Come si scrivono le $\boxed{\text{EQUAZIONI PARAMETRICHE}}$ di una curva che percorre una RETTA, un SEGMENTO, o il GRAFICO di una funzione?

Dovremo saper scrivere le equazioni parametriche per calcolare il MASSIMO e il MINIMO di una funzione di 2 variabili.

RETTA

Si possono scrivere le equazioni parametriche di una retta utilizzando la sua EQUAZIONE CARTESIANA.

Supponiamo di considerare la retta di equazione $\boxed{y=mx+q}$.

Possiamo scrivere le equazioni parametriche di una curva che percorre la retta considerando come parametro t l'ascissa x:

$t=x$ quindi $x(t)=t$ da cui

$$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=mt+q \end{cases} \quad \underline{t\in\mathbb{R}}$$

← per percorrere l'intera retta serve t in tutto $\mathbb{R}$.

Se ricaviamo t dalla 1^a eq.^{ne} $\underline{t=x}$ e sostituiamo nella 2^a otteniamo come EQ.^{ne} $y=mx+q$ che è proprio la nostra retta.

Poichè all'aumentare di t aumenta x la retta è percorsa nel verso delle x crescenti. Quindi

$$\boxed{\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=mt+q \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad \text{EQ}^{\text{ni}} \text{ PARAMETRICHE della retta } y=mx+q \text{ nel } \underline{\text{verso delle } x \text{ crescenti}}}$$

ESEMPIO Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre la retta $y=-3x+2$ nel verso delle x crescenti, disegnando anche il sostegno con il verso di percorrenza.

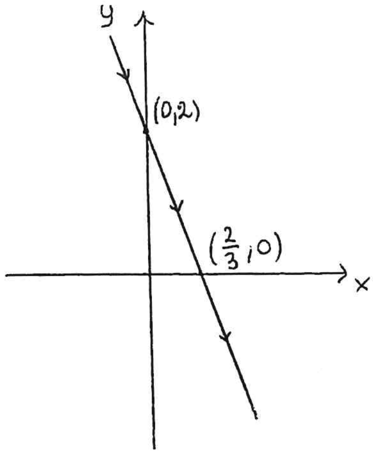
Risposta:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-3t+2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

nel verso delle x crescenti

Ad es. per $t=0 \rightarrow (0,2)$

per $t=2/3 \rightarrow (2/3, 0)$

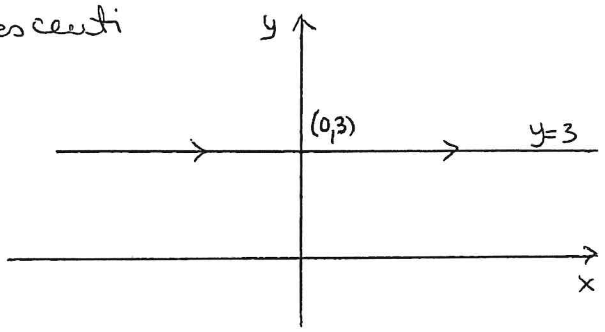


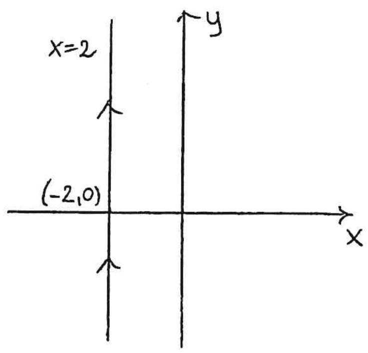
RETTE ORIZZONTALI e VERTICALI

$\boxed{y=k}$ o $\boxed{x=k}$

Retta $y=3$ nel verso delle x crescenti

$$\begin{cases} x=t \\ y=3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$





Retta $x=-2$ nel VERSO DELLE Y CRESCENTI

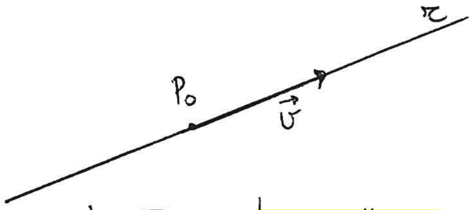
$$\begin{cases} x=-2 \\ y=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

IL PARAMETRO t COINCIDE CON L'ORDINATA y

all'aumentare di t

y aumenta

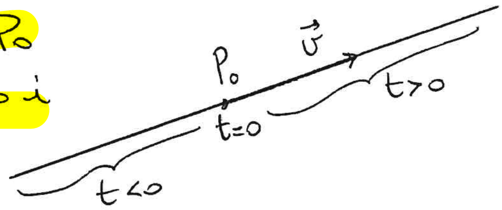
In modo completamente diverso si possono scrivere le equazioni parametriche di una curva che percorre una retta utilizzando $\boxed{\text{UN PUNTO } P_0 \in \text{retta}}$ e un $\boxed{\text{VETTORE DIRETTORE della retta}}$.



