

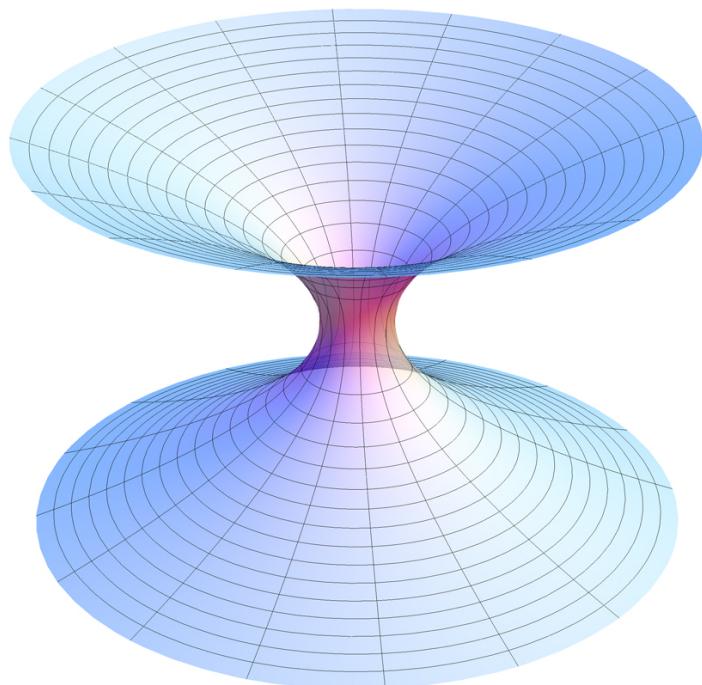
# Analisi Matematica II

per Ingegneria Informatica

*"E' molto semplice essere felici, ma è  
molto difficile essere semplici."*

---

Rabindranath Tagore (1861-1941)



di Roberto Tauraso

a cura di Massimiliano Pompegnani



# Indice

<b>1 Integrali multipli</b>	<b>5</b>
1.1 Integrali doppi su rettangoli . . . . .	5
1.2 Integrali doppi su insiemi generali . . . . .	7
1.3 Domini semplici e formule di riduzione . . . . .	8
1.4 Cambiamento di variabili . . . . .	13
1.5 Integrali tripli . . . . .	24
1.6 Cambiamenti di variabile negli integrali tripli . . . . .	29
1.7 Applicazioni in geometria e in fisica . . . . .	36
1.8 Esercizi e prove d'esame . . . . .	45
<b>2 Integrali curvilinei</b>	<b>139</b>
2.1 Curve nel piano e rappresentazioni parametriche . . . . .	139
2.2 Integrali curvilinei del primo tipo . . . . .	141
2.3 Curve equivalenti . . . . .	145
2.4 Forme differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	146
2.5 Insiemi connessi. Forme differenziali esatte . . . . .	149
2.6 Forme differenziali chiuse. Il teorema di Gauss-Green. . . . .	152
2.7 Forme differenziali in insiemi non semplicemente connessi . . . . .	158
2.8 Costruzione della funzione potenziale . . . . .	161
2.9 Esercizi e prove d'esame . . . . .	165
<b>A Simmetrie e quadriche</b>	<b>215</b>
A.1 Rappresentazione e proprietà degli insiemi nel piano . . . . .	215
A.2 Quadriche . . . . .	221

## Capitolo 2

# Integrali curvilinei

### 2.1 Curve nel piano e rappresentazioni parametriche

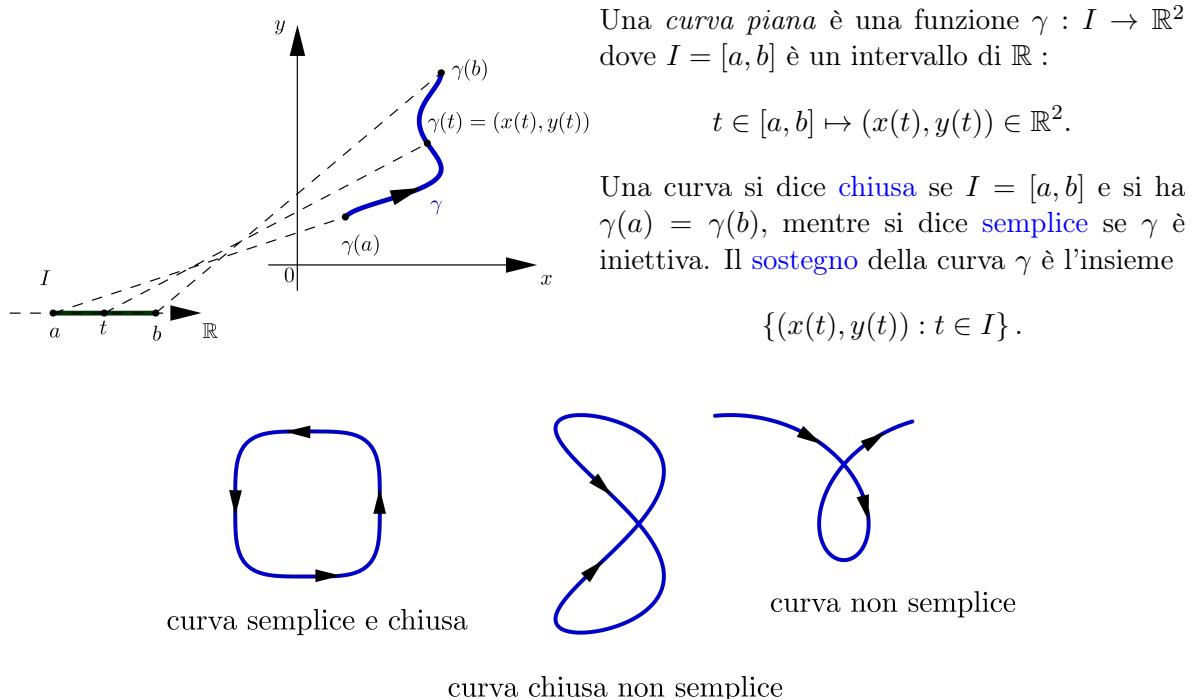


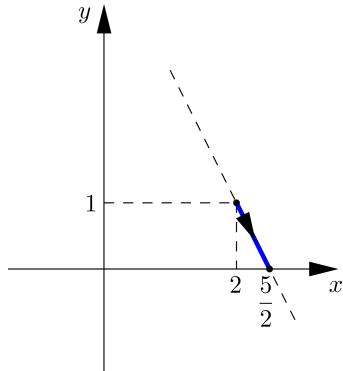
Figura 2.1: Esempi di curve.

Le frecce sui sostegni delle curve indicano il verso di percorrenza della curva al variare del parametro  $t \in I$ . E' naturale quindi considerare per le curve delle *rappresentazioni parametriche*, ossia delle equazioni della forma

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] \quad (2.1)$$

le equazioni (2.1) sono chiamate **equazioni parametriche della curva** (o curva in forma parametrica). La figura che si ottiene nel piano  $xy$  dal punto iniziale  $\gamma(a)$  al punto finale  $\gamma(b)$  è chiamata **sostegno della curva parametrica** (ma a volte lo si chiama, con abuso di linguaggio, curva). La variabile  $t$  è infine chiamata il **parametro**. Le funzioni  $f$  e  $g$  sono le funzioni coordinate e si dice che  $f$  e  $g$  parametrizzano la curva  $\gamma$ . Vediamo alcuni esempi

**Esempio 2.1.** Consideriamo la curva definita dalle equazioni parametriche seguenti:



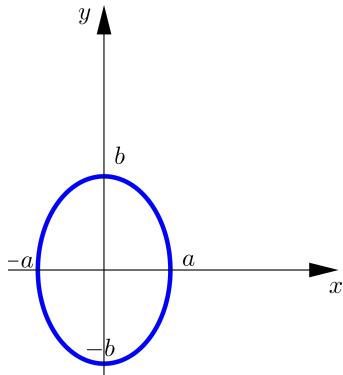
$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

essa rappresenta una retta in forma parametrica. Eliminando il parametro  $t$  si trova l'equazione cartesiana canonica:

$$t = x + 2 \Rightarrow y = 1 - 2(x - 2) = 5 - 2x.$$

Se si fa variare il parametro  $t \in [0, 1/2]$  il sostegno corrispondente è dato dal segmento che unisce i punti  $(2, 1)$  e  $(5/2, 0)$ .

**Esempio 2.2.** Consideriamo la curva definita dalle equazioni parametriche seguenti:



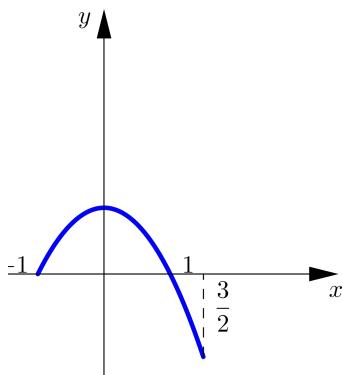
$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

per  $a, b > 0$ , essa rappresenta un'ellisse in forma parametrica di equazione cartesiana canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

In particolare, se  $a = b$  si ottiene evidentemente l'equazione parametrica della circonferenza.

**Esempio 2.3.** Consideriamo la funzione  $f(x) = 1 - x^2$ , allora la curva



$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases}, \quad t \in [-1, 3/2]$$

ha come sostegno l'arco di parabola rappresentato in figura. In questo caso la funzione  $g(t)$  nella (2.1) è uguale a  $t$ . Così le equazioni parametriche del grafico di una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possono essere espresse nella forma

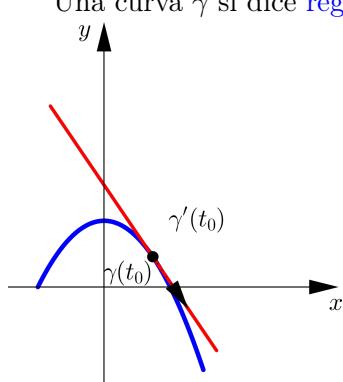
$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Evidentemente una curva espressa dal grafico di una funzione *non è mai chiusa ed è sempre semplice*.

Una curva  $\gamma$  si dice **regolare** se le componenti  $x(t)$  e  $y(t)$  sono derivabili con derivate continue in  $[a, b]$  e si ha

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (2.2)$$

Il vettore definito da (2.2) si chiama *vettore tangente*. Inoltre se  $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$  allora la retta tangente alla curva nel punto  $\gamma(t_0)$  è data da



$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## 2.2 Integrali curvilinei del primo tipo

Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua nell'aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^2$  e sia inoltre  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva regolare e semplice

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Allora l'integrale curvilineo di  $f$  lungo  $\gamma$  è definito come

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt, \quad (2.3)$$

dove  $\|\gamma'(t)\|$  è la norma del vettore tangente, ossia

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

La funzione  $f$  si dice *integrabile* lungo  $\gamma$  se l'integrale corrispondente è finito. Se  $f(x, y) \geq 0$  lungo  $\gamma$  si può interpretare l'integrale di  $f$  lungo  $\gamma$  come l'*area della superficie*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(t), y = y(t), z \in [0, f(x(t), y(t))], t \in [a, b]\}.$$

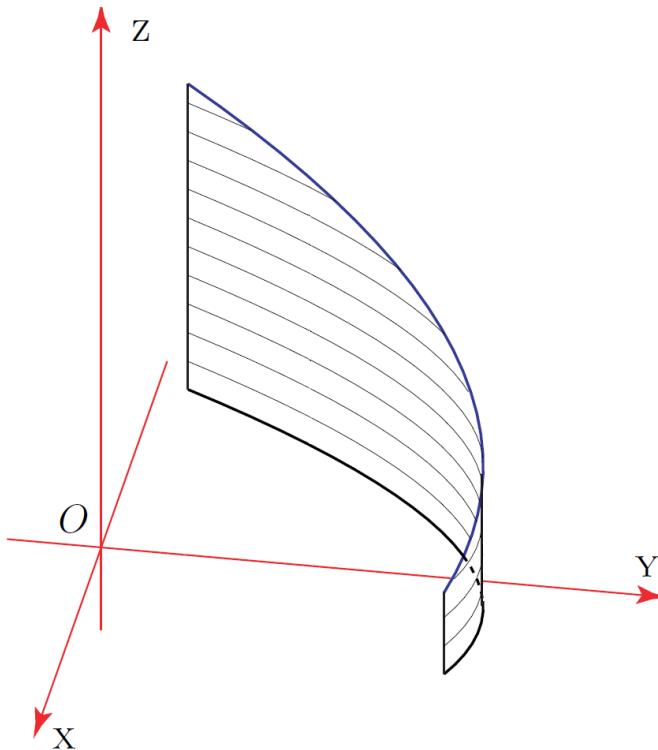


Figura 2.2: Interpretazione geometrica di  $\int_{\gamma} f \, ds$ .

