PRIMA SETTIMANA - 2ª parte

1. Ripassate il grafico di tutte le **FUNZIONI ELEMENTARI** utilizzando la sezione di appunti CONOSCENZE PRELIMINARI pag 25-26
Svolgete gli esercizi n° 10-11 a pag. 30-34.

2. Ripassate la **TRIGONOMETRIA** pag. 34-38.

3. 1° argomento del corso **CURVE PIANE**
si veda alla pag. SUCCESSIVA.

PRIMA SETTIMANA - 2ª parte

ARGOMENTO: $\boxed{\text{CURVE PIANE}}$

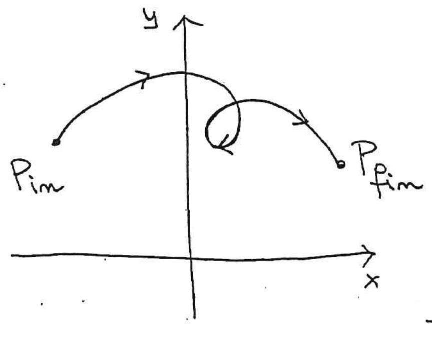
Il concetto fondamentale di tutta l'Analisi Matematica è il concetto di FUNZIONE. Una funzione è una legge tra due insiemi che assegna ad ogni elemento del primo insieme (DOMINIO) uno ed un solo elemento del secondo insieme (CODOMINIO). Il primo corso di Analisi Matematica si occupa dello studio delle funzioni $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funzioni reali di una variabile reale.

È però possibile considerare funzioni definite e/o a valori in altri spazi diversi dalla retta reale $\mathbb{R}$, come ad esempio il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$.

Le curve piane sono delle funzioni di una variabile reale a valori nel piano $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, mentre le curve nello spazio sono delle funzioni di una variabile reale a valori nello spazio $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Solitamente la variabile nel dominio viene indicata con t mentre con $(x(t), y(t))$ (o $(x(t), y(t), z(t))$) viene rappresentato il punto immagine in $\mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$).

Si può interpretare t come il tempo e pensare ad una curva piana come alla legge del moto di una particella puntiforme la cui posizione all'istante t sia $(x(t), y(t))$ per ogni $t \in I$. Analogamente una curva nello spazio può essere interpretata come la legge del moto di una particella puntiforme la cui posizione all'istante t sia $(x(t), y(t), z(t))$ per ogni $t \in I$. L'utilizzo più frequente delle curve è infatti quello di descrivere linee nel piano e nello spazio.

Definizione (CURVA PIANA) Si dice CURVA (PIANA) una funzione CONTINUA $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dove I è un INTERVALLO di $\mathbb{R}$ e $\gamma(t)$ è il punto di coordinate $(x(t), y(t))$.
Le equazioni $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in I$ sono dette EQUAZIONI PARAMETRICHE della curva (forniscono le variabili x e y in funzione del parametro t)



$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

punto iniziale $= P_{in} = \gamma(a) = (x(a), y(a))$

punto finale $= P_{fin} = \gamma(b) = (x(b), y(b))$

$\rightarrow$ indica il verso di percorrenza

OSSERVAZIONE. Nella definizione di curva piana la prima ipotesi essenziale è che I sia un intervallo di $\mathbb{R}$.

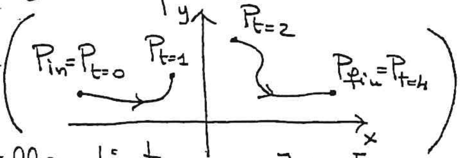
Ricordiamo che $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo

$$\Updownarrow$$

$$\forall x, y \in I \text{ con } x < y \qquad \{z \in \mathbb{R} : x < z < y\} \subset I,$$

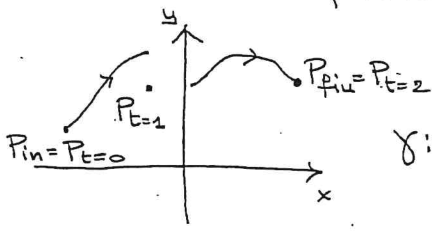
e che esistono gli intervalli aperti ($]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$), gli intervalli chiusi ($[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$), e quelli semiaperti ($]a,b]$, $[a,b[$).

