UNIVERSITÀ di PARMA - INGEGNERIA GESTIONALE

SCHEDA N.13 - ANALISI MATEMATICA 2

EQUAZIONI DIFFERENZIALI : PRIMO ORDINE

- A) Classificate le seguenti equazioni, stabilendo innanzitutto se si tratta di un'equazione differenziale e in caso affermativo determinando ORDINE, LINEARITÀ, COEFFICIENTI, OMOGENEITÀ o COMPLETEZZA:

i) $y'(x) - x\,y(x) = \cos(3x)$

ii) $\operatorname{sen} x + x^2 \cdot y(x) = 3x^3$

iii) $y''(x) + 8y'(x) - 10y(x) = 0$

iv) $y'(x) = 5\,(y(x))^2 - e^{3x}$

v) $y''(x) + e^x \cdot y'(x) + 3y(x) = 8x$

vi) $(y(x))^2 = \sqrt{8x^2+1}$

vii) $y'(x) - 2y(x) = 0$

viii) $y'''(x) - 3y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = x^2$

ix) $y''(x) + 3y'(x) = 2\operatorname{sen}(2x)$

x) $y'''(x) - \dfrac{y'(x)}{e^x} + 2y(x) = 0$.

B) Stabilite se le seguenti funzioni sono soluzione di una delle seguenti equazioni differenziali:

ⓐ $y_1(x) = -\frac{1}{4}e^x + \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) \cdot e^{3x}$

ⓑ $y_2(x) = 2e^{-3x} + x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{9}$

ⓒ $y_3(x) = -e^{-3x} + x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{7}{9}$

EQ.ni

① $y'(x) - y(x) = 3xe^{3x}$

② $y'(x) + 3y(x) = 3x^2 - 2x + 1$

- Risolvete le seguenti EQ.ni DIFFERENZIALI o PROBLEMI di CAUCHY

1) $y'(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$

2) $y'(x) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

3) $y'(x) = x \cdot e^{-x}$

4) $y'(x) = \operatorname{sen} x \cdot e^x$

5) $\begin{cases} y'(x) = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y'(x) = x(x-2)(x-3) \\ y(1) = 2 \end{cases}$

7) $y'(x)-y(x)=\frac{1}{2}e^{x}$ 8) $y'(x)+y(x)=3x+2$

9) $y'(x)+2y(x)=\operatorname{sen}(2x)$ 10) $y'(x)-2y(x)=3e^{2x}$, $y'(x)-2y(x)=x^{2}$

11) $y'(x)+4y(x)=-x^{2}+4x$ 12) $y'(x)-3y(x)=-\cos x$

13) $\begin{cases} y'(x)+3y(x)=x^{3}-3x \\ y(0)=-\frac{20}{27} \end{cases}$ 14) $y'(x)-y(x)=\operatorname{sen}x$

15) $\begin{cases} y'(x)=y(x)+x \\ y(0)=0 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} y'(x)-y(x)=1+\operatorname{sen}x \\ y(0)=1 \end{cases}$

17) $y'(x)-2y(x)=x$ 18) $y'(x)=-y(x)+e^{2x}$, $y'(x)=-y(x)+\operatorname{sen}(2x)$

19) $y'(x)-y(x)=x^{3}$ 20) $y'(x)+2y(x)=2e^{-x}+3x^{3}-2$

21) $y'(x)=2y(x)+3\cos x$ 22) $\begin{cases} y'(x)+3y(x)=\operatorname{sen}(2x)+\cos(2x) \\ y(\pi)=0 \end{cases}$

23) $\begin{cases} y'(x)-3y(x)=\operatorname{sen}(3x)-\cos x \\ y(0)=\frac{17}{15} \end{cases}$ 24) $y'(x)+y(x)=3e^{-x}$

25) $y'(x)=-\frac{2}{3}y(x)+3e^{2x}$ 26) $y'(x)-3y(x)=x^{2}+5$

27) $\begin{cases} y'(x)+3y(x)=5\cos x+x \\ y(0)=7/18 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} y'(x)=-\frac{3}{2}y(x)+2\operatorname{sen}x \\ y(0)=\frac{5}{13} \end{cases}$

