ESERCITAZIONE della PRIMA SETTIMANA

- GRAFICO delle FUNZIONI ELEMENTARI
- DOMINIO, DERIVATE, INTEGRALI

$\boxed{1}$ Ripassate il grafico di tutte le $\boxed{\text{FUNZIONI ELEMENTARI}}$ utilizzando la sezione di appunti CONOSCENZE PRELIMINARI pag. 25-26

$\boxed{2}$ Svolgete gli esercizi sul $\boxed{\text{DOMINIO}}$ (es. 9bis) a pag. 27 (IMPORTANTE: a pag. 27-28 ci sono le spiegazioni)

$\boxed{3}$ Ripassate il CONCETTO di $\boxed{\text{DERIVATA}}$ e le $\boxed{\text{REGOLE DI DERIVAZIONE}}$ a pag. 47-49 e l'EQUAZIONE della RETTA TANGENTE a pag. 49 - Poi svolgete gli esercizi 14) e 14bis) a pag. 50 e 15) a pag. 53-54

$\boxed{4}$ Ripassate il CONCETTO di $\boxed{\text{PRIMITIVA}}$ a pag. 60 e le $\boxed{\text{REGOLE di INTEGRAZIONE}}$ a pag 61-62. Poi svolgete gli esercizi n° 1) 2) 3) 4) a pag 62 e n° 20) a pag. 64

$\boxed{5}$ Ripassate la formula di $\boxed{\text{INTEGRAZIONE per PARTI}}$ a pag 66-69 e svolgete l'esercizio n° 20/2) vi), viii) e ix).
pag. 70

$\boxed{6}$ Ripassate il concetto di $\boxed{\text{INTEGRALE DEFINITO}}$ e il Teorema FONDAMENTALE del calcolo INTEGRALE a pag. 81-82. Poi svolgete l'esercizio n° 22) a pag. 83.

ULTERIORI ESERCIZI: n° 16) pag 57, n° 17) pag. 58, n° 22/bis) pag. 83.

ESERCIZI della 1ª SETTIMANA

Esercizio 1

Determinare il dominio della funzione:

$$f(x) = e^{3x}\sqrt{7-\frac{1}{7}x^2} + \log(4x^2+1) - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{3x^2-5x-12} - \log(11-2x)$$

le <u>condizioni</u> di <u>esistenza</u> di $f(x)$ sono:

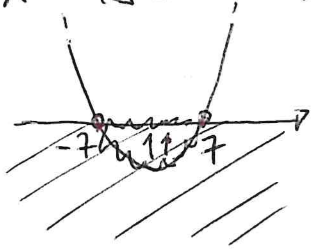
$$\begin{cases} 7-\frac{1}{7}x^2 \geq 0 \longrightarrow \boxed{-7 \leq x \leq 7} \quad \boxed{1} \\ 4x^2+1>0 \longrightarrow 4x^2>-1 \text{ verificata } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}} \\ 3x^2-5x-12 \neq 0 \longrightarrow \boxed{x \neq 3 \wedge x \neq -\frac{4}{3}} \quad \boxed{2} \\ 11-2x>0 \longrightarrow -2x>-11 \longrightarrow \boxed{x<\frac{11}{2}} \quad \boxed{3} \end{cases}$$

- $7-\frac{1}{7}x^2 \geq 0 \longrightarrow 49-x^2 \geq 0 \longrightarrow x^2-49 \leq 0$

risolvendo col metodo della parabola:

$$\begin{cases} y = x^2-49 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

ZERI: $x^2-49=0 \longrightarrow x = \pm 7$

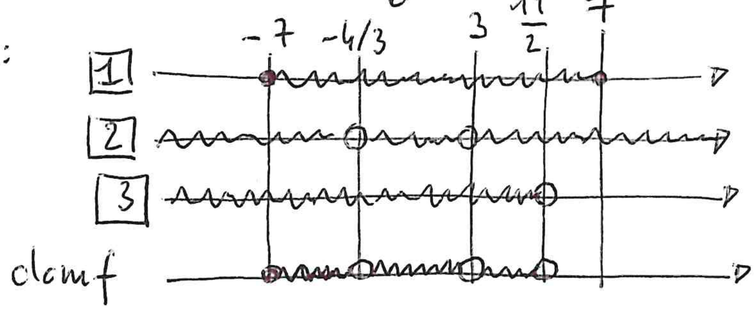


n.b.: è grave errore (scrittura priva di significato) scrivere $x \leq \pm 7$!!

