

Capitolo 8

Integrazione

Nel calcolo elementare esiste un sol tipo di integrale. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed un intervallo chiuso $[a, b]$, $I = \int_a^b f(x) dx$ è un numero reale, definito come il limite di somme approssimanti. Sebbene I abbia diverse interpretazioni, fisiche, geometriche, numeriche (come posizione se f rappresenta la velocità, l'area sottesa dal grafico di f , media pesata dei valori di f etc.), esse non sono altro che modi diversi di interpretare il solito oggetto matematico.

Nel calcolo di più variabili le possibilità per gli integrali sono molto maggiori. Gli integrandi possono essere funzioni di una o più variabili, e possono essere scalari o a valori vettoriali. Gli insiemi su cui integrare possono essere di vario genere, intervalli, curve in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , regioni piane di \mathbb{R}^2 o solidi in \mathbb{R}^3 ed anche superfici bidimensionali in \mathbb{R}^3 . Abbiamo già visto alcune di queste situazioni, quali:

$$\int_a^b v(t) dt, \iint_R f(x, y) dA, \iint_R g(r, \theta) r dr d\theta, \iiint_S h(r, \theta, z) r dr d\theta dz.$$

In questo capitolo vogliamo introdurre due nuovi tipi di integrale, **integrali di linea** e **integrali di superficie** nei quali i domini di integrazione sono rispettivamente curve o superfici in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 .

Il **teorema fondamentale del calcolo integrale**, scritto nella sua forma classica, dice che sotto appropriate condizioni si ha

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

L'idea che sottintende il teorema fondamentale del calcolo integrale può essere estesa e reinterpretata nell'ambiente del calcolo di più variabili.. Per esempio,

una versione del **teorema fondamentale per integrali di linea** dice che

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot dX = f(b) - f(a)$$

dove $f(x, y)$ è una funzione differenziabile e γ una curva che unisce a e b in \mathbb{R}^2 . Molto rimane da dire, compreso il significato del lato sinistro dell'uguaglianza. Ma ciò che ci premeva era mostrarne la similarità. In entrambi i casi, un qualche tipo di integrale è applicato ad un qualche tipo di derivata di f e la risposta coinvolge la f stessa.

Dare un senso a tutti gli ingredienti dell'equazione sopra è l'obiettivo principale di questo capitolo.

Esempio 8.1 *La funzione posizione*

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

descrive un elica (spirale) in \mathbb{R}^3 . Trovare la lunghezza d'arco di un giro; pensare a t come al parametro tempo.

Soluzione. Se $r(t)$ rappresenta il vettore posizione, il modulo della velocità è dato da

$$|r'(t)| = |(-\sin t, \cos t, 1)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

ed è una *funzione scalare* (in questo caso particolare, costante). Un giro d'elica richiede 2π unità di tempo, così la lunghezza d'arco è data dall'integrale

$$\int_0^{2\pi} |r'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} 2\pi.$$

Ne segue che la lunghezza vale $\sqrt{2} 2\pi$ unità di lunghezza. ■

Vediamo un altro esempio che ci ricorda come si integra una funzione a valori vettoriali di una variabile, su di un intervallo. Un uso importante di tali integrali lo si fa nel modellare fenomeni di moto.

Esempio 8.2 *Una particella si muove nel piano xy . Al tempo t il suo vettore velocità è*

$$v(t) = (5, -32t).$$

Trovare $\int_0^6 v(t) dt$. Qual'è il significato dell'integrale rispetto al moto della particella?

Soluzione. Il calcolo è pura routine. Si integra ogni componente separatamente:

$$\int_0^6 v(t) dt = \left(\int_0^6 5 dt, \int_0^6 -32t dt \right) = (30, -576) .$$

Più interessante, del puro risultato numerico, è il suo significato. Se $p(t)$ è il vettore posizione della particella, allora

$$\int_0^6 v(t) dt = p(6) - p(0) .$$

Ovvero, se $v(t)$ rappresenta la velocità (in metri al secondo, per esempio), il calcolo ci dice che nel tempo di 6 secondi, l'oggetto si muove di 30 metri verso destra e di 576 verso il basso. ■

8.1 Cambio di Variabili negli Integrali Multipli

Abbiamo già visto nel Capitolo I come operare quando il dominio di integrazione è un rettangolo in \mathbb{R}^2 o un dominio semplice rispetto agli assi. Un'altra possibilità la si ha quando il tutto è esprimibile convenientemente in coordinate polari r e θ .

Vediamo ancora un esempio

Esempio 8.3 Sia R la regione interna alla circonferenza unitaria, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcolare l'integrale di f su R usando le coordinate polari.

Soluzione. Scriviamo tutto in coordinate polari usando il cambio di coordinate

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad dA = r dr d\theta$$

L'ultima identità è chiamata **elemento d'area** in coordinate polari. Il dominio R diventa

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi .$$

Scritto in coordinate polari l'integrale diventa

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta$$

Il risultato dell'integrale è $\frac{\pi}{2}$. Geometricamente, l'integrale misura il volume della regione interna al paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 1$. ■

8.1.1 Coordinate Sferiche e Cilindriche

Un simile cambio di variabile è una strategia che funziona anche per gli integrali tripli, quando il dominio di integrazione o l'integrando o entrambi, sono descritti meglio usando un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z) o sferiche (ρ, θ, φ) . Come già discusso nel Capitolo I gli elementi di volume corrispondenti sono

$$\begin{aligned} dV &= r \, dr \, d\theta \, dz && \text{in coordinate cilindriche} \\ dV &= \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta && \text{in coordinate sferiche} \end{aligned}$$

Diamo ancora un esempio

Esempio 8.4 Calcolare $\iiint_P \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV$ dove P è quella parte della palla unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ che giace nel primo ottante.

Soluzione. Il primo ottante di \mathbb{R}^3 è l'insieme di punti le cui coordinate sferiche soddisfano le condizioni $0 \leq \theta \leq \pi/2$, (questo assicura che $x \geq 0$, $y \geq 0$) e $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (questo assicura che $z \geq 0$). I punti che sono interni alla palla unitaria soddisfano la condizione $0 \leq \rho \leq 1$. Quindi P (dal punto di vista delle coordinate sferiche) è un rettangolo solido. L'integrando, espresso in coordinate sferiche, è data da

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} I &= \iiint_P \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

8.1.2 Cambiamento di Variabile negli Integrali Multipli

La cosa più misteriosa, negli esempi precedenti, è capire come, nel cambio da coordinate cartesiane a coordinate polari, cilindriche o sferiche gli elementi

di area e volume si esprimono con le formule

$$dA = r \, dr \, d\theta, \quad dV = r \, dr \, d\theta \, dz, \quad dV = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$

Infatti, tutte e tre queste formule sono esempi di un principio più generale, conosciuto come formula di cambiamento di variabile, che dice come cambiano gli integrali quando si opera un cambio di coordinate.

Ricordiamo con un esempio come si opera nel caso di una variabile.

Esempio 8.5 Calcolare, per sostituzione, l'integrale $\int_0^{\pi/2} 3 \sin^2 u \cos u \, du$.

Soluzione. La sostituzione $x = \sin u$ e $dx = \cos u \, du$ sembra quella naturale. Infatti si ottiene

$$\int_{u=0}^{u=\pi/2} 3 \sin^2 u \cos u \, du = \int_{x=0}^{x=1} 3 x^2 dx = 1.$$

■

Notare il cambio di limiti d'integrazione. Poiché $x = \sin u$ l'intervallo $I_u = [0, 2\pi]$ viene trasformato nell'intervallo $I_x = [0, 1]$.

Il punto fondamentale da notare è il seguente: se scriviamo $f(x) = 3x^2$ e $x = x(u) = \sin u$, allora si ha

$$\int_{I_u} f(x(u)) \frac{dx}{du} du = \int_{I_x} f(x) dx$$

Fermate l'attenzione sul fattore $\frac{dx}{du}$. Il metodo di integrazione per sostituzione è a volte succintamente indicato con

$$\frac{dx}{du} du = dx.$$

La formula ci dice che data la relazione tra x e u una variazione infinitesima du provoca una variazione in x , dx , che viene moltiplicata del fattore $\frac{dx}{du}$ chiamato anche **fattore di cambiamento di scala**.

La metodologia per cambiare variabili negli integrali multipli è simile a quello appena visto.

Usiamo gli integrali doppi come esempio paradigmatico.

Sia dato $\iint_{R_{xy}} f(x, y) \, dA$ con f funzione integranda ed R_{xy} la regione d'integrazione nel piano xy . Supponiamo inoltre che, siano date (o comunque

trovate) due funzioni che collegano le variabili x, y (vecchie coordinate) con le variabili u, v (nuove coordinate):

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Assumiamo che queste funzioni "trasformino" il piano uv (o almeno una sua parte) nel piano xy in modo tale che una certa regione R_{uv} del piano uv sia trasformata nella regione R_{xy} del piano xy (idealmente la regione R_{uv} è più semplice della regione R_{xy}).

Il problema è capire cosa si sostituisce al termine dx/du . Ciò che si usa è il **determinante Jacobiano**, cioè il determinante della matrice

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

Il determinante Jacobiano, gioca, nel caso di integrali doppi, lo stesso ruolo di dx/du negli integrali di una variabile. Per ogni valore (u, v) dell'ingresso, il fattore $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ è il fattore di cambiamento d'area. Esso ci dice che la trasformazione data trasforma, nel piano (u, v) il rettangolo "infinitesimo" di area $\Delta u \Delta v$ nel rettangolo, nel piano (x, y) di area

$$\Delta x \Delta y = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v.$$

Enunciamo adesso il teorema generale. Bisogna aggiungere alcune ipotesi tecniche per poterlo esprimere con precisione.

