COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 2 3 4
MATRICOLA _ _ _ _ _ _ _	
CORSO AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL	

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2018-2019 — PARMA, 11 FEBBRAIO 2019

AN2 - 11/2/19 - 1 -

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore e mezza**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

0) **PARTE PRELIMINARE** Completate:

a) Sia $\gamma : [-2, \frac{7}{2}] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da

Calcoli e DISEGNO a pag. 4

$$\begin{cases} x(t) = -2(-1-t) \\ y(t) = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{10}{3} \end{cases} \quad t \in [-2, \frac{7}{2}].$$

La curva percorre ..la PARABOLA..... di equazione ... $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x$

avente le seguenti caratteristiche ... $V(6,6)$, verso il basso, $\cap$ asse x $(0,0)$ $(12,0)$

dal punto iniziale $(-2, -\frac{14}{3})$ al punto finale .$(9, \frac{9}{2})$

nel verso .delle x crescenti

Il vettore tangente nel punto $P_0 = (3, \frac{9}{2})$ è ..$\vec{v}_{P_0} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

La retta tangente in P_0 ha equazione: ...$y = x + \frac{3}{2}$

I **versori** normali in P_0 sono: ...$\text{VERS}\vec{N}_{or} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ $\quad \text{VERS}\vec{N}_{ant} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$

Disegnate con precisione sul foglio a quadretti il sostegno di γ e il vettore tangente in P_0.

b) La **lunghezza** della curva $\gamma : [1, 7] \to \mathbb{R}^3$ definita da

Svolgimento a pag. 5

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^{3/2} \\ y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ z(t) = \frac{1}{3}t^{3/2} \end{cases} \qquad t \in [1, 7] \qquad \text{vale..} L = \frac{28}{3}$$

c) Considerate la funzione $f(x,y) = 6 - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4}$. Svolgim. a pag. 5-6

i) Determinate il dominio di f , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f , spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura); FACOLTATIVO disegnate con cura il grafico di f .

iii) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corrrispondente a $(x_0 = 2,\ y_0 = -3)$ è ... $z = -\frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y + \frac{14}{5}$

iv) La retta per P_0 perpendicolare al grafico della funzione f ha equazione ... $r_\perp \begin{cases} x = 2 + \frac{8}{5}t \\ y = -3 - \frac{6}{5}t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -4 + t \end{cases}$

d) Considerate l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 36,\ y \le 0\}$ (disegnate l'insieme sul foglio a quadretti). A pag. 6

Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme E come normale rispetto a y :

$E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -6 \le y \le 0,\ -\sqrt{36 - y^2} \le x \le \sqrt{36 - y^2}\}$

e) Sia T il triangolo di vertici $(-4,0)$, $(4,0)$ e $(0,2)$ (disegnate l'insieme sul foglio a quadretti).

Svolgim. a pag 6-7

L'integrale doppio

$$\int_T y^2\, dxdy \qquad \text{vale} \ldots \boxed{\frac{16}{3}}$$

Eq.ne omog. 1° ordine

f) Le soluzioni dell'equazione differenziale $2y'(x) - 8y(x) = 0$ sono: ... $y(x) = ce^{4x}$ $(c \in \mathbb{R})$

eq.ne caratteristica $2t - 8 = 0$ $t = 4$ sol.ne FONDAM $y = e^{4x}$

Si consideri l'equazione differenziale $\frac{3}{2}y''(x) - 6y'(x) + 6y(x) = 3\cos(2x)$.

eq.ne omog. associata $\frac{3}{2}y''(x) - 6y'(x) + 6y(x) = 0$

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono ... $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

eq.ne caratt. $\frac{3}{2}t^2 - 6t + 6 = 0$ $\cdot\frac{2}{3}$ $t^2 - 4t + 4 = 0$ $(t-2)^2 = 0$ $t_1 = 2$ con

Calcoli: ... moltepl 2 SOL.ni FONDAM $y_1(x) = e^{2x}$ $y_2(x) = x \cdot e^{2x}$ (*)

La soluzione particolare va cercata nella forma ... $\bar{y}(x) = A\,\mathrm{sen}(2x) + B\cos(2x)$

il 2° m dell'eq.ne $(f(x) = 3\cos(2x))$

perchè .. è una combinazione lineare di sen(2x) e cos(2x) e non si deve moltiplicare per x perchè le due soluzioni fondamentali (*) sono diverse da sen(2x) e cos(2x).

1) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione

A pag. 7-8-9

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(9 - x^2 - y^2)(x+3).$$

a) Determinate il dominio di f, i punti in cui f vale 0 e il segno di f negli altri punti (illustrate i risultati con un disegno).

b) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

c) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -3 \le x \le 2, \, -3 \le y \le 3\}.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $g(x,y) = 5 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2$.

