Dispense di Analisi II

Pietro Zecca

16 gennaio 2003

Indice

"La matematica è il linguaggio
dell'intero Cosmo.
Chi non lo conosce non può leggere
il grandissimo libro dell'Universo"

Galileo Galilei, "Il Saggiatore"

"Apprendere senza pensare
è tempo perso.
Pensare senza apprendere
è cosa vana"

Confucio

Prefazione

In queste note si intende presentare l'analisi delle proprietà delle funzioni di più variabili sotto gli aspetti simbolici, numerici ed anche, quando possibile, grafici. Si assume che gli studenti abbiano seguito con profitto il corso di Analisi I, ma non si intende comunque dare una presentazione rigorosa come nei testi classici di Analisi Matematica. L'idea che muove la scrittura di queste dispense è quella di fornire agli studenti uno strumento che permetta loro di avvicinarsi ai concetti principali e ai metodi dell'analisi di funzioni di più variabili e capire come questi estendano le idee e i metodi già incontrati nel I corso.

Poiché, specialmente nel caso dell'analisi di più variabili, il calcolo e la rappresentazione grafica possono essere a volte complicate, o comunque di lettura non immediata, ed a volte l'intuizione geometrica più difficile da visualizzare, può essere di aiuto l'uso di strumenti tecnologici per illustrare e confrontare i punti di vista grafico, numerico e simbolico.

Per questo facciamo uso e riferimento a *Maple*, ma altri programmi come *Mathematica*, *Derive*, etc. possono esplicare la medesima funzione.

Ogni capitolo delle dispense è pensato per essere letto **da cima a fondo.** Gli esempi, in particolare tendono a illustrare idee, a renderle concrete, a fornire elementi per nuove idee piuttosto che come esemplificazione degli esercizi.

Così, anche i grafici non sono decorazioni del testo, ma parte importante nella crescita dell'intuizione geometrica. La capacità di visualizzare i problemi è altrettanto importante quanto quella di saperli impostare teoricamente.

Infine, la matematica **non è un linguaggio naturale,** ma ha un suo vocabolario, una sua grammatica ed una sua sintassi. Imparare ad usare correttamente questo linguaggio è fondamentale per capire, impostare e risolvere i problemi che l'analisi offre allo studente.

Capitolo 1

Integrali Impropri

Ognuna delle scritture seguenti rappresenta un **integrale improprio**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\,, \qquad \int_0^{1} \frac{1}{x^2}\, dx\,, \qquad \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\,.$$

L'aggettivo **improprio** è una etichetta attaccata ad integrali che differiscono in qualche modo dagli integrali ordinari del tipo $\int_a^b f(x)\, dx$, nei quali l'intervallo $[a,b]$ è un intervallo finito e la funzione $f(x)$ è limitata, quando non continua su $[a,b]$.

Gli integrali che vogliamo esaminare possono avere due diversi tipi di "improprietà":

- *L'intervallo di integrazione può essere infinito*, come nei primi quattro esempi. Questo fatto contrasta con la definizione di integrale di Riemann che abbiamo dato al primo corso, perché la definizione formale di integrale indefinito è basata sulla partizione di intervalli finiti.

- *L'integrando può essere illimitato nell'intervallo di integrazione,* come negli ultimi due esempi. Anche questo fatto contrasta con la definizione di integrale, nella quale si richiedeva la limitatezza della funzione su tutto l'intervallo di integrazione.

Alcuni tipi di integrali, quali ad esempio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\, dx$$

ammettono entrambe le "improprietà". Per essere risolti, come vedremo più avanti, essi hanno bisogno di un'attenzione speciale che tenga conto di entrambe le situazioni precedenti.

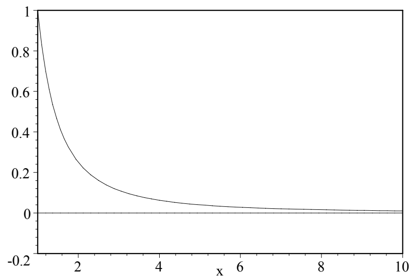
1.1 Convergenza e Divergenza: Idee Base ed Esempi

Alcuni degli integrali presentati, sebbene impropri, ammettono comunque come risultato un valore finito; essi vengono chiamati **convergenti**. Per gli altri, l'improprietà è fatale, nel senso che non ammettono valore finito; essi sono chiamati **divergenti.**

Iniziamo con alcuni esempi concreti.