Teorema 8.6 (Cambio di variabile negli integrali doppi). *Supponiamo che le coordinate (x, y) e (u, v) sia legate come sopra. Assumiamo che tutte le derivate in questione esistano e siano continue; che la trasformazione $(u, v) \rightarrow (x, y)$ sia biiettiva e che la regione R_{xy} sia la trasformata della regione R_{uv} . Allora*

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} f(x, y) dA_{xy} &= \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv} \\ &= \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \end{aligned}$$

Dimostrazione. (Diamo solo un'idea della dimostrazione). L'idea della dimostrazione è legata al concetto di somme approssimanti. Ricordiamo

che ogni integrale doppio $\iint_{R_{uv}} g(u, v) dA$ è definito come limite di somme approssimanti della forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(u_i, v_i) A(R_i)$$

dove $A(R_i)$ è l'area di un "piccolo" rettangolo nel piano uv contenente il punto (u_i, v_i) . Supponiamo adesso che sia

$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

In tal caso la somma approssimante diviene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_i, v_i) \right| A(R_i)$$

Usando il ragionamento precedente sulla variazione dell'area si ha che la somma può essere scritta come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) A(R'_i)$$

dove $A(R'_i)$ è l'area del rettangolo "piccolo" R'_i contenente il punto (x_i, y_i) nel piano xy . Questa è una somma approssimante dell'integrale $\iint_{R_{xy}} f(x, y) dA$. Si ottiene quindi la conclusione. ■

Esempio 8.7 *Come si applica il teorema nel passaggio a coordinate polari?*

Soluzione. Usando r e θ al posto di u e v si ha $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. La matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix};$$

il suo determinante è r . Allora il teorema ci dice che

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dA = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) r dr d\theta$$

che è il familiare elemento d'area in coordinate polari. ■

Cambiamento in Tre Variabili

La stessa formula vale anche nel caso di integrali tripli. In questo caso il determinante Jacobiano ha la forma $|\partial(x, y, z) / \partial(u, v, w)|$. Il lavoro è potenzialmente noioso e laborioso nel calcolo, ma in molti casi semplice.

Esempio 8.8 *Siano a, b, c numeri positivi. Trovare il volume dell'ellissoide E*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Soluzione. Operiamo il cambio di coordinate

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{b}, \quad w = \frac{z}{c},$$

allora l'ellissoide E nello spazio xyz corrisponde la sfera unitaria nello spazio uvw , $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. che, come noto, ha volume $4\pi/3$. Per usare la formula del cambiamento di variabili dobbiamo considerare la mappa $(u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$ data da:

$$x(u, v, w) = au, \quad y(u, v, w) = bv, \quad z(u, v, w) = cw.$$

La matrice Jacobiana è diagonale ed è data da

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \left| \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right| = abc.$$

La formula del cambio di variabile da

$$\begin{aligned} \text{Volume di } E &= \iiint_E 1 \, dV_{xyz} = \iiint_B 1 \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dV_{uvw} \\ &= abc \iiint_B 1 \, dV_{uvw} = \frac{4abc}{3} \pi. \end{aligned}$$

■

Notare che il risultato ha un significato geometrico interessante. In ogni punto dello spazio (u, v, w) , la trasformazione $(u, v, w) \rightarrow (x, y, z) = (au, bv, cw)$ moltiplica le distanze nei singoli assi dei fattori a, b e c rispettivamente; il corrispondente effetto sui volumi è di moltiplicare il volume del fattore abc .

8.2 Esercizi.

1. Ricordando l'esempio della spirale, calcolare la lunghezza della spirale

$$r(t) = (\cos t^2, \sin t^2, t^2) ; 0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}.$$

Confrontare questa parametrizzazione con quella dell'esercizio di cui sopra.

2. Si chiama **cicloide** la curva

$$r(t) = (t + \sin t, 1 + \cos t) .$$

- (a) disegnare a mano o con un software la curva;
 - (b) trovare la lunghezza dell'arco di curva $0 \leq t \leq 2\pi$ [**Sugg.:** $2 + 2\cos t = 4\cos^2(t/2)$, verificare inoltre che $t = \pi$ è asse di simmetria. Calcolare quindi l'integrale in $[0, \pi]$ e raddoppiarne poi il valore].
 - (c) pensando a $r(t)$ come la posizione di un punto al variare del tempo t , trovare l'accelerazione $a(t)$ e calcolarne l'integrale per $0 \leq t \leq 6$.
3. Ripetere l'esercizio precedente per la curva $(t/2 + \sin t, 1 + \cos t)$ (Questa rappresenta il tracciato di un punto su di una ruota che scivola mentre rotola). L'integrale non si calcola, calcolarne un'approssimazione col metodo del punto mediano usando 10 suddivisioni.
4. Considerare l'integrale $I = \iint_R x^2 y \, dA$ dove R è la regione limitata dalle curve $y = x^2$ e $y = 1$.
- (a) calcolare I integrando prima in x , poi in y ;
 - (b) calcolare I integrando prima in y , poi in x .
5. Sia $f(x, y) = y$ ed R la regione limitata dalle curve $y = \ln x$, $y = 0$, e $x = e$.
- (a) calcolare $\iint_R f(x, y) \, dA$ integrando prima in x , poi in y ;
 - (b) calcolare $\iint_R f(x, y) \, dA$ integrando prima in y , poi in x .
6. Considerare, nel piano xy l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dove a e b sono numeri positivi.

- (a) calcolare l'area dell'ellisse usando l'integrale della funzione di una variabile (come fareste in Analisi I);
 - (b) usare la stessa idea dell'esercizio del volume dell'ellissoide per trovare l'area dell'ellisse.
7. Calcolare il volume della regione limitata dal paraboloide $z = x^2 + y^2$ e dal cilindro $x^2 + y^2 = 1$ operando un cambiamento di variabili in coordinate cilindriche.
8. Questo esercizio esplora l'affermazione che il determinante Jacobiano della trasformazione $(u, v) \rightarrow (x, y)$ descriva il fattore di scala. In tutti gli esempi sotto sia R_{uv} il quadrato unitario $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Sia R_{xy} l'immagine di R_{uv} nel piano xy , della trasformazione $(u, v) \rightarrow (x, y)$. Per ognuna delle trasformazioni sotto: (i) Disegnare R_{xy} ; (ii) Trovare l'area di R_{xy} ; (iii) Trovare il valore del determinante Jacobiano. (Nota: in ogni caso R_{xy} è un parallelogramma, così basta trovare i trasformati dei vertici)
- (a) $x = 2u$, $y = v$;
 - (b) $x = 1 + 2u$, $y = 3 + 4v$;
 - (c) $x = 2v$, $y = 3u$;
 - (d) $x = 1 + 2u + 3v$, $y = 4 + 5u + 6v$
(Suggerimento: usare il prodotto scalare per trovare l'area.)

8.3 Integrali Curvilinei

Nel paragrafo precedente abbiamo visto un'estensione dell'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$. Vogliamo qui considerarne un'altra, quello dell'integrale **lungo una curva**,

$$\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$$

dove $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una funzione a valori vettoriali e γ è una curva orientata in \mathbb{R}^2 . (in dimensioni superiori il ragionamento è assolutamente identico). Come vedremo più sotto c'è una stretta correlazione tra integrali curvilinei ed integrali doppi, una correlazione a priori sorprendente vista l'intrinseca differenza. Il risultato che li unisce è noto come Teorema di Green.

Gli integrali curvilinei sono strumenti di notevole importanza in fisica. Essi compaiono tutte le volte che si debbano considerare funzioni a valori vettoriali, per modellare forze, il flusso di fluidi, elettricità, magnetismo. La teoria matematica degli integrali curvilinei è stata sviluppata agli inizi dell'ottocento in parte motivata proprio dalle necessità di sviluppare modelli matematici dei fenomeni fisici che si venivano scoprendo. Il teorema di Green, per esempio ha la sua origine dallo studio quantitativo del moto dei fluidi.

Iniziamo ad introdurli.

8.3.1 Campi Vettoriali

L'integrando di un integrale curvilineo è una funzione vettoriale $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. La funzione ha la forma:

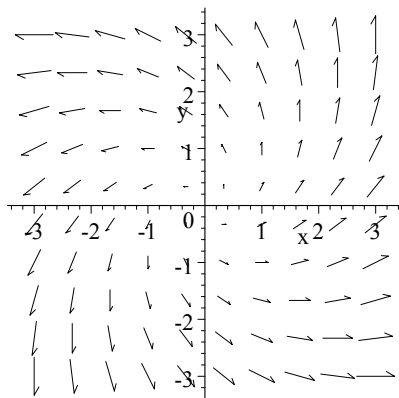
$$f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) ,$$

dove $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni reali di due variabili reali, o come si usa dire f è una coppia di funzioni scalari.

L'approccio migliore è quello di pensare ad f come ad un **campo vettoriale** in \mathbb{R}^2 , per ogni vettore d'ingresso $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ f assegna il vettore bidimensionale $(P(x, y), Q(x, y))$ che può essere rappresentato come un vettore avente origine nel punto (x, y) . Disegnando (a mano o con il software) molte di queste frecce possiamo capire il comportamento complessivo della funzione f .

Esempio 8.9 Consideriamo la funzione vettoriale $f(x, y) = (x - y, x + y)$ come campo vettoriale. Disegnare f nel dominio $[-3, 3] \times [-3, 3]$. Discutere il disegno. In quali punti le frecce sono verticali o orizzontali? Perché?

Soluzione. Si riporta qui di seguito il disegno fatto da *Maple*.



