Soluzione ESERCIZI Teorici

1) ES1) pag 154

a) • è CHIUSO (il complementare è $x^2+y^2<9$ palla APERTA), il BORDO è $x^2+y^2=9$ che $\in$ domf

• non è LIMITATO (ad es. contiene tutti i punti $(x,0)$ con $x\geq 3$)

• non è COMPATTO perchè pur essendo chiuso non è limitato

b) domf $=\mathbb{R}^2$ • è contemporaneamente sia APERTO, sia CHIUSO:

è aperto perchè $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ $B_{\delta=1}(x_0,y_0)\subset\mathbb{R}^2$, è chiuso perchè il suo complementare è $\emptyset$ che è aperto (è un caso limite ma essendo privo di punti la condizione della definizione di aperto è verificata perchè non c'è nulla da verificare). Il bordo $\partial\mathbb{R}^2=\emptyset$.

non è LIMITATO, non è COMPATTO.

c) è APERTO (basta considerare $\delta <$ distanza dalla retta più vicina tra $x=-2$ e $x=2$)

il BORDO sono le rette $x=-2$ e $x=2$ che $\notin$ domf

non è LIMITATO (contiene $(x,0)$ $x>2$), non è COMPATTO (né chiuso, né limitato)

d) è APERTO ($\delta=\frac{1}{2}|x|$) → il BORDO è l'asse y che $\notin$ domf, non è limitato ($(x,0)\in$ domf $\forall x\neq 0$), non è COMPATTO (né chiuso, né limitato)

e) è APERTO ($\delta=\frac{1}{2}(1-y)$ se $y\geq 0$, $\delta=\frac{1}{2}(1+y)$ se $y<0$), il bordo sono le rette $y=\pm 1$ che $\notin$ domf

non è LIMITATO (contiene l'asse x), non è COMPATTO (né chiuso né LIM)

f) è APERTO ($\delta=\frac{1}{2}$dist$((x_0,y_0)$, circonf $C(0,0)$ $R=2)$) → il bordo è $x^2+y^2=4$ che $\notin$ domf, non è limitato (contiene $(x,0)$ $\forall x>2$), non è COMPATTO (né chiuso né limitato)

g) non è né APERTO né CHIUSO, il bordo è costituito dall'asse x e dalla parabola e $\in$ dom f in parte sì e in parte no

non è limitato (contiene (x,x) $\forall x \geq 1$ ad esempio)

non è compatto (né chiuso né limitato)

h) non è né APERTO né CHIUSO, il bordo è costituito dall'ellisse e dall'asse x per $|x| \geq 3$ e quindi ci sono punti del bordo che $\in$ insieme e punti che $\notin$ insieme

non è limitato (contiene l'asse y per $|y| \geq 2$)

non è COMPATTO (né chiuso, né limitato)

i) non è né APERTO né CHIUSO, è un SEMICERCHIO che contiene solo parte dei punti di bordo (quelli su $y=-2x-1$ sì, quelli su $(x)^2+(y+1)^2=16$ NO)

è LIMITATO (ad es. è $\subset B_R(q_0)$ con $R=6$)

non è compatto (non è chiuso anche se è limitato)

j) non è né aperto né chiuso, il bordo è costituito dalle due rette $x=-5$ e $x=-2$ (la 2ª solo per $y \leq 1 \cup y \geq 7$) e dalla metà circonferenza $(x+2)^2+(y-4)^2=9$ per $x \leq -2$ e il bordo appartiene solo in parte all'insieme.

non è limitato (contiene $(-3,y)$ $\forall y \geq 7$ ad esempio)

non è compatto (né chiuso, né limitato)

k) non è né aperto né CHIUSO, il bordo è costituito dalla retta

$y = x+1$ $(x \in [-1,2])$ che $\notin$ domf e dalla parabola $y = x^2-1$ $(x \in [-1,2])$

che $\in$ domf (esclusi i due punti estremi).

è LIMITATO (domf $\subset B_R(0,0)$ con $R=4$ ad esempio)

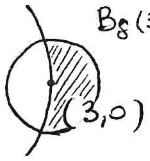
non è COMPATTO (non è CHIUSO, anche se è limitato.

PUNTI

a) $(3,0) \in \partial(\text{domf})$: infatti $\forall \delta > 0$ $B_\delta(3,0)$ contiene punti

del domf (per $x>3$) e punti $\notin$ domf per $x<3$, $x^2+y^2<9$

$(3,0) \in$ domf



▨ domf

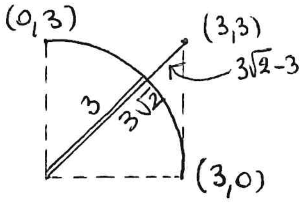
$B_\delta(3,0)$ interseca sia domf sia il suo complementare

$(3,3)$ è INTERNO al domf perchè

$B_\delta(3,3) \subset$ domf ad es. per $\delta = 1$

$\text{dist}((3,3), \partial\text{domf}) = 3\sqrt{2}-3 \simeq 1,24$

$(3,3) \in$ domf



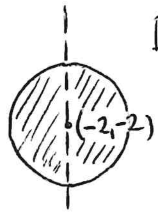
c) $(-2,-2) \in \partial(\text{domf})$ perchè

$\forall \delta > 0$ $B_\delta(-2,-2) \cap \text{domf} \neq \emptyset$ (tutti i punti

con $x>-2$ o $x<-2$) ma $B_\delta(-2,-2)$ contiene

anche punti $\notin$ domf (tutti i punti con $x=-2$

e $y \in]-2-\delta, -2+\delta[$)



