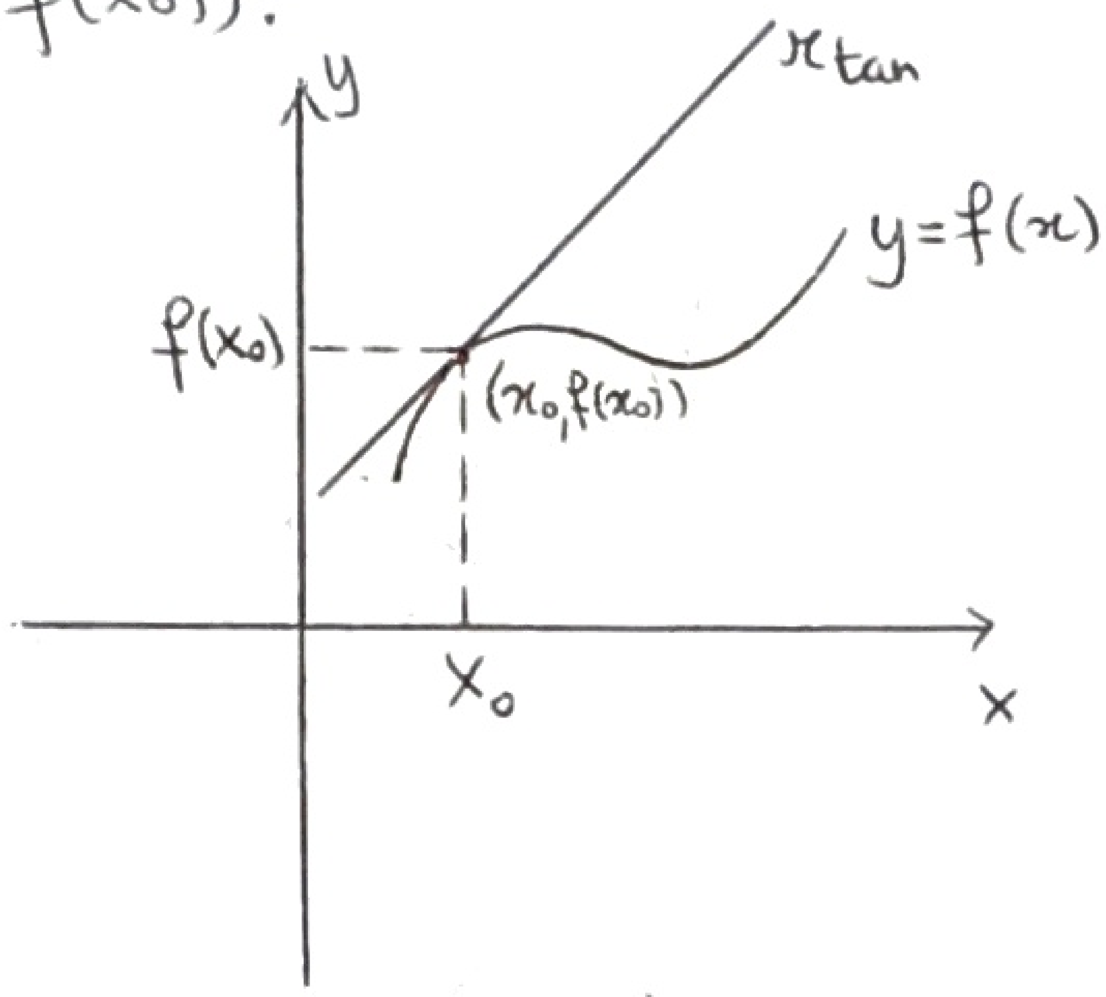
SIGNIFICATO GEOMETRICO delle DERIVATE PARZIALI

