COGNOME ____________________

NOME ____________________

MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|_|

CORSO AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2017-2018 — PARMA, 9 NOVEMBRE 2018

AN2-9/11/18 -1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore e mezza**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare la risposta.**

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate:

a) Sia $\gamma : [-2, \frac{5}{2}] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da

Svolgim. a pag. 4

$$\begin{cases} x(t) = -2\,(t - \frac{7}{2}) \\ y(t) = -3 + \sqrt{5 - 2t} \end{cases} \quad t \in [-2, \frac{5}{2}].$$

Il sostegno della curva ha equazione $y = -3 + \sqrt{x-2}$, quindi

la curva percorre il grafico della funzione radice ($y = \sqrt{x}$) spostato a destra di 2 e in basso di 3

dal punto iniziale $(11, 0)$ al punto finale $(2, -3)$

nel verso delle x decrescenti

Il vettore tangente nel punto $P_0 = (3, -2)$ è ... $\vec{v}_{P_0} = -2\vec{i} - \vec{j}$

La retta tangente in P_0 ha equazione: ... $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

I **versori** normali in P_0 sono: ... VERS $\vec{N}_{or} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ VERS $\vec{N}_{ant} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il sostegno di γ e il vettore tangente in P_0.

b) La **lunghezza** della curva $\gamma : [1, \frac{7}{2}] \to \mathbb{R}^3$ definita da

Svolgim. a pag. 4

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\,t \\ y(t) = \frac{2}{3}t^{3/2} \\ z(t) = \frac{2}{3}t^{3/2} \end{cases} \qquad t \in [1, \frac{7}{2}] \qquad \text{vale} \ldots \boxed{\frac{19}{3}}$$

c) Considerate la funzione $f(x,y) = 4 + 2\log\left(y^2 - 1 + \frac{x^2}{4}\right)$. AN2-9/11/18-2

a pag. 4-5 i) (sul foglio a quadretti) Determinate il dominio di f e rappresentatelo nel piano in modo che risulti perfettamente chiaro quali punti vi appartengono.

ii) Il punto $(-2, 1)$ appartiene alll'insieme di livello E_k per $k = 4$.

Tale insieme di livello ha equazione .... $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

e rappresenta l'ELLISSE di $C(0,0)$ e semiassi $a = 2\sqrt{2}$ $b = \sqrt{2}$

iii) Le equazioni parametriche di una curva che percorre l'insieme di livello trovato al punto ii) sono:

$$\begin{cases} x(t) = 2\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

iv) La massima pendenza del grafico di f in $(-2, 1)$ vale $2\sqrt{5} = \|\nabla f(-2,1)\|$

e viene raggiunta nella direzione .... $\vec{v}_{max} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} = \frac{\nabla f(-2,1)}{\|\nabla f(-2,1)\|}$

d) Considerate la funzione $f(x,y) = 8 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

a pag. 5-6 i) Determinate il dominio di f, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f, spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura); disegnate con cura il grafico di f.

iii) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corrrispondente a $(x_0 = 2, y_0 = -\frac{8}{3})$ è ... $z = -\frac{9}{10}x + \frac{6}{5}y + 8$

iv) La retta per P_0 perpendicolare al grafico della funzione f ha equazione $\begin{cases} x = 2 + \frac{9}{10}t \\ y = -\frac{8}{3} - \frac{6}{5}t \\ z = 3 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

e) Considerate l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, y \geq 0\}$ (disegnate l'insieme sul foglio a quadretti). DISEGNO a pag. 6

Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme E come normale rispetto a x; ripetete come normale rispetto a y:

$E_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -5 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

$E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 5,\ -\sqrt{25 - y^2} \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\}$

f) Si consideri l'equazione differenziale $\frac{8}{3}y''(x) + 4y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - 1$.

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = c_1 e^{-3/4 x} + c_2 x e^{-3/4 x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

a pag. 6 ← Calcoli: eq.^{ne} caratt. $\frac{8}{3}t^2 + 4t + \frac{3}{2} = 0$ $t_1 = -\frac{3}{4}$ con molt 2 SOL.^{ni} FOND. $y_1(x) = e^{-3/4 x}$ $y_2(x) = x e^{-3/4 x}$

La soluzione particolare va cercata nella forma ... $\bar{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

perchè il 2° m dell'eq.^{ne} è un polinomio di 3° grado e non si deve moltiplicare per x perchè nell'eq.^{ne} compare $y(x)$ -

1) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione

Svolgim. a pag. 7-8-9

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x - 4)(y^2 - 4y).$$

a) Determinate il dominio di f, i punti in cui f vale 0 e il segno di f negli altri punti (illustrate i risultati con un disegno).

b) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio; NON studiatene la natura (sono tutti punti di sella).

c) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le x, x \le 2\}.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $g(x,y) = 3 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Svolgim. a pag. 10-11

a) Determinate il dominio di g, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g, spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \le z \le 3 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}, x \le 0, y \le 0\}.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

Svolgim. a pag. 12-13

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = (1 + 3x)e^{2x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

Risposta: ... $y(x) = \frac{8}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$

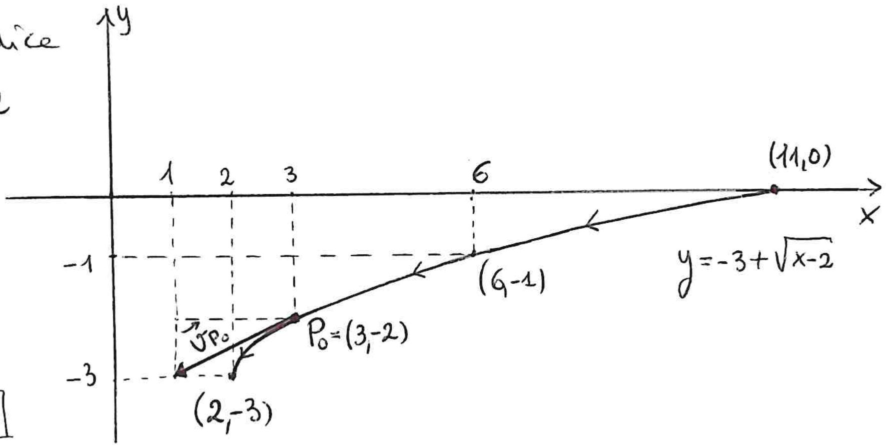
SOLUZIONE dell'appello del 9 NOVEMBRE 2018

ES.0) a) $x(t) = -2t+7$

$P_{in} = (11,0)$ $P_{fin} = (2,-3)$ $\quad$ eq.^{ne} $-2t = x-7 \to y = -3+\sqrt{5+x-7}$
$t=-2 \qquad t=\frac{5}{2}$

$$\boxed{y = -3+\sqrt{x-2}}$$

si tratta del grafico della radice $y=\sqrt{x}$ spostato a destra di 2 e in basso di 3: passa per $(2,-3)$ $(3,-2)$ $(6,-1)$ $(11,0)$.



$P_0=(3,-2)$ corrisponde a $t_0 = 2$

$$\begin{cases} 3=-2t+7 \\ -2=-3+\sqrt{5-2t} \end{cases} \quad \begin{cases} 2t=4 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{t=2} \\ -2=-3+\sqrt{1}=-3+1=-2 \text{ ok} \end{cases}$$

$$\gamma'(t) = \left(-2, \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{5-2t}}\right) = \left(-2, -\frac{1}{\sqrt{5-2t}}\right)$$

$\vec{v}_{P_0} = \gamma'(2) = -2\vec{i} - \vec{j}$ $\quad m_{tan} = \frac{1}{2}$ $\quad r_{tan}\ y = -2+\frac{1}{2}(x-3)$ $\quad y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

$\|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{5}$ $\quad$ VERS $\vec{N}_{or} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ $\quad$ VERS $\vec{N}_{out} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

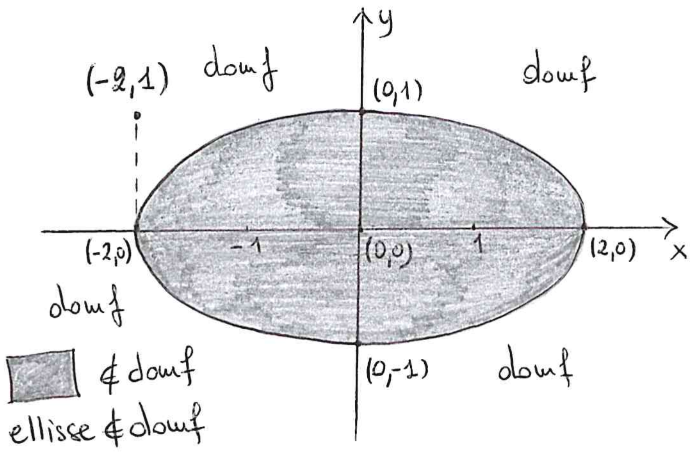
b) γ è definita sull'intervallo CHIUSO e LIMITATO $[1,\frac{7}{2}]$ ed è di classe C^1 su questo intervallo, quindi si può calcolare la lunghezza con il Teorema.

