SECONDA ESERCITAZIONE SULLE FUNZIONI DI 2 VARIABILI

In questa esercitazione ci occuperemo delle più importanti funzioni di 2 variabili e della loro rappresentazione grafica.

Incontreremo funzioni aventi le seguenti espressioni analitiche:

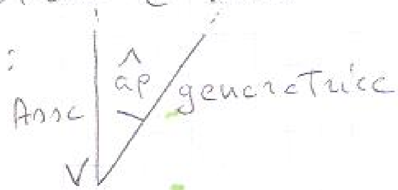
1. $\boxed{f(x,y) = ax + by + c}$, il cui GRAFICO è un PIANO di equazione $\boxed{z = ax + by + c}$ (che abbiamo già incontrato)

2. $\boxed{f(x,y) = z_V \pm a\left((x - x_V)^2 + (y - y_V)^2\right)}$ il cui GRAFICO è un PARABOLOIDE CIRCOLARE di equazione $\boxed{z = z_V \pm a\left((x - x_V)^2 + (y - y_V)^2\right)}$ di vertice (x_V, y_V, z_V) e APERTURA $a > 0$ (se il segno davanti ad a è $\boxed{+}$ il paraboloide è aperto verso l'alto $\cup$, se è $\boxed{-}$ verso il basso)

3. $\boxed{f(x,y) = z_V \pm a\sqrt{(x - x_V)^2 + (y - y_V)^2}}$ il cui GRAFICO è un CONO CIRCOLARE di equazione $\boxed{z = z_V \pm a\sqrt{(x - x_V)^2 + (y - y_V)^2}}$

di vertice (x_v, y_v, z_v) e apertura $a>0$, aperto verso l'alto $(\vee)$ se il segno che precede a è $\boxed{+}$, verso il basso $(\wedge)$ se è $\boxed{-}$.

Chiameremo angolo di apertura del cono l'angolo $\hat{ap} = \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$ l'angolo avente come lati, in una sezione verticale passante per il vertice, l'asse di simmetria e una semiretta generatrice del cono:



4 - $\boxed{f(x,y) = z_c \pm \sqrt{R^2-(x-x_c)^2-(y-y_c)^2}}$

il cui GRAFICO è una SUPERFICIE SEMISFERICA di centro (x_c, y_c, z_c) e raggio R e di equazione $\boxed{z = z_c \pm \sqrt{R^2-(x-x_c)^2-(y-y_c)^2}}$.

Se davanti alla radice compare il $\boxed{+}$ si tratta della metà superiore , se c'è il $\boxed{-}$ della metà inferiore .

Passiamo agli esercizi. Per ogni funzione data:

a) determineremo dom f, spiegando di che insieme si tratta e disegnandolo, se non è tutto il piano

b) scriveremo l'equazione del GRAFICO

c) vedremo di che TIPO di superficie si tratta (per i coni circolari calcoleremo anche l'angolo di apertura $\widehat{ap}$)

d) disegneremo il grafico, tenendo conto anche, in certi casi, di determinate CONDIZIONI AGGIUNTIVE

n.b.: per quanto riguarda dom f, il problema si pone solo relativamente al caso della superficie semisferica, 3 perché in tutti gli altri casi $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}^2}$.

$\boxed{1}$ $\boxed{f(x,y) = -12 + 2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$ va specificato

a) $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$ $\boxed{\left(\text{essendo } x^2+y^2 \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)}$

b) eq. GRAFICO: $z = -12 + 2\sqrt{x^2+y^2}$

APERTURA (*)

c) si tratta di un cono circolare con $a = 2$
e angolo di apertura $\hat{ap} = \arctan \frac{1}{2} \simeq 26{,}6^\circ$
e $V(0,0,-12)$, aperto verso l'alto (V)
poiché davanti ad $a=2$ compare il segno $\boxed{+}$ -
Tale cono è illimitato verso l'alto e
interseca il piano xy $(z=0)$:

$$\begin{cases} z = -12 + 2\sqrt{x^2+y^2} \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 6$$