A pag. 10-11

a) Determinate il dominio di g, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g, spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 5 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2, \, x^2 + y^2 \le 9, \, x \le 0\}.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

A pag 11-12

$$\begin{cases} \frac{1}{4}y''(x) - \frac{2}{3}y'(x) = -4x^2 + \frac{31}{9}x \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Risposta: ... $y(x) = -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}e^{8/3x} + 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$

SOLUZIONE

es.0) a) $P_{in} \underset{t=-2}{=} \left(-2, -\frac{14}{3}\right)$

$x(t) = 2 + 2t$

$$-\frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{8}{3}(-2) + \frac{10}{3} = -\frac{8}{3} - \frac{16}{3} + \frac{10}{3} = -\frac{14}{3}$$

$P_{fin} \underset{t=\frac{7}{2}}{=} (9, 9/2)$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{49}{4} + \frac{8}{3}\cdot\frac{7}{2} + \frac{10}{3} = -\frac{49}{6} + \frac{28}{3} + \frac{10}{3} = -\frac{49}{6} + \frac{76}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

eq.^{ne} $2t = x - 2$ $\quad t = \frac{1}{2}x - 1$

$$y = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + \frac{10}{3} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right) + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + \frac{10}{3}$$

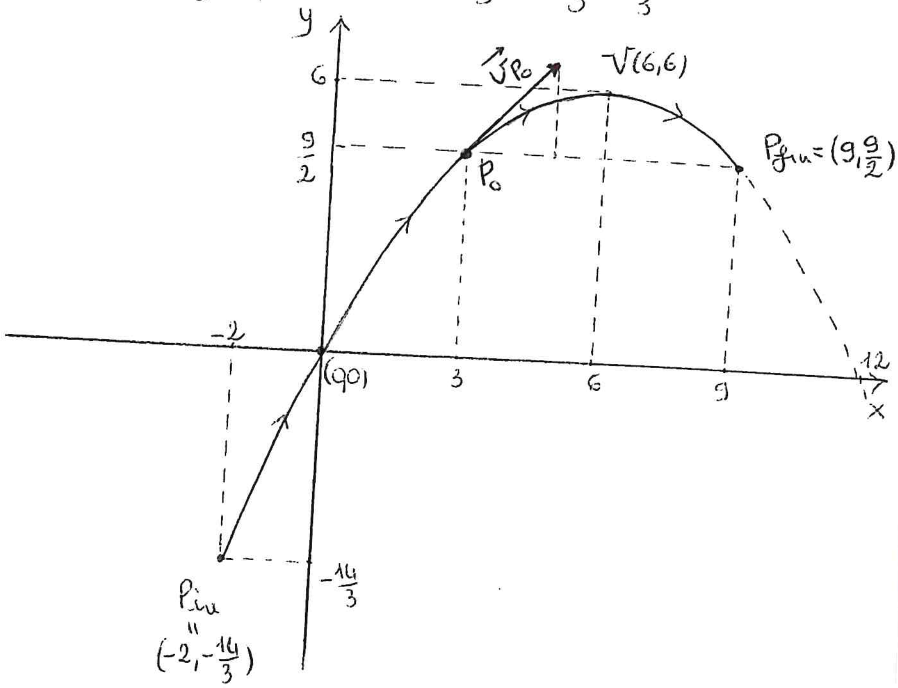
$$y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x$$

$V(x_v = 6, y_v = 6) = (6,6)$

$y' = -\frac{1}{3}x + 2 = 0 \quad x = 6$

$y_v = -\frac{1}{6}\cdot 36 + 2\cdot 6 = -6 + 12 = 6$

$\cap$ asse x $\quad x = 0 \quad x = 12$



$P_0 = \left(3, \frac{9}{2}\right)$ corrisponde a $t_0 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} 3 = 2 + 2t \\ \frac{9}{2} = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{10}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 2t = 1 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{8}{3}\frac{1}{2} + \frac{10}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{14}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{28}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ ok}$$

$\gamma'(t) = \left(2, -\frac{4}{3}t + \frac{8}{3}\right) \quad \vec{v}_{P_0} = \gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

$\|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$m_{tau} = 1 \quad r_{tau}: y = \frac{9}{2} + (x - 3) \quad y = x + \frac{3}{2}$

$\vec{N}_{or} = 2\vec{i} - 2\vec{j} \quad \vec{N}_{ant} = -2\vec{i} + 2\vec{j} \quad$ VERS $\vec{N}_{or} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

VERS $\vec{N}_{ant} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

b) $\gamma'(t) = \left(\underset{x'(t)}{-\frac{1}{2}t^{1/2}}, \underset{y'(t)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \underset{z'(t)}{\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{t}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{t}\right)$

