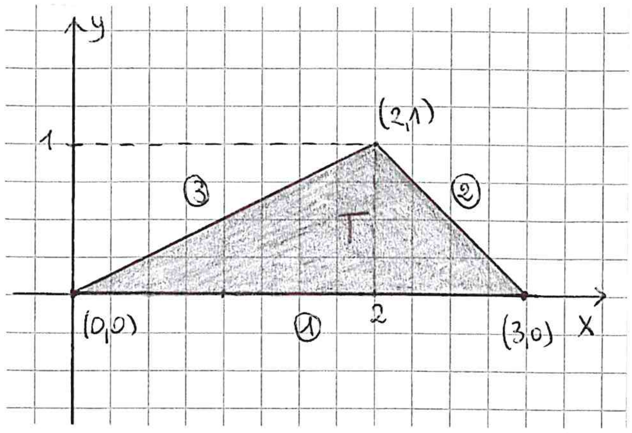
EQUAZIONI PARAMETRICHE del BORDO di un insieme

ESEMPIO 1. Triangolo di VERTICI $(0,0)$ $(3,0)$ $(2,1)$

Il bordo di T è costituito da 3 SEGMENTI:

per ogni tratto del bordo scriviamo le equazioni parametriche di una curva che lo percorre.



Lato 1 $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $t \in [0,3]$

verso delle x crescenti

Lato 2 <u>1° modo</u> eq.ne cartesiana $m = -1$ $y = 0 - (x-3)$ $y = -x+3$

$\begin{cases} x = t \\ y = -t+3 \end{cases}$ $t \in [2,3]$ verso x crescenti

<u>2° modo</u> $\vec{v} = P_1 - P_0$ $P_0 = (2,1)$ $P_1 = (3,0)$ $\vec{v} = (1,-1)$ eq.ne vettoriale $P = P_0 + t\vec{v}$ $t \in [0,1]$

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ verso delle x crescenti

$-\vec{v} = P_0 - P_1 = (-1,1)$ $P = P_1 + t(P_0 - P_1)$ $t \in [0,1]$

$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ verso delle x decrescenti

Lato 3 <u>1° modo</u> eq.ne cartesiana $m = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}x$ $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ $t \in [0,2]$

verso delle x crescenti.

<u>2° modo</u> $\vec{v} = P_1 - P_0 = P_1 = (2,1)$

eq.ne vettoriale $P = (0,0) + tP_1 = t(2,1)$ $t \in [0,1]$ $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ verso delle x crescenti

$-\vec{v} = (-2,-1)$ $P = (2,1) + t(-2,-1)$ $t \in [0,1]$

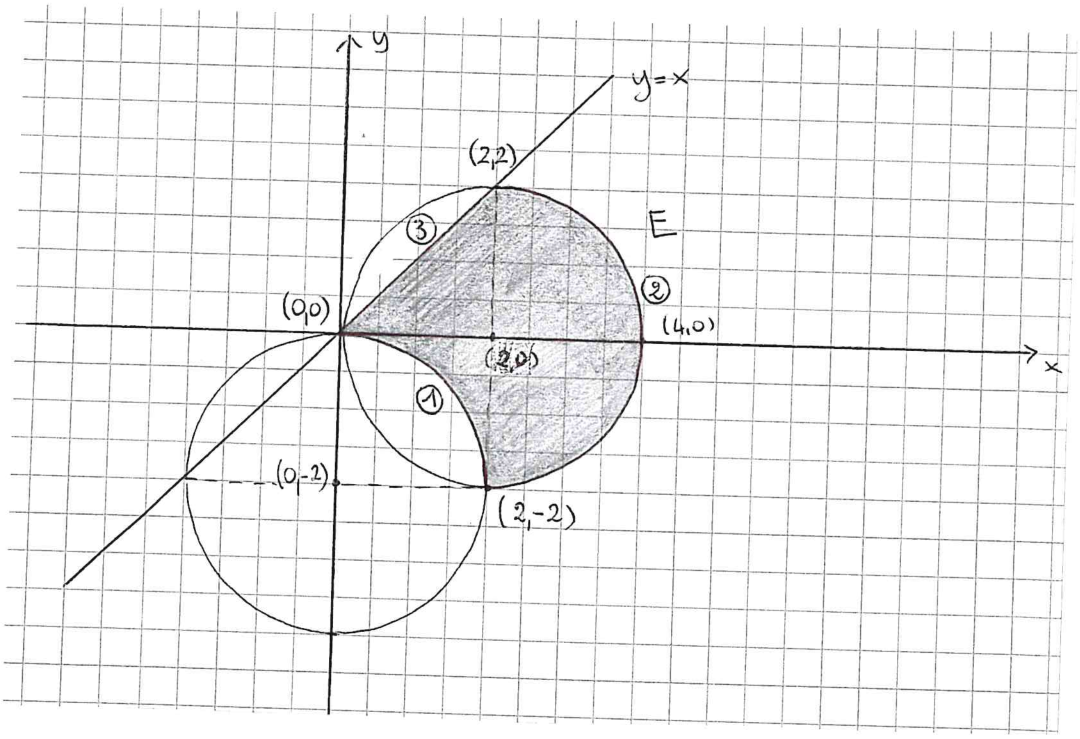
$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ verso delle x decrescenti.