Inoltre se la funzione  $f \equiv 1$ , la (2.3) rappresenta la lunghezza della curva  $\gamma$ :

$$|\gamma| = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt. \quad (2.4)$$

Dalla definizione di integrale curvilineo segue facilmente che se  $\gamma$  è una curva regolare definita da  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni continue risulta

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) \, ds = \alpha \int_{\gamma} f \, ds + \beta \int_{\gamma} g \, ds, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$\int_{\gamma} f \, ds \leq \int_{\gamma} g \, ds, \quad \text{se } f \leq g \in \Omega, \quad (2.6)$$

$$\left| \int_{\gamma} f \, ds \right| \leq \int_{\gamma} |f| \, ds \leq |\gamma| \max_{\Omega} |f|. \quad (2.7)$$

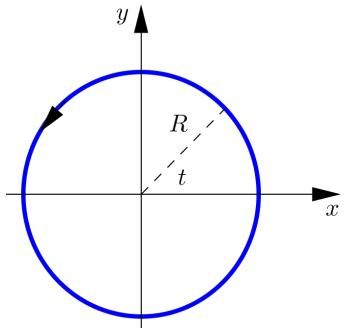
Inoltre se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  si spezza nell'unione delle due curve regolari

$$\gamma_1 : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2 : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

con  $a < c < b$ , si ha

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds. \quad (2.8)$$

**Esempio 2.4.** Calcoliamo la lunghezza della circonferenza di raggio  $R \geq 0$ . Le coordinate parametriche sono



$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

e il vettore tangente ha componenti

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = -R \sin t \\ y'(t) = R \cos t \end{cases}.$$

Allora applicando la (2.4) si ottiene:

$$|\gamma| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt = R \int_0^{2\pi} \, dt = 2\pi R.$$

Si può osservare che per il calcolo della *lunghezza dell'ellisse* di semiassi  $a$  e  $b$ , si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt,$$

che è un *integrale ellittico* non calcolabile con tecniche elementari.

**Esempio 2.5.** Calcoliamo la lunghezza della curva  $\gamma$  data dal grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}(1-x), \quad x \in [0, 1].$$

Le equazioni parametriche sono

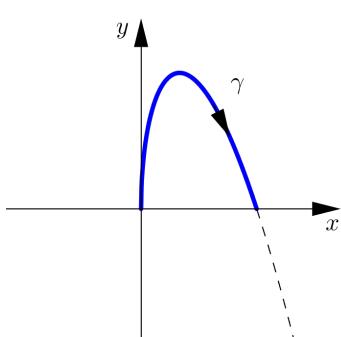
$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{t/3}(1-t) \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

e quindi il vettore tangente ha componenti

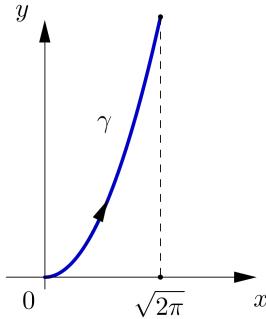
$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = \frac{1-3t}{2\sqrt{3}\sqrt{t}} \end{cases}.$$

Applicando allora la (2.4) si ottiene:

$$\begin{aligned} |\gamma| &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{12t + (1-6t+t^2)}}{2\sqrt{3}\sqrt{t}} \, dt = \int_0^1 \frac{1+3t}{2\sqrt{3}\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt + 3 \int_0^1 \sqrt{t} \, dt \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \left[ 2\sqrt{t} \right]_0^1 + 3 \left[ \frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \right) = \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$



**Esempio 2.6.** Calcolare l'integrale



$$\int_{\gamma} f \, ds, \quad \text{dove } f(x, y) = \frac{xy \sin y}{\sqrt{1+x^2}},$$

e  $\gamma$  è il ramo di parabola

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2/2 \end{cases}, \quad t \in [0, \sqrt{2\pi}].$$

Il vettore tangente ha componenti

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = t \end{cases} \quad \text{da cui } \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2}.$$

Applicando allora la (2.3) si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \, ds &= \int_0^{\sqrt{2\pi}} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \frac{t \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \sin(t^2/2)}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \sqrt{1+t^2} \, dt \\ &\stackrel{u=\frac{t^2}{2}}{=} \int_0^{\pi} u \sin u \, du \stackrel{(P)}{=} [\sin u - u \cos u]_0^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Una forma particolare che possono avere le equazioni parametriche di una curva piana è quella **polare**

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \vartheta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \vartheta(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]. \quad (2.9)$$

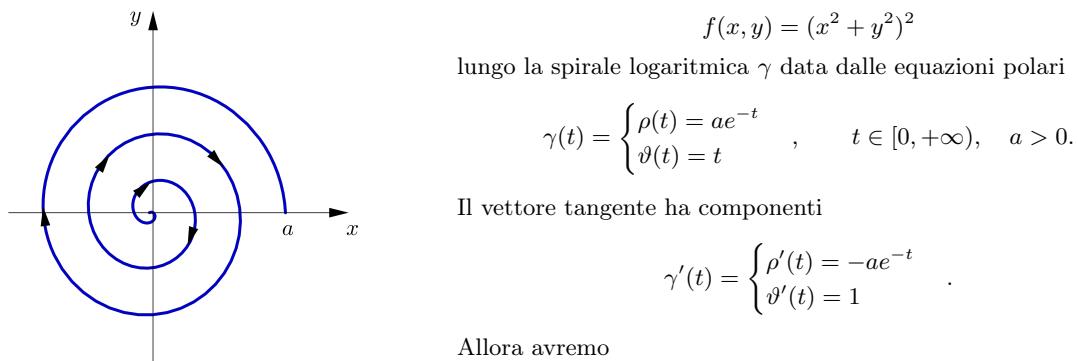
Osserviamo inoltre che il vettore tangente, derivando rispetto a  $t$ , diviene

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = \rho'(t) \cos(\vartheta(t)) - \rho(t) \sin(\vartheta(t)) \cdot \vartheta'(t) \\ y'(t) = \rho'(t) \sin(\vartheta(t)) + \rho(t) \cos(\vartheta(t)) \cdot \vartheta'(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

da cui, sostituendo, si ottiene

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t)\vartheta'(t))^2}.$$

**Esempio 2.7.** La spirale logaritmica. Calcolare l'integrale della funzione



$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

lungo la spirale logaritmica  $\gamma$  data dalle equazioni polari

$$\gamma(t) = \begin{cases} \rho(t) = ae^{-t} \\ \vartheta(t) = t \end{cases}, \quad t \in [0, +\infty), \quad a > 0.$$

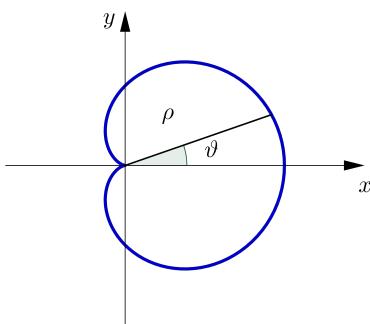
Il vettore tangente ha componenti

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \rho'(t) = -ae^{-t} \\ \vartheta'(t) = 1 \end{cases}.$$

Allora avremo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x^2 + y^2)^2 \, ds &= \int_0^{+\infty} \rho^4 \sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t)\vartheta'(t))^2} \, dt = \int_0^{+\infty} a^4 e^{-4t} \sqrt{(-ae^{-t})^2 + (ae^{-t})^2} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} a^5 e^{-5t} \sqrt{2} \, dt = a^5 \sqrt{2} \left[ \frac{e^{-5t}}{-5} \right]_0^{+\infty} = \frac{a^5 \sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

**Esempio 2.8.** Calcoliamo la lunghezza della *cardioide* data dalle equazioni parametriche polari



$$\gamma(t) = \begin{cases} \rho(t) = 1 + \cos t \\ \vartheta(t) = t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Quindi il vettore tangente sarà

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t)\vartheta'(t))^2} \\ &= \sqrt{(-\sin t)^2 + ((1 + \cos t) \cdot 1)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + 1 + 2 \cos t + \cos^2 t} \\ &= \sqrt{2(1 + \cos t)} = 2 \left| \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right|. \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$|\gamma| = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right| dt = 4 \int_0^\pi \cos \left( \frac{t}{2} \right) dt = 8 \left[ \sin \left( \frac{t}{2} \right) \right]_0^\pi = 8.$$

**Esempio 2.9.** *Epicicloidi e ipocicloidi.* Consideriamo la famiglia di curve dette epicicloidi definite da

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \alpha \cos t - \cos(\alpha t) \\ y(t) = \alpha \sin t - \sin(\alpha t) \end{cases},$$

dove  $\alpha > 1$  è un parametro reale. Se  $\alpha$  è un numero intero allora per  $t \in [0, 2\pi]$  la curva risulta semplice e chiusa. Calcoliamo la sua lunghezza. Il vettore tangente sarà

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = -\alpha \sin t + \alpha \sin(\alpha t) \\ y'(t) = \alpha \cos t - \alpha \cos(\alpha t) \end{cases},$$

e quindi, applicando la (2.4), si ottiene:

$$\begin{aligned} |\gamma| &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\alpha \sin t + \alpha \sin(\alpha t))^2 + (\alpha \cos t - \alpha \cos(\alpha t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha^2 \sin t \sin(\alpha t) - 2\alpha^2 \cos t \cos(\alpha t)} dt = \sqrt{2\alpha} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos((\alpha - 1)t)} dt \\ \text{posto } (\alpha - 1)t &= s, dt = \frac{ds}{(\alpha - 1)} \Rightarrow \frac{\sqrt{2\alpha}}{(\alpha - 1)} \int_0^{2\pi(\alpha-1)} \sqrt{1 - \cos s} ds = \sqrt{2\alpha} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos s} ds \\ &= 2\alpha \int_0^{2\pi} \left| \sin \left( \frac{s}{2} \right) \right| ds = 4\alpha \int_0^\pi \sin \left( \frac{s}{2} \right) ds = 8\alpha \left[ -\cos \left( \frac{s}{2} \right) \right]_0^\pi = 8\alpha. \end{aligned}$$

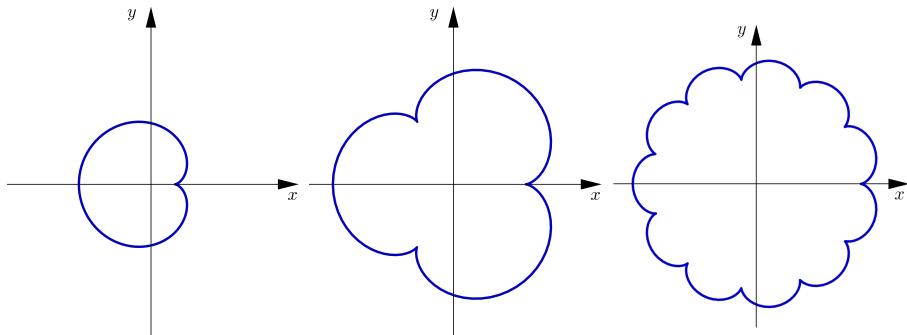


Figura 2.3: Epicicloidi rispettivamente per  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = 4$  e  $\alpha = 12$  (i lobi sono  $\alpha - 1$ ).

