9bis) Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4} + \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{1}{x-4}$ d) $f(x) = \log(x^2-5x+6) + \sqrt{4x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{(x-1)^2}$ f) $f(x) = e^{x-3} + \sqrt{x^2-1}$

g) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) - \sqrt{9-x^2} + \dfrac{\log(1-2x)}{e^{2x}}$

h) $f(x) = \dfrac{\cos x}{9x-4x^2-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-x^2+x}}{2-3x}$

j) $f(x) = \dfrac{\log\left(1-\frac{3}{2}x-x^2\right)}{16x^2-1} + \sqrt{5x+7}$

K) $f(x) = \dfrac{\log((x+2)(x+1)-2)}{x^2+10x+25}$

Per prima cosa è necessario ripassare tutte le funzioni ELEMENTARI (seno, coseno, radice, logaritmo in base e, esponenziale, iperbole riferita agli assi) e non avere alcun dubbio sul loro grafico e sul loro dominio. Fatto questo, il dominio di una funzione si ottiene tramite varie condizioni A SISTEMA : le condizioni devono essere tutte verificate e pertanto è necessario INTERSECARE LE CONDIZIONI.

Se un punto $x_0 \in \operatorname{dom} f$, quando si sostituisce tale valore e si calcola $f(x_0)$ si deve ottenere un numero reale, anche il numero 0. Se invece $x_0 \notin \operatorname{dom} f$, nel calcolo di $f(x_0)$ si deve incontrare almeno una operazione che è impossibile eseguire. Non si possono eseguire le seguenti operazioni:

- dividere un numero per 0 ⇒ ogni denominatore deve essere posto $\neq 0$
- calcolare la radice di un numero negativo ⇒ l'<u>argomento</u> di ogni $\sqrt{\dots}$ deve essere posto $\underline{\geq 0}$
- calcolare il logaritmo di un numero negativo o nullo ⇒ l'<u>argomento</u> di ogni $\log(\dots)$ deve essere posto $\underline{>0}$.

Invece è sempre possibile calcolare seno, coseno e esponenziale di qualunque numero.

<u>SOL.$^{ne}$ es. 9bis)</u> a) $\text{dom} f: x^2-4\neq 0 \to x\neq \pm 2$

$$\text{dom} f = ]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,2[\,\cup\,]2,+\infty[$$

<u>OSS.</u> Se possibile scrivete gli insiemi utilizzando gli intervalli:

$]-\infty,a[\ \to\ x<a$ $\quad ]-\infty,a]\to x\leq a$ $\quad ]-a,a[\to -a<x<a$

$[-a,a]\to -a\leq x\leq a$ $\quad [-a,a[\to -a\leq x<a$ $\quad ]a,+\infty[\to x>a$

$]-a,a]\to -a<x\leq a$ $\quad [a,+\infty[\to x\geq a$

b) $\text{dom} f\begin{cases} x^2+4\neq 0 & \text{sempre vera} \\ x+1\geq 0 & x\geq -1\end{cases}$ $\qquad \text{dom} f=[-1,+\infty[$

c) $\text{dom} f\begin{cases} x+1\geq 0 & x\geq -1 \\ x-2>0 & x>2 \\ x-4\neq 0 & x\neq 4\end{cases}$ $\qquad \text{dom} f = ]2,4[\,\cup\,]4,+\infty[$

$\sqrt{x-2}$ è a denominatore, quindi deve essere $\neq 0$

d) $\text{dom} f\begin{cases} x^2-5x+6>0 & x<2 \cup x>3 \\ 4x+3\geq 0 & x\geq -\frac{3}{4}\end{cases}$ $\qquad \text{dom} f=[-\frac{3}{4},2[\,\cup\,]3,+\infty[$

e) dom f $\begin{cases} x^2+x-2\geq 0 & x\leq -2 \cup x\geq 1 \\ (x-1)^2\neq 0 & x\neq 1 \end{cases}$ dom f $= ]-\infty,-2] \cup ]1,+\infty[$

f) dom f : $x^2-1\geq 0$ $\quad x\leq -1 \cup x\geq 1$ $\quad$ dom f $= ]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

g) dom f $\begin{cases} 9-x^2\geq 0 & -3\leq x\leq 3 \\ 1-2x>0 & x<\frac{1}{2} \\ e^{2x}\neq 0 & \forall x \end{cases}$ dom f $= [-3,\frac{1}{2}[$

h) dom f $\begin{cases} 9x-4x^2-2\neq 0 & x\neq \frac{1}{4}, 2 \\ x>0 \end{cases}$ dom f $= ]0,\frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4},2[\cup]2,+\infty[$

i) dom f $\begin{cases} 6-x^2+x\geq 0 & -2\leq x\leq 3 \\ 2-3x\neq 0 & x\neq \frac{2}{3} \end{cases}$ dom f $= [-2,\frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3},3]$

j) dom f $\begin{cases} 1-\frac{3}{2}x-x^2>0 & -2<x<\frac{1}{2} \\ 16x^2-1\neq 0 & x\neq \pm\frac{1}{4} \\ 5x+7\geq 0 & x\geq -7/5 \end{cases}$ dom f $= [-\frac{7}{5},-\frac{1}{4}[\cup]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4},\frac{1}{2}[$

K) dom f $\begin{cases} (x+2)(x+1)-2>0 & x^2+3x>0 & x<-3\cup x>0 \\ x^2+10x+25\neq 0 & (x+5)^2\neq 0 & x\neq -5 \end{cases}$ dom f $= ]-\infty,-5[\cup]-5,-3[\cup]0,+\infty[$

10) Costruiamo il grafico delle seguenti funzioni a partire dalle funzioni elementari:

a) $f(x)=\sqrt{x}+2$ $\quad$ b) $f(x)=\sqrt{x-2}$ $\quad$ c) $f(x)=x^3-1$

d) $f(x)=x^3+1$ $\quad$ e) $f(x)=-\sqrt{x}-1$ $\quad$ f) $f(x)=e^x-1$

g) $f(x)=e^{x+1}$ $\quad$ h) $f(x)=-1+\log x$ $\quad$ i) $f(x)=\log(2+x)$

j) $f(x)=3+\log x$ $\quad$ K) $f(x)=2+\operatorname{sen} x$ $\quad x\in[-2\pi,2\pi]$

l) $f(x)=1+\cos x$ $\quad x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{5}{2}\pi]$ $\quad$ m) $f(x)=\frac{1}{x}-2$

