COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	
MATRICOLA ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌋	1 2 3 4
CORSO AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL	

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2018-2019 — PARMA, 14 GENNAIO 2020

AN2-14/1/20-1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare** **la risposta.**

$15^2=225$ $16^2=256$ $17^2=289$ $\sqrt{30}\simeq 5{,}48$ $\frac{81}{8}=10{,}125$ $\frac{81}{16}=5{,}0625$ $\sqrt{5}\simeq 2{,}24$

0) **PARTE PRELIMINARE** (30 PUNTI)

Completate:

a) Sia γ una curva nel piano. Se il punto $P_0 = (-4,-3)$ appartiene al sostegno di γ e in
A pag. 4 tale punto il vettore tangente è $\mathbf{v} = 4\,\mathbf{i} - \dfrac{15}{2}\,\mathbf{j}$, allora

i versori normali in P_0 sono ..$\text{VERS}\,\vec{N}_{or} = -\frac{15}{17}\vec{\imath} - \frac{8}{17}\vec{\jmath}$ $\quad \text{VERS}\,\vec{N}_{ant} = \frac{15}{17}\vec{\imath} + \frac{8}{17}\vec{\jmath}$

e la retta normale in P_0 ha equazione cartesiana ...$y = \frac{8}{15}x - \frac{13}{15}$

b) Sia $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da

A pag. 4

$$\begin{cases} x(t) = -4 + \dfrac{9}{2}\cos t \\ y(t) = \quad 1 - \dfrac{9}{2}\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi].$$

La curva percorre la CIRCONFERENZA di equazione ... $(x+4)^2+(y-1)^2 = \frac{81}{4}$

dal punto iniziale $(-4, \frac{11}{2})$. al punto finale $(-4, \frac{11}{2})$.

in verso ..ORARIO...... perchè ..c'è il segno "$-$" in $y(t) = 1 \ominus \frac{9}{2}\operatorname{sen} t$

per ......2....... giri perchè ..$\Delta t = \frac{7}{2}\pi - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{8}{2}\pi = 4\pi = 2\pi + 2\pi$

Il vettore tangente nel punto $P_0 = (-4 + \frac{9}{4}\sqrt{2}, 1 + \frac{9}{4}\sqrt{2})$ è ..$\vec{v}_{P_0} = \frac{9}{4}\sqrt{2}\,\vec{\imath} - \frac{9}{4}\sqrt{2}\,\vec{\jmath}$

La velocità scalare in P_0 è: ...$\frac{9}{2} = \|\vec{v}_{P_0}\|$

c) Considerate la funzione $f(x,y) = -6 + 3\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$.

A pag. 4-5

i) Determinate il dominio di f, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f, poi spiegate di quale tipo di superficie si tratta (senza dimenticare l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari precisate se l'angolo di apertura risulta minore o maggiore di 45 gradi e come si calcola); non è richiesto di disegnare il grafico di f.

iii) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corrrispondente a $(x_0 = -2, y_0 = 3)$ è: ... $z = -\frac{12}{5}x + \frac{9}{5}y - \frac{6}{5}$

iv) La derivata direzionale di f nel punto $(x_0 = -2, y_0 = 3)$ nella direzione del punto $P_1 = (-4, 1)$ vale .... $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,3) = \frac{3}{10}\sqrt{2}$

d) Considerate l'insieme

A pag. 5

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}.$$

i) Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}).

ii) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

e) Considerate l'equazione differenziale $\frac{1}{10}y''(x) + \frac{8}{5}y(x) = \frac{1}{2}\cos(4x)$.

Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = c_1 \operatorname{sen}(4x) + c_2\cos(4x)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: ... eq.^{ne} omog. associata $\frac{1}{10}y''(x) + \frac{8}{5}y(x) = 0$ eq.^{ne} caratt. $\frac{1}{10}t^2 + \frac{8}{5} = 0$ $t^2 = -16$

$t_{1,2} = \pm 4i$ $\alpha = 0$ $\beta = 4$

SOL.^{ni} FONDAM. $y_1(x) = \operatorname{sen}(4x)$ $y_2(x) = \cos(4x)$

La soluzione particolare va cercata nella forma $\bar{y}(x) = x \cdot (A\operatorname{sen}(4x) + B\cos(4x))$

perchè ... il 2° m. dell'eq.^{ne} è combinazione lineare di sen$(4x)$ e cos$(4x)$ $(M\operatorname{sen}(4x) + N\cos(4x)$ con $M = 0$ $N = \frac{1}{2})$ e si deve moltiplicare per x perchè le due soluzioni fondamentali dell'eq.^{ne} omogenea (y_1 e y_2) sono proprio $y_1(x) = \operatorname{sen}(4x)$ e $y_2(x) = \cos(4x)$.

(Non è richiesto di determinare la soluzione particolare).

f) (Sul foglio a quadretti) Sia f la funzione definita da $f(x,y) = \frac{1}{2}(y - 9 + x^2)y$ (è la stessa funzione considerata nell'esercizio n.1).

A pag. 6

i) Determinate il dominio di f.

ii) Determinate i punti in cui f vale 0 e il segno di f negli altri punti (illustrate i risultati con un disegno).

iii) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

1) (Sul foglio a quadretti, 8 PUNTI) Considerate la funzione dell'esercizio 0f):

A pag. 7-8

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(y - 9 + x^2)\,y\,.$$

Dopo averne giustificato l'esistenza, (utilizzando anche quanto ottenuto nell'esercizio n.0f) determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme (del quale è richiesto il disegno)

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y \le 5\}\,.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti, 8.5 PUNTI) Sia E l'insieme definito da $E = E_1 \cup E_2$ con

A pag. 9

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 16\,,\ y \ge 0\}$$

$$E_2 = \text{triangolo di vertici } (-4,0)\,,\ (4,0)\,,\ (-4,-4)\,.$$

a) Disegnate E.

b) Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme E come normale rispetto a x; ripetete come normale rispetto a y.

c) Calcolate l'integrale doppio

$$\int_E \frac{1}{16}\,|y|\,dxdy.$$

---

3) (Sul foglio a quadretti, 4.5 PUNTI) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

A pag. 10

$$\begin{cases} \frac{1}{4}y''(x) - \frac{2}{3}y'(x) = -2x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{16} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 4\,. \end{cases}$$

Risposta: ... $y(x) = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}e^{\frac{8}{3}x} + x^3 - \frac{1}{8}x^2$

SOLUZIONE

es0) a) $\vec{v}=4\vec{i}-\frac{15}{2}\vec{j}$ $\quad \|\vec{v}\|=\sqrt{16+\frac{225}{4}}=\sqrt{\frac{289}{4}}=\frac{17}{2}$

$\vec{N}_{or}=-\frac{15}{2}\vec{i}-4\vec{j}$ $\quad$ VERS $\vec{N}_{or}=-\frac{15}{17}\vec{i}-\frac{8}{17}\vec{j}$

$\vec{N}_{ant}=\frac{15}{2}\vec{i}+4\vec{j}$ $\quad$ VERS $\vec{N}_{ant}=\frac{15}{17}\vec{i}+\frac{8}{17}\vec{j}$

$m_{tan}=\frac{-\frac{15}{2}}{4}=-\frac{15}{8}$ $\quad m_{norm}=\frac{8}{15}$ $\quad r_{norm}: y=-3+\frac{8}{15}(x+4)$

$y=\frac{8}{15}x-\frac{13}{15}$

b) $P_0=(-4+\frac{9}{4}\sqrt{2},1+\frac{9}{4}\sqrt{2})\in\gamma$ per $t_0=\frac{7}{4}\pi$:

$\begin{cases}\cancel{-4}+\frac{9}{4}\sqrt{2}=\cancel{-4}+\frac{9}{2}\cos t\\ \cancel{1}+\frac{9}{4}\sqrt{2}=\cancel{1}-\frac{9}{2}\operatorname{sen} t\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\frac{9}{2}\cos t=\frac{9}{4}\sqrt{2}\\ \frac{9}{2}\operatorname{sen} t=-\frac{9}{4}\sqrt{2}\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \operatorname{sen} t=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ $\quad t_0=\frac{7}{4}\pi$