La famiglia di curve dette ipocicloidi sono definite con delle equazioni simili

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \alpha \cos t - \cos(\alpha t) \\ y(t) = \alpha \sin t + \sin(\alpha t) \end{cases}.$$

Se  $\alpha$  è un numero intero allora per  $t \in [0, 2\pi]$  la curva risulta semplice e chiusa. Il calcolo della sua lunghezza è molto simile al precedente e il risultato finale è lo stesso.

$$\begin{aligned} |\gamma| &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\alpha \sin t + \alpha \sin(\alpha t))^2 + (\alpha \cos t + \alpha \cos(\alpha t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha^2 \sin t \sin(\alpha t) + 2\alpha^2 \cos t \cos(\alpha t)} dt = \sqrt{2}\alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos((\alpha+1)t)} dt \\ \text{posto } (\alpha+1)t &= s, dt = \frac{ds}{(\alpha+1)} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\alpha}{(\alpha+1)} \int_0^{2\pi(\alpha+1)} \sqrt{1 + \cos s} ds = \sqrt{2}\alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos s} ds \\ &= 2\alpha \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right| ds = 4\alpha \int_0^\pi \cos\left(\frac{s}{2}\right) ds = 8\alpha \left[ \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right]_0^\pi = 8\alpha. \end{aligned}$$

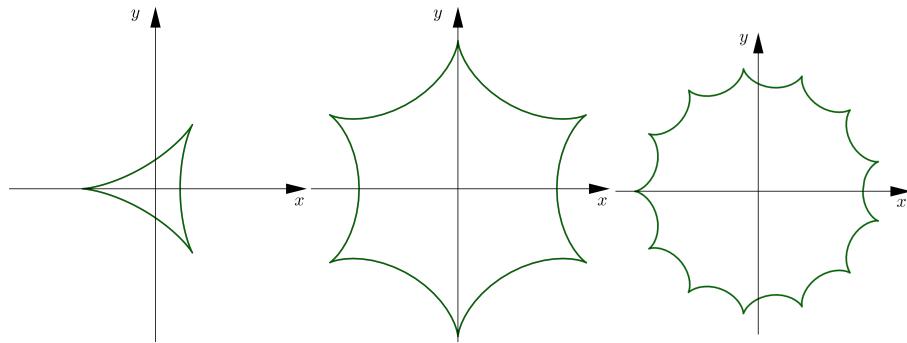


Figura 2.4: Ipocicloidi rispettivamente per  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = 5$  e  $\alpha = 12$  (i lobi sono  $\alpha + 1$ ).

### 2.3 Curve equivalenti

Due curve  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  si dicono **equivalenti** se la funzione  $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ , biunivoca, derivabile con derivata continua in  $I_2$  e tale che  $\varphi'(t) \neq 0$  in  $I_2$  per cui

$$\gamma_1(\varphi(t)) = \gamma_2(t), \quad \forall t \in I_2.$$

Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno e lo stesso verso di percorrenza se  $\varphi' > 0$  oppure verso opposto se  $\varphi' < 0$ . Ad esempio

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \gamma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t \in [0, \pi]$$

sono equivalenti e sono due parametrizzazioni diverse della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario percorse nello stesso verso, mentre

$$\gamma_3(t) = (\cos(-t), \sin(-t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

è equivalente alle due parametrizzazioni precedenti, ma percorsa nel verso opposto. Per l'integrale di linea di prima specie vale un risultato di invarianza per cambi di parametrizzazioni espresso dal seguente risultato.

#### Teorema 2.1. (Invarianza per parametrizzazioni)

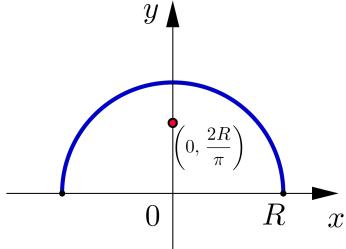
L'integrale curvilineo di prima specie lungo  $\gamma$  è invariante per parametrizzazioni equivalenti ed anche per cambiamento di orientazione su  $\gamma$ , ossia

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_{\gamma_2} f \, ds.$$

Come applicazione del teorema precedente proviamo a calcolare il centro di massa di una curva. Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva lungo la quale sia distribuita della massa con densità lineare  $\delta(x, y)$  allora il **centro di massa**  $(\bar{x}, \bar{y})$  è dato da

$$\bar{x} = \frac{\int_{\gamma} x \cdot \delta(x, y) ds}{\int_{\gamma} \delta(x, y) ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\gamma} y \cdot \delta(x, y) ds}{\int_{\gamma} \delta(x, y) ds}.$$

Calcoliamo il centro di massa di una semicirconferenza omogenea, con densità  $\delta(x, y) = 1$ , e di raggio  $R$ . Svolgiamo il calcolo usando due parametrizzazioni diverse



$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi], \\ \gamma_2(t) &= \begin{cases} x(t) = Rt \\ y(t) = R\sqrt{1-t^2} \end{cases}, \quad t \in [-1, 1].\end{aligned}$$

Le norme dei vettori tangenti saranno

$$\|\gamma'_1(t)\| = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (-R \cos t)^2} = R, \quad \|\gamma'_2(t)\| = R \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Allora dopo aver osservato che per simmetria avremo  $\bar{x} = 0$ , calcoliamo la coordinata  $\bar{y}$  usando le due parametrizzazioni:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int_{\gamma_1} y ds}{\int_{\gamma_1} ds} = \frac{1}{|\gamma_1|} \int_0^\pi R \sin t \cdot \|\gamma'_1(t)\| dt = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi R^2 \sin t dt = \frac{R^2}{\pi R} [-\cos t]_0^\pi = \frac{2R}{\pi}, \\ \bar{y} &= \frac{\int_{\gamma_2} y ds}{\int_{\gamma_2} ds} = \frac{1}{|\gamma_2|} \int_{-1}^1 R \sqrt{1-t^2} \cdot \|\gamma'_2(t)\| dt = \frac{1}{\pi R} \int_{-1}^1 R \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2R}{\pi}.\end{aligned}$$

## 2.4 Forme differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$

Sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un *campo vettoriale* in  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$$

con componenti  $A(x, y), B(x, y)$  continue. Ad  $\vec{F}$  associamo l'espressione formale

$$\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

detta **forma differenziale** di coefficienti  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$ . Notiamo subito che l'insieme delle forme differenziali costituisce uno *spazio vettoriale* sul campo  $\mathbb{R}$  rispetto alla somma e alla moltiplicazione per un numero reale così definite:

$$\omega_1 + \omega_2 = (A_1 + A_2) dx + (B_1 + B_2) dy, \quad \lambda \omega = \lambda A(x, y)dx + \lambda B(x, y)dy,$$

dove

$$\omega_1(x, y) = A_1(x, y)dx + B_1(x, y)dy, \quad \omega_2(x, y) = A_2(x, y)dx + B_2(x, y)dy.$$

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  una curva regolare e semplice definita da  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  con  $t \in [a, b]$ . Allora l'integrale curvilineo di  $\vec{F}$  lungo  $\gamma$  è definito come

$$\int_a^b [A(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + B(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt. \quad (2.10)$$

I simboli usati per indicarlo sono

$$\int_{\gamma} \omega(x, y), \quad \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle, \quad \oint_{\gamma} \omega(x, y),$$

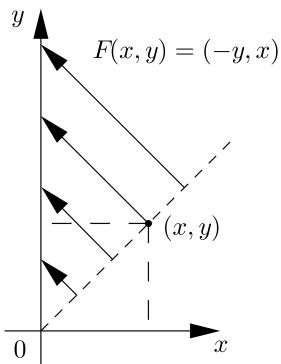
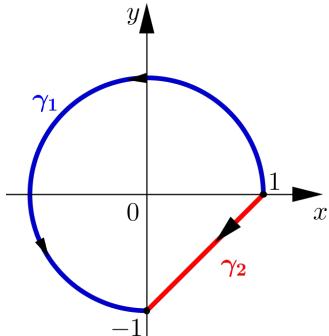
dove l'ultimo simbolo è utilizzato in particolare quando la curva  $\gamma$  è chiusa. Se  $\vec{F}$  rappresenta un campo di forze piano allora il suo integrale curvilineo lungo  $\gamma$  rappresenta il lavoro compiuto da  $\vec{F}$  per muoversi da  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$  lungo  $\gamma$ .

**Esempio 2.10.** Sia  $F(x, y) = (-y, x)$  un campo vettoriale e consideriamo le due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che partono da  $(0, 1)$  e arrivano a  $(0, -1)$  parametrizzate come segue:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = -t \end{cases}, \quad t \in [0, 1], \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 3\pi/2].$$

Utilizzando la (2.10) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle &= \int_0^1 [(t)(1-t)' + (1-t)(-t)'] dt = - \int_0^1 dt = -1, \\ \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle &= \int_0^{3\pi/2} [(-\sin t)(\cos t)' + (\cos t)(\sin t)'] dt \\ &= \int_0^{3\pi/2} [\sin^2 t + \cos^2 t] dt = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

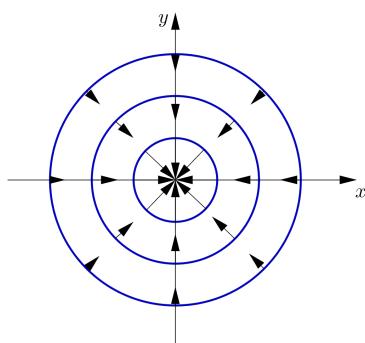


In questo caso, vista la semplicità del campo vettoriale, possiamo anche rappresentarlo graficamente: per ogni punto  $(x, y)$ , il vettore applicato  $(-y, x)$  è ortogonale alla retta passante per i punti  $(0, 0)$  e  $(x, y)$  e di lunghezza uguale alla distanza di  $(x, y)$  da  $(0, 0)$ . Con queste osservazioni è immediato concludere che

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = 0,$$

se  $\gamma$  è un segmento lungo una retta passante per  $(0, 0)$ . In questo caso infatti i vettori sono ortogonali e quindi il loro prodotto scalare è nullo.

