COGNOME ____________	NON SCRIVERE QUI
NOME ____________	1 2 3 4
MATRICOLA ⌴⌴⌴⌴⌴⌴	
CORSO AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL	

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2018-2019 — PARMA, 21 GENNAIO 2019

AN2 - 21/1/19 - 1 -

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore e mezza**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

0) **PARTE PRELIMINARE**

Completate:

a) Le equazioni parametriche di una curva che percorre il segmento di estremi $(3,-1)$ e $(-2,2)$ nel verso delle x crescenti sono

eq.ne della retta

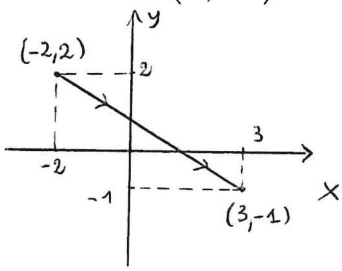
$m=-\frac{3}{5}$

$y=-1-\frac{3}{5}(x-3)$

$y=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -\frac{3}{5}t+\frac{4}{5} \end{cases} \quad t\in[-2,3]$$

oppure $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=2-3t \end{cases}$ $t\in[0,1]$



b) Sia $\gamma:[-\pi,\frac{3}{2}\pi]\to\mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = -1 + 4\cos t \\ y(t) = 1 - \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t\in[-\pi,\frac{3}{2}\pi].$$

calcoli a pag. 4

$C(-1,1)$

$a=4$

$b=1$

La curva percorre l'ELLISSE di equazione $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$

$\frac{(x+1)^2}{16}+(y-1)^2=1$

dal punto iniziale $(-5,1)$ al punto finale $(-1,2)$

in verso ORARIO perchè in $y=1\ominus \operatorname{sen}t$ c'è il segno $-$

per 1 e $\frac{1}{4}$ giri perchè $\Delta t=\frac{3}{2}\pi-(-\pi)=\frac{3}{2}\pi+\pi=\frac{5}{2}\pi=\underbrace{2\pi}_{1\text{ giro}}+\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\frac{1}{4}\text{ giro}}$

Il vettore tangente nel punto $P_0=(-1+2\sqrt{2},\,1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ è $\vec{v}_{P_0}=2\sqrt{2}\vec{\imath}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$

L'equazione cartesiana della retta normale in P_0 è: $y=4x+5-\frac{15}{2}\sqrt{2}$

i vettori normali nel punto P_0 sono: $\vec{N}_{or}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath}-2\sqrt{2}\vec{\jmath}$ $\vec{N}_{aut}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath}+2\sqrt{2}\vec{\jmath}$

c) Considerate la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$.

Calcoli a pag. 4

i) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corrrispondente a $(x_0 = 1, y_0 = -1)$ è ... $z = 2x - 2y + 2$

ii) La derivata direzionale di f nel punto $(x_0 = 1, y_0 = -1)$ nella direzione individuata dall'angolo $\theta = \frac{3}{4}\pi$ vale ... $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_\theta}(1,-1) = -2\sqrt{2}$

d) Considerate la funzione $f(x,y) = 10 - 2\sqrt{20x + 20y - x^2 - y^2 - 100}$.

Svolgimento a pag 4-5

i) Determinate e disegnate l'insieme di livello cui appartiene il punto $(4, 10)$.

$(4,10) \in E_{-6} \quad E_{-6}: (x-10)^2 + (y-10)^2 = 36$

ii) Spiegate con precisione quale relazione sussiste tra il gradiente di una funzione e gli insiemi di livello.

iii) Determinate e disegnate il gradiente di f nel punto $(4, 10)$, verificando quanto affermato al punto ii).

e) La soluzione del seguente problema di Cauchy

Svolgim. a pag 5-6

$$\begin{cases} 2y''(x) - 2y'(x) + \frac{17}{2}y(x) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -5. \end{cases}$$

è ... $y(x) = -3e^{\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(2x) + 2e^{\frac{1}{2}x}\cos(2x)$

f) Si consideri l'equazione differenziale $\frac{1}{6}y''(x) - y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = (3x^2 - x)e^{3x}$.