I PUNTI della retta sono tutti i punti P che si ottengono aggiungendo a P_0 il vettore $t\vec{v}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. La retta si può scrivere tramite l'$\boxed{\text{equazione VETTORIALE}}$

$P = P_0 + t\vec{v}$
$(t \in \mathbb{R})$

a $t=0$ corrisponde P_0
a $t>0$ corrispondono i punti sulla retta dalla parte di $\vec{v}$



a $t<0$ i punti dalla parte opposta a $\vec{v}$

t è un parametro che consente di ricostruire ogni punto della retta: scrivendo l'equazione vettoriale per componenti si ottengono le

EQ.NI PARAMETRICHE della RETTA per P_0 con direzione $\vec{v}$	$\begin{cases} x = x_{P_0} + tv_1 \\ y = y_{P_0} + tv_2 \end{cases}$	$t \in \mathbb{R}$	$P_0 = (x_{P_0}, y_{P_0})$ $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Se $\vec{v}$ è diretto come in figura la retta è percorsa nel verso delle x crescenti.

OSSERVAZIONE 1) Il parametro t scelto NON HA NULLA A CHE VEDERE CON L'ASCISSA del PUNTO corrispondente:

$t=0 \to P_0$ $\quad t=1 \to P_0 + \vec{v}$ $\quad t=2 \to P_0 + 2\vec{v}$ $\quad t=\frac{1}{2} \to P_0 + \frac{1}{2}\vec{v}$

$t=-2 \to P_0 - 2\vec{v}$

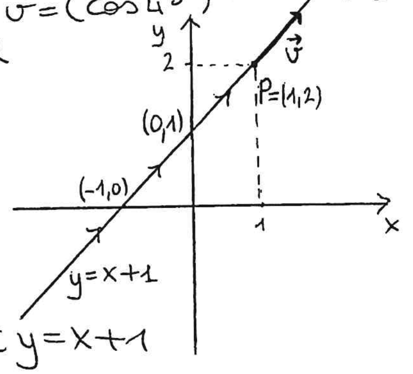
t rappresenta quanti vettori $\vec{v}$ devo aggiungere a P_0 per trovarmi in P.

2) Questo modo di scrivere le equazioni parametriche di una retta è utile ad esempio per la RETTA TANGENTE che è la retta per un punto con direzione il VETTORE TANGENTE.

ESEMPIO Scrivete le equazioni parametriche della retta per $P_0=(1,2)$ con direzione $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (che è la direzione a $45°$ $\vec{v}=(\cos 45°, \text{sen}\, 45°)$)

eq.^{ne} vettoriale $P=(1,2)+t\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $t\in\mathbb{R}$

eq.^{ni} parametriche $\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$



In questo caso la retta è percorsa nel verso delle x crescenti. L'eq.^{ne} cartesiana è $y=x+1$ (dalla 1ª $\frac{\sqrt{2}}{2}t=x-1$, nella 2ª $y=2+x-1=x+1$).

OSSERVAZIONE Poiché il vettore $-\vec{v}=(-v_1,-v_2)$ è il vettore di direzione opposta a $\vec{v}$, se si vuole percorrere la retta in verso opposto basta considerare $-\vec{v}$ come direzione.
Ad es. $-\vec{v}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ percorre la retta $y=x+1$ nel verso delle x decrescenti.

$\boxed{\text{RETTA PER 2 PUNTI}}$ $P_0=(x_0,y_0)$ e $P_1=(x_1,y_1)$

Se $x_0=x_1 \Rightarrow$ la retta è VERTICALE

Eq.^{ne} CARTESIANA $x=x_0$

Eq.^{ni} param. $\begin{cases} x=x_0 \\ y=t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

all'aumentare di t y aumenta quindi è nel VERSO delle y crescenti

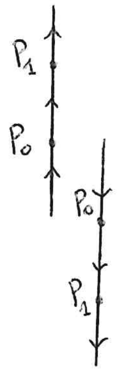
VETTORE DIREZIONE $\vec{v}=P_1-P_0=(x_1-x_0,y_1-y_0)=(0,y_1-y_0)$

Eq.^{ne} vettoriale $P=P_0+t(P_1-P_0)$ $t\in\mathbb{R}$

Eq.^{ni} param. $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0+t(y_1-y_0) \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

VERSO y CRESCENTI se $y_1>y_0$

VERSO y DECRESCENTI se $y_1<y_0$



Se $x_0 \neq x_1 \Rightarrow$ la retta è ORIZZONTALE o INCLINATA

Eq.^{ne} CARTESIANA $\quad y = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ $\quad \begin{cases} x = t \\ y = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(t - x_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

(utilizzabile poi per scrivere le eq.^{ni} parametriche)

VETTORE DIREZIONE $\quad \vec{v} = P_1 - P_0 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$

Eq.^{ne} vettoriale $\quad P = P_0 + t(P_1 - P_0) \quad t \in \mathbb{R}$

Eq.^{ni} parametriche $\quad \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

per $t=0$ ci si trova in P_0

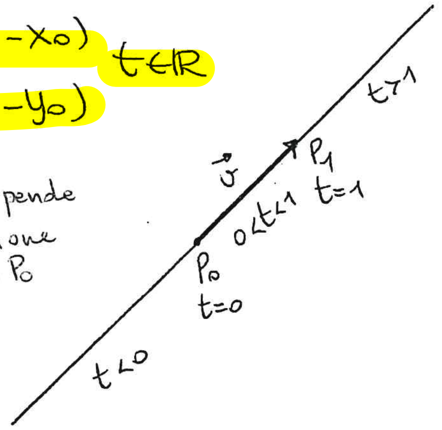
per $t=1$ ci si trova in P_1

per $0<t<1$ tra P_0 e P_1

per $t>1$ dopo P_1

per $t<0$ prima di P_0

il VERSO dipende dalla posizione reciproca di P_0 e P_1



ESEMPIO Scrivete le equaz. parametriche della curva che percorre la retta per $P_0 = (-3,2)$ e $P_1 = (1,1)$ nel verso delle x crescenti (in due modi diversi). Stesso esercizio nel verso delle x decrescenti (in un solo modo)

