2ª ESERCITAZIONE – CURVE

$\boxed{1}$ Data la curva dell'esercizio $\boxed{3}$ della lez. precedente

determinare, rispetto al punto $P_0(-2,-3)$

a) il vettore tangente

b) la velocità scalare

c) il versore tangente

d) l'equazione cartesiana e vettoriale della retta tangente

e) l'equazione cartesiana della retta normale

f) le equazioni parametriche della retta normale

Svolgimento: Ricordiamo che

$$\gamma(t) = \left(t-17, \frac{1}{4}(t-13)^2-4\right) \quad t\in[9,19]$$

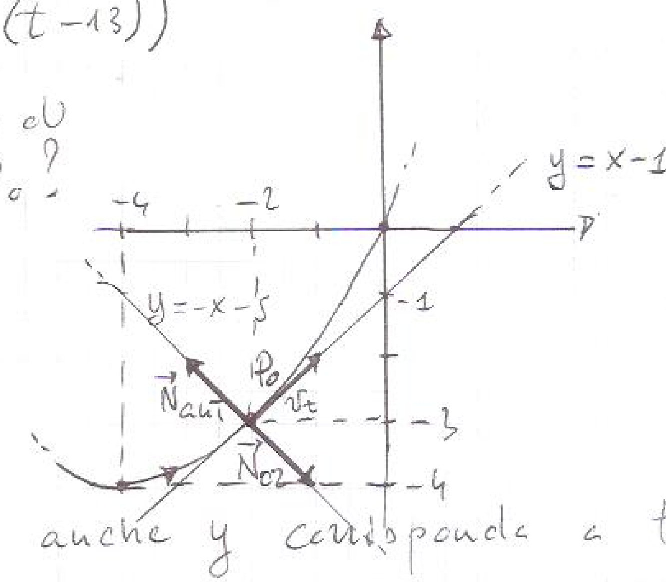
a) $\gamma'(t) = \left(1, \frac{1}{2}(t-13)\right)$

A quale valore di t corrisponde P_0?

$x = t-17$

$-2 = t-17$

$t = 15$



Verifichiamo che anche y corrisponda a $t=+15$

$y = \frac{1}{4}(15-13)^2-4 = \frac{1}{4}\cdot 4-4 = -3$ O.K.

Il vettore tangente è quindi $\gamma'(15) = (1,1)$
$= \vec{i} + \vec{j} = \vec{v}_{P_0}$

b) La velocità scalare è $\|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

c) Il versore tangente si ottiene dividendo per $\sqrt{2}$ entrambe le componenti del vettore tangente: quindi $\vec{T}_{P_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

d) L'equazione cartesiana della retta tangente è $y = -3 + \frac{1}{1}(x+2) \longrightarrow y = -3 + x + 2 \longrightarrow \boxed{y = x-1}$

L'equazione cartesiana si può anche ricavare dall'equazione vettoriale della retta tangente in P_0, che è $P = P_0 + \vec{v}_{P_0}\, t$ da cui ricaviamo le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = -3 + t \end{cases} \quad t \in R \longleftarrow P = (-2,-3) + (1,1)\,t$$

Eliminando t fra le 2 equazioni otteniamo
$t = x + 2 \longrightarrow y = -3 + x + 2 \longrightarrow \boxed{y = x - 1}$

Un terzo modo di scrivere la retta tangente consiste nell'utilizzo della formula $(P-P_0)\cdot\vec{N}=0$ (dato che il vettore tangente è perpendicolare al vettore normale e quindi il prodotto scalare è nullo); $\vec{N}$ è uno dei 2 vettori normali.