Le soluzioni dell'$\underbrace{\text{equazione omogenea associata}}_{\text{è } \frac{1}{6}y'' - y' + \frac{3}{2}y = 0}$ sono .. $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

Calcoli: ... eq.^{ne} caratt. $\frac{1}{6}t^2 - t + \frac{3}{2} = 0 \quad t_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1-1}}{1/3} = 3$

$\Delta = 0 \quad t_1 = 3$ con molteplicità 2 SOL^{NI} FOND $y_1(x) = e^{3x} \quad y_2(x) = xe^{3x}$

La soluzione particolare va cercata nella forma ... $\bar{y}(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$

il 2°m dell'eq.^{ne} ($f(x) = (3x^2 - x)e^{3x}$) è un polinomio di 2° grado

perchè ... per un'esponenziale e^{3x}, quindi si considera

$(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$ e poi si moltiplica per x^2 perchè $\alpha = 3$ è sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratteristica con molteplicità due.

$e^{\alpha x} = e^{3x}$

1) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione

Svolgim. a pag. 6-7-8

$$f(x,y) = \frac{1}{7}(y + 9 - x^2)(7 - y).$$

a) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

b) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le x + 7, \ y \le -x + 7\}.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $g(x,y) = 6 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Svolgim. a pag. 8-9

a) Determinate il dominio di g, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g, spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \le z \le 6 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2}\ , \ z \le 4, \ x \ge 0, \ y \le 0\}.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti) Determinate tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale:

Svolgim. a pag. 10

$$\frac{3}{2}y''(x) - 5y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = -9\cos\left(\frac{x}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right).$$

Risposta: ... $y(x) = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{3x} + 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

AN2 - 21/1/2019 - 4 SOLUZIONE

ES 0) b) $P_0 = \left(-1+2\sqrt{2},\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ corrisponde a $t_0 = -\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} \cancel{-1}+2\sqrt{2} = \cancel{-1}+4\cos t \\ \cancel{1}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{1}-\operatorname{sen} t \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \to t_0 = -\frac{\pi}{4} \quad \left(\frac{7}{4}\pi \notin \left[-\pi, \frac{3}{2}\pi\right]\right)$$

$t \in \left[-\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$

$\gamma'(t) = (-4\operatorname{sen} t, -\cos t)$ $\quad \vec{v}_{P_0} = \gamma'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\,\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$\vec{N}_{or} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - 2\sqrt{2}\,\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{aut} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{j}$

$m_{tau} = \dfrac{-\sqrt{2}/2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}$ $\quad m_{norm} = 4$ $\quad r_{norm}: \ y = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\left(x+1-2\sqrt{2}\right)$

$$y = 4x + 5 - \frac{15}{2}\sqrt{2}$$

c) i) $z_0 = f(1,-1) = 6$

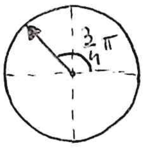
$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ $\quad \nabla f(1,-1) = (2,-2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$

eq.ne del piano tangente $z = 6 + 2(x-1) - 2(y+1)$

$$z = 2x - 2y + 2$$

ii) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot \vec{v}_\theta$ $\quad \vec{v}_\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$

$\vec{v}_\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$



R = 1

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_\theta}(1,-1) = \left(2\vec{i} - 2\vec{j}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) =$$
$$= -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2} \simeq -2{,}8$$

d) i) $f(4,10) = 10 - 2\sqrt{20\cdot 4 + 20\cdot 10 - 4^2 - 10^2 - 100} = 10 - 2\sqrt{80 + \cancel{200} - 16 - \cancel{100} - \cancel{100}} =$

