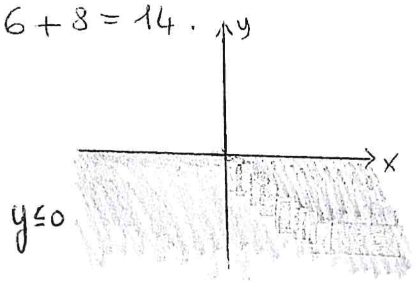
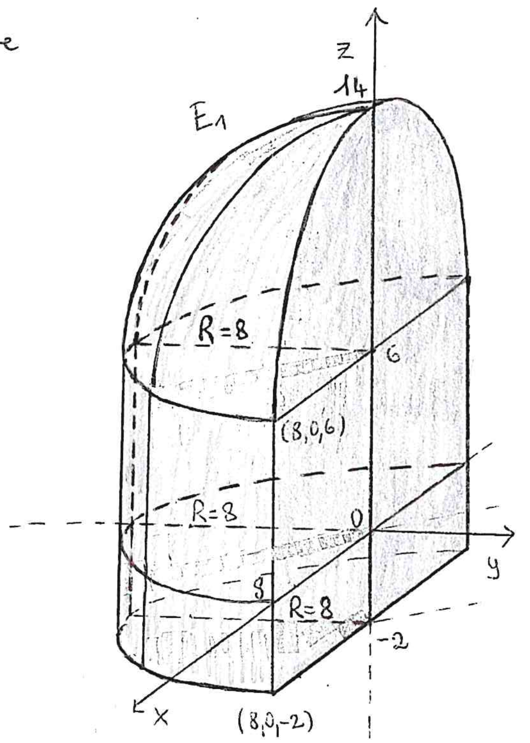
Soluzione | SCHEDA N 9 | PROIEZIONI a pag. 8 e successive

(E1) $z=-2$ è un piano orizzontale

$z = 6+\sqrt{64-x^2-y^2}$ è la metà superiore della superficie sferica di $C(0,0,6)$ e $R=8$ (definita sul CERCHIO (interno + bordo) di $C(0,0)$ e $R=8$). Il punto con z più alta ha $z_{max} = z_C+R = 6+8 = 14$.





Dovendo considerare tutti i punti dello spazio al di sopra del piano $z=-2$ e al di sotto della semisuperficie sferica il solido risulta composto da un CILINDRO di $R=8$ per $-2\le z\le 6$ sormontato da una semisfera. Poi la condizione $y\le 0$ divide il solido in due ottenendo **METÀ** CILINDRO sormontato da $\frac{1}{4}$ di SFERA.

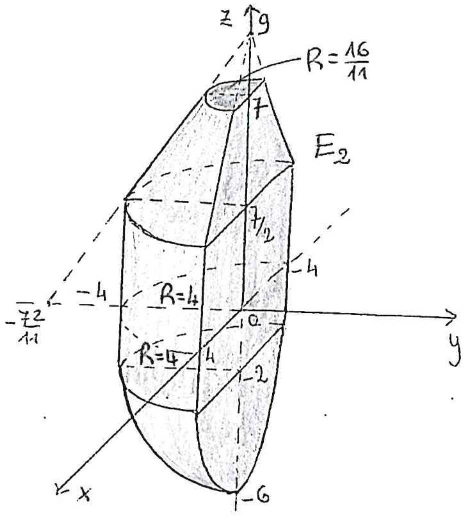
(E2) $z=-2-\sqrt{16-x^2-y^2}$ è la metà inferiore di una superficie sferica di $C(0,0,-2)$ e $R=4$ (definita sul cerchio + bordo di $C(0,0)$ e $R=4$)

Il punto a quota minima è $z_{min} = z_C - R = -2-4 = -6$

$z = 9-\frac{11}{8}\sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO CIRCOLARE (definito su $\mathbb{R}^2$) di $V(0,0,9)$ rivolto verso il basso con apertura $a=\frac{11}{8}>1$ ($\Rightarrow 0<\hat{ap}<45°$)

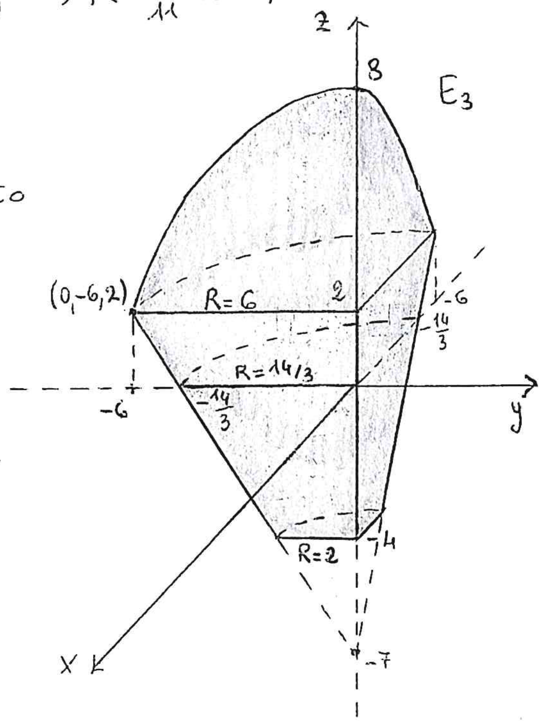
$\hat{ap} = \arctan\left(\frac{8}{11}\right) \simeq 36°$

cono $\cap\ z=0 \rightarrow x^2+y^2=\left(\frac{72}{11}\right)^2$ $\quad R=\frac{72}{11}\approx 6,5$



sulla circonferenza di $R=4$ $(x^2+y^2=16)$ dove termina la superficie sferica risulta $z_{cono}=9-\frac{11}{8}\sqrt{16}=9-\frac{11}{2}=\frac{7}{2}>-2$, quindi cono e semisuperficie sferica NON si INTERSECANO.

Il solido risulta composto da un quarto di sfera, metà cilindro per $-2\le z\le \frac{7}{2}$ e metà tronco di cono. Infatti la condizione $z\le 7$ elimina la punta del cono: a $z=7$ la circonferenza sul cono è $7=9-\frac{11}{8}\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow x^2+y^2=\left(\frac{16}{11}\right)^2 \rightarrow R=\frac{16}{11}\approx 1,45$.



