UNIVERSITÀ di PARMA - INGEGNERIA GESTIONALE

ANALISI MATEMATICA 2 - SCHEDA N. 10

FUNZIONI di 2 VARIABILI (DERIVATE SUCCESSIVE, MASSIMI e MINIMI, MOLTIPLICATORI di LAGRANGE)

ES1) Per le seguenti funzioni calcolate tutte le derivate seconde più eventuali altre derivate a fianco indicate

a) $f(x,y) = -4x + 3x^2y^2 - 2xy^3$ $\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$

b) $f(x,y) = 5 - xe^{3y}$ $\quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$

c) $f(x,y) = \text{sen}(xy^2 - 4y)$ $\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$

d) $f(x,y) = \sqrt{x}\cdot(y+3)^2$ $\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$

e) $f(x,y) = \frac{2x^3y - x}{y}$ $\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

ES2) Spiegare perché una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ non può avere le seguenti derivate parziali: $\frac{\partial f}{\partial x} = x + 4y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - y$ - Modificate $\frac{\partial f}{\partial y}$ in modo che sia possibile.

ES.3) Per ciascuna delle seguenti funzioni determinate:

→ dom f, zeri e segno (se richiesto), grafico (se lo conoscete)

→ PUNTI STAZIONARI e la loro natura

→ inf f e sup f specificando se sono massimo o minimo (*)

i) $f(x,y) = (x-3)(1-y)(x+y-2)$ ZERI e SEGNO

ii) $f(x,y) = (x-1)^2 \cdot y + (y-2)^2 - 4$

(*) a) $g(x,y) = 6 - 2y$ ZERI e SEGNO

b) $g(x,y) = 12 - \frac{1}{3}\left((x-6)^2 + (y+6)^2\right)$ ZERI e SEGNO

iii) $f(x,y) = 3(x+y) - x^2 - y^2$ ZERI e SEGNO

iv) $f(x,y) = (x-2x^2)(y-2y^2)$ ZERI e SEGNO

v) $f(x,y) = x^2(y+1) + \frac{(y-1)^2}{2}$

ZERI e SEGNO

vi) $f(x,y) = x \cdot y$

vii) $f(x,y) = 2xy - y^2$ ZERI e SEGNO

viii) $f(x,y) = 2x + y$ ZERI e SEGNO

ix) $f(x,y) = (x+y)^3$ ZERI e SEGNO

x) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y$ ZERI e SEGNO

xi) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ ZERI e SEGNO

xii) $f(x,y) = -x - y + 1$ ZERI e SEGNO

xiii) $f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$

xiv) $f(x,y) = (2-x)(2-y)(x+y-2)$ ZERI e SEGNO.

c) $g(x,y) = 6 - \frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2}$ ZERI e SEGNO

d) $g(x,y) = 5 - x - y$ ZERI e SEGNO

e) $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 3$ ZERI e SEGNO

f) $g(x,y) = -3 + \frac{4}{5}\sqrt{x^2+y^2-10y+25}$ ZERI e SEGNO

g) $g(x,y) = \sqrt{x} - y$ ZERI e SEGNO

ES. 4) Nei seguenti casi (tutte le funzioni sono quelle dell'es. 3) tranne per $f(x,y) = x^2 - y^2$ presente **sul libro** (e su ELLY) e spiegata a lezione) determinate il MASSIMO e il MINIMO ASSOLUTI della funzione f sull'insieme a fianco indicato, dopo aver dimostrato che esistono. Specificate in quali punti i valori massimo e minimo sono assunti.

(*)
i) $f(x,y) = (x-3)(1-y)(x+y-2)$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 4, -x+2 \le y \le 1\}$

ii) $f(x,y) = (x-1)^2 y + (y-2)^2 - 4$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, 0 \le y \le -x+7\}$

(*) a) $g(x,y) = 6 - 2y$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y+2)^2 \le 1\}$

b) $g(x,y) = 12 - \frac{1}{3}((x-6)^2 + (y+6)^2)$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 \le 18\}$

iii) $f(x,y)=x^2-y^2$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 2\}$

iv) $f(x,y)=3(x+y)-x^2-y^2$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x-1)^2+(y-1)^2\le 2\}$

v) $f(x,y)=(x-2x^2)(y-2y^2)$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

vi) $f(x,y)=x^2(y+1)+\dfrac{(y-1)^2}{2}$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 2x^2+y^2\le 2\}$

vii) $f(x,y)=xy$ su $E=$ Triangolo CHIUSO di vertici $(0,0)\ (2,0)\ (-2,2)$

viii) $f(x,y)=2xy-y^2$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y^2\le x\le 1\}$

ix) $f(x,y)=2x+y$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 5\}$

x) $f(x,y)=(x+y)^3$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$

xi) $f(x,y)=x^2+y^2-4y$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 9\}$

xii) $f(x,y)=x^2+4y^2$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$

xiii) $f(x,y)=x^2+4y^2$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x\le 2,\ -2\le y\le 2\}$

xiv) $f(x,y)=-x-y+1$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \dfrac{x^2}{3}+y^2\le 1\}$

xv) $f(x,y)=3+xy-x-2y$ su $E=$ Triangolo CHIUSO di vertici $(1,0)\ (5,0)\ (1,4)$

xvi) $f(x,y)=(2-x)(2-y)(x+y-2)$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\le 2,\ -x\le y\le 2\}$

xvii) $f(x,y)=(2-x)(2-y)(x+y-2)$ su $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x-2\le y\le x+2,\ -x\le y\le -x+6\}$

Per le funzioni c) d) e) f) g) si veda a pag. 4

ES. 5) In tutti i casi dell'esercizio 4) eseguite lo studio del bordo dell'insieme, utilizzando il METODO dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE.

c) $g(x,y) = 6 - \frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2}$ su $E =$ Triangolo di vertici $(5,5)$ $(5,-5)$ $(10,0)$

d) $g(x,y) = 5 - x - y$ su $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16 \}$

e) $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 3$ su $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \}$

f) $g(x,y) = -3 + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25}$ su $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \}$

g) $g(x,y) = \sqrt{x} - y$ su $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 16, \ 0 \leq y \leq 5 \}$