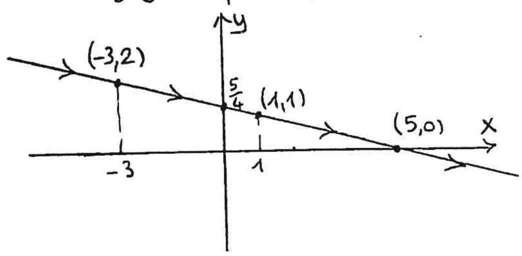
VERSO x crescenti

eq.^{ne} cartesiana $\quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ $\qquad$ eq.^{ni} param. $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{4}t + \frac{5}{4} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

per $t=-3 \to (-3,2)$ $\quad t=0 \to (0, 5/4)$

$t=1 \to (1,1)$ $\quad t=5 \to (5,0)$

il parametro t scelto COINCIDE con l'ascissa x



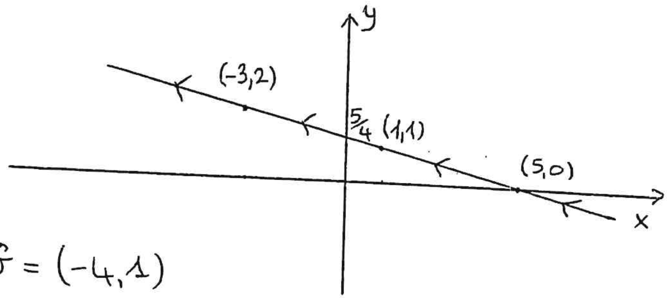
VETTORE DIREZIONE $\quad \vec{v} = P_1 - P_0 = (4,-1)$ perchè P_1 è posizionato a destra di P_0

eq.^{ne} vettoriale $\quad P = P_0 + t\vec{v} = (-3,2) + t(4,-1) \quad t \in \mathbb{R}$

eq.^{ni} param. $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$t=0 \to (-3,2)$ $\quad t=1 \to (1,1)$ $\quad$ il punto $(0, \frac{5}{4})$ che è fra i due si trova per $t = 3/4$

Verso delle x decrescenti



VETTORE DIREZIONE $= P_0 - P_1 = -\vec{v} = (-4, 1)$

eq^{ue} vettoriale $P = P_1 + t(P_0 - P_1) \quad t \in \mathbb{R}$

eq^{ui} param $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ $\qquad t=0 \to (1,1) \quad t=1 \to (-3,2)$

$(0, 5/4)$ per $t = \frac{1}{4}$

$\boxed{\text{SEGMENTO}}$ di estremi $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$

Per tutto quanto già osservato per una retta otteniamo che

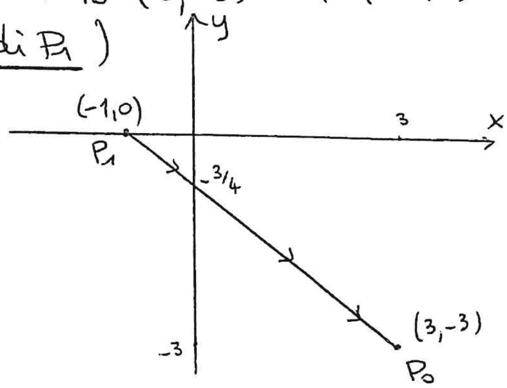
1° modo si scrive l'equazione cartesiana della retta per i due punti e poi da essa le eq^{ui} parametriche. Il parametro t non varierà più in tutto $\mathbb{R}$, ma dovrà essere scelto in modo da far percorrere solo il segmento.

ESEMPIO 1 Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre nel verso delle x crescenti il segmento di estremi $P_0 = (3, -3)$ e $P_1 = (-1, 0)$ (si noti che P_0 è posizionato a destra di P_1)

eq^{ue} cartesiana $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

eq^{ui} param $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{4}t - \frac{3}{4} \end{cases} \quad t \in [-1, 3]$

verso x crescenti, $t = x \Rightarrow t \in [-1, 3]$



VERSO delle x crescenti

$y = mx + q$

$\begin{cases} x = t \\ y = mt + q \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$

con $t_1 = x_{\text{estremo sinistro}}$

$t_2 = x_{\text{estremo destro}}$

essendo stato scelto $t = x$ l'intervallo va dall'ascissa dell'estremo del segmento posto a sinistra all'ascissa dell'estremo destro del segmento.

ESEMPIO ② Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre nel verso delle y crescenti il segmento di estremi $P_0=(2,-1)$ e $P_1=(2,3)$.

