I VETTORI (LIBERI)

Nei corsi di FISICA si apprende che certe grandezze fisiche, come ad esempio la temperatura, la massa, la densità, il lavoro di una forza, il tempo, si chiamano GRANDEZZE SCALARI. Scalare è sinonimo di numero e ogni grandezza scalare può essere definita da un solo NUMERO che esprime il rapporto di questa grandezza ad una corrispondente unità di misura.

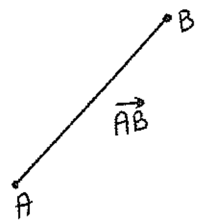
Certe altre grandezze, come per esempio la forza, lo spostamento di un punto materiale che si muove nel piano così come la sua velocità e la sua accelerazione, i momenti, sono dette GRANDEZZE VETTORIALI.

Un solo numero è insufficiente per definire una grandezza vettoriale perchè essa possiede, oltre alla dimensione, anche un'ORIENTAZIONE. Per definire completamente una grandezza vettoriale è necessario precisare un numero reale (non negativo), una direzione ed un verso.

Per esprimere matematicamente le grandezze vettoriali concrete (fisiche) si usano i VETTORI (LIBERI).

Si chiamano VETTORI i SEGMENTI ORIENTATI.

Dato un segmento orientato ad esso si possono associare:



- un numero (≥ 0) che dà la misura del segmento e ne esprime pertanto la lunghezza
- una direzione: quella della retta per A e B
- un verso: quello che da A porta in B

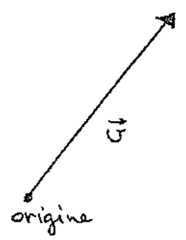
Due segmenti orientati si considerano equivalenti se hanno la stessa direzione, la stessa lunghezza e lo stesso verso, cioè se si possono dedurre l'uno dall'altro per TRASLAZIONE PARALLELA.

[Per essere precisi un VETTORE è un ente geometrico che rappresenta tutti i segmenti orientati che hanno gli stessi direzione, lunghezza e verso.]

Perciò i vettori sono studiati in geometria a meno della loro posizione ed è in questo senso che i vettori sono detti LIBERI.

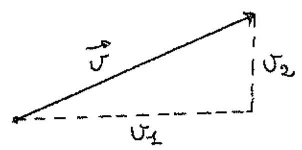
Per indicare un vettore usiamo una lettera con sopra una freccina: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ... Ci sono anche altri modi per indicare un vettore.

Nelle figure un vettore sarà sempre indicato con una FRECCIA: il punto di inizio della freccia è l'origine del vettore, mentre la punta della freccia indica l'estremo del vettore.



Consideriamo un vettore $\vec{v}$ NEL PIANO. Ad esso si possono associare:

- due COMPONENTI $\vec{v} = (v_1, v_2)$ che rappresentano le coordinate dell'estremo del vettore rispetto all'origine del vettore



(per raggiungere l'estremo del vettore partendo dall'origine ci si deve spostare di v_1 in orizzontale e di v_2 in verticale, intendendo lo spostamento verso destra e verso l'alto se è positivo, mentre verso sinistra e verso il basso se negativo).

- un numero (≥ 0) che ne esprime la lunghezza, detto <u>MODULO del VETTORE</u>:

$\vec{v} = (v_1, v_2) \rightarrow$ MODULO di $\vec{v} = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ (per il Teorema di Pitagora)

- una <u>DIREZIONE</u>: quella della retta su cui poggia il vettore
- un <u>VERSO</u>: quello indicato dalla freccia

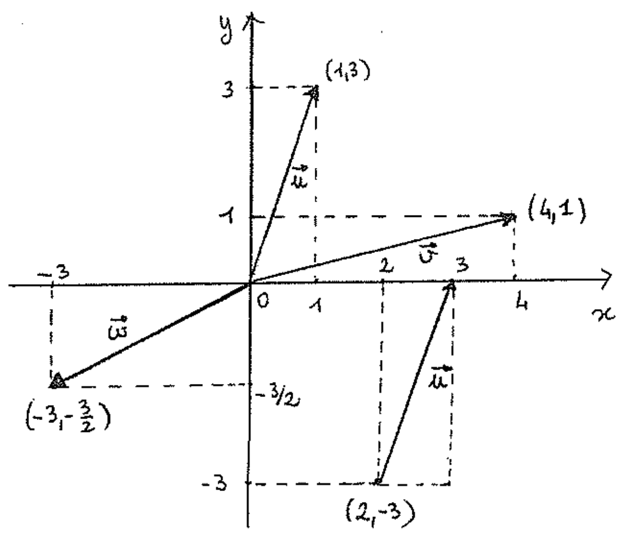
Di solito un vettore si disegna con origine in (0,0) e estremo nel punto indicato dalle sue componenti. Tuttavia lo stesso vettore si può disegnare scegliendo l'origine come si vuole e rappresenta sempre lo stesso vettore.

Vedremo che ci sono situazioni, come quando si rappresenta una forza o un vettore tangente, nelle quali un vettore deve avere l'origine posizionata nel punto preciso di applicazione. Si parla allora di VETTORI APPLICATI (a pag. 20).

<u>OSS.</u> Il vettore nullo è quel vettore in cui origine e estremo coincidono (la direzione e il verso del vettore nullo sono indeterminati e il suo modulo è 0).

<u>ESEMPIO</u> Disegnare i tre vettori $\vec{u} = (1,3)$, $\vec{v} = (4,1)$, $\vec{w} = (-3, -\frac{3}{2})$

Poi disegnare il vettore $\vec{u}$ con origine nel punto $(2,-3)$.

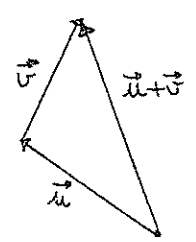


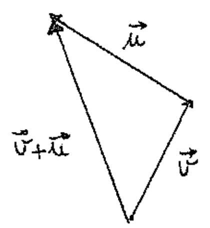
OPERAZIONI SUI VETTORI

I vettori sono l'oggetto del cosiddetto CALCOLO VETTORIALE, così come i numeri sono l'oggetto dell'aritmetica.
Il calcolo vettoriale effettua certe operazioni sui vettori. Queste operazioni sono la traduzione matematica di determinate operazioni che si incontrano concretamente in fisica quando si lavora con le grandezze vettoriali (ad esempio per sommare o sottrarre delle forze, sommare degli spostamenti, calcolare un momento o la componente di una forza che lavora).

1) **SOMMA di due vettori**

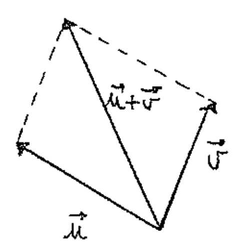
(con la regola del triangolo) Dati due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ il VETTORE SOMMA $\vec{u}+\vec{v}$ è il vettore che congiunge l'origine di $\vec{u}$ con l'estremo di $\vec{v}$, dopo aver applicato il vettore $\vec{v}$ nell'estremo del vettore $\vec{u}$





Si ottiene lo stesso vettore calcolando $\vec{v}+\vec{u}$ (la somma è commutativa)

(con la regola del parallelogramma) Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se tali vettori sono ridotti alla stessa origine e se su questi vettori è costruito un parallelogramma, il vettore somma $\vec{u}+\vec{v}$ (oppure $\vec{v}+\vec{u}$) è la diagonale di questo parallelogramma che parte dall'origine comune di $\vec{u}$ e $\vec{v}$



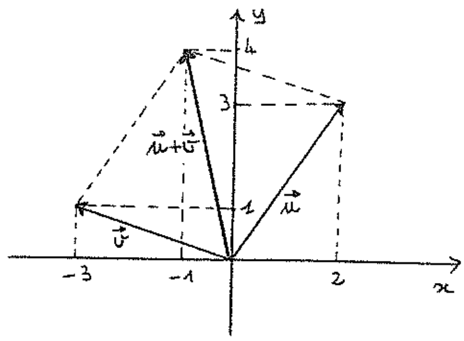
(per componenti) Si dimostra che il VETTORE SOMMA $\vec{u}+\vec{v}$ è il vettore che ha per componenti la somma delle corrispondenti componenti dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{u}=(u_1,u_2) \qquad \vec{v}=(v_1,v_2)$$

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2).$$

ESEMPIO Dati i due vettori $\vec{u}=(2,3)$ e $\vec{v}=(-3,1)$ calcolate e disegnate il vettore $\vec{u}+\vec{v}$

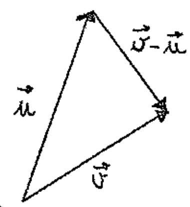
$\vec{u}+\vec{v}=(2-3,\ 3+1)=(-1,4)$



2) DIFFERENZA di due vettori

Come in aritmetica, la differenza è l'inverso della somma.
Dati due vettori $\vec{u}, \vec{v}$, il VETTORE DIFFERENZA $\vec{v}-\vec{u}$ è il vettore che aggiunto al vettore $\vec{u}$ dà il vettore $\vec{v}$.