$= 10 - 2\sqrt{64} = 10 - 16 = -6 \implies \boxed{(4,10) \in E_{-6}}$

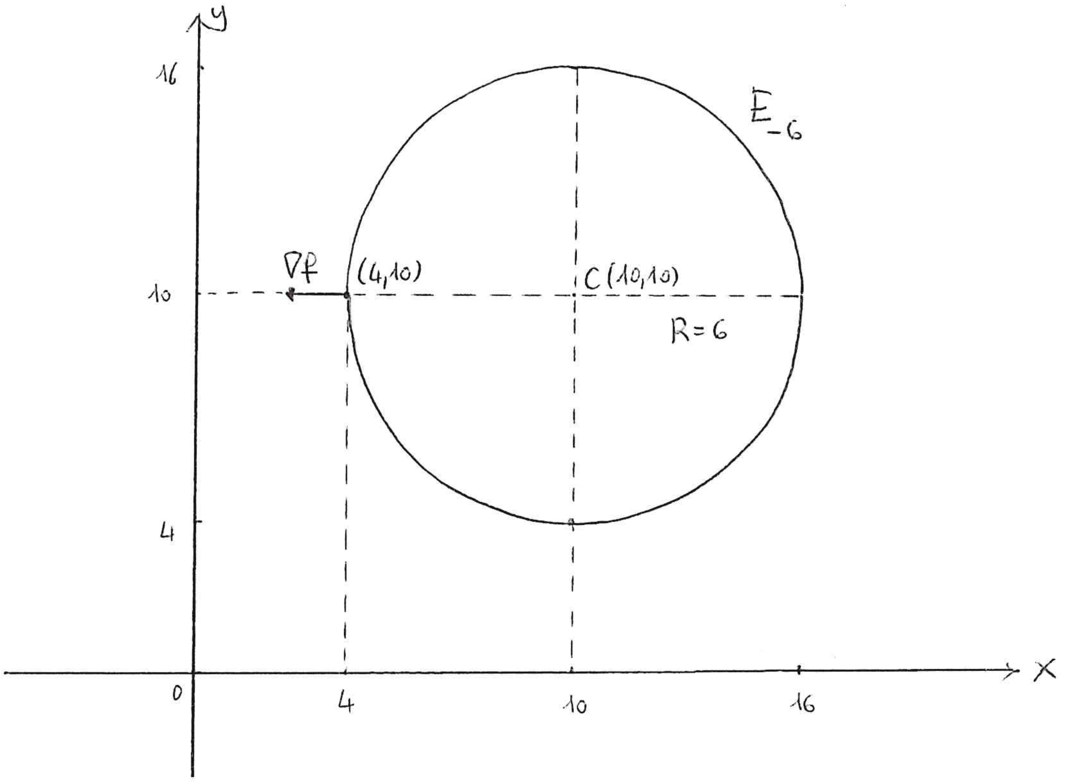
$E_{-6}: \ -6 = 10 - 2\sqrt{20x + 20y - x^2 - y^2 - 100} \implies 2\sqrt{100 - (x-10)^2 - (y-10)^2} = 16$

$20x + 20y - x^2 - y^2 - 100 = -\left(100 + x^2 + y^2 - 20x - 20y\right) =$

$= -\left((x-10)^2 + (y-10)^2 - 100\right) = 100 - (x-10)^2 - (y-10)^2$

$\sqrt{100 - (x-10)^2 - (y-10)^2} = 8 > 0$ elevo $(\ )^2$ $\quad (x-10)^2 + (y-10)^2 = 36$

CIRCONFERENZA di $C(10,10)$ e $R = 6$.



ii) In ogni punto di un insieme di livello E_K il GRADIENTE di f (∇f) calcolato nel punto risulta perpendicolare all'insieme di livello.

iii) $$\nabla f(x,y) = \left(-\cancel{2}\,\frac{20-2x}{\cancel{2}\sqrt{20x+20y-x^2-y^2-100}},\ -\cancel{2}\,\frac{20-2y}{\cancel{2}\sqrt{20x+20y-x^2-y^2-100}}\right)$$

$$\nabla f(4,10) = \left(-\frac{20-8}{\sqrt{64}},-\frac{20-20}{\sqrt{64}}\right) = \left(-\frac{12}{8},\frac{0}{8}\right) = \left(-\frac{3}{2},0\right) = -\frac{3}{2}\vec{i}$$

$\nabla f(4,10) \perp E_{-6}$ come si vede dal DISEGNO.