Esempio 1.1 *Dare un senso al simbolo* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx\,.$

Soluzione. Cosa può voler significare l'integrale dato? Se l'interpretiamo geometricamente, esso rappresenta l'area racchiusa tra il grafico della funzione integranda, l'asse delle x e la retta $x = 1$.



L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ come area

La regione si estende indefinitamente verso destra, può la sua area essere finita?

la risposta è positiva; la ragione coinvolge l'uso dell'operazione di limite. Per ogni numero $r > 1$, consideriamo

$$\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx = \text{ area tra } x = 1 \text{ e } x = r\,.$$

Quest'area può essere calcolata esattamente:

$$\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^r = 1 - \frac{1}{r}\,.$$

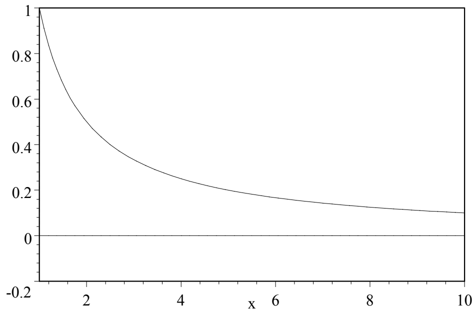
Facendo tendere $r \to +\infty$, il risultato tende ad 1. in altre parole, l'area totale della regione racchiusa dal grafico di $1/x^2$, sebbene infinitamente lunga, ammette *area finita.* In simboli

$$\lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\left(1-\frac{1}{r}\right) = 1\,.$$

Affermiamo perciò che l'integrale *converge* ad 1. ■

Esempio 1.2 *Dire se* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ *converge o diverge.*

Soluzione. A prima vista la situazione sembra simile alla precedente



L'integrale improprio $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ come area

Il problema, ancora una volta, è quello di capire se la regione illimitata, racchiusa tra il grafico della funzione integranda, l'asse delle x e la retta $x = 1$, ammette area finita. Per dare una risposta a questa domanda, operiamo esattamente come prima. Consideriamo $r > 1$ e calcoliamo l'area nell'intervallo $[1, r]$. Si ha

$$\int_1^r \frac{1}{x}\,dx = \ln x]_1^r = \ln r\,.$$

Adesso, facciamo il limite per $r \to +\infty$. Si ha $\lim_{r\to+\infty}\ln r = +\infty$.

Concludiamo perciò che questo integrale improprio diverge a $+\infty$. In simboli:

$$\lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{1}{x}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\ln x]_1^r = +\infty\,.$$

■

Esempio 1.3 *Dire se converge* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$*. In tal caso, trovarne il valore.*

Soluzione. L'integrale è improprio ad entrambi gli estremi, lo dividiamo quindi in due integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

che trattiamo separatamente. Cominciamo dall'ultimo integrando. Un calcolo diretto,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{r\to+\infty} \int_{1}^{r} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{r\to+\infty} \arctan x]_0^r = \lim_{r\to+\infty} \arctan r = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ci dice che l'integrale converge a $\pi/2$.

Poiché l'integrando è una funzione pari, anche il primo integrando ha lo stesso valore. Ne segue che:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

La conclusione è chiara: l'integrale dato converge a π. In simboli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi\,.$$

■

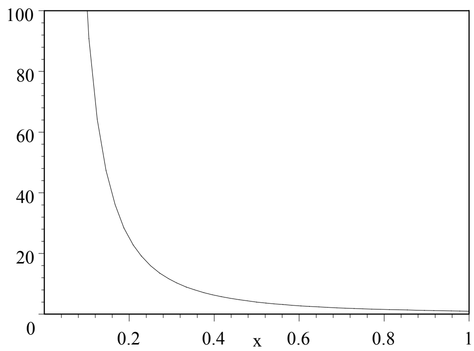
I precedenti esempi mostrano anche una delle sottigliezze degli integrali impropri, a cui fare attenzione. I grafici di $1/x^2$ e di $1/x$ appaiono simili: entrambe le funzioni tendono a zero quando $x \to +\infty$. Tuttavia, il primo grafico racchiude un'*area unitaria*, il secondo un'*area infinita.*

1.1.1 Un'altra Improprietà

Le improprietà degli esempi precedenti coinvolgono *intervalli illimitati.* Lo stesso tipo di strategia sia applica nel caso di *integrandi illimitati.*

Esempio 1.4 *Discutere* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx\,.$

Soluzione. In questo caso, la questione geometrica è quella di capire se la regione *illimitata verticalmente,* rappresentata nel grafico seguente ha, o meno, area finita.