- $3x^2-5x-12=0 \qquad x = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{4}{3} \end{cases}$

Schema riassuntivo:

$$\boxed{\operatorname{dom} f = \left[-7, -\frac{4}{3}\right[\cup \left]-\frac{4}{3}, 3\right[\cup \left]3, \frac{11}{2}\right[}$$



Esercizio 2

$$\boxed{\text{Calcolare la derivata di } f(x) = e^{3x}\sqrt{7-\frac{1}{7}x^2}}$$

Ricordare che è un prodotto e la derivata di $f(x) \cdot g(x)$ è $\boxed{f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$

I fattori del prodotto sono funzioni composte: la derivata di $e^{f(x)}$ è $\boxed{e^{f(x)} \cdot f'(x)}$,

mentre quella di $\sqrt{f(x)}$ è $\boxed{\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}$.

Quindi:

$$f'(x) = 3\,e^{3x}\cdot\sqrt{7-\frac{1}{7}x^2} + e^{3x}\cdot\frac{-\frac{\cancel{2}}{7}x}{\cancel{2}\sqrt{7-\frac{1}{7}x^2}}$$

Osserviamo che in ± 7 la funzione esiste ma <u>non</u> è derivabile.

Esercizio 3

$$\boxed{\text{Calcolare la derivata di } g(x) = \log(4x^2+1)}$$

È una funzione composta e la derivata di $\log f(x)$ è $\boxed{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}$

Quindi $g'(x) = \dfrac{8x}{4x^2+1}$

Esercizio 4

Calcolare la derivata di $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{3x^2 - 5x - 12}$

Ricordare che la derivata di $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è

$$\boxed{\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

e che la derivata di $\operatorname{sen}(f(x))$ è $\boxed{(\cos f(x)) \cdot f'(x)}$ (mentre quella di $\cos f(x)$ è $(-\operatorname{sen} f(x)) \cdot f'(x)$)

Quindi $g'(x) = \dfrac{[4\cos(4x)] \cdot (3x^2 - 5x - 12) - [\operatorname{sen}(4x)] \cdot (6x - 5)}{(3x^2 - 5x - 12)^2}$

Esercizio 5

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \sqrt{x^2 - 4}$ nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

Prima di tutto controlliamo se $3 \in \operatorname{dom} f$.

Evidentemente sì $(\operatorname{dom} f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[)$

In x_0 la funzione è quindi <u>continua</u> e <u>derivabile</u>.

$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ è la funzione derivata.

$f'(3) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ è il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico nel punto di ascissa 3. Per $x_0 = 3$, $y_0 = \sqrt{5}$ e quindi l'equazione della retta è

$$y - y_0 = m(x - x_0) \longrightarrow y - \sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}(x - 3)$$

cioè $y = \frac{3}{\sqrt{5}}x - \frac{9}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} \longrightarrow y = \frac{3\sqrt{5}}{5}x - \frac{9\sqrt{5}}{5} + \sqrt{5}$

$$\boxed{y = \frac{3\sqrt{5}}{5}x - \frac{4}{5}\sqrt{5}}$$

Esercizio 6.

$$\boxed{\text{Calcolare} \quad \int \frac{8}{5}x^5\,dx}$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{8}{5}x^5\,dx = \frac{8}{5}\int x^5\,dx = \frac{\cancel{8}^{4}}{5}\,\frac{x^6}{\cancel{6}_{3}} + c = \frac{4}{15}x^6 + c$$

$(c \in \mathbb{R})$

È necessario inserire $+c$ perché l'integrale indefinito di $f(x)$ $\left(\int f(x)\,dx\right)$ è l'insieme di tutte le funzioni $F(x)$ primitive di $f(x)$, cioè tali che $F(x) = f(x)$, che differiscono per una costante reale (le cui derivata è 0).

