LEZIONE del 28 APRILE 2020

Schede di ESERCIZI fino a N.6-7

DERIVATE DIREZIONALI

La lezione scorsa abbiamo visto che la DERIVATA DIREZIONALE di f in (x_0,y_0) nella direzione $\vec{v}=(v_1,v_2)$ rappresenta la pendenza (SIGNIFICATO GEOMETRICO) del grafico in $P_0=(x_0,y_0,\underbrace{f(x_0,y_0)}_{=z_0})$ nella direzione indicata da $\vec{v}$ e che si definisce come

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv_1,\,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t}$$

OSSERVAZIONI 1) Come caso particolare se consideriamo le direzioni degli assi x e y dobbiamo ritrovare le due derivate parziali:

$\vec{v}=\vec{i}$ vettore direzione dell'asse x $\quad \vec{v}=(1,0)\quad (x_0+tv_1,y_0+tv_2)=(x_0+t,y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

basta cambiare nome a t e chiamarlo h

se $\vec{v}=\vec{i}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

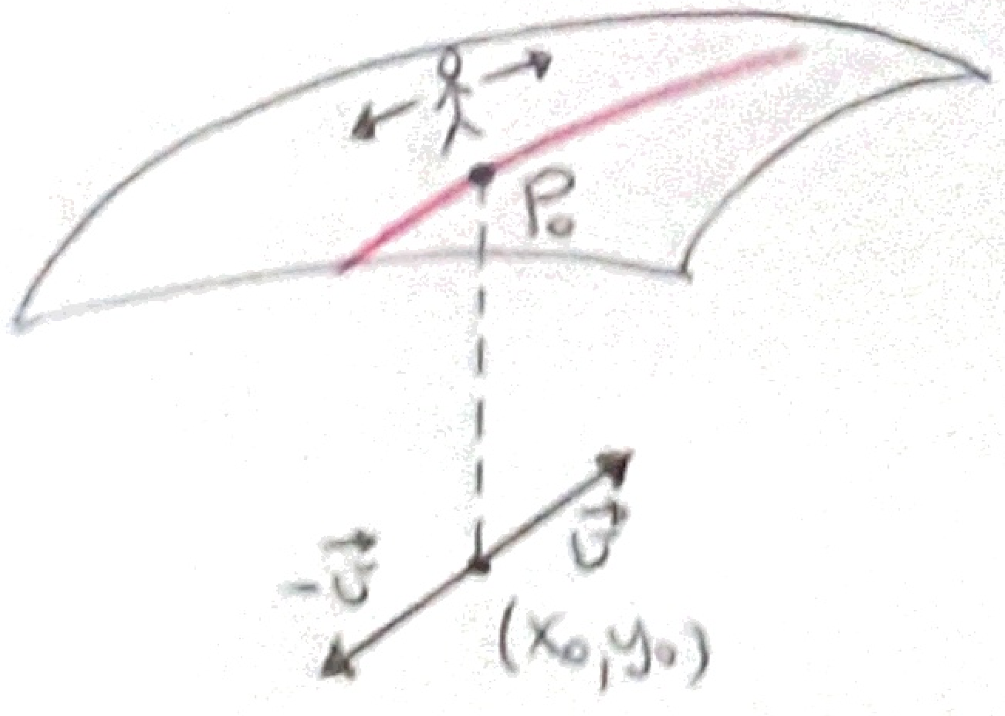
$\vec{v}=\vec{j}$ vettore direzione dell'asse y $\quad \vec{v}=(0,1)\quad (x_0+tv_1,y_0+tv_2)=(x_0,y_0+t)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

basta cambiare nome a t e chiamarlo k

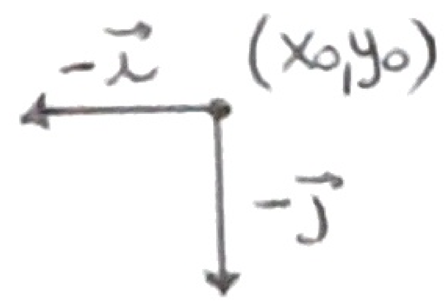
se $\vec{v}=\vec{j}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

2) Cosa succede se si passa alla direzione opposta $-\vec{v}$?