γ è definita sull'intervallo CHIUSO e LIMITATO $[1,7]=[a,b]$, è continua ($x(t), y(t), z(t)$ sono continue) ed è di classe C^1 ($x'(t), y'(t), z'(t)$ sono continue). Allora $L(\gamma)<+\infty$ e si calcola nel seguente modo

$$L(\gamma) = \int_1^7 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_1^7 \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t}\,dt = 2\int_1^7 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)^{1/2} dt =$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{t}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}t} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t}$$

$$= 2\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)^{3/2}}{3/2}\right]_1^7 = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)^{3/2}\right]_1^7 = \frac{4}{3}\left(4^{3/2}-1^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\left(2^3-1\right) = \frac{4}{3}\cdot 7 = \boxed{\frac{28}{3}}$$

$\downarrow$

$\int f'(t)\,(f(t))^{1/2}\,dt = \frac{(f(t))^{3/2}}{3/2}+c$

c) i) $\mathrm{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2+4x+4 \geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+2)^2+y^2 \geq 0\}$

$=\mathbb{R}^2$ in quanto si tratta della somma di due quadrati che risulta sempre ≥ 0.

ii) eq.^{ne} del grafico di f: $z = 6-2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$. Si tratta del CONO CIRCOLARE di $V(-2,0,6)$, rivolto verso il basso, $a=2$

$(a>1 \rightarrow 0<\hat{ap}<45°)$, $\hat{ap} \simeq 26{,}6°$, $\boxed{\cap\, z=0}$ se $2\sqrt{} = 6 \iff$

$\iff \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 3>0 \overset{\text{elevo } (\,)^2}{\iff} (x+2)^2+y^2=9$ circonf. di $C(-2,0)$ e $R=3$.

Disegno del grafico a pag. 6

iii) $z_0 = f(2,-3) = 6-2\sqrt{4^2+(-3)^2} = 6-2\sqrt{25} = 6-10 = -4$

$$\nabla f(x,y) = \left(-\cancel{2}\frac{2x+4}{\cancel{2}\sqrt{(x+2)^2+y^2}}, -\cancel{2}\frac{2y}{\cancel{2}\sqrt{(x+2)^2+y^2}}\right) = \left(-\frac{2x+4}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}, \frac{-2y}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}\right)$$

AN2 - 11|2|19 - 6

$\nabla f(2,-3) = \left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{8}{5}, +\frac{6}{5}\right)$

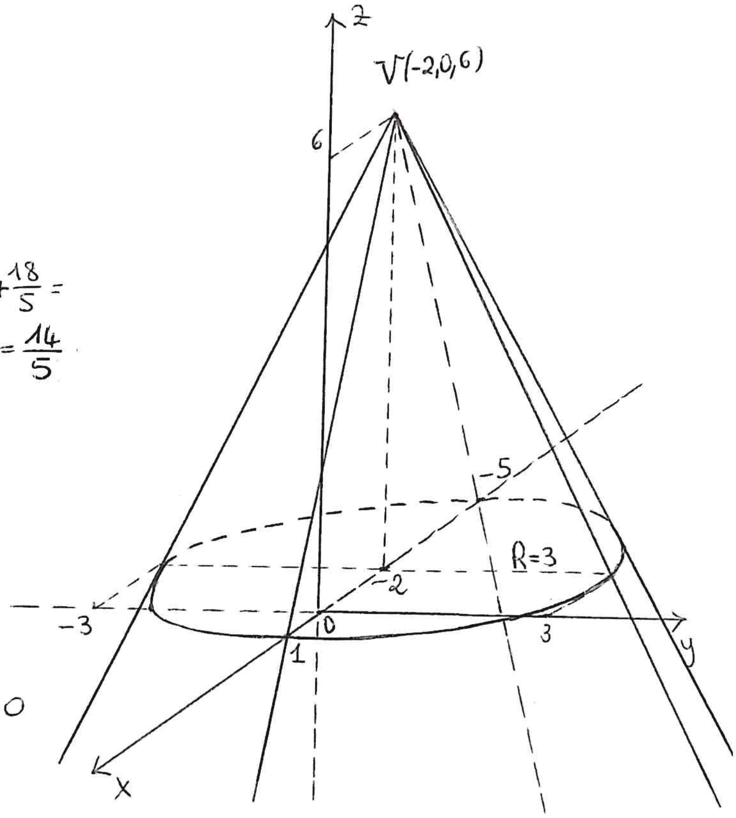
eq.^{ne} del Piano tangente :

$z = -4 - \frac{8}{5}(x-2) + \frac{6}{5}(y+3)$

$$\boxed{z = -\frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y + \frac{14}{5}}$$