Esercizio 5

$\boxed{\text{Calcolare } \int \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx}$ — C.E. $x^2 > 0\ \forall x \neq 0$ — Osserviamo che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Quindi $\int \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx = 4\int x^{-\frac{2}{5}}\,dx = 4 \cdot \frac{x^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1} + c$

$= 4\,\frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{20}{3}\sqrt[5]{x^3} + c$

Esercizio 6

$\boxed{\text{Calcolare } \int \frac{3}{2}\,\operatorname{sen}\frac{x}{6}\,dx}$

Ricordare che $\int \operatorname{sen} f(x) \cdot \boxed{f'(x)}\,dx =$

$= -\cos f(x) + c$ (perché la derivata di $\cos f(x)$ è $-\operatorname{sen} f(x) \cdot \boxed{f'(x)}$)

Quindi $\int \frac{3}{2}\,\operatorname{sen}\frac{x}{6}\,dx =$

$= \frac{3}{2}\int \operatorname{sen}\frac{x}{6}\,dx$ [è utile scrivere $f(x) = \frac{x}{6}$ $f'(x) = \boxed{\frac{1}{6}}$]

$= \frac{3}{2} \cdot 6 \int \boxed{\frac{1}{6}}\,\operatorname{sen}\frac{x}{6}\,dx =$

$= -9\cos\frac{x}{6} + c$

n.b: per controllare la validità di una integrazione occorre derivare la funzione ottenuta e vedere se si ottiene la funz. integranda:

$$\frac{d}{dx}\left(-9\cos\frac{x}{6}\right) = -9\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{6}\right)\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{6}$$

Esercizio 7

Calcolare $\int \frac{2}{5} e^{-4x}\,dx$

Ricordare che $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

Quindi $\int \frac{2}{5} e^{-4x}\,dx = \frac{2}{5}\int e^{-4x}\,dx =$

$$= \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\int \boxed{-4}\,e^{-4x}\,dx = \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = -4x \\ f'(x) = \boxed{-4} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{10}e^{-4x} + c$$

n.b Il fattore <u>numerico</u> inserito va bilanciato inserendo esternamente il suo reciproco <u>(SI PUÒ FARE SOLO CON DELLE COSTANTI!!)</u>

Esercizio 8

Calcolare $\int \sqrt{x^4+x^2}\,dx$ per $x\in[-2,-1]$

Ricordiamo che $\sqrt{f(x)}=[f(x)]^{\frac{1}{2}}$ e che

$$\int [f(x)]^{\alpha}\cdot \boxed{f'(x)}\,dx=\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \quad \text{per } \alpha\neq -1$$

Quindi $\int \sqrt{x^4+x^2}\,dx=\int \sqrt{x^2(x^2+1)}\,dx=$

$$=\int -x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int -x\,(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}=\begin{cases} x & \text{se } x>0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$

IMPORTANTE

$$=-\frac{1}{2}\int \boxed{2x}\,(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$\boxed{\begin{array}{l} f=x^2+1\\ f'=2x\end{array}}$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=-\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c$$

Esercizio 9

Calcolare $\int \frac{dx}{5x+4}$

Ricordiamo che $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+c$

Quindi $\displaystyle\int \frac{dx}{5x+4} = \frac{1}{5}\int \frac{\boxed{5}}{5x+4}\,dx$ $\quad \left[\begin{array}{l} f(x)=5x+4 \\ f'(x)=\boxed{5} \end{array}\right]$

$$= \frac{1}{5}\log|5x+4| + C$$

Esercizio 10

Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{5x+4}$

Al di là del significato grafico, il calcolo dell'integrale definito si fa utilizzando il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