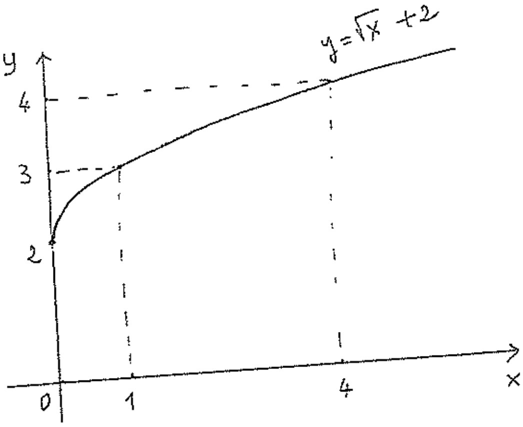
n) $f(x)=2+\sqrt{x+3}$ o) $f(x)=\log(x-1)$

p) $f(x)=\frac{1}{x}+1$ q) $f(x)=e^{-x}$ r) $f(x)=-1+\sqrt{x}$

s) $f(x)=-2+\cos x$ $x\in[-\pi,\frac{5}{2}\pi]$

SOL.$^{ne}$

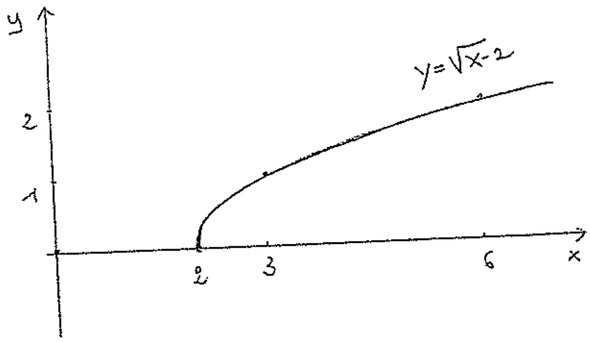
10) Solo di alcuni faccio il disegno




a) $\mathrm{dom}f=[0,+\infty[$ grafico $y=\sqrt{x}+2$

grafico $y=\sqrt{x}$ alzato verso l'alto di 2

$f(0)=2$ $f(1)=3$ $f(4)=4$




b) $\mathrm{dom}f=[2,+\infty[$ grafico $y=\sqrt{x-2}$

grafico $y=\sqrt{x}$ spostato verso **destra** di 2

$f(2)=0$ $f(3)=1$ $f(6)=2$

c) $\mathrm{dom}f=\mathbb{R}$ graf $y=x^3-1$ cubica $y=x^3$ spostata verso il basso di 1

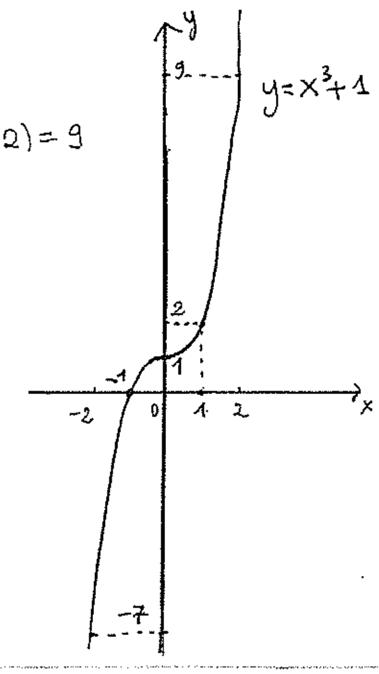
$f(-2)=-9$ $f(-1)=-2$ $f(0)=-1$

$f(1)=0$ $f(2)=7$

d) $\mathrm{dom}f=\mathbb{R}$ graf $y=x^3+1$

cubica $y=x^3$ spostata verso l'alto di 1

$f(-2)=-7$ $f(-1)=0$ $f(0)=1$ $f(1)=2$ $f(2)=9$



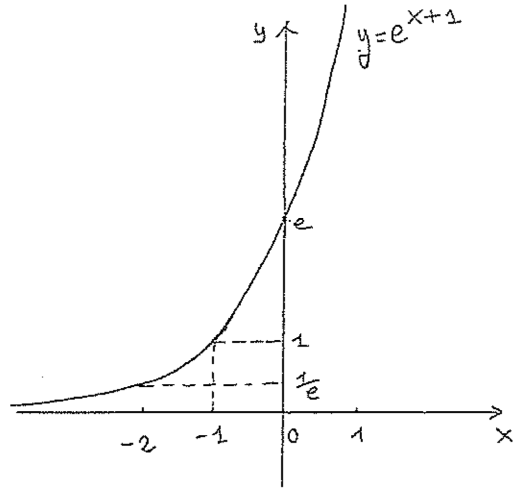
e) $\mathrm{dom} f = [0, +\infty[$ graf $y = -\sqrt{x} - 1$ grafico della radice $y = \sqrt{x}$ prima capovolto $\rightarrow y = -\sqrt{x}$ e poi spostato verso il basso di 1

$f(0) = -1$ $f(1) = -2$ $f(4) = -3$

f) $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ graf $y = e^x + 1$ grafico della funzione esponenziale $y = e^x$ spostato verso l'alto di 1

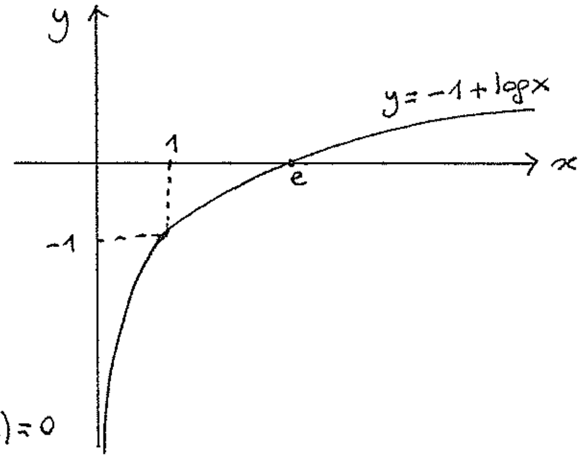
$f(-1) = 1 + \frac{1}{e}$ $f(0) = 2$ $f(1) = 1 + e$

g) $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ graf $y = e^{x+1}$ grafico $y = e^x$ spostato verso sinistra di 1

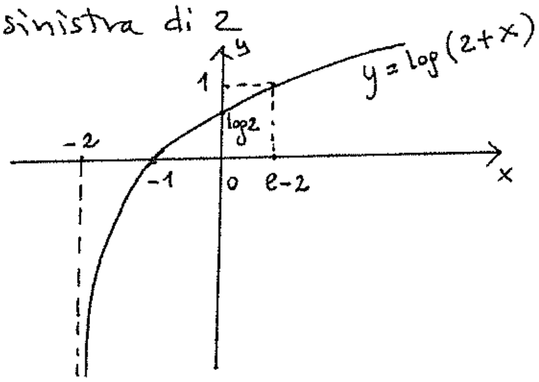



$f(-2) = \frac{1}{e}$ $f(-1) = 1$ $f(0) = e$

h) $\mathrm{dom} f = ]0, +\infty[$ grafico $y = -1 + \log x$ grafico del logaritmo $y = \log x$ spostato verso il basso di 1 $f(1) = -1$ $f(e) = 0$




i) $\mathrm{dom} f = ]-2, +\infty[$ grafico $y = \log(2+x)$ grafico del logaritmo $y = \log x$ spostato verso sinistra di 2




$f(-1) = 0$

$f(0) = \log 2 \simeq 0{,}7$

$f(e-2) = 1$

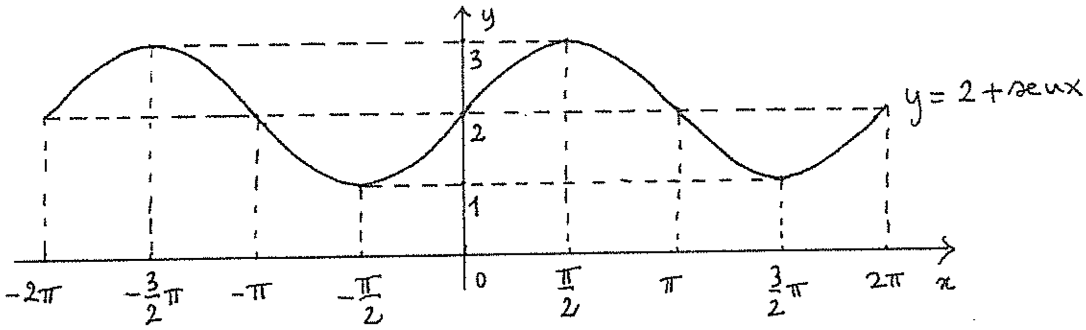
j) $\mathrm{dom} f = ]0, +\infty[$ $y = \log x$ verso l'alto di 3

