Cognome	______________	Non scrivere qui
Nome	______________	1 2 3 4 5
Matricola	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2021-2022 — Parma, 16 Febbraio 2022

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x,y) = x^2y^3z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

determinate il versore v di $\mathbb{R}^3$ che rende massima la derivata direzionale $\partial_v f(-1,1,1)$.

Soluzione. Essendo un polinomio, la funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$ e le sue derivate parziali sono

$$f_x(x,y,z) = 2xy^3z; \qquad f_y(x,y,z) = 3x^2y^2z; \qquad f_z(x,y,z) = x^2y^3;$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Il gradiente di f in $(-1,1,1)$ è quindi dato da $\nabla f(-1,1,1) = (-2,3,1)$ e dunque, essendo non nullo, il versore v che rende massima la derivata direzionale $\partial_v f(-1,1,1)$ è

$$v = \frac{\nabla f(-1,1)}{\|\nabla f(-1,1)\|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

cui corrisponde la derivata direzionale $\partial_v f(-1,1,1) = \|\nabla f(-1,1)\| = \sqrt{14}$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2)$ definite da

$$f_1(x,y) = 2x(y^2+y) \qquad \text{e} \qquad f_2(x,y) = 2x^2y + a(x)$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $a \in C^1(\mathbb{R})$ funzione da determinare.

(a) Determinate tutte le funzioni $a \in C^1(\mathbb{R})$ che rendono il campo f conservativo e per tali funzioni determinate i potenziali di f.

(b) Data la curva parametrica di equazione polare $r(\theta) = 4\theta$ per $0 \le \theta \le \pi/4$, determinate $a \in C^1(\mathbb{R})$ in modo che sia

$$\int_\gamma f \cdot dl = \frac{\pi^4}{4}.$$

Soluzione. Essendo $\mathbb{R}^2$ stellato e f di classe C^1, il campo vettoriale f risulta conservativo se e solo se è irrotazionale ovvero se risulta $f_y(x,y) = 4xy + 2x = 4xy + a'(x) = f_x(x,y,z)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ da cui segue $a'(x) = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ovvero $a(x) = x^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$, con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria cui corrispondono i potenziali

$$F(x,y) = \int_0^x f^1(t,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t)\,dt = x^2y^2 + (x^2+c)y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Infine, la curva γ si scrive in forma cartesiana come $\gamma(\theta) = (4\theta\cos\theta)e_1 + (4\theta\operatorname{sen}\theta)e_2$ per $0 \le \theta \le 4$ con estremi $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(\pi/4) = (\pi/\sqrt{2}, \pi/\sqrt{2})$ e quindi si ha

$$\int_\gamma f \cdot dl = F(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) - F(0,0) = \frac{\pi^2}{2} + \left(\frac{\pi^2}{2} + c\right)\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi^4}{4}$$

per $c = -\pi^2/2$.

Esercizio 3. Sia
$$f(x,y,z) = \frac{y^3}{3} + x^2 z - \frac{y^2 z}{2} - x - \frac{z}{4}.$$

(a) Trovate i punti critici di f e studiatene la loro natura.

(b) Calcolate il massimo globale di f sul triangolo compatto T di vertici $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y) = 2xz - 1; \qquad f_y(x,y) = y^2 - yz; \qquad f_z(x,y) = x^2 - y^2/2 - 1/4$$
per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni
$$\begin{cases} 2xz = 1 \\ y(y-z) = 0 \\ x^2 - y^2/2 = 1/4. \end{cases}$$
Dalla seconda equazione si deduce che deve essere $y = 0$ oppure $y = z$. Per $y = 0$, dalle restanti equazioni si ottiene $x = \pm 1/2$ e $z = \pm 1$ mentre per $y = z$ si trova $z = y = 1/2x$ e $x^2 - 1/8x^2 - 1 = 0$ da cui segue $x == y = z = \pm 1/\sqrt{2}$. Pertanto, i punti critici di f sono i quattro punti di coordinate
$$P_\pm = (\pm 1/2, 0, \pm 1) \qquad \text{e} \qquad Q_\pm = (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}).$$
La matrice hessiana di f è
$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 2y - z & -y \\ 2x & -y & 0 \end{pmatrix}$$
per ogni $(x,-y,-z)$ e poiché f dispari, è sufficiente studiare la natura dei punti critici P_+ e Q_+. Per il criterio di Sylvester risulta
$$D^2 f(P_+) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = -2 \text{ e } \Delta_3 = 1 \implies \text{punto di sella;}$$
$$D^2 f(Q_+) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \\ \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \implies \Delta_1 = \sqrt{2},\ \Delta_2 = 1 \text{ e } \Delta_3 = -\sqrt{2} \implies \text{punto di sella;}$$
e quindi lo stesso vale per P_- e Q_-.