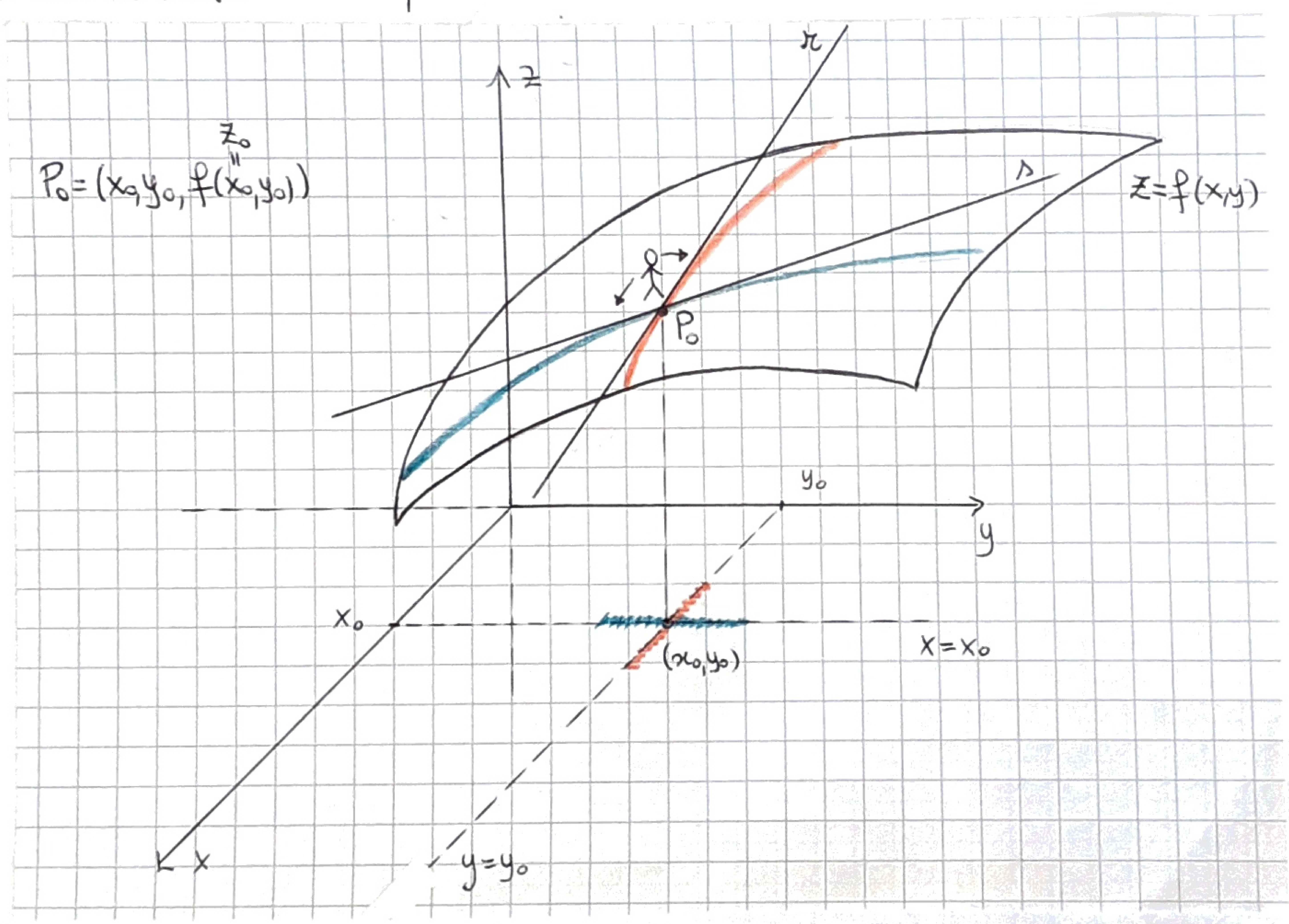
RICHIAMO: per funzioni di 1 variabile la derivata $f'(x_0)$ rappresenta il COEFFICIENTE ANGOLARE della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$:



$m_{tan} = f'(x_0)$

$r_{tan}: \; y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

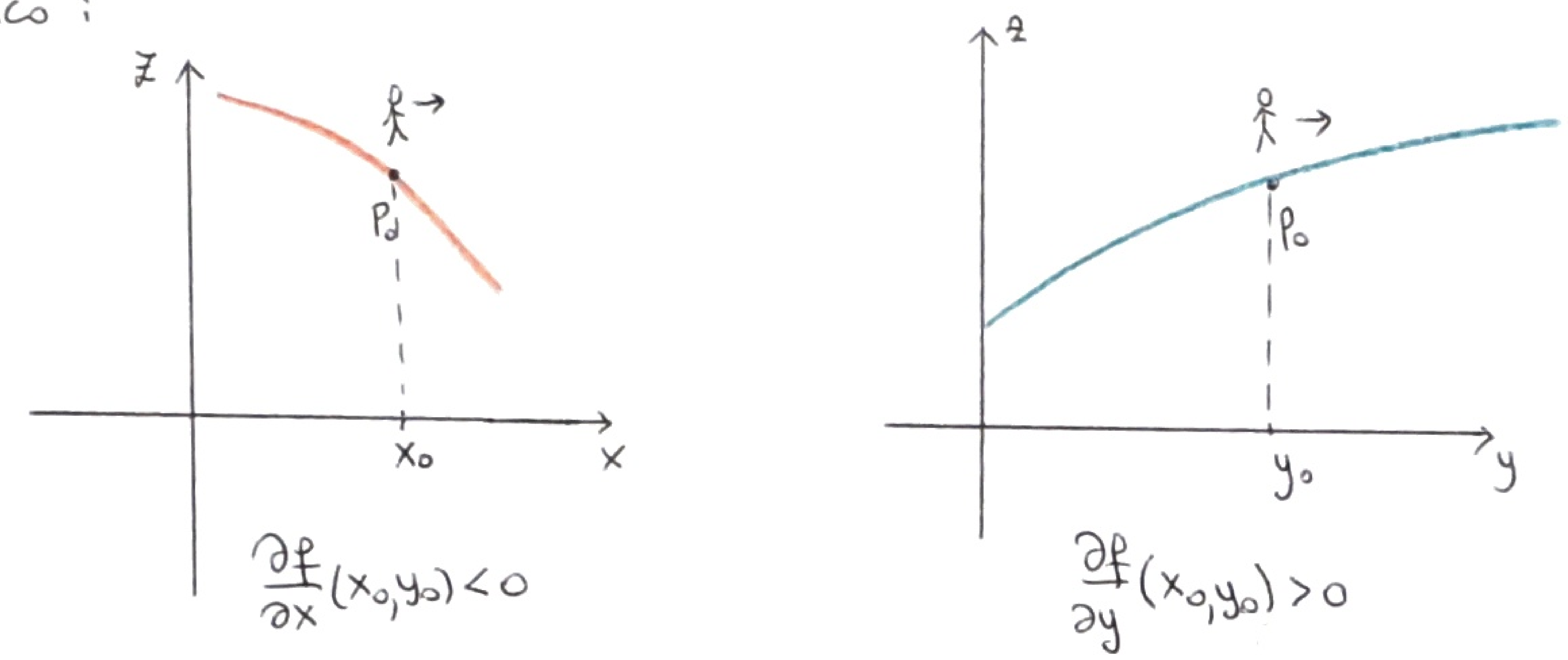
In due variabili



Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ significa considerare la funzione sulla retta $y=y_0$ ottenendo la "curva" ARANCIONE sul grafico di f e calcolare la derivata in (x_0,y_0) della funzione nella sola variabile x. Allora se si considera la retta r tangente alla linea arancione avremo $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = m_r}$.

Allo stesso modo $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = m_s}$ cioè la derivata rispetto a y è il coefficiente angolare della retta tangente alla linea verde.

Possiamo anche interpretare le derivate parziali come <u>PENDENZA</u> del grafico:



<u>CONCLUSIONE</u> Le derivate parziali rappresentano la pendenza del grafico in $P_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ nelle direzioni degli assi x e y rispettivamente.