$\gamma'(t)=(-\frac{9}{2}\operatorname{sen} t,-\frac{9}{2}\cos t)$ $\quad \vec{v}_{P_0}=\gamma'(\frac{7}{4}\pi)=\frac{9}{4}\sqrt{2}\vec{i}-\frac{9}{4}\sqrt{2}\vec{j}$

velocità scalare in $P_0=\|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{(\frac{9}{4}\sqrt{2})^2+(-\frac{9}{4}\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{81}{8}+\frac{81}{8}}=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$

che coincide con il RAGGIO della circonferenza.

c) i) $\operatorname{dom} f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-2)^2+y^2\geq 0\}=\mathbb{R}^2$ perchè una somma di quadrati è sempre ≥ 0.

ii) eq.ne del grafico $z=-6+3\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ si tratta di un CONO CIRCOLARE di $V(2,0,-6)$, rivolto verso l'alto, di apertura $a=3>1$ quindi $0<\hat{ap}<45°$, $\hat{ap}=\arctan\frac{1}{3}$, $\cap\, z=0$ nella circonferenza

$\cancel{3}\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\cancel{6}^{\,2}$ $\quad (x-2)^2+y^2=4$ di $C(2,0)$ e $R=2$.

≥ 0 elevo $(\cdot)^2$

iii) $f(-2,3)=z_0=-6+3\sqrt{(-4)^2+3^2}=-6+3\sqrt{25}=-6+15=9$

$\nabla f(x,y)=\left(3\frac{\cancel{2}(x-2)}{\cancel{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}},3\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\right)=\left(\frac{3(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}},\frac{3y}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\right)$

$\nabla f(x_0,y_0)=(-\frac{12}{5},\frac{9}{5})=-\frac{12}{5}\vec{i}+\frac{9}{5}\vec{j}$

Eq.ne del PIANO TANGENTE $z=9-\frac{12}{5}(x+2)+\frac{9}{5}(y-3)$

$z=-\frac{12}{5}x+\frac{9}{5}y-\frac{6}{5}$

$9-\frac{24}{5}-\frac{27}{5}$
$\shortparallel$
$9-\frac{51}{5}=-\frac{6}{5}$

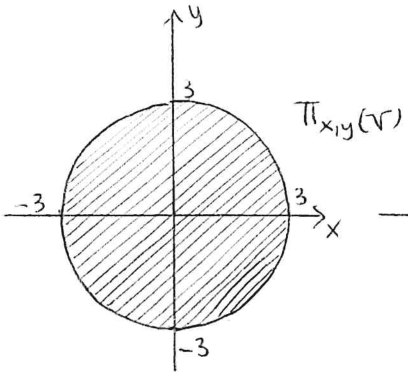
iv) $\vec{v} = \dfrac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|} = \dfrac{-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}}{\sqrt{8}} \underset{\sqrt{8} = 2\sqrt{2}}{=} -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$

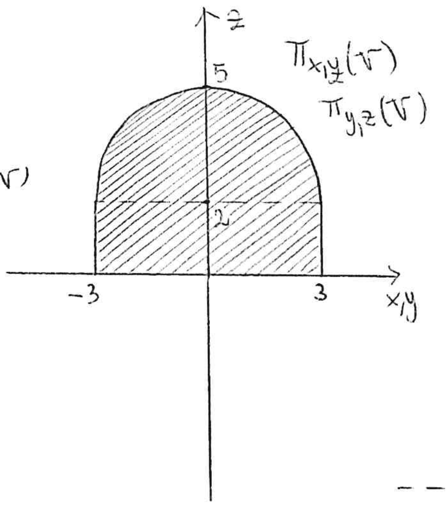
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{v} = \left(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\right) =$$