**Esempio 2.11.** Rappresentare graficamente il campo vettoriale

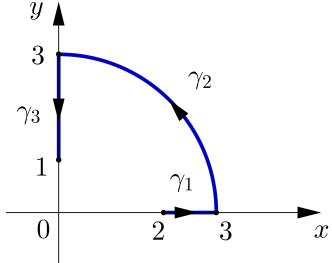


$$F(x, y) = \left( -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

e calcolare l'integrale curvilineo di  $\vec{F}$  lungo  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  da  $(2, 0)$  a  $(0, 1)$ . Per disegnare il campo vettoriale si può osservare che la norma  $\|\vec{F}\|$  è pari a

$$\|F(x, y)\| = \sqrt{\left( -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)^2 + \left( -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

ossia la distanza dall'origine del campo vettoriale diminuisce con il reciproco della distanza. Infatti  $\vec{F}$  giace lungo la retta passante per  $(0,0)$  e  $(x,y)$  e punta verso l'origine. Per calcolare ora l'integrale lungo  $\gamma$  di  $\vec{F}$  parametrizziamo i rami che compongono la curva come segue:



$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}, t \in [2, 3], \\ \gamma_2(t) &= \begin{cases} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}, t \in [0, \pi/2], \\ \gamma_3(t) &= \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [3, 1].\end{aligned}$$

Utilizzando la (2.10) si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_1 \rangle &= \int_2^3 -\frac{1}{t^2} dt = \left[ \frac{1}{t} \right]_2^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}, & \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_2 \rangle &= 0, \quad \text{poiché } \vec{F} \text{ è ortogonale a } \vec{\gamma}'_2, \\ \int_{\gamma_3} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_3 \rangle &= \int_3^1 -\frac{1}{t^2} dt = \left[ \frac{1}{t} \right]_3^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. & \text{Quindi} & \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = -\frac{1}{6} + 0 + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

A differenza dell'integrale curvilineo del primo tipo, l'integrale curvilineo del secondo tipo dipende dal verso in cui viene percorso il sostegno della curva  $\gamma$ . Se indichiamo con  $\gamma^-$  la curva equivalente a  $\gamma$ , ma orientata nel verso opposto, dalla definizione (2.10) risulta

$$\int_{\gamma^-} \omega(x, y) = - \int_{\gamma} \omega(x, y).$$

Inoltre se spezziamo  $\gamma$  nelle curve regolari

$$\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

con  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  e  $\gamma_k(t) = \gamma(t)$  in  $[t_{k-1}, t_k]$  per ogni  $k = 1, 2, \dots, n$ , applicando la (2.8) otteniamo

$$\int_{\gamma} \omega(x, y) = \int_{\gamma_1} \omega(x, y) + \int_{\gamma_2} \omega(x, y) + \dots + \int_{\gamma_n} \omega(x, y).$$

Analogamente, dalla (2.5) si deduce che se  $\omega_1(x, y)$  e  $\omega_2(x, y)$  sono due forme differenziali continue nell'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  allora

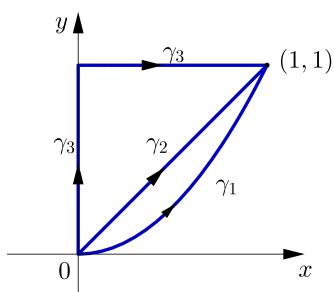
$$\int_{\gamma} \alpha \omega_1(x, y) + \beta \omega_2(x, y) = \alpha \int_{\gamma} \omega_1(x, y) + \beta \int_{\gamma} \omega_2(x, y).$$

Infine dalla (2.5) segue che

$$\left| \int_{\gamma} \omega(x, y) \right| \leq |\gamma| \max_{\gamma} \sqrt{A^2(x, y) + B^2(x, y)},$$

dove  $|\gamma|$  al solito indica la lunghezza della curva.

**Esempio 2.12.** Sia  $F(x, y) = (y^2, 2xy)$  e calcoliamo



$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle,$$

lungo tre curve che vanno da  $(0,0)$  a  $(1,1)$  parametrizzate nel seguente modo

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in [0, 1], & \gamma_2(t) &= \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [0, 1], \\ \gamma_3(t) &= \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [0, 1] & \cup & \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases}, t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Applicando la (2.10) si ottiene:

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_1 \rangle = \int_0^1 (t^4 \cdot 1 + 2t^3 \cdot 2t) dt = [t^5]_0^1 = 1, \quad \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_2 \rangle = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + 2t^2 \cdot 1) dt = [t^3]_0^1 = 1,$$

$$\int_{\gamma_3} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_3 \rangle = \int_0^1 (t^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0) dt + \int_0^1 (1 \cdot 1 + 2t \cdot 0) dt = 1.$$

In questo caso i tre calcoli hanno dato lo stesso risultato. Se definiamo la curva chiusa  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ , dove  $\gamma_2^-$  è la curva  $\gamma_2$  con orientazione opposta, possiamo dire che

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_1 \rangle + \int_{\gamma_2^-} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_2^- \rangle = \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_1 \rangle - \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma}_2 \rangle = 1 - 1 = 0.$$

## 2.5 Insiemi connessi. Forme differenziali esatte

Presentiamo alcune definizioni preliminari.

### Definizione 2.1. (Insieme connesso per archi)

Un insieme  $S \subset \mathbb{R}^2$  aperto si dice *connesso (per archi)* se per ogni unto  $P$  e  $Q$  di  $S$  esiste una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  tale che  $\gamma(a) = P$  e  $\gamma(b) = Q$ .

Due esempi sono riportati in figura.

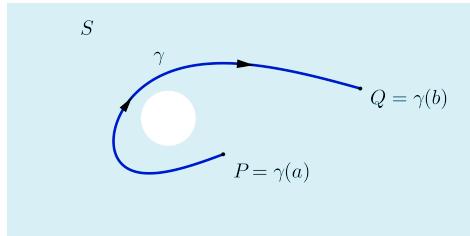


Figura 2.5:  $\{x^2 + y^2 \geq 1\}$  è connesso.

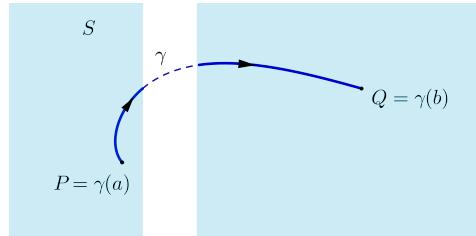


Figura 2.6:  $\{|x| \geq 1\}$  non è connesso.

Sia  $\Omega$  un insieme aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$  e  $\omega(x, y)$  una forma differenziale con le componenti  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$  continue in  $\Omega$ .

### Definizione 2.2. (Forma esatta)

Diremo che  $\omega(x, y)$  è esatta in  $\Omega$  se esiste una funzione  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile, detta *funzione potenziale o primitiva*, con le derivate continue tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = A(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = B(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (2.11)$$

Si intuisce che il problema posto non ammetterà sempre soluzione, cioè non sempre la forma differenziale  $\omega(x, y)$  sarà esatta, perciò di seguito daremo delle condizioni sufficienti affinché tale forma sia esatta.

### Theorema 2.2.

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto connesso. Se la forma differenziale  $\omega(x, y)$  è esatta in  $\Omega$  allora ammette infinite funzioni potenziali, ossia  $U(x, y) = G(x, y) + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

**Dimostrazione.** Infatti se  $U(x, y)$  è una funzione potenziale (primitiva) di  $\omega(x, y)$  allora ovviamente anche  $U(x, y) + k$  lo è. Viceversa, se  $G(x, y)$  è un'altra funzione potenziale (primitiva) di  $\omega(x, y)$  in  $\Omega$  diversa da  $U(x, y)$ , essendo  $\omega(x, y)$  esatta per ogni punto di  $\Omega$  si ha

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = A(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = B(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = A(x, y), \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = B(x, y),$$

da cui sottraendo membro a membro e usando la linearità dell'operazione di derivazione si ha

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial(U - G)}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(U - G)}{\partial y}(x, y) = 0.$$

La funzione  $(U - G)(x, y)$  è continua e avendo le derivate parziali prime nulle in ogni punto di  $\Omega$  è necessariamente costante, cioè risulta  $U(x, y) - G(x, y) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , che è quanto volevamo.

Riassumendo, quando la forma differenziale è esatta, la sua funzione potenziale (o primitiva) è determinata a meno di una costante additiva arbitraria. Il seguente teorema riporta una caratterizzazione delle forme differenziali esatte

### Teorema 2.3. (Caratterizzazione delle forme esatte)

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto connesso. Allora

- i) se  $\omega(x, y)$  è esatta, per ogni curva  $\gamma$  regolare contenuta in  $\Omega$ , vale la formula

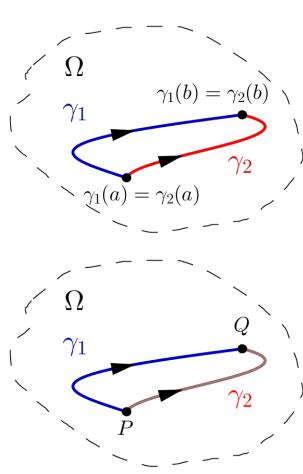
$$\int_{\gamma} \omega(x, y) = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)), \quad (2.12)$$

ovvero l'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo  $\gamma$  dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale della curva  $\gamma$ ;

- ii)  $\omega(x, y)$  è esatta se e solo se per ogni curva chiusa  $\gamma$  regolare contenuta in  $\Omega$ , si ha

$$\oint_{\gamma} \omega(x, y) = 0, \quad \forall \gamma \in \Omega. \quad (2.13)$$

**Dimostrazione.** i). Assumiamo per ipotesi che  $\omega(x, y)$  sia esatta; allora in tale ipotesi per ogni curva  $\gamma$  definita da  $[a, b] \rightarrow \Omega$  si ha



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega(x, y) &= \int_a^b \left( \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) \cdot x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \cdot y'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d[U(x(t), y(t))]}{dt} dt = [U(x(t), y(t))]_a^b \\ &= U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Questo significa che l'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo  $\gamma$  dipende solo dal punto iniziale e finale e non dalla particolare curva in  $\Omega$  che li congiunge, pertanto la i) è dimostrata. ii) Dimostriamo la prima implicazione, ossia supponiamo che la forma  $\omega(x, y)$  sia esatta. Allora fissata ad arbitrio una curva chiusa regolare  $\gamma$  e si scelgano su di essa due punti distinti  $P$  e  $Q$ . Diciamo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  i due archi determinati su  $\gamma$  da detti punti e orientati da  $P$  a  $Q$ . Allora

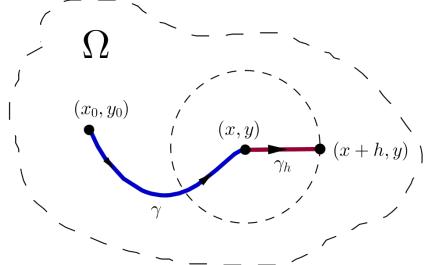
$$\int_{\gamma_1} \omega(x, y) = \int_{\gamma_2} \omega(x, y) \quad \text{ossia} \quad \int_{\gamma_1} \omega(x, y) + \int_{\gamma_2^-} \omega(x, y) = 0,$$

che è quanto volevamo.

Dimostriamo l'implicazione inversa, supponiamo cioè che per ipotesi si abbia

$$\int_{\gamma_1} \omega(x, y) = \int_{\gamma_2} \omega(x, y), \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Omega,$$

con gli stessi punti iniziali e finali e dimostriamo che  $\omega(x, y)$  è esatta. Fissiamo un punto  $(x_0, y_0) \in \Omega$  e definiamo una funzione  $U(x, y)$  nel seguente modo



$$U(x, y) = \int_{\gamma} \omega(x, y),$$

dove  $\gamma$  è una qualunque curva in  $\Omega$  che parte da  $(x_0, y_0)$  e arriva a  $(x, y)$ . Tale funzione è ben definita poiché per ipotesi  $\Omega$  è aperto connesso e quindi esiste almeno una curva che congiunge  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y)$ . Inoltre per la (2.12) il valore dell'integrale di  $\omega$  non dipende dalla particolare scelta della curva. In tal modo si ha

$$U(x, y) = \int_{\gamma} \omega(x, y), \quad \text{e} \quad U(x + h, y) = \int_{\gamma \cup \gamma_h} \omega(x, y) = \int_{\gamma} \omega(x, y) + \int_{\gamma_h} \omega(x, y),$$

dove  $\gamma_h$  è una curva contenuta in  $\Omega$  da  $(x, y)$  a  $(x + h, y)$  ossia  $\gamma_h = (x + t, y), t \in [0, h]$ . Si noti che  $h$  è scelto in modo che il sostegno della curva  $\gamma_h$ , un segmento, sia completamente contenuto in  $\Omega$ . Quindi si ha

$$\frac{U(x + h, y) - U(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} \omega(x, y) = \frac{1}{h} \int_{t=0}^h A(x + t, y) dt \stackrel{(*)}{=} A(x + t_h, y), \quad \text{per qualche } t_h \in [0, h],$$

dove in (\*) si è usato il teorema della media integrale. Passando al limite per  $h \rightarrow 0$  abbiamo che  $t_h \rightarrow 0$ , e così, per la continuità di  $A(x, y)$ , si ottiene

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x + h, y) - U(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} A(x + t_h, y) = A(x, y).$$

In modo del tutto simile si dimostra che  $\partial U / \partial y = B(x, y)$ , ossia  $\omega(x, y)$  è esatta ed ha  $U(x, y)$  come funzione potenziale associata.