(E_3) $z=-7+\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ è un cono circolare (definito su tutto $\mathbb{R}^2$) di $V(0,0,-7)$ rivolto verso l'alto, con apertura $a=\frac{3}{2}$ $\quad(0<\hat{ap}<45°)$ $\quad \hat{ap}\approx 33,7°$

$\cap\ z=0 \rightarrow x^2+y^2=\left(\frac{14}{3}\right)^2 \rightarrow R=\frac{14}{3}\approx 4,7$

$z=8-\frac{1}{6}(x^2+y^2)$ è un paraboloide circolare (definito su tutto $\mathbb{R}^2$) di $V(0,0,8)$ rivolto verso il basso con apertura $a=\frac{1}{6}<1$

($\rightarrow$ è + largo di $z=x^2+y^2$)

$\cap\ z=0 \rightarrow x^2+y^2=48 \rightarrow R=\sqrt{48}\approx 6,9$

Il cono e il paraboloide si $\cap$ sicuramente su una circonferenza $x^2+y^2=R^2$ di raggio R:

$$\cap\begin{cases} z_{cono}=-7+\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ z_{parab}=8-\frac{1}{6}(x^2+y^2)\end{cases} \rightarrow -7+\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}=8-\frac{1}{6}(x^2+y^2)$$

posto $x^2+y^2=R^2 \rightarrow R=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad R>0$

otteniamo $-7+\frac{3}{2}R=8-\frac{1}{6}R^2 \rightarrow \frac{1}{6}R^2+\frac{3}{2}R-15=0 \quad R^2+9R-90=0$

$$R_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+360}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{441}}{2}=\frac{-9\pm 21}{2}= \begin{cases} R_1=-15<0 \text{ NON ACC.} \\ \boxed{R_2=6}\end{cases}$$

Paraboloide e cono si $\cap$ sulla circonferenza

$x^2+y^2=36$ di $R=6$ a quota $z=2$: infatti

$z_{cono} = -7 + \frac{3}{2} \cdot 6 = 2$

$z_{parab} = 8 - \frac{1}{6} \cdot 36 = 2$.

Con le condizioni $x \leq 0, y \leq 0$ il solido risulta composto da un quarto di tronco di cono (per $-4 \leq z \leq 2$) sormontato da un quarto di paraboloide (per $2 \leq z \leq 8$). La condizione $z \geq -4$ toglie la punta al cono: $z_{cono} = -4 \rightarrow -4 = -7 + \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 \quad x^2+y^2=4$

$R=2$.

(E4) $z = -10 + \frac{1}{10}(x^2+y^2)$ è un paraboloide circolare (definito su tutto $\mathbb{R}^2$) di $V(0,0,-10)$, rivolto verso l'alto e con apertura $a = \frac{1}{10} < 1$ ($\rightarrow$ più largo di $z=x^2+y^2$)

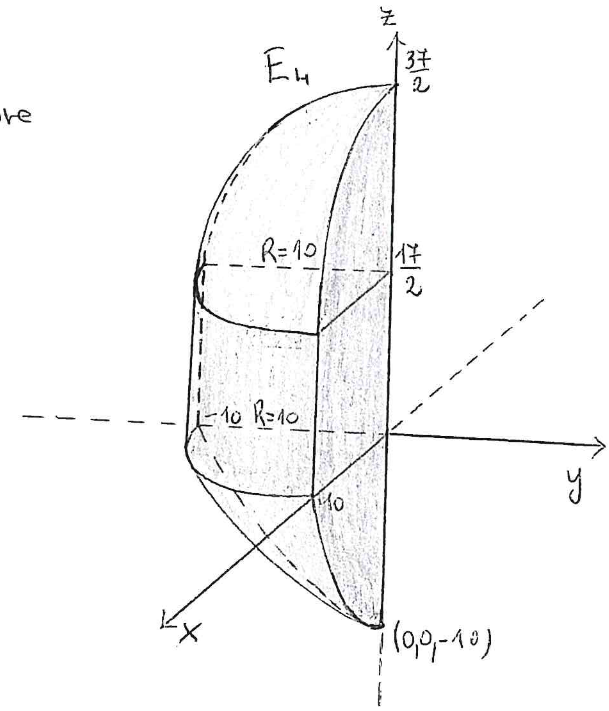
$\cap z=0 \rightarrow x^2+y^2=100 \rightarrow R=10$

$z = \frac{17}{2} + \sqrt{100-x^2-y^2}$ è la metà superiore di una superficie sferica di $C(0,0,\frac{17}{2})$ e $R=10$ (definita sul cerchio + bordo di $C(0,0)$ e $R=10$)

$z_{max} = z_C + R = \frac{17}{2} + 10 = \frac{37}{2} = 18{,}5$

Sulla circonferenza di $R=10$, su cui termina la sup. sferica, il parab. si trova a quota

$z_{parab} = -10 + \frac{1}{10} \cdot 100 = 0 < z_C = 8{,}5$.



Pertanto il paraboloide e la superficie sferica NON si intersecano. Il solido, composto da tutti i punti al di sotto della superficie sferica e al di sopra del paraboloide, tenendo conto che le condizioni $x \geq 0, y \leq 0$ dividono il solido in 4, è formato da $\frac{1}{4}$ di paraboloide $(-10 \leq z \leq 0)$, $\frac{1}{4}$ di cilindro $(0 \leq z \leq \frac{17}{2})$ e $\frac{1}{8}$ di SFERA $(\frac{17}{2} \leq z \leq \frac{37}{2})$.

E5 $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ è un PARABOLOIDE circolare

di $V(0,0,0)$ rivolto verso l'alto, di apertura $a=\frac{1}{4}$ ($a<1 \rightarrow$ + largo di $z=x^2+y^2$)

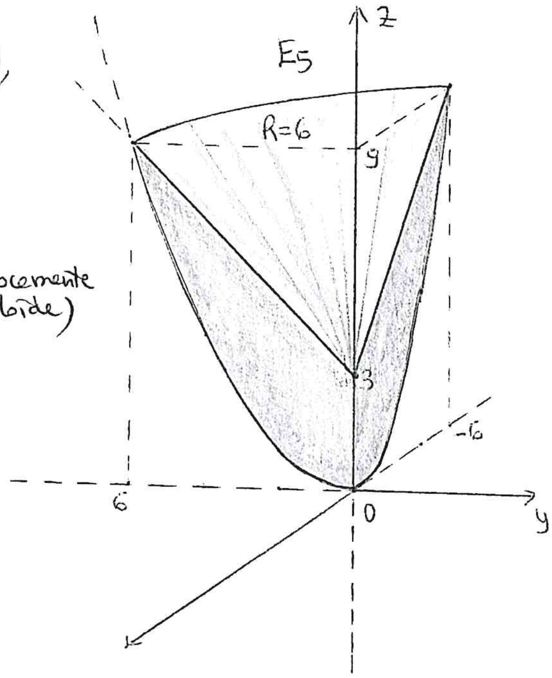
$\cap\ z=0 \Leftrightarrow (x=0, y=0)$, $\cap\ z=1$ su $x^2+y^2=4$, $R=2$.