Il campo vettoriale $(x - y, x + y)$

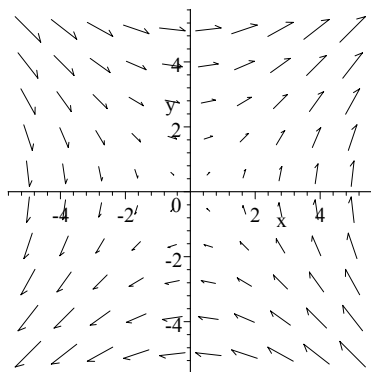
Ci sono molte cose da osservare in questo grafico.

1. (a) Come per ogni grafico questo rappresentato è solo un campione dei valori assunti da f . In figura sono mostrati circa 100 valori (uscite).
- (b) Se calcoliamo f nel punto $(1, 1)$ si ha $f(1, 1) = (0, 2)$, cioè un vettore verticale lungo 2; tuttavia, nel punto $(1, 1)$ del disegno, il vettore è rappresentato molto più corto. Questo cambiamento di scala viene operato dal software per evitare che le frecce nei vari punti si sovrappongano con quelle vicine (ma anche a mano bisognerebbe fare lo stesso per chiarezza del disegno). Sebbene in questo processo si perdano alcune informazioni la l'impressione qualitativa del fenomeno rimane inalterata. Inoltre poiché il riscalamento è operato su tutte le frecce, quelle che risultano più lunghe sono le più lunghe.
- (c) Una freccia è verticale se la prima componente $P(x, y) = x - y$ è zero. Ciò avviene lungo la curva $x = y$ come si può vedere anche dalla figura. Le frecce orizzontali si hanno quando è $Q(x, y) = x + y = 0$ cioè lungo la linea $x = -y$.
- (d) Si ha che $f(0, 0) = 0$ quindi nell'origine il vettore uscita è il vettore nullo. In questo esempio $(0, 0)$ è anche l'unico punto in cui ciò avviene.

Il disegno, infine, suggerisce una "situazione inversa" a quella di uno scarico, il fluido esce dal centro e tende a ruotare sempre più velocemente in senso antiorario, allontanandosi dal centro. ■

Esempio 8.10 Disegnare $g(x, y) = (y, x)$ come campo vettoriale. E' possibile vedere una connessione con la funzione scalare $h(x, y) = xy$?

Soluzione.. Vediamo il disegno fatto da *Maple* nel dominio $[0, 5] \times [0, 5]$



Il campo vettoriale $g(x, y) = (y, x)$

Come si vede $P(x, y) = y$ si annulla lungo l'asse x ; in fatti, come mostra il disegno lungo tale asse i vettori sono verticali. In modo del tutto simile si vede che $Q(x, y) = x$ si annulla lungo l'asse y ed infatti lungo tale asse le frecce sono orizzontali. Come nell'esempio precedente $g(0, 0) = 0$ solo nell'origine. ■

Nota: Il grafico è simile a quello della mappa di contorno di $h(x, y) = xy$. Questa connessione non è, ovviamente, accidentale. Si ha infatti che

$$g(x, y) = \nabla h(x, y).$$

Riprenderemo questa connessione più avanti, nei prossimi paragrafi.

8.3.2 Curve Orientate

L'altro ingrediente fondamentale, per la costruzione di un integrale curvilineo, è una **curva orientata** su cui calcolare l'integrale curvilineo. Una curva orientata, come dice il nome stesso, è una curva con una *direzione di percorrenza* specificata dal punto di partenza al punto di arrivo. La curva può essere nel piano o nello spazio. La semicirconferenza superiore centrata nell'origine, per esempio, può avere come punto di partenza il punto $(1, 0)$ e punto di arrivo $(-1, 0)$, oppure essere percorso in senso inverso partendo da $(-1, 0)$ per arrivare a $(1, 0)$.

E' tradizione indicare una curva orientata con una lettera, ad esempio γ , e la curva percorsa in senso inverso con $-\gamma$ (Ricordiamo che γ e $-\gamma$ sono lo stesso insieme di punti, solo la direzione di percorrenza cambia). Vedremo presto che negli integrali curvilinei, invertire il senso di percorrenza di una curva cambia il *segno* dell'integrale.

Parametrizzare una curva γ significa specificare le equazioni parametriche e l'intervallo di parametrizzazione, come ad esempio

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Per evitare problemi tecnici *assumeremo sempre* che $x'(t)$ e $y'(t)$ esistano e non siano contemporaneamente nulli, eccetto forse che agli estremi. Altrimenti la parametrizzazione potrebbe "fermarsi" o cambiare direzione.

Notare infine che una tale parametrizzazione implica un'orientazione della curva. La curva parte da $(x(a), y(a))$ e termina in $(x(b), y(b))$. Quindi, volendo parametrizzare una curva in una data direzione diventa necessario scegliere una parametrizzazione appropriata.

Esempio 8.11 Sia γ la curva di parametrizzazione

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Descrivere γ e $-\gamma$. Come va parametrizzata $-\gamma$?

Soluzione. γ è la semicirconferenza unitaria superiore, parametrizzata in senso antiorario, partendo da $(1, 0)$ per arrivare a $(-1, 0)$. Ne consegue che $-\gamma$ rappresenta la stessa semicirconferenza percorsa però in senso orario partendo da $(-1, 0)$ per arrivare a $(1, 0)$. Ci sono molti modi per parametrizzare $-\gamma$. Una possibilità è quella di pensarla come il grafico della funzione

$$x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

oppure pensando alla parametrizzazione

$$x = -\cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$



8.3.3 Calcolo degli Integrali Curvilinei

Abbiamo adesso a disposizione tutti gli elementi che ci permettono di calcolare un integrale curvilineo. Cominciamo con alcuni esempi semplici. Fare attenzione sia ai calcoli che alle semplificazioni e scorciatoie.

Esempio 8.12 Sia γ la semicirconferenza superiore di cui sopra, orientata in senso antiorario. Sia poi $f(x, y) = (x - y, x + y)$ il campo vettoriale visto nel primo esempio. Calcolare

$$\int_{\gamma} f(X) \cdot dX .$$

Soluzione. Per calcolare un integrale di linea l'idea è quella di esprimere tutto, anche l'integrale, attraverso la parametrizzazione di γ nei termini della variabile indipendente t .

Scelta allora come parametrizzazione di γ

$$X(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) ; 0 \leq t \leq \pi$$

si ha,

$$f(X) = f(X(t)) = (x - y, x + y) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$$

che esprime l'integrando come funzione (a valori vettoriali) della sola variabile t .

per quanto riguarda il fattore dX segue dalla parametrizzazione che è $dx/dt = -\sin t$, e $dy/dt = \cos t$ o equivalentemente

$$dx = -\sin t \, dt, \quad dy = \cos t \, dt .$$

In forma vettoriale si ha

$$dX = (dx, dy) = (-\sin t \, dt, \cos t \, dt) = (-\sin t, \cos t) \, dt = X'(t) \, dt .$$

Adesso, sia f che dX sono espressi come vettori funzioni della variabile indipendente t , ha quindi senso effettuare il prodotto scalare tra i due, si ha

$$\begin{aligned} f(X) \cdot dX &= f(X(t)) \cdot X'(t) \, dt \\ &= (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt = 1 \, dt . \end{aligned}$$

Il calcolo dell'integrale da allora

$$\int_{\gamma} f(X) \cdot dX = \int_0^{\pi} f(X(t)) \cdot X'(t) \, dt = \int_0^{\pi} 1 \, dt = \pi$$



La seguente definizione esprime, in termini generali, quanto illustrato con l'esempio.

Definizione 8.13 (*Integrale curvilineo*). Sia γ una curva orientata in \mathbb{R}^2 e sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale definito su e in un intorno di γ . Sia $X(t)$ una parametrizzazione differenziabile di γ , con $a \leq t \leq b$. L'integrale curvilineo (o di linea) di f lungo γ , indicato con

$$\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$$

è definito da

$$\int_a^b f(X(t)) \cdot X'(t) dt.$$

Nota 8.14 (*Definizione equivalente*). Siano $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ ed $X = (x, y)$. Ne segue che l'integrale curvilineo può essere scritto nella seguente forma alternativa

$$\int_{\gamma} f(X) \cdot dX = \int_{\gamma} (P(x, y), Q(x, y)) \cdot (dx, dy) = \int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

Quest'ultima forma è spesso usata nella stampa per la sua semplicità tipografica.

Integrali Curvilinei; Forza e Lavoro

Scriviamo l'integrale curvilineo in un'altra forma ancora, come

$$\int_a^b f(X(t)) \cdot \frac{X'(t)}{|X'(t)|} |X'(t)| dt.$$

Questa versione porta ad un'utile interpretazione fisica dell'integrale curvilineo in termini di lavoro.

Per capire come, notiamo come il vettore a destra del prodotto scalare sia un vettore unitario. Se pensiamo adesso ad f come l'espressione analitica di un campo di forze, allora il prodotto scalare

$$f(X(t)) \cdot \frac{X'(t)}{|X'(t)|}$$

rappresenta la proiezione del campo f nella direzione di $X'(t)$, cioè nella direzione tangente alla curva γ nel punto $X(t)$. Quindi questo prodotto scalare rappresenta il lavoro fatto, per unità di distanza, dalla forza $f(X(t))$. L'ultimo fattore sotto integrale $|X'(t)|$ ci dice quale sia *il modulo della velocità* della curva (pensando a t come tempo) nel punto $X(t)$, cioè la distanza percorsa nell'unità di tempo. In un breve intervallo di tempo Δt la forza rimane essenzialmente costante. In tale intervallo, il lavoro fatto dalla forza f lungo γ è dato approssimativamente da

$$f(X(t)) \cdot \frac{X'(t)}{|X'(t)|} |X'(t)| \Delta t$$

da cui segue che:

l'integrale di linea $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$ dice quanto è il lavoro fatto dalla forza f muovendosi lungo la curva orientata γ .

