Limiti e continuità in $\mathbb{R}^n$.

Paola Mannucci e Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

16 dicembre 2014

Concetti di topologia

Il proposito di questa sezione è di estendere alcuni concetti propri di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$.

Un punto chiave risulterà il concetto di limite di funzione in $\mathbb{R}^n$, e per fare questo necessiteremo di alcune definizione che daremo in seguito, quali quelle di

- *intorno (aperto o chiuso);*
- *punto di accumulazione.*

Da queste definizioni, introdurremo il concetto di continuità per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$.

Definizione

Sia f una funzione di n variabili reali e Ω il più grande sottinsieme di $\mathbb{R}^n$ per cui abbia senso scrivere $f(x)$ per $x \in \Omega$. Tale Ω si dice dominio naturale di f.

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y)$. Il dominio naturale di f è l'insieme dei punti (x, y) per cui $x + y > 0$, cioè per cui $x > -y$.

Quindi consiste delle coppie del piano sopra la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

$\mathbb{R}^n$: operazioni

Siano $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *scelti arbitrariamente. L'insieme*

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

è dotato di

- *una operazione detta addizione, per cui*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n;$$

- *una operazione detta moltiplicazione per uno scalare, per cui*

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

- *una operazione detta prodotto scalare, per cui*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n \in \mathbb{R};$$

- *una norma o modulo*

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2};$$

- *una distanza tra* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}+(-1)\cdot\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

Esempio

Siano $\mathbf{x} = (-1,3)$, $\mathbf{y} = (7,2)$, $\lambda = 4$. *Allora*

- $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (-1,3)+(7,2) = (-1+7, 3+2) = (6,5)$;
- $\lambda \cdot \mathbf{x} = 4 \cdot (-1,3) = (-4,12)$;
- $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ((-1,3),(7,2)) = (-1\cdot 7) + (3,\cdot 2) = -7+6 = -1$;
- $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \|(-1,3)\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$;
- $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^n} = \|(-1,3)-(7,2)\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(-1-7)^2+(3-2)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$.

$\mathbb{R}^n$: intorni

Definizione

Dati $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *ed* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, *si dice intorno (sferico)* $\mathbf{x}$ *di raggio* ϵ *(o palla di centro* $\mathbf{x}$ *di raggio* ϵ*) l'insieme*

$$B_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\}$$

Esempio

L'insieme $B_\epsilon(\mathbf{x})$

- *in* R^1 *è l'intervallo (aperto)* $(\mathbf{x} - \epsilon, \mathbf{x} + \epsilon)$*;*
- *in* R^2 *è il disco di centro* $\mathbf{x}$ *e raggio* ϵ*;*
- *in* R^3 *è la palla di centro* $\mathbf{x}$ *e raggio* ϵ*.*

$\mathbb{R}^n$: punti di accumulazione, isolati, insiemi limitati

Definizione

L'elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *si dice punto di accumulazione di* E *se per ogni intorno* B_ϵ *di* $\mathbf{x}$ *esiste qualche* $\mathbf{y} \in E$ *tale che* $\mathbf{y} \in B_\epsilon \backslash \{\mathbf{x}\}$

Definizione

L'elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *si dice punto isolato di* E *se non è di accumulazione in* E*.*

Definizione

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ *si dice limitato se esiste* $r > 0$ *tale che* $E \subseteq B_r(\mathbf{0})$*, ovvero se esiste* $r > 0$ *tale che* $\|\mathbf{x}\| < r$ *per ogni* $\mathbf{x} \in E$*.*

$\mathbb{R}^n$: punti di accumulazione, isolati, insiemi limitati

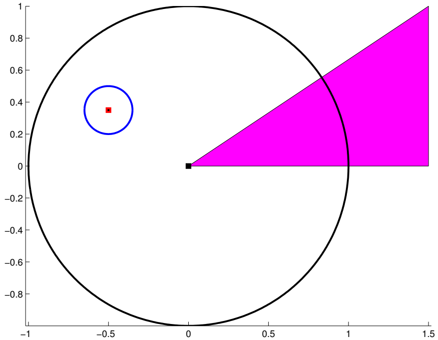

Figura : Sia E il triangolo in magenta, avente vertici $(0,0)$, $(1.5,0)$, $(1.5,1)$, non contenente i lati. L'origine $(0,0)$ è un punto di accumulazione per E poichè ogni intorno sferico centrato in $(0,0)$ contiene punti di E. Il punto $P=(-0.5,0.35)$ è isolato rispetto ad E perchè il disco centrato in P e raggio 0.15 non contiene punti di E.

$\mathbb{R}^n$: punti interni, esterni, frontiera

Definizione

L'elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *si dice*

- *punto interno ad E se esiste un suo intorno* $B_\epsilon(\mathbf{x})$, $\epsilon > 0$, *contenuto in* E;
- *punto esterno ad E se è un punto interno al complementare di* E;
- *punto di frontiera per E se non è ne' un punto interno ne' un punto esterno di* E;

Definizione

Si dice

- *interno di E, spesso denotato con* $\mathring{E}$, *l'insieme dei punti interni di* E;
- *frontiera di E, spesso denotato con* ∂E, *l'insieme dei punti di frontiera di* E;
- *chiusura di E, spesso denotato con* $\overline{E}$, *l'insieme* $E \cup \partial E$.