Nel nostro caso $\vec{N}_{02} = (1,-1) = \vec{i}-\vec{j}$

$$\underbrace{(x+2,\ y+3)}_{P-P_0}\cdot\underbrace{(1,-1)}_{\vec{N}_{02}} = x+2-y-3=0$$

$$\boxed{y=x-1}$$

e) Anche l'equazione cartesiana della retta normale la possiamo ottenere in 3 modi diversi:

1 - $m_\perp = -\dfrac{1}{m_{tang}} = -1 \rightarrow y=-3-1(x+2)$

$y=-3-x-2$

$\boxed{y=-x-5}$

2 - $(P-P_0)\cdot\vec{v}_{tan}=0$

quindi $(x+2,\ y+3)\cdot(1,1)=0$

$x+2+y+3=0 \quad \boxed{y=-x-5}$

3 - Partendo da un vettore normale ricavo $m=\dfrac{N_2}{N_1}=\dfrac{-1}{1}=-1 \rightarrow y=-3-1(x+2)$

$\boxed{y=-x-5}$

f) Le equazioni parametriche della retta normale in P_0.
Utilizzando $\vec{N}_{02} = (1,-1)$ e sapendo che $P = P_0 + \vec{N}_{02}\, t$

ottieniamo $\begin{cases} x(t) = -2 + t \\ y(t) = -3 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

(eliminando t si potrebbe ottenere in un questo modo l'equazione cartesiana)

Usando $\underset{\overset{\parallel}{(-1,1)}}{\vec{N}_{ant}}$ si otteneva $\begin{cases} x(t) = -2 - t \\ y(t) = -3 + t \end{cases}$

cambiava il verso di percorrenza, che coincide col verso del vettore.

$\boxed{2}$ Risolviamo le seguenti disequazioni con 2 variabili, rappresentando graficamente il sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ soluzione:

a) $x - 5 \leq 0$

b) $y + 3 > 0$

c) $y + x - 2 \leq 0$

d) $y - x^2 + 5x - 6 \geq 0$

e) $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$

f) $x^2 + y^2 \geq 9$

g) $x^2 + 4y^2 \geq 4$

h) $4x^2 + 9y^2 \leq 36$

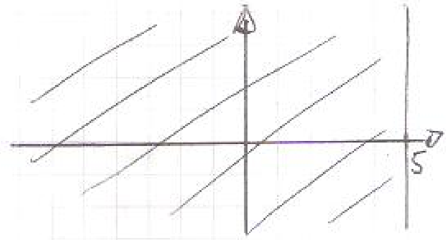
i) $x^2 + y^2 - 6x - 8y \leq 0$

e) $x^2 + y^2 - 6x + 8 \geq 0$

m) $|x| \leq 2$

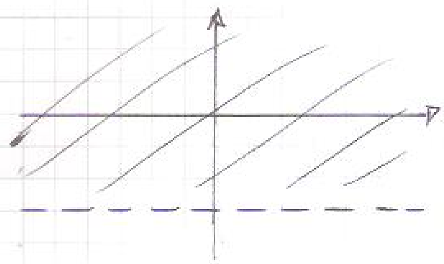
m) $|y| > 1$

a) $x \leq 5$



SEMIPIANO A SINISTRA DI $x = 5$ ORIGINE COMPRESA

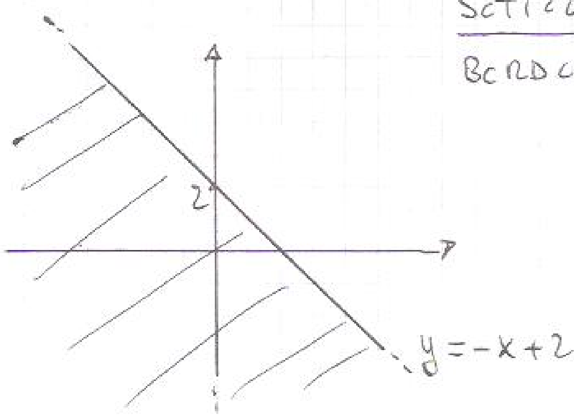
b) $y > -3$

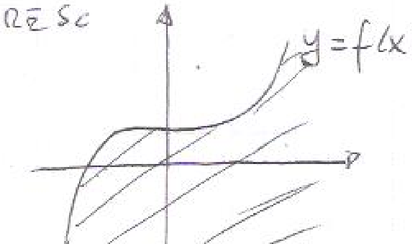


SEMIPIANO SUP. RISPETTO A $y = -3$ ESCLUSA

c) $y \leq -x + 2$

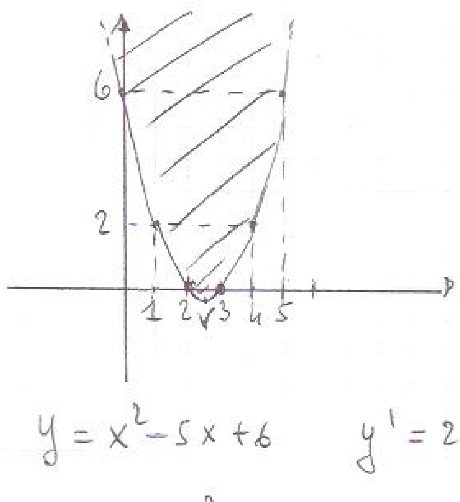
IN GENERALE $y \leq f(x)$ È IL <u>SOTTOGRAFICO</u> RISP. A $y = f(x)$, BORDO COMPRESO

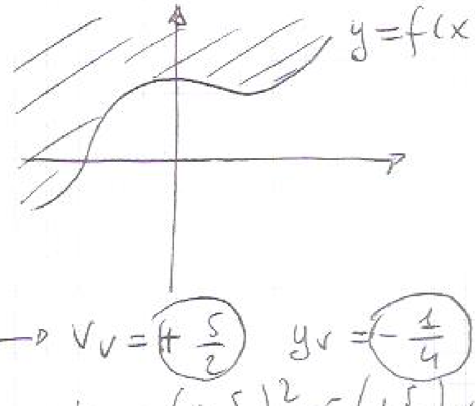




d) $y \geq x^2 - 5x + 6$

IN GENERALE $y \geq f(x)$ È IL <u>SOPRAGRAFICO</u> RISP. A $y = f(x)$ BORDO COMPRESO





$y = x^2 - 5x + 6 \qquad y' = 2x - 5 = 0 \longrightarrow x_V = +\frac{5}{2} \qquad y_V = -\frac{1}{4}$

ZERI: $x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$y_V = \left(+\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(+\frac{5}{2}\right) + 6$

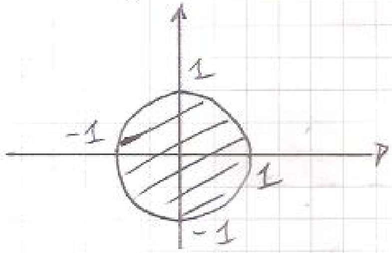
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$

$= \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25 - 50 + 24}{4}$

e) $x^2+y^2 \le 1$

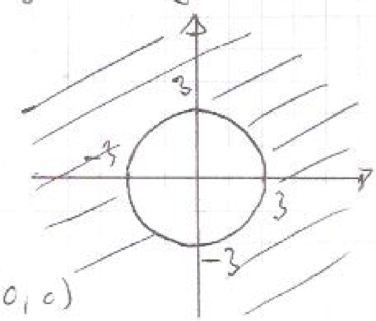
In generale $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2 \le R^2$ rappresenta il cerchio di centro (x_c, y_c) e raggio R, bordo compreso.

$C(0,0)$ $R=1$



f) $x^2+y^2 \ge 9$

In generale $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2 \ge R^2$ rappresenta l'esterno del cerchio di centro (x_c, y_c) e raggio R, bordo compreso.