$$\boxed{x^2+y^2 = 36} \ .$$

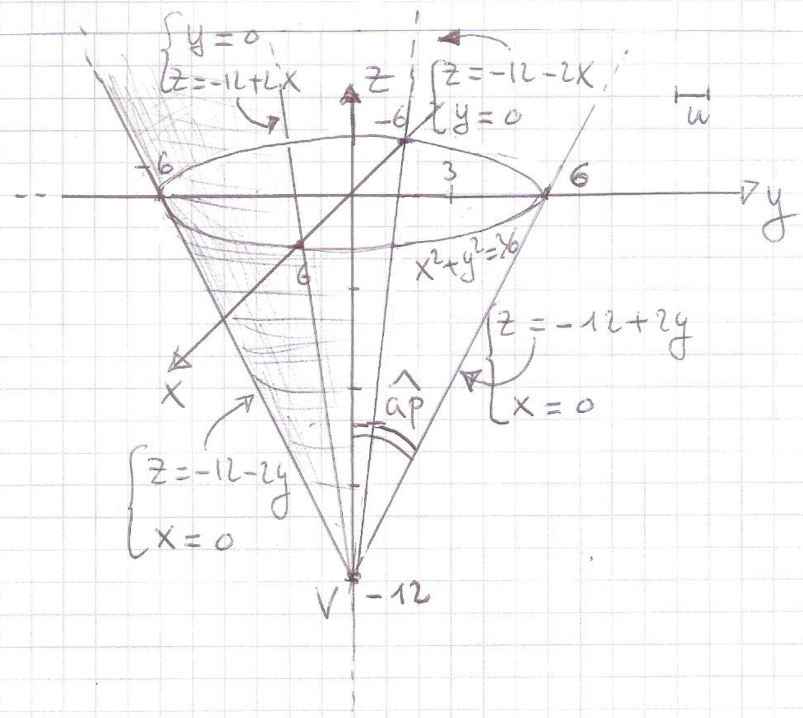
- La sezione col piano xy è quindi una circonferenza di centro O e raggio 6. -
- La sezione col piano yz $(x=0)$ è data da $z = -12 + 2\sqrt{y^2}$, cioè

(*) essendo $a = 2 > 1$ ci aspettavamo un angolo di apertura $\hat{ap}$ compreso tra $0°$ e $45°$.

$z = -12 + 2 \cdot |y|$,
cioè dalla coppia di semirette di equazioni $z = -12 + 2y$ e $z = -12 - 2y$, aventi origine nel vertice.

In modo simile, la sezione col piano xz $(y = 0)$ è data da $z = -12 + 2x$ e $z = -12 - 2x$.

d) Costruiamo il grafico scegliendo un'unità di misura adatta.



$\boxed{2}$ $\boxed{f(x,y) = -2y - \frac{5}{2}x + 5}$

a) $\text{dom}\, f = R^2$

b) Eq. GRAFICO: $z = -2y - \frac{5}{2}x + 5$

c) Si tratta di un piano; per disegnarlo determiniamo le intersezioni con gli assi coordinati:

$\cap$ asse x: $\begin{cases} z = -2y - \frac{5}{2}x + 5 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow -\frac{5}{2}x + 5 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 2}$

$A(2,0,0)$

$\cap$ asse y: $\begin{cases} z = -2y - \frac{5}{2}x + 5 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow -2y + 5 = 0 \longrightarrow \boxed{y = \frac{5}{2}}$

$B\left(0,\frac{5}{2},0\right)$

$\cap$ asse z: $\begin{cases} z = -2y - \frac{5}{2}x + 5 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{z = 5}$

$C(0,0,5)$

Sezione col piano xy: $(z=0)$

$-2y - \frac{5}{2}x + 5 = 0$

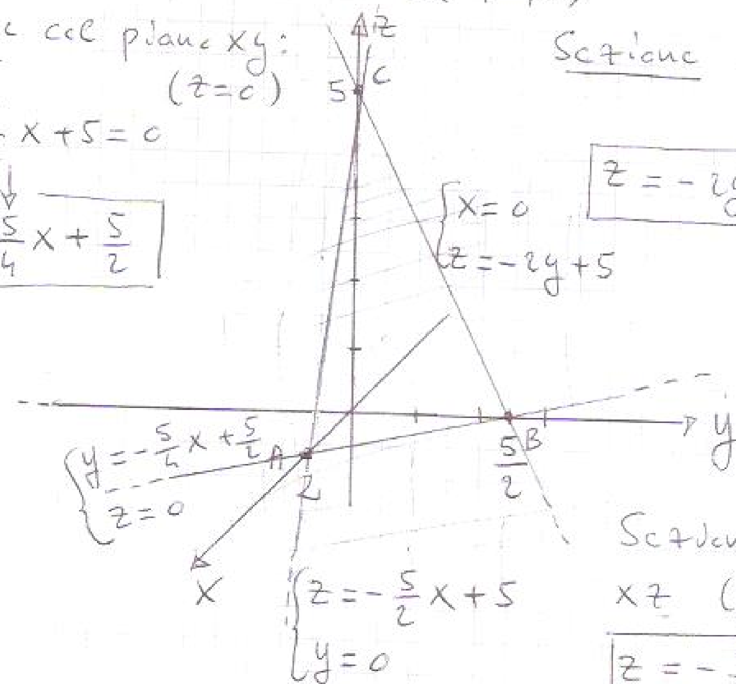
$\downarrow$

$\boxed{y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}}$

Sezione col piano yz $(x=0)$

$\boxed{z = -2y + 5}$

d)



Sezione col piano xz $(y=0)$:

$\boxed{z = -\frac{5}{2}x + 5}$

$\boxed{3}$ $\boxed{f(x,y) = 6 - \frac{1}{6}(x^2+y^2)}$

con la CONDIZIONE AGGIUNTIVA $\boxed{x^2+y^2 \leq 54}$

a) $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$

b) Eq. GRAFICO: $z = 6 - \frac{1}{6}(x^2+y^2)$

c) si tratta di un PARABOLOIDE CIRCOLARE con $V(0,0,6)$, aperto verso il basso, essendo $a = \frac{1}{6}$ preceduto dal segno $\boxed{-}$.