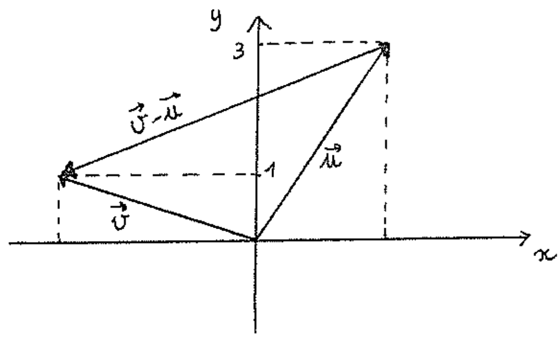
Applicati $\vec{u}$ e $\vec{v}$ con origine comune, il vettore che va aggiunto ad $\vec{u}$ per ottenere $\vec{v}$ (secondo la regola del triangolo) è il vettore che ha come origine l'estremo di $\vec{u}$ e come estremo l'estremo di $\vec{v}$.



(per componenti) Si dimostra che $\vec{v}-\vec{u}=(v_1-u_1,\ v_2-u_2)$.

ESEMPIO Dati i due vettori $\vec{u}=(2,3)$ e $\vec{v}=(-3,1)$ calcolate e disegnate il vettore $\vec{v}-\vec{u}$

$\vec{v}-\vec{u}=(-3-2,\ 1-3)=(-5,-2)$



3) $\boxed{\text{MOLTIPLICAZIONE di un vettore per un numero}}$

Dato un vettore $\vec{v}$ e un numero $\lambda \in \mathbb{R}$, il prodotto del vettore $\vec{v}$ per il numero λ è il <u>VETTORE $\lambda\vec{v}$</u> tale che:

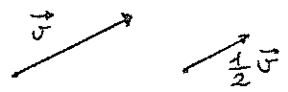
- $\lambda\vec{v}$ ha la stessa direzione di $\vec{v}$
- $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$ ($|\lambda|$ = valore assoluto del numero λ)
- $\lambda\vec{v}$ ha lo stesso verso di $\vec{v}$ se $\lambda > 0$ e verso opposto se $\lambda < 0$.

OSSERVAZIONE 1 - Se $\lambda = 0$ si ottiene il vettore nullo.

OSSERVAZIONE 2 - Il vettore $2\vec{v}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$, ma è lungo il doppio

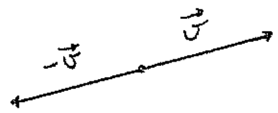
,

il vettore $\frac{1}{2}\vec{v}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$, ma è lungo la metà



,

il vettore $-\vec{v}$ ha la stessa direzione di $\vec{v}$, verso opposto ed è lungo uguale



Il vettore $-\vec{v}$ si dice VETTORE OPPOSTO di $\vec{v}$

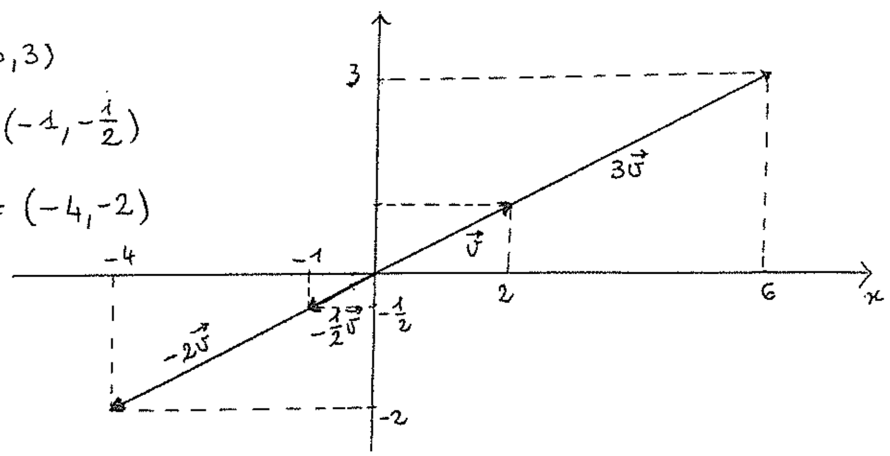
(<u>per componenti</u>) $\lambda\vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2)$

<u>ESEMPIO</u> Dato il vettore $\vec{v} = (2,1)$ disegnate e calcolate i vettori $3\vec{v}$, $-\frac{1}{2}\vec{v}$, $-2\vec{v}$

$3\vec{v} = (3\cdot 2, 3\cdot 1) = (6,3)$

$-\frac{1}{2}\vec{v} = (-\frac{1}{2}\cdot 2, -\frac{1}{2}\cdot 1) = (-1, -\frac{1}{2})$

$-2\vec{v} = (-2\cdot 2, -2\cdot 1) = (-4,-2)$



CALCOLO del MODULO di un vettore

ESEMPIO: Calcolate il modulo dei vettori $\vec{u}=(3,4)$ e $\vec{v}=(12,-5)$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13.$$

VERSORE

Si dice VERSORE un vettore avente modulo unitario, cioè $\vec{v}$ è un versore se $\|\vec{v}\|=1$.

Dato un vettore $\vec{v}$ è possibile costruire un VERSORE avente la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$; si tratta di moltiplicare $\vec{v}$ per un numero >0 in modo da farlo diventare lungo 1.

Poichè $\underset{\text{con } \lambda>0}{\|\lambda\vec{v}\|}=\sqrt{(\lambda v_1)^2+(\lambda v_2)^2}=\sqrt{\lambda^2(v_1^2+v_2^2)}=\lambda\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\lambda\|\vec{v}\|=1$,

allora $\lambda=\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}$.

Quindi dato un vettore $\vec{v}$ il VERSORE corrispondente è $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$,

in componenti $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\left(\dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}},\dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\right)$.

ESEMPIO

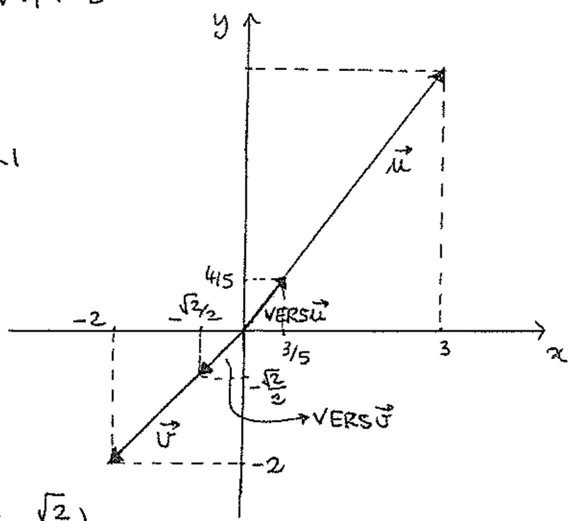
Calcolate e disegnate i VERSORI corrispondenti ai vettori

$\vec{u}=(3,4)$ e $\vec{v}=(-2,-2)$

$\|\vec{u}\|=5$ $\quad$ VERS $\vec{u}=\frac{1}{5}(3,4)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

VERS $\vec{v}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(-2,-2)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

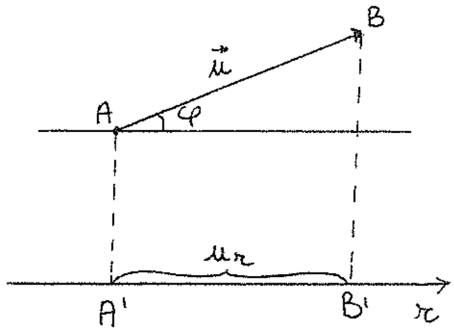


COMPONENTE DI UN VETTORE SECONDO UNA RETTA ORIENTATA

Siano dati una retta r orientata ed un vettore $\vec{u}$, che disegneremo per chiarezza chiamando A l'origine e B l'estremo.