$z=3+\sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,3)$,

apertura $a=1$, $\hat{ap}=45°$, verso l'alto

Il paraboloide e il cono si intersecano

perchè il cono sale linearmente (quindi meno velocemente del paraboloide)



$$\begin{cases} z=\frac{1}{4}(x^2+y^2) \\ z=3+\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{4}(x^2+y^2)=3+\sqrt{x^2+y^2}$$

detto $R=\sqrt{x^2+y^2}$ il raggio della circonf. di intersezione abbiamo

$\frac{1}{4}R^2=3+R \rightarrow \frac{1}{4}R^2-R-3=0$

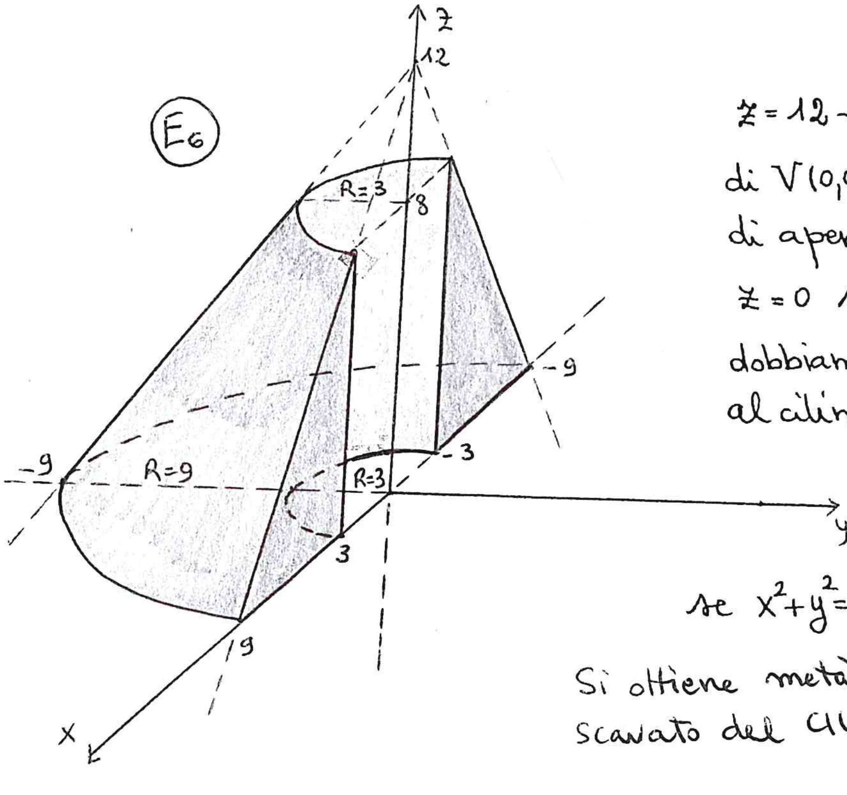
$R_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1\pm 2}{1/2}$ $\nearrow R_1=-2$ NON ACC. $\searrow R_2=6$

$z_{par}=\frac{1}{4}\cdot 36=9$

$z_{cono}=3+6=9$

Si intersecano sulla circonf. di $R=6$ $(x^2+y^2)=36$ a quota $z=9$.

La condizione $x\leq 0, y\leq 0$ divide il solido in quattro: si ottiene un quarto di paraboloide $(0\leq z\leq 9)$ scavato da un quarto di cono.



$z=12-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ è un cono

di $V(0,0,12)$ rivolto verso il basso

di apertura $\frac{4}{3}$ ($a>1 \rightarrow 0<\hat{ap}<45°$)

$z=0$ se $\sqrt{x^2+y^2}=9$ $x^2+y^2=81$ $R=9$

dobbiamo stare esternamente al cilindro di $R_1=3$ $(x^2+y^2=9)$

$\hat{ap}\simeq 36,9°$

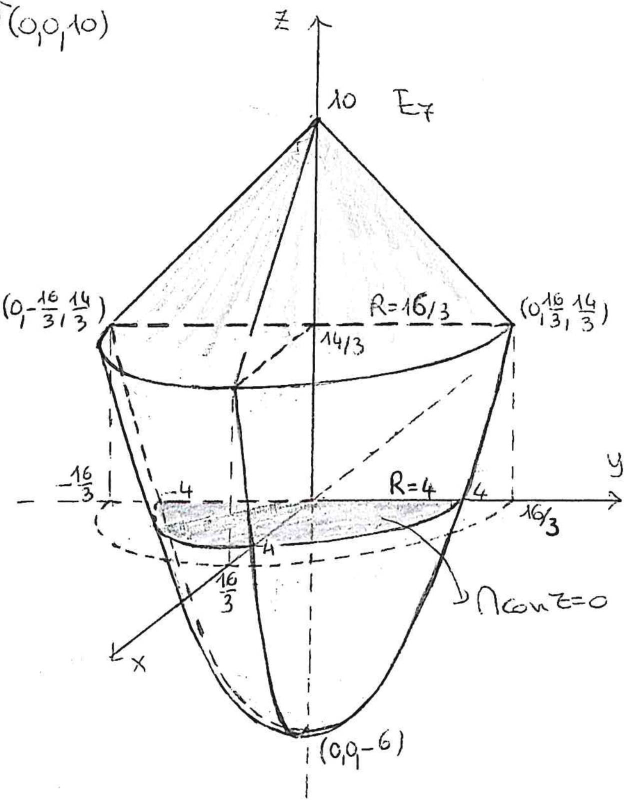
se $x^2+y^2=9 \rightarrow z_{cono}=8$

Si ottiene metà cono (per $0\leq z\leq 8$) scavato del CILINDRO di $R=3$.

(E7) $z=-6+\frac{3}{8}(x^2+y^2)$ è un paraboloide circolare di $V(0,0,-6)$, verso l'alto, $a=\frac{3}{8}$ ($a<1 \rightarrow$ + largo di $z=x^2+y^2$), $\cap\, z=0$ su $x^2+y^2=16$ $(R=4)$

$z=10-\sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,10)$ verso il basso, $a=1$ ($\hat{ap}=45°$)

$\cap\, z=0$ su $x^2+y^2=100$ $R=10$.



cono $\cap$ paraboloide $\begin{cases} z=-6+\frac{3}{8}(x^2+y^2) \\ z=10-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

posto

$R=\sqrt{x^2+y^2}$ $(R\geq 0)$ $\frac{3}{8}R^2+R-16=0$

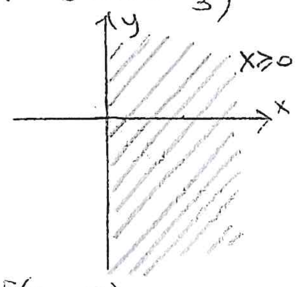
$R_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{3/4}=\frac{4}{3}(-1\pm 5)$ $R_1=-8$ NON ACC $R_2=\frac{16}{3}$

$z_{par}=-6+\frac{3}{8}\cdot\frac{256}{9}=-6+\frac{32}{3}=\frac{14}{3}$

$z_{cono}=10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}$

Si intersecano sulla circonferenza $x^2+y^2=\left(\frac{16}{3}\right)^2$ di $R=\frac{16}{3}$ a quota $z=\frac{14}{3}$.