Sezioni coi piani coordinati:

$$\begin{cases} z = 0 \\ \boxed{x^2+y^2=36} \end{cases} \quad \text{(circ. di centro O e } R=6)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \boxed{z = -\frac{1}{6}y^2+6} \end{cases} \quad \text{(parabola di } V(0,0,-6))$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \boxed{z = -\frac{1}{6}x^2+6} \end{cases}$$

Per migliorare la precisione del grafico possiamo sezionare il paraboloide con piani paralleli al piano xy, ottenendo delle circonferenze: ad esempio

$$\begin{cases} z = +3 \\ z = 6 - \frac{1}{6}(x^2+y^2) \end{cases} \longrightarrow +3 = 6 - \frac{1}{6}(x^2+y^2)$$

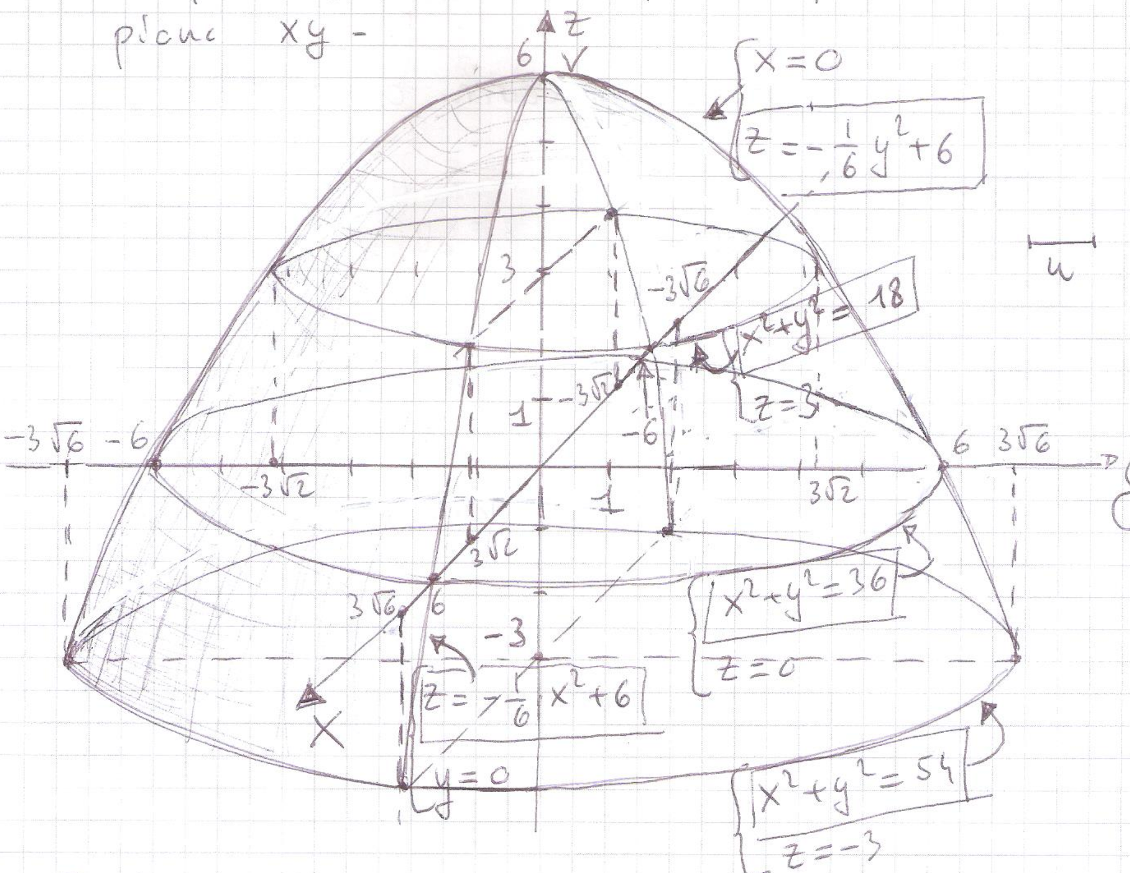
$$3 = \frac{1}{6}(x^2+y^2)$$

CIRCONF. DI CENTRO O $\quad \boxed{18 = x^2+y^2}$

e $R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4,2$

Analizziamo la condizione aggiuntiva: $x^2+y^2 \leq 54$ significa che la sezione con piani paralleli al piano xy può avere al massimo $R = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \simeq 7,3$ con la circonferenza di equazione $\boxed{x^2+y^2=54}$ - Per cui $z = 6 - \frac{1}{6}(x^2+y^2) = 6 - \frac{1}{\cancel{6}}\cdot \cancel{54}^{\,9} = \boxed{-3}$ -

Il paraboloide viene quindi tagliato a quota $\boxed{z=-3}$ dal piano parallelo al piano xy -



Proiettando sul piano xy le sezioni con i piani z=k si ottengono gli insiemi di livello E_k -

Nel nostro caso $E_k = \left\{ (x,y) \in R^2 \mid 6 - \frac{1}{6}(x^2+y^2) = k \right\} =$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 36-6k \}$$

Si tratta evidentemente di circonferenze di centro O e raggio $R = \sqrt{36-6k}$, con $36-6k \geq 0$, cioè $k \leq 6$.