Per COMPONENTE DEL VETTORE $\vec{u}$ secondo la retta orientata r si intende la PROIEZIONE con segno del vettore sulla retta.

La componente di $\vec{u}$ secondo la retta r si indica con u_r ed è un numero che <u>può essere sia positivo, sia negativo.</u>

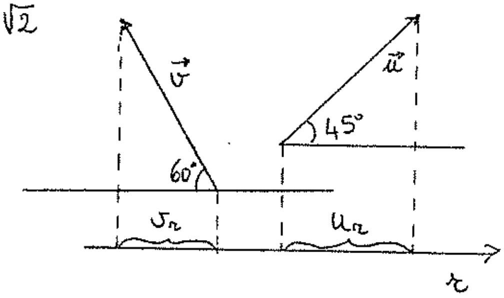


A' e B' sono le proiezioni su r dei punti A e B

Se φ è l'angolo tra le due direzioni orientate si può scrivere:

$$u_r = \|\vec{u}\| \cdot \cos\varphi \ .$$

ESEMPI. Calcolate la componente secondo la retta r dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nel disegno, con $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2}$
$\|\vec{v}\| = 3$

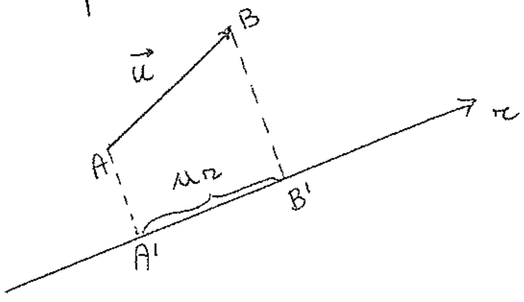


$u_r = \|\vec{u}\| \cos 45° = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

per $\vec{v}$ $\varphi = 180° - 60° = 120°$

$v_r = \|\vec{v}\| \cos 120° = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

<u>OSS.</u> 1) La retta r può trovarsi nel piano in qualunque posizione

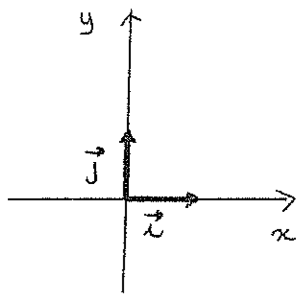


2) È chiaro che affinchè si annulli la componente di $\vec{u}$ secondo la retta orientata r, $\vec{u}$ deve essere il vettore nullo, oppure essere un vettore perpendicolare alla retta r...

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI

Prendiamo due vettori speciali nel piano : $\vec{i}=(1,0), \vec{j}=(0,1)$.

Si tratta in realtà di due VERSORI aventi :



$\vec{i}$ la direzione dell'asse x, verso positivo

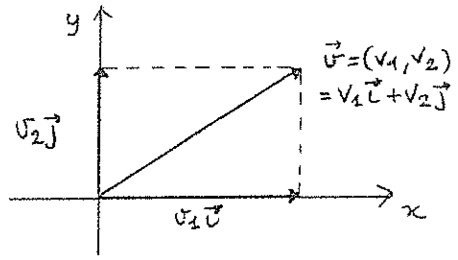
$\vec{j}$ la direzione dell'asse y, verso positivo

Utilizzando questi due VERSORI, OGNI VETTORE $\vec{v}$ del piano di componenti (v_1, v_2) si può scrivere

$$\boxed{\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}}$$

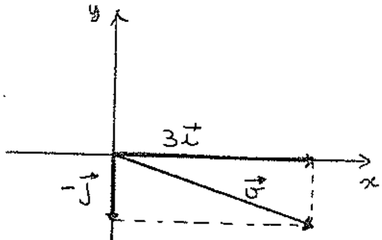
cioè come somma di due vettori, uno nella direzione dell'asse x e uno nella direzione dell'asse y.

Più precisamente $v_1\vec{i}$ è il vettore che si ottiene proiettando il vettore $\vec{v}$ sull'asse x, mentre $v_2\vec{j}$ si ottiene proiettando $\vec{v}$ sull'asse y.
Per la regola del parallelogramma sommando questi due vettori si ottiene esattamente $\vec{v}$.



ESEMPIO

Il vettore $\vec{v}=(3,-1)$ si può scrivere
$\vec{v}=3\vec{i}+(-\vec{j})=3\vec{i}-\vec{j}$
dove $3\vec{i}$ è un vettore lungo 3 nella direzione positiva dell'asse x, mentre $-\vec{j}$ è un vettore lungo 1 nella direzione negativa dell'asse y



PER LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMO LA SOMMA DEI DUE VETTORI $3\vec{i}$ e $-\vec{j}$ dà propio il vettore $\vec{v}$

I due vettori $3\vec{i}$ e $-\vec{j}$ sono i vettori che si ottengono proiettando il vettore $\vec{v}$ sugli assi x e y rispettivamente.

IMPORTANTE Con questa notazione tutte le operazioni sui vettori (somma, differenza, moltiplicazione per un numero) si possono eseguire come dei semplici calcoli aritmetici.

ESEMPI a) somma dei due vettori $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ e $\vec{v}=-3\vec{i}+\vec{j}$:

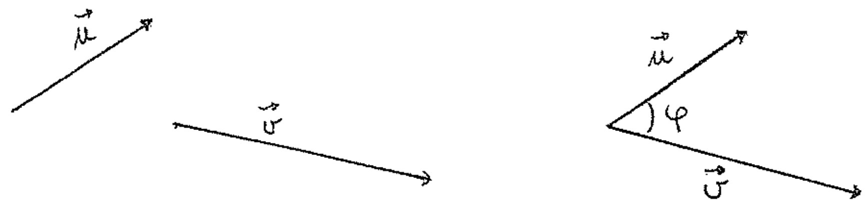
$$\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+(-3\vec{i})+\vec{j}=-\vec{i}+4\vec{j}$$

b) differenza $\vec{v}-\vec{u}=(-3\vec{i})+\vec{j}-(2\vec{i}+3\vec{j})=-3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{i}-3\vec{j}=-5\vec{i}-2\vec{j}$

c) moltiplicazione di $\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}$ per $\lambda=2$ $\quad \lambda\vec{w}=2(2\vec{i}+\vec{j})=4\vec{i}+2\vec{j}$

PRODOTTO SCALARE di due vettori

Si definisce <u>PRODOTTO SCALARE</u> di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (si indica con $\vec{u} \times \vec{v}$ oppure $\vec{u} \cdot \vec{v}$ oppure $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e si legge $\vec{u}$ scalar $\vec{v}$) l'operazione che associa ai due vettori il numero reale $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$, dove φ è l'angolo fra le direzioni orientate di $\vec{u}$ e $\vec{v}$

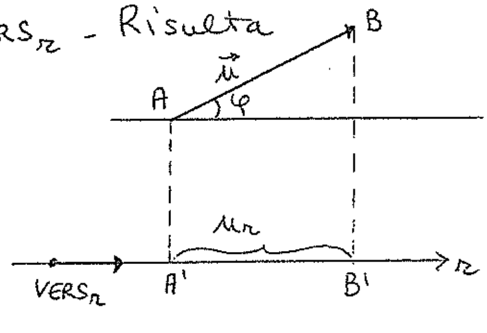


$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi}$$

<u>OSS.</u> 1) Il prodotto scalare si annulla se e solo se uno almeno dei due vettori è il vettore nullo oppure se i due vettori sono ortogonali fra loro ($\cos\frac{\pi}{2} = 0$).