$\gamma'(t) = (\sqrt{2}, \sqrt{t}, \sqrt{t})$ $\qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{2+t+t} = \sqrt{2+2t}$

$$L(\gamma) = \int_1^{7/2} \sqrt{2+2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{7/2} 2(2+2t)^{1/2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{(2+2t)^{3/2}}{3/2}\right]_1^{7/2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(2+2t)^{3/2}\right]_1^{7/2} = \frac{1}{3}\left[9^{3/2} - 4^{3/2}\right] = \frac{1}{3}(27-8) = \boxed{\frac{19}{3}}$$

c) i) $\operatorname{dom} f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2 - 1 + \frac{x^2}{4} > 0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 > 1\right\}$ al di fuori dell'ELLISSE di $C(0,0)$ e semiassi $a=2, b=1$, ellisse escluso dal dominio.



ii) $(-2,1) \in E_K$ per $K = f(-2,1) =$

$= 4 + 2\log\left(1-1+\frac{4}{4}\right) =$

$= 4 + 2\underbrace{\log(1)}_{=0} = 4$

$(-2,1) \in E_4$

$E_4 : \cancel{4} = \cancel{4} + 2\log\left(y^2-1+\frac{x^2}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2\log\left(y^2-1+\frac{x^2}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \log\left(y^2-1+\frac{x^2}{4}\right)=0 \underset{\log 1 = 0}{\Leftrightarrow} y^2-1+\frac{x^2}{4}=1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ ELLISSE di $C(0,0)$ e semiassi $\underset{\approx 2,8}{a=2\sqrt{2}}$ $\underset{\approx 1,4}{b=\sqrt{2}}$

iii) $\begin{cases} x(t) = 2\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ 1 giro in verso antiorario

iv) $\nabla f(x,y) = \left(2\,\frac{\frac{1}{4}(2x)}{y^2-1+\frac{x^2}{4}},\ 2\,\frac{2y}{y^2-1+\frac{x^2}{4}}\right) = \left(\frac{x}{y^2-1+\frac{x^2}{4}},\ \frac{4y}{y^2-1+\frac{x^2}{4}}\right)$

$\nabla f(-2,1) = \left(\frac{-2}{1}, \frac{4}{1}\right) = (-2,4) = -2\vec{i}+4\vec{j}$ $\quad \|\nabla f(-2,1)\| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

La massima pendenza del grafico nel punto $(-2,1)$ vale $\|\nabla f(-2,1)\| = 2\sqrt{5}$ ed è raggiunta nella direzione $\vec{v}_{max} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

d) i) $\text{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$ perchè una somma di due quadrati è sempre maggiore o uguale a 0.

ii) eq.^{ne} del grafico di f : $z = 8 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ si tratta di un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,8)$, rivolto verso il basso, $a = \frac{3}{2}$ $(a>1 \rightarrow 0 < \hat{ap} < 45°)$,

$\hat{ap} = \arctan\frac{1}{a} = \arctan\frac{2}{3} \approx 33{,}7°$; $\cap$ piano (x,y) su $0 = 8 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

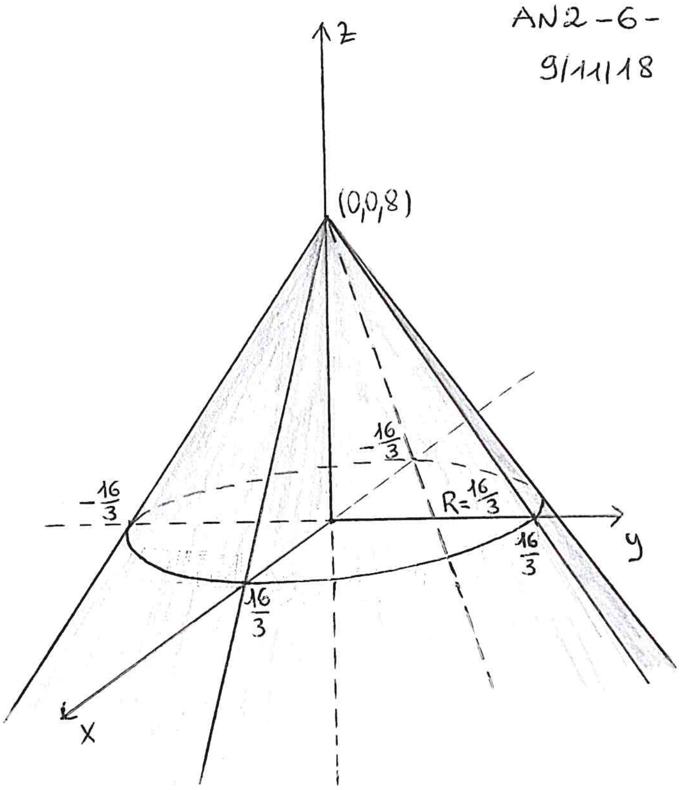
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x^2+y^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2$ circonf di $C(0,0)$ e $R = \frac{16}{3} = 5{,}\bar{3}$

iii) $\nabla f(x,y) = \left(-\frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{3}{2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