$E_k = \emptyset \quad \forall k > 6$

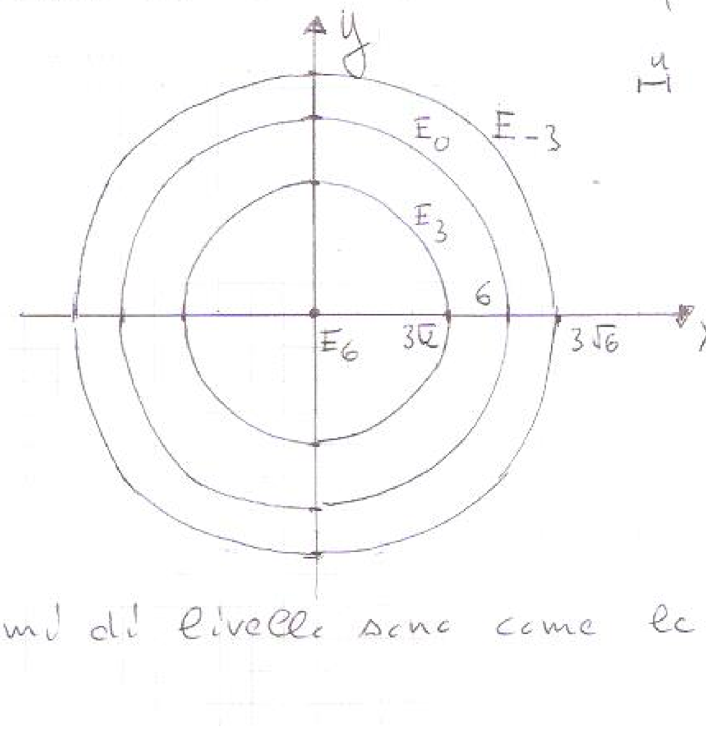
$E_6 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 0 \} = \{ (0,0) \}$

$E_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 18 \}$

$E_0 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 36 \}$

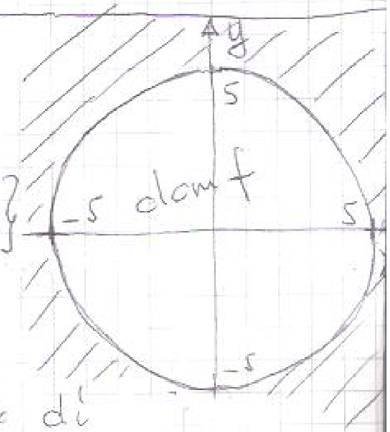
$E_{-3} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 54 \}$

Evidentemente le equazioni che abbiamo trovato sono identiche a quelle delle circonferenze ottenute sezionando il paraboloide coi piani $z=6$, $z=3$, $z=0$, $z=-3$, perché sono le proiezioni di tali sezioni sul piano xy



Gli insiemi di livello sono come le linee che nelle cartine topografiche rappresentano punti alla stessa quota (dette linee di livello o ISOIPSE se sono sopra il livello del mare, ISOBATE se sotto il livello del mare) - L'uso delle isoipse è uno dei metodi usati in cartografia per rappresentare le tre dimensioni su un foglio bidimensionale, consentendo di farsi un'idea della morfologia del territorio - La differenza di quota tra due isoipse adiacenti è detta equidistanza - Nell'esempio fatto la equidistanza è 3 - E -3 è una ISOBATA, sta sotto il livello del mare - Se la distanza tra due linee di livello "equidistanti" diminuisce vuol dire che la pendenza aumenta, e viceversa - La metafora "cartografica" è fondamentale quando si ha a che fare con gli insiemi di livello -

$\boxed{4}$ $\boxed{f(x,y) = 3 - \sqrt{25-x^2-y^2}}$



a) $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 25 - x^2 - y^2 \geq 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$

(si tratta quindi di un cerchio di centro O e raggio 5, bordo incluso)

b) eq. GRAFICO: $z = 3 - \sqrt{25-x^2-y^2}$

c) si tratta di una SUPERFICIE SEMISFERICA di centro $(0,0,+3)$ e raggio 5, la metà inferiore ( ) perché davanti alla radice compare il $\boxed{-}$

d) $\cap$ piano xy: $3-\sqrt{25-x^2-y^2}=0$ $\quad 3=\sqrt{25-x^2-y^2}$

$$9=25-x^2-y^2 \longrightarrow \boxed{x^2+y^2=16}$$

cioè la circonferenza di centro O e raggio 4 -

$\cap$ piano yz $(x=0)$:

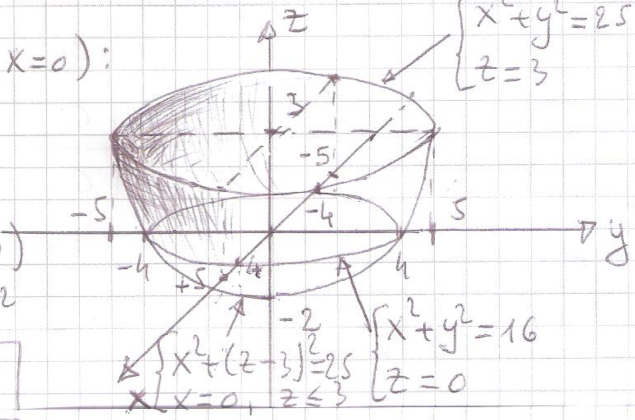
$z=3-\sqrt{25-x^2}$

$\sqrt{25-x^2}=3-z$

per $z\leq 3$ $\;(3-z\geq 0)$

$25-x^2=(z-3)^2$

$\boxed{z\leq 3,\ x^2+(z-3)^2=25}$



L'$\cap$ col piano yz è quindi la semicirconf. di $C(0,3)$ e raggio 5 (inferiore)

$\boxed{5}$ $\quad \boxed{f(x,y)=6-\sqrt{x^2+y^2-12x+36}}$

a) $\text{dom} f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-12x+36\geq 0\}$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-6)^2+y^2\geq 0\}=\mathbb{R}^2$$

(una somma di quadrati non è MAI <0)

b) eq. GRAFICO: $z=6-\sqrt{x^2+y^2-12x+36}$

cioè $\quad z=6-\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

c) si tratta di un cono di apertura $a=1$, e quindi con angolo di apertura $\hat{ap} = 45°$ e $V(6,0,6)$, aperto verso il basso $(\wedge)$ perché davanti ad $a=1$ compare il segno $\boxed{-}$. Tale cono è illimitato verso il basso e interseca il piano xy $(z=0)$:

$$\begin{cases} z = 6 - \sqrt{x^2+y^2-12x+36} \\ z=0 \end{cases} \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2-12x+36} = 6$$

$$x^2+y^2-12x+\cancel{36}=\cancel{36}$$

$$\boxed{x^2+y^2-12x=0}$$

- La sezione col piano $\boxed{xy}$ è quindi la circonferenza di equazione $x^2+y^2-12x=0$, $x^2-12x+36+y^2=0$, cioè $(x-6)^2+y^2=36$ di centro $(6,0,0)$ e raggio 6, passante per O.

- La sezione col piano verticale di equazione $\boxed{x=6}$, parallelo al piano yz è data da

$$\begin{cases} z = 6 - \sqrt{(x-6)^2+y^2} \\ x=6 \end{cases} \longrightarrow z = 6-\sqrt{y^2}$$

$$\boxed{z = 6-|y|}$$

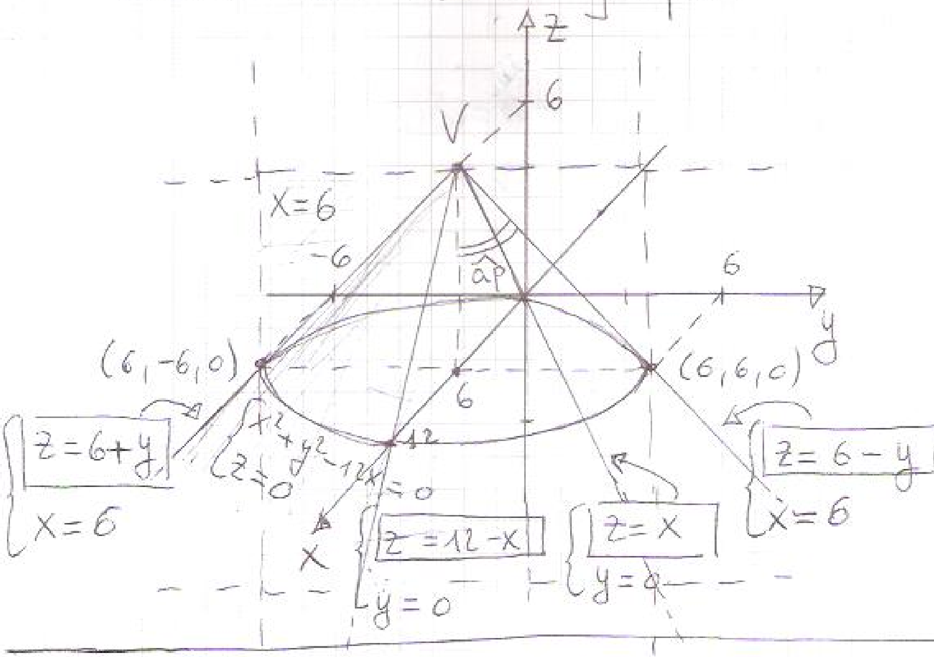
cioè dalla coppia di semirette di equazioni $z=6-y$ e $z=6+y$ sul piano $x=6$, aventi origine V.