$x_0=x_1$ quindi la retta è verticale e ha eq.^{ne} $x=2$

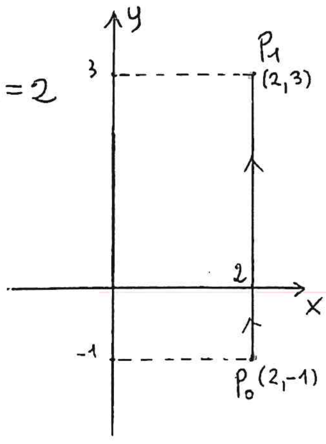
P_1 è posizionato sopra P_0.

eq.^{ni} par. $\begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases}$ $t\in[-1,3]$

verso y crescenti

$t=y \to t\in[\underset{y_{P_0}}{-1},\underset{y_{P_1}}{3}]$

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0 \\ y=t \end{cases} \quad t\in[t_1,t_2] \quad \text{verso } y \text{ crescenti} \quad t_1=y \text{ estremo basso} \quad t_2=y \text{ estremo alto}}$$



VERSO delle y CRESCENTI

2° modo:

SEGMENTO PERCORSO da P_0 a P_1

si considera la retta per P_0 con direzione $\vec{v}=P_1-P_0$ e ci si ricorda che il tratto da P_0 a P_1 viene percorso per $t\in[0,1]$ (per $t=0\to P_0$, per $t=1\to P_1$, i punti intermedi per $0<t<1$).

Eq.^{ne} vettoriale $P=P_0+t(P_1-P_0)$ $t\in[0,1]$

Eq.^{ni} param. $\boxed{\begin{cases} x=x_0+t(x_1-x_0) \\ y=y_0+t(y_1-y_0) \end{cases} \quad t\in[0,1]}$ SEGMENTO da P_0 a P_1

SEGMENTO PERCORSO da P_1 a P_0

Questa volta il punto è P_1 e $\vec{v}=P_0-P_1$ ($t=0\to P_1$, $t=1\to P_0$)

Eq.^{ne} vettoriale $P=P_1+t(P_0-P_1)$ $t\in[0,1]$

Eq.^{ni} param. $\boxed{\begin{cases} x=x_1+t(x_0-x_1) \\ y=y_1+t(y_0-y_1) \end{cases} \quad t\in[0,1]}$ SEGMENTO da P_1 a P_0

OSSERVAZIONE Il verso di percorrenza dipende dalla posizione di P_1 rispetto a P_0. Ad es. se P_1 è a destra di P_0 il segmento da P_0 a P_1 avrà il verso delle x crescenti, mentre quello da P_1 a P_0 delle x decrescenti. Invece se P_1 si trova a sinistra di P_0 sarà al contrario. Infine se P_1 è sopra P_0 ($\overset{y_{P_1}>y_{P_0}}{x_{P_1}=x_{P_0}}$) il segmento da P_0 a P_1 avrà il verso delle y crescenti, mentre quello da P_1 a P_0 il verso delle y decrescenti; viceversa se P_1 è sotto P_0 ($y_{P_1}<y_{P_0}$, $x_{P_1}=x_{P_0}$).

ESEMPI Ripetiamo gli esempi precedenti

1) segmento di estremi $P_0=(3,-3)$ e $P_1=(-1,0)$

Essendo P_0 posizionato a destra di P_1 avremo

- punto $P_1=(-1,0)$ $\vec{v}=(P_0-P_1)=(4,-3)$ VERSO X CRESCENTI

$$\begin{cases} x=-1+4t \\ y=-3t \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

- punto $P_0=(3,-3)$ $\vec{v}=P_1-P_0=(-4,3)$ VERSO X DECRESCENTI

$$\begin{cases} x=3-4t \\ y=-3+3t \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

2) segmento di estremi $P_0=(2,-1)$ e $P_1=(2,3)$

Essendo P_1 posizionato sopra P_0 avremo

- punto $P_0=(2,-1)$ $\vec{v}=P_1-P_0=(0,4)$ VERSO y CRESCENTI

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-1+4t \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

- punto $P_1=(2,3)$ $\vec{v}=P_0-P_1=(0,-4)$ VERSO y DECRESCENTI

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3-4t \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

OSSERVAZIONI (IMPORTANTI). 1) Quando si parametrizza un SEGMENTO utilizzando il PUNTO e il VETTORE DIRETTORE si ha sempre $t\in[0,1]$.

2) Quando scrivete le eq.^{ni} parametriche di un segmento, alla fine fate sempre la VERIFICA controllando che negli estremi dell'intervallo di tempo che avete scelto risultino i punti estremi del segmento considerato.

3) È ERRORE scrivere intervalli del tipo $t\in[3,-1]$ perchè

RAGIONE PRATICA → t non può andare indietro

RAGIONE MATEMATICA → l'intervallo $[3,-1]=\phi$ è l'insieme vuoto in quanto non esiste nessun numero più grande di 3 e più piccolo di -1.

$\boxed{\text{GRAFICO}}$ di una funzione

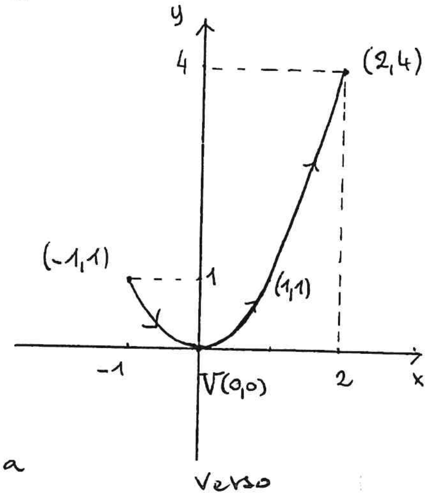
Se una curva percorre il grafico della funzione $y=f(x)$ per $x \in [a,b]$ nel verso delle x crescenti, allora le sue equazioni parametriche si possono sempre scrivere nel seguente modo:

$$\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

(il parametro t coincide con l'ascissa $t=x$).

