SECONDA ESERCITAZIONE SULLE E.D.

Ci occupiamo oggi esclusivamente di equazioni LINEARI DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI e del relativo PROBLEMA DI CAUCHY.

Riassumiamo brevemente le questioni fondamentali che si pongono per poi passare agli esercizi.

- Un'E.D. di questo tipo si può sempre ricondurre alla forma:

$$\boxed{y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)}$$

Le condizioni iniziali associate all'E.D. nel problema di Cauchy sono: $\boxed{y(x_0) = y_0}$ e $\boxed{y'(x_0) = y_1}$, con $x_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

- Il procedimento di risoluzione è sempre in tre passi come nelle equazioni del 1° ordine (più eventuale quarto passo per Cauchy).

- L'equazione caratteristica è di secondo grado e si possono presentare tre casi relativamente all'eq. omogenea:

1 - $\boxed{t_1 \neq t_2}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

L'equazione ha SOLUZIONI FONDAMENTALI

$y_1(x) = e^{t_1 x}$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{t_2 x}$

La S.G. è una combinazione lineare delle 2 SOLUZIONI FONDAMENTALI (S.F.)

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{t_1 x} + C_2 e^{t_2 x}}$$

(questo vale anche per gli altri 2 casi)

2 - $\boxed{t_1 = t_2} \in \mathbb{R}$ (una sola sol. con MOLTEPLICITÀ 2)

$y_1(x) = e^{t_1 x}$ $\qquad$ $y_2(x) = x e^{t_1 x}$ $\qquad$ S.F.

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{t_1 x} + C_2 x e^{t_1 x}}$$

3 - $t_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\beta > 0}$

(SOLUZ. COMPLESSE CONIUGATE)

$y_1(x) = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$

S.F.

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \operatorname{sen} \beta x + C_2 \cos \beta x)}$$ S.G.

- Per quanto riguarda la S.P. $\bar{y}(x)$ del 2° passo occorre ricordare che:

1 - Se $f(x) = P_m(x)$ (POLINOMIO DI GRADO m)

allora $\boxed{\bar{y}(x) = \text{polinomio di grado } m}$

se nell'equazione compare $y(x)$; se non compare $y(x)$ ma c'è $y'(x)$ si moltiplica per x, se non compare nemmeno $y'(x)$ per x^2 (ma si ricade nel caso $y''(x) = f(x)$ e si può procedere più semplicemente integrando 2 volte)

2 - Se $f(x) = P_m(x) \cdot e^{kx}$

allora $\boxed{\bar{y}(x) = \text{polinomio di grado } m \cdot e^{kx}}$

se k non è soluzione dell'equazione caratteristica dell'omogenea; invece: se k è soluzione con MOLTEPLICITÀ 1 dell'E.C. occorre moltiplicare per x, se la MOLTEPLICITÀ è 2 per x^2 -

3 - Se $f(x)$ = combinazione lineare di due funzioni seno e coseno dello stesso argomento kx

allora $\boxed{\bar{y}(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx}$, se

$\operatorname{sen} kx$ e $\cos kx$ <u>non</u> sono SOLUZIONI FONDAMENTALI dell'EQUAZIONE CARATTERISTICA dell'eq. OMOGENEA; in caso contrario* occorre moltiplicare per x, e quindi:

$$\bar{y}(x) = x\left(A \operatorname{sen} kx + B \cos kx\right)$$

---

* cioè quando $\boxed{\operatorname{sen} kx}$ e $\boxed{\cos kx}$ sono proprio le soluzioni fondamentali dell'omogenea (attenzione: le soluzioni fondamentali devono essere <u>proprio</u> e <u>soltanto</u> $\operatorname{sen} kx$ e $\cos kx$, NON ad esempio $\boxed{e^{\alpha x} \operatorname{sen} kx}$ ed $\boxed{e^{\alpha x} \cos kx}$, con $\alpha \neq 0$)

$\boxed{1}$ $$\boxed{\begin{cases} y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 2x^3 - 3x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}}$$

Si tratta di un problema di Cauchy per un'equazione del 2° ordine - Le costanti che compariranno nella S.G. dell'E.D. saranno 2, come 2 sono le condizioni (una relativa a $y(0)$ e una a $y'(0)$) che ci serviranno per trovare l'unica soluzione del problema -