29) $y'(x)-y(x)=e^{-3x}$ 30) $\begin{cases} y'(x)-y(x)=2\cos(2x) \\ y(0)=1 \end{cases}$

31) $\begin{cases} y'(x)+2y(x)=-x^2+3 \\ y(1)=0 \end{cases}$

32) $y'(x)+3y(x)=e^{-3x}$

33) $y'(x)+4y(x)=2\cos(2x)$

34) $\begin{cases} y'(x)-2y(x)=\operatorname{sen}x \\ y(0)=4/5 \end{cases}$

35) $y'(x)+y(x)=2x^2$

36) $y'(x)+3y(x)=6x^2+4x$

37) $y'(x)+2y(x)=2x^2-1$

38) $y'(x)=4x^2-3x+2$

39) $y'(x)=5\cos\left(\frac{5}{3}x\right)-2e^{\frac{3}{2}x}$

40) $\begin{cases} y'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2} \\ y(0)=-3 \end{cases}$ $x\in I=[0,+\infty[$

41) $y'(x)+4y(x)=4x^3-2$

42) $y'(x)=-\frac{1}{6}x^5+4\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

43) $-\frac{1}{2}y'(x)=5\operatorname{sen}(5x)-2e^{x/2}$

44) $5y'(x)+15y(x)=3x^2+2x-10$

45) $4y'(x)+y(x)=4x^3+\frac{95}{2}x^2-4x+5$

46) $4y'(x)-2y(x)=6\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

47) $\begin{cases} 5y'(x)=12e^{5x}-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{5}\right)+\frac{25}{2}\operatorname{sen}(2x)-3x^6 \\ y(0)=-1/2 \end{cases}$

48) $\begin{cases} 5y'(x)+3y(x)=\frac{12}{5}\cos\left(\frac{3}{5}x\right) \\ y(0)=5/8 \end{cases}$

49) $y'(x)=e^{2x}+\tan x$ $x\in I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

50) $y'(x)+4y(x)=3e^{-4x}$

51) $y'(x)+2y(x)=e^x+2x^2-1$

52) $y'(x)-y(x)=\operatorname{sen}x+x^3$

53) $y'(x)=5y(x)+e^x+x^2-1$

54) $y'(x)-3y(x)=x^2e^x$

55) $y'(x)+y(x)=(x+2)e^{-x}$

56) $y'(x)-2y(x)=2\operatorname{sen}x+3\cos x$

57) $\begin{cases} y'(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \\ y(0)=-3 \end{cases}$

58) $\begin{cases} y'(x) - 2y(x) = x^2 e^{2x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

59) $\begin{cases} y'(x) - 3y(x) = \frac{1}{5} e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

60) $\begin{cases} y'(x) - 2y(x) = e^x + x - 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

61) $\begin{cases} y'(x) - y(x) = e^x + 2\cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

62) $\begin{cases} y'(x) - 2y(x) = \operatorname{sen} x + x e^x \\ y(0) = 4/5 \end{cases}$

63) $\begin{cases} y'(x) - 2y(x) = 3e^{2x} + 3\cos x \\ y(0) = -1/5 \end{cases}$

64) $\begin{cases} y'(x) - y(x) = x^2 + e^x + \cos x \\ y(0) = 3/2 \end{cases}$

c) i) Cos'è un'equazione differenziale?

ii) Cos'è l'ordine di un'equazione differenziale?

iii) Cosa vuol dire che una funzione $\bar{y}(x)$ è soluzione di una equazione differenziale assegnata?

iv) E' vero o falso che le funzioni $y(x) = c e^{4x}$ $(c \in \mathbb{R})$ sono tutte le soluzioni di un'eq.^{ne} differenziale?

v) E' vero o falso che $y(x) = e^{-2x} + x^3$ rappresenti le soluzioni di un'eq.^{ne} differenziale?

vi) E' vero o falso che $y(x) = c \cdot e^{-2x} + x^2$ $(c \in \mathbb{R})$ rappresenti le sol.^{ni} di un'eq.^{ne} differenziale?

