4

Equazioni differenziali

Determinare le primitive di una funzione $f(x)$ significa risolvere

$$y'(x) = f(x)$$

dove l'incognita è la funzione $y(x)$. Questa equazione è un semplice esempio di equazione differenziale. In particolare se

$$y'(x) = 2x$$

le soluzioni che si ottengono integrando $2x$ sono

$$y(x) = x^2 + c$$

ossia le soluzioni sono infinite e ciascuna è individuata da un diverso valore della costante reale c. La costante c può essere determinata imponendo un'ulteriore condizione. Ad esempio se vogliamo che $y(1) = 3$ allora $c = 2$ e $y(x) = x^2 + 2$.

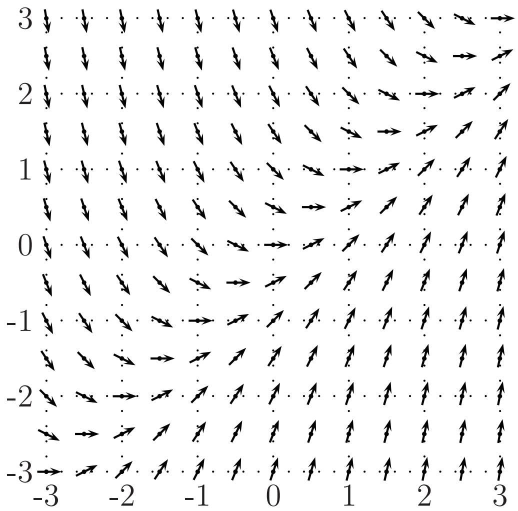
Più in generale un'*equazione differenziale* è un'equazione dove compaiono la funzione incognita $y(x)$ assieme ad alcune sue derivate. L'ordine massimo di derivazione dell'incognita $y(x)$ individua l'*ordine* dell'equazione differenziale. L'equazione $y'(x) = 2x$ è del primo ordine. Un altro esempio di equazione differenziale del primo ordine è

$$y'(x) + y(x) = x$$

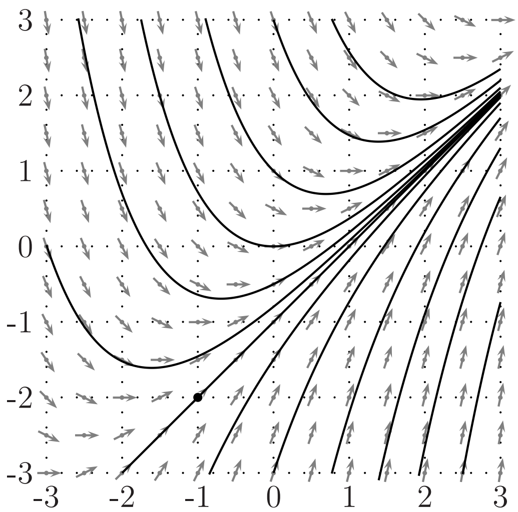
in questo caso però le soluzioni non possono essere determinate direttamente con una sola integrazione. Prima di descrivere qualche tecnica di risoluzione cerchiamo dare un'interpretazione "visiva" dell'equazione. Consideriamo un punto (x_0, y_0) del piano. Se una soluzione passa per (x_0, y_0), ossia $y(x_0) = y_0$, allora l'equazione permette di calcolare la derivata di $y(x)$ in quel punto:

$$y'(x_0) = x_0 - y(x_0) = x_0 - y_0.$$

Associamo dunque a tale punto la direzione della corrispondente retta tangente a $y(x)$ in x_0. Al variare del punto (x_0, y_0) nel piano determiniamo così un *campo di direzioni*. Ecco quello che succede nel quadrato $[-3, 3] \times [-3, 3]$



Le soluzioni dovranno seguire in ogni punto la direzione associata. In seguito determineremo la loro formula esplicita, ma grazie a queste prime osservazione possiamo già avere un'idea qualitativa del loro grafico.



Anche in questo caso le soluzioni sono infinite e il passaggio per un punto assegnato individua una sola soluzione. Ad esempio per il punto $(-1, -2)$ si riesce addirittura ad "indovinare" una soluzione esplicita: seguendo la direzione iniziale le direzioni successive sono tutte allineate e quindi la soluzione è la retta $y(x) = x - 1$.

1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine ha la seguente forma

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = f(x)$$

con $a(x)$ e $f(x)$ due funzioni continue in un certo intervallo I. Come abbiamo già osservato nell'introduzione, se la funzione $a(x)$ fosse identicamente nulla allora per determinare la funzione incognita $y(x)$ basterebbe integrare entrambi i membri

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx + c.$$

Avremmo così infinite soluzioni dipendenti dalla costante arbitraria c e tutte definite nell'intervallo I.