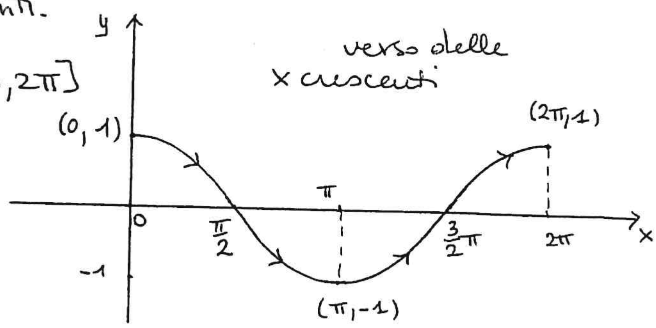
ESEMPI 1) Scrivete le equazioni parametriche della curva che percorre il grafico della parabola $y=x^2$ per $x\in[-1,2]$ nel verso delle x crescenti.

eq.^{ni} param. $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$ $t\in[-1,2]$



2) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre il grafico del coseno $y=\cos x$ per $x\in[0,2\pi]$ nel verso delle x crescenti.

eq.^{ni} param. $\begin{cases} x=t \\ y=\cos t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$



ESERCIZI sulle EQ.$^{\text{NI}}$ PARAMETRICHE

1) Scrivete le equazioni parametriche delle seguenti curve, disegnandone il sostegno e specificando il verso di percorrenza.

a) curva che percorre la retta passante per $(-1,1)$ e $(2,0)$ in 3 modi diversi (due nel verso delle x crescenti ed uno nel verso delle x decrescenti)

b) curva che percorre la retta per $(2,1)$ e $(-1,-1)$ in 3 modi diversi (due nel verso delle x crescenti ed uno nel verso delle x decrescenti).

c) curva che percorre il segmento di estremi $(1,0)$ e $(4,4)$ in 3 modi diversi.

d) curva che percorre il segmento di estremi $(-2,5)$ e $(-2,-1)$ in 3 modi diversi

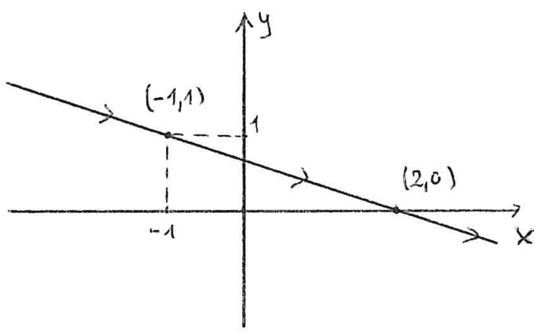
e) curva che percorre il segmento di estremi $(-1,-3)$ e $(-3,3)$ in 3 modi diversi.

f) curva che percorre il segmento di estremi $(-5,-1)$ e $(3,-1)$ in 3 modi diversi.

g) curva che percorre il grafico $y=\operatorname{sen}x$ della funzione seno da $(0,0)$ a $(2\pi,0)$ nel verso delle x crescenti.

h) curva che percorre il grafico $y=|x|$ della funzione valore assoluto nel verso delle x crescenti per $x\in[-3,4]$.

SOLUZIONE



a) eq.$^{\text{ne}}$ cartesiana

$$m=\frac{0-1}{2+1}=-\frac{1}{3}$$

$$y=0-\frac{1}{3}(x-2)$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}$$

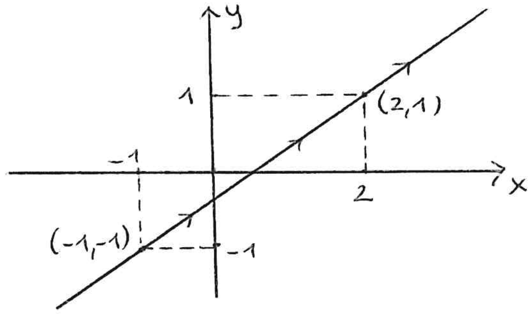
eq.$^{\text{ni}}$ param $\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{1}{3}t+\frac{2}{3} \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ verso delle x crescenti eq.^{ne} vettoriale, vettore direttore $\vec{v} = \overset{P_1}{(2,0)} - \overset{P_0}{(-1,1)} = (3,-1)$

$P = P_0 + t\vec{v} = (-1,1) + t(3,-1) \quad t \in \mathbb{R}$

eq.^{ui} parametriche $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 1-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ verso delle x crescenti

vettore direttore $-\vec{v} = P_0 - P_1 = (-3,1)$ eq.^{ue} vettoriale $P = (2,0) + t(-3,1) \quad t \in \mathbb{R}$

eq.^{ui} parametriche $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ verso delle x decrescenti.



b) eq.^{ne} cartesiana

$m = \frac{2}{3} \quad y = -1 + \frac{2}{3}(x+1)$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

eq.^{ui} param. $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ verso delle x crescenti

eq.^{ne} vettoriale, vettore direzione $\vec{v} = P_1 - P_0 = (2,1) - (-1,-1) = (3,2)$

$P = P_0 + t\vec{v} = (-1,-1) + t(3,2) \quad t \in \mathbb{R}$

eq.^{ui} param. $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = -1+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ verso delle x crescenti

vettore direzione $-\vec{v} = P_0 - P_1 = (-3,-2)$, eq.^{ue} vettoriale $P = (2,1) + t(-3,-2) \quad t \in \mathbb{R}$