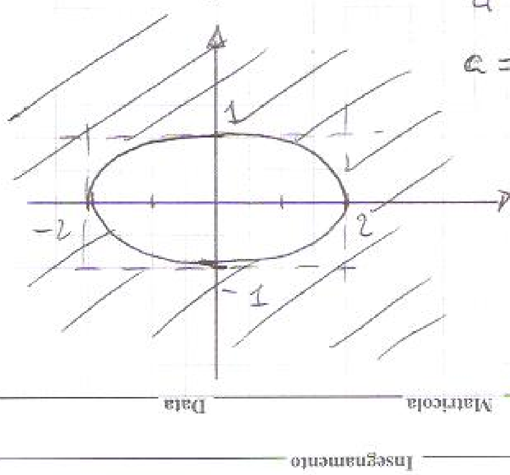


$C(0,0)$
$R=3$

g) $x^2+4y^2 \ge 4 \longrightarrow \frac{x^2}{4}+y^2 \ge 1$

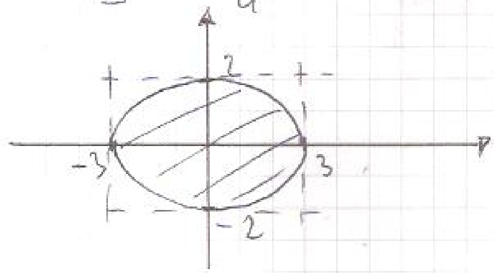
$a=2 \quad b=1$

In generale $\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2} \ge 1$ rappresenta l'esterno dell'ellisse di semiassi a e b e $c(x_c, y_c)$



h) $4x^2+9y^2 \leq 36 \longrightarrow \frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36} \leq 1$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1$ Interno ellisse di $C(0,0)$ e semiassi 3 e 2, bordo compreso.



i) $x^2+y^2-6x-8y \leq 0$ Pare descrivere l'interno di un cerchio. Determiniamo C e R col metodo di COMPLETAMENTO DEL QUADRATO...

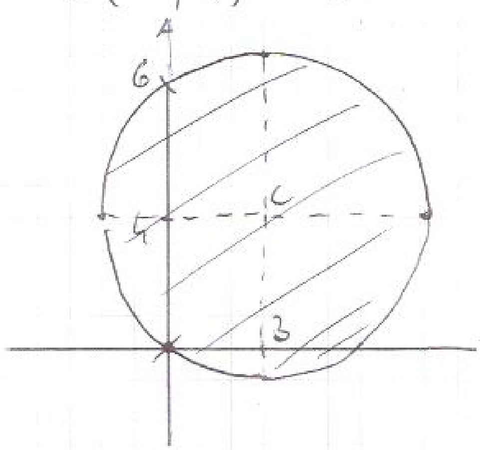
$\underbrace{x^2-6x}+\underbrace{y^2-8y} \leq 0$

COMPLETIAMO I QUADRATI TENENDO CONTO CHE $6=2\cdot\boxed{3}$ e $8=2\cdot\boxed{4}$:

$x^2-6x+\underline{9}+y^2-8y+\underline{16} \leq \underline{25}$ (abbiamo sommato 25 a entrambi i membri)