$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{v})}(x_0,y_0)=-\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)$$

In particolare $\vec{v} = -\vec{\imath}$ è la direzione dell' asse x orientato VERSO SINISTRA e $\dfrac{\partial f}{\partial(-\vec{\imath})}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, mentre



se $\vec{v} = -\vec{\jmath}$ (direzione dell'asse y orientato verso il basso) risulta

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{\jmath})}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

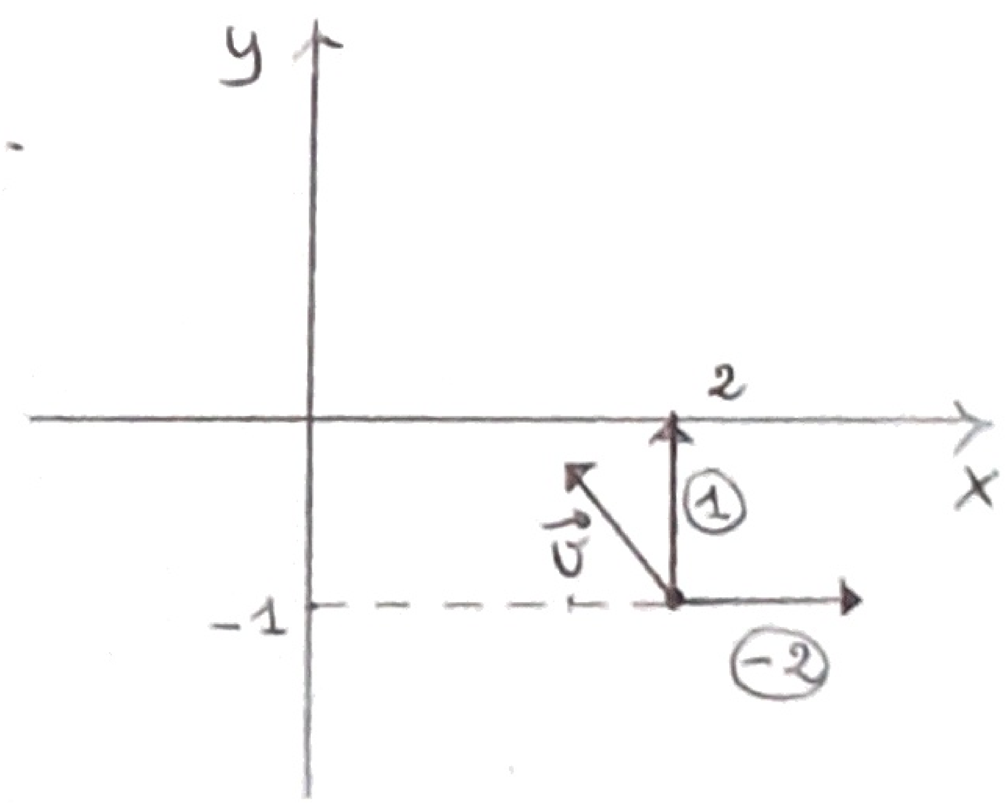
ESEMPI 1) $f(x,y) = c$ il grafico ha eq.ne $z = c$ che rappresenta un PIANO ORIZZONTALE, pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = 0 \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \ \forall \vec{v} \text{ direzione in } \mathbb{R}^2.$$

2) Consideriamo di nuovo $f(x,y) = 8 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e $(x_0 = 2, y_0 = -1)$.

Calcoliamo la derivata direzionale di f in $(2,-1)$ nella direzione

$\vec{v} = \underbrace{-\frac{3}{5}}_{v_1}\vec{\imath} + \underbrace{\frac{4}{5}}_{v_2}\vec{\jmath}$ (si può verificare che $\|\vec{v}\| = 1$).