(F qualunque PRIMITIVA di f)

Quindi $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{5x+4} =$

$$= \left[-\frac{1}{5}\log|5x+4|\right]_{x=-1} - \left[-\frac{1}{5}\log|5x+4|\right]_{x=-2}$$

$$= -\frac{1}{5}\log|-5+4| + \frac{1}{5}\log|-10+4| =$$

$$= -\frac{1}{5}\log 1 + \frac{1}{5}\log 6 = \frac{1}{5}\log 6 \quad (\text{perché } \log 1 = 0)$$

Esercizio 11

$$\boxed{\text{Calcolare} \int x^2 e^{\frac{3}{4}x}\,dx}$$

Quando la funzione integranda si presenta come prodotto e non si riesce ad integrare come derivata di funz. composta si può provare a integrare per parti:

$$\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx}$$

dove $f(x)$ viene detto fattore finito (da derivare) e $g'(x)$ fattore differenziale (da integrare).

Conviene scegliere x^2 come $f(x)$ perché derivandolo si abbassa di grado.

Quindi:

$$\int x^2 e^{\frac{3}{4}x}\,dx = \qquad \left[\begin{array}{ll} f = x^2 & g' = e^{\frac{3}{4}x} \\ f' = 2x & g = \frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}x} \end{array}\right]$$

$$= \frac{4}{3}x^2 e^{\frac{3}{4}x} - \int 2x \cdot \frac{4}{3} e^{\frac{3}{4}x}\,dx$$

$$= \frac{4}{3}x^2 e^{\frac{3}{4}x} - \frac{8}{3}\int x e^{\frac{3}{4}x}\,dx =$$

$$\left(\int e^{\frac{3}{4}x}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{3}{4} e^{\frac{3}{4}x}\,dx = \frac{4}{3} e^{\frac{3}{4}x} + c \right)$$

$$= \frac{4}{3} x^2 e^{\frac{3}{4}x} - \frac{8}{3}\left[\frac{4}{3} x e^{\frac{3}{4}x} - \int \frac{4}{3} e^{\frac{3}{4}x} dx\right]$$

$$\begin{bmatrix} f = x & g' = e^{\frac{3}{4}x} \\ f' = 1 & g = \frac{4}{3} e^{\frac{3}{4}x} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4}{3} x^2 e^{\frac{3}{4}x} - \frac{32}{9} x e^{\frac{3}{4}x} + \frac{32}{9} \int e^{\frac{3}{4}x} dx$$

$$= \frac{4}{3} x^2 e^{\frac{3}{4}x} - \frac{32}{9} x e^{\frac{3}{4}x} + \frac{32}{9} \cdot \frac{4}{3} e^{\frac{3}{4}x} + c$$

$$= e^{\frac{3}{4}x}\left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{32}{9}x + \frac{128}{27}\right) + c$$

Abbiamo applicato 2 volte l'integrazione per parti.

Verifichiamo il risultato ottenuto:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\frac{3}{4}x}\left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{32}{9}x + \frac{128}{27}\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{4} e^{\frac{3}{4}x}\left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{32}{9}x + \frac{128}{27}\right) + e^{\frac{3}{4}x}\left(\frac{8}{3}x - \frac{32}{9}\right)$$

$$= e^{\frac{3}{4}x}\left(x^2 \cancel{- \frac{8}{3}x} \cancel{+ \frac{32}{9}} \cancel{+ \frac{8}{3}x} \cancel{- \frac{32}{9}}\right)$$

$$= e^{\frac{3}{4}x} \cdot x^2$$

<u>o.k.!</u>

SCHEDE DI ESERCIZI

Svolgete l'esercizio N° 1) della SCHEDA N° 1

e l'esercizio N° 0) della SCHEDA N° 1-bis .