2) Si può calcolare la componente di un vettore $\vec{u}$ secondo la retta orientata r utilizzando il prodotto scalare.
Dato un vettore $\vec{u}$ ed una retta orientata si consideri il versore della retta r, cioè un vettore di lunghezza 1 avente la stessa direzione e verso della retta r.
Indichiamo tale versore con $VERS_r$. Risulta

$$\vec{u} \times VERS_r = \|\vec{u}\| \cdot \overbrace{\|VERS_r\|}^{=1} \cdot \cos\varphi =$$
$$= \|\vec{u}\| \cdot \cos\varphi = u_r$$



Quindi la componente del vettore $\vec{u}$ secondo la retta orientata r si può calcolare tramite il prodotto scalare del vettore $\vec{u}$ e del versore della retta r :

$$u_r = \vec{u} \times VERS_r \text{ -}$$

Questa formula è molto utile perchè vedremo che il prodotto scalare di due vettori si calcola molto facil= mente utilizzando le componenti dei due vettori, evitando così di dover determinare l'angolo φ e il suo coseno.

3) L'origine del concetto di prodotto scalare è da cercare in meccanica - In effetti se il vettore $\vec{u}$ rappresenta una forza il cui punto di applicazione si sposta dall'origine all'estremo di un vettore $\vec{v}$, il LAVORO W di questa forza è dato da $W = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$ -

$\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE di due Vettori PER COMPONENTI}}$

Consideriamo due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ di componenti $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ - Allora possiamo scrivere $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ -

Con questa notazione abbiamo visto che possiamo svolgere i calcoli di somma, sottrazione e moltiplica= zione per un numero come normali calcoli aritmetici.

Si dimostra anche che per il prodotto scalare valgono certe proprietà della moltiplicazione :

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$
- $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

Allora

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) =$$

$$= u_1\vec{i} \times v_1\vec{i} + \underbrace{u_1\vec{i} \times v_2\vec{j}}_{=0} + \underbrace{u_2\vec{j} \times v_1\vec{i}}_{=0} + u_2\vec{j} \times v_2\vec{j} =$$

perchè i due vettori
sono ortogonali fra loro

$$= u_1 \cdot v_1 \underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_{=1} + u_2 \cdot v_2 \underbrace{\vec{j} \times \vec{j}}_{=1}$$

perchè $\vec{i} \times \vec{i} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{j} \times \vec{j} = \|\vec{j}\| \cdot \|\vec{j}\| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Quindi

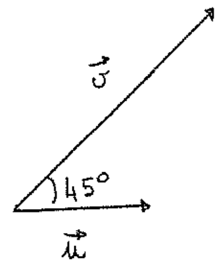
$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}$$

e si dice che il prodotto scalare si ottiene come somma del prodotto delle componenti omologhe.

ESEMPI 1) Calcolate il prodotto scalare dei due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ in figura utilizzando la definizione. Poi calcolate le componenti dei due vettori e ricalcolate il prodotto scalare per componenti

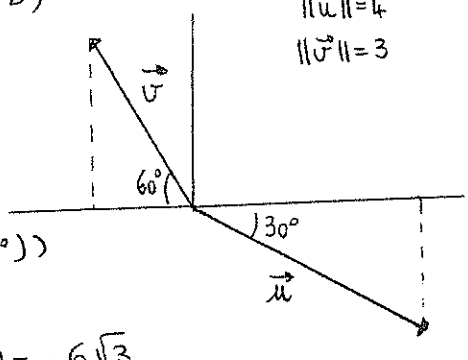
a)

$\|\vec{u}\| = 2$
$\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$



b)

$\|\vec{u}\| = 4$
$\|\vec{v}\| = 3$



a) $\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 45° =$

$= \cancel{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 3 \cdot 2 = 6$

$\vec{u} = (2, 0)$ $\quad \vec{v} = (3, 3)$ $\quad (\vec{v} = (3\cos 45°, 3\,\text{sen}\,45°))$

$\vec{u} \times \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 6$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 150° = 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6\sqrt{3}$

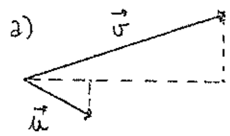
$\vec{u} = (2\sqrt{3}, -2)$ $\quad \vec{v} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ $\quad (\vec{u} = (4\cos(-30°), 4\,\text{sen}(-30°)), \vec{v} = (3\cos(120°), 3\,\text{sen}(120°)))$

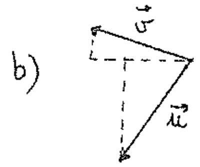
$\vec{u} \times \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} = -3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -6\sqrt{3}.$

2) Calcolate il prodotto scalare delle seguenti coppie di vettori

a) $\vec{u} = (2,-1) \quad \vec{v} = (6,2)$

b) $\vec{u} = (-2,-3) \quad \vec{v} = (-3,1)$





a) $\vec{u} \times \vec{v} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 2 = 12 - 2 = 10$

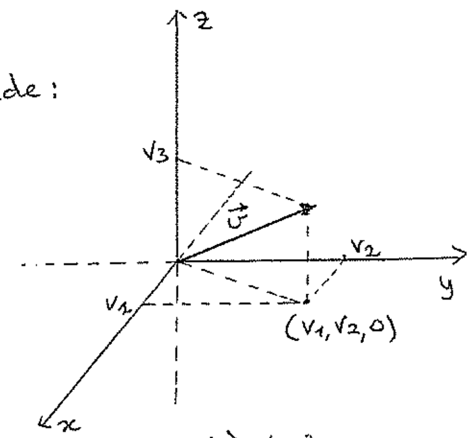
b) $\vec{u} \times \vec{v} = (-2) \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 = 6 - 3 = 3$

Tutto quanto detto finora si può ripetere per un

<u>VETTORE $\vec{v}$ NELLO SPAZIO</u>.

Consideriamo nello spazio un sistema di coordinate cartesiane (x,y,z) di origine O con gli assi orientati secondo la regola della mano destra.

Un $\boxed{\text{VETTORE nello SPAZIO}}$ è un segmento orientato nello spazio, con la convenzione di considerare equivalenti tra loro tutti i segmenti orientati aventi gli stessi lunghezza direzione e verso e di rappresentarli utilizzando lo stesso vettore.



Dato un <u>vettore $\vec{v}$ nello spazio</u> esso possiede:

- 3 COMPONENTI $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ che sono le coordinate dell'estremo del vettore rispetto all'origine del vettore.

<u>OSS.</u> Se l'origine si colloca in O (origine del sistema di riferimento) le componenti del vettore sono le coordinate cartesiane dell'estremo del vettore)

- il MODULO $= \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$
- una DIREZIONE
- un VERSO

Si possono effettuare le operazioni:

- SOMMA di due VETTORI $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

  $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3)$

- DIFFERENZA di due VETTORI

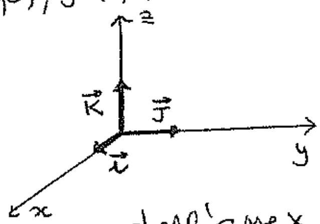
  $\vec{v}-\vec{u}=(v_1-u_1,\ v_2-u_2,\ v_3-u_3)$

- MOLTIPLICAZIONE di un vettore per un numero λ

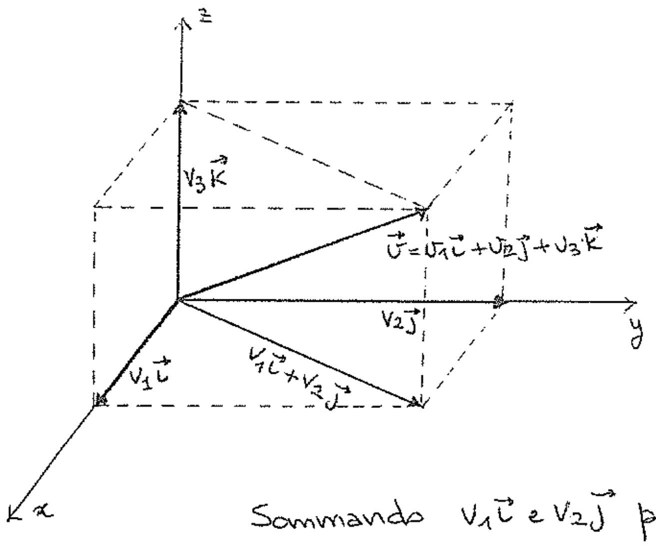
  $\lambda\vec{v}=(\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$

Il significato di queste operazioni rimane esattamente lo stesso (regola del triangolo, regola del parallelogramma, costruzione del vettore differenza, opposto di un vettore) solo che i vettori sono posizionati nello spazio.