Abbiamo già calcolato le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = -2$ $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,-1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(2 - \frac{3}{5}t, -1 + \frac{4}{5}t) - f(2,-1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{8 - \frac{1}{2}\left[(2 - \frac{3}{5}t)^2 + (-1 + \frac{4}{5}t)^2\right] - \frac{11}{2}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{8 - \frac{1}{2}\left[4 + \frac{9}{25}t^2 - \frac{12}{5}t + 1 + \frac{16}{25}t^2 - \frac{8}{5}t\right] - \frac{11}{2}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{8 - \frac{5}{2}} - \frac{1}{2}t^2 + 2t \cancel{- \frac{11}{2}}}{t} = \lim_{t \to 0} -\frac{1}{2}t + 2 = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,-1) = 2$$

In questo modo non è semplice calcolare una derivata direzionale.

Si dimostra che

se f è DIFFERENZIABILE in (x_0, y_0)

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$$

In questo modo, essendo $\nabla f(2,-1) = -2\vec{i} + \vec{j}$ avremo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,-1) = \underset{-2\vec{i}+\vec{j}}{\underset{\parallel}{\nabla f(2,-1)}} \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2.$$

Negli **ESERCIZI**: Calcolare $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ sapendo che

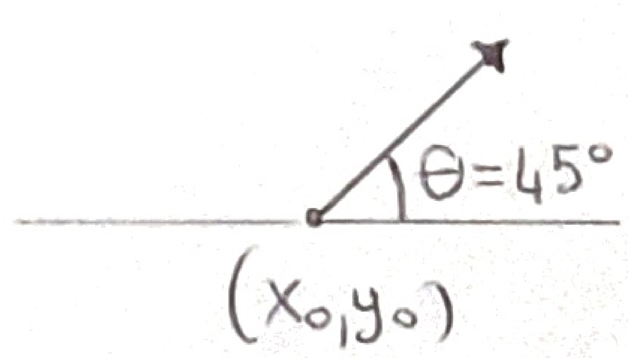
<u>1ª possibilità</u> è dato un VETTORE $\vec{w}$ di modulo $\neq 1$ per individuare la direzione

allora $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ in modo che sia un **VERSORE**

<u>2ª possibilità</u> è dato un angolo θ per individuare la direzione

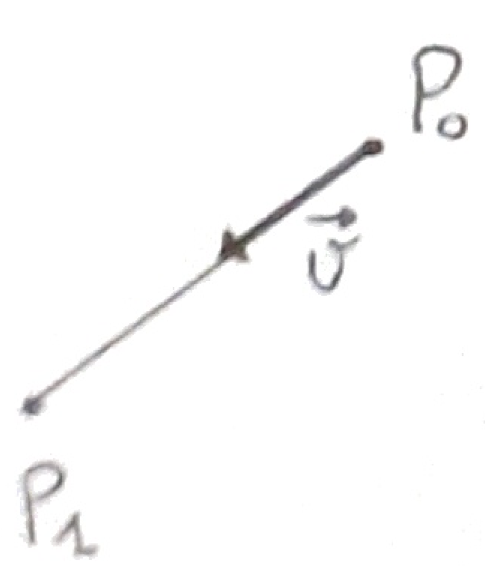
ad es. $\theta = 45°$

$\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$



$$\vec{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$$

<u>3ª possibilità</u> è dato un punto P_1 per individuare la direzione



$$\vec{v} = \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|}$$

Si dimostra anche che

se f è DIFFERENZIABILE in (x_0, y_0)