e) è un'eq.^{ne} omogenea del 2° ordine

eq.^{ne} caratt. $2t^2-2t+\frac{17}{2}=0$ $\quad t^2-t+\frac{17}{4}=0$ $\quad t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-17}}{2}=\underset{\alpha}{\frac{1}{2}}\pm\underset{\beta}{2}i$

SOL.^{ni} FONDAM. $y_1(x)=e^{\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(2x)$ $\quad y_2(x)=e^{\frac{1}{2}x}\cos(2x)$

Tutte le sol.^{ni} sono: $y(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(2x)+c_2e^{\frac{1}{2}x}\cos(2x)$ $\quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$

Pb. di Cauchy $\quad y'(x)=\frac{1}{2}c_1e^{\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(2x)+2c_1e^{\frac{1}{2}x}\cos(2x)$
$+\frac{1}{2}c_2e^{\frac{1}{2}x}\cos(2x)-2c_2e^{\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(2x)$

$$\begin{cases} y(0)=c_2=2 \\ y'(0)=2c_1+\frac{1}{2}c_2=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2c_1=-6 \\ c_2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1=-3 \\ c_2=2 \end{cases}$$

SOL.^{ne} $y(x)=-3e^{\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(2x)+2e^{\frac{1}{2}x}\cos(2x)$

ES1) a) $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}^2$ $\quad \nabla f(x,y)=\left(\frac{1}{7}(-2x)(7-y),\ \frac{1}{7}(7-y)+\frac{1}{7}(y+9-x^2)(-1)\right)=$

$$=\left(-\frac{2}{7}x(7-y),\ \frac{1}{7}(7-y)-\frac{1}{7}(y+9-x^2)\right).$$

$-2x+\frac{2}{7}yx \quad 1-\frac{1}{7}y-\frac{1}{7}y-\frac{9}{7}+\frac{x^2}{7}$

$\frac{1}{7}x^2-\frac{2}{7}y-\frac{2}{7}$

PUNTI STAZIONARI di f $\quad \nabla f(x,y)=(0,0)$

$$\begin{cases} -\frac{2}{7}x(7-y)=0 \\ \frac{1}{7}(7-y)-\frac{1}{7}(y+9-x^2)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \ \text{ o } \ y=7 \\ \end{cases}$$

$y=7 \to 2^{a}\,eq.^{ne}$ $\ -\frac{1}{7}(7+9-x^2)=0$ $\quad x^2=16$ $\quad \underline{x=\pm 4}$

$x=0 \to 2^{a}\,eq.^{ne}$ $\ 1-\frac{1}{7}y-\frac{1}{7}y-\frac{9}{7}=0$ $\quad \frac{2}{7}y=-\frac{2}{7}$ $\quad \underline{y=-1}$

<u>3 PUNTI STAZIONARI</u> $\quad (0,-1)\quad (4,7)\ (-4,7)$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{7}(7-y) & \frac{2}{7}x \\ \frac{2}{7}x & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$\frac{2}{7}y-2$

$$Hf(0,-1)=\begin{pmatrix} -\frac{16}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \qquad \det Hf(0,-1)=\frac{32}{49}>0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1)<0$$

quindi $(0,-1)$ è un <u>punto di MASSIMO</u>

$$Hf(\pm 4,7)=\begin{pmatrix} 0 & \pm\frac{8}{7} \\ \pm\frac{8}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \qquad \det Hf(\pm 4,7)=-\frac{64}{49}<0 \Rightarrow$$