$f(\frac{1}{2}) = -\log 2 + 3$ $f(1) = 3$ $f(2) = \log 2 + 3$ $f(e) = 4$

$f(x) = 0 \iff \log x + 3 = 0 \iff \log x = -3 \iff x = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \simeq 0{,}05$

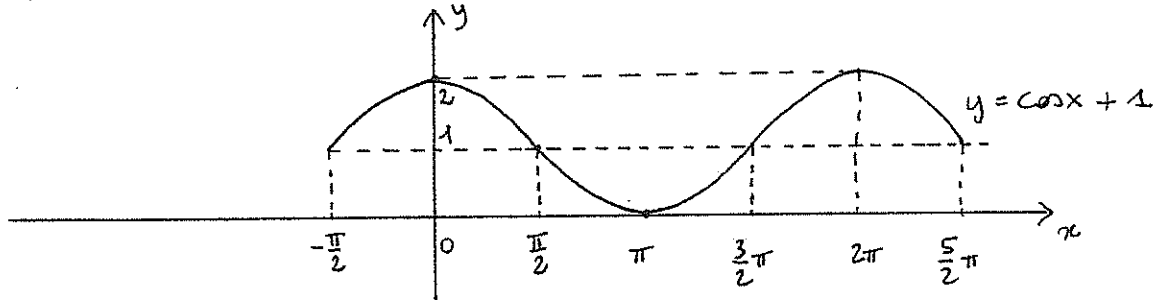
K). dom f = $\mathbb{R}$  $y = \operatorname{sen} x$ verso l'alto di 2

$f(0) = 2$  $f(\frac{\pi}{2}) = 3$  $f(\pi) = 2$  $f(\frac{3}{2}\pi) = 1$  $f(2\pi) = 2$

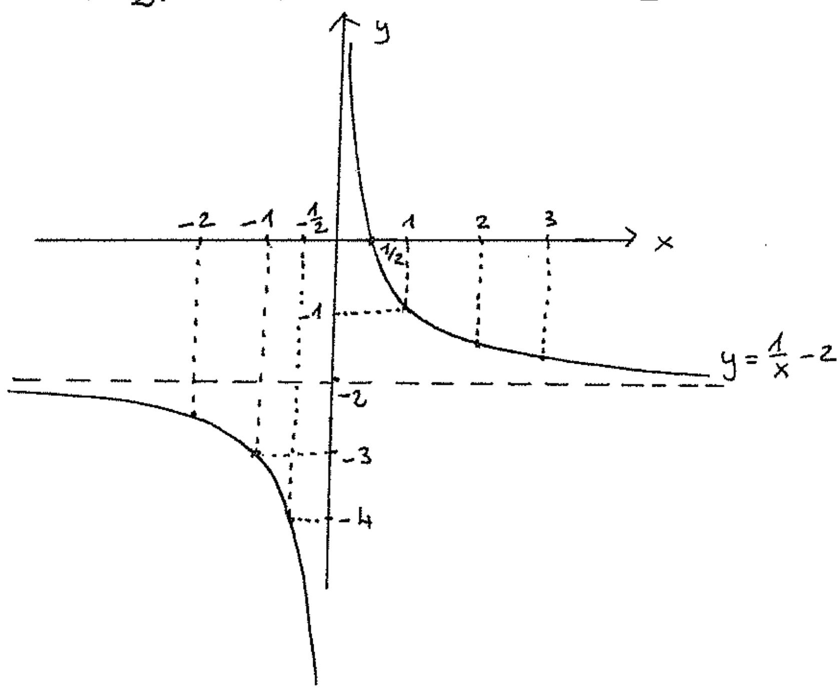



l) dom f = $\mathbb{R}$  $y = \cos x$ verso l'alto di 1  $f(-\frac{\pi}{2}) = 1$  $f(0) = 2$  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$

$f(\pi) = 0$  $f(\frac{3}{2}\pi) = 1$  $f(2\pi) = 2$  $f(\frac{5}{2}\pi) = 1$




m) dom f = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  $y = \frac{1}{x}$ (iperbole riferita agli assi) spostata in basso di 2  $f(\frac{1}{2}) = 0$  $f(1) = -1$  $f(2) = -\frac{3}{2}$  $f(-1) = -3$  $f(-2) = -\frac{5}{2}$



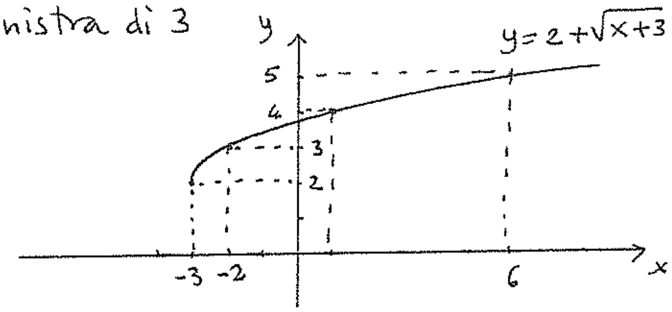
n) $\text{dom} f = [-3,+\infty[$ grafico $y = 2+\sqrt{x+3}$

grafico della radice $y=\sqrt{x}$ a sinistra di 3

e in alto di 2

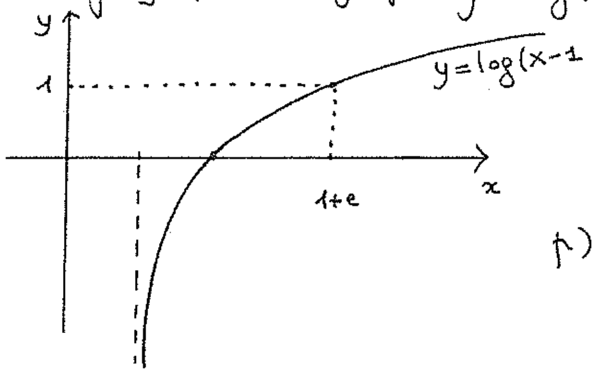
$x=-3 \to y=2$ $\quad x=-2 \to y=3$

$x=1 \to y=4$ $\quad x=6 \to y=5$




o) $\text{dom} f = ]1,+\infty[$ grafico $y=\log(x-1)$ grafico del logaritmo a destra di 1 $\lim_{x\to 1^+} = -\infty$ $\quad x=2 \to y=0$

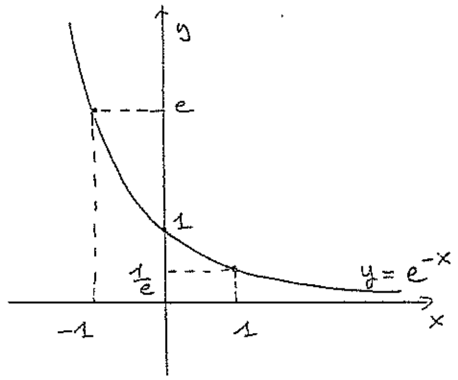
$x = 1+e \to y = 1$




p) si veda la sol.$^{ne}$ dell'es. 11) d) a pag. 34

q) $\text{dom} f = \mathbb{R}$ graf $y=e^{-x}$ : simmetrico del grafico $y=e^x$ rispetto all'asse y