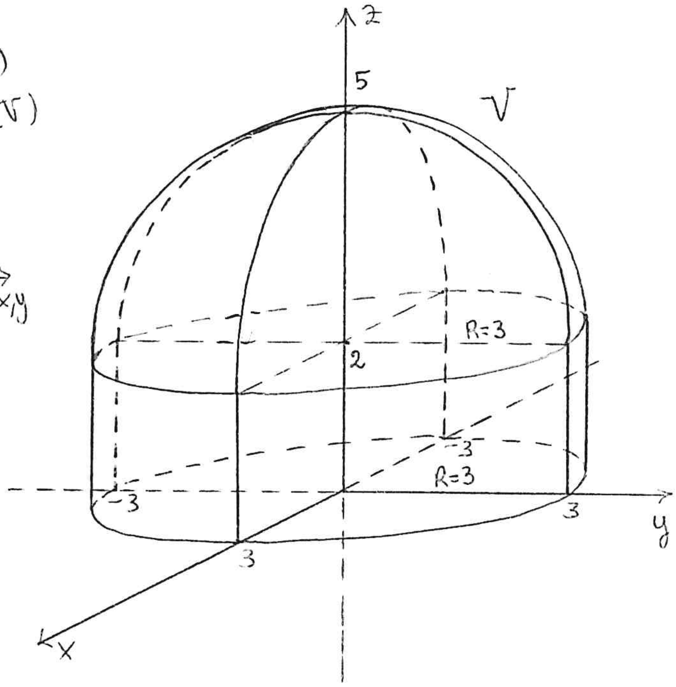
$$= \frac{6}{5}\sqrt{2} - \frac{9}{10}\sqrt{2} = \frac{12}{10}\sqrt{2} - \frac{9}{10}\sqrt{2} = \frac{3}{10}\sqrt{2}.$$

d) i) $z = 2 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ è la metà superiore della SUPERFICIE SFERICA di $C(0,0,2)$ e $R=3$, $z_{max} = z_C + R = 2 + 3 = 5$.

V è la regione dello spazio compresa tra il piano (x,y) $(z=0)$ e la superficie sferica; risulta pertanto composto da un CILINDRO di base CERCHIO $R=3$ e $h=2$ (per $0 \le z \le 2$) e METÀ SFERA di $C(0,0,2)$ e $R=3$ (per $2 \le z \le 5$)







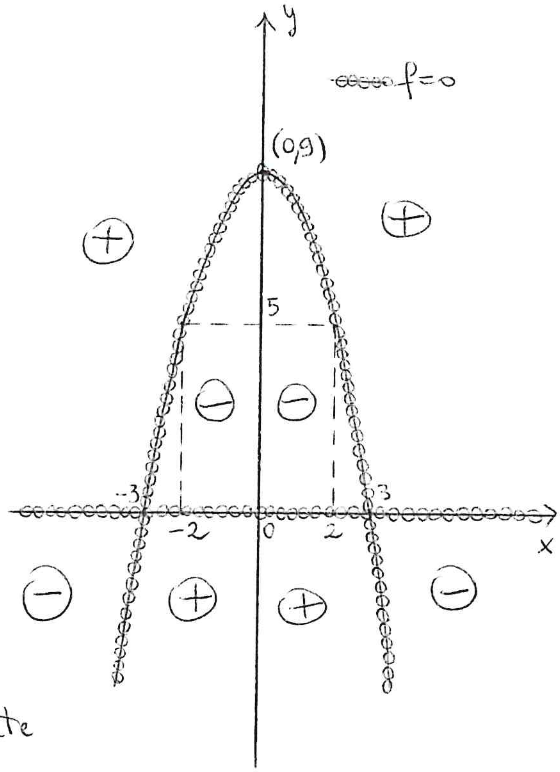
ii) Volume di $V = \displaystyle\int_{\Pi_{x,y}(V)} \left(2 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right) dx\,dy = \int_{x^2+y^2 \le 9} \left(2 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right) dx\,dy \underset{\text{polari}}{\overset{\text{Coordinate}}{=}}$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \left(2 + \sqrt{9 - \rho^2}\right) \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \left(2\rho + \rho\sqrt{9 - \rho^2}\right) d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 - \frac{1}{2} \frac{(9 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^3 d\theta = \left[\theta\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\rho^2 - \frac{1}{3}(9 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^3 =$$