$f(2,-\frac{8}{3}) = z_0 = 8 - \frac{3}{2}\sqrt{4+\frac{64}{9}} = 8 - \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{3}} = 3$

$\nabla f(2,-\frac{8}{3}) = \left(-\frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\frac{10}{3}}, -\frac{3}{\cancel{2}} \frac{-\cancel{8}^{4}/\cancel{3}}{10/3} \right) =$

$= \left(-\frac{9}{10}, +\frac{12}{10} \right) = \left(-\frac{9}{10}, \frac{6}{5} \right)$



Eq.^{ne} del piano tangente in $P_0 = (2, -\frac{8}{3}, 3)$

$z = 3 - \frac{9}{10}(x-2) + \frac{6}{5}(y + \frac{8}{3})$

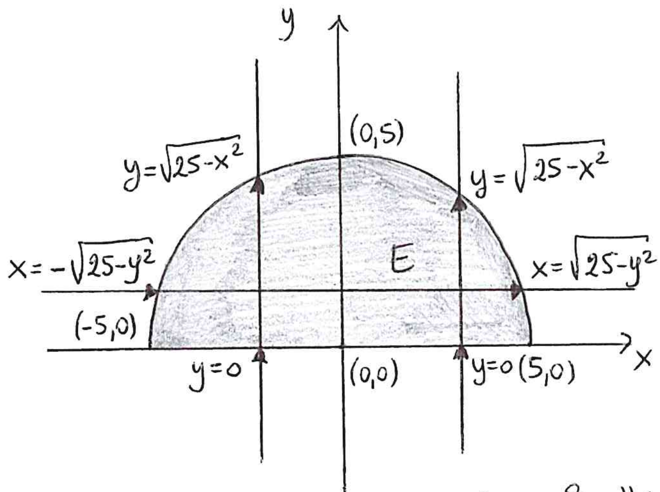
$z = -\frac{9}{10}x + \frac{6}{5}y + 8$

iv) $\vec{N}$ = vettore normale al piano tangente $= (\frac{9}{10}, -\frac{6}{5}, 1)$ è perpendicolare alla superficie del cono ed è quindi un vettore direttore della retta perpendicolare richiesta:

$$r_\perp \begin{cases} x = 2 + \frac{9}{10}t \\ y = -\frac{8}{3} - \frac{6}{5}t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$$

(oss. Si può anche considerare $\vec{N} = (9,-12,10)$ o qualunque suo multiplo).

e)



f) eq.^{ne} omogenea associata $\frac{8}{3}y''(x) + 4y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = 0$

eq.^{ne} caratt. $\frac{8}{3}t^2 + 4t + \frac{3}{2} = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{8/3} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

$t_1 = -\frac{3}{4}$ con molt 2 Sol.^{ni} FOND

$y_1(x) = e^{-3/4 x} \quad y_2(x) = x e^{-\frac{3}{4}x}$

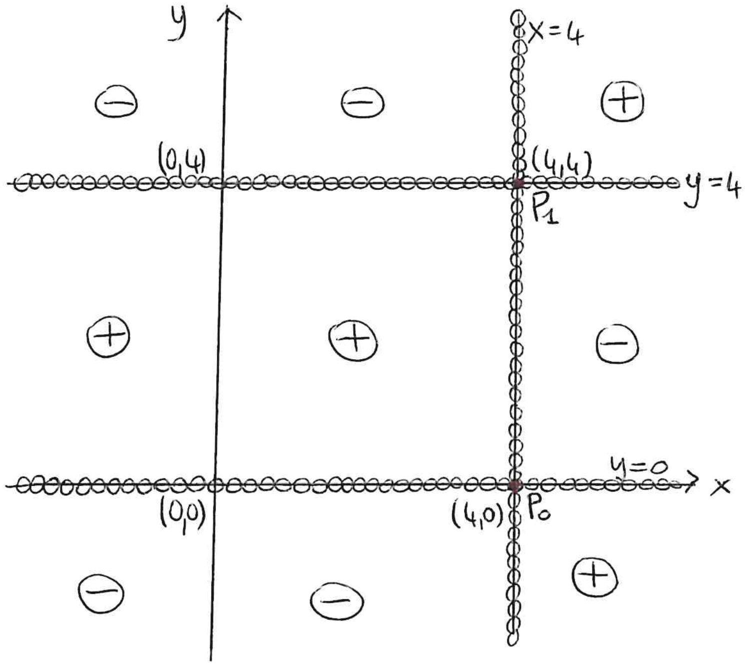
tutte le sol.^{ni} $y(x) = c_1 e^{-\frac{3}{4}x} + c_2 x e^{-3/4 x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

