

# Capitolo 9

## Superfici ed Integrazione

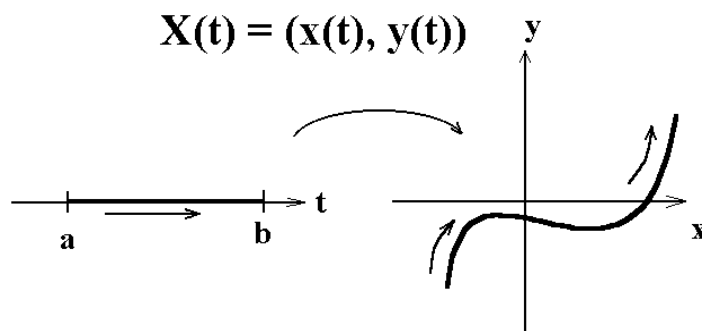
Il calcolo degli integrali curvilinei ci ha fatto familiarizzare con il concetto di parametrizzazione di curve nel piano  $xy$  e per estensione anche nello spazio tridimensionale.

Vogliamo, in questo capitolo, introdurre il concetto di superficie e di *integrale di superficie*; integrali nei quali il dominio di integrazione è una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , quali ad esempio, piani, la superficie di una sfera o di un ellissoide o, più in generale, il grafico di una funzione  $z = f(x, y)$ . Gli integrali di superficie sono la versione in dimensione maggiore degli integrali di linea, cercheremo di esplicitare questa connessione quando possibile. Inoltre gli integrali di superficie soddisfano una versione generalizzata dei teoremi fondamentali studiati nel capitolo precedente.

Il nostro obiettivo, in questo capitolo, è quello di stabilire e capire questi teoremi, che mettono insieme vari tipi di integrali e derivate. Essenziale, per calcolare questi integrali, è la capacità di capire e parametrizzare le superfici nello spazio. Cominciamo quindi ad illustrare alcune idee e tecniche.

### 9.1 Curve, Superfici e Dimensioni

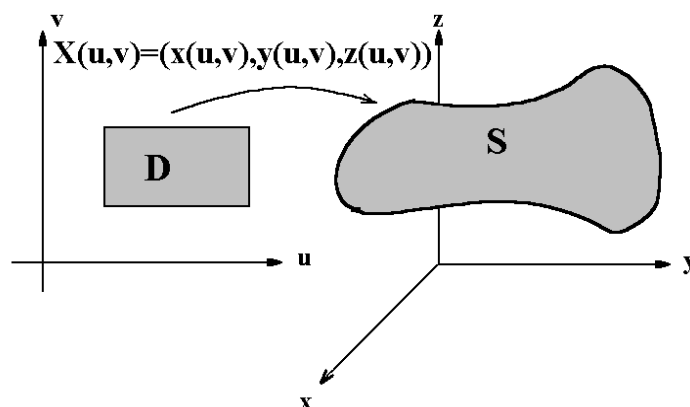
Il modo generale per parametrizzare una curva è sostanzialmente di questa forma



Parametrizzazione di una curva nel piano

La curva è un oggetto unidimensionale nello spazio bidimensionale. E' l'immagine dell'intervallo unidimensionale  $[a, b]$  fatto dalla funzione vettoriale  $X(t)$ . Possiamo dire che la funzione  $X$  "deforma" l'intervallo della variabile  $t$  nella curva unidimensionale.

Ecco di seguito, per similitudine, come si parametrizza una *superficie*



In questa situazione la funzione vettoriale  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  trasforma la regione  $D$  nel piano  $uv$  nella superficie bidimensionale  $S$  nello spazio  $xyz$ . Possiamo dire che la funzione  $X$  deforma la regione piana bidimensionale  $D$  nella superficie bidimensionale  $S$  nello spazio tridimensionale. Bisogna, ovviamente fare attenzione a come è definita la funzione  $X$ . Pensate infatti ad  $X$  come la mappa costante che assegna ai punti  $(u, v)$  di  $D$  il valore  $(1, 2, 3)$ ; chiaramente l'immagine di  $D$  è un punto. Bisogna allora quale proprietà deve avere la funzione  $X$  per trasformare insieme bidimensionali di  $\mathbb{R}^2$  in superfici bidimensionali in  $\mathbb{R}^3$ .

### 9.1.1 Parametrizzazione di una Superficie. Esempi.

Ogni superficie di  $\mathbb{R}^3$  può essere parametrizzato in diversi modi (così come per le curve) ed usando domini diversi. Diamo alcuni esempi che danno il senso delle possibilità.

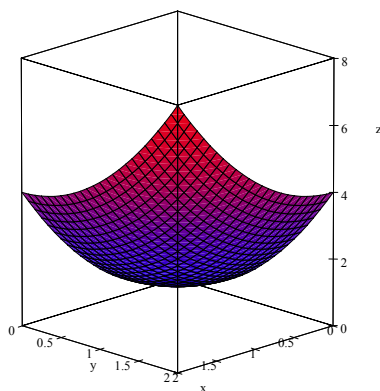
**Grafici di funzioni.** Le superfici più facili da parametrizzare sono i grafici di funzioni  $z = f(x, y)$ , o più precisamente parti di tali grafici. Parametrizzare una parte particolare di un grafico può richiedere una certa attenzione nella restrizione del dominio.

**Esempio 9.1** *Parametrizzare  $S_1$ , la parte del grafico di  $z = x^2 + y^2$  che giace sopra il quadrato  $[0, 2] \times [0, 2]$  nel piano  $xy$ .*

**Soluzione** Data la superficie  $z = x^2 + y^2$  possiamo porre

$$X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) ; 0 \leq u \leq 2 ; 0 \leq v \leq 2.$$

Disegnare la superficie usando il software è un buon modo per vedere se la parametrizzazione è corretta



Parte della superficie  $z = x^2 + y^2$

■

Vediamo adesso come cambia la superficie se si cambia il dominio  $D$  nel quale si considera la legge di trasformazione.

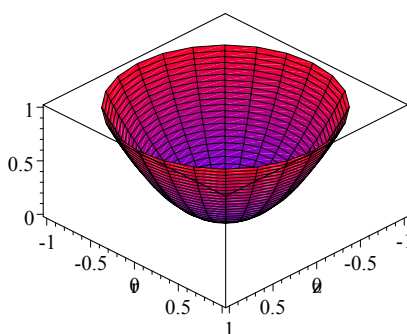
**Esempio 9.2** *Parametrizzare  $S_2$ , la parte del grafico di  $z = x^2 + y^2$  che giace sopra il disco unitario del piano.*

**Soluzione.** La parametrizzazione dell'esempio precedente funziona anche in questo caso, eccetto che adesso il dominio  $D$  è il disco unitario. E' forse, però, preferibile usare le coordinate polari nel piano per descrivere la circonferenza unitaria e di conseguenza la funzione.

Si ha che il disco unitario è descritto da  $0 \leq r \leq 1$ , e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . In queste coordinate è  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  da cui si ricava  $x^2 + y^2 = r^2$ . Per consistenza di notazione scriviamo  $u = r$  e  $v = \theta$ . Si ha allora

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2) ; \quad 0 \leq u \leq 1 ; \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Usiamo il software per disegnare la superficie



Un'altra parte della superficie  $z = x^2 + y^2$

■

Vediamo, nel prossimo esempio, come un piano (od una porzione di esso) viene parametrizzato (in modo ovviamente lineare). Più importante ancora è notare come le aree del dominio e dell'immagine sono correlate.

**Esempio 9.3** *Descrivere la superficie  $S$  parametrizzata da*

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (x_0 + uA + vB, y_0 + uC + vD, z_0 + uE + vF); \\ 0 &\leq u \leq U, \quad 0 \leq v \leq V. \end{aligned}$$

(tutte le lettere, eccetto  $u$  e  $v$  indicano delle costanti). L'area del dominio è  $UV$ , quanto vale l'area della superficie corrispondente?

**Soluzione.** Riscriviamo la parametrizzazione nella forma

$$X(u, v) = (x_0, y_0, z_0) + u(A, C, E) + v(B, D, F).$$

Si vede meglio (forse) come si forma la superficie  $S$ . E' il traslato, attraverso il vettore costante  $(x_0, y_0, z_0)$ , della combinazione lineare dei vettori  $u(A, C, E)$  e  $v(B, D, F)$  mentre  $(u, v) \in [0, U] \times [0, V]$ .