Procediamo in 4 passi:

1) $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$ è l'eq. OMOGENEA, la cui E.C. è $t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Le SOLUZIONI FONDAMENTALI dell'EQ. OMOGENEA sono quindi $y_1(x) = e^{3x}$ e $y_2(x) = e^{2x}$

e la S.G. è $\boxed{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

2) Nell'equazione compare $y(x)$, quindi $\overline{y}(x)$ sarà un polinomio dello stesso grado di $2x^3 - 3x$, cioè

$$\boxed{\overline{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}$$

$\overline{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$ $\quad\quad \overline{y}''(x) = 6Ax + 2B$

Sostituendo nell' eq. completa si ha:

$$6Ax+2B-15Ax^2-10Bx-5C+6Ax^3+6Bx^2+$$
$$+6Cx+6D=2x^3-3x$$

e quindi:

$$6Ax^3+(6B-15A)x^2+(6C-10B+6A)x+$$
$$+2B-5C+6D=2x^3-3x$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 6A=2 \longrightarrow \boxed{A=\frac{1}{3}} \\ 6B-15A=0 \longrightarrow 6B-\cancel{15}^{5}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}=0 \longrightarrow \boxed{B=\frac{5}{6}} \\ 6C-10B+6A=-3 \longrightarrow 6C-\cancel{10}^{5}\cdot\frac{5}{\cancel{6}_3}+\cancel{6}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_1}=-3 \\ 2B-5C+6D=0 \end{cases}$$

$$6C-\frac{25}{3}+2=-3$$

$$6C=\frac{25}{3}-5$$

$$6C=\frac{10}{3} \longrightarrow \boxed{C=\frac{5}{9}}$$

$$\cancel{2}^{1}\cdot\frac{5}{\cancel{6}_3}-5\cdot\frac{5}{9}+6D=0$$

$$\frac{5}{3}-\frac{25}{9}+6D=0$$

$$6D=\frac{25-15}{9} \longrightarrow \boxed{D=\frac{5}{27}}$$

Quindi $\boxed{\bar{y}(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{9}x+\frac{5}{27}}$

è la S.P. dell' eq. completa.

3) $$\boxed{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{5}{27} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})}$$

è S.G. dell'eq. COMPLETA.

4) Oltre a $y(x)$ ci serve $y'(x)$:

$$y'(x) = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{2x} + x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}$$

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 + \frac{5}{27} = \boxed{c_1 + c_2 + \frac{5}{27} = 1}$$

$$y'(0) = 3c_1 e^0 + 2c_2 e^0 + \frac{5}{9} = \boxed{3c_1 + 2c_2 + \frac{5}{9} = 2}$$

Otteniamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{5}{27} = 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + \frac{5}{9} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{22}{27} \\ 3c_1 + 2c_2 = \frac{13}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{22}{27} - c_2 \\ 3\cdot\left(\frac{22}{27} - c_2\right) + 2c_2 = \frac{13}{9} \end{cases} \longrightarrow \frac{22}{9} - 3c_2 + 2c_2 = \frac{13}{9}$$

$$c_1 = \frac{22}{27} - 1 = -\frac{5}{27} \qquad \boxed{c_2 = 1}$$

Quindi $$\boxed{y(x) = -\frac{5}{27}e^{3x} + e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{5}{27}}$$

è <u>la</u> soluzione, <u>unica</u>, del problema di Cauchy.

$\boxed{2}$ $\boxed{y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 2e^{3x}}$

1) E.C. OMOGENEA: $t^2 - 6t + 9 = 0$

$$(t-3)^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$t = 3$ SOLUZIONE CON MOLTEPLICITÀ 2

Le SOLUZIONI FONDAMENTALI dell'OMOGENEA sono: $y_1(x) = e^{3x}$ e $y_2(x) = x e^{3x}$

e la S.G. è $\boxed{y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}}$
$(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