Introdotti i VERSORI $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ degli assi x,y,z del sistema di coordinate (che sono i vettori speciali $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$), ogni vettore $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ si può scrivere $\boxed{\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}}$



cioè come somma di tre vettori, uno nella direzione dell'asse x, uno nella direzione dell'asse y e uno nella direzione dell'asse z.
I tre vettori $v_1\vec{i}$, $v_2\vec{j}$, $v_3\vec{k}$ sono i vettori che si ottengono proiettando il vettore $\vec{v}$ sugli assi x,y,z rispettivamente.



Sommando $V_1\vec{i}$ e $V_2\vec{j}$ per la regola del parallelogrammo si trova il vettore $V_1\vec{i}+V_2\vec{j}$ posizionato sul piano (x,y). Aggiungendo a questo vettore anche il vettore $V_3\vec{k}$, sempre per la regola del parallelogrammo (costruito sui due vettori $V_1\vec{i}+V_2\vec{j}$ e $V_3\vec{k}$) si ritrova esattamente $\vec{v}$.

Con la notazione $\vec{v}=V_1\vec{i}+V_2\vec{j}+V_3\vec{k}$ le operazioni di somma e differenza di vettori e di moltiplicazione di un vettore per un numero si possono eseguire utilizzando le regole dell'addizione, della sottrazione e della moltiplicazione.

PRODOTTO SCALARE di due VETTORI nello SPAZIO

Risulta sempre

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\varphi}$$

solo che i due vettori sono posizionati nello spazio. Una volta ridotti alla stessa origine i due vettori poggiano su un piano sul quale si individuano le direzioni orientate di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e l'angolo fra esse compreso.

In COMPONENTI $\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}$

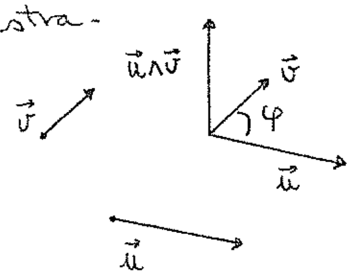
ottenuto sempre come somma del prodotto delle componenti omologhe.

PRODOTTO VETTORIALE di due Vettori

Si definisce <u>PRODOTTO VETTORIALE</u> di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (si indica $\vec{u}\wedge\vec{v}$ e si legge $\vec{u}$ VETTOR $\vec{v}$), l'operazione che associa ai due vettori un terzo vettore

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} = (\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot \operatorname{sen}\varphi)\,\vec{n}}$$

dove $\vec{n}$ è un versore ortogonale sia ad $\vec{u}$ che a $\vec{v}$ e il cui verso rispetta la regola della mano destra.



Il vettore $\vec{u}\wedge\vec{v}$ possiede:

- <u>MODULO</u> $= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\operatorname{sen}\varphi$
  (l'angolo tra due vettori è $0 \le \varphi \le \pi$, quindi $\operatorname{sen}\varphi \ge 0$)
- <u>DIREZIONE</u> PERPENDICOLARE al piano contenente $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- <u>ORIENTAZIONE</u>: i tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v}$ sono orientati come i tre assi cartesiani x, y, z.

<u>OSS.</u> 1) Il prodotto vettoriale si annulla se e solo se uno almeno dei due vettori è nullo oppure se i due vettori sono paralleli tra loro ($\operatorname{sen}0 = \operatorname{sen}\pi = 0$).

2) La nozione di prodotto vettoriale ha origine dalla meccanica. Più precisamente se il vettore $\vec{v}$ rappresenta una forza applicata in un certo punto M e se il vettore $\vec{u}$ ha origine in un punto O e estremo in M, allora il vettore $\vec{u}\wedge\vec{v}$ rappresenta il MOMENTO della FORZA $\vec{v}$ rispetto al punto O.

PRODOTTO VETTORIALE per COMPONENTI

Consideriamo due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ di componenti

$\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ - Allora possiamo scrivere

$\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$, $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$.

Si dimostra che anche per il prodotto vettoriale valgono alcune proprietà della moltiplicazione:

• $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{v}=\lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})$ • $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v})+(\vec{u}\wedge\vec{w})$ -

Ovviamente non vale la proprietà commutativa (che vale invece per il prodotto scalare) perchè $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$ in quanto si ottiene un vettore avente lo stesso modulo e la stessa direzione, ma verso opposto -

Allora $\vec{u}\wedge\vec{v}=(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k})\wedge(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})=$

$$=(u_1\vec{i})\underset{\odot}{\wedge}(v_1\vec{i})+(u_1\vec{i})\wedge(v_2\vec{j})+(u_1\vec{i})\wedge(v_3\vec{k})+$$

$$+(u_2\vec{j})\wedge(v_1\vec{i})+(u_2\vec{j})\underset{\odot}{\wedge}(v_2\vec{j})+(u_2\vec{j})\wedge(v_3\vec{k})+$$

$$+(u_3\vec{k})\wedge(v_1\vec{i})+(u_3\vec{k})\wedge(v_2\vec{j})+(u_3\vec{k})\underset{\odot}{\wedge}(v_3\vec{k})=$$

i tre prodotti $\odot$ si annullano perchè i due vettori sono paralleli tra loro

$$=u_1v_2\,\vec{i}\wedge\vec{j}+u_1v_3\,\vec{i}\wedge\vec{k}+u_2v_1\,\vec{j}\wedge\vec{i}+u_2v_3\,\vec{j}\wedge\vec{k}$$

$$+u_3v_1\,\vec{k}\wedge\vec{i}+u_3v_2\,\vec{k}\wedge\vec{j}$$

utilizzando $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$ $\left(\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\,\|\vec{i}\|\cdot\|\vec{j}\|\,\text{sen}(\overset{\pi/2}{\widehat{\vec{i},\vec{j}}})=\vec{k}\right)$
$\vec{k}$ è il versore $\vec{n}$

$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$, da cui

$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$ e $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$ si ottiene

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} =} \; u_1 v_2 \vec{K} - u_1 v_3 \vec{J} - u_2 v_1 \vec{K} + u_2 v_3 \vec{\imath} + u_3 v_1 \vec{J} - u_3 v_2 \vec{\imath} =$$

$$\boxed{= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,\vec{\imath} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\,\vec{J} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\vec{K}}$$

OSS. 1) Nel caso in cui i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ siano posizionati sul piano (x,y), cioè abbiano componenti $\vec{u}=(u_1,u_2,0)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,0)$, il prodotto esterno risulta essere un VETTORE avente la direzione dell'asse z dato da

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\vec{K}$$

2) Si può calcolare il prodotto esterno per componenti calcolando un determinante simbolico, sviluppato (con la regola di Laplace) secondo gli elementi della prima riga:

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{J} & \vec{K} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{J} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{K}$$

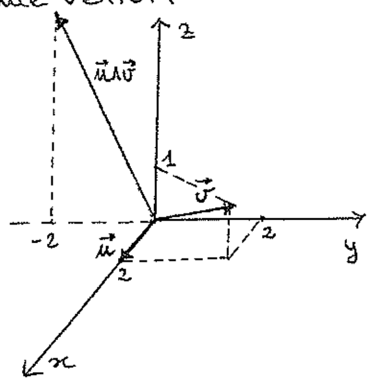
che coincide con quanto ottenuto all'inizio della pagina.