La superficie  $S$  è quindi il parallelogramma generato dai vettori  $U(A, C, E)$  e  $V(B, D, F)$  traslato del vettore  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Ricordando che l'area di un parallelogramma generato da due vettori è il valore assoluto del loro prodotto vettoriale, indicando con  $X_u = (A, C, E)$  e  $X_v = (B, D, F)$  si ha

$$\text{Area } S = |U X_u \times V X_v| = UV |X_u \times X_v|.$$

■

**Nota 9.4** *Notare che nell'esempio precedente  $X_u$  può essere considerato (e non è casuale) come la derivata parziale rispetto alla variabile  $u$  della parametrizzazione,*

$$X_u = \frac{\partial}{\partial u} (x_0 + Au + Bv, y_0 + Cu + Dv, z_0 + Eu + Fv) = (A, C, E).$$

In modo simile è

$$X_v = \frac{\partial}{\partial v} (x_0 + Au + Bv, y_0 + Cu + Dv, z_0 + Eu + Fv) = (B, D, F).$$

La stessa notazione è conveniente anche quando consideriamo una generica parametrizzazione  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . In questo caso scriveremo

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= \left( \frac{\partial}{\partial u} x(u, v), \frac{\partial}{\partial u} y(u, v), \frac{\partial}{\partial u} z(u, v) \right), \\ X_v(u, v) &= \left( \frac{\partial}{\partial v} x(u, v), \frac{\partial}{\partial v} y(u, v), \frac{\partial}{\partial v} z(u, v) \right). \end{aligned}$$

Abbiamo ricordato sopra che nel caso della parametrizzazione lineare, il prodotto vettoriale  $|X_u \times X_v|$  descrive il fattore di scala nella variazione dell'area rispetto al valore  $UV$  del dominio.

Un risultato dello stesso genere vale in generale per ogni parametrizzazione  $X(u, v)$  differenziabile. Come abbiamo visto ripetutamente in tutti i capitoli precedenti, quando si passa dal caso lineare a quello nonlineare, la proprietà va letta in modo locale. Si ha allora che, nell'intorno di ogni punto  $(u_0, v_0)$  del dominio, la parametrizzazione  $X$  modifica il valore delle aree di un fattore del valore (approssimativamente) di  $|X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)|$ .

Torneremo su questo più avanti.

**9.1.2 Esercizi.**

1. In ognuna delle parti qua sotto, trovare una parametrizzazione per la superficie  $S$  definita su di un rettangolo  $D$  dello spazio  $uv$ . Se possibile usare il software per disegnare la superficie relativamente al dominio dato ( e controllare la correttezza dei vostri risultati).
  - (a)  $S$  è quella parte del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  che giace sopra il quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  nel piano  $xy$ .
  - (b)  $S$  è quella parte del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  che giace sopra il disco unitario nel piano  $xy$ .
  - (c)  $S$  è quella parte del piano  $z = 2x + 3y + 4$  che giace sopra il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  nel piano  $xy$ .
  - (d)  $S$  è quella parte del piano  $z = 2x + 3y + 4$  che giace sopra il disco unitario nel piano  $xy$ .
2. Calcolare il fattore  $|X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)|$  per  $(u_0, v_0) = (1, 0)$ , per ognuna delle superfici precedenti
3. Supponiamo che la superficie  $S$  abbia come parametrizzazione  $X(u, v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)$ , con  $0 \leq u \leq 2\pi$ , e  $0 \leq v \leq \pi$ .
  - (a) Descrivere la superficie. Usare il software per verificare i risultati;
  - (b) Spiegare il legame con le coordinate sferiche.
4. Sia  $S$  la metà superiore della sfera unitaria  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
  - (a) Parametrizzare  $S$  essendo  $D$  il disco unitario  $u^2 + v^2 = 1$ ;
  - (b) Parametrizzare  $S$  essendo  $D$  un rettangolo del piano  $uv$  [**Sugg::** vedere l'esercizio precedente).

## 9.2 Integrali di Superficie

Gli integrali di superficie differiscono da quelli di linea in quanto nel dominio d'integrazione è una superficie nello spazio e non una curva. D'altra parte, invece, gli integrali curvilinei e di superficie sono simili perché per poterli calcolare bisogna, in entrambi i casi, iniziare parametrizzando la curva o la superficie in modo adeguato. Una volta fatto ciò sia gli integrali di linea che quelli superficiali si riducono (anche se in modo diverso, come vedremo) a integrali "ordinari" in una o due variabili.

La loro similarità è anche legata al fatto che entrambi ci aiutano ad impostare e risolvere problemi fisici legati a fenomeni vettoriali. Abbiamo visto che se  $f$  è un campo vettoriale nel piano, rappresentante la velocità di un fluido nei dintorni di una curva chiusa orientata  $\gamma$ , allora l'integrale di linea  $\int_{\gamma} f \cdot dX$  misura la circolazione del fluido, cioè la tendenza del fluido a circolare intorno a  $\gamma$  nella direzione (o contro) dell'orientazione. Nello stesso modo, vedremo che se  $f$  rappresenta un flusso tridimensionale attorno ad una superficie chiusa  $S$ , possiamo usare uno speciale tipo di integrale di superficie (**integrale di flusso**) per misurare il flusso attraverso la superficie  $S$ . Vedremo in dettaglio l'integrale di flusso nel prossimo paragrafo.

### 9.2.1 Definizione di Integrale Superficiale

Sia  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$  e  $f(x, y, z)$  una funzione a valori scalari definita su  $S$ . Vogliamo definire

$$\iint_S f dS,$$

cioè, l'integrale di  $f$  sulla superficie  $S$ . (qui il simbolo  $dS$  è analogo al  $dA$  per gli integrali d'area e  $dV$  per gli integrali di volume).

Una buona definizione deve essere in grado, prima di tutto di permetterci di calcolare l'area della superficie, deve cioè essere

$$Area(S) = \iint_S 1 dS$$

La chiave per la risoluzione del problema è la parametrizzazione. Supponiamo che  $S$  sia parametrizzata da una funzione "sufficientemente" regolare

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

definita su di un dominio  $D$  conveniente (un quadrato, un disco, etc.) nel piano  $uv$ . Componendo la superficie parametrizzata con  $f$  si ha

$$f(X(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

definita su  $D$ .

E' forte la tentazione di integrare semplicemente la funzione composta su  $D$  e chiamare il risultato integrale di superficie. Bisogna, però notare immediatamente, che una superficie può essere parametrizzata in molti modi, ed una buona definizione di integrale di superficie non deve dipendere dalla parametrizzazione scelta per la superficie.

La soluzione al problema ci viene dal fattore di scala visto nella sezione precedente.

Ancora una volta useremo un esempio per illustrare il procedimento.

**Esempio 9.5** Sia  $S$  la parte della superficie  $5 - x^2 - y^2$  che giace sopra il rettangolo  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  nel piano  $xy$ .

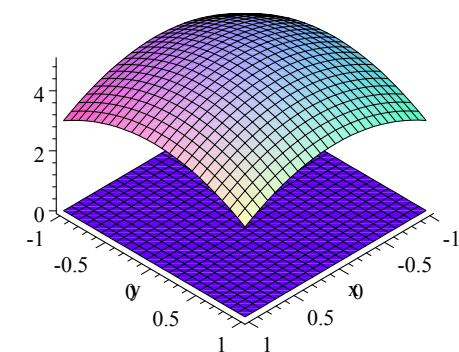
La superficie è parametrizzata nel seguente modo

$$X(u, v) = (x, y, z) = (u, v, 5 - u^2 - v^2)$$

dove  $(u, v) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  nel piano  $uv$ .

Discutere come  $X$  varia localmente l'area.