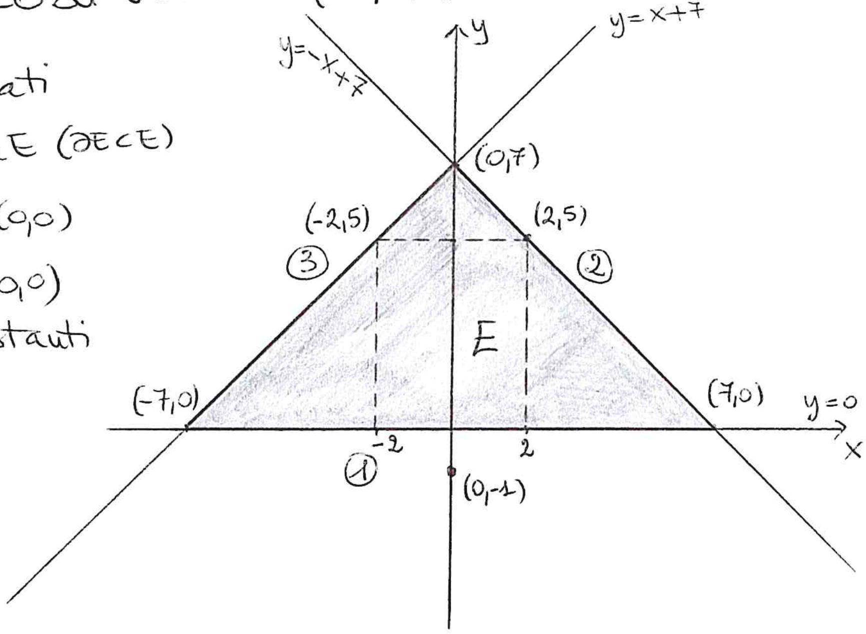
i punti $(\pm 4,7)$ sono <u>punti di SELLA</u>

b) <u>1° passo</u> $\ E$ è il TRIANGOLO di VERTICI $(-7,0)\ (7,0)\ (0,7)$

E è CHIUSO in quanto tutti i lati del triangolo sono contenuti in E $(\partial E\subset E)$

E è LIMITATO perchè $E\subset B_8(0,0)$ (i punti di E più lontani da $(0,0)$ sono $(7,0)$, $(-7,0)$ e $(0,7)$ tutti distanti 7 da $(0,0)$),

f è continua su $\mathbb{R}^2$, e quindi anche su E, perchè



prodotto di una costante per un polinomio di 2° grado in (x,y) per un polinomio di 1° grado in y - Quindi per il Teorema di WEIERSTRASS siamo sicuri che f ammette MASSIMO e MINIMO assoluti su E.

2° passo Non ci sono punti di massimo e minimo locale interni ad E ($(0,-1) \notin E$), quindi i punti di massimo e di minimo sono sul bordo di E.

3° passo studio del bordo di E

① $\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}$ $t\in[-7,7]$ $g_1(t)=f(t,0)=\frac{1}{7}(9-t^2)\cdot 7 = 9-t^2$

$g_1'(t)=-2t$ $g_1'(t)=0 \Leftrightarrow -2t=0 \Leftrightarrow t=0$

tempi: $t=-7$ $t=0$ $t=7$

punti: $(-7,0)$ $(0,0)$ $(7,0)$

valori: $f(-7,0)=-40$ $f(0,0)=9$ $f(7,0)=40$

② $\begin{cases} x=t \\ y=7-t \end{cases}$ $t\in[0,7]$ $g_2(t)=f(t,7-t)=\frac{1}{7}(7-t+9-t^2)\cdot t =$

$=\frac{1}{7}(-t^3-t^2+16t)$

$g_2'(t)=\frac{1}{7}(-3t^2-2t+16)$ $g_2'(t)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3t^2-2t+16=0 \Leftrightarrow 3t^2+2t-16=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{3}=\frac{-1\pm 7}{3}$

$\Leftrightarrow \underbrace{t_1=-\frac{8}{3}}_{\text{non accett } \notin[0,7]}$ e $t_2=2$ tempi: $t=0$ $t=2$ $t=7$

punti: $(0,7)$ $(2,5)$ $(7,0)$

valori: $f(0,7)=0$ $f(2,5)=\frac{1}{7}(\overset{10}{5+9-4})(\overset{2}{7-5})=\frac{20}{7}\simeq 2{,}86$

$f(7,0)=-40$

③ $\begin{cases} x=t \\ y=t+7 \end{cases}$ $t\in[-7,0]$ $g_3(t)=f(t,t+7)=\frac{1}{7}(t+7+9-t^2)(-t)=$