ESEMPIO - Calcolare il prodotto esterno dei due vettori

$\vec{u}=(2,0,0)$ $\quad \vec{v}=(2,2,1)$

$\vec{u}\wedge\vec{v} = (-u_1 v_3)\,\vec{J} + (u_1 v_2)\,\vec{K} = -2\vec{J} + 4\vec{K}$

$(\vec{u}=2\vec{\imath},\ \vec{v}=2\vec{\imath}+2\vec{J}+\vec{K}\ )$

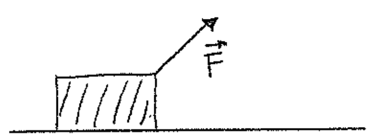


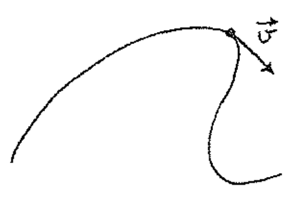
VETTORI APPLICATI

Nelle applicazioni succede spesso che la posizione del vettore che si sta utilizzando non sia libera, ma che l'origine del vettore vada posta in un preciso PUNTO di APPLICAZIONE.
Si parla di <u>VETTORE APPLICATO</u> quando si considera un VETTORE (dotato di modulo, direzione e verso) con il suo PUNTO DI APPLICAZIONE.

Abbiamo bisogno di ricorrere ai vettori applicati, ad esempio:

- PER RAPPRESENTARE LE FORZE
  In questo caso il vettore rappresenta una FORZA che esercita la sua azione su un corpo e tale forza è applicata in un punto preciso del corpo.
- PER RAPPRESENTARE IL VETTORE TANGENTE, LA VELOCITÀ o L'ACCELERAZIONE DI UN PUNTO CHE SI MUOVE NEL PIANO O NELLO SPAZIO
  In questo caso il vettore rappresenta ad esempio la velocità di un punto in un dato istante di tempo in cui il punto occupa una precisa posizione nel piano o nello spazio.
  Le informazioni fornite dal vettore (su direzione, verso e intensità della velocità) sono relative a quella posizione e a quell'istante, pertanto il vettore va rappresentato applicato esattamente in quel punto della traiettoria.





ESERCIZI

1) Disegnate i VETTORI $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ $\quad \vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j}$
$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ $\quad \vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{i} - 3\vec{j}$

Poi disegnate il vettore $\vec{v}$ con origine in $(-1,2)$ e il vettore $\vec{b}$ con origine in $(0,3)$.

2) Disegnate i VETTORI $\vec{u} = \vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$ $\quad \vec{v} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$
$\vec{a} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$ $\quad \vec{b} = +5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Poi disegnate il vettore $\vec{a}$ con origine in $(0,0,3)$ e il vettore $\vec{e} = -4\vec{j} + 2\vec{k}$ con origine in $(0,0,-2)$

3) Calcolate, utilizzando i vettori dell'esercizio 1), i vettori
$\vec{u} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{v}$, $\vec{a} - \vec{u}$, $\vec{v} - \vec{b}$, $\frac{3}{4}\vec{u}$, $-3\vec{v}$, $2\vec{b}$, $-\vec{a}$

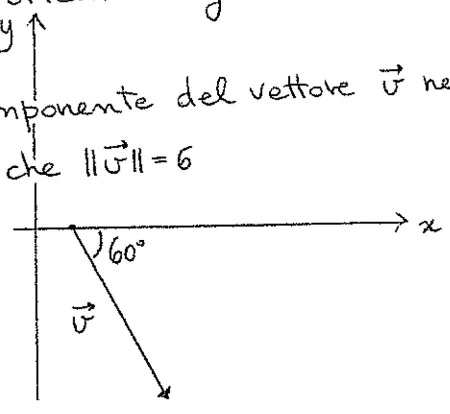
4) Calcolate, utilizzando i vettori dell'esercizio 2), i vettori
$\vec{u} + \vec{a}$, $\vec{v} + \vec{b}$, $\vec{u} - \vec{a}$, $\vec{v} - \vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$, $\frac{2}{3}\vec{v}$, $-\vec{b}$

5) Calcolate il MODULO e il VERSORE dei seguenti vettori
$\vec{u} = -\frac{3}{4}\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}$, $\vec{a} = 2\vec{i} - \frac{5}{6}\vec{j}$, $\vec{b} = -\frac{5}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\sqrt{3}\,\vec{j}$
$\vec{w} = \frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{i} - \frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{j}$ e anche del vettore $\vec{b}$ dell'es. 1)

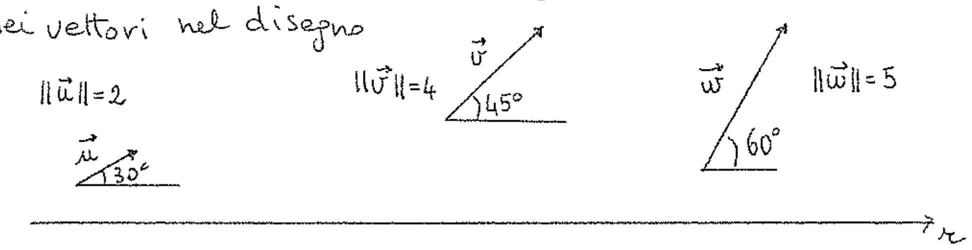
6) Calcolate il MODULO e il VERSORE dei vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{b}$ dell'es 2).

7) Calcolate la componente dei vettori $\vec{u} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{j}$ secondo la retta orientata $y = x$ (orientata da sinistra verso destra).

8) Calcolate la componente del vettore $\vec{v}$ nel disegno secondo l'asse x e secondo l'asse y sapendo che $\|\vec{v}\| = 6$



9) Calcolate la componente lungo la retta orientata r dei vettori nel disegno



10) Calcolate, utilizzando i vettori dell'esercizio 1), i prodotti scalari: $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{u}\times\vec{a}$, $\vec{u}\times\vec{b}$, $\vec{v}\times\vec{v}$.

Spiegate il risultato ottenuto per $\vec{u}\times\vec{a}$ e $\vec{v}\times\vec{v}$.

11) Calcolate, utilizzando i vettori dell'esercizio 2), i prodotti scalari $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{u}\times\vec{b}$, $\vec{v}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times(7\vec{i}+\vec{j})$, $(2\vec{i}+2\vec{j})\times(2\vec{j}+2\vec{k})$

12) Ripetete l'esercizio 7) calcolando il VERSORE della retta $y=x$ e calcolando la componente attraverso il prodotto scalare.