La condizione $x\geq 0$ porta a considerare solo la **metà** del solido (paraboloide per $-6\leq z\leq\frac{14}{3}$, cono per $\frac{14}{3}\leq z\leq 10$) avente $x\geq 0$

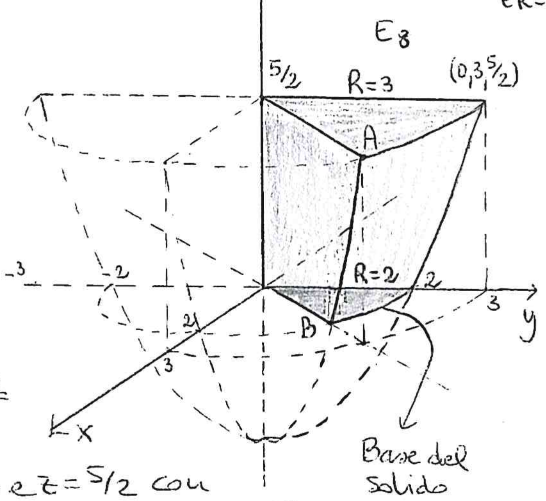


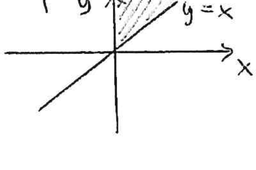
(*) Le coordinate di A, B si trovano molto facilmente con le eq.^{ni} parametriche delle circonf di R=2 e R=3

(E8) $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-2$ è un paraboloide circolare di $V(0,0,-2)$, rivolto verso l'alto, con $a=\frac{1}{2}$ ($a<1\rightarrow$ più largo di $z=(x^2+y^2)$)

$\cap\, z=0$ su $x^2+y^2=4$ $R=2$

$z=5/2$ è un piano orizzontale. Il paraboloide $\cap\, z=5/2$ su $x^2+y^2=9 \rightarrow R=3$. Si deve considerare la parte di paraboloide tra $z=0$ e $z=5/2$ con le condizioni $0\leq x\leq y$





$B=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ $A=(3\frac{\sqrt{2}}{2},3\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5}{2})$ (*)

(E9) $z = -\sqrt{9-x^2-y^2}$ è la metà inferiore della superficie sferica di $C(0,0,0)$ e $R=3$ $\quad z_{min} = -3$

$z = 8-2\sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO circolare di $V(0,0,8)$, verso il basso, $a=2$ ($0<\hat{ap}<45°$, $\hat{ap} \simeq 26{,}6°$), $\cap\, z=0$ su $x^2+y^2=16$ $R=4$

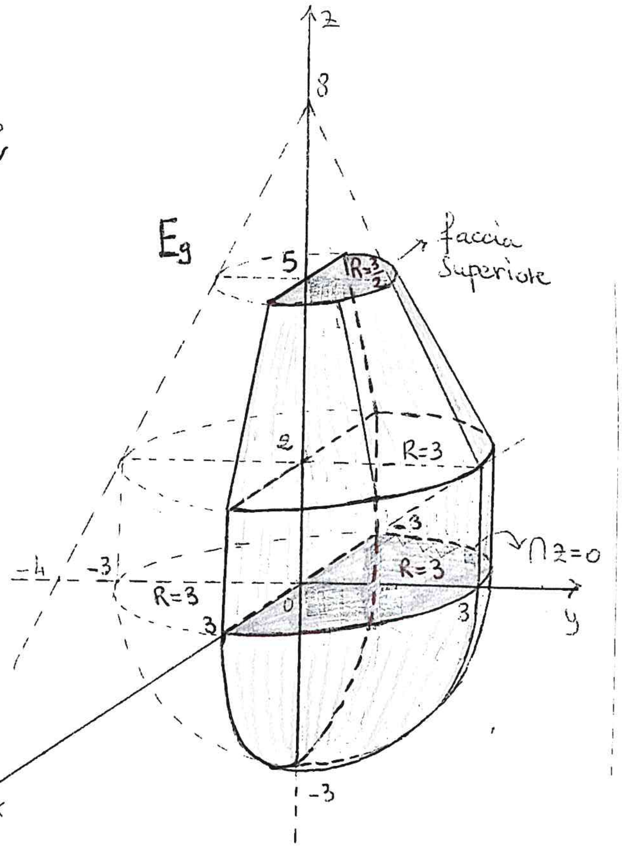
$z=5$ è un piano orizzontale che $\cap$ cono in $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3}{2}$ $\quad x^2+y^2=\frac{9}{4}$ $\quad R=\frac{3}{2}$

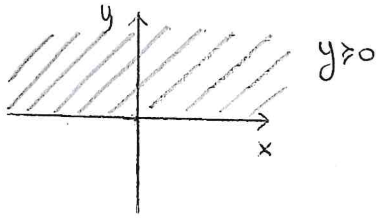
CONO e SUP. SFERICA non si intersecano perché la sup sferica si trova tutta per $z\le 0$ mentre z_{cono} su $(x^2+y^2)=9$ è

$z_{CONO} = 8-2\cdot 3 = 2 > 0$

La condizione $y \ge 0$ divide il solido a metà

SOLIDO composto da $\frac{1}{4}$ sfera per $-3\le z\le 0$, METÀ CILINDRO $0\le z\le 2$, metà tronco di cono per $2\le z\le 5$.



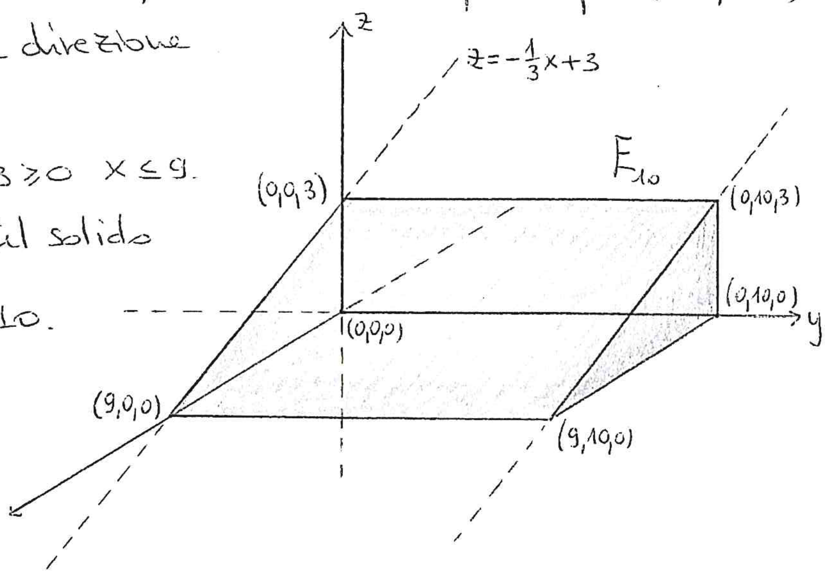


(E10) $z = -\frac{1}{3}x+3$ è un piano inclinato indipendente da y, ottenuto dalla retta $z=-\frac{1}{3}x+3$ nel piano (x,z) che passa per $(x=0, z=3)$ e $(x=9, z=0)$ trascinata nella direzione dell'asse y.

La condizione $z\ge 0 \rightarrow -\frac{1}{3}x+3\ge 0$ $\quad x\le 9$.

Quindi dobbiamo limitare il solido (PUNTI sopra $z=0$ e sotto $z=-1/3\,x+3$) alla regione $0\le x\le 9$, $0\le y\le 10$.