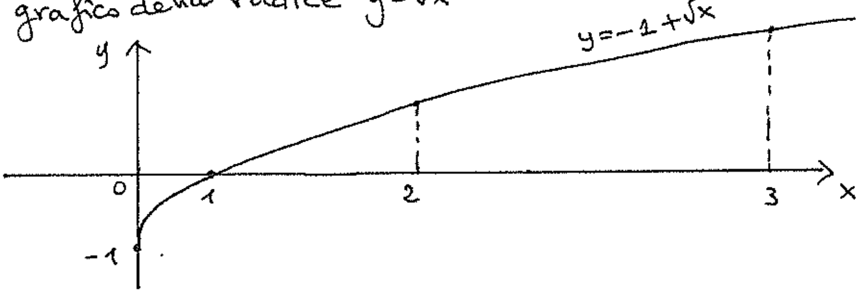
$f(-1)=e$ $\quad f(0)=1$ $\quad f(1)=\frac{1}{e}$



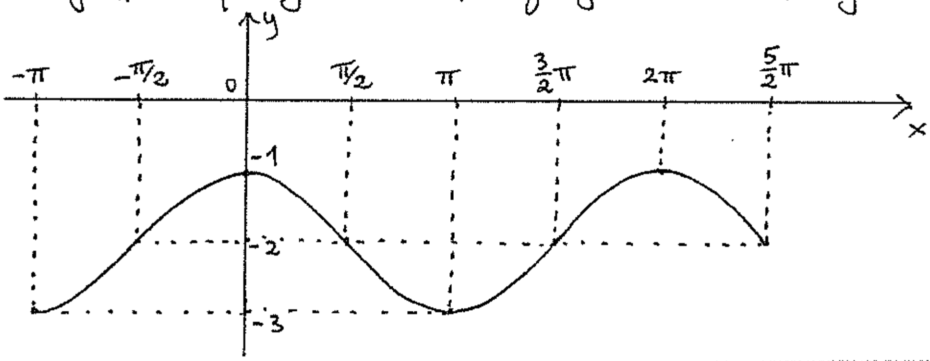

r) $\text{dom} f = [0,+\infty[$ eq.$^{ne}$ $y=-1+\sqrt{x}$

grafico della radice $y=\sqrt{x}$ in basso di 1

$x=0 \to y=-1$
$x=1 \to y=0$
$x=9 \to y=2$
$x=4 \to y=1$




s) $\text{dom} f = \mathbb{R}$ eq.$^{ne}$ $y=-2+\cos x$ grafico del coseno $y=\cos x$ in basso di 2



11) Come l'es. 10) per

a) $f(x) = -1 + \sqrt{x+4}$ b) $f(x) = 1 + \log(x-2)$

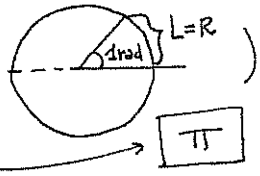
c) $f(x) = -3 + \sqrt{x-1}$ d) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ e) $f(x) = -1 + e^{x+1}$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x - 1 \quad x \in [-\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$

g) $f(x) = \cos x - 2 \quad x \in [-2\pi, \pi]$

12) Ripassiamo la TRIGONOMETRIA:

a) Disegnate il cerchio goniometrico ($C(0,0), R=1$), scegliete alcuni angoli a caso tra 0 e un angolo giro e indicate sul disegno chi sono il seno, il coseno e la tangente dell'angolo scelto.

Gli angoli si possono misurare in GRADI (il grado è la novantesima parte di un angolo retto) oppure in RADIANTI (il radiante è l'angolo al centro di una circonferenza che corrisponde ad un arco lungo il raggio 

). In radianti l'angolo piatto (180°) misura esattamente $\boxed{\pi}$ cioè 3,14159... radianti.

Se indichiamo con $\alpha_g$ la misura di un angolo in gradi e con $\alpha_{rad}$ la misura dello stesso angolo in radianti vale la proporzione:

$$\alpha_{rad} : \alpha_g = \pi : 180$$

b) Stabilite quanti gradi misura l'angolo $\alpha = 1$ radiante. Viceversa stabilite quanti radianti misura l'angolo $\alpha = 1°$. Calcolate con la calcolatrice il seno e il coseno dei due angoli $\alpha = 3$ (radianti), $\beta = 3°$ (quindi si deve stare attenti).

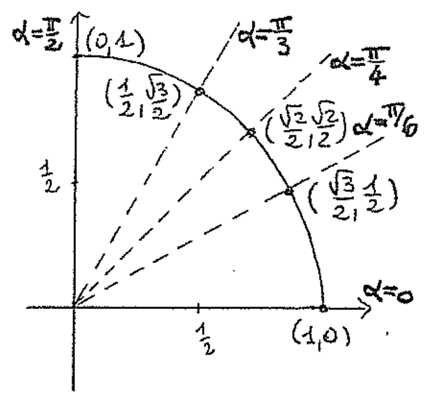
c) Scrivete in radianti i seguenti angoli:

30°, 120°, 135°, 210°, 180°, 90°, 315°, 330°.

Scrivete in gradi i seguenti angoli in radianti:

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, $2\pi$.

d) Considerate i valori di seno, coseno e tangente per gli angoli del 1° quadrante ($0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$). Imparatene i valori a memoria e controllateli sulla calcolatrice sia in gradi sia in radianti.

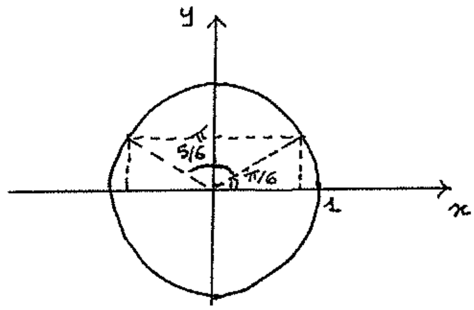



$\tan 0 = 0$ $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ $\tan\frac{\pi}{2}$ non esiste

Poi senza guardare la tabella calcolate

$\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$ $\cos\frac{\pi}{2}$ $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$ $\cos\frac{\pi}{4}$ $\text{sen}\,0$ $\cos\frac{\pi}{6}$ $\cos\frac{\pi}{3}$ $\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$

e) Imparate a dedurre graficamente i valori di seno, coseno, e tangente per angoli nel secondo, terzo e quarto quadrante dai valori che avete imparato per gli angoli nel 1° quadrante.