L'ipotesi che I sia un intervallo comporta che una funzione del tipo $\gamma: [0,1] \cup [2,4] \to \mathbb{R}^2$ (

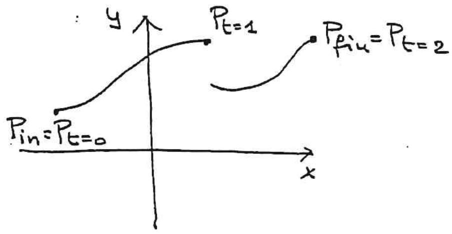


) non sia una curva perché nell'intervallo di tempo $]1,2[$ non sappiamo quale percorso compie il punto (che è come scomparso per riapparire solo per $t=2$ in $P_{t=2}$). Abbiamo invece due curve distinte se consideriamo $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma: [2,4] \to \mathbb{R}^2$.

La seconda ipotesi essenziale è che γ sia continua: questo significa che chiediamo che la particella puntiforme si muova con continuità nel piano e che non accettiamo situazioni tipo



$\gamma: [0,2] \to \mathbb{R}^2$



in cui la particella puntiforme ad un dato istante di tempo si sposta in un punto "lontano" da quello in cui si trovava all'istante precedente.

L'ipotesi di continuità di γ si traduce nella continuità delle due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ in quanto per avere la continuità del moto del punto devono variare con continuità sia l'ascissa sia l'ordinata del punto.

Riassumendo:

γ è una curva se:

- I è un intervallo in R
- γ è continua, cioè x(t) ed y(t) sono continue

SCHEMA per DISEGNARE UNA CURVA

① **Individuare il PUNTO INIZIALE P_{in} e il PUNTO FINALE P_{fin}**

corrispondenti al tempo iniziale t_{in} e al tempo finale t_{fin}:

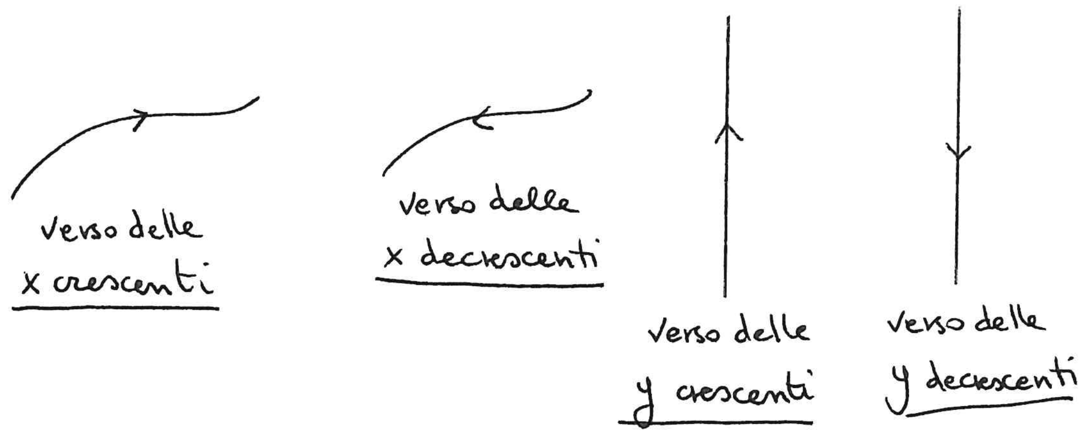
$$\gamma \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [\underset{t_{in}}{t_0}, \underset{t_{fin}}{t_1}] \qquad \begin{aligned} P_{in} &= (x(t_0), y(t_0)) \\ P_{fin} &= (x(t_1), y(t_1)) \end{aligned}$$

P_{in} (P_{fin}) si ottiene sostituendo t_{in} (t_{fin}) all'interno delle equazioni parametriche.

② **Determinare "l'EQUAZIONE del PERCORSO" compiuto dal punto ricavando t da una delle due equazioni e sostituendola nell'altra** in modo da ottenere un' $\boxed{\text{EQ.}^{\text{NE}} \text{ in } x \text{ e } y}$ che ci dirà il tipo di percorso (una RETTA, una PARABOLA, il grafico di una funzione eventualmente traslata e così via). Impareremo a RICONOSCERE CIRCONFERENZE ed ELLISSI, senza bisogno di calcolarne prima l'equazione.

③ **DISEGNARE la curva segnando il <u>verso di percorrenza</u>**

④ **Specificare il VERSO di PERCORRENZA.**

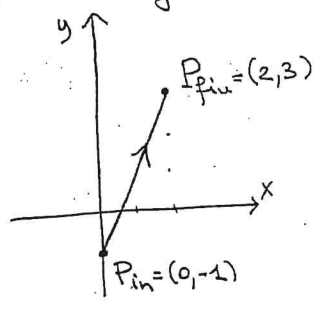


per CIRCONFERENZE ed ELLISSI <u>VERSO ORARIO</u> o <u>ANTIORARIO</u>

ESEMPI. •1 Si consideri la funzione $\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t)=(t,2t-1)$; γ definisce una curva? di che curva si tratta?