$\mathbb{R}^n$: aperti e chiusi

Definizione

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

- *aperto di $\mathbb{R}^n$ se coincide col suo interno;*
- *chiuso di $\mathbb{R}^n$ se il suo complementare è aperto di $\mathbb{R}^n$;*

Nota.

- *Gli insiemi $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sono sia chiusi che aperti di $\mathbb{R}^n$;*
- *L'unione e l'intersezione di aperti è ancora un aperto;*
- *L'unione e l'intersezione di chiusi è ancora un chiuso.*

$\mathbb{R}^n$: sui chiusi

Teorema

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) *E è chiuso;*

(ii) *$\partial E \subseteq E$;*

(iii) *E contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Definizione

Un insieme $A \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice denso in E se la sua chiusura coincide con E, cioè $\overline{A} = E$.

Esempio

L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^n$: infinito

Come in precedenza per il caso di $\mathbb{R}$ resta da definire quali siano gli intorni di ∞ in $\mathbb{R}^n$.

Definizione

Gli insiemi

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|y\|_{\mathbb{R}^n} > a,\ a \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\infty\}$$

sono intorni di ∞ in $\mathbb{R}^n$, cioè i complementari di dischi centrati nell'origine e aventi raggio a.

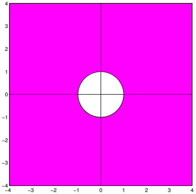

Figura : In magenta un intorno di ∞ di $\mathbb{R}^2$, visto come il complementare del disco di $\mathbb{R}^2$, avente centro l'origine e raggio 1.

$\mathbb{R}^n$: limite, caso generale

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ *un punto di accumulazione per* X. *Si scrive*

$$L = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})$$

se per ogni intorno $\mathcal{V}$ *di* L *esiste* $\mathcal{U}$ *intorno di* $\mathbf{x_0}$ *tale che* $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ *per ogni* $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \backslash \mathbf{x_0}$.

Di seguito, a partire da questa definizione, come già visto per i limiti in $\mathbb{R}$, caratterizziamo questa definizione in termini di norme.

$\mathbb{R}^n$: $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$

Definizione

Se $L \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^m$, *allora*

$$L = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})$$

se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta(\epsilon) > 0$ *tale che*

$$\mathbf{x} \in X, \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - L\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon.$$

$\mathbb{R}^n$: $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \infty$

Definizione

Se $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^m$, *allora*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \infty$$

se e solo se per ogni $K > 0$ *esiste* $\delta(K) > 0$ *tale che*

$$\mathbf{x} \in X,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(K) \Rightarrow \|f(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} > K.$$

Definizione

Se $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^m$, *X contenente un intorno di ∞, allora*

$$L = \lim_{\mathbf{x}\to\infty} f(\mathbf{x})$$

se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste* $K(\epsilon) > 0$ *tale che*

$$\mathbf{x} \in X,\ \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} > K(\epsilon) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - L\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon.$$

$\mathbb{R}^n$: $\lim_{\mathbf{x}\to\infty} f(\mathbf{x}) = \infty$

Definizione

Se $f : X \to \mathbb{R}^m$, X contenente un intorno di ∞, allora

$$\lim_{\mathbf{x}\to\infty} f(\mathbf{x}) = \infty$$

se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $K(M) > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in X,\ \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} > K(M) \Rightarrow \|f(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} > M.$$

Nota.

Si dimostra che

- *il limite, se esiste, è unico;*
- *i limiti della somma e del prodotto scalare sono uguali rispettivamente alla somma e al prodotto scalare dei limiti, qualora questi ultimi esistano finiti;*
- *siano* $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $g : Im(f) \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. *Siano* $\mathbf{x_0} \in X$, $\mathbf{y_0} \in Im(f)$ *punti di accumulazione rispettivamente in* X *e* $Im(f)$. *Se*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y_0}, \ \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{y_0}} g(\mathbf{y}) = \mathbf{z_0}$$

  allora

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} g \circ f(\mathbf{x}) = \mathbf{z_0}.$$

Definizione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Una curva in $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ è una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ continua in I.

Teorema

Sia $\mathbf{x_0}$ un punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = L \Rightarrow \lim_{t \to t_0} f(\gamma(t)) = L$$

per ogni curva $\gamma : I \to X$ tale che $\gamma(t_0) = \mathbf{x_0}$ per un certo $t_0 \in I$.