RISPOSTE A) i) EQ.^{NE} DIFF. 1° ordine, lineare, a coeff. variabili, completa

ii) NON è un'eq.^{ne} DIFF. iii) EQ.^{NE} DIFF., 2° ordine, lineare, coeff. cost, omog.

iv) EQ.^{NE} DIFF, 1° ordine, non lineare, completa

v) EQ.^{NE} DIFF., 2° ordine, lineare, coeff. variabili, completa vi) NON è un' EQ.^{NE} DIFF.

vii) EQ.^{NE} DIFF, 1° ordine, lineare, coeff. costanti, omogenea

viii) EQ.^{NE} DIFF, 3° ordine, lineare, coeff. costanti, completa

ix) EQ.^{NE} DIFF, 2° ordine, funzione incognita $y(x)$ sottointesa, lineare, coeff. cost, completa

x) EQ.^{NE} DIFF, 3° ordine, lineare, coeff. variabili, omogenea.

B) la funzione ⓐ è sol.^{ne} dell'eq.^{ne} ①
La funzione ⓑ non è sol.^{ne} di nessuna eq.^{ne}
La funzione ⓒ è sol.^{ne} dell'eq.^{ne} ②

1) $y(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x} \quad (c \in \mathbb{R})$ 2) $y(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

3) $y(x) = -(x+1)e^{-x} + c \quad (c \in \mathbb{R})$ 4) $y(x) = \frac{1}{2}e^{x}(\operatorname{sen}x - \cos x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

5) $y(x) = 2\operatorname{sen}x - x\cos x + 1$ 6) $y(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + \frac{5}{12}$

C) iv) vero $y'(x) - 4y(x) = 0$

v) falso, un'eq.^{ne} diff. ha sempre infinite soluzioni
potrebbe essere la sol.^{ne} del pb. di Cauchy $\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 2x^3 + 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

vi) vero $y'(x) + 2y(x) = 2x^2 + 2x$

7) $y(x)=ce^{x}+\frac{1}{2}xe^{x}$ $(c\in\mathbb{R})$

8) $y(x)=ce^{-x}+3x-1$ $(c\in\mathbb{R})$

9) $y(x)=ce^{-2x}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)-\frac{1}{4}\cos(2x)$ $(c\in\mathbb{R})$

10) $y(x)=ce^{2x}+3xe^{2x}$ $(c\in\mathbb{R})$

$y(x)=ce^{2x}-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ $(c\in\mathbb{R})$

11) $y(x)=ce^{-4x}-\frac{1}{4}x^{2}+\frac{9}{8}x-\frac{9}{32}$ $(c\in\mathbb{R})$

12) $y(x)=ce^{3x}-\frac{1}{10}\operatorname{sen}x+\frac{3}{10}\cos x$ $(c\in\mathbb{R})$

13) $y(x)=-e^{-3x}+\frac{1}{3}x^{3}-\frac{1}{3}x^{2}-\frac{7}{9}x+\frac{7}{27}$

14) $y(x)=ce^{x}-\frac{1}{2}(\operatorname{sen}x+\cos x)$ $(c\in\mathbb{R})$

15) $y(x)=e^{x}-(x+1)$

16) $y(x)=\frac{5}{2}e^{x}-1-\frac{1}{2}(\operatorname{sen}x+\cos x)$

17) $y(x)=ce^{2x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ $(c\in\mathbb{R})$

18) $y(x)=ce^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$ $(c\in\mathbb{R})$

$y(x)=ce^{-x}+\frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)-\frac{2}{5}\cos(2x)$ $(c\in\mathbb{R})$

19) $y(x)=ce^{x}-x^{3}-3x^{2}-6x-6$ $(c\in\mathbb{R})$

20) $y(x)=ce^{-2x}+2e^{-x}+\frac{3}{2}x^{3}-\frac{9}{4}x^{2}+\frac{9}{4}x-\frac{17}{8}$ $(c\in\mathbb{R})$