### Soluzione



$$z = 5 - x^2 - y^2 \text{ in } [-1, 1] \times [-1, 1]$$

Il disegno mostra sia il dominio che l'immagine della parametrizzazione  $X$ . Il dominio è il quadrato "piatto" nel piano  $xy$  (o, che è lo stesso,  $uv$ ), l'immagine  $S$  è la superficie curva al di sopra del quadrato. Notare, (per quanto possibile) la griglia del quadrato  $D$  e della superficie  $S$ . La griglia rettangolare  $D$  viene trasformata da  $X$  nella griglia



sulla superficie  $S$  - ogni elemento che contribuisce a formare la griglia  $D$  viene "sollevato" su di uno corrispondente sulla superficie, cioè,  $X$  "solleva" ogni elemento rettangolare della griglia  $D$  trasformandolo in un "parallelogramma curvo" che contribuisce a formare la griglia di  $S$ . Ora siamo in grado di confrontare le aree relative dei singoli rettangoli della griglia di  $D$  e della griglia di  $S$ . Come si vede anche in figura la "deformazione" varia da elemento ad elemento; è minore al vertice e massima agli "angoli" della figura, dove la pendenza della superficie è maggiore.

Come calcoliamo il fattore di scala nei vari punti  $(u, v)$  del dominio? Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che i due vettori tridimensionali

$$X_u = \frac{\partial}{\partial u} X(u, v), \quad X_v = \frac{\partial}{\partial v} X(u, v)$$

sono entrambi tangenti ad  $S$  nel punto  $X(u, v)$ . Ne segue che il loro prodotto vettoriale  $X_u \times X_v$  è perpendicolare ad  $S$  nello stesso punto. Infine, il modulo  $|X_u \times X_v|$  ci dà il fattore di scala relativamente al punto  $(u, v)$ .

Vediamo come si applica alla superficie che abbiamo appena visto. Si ha

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u, v, 5 - u^2 - v^2) \\ &\quad \Downarrow \\ X_u(u, v) &= (1, 0, -2u), \quad X_v(u, v) = (0, 1, -2v) \end{aligned}$$

Da questo si ricava

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) = (2u, 2v, 1), \quad \text{e} \quad |X_u(u, v) \times X_v(u, v)| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}.$$

Quest'ultimo risultato ci dice che il fattore di scala aumenta al crescere di  $u$  e di  $v$  come abbiamo già osservato dal disegno, non è mai minore di uno, ed è minimo per  $(u, v) = (0, 0)$  cioè al vertice del paraboloide. Nel punto  $(1, 1)$  il fattore di scala vale 3.

Per finire, notiamo che il vettore  $X_u(u, v) \times X_v(u, v) = (2u, 2v, 1)$  è perpendicolare alla superficie nel punto di coordinate  $X(u, v)$ . ■

Il disegno dell'esempio precedente ci può aiutare ancora.

Pensiamo alla griglia del quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  come ad una partizione del dominio nel piano  $uv$ .

La funzione  $X$  produce una corrispondente suddivisione sulla superficie  $S$ .

Usiamo questa suddivisione per definire l'integrale di superficie.

Data la funzione  $f(x, y, z)$  definita su  $S$  possiamo costruire la somma approssimante

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \text{Area}(S_i),$$

dove  $(x_i, y_i, z_i)$  è un punto appartenente alla  $i$ -esima suddivisione  $S_i$ . Usando la parametrizzazione si ha che  $(x_i, y_i, z_i) = X(u_i, v_i)$  per qualche  $(u_i, v_i)$ , inoltre è

$$\text{Area}(S_i) \approx |X_u(u_i, v_i) \times X_v(u_i, v_i)| \cdot \text{Area}(D_i)$$

dove  $D_i$  è la suddivisione di  $D$  corrispondente ad  $S_i$ . Si ha allora

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \text{Area}(S_i) \\ & \approx \sum_{i=1}^n f(X(u_i, v_i)) |X_u(u_i, v_i) \times X_v(u_i, v_i)| \cdot \text{Area}(D_i) \end{aligned}$$

Quest'ultima somma, è una somma approssimante per l'integrale

$$\iint_D f(X(u, v)) |X_u(u, v) \times X_v(u, v)| du dv.$$

L'analisi effettuata motiva la seguente definizione

**Definizione 9.6 (Integrale di superficie di una funzione)** Sia  $S$  una superficie nello spazio  $xyz$ , parametrizzata attraverso la funzione  $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita sull'insieme  $D$  del piano  $uv$ . Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita su  $S$ .

L'integrale di superficie di  $f$  su  $S$  è dato da

$$\iint_S f dS = \iint_D f(X(u, v)) |X_u(u, v) \times X_v(u, v)| du dv$$

se l'integrale esiste.

Una caso speciale si ha quando la funzione integranda è la funzione costante  $f(x, y, z) = 1$

**Definizione 9.7 (Area di una superficie)** Siano  $S$ ,  $D$ ,  $X$  come definiti sopra. L'area della superficie  $S$  è definito da

$$\iint_S 1 dS = \iint_D |X_u(u, v) \times X_v(u, v)| du dv.$$

**Aree di Superfici, Grafici di Funzioni**

Se la superficie ha la forma  $z = f(x, y)$  con  $(x, y)$  appartenente ad un dominio  $D$ , la definizione precedente assume una forma relativamente semplice. Usando come funzione di parametrizzazione

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

si ha

$$X_u = (1, 0, f_u), \quad X_v = (0, 1, f_v).$$

Il prodotto vettoriale da

$$X_u \times X_v = (-f_u, -f_v, 1) \quad \text{e} \quad |X_u \times X_v| = \sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)}.$$

Ne segue che l'area di  $S$  è data da

$$Area(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)} \, du \, dv.$$

Vorremmo qui far notare la somiglianza con la formula per la lunghezza d'arco della curva unidimensionale  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ :

$$lunghezza = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx.$$

Notiamo infine che nel caso semplice in cui  $f(x, y)$  è costante la superficie  $S$  è parallela a  $D$ , e la formula per l'area della superficie si riduce a

$$Area(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)} \, du \, dv = \iint_D 1 \, du \, dv = Area(D).$$

**Esempio 9.8** *Trovare l'area di quella parte del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  che sta sopra al disco unitario  $x^2 + y^2 \leq 1$ .*

**Soluzione** Si ha che  $f(x, y) = x^2 + y^2$  da cui  $f_x(x, y) = 2x$ ,  $f_y(x, y) = 2y$  per cui l'integrale di superficie diventa

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

dove  $D$  è il disco unitario.

Questo integrale si risolve più facilmente passando in coordinate polari; la sostituzione è

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dx \, dy = r \, dr \, d\theta,$$

si ottiene perciò

$$Area(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \, d\theta = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}$$

■

### Aree di Superfici, Non Grafici di Funzioni

La stessa formula funziona (a volte in modo più complicato dal punto di vista del calcolo) per superfici date in forma parametrica piuttosto che come grafici di funzioni

**Esempio 9.9** *La sfera di raggio  $R$  non è rappresentabile come il grafico di una funzione. Trovare comunque la sua area usando la parametrizzazione in coordinate sferiche*

$$X(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$$

con  $0 \leq u \leq \pi$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

**Soluzione.** In questo caso si ha

$$\begin{aligned} X_u &= R (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \\ &\text{e} \\ X_v &= R (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0) \end{aligned}$$

Un calcolo senza complicazioni anche se un po' lungo (provate a farlo) dà il seguente risultato,

$$X_u \times X_v = R^2 (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \sin u \cos u)$$

da cui

$$|X_u \times X_v| = R^2 \sin u.$$

La formula dell'area ci dà

$$Area(S) = R^2 \int_{v=0}^{v=2\pi} \int_{u=0}^{u=\pi} \sin u \, du \, dv = 4\pi R^2$$

come sappiamo dalla formula classica. ■

### Integrandi Non Costanti: Massa e Centro di Massa

Abbiamo visto due esempi in cui la funzione  $f \equiv 1$  e si calcola l'area di una superficie. Ovviamente non è sempre così. Per esempio, una superficie  $S$  potrebbe avere una densità variabile (cioè massa per unità di area)  $\rho(x, y, z)$  al variare dei punti sulla superficie. In questo caso la **massa** della superficie è data da

$$\iint_S \rho(x, y, z) \, dS.$$

Il **centro di massa** della superficie è il punto di coordinate  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  date da

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x \rho(x, y, z) dS}{\text{massa}}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y \rho(x, y, z) dS}{\text{massa}}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_S z \rho(x, y, z) dS}{\text{massa}}.$$

Ogni coordinata del centro di massa è la "media pesata" delle coordinate sulla superficie.