8.3.4 Esercizi

Nota Un software può essere utile nello svolgimento degli esercizi precedenti. Usando *Maple* usare il comando `fieldplot` per disegnare i campi vettoriali. I seguenti comandi, che implementano i calcoli di cui sopra, illustrano alcune tecniche utili.

```
>P:=x-y; Q:=x+y;
  P:=x-y
  Q:=x+y
>x:=cos(t); y:=sin(t);
  x:=cos(t)
  y:=sin(t)
>dx:=diff(x,t); dy:=diff(y,t);
  dx:=-sin(t)
  dy:=cos(t)
>P*dx+Q*dy;
  (-cos(t)-sin(t)) sin(t) + (cos(t)+sin(t))cos(t)
>int(P*dx+Q*dy, t=0..Pi);
  Pi
>plot1:=fieldplot([x-y,x+y], x=-2..2, y=-2..2, grid=[10,10]):
>plot2:=plot([cos(t), sin(t), t=0..Pi]):
>display([plot1, plot2]);
```

(Nelle ultime 3 linee di comando, vengono definite due figure, nella prima il campo vettoriale, nella seconda la curva. Infine nella terza la combinazione di due in un unico disegno.)

1. In ognuno dei casi sotto, calcolare l'integrale di linea $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$. Fare l'esercizio a mano; controllare l'esercizio usando il software.
 - (a) $f(x, y) = (x, y)$; γ è la semicirconferenza unitaria superiore, percorsa in senso orario;
 - (b) $f(x, y) = (x, y)$; γ è la semicirconferenza unitaria superiore, percorsa in senso antiorario;
 - (c) $f(x, y) = (x, y)$; γ è il segmento che unisce $(-1, 0)$ con $(1, 0)$;
 - (d) $f(x, y) = \nabla g(x, y)$ dove $g(x, y) = x^2 - y$ e γ la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario;
 - (e) $f(x, y) = (-y, x)$; γ è il circolo unitario percorso in senso antiorario;
 - (f) $f(x, y) = (-y, x)$; γ è il circolo unitario percorso in senso orario;
 - (g) $f(x, y) = (x, 0)$; γ è il segmento che unisce $(0, 0)$ con (a, b) ;

- (h) $f(x, y) = (0, y)$; γ è il segmento che unisce $(0, 0)$ con (a, b) ;
- (i) $f(x, y) = (x, y)$; γ è il segmento che unisce (a, b) con (c, d) .

2. Sia $f(x, y)$ una qualsiasi funzione differenziabile da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 ; γ una curva differenziabile. Supponiamo che γ sia parametrizzata da $X(t)$, con $0 \leq t \leq 1$.

- (a) Spiegare perché $-\gamma$ è parametrizzato da $X(1-t)$ con $0 \leq t \leq 1$;
- (b) Usare la parte (a) per mostrare che

$$\int_{-\gamma} f(X) \cdot dX = - \int_{\gamma} f(X) \cdot dX$$

(cambiando orientazione alla curva cambia segno l'integrale).

3. In ognuna della parti sotto fare tre cose (i) usare il software per tracciare sia il campo vettoriale f che la curva γ nel rettangolo $[-2, 2] \times [-2, 2]$;

- (ii) usare la figura per capire se l'integrale è positivo, negativo o nullo;
- (iii) usare la definizione (ed il software) per calcolare l'integrale.

- (a) $f(x, y) = (x/x^2 + y^2, y/x^2 + y^2)$; γ è la circonferenza unitaria;
- (b) $f(x, y) = (-y/x^2 + y^2, x/x^2 + y^2)$; γ è la circonferenza unitaria;
- (c) $f(x, y) = (x, 0)$; γ è la semicirconferenza unitaria superiore, percorsa in senso antiorario;
- (d) $f(x, y) = \nabla g(x, y)$ dove $g(x, y) = x^2 + y^2$ e γ è la semicirconferenza unitaria superiore, percorsa in senso antiorario.

4. Sia $h(x, y) = x + 2y$ e sia $g(x, y) = \nabla h(x, y)$.

- (a) Calcolare $g(x, y)$. Dopodiché disegnare $g(x, y)$ come campo vettoriale nel rettangolo $[-3, 3] \times [-3, 3]$; tracciare le frecce nei punti a coordinate intere (le frecce andranno scalate per rientrare nel disegno, ci sono 16 frecce in tutto);
- (b) Disegnare le curve di livello $h(x, y) = 1$; $h(x, y) = 2$; e $h(x, y) = 3$. Quale relazione c'è tra le curve di livello ed il campo vettoriale di (a)?

5. Ripetere l'esercizio precedente con la funzione $h(x, y) = y - x^2$. Questa volta usare il software per disegnare il campo vettoriale, controllando comunque alcuni casi a mano).

8.4 Un Teorema Fondamentale per gli Integrali di Linea.

Abbiamo introdotto l'idea dell'integrale di linea $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$ o equivalentemente $\int_{\gamma} P dx + Q dy$ dove $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ è un campo vettoriale nel piano, e γ è una curva orientata nel dominio di f .

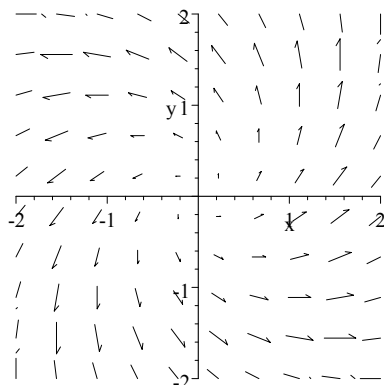
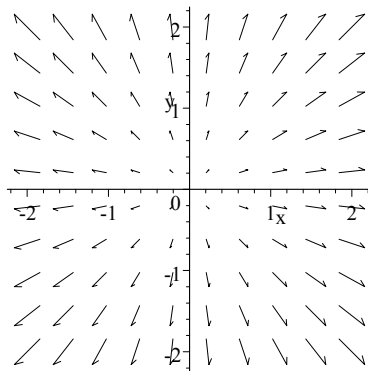
In questo paragrafo continuiamo lo sviluppo delle proprietà dell'integrale curvilineo, dando un teorema fondamentale per tali integrali.

Gli integrali curvilinei non hanno una semplice interpretazione geometrica. In particolare, il valore dell'integrale $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$ non è in alcun modo interpretabile come "un'area sottesa dal grafico". Questo non vuole dire che figure e disegni non siano utili, solo che vanno interpretati in modo diverso dai disegni "standard" del calcolo elementare.

FORZA. Gli integrali curvilinei sono stati sviluppati intorno a problemi di fisica; l'intuizione fisica ci aiuta quindi bene a spiegarne il senso da questo punto di vista. Abbiamo già visto, nella sezione precedente che se interpretiamo f (o (P, Q)) come una forza nel piano, allora l'integrale curvilineo rappresenta il lavoro fatto dalla forza applicata ad un oggetto che si muove lungo la curva, dal punto iniziale a quello finale. Ciò ci spiega anche perché, invertendo il senso di percorrenza sulla curva, cambia segno l'integrale. Il lavoro fatto spostando un oggetto lungo una curva in una direzione è opposto al lavoro richiesto per muoversi nella direzione opposta.

FLUSSO DI UN FLUIDO. Un'altra interpretazione fisica che si può dare all'integrale curvilineo è nei termini del moto di un fluido. Da questo punto di vista, un campo vettoriale f descrive in ogni punto la velocità di un fluido che si muove nel piano xy . Data una curva orientata γ l'integrale di linea $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$ è chiamato **integrale di flusso**. Esso misura la tendenza del fluido a muoversi lungo la curva. Se γ è una **curva chiusa**, cioè una curva in cui i punti iniziali e finali coincidono, l'integrale di linea è chiamato **circolazione** di f lungo γ .

Esempio 8.15 *Considerate i due flussi raffigurati qua sotto e per ognuno di loro considerate la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario. Cosa suggeriscono le due figure, riguardo all'integrale curvilineo (cioè integrale di flusso) $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$?*

Il flusso $(x - y, x + y)$ Il flusso (x, y)

Soluzione. Nella figura a sinistra il fluido sembra ruotare in senso antiorario, nello stesso verso di γ , ci aspettiamo perciò un valore positivo dell'integrale. Si ha infatti, con semplici calcoli (verificate)

$$\int_{\gamma} f(X) \cdot dX = \int_{\gamma} (x - y) dx + (x + y) dy = 2\pi.$$

Nella figura a destra, il flusso è in ogni punto perpendicolare alla curva γ , ci aspettiamo perciò una circolazione uguale a zero. Infatti i calcoli ci danno (verificare)

$$\int_{\gamma} f(X) \cdot dX = \int_{\gamma} x dx + y dy = 0$$

■

Ancora Integrali di Linea

Gli integrali di linea hanno proprietà algebriche simili a quelle degli integrali ordinari. La seguente Proposizione indica le più utili.