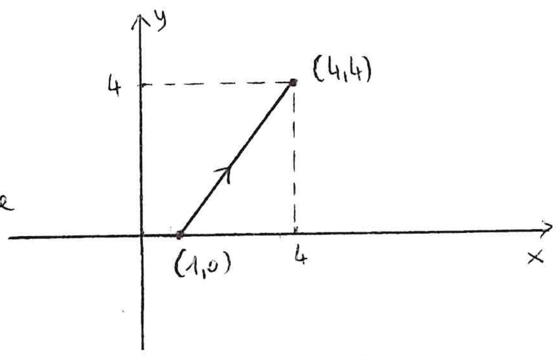
eq.^{ui} param. $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ verso delle x decrescenti.

c) eq.^{ue} cartesiana

$m = \frac{4}{3} \quad y = \frac{4}{3}(x-1) \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

eq.^{ui} param. $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{4}{3}t - \frac{4}{3} \end{cases} \quad t \in [1,4]$

Verso delle x crescenti



Vettore direttore $\vec{v} = P_1 - P_0 = (4,4) - (1,0) = (3,4)$

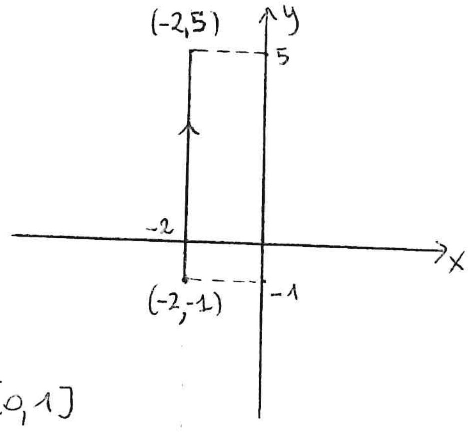
eq.^{ne} vett. $P = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1,0) + t(3,4) \quad t \in [0,1]$ eq.^{ni} param $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 4t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

verso delle x crescenti

vettore direttore $-\vec{v} = P_0 - P_1 = (-3,-4)$ $\underline{eq.^{ue}\text{ vett.}}$ $P = \underset{(4,4)}{\underset{\parallel}{P_1}} + t(-3,-4)$ $t \in [0,1]$

$eq.^{ni}$ param. $\begin{cases} x = 4-3t \\ y = 4-4t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ verso delle x decrescenti.

d) $\underline{eq.^{ue}\text{ cartesiana}}$ $x = -2$ (retta verticale)



$eq.^{ni}$ param. $\begin{cases} x = -2 \\ y = t \end{cases}$ $t \in [-1,5]$ verso delle y crescenti

vettore direttore $\vec{v} = P_1 - P_0 = (-2,5) - (-2,-1) = (0,6)$

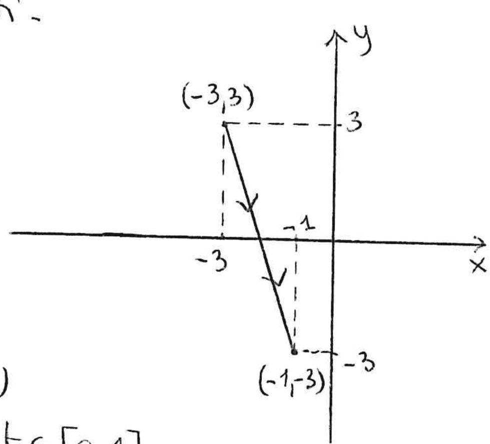
$\underline{eq.^{ue}\text{ vettoriale}}$ $P = P_0 + t\vec{v} = (-2,-1) + t(0,6)$ $t \in [0,1]$

$eq.^{ni}$ param. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1+6t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ verso delle y crescenti

vettore direttore $-\vec{v} = P_0 - P_1 = (0,-6)$ $\underline{eq.^{ue}\text{ vettoriale}}$ $P = \underset{(-2,5)}{\underset{\parallel}{P_1}} + t(0,-6)$ $t \in [0,1]$

$eq.^{ni}$ param. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5-6t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ verso delle y decrescenti.

e) $\underline{eq.^{ue}\text{ cartesiana}}$



$m = -3$ $y = 3 - 3(x+3)$ $y = -3x - 6$

$eq.^{ni}$ param $\begin{cases} x = t \\ y = -3t - 6 \end{cases}$ $t \in [-3,-1]$ verso delle x crescenti

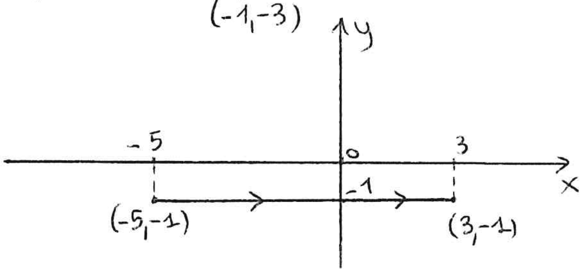
vettore direttore $\vec{v} = P_1 - P_0 = (-1,-3) - (-3,3) = (2,-6)$

$\underline{eq.^{ue}\text{ vettoriale}}$ $P = P_0 + t\vec{v} = (-3,3) + t(2,-6)$ $t \in [0,1]$

$eq.^{ni}$ param $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 3-6t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ verso delle x crescenti

vettore direttore $-\vec{v} = P_0 - P_1 = (-2,6)$ $\underline{eq.^{ue}\text{ vett.}}$ $P = \underset{(-1,-3)}{\underset{\parallel}{P_1}} + t(-2,6)$ $t \in [0,1]$