Ad esempio se $\alpha = \frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{\pi}{6}$

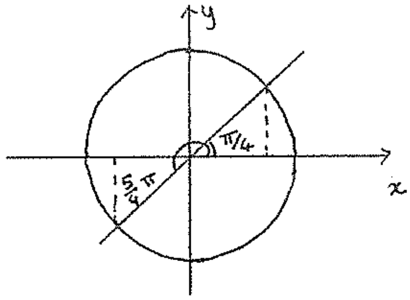
$\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi = \text{sen}\,\frac{\pi}{6}$ $\cos\frac{5}{6}\pi = -\cos\frac{\pi}{6}$

$\tan\frac{5}{6}\pi = -\tan\frac{\pi}{6}$

Allora, senza imparare a memoria altri valori $\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$ $\cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{5}{6}\pi = -\sqrt{3}/3$

Se $\alpha = \frac{5}{4}\pi = \pi + \frac{\pi}{4}$

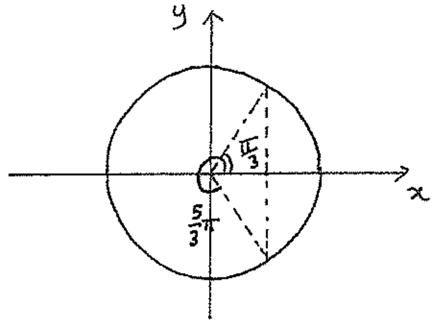



$\operatorname{sen} \frac{5}{4}\pi = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{5}{4}\pi = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan \frac{5}{4}\pi = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

Se $\alpha = \frac{5}{3}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3}$



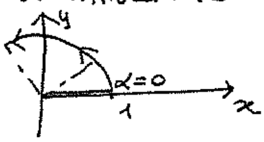

$\operatorname{sen} \frac{5}{3}\pi = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{5}{3}\pi = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

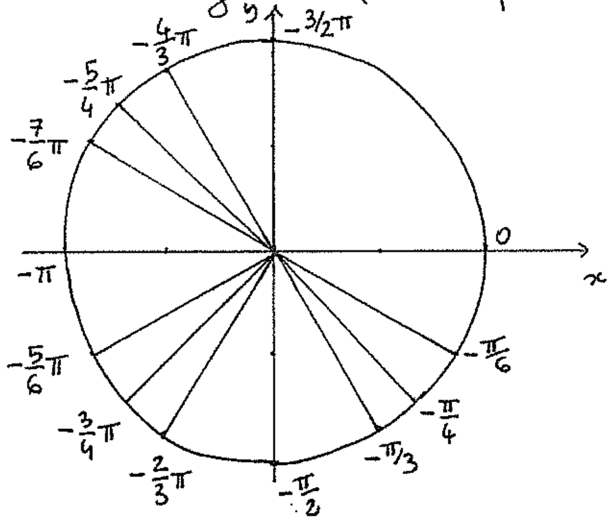
$\tan \frac{5}{3}\pi = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Calcolate poi seno, coseno e tangente dei seguenti angoli : $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $0$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, $\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{11}{4}\pi$, $3\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{9}{4}\pi$.

f) Gli angoli si misurano in verso antiorario a partire dall' angolo 0




e sono considerati con segno positivo - Immaginando di non partire dall'angolo 0 ma di considerare anche angoli negativi si ottengono ad esempio




$-\frac{\pi}{6} = -30°$ si trova $30°$ prima di 0 (cioè da $-\frac{\pi}{6}$ in verso antiorario dopo $30°$ si trova l'angolo 0 ; $-\frac{2}{3}\pi = -120°$ si trova $120°$ prima di 0 ( da $-\frac{2}{3}\pi$ in verso antiorario dopo $120°$ si trova l'angolo 0) e così via.

Quindi per individuare la posizione di un angolo $\alpha<0$, basta in realtà spostarsi da O in verso orario del corrispondente angolo senza il segno −; ma NON SI DEVE PENSARE che gli angoli negativi si misurino in verso orario ...

Calcolate poi seno, coseno e tangente dei seguenti angoli, dopo averli indicati sul cerchio trigonometrico

$-\frac{\pi}{6}$ $-\frac{\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{3}$ $-\frac{\pi}{2}$ $-\frac{2}{3}\pi$ $-\frac{3}{4}\pi$ $-\frac{5}{6}\pi$ $-\pi$ $-\frac{7}{6}\pi$ $-\frac{5}{4}\pi$

$-\frac{4}{3}\pi$ $-\frac{3}{2}\pi$ $-\frac{5}{3}\pi$ $-\frac{7}{4}\pi$ $-\frac{11}{6}\pi$ $-2\pi$ $-\frac{5}{2}\pi$ $-3\pi$ $-\frac{7}{2}\pi$

Calcolate infine, sempre DOPO AVER INDICATO l'angolo SUL CERCHIO TRIGONOMETRICO:

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \dots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \dots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \dots$

$\cos\pi = \dots$ $\quad$ $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \dots$ $\quad$ $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \dots$

$\operatorname{sen}(4\pi) = \dots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \dots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}\pi\right) = \dots$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \dots$ $\quad$ $\cos\left(\frac{10}{3}\pi\right) = \dots$ $\quad$ $\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \dots$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \dots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \dots$

$\cos(-4\pi) = \dots$ $\quad$ $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \dots$ $\quad$ $\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = \dots$

$\operatorname{sen}(-\pi) = \dots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{11}{3}\pi\right) = \dots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \dots$

$\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \dots$ $\quad$ $\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \dots$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dots$

$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \ldots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{13}{6}\pi\right) = \ldots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = \ldots$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \ldots$ $\quad$ $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right) = \ldots$ $\quad$ $\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \ldots$

$\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = \ldots$ $\quad$ $\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \ldots$ $\quad$ $\cos(3\pi) = \ldots$

$\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \ldots$ $\quad$ $\cos(-3\pi) = \ldots$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \ldots$

$\tan\pi = \ldots$ $\quad$ $\tan\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \ldots$ $\quad$ $\tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \ldots$

$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \ldots$ $\quad$ $\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = \ldots$ $\quad$ $\tan\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = \ldots$

SOL.$^{NI}$ es. 11) a) dom $f = [-4, +\infty[$

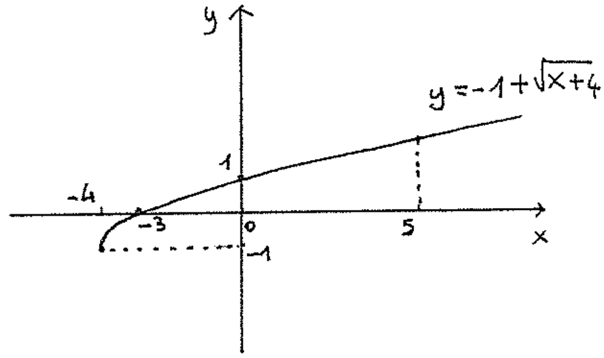
eq.$^{ne}$ del grafico $y = -1 + \sqrt{x+4}$

grafico della $\sqrt{x}$ a sinistra di 4

e in basso di 1

$x = -4 \rightarrow y = -1$ $\quad$ $x = -3 \rightarrow y = 0$

$x = 0 \rightarrow y = 1$ $\quad$ $x = 5 \rightarrow y = 2$ ...