**Esempio 9.10** *Supponiamo che il paraboloide dell'esempio precedente abbia densità costante  $\rho(x, y, z) = 1$ . Trovare la massa ed il centro di massa.*

**Soluzione** Poiché la densità vale 1 la massa della superficie è uguale all'area della superficie

$$\frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}$$

Ragioni di simmetria suggeriscono che il centro di massa si trovi sull'asse  $z$  (cercate di capire il perché). Basta così calcolare

$$\bar{z} = \frac{\iint_S z dS}{\text{massa}}$$

Ci basta calcolare l'integrale al numeratore. Lavorando come fatto nell'esempio precedente (fare i conti) si arriva a

$$\iint_D (u^2 + v^2) \sqrt{1 + 4u^2} du dv$$

e usando ancora il cambiamento di variabili in coordinate polari si arriva a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sqrt{1 + r^2} dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r^2 \sqrt{1 + r^2} dr$$

Quest'ultimo integrale può essere fatto usando il metodo per sostituzione (provare) o usando qualche software simbolico, si ha

$$2\pi \int_0^1 r^2 \sqrt{1 + r^2} dr = 2\pi \left( \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120} \right).$$

Il valore della coordinata del baricentro  $\bar{z}$  è dato da

$$\bar{z} = \frac{2\pi \left( \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120} \right)}{\frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}} \approx 0.56$$

■

**9.2.2 Esercizi**

1. Per le parametrizzazioni  $X(u, v)$  calcolare  $X_u$ ,  $X_v$ , il vettore  $X_u \times X_v$  ed infine  $|X_u \times X_v|$ .
  - (a)  $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  ;
  - (b)  $X(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$  ;
  - (c)  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$  ;
  - (d)  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$  ;
  - (e)  $X(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$  .
  
2. Usando la proprietà del vettore  $X_u \times X_v$  trovare il piano tangente ad ognuna delle superfici nel punto fissato. Se possibile usare la tecnologia per disegnare sia la superficie che il piano tangente.
  - (a)  $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  nel punto  $(u_0, v_0) = (1, 1)$  ;
  - (b)  $X(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$  nel punto  $(u_0, v_0) = (1, 1)$  ;
  - (c)  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$  nel punto  $(u_0, v_0) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$  ;
  - (d)  $X(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$  nel punto  $(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
  
3. Trovare l'area delle superfici sotto indicate.
  - (a) La parte del piano  $z = 3$  che giace sopra il disco  $0 \leq r \leq 1$  ;
  - (b) La parte del piano  $z = 2x + 3y + 4$  che giace sopra il disco  $0 \leq r \leq 1$  ;
  - (c) La parte del piano  $z = 2x + 3y + 4$  che giace sopra il quadrato unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$  ;
  - (d) La parte della superficie  $z = x^2 - y^2$  che giace sopra (o sotto) il disco  $x^2 + y^2 \leq 1$  ;
  - (e) La parte della superficie  $z = x^2 - y^2$  che giace sopra (o sotto) il disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$  .
  
4. Usare le coordinate cilindriche per trovare l'area di quella parte del cono  $z = r$  che giace tra  $z = 1$  e  $z = 2$  (Suggerimento: usare come parametrizzazione del cono  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ . Qual'è il dominio  $D$  nel piano  $uv$  ?)

5. Ripetere l'esercizio precedente usando il paraboloide  $z = r^2$  invece del cono  $z = r$ . (Suggerimento: usare come parametrizzazione del cono  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ . Qual'è il dominio  $D$  nel piano  $uv$ ?)
6. Sia  $S$  un un grafico parametrizzato da  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$  con  $(u, v) \in D$ . Verificare che allora

$$Area(S) = \iint_D \sec \theta \, du \, dv$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra il vettore  $X_u \times X_v$  ed il vettore verticale  $k$  (versore dell'asse  $z$ ).

(Questo fatto ci spiega meglio come e perché il fattore di scala cambia con la "pendenza" della superficie).

## 9.3 Derivate ed Integrali di Campi Vettoriali

Quest'ultima sezione presenta gli ultimi due risultati "analoghi" al teorema fondamentale del calcolo: il **teorema della divergenza** ed il **teorema di Stokes**. Là dove il teorema fondamentale del calcolo mette in relazione derivate ed integrali di funzioni scalari, questi teoremi in dimensioni superiori coinvolgono alcuni tipi di derivate ed integrali di campi vettoriali.

Abbiamo già visto, integrando campi vettoriali in  $\mathbb{R}^2$  lungo curve nel piano, come interpretare i risultati nei termini di lavoro fatto da una forza o di circolazione di un fluido lungo una curva (chiusa). In questa sezione incontriamo un altro tipo di integrale di campo vettoriale, l'**integrale di flusso** di un campo attraverso una superficie  $S$ . Questo integrale misura quanto fluido attraversa una superficie nell'unità di tempo.

Vedremo anche due diversi modi di interpretare la derivazione di un campo vettoriale nello spazio; ognuno di questi due modi ha un suo significato geometrico e fisico diverso.

Cominciamo con l'introdurre gli oggetti e le operazioni di cui abbiamo bisogno per poter definire ed enunciare i teoremi.

### 9.3.1 Integrali di Flusso

Sia  $f(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ , possiamo pensare ad  $f$  come al campo di velocità di un fluido in movimento. Sia  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , immaginiamola come una membrana permeabile sospesa nel fluido, tipo una rete da pesca in una corrente. Il problema che vogliamo studiare è quello di misurare il **flusso del fluido** attraverso  $S$ , cioè la percentuale di fluido che traversa  $S$  nell'unità di tempo (pensando nei termini di una rete da pesca, la questione è quanta acqua fluisce attraverso la rete per unità di tempo).

E' chiaro dall'intuizione fisica che la risposta dipende dall'angolo con il quale il flusso incontra la rete. In particolare il flusso sarà massimo se il fluido si muove perpendicolarmente alla superficie, minimo se si muove parallelamente alla superficie.

In altre parole, si ha che il flusso in ogni punto  $(x, y, z)$  della superficie è la componente del vettore di scorrimento del fluido  $(P, Q, R)$  nella direzione perpendicolare alla superficie.

Se  $n = n(x, y, z)$  è il vettore unitario perpendicolare alla superficie nel punto  $(x, y, z)$  allora il prodotto scalare

$$n \cdot f = n \cdot (P, Q, R)$$



ci dà la componente in questione. Integrando questa componente sulla superficie otteniamo il flusso totale che stiamo cercando

**Definizione 9.11 (*Flusso integrale*)** Sia  $f$  una campo vettoriale e  $S$  una superficie di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $n(x, y, z)$  il vettore unitario, normale ad  $S$  in ogni punto  $(x, y, z)$ . L'integrale di superficie

$$\iint_S f \cdot n \, dS$$

è chiamato integrale di flusso e misura il flusso, per unità di tempo traverso  $S$  nella direzione di  $n$ .

Osserviamo che:

1. (a) L'integrale di flusso coinvolge il prodotto scalare di due vettori ( $f \cdot n$ ) che è uno scalare. Quindi l'integrale di flusso è una forma particolare dell'integrale di superficie che abbiamo studiato nello scorso paragrafo.

- (b) Una superficie bidimensionale in  $\mathbb{R}^3$  ha due direzioni normali in ogni punto in direzione opposta una all'altra che chiameremo a volte *normale esterna* e *normale interna*, riferendoci al fatto che punti verso l'esterno o l'interno della superficie. Superfici di questa natura saranno chiamate *orientabili*. Questo ci dice che nella definizione di integrale di flusso bisogna fare una scelta sulla normale da usare.

Ci sono superfici, tuttavia, nelle quali non è possibile operare una scelta consistente di normale (pensate al nastro di Möbius). Superfici con questa proprietà vengono chiamate *non orientabili*. Non ci preoccuperemo di questo problema. Diciamo solo che per essere rigorosi, nella definizione precedente, bisogna supporre che  $S$  sia orientabile.

- (c) Gli integrali di flusso si calcolano esattamente come ogni altro integrale di superficie. Se la superficie  $S$  è parametrizzata dalla funzione  $X(u, v)$  definita su un dominio  $D$  dello spazio  $uv$  allora il vettore

$$X_u \times X_v$$

è normale ad  $S$  nel punto  $X(u, v)$ . Il vettore normale  $n$  può essere scelto allora come

$$n = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

Scriviamo adesso l'integrale, si ha

$$\begin{aligned}\iint_S f \cdot n \, dS &= \iint_S f(X(u, v)) \cdot \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \, dS \\ &= \iint_D f(X(u, v)) \cdot \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} |X_u \times X_v| \, du \, dv \\ &= \iint_D f(X(u, v)) \cdot (X_u \times X_v) \, du \, dv\end{aligned}$$

L'ultima riga ci dice che l'integrale di flusso può essere anche più facile da calcolare che non gli integrali di superficie (non ci sono radici).