$eq.^{ni}$ param. $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = -3+6t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ verso delle x decrescenti



f) $\underline{eq.^{ue}\text{ cartesiana}}$ $y = -1$

$eq.^{ni}$ param. $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases}$ $t \in [-5,3]$

verso delle x crescenti

Vettore direttore $\vec{v} = P_1 - P_0 = (3,-1)-(-5,-1) = (8,0)$

eq.ne vettoriale $P = P_0 + t\vec{v} = (-5,-1) + t(8,0) \quad t \in [0,1]$

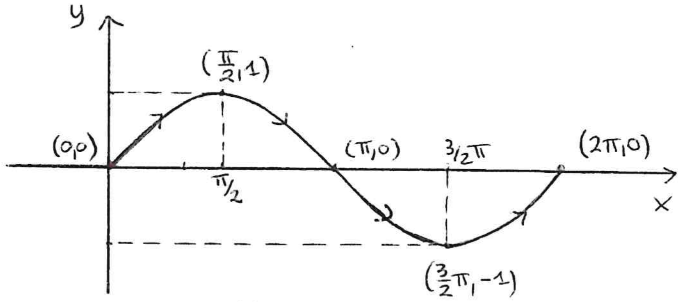
eq.ni param. $\begin{cases} x = -5+8t \\ y = -1 \end{cases} \quad t \in [0,1]$ Verso delle x crescenti

vettore direttore $-\vec{v} = P_0 - P_1 = (-8,0)$ eq.ne vett. $P = \underset{\substack{\parallel \\ (3,-1)}}{P_1} + t(-8,0) \quad t \in [0,1]$

eq.ni param. $\begin{cases} x = 3-8t \\ y = -1 \end{cases} \quad t \in [0,1]$. Verso delle x decrescenti

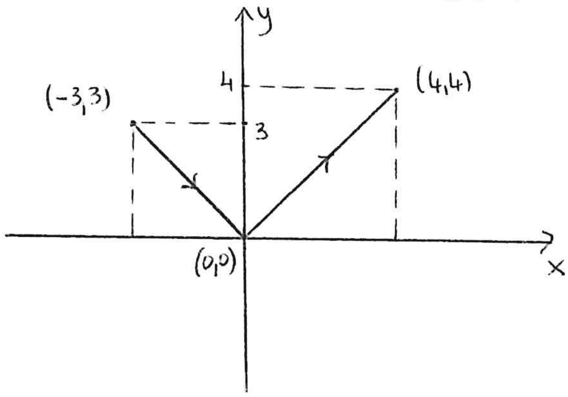
g) $\begin{cases} x = t \\ y = \mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$

verso delle x crescenti



h) $\begin{cases} x = t \\ y = |t| \end{cases} \quad t \in [-3,4]$

verso delle x crescenti



CIRCONFERENZE ed ELLISSI

Per scrivere le EQ.NI PARAM. di una curva che percorre una CIRCONFERENZA oppure una ELLISSE in VERSO ANTIORARIO si devono utilizzare le equazioni canoniche della circonferenza e dell'ellisse e poi scegliere il parametro t in modo da percorrere solo il tratto richiesto.

$$\begin{cases} x(t) = x_c + R\cos t \\ y(t) = y_c + R\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

Eq.ni canoniche

CIRCONF $C(x_c,y_c)$ raggio R

Verso antiorario

$$\begin{cases} x(t) = x_c + a\cos t \\ y(t) = y_c + b\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

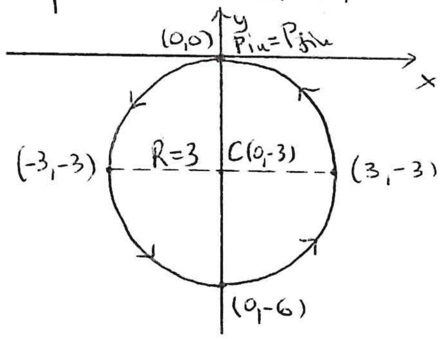
Eq.ni canoniche

ELLISSE $C(x_c,y_c)$ semiassi a, b

Verso antiorario

ESEMPIO Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre la circonferenza di $C(0,-3)$ e $R=3$ in verso antiorario per un giro partendo da $(0,0)$ e per $\frac{1}{2}$ giro partendo da $(3,-3)$.

Le EQ.^{NI} sono $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = -3 + 3\,\text{sen}\,t \end{cases}$

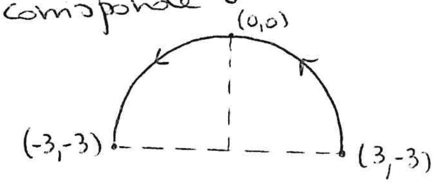


Per percorrere 1 giro partendo da $(0,0)$ serve il t_{in} che è il tempo corrispondente a $(0,0)$: quindi $t_{in} = \frac{\pi}{2}$. Per determinare il t_{fin} dobbiamo aggiungere al t_{in} il tempo necessario per completare un giro che è di 2π. Quindi $t_{fin} = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5}{2}\pi$.

Dunque $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = -3 + 3\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$ compie 1 giro in verso antiorario partendo da $(0,0)$.

Invece per $\frac{1}{2}$ giro partendo da $(3,-3)$ possiamo considerare

$\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = -3 + 3\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$ visto che a $(3,-3)$ corrisponde $t=0$ ed a $(-3,-3)$ $t = \pi$.