L'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$ come area

Per decidere la questione, troviamo ancora una volta il limite di un'area - questa volta quando r tende a 0 *da destra.* Per ogni valore di $r > 0$ il seguente integrale ha senso:

$$\int_r^1 \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big]_r^1 = \frac{1}{r} - 1\,.$$

Il risultato mostra che, quando r tende a 0^+, l'area in questione *tende all'infinito.* In simboli:

$$\lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{r\to 0^+} \left(\frac{1}{r} - 1\right) = +\infty\,.$$

Quindi, l'integrale diverge all'infinito. ■

1.1.2 La Definizione Formale

Abbiamo usato la stessa idea base per ognuno degli integrali precedenti, sia che fosse illimitato l'intervallo di integrazione, o che fosse illimitata la funzione:

Dapprima si localizza l'improprietà, a $+\infty$ (oppure a $-\infty$), od ad un estremo (finito) dell'intervallo di integrazione (se l'integrale è improprio in più di un punto, lo si riscrive come somma di integrali più semplici, ognuno con una sola improprietà). Quindi, ogni integrale con una sola improprietà viene considerato come limite di un integrale ordinario, con un estremo variabile che tende verso il valore “problematico”, da destra o da sinistra.

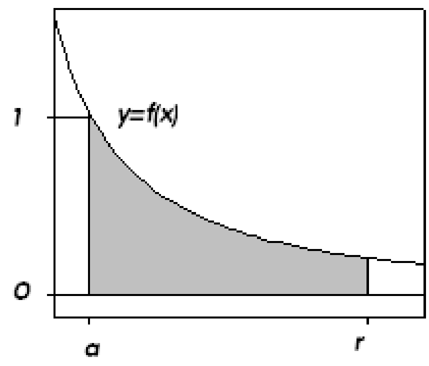
Nel primo caso esaminato (intervallo illimitato) la definizione è la seguente.

Definizione 1.5 *Consideriamo l'integrale* $I = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$*, dove* f *è una funzione continua per* $x \geq a$*. Se il limite*

$$L = \lim_{r\to+\infty} \int_a^r f(x)\, dx$$

esiste finito, allora I ***converge a*** *L. Altrimenti,* ***diverge.***

Dal punto di vista grafico la questione riguarda il comportamento asintotico del grafico. Quando $r \to +\infty$ l'area converge o diverge?



Convergenza: cosa accade per $r \to +\infty$?

Gli integrali negli Esempi 2 e 4 divergono all'infinito. Il prossimo esempio illustra un altro modo in cui l'integrale può non convergere.

Esempio 1.6 *Dire se $I = \int_0^\infty \cos x \, dx$ converge o meno.*

Soluzione. La definizione ci da una risposta rapida. Infatti

$$\int_0^r \cos x \, dx = \sin x]_0^r = \sin r \, .$$

Ne segue che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_0^r \cos x \, dx = \lim_{r \to +\infty} \sin r$$

Quest'ultimo limite non esiste: quando $r \to +\infty$ la funzione $\sin r$ oscilla tra -1 e 1. Ne segue che I diverge. ■

Diamo adesso una definizione di integrale improprio, simile alla precedente, ma più generale

Definizione 1.7 *Sia $I = \int_a^b f(x) \, dx$ improprio in a o in b (i casi $a = -\infty$ e $b = +\infty$ sono permessi). Se*

$$\lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x) \, dx \quad e \quad \lim_{r \to b^-} \int_a^r f(x) \, dx$$

esistono ed hanno valore finito L, allora diremo che I ***converge*** *ad L. Altrimenti I diverge.*

Nota:

- Ogni integrale improprio è il limite di un integrale proprio.
- Se c'è più di una improprietà (per es. se l'integrale è improprio ad entrambi gli estremi), può essere spezzato in due integrali in modo conveniente; l'intero integrale converge se convergono entrambi i termini.

