LE DIREZIONI nelle quali $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=0}$

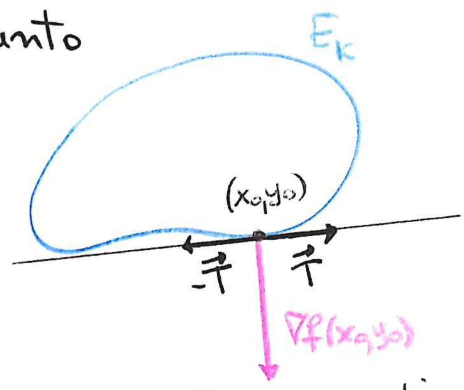
Se la derivata direzionale è NULLA significa che in quella direzione la pendenza della superficie è 0 cioè non stiamo né salendo né scendendo ma ci manteniamo alla stessa quota. Consideriamo l'insieme di livello cui appartiene il punto (x_0,y_0) : $(x_0,y_0)\in E_K$ se $K=f(x_0,y_0)$.

Nei punti dell'insieme di livello E_K la quota sul grafico si mantiene costante, quindi le due direzioni nelle quali in (x_0,y_0) la derivata direzionale è nulla sono

le due direzioni TANGENTI nel punto (x_0,y_0) all'insieme di livello passante per il punto

ossia il $\boxed{\text{VERSORE TANGENTE } \vec{T}}$

e il suo $\boxed{\text{opposto } -\vec{T}}$



$$\frac{\partial f}{\partial \vec{T}}(x_0,y_0)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial (-\vec{T})}(x_0,y_0)=0$$

Di conseguenza, poichè il $\nabla f(x_0,y_0)$ indica la direzione di massima salita, avremo che

[$\nabla f(x_0,y_0)$ è PERPENDICOLARE in (x_0,y_0) all'insieme di livello che passa per (x_0,y_0)]

Abbiamo pertanto 3 metodi per determinare le due direzioni nelle quali la derivata direzionale è nulla:

<u>1° metodo</u>
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(v_1,v_2)=0 \\ \|\vec{v}\|=1 \text{ cioè } v_1^2+v_2^2=1 \end{cases}$$

già applicato al nostro esercizio $f(x,y)=8-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(x_0=2, y_0=-1)$

abbiamo trovato ① $\vec{v}_0=\frac{1}{\sqrt5}\vec{\imath}+\frac{2}{\sqrt5}\vec{\jmath}$ ② $-\vec{v}_0=-\frac{1}{\sqrt5}\vec{\imath}-\frac{2}{\sqrt5}\vec{\jmath}$

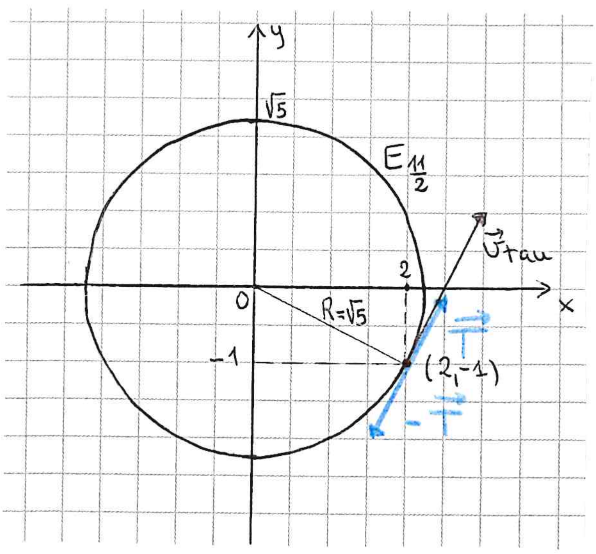
<u>2° metodo</u> Determiniamo l'insieme di livello che passa per il punto (x_0,y_0), scriviamo le equazioni parametriche di una curva che percorre tale insieme di livello e con queste determiniamo il VERSORE TANGENTE in (x_0,y_0) e il suo opposto.

$(2,-1)\in E_K$ se $K=f(2,-1)=\frac{11}{2}$ $\Rightarrow$ $(2,-1)\in E_{\frac{11}{2}}$

$E_{\frac{11}{2}}$ è : $8-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{11}{2}$ $\quad \frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{5}{2}$ $\quad x^2+y^2=5$

che è la circonferenza di $C(0,0)$ e $R=\sqrt5$

curva $\begin{cases} x=\sqrt5\cos t \\ y=\sqrt5\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$



Vettore tangente in $(2,-1)$:

⊙ Cerco t_0 $\begin{cases} 2=\sqrt5\cos t \\ -1=\sqrt5\sin t \end{cases}$

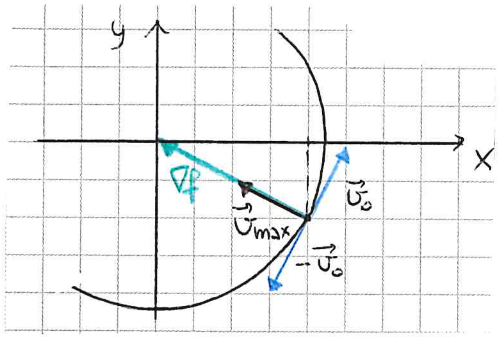
$\begin{cases} \cos t=\frac{2}{\sqrt5} \\ \sin t=-\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$ non so calcolare t_0 ma posso ugualmente trovare $\vec{v}_{tan}$

$\gamma'(t) = (-\sqrt{5}\,\text{sen}\,t, \sqrt{5}\cos t)$

$\vec{v}_{tan} = \vec{i} + 2\vec{j}$ che ha $\|\vec{v}_{tan}\| = \sqrt{5}$ e quindi otteniamo

$$\vec{v}_0 = \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} \quad \text{e} \quad -\vec{v}_0 = -\vec{T} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

3° metodo: Poichè $\nabla f(x_0,y_0)$ è PERPENDICOLARE all'insieme di livello E_k che passa per (x_0,y_0) possiamo determinare le due direzioni a derivata nulla semplicemente ruotando $\vec{v}_{max}$, che è il versore nella direzione del gradiente, di 90° in verso orario e di 90° in verso antiorario



Essendo $\vec{v}_{max} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$

otteniamo $\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ e $-\vec{v}_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

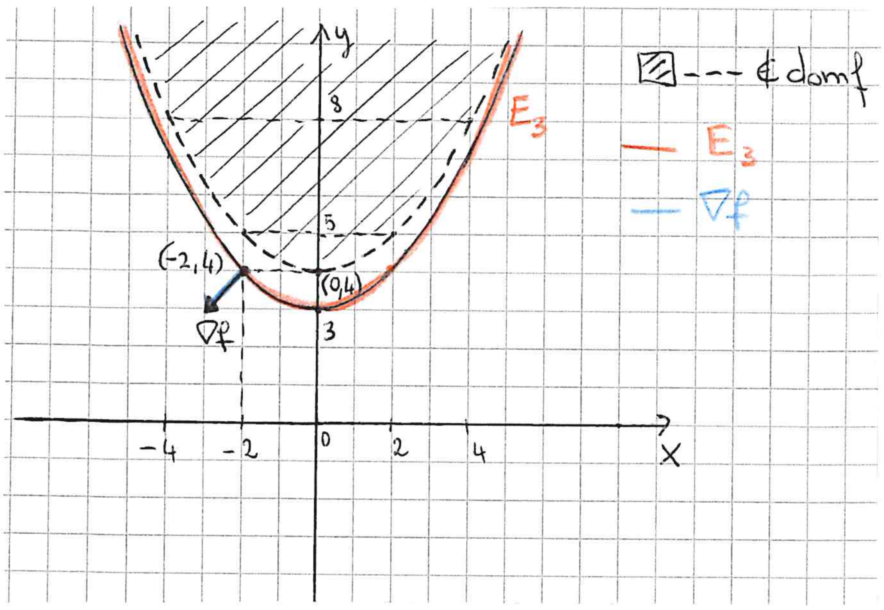
ESERCIZIO. $f(x,y) = 3 + \log(4 - y + \frac{1}{4}x^2)$

1) $\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - y + \frac{1}{4}x^2 > 0\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{1}{4}x^2 + 4\}$ SOTTO LA PARABOLA di

eq.ne $y = \frac{1}{4}x^2 + 4$, parabola esclusa dal dom f.

La parabola ha $V(0,4)$ ed è rivolta verso l'alto, passa per $(\pm 2, 5)$ e $(\pm 4, 8)$.



2) Determinate e disegnate l'insieme di livello cui appartiene il punto $(x_0=-2, y_0=4)$.

$(-2,4) \in E_K$ per $K = f(-2,4) = 3 + \log(4-4+\frac{1}{\cancel{4}}\cancel{4}) = 3 + \overset{0}{\overset{\parallel}{\log 1}} = 3$

$(-2,4) \in E_3$ $\quad E_3$ è $\cancel{3=}3 + \log(4-y+\frac{1}{4}x^2) \iff \log(4-y+\frac{1}{4}x^2) = 0$

$\iff 4-y+\frac{1}{4}x^2 = 1 \iff y = \frac{1}{4}x^2+3$ parabola di $V(0,3)$ verso l'alto

(passante per $(\pm 2,4)$ e $(\pm 4,7)$).

3) Determinate e disegnate il gradiente di f in $(-2,4)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}x}{4-y+\frac{1}{4}x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{4-y+\frac{1}{4}x^2} \qquad \nabla f(-2,4) = \left(\frac{-1}{1}, \frac{-1}{1}\right) = (-1,-1)$$
$$= -\vec{i} - \vec{j}$$

4) Determinate la massima pendenza del grafico in $(-2,4)$, la direzione in cui tale pendenza viene raggiunta e l'intervallo delle pendenze assunte dal grafico in $(-2,4)$.