$(x-3)^2+(y-4)^2 \leq 25$

$C(3,4)$ $R=5$

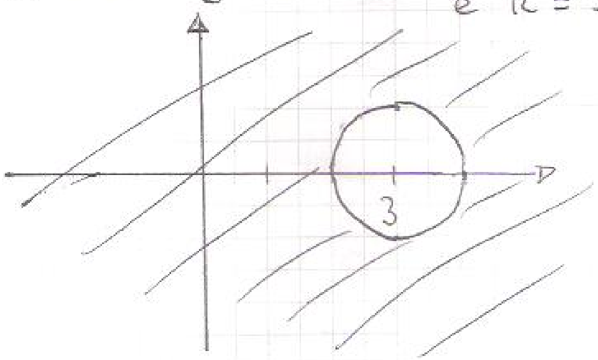


n.b.: $x^2+y^2-6x-8y=0$ Passa per $O(0,0)$

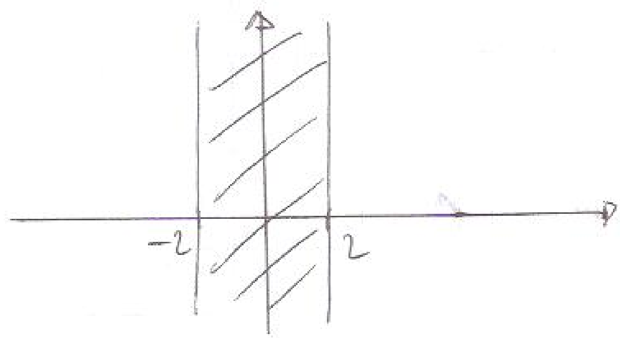
l) $x^2+y^2-6x+8 \geq 0$

$x^2-6x+9+y^2+8 \geq 9$

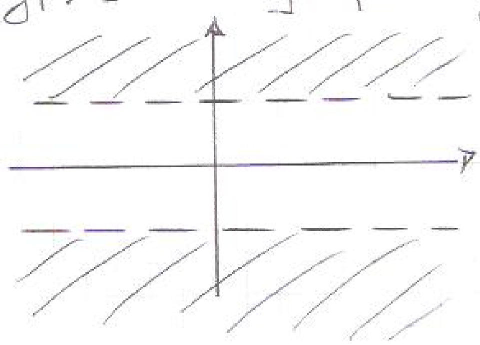
$(x-3)^2+y^2 \geq 1$ Esterno cerchio di $C(3,0)$ e $R=1$ (bordi compresi)



m) $|x| \leq 2$ significa $-2 \leq x \leq 2$

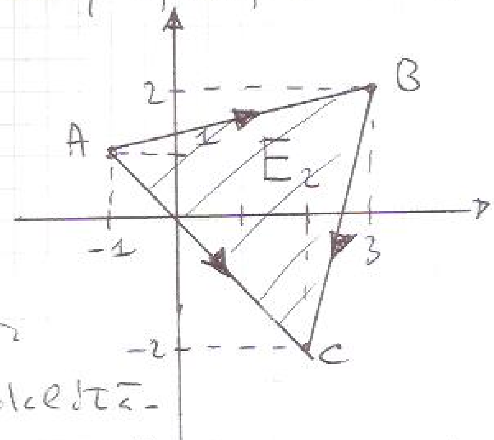


n) $|y| > 1$ significa $y < -1 \vee y > 1$



n.b.: le rette $y = \pm 1$ sono escluse

3 Dato l'insieme E rappresentato, scrivere le equazioni parametriche di una curva che percorre ogni singolo tratto del suo bordo ∂E, specificando il verso di percorrenza.



Svolgimento:

Tratto AB: per parametrizzare un segmento ci sono infinite modalità. Scegliamo quella "standard" che parametrizza AB da A verso B:

$$\begin{cases} x(t) = x_A + (x_B - x_A)\,t \\ y(t) = y_A + (y_B - y_A)\,t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = -1 + (3+1)\,t \\ y(t) = 1 + (2-1)\,t \end{cases}$$

$t \in [0,1]$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = -1 + 4t \\ y(t) = 1 + t \end{cases} \quad t \in [0,1]}$$

In alternativa avremmo potuto trovare l'eq. cartesiana della retta AB: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{3+1} = \frac{1}{4}$

$$y = \frac{1}{4}x + q \xrightarrow[\text{per } A]{\text{pass.}} 1 = \frac{1}{4}(-1) + q \longrightarrow q = \frac{5}{4} \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

Quindi $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{4}t + \frac{5}{4} \end{cases}$ $t \in [-1, 3]$ (t varia come x)

Parametrizzazione nel verso delle x crescenti. (da sx verso dx)

Tratto BC (da B verso C):

$$\begin{cases} x(t) = x_B + (x_C - x_B)t \\ y(t) = y_B + (y_C - y_B)t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$\begin{cases} x(t) = 3 + (2-3)t \\ y(t) = 2 + (-2-2)t \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 3 - t \\ y(t) = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in [0,1]}$$

Tratto AC:

Ci troviamo evidentemente sulla retta $y = -x$ bisettrice del 2° e del 4° quadrante - La via più semplice è:

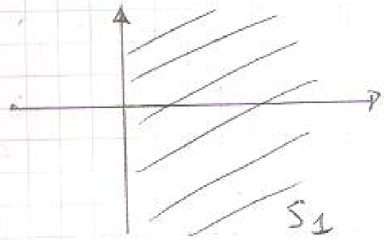
$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t \end{cases} \qquad t \in [-1,2]$$

$\boxed{4}$ Dato l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ y \leq 1 - 2x^2, \ x + y \geq 0\}$

disegnare E e per ogni tratto del suo bordo, scrivere le equazioni parametriche di una curva che percorre tale tratto, specificando il verso di percorrenza -

Le tre disequazioni che definiscono E costituiscono un sistema di disequazioni in 2 variabili: dobbiamo, per ognuna di esse, determinare l'insieme delle soluzioni e poi la loro intersezione.

1 - $x \geq 0$



Semipiano a dx dell'asse y, compreso.

2 - $y \leq 1 - 2x^2$

Sottografico rispetto a $y = 1 - 2x^2$ che disegnamo per punti:

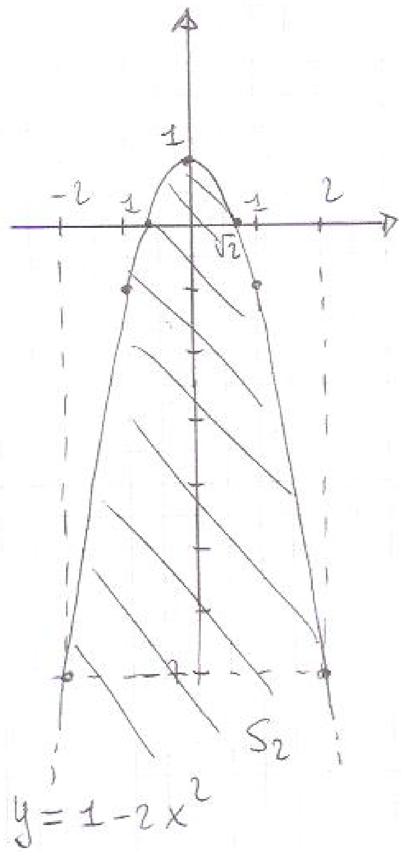
$V(0,1)$

x	±1	±2
y	−1	−7

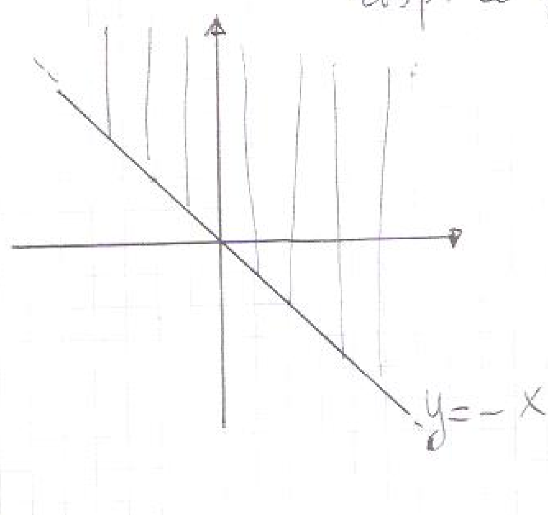
ZERI: $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq \pm 0{,}7$