**Esempio 9.12** Sia  $S$  quella parte della superficie  $z = x^2 + y^2$  sopra il disco unitario. Sia  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ . Trovare l'integrale di flusso. Qual'è la direzione di  $n$ ?

**Soluzione** Parametizziamo  $S$  come grafico di funzione, ponendo  $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ , con  $(u, v)$  appartenente al disco unitario. Si ha allora che

$$X_u = (1, 0, 2u), \quad X_v = (0, 1, 2v), \quad \text{e} \quad X_u \times X_v = (-2u, -2v, 1).$$

L'integrale di flusso è allora

$$\begin{aligned}\iint_S f \cdot n \, dS &= \iint_D (u, v, u^2 + v^2) \cdot (-2u, -2v, 1) \, du \, dv \\ &= \iint_D (-u^2 - v^2) \, du \, dv = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Notare che nella nostra scelta di normale la coordinata  $z$  ha segno positivo, così che punta verso l'interno della superficie del paraboloide. ■

### 9.3.2 Divergenza e Rotore: Derivate di un Campo Vettoriale

Un campo vettoriale  $f(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  può essere visto come una funzione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con matrice Jacobiana data da

$$\begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix}$$

Diverse combinazioni di derivate possono essere fatti con queste derivate. Ce ne sono due che hanno un particolare interesse in fisica.

**Definizione 9.13 (Divergenza e rotore)** Sia  $f = (P, Q, R)$  un campo vettoriale su  $\mathbb{R}^3$ . La **divergenza** di  $f$  è una funzione scalare definita da

$$\operatorname{div} f = P_x + Q_y + R_z .$$

Il **rotore** di  $f$  è il campo vettoriale definito da

$$\operatorname{rot} f = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) .$$

Da notare:

1. (a) Sia la divergenza che il rotore sono formate in modo chiaro dagli elementi della matrice Jacobiana: la divergenza è la somma degli elementi della diagonale (chiamata la **traccia** della matrice). Ogni componente del campo rotore è la differenza di due elementi della diagonale che sono simmetrici rispetto alla diagonale.
- (b) Il calcolo di divergenza e rotore sono facili da fare e i software disponibili operano il calcolo facilmente.
- (c) Se pensiamo ad  $f$  come un movimento di un fluido, in ogni punto  $(x, y, z)$  la divergenza  $P_x + Q_y + R_z$  misura la tendenza totale del fluido ad allontanarsi dal punto.  
Per cercare di capire perché sia così, cominciamo con l'osservare che  $P(x, y, z)$  descrive la velocità del fluido lungo l'asse  $x$ . Allora  $P_x$  rappresenta l'accelerazione nella direzione dell'asse  $x$ . Se  $P_x(x, y, z) > 0$  il fluido tende ad aumentare la sua velocità nella direzione dell'asse  $x$  nel punto  $(x, y, z)$ , si può allora dire che "diverge" da  $(x, y, z)$ . Se  $P_x(x, y, z) < 0$  il fluido rallenta e tende perciò a "convergere" o "ammassare" il fluido. Considerando anche i contributi nelle direzioni  $y$  e  $z$  si capisce come la divergenza ci dica complessivamente di quanto il fluido si allontani o si ammassi intorno al punto  $(x, y, z)$ .
- (d) Se  $f$  è un campo gradiente, cioè se  $f = \nabla h = (h_x, h_y, h_z)$  per qualche funzione  $h(x, y, z)$  si ha allora che (fare i conti)

$$\operatorname{rot} \nabla h = (0, 0, 0) .$$

In altre parole, *ogni campo gradiente ha rotore nullo*.

In un certo senso, allora, il rotore di un campo vettoriale misura quanto un campo vettoriale differisce da un campo gradiente. Come abbiamo visto anche in esempi ed esercizi in sezioni precedenti, campi vettoriali che non sono gradienti sembrano avere la caratteristica di "ruotare" attorno a certi punti.

- (e) Abbiamo definito divergenza e rotore per campi vettoriali in  $\mathbb{R}^3$ . Sfortunatamente campi vettoriali tridimensionali sono difficili da disegnare su un foglio, molti dettagli si perdono nella proiezione oggetti tridimensionali su due dimensioni. In alcuni esempi, allora lavoreremo in  $\mathbb{R}^2$ . L'idea è quella di pensare ad un campo bidimensionale come ad un campo tridimensionale che non dipende da  $z$ . Il campo vettoriale  $f(x, y) = (x - y, x + y)$  si può pensare come la sezione a  $z = 0$  del campo tridimensionale  $f(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$ .

E' naturale allora definire la divergenza ed il rotore di un campo vettoriale bidimensionale  $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  nel seguente modo

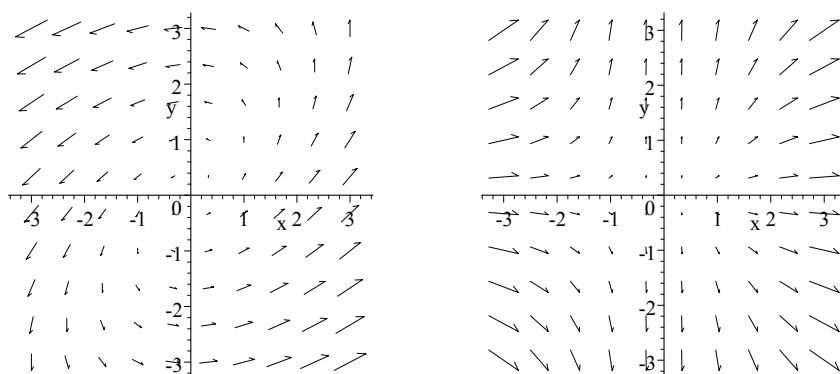
$$\operatorname{div} f = P_x + Q_y; \quad \operatorname{rot} f = (0, 0, Q_x - P_y).$$

Notare una proprietà del rotore: esso punta nella direzione dell'asse  $z$  *perpendicolare* al piano  $xy$ , cioè il vettore rotore è perpendicolare all'asse rispetto al quale il fluido tende a ruotare.

**Esempio 9.14** *Discutere la divergenza ed il rotore dei campi vettoriali*

$$f(x, y) = (x - y, x), \quad g(x, y) = (x^2, 2y)$$

mostrati nelle seguenti figure



Il campo  $f(x, y) = (x - y, x)$

Il campo  $g(x, y) = (x^2, 2y)$

**Soluzione** I calcoli simbolici sono molto semplici. Cominciamo a calcolare la divergenza dei due vettori, ricordando che essa è data da  $P_x + Q_y$ . Si ottiene

$$\operatorname{div} f = 1, \quad \operatorname{div} g = 2x + 2.$$

Entrambi i risultati possono essere intuiti dalle figure disegnate.

Infatti, se si guarda il disegno relativo ad  $f$  si ha che in ogni punto  $(x, y)$  le frecce entranti verso il punto sono più piccole di quelle uscenti. Quindi la divergenza, che misura il *flusso in uscita* è ovunque positiva.

Per quanto riguarda  $g$ , la formula  $\operatorname{div} g = 2x + 2$  ci dice che la divergenza cambia segno nel punto  $x = -1$ . Questo fatto può essere notato dal disegno, osservando che a sinistra di  $-1$  le lunghezze delle frecce in arrivo su di un punto sono più corte di quelle in uscita, mentre è vero il viceversa per  $x > -1$ . Il calcolo del rotore è altrettanto semplice. I risultati sono

$$\operatorname{rot} f = (0, 0, 1) , \quad \operatorname{rot} g = (0, 0, 0) .$$

Anche questi risultati possono essere osservati (in modo qualitativo) nei disegni. Il campo vettoriale  $f$  appare ruotare, in senso antiorario, intorno all'asse verticale (una rotazione antioraria produce una coordinata  $z$  negativa). Il campo  $g$ , in contrasto, non appare ruotare, per cui il suo rotore è zero.