$-4 + \frac{16}{5} + \frac{18}{5} =$

$= -4 + \frac{34}{5} = \frac{14}{5}$



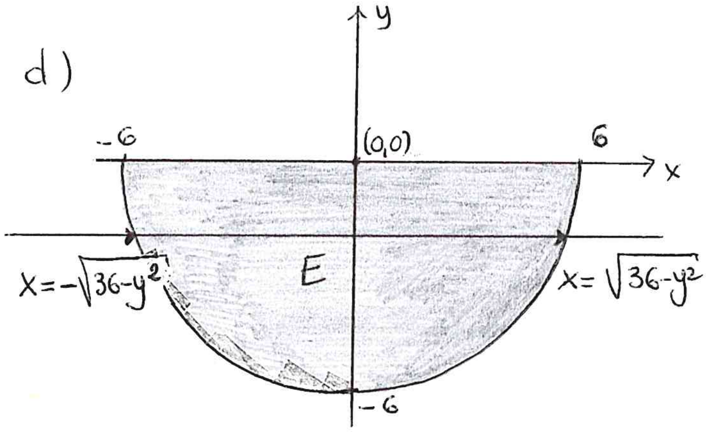
iv) La retta per $P_0 = (2,-3,-4) \perp$ al grafico di f ha per VETTORE DIRETTORE il VETTORE NORMALE

il piano tangente è $\frac{8}{5}x - \frac{6}{5}y + z - \frac{14}{5} = 0$

quindi $\vec{N} = \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}, 1\right)$ (ma anche $\vec{N} = (8,-6,5)$)

La retta richiesta V ha dunque eq.^{ne} $P = P_0 + t\vec{N}$ $t \in \mathbb{R}$ cioè $\begin{cases} x = 2 + \frac{8}{5}t \\ y = -3 - \frac{6}{5}t \\ z = -4 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

d)



circonf.

$x^2 + y^2 = 36 \rightarrow x^2 = 36 - y^2$

$x = \pm\sqrt{36-y^2}$

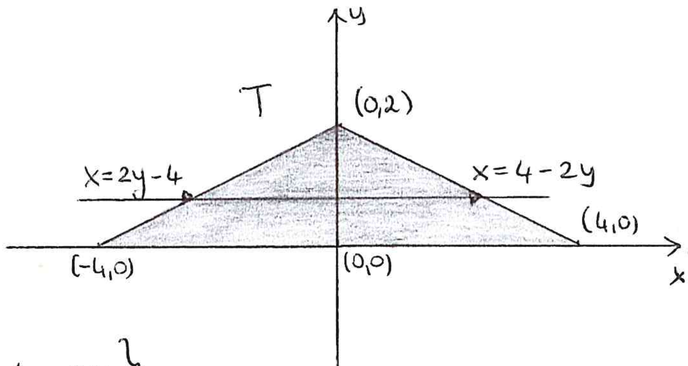
$E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -6 \le y \le 0, -\sqrt{36-y^2} \le x \le \sqrt{36-y^2}\}$

e) Retta per (0,2) e (4,0) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

oppure $x = 4 - 2y$

retta per (0,2) e (-4,0) $y = \frac{1}{2}x + 2$

oppure $x = 2y - 4$



$T_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2, 2y-4 \le x \le 4-2y\}$

$$\int_T y^2\,dx\,dy \underset{\text{usando } T_y}{=} \int_0^2 \left(\int_{2y-4}^{4-2y} y^2\,dx\right)dy = \int_0^2 y^2\left(\int_{2y-4}^{4-2y} dx\right)dy = \int_0^2 y^2(\underbrace{4-2y-(2y-4)}_{8-4y})\,dy =$$

$$= \int_0^2 (-4y^3 + 8y^2)\,dy = \left[-y^4 + \frac{8}{3}y^3\right]_0^2 = -16 + \frac{64}{3} = \frac{-48+64}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

ES. 1) a) $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

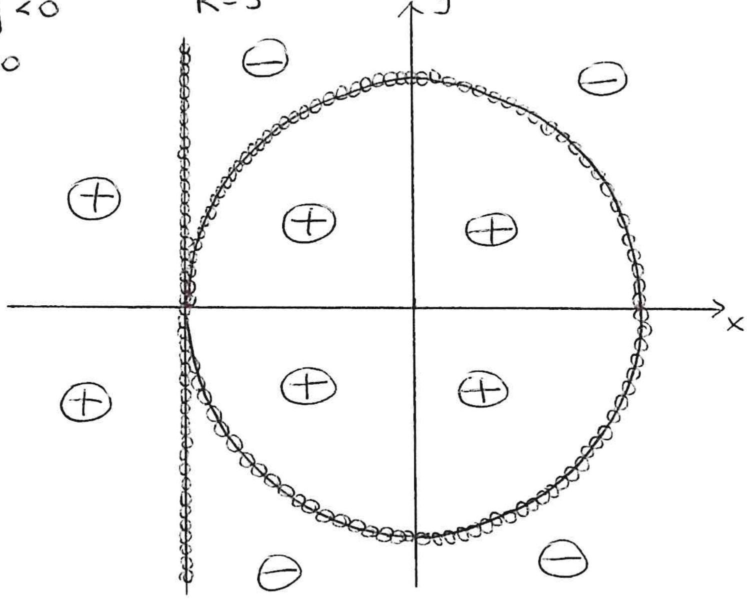
$f(x,y)=0 \iff \frac{1}{3}(9-x^2-y^2)(x+3)=0 \iff x^2+y^2=9$ o $x=-3$