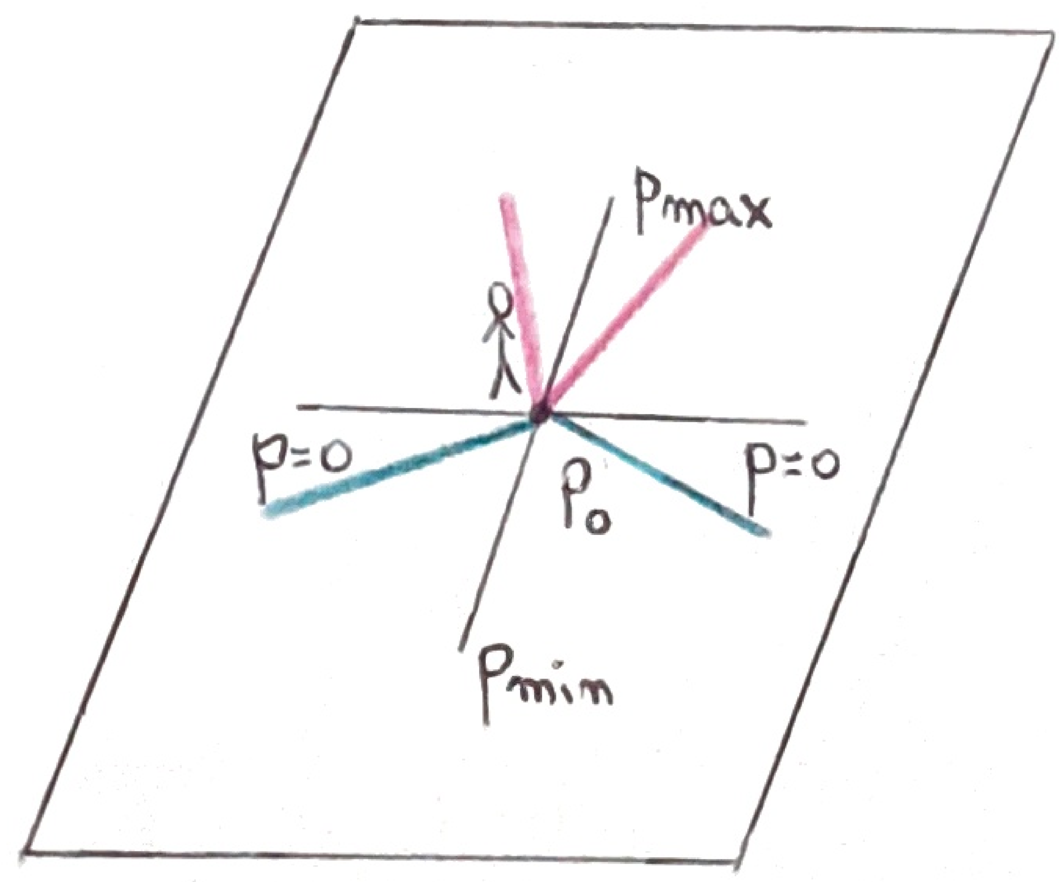
$\Downarrow$

il grafico di f ammette in $P_0 = (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$
il PIANO TANGENTE

e

il grafico di f ammette in P_0 la PENDENZA MASSIMA e la PENDENZA MINIMA

La pendenza del grafico in P_0 in una data direzione $\vec{v}$ è uguale alla pendenza del piano tangente in P_0 sempre nella direzione $\vec{v}$, quindi possiamo analizzare le pendenze sul piano tangente:



p_{max} = pendenza massima $\quad$ p_{min} = pendenza minima

Il grafico di f in P_0 assume tutte le pendenze $p \in [p_{min}, p_{max}]$ e se la pendenza $p \in \,]p_{min}, p_{max}[$ essa viene assunta due volte.

SIGNIFICATO GEOMETRICO del GRADIENTE

Se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora **il GRADIENTE di f in (x_0, y_0) indica la direzione in cui la PENDENZA è MASSIMA.**

Tale direzione si indica con $\vec{v}_{max}$ e si chiama **DIREZIONE di massima salita**. La direzione in cui la pendenza è

MINIMA si indica con $\vec{v}_{min}$ e si chiama **DIREZIONE di massima discesa**. Ovviamente $\boxed{\vec{v}_{min} = -\vec{v}_{max}}$