$I=[0,2]$ è un intervallo chiuso e limitato, le due funzioni $x(t)=t$ e $y(t)=2t-1$ sono continue (su tutto $\mathbb{R}$), quindi γ definisce una curva di punto iniziale $P_{in}=\gamma(0)=(0,-1)$ e punto finale $P_{fin}=\gamma(2)=(2,3)$. Le equazioni parametriche della curva sono date da $\begin{cases} x=t \\ y=2t-1 \end{cases}$ $t\in[0,2]$.

Per stabilire il percorso che compie il punto notiamo che $t=x$ e sostituendo nella seconda equazione si ottiene $y=2x-1$: allora per ogni $t\in[0,2]$ il legame tra $x(t)$ e $y(t)$ è dato da $y(t)=2x(t)-1$ cioè il punto si muove su una retta. Più precisamente la curva γ è la legge del moto di una particella puntiforme che percorre la retta $y=2x-1$ nel verso delle x crescenti da $(0,-1)$ a $(2,3)$.



•2 $\gamma:[1,3]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t-1,2t-3)$

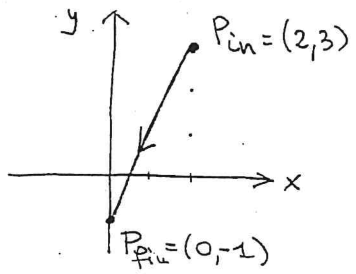
eq.^{ni} parametriche $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t-3 \end{cases}$ $t\in[1,3]$

$P_{in}=\gamma(1)=(0,-1)$ $P_{fin}=\gamma(3)=(2,3)$

$t=x+1 \Rightarrow y=2(x+1)-3 \Rightarrow y=2x-1$.

Di nuovo la particella puntiforme percorre la retta $y=2x-1$ nel verso delle x crescenti da $(0,-1)$ a $(2,3)$. Le due curve (•1 e •2) differiscono però nell'intervallo di tempo su cui sono definite ($[0,2]$ in •1 e $[1,3]$ in •2).

• 3 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2-2t, 3-4t)$, $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 3-4t \end{cases}$ $t \in [0,1]$

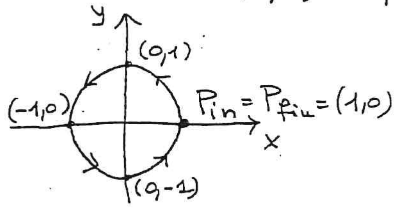


$P_{in} = \gamma(0) = (2,3)$ $P_{fin} = \gamma(1) = (0,-1)$

$2t = 2 - x \Rightarrow y = 3 - 2(2-x) \Rightarrow y = 2x - 1$

La curva è la legge del moto di una particella puntiforme che percorre la retta $y = 2x-1$ nel verso delle x decrescenti da $(2,3)$ a $(0,-1)$.

• 4 $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$



$P_{in} = \gamma(0) = (1,0) = \gamma(2\pi) = P_{fin}$ $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ $\gamma(\pi) = (-1,0)$ $\gamma(\frac{3}{2}\pi) = (0,-1)$

$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ (equazione della circonferenza di $C(0,0)$, $R=1$)

La curva è la legge del moto di una particella puntiforme che compie un giro in verso antiorario sulla circonferenza di centro $C(0,0)$ e raggio $R=1$ partendo da $(1,0)$.

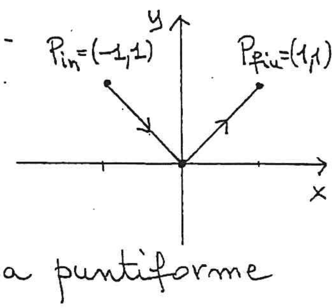
• 5 $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$, $\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \operatorname{sen}(2t) \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$

$P_{in} = \gamma(0) = (1,0) = \gamma(\pi) = P_{fin}$ $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (-1,0)$ $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (0,1)$ $\gamma(\frac{3}{4}\pi) = (0,-1)$

$x^2 + y^2 = \cos^2(2t) + \operatorname{sen}^2(2t) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Di nuovo la particella puntiforme compie un giro in verso antiorario sulla circonferenza di $C(0,0)$ e $R=1$ partendo da $(1,0)$. Le due curve (•4 e •5) differiscono però nell'intervallo di tempo su cui sono definite ($[0,2\pi]$ in •4 e $[0,\pi]$ in •5); in •5 il punto impiega metà tempo a compiere il giro e vedremo che si muove a velocità doppia rispetto a •4.