Da quanto detto il teorema precedente si può riformulare nel modo seguente.

Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\omega$  sia esatta in un aperto connesso  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  è che sia nullo l'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo una qualunque curva chiusa regolare in  $\Omega$ .

L'osservazione precedente è utile per determinare se una forma differenziale non è esatta. Consideriamo la forma

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

definita in  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$  e verifichiamo che non è esatta. Infatti se  $\gamma$  è la curva *chiusa* data dalla circonferenza parametrizzata da  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $R > 0$ , si ha che

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{R \sin t}{R^2} \cdot (R \cos t)' + \frac{R \cos t}{R^2} \cdot (R \sin t)' \right) dt = 2\pi \neq 0,$$

e ciò mostra che la forma  $\omega(x, y)$  non può essere esatta in  $\Omega$ , poiché l'integrale lungo la curva *chiusa*  $\gamma$  non è 0.

## 2.6 Forme differenziali chiuse. Il teorema di Gauss-Green.

Le osservazioni precedenti mettono in particolare rilievo l'importanza di sapere a priori l'esattezza della forma differenziale in esame, e la difficoltà nel riconoscerne l'esattezza sta nella determinazione della funzione potenziale  $U(x, y)$ . Dunque è essenziale dare delle condizioni sufficienti. Cominciamo con la seguente definizione.

### Definizione 2.3. (Forma chiusa)

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e  $\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  una forma differenziale con le componenti  $A, B \in C^1(\Omega)$ . Diciamo che  $\omega(x, y)$  è chiusa quando

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (2.14)$$

Vale la seguente condizione necessaria.

### Teorema 2.4.

Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e  $\omega(x, y)$  una forma differenziale di classe  $C^1(\Omega)$ . Se  $\omega$  è esatta allora  $\omega(x, y)$  è chiusa.

**Dimostrazione.** Si tratta di dimostrare che vale l'uguaglianza (1.14). Per ipotesi poiché  $\omega(x, y)$  è esatta, esisterà una funzione potenziale  $U(x, y)$  tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = A(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = B(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Allora derivando  $A(x, y)$  rispetto ad  $y$  e  $B(x, y)$  rispetto ad  $x$  si ha

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Siccome  $\omega(x, y)$  è di classe  $C^1(\Omega)$  avremo che  $U(x, y)$  è di classe  $C^2(\Omega)$ . Pertanto le derivate secondi miste sono continue in  $\Omega$  e per il teorema di Schwarz,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x, y),$$

e ciò dimostra che vale l'uguaglianza (2.14).

A questo punto nasce spontaneamente la domanda: ogni forma chiusa è esatta? Purtroppo la risposta in generale è negativa. Per dare una risposta completa alla nostra domanda, introduciamo una nuova definizione *topologica* e successivamente presentiamo il teorema di *Gauss-Green*, che collega l'integrale curvilineo di una forma differenziale lungo una curva chiusa ad un integrale doppio sul dominio delimitato dalla stessa curva.

### Definizione 2.4. (Insieme semplicemente连通的)

Un insieme aperto connesso  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice *semplicemente连通的* se ogni curva regolare, semplice e *chiusa* contenuta in  $\Omega$  è la frontiera di un insieme *limitato*  $D$  interamente contenuto in  $\Omega$ .

Dalla figura seguente si può osservare che ogni insieme semplicemente connesso è evidentemente connesso, e ogni insieme con uno o più "buchi" non è semplicemente connesso.

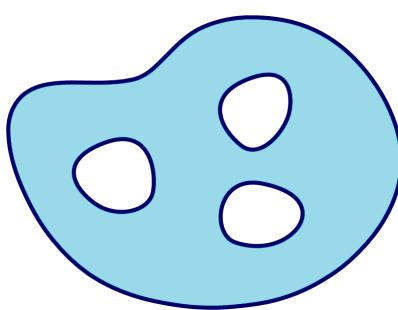


Figura 2.7: Insieme connesso.

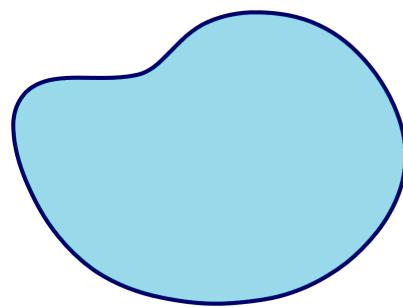


Figura 2.8: Insieme semplicemente connesso.

### Teorema 2.5 (Gauss-Green nel piano)

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio semplice sia rispetto ad  $x$  sia rispetto ad  $y$ . Sia

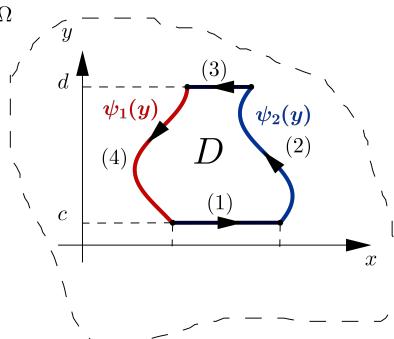
$$\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

una forma differenziale di classe  $C^1(\Omega)$  con  $D \subset \Omega$  aperto. Allora vale la formula di Gauss-Green

$$\oint_{\partial D^+} A(x, y)dx + B(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dxdy \quad (2.15)$$

dove  $\partial D^+$  indica la curva chiusa che ha per sostegno la frontiera di  $D$  percorsa in senso antiorario.

**Dimostrazione.** Consideriamo inizialmente un dominio  $D$  semplice rispetto all'asse  $x$ , ossia del tipo



$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)]\}$ ,  
con  $\psi_1(y), \psi_2(y)$  funzioni continue. Consideriamo la forma differenziale  $B(x, y)dy$  e dimostriamo che

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dxdy = \oint_{\partial D^+} B(x, y)dy. \quad (\text{A})$$

A tale scopo calcoliamo prima l'integrale doppio e l'integrale curvilineo separatamente e poi verifichiamo che siano uguali.

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dxdy = \int_{y=c}^d \left( \int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dx \right) dy = \int_{y=c}^d [B(x, y)]_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy = \int_c^d [B(\psi_2(y), y) - B(\psi_1(y), y)] dy.$$

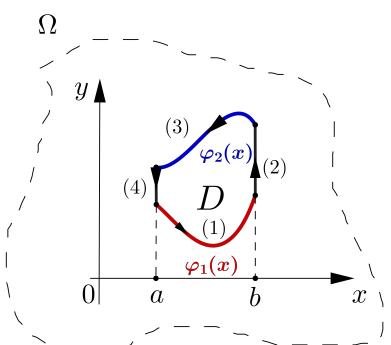
Per l'integrale curvilineo, parametrizziamo il bordo ponendo

$$(1) : \begin{cases} x(t) = \psi_2(t) \\ y(t) = t \end{cases}, \quad (2) : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = d \end{cases}, \quad (3) : \begin{cases} x(t) = \psi_1(t) \\ y(t) = t \end{cases}, \quad (4) : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = c \end{cases},$$

$$t \in [\psi_1(c), \psi_2(c)] \quad t \in [c, d] \quad t \in [\psi_1(d), \psi_2(d)] \quad t \in [d, c]$$

e applicando la (1.10) otteniamo

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} B(x, y) dy &= \int_{\psi_1(c)}^{\psi_2(c)} B(t, c) \cdot (c)' dt + \int_c^d B(\psi_2(c), t) \cdot (t)' dt + \int_{\psi_2(d)}^{\psi_1(d)} B(t, d) \cdot (d)' dt + \int_d^c B(\psi_1(t), t) \cdot (t)' dt \\ &= 0 + \int_c^d B(\psi_2(c), t) dt + 0 + \int_d^c B(\psi_1(t), t) dt = \int_c^d B(\psi_2(c), t) dt - \int_c^d B(\psi_1(t), t) dt \\ &= \int_c^d [B(\psi_2(c), t) - B(\psi_1(t), t)] dt. \end{aligned}$$



Pertanto confrontando i risultati si perviene alla (A). Consideriamo ora un dominio  $D$  semplice rispetto all'asse  $y$ , ossia del tipo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\},$$

con  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  funzioni continue e consideriamo la forma differenziale con  $A(x, y)dx$ . e dimostriamo che

$$-\iint_D \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dx dy = \oint_{\partial D^+} A(x, y) dx. \quad (\text{B})$$

Calcoliamo allora come prima l'integrale doppio e l'integrale curvilineo separatamente e poi verifichiamo l'uguaglianza.

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dx dy &= -\int_{x=a}^b \left( \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = -\int_{x=a}^b [A(x, y)]_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx \\ &= -\int_a^b [A(x, \varphi_2(x)) - A(x, \varphi_1(x))] dx = \int_a^b [A(x, \varphi_1(x)) - A(x, \varphi_2(x))] dx. \end{aligned}$$

Per l'integrale curvilineo, parametrizziamo il bordo ponendo

$$\begin{array}{lll} (1) : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \varphi_1(t) \end{cases}, & (2) : \begin{cases} x(t) = b \\ y(t) = t \end{cases}, & (3) : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \varphi_2(t) \end{cases}, \\ t \in [a, b] & t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] & t \in [b, a] \\ & & t \in [\varphi_2(a), \varphi_1(a)] \end{array}$$

e applicando la (1.10) otteniamo

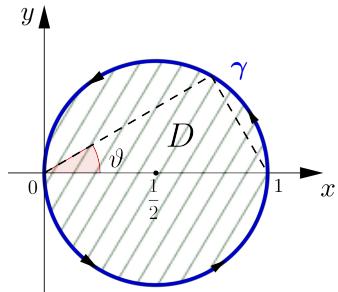
$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} A(x, y) dx &= \int_a^b A(t, \varphi_1(t)) \cdot (t)' dt + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} A(b, t) \cdot (b)' dt + \int_b^a A(t, \varphi_2(t)) \cdot (t)' dt + \int_{\varphi_2(a)}^{\varphi_1(a)} A(a, t) \cdot (a)' dt \\ &= \int_a^b A(t, \varphi_1(t)) dt + 0 + \int_b^a A(t, \varphi_2(t)) dt + 0 = \int_a^b A(t, \varphi_1(t)) dt - \int_a^b A(t, \varphi_2(t)) dt \\ &= \int_a^b [A(t, \varphi_1(t)) - A(t, \varphi_2(t))] dt. \end{aligned}$$

Pertanto confrontando i risultati si ottiene la (B). Poiché il dominio  $D$  è normale rispetto ad entrambi gli assi, valgono sia la (A) che la (B) e quindi sommandole membro a membro si ottiene la tesi.

**Esempio 2.13.** Calcolare l'integrale lungo la circonferenza di centro  $(1/2, 0)$  e raggio  $1/2$  percorsa in senso antiorario della forma differenziale  $\omega(x, y) = (x - y^3)dx + (y^3 + x^3)dy$ .

La forma differenziale assegnata è definita in tutto  $\mathbb{R}^2$ , che è un insieme semplicemente connesso. Dato che

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^3 + x^3) = 3x^2 \neq -3y^2 = \frac{\partial}{\partial y} (x - y^3),$$



$\omega(x, y)$  non è chiusa e pertanto non può essere esatta. Per il calcolo dell'integrale si deve quindi procedere per via esplicita, ossia applicando la (2.10), oppure applicando il teorema di Gauss-Green, poiché la curva  $\gamma$  è chiusa ed è il bordo di un dominio normale del piano. Procediamo in entrambi i modi, per evidenziare l'economia dei calcoli.