- La sezione col piano verticale di equazione $y=0$ (piano $\boxed{xz}$) è data da:

$$\begin{cases} y=0 \\ z=6-\sqrt{(x-6)^2+y^2} \end{cases} \longrightarrow z = 6-\sqrt{(x-6)^2}$$

cioè $z = 6 - |x-6|$, ovvero delle due semirette di equazioni $z = 6 - x + 6$ $(z = 12 - x)$ e $z = \cancel{6} + x - \cancel{6}$ $(z = x)$ aventi origine V, sul piano $y = 0$.

Costruiamo ora il grafico:



$\boxed{6}$ $\boxed{f(x,y) = 2 + \sqrt{-x^2-y^2+16y}}$

a) $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2-y^2+16y \geq 0\}$

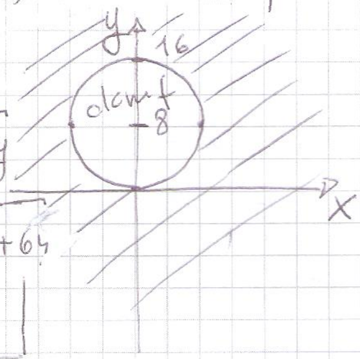
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-16y \leq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-16y+64 \leq 64\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-8)^2 \leq 8^2\}$

Si tratta della parte di piano delimitata

dalla circonferenza di $C(0,8)$ e $R=8$,
circonferenza inclusa.



b) eq. GRAFICO: $z = 2 + \sqrt{-x^2-y^2+16y}$

cioè $z = 2 + \sqrt{-x^2-(y^2-16y+64)+64}$

cioè $\boxed{z = 2 + \sqrt{64 - x^2 - (y-8)^2}}$

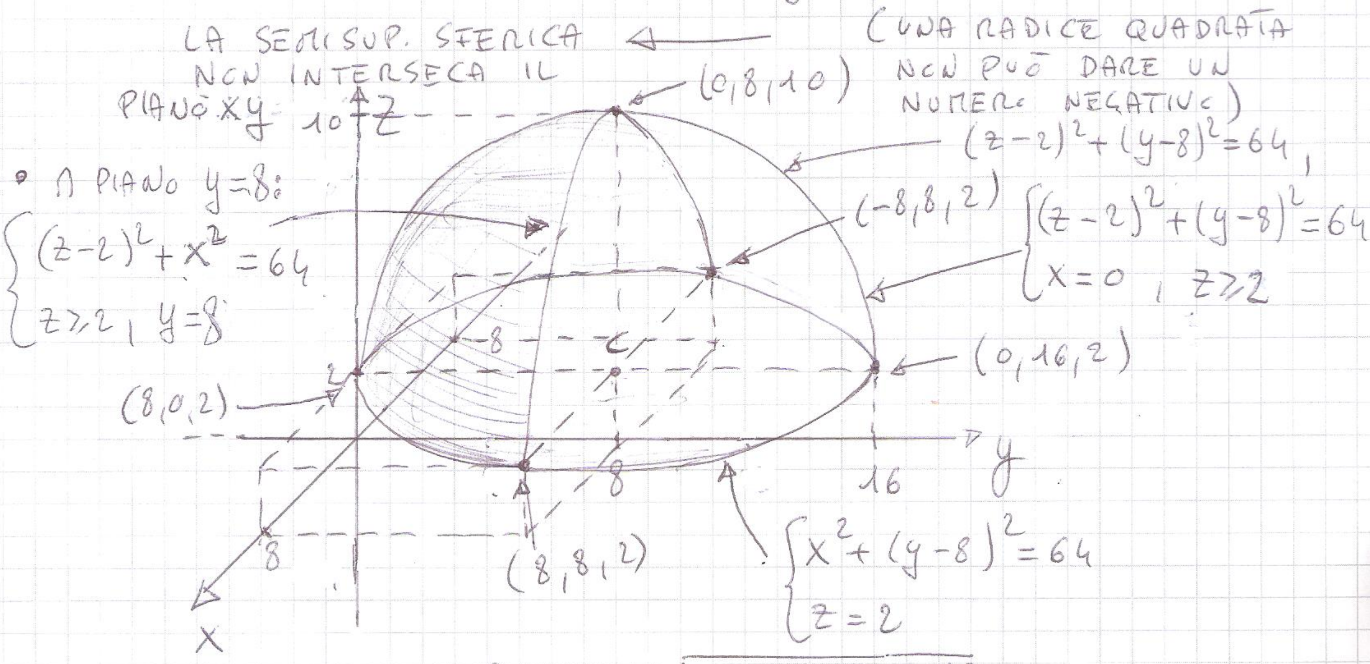
c) si tratta di una SUPERFICIE SEMISFERICA di centro $(0,8,2)$ e raggio 8, la metà superiore ( ) perché davanti alla radice compare il $\boxed{+}$

d) $\cap$ piano xy: $2 + \sqrt{-x^2-y^2+16y} = 0$

$\sqrt{-x^2-y^2+16y} = -2$ IMPOSSIBILE

(UNA RADICE QUADRATA NON PUÒ DARE UN NUMERO NEGATIVO)