• 6 $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, |t|)$, $\begin{cases} x = t \\ y = |t| \end{cases}$ $t \in [-1,1]$



$P_{in} = \gamma(-1) = (-1,1)$ $P_{fin} = \gamma(1) = (1,1)$ $|t| = x \Rightarrow y = |x|$

La curva è la legge del moto di una particella puntiforme che percorre il grafico della funzione $f(x) = |x|$ nel verso delle x crescenti da $(-1,1)$ a $(1,1)$.

Definizione (SOSTEGNO di una curva piana) Data una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, si dice SOSTEGNO di γ l'insieme di tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ corrispondenti ad un valore della variabile $t \in I$:

$$\text{SOSTEGNO di } \gamma = \underbrace{\gamma(I)}_{\text{Immagine di } \gamma} = \{ (x(t), y(t)) : t \in I \}.$$

OSSERVAZIONE. Se interpretiamo la curva come la legge del moto di una particella puntiforme che si muove nel piano, allora il sostegno della curva è l'insieme dei punti del piano che costituiscono il percorso del moto. Negli esempi •1, •2, •3 il sostegno di γ è il segmento congiungente i punti $(0,-1)$ e $(2,3)$, mentre negli esempi •4 e •5 il sostegno di γ è la circonferenza di $C(0,0)$ e $R=1$. E' dunque evidente che esistono curve diverse aventi lo stesso sostegno; anzi, assegnato il sostegno, possiamo scrivere le equazioni parametriche di infinite curve aventi quel sostegno (giocando sull'intervallo di tempo, sul verso di percorrenza, sulla velocità di percorrenza, sul numero di volte che il sostegno viene percorso, e così via). Spesso le equazioni parametriche di una curva vengono dette PARAMETRIZZAZIONE della curva.

Definizione (CURVA CHIUSA) Una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ si dice CHIUSA se $I = [a,b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.

OSSERVAZIONE. Una curva è chiusa se $P_{in} = P_{fin}$; sono chiuse le curve degli esempi •4 e •5.

ALTRI ESEMPI

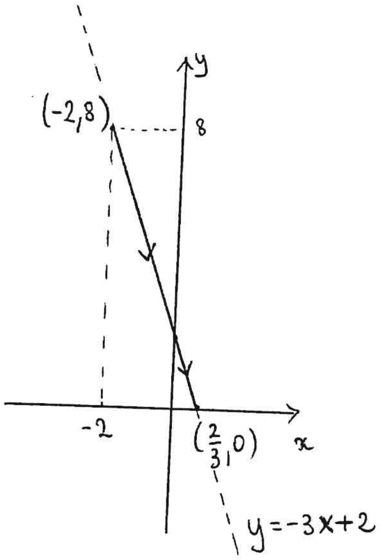
- $\gamma : [0, \frac{8}{3}] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} x(t) = t - 2 \\ y(t) = -3t + 8 \end{cases}$ $\quad t \in [0, \frac{8}{3}]$

$P_{iu} \underset{t=0}{=} (-2, 8) \quad P_{fin} \underset{t=\frac{8}{3}}{=} (\frac{2}{3}, 0)$

eq.ue $\quad t = x + 2$

$y = -3(x+2) + 8 = -3x + 2$

La curva percorre la retta di equazione $y = -3x + 2$ relativamente al segmento di estremi $(-2, 8)$ e $(\frac{2}{3}, 0)$ nel verso delle x crescenti

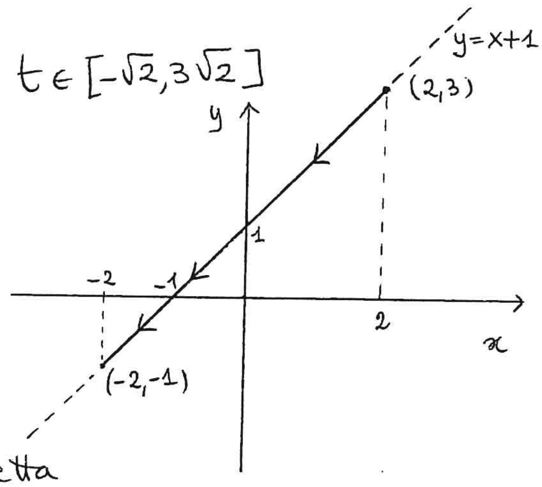


- $\gamma : [-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} x(t) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ y(t) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} t \end{cases}$ $\quad t \in [-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