Quando $a(x)$ non è identicamente nulla il problema della determinazione delle soluzioni si può fare in modo simile dopo aver preventivamente moltiplicato l'equazione per cosiddetto *fattore integrante* $e^{A(x)}$ dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$:

$$e^{A(x)}\,y'(x) + e^{A(x)}\,a(x)\,y(x) = e^{A(x)}\,f(x).$$

In questo modo il primo membro di questa equazione può essere interpretato come la derivata della funzione $e^{A(x)}\,y(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{A(x)}\,y(x)\right) = e^{A(x)}\,y'(x) + e^{A(x)}\,a(x)\,y(x) = e^{A(x)}\,f(x).$$

A questo punto è possibile come prima integrare entrambi i membri

$$e^{A(x)}\,y(x) = \int e^{A(x)}\,f(x)\,dx + c.$$

e quindi esplicitare la soluzione

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}\,f(x)\,dx + c\right).$$

Soluzione generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine

La soluzione generale dell'equazione

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x)$$

con $a(x)$ e $f(x)$ due funzioni continue in un certo intervallo I è

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}\,f(x)\,dx + c\right) \quad \text{per } x \in I.$$

dove c è una costante arbitraria.

La costante arbitraria può essere determinata se si aggiunge la condizione supplementare, detta *condizione iniziale*,

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{con } x_0 \in I$$

ossia si impone che la soluzione passi per un punto assegnato (x_0, y_0). Si verifica che tale problema, detto *problema di Cauchy*,

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione la cui formula si deduce facilmente dal caso generale:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} \, f(t) \, dx + e^{A(x_0)} y_0 \right) \quad \text{per } x \in I.$$

Nel prossimo esempio risolveremo esplicitamente proprio l'equazione discussa nell'introduzione.

— ◇ —

Esempio 1.1 Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = x \\ y(-1) = -2 \end{cases}$$

Qui $a(x) = 1$ e $f(x) = x$ quindi possiamo considerare $I = \mathbb{R}$. Troviamo la soluzione generale in I. Una primitiva di $a(x) = 1$ è

$$A(x) = \int a(x) \, dx = \int dx = x$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di $e^{A(x)} f(x)$

$$\int e^{A(x)} \, f(x) \, dx = \int e^x \, x \, dx = \int x \, d\left(e^x\right) = x \, e^x - \int e^x \, dx = x \, e^x - e^x + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-x} \left(x \, e^x - e^x + c\right) = x - 1 + c \, e^{-x}.$$

Ora imponiamo la condizione $y(-1) = -2$:

$$y(-1) = -1 - 1 + c \, e^1 = -2 + c \, e = -2$$

da cui si ricava che $c = 0$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = x - 1 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

Esempio 1.2 Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x)/x = 4x^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

Mentre $f(x) = 4x^2$ è continua in $\mathbb{R}$, la funzione $a(x) = 1/x$ è continua solo nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dato che $x_0 = -1$, l'intervallo "massimale" dove cercare la soluzione è $I = (-\infty, 0)$. Dobbiamo prima determinare una primitiva di $a(x) = 1/x$ per $x < 0$

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| = \log(-x)$$

e dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log(-x)} = -x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\, f(x) = -x\, 4x^2 = -4x^3.$$

ossia

$$\int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = -\int 4x^3\, dx = -x^4 + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = -\frac{1}{x}\left(-x^4 + c\right) = x^3 - \frac{c}{x}.$$

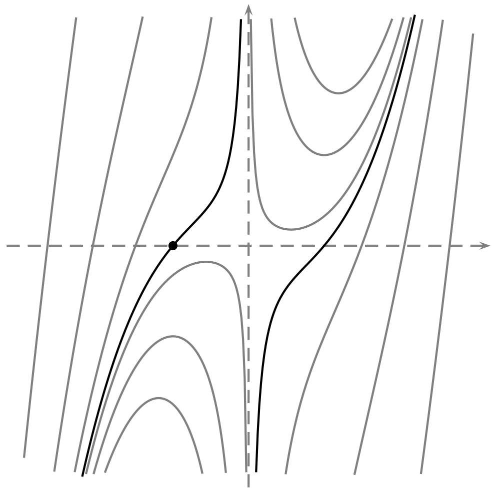
Ora imponiamo la condizione $y(-1) = 0$

$$y(-1) = -1 + c = 0$$

da cui si ricava che $c = 1$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = x^3 - \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in (-\infty, 0).$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al “flusso” delle altre soluzioni ottenuto variando la costante c.