$=\frac{1}{7}(t^3-t^2-16t)$ $g_3'(t)=\frac{1}{7}(3t^2-2t-16)$

$g_3'(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-2t-16=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{3}=\frac{1\pm 7}{3}$ $\nearrow t_1=\frac{8}{3}$ non acc $\notin[-7,0]$ $\searrow t_2=-2$

AN2 - 21/1/19 - 8 -

tempi : $t=-7$ $t=-2$ $t=0$ punti : $(-7,0)$ $(-2,5)$ $(0,7)$

valori : $f(-7,0)=-40$ $f(-2,5)=\frac{20}{7}$ $f(0,7)=0$

4° passo : Conclusione

Il max e il min di f su E sono assunti sul bordo; sul bordo f è compresa tra -40 e 9, quindi

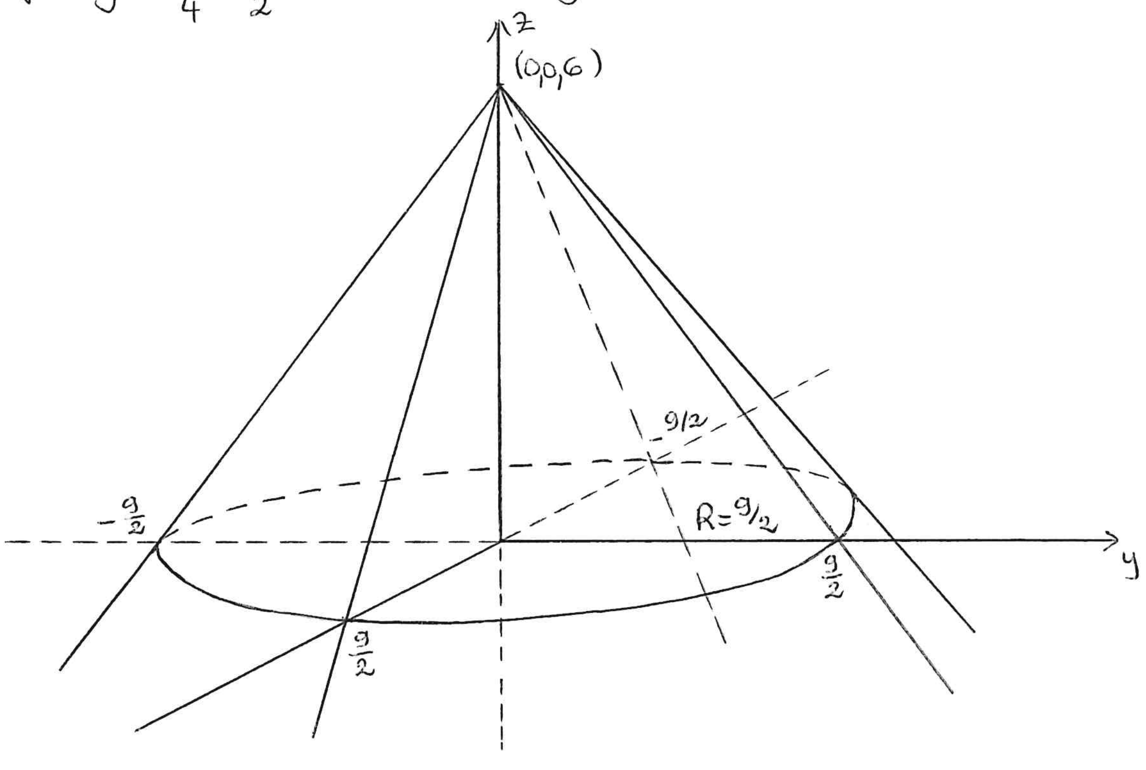
$$\min_E f(x,y) = -40 = f(-7,0) = f(7,0)$$

$$\max_E f(x,y) = 9 = f(0,0) -$$

ES. 2) a) $\operatorname{dom} g = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 0\} = \mathbb{R}^2$ perchè la condizione $x^2+y^2\geq 0$ è sempre verificata (si tratta di una somma di quadrati).