2) Al secondo membro compare e^{kx} con $k = 3$, che è soluzione con molteplicità 2 dell'E.C.: quindi $\boxed{\bar{y}(x) = A \boxed{x^2} e^{3x}}$ *

$$\bar{y}'(x) = A\left(2x e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x}\right) = A e^{3x}(2x + 3x^2)$$

$$\bar{y}''(x) = A\left[3e^{3x}(2x + 3x^2) + e^{3x}(2 + 6x)\right]$$

$$= A e^{3x}(6x + 9x^2 + 2 + 6x)$$

$$= A e^{3x}(9x^2 + 12x + 2)$$

* n.b.: 2 è un polinomio di grado 0; per questo compare A

Sostituendo nell'eq. completa:

$$e^{3x}\left(\cancel{9Ax^2} + \cancel{12Ax} + 2A - \cancel{12Ax} - \cancel{18Ax^2} + \cancel{9Ax^2}\right) = 2e^{3x}$$

Dividendo entrambi i membri per e^{3x} $(\neq 0\ \forall x \in \mathbb{R})$ otteniamo $2A = 2 \longrightarrow \boxed{A = 1}$

Quindi $\boxed{\bar{y}(x) = x^2 e^{3x}}$ è la <u>S.P.</u> dell'eq. completa

3) $$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + x^2 e^{3x} \\ &= e^{3x}(c_1 + c_2 x + x^2) \quad \text{è la S.G.} \\ &(c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \qquad \text{dell'eq. completa} \end{aligned}}$$

$\boxed{3}$ $\boxed{y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \operatorname{sen} x + x^2}$

1) E.C. OMOGENEA: $t^2 + 2t + 2 = 0$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 2i}{2} = \frac{\cancel{2}(-1 \pm i)}{\cancel{2}} = -1 \pm i$$

(meglio $t = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$ con la formula ridotta)

Quindi $\alpha = -1$ e $\beta = 1$ $\quad \left(\underset{\beta > 0}{t = \alpha \pm \beta i}\right)$

Le soluzioni FONDAMENTALI dell'OMOGENEA sono dunque $y_1(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$ e $y_2(x) = e^{-x} \cos x$ e la S.G. è

$$\boxed{y(x) = e^{-x}(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x)}$$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

2) Cerchiamo le S.P. delle due equazioni $\boxed{y''(x)+2y'(x)+2y(x)=\operatorname{sen} x}$ (1)

e $\boxed{y''(x)+2y'(x)+2y(x)=x^2}$ (2)

Per quanto riguarda $\bar{y}_1(x)$, osserviamo che $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ non sono S. FONDAMENTALI dell'EQ. OMOGENEA e quindi non si deve moltiplicare $A\operatorname{sen} x+B\cos x$ per x.

Quindi
$$\bar{y}_1(x)=A\operatorname{sen} x+B\cos x$$
$$\bar{y}_1'(x)=A\cos x-B\operatorname{sen} x$$
$$\bar{y}_1''(x)=-A\operatorname{sen} x-B\cos x$$

Sostituendo nell'eq. (1) otteniamo:

$$-A\operatorname{sen} x-B\cos x+2A\cos x-2B\operatorname{sen} x+$$
$$+2A\operatorname{sen} x+2B\cos x=\operatorname{sen} x$$

da cui:

$$(A-2B)\operatorname{sen} x+(B+2A)\cos x=\operatorname{sen} x$$

e quindi:

$$\begin{cases}A-2B=1\\B+2A=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A+4A=1\\B=-2A\end{cases}\quad\begin{cases}A=\frac{1}{5}\\B=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

Quindi $\boxed{\overline{y}_1(x) = \frac{1}{5}\operatorname{sen} x - \frac{2}{5}\cos x}$

Per quanto riguarda $\overline{y}_2(x)$, osserviamo che al primo membro c'è $y(x)$;
e quindi <u>non si deve</u> moltiplicare per x,
quindi $\overline{y}_2(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$\overline{y}_2'(x) = 2Ax + B \qquad \overline{y}_2''(x) = 2A$$