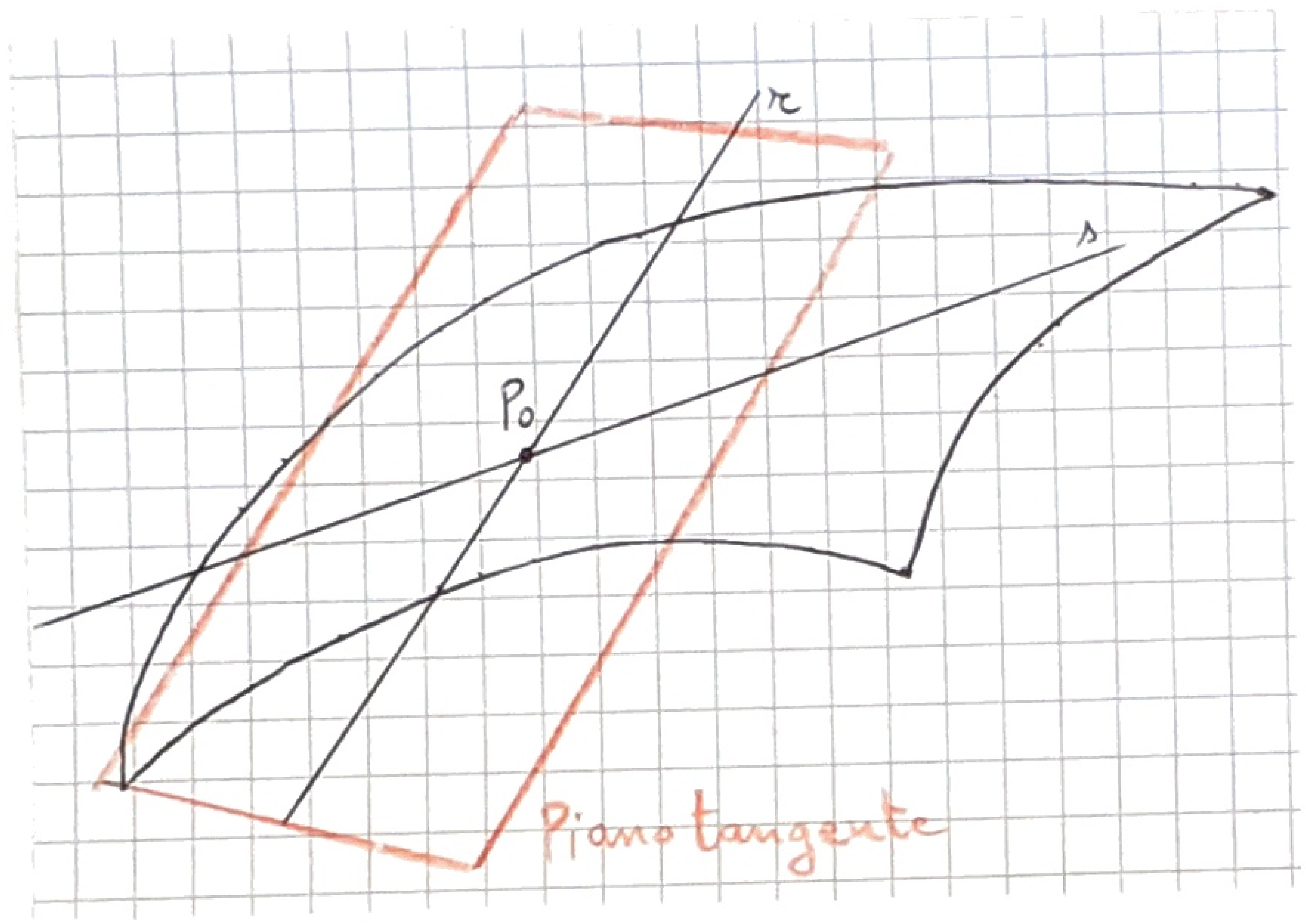
Vedremo che invece il VETTORE GRADIENTE disegnato nel piano (x,y) nel punto (x_0,y_0) indica la direzione nella quale la superficie del grafico è più ripida (detta DIREZIONE di MASSIMA SALITA).

PIANO TANGENTE

Il piano tangente NON ESISTE SEMPRE : ad esempio nel VERTICE di un CONO.

Supponiamo che nel punto $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0,y_0)) = P_0$ il grafico di f ammetta PIANO TANGENTE NON VERTICALE.

Il piano ha dunque equazione $z = ax + by + c$ e passa per P_0



⊙ Le rette r e s sono contenute nel PIANO TANGENTE.

Consideriamo ora la funzione $g(x,y) = ax+by+c$ che ha per grafico il piano tangente e notiamo che:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$ perchè entrambe sono il coefficiente angolare m_r della retta r

$$\frac{\partial g}{\partial y} = b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$ perchè entrambe sono il coefficiente angolare m_s della retta s

Quindi il piano ha equazione $z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y + c$:

trouiamo c imponendo il passaggio per P_0

$$f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot y_0 + c$$

$$c = f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,y_0$$

EQ.^{ne} del PIANO TANGENTE

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

OSSERVAZIONE Analogia con la r_{tan} $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

ESERCIZIO $f(x,y) = 8 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ dom $f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

1. derivate parziali
2. gradiente nel punto $(x_0=2, y_0=-1)$
3. eq.^{ne} del piano tangente
4. retta per $P_0 = (x_0, y_0, z_0 = f(x_0,y_0))$ perpendicolare al grafico di f cioè alla superficie
5. piano per $P_1 = (-4,-6,7)$ parallelo al piano tangente.