LA SEMISUP. SFERICA NON INTERSECA IL PIANO xy



• $\cap$ piano $\boxed{yz}$: $\begin{cases} z = 2 + \sqrt{64-x^2-(y-8)^2} \\ x = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

$z = 2 + \sqrt{64-(y-8)^2}$

da cui $z - 2 = \sqrt{64-(y-8)^2}$

$\boxed{\text{per } z \geq 2}$, $(z-2)^2 = 64-(y-8)^2 \longrightarrow (z-2)^2+(y-8)^2 = 64$

cioè la SEMICIRCONFERENZA di equazione $(z-2)^2+(y-8)^2=64$, di centro $(0,8,2)$ e raggio 8, con $z \geq 2$ (la metà superiore)

$\boxed{7}$ In relazione agli esercizi $\boxed{5}$ e $\boxed{6}$ determinare inf f, sup f, max f e min f

- Per la funzione $f(x,y) = 6 - \sqrt{x^2+y^2-12x+36}$ osserviamo che $\boxed{\sup f = \max f = 6 = f(6,0)}$; $(6,0) \in \mathbb{R}^2$ viene detto punto di massimo assoluto per $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$, mentre 6 è il valore del massimo (il massimo valore di z)

  La funzione non ha un minimo valore perché il grafico si estende indefinitamente nel verso delle z negative: quindi $\boxed{\inf f = -\infty}$.

- Per la funzione $f(x,y) = 2 + \sqrt{-x^2-y^2+16y}$
64 $\boxed{\sup f = \max f = 10 = f(0,8)}$ e $(0,8)$ viene detto punto di massimo assoluto per $f(x,y)$ in dom f, mentre 10 è il valore del massimo.

  La funzione ha $\boxed{\inf f = \min f = 2}$; i punti di minimo assoluto di f nel suo dominio sono tutti gli (x,y) tali che $x^2+(y-8)^2=64$, cioè i punti che si ottengono proiettando sul piano xy la circonferenza di base della superficie semisferica (mentre i valori di max f e min f sono valori di $z=f(x,y) \in \mathbb{R}$, i punti di max e min sono $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)

$\boxed{8}$ Determinare, sempre per le due funzioni degli esercizi $\boxed{5}$ e $\boxed{6}$, l'espressione generale di E_K, spiegando di che cosa si tratta e per quali $K \in \mathbb{R}$ risulta $E_K \neq \emptyset$; determinate poi $\boxed{E_2}$ ed $\boxed{E_{-1}}$ per la $\boxed{5}$ ed $\boxed{E_6}$, $\boxed{E_8}$ per la $\boxed{6}$ e disegnateli nel piano (x, y).

- Per la $\boxed{5}$ $E_K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 - \sqrt{x^2+y^2-12x+36} = K \right\}$

$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6-K = \sqrt{(x-6)^2+y^2} \right\}$, da cui,

$\boxed{\text{per } K \leq 6}$ si ottengono le circonferenze di equazione $\boxed{(x-6)^2+y^2=(6-K)^2}$, di centro $(6,0)$ e raggio $6-K$. Per $K>6$, $E_K = \emptyset$ (si osservi che la radice dovrebbe uguale a un numero negativo). Quindi $\boxed{E_K \neq \emptyset \quad \forall K \in \mathbb{R}, \; K \leq 6}$.

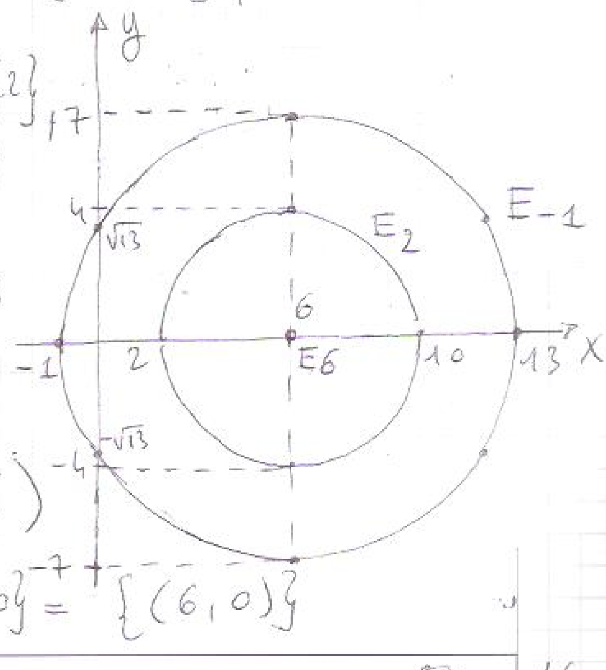
$\boxed{E_2} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-6)^2+y^2 = 4^2 \right\}$, circ. di $C(6,0)$ e $R=4$.