Proposizione 8.16 (Algebra degli integrali di linea) Siano $f = (P, Q)$ e $g = (R, S)$ campi vettoriali in \mathbb{R}^2 , c una costante e γ una curva orientata. Si ha

$$(i) \int_{\gamma} (f \pm g) \cdot dX = \int_{\gamma} f \cdot dX \pm \int_{\gamma} g \cdot dX$$

$$(ii) \int_{\gamma} (cf) \cdot dX = c \int_{\gamma} f \cdot dX$$

(iii) Sia $-\gamma$ la stessa curva descritta da γ ma orientata in senso opposto. Si ha

$$\int_{-\gamma} f \cdot dX = - \int_{\gamma} f \cdot dX.$$

(iv) Supponiamo che γ sia l'unione di due curve orientate γ_1 e γ_2 . Si ha

$$\int_{\gamma} f \cdot dX = \int_{\gamma_1} f \cdot dX + \int_{\gamma_2} f \cdot dX$$

L'ultima proprietà è interessante soprattutto quando le due curve si incontrano negli estremi, come per esempio, la metà inferiore e quella superiore della circonferenza unitaria.

Le altre proprietà sono conseguenze immediate della definizione di integrale curvilineo e delle proprietà degli integrali. La dimostrazione è omessa.

Il teorema ci permette comunque di mettere insieme risultati noti per ottenerne di nuovi.

Esempio 8.17 Sia $f(x, y) = (x - y, x + y)$ e $g(x, y) = (x, y)$. Usare risultati già noti per calcolare $\int_{\gamma} -y dx + x dy$, dove γ è la circonferenza unitaria orientata in senso antiorario.

Soluzione. Notiamo dapprima che è $f - g = (x - y, x + y) - (x, y) = (-y, x) = h(x, y)$, così si ha

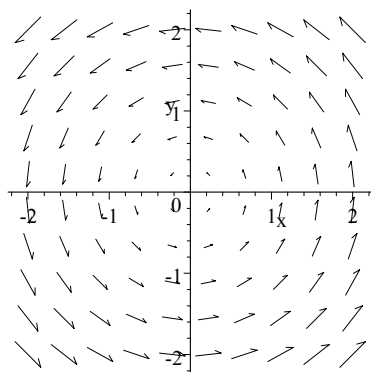
$$\int_{\gamma} h \cdot dX = \int_{\gamma} -y dx + x dy,$$

che è l'integrale che cerchiamo. Gli integrali di f e g sono già stati calcolati, si ha allora

$$\int_{\gamma} -y dx + x dy = \int_{\gamma} f \cdot dX - \int_{\gamma} g \cdot dX = 2\pi - 0 = 2\pi.$$

■

Il disegno del campo vettoriale nell'intorno di γ ci dice che l'integrale è effettivamente positivo



Il flusso $h(x, y) = (-y, x)$

Ciò che interessa è la curva, NON la parametrizzazione.

Come ci suggerisce la notazione $\int_{\gamma} f \cdot dX$ il valore dell'integrale dipende sia da f che dalla curva γ . Ma ogni curva può essere parametrizzata in molti modi; si pone allora la domanda se l'integrale può dipendere o meno dalla parametrizzazione scelta per rappresentare la curva. Fortunatamente la risposta è no. L'integrale non dipende dalla parametrizzazione scelta per la curva. Senza questa proprietà l'integrale curvilineo non sarebbe di nessuna utilità.

Illustriamo con un esempio la proprietà di indipendenza dalla parametrizzazione.

Esempio 8.18 Sia γ la semicirconferenza unitaria superiore, percorsa in senso antiorario. Consideriamo le due parametrizzazioni

$$\begin{aligned} X(s) &= (\cos s, \sin s), \quad 0 \leq s \leq \pi; \\ X(t) &= (\cos t^2, \sin t^2), \quad 0 \leq t \leq \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Mostrare che l'integrale $\int_{\gamma} -y dx + x dy$ ha stesso valore per le due diverse parametrizzazioni.

Soluzione. La prima parametrizzazione dà luogo a

$$x = \cos s; \quad dx = -\sin s ds; \quad y = \sin s; \quad dy = \cos s ds.$$

Si ha allora

$$\int_{\gamma} -y dx + x dy = \int_0^{\pi} (\sin^2 s + \cos^2 s) ds = \pi.$$

Usando la seconda parametrizzazione si ha

$$x = \cos t^2; \quad dx = -2t \sin t^2 dt; \quad y = \sin t^2; \quad dy = 2t \cos t^2 dt$$

da cui

$$\int_{\gamma} -y dx + x dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} (\sin t^2 + \cos t^2) 2t dt = \pi.$$

Il risultato, come si vede è lo stesso nei due casi. ■

L'argomento generale per l'indipendenza della parametrizzazione, è simile.

Supponiamo che siano date due differenti parametrizzazioni differenziabili $X(s) = (x(s), y(s))$ e $X(t) = (x(t), y(t))$ di una curva γ , con $a \leq s \leq b$, e $c \leq t \leq d$. Dato l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} P dx + Q dy$, le due parametrizzazioni danno luogo ai due integrali

$$\int_a^b \left(P(X(s)) \frac{dx}{ds} + Q(X(s)) \frac{dy}{ds} \right) ds, \quad \int_c^d \left(P(X(t)) \frac{dx}{dt} + Q(X(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

I due integrali hanno lo stesso valore, infatti si può mostrare che s è una funzione differenziabile di t , cioè $s = s(t)$, con $s(c) = a$ e $s(d) = b$. Allora, operando il cambio di variabile $s = s(t)$ nel primo integrale si ha

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(P(X(s)) \frac{dx}{ds} + Q(X(s)) \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \int_c^d \left(P(X(s(t))) \frac{dx}{ds} + Q(X(s(t))) \frac{dy}{ds} \right) \frac{ds}{dt} dt \\ &= \int_c^d \left(P(X(s(t))) \frac{dx}{dt} + Q(X(s(t))) \frac{dy}{dt} \right) dt \end{aligned}$$

(nei vari passaggi si usato il teorema del cambio di variabile e la derivazione di funzioni composte.)

Ricordiamo che il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che se una funzione f e la sua derivata f' sono continue in $[a, b]$ allora

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Un risultato simile vale per gli integrali curvilinei. Assumiamo che la funzione $h(x, y)$ abbia derivate parziali continue su e nell'intorno della curva γ che assumiamo differenziabile, eccetto, eventualmente, che agli estremi.

Teorema 8.19 (*Teorema fondamentale per gli integrali di linea*)

Sia $h(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Sia γ una curva orientata, con punto iniziale $X_0 = (x_0, y_0)$ e punto finale $X_1 = (x_1, y_1)$. Si ha allora

$$\int_{\gamma} \nabla h \cdot dX = h(X_1) - h(X_0) .$$

Se γ è una curva chiusa (cioè $X_1 = X_0$), allora è

$$\int_{\gamma} \nabla h \cdot dX = 0 .$$

Dimostrazione. La dimostrazione è un'applicazione diretta del teorema di derivazione delle funzioni composte. Sia γ parametrizzata dalla funzione

$$X(t) = (x(t), y(t)) ; \quad a \leq t \leq b .$$

L'integrale di linea ha la forma

$$I = \int_{\gamma} \nabla h \cdot dX = \int_a^b (h_x(X(t)), h_y(X(t))) \cdot X'(t) dt .$$

D'altra parte, data la funzione composta $h(X(t))$, la regola di derivazione delle funzioni composte per funzioni di più variabili afferma che

$$\frac{d}{dt} (h(X(t))) = \nabla h(X(t)) \cdot X'(t) .$$

Si ha perciò che l'integrando dell'integrale sopra può essere letto come la derivata rispetto a t della funzione composta $h(X(t))$. Il teorema fondamentale del calcolo ci dice allora che

$$I = \int_a^b \frac{d}{dt} (h(X(t))) = h(X(b)) - h(X(a)) = h(x_1, y_1) - h(x_0, y_0) .$$

■

Nota 8.20 Il teorema implica una proprietà importante per ogni campo vettoriale che può essere letto come il gradiente di una funzione. Per tali campi vettoriali, un integrale curvilineo dipende solo dagli estremi della curva di integrazione e non dalla curva stessa (ovviamente pensando a curve che stiano nella regione in cui il gradiente è definito). Integrali curvilinei con questa proprietà li diremo **indipendenti dal cammino**.

Quindi il teorema fondamentale rende semplice il compito di valutare gli integrali di linea se, ma solo se, è possibile trovare una funzione il cui gradiente è il campo vettoriale nell'integrando. Se $\nabla h = f$ allora h è chiamata **la funzione potenziale** del campo vettoriale f .

Esempio 8.21 Sia $g(x, y) = (y, x)$, $f(x, y) = (x - y, x + y)$, e γ il segmento da $(0, 0)$ a $(2, 1)$. Usare il teorema, se possibile, per trovare $\int_{\gamma} g \cdot dX$ e $\int_{\gamma} f \cdot dX$.

Soluzione. Notiamo dapprima che se $h(x, y) = xy$ allora

$$\nabla h(x, y) = g(x, y) .$$

(abbiamo trovato la funzione potenziale h per intuito; daremo un approccio più sistematico fra poco). A questo punto non importa parametrizzare γ , infatti usando il teorema si ha

$$\int_{\gamma} g \cdot dX = h(2, 1) - h(0, 0) = 2$$

Consideriamo adesso l'altro integrale di linea: Tentare di valutare una funzione potenziale per f sembra piuttosto difficile - di fatto impossibile (spiegheremo più avanti il perché), quindi il teorema non ci aiuta nel calcolo di $\int_{\gamma} f \cdot dX$

■

La domanda che ci poniamo adesso è la seguente: **Quando un campo vettoriale è un gradiente?** Perché, ad esempio, $f(X) = (x - y, x + y)$ dell'esempio precedente non può essere un gradiente?