1. La circonferenza ha equazione cartesiana  $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ , ed equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 1/2 + 1/2 \cos t \\ y(t) = 1/2 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

e applicando la (2.10) si ha

$$\oint_{\gamma} \omega(x, y) = \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{8} \sin^3 t \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \sin t \right) + \left[ \left( \frac{1}{2} \sin t \right)^3 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right)^3 \right] \cdot \left( \frac{1}{2} \cos t \right) \right] dt.$$

A questo punto si può già osservare che il calcolo dell'integrale risulta piuttosto laborioso. Volendo proseguire è opportuno ricordare le formule di bisezione del coseno, ossia:

$$\cos t + 1 = 2 \cos^2 \left( \frac{t}{2} \right), \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right)^3 = \frac{1}{8} (1 + \cos t)^3 = \cos^6 \left( \frac{t}{2} \right),$$

e quindi l'integrale diviene:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\sin t}{4} - \frac{\sin t \cos t}{4} + \frac{\sin^4 t}{16} + \frac{1}{2} \cos^6 \left( \frac{t}{2} \right) \cos t + \frac{\sin^3 t \cos t}{16} \right] dt \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin t dt - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^6 \left( \frac{t}{2} \right) \cos t dt + \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 t \cos t}{16} dt \\ &= -\frac{1}{4} [\cos t]_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \left[ \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{16} \left[ \frac{\sin^4 t}{4} \right]_0^{2\pi} + 16 \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^6 \left( \frac{t}{2} \right) \cos t dt \\ &= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^6 \left( \frac{t}{2} \right) \cos t dt = \frac{1}{16} \cdot \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15\pi}{32} = \frac{9\pi}{32}. \end{aligned}$$

Infatti per il primo dei due integrali, integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt &= \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin^3 t dt = - \int_0^{2\pi} \sin^3 t d(\cos t) \stackrel{(\mathbf{P})}{=} -[\cos t \sin^3 t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t d(\sin^3 t) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = 3 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \sin^2 t dt = 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt, \\ \text{ricordando che } \int \sin^2 t dt &= \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) \Rightarrow 3 \left[ \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) \right]_0^{2\pi} - 3 \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt, \\ \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt &= 3\pi - 3 \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Per il secondo, ricordando ancora le formule di bisezione del coseno, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^6 \left( \frac{t}{2} \right) \cos t dt &= \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}} \right)^6 \cos t dt = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^3 \cos t dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^3 t + 3 \cos t + 3 \cos^2 t) \cos t dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{8} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 t dt}{8} + \int_0^{2\pi} \frac{3 \cos^2 t dt}{8} + \int_0^{2\pi} \frac{3 \cos^3 t dt}{8} \\ &= \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{8} \cdot \pi + \frac{3}{8} \cdot 0 = \frac{15\pi}{32}. \end{aligned}$$

2. Applichiamo il teorema di Gauss-Green. Si tratta di calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

dove  $D$  è il dominio definito da  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4\}$ . Conviene effettuare un cambiamento di variabili (una traslazione) ponendo  $x - 1/2 = u$  e  $y = v$ , con fattore jacobiano di trasformazione uguale a 1, in modo tale che invece di integrare la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sull'insieme  $D$ , integreremo la funzione  $f(u, v) = (u + 1/2)^2 + v^2$  sull'insieme  $\Phi^{-1}(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1/4\}$ . Passando allora in coordinate polari, ponendo cioè

$$u = \rho \cos \vartheta, \quad v = \rho \sin \vartheta \quad \text{con} \quad \rho \in [0, 1/2], \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

e ricordando il fattore jacobiano di trasformazione  $\rho d\rho d\vartheta$ , si ha

$$\begin{aligned} 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= 3 \iint_{\Phi^{-1}(D)} ((u + 1/2)^2 + v^2) dudv \stackrel{\Phi(\rho, \vartheta)}{=} 3 \int_{\rho=0}^{\frac{1}{2}} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \rho ((\rho \cos \vartheta + 1/2)^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta) d\rho d\vartheta \\ &= 3 \int_{\rho=0}^{\frac{1}{2}} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} ((\rho^3 + 2\rho^2 \cos \vartheta + 1/4\rho)) d\rho d\vartheta = 3 \left( 2\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}} + 2 \left[ \frac{\rho^3}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}} [\sin \vartheta]_0^{2\pi} + \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= 3 \left( \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{16} \right) = \frac{9\pi}{32}. \end{aligned}$$

**Esempio 2.14.** Data la forma differenziale  $\omega(x, y) = 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$ , calcolare l'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo  $\gamma$ , dove  $\gamma$  è il perimetro del triangolo di vertici  $(1, 1), (2, 2), (1, 3)$  percorso in senso antiorario.

La forma differenziale assegnata è definita in tutto  $\mathbb{R}^2$ , che è un insieme semplicemente connesso. Si verifica che  $\omega(x, y)$  non è chiusa, dato che

$$\frac{\partial}{\partial x}(x + y)^2 = 2(x + y) \neq 4y = \frac{\partial}{\partial y}2(x^2 + y^2),$$

pertanto non può essere esatta. Per il calcolo dell'integrale si deve quindi procedere per via esplicita, ossia applicando la (2.10), oppure applicando il teorema di Gauss-Green, poiché la curva  $\gamma$  è chiusa ed è il bordo di un dominio normale del piano. Procediamo anche in questo caso in entrambi i modi per mettere ancora una volta in evidenza quanto a volte sia comodo l'utilizzo del teorema di Gauss-Green invece del calcolo diretto con l'uso della definizione.

1. Consideriamo la curva chiusa  $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  e calcoliamo

$$\oint_{\gamma} \omega(x, y) = \int_{\gamma_1} \omega(x, y) + \int_{\gamma_2} \omega(x, y) + \int_{\gamma_3} \omega(x, y).$$

Parametrizziamo i lati che compongono il triangolo ponendo

$$\begin{aligned} \gamma_1 : & \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}, & \gamma_2 : & \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 4 - t \end{cases}, & \gamma_3 : & \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases}. \\ t \in [1, 2] & & t \in [2, 1] & & t \in [3, 1] & . \end{aligned}$$

Applicando la (2.10) si ha:

$$\int_{\gamma_1} \omega(x, y) = \int_1^2 (4t^2 \cdot 1 + 4t^2 \cdot 1) dt = 8 \int_1^2 t^2 dt = 8 \left[ \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = 8 \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{56}{3},$$

$$\int_{\gamma_2} \omega(x, y) = \int_2^1 (2t^2 + 2(4-t)^2 \cdot 1 + (t+4-t)^2 \cdot (-1)) dt = 4 \int_1^2 (t-2)^2 dt = -4 \left[ \frac{(t-2)^3}{3} \right]_1^2 = -\frac{4}{3},$$

$$\int_{\gamma_3} \omega(x, y) = \int_3^1 2(t^2 + 1) \cdot 0 + (1+t)^2 \cdot 1 dt = - \int_1^3 (1+t)^2 dt = - \left[ \frac{(1+t)^3}{3} \right]_1^3 = -4 \left( \frac{64}{3} - \frac{8}{3} \right) = -\frac{56}{3}.$$

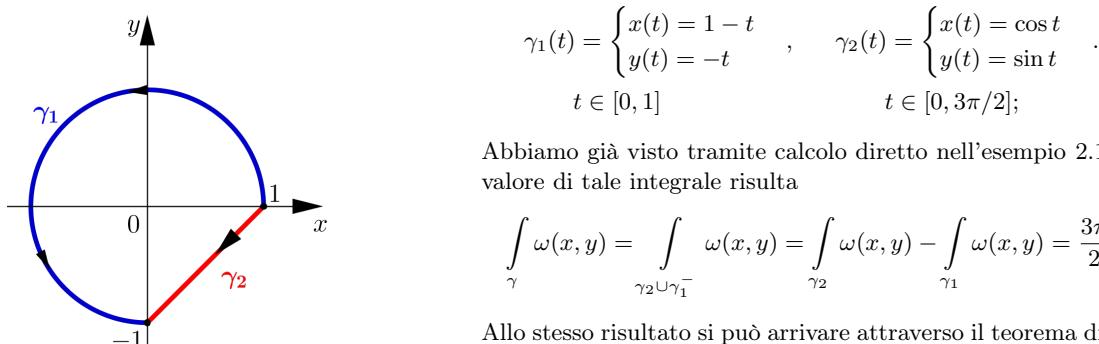
Pertanto

$$\oint_{\gamma} \omega(x, y) = \frac{56}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{4}{3}.$$

2. Applichiamo il teorema di Gauss-Green al triangolo che ha come perimetro la curva  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dx dy &= \iint_D 2(x+y) - 4y dx dy = 2 \iint_D (x-y) dx dy \\ &= 2 \int_{x=1}^2 \int_{y=x}^{4-x} (x-y) dy dx = 2 \int_{x=1}^2 [xy - y^2]_{y=x}^{4-x} dx = -4 \int_{x=1}^2 (x-2)^2 dx = -4 \left[ \frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^2 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**Esempio 2.15.** Data la forma differenziale  $\omega(x, y) = -ydx + xdy$ , calcolare l'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che partono da  $(0, 1)$  e arrivano a  $(0, -1)$  parametrizzate come segue



Abbiamo già visto tramite calcolo diretto nell'esempio 2.11 che il valore di tale integrale risulta

$$\int_{\gamma} \omega(x, y) = \int_{\gamma_2 \cup \gamma_1^-} \omega(x, y) = \int_{\gamma_2} \omega(x, y) - \int_{\gamma_1} \omega(x, y) = \frac{3\pi}{2} + 1.$$

Allo stesso risultato si può arrivare attraverso il teorema di Gauss-Green.

$$\int_{\gamma} \omega(x, y) = \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2|D| = 2 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} + 1.$$

L'esempio precedente suggerisce la possibilità di esprimere, attraverso il teorema di Gauss-Green, l'area di una regione piana tramite un integrale curvilineo. Infatti per definizione di area abbiamo che

$$m(D) = |D| = \iint_D dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dx dy,$$

dove le funzioni  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$  sono tali che

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = 1;$$

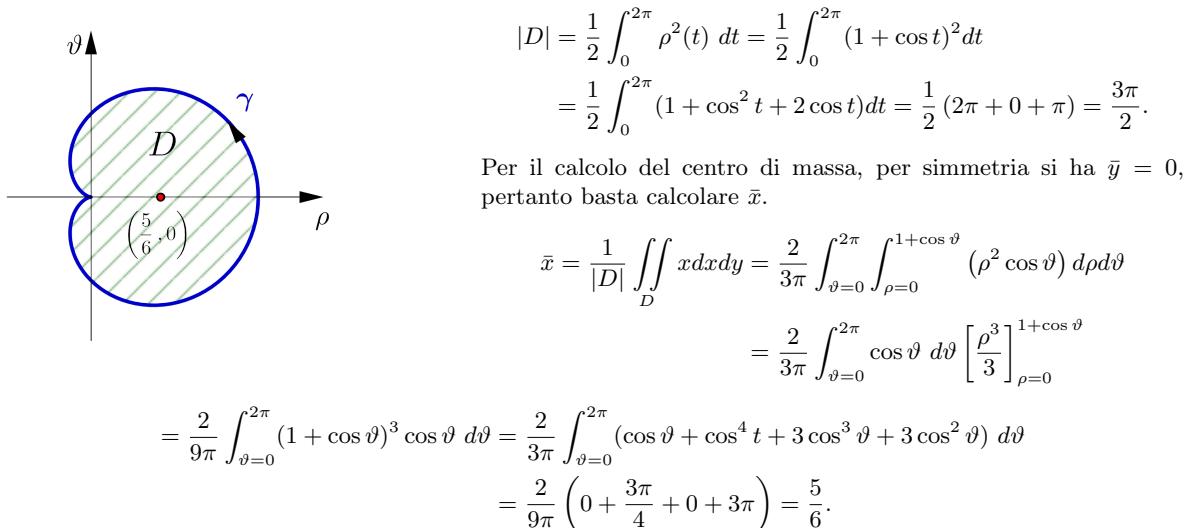
ad esempio, prendendo  $A(x, y) = x/2$  e  $B(x, y) = -y/2$  si giunge alla formula

$$m(D) = |D| = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} -y dx + x dy. \quad (2.16)$$

Inoltre, se una curva chiusa è espressa in coordinate parametriche polari  $\rho(t), \vartheta(t)$  con  $t \in [a, b]$ , allora, per la (2.9), l'area della parte di piano delimitata dalla curva è data da

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_a^b (\rho(t) \cos t) (\rho(t) \sin t)' - (\rho(t) \sin t) (\rho(t) \cos t)' dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (\rho(t) \cos t) (\rho'(t) \sin t + \rho(t) \cos t) - (\rho(t) \sin t) (\rho'(t) \cos t - \rho(t) \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(t) (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(t) dt. \end{aligned}$$

**Esempio 2.16.** Calcolare il centro di massa della parte di piano omogeneo, cioè  $\delta(x, y) = 1$ , delimitata dal cardioide definito dalla parametrizzazione  $\gamma(t) = (1 + \cos t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Per il calcolo della massa, avremo



Possiamo ora dimostrare la condizione sufficiente per l'esattezza di una forma differenziale  $\omega(x, y)$ :

### Teorema 2.6.

Siano  $\Omega$  un aperto semplicemente connesso di  $\mathbb{R}^2$  e  $\omega(x, y)$  una forma differenziale di classe  $C^1(\Omega)$ . Se  $\omega(x, y)$  è chiusa in  $\Omega$  allora  $\omega(x, y)$  è esatta in  $\Omega$ .

