EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI (I)

EQUAZIONI OMOGENEE

Cerchiamo di ricavare la regola per determinare l'integrale generale delle equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti partendo dalla soluzione di alcune semplici equazioni omogenee (cioè prive del termine noto, che è la funzione che dipende solo da x).

ESEMPIO 1: $y' - y = 0$

Questa equazione può essere trasformata in $y' = y$
Ciò significa che siamo alla ricerca di una funzione che sia uguale alla sua derivata: si tratta di $y = e^x$, perché si ha anche $y' = e^x$. Ma qualunque funzione ottenuta moltiplicando e^x per un fattore costante ha la stessa proprietà, quindi più in generale avremo $y = ce^x$.

ESEMPIO 2: $y' + y = 0$

Questa equazione può essere trasformata in $y' = -y$
Ciò significa che siamo alla ricerca di una funzione che sia uguale all'opposto della sua derivata: si tratta di $y = e^{-x}$, perché si ha $y' = -e^{-x}$. Ma qualunque funzione ottenuta moltiplicando e^{-x} per un fattore costante ha la stessa proprietà, quindi più in generale avremo $y = ce^{-x}$.

ESEMPIO 3: $y' - 3y = 0$

Questa equazione può essere trasformata in $y' = 3y$
In questo caso la derivata deve essere il triplo della funzione. La funzione perciò sarà del tipo $y = e^{3x}$. Infatti in questo caso $y' = 3e^{3x}$. Perciò l'integrale generale sarà $y = ce^{3x}$.

ESEMPIO 4: $y'' - y = 0$

Con il solito passaggio diventa $y'' = y$.
Ci sono due funzioni che sono uguali alle loro derivate seconde: $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$. Qualunque altra funzione ottenuta da una combinazione lineare di queste due è ancora soluzione dell'equazione differenziale. Per esempio: $y = 2e^x - 3e^{-x}$. Infatti si ha $y' = 2e^x + 3e^{-x}$ e $y'' = 2e^x - 3e^{-x}$, e come si vede la derivata seconda è ancora uguale alla funzione. Perciò l'integrale generale sarà dato dalla più generica combinazione lineare: $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$.

Finora abbiamo avuto modo di notare che, in equazioni molto semplici e risolvibili ad occhio, la funzione di tipo esponenziale, con opportuni coefficienti all'esponente, è soluzione delle equazioni omogenee. Questo ci autorizza a tentare con questo tipo di soluzione anche nel caso più generale.

GENERALIZZIAMO

Consideriamo l'equazione del secondo ordine $y'' + py' + qy = 0$ e tentiamo una soluzione di prova $\varphi = e^{\lambda x}$ dove λ è una costante da determinare. Calcoliamo le derivate della funzione di prova e sostituiamole nell'equazione: dal momento che la derivata prima è $\varphi' = \lambda e^{\lambda x}$ e la derivata seconda è $\varphi'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, l'equazione differenziale diventa:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$$

Raccogliamo il fattore comune

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$$

Dal momento che il termine esponenziale è certamente diverso da zero, questa equazione è soddisfatta solo dai valori di λ che annullano l'equazione algebrica di secondo grado che si trova fra parentesi. Quindi i valori da dare al coefficiente λ all'esponente in $\varphi = e^{\lambda x}$ sono le radici dell'equazione $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ che viene detta **equazione caratteristica** associata all'equazione differenziale $y'' + py' + qy = 0$.

Questo ragionamento vale qualunque sia l'ordine dell'equazione: si associa all'equazione differenziale l'equazione caratteristica e la si risolve. I valori di λ radici dell'equazione caratteristica sono i coefficienti da dare alla variabile x nella funzione $\varphi = e^{\lambda x}$, e l'integrale generale dell'equazione differenziale si ottiene prendendo la più generica combinazione lineare delle diverse funzioni $\varphi = e^{\lambda x}$ che si ottengono con in valori di λ trovati.

Un'equazione del primo ordine ha come integrale generale una funzione moltiplicata per una generica costante, una del secondo ordine una combinazione lineare di due funzioni con due generiche costanti moltiplicative, una del terzo ordine una combinazione lineare di tre funzioni con tre costanti, e così via.

****

Facciamo subito qualche esempio numerico:

$$4y' + 3y = 0$$

L'equazione caratteristica è

$$4\lambda + 3 = 0$$

e la sua radice è $\lambda = -\frac{3}{4}$.

L'integrale generale dell'equazione differenziale perciò è: $y = ce^{-\frac{3}{4}x}$

Consideriamo ora

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

e le sue radici sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -4$.

L'integrale generale dell'equazione differenziale data è $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x}$.

Nulla ci vieta di estendere questo procedimento anche a equazioni di ordine superiore. Il problema sta però nel fatto che non sempre sappiamo risolvere equazioni di grado superiore al secondo.

Prendiamo in esame un'equazione del terzo ordine

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$$

L'equazione caratteristica è ovviamente di terzo grado:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Scomponiamo il polinomio

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = \lambda^2(\lambda + 2) - (\lambda + 2) = (\lambda^2 - 1)(\lambda + 2)$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto otteniamo le tre radici $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$.
L'integrale generale è $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$.

In generale quindi l'integrale generale di un'equazione di ordine *n* è dato dalla combinazione lineare di *n* funzioni, ma non è detto che un'equazione algebrica di grado *n* ci porti a determinare *n* valori distinti e reali di λ.

QUESTIONI APERTE

Vediamo quali complicazioni si possono avere in alcuni casi.
Prendiamo ad esempio

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

e perciò le radici sono coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
L'integrale generale deve però contenere due funzioni distinte (si dice due funzioni linearmente indipendenti).
Se pensate che per formare l'integrale generale basti fare $y = c_1 e^x + c_2 e^x$ osservate che in realtà $y = c_1 e^x + c_2 e^x = (c_1 + c_2)e^x = ce^x$. Per la genericità della costante *c* si tratta di un'unica funzione.

Nel caso di radici coincidenti quindi oltre al semplice esponenziale dobbiamo cercare anche un'altra funzione. Vedremo in seguito.

Esaminiamo un'altra situazione difficile.

$$y'' + y = 0$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

e ovviamente non ha radici reali, ma puramente immaginarie.

Notate che se avessimo scritto in altro modo l'equazione, $y'' = -y$, avremmo potuto trovare ad occhio le due possibili funzioni che sono uguali all'opposto della loro derivata: $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$.
Quindi in questo caso l'integrale generale prende la forma $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.
Ma non avevamo scoperto che la funzione esponenziale funziona sempre?