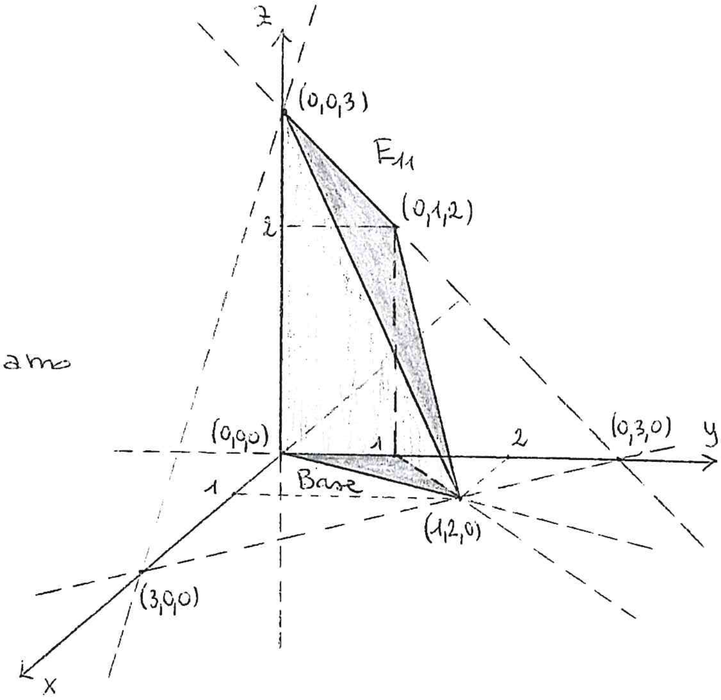
Si ottiene un PRISMA a base triangolare sul piano (x,z) con altezza lungo l'asse y ($h=10$).

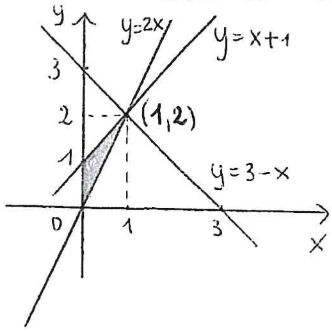


E_{11} $z = 3-(x+y)$ è un piano inclinato che passa per $(0,0,3)$ $(3,0,0)$ $(0,3,0)$

La condizione $z \geq 0$ significa
$3-(x+y) \geq 0$ $\quad y \leq 3-x$.

Tale condizione va unita alle altre $2x \leq y \leq x+1$, $x \geq 0$ per capire a quale regione dobbiamo limitare il SOLIDO (punti sopra $z=0$ e sotto $z = 3-(x+y)$).





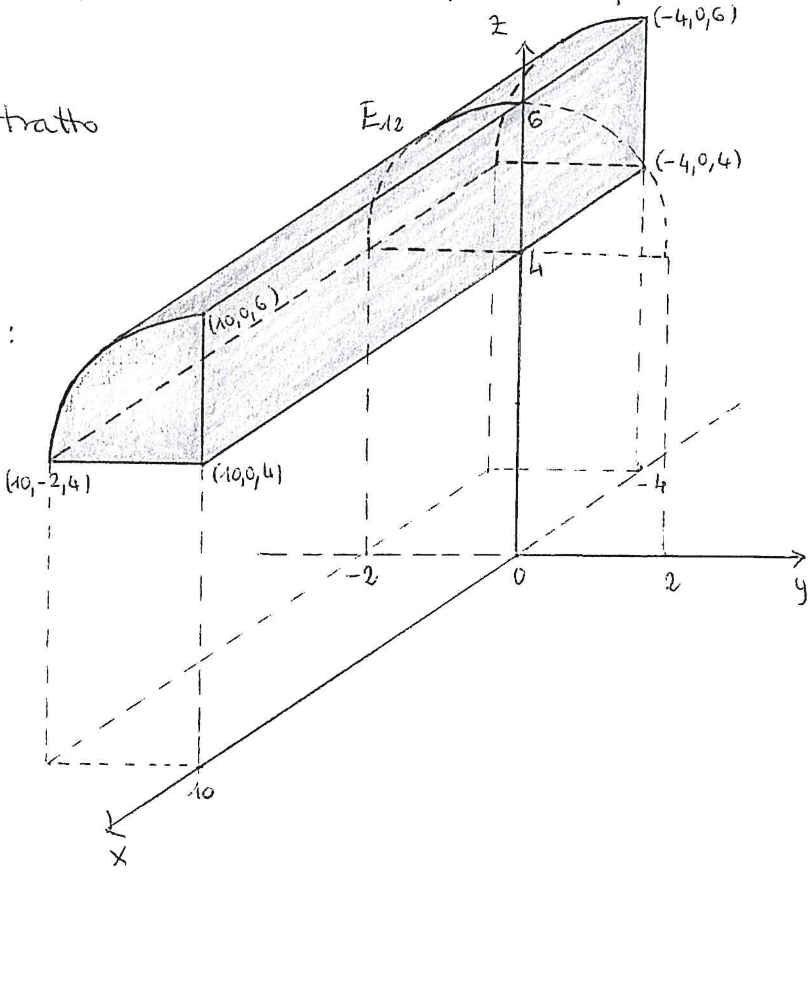
Come BASE si ottiene il TRIANGOLO di VERTICI $(0,0)$ $(2,1)$ $(0,1)$

Nello spazio si ottiene un POLIEDRO: in $(0,0)$ $z=3$, in $(2,1)$ $z=0$, in $(0,1)$ $z=2$ $\rightarrow$ VERTICI $(0,0,0)$ $(0,0,3)$ $(0,1,0)$ $(0,1,2)$ $(1,2,0)$

E_{12} $y^2+(z-4)^2=4$ è un CILINDRO di $R=2$ e asse la retta // asse x per $(0,4)$ (cioè $\begin{cases} y=0 \\ z=4 \end{cases}$)

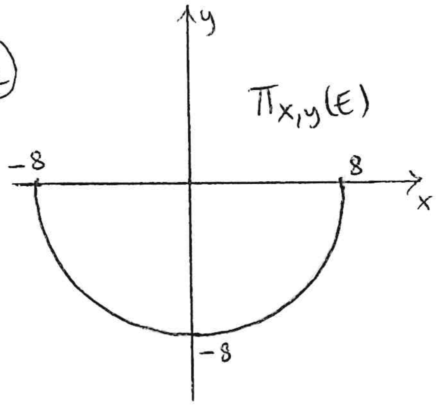
Si deve considerare solo il tratto per $-4 \leq x \leq 10$.

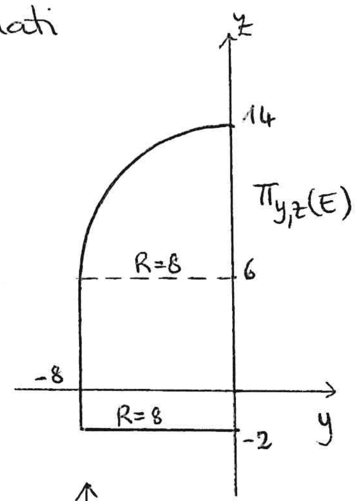
Le condizioni $y \leq 0$, $z \geq 4$ dividono il CILINDRO in 4: quindi si ottiene $\frac{1}{4}$ di CILINDRO di $R=2$ (sul piano (y,z) Centro $(0,4)$) e altezza $h=14$.