Ci possiamo allora domandare se  $g$  è il gradiente di un potenziale. Un conto facile (provare a farlo !) ci dice che

$$g = (x^2, 2y) = \nabla \left( \frac{x^3}{3} + y^2 \right)$$

e come abbiamo visto *ogni* campo vettoriale che sia un gradiente ha rotore zero.



**9.3.3 Esercizi**

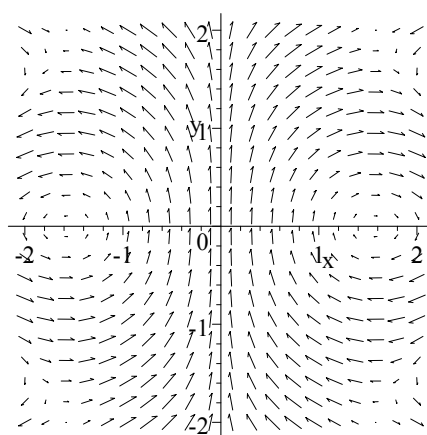
1. In questo esercizio  $S$  è sempre quella parte della superficie  $z = x^2 + y^2$  che giace sopra il disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
  - (a) Sia  $f(x, y, z) = (x, 0, 0)$ . Trovare il flusso attraverso  $S$ ; discutere il segno della risposta;
  - (b) Sia  $f(x, y, z) = (0, 1, 0)$ . Trovare il flusso attraverso  $S$ ; discutere il segno della risposta;
  - (c) Sia  $f(x, y, z) = (0, 0, z)$ . Trovare il flusso attraverso  $S$ .
2. Rifare l'esercizio precedente, usando la parametrizzazione in coordinate cilindriche,  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$
3. Sia  $S$  il triangolo di vertici  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .
  - (a) Trovare l'area del triangolo senza integrare; usare in modo appropriato il prodotto vettoriale;
  - (b) Parametrizzare  $S$  come grafico di una funzione  $z = f(x, y)$  con  $(x, y)$  in una appropriata regione del piano;
  - (c) Usare la parametrizzazione trovata al punto precedente per calcolare l'area di  $S$ ;
  - (d) Sia  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ , trovare il flusso attraverso  $S$ ;
  - (e) Sia  $f(x, y, z) = (a, b, c)$ , con  $a, b, c$  costanti. Trovare il flusso attraverso  $S$ . Sotto quali condizioni per  $a, b, c$  il flusso è zero?
4. Sia  $S$  la parte del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  con  $0 \leq z \leq 1$ .
  - (a) Parametrizzare  $S$  usando coordinate cilindriche. Usare il risultato per calcolare l'area di  $S$  per integrazione;
  - (b) Sia  $f(x, y, z) = (1, 0, 0)$ . Trovare il flusso attraverso  $S$ ;
  - (c) Sia  $f(x, y, z) = (0, 0, R(x, y, z))$ . Mostrare che il flusso attraverso  $S$  è zero qualunque sia la forma della funzione  $R(x, y, z)$
5. Sia  $f = \nabla h = (h_x, h_y, h_z)$  dove  $h$  è una funzione liscia (derivabile quanto ci serve). Spiegare perché

$$\operatorname{rot} \nabla h = (0, 0, 0) .$$

6. Per ogni campo vettoriale descritto sotto, trovare divergenza e rotore.

- (a)  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ ;
- (b)  $f(x, y, z) = (y, z, x)$ ;
- (c)  $f(x, y, z) = (-y, x, z)$ ;
- (d)  $f(x, y, z) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$

7. Sia  $f(x, y) = (\sin(xy), \cos(x))$  il campo vettoriale il cui disegno è



Il campo vettoriale  $(\sin(xy), \cos(x))$

- (a) Trovare la formula per rotore e divergenza di  $f$ ;
  - (b) Mostrare che la divergenza è zero lungo l'asse  $y$ . Confrontarsi poi con la figura;
  - (c) Trovare la divergenza nei punti  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ . Come appaiono i segni delle risposte confrontati con la figura?
  - (d) Trovare il rotore in  $(\pi/2, 0)$  e  $(-\pi/2, 0)$ . Cercare di capire come la differenza di segno si riflette sul rotore controllando la figura.
8. In ognuno dei campi sotto, usare il software per disegnare i campi dati nel quadrato  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ . Cercare di vedere dove la divergenza è positiva, dove negativa, e valutare la presenza o assenza di rotore.
- (a)  $f(x, y, z) = (1, 0, 0)$ ;
  - (b)  $f(x, y, z) = (x, 0, 0)$ ;

(c)  $f(x, y, z) = (x^2, 0, 0)$ ;

(d)  $f(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$ .

9. Mostrare che per ogni campo vettoriale differenziabile  $f$  è:  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$ .



## 9.4 Teoremi di Stokes e della Divergenza.

Terminiamo questo capitolo ed il corso, riassumendo l'intera problematica del calcolo integrale (al livello a cui l'abbiamo trattata) in cinque teoremi fondamentali. Abbiamo già sviluppato tutti i processi e gli argomenti necessari, si tratta adesso di metterli insieme per strutturarli.

Cercheremo di enunciare i teoremi confrontandoli. Prima di andare avanti ricordiamo i simboli che abbiamo già usato ed useremo.

Simbologia:

- $\gamma$  : curva orientata in  $\mathbb{R}^2$  o in  $\mathbb{R}^3$ ;
- $D$  : regione in  $\mathbb{R}^2$ ;
- $S$  : superficie bidimensionale in  $\mathbb{R}^3$ ;
- $V$  : solido tridimensionale in  $\mathbb{R}^3$ ;
- $n$  : campo vettoriale unitario, normale alla superficie  $S$  in ogni punto di  $S$
- $f$  : campo vettoriale in  $\mathbb{R}^2$  o in  $\mathbb{R}^3$  o funzione a valori scalari di una o più variabili (il contesto ne chiarisce la forma).

Ipotesi tecniche.

Per essere sicuri che ciò che facciamo abbia senso, faremo diverse ipotesi tecniche sulla regolarità degli oggetti matematici che useremo. Vedremo comunque, che negli esempi semplici, ma tipici che faremo, esse sono sempre soddisfatte. Vogliamo comunque far presente che le ipotesi sono realmente importanti; in loro assenza niente garantisce che gli oggetti di cui parliamo esistano o possano essere soggetti alle operazioni a cui li sottoponiamo. Nel caso di superfici non orientabili, per esempio, non c'è possibilità di scegliere un vettore normale esterno, così che in questa situazione non ha senso parlare di integrali di superficie.

Assumeremo inoltre che tutte le funzioni che consideriamo siano continue insieme a tutte le loro derivate; questo ci assicura che tutti gli integrali che trattiamo esistano.

Anche per le curve e superfici assumeremo che siano lisce o lisce a tratti (cioè unione di un numero finito di curve lisce con "spigoli" solo dove i tratti si

uniscono).

Infine come detto, le superfici sono supposte orientabili.

Con queste ipotesi è possibile enunciare i cinque teoremi. Gli ultimi due sono nuovi.

### 9.4.1 Cinque Teoremi

**Teorema 9.15** (*Teorema fondamentale del calcolo*)

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

**Teorema 9.16** (*Teorema fondamentale per gli integrali curvilinei*)

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot dX = f(b) - f(a)$$

**Teorema 9.17** (*Teorema di Green*) Sia  $f = (P, Q)$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\gamma$  una curva chiusa (orientata in senso antiorario) e  $D$  la regione interna a  $\gamma$ . Si ha

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = \oint_{\gamma} P dx + Q dy$$

**Teorema 9.18** (*Teorema di Stokes*) Sia  $f(x, y, z) = (P, Q, R)$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ .  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , con normale unitaria  $n$ , limitata da una curva chiusa  $\gamma$ . Si ha

$$\iint_S (\text{rot } f) \cdot n dS = \pm \oint_{\gamma} f \cdot dX$$

**Teorema 9.19** (*Teorema della divergenza*) Sia  $f(x, y, z) = (P, Q, R)$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ .  $V$  una regione di  $\mathbb{R}^3$  limitata da una superficie  $S$  avente normale unitaria esterna  $n$ . Si ha

$$\iiint_V \text{div } f dV = \iint_S f \cdot n dS$$

Tutti e cinque i teoremi hanno lo stesso tema:

E' dato un campo vettoriale  $f$ . Nel lato sinistro dell'equazione, una qualche derivata di  $f$  è integrata su qualche dominio di  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ , o  $\mathbb{R}^3$ . Nel lato destro  $f$  viene valutata su di un insieme di dimensione minore, *il bordo* del dominio originario.