Sostituendo in (2) si ha:

$$2A + \underline{4Ax} + 2B + 2Ax^2 + \underline{2Bx} + 2C = x^2$$

$$2Ax^2 + (4A+2B)x + 2A + 2B + 2C = x^2$$

per cui
$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 4A + 2B = 0 \\ 2A + 2B + 2C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ 2A + B = 0 \\ A + B + C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{A = \frac{1}{2}} \\ 2 \cdot \frac{1}{2} + B = 0 \longrightarrow \boxed{B = -1} \\ \frac{1}{2} - 1 + C = 0 \longrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

e quindi $\overline{y}_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ è S.P. della (2)

Concludendo: $\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x)$, cioè

$\boxed{\overline{y}(x) = \frac{1}{5}\operatorname{sen} x - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}}$ è S.P. dell'EQ. COMPLETA

3) $$\boxed{y(x) = e^{-x}(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})}$$

è S.G dell'eq. completa

---

4 $$\boxed{y''(x) - 3y'(x) = 2 \operatorname{sen} 3x}$$

1) E.C. dell'OMOGENEA: $t^2 - 3t = 0 \to t(t-3) = 0$

$t = 0 \vee t = 3$

$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1$ e $y_2(x) = e^{3x}$ sono

le SOLUZIONI FONDAMENTALI dell'OMOGENEA

Quindi $\boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^{3x}, (c_1, c_2 \in \mathbb{R})}$

è S.G dell'omogenea.

2) Osserviamo che $\operatorname{sen} 3x$ e $\cos 3x$ <u>non</u> sono soluzioni fondamentali dell'omogenea, quindi $\boxed{\bar{y}(x) = A \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x}$

(non facciamo confusione col caso del polinomio per la mancanza di $y(x)$): <u>non</u> dobbiamo moltiplicare per x.

$\bar{y}'(x) = 3A\cos 3x - 3B\,\text{sen}\,3x$

$\bar{y}''(x) = -9A\,\text{sen}\,3x - 9B\cos 3x$

Sostituendo nell'eq. completa:

$$-9A\,\text{sen}\,3x - 9B\cos 3x - 9A\cos 3x + 9B\,\text{sen}\,3x = 2\,\text{sen}\,3x$$

$$9(B-A)\,\text{sen}\,3x - 9(B+A)\cos 3x = 2\,\text{sen}\,3x$$

da cui $\begin{cases} 9(B-A) = 2 \\ B+A = 0 \rightarrow \end{cases}$ $\begin{cases} 9(-2A) = 2 \rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{9}} \\ B = -A \rightarrow \boxed{B = +\frac{1}{9}} \end{cases}$

Quindi $\boxed{\bar{y}(x) = -\frac{1}{9}\,\text{sen}\,3x + \frac{1}{9}\cos 3x}$

è S.P. dell'eq. completa.

3) $\boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{1}{9}\,\text{sen}\,3x + \frac{1}{9}\cos 3x \quad (c_1, c_2 \in R)}$ è S.G. dell'equazione completa

$\boxed{5}$ $\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = x - 1 - 2 \operatorname{sen} 2x \\ y(0) = \frac{7}{4} \\ y'(0) = \frac{7}{4} \end{cases}$

1) E.C. ; $t^2 + 4 = 0 \longrightarrow t^2 = -4 \longrightarrow t = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1}$
$= \pm 2i$
$= 0 \pm 2i$

Quindi $\alpha = 0$ e $\beta = 2$

Le soluzioni fondamentali dell'eq. omogenea sono dunque: $y_1(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $y_2(x) = \cos 2x$ (essendo $\alpha = 0$ il fattore esponenziale diventa $e^{0 \cdot x} = 1$)

La S.G. dell'omogenea è quindi

$\boxed{y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

2) Occorre determinare una sol. particolare di $\boxed{y''(x) + 4y(x) = x - 1}$ (1)
e una di $\boxed{y''(x) + 4y(x) = -2 \operatorname{sen} 2x}$ (2)

(2) Osserviamo che il 2° membro è una combinazione lineare di sen2x e cos2x e che sen 2x e cos2x sono le S. FONDAMENTALI

dell'omogenea - Quindi per quanto riguarda la S.P. occorre moltiplicare $(A \operatorname{sen} 2x + B\cos 2x)$ per x : $\boxed{\overline{y}_2(x) = x\,(A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x)}$

$$\overline{y}_2'(x) = 1\cdot(A \operatorname{sen} 2x + B\cos 2x) + x\,(2A\cos 2x - 2B \operatorname{sen} 2x)$$

$$\overline{y}_2''(x) = 2A\cos 2x - 2B\operatorname{sen} 2x + 1\,(2A\cos 2x - 2B\operatorname{sen} 2x) + x\,(-4A\operatorname{sen} 2x - 4B\cos 2x)$$