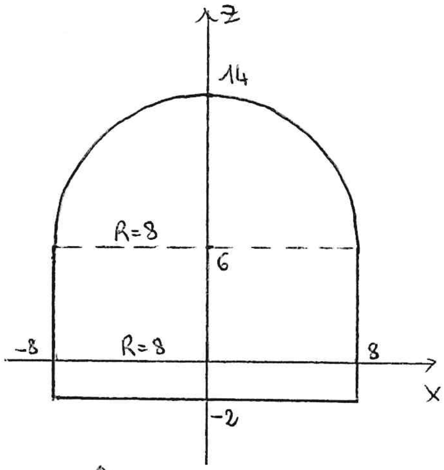


PROIEZIONI sui piani coordinati

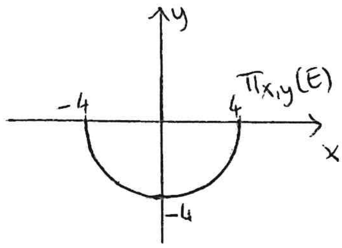
E_1

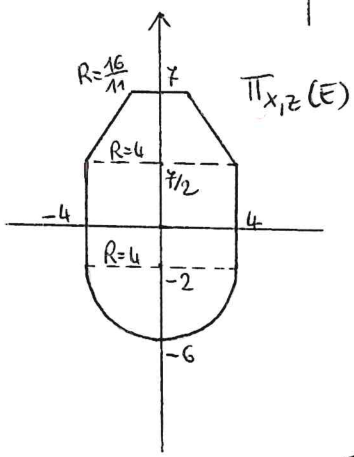


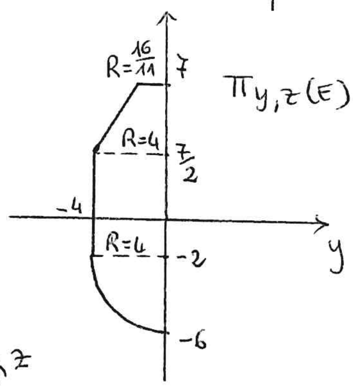




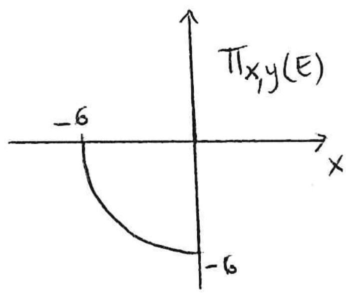
E_2

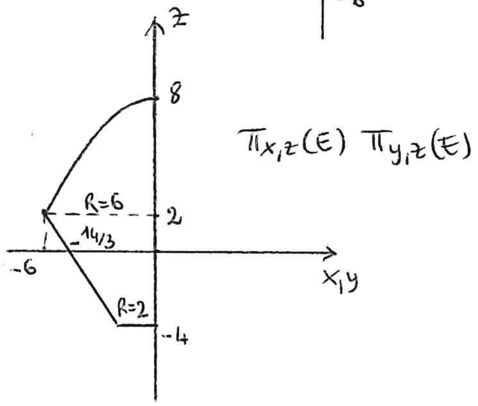




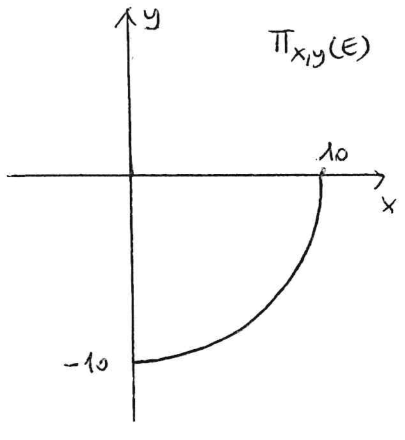


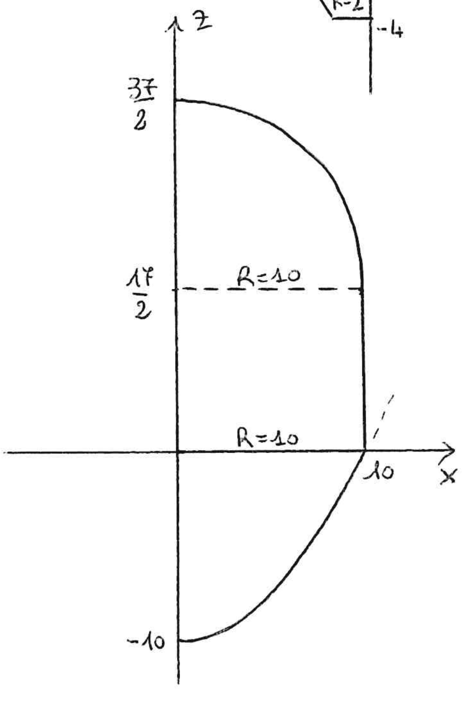
E_3

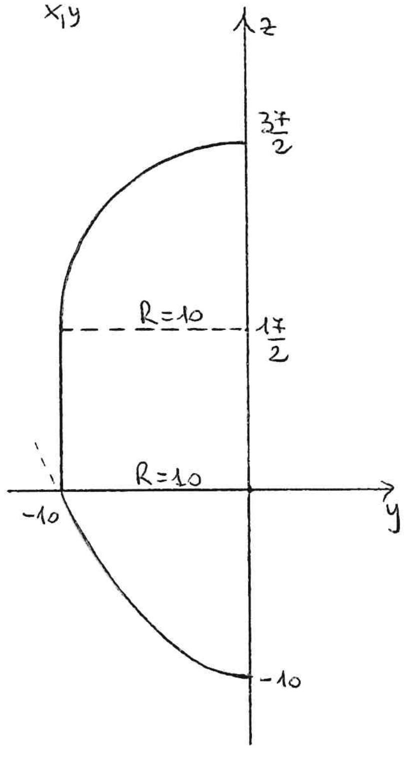




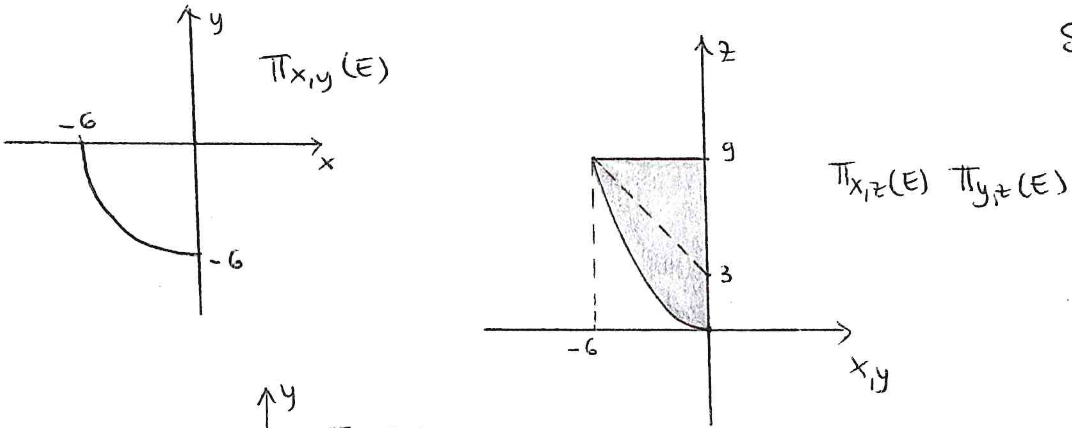
E_4



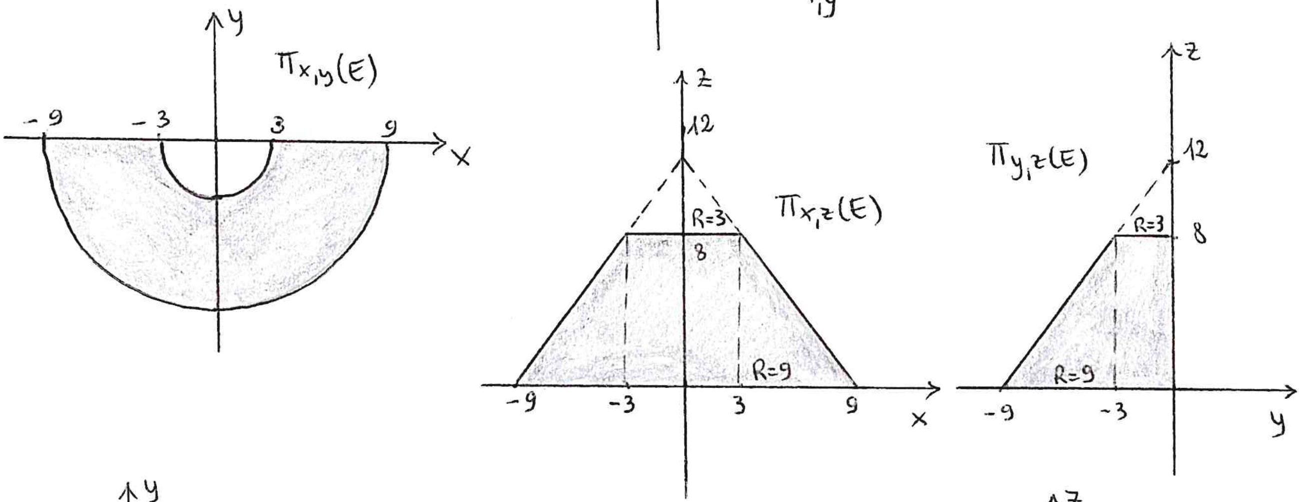