$$= 2\pi \left(9 - 0 - \left(0 - \frac{1}{3} 9^{3/2}\right)\right) = 2\pi \left(9 + \frac{1}{3} \cdot 27 \right) = 2\pi \cdot 18 = \boxed{36\pi}$$

f) i) dom $f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)



ii) $f(x,y) = \frac{1}{2}(y-9+x^2)\,y$

$f(x,y) = 0 \iff y = -x^2+9$ o $y=0$

$\downarrow$ parabola di $V(0,9)$ verso il basso $\cap\, y=0 \quad x=\pm 3$

asse x

$f(x,y)>0 \iff \begin{cases} y > -x^2+9 \\ y>0 \end{cases}$ o $\begin{cases} y<-x^2+9 \\ y<0 \end{cases}$

sopra la parabola 1°/2° quadrante — sotto la parabola 3°/4° quadrante

iii) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot y,\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}(y-9+x^2)\right)$

$= \left(xy,\ y-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}x^2\right)$

P.ti STAZIONARI $\begin{cases} xy=0 \\ y-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}x^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \text{ o } y=0 \\ \dots \end{cases}$

se $x=0$ nella 2ª eq.ne otteniamo $y = 9/2$ $\quad P_0 = (0, 9/2)$

se $y=0$ nella 2ª eq.ne otteniamo $\frac{x^2}{2} = \frac{9}{2}$ $\quad x^2 = 9 \quad x=\pm 3$ $\quad P_1 = (3,0)$ $\quad P_2 = (-3,0)$.

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Hf(0,\frac{9}{2}) = \begin{pmatrix} 9/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det Hf(0,\frac{9}{2}) = \frac{9}{2} > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è MINIMO LOCALE

$Hf(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\det Hf(3,0) = -9 < 0$

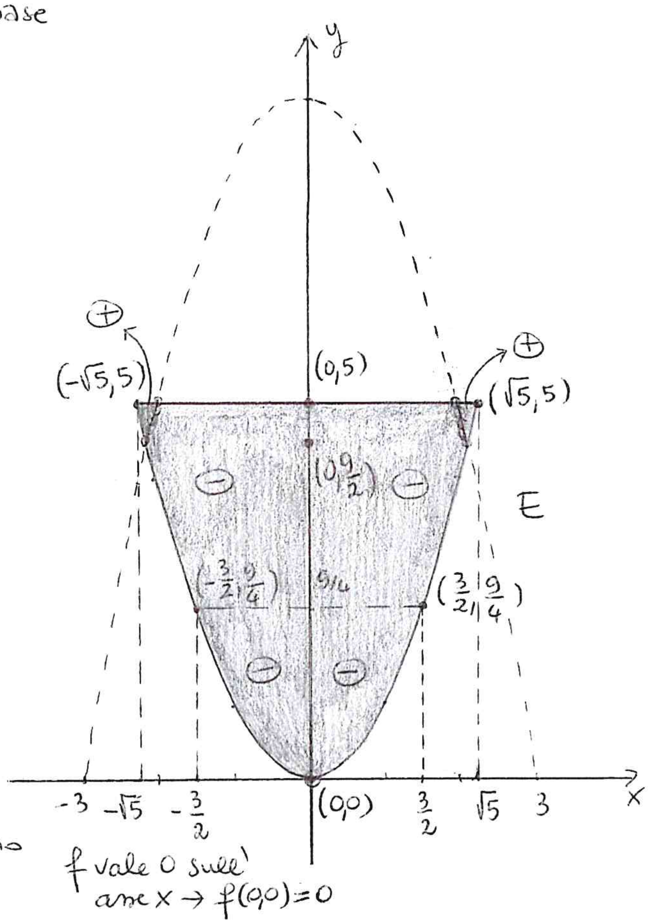
$Hf(-3,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-3,0) = -9 < 0$

P_1 e P_2 sono PUNTI di SELLA.