circonf $C(0,0)$ $R=3$ — retta verticale

$$f(x,y)>0 \iff \begin{cases} 9-x^2-y^2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 9-x^2-y^2<0 \\ x+3<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+y^2<9 \\ x>-3 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x^2+y^2>9 \\ x<-3 \end{cases}$$

dentro la circonf e a destra di $x=-3$ — fuori dalla circonf e a sinistra di $x=-3$



b) $\nabla f(x,y) =$ GRADIENTE

$$= \left(\frac{1}{3}(-2x)(x+3) + \frac{1}{3}(9-x^2-y^2),\ \frac{1}{3}(-2y)(x+3)\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x(x+3) + \frac{1}{3}(9-x^2-y^2),\ -\frac{2}{3}y(x+3)\right)$$

P.TI STAZIONARI

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x(x+3) + \frac{1}{3}(9-x^2-y^2) = 0 \\ -\frac{2}{3}y(x+3) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ y=0 \text{ o } x=-3 \end{cases}$$

Se $y=0$ nella 1ª eq.ne otteniamo $-\frac{2}{3}x^2 - 2x + 3 - \frac{1}{3}x^2 = 0$

$x^2+2x-3=0$ $(x-1)(x+3)=0$

$x=1$ o $x=-3$

$P_0=(1,0)$ $P_1=(-3,0)$

Se $x=-3$ nella 1ª eq.ne otteniamo $-\frac{1}{3}y^2=0$ $y^2=0$ $y=0$

$P_2=(-3,0)=P_1$

2 PUNTI : $P_0=(1,0)$ e $P_1=(-3,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2x-2 & -\frac{2}{3}y \\ -\frac{2}{3}y & -\frac{2}{3}x-2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -x^2 - 2x - \frac{1}{3}y^2 + 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{3}xy - 2y$

STUDIO dei PUNTI

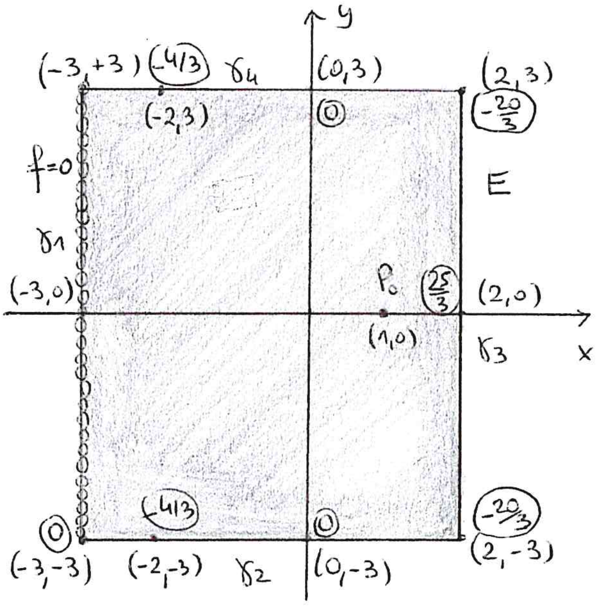
$Hf(P_0) = Hf(1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$ $\det Hf(1,0) = \frac{32}{3} > 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0$ $\left(e \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{8}{3} < 0\right)$

$\Rightarrow$ P_0 è un punto di MASSIMO LOCALE

$Hf(P_1) = Hf(-3,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-3,0) = 0$ con questo criterio NON SI PUÒ DIRE NULLA.

Dallo studio del SEGNO (pag.7) risulta che P_1 NON è né un P.to di MIN, né un punto di Max, e neanche un punto di SELLA (poiché non esiste una retta per P_1 lungo la quale P_1 sia un massimo locale).

c) 1° passo E è un RETTANGOLO CHIUSO (contiene tutti e 4 i lati che ne costituiscono il bordo).



E è limitato perché $E \subset B_5(0,0)$ (i punti di E più lontani da (0,0) sono $(-3,\pm 3)$ che distano da (0,0) $\sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4,2$)

f è continua su $\mathbb{R}^2$, equindi anche su E, perché prodotto di una costante per un polinomio di 2° grado in x,y, per un polinomio di 1° grado in x.

Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette MASSIMO e MINIMO assoluti su E.