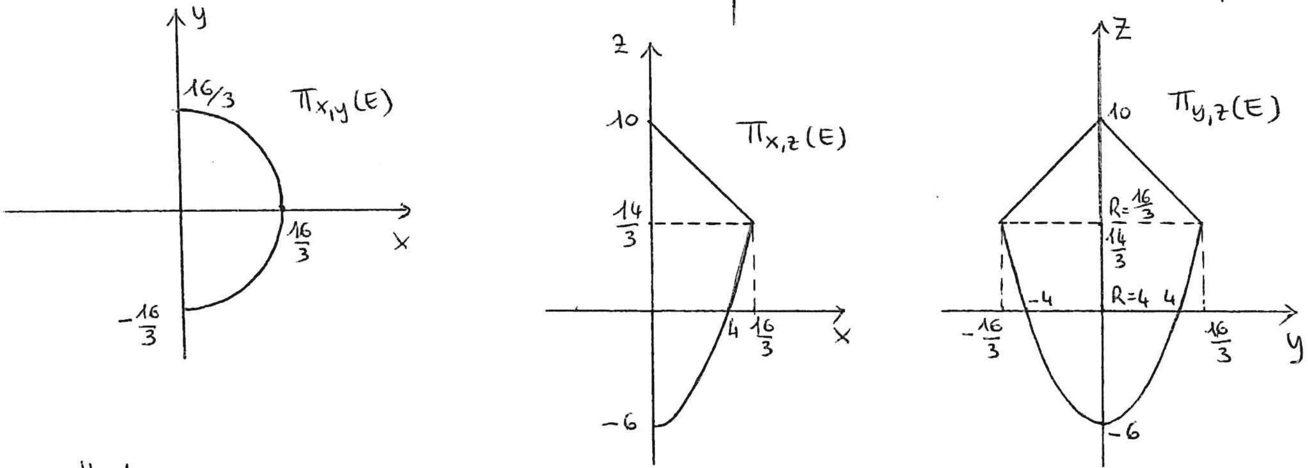
E_5


y
$\Pi_{x,y}(E)$
-6
x
-6
z
9
$\Pi_{x,z}(E)$ $\Pi_{y,z}(E)$
3
-6
x,y

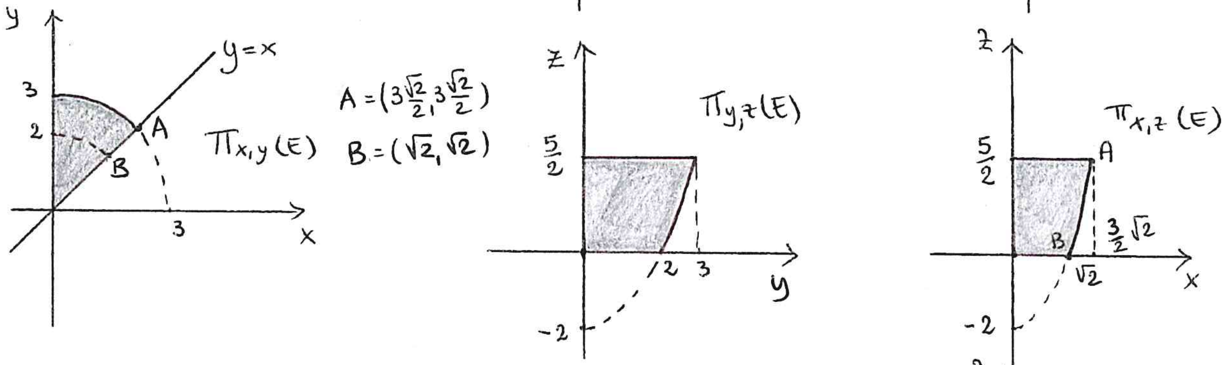
E_6


y
$\Pi_{x,y}(E)$
-9
-3
3
9
x
z
12
R=3
8
$\Pi_{x,z}(E)$
R=9
-9
-3
3
9
x
z
$\Pi_{y,z}(E)$
12
R=3
8
R=9
-9
-3
y

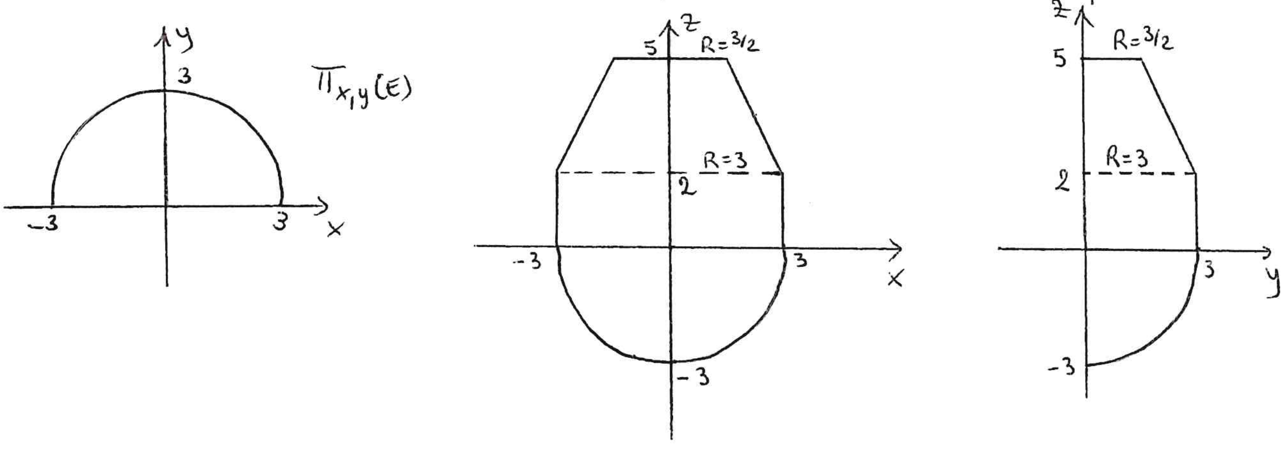
E_7


y
16/3
$\Pi_{x,y}(E)$
$\frac{16}{3}$
x
$-\frac{16}{3}$
z
10
$\Pi_{x,z}(E)$
$\frac{14}{3}$
4
$\frac{16}{3}$
x
-6
z
10
$\Pi_{y,z}(E)$
$R=\frac{16}{3}$
$\frac{14}{3}$
-4
R=4
4
$-\frac{16}{3}$
$\frac{16}{3}$
y
-6