ES.1) a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

$$f(x,y)=0 \iff \frac{1}{2}(x-4)(y^2-4y)=0 \iff x=4 \text{ o } y=0 \text{ o } y=4$$

$$f(x,y)>0 \iff \begin{cases} x-4>0 \\ y^2-4y>0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-4<0 \\ y^2-4y<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>4 \\ y<0 \text{ o } y>4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x<4 \\ 0<y<4 \end{cases}$$



f=0
⊕ $f>0$
⊖ $f<0$

b) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2}(y^2-4y), \frac{1}{2}(x-4)(2y-4) \right)$

P.ti stazionari:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y^2-4y)=0 \\ \frac{1}{2}(x-4)(2y-4)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \text{ o } y=4 \\ x=4 \text{ o } y=2 \end{cases}$$

2 P.ti STAZIONARI $P_0(4,0)$ $P_1=(4,4)$

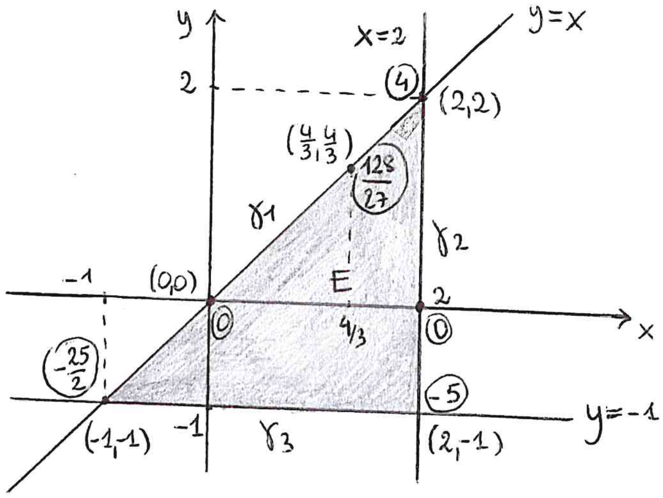
<u>NON RICHIESTO</u>

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(2y-4) \\ \frac{1}{2}(2y-4) & x-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y-2 \\ y-2 & x-4 \end{pmatrix}$$

$Hf(4,0)=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(4,0)=-4<0$ (4,0) P.TO di SELLA

$Hf(4,4)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(4,4)=-4<0$ (4,4) P.TO di SELLA

ES 2) c) <u>1° passo</u> E è il Triangolo di Vertici (2,2) (−1,−1) e (2,−1)



E è un TRIANGOLO <u>CHIUSO</u> (tutti e 3 i lati sono compresi in E) e LIMITATO perché $E \subset B_3(0,0)$ (il punto più lontano da (0,0) di E è (2,2) e dist((2,2),(0,0)) = $2\sqrt{2} \simeq 2{,}8$)

Inoltre f è continua su $\mathbb{R}^2$ in quanto prodotto di un polinomio di 2° grado in y per un polinomio di 1° grado in x (oltre alla costante $\frac{1}{2}$) e quindi in particolare è continua su E. Si può applicare pertanto il Teorema di Weierstrass che garantisce l'esistenza del massimo e del minimo assoluti di f su E -

<u>2° passo</u> : non ci sono punti di max o minimo locale interni ad E (i due punti stazionari sono esterni ad E e comunque sono entrambi punti di sella) - Quindi il massimo e il minimo sono assunti sul bordo -

<u>3° passo</u> : studio del ∂E $\quad \gamma_1 \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \quad t\in[-1,2] \quad g_1(t)=f(t,t)=$

$= \frac{1}{2}(t-4)(t^2-4t) = \frac{1}{2}t^3-4t^2+8t \qquad g_1'(t)=\frac{3}{2}t^2-8t+8$

$g_1'(t)=0 \iff 3t^2-16t+16=0 \qquad t_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{3}=\frac{8\pm 4}{3}$ $\nearrow t_1=\frac{4}{3}$ $\searrow t_2=4$ NON ACC. $(t\in[-1,2])$