Esempio 1.8 *Discutere* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx\,.$

Soluzione. L'integrale è improprio ad entrambi gli estremi. Per separare le improprietà scriviamo,per esempio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = I_1 + I_2\,.$$

Come abbiamo visto prima, I_2 converge, ma I_1 diverge a $+\infty$. Ne segue che I diverge. ■

1.1.3 Esercizi

1. Spiegare perché i seguenti integrali sono impropri

   (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx\,;$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx\,;$

   (c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2\ln x}dx\,;$

   (d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^2-x-2}dx\,;$

   (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx\,;$

   (f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$

2. Mostrare che l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3}dx$ diverge.

3. Spiegare perché l'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx$ non è improprio.

4. Calcolare i seguenti integrali impropri

   (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\,;$

   (b) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx\,;$

   (c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x\,(1+x)}\,dx\,;$

   (d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx\,;$

   (e) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^2+x-6}}dx\,;$

   (f) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx\,;$

   (g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx\,;$

(h) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx\,.$

5. Trovare i valori del parametro a che rende il valore dell'integrale improprio minore di 10^{-5}

   (a) $\displaystyle\int_a^\infty e^{-x}\,dx\,;$

   (b) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{(1+x^2)}\,dx\,;$

   (c) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx\,.$

6. Mostrare che $\lim_{a\to+\infty}\displaystyle\int_{-a}^{a} x\,dx = 0\,.$ Spiegare perché $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ diverge.

7. Dire se i seguenti integrali convergono o divergono. Nel primo caso calcolarli.

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\,dx\,;$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx\,;$

   (c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx\,;$

   (d) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x}{(x-4^2)^3}\,dx\,;$

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^2 e^x\,dx\,;$

   (f) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,;$

   (g) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{3-x}}\,dx\,;$

   (h) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx\,;$

   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx\,;$

   (j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$

8. Mostrare che $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge.

9. Mostrare che $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ converge se $p > 1$.

10. Per quali valori di p converge $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx\,?$

11. Per quali valori di p converge $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln^p x}\,dx$?

12. Per quali valori di p converge $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\ln^p x}\,dx$?

13. valutare i seguenti integrali per tutti i valori di C per i quali converge

    (a) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{C}{2x+1}\right) dx\,;$

    (b) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{C}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+1}\right) dx\,;$

    (c) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{Cx^2}{x^3+1} - \frac{1}{3x+1}\right) dx\,;$

    (d) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right) dx\,;$

    (e) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{Cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x}\right) dx\,.$

14. Trasformare gli integrali impropri in integrali propri, usando le sostituzione date

    (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}dx\,, \quad u = x^{-1}\,;$

    (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\pi - 2x}}\,dx\,, \quad u = \sqrt{\pi - 2x}\,.$

15. Mostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}dx\,.$

16. Mostrare che $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = \int_0^1 (-\ln x)^3\,dx\,.$

17. Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln x}{x^4+1}dx\,.$

1.2 Come Determinare la Convergenza e Stimare i Limiti

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto il concetto di integrale improprio e l'idea della sua convergenza. Dato l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$, il problema è semplice quando siamo in grado di calcolare $\displaystyle\int_0^r f(x)\,dx$. Calcolare l'integrale precedente non è sempre semplice ed a volte è anche impossibile. Anche nel caso in cui sia possibile calcolare l'integrale, può non essere banale calcolarne il limite per $r \to \infty$.

In questa situazione, è possibile, come nel caso degli integrali definiti, usare metodi numerici per stimare gli integrali impropri. Per semplicità esamineremo solo il caso degli integrali con un intervallo di integrazione infinito.

1.2.1 Esempi Importanti

La stima numerica degli integrali impropri richiede un'attenzione speciale. Un problema è ovvio: l'integrale improprio $\int_0^\infty f(x)\,dx$ è calcolato su un intervallo infinito, mente tutte le formule per la stima degli integrali definiti coinvolgono la lunghezza dell'intervallo. Come applicarle?