Se esistesse la funzione potenziale $h(X)$ di $f(X)$ dovrebbe essere

$$h_x(x, y) = x - y, \quad h_y(x, y) = x + y$$

ma derivando ancora una volta si avrebbe

$$h_{xy}(x, y) = -1, \quad h_{yx}(x, y) = 1 .$$

Questo è impossibile perché il teorema di Schwartz ci dice che in una funzione "sufficientemente regolare" le derivate seconde miste devono essere uguali. Abbiamo allora trovato un "test" utile e sufficientemente generale che ci dice se un campo vettoriale NON è un gradiente.

Proposizione 8.22 (Gradienti e derivate miste)

Sia $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vettoriale. nell'intorno di una curva γ . Se $P_y \neq Q_x$ lungo γ allora $f(x, y)$ NON è il gradiente di una funzione potenziale $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Se un campo vettoriale soddisfa la condizione che $P_y = Q_x$ allora si può pensare di trovare una funzione potenziale. Il metodo che spesso dà buoni risultati è quello della ricerca di primitive, integrando rispetto ad x o ad y separatamente. Illustriamo il metodo con alcuni esempi.

Esempio 8.23 *Trovare la funzione potenziale del campo vettoriale*

$$(P, Q) = (y \cos(xy) + 1, x \cos(xy))$$

Usarla per calcolare $\int_{\gamma} P dx + Q dy$ dove γ è la semicirconferenza unitaria superiore, orientata in senso antiorario.

Soluzione. Controlliamo dapprima che sia $P_y = Q_x$. Si ha

$$P_y = \cos(xy) - xy \sin(xy) = Q_x.$$

E' quindi possibile continuare la ricerca. Se $h(x, y)$ è la funzione potenziale, deve essere

$$h_x(x, y) = y \cos(xy) + 1, \quad \text{e} \quad h_y(x, y) = x \cos(xy).$$

Integriamo la prima delle due eguaglianze rispetto ad x considerando y come costante, si ha

$$h(x, y) = \int (y \cos(xy) + 1) dx = \int y \cos(xy) dx + \int 1 dx$$

Nel primo integrale operiamo la sostituzione: $u = xy$ da cui $du = y dx$, si ottiene

$$\int y \cos(xy) dx = \int \cos u du = \sin(xy) + C.$$

Mettendo insieme i due pezzi si ha

$$h(x, y) = \int y \cos(xy) dx + \int 1 dx = \sin(xy) + x + C;$$

Da notare che C può dipendere da y poiché abbiamo integrato in x . Dobbiamo allora scrivere

$$h(x, y) = \sin(xy) + x + C(y).$$

Per capire cosa è $C(y)$ deriviamo rispetto ad y , si ha

$$h_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (\sin(xy) + x + C(y)) = x \cos(xy) + C'(y).$$

Confrontiamo il risultato ottenuto con il valore che deve avere la seconda componente del campo, è

$$x \cos(xy) + C'(y) = x \cos(xy)$$

che implica $C'(y) = 0$. Quindi C non dipende da y e può essere preso costante. Se ne deduce allora che per ogni valore della costante C la funzione $h(x, y) = \sin(xy) + x + C$ è una funzione potenziale per (P, Q) .

Il lavoro fatto per trovare $h(x, y)$ ci permette ora di risolvere rapidamente l'integrale curvilineo richiesto. Infatti, per il teorema fondamentale la risposta dipende solo dagli estremi della curva γ ,

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = h(-1, 0) - h(1, 0) = -2.$$

(Provare a calcolare direttamente l'integrale). ■

8.4.1 Esercizi

Nota La tecnologia può essere a volte utile per capire la forma del campo vettoriale, ma anche per calcolare gli integrali standard.

1. In questo esercizio $f(x, y) = (x, y)$; potete pensare ad f come alla velocità del flusso di un fluido. Per ognuna delle curve γ date qui sotto calcolare il flusso integrale $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$. Cercare di prevedere il segno dell'integrale (positivo, negativo o nullo) vedendo come la curva è immersa nel campo vettoriale.
 - (a) γ è la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario;
 - (b) γ è la semicirconferenza superiore del cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ percorsa in senso orario;
 - (c) γ è la semicirconferenza inferiore del cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ percorsa in senso orario;
 - (d) γ è il cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ percorso in senso orario;
 - (e) γ è il segmento che unisce il punto $(0, 1)$ con il punto $(1, 0)$;
 - (f) γ è il segmento che unisce il punto $(0, 2)$ con il punto $(1, 0)$.
2. In questo esercizio è $f(x, y) = (x - y, x + y)$; potete pensare ad f come alla velocità del flusso di un fluido. Per ognuna delle curve γ date qui sotto calcolare il flusso integrale $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$. Cercare di prevedere il segno dell'integrale (positivo, negativo o nullo) vedendo come la curva è immersa nel campo vettoriale.
 - (a) γ è la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario;
 - (b) γ è il cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ percorso in senso antiorario;
 - (c) γ è la semicirconferenza superiore del cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ percorsa in senso antiorario.
3. In questo esercizio $f(x, y) = (x, 0)$.
 - (a) Tracciare a mano (o usando la tecnologia) il campo vettoriale nel quadrato $[-2, 2] \times [-2, 2]$;
 - (b) Sia γ la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Calcolare $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$. Come, la figura della parte (a) predice il segno del risultato?

- (c) Sia γ la circonferenza unitaria centrata in $(1, 0)$. Calcolare $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$. Come, la figura della parte (a) predice il segno del risultato?
- (d) Sia γ la circonferenza unitaria centrata nel generico punto (a, b) . Calcolare $\int_{\gamma} f(X) \cdot dX$.
4. Ripetere l'esercizio precedente con $f(x, y) = (0, x)$.
5. Per ognuno dei campi qua sotto applicare la proposizione sulle derivate miste. Se il campo passa il test trovare la funzione potenziale imitando la tecnica usata nell'esempio sopra.
- (a) $(P, Q) = (x, y)$;
- (b) $(P, Q) = (y, x)$;
- (c) $(P, Q) = (-y, x)$;
- (d) $(P, Q) = (1, \sin x)$;
- (e) $(P, Q) = (\sin x, 1)$;
- (f) $(P, Q) = (x/x^2 + y^2, y/x^2 + y^2)$.
6. Per ognuna delle parti dell'esercizio precedente calcolare $\int_{\gamma} P dx + Q dy$ dove γ è il segmento che unisce il punto $(1, 1)$ con $(2, 2)$.

8.5 Il Teorema di Green

Il teorema fondamentale degli integrali curvilinei afferma che se un campo vettoriale f è il gradiente di una funzione, cioè $f = \nabla h$ per una qualche funzione h allora

$$\int_{\gamma} f \cdot dX = \int_{\gamma} \nabla h \cdot dX = h(X_1) - h(X_0)$$

dove X_0 e X_1 sono il punto iniziale e finale della curva γ .

Due conseguenze di questa eguaglianza sono particolarmente importanti.

Indipendenza dal Cammino.

L'equazione ci dice che l'integrale curvilineo di un gradiente dipende solo da gli estremi X_0 e X_1 , e non dalla particolare curva che unisce questi due estremi. Questo significa che se γ_1 è un'altra curva che unisce X_0 e X_1 e γ_1 è anch'essa nel dominio di h allora si ha

$$\int_{\gamma} f \cdot dX = \int_{\gamma_1} f \cdot dX .$$

Curve Chiuse, Integrali Zero e Legge di Conservazione.

Il teorema afferma che se γ è una curva chiusa, una curva cioè in cui l'estremo iniziale e finale coincidano ($X_0 = X_1$) allora l'integrale di un campo gradiente deve essere zero, infatti

$$\int_{\gamma} \nabla h \cdot dX = h(X_1) - h(X_0) = 0$$

In termini fisici questo significa che se un campo di forze è il gradiente di un potenziale, la forza fa lavoro nullo (non fa lavoro) nel muovere una particella lungo una qualunque curva chiusa. I fisici chiamano questa forza **conservative**. In tali campi, lavoro ed energia sono conservati. Il teorema fondamentale, tra le altre cose, ci dice allora che ogni campo vettoriale di tipo gradiente è conservativo.

Esempio 8.24 Sia $f = (P, Q) = (y^2, 2xy)$. Consideriamo le seguenti tre curve che uniscono il punto $(-1, 1)$ al punto $(1, 1)$ (a) $1 + \cos(\pi x)$, $-1 \leq x \leq 0$; (b) $(t, 2 - t^2)$, $-1 \leq t \leq 1$; (c) $(t, 4t^2 - 3)$, $-1 \leq t \leq 1$. Valutare se l'integrale curvilineo di f ha lo stesso valore lungo le tre curve. Qual'è questo valore?

Soluzione. Prima di mettersi a calcolare i tre integrali, valutiamo se f è il gradiente di una qualche funzione h . Calcoliamo dapprima P_y e Q_x si ha

$$P_y = 2y, \quad Q_x = 2y.$$

Poiché sono uguali cerchiamo di trovare la funzione potenziale. Integriamo P rispetto ad x pensando y come costante. Si ha

$$\int P(x, y) dx = \int y^2 dx = x y^2 + C(y).$$

Derivando rispetto ad y e confrontando con Q si ha

$$2x y + C'(y) = 2x y$$

da cui, ancora (ma non sempre) $C(y) = C$. Abbiamo allora che la funzione $h(x, y) = x y^2 + C$ è un a funzione potenziale per f . Quindi sicuramente l'integrale lungo le tre curve hanno lo stesso valore visto che le curve hanno gli stessi estremi. Il valore dell'integrale può essere calcolato con il teorema fondamentale

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma} \nabla h \cdot dX = h(1, 1) - h(-1, 1) = 1 - (-1) = 2$$

La risposta risulta ragionevole anche guardando il problema del punto di vista grafico, considerando le curve immerse nel campo vettoriale. Infatti, le curve sono orientate più verso il flusso che contro di esso, dando il senso di un risultato positivo. ■

8.5.1 Un Risultato Analogo al Teorema Fondamentale

Il teorema di Green è un risultato che collega l'integrale doppio fatto su una regione del piano con un integrale di linea fatto sul bordo della regione. Per arrivare subito al punto: il teorema di Green afferma che sotto ipotesi opportune sulla regione e sul campo vettoriale, si ha

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (8.1)$$

Diamo una occhiata analitica all'uguaglianza sopra scritta.