TEMPI $\quad t=-1 \quad t=\frac{4}{3} \quad t=2$

PUNTI $\quad (-1,-1) \quad (\frac{4}{3},\frac{4}{3}) \quad (2,2)$

VALORI $\quad f(-1,-1)=\frac{1}{2}\cdot(-5)\cdot 5 = -\frac{25}{2}$

$f(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{1}{2}(\frac{4}{3}-4)(\frac{16}{9}-\frac{16}{3})=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{8}{3})(-\frac{32}{9})=\frac{128}{27}\simeq 4{,}74$

$f(2,2)=\frac{1}{2}(2-4)(4-8)= 4$

$\gamma_2 \begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases} \quad t\in[-1,2] \quad g_2(t)=f(2,t)=\frac{1}{2}(2-4)(t^2-4t)$
$= -t^2+4t$

$g_2'(t)=-2t+4 \quad g_2'(t)=0 \iff t=2$

TEMPI $t=-1$ $t=2$ PUNTI $(2,-1)$ $(2,2)$

VALORI $f(2,-1)=\frac{1}{2}(-2)(5)=-5 \quad f(2,2)=4$

$\gamma_3 \begin{cases} x=t \\ y=-1 \end{cases} \quad t\in[-1,2] \quad g_3(t)=f(t,-1)=\frac{1}{2}(t-4)(5)=\frac{5}{2}t-10$
$g_3'(t)=\frac{5}{2}\neq 0 \ \forall t$

TEMPI $t=-1$ $t=2$ PUNTI $(-1,-1)$ $(2,-1)$

VALORI $f(-1,-1)=-\frac{25}{2} \quad f(2,-1)=-5$

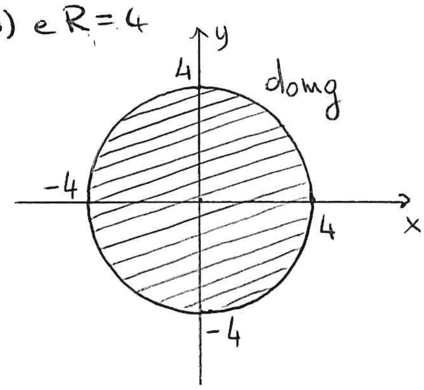
4° passo: Conclusione il massimo e il minimo sono assunti sul ∂E, sul ∂E f è compresa tra $-\frac{25}{2}$ e $\frac{128}{27}$, allora

$$\min_E f=-\frac{25}{2}=f(-1,-1) \quad e \quad \max_E f=\frac{128}{27}=f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right).$$

ES. 2)

a) $\text{dom}\, g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\} =$

= CERCHIO CHIUSO (bordo compreso) di $C(0,0)$ e $R=4$



b) eq.^{ne} del grafico di g $z = 3 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