13) Calcolate i seguenti PRODOTTI VETTORIALI

$\vec{u}=3\vec{i}-\vec{j}$ $\quad\vec{v}=-3\vec{j}$ $\quad\vec{u}\wedge\vec{v}$

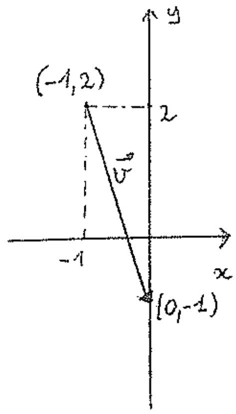
$\vec{u}=-4\vec{i}$ $\quad\vec{v}=\vec{i}+2\vec{k}$ $\quad\vec{u}\wedge\vec{v}$

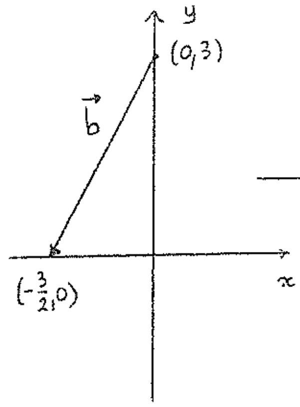
$\vec{u}=\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ $\quad\vec{u}\wedge\vec{k}$

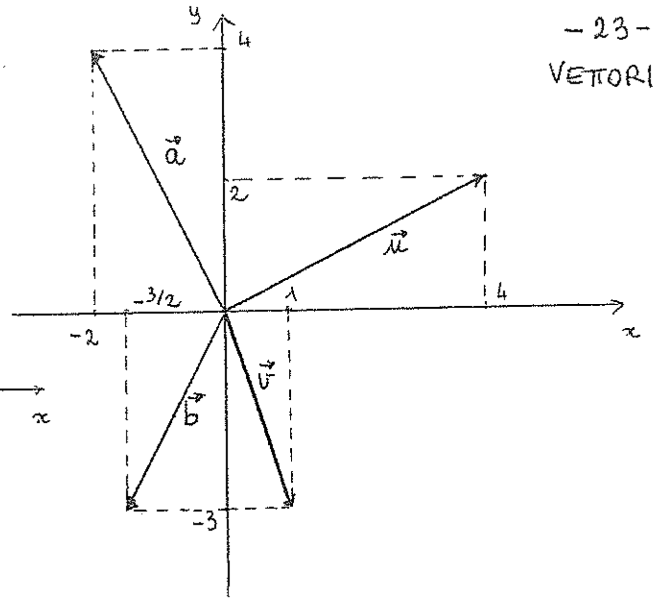
$\vec{v}=-2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ $\quad\vec{b}=5\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ $\quad\vec{v}\wedge\vec{b}$

SOLUZIONE ESERCIZI

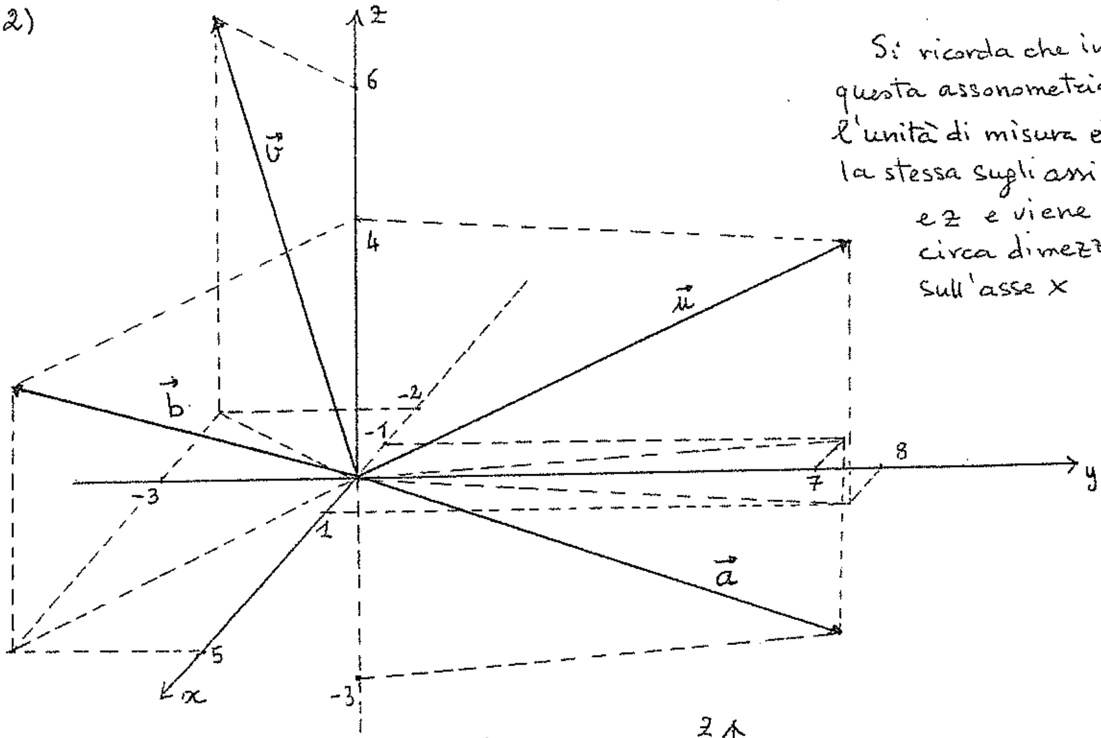
1)





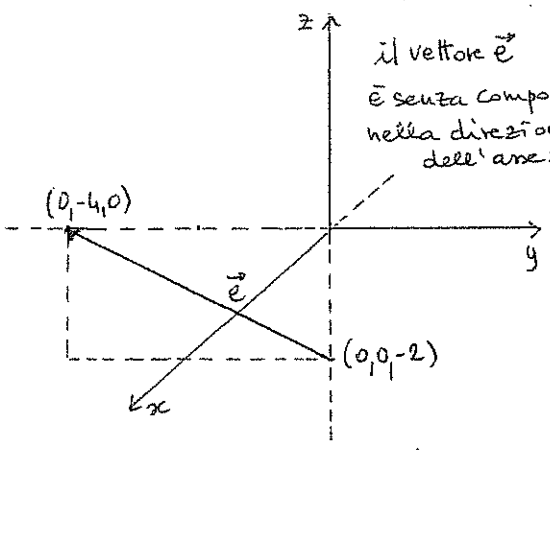


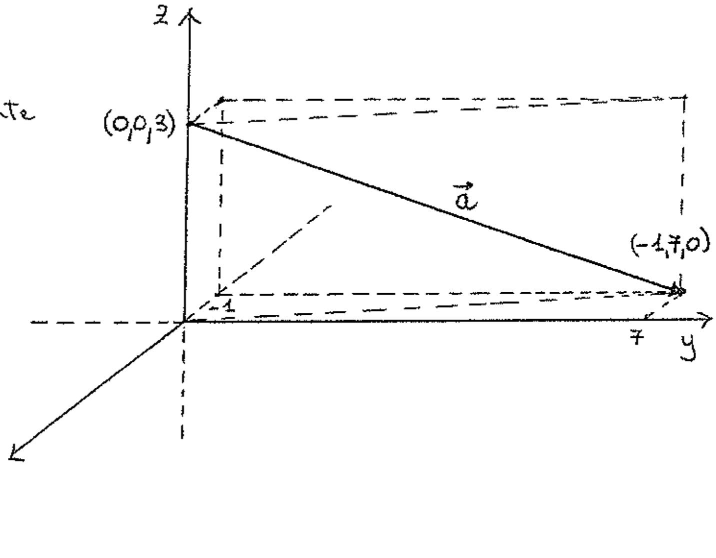
2)



Si ricorda che in questa assonometria l'unità di misura è la stessa sugli assi y e z e viene circa dimezzata sull'asse x

il vettore $\vec{e}$ è senza componente nella direzione dell'asse x





3) $\vec{u}+\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\frac{3}{2}\vec{i}-3\vec{j}=\frac{5}{2}\vec{i}-\vec{j}$

$\vec{a}+\vec{v}=-2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{i}-3\vec{j}=-\vec{i}+\vec{j}$

$\vec{a}-\vec{u}=-2\vec{i}+4\vec{j}-(4\vec{i}+2\vec{j})=-2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{i}-2\vec{j}=-6\vec{i}+2\vec{j}$

$\vec{v}-\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}-(-\frac{3}{2}\vec{i}-3\vec{j})=\vec{i}-3\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{i}+3\vec{j}=\frac{5}{2}\vec{i}$

$\frac{3}{4}\vec{u}=\frac{3}{4}(4\vec{i}+2\vec{j})=3\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}$

$-3\vec{v}=-3(\vec{i}-3\vec{j})=-3\vec{i}+9\vec{j}$

$2\vec{b}=2(-\frac{3}{2}\vec{i}-3\vec{j})=-3\vec{i}-6\vec{j}$

$-\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}$ (vettore opposto di $\vec{a}$)