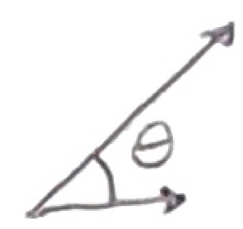
Dimostriamo quanto affermato:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v} = \|\nabla f(x_0,y_0)\|\,\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$$

$\downarrow$ Vale se f è differenziabile in (x_0,y_0)

Definizione di prodotto scalare

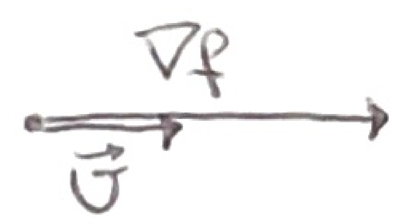
dove $\|\vec{v}\|=1$ e θ è l'angolo ($\theta\in[0,\pi]$) compreso tra i due vettori $\nabla f(x_0,y_0)$ e $\vec{v}$



quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \|\nabla f(x_0,y_0)\|\cos\theta \qquad (-1\le\cos\theta\le 1)$$

e risulta MASSIMA se $\cos\theta = 1$ cioè $\theta = 0$ cioè $\vec{v}$ e $\nabla f(x_0,y_0)$ sono paralleli e concordi



Questo significa che $\vec{v}_{max}$ è il VERSORE nella direzione del gradiente, cioè

$$\vec{v}_{max} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}.$$

Inoltre la pendenza massima sarà

$$\text{pendenza massima} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_{max}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}_{max} =$$

$$= \nabla f(x_0,y_0)\cdot\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|} =$$

$\vec{w}\cdot\vec{w} = \|\vec{w}\|^2$

$$= \frac{\|\nabla f(x_0,y_0)\|^2}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|} = \|\nabla f(x_0,y_0)\|$$

ESERCIZIO. Riprendiamo $f(x,y) = 8 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ in $(x_0=2, y_0=-1)$.

Cerchiamo la massima pendenza del grafico in $P_0 = (2, -1, \frac{11}{2})$ e la direzione nella quale tale pendenza viene raggiunta.