**Dimostrazione.** In base alla *ii)* del teorema 2.3 è sufficiente dimostrare che l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa  $\gamma \in \Omega$  della forma  $\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  è nullo. Infatti, poiché per ipotesi  $\Omega$  è semplicemente connesso, la curva  $\gamma$  è il bordo di un dominio  $D$  completamente contenuto in  $\Omega$ . Pertanto si può applicare al dominio sul  $D$  il teorema di Gauss-Green e si ottiene

$$\iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \oint_{\partial D^+} A(x, y)dx + B(x, y)dy. \quad (2.17)$$

Poiché per ipotesi  $\omega(x, y)$  è chiusa si ha l'uguaglianza  $\partial B / \partial x = \partial A / \partial y$ , pertanto l'integrale doppio al primo membro della (2.17) è nullo e ciò prova il teorema.

Con i teoremi 2.4 e 2.6 abbiamo ottenuto una condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza di una forma differenziale che possiamo riassumere così

Siano  $\Omega$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$  e  $\omega(x, y)$  una forma differenziale di classe  $C^1(\Omega)$ .

1. Se  $\omega(x, y)$  è esatta in  $\Omega$  allora  $\omega(x, y)$  è chiusa in  $\Omega$ .
2. Se  $\omega(x, y)$  è chiusa in  $\Omega$  e  $\Omega$  è semplicemente connesso allora  $\omega(x, y)$  è esatta in  $\Omega$ .

A completamento del teorema 2.6, mostriamo con un esempio, che se  $\Omega$  non è semplicemente connesso la chiusura della forma differenziale non è più sufficiente a garantirne l'esattezza. Consideriamo infatti la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

nell'insieme  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R_1 \leq x^2 + y^2 \leq R_2\}$ , ossia i punti interni alla corona circolare con centro l'origine del sistema di riferimento e raggi  $R_1 < R_2$ . Le funzioni  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$  sono di classe  $C^1(\Omega)$  ed inoltre si verifica facilmente che la forma differenziale è chiusa dato che

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y).$$

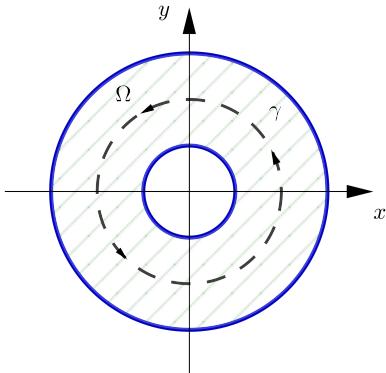
Ma l'insieme  $\Omega$  non è semplicemente connesso, pertanto non possiamo usare la condizione sufficiente (Teorema 2.6) per determinare l'eventuale esattezza della forma. Tuttavia se  $\gamma$  è la curva *chiusa* data dalla circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$ , con  $R_1 < R < R_2$ , parametrizzata da  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , l'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo  $\gamma$  dovrebbe essere nullo:

$$\oint_{\gamma} \omega(x, y) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{R \sin t}{R^2} \cdot (R \cos t)' - \frac{R \cos t}{R^2} \cdot (R \sin t)' \right) dt = -2\pi \neq 0.$$

Dato che l'integrale non vale 0, la condizione necessaria (Teorema 2.4) non è soddisfatta, pertanto la forma non può essere esatta in  $\Omega$ .

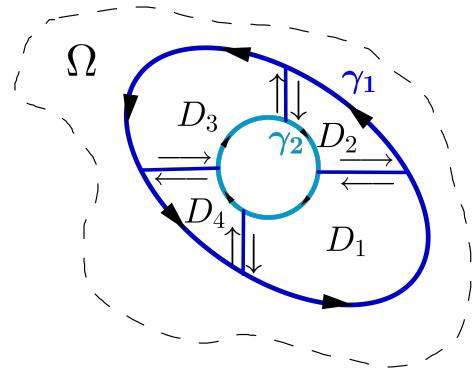
## 2.7 Forme differenziali in insiemi non semplicemente connessi

Vediamo ora le proprietà generali nel caso in cui  $\omega(x, y)$  sia chiusa, ma l'insieme  $\Omega$  non sia semplicemente connesso. Osserviamo inizialmente che le ipotesi del teorema di Gauss-Green



relative al dominio di integrazione sembrano piuttosto restrittive, nel senso che nella maggioranza dei casi si ha a che fare con domini che non sono semplici rispetto agli assi. In realtà il teorema vale anche per domini qualsiasi che possono essere scomposti in un numero finito di

domini in cui valgono le ipotesi del teorema stesso. Ad esempio, il dominio rappresentato in figura  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$  è l'unione di quattro domini  $D_i$  che sono semplici rispetto ad entrambi gli assi coordinati. Quindi per il teorema di Gauss-Green

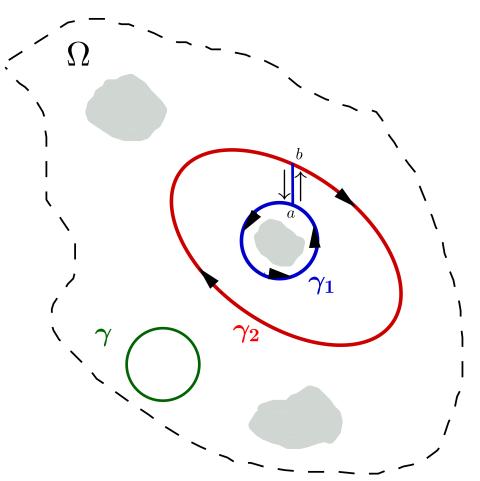


$$\begin{aligned} & \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\stackrel{(GG)}{=} \sum_{i=1}^4 \oint_{\partial D_i^+} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \oint_{\gamma_1} A(x, y) dx + B(x, y) dy + \oint_{\gamma_2} A(x, y) dx + B(x, y) dy,$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che i segmenti orizzontali e verticali vengono percorsi prima in un verso e poi in quello opposto e dunque il loro contributo è nullo. Si noti inoltre che la frontiera  $\partial D$  è data da  $\gamma_1$  orientata in senso antiorario e da  $\gamma_2$  orientata in senso orario.

Consideriamo ora, per fissare le idee, il dominio  $\Omega$  riportato in figura con tre buchi. Osserviamo subito che se consideriamo una curva chiusa  $\gamma$  che non avvolge nessun buco, all'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo  $\gamma$  si può applicare il teorema di Gauss-Green ed essendo  $\omega(x, y)$  chiusa, otteniamo che l'integrale è zero. Supponiamo ora che  $\gamma_1$  sia una curva chiusa che avvolge uno di questi buchi, e non contiene gli altri. In questo caso il teorema di Gauss-Green non può essere applicato e l'integrale lungo  $\gamma_1$  in generale non è zero. Dimostriamo ora che *il valore di tale integrale non dipende dalla scelta particolare del contorno che delimita il buco*. Siano allora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due di tali curve. Unendole con un segmento  $\overline{ab}$  otteniamo la curva chiusa



$$L := \overline{ab} \cup \gamma_1 \cup \overline{ba} \cup \gamma_2^-,$$

dove il segno meno sulla curva  $\gamma_2$  sta ad indicare al solito che questa curva viene percorsa nella direzione opposta. Questa nuova curva non contiene nessun buco e pertanto l'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo tale curva è zero. Ma lungo il segmento  $\overline{ab}$  e  $\overline{ba}$  gli integrali sono uguali ed opposti, non contribuendo al valore dell'integrale, pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_L \omega(x, y) = \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} \omega(x, y) = \oint_{\gamma_1} \omega(x, y) + \oint_{\gamma_2^-} \omega(x, y) = \oint_{\gamma_1} \omega(x, y) - \oint_{\gamma_2} \omega(x, y) \\ &\Rightarrow \oint_{\gamma_1} \omega(x, y) = \oint_{\gamma_2} \omega(x, y). \end{aligned}$$

Questo mostra che il valore dell'integrale curvilineo non dipende dalla scelta particolare del contorno che delimita il buco.

**Esempio 2.17.** Sia

$$\omega(x, y) := \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2},$$

e  $\gamma$  una curva chiusa semplice orientata positivamente che non passa per l'origine  $(0, 0)$  e sia  $D$  è l'insieme delimitato da  $\gamma$ . Dimostrare che

$$\oint_{\gamma} \omega(x, y) = \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } (0, 0) \notin D \\ 2\pi & \text{se } (0, 0) \in D \end{cases}$$

La forma differenziale assegnata, definita in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , che non è semplicemente connesso, è chiusa essendo

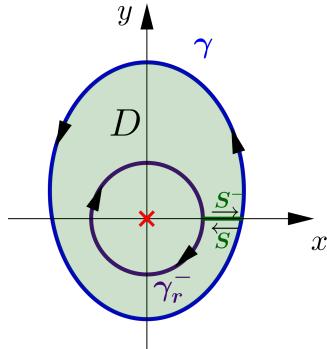
$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y).$$

Quindi se  $(0, 0) \notin D$  per il teorema di Gauss-Green avremo

$$\oint_{\gamma} \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dxdy = 0.$$

Se invece  $(0, 0) \in D$  allora il teorema di Gauss-Green non può essere applicato direttamente perché in  $(0, 0)$  la forma differenziale non è definita.