ES.1) <u>1° passo</u> E è la REGIONE compresa tra la parabola $y=x^2$ e la retta orizzontale $y=5$. La parabola è quella di base con $V(0,0)$, verso l'alto, $x=\pm 1 \to y=1$

$x=\pm 2 \to y=4$.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=5 \\ y=5 \end{cases} \quad (\pm\sqrt{5},5)$$



E è CHIUSO in quanto contiene tutti i punti del suo bordo (costituito dalla parabola $y=x^2$ per $-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}$ e dalla retta $y=5$ per $-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}$).

E è LIMITATO perchè $E\subset B_6(0,0)$: infatti i due punti di E più distanti dall'origine $(0,0)$ sono $(\pm\sqrt{5},5)$ che distano da $(0,0)$ $\sqrt{(\pm\sqrt{5})^2+5^2}=\sqrt{30}\approx 5{,}48$.

f è continua su $\mathbb{R}^2$, e quindi anche su E in quanto è un polinomio di 3° grado in x e y $\left(f(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{9}{2}y+\frac{1}{2}x^2y\right)$.

Allora vale il Teorema di Weierstrass che ci garantisce l'esistenza del MASSIMO e del MINIMO ASSOLUTI di f su E.

<u>2° passo</u>: c'è un punto di MINIMO LOCALE $(0,\frac{9}{2})$ interno ad E in cui

$$f(0,\tfrac{9}{2})=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-9+0\right)\frac{9}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}\right)\frac{9}{2}=-\frac{81}{8}=-10{,}125 .$$

<u>3° passo</u>: studio del bordo di E

1° tratto γ_1 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$ $t\in[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$ $\quad g_1(t)=f(t,t^2)=\frac{1}{2}(t^2-9+t^2)t^2=t^4-\frac{9}{2}t^2$

$g_1'(t)=4t^3-9t \qquad g_1'(t)=0 \iff t(4t^2-9)=0$

$\iff t=0 \;\underline{o}\; t^2=\frac{9}{4} \iff t=-\frac{3}{2} \;\underline{o}\; t=0 \;\underline{o}\; t=\frac{3}{2}$

<u>TEMPI</u> $t=-\sqrt{5}$ $\quad t=-\frac{3}{2}$ $\quad t=0$ $\quad t=\frac{3}{2}$ $\quad t=\sqrt{5}$

<u>PUNTI</u> $(-\sqrt{5},5)$ $\quad (-\frac{3}{2},\frac{9}{4})$ $\quad (0,0)$ $\quad (\frac{3}{2},\frac{9}{4})$ $\quad (\sqrt{5},5)$

<u>VALORI</u> $f(\pm\sqrt{5},5) = \frac{1}{2}(5-9+5)\cdot 5 = \frac{5}{2}$

$f(0,0) = 0$

$f(\pm\frac{3}{2},\frac{9}{4}) = \frac{1}{2}(\frac{9}{4}-9+\frac{9}{4})\frac{9}{4} = \frac{1}{2}(-\frac{9}{2})\frac{9}{4} = -\frac{81}{16} = -5{,}0625$

2° tratto $\gamma_2 \begin{cases} x = t \\ y = 5 \end{cases}$ $t \in [-\sqrt{5},\sqrt{5}]$ $g_2(t) = f(t,5) = \frac{1}{2}(5-9+t^2)5 =$

$= \frac{5}{2}t^2 - 10$

$g_2'(t) = 5t$ $g_2'(t) = 0 \iff t = 0$

<u>TEMPI</u> $t = -\sqrt{5}$ $t = 0$ $t = \sqrt{5}$ <u>PUNTI</u> $(-\sqrt{5},5)$ $(0,5)$ $(+\sqrt{5},5)$