ESEMPIO 2. $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \le x, \ x^2 + (y+2)^2 \ge 4, \ (x-2)^2 + y^2 \le 4 \}$

$y = x$ bisettrice 1°-3° quadrante $\quad y \le x$ SOTTO

$x^2 + (y+2)^2 = 4$ circonf. $C(0,-2)$ e $R = 2$ $\quad x^2 + (y+2)^2 \ge 4$ FUORI, circonferenza inclusa

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ circonf $C(2,0)$ $R = 2$ $\quad (x-2)^2 + y^2 \le 4$ CERCHIO (interno + bordo)



Lato ① $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -2 + 2\sin t \end{cases}$ $\quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad$ Verso antiorario

Lato ② $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $\quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oppure $t \in [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$

Verso antiorario

Lato ③ $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2]$ $\quad$ Verso x crescenti

LUNGHEZZA di una CURVA

Il concetto è intuitivo e corrisponde alla distanza percorsa dal punto durante il moto. Si indica con $L(\gamma)$.

Teorema Sia $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva (I è un intervallo di $\mathbb{R}$). Se

IPOTESI 1 - l'intervallo I è CHIUSO e LIMITATO, cioè $I=[a,b]$

IPOTESI 2 - γ è di classe C^1 (cioè γ è derivabile e le derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ sono continue),

allora

TESI 1 $L(\gamma) < +\infty$, cioè la lunghezza della curva è finita

TESI 2 $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\, dt$.

ESEMPIO 1
$$\begin{cases} x(t) = 2+3\cos t \\ y(t) = 1+3\,\text{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$P_{in} = P_{fin} = (5,1)$ la curva percorre la circonferenza di $C(2,1)$ e $R=3$ in verso antiorario per 1 giro ($\Delta t = 2\pi$), eq.ne $(x-2)^2+(y-1)^2=9$.

La lunghezza si può calcolare anche in modo elementare: ricordando che $L(\text{circonf.}) = 2\pi R$ abbiamo $L(\gamma) = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$.

Utilizziamo ora il Teorema:

γ è una curva perchè $I=[0,2\pi]$ è un intervallo e le funzioni $x(t) = 2+3\cos t$ $y(t) = 1+3\,\text{sen}\, t$ sono continue (le funzioni seno e coseno sono continue su $\mathbb{R}$).

Teorema IPOTESI 1 - I è chiuso e limitato? sì $I=[0,2\pi]$

IPOTESI 2 - γ è di classe C^1? sì $x(t) = 2+3\cos t$, $y(t) = 1+3\,\text{sen}\, t$ sono DERIVABILI su $\mathbb{R}$ (e quindi a maggior ragione su I) e le derivate $x'(t) = -3\,\text{sen}\,t$, $y'(t) = 3\cos t$ sono continue su $\mathbb{R}$ e su I.

Si può applicare il teorema concludendo che

TESI 1 - $L(\gamma)$ è finita

TESI 2 - $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt$.

Calcoliamo dunque $\|\gamma'(t)\| = \|(-3\,\text{sen}\,t, 3\cos t)\| = \sqrt{(-3\,\text{sen}\,t)^2 + (3\cos t)^2} =$

$= \sqrt{9\,\text{sen}^2 t + 9\cos^2 t} = \sqrt{9\cdot\underbrace{(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)}_{=1}} = \sqrt{9} = 3 =$ Raggio della circonferenza,

$\downarrow$
VELOCITÀ SCALARE COSTANTE
= Raggio

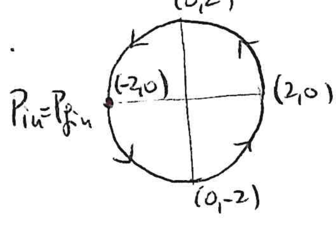
da cui

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 3\,dt = 3\,[t]_0^{2\pi} = 3\cdot 2\pi = \boxed{6\pi}$$

OSSERVAZIONE 1 Quando si percorre una CIRCONFERENZA utilizzando le equazioni parametriche $\begin{cases} x(t) = x_c + R\cos t \\ y(t) = y_c \pm R\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in I$ la VELOCITÀ SCALARE risulta COSTANTE e sempre uguale a R. (*) pag. dopo

OSSERVAZIONE 2 Si percorre la circonferenza di $C(x_c, y_c)$ e raggio R anche con le eq.ni $\begin{cases} x(t) = x_c \pm R\cos t \\ y(t) = y_c \pm R\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, sempre a velocità scalare costante R. Risulta in verso antiorario se i segni davanti a $R\cos t$ e $R\,\text{sen}\,t$ sono concordi e in verso orario se invece sono discordi. Il punto iniziale corrispondente a $t=0$ non è più in generale $(x_c + R, y_c)$, cioè il punto più a destra. Ad es.