2° passo P_0 è PUNTO di MAX LOCALE interno ad E in cui

$$f(P_0) = f(1,0) = \frac{8}{3} \cdot 4 = \frac{32}{3} \simeq 10,7$$

AN2 - 11/2/19 - 9

<u>3° passo</u>: Studio del bordo di E (∂E)

γ_1 : su γ_1 $f(x,y) \equiv 0$

$\gamma_2 \begin{cases} x = t \\ y = -3 \end{cases}$ $t \in [-3, 2]$ $g_2(t) = f(t,-3) = \frac{1}{3}(-t^2)(t+3) = -\frac{1}{3}t^3 - t^2$

$g_2'(t) = -t^2 - 2t$

$g_2'(t) = 0 \iff -t^2 - 2t = 0 \iff t(t+2) = 0$

$\iff t = 0$ o $t = -2$

TEMPI	$t=-3$	$t=-2$	$t=0$	$t=2$
PUNTI	$(-3,-3)$	$(-2,-3)$	$(0,-3)$	$(2,-3)$

VALORI $f(-3,-3) = f(0,-3) = 0$

$f(-2,-3) = \frac{1}{3}(9-4-9)(-2+3) = -\frac{4}{3}$

$f(2,-3) = \frac{1}{3}(9-4-9)(2+3) = -\frac{20}{3}$

$\gamma_3 \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$ $t \in [-3, 3]$ $g_3(t) = f(2,t) = \frac{1}{3}(9-4-t^2)(2+3) = \frac{25}{3} - \frac{5}{3}t^2$

$g_3'(t) = -\frac{10}{3}t$ $g_3'(t) = 0 \iff -\frac{10}{3}t = 0 \iff t = 0$

TEMPI	$t=-3$	$t=0$	$t=3$
PUNTI	$(2,-3)$	$(2,0)$	$(2,3)$

VALORI $f(2,-3) = -\frac{20}{3}$ $f(2,0) = \frac{1}{3}(9-4)(5) = \frac{25}{3}$

$f(2,3) = \frac{1}{3}(-4)(5) = -\frac{20}{3}$

$\gamma_4 \begin{cases} x = t \\ y = 3 \end{cases}$ $t \in [-3, 2]$ $g_4(t) = f(t,3) = \frac{1}{3}(-t^2)(t+3) = -\frac{1}{3}t^3 - t^2$

esattamente come $g_2(t)$ $t=0$ $t=-2$

TEMPI	$t=-3$	$t=-2$	$t=0$	$t=2$
PUNTI	$(-3,3)$	$(-2,3)$	$(0,3)$	$(2,3)$

VALORI $f(-3,3) = f(0,3) = 0$ $f(-2,3) = -\frac{4}{3}$ $f(2,3) = -\frac{20}{3}$

<u>4° passo</u>: CONCLUSIONE in P_0 $f(P_0) = \frac{32}{3}$; sul ∂E f è compresa tra $-\frac{20}{3}$ e $\frac{25}{3}$, quindi

$$\max_E f(x,y) = \frac{32}{3} = f(1,0) \qquad \min_E f(x,y) = -\frac{20}{3} = f(2,\pm 3)$$

AN2 - 11/12/19 - 10

ES. 2) $g(x,y) = 5 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)$ a) $\text{dom} g = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

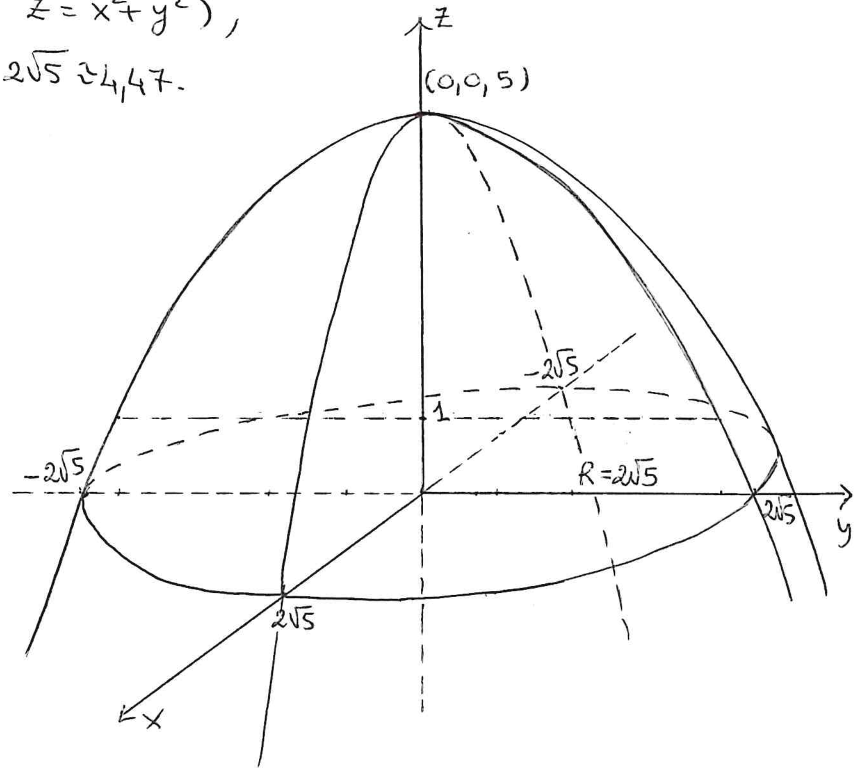
b) eq.ne del grafico di g : $z = 5 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)$