<u>VALORI</u> $f(\pm\sqrt{5},5) = \frac{5}{2}$ $f(0,5) = \frac{1}{2}(5-9+0)\cdot 5 = -10$

<u>Conclusione</u>: in $P_0 = (0,\frac{9}{2})$ $f(0,\frac{9}{2}) = -10{,}125$, sul bordo f è compresa tra -10 e $\frac{5}{2}$, allora

$$\boxed{\min_E f(x,y) = -\frac{81}{8} = f(0,\tfrac{9}{2})} \quad \boxed{\max_E f(x,y) = \frac{5}{2} = f(\pm\sqrt{5},5)}.$$

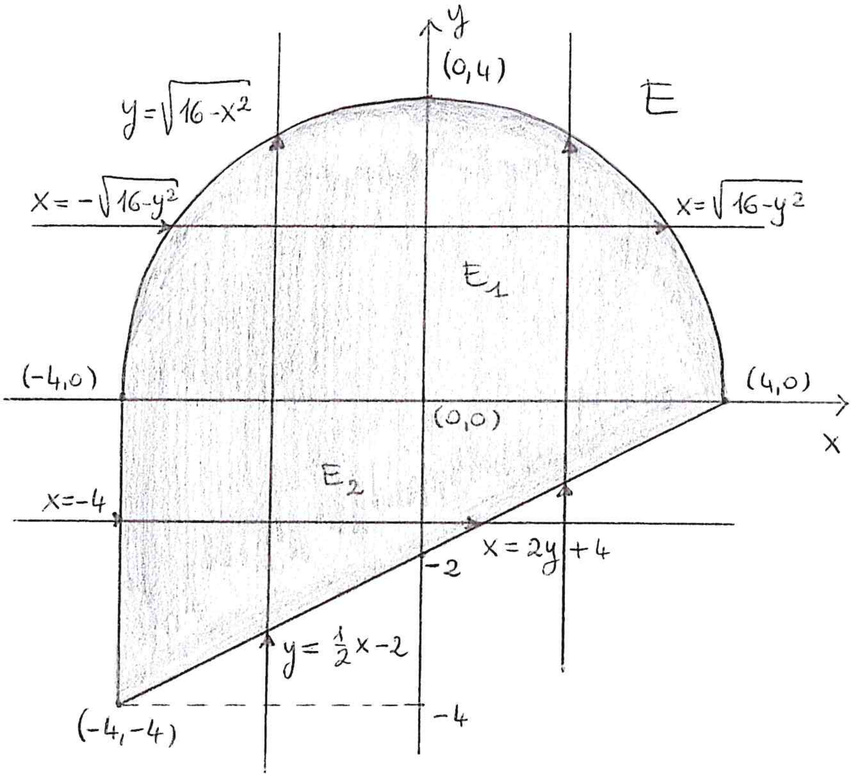
ES. 2) a) E_1 è la metà del CERCHIO CHIUSO (interno + bordo) di $C(0,0)$ e $R=4$ avente $y \geq 0$ (quindi 1°-2° quadrante).

E_2 è un triangolo

La retta per $(-4,-4)$ e $(4,0)$ ha eq.ne

$m = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad y = 0 + \frac{1}{2}(x-4)$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - 2}$$



b) $E_x = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 4, \; \frac{1}{2}x - 2 \leq y \leq \sqrt{16-x^2} \right\}$

$E_{1,y} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \; -\sqrt{16-y^2} \leq x \leq \sqrt{16-y^2} \right\}$

$E_{2,y} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq y \leq 0, \; -4 \leq x \leq 2y+4 \right\}$

c) Poiché nell'integrale compare $|y|$ dobbiamo comunque spezzare $\int_E = \int_{E_1} + \int_{E_2}$ poiché su E_1 si ha $|y| = y \geq 0$, mentre su E_2 $|y| = -y$ $(y \leq 0)$.