$\uparrow$

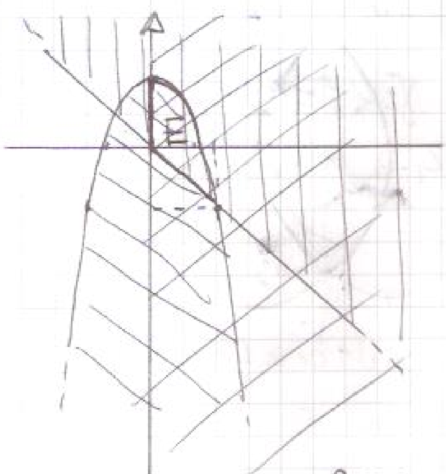
$2x^2 = 1$

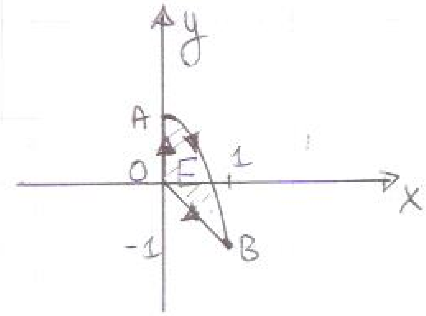


3 - $y \geq -x$ Sopragrafico risp. a $y = -x$



Intersecando i 3 insiemi otteniamo E :





∂E è composta da 3 tratti:

SEGMENTO SULLA RETTA $x=0$ → AO : $\begin{cases} x(t)=0 \\ y(t)=t \end{cases}$ $t\in[0,1]$

SEGMENTO SU $y=-x$ → OB : $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=-t \end{cases}$ $t\in[0,1]$

ARCO DI PARABOLA → AB : $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=1-2t^2 \end{cases}$ $t\in[0,1]$

$\boxed{5}$ Stessa cosa di $\boxed{4}$ per

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\le 4 ,\ (x+1)^2+y^2\le 4\}$$

1 _ CERCHIO DI CENTRO $C(1,0)$ E RAGGIO 2

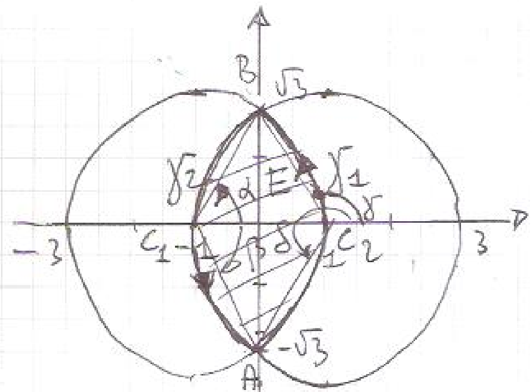
2 _ " " " $C(-1,0)$ " " 2

Le 2 circonferenze si intersecano per

$\begin{cases} (x+1)^2+y^2=4 \\ (x-1)^2+y^2=4 \end{cases}$ Sottraendo membro a membro si ha: $(x+1)^2-(x-1)^2=0$ $y=\pm\sqrt{3}$

cioè $x^2+2x+1-x^2+2x-1=0 \longrightarrow x=0$ $y^2=3$

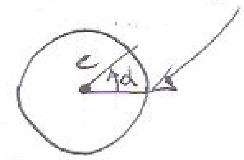
Disegnamo E:



Otteniamo due archi di circonferenza, che parametrizzeremo con la parametrizzazione "standard" in verso <u>antiorario</u>:

$$\begin{cases} x(t) = x_c + R\cos t \\ y(t) = y_c + R\sin t \end{cases} \quad t \in I$$

n.b.: PER LA CIRCONFERENZA (NON PER L'ELLISSE) t COINCIDE CON L'ANGOLO α



VERSO ANTIORARIO: α POSITIVO; ORARIO: α NEGATIVO

Il problema sarà identificare I.

$\boxed{\gamma_1}$: $\begin{cases} x(t) = -1 + 2\cos t \\ y(t) = 0 + 2\sin t \end{cases} \quad t \in I$

I? t varia dall'angolo compreso tra l'asse x, verso positivo e C_1A all'angolo compreso tra C_1B e l'asse x.
Osserviamo che $\tan\alpha = \sqrt{3}$. Quindi $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ($60°$), mentre, per simmetria, $\beta = -\frac{\pi}{3}$ ($-60°$).
Quindi $I = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

$\boxed{\gamma_2}$ $\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = 0 + 2\sin t \end{cases} \quad t \in I$

I?

t varia tra $\gamma = \overset{120^\circ}{\frac{2}{3}}\pi$ e $\delta = \frac{4}{3}\pi$

(per simmetria della figura) dato che il centro della circonferenza diventa C_2.