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = -x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -y$

2) $\nabla f(2,-1) = (-2,1) = -2\vec{i} + \vec{j}$

3) PIANO TANGENTE $z_0 = f(2,-1) = 8 - \frac{1}{2}(4+1) = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$

eq.^{ne} $z = \frac{11}{2} - 2(x-2) + (y+1)$ $\boxed{z = -2x + y + \frac{21}{2}}$ $\frac{11}{2} + 5 = \frac{21}{2}$

4) retta per $P_0 \perp$ superficie

se retta $\perp$ superficie $\Rightarrow$ retta $\perp$ piano tangente $\Rightarrow$ possiamo considerare come vettore direttore della retta $\vec{v} = \vec{N}_{piano\,tg}$

Piano $-2x + y - z + \frac{21}{2} = 0$ $\vec{N} = (-2, 1, -1)$

$$r_\perp \begin{cases} x = x_0 + tN_1 \\ y = y_0 + tN_2 \\ z = z_0 + tN_3 \end{cases} t \in \mathbb{R} \qquad \boxed{\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = \frac{11}{2} - t \end{cases} t \in \mathbb{R}}$$

In generale $\vec{N}_{piano\,tg} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$.

5) $(P-P_1)\cdot \vec{N}_{\text{piano tan}} = 0$

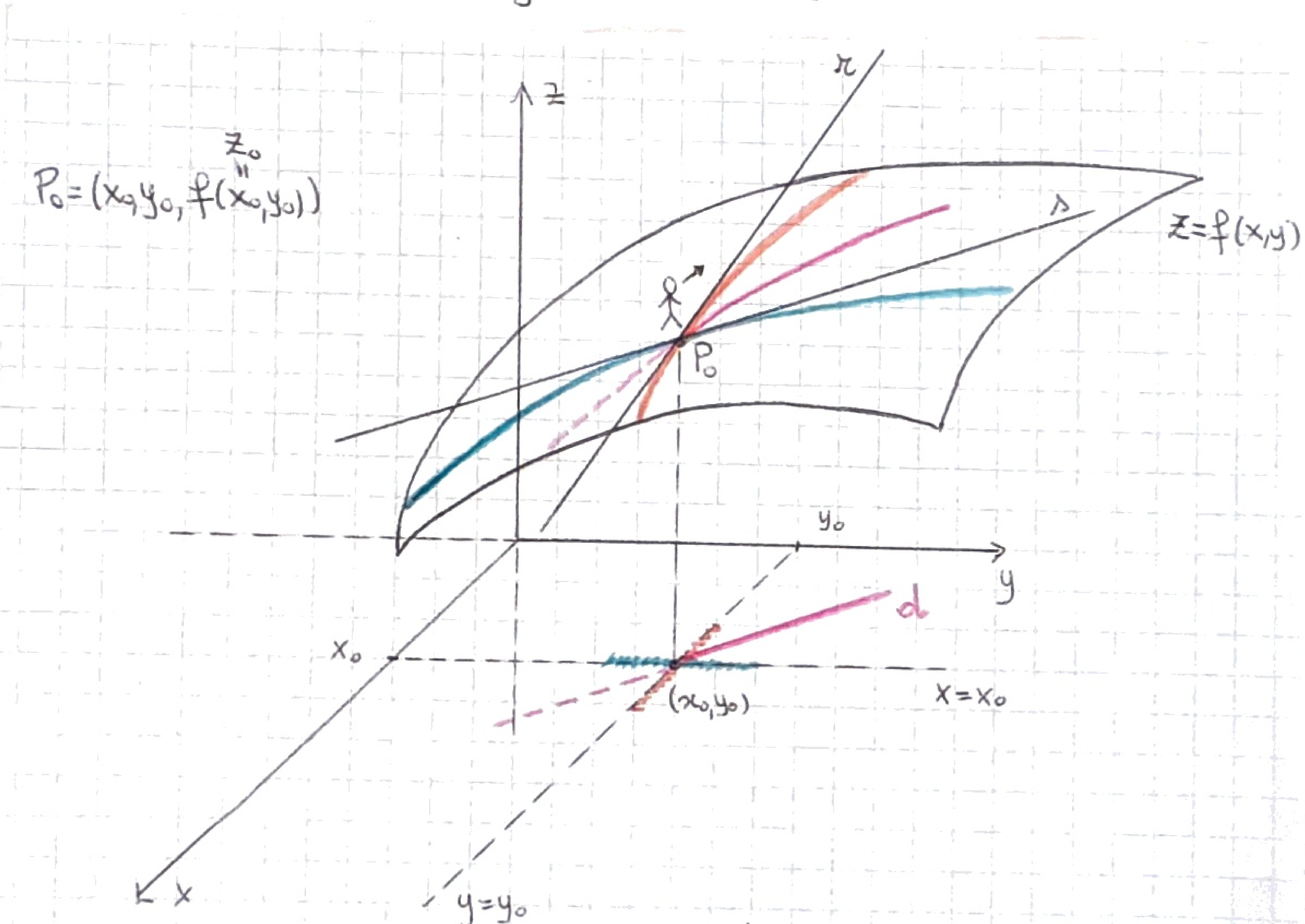
$$(x+4,\, y+6,\, z-7)\cdot(-2,1,-1)=0$$

$$-2(x+4)+(y+6)-(z-7)=0 \qquad z=-2x+y-8+6+7$$

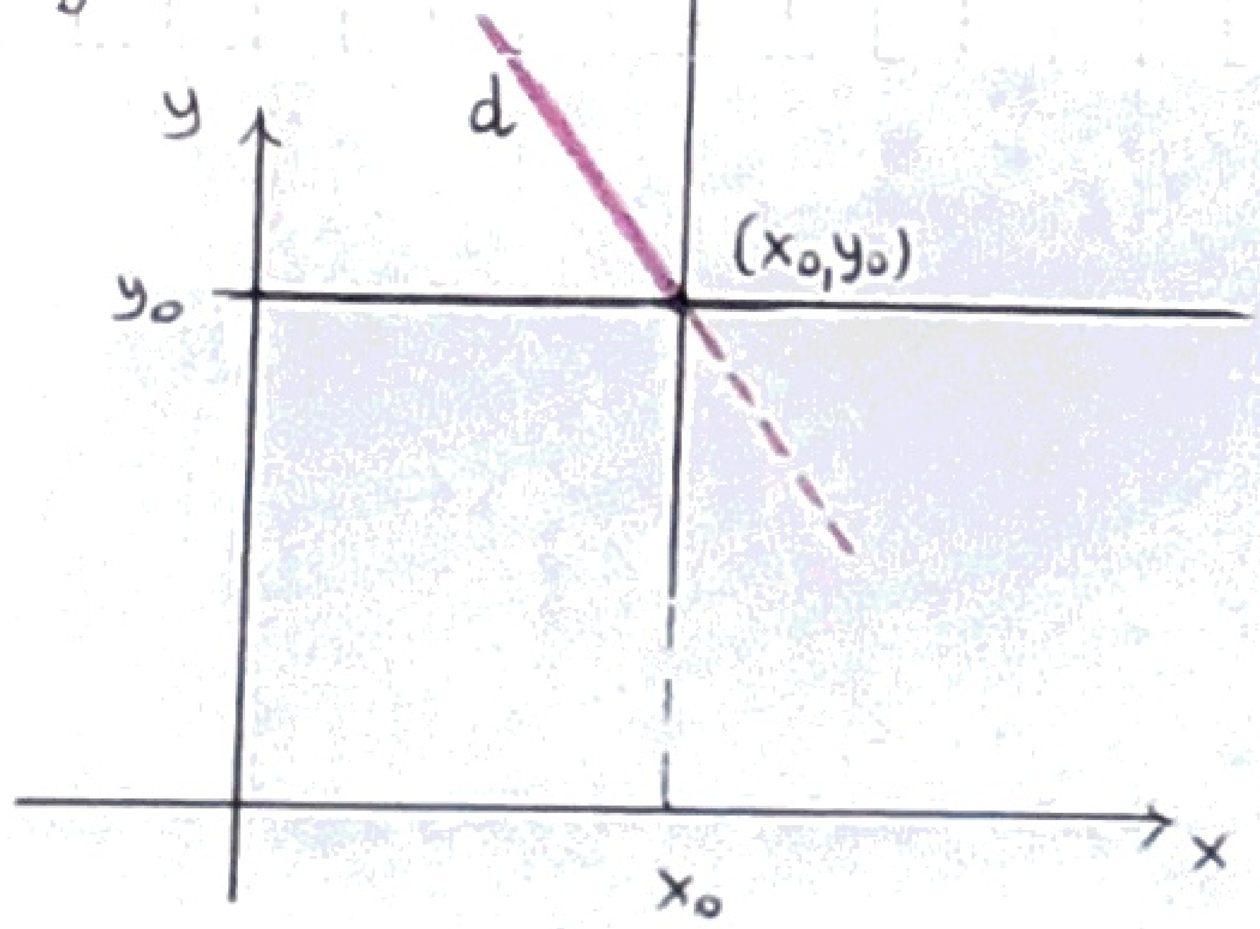
$$\boxed{z=-2x+y+5}$$

DERIVATE DIREZIONALI

Può esistere la pendenza del grafico di f in P_0 in qualunque direzione, non solo nella direzione degli assi x e y.