b)

dom $f = ]+2, +\infty[$

grafico $y = \log(x-2) + 1$

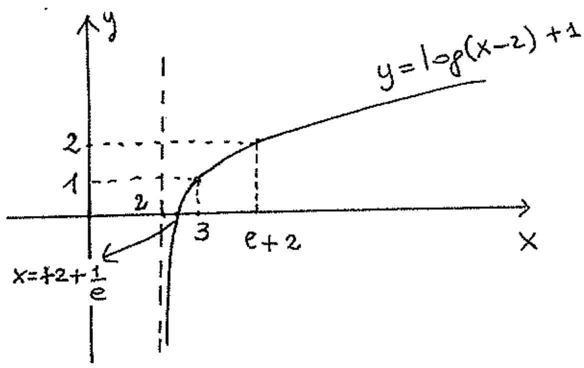
grafico del logaritmo a destra di 2

e in alto di 1

$y = 0$ se $\log(x-2) = -1$ $\quad x - 2 = e^{-1}$

$x = +2 + \frac{1}{e}$

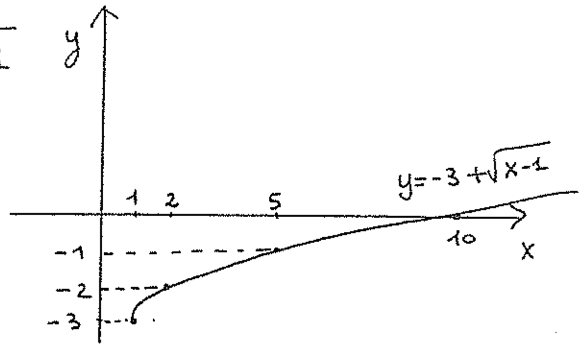
$\lim_{x\to 2^+} = -\infty$ $\quad$ se $x = 3 \rightarrow y = 1$

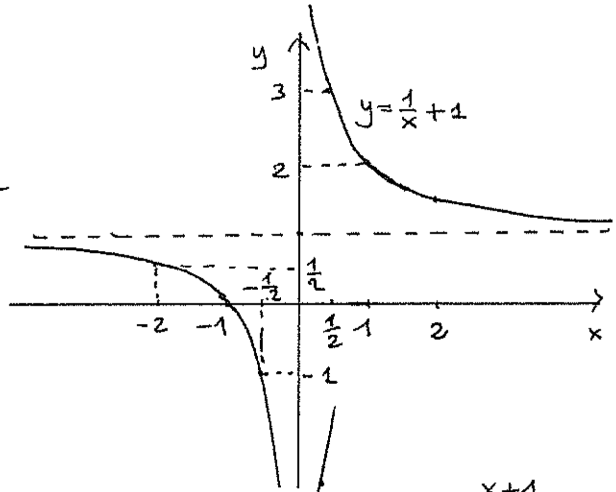



se $\underset{\substack{\shortparallel \\ 4{,}7}}{x = e + 2} \Rightarrow y = \log e + 1 = 1 + 1 = 2$

c)

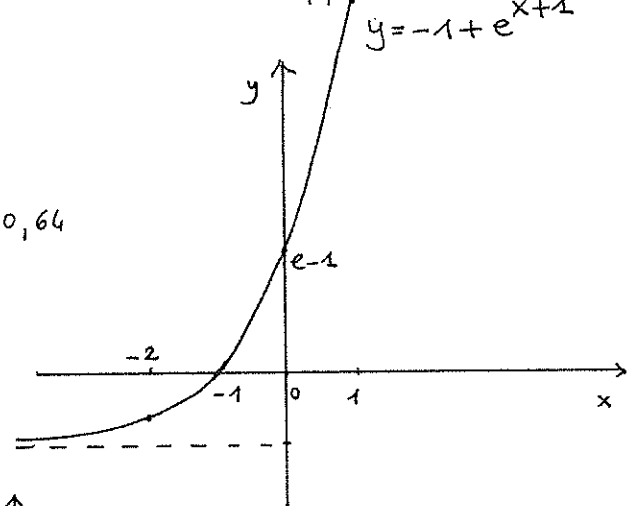
$\operatorname{dom} f = [1, +\infty[$ grafico $y = -3 + \sqrt{x-1}$
grafico della radice a destra di 1 e
in basso di 3 : se $x = 2$ $y = -2$
se $x = 5$ $y = -1$ se $x = 10$ $y = 0$



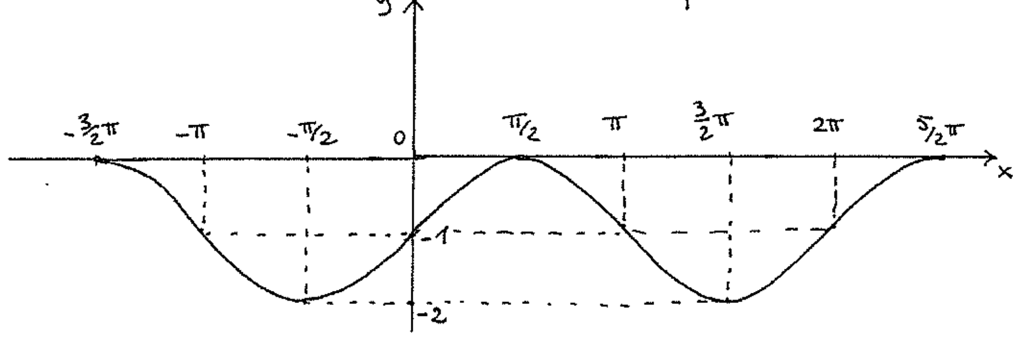




d) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eq.ne $y = \frac{1}{x} + 1$
grafico dell'iperbole $y = \frac{1}{x}$ in alto di 1
$\lim_{x \to 0^-} = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} = +\infty$
$x = -2 \to y = \frac{1}{2}$ $x = -1 \to y = 0$
$x = -\frac{1}{2} \to y = -1$ $x = \frac{1}{2} \to y = 3$
$x = 1 \to y = 2$ $x = 2 \to y = \frac{3}{2}$

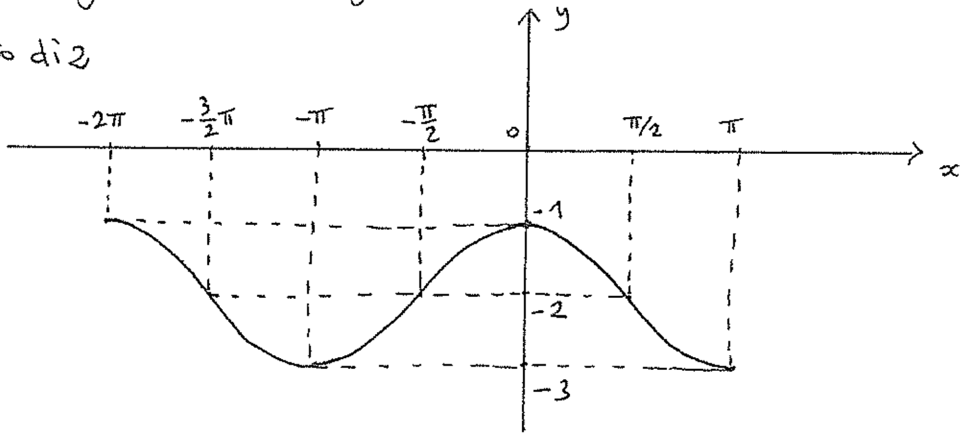
e) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ eq.ne $y = -1 + e^{x+1}$ grafico
dell'esponenziale $e^x$ a sinistra di 1
e in basso di 1 $x = -2 \to y = -1 + \frac{1}{e} \simeq -0{,}64$
$x = -1 \to y = 0$ $x = 0 \to y = -1 + e$
$x = 1 \to y = -1 + e^2 \simeq 6{,}4$