ESERCIZI

2) a) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre la circonferenza di $C(0,-3)$ e $R=3$ (quella dell'esempio precedente) in verso antiorario per

- $\frac{1}{2}$ giro da $(-3,-3)$ a $(3,-3)$
- $\frac{1}{2}$ giro da $(0,0)$ a $(0,-6)$
- $\frac{3}{4}$ di giro da $(-3,-3)$ a $(0,0)$

b) circonferenza di $C(-1,1)$ e $R=2$ in verso antiorario per

- 1 giro partendo da $(1,1)$
- 1 giro partendo da $(-3,1)$
- $\frac{1}{2}$ giro da $(-1,-1)$ a $(-1,3)$
- $\frac{3}{4}$ di giro da $(-1,-1)$ a $(-3,1)$.

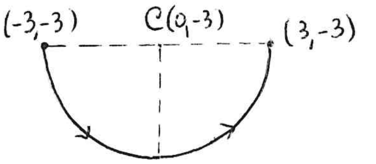
c) ELLISSE $C(0,0)$ semiassi $a=\frac{1}{3}$ $b=1$ in verso antiorario per

- 1 giro partendo da $(0,1)$
- $\frac{3}{4}$ di giro da $(0,-1)$ a $(-\frac{1}{3},0)$

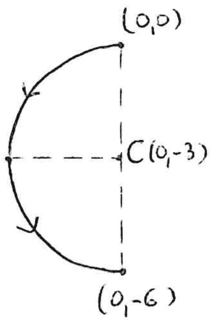
d) ELLISSE $C(2,1)$ semiassi $a=2$ $b=1$ in verso antiorario per

- 1 giro partendo da $(0,1)$
- 1 giro partendo da $(2,0)$
- $\frac{1}{2}$ giro da $(2,2)$ a $(2,0)$
- $\frac{1}{2}$ giro da $(2,0)$ a $(2,2)$.

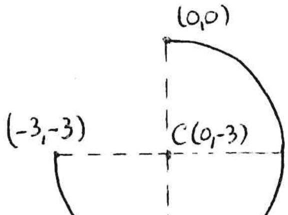
<u>Svolgimento</u> a)



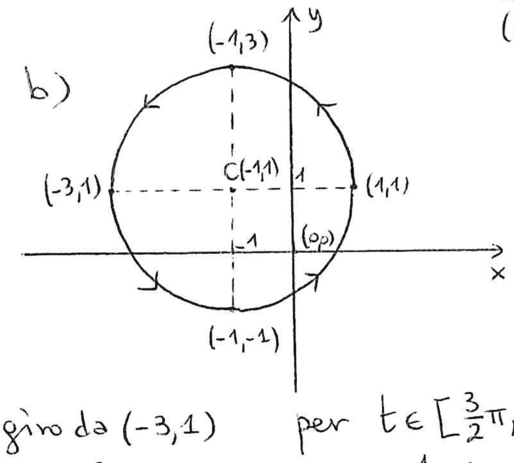
$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = -3+3\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [\pi, 2\pi]$



$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = -3+3\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$



b)



$\begin{cases} x = -1+2\cos t \\ y = 1+2\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

1 giro da $(1,1)$

per $t \in [\pi, 3\pi]$ 1 giro da $(-3,1)$

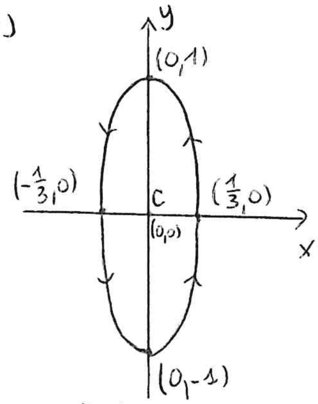
$(-3,1)$ corrisponde a $t=\pi$ $\qquad$ $\pi + 2\pi = 3\pi$

per $t \in [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$ oppure $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\qquad$ $\frac{5}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2}$ giro da $(-1,-1)$ a $(-1,3)$

per $t \in [\frac{3}{2}\pi, 3\pi]$ oppure $t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ $\frac{3}{4}$ di giro da $(-1,-1)$ a $(-3,1)$ $\qquad$ $3\pi = \frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi$

c)



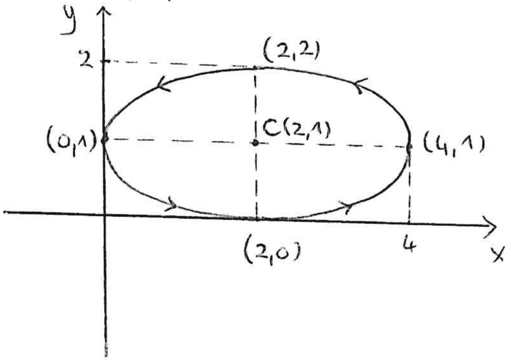
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi]$ 1 giro da (0,1)

per $t \in [\frac{3}{2}\pi, 3\pi]$ oppure $t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

$\frac{3}{4}$ giro da (0,-1) a $(-\frac{1}{3},0)$

d)



$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 1 + \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$t \in [\pi, 3\pi]$ 1 giro da (0,1)

per $t \in [\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi]$ oppure $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$

$\frac{7}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi + 2\pi$

1 giro da (2,0)

per $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ $\frac{1}{2}$ giro da (2,2) a (2,0)

per $t \in [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$ oppure $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\frac{1}{2}$ giro da (2,0) a (2,2)