Nel piano (x,y)



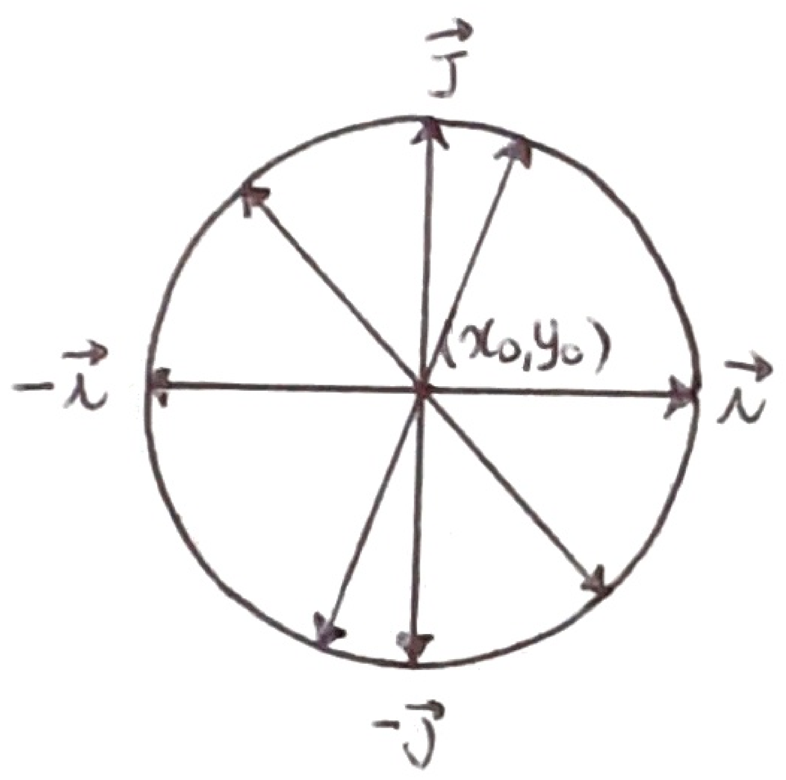
Vogliamo calcolare la derivata di f nella direzione della retta d.

Dobbiamo mettere un sistema di riferimento sulla retta con origine in (x_0, y_0):

- per individuare la direzione della retta utilizziamo un <u>VERSORE</u>

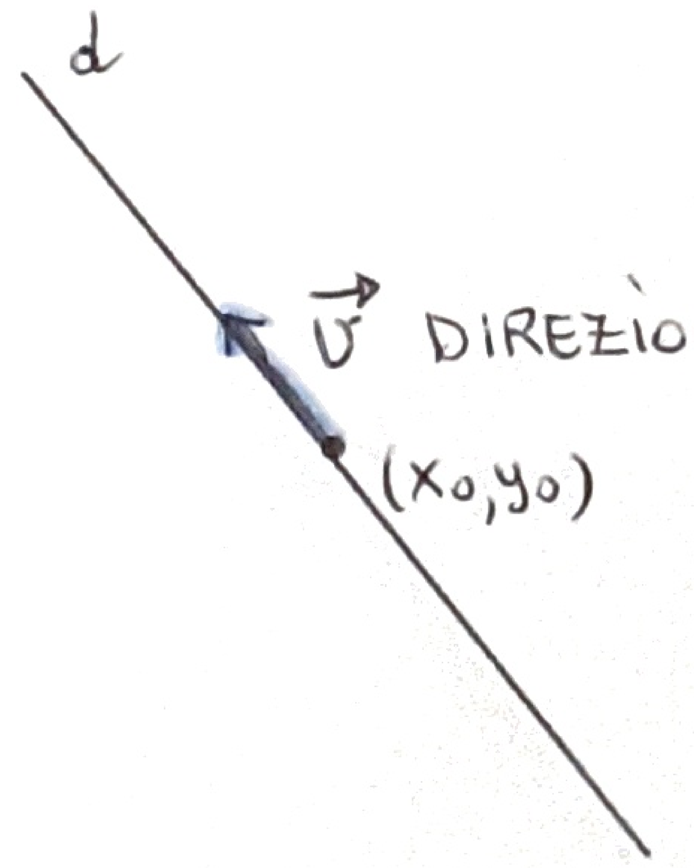
DEFINIZIONE (DIREZIONE in $\mathbb{R}^2$). Si dice DIREZIONE in $\mathbb{R}^2$ un qualunque VERSORE di $\mathbb{R}^2$, cioè un vettore $\vec{v} = (v_1, v_2)$ tale che $\|\vec{v}\| = 1$, cioè $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