— ◇ —

Esempio 1.3 Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{y(x)}{e^x + 1} = e^x \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

L'intervallo "massimale" dove cercare la soluzione è $I = \mathbb{R}$. Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = -1/(e^x + 1)$

$$\begin{aligned} A(x) &= -\int \frac{1}{e^x + 1}\, dx = -\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\, dx \\ &= \int \frac{1}{1 + e^{-x}}\, d(1 + e^{-x}) = \log(1 + e^{-x}). \end{aligned}$$

e dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = 1 + e^{-x}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x)\, dx = \int (1 + e^{-x}) e^x\, dx = \int (e^x + 1)\, dx = e^x + x + c$$

e la soluzione generale è uguale a

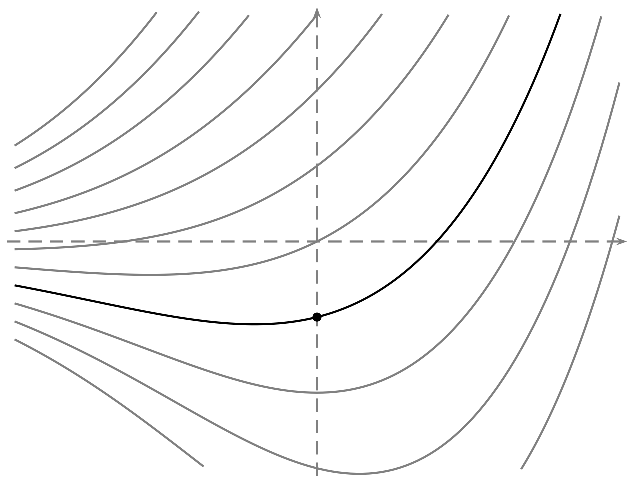
$$y(x) = \frac{e^x + x + c}{1 + e^{-x}}.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = -1$:

$$y(0) = \frac{1 + c}{2} = -1$$

da cui si ricava che $c = -3$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^x + x - 3}{1 + e^{-x}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$



— ◇ —

Esempio 1.4 Determiniamo l'eventuale asintoto per $x \to +\infty$ della soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = 3x + 4 \\ y(0) = 5 \end{cases}.$$

Una primitiva di $a(x) = 2x$ è $A(x) = x^2$ e dunque la soluzione del problema è

$$y(x) = e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{t^2}(3t+4)\,dt + 5 \right) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

La presenza del fattore e^{t^2} non ci permette di svolgere l'integrale, ma la formula ottenuta è sufficiente a determinate l'asintoto. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}(3t+4)\,dt + 5}{e^{x^2}} \overset{\mathrm{H}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}(3x+4)}{e^{x^2}2x} = \frac{3}{2}.$$

Quindi l'asintoto cercato è $y = 3/2$.

2. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Un'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti ha la seguente forma

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

con il coefficiente $a_n \neq 0$ e la funzione continua in un intervallo I. A questa equazione, detta *equazione completa*, è associata l'*equazione omogenea*

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0.$$

Si dimostra che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n: se indichiamo con $y_1, y_2, \ldots, y_n$ una base di tale spazio ogni altra soluzione è del tipo

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$$

dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono delle costanti arbitrarie. Per determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione completa basta "traslare" opportunamente lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea.

Soluzione generale di un'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti

La soluzione generale dell'equazione

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

con $a_n \neq 0$ e f una funzione continua in un certo intervallo I è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + y_\star(x)$$

dove

(1) $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ costanti arbitrarie;

(2) $y_\star(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Per risolvere l'omogenea percorriamo i seguenti passi. Prima si determinano le radici del *polinomio caratteristico*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Quindi, per costruire una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea, si associa ad ogni radice un insieme di funzioni. Più precisamente:

(1) ad ogni radice reale α con molteplicità m si associano le m funzioni:

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x}, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x};$$

(2) ad ogni coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ ciascuna di molteplicità m si associano le $2m$ funzioni:

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Dato che la somma delle molteplicità è uguale al grado n del polinomio alla conclusione di questo procedimento avremo le n funzioni che formano una base dello spazio delle soluzioni le quali sono evidentemente definite per ogni $x \in \mathbb{R}$.

— ◇ —

Esempio 2.1 Risolviamo l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 2z - 3 = 0$$

che ha radici: -1 e 3 entrambe di molteplicità 1. Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

— ◇ —

Esempio 2.2 Risolviamo l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 + 4z + 4 = 0$$

che ha un'unica radice: -2 di molteplicità 2. Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{-2x}.$$

— ◇ —

Esempio 2.3 Risolviamo l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

che ha due radici complesse coniugate: $-1 + 2i$ e $-1 - 2i$ entrambe di molteplicità 1. Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)).$$

— ◇ —

Le costanti si possono determinare imponendo un certo numero di condizioni di vario tipo. Nel caso del problema di Cauchy si assegnano i valori delle prime $n-1$ derivate in un punto.

— ◇ —

Esempio 2.4 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 9 = 0$$

che ha radici: 3 e -3 entrambe di molteplicità 1. Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

Ora imponiamo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

e dato che $y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x}$

$$y'(0) = 3c_1 - 3c_2 = 6.$$

Quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$

da cui si ricava che $c_1 = 3/2$ e $c_2 = -1/2$. La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{3}{2} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{-3x}.$$

— ⋄ —

Esempio 2.5 Risolviamo il problema

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) = 16y(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} y(x) = 3 \end{cases}$$

Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y^{(4)}(x) - 16y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^4 - 16 = (z^2 - 4)(z^2 + 4) = (z - 2)(z + 2)(z - 2i)(z + 2i) = 0$$

che ha radici: 2, -2, $2i$, $-2i$. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x).$$