Vediamo adesso gli ultimi due teoremi, che rappresentano una novità.

### 9.4.2 Teorema di Stokes

Come sempre, usiamo gli esempi come metodo induttivo per capire.

**Esempio 9.20** *Sia  $S$  la parte della superficie  $z = x^2 + y^2$  sopra il disco unitario  $x^2 + y^2 = 1$ , e sia  $f = (P, Q, R) = (-y, x, z)$ . E' valido il teorema di Stokes in questo caso?*

**Soluzione.** Si devono calcolare i due integrali dei due membri dell'eguaglianza e confrontare i risultati.

Notiamo che il bordo di  $S$  è la circonferenza unitaria in  $\mathbb{R}^3$ , data dall'intersezione del paraboloide con il piano  $z = 1$ . Possiamo parametrizzare questa circonferenza nel seguente modo

$$X(t) = (\cos t, \sin t, 1) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

L'integrale curvilineo  $\oint_{\gamma} f \cdot dX$  diventa

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Per calcolare l'integrale doppio, consideriamo la parametrizzazione della superficie già usata in precedenza  $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  con  $(u, v)$  appartenenti al disco unitario; i vettori normali sono  $X_u = (1, 0, 2u)$  e  $X_v = (0, 1, 2v)$ . Ne segue che  $X_u \times X_v = (-2u, -2v, 1)$ . Il rotore del campo vettoriale  $f(x, y, z) = (-y, x, z)$  è dato da  $\text{rot } f = (0, 0, 2)$ . L'integrale di flusso è allora

$$\iint_S (\text{rot } f) \cdot n dS = \iint_D (0, 0, 2) \cdot (-2u, -2v, 1) du dv = \iint_D 2 du dv = 2\pi$$

L'integrale curvilineo e quello di superficie danno lo stesso risultato, quindi il Teorema di Stokes vale (con la scelta opposta del vettore normale il flusso avrebbe cambiato segno, ma questo il teorema di Stokes lo consente).



### 9.4.3 Da Stokes a Green

Il teorema di Stokes è, in modo naturale, l'estensione a  $\mathbb{R}^3$  del teorema di Green che ha come ambiente di lavoro  $\mathbb{R}^2$  (infatti a volte il teorema di Green è noto come teorema di Stokes nel piano). Non dimostreremo il teorema di Stokes, poiché la sua dimostrazione necessita delle stesse idee (appropriatamente tradotte) del teorema di Green. Invece, cerchiamo di vedere in quale senso il teorema di Green è un caso particolare.

Notiamo che un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  può essere esteso ad  $\mathbb{R}^3$  ponendo banalmente  $f(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ . Per questo campo vettoriale si ha che

$$\operatorname{rot} f = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (0, 0, Q_x - P_y)$$

in cui si vede che  $\operatorname{rot} f$  ha come terza coordinata l'integrando del teorema di Green.

Il secondo passo è quello di considerare il dominio  $D$  del teorema di Green come una semplice superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Poiché  $D$  giace nel piano  $xy$  la normale esterna è ovviamente  $(0, 0, 1)$  (si potrebbe prendere l'opposta cambiando segno all'integrale). Mettendo insieme questi risultati si ha

$$\iint_D (\operatorname{rot} f) \cdot ndS = \iint_D (0, 0, Q_x - P_y) \cdot (0, 0, 1) dS = \iint_D (Q_x - P_y) dA.$$

In altre parole, l'integrale di flusso nel teorema di Stokes si riduce, in questo caso speciale all'integrale d'area del teorema di Stokes.

In modo simile, la curva che parametrizza il bordo, che giace nel piano  $z = 0$  può essere parametrizzata sia in  $\mathbb{R}^2$  che in  $\mathbb{R}^3$  ponendo

$$X(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{o} \quad X(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

In questo ultimo caso si ha

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\gamma} P dx + Q dy$$

poiché  $z = 0$ . Così l'integrale curvilineo nei teoremi di Stokes e di Green sono, in questo caso, identici.

Abbiamo così mostrato che per domini nel piano il teorema di Stokes si riconduce al teorema di Green.

### Rotore, Flusso e Circolazione: Una Interpretazione Fisica

La teoria matematica degli integrali curvilinei e di superficie è cresciuta insieme allo sviluppo dei problemi fisici ed i termini "rotore", "flusso" e "circolazione" sono stati mutuati dalla fisica. Cerchiamo di dare un'interpretazione del teorema di Stokes, almeno in modo intuitivo, in termini del linguaggio fisico dei fluidi in moto.

Cominciamo pensando di avere un campo di un fluido  $f$  definito nell'intorno di una superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ . In ogni punto  $(x, y, z)$  sulla superficie il vettore  $\text{rot } f$  misura la tendenza a ruotare intorno al punto  $(x, y, z)$  (il vettore  $\text{rot } f$  agisce come un'asse intorno al quale tende ad avvenire la rotazione del fluido). Ne segue che se  $n$  è la normale esterna alla superficie in  $(x, y, z)$ , il prodotto scalare  $(\text{rot } f) \cdot n$  (che compare nel lato sinistro dell'uguaglianza del teorema di Stokes) misura quanto il fluido tende a ruotare sulla superficie, piuttosto che attraversarla perpendicolarmente; quindi l'integrale di superficie

$$\iint_S (\text{rot } f) \cdot n \, dS$$

misura, in qualche senso, la *rotazione* totale del fluido lungo la superficie.

L'integrale di linea  $\oint f \cdot dX$  è più facile da interpretare. Misura la circolazione del fluido intorno al bordo di  $S$ . Il teorema di Stokes afferma che sono uguali tra loro:

1. (a) i. La circolazione del fluido intorno al bordo di  $S$ ;
- ii. La rotazione totale del fluido su  $S$ .

Che (i) e (ii) siano uguali è fisicamente credibile, poiché i due fenomeni possono essere pensati ognuno generatore dell'altro.

#### 9.4.4 Il Teorema della Divergenza

Il teorema della divergenza afferma che sotto opportune ipotesi

$$\iiint_V \text{div } f \, dV = \iint_S f \cdot n \, dS$$

Dividiamo l'equazione e studiamo singolarmente i due lati dell'uguaglianza, cercando di dargli un'interpretazione fisica.

*Lato sinistro:* un'integrale triplo sul volume  $V$  di  $\mathbb{R}^3$ . Se  $f$  rappresenta il campo di velocità del fluido allora, per ogni punto  $(x, y, z)$  la funzione  $\text{div } f$

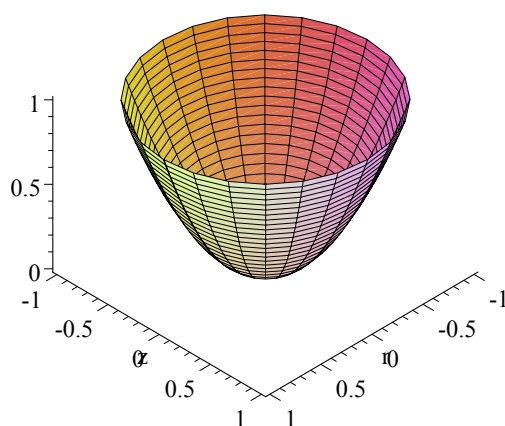
misura la quantità di fluido che tende ad allontanarsi da  $(x, y, z)$  per unità di tempo. L'integrale di  $\operatorname{div} f$  su  $V$  misura, quindi, il flusso totale uscente da  $V$  per unità di tempo, cioè la quantità di fluido che lascia  $V$  per unità di tempo.

*Lato destro:* Si ha un integrale di flusso del tipo già descritto. Esso misura la quantità di fluido che traversa la superficie  $S$ , bordo di  $V$ , nell'unità di tempo. Poiché la normale è scelta uscente da  $V$ , l'integrale di flusso misura la quantità di flusso che esce da  $V$  attraverso  $S$ .

Le due considerazioni sopra ci dicono che i due lati dell'equazione nel teorema della divergenza misurano la stessa cosa: la quantità di fluido uscente da  $V$  per unità di tempo.

Da questo punto di vista il teorema della divergenza afferma una cosa ragionevole: due integrali che misurano la stessa quantità devono avere lo stesso valore.