Sostituendo in (2) :

$$4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x - \cancel{4Ax}\operatorname{sen} 2x - \cancel{4Bx}\cos 2x + \cancel{4Ax}\operatorname{sen} 2x + \cancel{4Bx}\cos 2x = -2\operatorname{sen} 2x$$

da cui $\quad 2A\cos 2x - 2B\operatorname{sen} 2x = -\operatorname{sen} 2x$

Per cui $\begin{cases} 2A = 0 \longrightarrow \boxed{A = 0} \\ -2B = -1 \longrightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}} \end{cases}$

Quindi : $\boxed{\overline{y}_2(x) = \frac{1}{2}x\cos 2x}$

Per quanto riguarda $\overline{y}_1(x)$, nell'equaz. compare $y(x)$ e quindi non si deve moltiplicare per x : $\boxed{\overline{y}_2(x) = Ax + B}$

$\bar{y}_2'(x) = A \qquad \bar{y}_2''(x) = 0$

Sostituendo in (1): $0 + 4(Ax + B) = x - 1$

$$4Ax + 4B = x - 1$$

Per il principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} 4A = 1 \longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}} \\ \boxed{B = -\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Quindi $\boxed{\bar{y}_1(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$

e $\boxed{\bar{y}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\cos 2x}$

3) $\boxed{y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x \cos 2x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})}$

è S.G. dell'eq. completa.

4) Per risolvere il problema di Cauchy ci serve $y'(x)$:

$$y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x + x(-\operatorname{sen} 2x)$$

$$y(0) = c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4} + 0\cdot\cos 0$$

$$= \boxed{c_2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}} \qquad (\text{n.b.: } \operatorname{sen} 0 = 0,\ \cos 0 = 1)$$

$$y'(0) = 2c_1 \cos 0 - 2c_2 \operatorname{sen} 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 0 + 0$$

$$= \boxed{2c_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}}$$

da cui $\boxed{c_2 = 2}$ e $2c_1 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{2}}$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\cos 2x}$$

Facciamo la <u>verifica</u> (sarebbe <u>sempre</u> meglio farla, anche se porta via un po' di tempo e non è escluso che sia pure essa sbagliata, soprattutto quando ci sono molti calcoli da eseguire)

$$y'(x) = \cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x - x\operatorname{sen} 2x$$

Già con y e y' possiamo verificare se sono rispettate le condizioni iniziali:

$$y(0) = \text{sen}\,0 + 2\cos 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4} + 0 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$\underline{\text{O.K.}}$

$$y'(0) = \cos 0 - 4\,\text{sen}\,0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 0 - 0 =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \quad \underline{\text{O.K}}$$

Calcoliamo ora $y''(x)$:

$$y''(x) = \underline{-2\,\text{sen}\,2x} - 8\cos 2x - \underline{\text{sen}\,2x} - \underline{\text{sen}\,2x} + -2x\cos 2x$$

$$= -4\,\text{sen}\,2x - 8\cos 2x - 2x\cos 2x$$

Sostituendo nel 1° membro dell'E.D. otteniamo ($\bar{e}$ $y''(x) + 4y(x)$):

$$-4\,\text{sen}\,2x - 8\cos 2x - 2x\cos 2x +$$

$$+ 4\left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x + 2\cos 2x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\cos 2x\right) =$$

$$= -4\,\text{sen}\,2x - \cancel{8\cos}\,2x - \cancel{2x\cos}\,2x + 2\,\text{sen}\,2x +$$

$$+ \cancel{8\cos}\,2x + x - 1 + \cancel{x\cos}\,2x = \boxed{x - 1 - 2\,\text{sen}\,2x}$$

$\underline{\underline{\text{OK!!}}}$

Come vedete i conti tornano, però ci vuole molta attenzione!!
(Conviene fare le verifiche, soprattutto su $\bar{y}(x)$)