LEZIONE del 19 MARZO 2020

ESERCIZI nello SPAZIO $\mathbb{R}^3$

1) a) Determinate la retta passante per $P_0=(3,4,3)$ e $P_1=(-2,-5,-2)$ scrivendo le equazioni della retta in due modi diversi -

b) Determinate l'equazione del piano passante per $P_2=(4,-5,14)$ e perpendicolare alla retta $r_{P_0P_1}$ determinata al punto a).

Svolgimento

a) La retta $r_{P_0P_1}$ passante per i due punti P_0 e P_1 è ad esempio la retta per P_0 avente come vettore direttore il vettore $\vec{v}=P_1-P_0$

$P_0=(3,4,3)$ $\vec{v}=P_1-P_0=(-5,-9,-5)$

eq.^{ni} parametriche della retta per P_0 con vettore direttore $\vec{v}$

$$\begin{cases} x = x_{P_0} + tv_1 \\ y = y_{P_0} + tv_2 \\ z = z_{P_0} + tv_3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad r_{P_1P_0} \begin{cases} x = 3-5t \\ y = 4-9t \\ z = 3-5t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad \underline{1^\circ \text{ modo}}$$

si noti che se $t=0$ troviamo P_0 mentre se $t=1$ troviamo P_1.

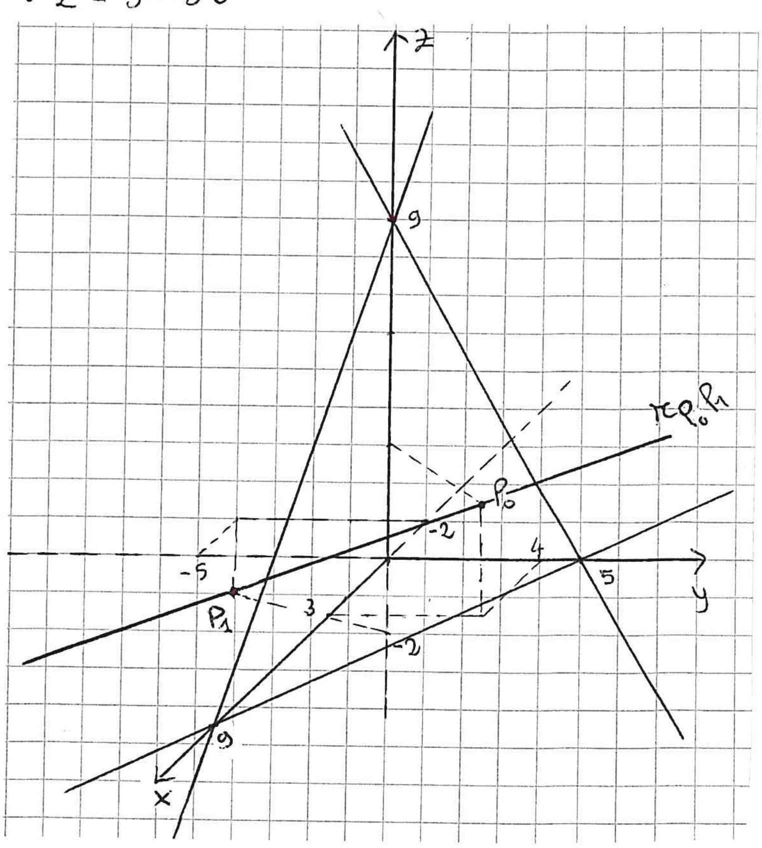
Scriviamo ora la retta come INTERSEZIONE di 2 PIANI ricavando t da un'eq.^{ne} per sostituire nelle altre due:

$5t=3-x$ $\quad t=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}x$ (dalla 1^a)

$$\begin{cases} y=4-\frac{27}{5}+\frac{9}{5}x & (2^a) \\ z=x & (3^a) \end{cases}$$

$$r_{P_0P_1} \begin{cases} y=\frac{9}{5}x-\frac{7}{5} & \text{PIANO VERTICALE} \\ z=x & \text{PIANO INCLINATO} \end{cases}$$

$\underline{2^\circ \text{ modo}}$



OSSERVAZIONE Considerando come vettore direttore $\vec{v} = P_1 - P_0$, come si vede dal disegno, la retta viene percorsa nel verso delle x decrescenti (o anche delle y decrescenti o delle z decrescenti).
Naturalmente avremmo potuto considerare come vettore direttore anche $-\vec{v} = (P_0 - P_1) = (5,9,5)$, percorrendo la retta nel verso delle x crescenti (o y crescenti o z crescenti) oppure un qualunque multiplo di uno dei due vettori $\vec{v}$ e $-\vec{v}$.