(b) Poiché il triangolo T giace nel piano $z = 1$, ci riduciamo a calcolare il massimo globale di
$$g(x,y) = f(x,y,1) = y^3/3 + x^2 - y^2/2 - x - 1/4, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
sul triangolo compatto di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ che denotiamo ancora con T. Tale massimo globale esiste per il teorema di Weierstrass. Poiché si verifica facilmente che i punti critici di g non sono punti interni del triangolo T, i punti di massimo globale di g su T devono essere assunti sul bordo di T che è dato dall'unione dei sostegni delle tre curve lisce $\gamma_1(t) = te_1$, $\gamma_2(t) = (1-t)e_1 + te_2$ e $\gamma_3(t) = (1-t)e_2$ per $t \in [0,1]$. Si ha quindi
$$g_1(t) = g(\gamma_1(t)) = t^2 - t - 1/4;\ g_2(t) = g(\gamma_2(t)) = t^3/3 + t^2/2 - t - 1/4;\ g_3(t) = g(\gamma_3(t)) = -t^3/3 + 5t/3 - 1/4;$$
per $t \in [0,1]$. Esaminando il segno delle derivate, si conclude che g_1 è decrescente in $[0,1/2]$ e crescente in $[1/2,1]$, che g_2 è decrescente in $[0,t^*]$ e crescente in $[t^*,1]$ con $t^* = (\sqrt{5}-1)/2$ e infine che g_3 è decrescente in tutto l'intervallo $[0,1]$. Conseguentemente, il massimo globale di g su T deve essere assunto in uno tra i due punti di coordinate $(0,0)$ e $(1,0)$ e da $g(0,0) = g(1,0) = -1/4$ si conclude quindi che entrambi i punti sono punti di massimo globale di g su T.

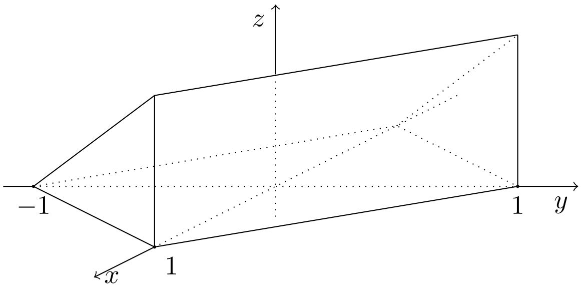
Esercizio 4. Sia

$$K = \{(x\,,y\,,z) : \; 0 \le z \le 1 + x + y \text{ e } |x| + |y| \le 1\}\,.$$

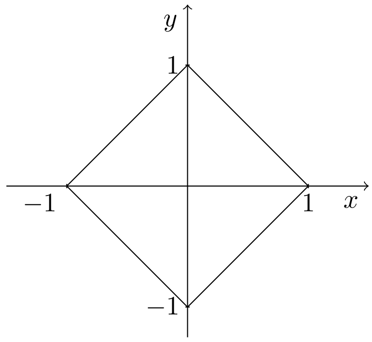
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K |x|y\, d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è la porzione del poliedro $0 \le x\,,y\,,z \le 1$ compresa tra i piani $z = 0$ e $x + y - z = -1$. Esso è rappresentato in Figura (1) (asse z non in scala).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è chiuso in quanto intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni lineari ed è limitato poiché si ha $-1 \le x\,,y \le 1$ e $0 \le z \le 2$. Pertanto K è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione

$$f(x\,,y\,,z) = |x|y, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. Poiché per la disuguaglianza triangolare risulta

$$|x| + |y| \le 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x + y \ge -|x| - |y| \ge -1,$$

la proiezione di K sul piano xy è il quadrato (ruotato)

$$\pi_{xy}(K) = \big\{(x\,,y) : \; 0 \le |x| + |y| \le 1\big\}\,,$$

di centro nell'origine e lati di lunghezza $\sqrt{2}$ rappresentato in Figura (2) e le corrispondenti sezioni sono gli intervalli

$$K_{(x,y)} = [0, 1 + x + y], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_0^{1+x+y} |x|y\, dz \right) d(x\,,y) = \int_{\pi_{xy}(K)} |x|y\,\big[(x+1) + y\big]\; d(x\,,y)$$

e per la stessa formula nel piano risulta poi per evidenti motivi di simmetria

$$\begin{aligned}\int_{\pi_{xy}(K)} \big[|x|(x+1)y + |x|y^2\big]\; d(x\,,y) &= 4\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy^2\, dy \right) dx = \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 x(1-x)^3\, dy = \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 \left(x - 3x^2 + 3x^3 - x^4\right)\, dy = \ldots = \frac{1}{15}.\end{aligned}$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) + 4x(t) = 2\tan t, \qquad |t| < \pi/2,$$

determinate

(a) tutte le soluzioni dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione del problema di Cauchy con $x(0) = 0$ e $x'(0) = -1$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono $\lambda_\pm = \pm 2i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \cos(2t); \qquad x_2(t) = \operatorname{sen}(2t);$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Per determinare una soluzione dell'equazione completa procediamo con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione $x_p(t)$ della forma

$$x_p(t) = c_1(t) \cos(2t) + c_2(t) t \operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $c_1(t)$ e $c_2(t)$ funzioni da determinare in modo che risulti

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos(2t) + c_2'(t) \operatorname{sen}(2t) = 0 \\ -2c_1'(t) \operatorname{sen}(2t) + 2c_2'(t) \cos(2t) = 2\tan t \end{cases}$$

per $|t| < \pi/2$. Il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\operatorname{sen}(2t) \tan t \\ c_2'(t) = \cos(2t) \tan t \end{cases} \iff \begin{cases} c_1'(t) = -2\operatorname{sen}^2 t \\ c_2'(t) = \operatorname{sen}(2t) - \tan t \end{cases}$$

con $|t| < \pi/2$ da cui segue

$$c_1(t) = -2 \int \operatorname{sen}^2 t \, dt = \frac{1}{2}\big(\cos t \operatorname{sen} t - t\big) \quad \text{e} \quad c_2(t) = \int \big(\operatorname{sen}(2t) - \tan t\big)\, dt = \operatorname{sen}^2 t + \log(\cos t)$$

per gli stessi t a meno di inessenziali costanti additive. Risulta così

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\big(\cos t \operatorname{sen} t - t\big) \cos(2t) + \big(\operatorname{sen}^2 t + \log(\cos t)\big) \operatorname{sen}(2t), \qquad |t| < \pi/2,$$

e quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = \frac{1}{2}\big(\cos t \operatorname{sen} t - t + C_1\big) \cos(2t) + \big(\operatorname{sen}^2 t + \log(\cos t) + C_2\big) \operatorname{sen}(2t), \qquad |t| < \pi/2,$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Imponendo che sia $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$, con facili calcoli si trova $C_1 = C_2 = 0$ cosicché la soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{1}{2}\big(\cos t \operatorname{sen} t - t\big) \cos(2t) + \big(\operatorname{sen}^2 t + \log(\cos t)\big) \operatorname{sen}(2t), \qquad |t| < \pi/2.$$