Nel lato sinistro dell'uguaglianza si ha l'integrale curvilineo del campo vettoriale $(P(x, y), Q(x, y))$ su \mathbb{R}^2 , fatto su di una **curva chiusa semplice** γ , ed il segno (\oint) indica che γ è la frontiera di una regione R (supporremo

sempre le curve orientate in senso antiorario, salvo affermazione contraria).

Nel lato destro dell'eguaglianza R è la regione limitata da γ . Notare poi che l'integrando $Q_x - P_y$ è una funzione scalare di due variabili, l'oggetto giusto da integrare in \mathbb{R}^2 .

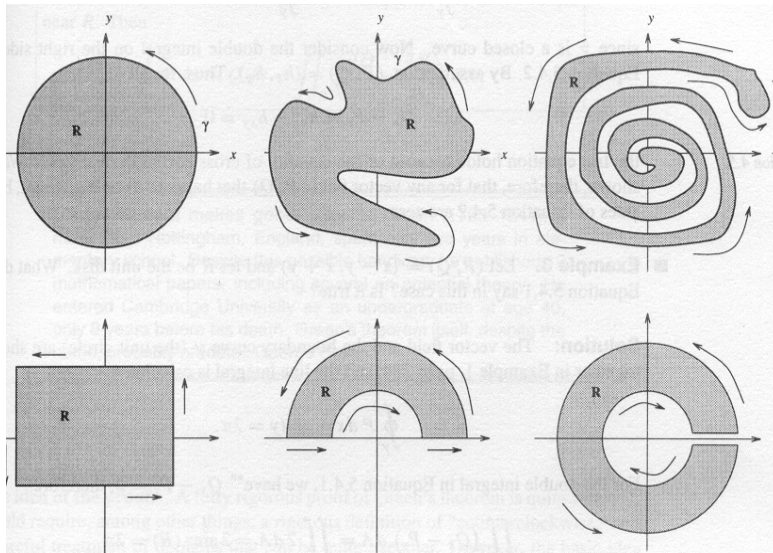
Osservare infine che una curva chiusa *semplice* (semplice significa che nella curva i soli punti uguali tra di loro sono l'iniziale ed il finale) divide il piano in due regioni.

Definizione 8.25 Chiamiamo **regione interna** alla curva γ semplice chiusa, la regione del piano che rimane sulla sinistra quando si percorre la curva in senso antiorario.

Le curve γ a cui siamo interessati sono quelle differenziabili, o almeno differenziabili a tratti, nel senso di essere formata da un numero finito di pezzi differenziabili.

In termini tecnici curve di questo genere, che limitano aree di forma "ragionevole" sono chiamate **curve di Jordan differenziabili a tratti**.

Curve di Jordan. Le curve nel piano, anche quelle chiuse semplici, possono essere molto complicate. Sebbene possa sembrare ragionevole che una tale curva divida il piano in due regioni, una interna ed una esterna, è sorprendentemente difficile dimostrare questa affermazione rigorosamente. La prima dimostrazione, fatta sotto ipotesi opportune, fu data dal matematico francese *Camille Jordan* (1838-1922). In suo onore, le curve chiuse semplici che limitano un'area, sono conosciute come *curve di Jordan*.



La relazione tra γ ed R è mostrata in alcuni esempi.

Prima di stabilire il teorema, vediamo cosa ci dice in alcuni casi semplici.

Esempio 8.26 *Supponiamo che il campo vettoriale (P, Q) sia il gradiente di una funzione h , cioè*

$$(P(x, y), Q(x, y)) = \nabla h(x, y),$$

dove h è definita su e nell'intorno di una curva γ . Cosa ci dice l'equazione 8.1 ?

Soluzione.

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \oint_{\gamma} \nabla h \cdot dX = 0$$

poiché γ è una curva chiusa. D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} P dx + Q dy &= \oint_{\gamma} h_x dx + h_y dy = \iint_R \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R (h_{xy} - h_{yx}) dA = \iint_R 0 dA = 0. \end{aligned}$$

Abbiamo come conseguenza che per ogni campo vettoriale (P, Q) che è gradiente di una funzione, entrambi i lati dell'equazione 8.1 sono zero. ■

Esempio 8.27 *Sia $(P, Q) = (x - y, x + y)$ e sia R il disco unitario. Cosa dice l'equazione 8.1 in questo caso ?*

Soluzione. Abbiamo già calcolato l'integrale sulla circonferenza unitaria del campo. Si ha

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = 2\pi.$$

D'altra parte si ha

$$Q_x - P_y = 1 - (-1) = 2;$$

Si ha allora

$$\iint_R (Q_x - P_y) dA = \iint_R 2 dA = 2\pi.$$

Quindi l'equazione 8.1 vale anche in questo caso. ■

Esempio 8.28 Considerate il campo vettoriale

$$(P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Cosa ci dice l'equazione 8.1?

Soluzione. Per calcolare l'integrale di linea usiamo la solita parametrizzazione $X(t) = (\cos t, \sin t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Il risultato è

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Per l'integrale doppio si ottiene

$$Q_x = P_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ne consegue che, almeno apparentemente $\iint_R (Q_x - P_y) dA = 0$ e quindi che l'equazione 8.1 fallisce. Cosa è che non funziona?

La spiegazione è semplice; il campo vettoriale (P, Q) non è definito nel punto $(0, 0)$, di conseguenza non sono definiti in zero neanche Q_x e P_y , e quindi non è detto che esista l'integrale doppio.

Morale: controllare bene il dominio di definizione delle funzioni e che tutto sia definito nel dominio.

■

Teorema 8.29 (Teorema di Green). Sia R una regione di \mathbb{R}^2 la cui frontiera è una curva di Jordan liscia a tratti. Siano P e Q due funzioni da $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivate parziali continue su e nell'intorno di R . Allora è

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

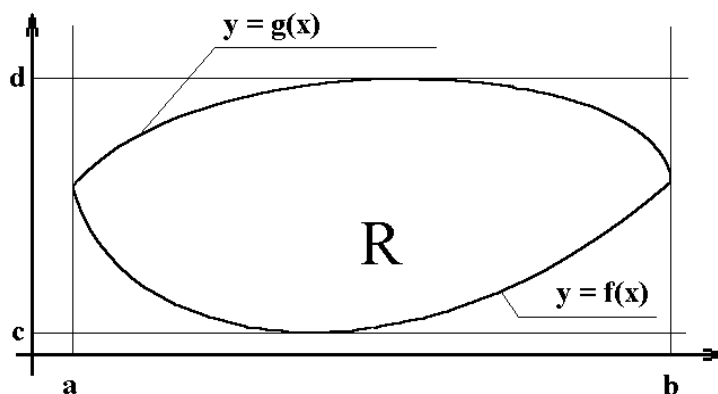
Non E' Mai Troppo Tardi. George Green (1793-1841) di mestiere faceva il mugnaio a Nottingham, in Inghilterra. Aveva solo due anni di istruzione elementare. Nonostante questo handicap egli pubblicò 10 lavori di matematica, di cui alcuni sulla teoria del potenziale. Si iscrisse all'Università di Cambridge all'età di 40 anni, solo otto anni prima della sua morte. Il teorema che porta il suo nome, probabilmente non fu solo opera sua.

Dimostrazione. (Solo un'idea) Una dimostrazione rigorosa del teorema di Green non è banale. Richiede, tra le altre cose, una definizione rigorosa di cosa si intenda per "antiorario" ed un trattamento attento dei problemi legati a domini che possono essere anche molto irregolari. Tuttavia l'idea base della dimostrazione è legata ad un'attenta applicazione dei teoremi base del calcolo. Per capire come, supponiamo dapprima che R sia una regione semplice della forma

La regione è speciale nel senso che ogni linea orizzontale o verticale interseca R al massimo due volte. Per dimostrare il teorema, dimostreremo le due identità

$$-\iint_R P_y dA = \oint_{\gamma} P dx \quad \text{e} \quad \iint_R Q_x dA = \oint_{\gamma} Q dy$$

Per la prima identità pensiamo R della seguente forma



La regione è limitata da una curva superiore data da $y = g(x)$ e da una inferiore data da $y = f(x)$ con $a \leq x \leq b$. L'integrale doppio diventa

$$\begin{aligned} - \iint_R P_y dA &= - \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=f(x)}^{y=g(x)} P_y(x, y) dy \right) dx \\ &= - \int_{x=a}^{x=b} (P(x, g(x)) - P(x, f(x))) dx \end{aligned}$$

Consideriamo adesso l'integrale di linea $\oint_{\gamma} P(x, y) dx$. Adesso γ è l'unione delle due curve, quella superiore e quella inferiore. Possiamo parametrizzare entrambe nello stesso modo

$$\begin{aligned} x &= t; \quad y = f(t); \quad a \leq t \leq b \\ x &= t; \quad y = g(t); \quad a \leq t \leq b. \end{aligned}$$

In entrambi i casi è $dx = dt$. Inoltre, poiché la curva superiore è orientata da destra a sinistra bisogna considerare l'integrale con il segno meno. Con questa parametrizzazioni si ha

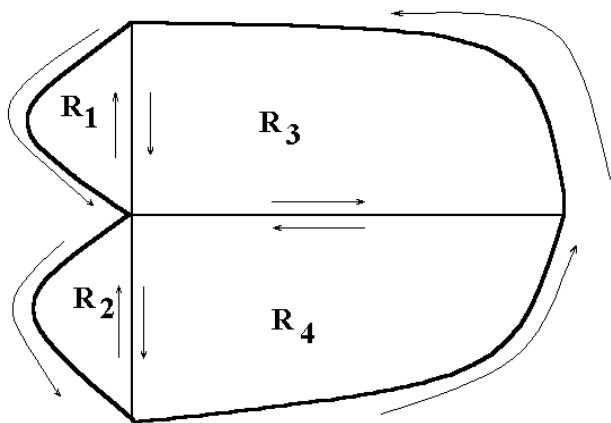
$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} P(x, y) dx &= \int_{\gamma \text{ inferiore}} - \int_{\gamma \text{ superiore}} \\ &= \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt \end{aligned}$$

Come si può facilmente vedere questa espressione è identica a quella ottenuta partendo dall'integrale doppio, quindi la prima identità è provata.