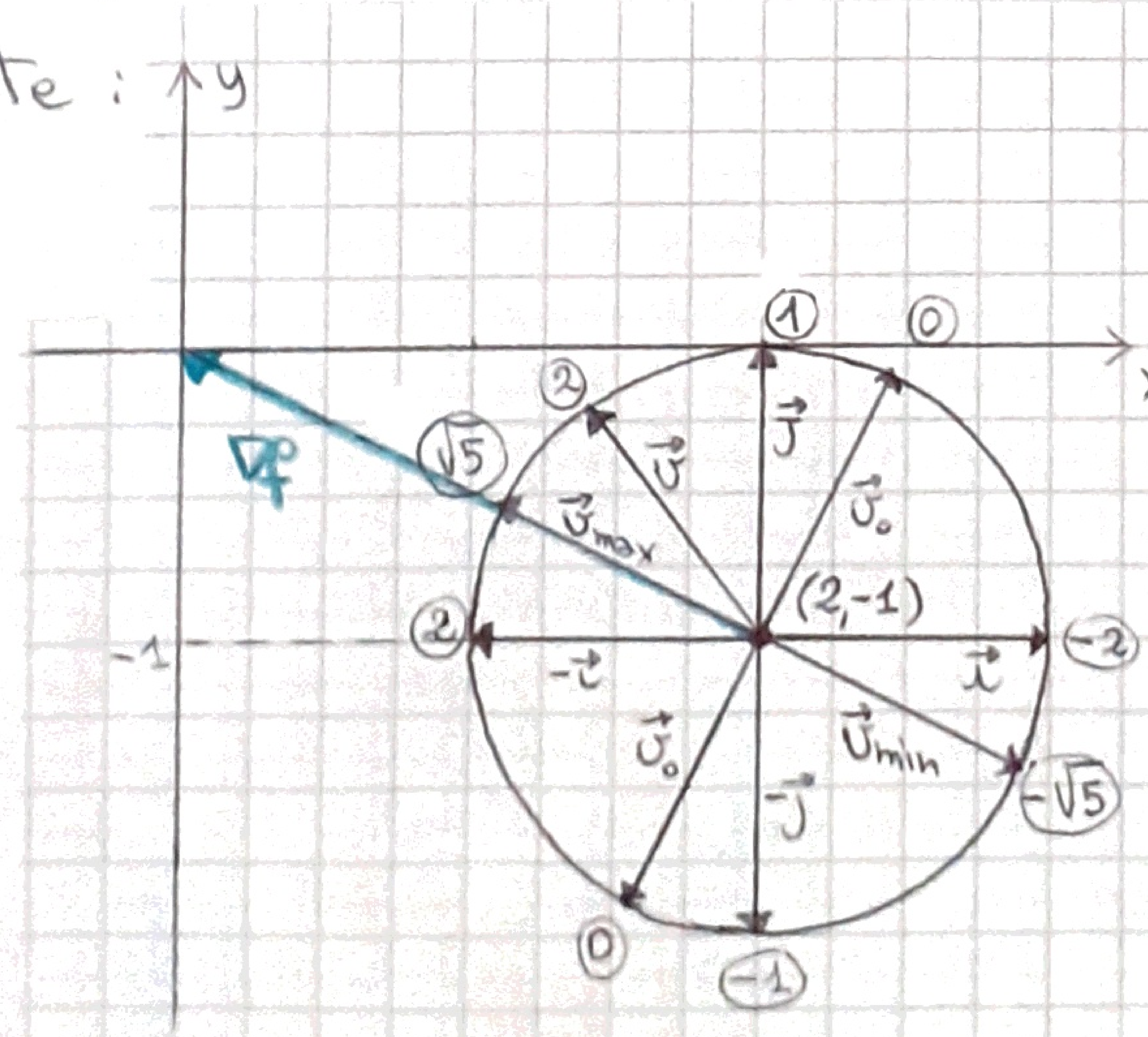
Abbiamo già trovato $\nabla f(2,-1) = -2\vec{i} + \vec{j}$, quindi la massima pendenza è $\boxed{p_{max}} = \|\nabla f(2,-1)\| = \|-2\vec{i}+\vec{j}\| = \boxed{\sqrt{5}} \approx 2{,}24$ ed è raggiunta nella direzione $\boxed{\vec{v}_{max}} = \dfrac{\nabla f(2,-1)}{\|\nabla f(2,-1)\|} = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}}$.