$P_{iu} \underset{t=-\sqrt{2}}{=} (2, 3) \quad P_{fin} \underset{t=3\sqrt{2}}{=} (-2, -1)$

eq.ue $\quad \frac{\sqrt{2}}{2} t = 1 - x$

$y = 2 - (1 - x) = x + 1$

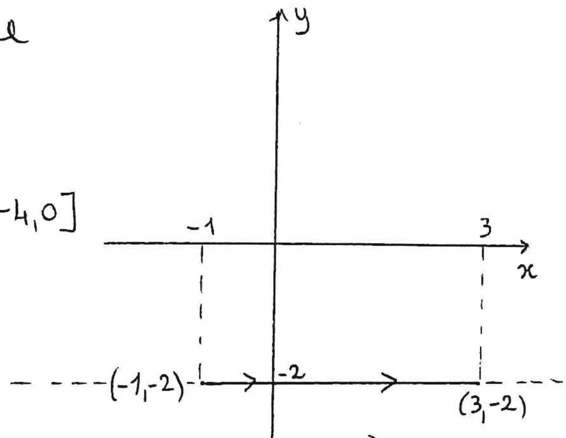


La curva percorre il segmento della retta $y = x + 1$ di estremi $(2, 3)$ e $(-2, -1)$ nel verso delle x decrescenti

- $\gamma : [-4, 0] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} x(t) = t + 3 \\ y(t) = -2 \end{cases}$ $\quad t \in [-4, 0]$

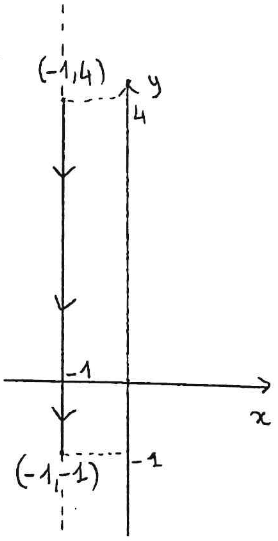
$P_{iu} \underset{t=-4}{=} (-1, -2) \quad P_{fin} \underset{t=0}{=} (3, -2)$

eq.ue $\quad y = -2$



La curva percorre il segmento ORIZZONTALE (eq.ue retta $y = -2$) di estremi $(-1, -2)$ e $(3, -2)$ nel verso delle x crescenti.

• $\gamma : [-3,2] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x(t) = -1 \\ y(t) = 1-t \end{cases}$ $t \in [-3,2]$

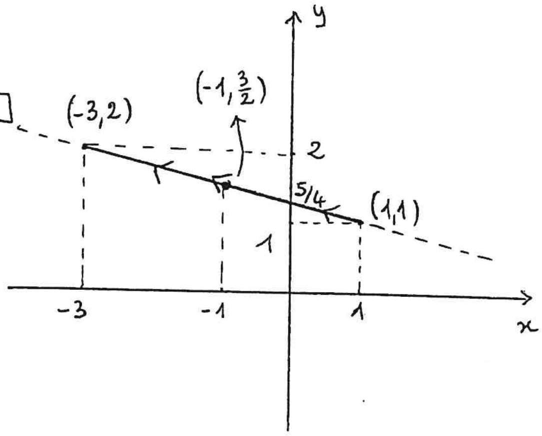


$P_{in} \underset{t=-3}{=} (-1,4)$ $P_{fin} \underset{t=2}{=} (-1,-1)$

eq.^{ne} $x=-1$

La curva percorre il segmento verticale (sulla retta di eq.^{ne} $x=-1$) di estremi $(-1,4)$ e $(-1,-1)$ nel verso delle y decrescenti.

• $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x(t) = 1-4t \\ y(t) = 1+t \end{cases}$ $t \in [0,1]$



$P_{in} \underset{t=0}{=} (1,1)$ $P_{fin} \underset{t=1}{=} (-3,2)$

eq.^{ne} $4t = 1-x$ $t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

$y = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

La curva percorre il segmento di estremi $(1,1)$ e $(-3,2)$ sulla retta $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ nel verso delle x decrescenti.

Relazione tempo-punto

Ad ogni istante di tempo è associato un punto e viceversa.

Ad es. per $t = \frac{1}{2}$ troviamo $P_{t=\frac{1}{2}} = (-1, \frac{3}{2})$, sostituendo $t = \frac{1}{2}$ nelle equazioni della curva.

Viceversa se voglio trovare il tempo corrispondente al punto $(0, \frac{5}{4})$ devo inserire le coordinate del punto nelle equazioni della curva e ricavare il tempo:

$$\begin{cases} 0 = 1-4t \to t = \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} = 1+t \to t = \frac{1}{4} \end{cases} \to \boxed{t = \frac{1}{4}}.$$

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$ Svolgete l' ESERCIZIO n°1) a) b) c) d) degli ESERCIZI sulle CURVE PIANE