I seguenti esempi suggeriscono alcune strategie per trattare queste difficoltà. Essi illustrano e motivano la teoria.

Esempio 1.9 *Dire se* $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^5+1}dx$ *converge o diverge.*

Soluzione. Il problema si enuncia facilmente:

Esiste il limite $\lim_{r\to+\infty} \displaystyle\int_1^r \frac{1}{x^5+1}dx$?

Più difficile è rispondere simbolicamente. L'integrale dato non ammette una primitiva semplice, ed anche se riuscissimo a scriverla, ricavare da essa il limite non sarebbe banale.

D'altra parte è invece relativamente semplice notare che

$$0 < \frac{1}{x^5+1} < \frac{1}{x^5} \quad \text{per} \quad 1 \le x < +\infty$$

e quindi che

$$0 < \int_1^r \frac{1}{x^5+1}dx < \int_1^r \frac{1}{x^5}dx \qquad \text{qualunque sia } r > 1\,.$$

ne risulta allora che

$$\lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{1}{x^5+1}dx \le \lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{1}{x^5}dx\,.$$

Notiamo infine, che è relativamente semplice il calcolo del secondo limite, si ha infatti

$$\lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{1}{x^5}dx = \lim_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4r^4}\right)=\frac{1}{4}\,.$$

Ne segue allora che

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^5+1}dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^5}dx = \frac{1}{4}\,.$$

Quindi l'integrale dato converge. ■

Esempio 1.10 *Sappiamo che* $I=\int_1^\infty \frac{1}{x^5+1}dx$ *converge.*

A quale valore converge?

Soluzione. Come abbiamo visto il metodo simbolico non funziona, per questa ragione proviamo ad usare un metodo numerico. Le regole dell'integrazione numerica si applicano però agli intervalli finiti $[a,b]$. Avendo chiare questa restrizione, dividiamo I in due parti (per esempio)

$$I=\int_1^\infty \frac{1}{x^5+1}dx=\int_1^{10}\frac{1}{x^5+1}dx+\int_{10}^\infty \frac{1}{x^5+1}dx = I_1+I_2$$

Notiamo, prima di tutto, che la scelta dell'intervallo $[1,10]$ è arbitraria, avremmo potuto scegliere $[1,100]$. Il secondo integrale è chiamato in gergo la **coda** di I; esso rappresenta l'area totale - che speriamo piccola - del grafico alla destra di $x=10$.

Cominciamo col calcolare I_1 usando, per esempio 50 suddivisioni di punto centrale. Il risultato (calcolato con *Maple)* è

$$M_{50}=\int_1^{10}\frac{1}{x^5+1}dx \approx \frac{9}{50}\sum_{i=0}^{49}\frac{1}{\left(\frac{109}{100}+\frac{9}{50}i\right)^5+1}\approx 0.178916\,.$$

Ci aspettiamo che I_1 approssimi il valore di I, ma qual'è l'approssimazione? Ci sono due fonti di errore:

1. L'errore che M_{50} commette nello stimare I_1;

2. L'errore dovuto all'avere ignorato la coda I_2.

   Per quanto riguarda il primo tipo di errore, rimandiamo al (ai) corsi di Calcolo Numerico, affermiamo solo, per completezza, che la usuale formula della stima dell'errore per il punto medio ci dice che in questo caso l'errore è minore di 0.0005.

   Trovare una stima dell'errore per I_2 ci rifacciamo all'esercizio precedente. Ricordando la disuguaglianza

   $$0 < \frac{1}{x^5+1} < \frac{1}{x^5}$$

   per tutti gli x che ci interessano, si ha che

   $$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^5+1} dx < \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx\,.$$

   Quest'ultimo integrale è semplice da calcolare:

   $$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx = \lim_{r\to+\infty} -\frac{1}{4x^4}\bigg]_{10}^{r} = \frac{1}{40,000} = 2.5\cdot 10^{-5}\,.$$

   Il risultato è una limitazione superiore dell'errore che si commette trascurando la coda I_2.