b) Il piano essendo perpendicolare alla retta, possiamo considerare come vettore NORMALE al piano il vettore direttore della retta. Quindi

eq.^{ne} vettoriale del piano $(P - P_2) \cdot \vec{N} = 0$ con $\vec{N} = \vec{v} = (-5,-9,-5)$

da cui $(x-4,\ y+5,\ z-14) \cdot (-5,-9,-5) = 0$

$-5(x-4) - 9(y+5) - 5(z-14) = 0$ $\qquad 5z = -5x - 9y + \overbrace{20 - 45 + 70}^{45}$

$$\boxed{z = -x - \frac{9}{5}y + 9}$$

⊙ come verifica possiamo controllare che passi per P_2 $-4+9+9 = 14$ OK e che il vettore normale al piano sia $\parallel$ al vettore $\vec{N}$ che abbiamo considerato : $-x - \frac{9}{5}y - z + 9 = 0$ $\quad \vec{N}_1 = (-1, -\frac{9}{5}, -1)$ che è $\parallel$ a $(-5,-9,-5)$ (basta moltiplicare per 5).

2) Determinare il punto di intersezione tra il piano di equazione $x+y+z-4=0$ e la retta per $P_0 = (-1,-3,1)$ avente come vettore direttore $\vec{v} = (1, 2, \frac{1}{2})$.

Svolgimento Scriviamo la retta in forma parametrica $\begin{cases} x = -1+t \\ y = -3+2t \\ z = 1+\frac{1}{2}t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$,

poi intersechiamo con il piano individuando il valore di t corrispondente al punto cercato : $\cancel{-1} + t - 3 + 2t + \cancel{1} + \frac{1}{2}t - 4 = 0$

$\frac{7}{2}t = 7$ $\quad t = 2$. Infine sostituiamo il valore di t nell' eq.^{ne} della retta per trovare il punto : $P_{r \cap \text{piano}} = (1,1,2)$.

CURVE nello SPAZIO

Una CURVA nello spazio è una funzione $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dove I è un INTERVALLO di $\mathbb{R}$, $\gamma(t)$ è il punto di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$ e γ è una funzione continua (cioè $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sono continue).

Eq.^{ni} parametriche $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $t \in I$

Vettore derivata $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

VETTORE TANGENTE o VETTORE VELOCITÀ in P_0 =

$$= \vec{v}_{P_0} = \gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$$

dove $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e t_0 è il valore del parametro t corrispondente a P_0, cioè $P_0 = \gamma(t_0)$.

RETTA TANGENTE in P_0 eq.^{ne} vettoriale $P = P_0 + t\vec{v}_{P_0}$ $t \in \mathbb{R}$

eq.^{ni} parametriche r_{tan} $\begin{cases} x = x_{P_0} + t\,x'(t_0) \\ y = y_{P_0} + t\,y'(t_0) \\ z = z_{P_0} + t\,z'(t_0) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

LUNGHEZZA di una CURVA $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$

Se IPOTESI 1 - L'intervallo I è CHIUSO e LIMITATO, cioè $I = [a, b]$

IPOTESI 2 - γ è di classe C^1, cioè $x(t), y(t), z(t)$ sono derivabili con $x'(t), y'(t), z'(t)$ continue

allora TESI 1 $L(\gamma)$ è FINITA

TESI 2 $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$.

ESERCIZI sulle CURVE nello SPAZIO

1) Individuate e disegnate il sostegno della curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita

da $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = -2+6t \\ z = 1+6t \end{cases}$ $t \in [0,1]$.

Svolgimento

$P_{in} = (-1,-2,1)$ $P_{fin} = (2,4,7)$

1° modo Ricavando t dalla 1ª eq.ne $3t = x+1$ e sostituendo nella 2ª e nella 3ª otteniamo

$\begin{cases} y = -2+2(x+1) \\ z = 1+2(x+1) \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \\ z = 2x+3 \end{cases}$. Pertanto il sostegno della curva è