21) $y(x)=ce^{2x}+\frac{3}{5}\operatorname{sen}x-\frac{6}{5}\cos x$ $(c\in\mathbb{R})$

22) $y(x)=-\frac{1}{13}e^{3(\pi-x)}+\frac{5}{13}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{13}\cos(2x)$

23) $y(x)=e^{3x}-\frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x)-\frac{1}{6}\cos(3x)-\frac{1}{10}\operatorname{sen}x+\frac{3}{10}\cos x$

26) $y(x)=ce^{3x}-\frac{1}{3}x^{2}-\frac{2}{9}x-\frac{47}{27}$ $(c\in\mathbb{R})$

25) $y(x)=ce^{-\frac{2}{3}x}+\frac{9}{8}e^{2x}$ $(c\in\mathbb{R})$

24) $y(x)=ce^{-x}+3xe^{-x}$ $(c\in\mathbb{R})$

27) $y(x)=-e^{-3x}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+\frac{3}{2}\cos x$

28) $y(x)=e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{12}{13}\operatorname{sen}x-\frac{8}{13}\cos x$

29) $y(x)=ce^{x}-\frac{1}{4}e^{-3x}$ $(c\in\mathbb{R})$

30) $y(x)=\frac{7}{5}e^{x}+\frac{4}{5}\operatorname{sen}(2x)-\frac{2}{5}\cos(2x)$

31) $y(x)=-\frac{5}{4}e^{2(1-x)}-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

32) $y(x)=ce^{-3x}+xe^{-3x}$ $(c\in\mathbb{R})$

33) $y(x)=ce^{-4x}+\frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)+\frac{2}{5}\cos(2x)$ $(c\in\mathbb{R})$

34) $y(x)=e^{2x}-\frac{2}{5}\operatorname{sen}x-\frac{1}{5}\cos x$

35) $y(x)=ce^{-x}+2x^{2}-4x+4$ $(c\in\mathbb{R})$

36) $y(x)=ce^{-3x}+2x^{2}$ $(c\in\mathbb{R})$

37) $y(x)=ce^{-2x}+x^{2}-x$ $(c\in\mathbb{R})$

38) $y(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \quad (c \in \mathbb{R})$

39) $y(x) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{3}x\right) - \frac{4}{3}e^{3/2\,x} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

40) $y(x) = -\frac{2}{(x+1)} - 1$ su $[0, +\infty[$

41) $y(x) = ce^{-4x} + x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{19}{32} \quad (c \in \mathbb{R})$

42) $y(x) = -\frac{x^6}{36} + 16\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{4}\right) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

43) $y(x) = 2\cos(5x) + 8e^{x/2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

44) $y(x) = ce^{-3x} + \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{3} \quad (c \in \mathbb{R})$

45) $y(x) = ce^{-\frac{1}{4}x} + 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5 \quad (c \in \mathbb{R})$

46) $y(x) = ce^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (c \in \mathbb{R})$

47) $y(x) = \frac{12}{25}e^{5x} - \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{5}{4}\cos(2x) - \frac{3}{35}x^7 + \frac{27}{100}$

48) $y(x) = \frac{9}{40}e^{-3/5\,x} + \frac{2}{5}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{5}x\right) + \frac{2}{5}\cos\left(\frac{3}{5}x\right)$

49) $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \log(\cos x) + c \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

50) $y(x) = ce^{-4x} + 3xe^{-4x} \quad (c \in \mathbb{R})$

51) $y(x) = ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + x^2 - x \quad (c \in \mathbb{R})$

52) $y(x) = ce^x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}x - \frac{1}{2}\cos x - x^3 - 3x^2 - 6x - 6 \quad (c \in \mathbb{R})$

53) $y(x) = ce^{5x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + \frac{23}{125} \quad (c \in \mathbb{R})$

54) $y(x) = ce^{3x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x \quad (c \in \mathbb{R})$

55) $y(x) = ce^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)e^{-x} \quad (c \in \mathbb{R})$