b) eq.ne del grafico di g : $z = 6-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ - Si tratta di un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,6)$, rivolto verso il basso, di apertura $a=\frac{4}{3}$ $(a>1 \to 0<\hat{ap}<45°)$, $\hat{ap}=\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\simeq 36{,}9°$, che interseca il piano (x,y) per : $\cap z=0$ $6-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}>0 \Leftrightarrow x^2+y^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2$ circonf di $C(0,0)$ e $R=\frac{9}{2}=4{,}5$.



c) Disegno del SOLIDO V :

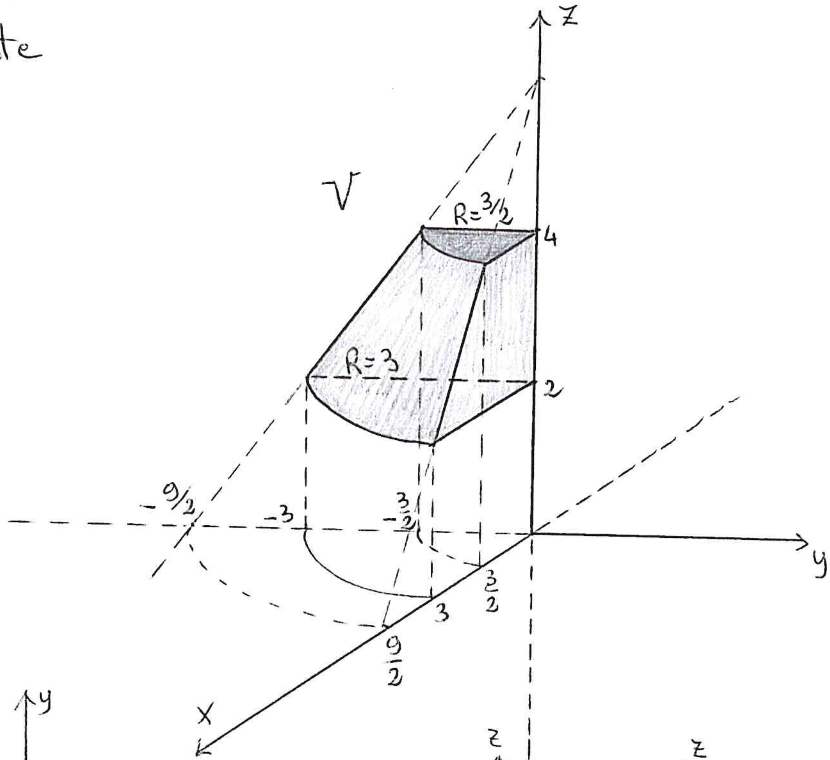
- la condizione $z \le 6 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ significa SOTTO il cono ed essendo il cono rivolto verso il basso vuol dire considerare il cono pieno
- le condizioni $2 \le z \le 4$ portano al TRONCO di CONO compreso tra queste due quote

se $z=2$ $\quad 2 = 6 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

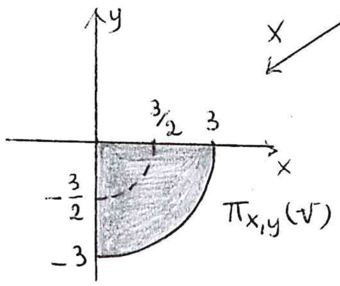
$\sqrt{x^2+y^2} = 3 \quad x^2+y^2 = 9 \quad R = 3$

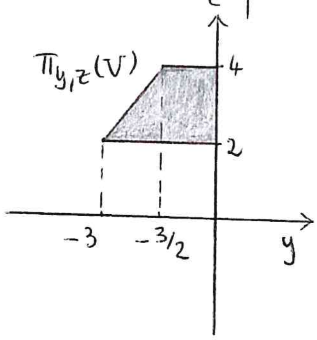
se $z=4$ $\quad 4 = 6 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

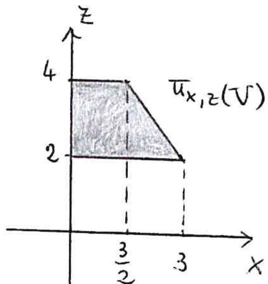
$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2} \quad x^2+y^2 = \frac{9}{4} \quad R = \frac{3}{2}$