$\begin{cases} x(t) = -2\cos t \\ y(t) = -2\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ percorre la circonferenza di $C(0,0)$ e $R=2$ in verso antiorario per 1 giro partendo da $(-2, 0)$.



$\gamma'(t) = (-R\,\text{sen}\,t, \pm R\cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-R\,\text{sen}\,t)^2 + (\pm R\cos t)^2} = \sqrt{R^2\text{sen}^2 t + R^2\cos^2 t} = \sqrt{R^2(\underbrace{\text{sen}^2 t + \cos^2 t}_{=1})} =$

$= \sqrt{R^2} = R$

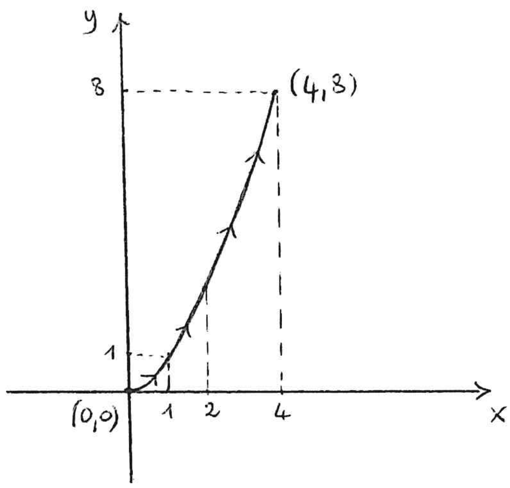
<u>IMPORTANTE</u> In generale $\sqrt{a^2} = |a|$ (pensate ad $a=-2$: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$)

ma $R>0$ quindi $\sqrt{R^2} = |R| = R$.

<u>ESEMPIO 2</u> $\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^{3/2} \end{cases}$ $t \in [0,4]$

Si tratta di una curva : $I = [0,4]$ è un intervallo e le funzioni $x(t) = t$ e $y(t) = t^{3/2}$ sono continue ($x(t)$ è un polinomio di 1° grado continuo su $\mathbb{R}$, $y(t) = t^{3/2}$ è definita per $t \geq 0$ $y(t) = t^{3/2} = (\sqrt{t})^3 = t\sqrt{t}$ è continua in quanto prodotto di funzioni continue).

$P_{in} = (0,0)$ $P_{fin} = (\underset{4\sqrt{4}}{4, 4^{3/2}}) = (4,8)$



equazione $y = x^{3/2}$

$x=1$ $(1,1)$ $x=2$ $(2, 2\sqrt{2})$

la curva percorre il grafico $y = x^{3/2}$ della funzione $f(x) = x^{3/2}$ da $(0,0)$ a $(4,8)$ nel verso delle x crescenti.

<u>Teorema sulla lunghezza</u>

IPOTESI 1 – $I = [0,4]$ è CHIUSO e LIMITATO (sì)

IPOTESI 2 – γ è di classe C^1 (sì) : $\gamma'(t) = (1, \frac{3}{2} \underset{t^{1/2}}{t^{3/2-1}}) = (1, \frac{3}{2}\sqrt{t})$

quindi γ è derivabile e

$x'(t), y'(t)$ sono continue ($\sqrt{t}$ è continua su $[0, +\infty[$, quindi anche su I).

Allora possiamo applicare il Teorema e concludere che

TESI ① $L(\gamma)$ è FINITA

TESI ② $L(\gamma) = \int_0^4 \|\gamma'(t)\| \, dt$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+\frac{9}{4}t}$$

$$\int \sqrt{1+\frac{9}{4}t}\, dt \underset{\text{1° modo}}{=} \int \sqrt{x}\, \frac{4}{9} dx = \frac{4}{9}\int \sqrt{x}\, dx = \frac{4}{9}\frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{8}{27}x^{3/2} + c$$

$x = 1+\frac{9}{4}t$

$dx = \frac{9}{4}dt$

$dt = 4/9\, dx$

$$\underset{\text{torno a } t}{=} \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}t\right)^{3/2} + c \qquad \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int \sqrt{1+\frac{9}{4}t}\, dt \underset{\text{2° modo}}{=} \frac{4}{9}\cdot \int \frac{9}{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}t}\, dt = \frac{4}{9}\cdot \frac{\left(1+\frac{9}{4}t\right)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}t\right)^{3/2} + c$$

$$\int f'(t)\,(f(t))^{1/2} dt = \frac{(f(t))^{3/2}}{3/2} + c$$

con $f(t) = 1+\frac{9}{4}t$

$f'(t) = \frac{9}{4}$

Quindi

$$\boxed{L(\gamma)} = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}t}\, dt = \left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}t\right)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\cdot\left[10^{3/2} - 1^{3/2}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{8}{27}\cdot\left[10\sqrt{10} - 1\right]} \simeq 9$$