La massima pendenza del grafico in $(-2,4)$ è

$$p_{max} = \|\nabla f(-2,4)\| = \|-\vec{i}-\vec{j}\| = \sqrt{2}$$

ed è raggiunta nella direzione

$$\vec{v}_{max} = \frac{\nabla f(-2,4)}{\|\nabla f(-2,4)\|} = \frac{-\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} .$$

La massima pendenza negativa sarà $p_{min} = -\sqrt{2}$, quindi il grafico in $(-2,4)$ assume tutte le pendenze $p \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

4) Determinate le direzioni nelle quali la $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,4) = 0$.

1° metodo Eq.^{ni} parametriche di E_3 $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + \frac{1}{4}t^2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ verso delle x crescenti

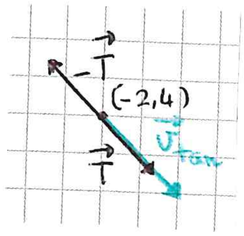
$(-2,4)$ corrisponde a $t_0 = -2$:

$\begin{cases} -2 = t \\ 4 = 3 + \frac{1}{4}t^2 \end{cases}$ $\begin{cases} t = -2 \\ \frac{1}{4}(-2)^2 = 1 \text{ OK} \end{cases}$ $\gamma'(t) = (1, \frac{1}{2}t)$

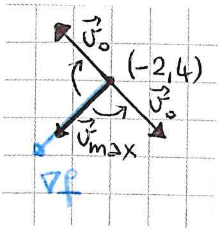
$\vec{v}_{tau} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

$\|\vec{v}_{tau}\| = \sqrt{2}$ quindi $\vec{v}_0 = \vec{T} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ e l'altra è

$$-\vec{v}_0 = -\vec{T} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$$



2° metodo poichè il $\nabla f(-2,4)$ è perpendicolare all'insieme di livello E_3 in $(-2,4)$ ruotiamo $\vec{v}_{max} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ di $90°$ in verso orario ottenendo $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ e di $90°$ in verso antiorario ottenendo $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$



3° metodo risolvere $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,4) = \nabla f(-2,4) \cdot (v_1, v_2) = -v_1 - v_2 = 0 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v_2 = -v_1 \\ 2v_1^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_1^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \dots \\ v_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ allora $\begin{cases} v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ o $\begin{cases} v_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

OSSERVAZIONE Se dobbiamo determinare le direzioni in cui $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = n^\circ \neq 0$, allora possiamo utilizzare solo il 3° metodo.

Esempio Determinate le direzioni nelle quali $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,4)=1}$:

il SISTEMA è $\begin{cases} -v_1 - v_2 = 1 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} v_2 = -v_1 - 1 \\ v_1^2 + v_1^2 + 2v_1 + \cancel{1} = \cancel{1} \end{cases}$

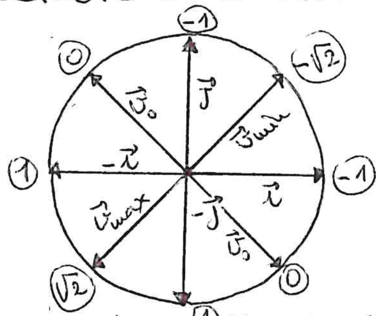
$\begin{cases} \dots \\ 2v_1^2 + 2v_1 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dots \\ 2v_1(v_1+1) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dots \\ v_1 = 0 \ \underline{o} \ v_1 = -1 \end{cases}$

quindi le due direzioni sono $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} v_1 = -1 \\ v_2 = 0 \end{cases}$

cioè $\underline{1^a}$ $\vec{v} = -\vec{i}$ $\quad \underline{2^a}$ $\vec{v} = -\vec{j}$.

Notiamo che questo risultato era PREVEDIBILE perchè

$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,4) = \frac{\partial f}{\partial y}(-2,4) = -1$



In conclusione:

5) Determinate la retta tangente a E_3 in $(-2,4)$

$\underline{1° \text{ modo}}$ utilizziamo la curva $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + \frac{1}{4}t^2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$\vec{v}_{tan} = \vec{i} - \vec{j}$ $\quad m_{tan} = -1$ $\quad r_{tan}: \ y = 4 - (x+2)$ $\quad y = -x + 2$ eq.^{ne} cartesiana

(eq.^{ni} parametriche $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 4 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$)

$\underline{2° \text{ modo}}$ poichè $\nabla f(2,-4)$ è $\perp$ r_{tan} $\Rightarrow$ $r_{tan}: \ (P - (-2,4)) \cdot \underset{\nabla f(-2,4)}{\underset{\parallel}{\vec{N}}} = 0$

$(x+2, y-4) \cdot (-1,-1) = 0$ $\quad -(x+2) - (y-4) = 0$

$y = -x - 2 + 4$ $\quad y = -x + 2$

6) PER CASA $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,4)$ nella direzione indicata dal punto $P_1 = (-6,1)$.