$\boxed{E_{-1}} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-6)^2+y^2 = 7^2 \right\}$, circonferenza di $C(6,0)$ e $R=7$, che interseca l'asse y in $\pm\sqrt{13} \simeq \pm 3{,}6$

(infatti $\begin{cases} (x-6)^2+y^2=49 \\ x=0 \end{cases}$

$36+y^2=49$

$y^2=13 \rightarrow y=\pm\sqrt{13}$)



Osserviamo che:

$E_6 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-6)^2+y^2=0 \right\} = \left\{ (6,0) \right\}$

• Per es $\boxed{6}$ $E_K = \{(x,y) \in \text{dom} f \mid 2 + \sqrt{64 - x^2 - (y-8)^2} = K\} =$

$= \{(x,y) \in \text{dom} f \mid K - 2 = \sqrt{64 - x^2 - (y-8)^2}\}$, da cui

$\therefore$ $\forall K \geq 2$, $(K-2)^2 = 64 - x^2 - (y-8)^2$, cioè

$\boxed{x^2 + (y-8)^2 = 64 - (K-2)^2}$, che rappresenta

circonferenza di $C(0,8)$ e $R = \sqrt{64 - (K-2)^2}$,

reale per $64 - (K-2)^2 \geq 0$, cioè $(K-2)^2 \leq 64$

e quindi $-8 \leq K-2 \leq +8$, e dunque $-6 \leq K \leq 10$,

ma essendo $K \geq 2$ otteniamo $\boxed{2 \leq K \leq 10}$

In conclusione $\boxed{E_K \neq \emptyset \quad \forall K \in \mathbb{R},\ 2 \leq K \leq 10}$,

ed $E_K = \{(x,y) \in \text{dom} f \mid x^2 + (y-8)^2 = 64 - (K-2)^2\}$.

$E_6 = \{(x,y) \in \text{dom} f \mid x^2 + (y-8)^2 = \underbrace{64 - 16}_{48}\}$

circonf. di $C(0,8)$ e $R = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \simeq 6{,}9$

$E_8 = \{(x,y) \in \text{dom} f \mid x^2 + (y-8)^2 = \underbrace{64 - 36}_{28}\}$

circonf. di $C(0,8)$ e $R = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \simeq 5{,}3$

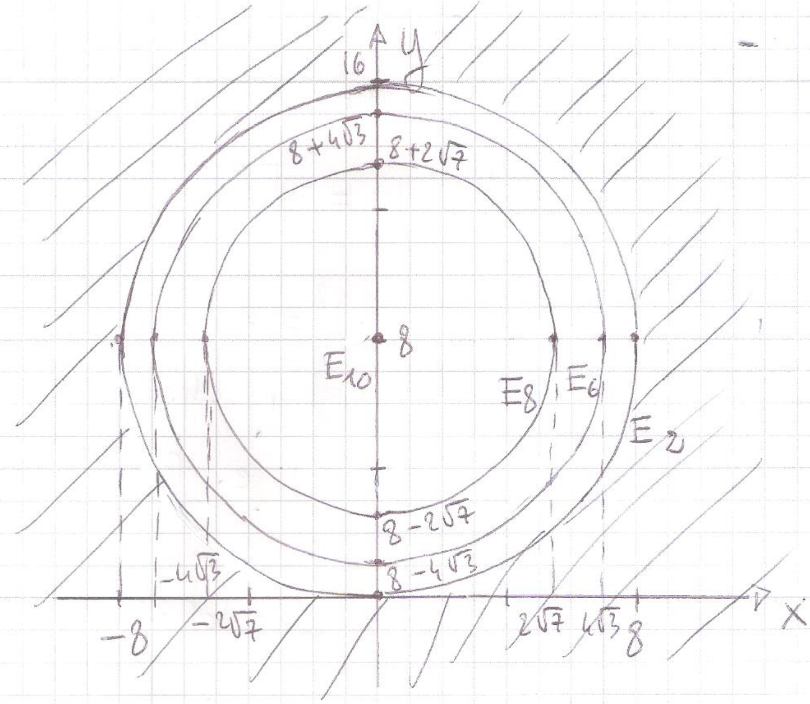
Ricordiamo che $\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-8)^2 \leq 8^2\}$

(CERCHIO di $C(0,8)$ e $R = 8$ bordo incluso)

Il bordo di dom f coincide con E_2

$(E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-8)^2 = 64\})$

ed $E_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + (y-8)^2 = \underbrace{64 - 64}_{0}\} = \{(0,8)\}$


y
16
8+4√3
8+2√7
8
E10
E8
E6
E2
8−2√7
8−4√3
−4√3
x
−8
−2√7
2√7
4√3
8