si tratta di un PARABOLOIDE CIRCOLARE di $V(0,0,5)$, rivolto verso il basso, apertura $a = \frac{1}{4}$ ($a<1$ quindi il paraboloide è + largo di $z = x^2+y^2$),

$\cap z=0$ su $x^2+y^2=20$ $R=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \simeq 4{,}47$.

su $x^2+y^2=4$ $(R=2)$ $z=5-1=4$

su $x^2+y^2=16$ $(R=4)$ $z=5-4=1$



c) $z \geq 1 \to$ al di sopra del piano orizzontale $z=1$

$z \leq 5 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)$ al di sotto del paraboloide

$x^2+y^2 \leq 9$ all'interno del CILINDRO di asse z e $R=3$.

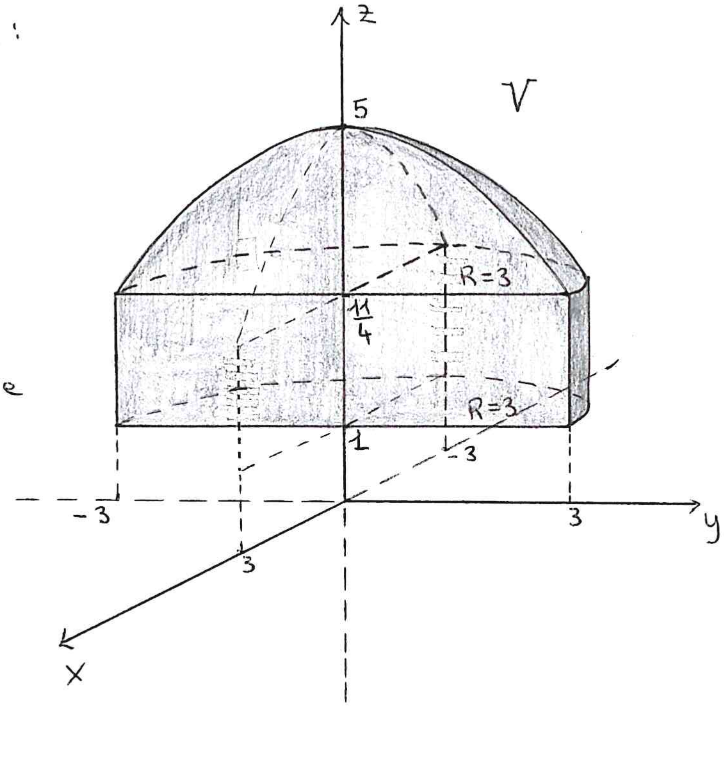
Poiché sulla circonferenza $x^2+y^2=9$ risulta $z_{par} = 5 - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} = 2{,}75 > 1$

il solido V risulta composto da:

CILINDRO di $R=3$ per $1 \leq z \leq \frac{11}{4}$

PARABOLOIDE per $\frac{11}{4} \leq z \leq 5$.

Infine la condizione $x \leq 0$ considera solo la metà del solido posta nel 2° e 3° quadrante

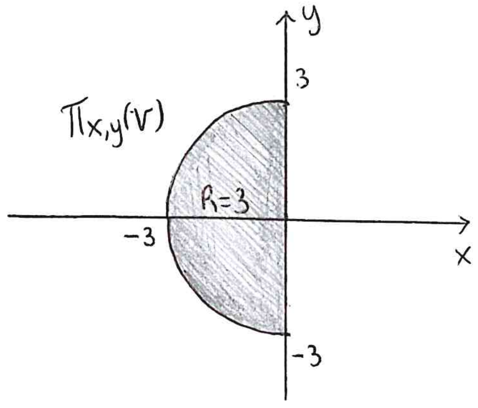


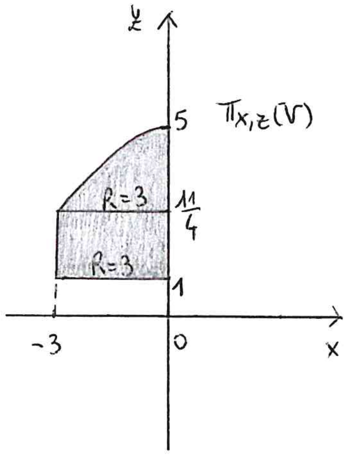
come già visto al punto b)