   Possiamo allora concludere che la stima trovate, $I \approx 0.178916$ ammette un errore minore di $5\cdot 10^{-4} + 2.5\cdot 10^{-5} = 5.25\cdot 10^{-4}$.■

1.2.2 Confronto di Integrali Impropri: Due Teoremi

Gli esempi precedenti hanno usato i confronti

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^5+1} dx < \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx\;, \quad \text{e} \quad \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^5+1} dx < \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx\,.$$

Dalla prima disuguaglianza abbiamo ricavato la convergenza della serie, dalla seconda una stima del valore della coda . Il seguente teorema garantisce la legittimità di quanto fatto.

Teorema 1.11 ***(Confronto degli Integrali Impropri Nonnegativi).*** *Siano f e g funzioni continue. Supponiamo che per tutti gli $x \geq 0$ si abbia*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\;.$$

- *Se* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge, allora converge anche* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *, inoltre*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx\,.$$

- *Se* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge, allora diverge anche* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Il teorema è utile da due punti di vista, sia per riconoscere convergenza o divergenza, che per stimare il valore dei limiti. Illustriamo le affermazioni con esempi.

Esempio 1.12 *Dire se* $I = \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ *converge. In caso di risposta positiva, stimare il valore del limite.*

Soluzione. Dobbiamo determinare se esiste finito il valore del seguente limite

$$\lim_{r\to+\infty} \int_1^r e^{-x^2}dx\,.$$

Poiché non sappiamo trovare una primitiva dell'integrando, non ci rimane che cercare di stimare il limite. Per vedere se I converge, cerchiamo di capire se è possibile maggiorare l'integrando con una funzione di cui conosciamo la primitiva e della quale sappiamo che l'integrale è convergente. Notiamo che per tutti gli $x \ge 1$ si ha che

$$e^{-x^2} \le x\,e^{-x^2}\,.$$

Applichiamo adesso il teorema, esso ci dice che

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \int_1^{+\infty} x\,e^{-x^2}dx\,.$$

Il secondo integrale si può calcolare, si ha:

$$\int_1^{+\infty} x\,e^{-x^2}dx = \lim_{r\to+\infty} \int_1^r x\,e^{-x^2}dx = \lim_{r\to+\infty} -\frac{e^{x^2}}{2}\Bigg]_0^r = \frac{1}{2\,e}\,.$$

Ne segue che I converge anch'esso a qualche limite (sconosciuto).

Per calcolare un valore approssimato dell'integrale procediamo come negli esempi precedenti. Dividiamo I in due parti

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^4 e^{-x^2}dx + \int_4^{+\infty} e^{-x^2}dx = I_1 + I_2\,.$$

Per stimare I_1 usiamo, per esempio, $M_{100} \approx 0.886226$ (la formula per la stima dell'errore da un valore minore di 0.00054). Per valutare I_2 si ha

$$I_2 = \int_4^{+\infty} e^{-x^2} dx \le \int_4^{+\infty} x\, e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\, e^{16}} \approx 0.000000056\,.$$

Se ne conclude che il valore di I dista da 0.886226 per un errore inferiore alla terza cifra decimale. ■

L'idea del test del confronto è semplice. Il vero problema è quello di *decidere* quale integrale conosciuto confrontare con quello incognito. Molti integrali impropri possono essere confrontati con i seguenti "integrali di riferimento"

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1\,;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{se } \ p > 1\,;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = +\infty \qquad \text{se } \ p < 1\,.$$

L'ultima equazione afferma che l'integrale diverge all'infinito.

Esempio 1.13 *Dire se* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1}\, dx$ *converge o diverge.*

Soluzione. L'ovvio confronto sembrerebbe con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ che diverge. Sfortunatamente, si ha che

$$\frac{1}{x+1} \le \frac{1}{x}$$

e quindi la divergenza del secondo integrale non ci dice niente sulla divergenza di I. Tuttavia, per $x \ge 1$ si ha che

$$\frac{1}{x+1} \ge \frac{1}{2x}\,.$$

Ne segue che, per il Teorema 1.11 si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\, dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty\,,$$

quindi I diverge, come ci aspettavamo. ■

Esempio 1.14 *Discutere la convergenza di* $I = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+2x+\cos x}\, dx\,.$