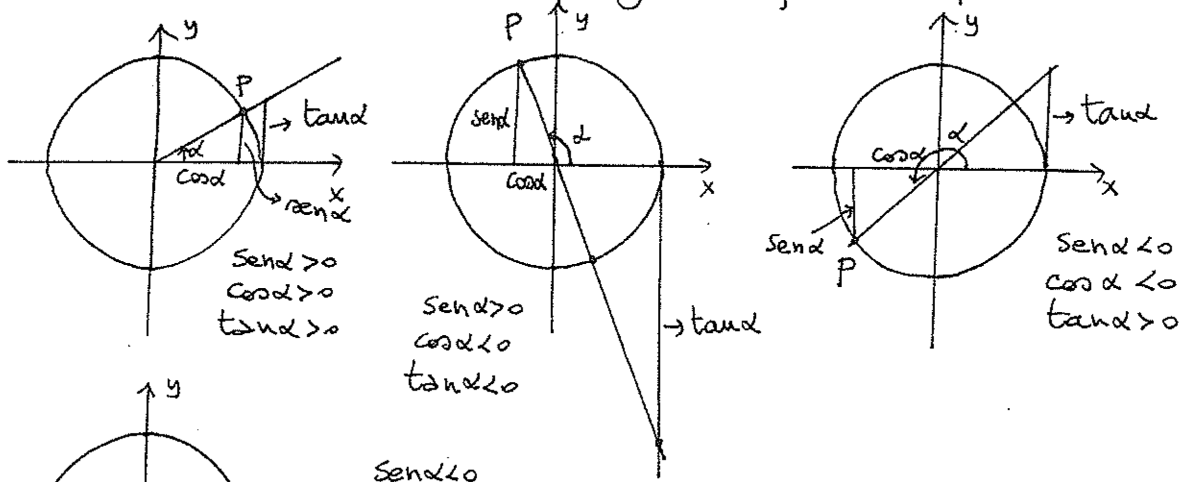

f) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ $y = \operatorname{sen} x - 1$ grafico di
senx abbassato di 1

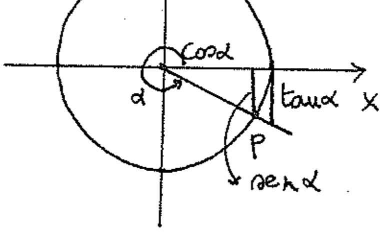


g) $\text{dom} f = \mathbb{R}$ $\quad y = \cos x - 2$ $\quad$ grafico del $\cos x$ abbassato di 2




12) a) Dato il cerchio goniometrico di $C(0,0)$ e $R=1$ e fissato un angolo $\alpha$ tra 0 e un angolo giro, l'angolo $\alpha$ corrisponde ad un punto P sulla circonferenza. Il seno dell'angolo $\alpha$ è l'ordinata del punto P, il coseno è l'ascissa; infine la tangente è l'ordinata del punto in cui la retta verticale $x=1$ interseca la semiretta uscente dall'origine e passante per P. Ad es.




$\text{sen}\,\alpha < 0$
$\cos\alpha > 0$
$\tan\alpha < 0$

b) Si veda a pag. 34 per la definizione di angolo di 1 radiante.

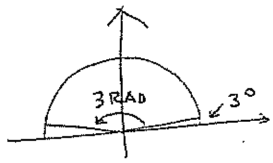
Poiché la lunghezza della circonferenza è $2\pi R$, ne segue che l'angolo giro, in radianti, ha per misura $2\pi$. Quindi 360 GRADI $= 2\pi$ RADIANTI da cui

$$1 \text{ RADIANTE} = \frac{180}{\pi} \text{ GRADI} = \text{un po' più di } 57°.$$

Viceversa $1 \text{ GRADO} = \frac{\pi}{180}$ RADIANTI $= 0{,}017453\ldots$ RADIANTI

sen (3 radianti) $= 0{,}14112\ldots$ è piccolo perchè 3 RADIANTI è quasi $\pi$, cioè $180°$, ma un pò meno quindi sen(3 rad) $> 0$

sen (3 gradi) $= 0.047106\ldots$




c) $30° \to \frac{\pi}{6}$ $\quad 120° \to \frac{2}{3}\pi$

$135° \to \frac{3}{4}\pi$ $\quad 210° \to \frac{7}{6}\pi$ $\quad 180° \to \pi$ $\quad 90°\ \frac{\pi}{2}$ $\quad 315° \to \frac{7}{4}\pi$

$330° \to \frac{11}{6}\pi$

$\frac{\pi}{4} \to 45°$ $\quad \frac{\pi}{3} \to 60°$ $\quad \frac{5}{6}\pi \to 150°$ $\quad \frac{5}{4}\pi \to 225°$

$\frac{4}{3}\pi \to 240°$ $\quad \frac{3}{2}\pi \to 270°$ $\quad \frac{5}{3}\pi \to 300°$ $\quad 2\pi \to 360°$

d) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \operatorname{sen} 0 = 0$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

e) $0$ $\quad \alpha = 0$ $\quad \operatorname{sen} 0 = 0$ $\quad \cos 0 = 1$ $\quad \tan 0 = 0$ $\qquad \alpha = \frac{2}{3}\pi$ $\quad \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\tan\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$ $\quad \frac{2}{3}\pi$

$\pi$ $\quad \alpha = \pi$ $\quad \operatorname{sen}\pi = 0$ $\quad \cos\pi = -1$ $\quad \tan\pi = 0$

$\alpha = \frac{3}{2}\pi$ $\quad \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$ $\quad \cos\frac{3}{2}\pi = 0$ $\quad \tan\frac{3}{2}\pi$ NON ESISTE $\quad \frac{3}{2}\pi$ $\qquad \alpha = \frac{3}{4}\pi$ $\quad \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{3}{4}\pi = -1$ $\quad \frac{3}{4}\pi$

$\alpha = \frac{11}{6}\pi \quad \text{sen}\,\frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2} \quad \cos\frac{11}{6}\pi = +\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan\frac{11}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{11}{6}\pi$

$\alpha = \frac{7}{4}\pi \quad \text{sen}\,\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan\frac{7}{4}\pi = -1 \quad \frac{7}{4}\pi$

$\alpha = \frac{5}{2}\pi \quad \text{sen}\,\frac{5}{2}\pi = 1 \quad \cos\frac{5}{2}\pi = 0 \quad \tan\frac{5}{2}\pi$ NON ESISTE $\quad \frac{5}{2}\pi$

$\alpha = 3\pi \quad \text{sen}\,3\pi = 0 \quad \cos 3\pi = -1 \quad \tan 3\pi = 0 \quad 3\pi$

$\alpha = \frac{11}{4}\pi \quad \text{sen}\,\frac{11}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\frac{11}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan\frac{11}{4}\pi = -1 \quad \frac{11}{4}\pi$

$\alpha = \frac{9}{4}\pi \quad \text{sen}\,\frac{9}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\frac{9}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan\frac{9}{4}\pi = 1 \quad \frac{9}{4}\pi$

$\alpha = \frac{7}{2}\pi \quad \text{sen}\,\frac{7}{2}\pi = -1 \quad \cos\frac{7}{2}\pi = 0 \quad \tan\frac{7}{2}\pi$ NON ESISTE $\quad \frac{7}{2}\pi$

f)

| | $-\pi/6$ | $-\pi/4$ | $-\pi/3$ | $-\pi/2$ | $-\frac{2}{3}\pi$ | $-\frac{3}{4}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sen | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | $-1$ | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{2}/2$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{2}/2$ |
| tan | $-\sqrt{3}/3$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | NON ESISTE | $\sqrt{3}$ | $1$ |

| | $-\frac{5}{6}\pi$ | $-\pi$ | $-\frac{7}{6}\pi$ | $-\frac{5}{4}\pi$ | $-\frac{4}{3}\pi$ | $-\frac{3}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sen | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ |
| cos | $-\sqrt{3}/2$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| tan | $\sqrt{3}/3$ | $0$ | $-\sqrt{3}/3$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | NON ESISTE |

| | $-\frac{5}{3}\pi$ | $-\frac{7}{4}\pi$ | $-\frac{11}{6}\pi$ | $-2\pi$ | $-\frac{5}{2}\pi$ | $-3\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sen | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| cos | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| tan | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}/3$ | $0$ | NON ESISTE | $0$ |