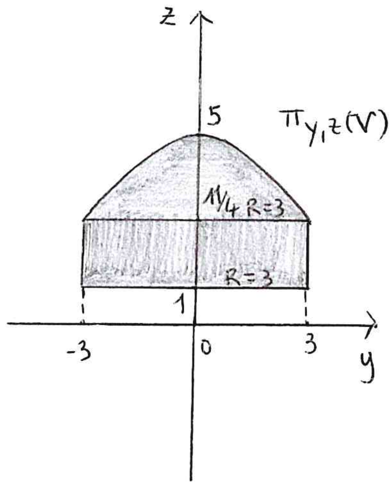
$z=1 \to 1 = 5 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)$

$x^2+y^2=16$ $R=4$

AN2 - 11/2/19 - 11







$$\text{VOLUME di } V = \int_{\Pi_{x,y}(V)} \left(5 - \frac{1}{4}(x^2+y^2) - 1\right) dx\,dy =$$

$$= \int_{\substack{x^2+y^2 \le 9 \\ x \le 0}} \left(4 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)\right) dx\,dy \underset{\text{COORD. POLARI}}{=} \int_{\pi/2}^{3/2\pi} d\theta \cdot \left(\int_0^3 \left(4 - \frac{1}{4}\rho^2\right)\rho\, d\rho \right) =$$

$$= [\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cdot \int_0^3 \left(4\rho - \frac{1}{4}\rho^3\right) d\rho = \pi \cdot \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{16}\right]_0^3 =$$

$$= \pi\left(18 - \frac{81}{16}\right) = \boxed{\frac{207}{16}\pi}$$

ES. 3) $\underline{\text{Eq.}^{\text{ne}} \text{ omogenea associata}}$ $\frac{1}{4}y''(x) - \frac{2}{3}y'(x) = 0$

Eq.$^{\text{ne}}$ caratteristica $\frac{1}{4}t^2 - \frac{2}{3}t = 0$ $\quad t\left(\frac{1}{4}t - \frac{2}{3}\right) = 0$ $\quad t_1 = 0$

$t_2 = \frac{8}{3}$

SOL.$^{\text{ni}}$ FONDAM. $y_1(x) = e^{0 \cdot x} = 1$

$y_2(x) = e^{8/3 x}$

Sol.^{ni} Eq.^{ne} omogenea $y(x) = c_1 \cdot 1 + c_2 e^{8/3 x}$

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{8/3 x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

<u>SOL.^{ne} particolare</u> $\bar{y}(x) = x \cdot (Ax^2 + Bx + C)$ perché il 2° membro dell'eq.^{ne} è un polinomio di 2° grado ($f(x) = -4x^2 + \frac{31}{9}x$) e si deve moltiplicare per x perché nell'eq.^{ne} NON COMPARE $y(x)$ ma COMPARE $y'(x)$.

$\bar{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx \qquad \bar{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \qquad \bar{y}''(x) = 6Ax + 2B$

Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo

$$\frac{1}{4}(6Ax + 2B) - \frac{2}{3}(3Ax^2 + 2Bx + C) = -4x^2 + \frac{31}{9}x \qquad \underline{\forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\frac{3}{2}Ax + \frac{1}{2}B - 2Ax^2 - \frac{4}{3}Bx - \frac{2}{3}C = -4x^2 + \frac{31}{9}x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-2Ax^2 + \left(\frac{3}{2}A - \frac{4}{3}B\right)x + \left(\frac{1}{2}B - \frac{2}{3}C\right) = -4x^2 + \frac{31}{9}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poiché due polinomi sono uguali $\forall x \in \mathbb{R}$ se e solo se hanno tutti i coefficienti uguali (Principio di identità dei polinomi), otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -2A = -4 \\ \frac{3}{2}A - \frac{4}{3}B = \frac{31}{9} \\ \frac{1}{2}B - \frac{2}{3}C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2 \\ 3 - \frac{4}{3}B = \frac{31}{9} \\ \frac{2}{3}C = \frac{1}{2}B \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2 \\ \frac{4}{3}B = 3 - \frac{31}{9} = -\frac{4}{9} \\ C = \frac{3}{4}B \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} sono

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{8/3 x} + 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

<u>Pb. di Cauchy</u>: $y'(x) = \frac{8}{3}c_2 e^{8/3 x} + 6x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = -1 \\ y'(0) = \frac{8}{3}c_2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -c_2 - 1 \\ \frac{8}{3}c_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -7/4 \\ c_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

<u>SOL.^{ne}</u>

$$\boxed{y(x) = -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}e^{8/3 x} + 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x}$$