EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI (II)

RADICI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA REALI E COINCIDENTI

Manteniamoci in un caso generale: partiamo dall'equazione $y'' + py' + qy = 0$ e supponiamo che la sua equazione caratteristica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ abbia come unica radice $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.
Accanto alla soluzione $\phi_1 = e^{\lambda x}$ cerchiamone una del tipo $\phi_2 = u(x)e^{\lambda x}$ e determiniamo $u(x)$ in modo che abbia la forma più semplice possibile. Alleggeriamo la notazione lasciando perdere l'indice 2 e la (x) e scriviamo (ricordando che: $D\, f \cdot g = f' \cdot g + f \cdot g'$),

$$\phi = ue^{\lambda x}$$
$$\phi' = u'e^{\lambda x} + u\lambda e^{\lambda x}$$
$$\phi'' = u''e^{\lambda x} + u'\lambda e^{\lambda x} + u'\lambda e^{\lambda x} + u\lambda^2 e^{\lambda x}$$

Sostituendo queste nell'equazione di partenza abbiamo:

$$u''e^{\lambda x} + 2u'\lambda e^{\lambda} + u\lambda^2 e^{\lambda x} + p(u'e^{\lambda x} + u\lambda e^{\lambda x}) + que^{\lambda x} = 0$$

Semplifichiamo raccogliendo il fattore comune

$$e^{\lambda x}(u'' + 2u' + u\lambda^2 + pu' + pu\lambda + qu) = 0$$

Eliminiamo $e^{\lambda x}$, che è sicuramente diverso da zero, e mettiamo in evidenza i termini in u, u' e u''

$$u'' + (2\lambda + p)u' + (\lambda^2 + p\lambda + q)u = 0$$

Qui bisogna richiamare cose che sapete già ma che certamente è meglio rivedere: in una generica equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ si ha $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Nel nostro caso la variabile sulla quale stiamo lavorando è λ e abbiamo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e $-\frac{b}{a} = -p$.

Perciò $2\lambda + p = 0$ e quindi il termine in u' si annulla.

Il termine in u, invece, è proprio il polinomio $\lambda^2 + p\lambda + q$ dell'equazione di partenza , e quindi è nullo.

Ci rimane quindi

$$u'' = 0$$

Questo significa che ci basta scegliere come funzione u una funzione che abbia derivata seconda sempre uguale a zero (qui non abbiamo bisogno di indicare le costanti perché le mettiamo alla fine nell'integrale generale): $u(x) = x$.

Tiriamo le fila del discorso: se, in un'equazione differenziale del secondo ordine, l'equazione caratteristica ha due radici coincidenti, l'integrale generale risulta $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$.
Più in generale, in se l’equazione caratteristica ha radici reali di molteplicità n si differenziano le funzioni utilizzando x^{n-1}, x^{n-2}, eccetera.

RADICI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA COMPLESSE CONIUGATE

Partiamo dall'equazione $y'' + py' + qy = 0$ e supponiamo che la sua equazione caratteristica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ abbia come radici $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.
In linea di principio niente ci vieta di scrivere $y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$, ma che significato ha l'esponenziale in campo complesso?

La funzione esponenziale in campo complesso è definita così:

$$e^{(\alpha+i\beta)} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) \text{ mentre } e^{(\alpha-i\beta)} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right).$$

Sostituire queste espressioni nell'integrale generale risulta un po' scomodo, sia per la lunghezza, sia per il fatto che ci portiamo dietro l'unità immaginaria. Con qualche passaggio si può ottenere una forma più comoda.

Incominciamo con il definire $y_1 = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right)$ e $y_2 = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)$.

Abbiamo visto che una qualunque combinazione lineare di due funzioni che soddisfino l'equazione differenziale è ancora una soluzione.

Scegliamo allora una combinazione furba:

$$Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) + e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2\,i} = \frac{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) - e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)}{2\,i} = e^{\alpha x}\sin\beta x\,.$$

Ora utilizziamo queste due funzioni per formare l'integrale generale:

$$y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right)$$

Riprendiamo quindi le due questioni rimaste aperte nella puntata precedente.

<u>Radici reali coincidenti</u>

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

e perciò $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
L'integrale generale sarà $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

<u>Radici complesse coniugate</u>

$$y'' + y = 0\,.$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

ed ha per radici $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -\,i$.
In questo caso, dunque, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, perciò, come avevamo già trovato, l'integrale generale è $y = c_1\cos x + c_2\sin x$.