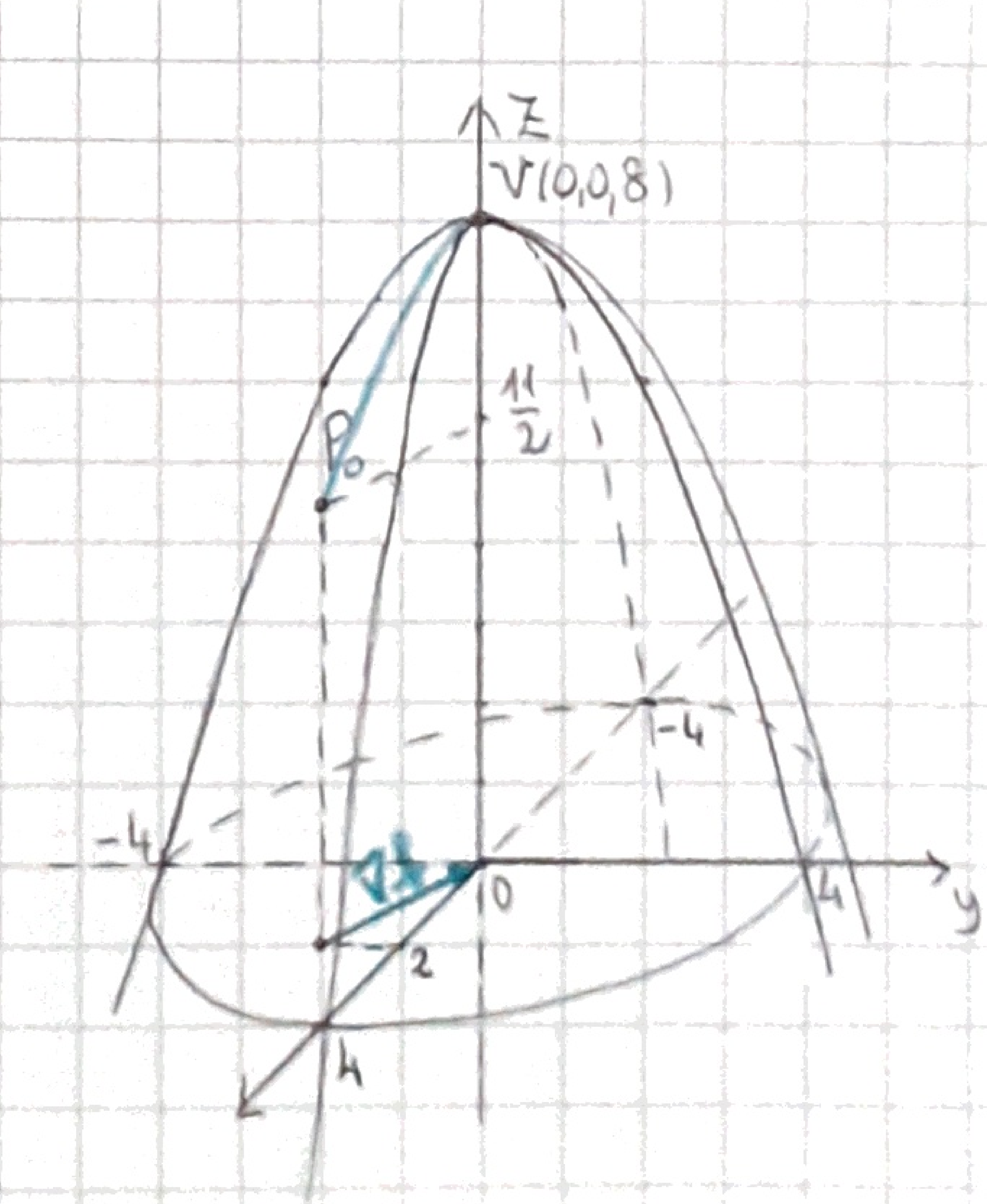
Di conseguenza la massima pendenza negativa o minima pendenza vale $\boxed{p_{min} = -\sqrt{5}}$ ed è raggiunta nella direzione

$$\boxed{\vec{v}_{min}} = -\vec{v}_{max} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}}$$

Tutte le pendenze $p \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$ sono assunte due volte.

Tenendo conto che $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = -2$ (da cui $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{i})} = 2$), $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 1$ (da cui $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{j})} = -1$) e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 2$ se $\vec{v} = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$ la situazione è la seguente:





<u>OSSERVAZIONE</u> La superficie $z = 8 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ è un PARABOLOIDE CIRCOLARE di V (0,0,8) verso il basso. La MASSIMA PENDENZA si ha muovendosi verso la CIMA e infatti il GRADIENTE indica la direzione verso l'ORIGINE.

Determiniamo le direzioni, che sono due, nelle quali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$:

$\boxed{\vec{v} = (v_1, v_2)}$ da determinare deve essere tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot \vec{v} = (-2,1) \cdot (v_1, v_2) = -2v_1 + v_2 = 0 \\ \|\vec{v}\| = 1 \quad \text{cioè} \quad v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2v_1 + v_2 = 0 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = 2v_1 \\ v_1^2 + (2v_1)^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 5v_1^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ v_1^2 = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ v_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ v_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} v_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ v_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} .$$

Le due direzioni sono

1ª $\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ e 2ª $\vec{v}_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

<u>OSSERVAZIONE</u> Vedremo altri modi per determinare le direzioni nelle quali la derivata direzionale è nulla.