4) $\vec{u}+\vec{a}=\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}+(-\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k})=15\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{v}+\vec{b}=-2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}+(5\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})=3\vec{i}-6\vec{j}+10\vec{k}$

$\vec{u}-\vec{a}=\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}-(-\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k})=\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}+\vec{i}-7\vec{j}+3\vec{k}=$
$=2\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$

$\vec{v}-\vec{b}=-2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}-(5\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})=$
$=-2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}-5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}=-7\vec{i}+2\vec{k}$

$\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{1}{2}(\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k})=\frac{1}{2}\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

$\frac{2}{3}\vec{v}=\frac{2}{3}(-2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k})=-\frac{4}{3}\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$

$-\vec{b}=-5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$

5) $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-\frac{3}{4})^2+1^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+1}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

$VERS_{\vec{u}}=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}=\frac{4}{5}(-\frac{3}{4}\vec{i}+\vec{j})=-\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$ (in componenti $VERS_{\vec{u}}=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$)

$\|\vec{v}\|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$

$VERS\,\vec{v}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{j})=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ $\left(=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{13}{6}$$

$$\text{VERS}\,\vec{a} = \frac{6}{13}\left(2\vec{i} - \frac{5}{6}\vec{j}\right) = \frac{12}{13}\vec{i} - \frac{5}{13}\vec{j} \qquad \left(= \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)\right)$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{VERS}\,\vec{b} = \frac{1}{5}\left(-\frac{5}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\sqrt{3}\,\vec{j}\right) = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \qquad \left(= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{8} + \frac{25}{8}} = \sqrt{\frac{50}{8}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{VERS}\,\vec{w} = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{i} - \frac{5}{4}\sqrt{2}\,\vec{j}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \qquad \left(= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{\sqrt{9 \cdot 5}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

$$\text{VERS}\,\vec{b} = \frac{2}{3\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{2}\vec{i} - 3\vec{j}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} - \frac{2}{5}\sqrt{5}\,\vec{j} \qquad \left(= \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)\right)$$

$$\left(\text{oppure } = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right)$$

6) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 64 + 16} = \sqrt{81} = 9$

$$\text{VERS}\,\vec{u} = \frac{1}{9}\left(\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}\right) = \frac{1}{9}\vec{i} + \frac{8}{9}\vec{j} + \frac{4}{9}\vec{k}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

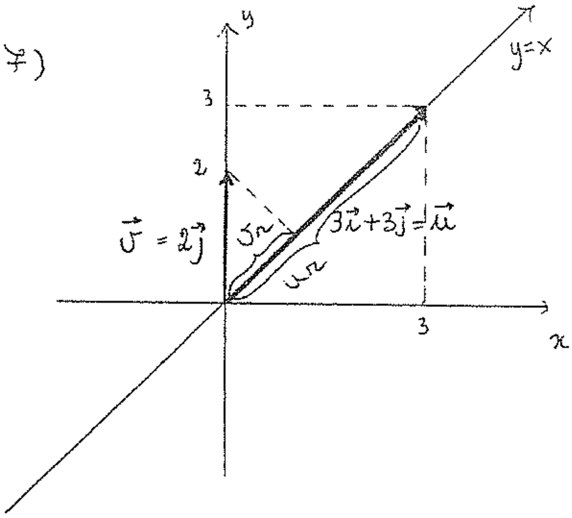
$$\text{VERS}\,\vec{v} = \frac{1}{7}\left(-2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}\right) = -\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{VERS}\,\vec{b} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{3}{5\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{4}{5\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\text{oppure } \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{3}{10}\sqrt{2}\,\vec{j} + \frac{2}{5}\sqrt{2}\,\vec{k}$$

7)



$\|\vec{u}\| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$u_r = \|\vec{u}\| \cdot \cos\varphi = 3\sqrt{2} \cdot \cos 0$

$\downarrow$

$\varphi = 0$ $\quad \boxed{u_r = 3\sqrt{2}}$

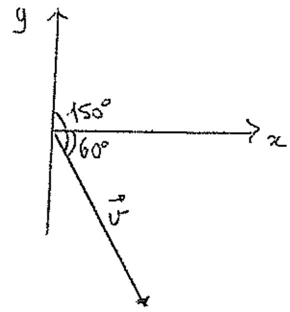
(coincide con il modulo del vettore perché la retta e il vettore sono paralleli e con lo stesso verso)

$v_r = \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi = 2 \cdot \cos 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ $\quad \boxed{v_r = \sqrt{2}}$

$\varphi = 45°$

8) $v_{\text{asse } x} = \|\vec{v}\| \cos 60° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$v_{\text{asse } y} = \|\vec{v}\| \cos 150° = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$



9) $u_r = \|\vec{u}\| \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$v_r = \|\vec{v}\| \cos 45° = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$w_r = \|\vec{w}\| \cos 60° = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

10) $\vec{u} \times \vec{v} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = \boxed{-2}$

$\vec{u} \times \vec{a} = 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = -8 + 8 = \boxed{0}$ $\quad \vec{u} \times \vec{a} = 0$ perché $\vec{u}$ e $\vec{a}$ sono perpendicolari

$\vec{u} \times \vec{b} = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 2(-3) = -6 - 6 = \boxed{-12}$

$\vec{v} \times \vec{v} = 1 \cdot 1 + (-3)(-3) = 1 + 9 = \boxed{10} = \|\vec{v}\|^2$ perché $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos 0 = \|\vec{v}\|^2$

11) $\vec{u} \times \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 8 \cdot (-3) + 4 \cdot 6 = -2 - 24 + 24 = \boxed{-2}$

$\vec{u} \times \vec{b} = 1 \cdot 5 + 8 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 = 5 - 24 + 16 = \boxed{-3}$

$\vec{v} \times \vec{b} = (-2) \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) + 6 \cdot 4 = -10 + 9 + 24 = \boxed{23}$

$\vec{a} \times (7\vec{i} + \vec{j}) = (-1)(7) + 7 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 = -7 + 7 + 0 = \boxed{0}$

(i due vettori sono perpendicolari)

$(2\vec{i}+2\vec{j})\times(2\vec{j}+2\vec{k}) = 2\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot 2 = \boxed{4}$

12) $\vec{u} = 3\vec{i}+3\vec{j} \quad \vec{v} = 2\vec{j}$

Un vettore che ha direzione e verso di $y=x$ (orientata da sinistra verso destra) è ad esempio

$\vec{e} = \vec{i}+\vec{j}$

$\|\vec{e}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$VERS_r = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$\Rightarrow \quad u_r = \vec{u} \times VERS_r = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$v_r = \vec{v} \times VERS_r = 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

13) $\vec{u} = 3\vec{i}-\vec{j} \quad \vec{v} = -3\vec{j}$ (i vettori sono da intendersi nello spazio)

$\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} =$

$= [3\cdot(-3) - (-1)\cdot 0]\vec{k} = -9\vec{k}$

$\vec{u} = -4\vec{i} \quad \vec{v} = \vec{i}+2\vec{k}$

$\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$

$= 0\cdot\vec{i} + (0\cdot 1 + 4\cdot 2)\vec{j} + ((-4)\cdot 0 - 0\cdot 1)\vec{k} = 8\vec{j}$

$\vec{u} = \vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

$\vec{u}\wedge\vec{k} = (4\cdot 1 - 2\cdot 0)\vec{i} + (2\cdot 0 - 1)\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = 4\vec{i} - \vec{j}$

(oppure $= \vec{i}\wedge\vec{k} + 4\vec{j}\wedge\vec{k} + 2\underbrace{\vec{k}\wedge\vec{k}}_{=0} = -\vec{j} + 4\vec{i} = 4\vec{i} - \vec{j}$)

$\vec{v} = -2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k} \quad \vec{b} = 5\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$

$\vec{v}\wedge\vec{b} = ((-3)\cdot 4 - 6(-3))\vec{i} + (6\cdot 5 - (-2)\cdot 4)\vec{j} + ((-2)(-3) - (-3)(5))\vec{k} =$

$= 6\vec{i} + 38\vec{j} + 21\vec{k}.$