- le condizioni $x \ge 0$, $y \ge 0$ dicono di considerare il quarto del tronco di cono la cui proiezione è nel 4° quadrante







d) VOLUME di V =

$$= \int_{\substack{x^2+y^2 \le \frac{9}{4} \\ x \ge 0 \; y \le 0}} (4-2)\, dx\, dy \; +$$

$$+ \int_{\frac{9}{4} \le x^2+y^2 \le 9} \left(6 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} - 2\right) dx\, dy = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^{3/2} 2\rho\, d\rho \right) d\vartheta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_{\frac{3}{2}}^{3} \underbrace{\left(4 - \frac{4}{3}\rho\right)\rho}_{4\rho - \frac{4}{3}\rho^2}\, d\rho \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\rho^2\right]_0^{3/2} + \frac{\pi}{2}\left[2\rho^2 - \frac{4}{9}\rho^3\right]_{3/2}^{3} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\left[18 - 12 - \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{9}{4} + 6 - 3\right] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{9}{4} + 3\right) = \frac{21}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{21}{8}\pi}$$

AN2 - 21/1/19 - 10

ES.3) Eq.^{ne} omogenea associata $\frac{3}{2}y''(x)-5y'(x)+\frac{3}{2}y(x)=0$

Eq.^{ne} caratt. $\frac{3}{2}t^2-5t+\frac{3}{2}=0$ $\quad t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm4}{3}\nearrow t_1=\frac{1}{3}$, $\searrow t_2=3$ $\quad \Delta>0$

SOL.^{ni} FOND. $y_1(x)=e^{\frac{1}{3}x}$ $\quad y_2(x)=e^{3x}$ $(*)$

Sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea $y(x)=c_1e^{\frac{1}{3}x}+c_2e^{3x}$ $\quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x)=A\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)+B\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ perchè il 2° m dell'eq.^{ne} $\left(f(x)=-9\cos\left(\frac{x}{3}\right)-\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\right)$ è una combinazione lineare di $\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right),\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ e non si deve moltiplicare per x perchè le due sol.^{ni} fondamentali (y_1,y_2 $(*)$) NON sono $\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$ e $\cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

$\bar{y}'(x)=\frac{1}{3}A\cos\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{3}B\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$ $\qquad \bar{y}''(x)=-\frac{1}{9}A\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{9}B\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo

$$\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{9}A\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{9}B\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)-5\left(\frac{1}{3}A\cos\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{3}B\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\right)+\frac{3}{2}\left(A\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)+B\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)=$$
$$=-9\cos\left(\frac{x}{3}\right)-\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\left(-\frac{1}{6}A+\frac{5}{3}B+\frac{3}{2}A+1\right)\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}B-\frac{5}{3}A+\frac{3}{2}B+9\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\left(\frac{4}{3}A+\frac{5}{3}B+1\right)\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}B-\frac{5}{3}A+9\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

Poichè una combinazione lineare di seno e coseno dello stesso argomento è $=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ se e solo se entrambi i coeff. sono nulli otteniamo il sistema

$$\begin{cases}\frac{4}{3}A+\frac{5}{3}B+1=0\\ \frac{4}{3}B-\frac{5}{3}A+9=0\end{cases}\quad \begin{cases}4A=-5B-3\\ \dots\end{cases}\quad \begin{cases}A=-\frac{5}{4}B-\frac{3}{4}\\ \frac{4}{3}B-\frac{5}{3}\left(-\frac{5}{4}B-\frac{3}{4}\right)+9=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dots\\ \left(\frac{4}{3}+\frac{25}{12}\right)B=\\ =-9-\frac{5}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dots\\ \frac{41}{12}B=-\frac{41}{4}\end{cases}\quad \begin{cases}A=-\frac{5}{4}(-3)-\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3\\ B=-3\end{cases}\qquad \bar{y}(x)=3\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)-3\cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

Tutte le sol.^{ni} $\quad y(x)=c_1e^{\frac{1}{3}x}+c_2e^{3x}+3\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)-3\cos\left(\frac{x}{3}\right).$