**Esempio 9.21** Sia  $V$  il solido in  $\mathbb{R}^3$  limitato dal di sopra dal piano  $z = 1$  e dal di sotto dal paraboloide  $z = x^2 + y^2$ . Sia  $f$  il campo vettoriale dato da  $(P, Q, R) = (x, y, z)$ . Cosa dice il teorema della divergenza in questo caso?



Il solido  $V$

**Soluzione.** In questo caso la superficie  $S$  è composta da due parti: (i)  $S_1$ , la parte del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  sotto il piano  $z = 1$ , e (ii)  $S_2$ , la

parte del piano  $z = 1$  per il quale  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Calcoliamo entrambi i lati dell'equazione del teorema di Stokes, cominciando dal lato sinistro. Si ha

$$\operatorname{div} f = \operatorname{div} (x, y, z) = 3$$

L'integrale di volume è allora

$$\iiint_V 3 dV = 3 \iiint_V dV$$

Questo integrale si calcola meglio passando in coordinate cilindriche

$$3 \iiint_V dV = 3 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \int_{z=r^2}^{z=1} r dz dr d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Calcoliamo adesso il lato destro dell'equazione. Il flusso ha due componenti, la situazione relativa alla superficie  $S_1$  l'abbiamo già calcolata in un esercizio precedente dove  $S_1$  è stata parametrizzata come  $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  con  $(u, v)$  nel disco unitario  $D$ . Il vettore normale ad  $S_1$  è dato da  $X_u \times X_v = (-2u, -2v, 1)$ ; da notare tuttavia che questo vettore punta verso l'interno del volume, dovendo scegliere la normale unitaria esterna si prende, invertendo il segno del vettore

$$n = \frac{(2u, 2v, -1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$

Con questa parametrizzazione l'integrale di flusso diventa

$$\iint_{S_1} f \cdot n dS = \iint_D (u, v, u^2 + v^2) \cdot (2u, 2v, -1) du dv = \frac{\pi}{2}.$$

La superficie  $S_2$  è ancora più semplice da parametrizzare ponendo  $X(u, v) = (u, v, 1)$  con  $(u, v)$  nel disco unitario  $D$ . Poiché  $S_2$  è parallela al piano  $xy$  la sua normale esterna è data dal vettore  $(0, 0, 1)$ . L'integrale di flusso diventa allora

$$\iint_{S_2} f \cdot n dS = \iint_D (u, v, 1) \cdot (0, 0, 1) du dv = \iint_D 1 du dv = \pi.$$

Il flusso totale è:

$$\iint_S f \cdot n dS = \iint_{S_1} f \cdot n dS + \iint_{S_2} f \cdot n dS = \frac{\pi}{2} + \pi.$$

I due lati dell'equazione sono quindi uguali, come afferma il teorema della divergenza.



Vogliamo adesso dare un'idea della dimostrazione del teorema della divergenza.

**Dimostrazione.** (Idea della dimostrazione). Il teorema si mostra in modo simile al teorema di Green.

Se  $f = (P, Q, R)$  e la normale esterna ad  $S$  ha forma  $n = (n_1, n_2, n_3)$  si può scrivere il teorema della divergenza nella forma

$$\iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dV = \iint_S (P n_1 + Q n_2 + R n_3) dS$$

Può essere allora più semplice provare separatamente le tre identità

$$\begin{aligned} \iiint_V P_x dV &= \iint_S P n_1 dS; \\ \iiint_V Q_y dV &= \iint_S Q n_2 dS; \\ \iiint_V R_z dV &= \iint_S R n_3 dS \end{aligned}$$

Ci limitiamo a provare la terza identità assumendo che la frontiera  $S$  di  $V$  sia composta di due parti, una superficie inferiore  $S_1$  ed una superficie superiore  $S_2$  (come nell'esempio precedente) e che entrambe le superfici possano essere descritte come grafici delle funzioni  $z = g(x, y)$  e  $z = h(x, y)$  rispettivamente, per  $(x, y)$  in una regione  $D$  del piano  $xy$ . Allora, come abbiamo visto, i vettori normali alle superfici  $S_1$  e  $S_2$  sono rispettivamente,  $(-g_x, -g_y, -1)$  e  $(h_x, h_y, 1)$  (abbiamo usato il segno meno per la normale esterna alla superficie inferiore). Si può allora scrivere:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} R n_3 dS &= - \iint_D R(x, y, g(x, y)) dA \\ &\quad \text{e} \\ \iint_{S_2} R n_3 dS &= \iint_D R(x, y, h(x, y)) dA \end{aligned}$$

(i due integrali hanno segno opposto per le differenti direzioni delle loro normali). Si ha così

$$\iint_S R n_3 dS = \iint_D (R(x, y, h(x, y)) - R(x, y, g(x, y))) dA.$$

Consideriamo adesso l'integrale triplo del lato sinistro dell'equazione, si ha

$$\iiint_V R_z dV = \iint_D \left( \int_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} R_z dz \right) dA$$



ed applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$\iiint_V R_z dV = \iint_D (R(x, y, h(x, y)) - R(x, y, g(x, y))) dA .$$

L'integrale di volume e di superficie sono quindi uguali. Argomentazioni simili valgono anche per gli integrali che coinvolgono  $P$  e  $Q$ ; questo completa la dimostrazione. ■

### 9.4.5 Esercizi

1. Per ognuna delle parti sotto usare il teorema di Stokes per trovare il valore dell'integrale di superficie

$$\iint_S (\operatorname{rot} f) \cdot n \, dS.$$

Per fare ciò trasformare l'integrale di superficie in quello equivalente di linea e calcolare quest'ultimo.

- (a) Sia  $S$  la metà superiore della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e sia  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ ;
  - (b) Sia  $S$  la metà superiore della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e sia  $f(x, y, z) = (-y, x, z)$ ;
  - (c) Sia  $S$  la parte del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  con  $z \leq 1$  e  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ .
2. Sia  $V$  il solido in  $\mathbb{R}^3$  limitato dal di sopra dal piano  $z = 1$  e dal di sotto dal paraboloide  $z = x^2 + y^2$ . Sia  $f$  il campo vettoriale dato da  $(P, Q, R) = (x, 0, 0)$ 
    - (a) Calcolare l'integrale di volume  $\iiint_V \operatorname{div} f \, dV$ ;
    - (b) Calcolare l'integrale di superficie  $\iint_S f \cdot n \, dS$
  3. Sia  $V$  il cubo definito da  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Sia  $f$  il campo vettoriale  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ . Sia  $S$  la superficie frontiera di  $V$  (ricordare che  $S$  ha sei facce).
    - (a) Come si scrive il teorema della divergenza in questo caso?
    - (b) Calcolare l'integrale triplo  $\iiint_V \operatorname{div} f \, dV$ ;
    - (c) Calcolare l'integrale di flusso  $\iint_S f \cdot n \, dS$  (ricordare che  $S$  ha sei facce).
  4. Sia  $V$  un solido in  $\mathbb{R}^3$  con frontiera  $S$  liscia. Sia  $f$  un campo vettoriale gradiente, cioè  $f = \nabla h = (h_x, h_y, h_z)$  per una qualche funzione  $h(x, y, z)$ . Usare il teorema della divergenza per mostrare che

$$\iint_S f \cdot n \, dS = 0$$

5. Per ognuno delle parti sotto usare il teorema della divergenza per calcolare l'integrale di flusso  $\iint_S f \cdot n \, dS$ . La superficie è sempre la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con normale esterna.
- (a)  $f = (x, 2y, 3z)$ ;
  - (b)  $f = (x, y^2, 0)$ ;
  - (c)  $f = (0, y^2, 0)$ .
6. Sia  $\gamma$  la circonferenza unitaria sul piano  $z = 0$ , orientata in senso antiorario, e sia  $f = (-y, x, z)$
- (a) Calcolare l'integrale  $\int_\gamma f \cdot dX$ ;
  - (b) Sia  $S$  la semisfera unitaria superiore. Allora  $\gamma$  è il bordo di  $S$ . Verificare il teorema di Stokes;
  - (c) Sia adesso  $S$  la parte del paraboloide  $z = 1 - x^2 - y^2$  per  $z \geq 0$ .  $\gamma$  è ancora la frontiera di  $S$ . Verificare il teorema di Stokes.