Soluzione. Osserviamo subito che per valori "grandi" di x il denominatore si comporta come x^4. Inoltre, per $x \geq 3$ è sicuramente $2x + \cos x \geq 0$ per cui

$$\frac{2x^2}{x^4+2x+\cos x} \leq \frac{2}{x^2} \quad \text{per} \quad x \geq 3\,,$$

da cui

$$\int_3^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+2x+\cos x}\, dx \leq \int_3^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx = \frac{2}{3}\,.$$

Ne segue allora che I converge. ■

1.2.3 Integrandi che Cambiano Segno. Convergenza Assoluta

L'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$$

converge o diverge? Il Teorema 1.11 non ci aiuta perché si applica solo a funzioni *nonnegative*. Tuttavia, il Teorema 1.11 ci dice qualcosa di utile. Poiché

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{per tutti gli } x \geq 1\,,$$

ne segue che:

$$|I| = \left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx\right| \leq \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1\,.$$

Ciò fa supporre che anche I converga, poiché $I \leq |I|$. Il seguente teorema giustifica l'ipotesi fatta.

Teorema 1.15 ***(Convergenza Assoluta)*** *Siano f e g funzioni continue tali che per tutti gli $x \geq a$ si abbia*

$$0 \leq |f(x)| \leq g(x) .$$

Supponiamo che $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converga. Allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, e si ha

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \right| \leq \int_a^{+\infty} g(x)\, dx .$$

Il Teorema 1.15 afferma, tra l'altro, che se $\left| \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \right|$ converge, lo stesso fa $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. La condizione è chiamata di **convergenza assoluta.**

Suggerimenti per la Coda

In ogni integrale improprio, ciò che va visto con attenzione è il comportamento della coda. infatti, ogni integrale di questo tipo, come abbiamo visto, può essere diviso in due parti come segue:

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{b} f(x)\, dx + \int_b^{+\infty} f(x)\, dx .$$

Il primo termine è un integrale proprio e può essere trattato sia ricercando la primitiva, sia per via numerica. La convergenza di I dipende solo dalla convergenza del secondo termine. Se la coda converge, converge l'integrale. Se, meglio ancora, riusciamo a rendere piccola la coda, come negli esempi precedenti, allora il primo termine approssima bene il valore dell'integrale.

Il confronto, nel senso dei due teoremi precedenti, è la chiave per avere una coda piccola. Illustriamo questo fatto con un ultimo esempio.

Esempio 1.16 *Entrambi $I = \int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx$ e $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ convergono. Per ognuno di essi trovare una coda di valore assoluto minore di 10^{-3}.*

Soluzione. Per ognuno dei due integrali bisogna trovare un b tale che $\int_b^{+\infty} f(x)\, dx < 0.001$.

Per I, trovare b è relativamente facile. Basta notare che per ogni b si ha

$$\int_b^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{r \to +\infty} -e^{-x}\Big]_b^r = e^{-b} = \frac{1}{e^b} .$$

Quindi,

$$\int_b^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e^b} < 0.001 \implies e^b > 1000 \iff b > \ln 1000 \approx 6.9\,.$$

Per trattare J, abbiamo bisogno del Teorema 1.15. Poiché

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

il Teorema 1.15 garantisce che

$$\left|\int_b^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx\right| \le \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Si ottiene quindi che

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{b} < 0.001 \iff b > 1000.$$

■

1.2.4 Esercizi

1. (a) Spiegare perché la disuguaglianza $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$ è valida per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Usare il test del confronto ed una delle disuguaglianze precedenti per mostrare che l'integrale improprio
   $$\int_2^\infty \frac{1}{x + \sin x} dx$$
   diverge.

   (a) Spiegare perché la disuguaglianza $x^2 \leq x^2 + \sqrt{x} \leq 2x^2$ è valida per tutti gli $x \geq 1$.

   (b) Usare il test del confronto ed una delle disuguaglianze precedenti per mostrare che l'integrale improprio
   $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$
   converge.

   (a) Spiegare perché la disuguaglianza $\sqrt{x} \leq x^2 + \sqrt{x} \leq 2\sqrt{x}$ è valida per tutti gli $x \leq 1$.

   (b) Usare il test del confronto ed una delle disuguaglianze precedenti per valutare se l'integrale improprio
   $$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$
   converge.