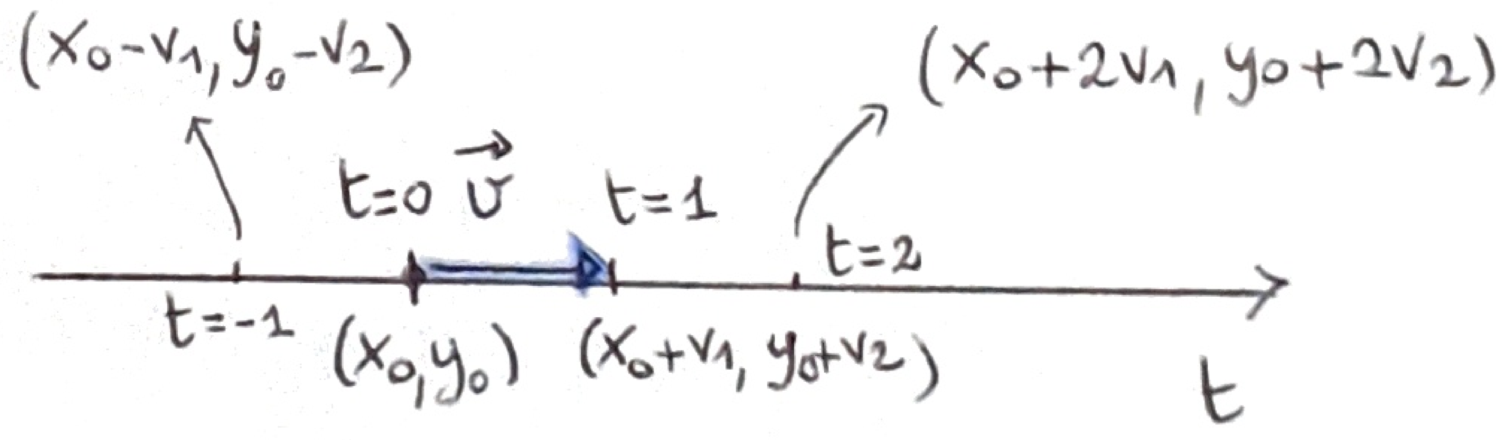
In questo modo in qualunque punto (x_0, y_0) possiamo individuare tutte le possibili direzioni:



circonferenza di $R = 1$

Mettiamo un sistema di riferimento sulla retta con <u>variabile t</u> e <u>origine in (x_0, y_0)</u>





Possiamo scrivere i punti della retta tramite l'equazione vettoriale $P = P_0 + t\vec{v}$: $P(t) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$ $t \in \mathbb{R}$

$P(t) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ grazie al fatto che $\vec{v}$ è un VERSORE t è esattamente la coordinata del punto sulla retta

(se fosse ad esempio $\|\vec{v}\| = 3$ allora e (x_0+v_1, y_0+v_2) corrisponderebbe a $t=3$

)

La derivata DIREZIONALE di f in (x_0, y_0) nella direzione $\vec{v} = (v_1, v_2)$ è allora data da

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \lim_{?} \frac{f(P(t)) - f(x_0,y_0)}{\underbrace{\Delta t}_{\text{Incremento nella } t}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$\boxed{\Delta t = t}$ perchè a $P(t)$ corrisponde t e a (x_0,y_0) corrisponde $t=0$

DEFINIZIONE (DERIVATA DIREZIONALE). Sia $f: \mathrm{dom} f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili, sia $(x_0,y_0) \in \mathrm{dom} f$ e sia $\vec{v}$ una DIREZIONE in $\mathbb{R}^2$. Si dice che f è **DERIVABILE in (x_0,y_0) nella direzione $\vec{v}$** se esiste FINITO

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)$ si dice DERIVATA DIREZIONALE di f in (x_0,y_0) nella direzione $\vec{v}$.