La seconda identità si prova in modo analogo.

Queste argomentazioni mostrano che il teorema di Green vale per regioni di tipo particolare come quella mostrata.

Per vedere come funziona per regioni di tipo più generale, il trucco è quello di dividere la regione data in sottoregioni, ognuna delle quali del tipo appena studiato, come mostrato in figura.



Notare che ognuna delle frontiere interne è attraversata due volte, in direzioni opposte. Abbiamo mostrato che il teorema vale per ogni sottoregione R_i con frontiera γ_i , cioè

$$\iint_{R_i} (Q_x - P_y) dA = \oint_{\gamma_i} P dx + Q dy$$

Sommando insieme questi risultati per $i = 1 \dots 4$ si ottiene $\iint_R (Q_x - P_y) dA$ per il membro sinistro dell'eguaglianza. Per il membro destro si ha $\oint_{\gamma} P dx + Q dy$ poiché gli integrali di linea sulle curve di contorno interne si cancellano per essere percorse due volte in senso opposto. Questo completa la dimostrazione del teorema di Green. ■

Nota: a volte il teorema di Green serve per sostituire ad un integrale curvilineo (magari complicato) un integrale doppio più semplice.

Esempio 8.30 Dato il campo di forze $(P, Q) = (x - y, x + y)$ trovare il lavoro fatto nello spostare un oggetto lungo la curva γ bordo del quadrato S di angoli $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

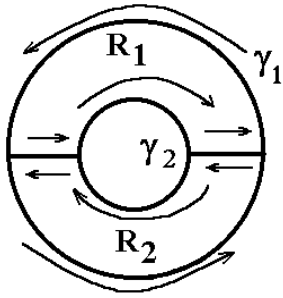
Soluzione. Integrare lungo il quadrato implicherebbe spezzare l'integrale curvilineo in quattro integrali con diverse parametrizzazioni. Si può usare il teorema di Green per ridurre il tutto ad un integrale doppio molto semplice. Infatti, si ha

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_S (Q_x - P_y) dA = \iint_S 2 dA = 2 \text{Area}(S) = 8$$

■

8.5.2 Il Teorema di Green in Regioni con i Buchi

Il teorema di Green, come lo abbiamo definito sopra, si applica a regioni con una sola curva come contorno. Tuttavia, un piccolo trucco ci permette di applicarlo anche a regioni che abbiano più curve distinte che lo delimitino, come ad esempio una corona circolare R .



In questo caso possiamo, come fatto in figura, immaginare la regione R come l'unione delle due regioni più semplici R_1 ed R_2 con bordo dato dalle curve C_1 e C_2 . Nella figura γ_1 e γ_2 sono le circonferenze interne ed esterne, rispettivamente. Il teorema di Green si applica alle due regioni R_1 ed R_2 , si ottiene così

$$\begin{aligned} \iint_{R_1} (Q_x - P_y) dA &= \oint_{C_1} P dx + Q dy \\ \iint_{R_2} (Q_x - P_y) dA &= \oint_{C_2} P dx + Q dy \end{aligned}$$

Sommando insieme le due equazioni (e tenendo conto delle cancellazioni) si ha

$$\iint_R (Q_x - P_y) dA = \oint_{\gamma_1} P dx + Q dy - \oint_{\gamma_2} P dx + Q dy$$

dove adesso entrambi gli integrali sono fatti prendendo le curve in senso antiorario.

Possiamo allora esprimere il principio generale

Teorema 8.31 (teorema di Green per regioni con fori). *Supponiamo che valgano le ipotesi del teorema di Green ed assumiamo che R sia limitata esternamente dalla curva γ_1 ed internamente dalla curva γ_2 . Allora*

$$\iint_R (Q_x - P_y) dA = \oint_{\gamma_1} P dx + Q dy - \oint_{\gamma_2} P dx + Q dy.$$

Esempio 8.32 *Sia*

$$(P, Q) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

e sia S il quadrato di lato 1 centrato nell'origine, orientata in senso antiorario. Trovare $\oint_S P dx + Q dy$.

Soluzione. L'integrale di linea è complicato dal fatto che bisogna dividerlo nei quattro pezzi che sono i lati del quadrato. Potremmo allora, usare il teorema di Green come lo abbiamo esteso sopra, per semplificare il calcolo. Consideriamo allora la regione R compresa tra il cerchio unitario γ ed il quadrato S .

Come già abbiamo calcolato è $Q_x = P_y$, cioè $Q_x - P_y = 0$ per tutti gli (x, y) in R . Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_R (Q_x - P_y) dA = \oint_{\gamma} P dx + Q dy - \oint_S P dx + Q dy \\ \Rightarrow \oint_{\gamma} P dx + Q dy &= \oint_S P dx + Q dy. \end{aligned}$$

D'altra parte abbiamo già visto che $\oint_{\gamma} P dx + Q dy = 2\pi$. Questo è il valore cercato. ■

8.5.3 Esercizi

1. In ognuna delle parti seguenti usare il teorema di Green per calcolare l'integrale di linea $\oint_{\gamma} P dx + Q dy$ (scambiare l'integrale curvilineo con l'integrale doppio). Tutte le curve sono percorse in senso antiorario.
 - (a) $(P, Q) = (y^2 + x, x + y)$; γ è il quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$;
 - (b) $(P, Q) = (x - y, x + y)$; γ è il quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, e $(0, 1)$;
 - (c) $(P, Q) = (y^2 + x, x + y)$; γ è il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine;
 - (d) $(P, Q) = (x - y, x + y)$; γ è la circonferenza di raggio 1 centrato nell'origine;
 - (e) $(P, Q) = (y^2 + x, x + y)$; γ è il bordo della regione $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$
 - (f) $(P, Q) = (x - y, x + y)$; γ è il bordo della regione $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
2. Sia dato il campo vettoriale $(P, Q) = (y^2, 2xy)$. Spiegare come mai:
 - (a) L'integrale curvilineo $\oint_{\gamma} P dx + Q dy$ ha lo stesso valore qualunque sia la curva che unisce il punto $(0, 0)$ con il punto $(1, 1)$.
 - (b) Trovare il valore comune citato in (a).
 - (c) Sia (a, b) un qualsiasi punto nel piano e γ una qualsiasi curva che unisce l'origine con il punto dato. Trovare il valore $\oint_{\gamma} P dx + Q dy$.
3. Ripetere l'esercizio precedente con il campo

$$(P, Q) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

(suggerimento: cercare la funzione potenziale).

- (a) Nelle vicinanze della superficie terrestre, la forza di gravità può essere considerata costante e diretta verso il basso. Essa può essere modellata nel piano xz come un campo vettoriale della forma $(P, Q) = (0, -k)$ dove k è una costante positiva.
 - i. Mostrare che (P, Q) è un campo di forze conservativo trovando una funzione potenziale. Cosa significa fisicamente la risposta?

- (b) Nel moto su larga scala (ad esempio il moto di un satellite o di una navetta spaziale), la gravità è modellata meglio da una forza che è sempre diretta verso il centro della terra e a cui grandezza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro della terra. Nel piano xz può essere modellata da una forza della forma

$$(P, Q) = k \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

dove k è una costante positiva.

- i. Mostrare che (P, Q) è conservativo trovando la funzione potenziale;
- ii. Trovare il lavoro fatto dalla forza spostando un oggetto dal punto $(1, 1)$ al punto $(3, 4)$. La risposta è positiva o negativa?

4. Considerare il campo vettoriale

$$(P, Q) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

e la curva γ data dal circolo unitario percorso in senso antiorario.

- (a) Parametrizzare γ e trovare $\oint_{\gamma} P dx + Q dy$;
- (b) (P, Q) è e non è il gradiente di un campo vettoriale?
- (c) Calcolare $\oint_S P dx + Q dy$ dove S è un qualsiasi quadrato contenente la circonferenza unitaria;
- (d) Calcolare $\oint_C P dx + Q dy$ dove C è una qualsiasi circonferenza non contenente l'origine.

5. Sia dato il campo vettoriale

$$(P, Q) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

e la curva γ data dal circolo unitario percorso in senso antiorario.

- (a) Parametrizzare γ e trovare $\oint_{\gamma} P dx + Q dy$;
- (b) Controllare che $Q_x(x, y) = P_y(x, y)$ per tutti gli $(x, y) \neq (0, 0)$;
- (c) Si applica il teorema di Green a (P, Q) nella circonferenza unitaria? Se sì, cosa significa? Se no, perché?