Questo problema può essere evitato considerando il percorso chiuso  $\gamma \cup S^- \cup \gamma_r \cup S$ , dove  $\gamma_r$  è una circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio  $r$  sufficientemente piccolo in modo che  $\gamma_r \subset D$ , mentre  $S$  è un segmento che unisce  $\gamma_r$  a  $\gamma$ . Dato che questo percorso delimita un insieme che non contiene  $(0, 0)$ , per quanto detto prima, si ha che



$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma \cup S^- \cup \gamma_r \cup S} \omega(x, y) = \int_{\gamma} \omega(x, y) - \int_S \omega(x, y) - \int_{\gamma_r} \omega(x, y) + \int_S \omega(x, y) \\ &= \int_{\gamma} \omega(x, y) - \int_{\gamma_r} \omega(x, y) \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\gamma} \omega(x, y) = \int_{\gamma_r} \omega(x, y).$$

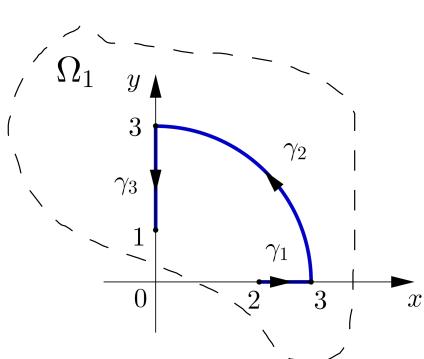
Quindi il calcolo dell'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo  $\gamma$  è uguale al calcolo dell'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo  $\gamma_r$  ossia lungo la circonferenza parametrizzata ponendo  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$  per  $t \in [0, 2\pi]$ . Pertanto

$$\oint_{\gamma} \omega(x, y) = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{r \sin t}{r^2} \cdot (r \cos t)' + \frac{r \cos t}{r^2} \cdot (r \sin t)' \right) dt = 2\pi.$$

**Esempio 2.18.** La forma differenziale dell'esempio 1.12

$$\omega(x, y) = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dx - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dy,$$

definita in  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ , è chiusa, essendo



$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = -3xy(x^2 + y^2)^{-5/2} = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$$

ma l'insieme  $\Omega$  non è semplicemente connesso, pertanto non possiamo concludere che la forma è esatta. Tuttavia se consideriamo l'insieme  $\Omega_1$  come in figura otteniamo un insieme semplicemente connesso, e quindi  $\omega(x, y)$  risulta localmente esatta in  $\Omega_1$ . Pertanto esiste una funzione potenziale  $U(x, y)$  tale che l'integrale lungo la curva  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  sia

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega(x, y) &= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} \omega(x, y) \\ &= U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = U((0, 1)) - U((2, 0)). \end{aligned}$$

## 2.8 Costruzione della funzione potenziale

L'esempio precedente mette in evidenza la necessità di trovare la funzione potenziale  $U(x, y)$ . Consideriamo una forma differenziale

$$\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

definita ed esatta in una aperto connesso  $\Omega$  e sia  $U(x, y)$  una sua funzione potenziale su  $\Omega$ . Allora

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = A(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = B(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

e integrando ad esempio la prima delle relazioni precedenti rispetto ad  $x$  (se avessimo scelto la seconda l'integrazione andrebbe fatta rispetto ad  $y$ ) otteniamo:

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) dx = \int A(x, y) dx \Rightarrow U(x, y) = \int A(x, y) dx + C(y)$$

dove la funzione  $C(y)$  è da determinare. A tal fine deriviamo  $U(x, y)$  rispetto ad  $y$ ,

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int A(x, y) dx + C(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int A(x, y) dx \right) + C'(y).$$

Dato che per ipotesi

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = B(x, y),$$

dove essere

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \int A(x, y) dx \right) + C'(y) \Rightarrow C'(y) = B(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int A(x, y) dx \right) \\ &\Rightarrow C(y) = \int \left[ B(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int A(x, y) dx \right) \right] dy + c. \end{aligned}$$

Per chiarire meglio, riprendiamo l'esempio 2.19 dove  $\omega(x, y)$  è esatta e proviamo a determinare la funzione potenziale  $U(x, y)$ . Dato che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = A(x, y) = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = B(x, y) = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

integrando la prima rispetto ad  $x$  si ottiene

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) dx = \int -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \Rightarrow U(x, y) = -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C(y).$$

Ora derivando l'espressione della  $U(x, y)$  trovata rispetto ad  $y$  si ha

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C(y) \right) = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + C'(y),$$

ma quest'ultima espressione per l'esattezza della forma  $\omega(x, y)$ , deve essere uguale a  $B(x, y)$ . Pertanto

$$-\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = 0.$$

Possiamo concludere che l'insieme delle funzioni potenziali della forma  $\omega(x, y)$  è

$$U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + c.$$

**Esempio 2.19.** La forma differenziale

$$\omega(x, y) = (y^2 + \cos x) \, dx + (2xy + y^2) \, dy,$$

definita in tutto  $\mathbb{R}^2$ , che è un insieme semplicemente connesso, è chiusa, dato che

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^2 + \cos x) = 2y = \frac{\partial}{\partial x} (2xy + y^2)$$

e pertanto è anche esatta. Cerchiamo allora una funzione potenziale  $U(x, y)$ . Si ha che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = A(x, y) = (y^2 + \cos x), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = B(x, y) = (2xy + y^2)$$

e integrando la prima rispetto ad  $x$  si ottiene

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) \, dx = \int (y^2 + \cos x) \, dx \Rightarrow U(x, y) \, dx = xy^2 + \sin x + C(y).$$

Infine derivando la  $U(x, y)$  trovata rispetto ad  $y$  otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial y} (xy^2 + \sin x + C(y)) = 2xy + C'(y),$$

e questa espressione deve essere uguale, per l'esattezza della forma, all'espressione di  $B(x, y)$  cioè deve essere

$$2xy + C'(y) = 2xy + y^2 \Rightarrow C'(y) = y^2 \Rightarrow C(y) = y^3/3 + c.$$

Allora le funzioni potenziale cercate sono

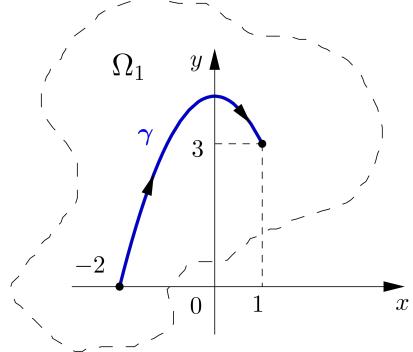
$$U(x, y) = xy^2 + \sin x + y^3/3 + c.$$

**Esempio 2.20.** Consideriamo la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \, dx + \left( \frac{y}{x^2 + y^2} + x^2 \right) \, dy \quad \forall (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Calcolare l'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo la parabola  $y = 4 - x^2$  per  $x \in [-2, 1]$  da  $(-2, 0)$  a  $(1, 3)$ .

La forma differenziale assegnata non è chiusa, infatti



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} + x^2 \right) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + 2x \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

pertanto non può essere esatta. In questo caso si dovrebbe quindi procedere con il calcolo esplicito dell'integrale attraverso la (2.10). Tuttavia, sfruttando la linearità, possiamo scrivere la forma  $\omega(x, y)$  come somma delle forme  $\omega_1(x, y)$  e  $\omega_2(x, y)$  dove

$$\omega_1(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \, dx + \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \, dy, \quad \omega_2(x, y) = x^2 \, dy.$$

In tal modo la forma  $\omega_1(x, y)$  è chiusa in  $\Omega$ , ma l'insieme  $\Omega$  non è semplicemente connesso, pertanto non possiamo concludere nulla circa l'esattezza di  $\omega_1(x, y)$ . Se invece consideriamo un qualsiasi insieme  $\Omega_1 \subset \Omega$  che non contenga l'origine, ma che invece contenga l'arco della parabola (come ad esempio in figura), allora la forma  $\omega_1(x, y)$  è chiusa nell'insieme semplicemente connesso  $\Omega_1$  ed è pertanto esatta. Quindi esiste una funzione potenziale  $U(x, y)$  tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Integrando la prima rispetto ad  $x$  otteniamo

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) \, dx = \int \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \, dx \Rightarrow U(x, y) = \frac{1}{2} \int \left( \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right) \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C(y),$$

e derivando ora rispetto ad  $y$  l'espressione  $U(x, y)$  trovata, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C(y) \right) = \frac{y}{x^2 + y^2} + C'(y).$$

Per l'esattezza deve essere

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = 0,$$

pertanto una funzione potenziale è

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Così il calcolo dell'integrale della forma  $\omega_1(x, y)$  si riduce a

$$\int_{\gamma} \omega_1(x, y) = U(1, 3) - U(-2, 0) = \frac{1}{2} \ln 10 - \frac{1}{2} \ln 4 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}.$$

Ora consideriamo la forma  $\omega_2(x, y)$  che evidentemente non è chiusa, e dunque non può essere esatta. Per il calcolo dell'integrale si può procedere con il calcolo esplicito usando la (2.10) e parametrizzando la parabola ponendo  $\gamma(t) = (t, 4 - t^2)$  con  $t \in [-2, 1]$ ,

$$\int_{\gamma} \omega_2(x, y) = \int_{-2}^1 (0 \cdot (t)' + t^2 \cdot (4 - t^2)') dt = \int_{-2}^1 -2t^3 dt = - \left[ \frac{t^4}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{15}{2}.$$

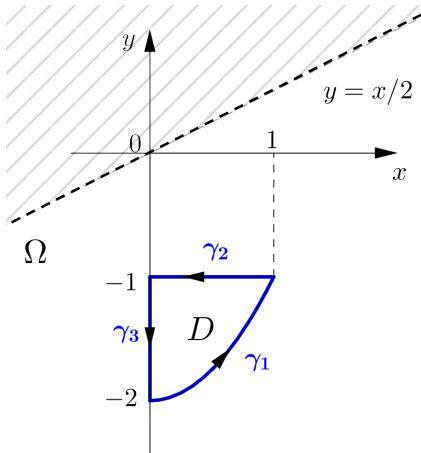
In conclusione

$$\int_{\gamma} \omega(x, y) = \int_{\gamma} \omega_1(x, y) + \int_{\gamma} \omega_2(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} + \frac{15}{2}.$$

**Esempio 2.21.** Consideriamo la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left( \frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx + \left( \frac{-2}{\sqrt{x-2y}} + 3x^2 \right) dy.$$

Calcolare l'integrale di  $\omega(x, y)$  lungo il percorso chiuso  $\gamma$  definito dall'arco di parabola  $y = x^2 - 2$   $x \in [0, 1]$ , dal segmento che unisce i punti  $(0, -1)$  e  $(-1, 1)$  e dal segmento che unisce i punti  $(0, -1)$  e  $(0, -2)$ . La forma differenziale assegnata è definita in



$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{x}{2} \right\};$$

che è un insieme semplicemente connesso. In tale insieme  $\omega(x, y)$  non è chiusa, infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-2}{\sqrt{x-2y}} + 3x^2 \right) &= \frac{1}{(x-2y)^{3/2}} + 6x \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1} \right) &= \frac{1}{(x-2y)^{3/2}}, \end{aligned}$$

pertanto non può essere esatta. Tuttavia sfruttando la linearità possiamo scrivere la forma  $\omega(x, y)$  come somma delle forme  $\omega_1(x, y)$  e  $\omega_2(x, y)$ , dove

$$\omega_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx + \left( \frac{-2}{\sqrt{x-2y}} \right) dy, \quad \omega_2 = 3x^2 dy.$$

In questo modo la forma  $\omega_1(x, y)$  è chiusa, quindi esatta in  $\Omega$ . Dunque il suo integrale lungo la curva chiusa  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  assegnata è zero. E' sufficiente allora calcolare l'integrale della sola forma  $\omega_2(x, y)$ , che evidentemente non è esatta. In questo caso possiamo applicare il teorema di Gauss-Green al dominio  $D$  delimitato dalla curva  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega_2(x, y) &= \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial x}(x, y) \right) dx dy = \iint_D (6x) dx dy = \int_{x=0}^1 x \int_{y=x^2-2}^{-1} dy dx = 6 \int_{x=0}^1 (x - x^3) dx \\ &= 6 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che una funzione potenziale della  $\omega_1$  si può cercare in questo modo. Per l'esattezza abbiamo che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-2}{\sqrt{x-2y}}.$$

Integrando la prima rispetto ad  $x$  otteniamo:

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1} dx \Rightarrow U(x, y) = 2\sqrt{x-2y} + \arctan x + C(y),$$

e derivando l'espressione trovata di  $U(x, y)$  rispetto ad  $y$  otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( 2\sqrt{x-2y} + \arctan x + C(y) \right) = \frac{-2}{\sqrt{x-2y}} + C'(y).$$

Deve essere

$$\frac{-2}{\sqrt{x-2y}} = \frac{-2}{\sqrt{x-2y}} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = 0,$$

pertanto una funzione potenziale è

$$U(x, y) = 2\sqrt{x-2y} + \arctan x.$$