   (c) Dire se l'integrale improprio
   $$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$
   converge o meno.

   (a) Spiegare perché la disuguaglianza $\frac{1}{2}x^2 \leq x^2 - \sqrt{x} \leq x^2$ è valida per tutti gli $x \geq 2$

   (b) Usare il test del confronto ed una delle disuguaglianze precedenti per valutare se l'integrale improprio
   $$\int_3^\infty \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} dx$$
   converge.

(a) Mostrare che la disuguaglianza $\frac{1}{2} \leq \frac{e^x}{1+e^x} \leq 1$ è valida per tutti gli $x \geq 0$.

(b) Usare il test del confronto ed una delle disuguaglianze precedenti per valutare se l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

converge.

(a) Mostrare che la disuguaglianza $\frac{1}{\sqrt{2x}} \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ è valida per tutti gli $x \geq 1$

(b) Usare il test del confronto ed una delle disuguaglianze precedenti per valutare se l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

converge.

(a) Mostrare che la disuguaglianza $\sqrt{x} \leq 1 + \sqrt{x} \leq 2\sqrt{x}$ è valida per tutti gli $x \geq 1$.

(b) Usare il test del confronto ed una delle disuguaglianze precedenti per valutare se l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

converge o meno.

2. Per ognuno dei seguenti integrali impropri , trovare un integrale definito che approssimi gli integrali dati a meno di 10^{-5} (Non calcolare l'integrale definito).

   (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+e^x} dx\,;$

   (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4\sqrt{2x^3+1}} dx\,;$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^3} dx\,;$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{2+\cos x}dx$

3. Considerate l'integrale $I = \displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{\ln^2 x}dx$.

   (a) Spiegare perché I è un integrale improprio;

   (b) Mostrare che $1 \le \ln^2 x \le x^2$ per tutti gli $x \ge e$;

   (c) Spiegare perché le disuguaglianze in (b) non ci aiutano a valutare la convergenza o meno di I.

   (d) Mostrare che $1 \le \ln x \le \sqrt{x}$ per tutti gli $x \ge e$;

   (e) Mostrare che I diverge.

   (a) Mostrare che $0 \le \frac{x}{2} \le \sin x$ se $0 \le x \le 1$;

   (b) Usare le disuguaglianze precedenti per mostrare che l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$$

   converge.

4. Sia $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}dx$.

   (a) Spiegare perché I è improprio;

   (b) Mostrare che $1 \le I \le 3$

5. Per ognuno degli integrali seguenti, usare il test del confronto per determinare se gli integrali convergono o meno

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$;

   (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{\sin x}\, dx$

   (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$;

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+e^x}dx\,;$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+e^{-x}}dx\,;$

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^6+x}}dx\,;$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx\,;$

(i) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x}{\ln x}dx\,;$

(j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx\,;$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{(x+1)^2}dx\,;$

6. Mostrare che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx\,.$

   (a) Mostrare che l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ converge;

   (b) Trovare α e β in modo tale che l'integrale definito $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ approssimi l'integrale improprio della parte (a) a meno di $5\cdot 10^{-3}$.

7. Sia $f(x) = \displaystyle\int_3^x \sqrt{t}e^{-t}\,dt\,.$

   (a) Mostrare che $\lim_{x\to\infty} f(x)$ esiste finito;

   (b) Trovare a in modo tale che $f(a)$ approssimi $\displaystyle\int_3^\infty \sqrt{t}e^{-t}\,dt$ a meno di 10^{-3}.

8. Sia $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ dove $f(x) = e^{-x^3}\sin^2 x$.

   (a) Mostrare che I converge;

   (b) Trovare una stima di I a meno di $5\cdot 10^{-3}$. Spiegare come si è ottenuta l'accuratezza della stima. [**Sugg.: per ogni** $x \geq 0$, $-3 < f''(x) < 2$ e $-44 < f^{(4)}(x) < 61$.]

(a) Mostrare che $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge.

(b) Usare l'integrazione per parti per mostrare che $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

(c) Usare (a) e (b) per mostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(e^x\right)\,dx$ converge [**Sugg.:** usare la sostituzione $u = e^x$.]