Quindi $I = \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$

OSSERVAZIONE MOLTO IMPORTANTE:

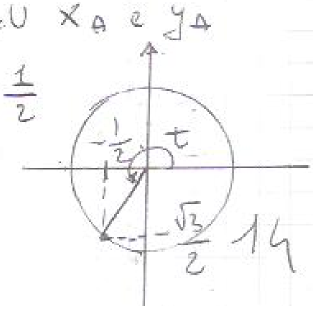
Abbiamo determinato i valori degli estremi di I in modo intuitivo, ragionando con gli angoli. A volte ragionare così è semplice, altre no. Già in un caso come questo avremmo potuto avere difficoltà. Teniamo conto poi che questa modalità funziona solo per la circonferenza, in cui $t = \alpha$, NON per l'ellisse.

L'altra modalità, meno immediata ma che funziona SEMPRE è sostituire le coordinate del punto estremo del tratto preso in considerazione nelle equazioni parametriche e ricavare il valore di t a cui il punto corrisponde.

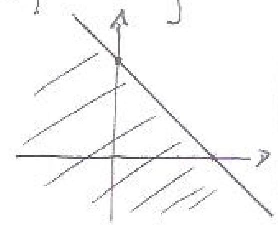
Ad esempio: a quale valore di t corrisponde A nel 2° tratto? Sostituendo i valori di x_A e y_A otteniamo:

$$\begin{cases} 0 = 1 + 2\cos t \longrightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} = 2\sin t \longrightarrow \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

da cui $\boxed{t = \frac{4}{3}\pi}$

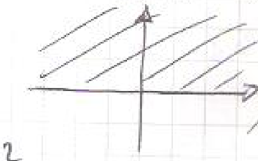


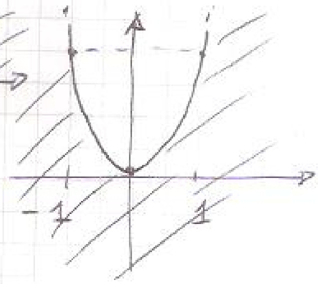
$\boxed{6}$ $E = \{ (x,y) \in R^2 : y \leq 3-x,\ 0 \leq y \geqq 2x^2,\ x \geq 0 \}$



1. $y \leq 3-x$ SOTTOGRAFICO RISP. A $y = 3-x$

2. $y \geq 0$

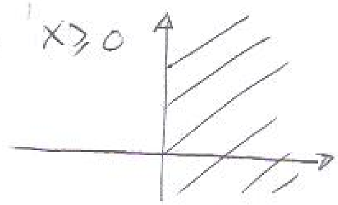




3. $y \leq 2x^2$

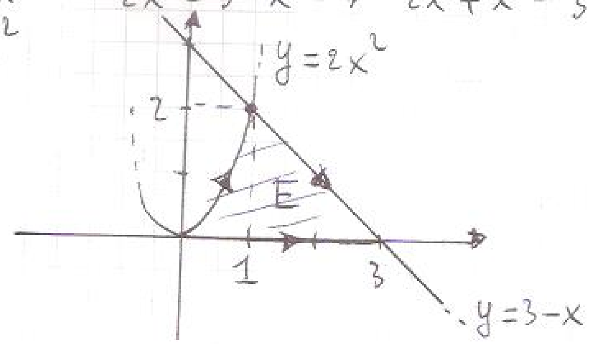
SOTTOGRAFICO RISP. A $y = 2x^2$

4. $x \geq 0$



$\begin{cases} y = 3-x \\ y = 2x^2 \end{cases}$ $2x^2 = 3-x \longrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \dfrac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$



$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 3-t \end{cases} \quad t \in [1,3]$

$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0,3]$

$\uparrow$

SEGMENTO SU $\boxed{y = 0}$