56) $y(x) = ce^{2x} - \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}x - \frac{8}{5}\cos x \quad (c \in \mathbb{R})$

57) $y(x) = \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 3$

58) $y(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{3}x^3e^{2x} \quad (c \in \mathbb{R})$

59) $y(x) = \frac{11}{10}e^{3x} - \frac{1}{10}e^x$

60) $y(x) = \frac{5}{4}e^{2x} - e^x - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

61) $y(x) = 2e^x + xe^x + \mathrm{sen}x - \cos x$

62) $y(x) = 2e^{2x} - \frac{2}{5}\mathrm{sen}x - \frac{1}{5}\cos x - (x+1)e^x$

63) $y(x) = e^{2x} + 3xe^{2x} + \frac{3}{5}\,\mathrm{sen}x - \frac{6}{5}\cos x$

64) $y(x) = 4e^x - x^2 - 2x - 2 + xe^x + \frac{1}{2}\mathrm{sen}t - \frac{1}{2}\cos t$

Soluzione di $\boxed{\text{alcuni esercizi}}$ della SCHEDA N. 13

5) $y'(x) = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \rightarrow \int (x \operatorname{sen} x + \cos x)\, dx = -x\cos x + 2\operatorname{sen} x + c$
($\int x \operatorname{sen} x\, dx$ PER PARTI)

Tutte le sol.ni $y(x) = -x\cos x + 2\operatorname{sen} x + c \quad (c \in \mathbb{R})$

$y(0) = c \rightarrow c = 1$

Sol.ne $y(x) = -x\cos x + 2\operatorname{sen} x + 1$

7) eq.ne omog $y'(x) - y(x) = 0$ eq.ne caratt $t - 1 = 0$ $t = 1$ sol.ne fond $y(x) = e^x$

Sol.ni omog $y(x) = ce^x \quad (c \in \mathbb{R})$

Sol.ne particolare $\bar{y}(x) = Kxe^x$ ($P_0(x) = \frac{1}{2}$ è un polinomio di grado 0
$\alpha = 1$ è la sol.ne dell'eq.ne caratt.)

$\bar{y}'(x) = Ke^x + Kxe^x = K(1+x)e^x$

Nell'eq.ne $K(1+x)e^x - Ke^x = \frac{1}{2}e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow Ke^x = \frac{1}{2}e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x \neq 0 \ \forall x \quad (K - \frac{1}{2})\cancel{e^x} = 0 \rightarrow K = \frac{1}{2} \quad \bar{y}(x) = \frac{1}{2}xe^x$

Tutte le sol.ni $y(x) = ce^x + \frac{1}{2}xe^x \quad (c \in \mathbb{R})$

9) eq.ne omog. $y'(x) + 2y(x) = 0$ eq.ne caratt. $t + 2 = 0$ $t = -2$ sol.ne fond $y(x) = e^{-2x}$

Sol.ni eq.ne omog. $y(x) = ce^{-2x}$

Sol.ne particolare $\bar{y}(x) = A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)$ $\bar{y}'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\operatorname{sen}(2x)$

nell'eq.ne $2A\cos(2x) - 2B\operatorname{sen}(2x) + 2A\operatorname{sen}(2x) + 2B\cos(2x) = \operatorname{sen}(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(2A - 2B - 1)\operatorname{sen}(2x) + (2A + 2B)\cos(2x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Poiché una combinazione lineare di seno e coseno dello stesso argomento è $= 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$ entrambi i coeff. sono nulli, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2A - 2B - 1 = 0 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \rightarrow B = -A \quad 4A = 1 \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \bar{y}(x) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x)$$

Sol.ni $y(x) = ce^{-2x} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) \quad (c \in \mathbb{R})$

13) eq.ne omog $y'(x) + 3y(x) = 0$ eq.ne caratt. $t + 3 = 0$ $t = -3$ sol.ne fond $y(x) = e^{-3x}$

sol.ni eq.ne omog. $y(x) = ce^{-3x} \quad (c \in \mathbb{R})$

$\bar{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (perché il 2°m dell'eq.ne è un polinomio di 3° grado e nell'eq.ne compare $y(x)$)