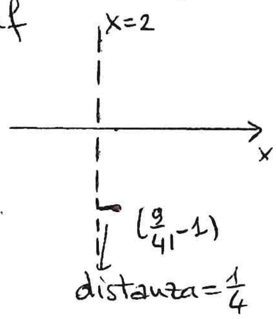
▨ domf

ma ⁞ $\notin$ domf $(-2,-2) \notin$ domf

$\left(\frac{9}{4}, -1\right)$ è INTERNO al domf

perchè $B_\delta\left(\frac{9}{4}, -1\right) \subset$ domf

ad es per $\delta = \frac{1}{8}$



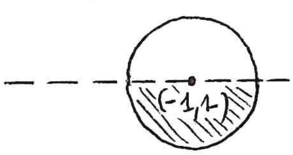
$\text{dist}\left(\left(\frac{9}{4}, -1\right), \text{retta } x=-2\right) = \frac{1}{4}$

$\frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$

$\left(\frac{9}{4}, -1\right) \in$ domf

e) $(-1,+1) \in \partial\text{domf}$ perchè $\forall \delta > 0$ $B_\delta(-1,1) \cap \text{domf} \neq \emptyset$ (tutti i punti

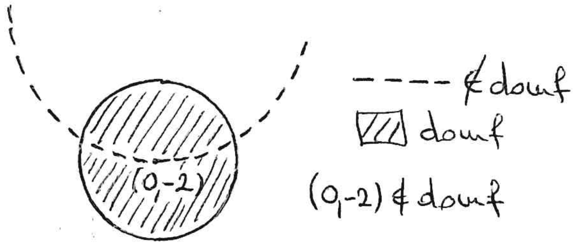
con $y<1$) ma B_δ contiene anche punti $\notin$ domf (tutti i punti con $y>1$



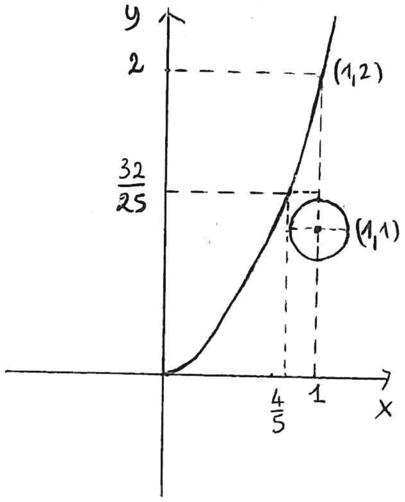
▨ domf

$(-1,1) \notin$ domf

f) $(0,-2) \in \partial(\text{dom} f)$ perchè $\forall \delta>0$ $B_\delta(0,-2) \cap \text{dom} f \neq \emptyset$ (tutti i punti esclusa la circonf $x^2+y^2=4$) ma B_δ contiene anche punti $\notin \text{dom} f$ (quelli sulla circonf $x^2+y^2=4$)



g) $(1,1)$ è INTERNO al domf perchè
$B_\delta(1,1) \subset \text{dom} f$ ad es. per $\delta = \frac{1}{5}$

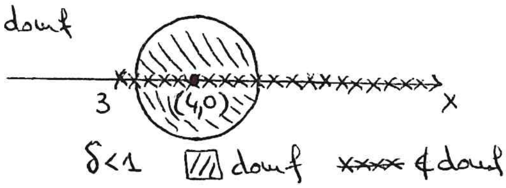


$y = 2x^2$ è la parabola che in $x = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ vale $y = \frac{32}{25} = 1{,}28 > 1+\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$

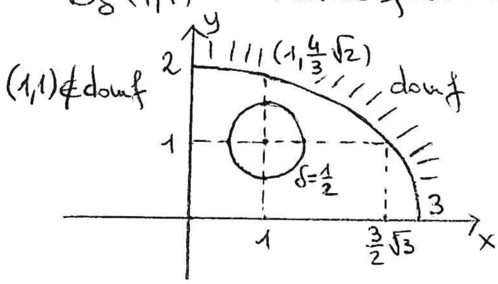
$(1,1) \in \text{dom} f$

h) $(4,0) \in \partial(\text{dom} f)$ perchè $\forall \delta>0$ $B_\delta(4,0) \cap \text{dom} f \neq \emptyset$ (per $\delta<1$ tutti i punti $\in \text{dom} f$ esclusi quelli dell'asse x) ma B_δ contiene anche punti $\notin \text{dom} f$ ($(x_0,0)$ con $x_0 \in]4-\delta, 4+\delta[$)

$(4,0) \notin \text{dom} f$



$(1,1)$ è ESTERNO al domf perchè ad es.
$B_\delta(1,1)$ è tutta fuori dal domf per $\delta = \frac{1}{2}$



in $x=1$ l'ellisse ha $y = \frac{4}{3}\sqrt{2} \simeq 1{,}9$ (nel 1° quadrante)

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ $\quad \frac{y^2}{4} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ $\quad y^2 = \frac{32}{9}$ $\quad y = \pm \frac{4}{3}\sqrt{2}$

e $y=1$ in $x = \frac{3}{2}\sqrt{3} \simeq 2{,}6$ (nel 1° quadrante)

$\frac{x^2}{9} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\quad x^2 = \frac{27}{4}$ $\quad x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}$

j) $(-5,4) \in \partial(\text{dom} f)$ perchè $\forall \delta>0$ $B_\delta(-5,4) \cap \text{dom} f \neq \emptyset$, ma B_δ contiene anche punti $\notin \text{dom} f$ (tutti i punti con $x<-5$ e quelli con $x>-5$ interni alla circonf di $C(-2,4)$ e $R=3$)

$(-5,4) \notin \text{dom} f$