$E_{1,x} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 4, \; 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2} \right\}$

Usando E_x su E_1 ed E_y su E_2 otteniamo:

$$\int_E \frac{1}{16}|y| \, dx dy = \int_{E_1} \frac{1}{16} y \, dx dy + \int_{E_2} -\frac{1}{16} y \, dx dy = \int_{-4}^{4} \left(\int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{1}{16} y \, dy \right) dx + \int_{-4}^{0} \left(-\frac{1}{16} y \int_{-4}^{2y+4} dx \right) dy =$$

$$= \frac{1}{16} \int_{-4}^{4} \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{16-x^2}} \right) dx - \frac{1}{16} \int_{-4}^{0} y(2y+4+4) \, dy =$$

$$= \frac{1}{32} \int_{-4}^{4} (16-x^2) \, dx - \frac{1}{16} \int_{-4}^{0} (2y^2 + 8y) \, dy =$$

$$= \frac{1}{32} \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^{4} - \frac{1}{16} \left[2\frac{y^3}{3} + 4y^2 \right]_{-4}^{0} = \frac{1}{32} \left(64 - \frac{64}{3} - \left(-64 + \frac{64}{3} \right) \right)$$

$$- \frac{1}{16} \left(0 - \left(-\frac{128}{3} + 64 \right) \right) = \frac{1}{32} \left(128 - \frac{128}{3} \right) - \frac{1}{\cancel{16}_{1}} \left(-\frac{\cancel{64}^{4}}{3} \right) = \frac{1}{\cancel{32}_{\cancel{2}\,1}} \left(\frac{\cancel{256}^{\cancel{16}\,8}}{3} \right) + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{4}$$

ES3) Eq.^{ne} omogenea associata $\frac{1}{4}y''(x) - \frac{2}{3}y'(x) = 0$

eq.^{ne} caratteristica $\frac{1}{4}t^2 - \frac{2}{3}t = 0 \quad t\left(\frac{1}{4}t - \frac{2}{3}\right) = 0 \quad t_1 = 0, \; t_2 = \frac{8}{3}$

Sol.^{ni} Fondamentali $y_1(x) = 1 \quad y_2(x) = e^{\frac{8}{3}x}$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} omogenea: $y(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{8}{3}x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x) = x(Ax^2 + Bx + C)$ perchè il 2°m dell'eq.^{ne} è un polinomio di 2° grado $\left(f(x) = -2x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{16}\right)$ e dobbiamo moltiplicare per x perchè nell'eq.^{ne} non compare $y(x)$, ma compare $y'(x)$.

$\bar{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx \quad \bar{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \; \bar{y}''(x) = 6Ax + 2B$

Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo:

$$\frac{1}{4}(6Ax + 2B) - \frac{2}{3}(3Ax^2 + 2Bx + C) = -2x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{16} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-2Ax^2 + \left(\frac{3}{2}A - \frac{4}{3}B\right)x + \frac{1}{2}B - \frac{2}{3}C = -2x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{16} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poichè due polinomi, dello stesso grado, sono $= \forall x \in \mathbb{R} \iff$ hanno gli stessi coefficienti (PRINCIPIO di IDENTITÀ dei POLINOMI) otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -2A = -2 \\ \frac{3}{2}A - \frac{4}{3}B = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2}B - \frac{2}{3}C = -\frac{1}{16} \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ \frac{4}{3}B = \frac{3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{9-10}{6} = -\frac{1}{6} \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{6_2} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{8} \\ -\cancel{\frac{1}{16}} - \frac{2}{3}C = -\cancel{\frac{1}{16}} \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{8} \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{y}(x) = x^3 - \frac{1}{8}x^2}$$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne}: $y(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{8}{3}x} + x^3 - \frac{1}{8}x^2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Pb. di Cauchy: $y'(x) = \frac{8}{3}c_2 e^{8/3 x} + 3x^2 - \frac{1}{4}x$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = -1 \\ y'(0) = \frac{8}{3}c_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -c_2 - 1 \\ c_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2} \\ c_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{5}{2} \\ c_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

UNICA SOL.^{ne}

$$\boxed{y(x) = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}e^{\frac{8}{3}x} + x^3 - \frac{1}{8}x^2}$$