$\bar{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$3Ax^2+2Bx+C+3(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=x^3-3x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$3Ax^3+(3A+3B)x^2+(2B+3C)x+(C+3D)=x^3-3x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Poiché due polinomi dello stesso grado sono $= \ \forall x\in\mathbb{R} \iff$ hanno tutti i coeff. uguali, otteniamo

$$\begin{cases} 3A=1 \\ 3A+3B=0 \\ 2B+3C=-3 \\ C+3D=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-A=-1/3 \\ 3C=-3-2B=-\frac{7}{3} \rightarrow C=-\frac{7}{9} \\ 3D=-C=\frac{7}{9} \quad D=\frac{7}{27} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{9}x+\frac{7}{27}$$

tutte le sol.^{ni} $y(x)=ce^{-3x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{9}x+\frac{7}{27}$

$y(0)=C+\frac{7}{27} \rightarrow C+\frac{7}{27}=-\frac{20}{27} \rightarrow C=-1$

SOL.^{ne} $y(x)=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{9}x+\frac{7}{27}$

20) eq.^{ne} omog. $y'(x)+2y(x)=0$ eq.^{ne} caratt. $t+2 \rightarrow t=-2$

Sol.^{ne} FOND $y(x)=e^{-2x}$ Sol.^{ni} eq.^{ne} omog $y(x)=ce^{-2x}$ $(c\in\mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare $f_1(x)=2e^{-x}$ $f_2(x)=3x^3-2$

$\bar{y}_1(x)=ke^{-x}$ (perché $P_0(x)=2$ è un polinomio di grado 0 e $\alpha=-1$ NON è la sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratt.)

$\bar{y}_1'(x)=-ke^{-x}$ nell'eq.^{ne} $-ke^{-x}+2ke^{-x}=2e^{-x}$ $(k-2)e^{-x}=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$e^{-x}\neq 0 \ \forall x \Rightarrow k=2$ $\bar{y}_1(x)=2e^{-x}$

$\bar{y}_2(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ (perché il 2° m. $f_2(x)$ è un polinomio di 3° grado e nell'eq.^{ne} compare $y(x)$)

$\bar{y}_2'(x)=3Ax^2+2Bx+C$

Nell'eq.^{ne} $3Ax^2+2Bx+C+2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=3x^3-2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$2Ax^3+(3A+2B)x^2+(2B+2C)x+(C+2D)=3x^3-2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Sempre per il principio di IDENTITÀ dei POLINOMI $\rightarrow$

$$\begin{cases} 2A=3 \\ 3A+2B=0 \\ 2B+2C=0 \\ C+2D=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=3/2 \\ 2B=-3A=-9/2 \quad B=-9/4 \\ C=-B=9/4 \\ 2D=-2-C=-\frac{17}{4} \quad D=-\frac{17}{8} \end{cases}$$

$$\bar{y}_2(x)=\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{17}{8}$$

Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x)=\bar{y}_1(x)+\bar{y}_2(x)=2e^{-x}+\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{17}{8}$

SOL.^{ni} $y(x)=ce^{-2x}+2e^{-x}+\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{17}{8}$ $(c\in\mathbb{R})$

23) eq.^{ne} omog. $y'(x)-3y(x)=0$ eq.^{ne} caratt. $t-3=0$ $t=3$

Sol.^{ne} FOND $y(x)=e^{3x}$ Sol.^{ni} eq.^{ne} omog. $y(x)=ce^{3x}$ $(c\in\mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare

$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ $\quad f_1(x)=\operatorname{sen}(3x)$ $\quad f_2(x)=\cos x$

$\bar{y}_1(x)=A\operatorname{sen}(3x)+B\cos(3x)$ $\quad \bar{y}'(x)=3A\cos(3x)-3B\operatorname{sen}(3x)$

Nell'eq.^{ne} $3A\cos(3x)-3B\operatorname{sen}(3x)-3A\operatorname{sen}(3x)-3B\cos(3x)=\operatorname{sen}(3x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