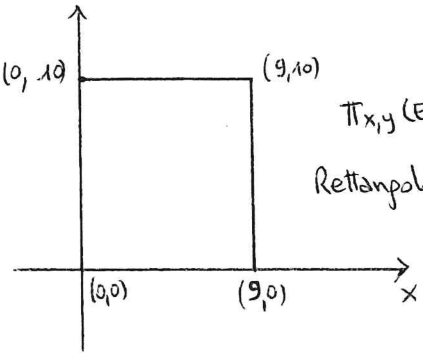
E_8


y
y=x
3
2
A
B
$\Pi_{x,y}(E)$
3
x
$A=(3\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2})$
$B=(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
z
$\Pi_{y,z}(E)$
$\frac{5}{2}$
2
3
y
-2
z
$\Pi_{x,z}(E)$
$\frac{5}{2}$
A
$\frac{3}{2}\sqrt{2}$
B
$\sqrt{2}$
x
-2

E_9

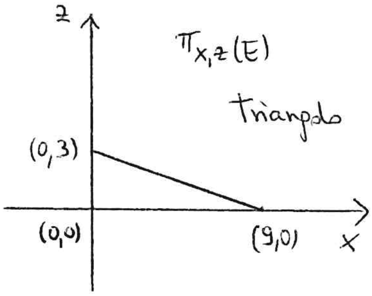

y
3
$\Pi_{x,y}(E)$
-3
3
x
z
5
R=3/2
R=3
2
-3
3
x
-3
z
5
R=3/2
R=3
2
3
y
-3

E_{10}



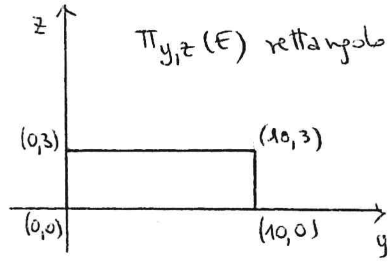
$\Pi_{x,y}(E)$

Rettangolo



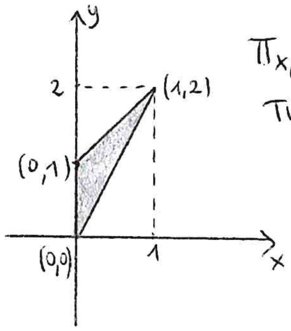
$\Pi_{x,z}(E)$

Triangolo



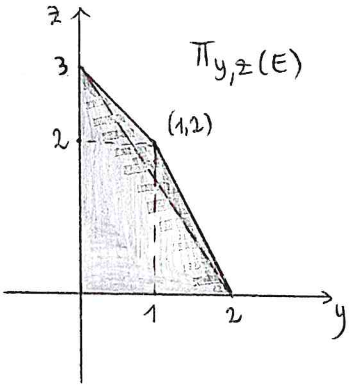
$\Pi_{y,z}(E)$ rettangolo

E_{11}

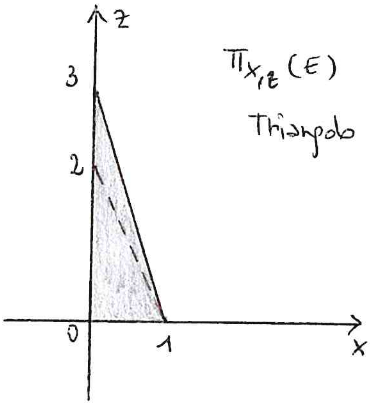


$\Pi_{x,y}(E)$

Triangolo



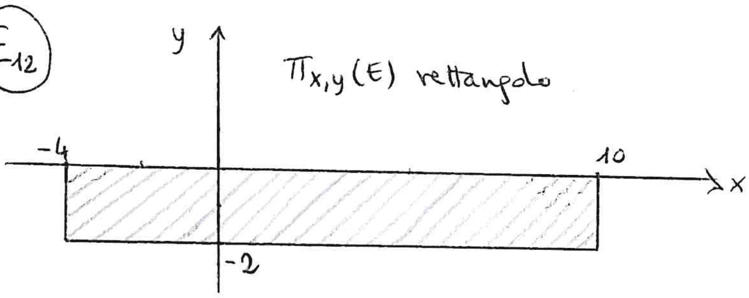
$\Pi_{y,z}(E)$



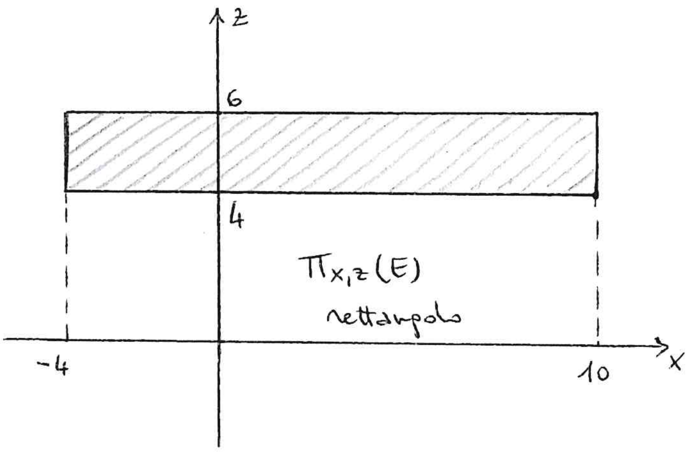
$\Pi_{x,z}(E)$

Triangolo

E_{12}

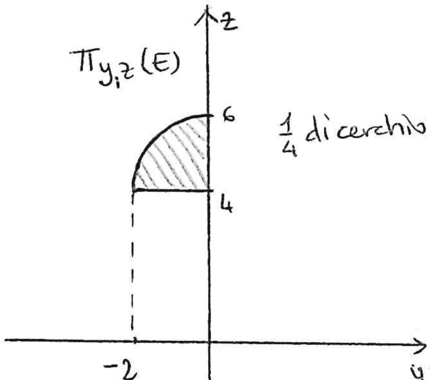


$\Pi_{x,y}(E)$ rettangolo



$\Pi_{x,z}(E)$

rettangolo



$\Pi_{y,z}(E)$

$\frac{1}{4}$ di cerchio