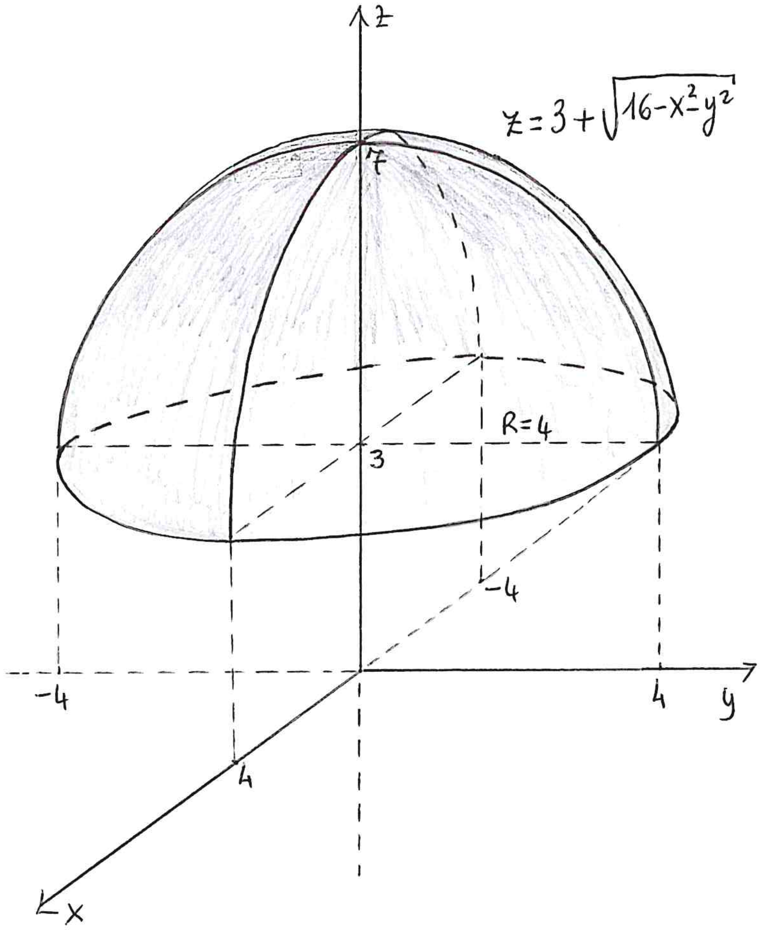
si tratta della metà superiore della

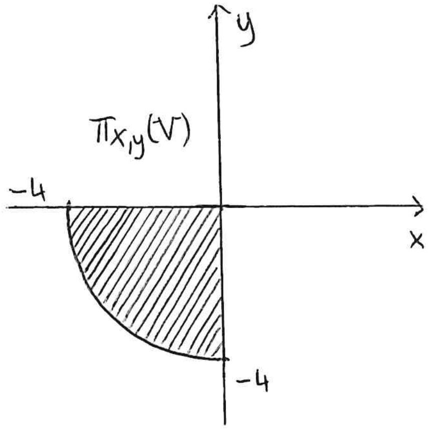
SUPERFICIE SFERICA di $C(0,0,3)$ e $R=4$.

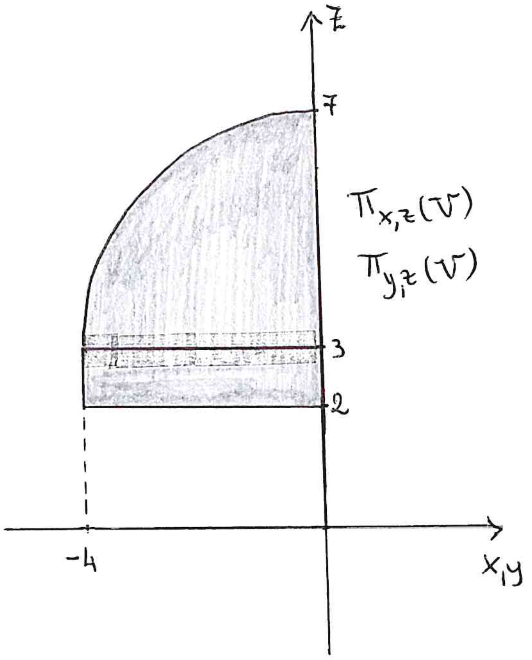
$z_{cima} = z_c + R = 3 + 4 = 7$

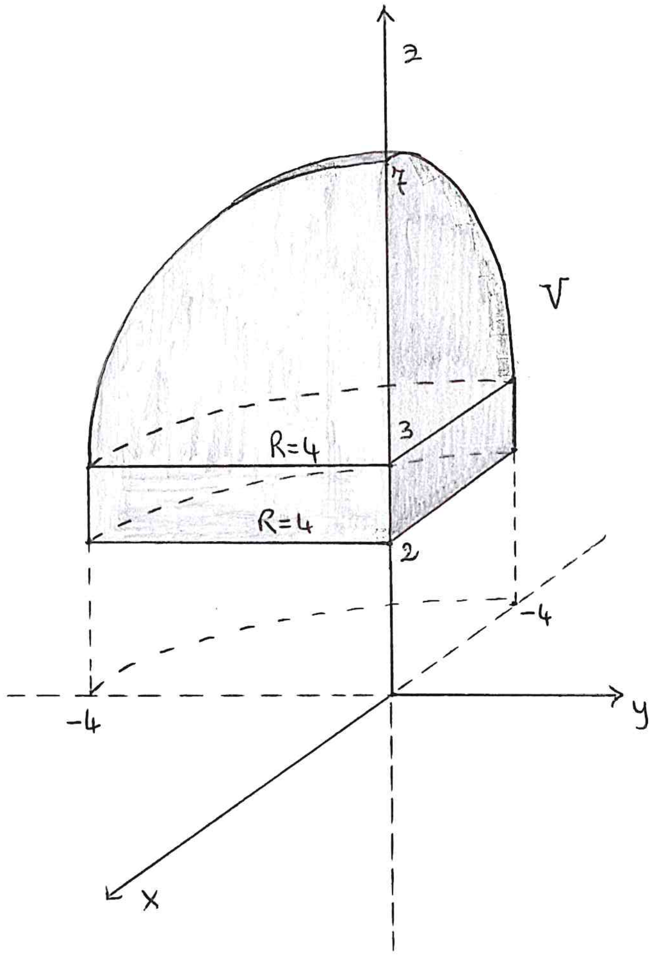
$\cap$ piano (x,y) : ϕ

c) Dobbiamo considerare tutti i punti dello spazio al di sopra del piano orizzontale $z=2$ e al di sotto della superficie sferica.
Quindi il solido è composto dal cilindro di $R=4$ e $h=1$ (per $2 \leq z \leq 3$) e dalla metà superiore della sfera di $C(0,0,3)$ e $R=4$.
Poi dobbiamo considerare solo $\frac{1}{4}$ del solido con $x \leq 0$ e $y \leq 0$.