$\alpha = -\frac{7}{2}\pi$ $\quad$ Sen = 1 $\quad$ cos = 0 $\quad$ tan NON ESISTE

$-\frac{7}{2}\pi$

$sen \frac{\pi}{2} = 1$ $\quad$ $sen \frac{7}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $sen \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$

$\cos \pi = -1$ $\quad$ $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$sen(4\pi) = 0$ $\quad$ $sen\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $sen\left(\frac{7}{2}\pi\right) = -1$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ $\cos\left(\frac{10}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $sen\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $sen\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos(-4\pi) = 1$ $\quad$ $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$sen(-\pi) = 0$ $\quad$ $sen\left(\frac{11}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $sen\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ $\quad$ $\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 0$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ $\quad$ $sen\left(\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $sen\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ $\quad$ $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos(3\pi) = -1$

$sen\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1$ $\quad$ $\cos(-3\pi) = -1$ $\quad$ $sen\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

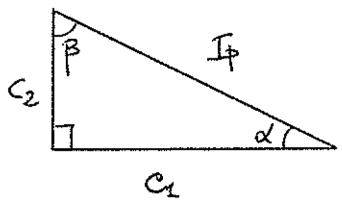
$\tan \pi = 0$ $\quad$ $\tan\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{3}$ $\quad$ $\tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1$

$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ $\quad$ $\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = -1$ $\quad$ $\tan\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Riprendiamo la TRIGONOMETRIA

## g) RISOLUZIONE di un TRIANGOLO RETTANGOLO

In un triangolo rettangolo in cui sono noti gli angoli, la trigonometria permette di calcolare l'ipotenusa noto uno dei due cateti e uno dei due cateti nota l'ipotenusa o l'altro cateto.




Ogni cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto oppure per il coseno dell'angolo adiacente:

$$c_1 = Ip \cdot \cos\alpha = Ip \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$c_2 = Ip \cdot \cos\beta = Ip \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Le stesse formule permettono di calcolare l'ipotenusa, noto il cateto ($Ip = \frac{c_1}{\cos\alpha} = \frac{c_1}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c_2}{\cos\beta} = \frac{c_2}{\operatorname{sen}\alpha}$).
Inoltre da queste formule si ricava $c_2 \cos\alpha = c_1 \operatorname{sen}\alpha$ e $c_2 \operatorname{sen}\beta = c_1 \cos\beta$ da cui

$$c_2 = c_1 \tan\alpha \quad \text{e} \quad c_1 = c_2 \tan\beta \; .$$

## h) ARCOTANGENTE

A volte serve trovare un angolo di cui in qualche modo riusciamo a conoscere la tangente. In questo caso dobbiamo rispondere alla domanda inversa: la questione non è più dato l'angolo di saperne calcolare la tangente, bensì data la tangente di trovare l'angolo avente quel valore della tangente e che soddisfa la geometria del problema.

Supponiamo di sapere che $\tan\alpha = 1$:
allora $\alpha$ potrebbe essere $\frac{\pi}{4}$ (45°), ma anche $\frac{5}{4}\pi$ (225°) oppure $-\frac{3}{4}\pi$ (−135°). Esistono infiniti angoli diversi che hanno lo stesso valore della tangente ($\tan\alpha = \tan(\alpha + k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$).
Allora si considera la funzione tangente solo nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e si costruisce la funzione inversa: per ogni valore della tangente ESISTE UN SOLO ANGOLO $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ che ha quella tangente.
La funzione inversa, detta ARCOTANGENTE (si indica con arctan o $\tan^{-1}$), fornisce l'unico angolo $\in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ che ha la tangente assegnata (GRAFICO a pag. 26).

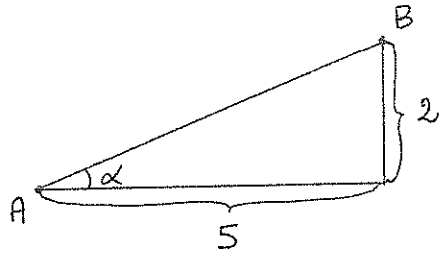
ES. • $\begin{cases} \tan\alpha = 1 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{\pi}{4}$ va bene $\rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

• $\begin{cases} \tan\alpha = 1 \\ \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \\ \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} \text{ non va bene} \\ \text{angoli possibili: } \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$

• $\tan\alpha = 0 \rightarrow \alpha$ può essere $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi$, ecc.

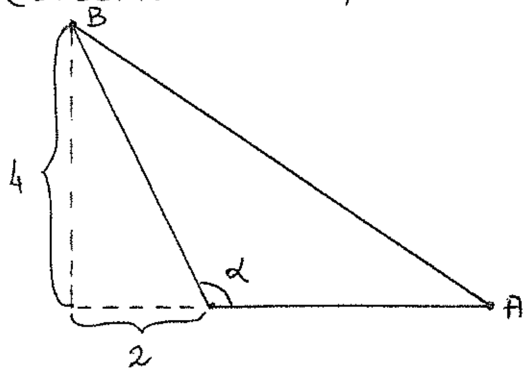
• $\begin{cases} \tan\alpha = -1 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \text{ non va bene} \\ \text{angoli possibili } -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$

Se fosse stato $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$



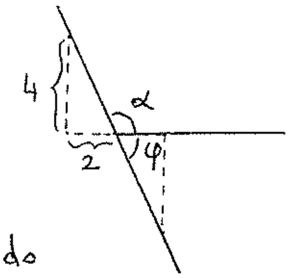

- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\tan\alpha = \frac{2}{5}$ ( $\tan\alpha =$ coeff. angolare $m$ della retta AB (pag. 11) $= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ )

Con la calcolatrice scientifica (attenzione a gradi e radianti) si deve calcolare arctan o $\tan^{-1}$ di $\frac{2}{5}$ : in gradi si ottiene $\arctan\frac{2}{5} = 21,80140949\ldots$ quindi $\alpha$ è circa $21,8°$ (si scrive $\alpha \simeq 21,8°$ ) ossia quasi $22°$.




- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e $\tan\alpha = -2$ $\left( \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4}{-2} \right)$

Con la calcolatrice si ottiene $\arctan(-2) = -63,43494882\ldots$ perchè la funzione arcotangente fornisce l'angolo $\varphi$ con $\begin{matrix} -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \tan\varphi = -2 \end{matrix}$ :




Allora $\varphi$ non è la risposta al nostro problema. L'angolo $\alpha$ si ottiene aggiungendo $\pi$ (o $180°$) all'angolo $\varphi$ $\rightarrow$ $\alpha = 116,5650512$ cioè $\alpha \simeq 116,6°$ circa 116 gradi e mezzo.

<u>OSSERVAZIONE</u> Questi ragionamenti e l'uso del calcolo dell'arcotangente sono spesso utilizzati per calcolare ad esempio gli angoli di varie figure piane, l'inclinazione di un tetto o l'angolo di apertura di un cono.