$\mathbb{R}^n$: restrizione a rette

Visto che una retta passante per $\mathbf{x_0}$ è ovviamente una curva verificante le precedenti ipotesi, abbiamo:

Corollario

Una condizione necessaria per l'esistenza del limite (finito o infinito) di una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *per* $\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}$ *è che la funzione ristretta a ogni retta passante per* $\mathbf{x_0}$ *ammetta lo stesso limite.*

- Questa osservazione viene spesso usata per dimostrare la non esistenza di un limite.
- Sottolineiamo che esistono funzioni che ristrette a ogni retta passante per $\mathbf{x_0}$ ammettono lo stesso limite, pur non esistendo il limite di f in $\mathbf{x_0}$.

Esempio

Mostrare che la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$$

non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$.

Svolgimento.

Le rette per $(0,0)$ *sono tutte del tipo* $y = mx$. *Allora, fissato* m, *la funzione su questa retta vale*

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x^3 + (mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{x^2(x + m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \frac{(x + m^2)}{(1 + m^2)}$$

e quindi per $x \to 0$, *il limite vale* $\frac{m^2}{1+m^2}$. *Siccome varia al variare di* m, *il limite non esiste.*

Somme inferiori e superiori

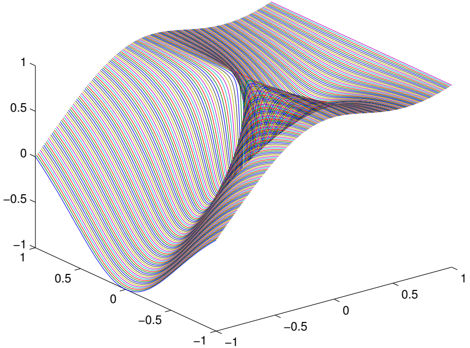

Figura : La funzione $f(x, y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$ in un intorno dell'origine.

Somme inferiori e superiori

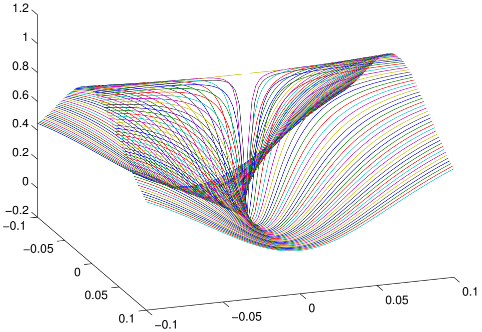

Figura : La funzione $f(x,y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$ in $[-0.1, 0.1] \times [-0.1, 0.1]$.

Esempio

Mostrare che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot e^{x/y}, & se\ y \neq 0 \\ 0, & se\ y = 0 \end{cases}$$

non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$.

Traccia.

- *Si vede che se restringiamo la funzione alle rette* $y = mx$ *passanti per l'origine, allora se* $y \neq (0,0)$, $m \neq 0$

  $$f(x,y) = f(x,mx) = x \cdot e^{x/mx} = x \cdot e^{1/m} \to 0$$

  mentre se $m = 0$, *cioè* $y = 0$, *per definizione* $f(x,y) = 0$.
- *Tuttavia sull'arco* $y = x^2$, *abbiamo*

  $$f(x,y) = f(x,x^2) = x \cdot e^{x/x^2} = x \cdot e^{1/x} \to +\infty.$$

  Quindi il limite non esiste, perchè altrimenti conincidererebbe su tutte le curve passanti per l'origine.

$\mathbb{R}^n$: continuità

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^m$. Allora f si dice continua in $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ se vale una delle seguenti

(i) $\mathbf{x_0}$ *è un punto isolato;*

(ii) $\mathbf{x_0}$ *è un punto di accumulazione per X e*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}).$$

Inoltre f si dice continua in X se è continua in ogni $\mathbf{x} \in X$.

Nota.

Si dimostra che

- *La somma e il prodotto scalare di funzioni continue sono funzioni continue;*
- *Siano* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $g : Im(f) \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *funzioni continue. Allora* $h = g \circ f$ *è una funzione continua;*
- *I polinomi di* $\mathbb{R}^n$ *sono funzioni continue;*
- *Siano* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funzioni continue. Allora* $h = f/g$ *è una funzione continua in tutti i punti* $\mathbf{x} \in X$ *in cui* $g(\mathbf{x}) \neq 0$;

$\mathbb{R}^n$: continuità

Esempio

La funzione $f(x,y) = e^{x \cdot y^3 + x^4}$ *è una funzione continua, in quanto lo è il polinomio* $x \cdot y^3 + x^4$ *composto con l'esponenziale (che è funzione continua).*

Esempio

La funzione $f(x,y) = \sin\left(x \cdot y^3 + x^4 + \cos(x \cdot y)\right)/(1 + x^2 \cdot y^4 + e^y)$ *è continua nel dominio naturale* $\mathbb{R}^2$*, in quanto*

- *lo è il polinomio* $x \cdot y^3 + x^4$ *;*
- *lo è* $\cos(x \cdot y)$ *(composizione polinomio in due variabili con funzione continua);*
- *lo è* $\sin(z)$ *(funzione continua);*
- *lo è la somma di funzioni continue;*
- *lo è il denominatore* $1 + x^2 \cdot y^4 + e^y$*, che non si annulla mai in* $\mathbb{R}^2$*.*