$$\text{Volume } V = \int_{\Pi_{x,y}(V)} \left(\left(3+\sqrt{16-x^2-y^2} \right) - 2 \right) dx\,dy = \int_{\Pi_{x,y}(V)} \left(1+\sqrt{16-x^2-y^2} \right) dx\,dy$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\int_0^4 \left(1+\sqrt{16-\rho^2} \right) \rho\, d\rho \right) d\theta = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\int_0^4 \rho + \rho\left(16-\rho^2\right)^{1/2} d\rho \right) d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{\left(16-\rho^2\right)^{3/2}}{3/2} \right]_0^4 \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^4 - \frac{1}{3} \left[\left(16-\rho^2\right)^{3/2} \right]_0^4 \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(8 - \frac{1}{3}\left(0 - 16^{3/2}\right) \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(8 + \frac{1}{3} 64 \right) = \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overset{44}{\cancel{88}}}{3} = \boxed{\frac{44}{3}\pi}$$

ES.3) Eq.^{ne} omogenea associata $y''(x)-y'(x)-2y(x)=0$

eq.^{ne} caratt. $t^2-t-2=0$ $\quad t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}$ $\nearrow t_1=-1$, $\searrow t_2=2$

$(t+1)(t-2)=0$

SOL.^{ni} FONDAM. $y_1(x)=e^{-x}$ $\quad y_2(x)=e^{2x}$

Sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea $y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ $\quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x)=x(Ax+B)e^{2x}$ perchè il 2°m è il prodotto di un polinomio di 1°grado per e^{2x} ($f(x)=(1+3x)e^{2x}$) e dobbiamo moltiplicare per x perchè ad esponente di e^{2x} c'è $\alpha=2$ che è sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratteristica con molteplicità 1.

$\bar{y}(x)=(Ax^2+Bx)e^{2x}$ $\quad \bar{y}'(x)=(2Ax+B)e^{2x}+2(Ax^2+Bx)e^{2x}=$

$=(2Ax^2+(2A+2B)x+B)e^{2x}$

$\bar{y}''(x)=(4Ax+2A+2B)e^{2x}+2(2Ax^2+(2A+2B)x+B)e^{2x}=$

$=(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B)e^{2x}$.

Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo:

$(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B)e^{2x}-(2Ax^2+(2A+2B)x+B)e^{2x}$

$-2(Ax^2+Bx)e^{2x}=(1+3x)e^{2x}$ $\quad \underline{\forall x\in\mathbb{R}}$

Portando tutto a 1° membro e raccogliendo e^{2x} si ottiene

$\left[(\cancel{4Ax^2}-\cancel{2Ax^2}-\cancel{2Ax^2}+(8A+\cancel{4B}-2A-\cancel{2B}-\cancel{2B}-3)x+(2A+4B-B-1)\right]\cdot e^{2x}=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Poichè $e^{2x}\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ il prodotto si annulla se e solo se si annulla il 1° fattore, quindi deve essere

$(6A-3)x+(2A+3B-1)=0$ $\quad \underline{\forall x\in\mathbb{R}}$

Per il principio di identità dei polinomi, il polinomio di 1°grado (che si trova a 1°m) si annulla $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ si annullano entrambi i coefficienti.

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 6A-3=0 \\ 2A+3B-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ 1+3B-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 3B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=0 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x)=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} sono:

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x} \qquad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$$

<u>Pb. di Cauchy</u> $\quad y'(x)=-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x}+xe^{2x}+x^2e^{2x}$

$$\begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1+c_2=2 \\ -c_1+2c_2=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3c_2+4=2 \\ c_1=2c_2+4 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1=-\frac{4}{3}+4=\frac{8}{3} \\ c_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

(oppure 1^a+2^a: $3c_2=-2 \rightarrow c_2=-\frac{2}{3}$ ecc.)

$\boxed{\text{Sol.}^{ne}}$ $\boxed{y(x)=\frac{8}{3}e^{-x}-\frac{2}{3}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}}$