$(-3B-3A-1)\operatorname{sen}(3x)+(3A-3B)\cos(3x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}-3B-3A-1=0\\ 3A-3B=0\end{cases}$ $\begin{cases}-6A=1\\ B=A\end{cases}$ $\begin{cases}A=-\frac{1}{6}\\ B=-\frac{1}{6}\end{cases}$ $\quad \bar{y}_1(x)=-\frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x)-\frac{1}{6}\cos(3x)$

$\bar{y}_2(x)=A\operatorname{sen}x+B\cos x$ $\quad \bar{y}_2'(x)=A\cos x-B\operatorname{sen}x$ nell'eq.^{ne}

$A\cos x-B\operatorname{sen}x-3A\operatorname{sen}x-3B\cos x=-\cos x\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$(-B-3A)\operatorname{sen}x+(A-3B+1)\cos x=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}-B-3A=0\\ A-3B+1=0\end{cases}$ $\begin{matrix}B=-3A\\ 10A=-1\end{matrix}$ $\begin{cases}A=-\frac{1}{10}\\ B=\frac{3}{10}\end{cases}$ $\quad \bar{y}_2(x)=-\frac{1}{10}\operatorname{sen}x+\frac{3}{10}\cos x$

$\bar{y}(x)=\bar{y}_1(x)+\bar{y}_2(x)=-\frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x)-\frac{1}{6}\cos(3x)-\frac{1}{10}\operatorname{sen}x+\frac{3}{10}\cos x$

Sol.^{ni} $y(x)=ce^{3x}-\frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x)-\frac{1}{6}\cos(3x)-\frac{1}{10}\operatorname{sen}x+\frac{3}{10}\cos x$

$y(0)=c-\frac{1}{6}+3/10 \rightarrow c-\frac{1}{6}+\frac{3}{10}=\frac{17}{15}$ $\quad c=\frac{1}{6}-\frac{3}{10}+\frac{17}{15}=\frac{5-9+34}{30}=1$

Sol.^{ne} $y(x)=e^{3x}-\frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x)-\frac{1}{6}\cos(3x)-\frac{1}{10}\operatorname{sen}x+\frac{3}{10}\cos x$

40) $y'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$ $\quad x\in[0,+\infty[$ $\quad \displaystyle\int\frac{2}{(x+1)^2}\,dx=-\frac{2}{(x+1)}+c$

Sol.^{ni} $y(x)=-\dfrac{2}{(x+1)}+c$ $\quad y(0)=-2+c \rightarrow -2+c=-3$ $\quad c=-1$

Sol.^{ne} $y(x)=-\dfrac{2}{(x+1)}-1$

54) eq.^{ne} omog. $y'(x)-3y(x)=0$ eq.^{ne} caratt. $t-3=0$ $t=3$

Sol.^{ne} FOND $y(x)=e^{3x}$ Sol.^{ni} omog. $y(x)=ce^{3x}$ $(c\in\mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x)=(Ax^2+Bx+C)e^x$ (perchè x^2 è un polinomio di 2° grado e $\alpha=1$ non è la sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratt.)

$\bar{y}'(x)=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx+C)e^x$
$=(Ax^2+(2A+B)x+B+C)e^x$

Sol.^{ne} Sch. 13
$\forall x \in \mathbb{R}$ pag. 4

Nell'eq.^{ne} $(Ax^2+(2A+B)x+B+C)e^x - 3(Ax^2+Bx+C)e^x = x^2 e^x$

$((-2A-1)x^2+(2A-2B)x+B-2C)e^x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \quad (-2A-1)x^2+(2A-2B)x+B-2C = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

principio di IDENTITÀ dei POLINOMI $\begin{cases} -2A-1=0 \\ 2A-2B=0 \\ B-2C=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=A=-\frac{1}{2} \\ 2C=B=-\frac{1}{2} \quad C=-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\bar{y}(x)=\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^x$

<u>Sol.^{ni}</u> $y(x) = c\,e^{3x} - \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)e^x \quad (c \in \mathbb{R})$