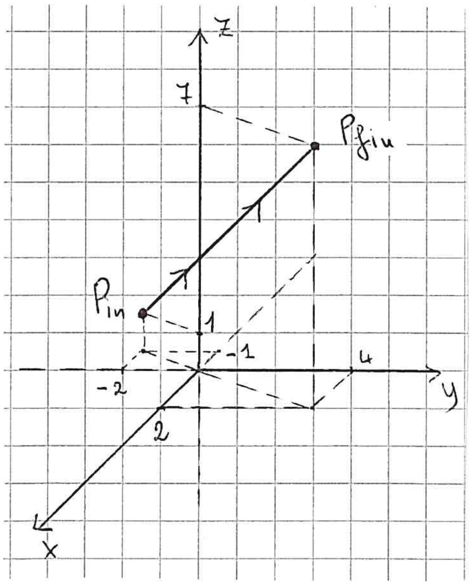
contenuto sia nel piano verticale $y = 2x$, sia nel piano inclinato $z = 2x+3$.

Poiché l'intersezione di due piani è una RETTA, il sostegno della curva è contenuto nella retta. Pertanto la curva percorre il SEGMENTO

di estremi $(-1,-2,1)$ e $(2,4,7)$

nel verso delle x crescenti

(o y crescenti, o z crescenti).



2° modo si può osservare che le equazioni sono quelle di una retta essendo le equazioni della retta per $P_0 = (-1,-2,1)$ con vettore direttore $\vec{v} = (3,6,6)$. La conclusione è la stessa.

2) Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$\begin{cases} x(t) = 6\cos t \\ y(t) = 6\,\mathrm{sen}\, t \\ z(t) = t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$.

a) Determinate le equazioni della retta tangente a γ in $P_0 = (0, 6, \frac{\pi}{2})$

b) Calcolate la lunghezza di γ.

Svolgimento (*)

a) $P_0 \in \gamma$ per $t_0 = \frac{\pi}{2}$: infatti $\begin{cases} 0 = 6\cos t \\ 6 = 6 \operatorname{sen} t \\ \frac{\pi}{2} = t \end{cases}$ $\begin{cases} \cos t = 0 \\ \operatorname{sen} t = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $t = \frac{\pi}{2}$ verifica tutte e 3 le eq.ni

$\gamma'(t) = (-6 \operatorname{sen} t, 6\cos t, 1)$

$\vec{v}_{P_0} = \gamma'(\frac{\pi}{2}) = (-6, 0, 1) = -6\vec{i} + \vec{k}$

$r_{\tan P_0} = \begin{cases} x = -6t \\ y = 6 \\ z = \frac{\pi}{2} + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$\cap$ PIANI $\begin{cases} y = 6 & \text{(piano verticale } /\!/ (x,z)) \\ z = -\frac{1}{6}x + \frac{\pi}{2} & \text{(piano inclinato)} \end{cases}$

$t = -\frac{1}{6}x$

(*) γ è una CURVA nello SPAZIO perchè $I = [0, 2\pi]$ è un intervallo e le 3 funzioni $x(t) = 6\cos t$, $y(t) = 6 \operatorname{sen} t$, $z(t) = t$ sono continue ($\operatorname{sen} t, \cos t, t$ sono continue su $\mathbb{R}$).

b) γ è derivabile perchè $6\cos t, 6 \operatorname{sen} t, t$ sono derivabili su $\mathbb{R}$ con $\gamma'(t) = (-6 \operatorname{sen} t, 6\cos t, 1)$. Inoltre le 3 funzioni $x'(t) = -6 \operatorname{sen} t$, $y'(t) = 6\cos t$, $z'(t) = 1$ sono continue su $\mathbb{R}$ ($\operatorname{sen} t, \cos t, 1$ sono continue) e quindi su I. Poichè $I = [0, 2\pi]$ è CHIUSO e LIMITATO possiamo applicare il Teorema sulla lunghezza ottenendo che $L(\gamma)$ è FINITA e

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{37} \, dt = \sqrt{37} \, [t]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{37} \simeq 38{,}22.$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-6 \operatorname{sen} t)^2 + (6\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{36 \operatorname{sen}^2 t + 36\cos^2 t + 1} =$$

$$= \sqrt{36 \underbrace{(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}_{=1} + 1} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$$

SCHEDE di ESERCIZI

Svolgete le SCHEDE di ESERCIZI n° 3 - 3bis - 4 - 4bis, escluso ES 1) Scheda 4 (gli esercizi N° 5-7 della Scheda 4 sono un po' più difficili).

Il 1° ARGOMENTO (curve nel piano e nello spazio) è CONCLUSO.

Dovete svolgere gli ESERCIZI del TUTORATO relativi alle CURVE e potete già svolgere TUTTI GLI ESERCIZI dei COMPITI su questo argomento.