SCHEDA 4bis - ESERCIZI

1) Calcolate la lunghezza della seguente curva, verificando che si possa applicare il Teorema per il calcolo della lunghezza:

$$\gamma \begin{cases} x(t) = 4\cos^3 t \\ y(t) = 4\,\mathrm{sen}^3 t \end{cases} \quad t \in [0,\pi].$$

2) Sia $\gamma : [-2,0] \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^4 \\ z(t) = \frac{2}{3} t^6 \end{cases} \quad t \in [-2,0].$$

Determinate
- il vettore tangente in $P_0 = (1,1,\frac{2}{3})$
- il versore tangente in P_0
- la retta tangente in P_0
- $L(\gamma)$
- il piano per $P_1 = (0,0,8)$ perpendicolare alla retta tangente

Disegnate il piano.

ES. 1)

γ è di classe C^1 ($x(t), y(t)$ continue e derivabili in quanto prodotto di funzioni continue e derivabili) $\to$ $x(t) = 4 \cdot \cos t \cdot \cos t \cdot \cos t$
$y(t) = 4 \cdot \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} t$

$\gamma'(t) = (-12 \operatorname{sen} t \cos^2 t, 12 \operatorname{sen}^2 t \cos t)$ con $x'(t)$ e $y'(t)$ continue (prodotto di funzioni continue).

$I = [0, \pi]$ è un intervallo chiuso e limitato

allora possiamo applicare il teorema

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-12 \operatorname{sen} t \cos^2 t)^2 + (12 \operatorname{sen}^2 t \cos t)^2} =$$
$$= \sqrt{144 \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t + 144 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t} =$$
$$= \sqrt{144 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}_{=1}} =$$
$$= \sqrt{144 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t} = 12 \cdot |\operatorname{sen} t| |\cos t|$$

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi} 12 |\operatorname{sen} t| |\cos t| \, dt = 12 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t |\cos t| \, dt =$$

$t \in [0, \pi]$ $\operatorname{sen} t \geq 0$
$\Rightarrow |\operatorname{sen} t| = \operatorname{sen} t$

$$|\cos t| = \begin{cases} \cos t & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos t & t \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

$$= 6 \cdot \left(\int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} t \cos t \, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \operatorname{sen} t \cos t \, dt \right) =$$

$$= 6 \left(\left[\operatorname{sen}^2 t \right]_0^{\pi/2} - \left[\operatorname{sen}^2 t \right]_{\pi/2}^{\pi} \right) = 6 \left([1 - 0] - [0 - 1] \right) = 6 \cdot 2 = \boxed{12}$$

ES.2) $I=[-2,0]$ è un intervallo chiuso e limitato

$x(t), y(t), z(t)$ sono continue e derivabili in quanto polinomi

$$\gamma'(t)=(2t, 4t^3, 4t^5)$$

$P_0=(1,1,\frac{2}{3})$ corrisponde a $t_0=-1$

$$\begin{cases} 1=t^2 \to t=\pm 1 \\ 1=t^4 \to t=\pm 1 \\ \frac{2}{3}=\frac{2}{3}t^6 \to t=\pm 1 \end{cases} \quad t_0=-1$$

$t\in[-2,0]$

$$\vec{v}_{P_0}=-2\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6 \qquad \vec{T}_{P_0}=-\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$$

$$r_{tau}\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-4t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=\frac{2}{3}-4t \end{cases} \qquad \cap \text{ PIANI } \begin{cases} y=2x-1 \\ z=2x-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Essendo $x'(t)=2t$, $y'(t)=4t^3$, $z'(t)=4t^5$ continue $\Rightarrow \gamma$ è di classe C^1

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{4t^2+16t^6+16t^{10}}=\sqrt{4t^2(1+4t^4+4t^8)}=$$

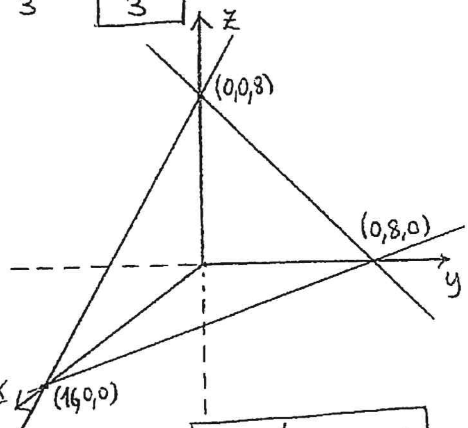
$$=\sqrt{4t^2(1+2t^4)^2}=2|t|\sqrt{(1+2t^4)^2}=2|t|\,|1+2t^4|=$$

$$=2|t|(1+2t^4)$$

perché $1+2t^4\geq 1 \ \forall t$

$$L(\gamma)=\int_{-2}^{0}2|t|(1+2t^4)\,dt \underset{\substack{t\in[-2,0] \\ |t|=-t}}{=} -\int_{-2}^{0}(2t+4t^5)\,dt=$$

$$=-\left[t^2+\frac{2}{3}t^6\right]_{-2}^{0}=-\left(0-\left(4+\frac{2}{3}\cdot 64\right)\right)=4+\frac{128}{3}=\boxed{\frac{140}{3}}$$



Essendo il piano $\perp$ alla retta tangente un vettore normale al piano è dato dal vettore tangente in P_0 che dirige la r_{tau}:

$\vec{N}_{piano}=(-2,-4,-4)$ da cui si deduce che anche $\vec{N}=(1,2,2)$ è normale al piano $\Rightarrow$

Eq.^{ne} vettoriale $(P-(0,0,8))\cdot(1,2,2)=0$

Eq.^{ne} cartesiana $x+2y+2(z-8)=0 \qquad 2z=-x-2y+16 \quad \boxed{z=-\frac{1}{2}x-y+8}$

piano inclinato per $(0,0,8)$, $(16,0,0)$, $(0,8,0)$

4) Calcolate la lunghezza delle seguenti curve, controllando che si possa applicare il Teorema per il calcolo della lunghezza:

$$\gamma_1 \begin{cases} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad t \in [0,3]$$

$$\gamma_2 \begin{cases} x(t) = 4\cos^2 t \\ y(t) = 4 \operatorname{sen} t \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_3 \begin{cases} x(t) = -4\cos^2 t \\ y(t) = \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$$

5) Considerate il piano di equazione $z = -\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y + 10$:

- disegnate il piano
- determinate la retta r per $(2,-2,3)$ perpendicolare al piano.

6) Calcolate la lunghezza della curva $\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t \\ y(t) = \frac{1}{6}\sqrt{2}t^2 \\ z(t) = \frac{1}{9}t^3 \end{cases} \quad t \in [0,4].$$

7) Sia $\gamma : [-1,4] \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = -t^2 \\ z(t) = 7t \end{cases}$ $t \in [-1,4]$.

Determinate

- vettore tangente in $P_0 = (4,-4,14)$
- versore tangente in P_0
- retta tangente in P_0
- il piano per $(7,0,5)$ perpendicolare alla retta tangente.

Disegnate il piano.

4) γ_1 di classe C^1 $x(t)=2t^2$, $y(t)=\frac{1}{3}t^3$ sono continue e derivabili con $\gamma_1'(t)=(4t, t^2)$ quindi $x'(t)=4t$, $y'(t)=t^2$ continue

$I=[0,3]$ è chiuso e limitato

$$\|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{16t^2+t^4} = \sqrt{t^2(16+t^2)} = |t|\sqrt{16+t^2}$$

$$L(\gamma_1) = \int_0^3 |t|\sqrt{16+t^2}\,dt \underset{\substack{t\in[0,3]\\ |t|=t}}{=} \int_0^3 t\sqrt{16+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^3 2t\,(16+t^2)^{1/2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(16+t^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\left[(16+t^2)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\left(25^{3/2}-16^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(25\sqrt{25}-16\sqrt{16}\right) = \frac{1}{3}(125-64) = \boxed{\frac{61}{3}}$$

γ_2 è di classe C^1 $x(t)=4\cdot\cos t\cdot\cos t$, $y(t)=4\cdot\operatorname{sen} t\cdot\cos t$ sono continue e derivabili in quanto prodotto di funzioni continue e derivabili

$\gamma_2'(t) = (-8\cos t\operatorname{sen} t,\ 4\cos^2 t - 4\operatorname{sen}^2 t)$ quindi $x'(t)=-8\operatorname{sen} t\cos t$ e $y'(t)=4\cos t\cdot\cos t-4\operatorname{sen} t\cdot\operatorname{sen} t$ sono continue in quanto prodotto e differenza di funzioni continue

$I=[0,2\pi]$ è chiuso e limitato

$$\|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{(-8\operatorname{sen} t\cos t)^2+(4\cos^2 t-4\operatorname{sen}^2 t)^2}$$

$$= \sqrt{64\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t+16\cos^4 t+16\operatorname{sen}^4 t-32\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{16(\operatorname{sen}^4 t+\cos^4 t+2\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t)} = 4\sqrt{(\underbrace{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t}_{=1})^2} =$$

$$= 4$$

$$L(\gamma_2) = \int_0^{2\pi} 4\, dt = \boxed{8\pi}$$

Altro modo: $\gamma_2'(t) = (-4\, sen(2t), 4\cos(2t))$

$$\|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{16\, sen^2(2t) + 16\cos^2(2t)} = \sqrt{16\,(\underbrace{sen^2(2t)+\cos^2(2t)}_{=1})} =$$

$$= \sqrt{16} = 4.$$

γ_3 è di classe C^1 $\quad x(t) = -4\cdot\cos t\cdot\cos t$, $y(t) = sen t\cdot sen t$

sono continue e derivabili in quanto prodotto di funzioni continue e derivabili

$$\gamma_3'(t) = (8\, sen t \cos t,\ 2\, sen t\cos t)$$

con $x'(t) = 8\cdot sen t\cdot \cos t$, $y'(t) = 2\cdot sen t\cdot\cos t$ continue.

$I = [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ è chiuso e limitato

$$\|\gamma_3'(t)\| = \sqrt{64\, sen^2 t\cos^2 t + 4\, sen^2 t \cos^2 t} = \sqrt{68\, sen^2 t\cos^2 t} =$$

$$= 2\sqrt{17}\, |sen t|\cdot|\cos t|$$

$$L(\gamma_3) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 2\sqrt{17}\, |sen t|\cdot|\cos t|\, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 2\sqrt{17}\, |sen t| \cos t\, dt =$$

$t\in[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$
$\cos t \le 0$
$|\cos t| = -\cos t$

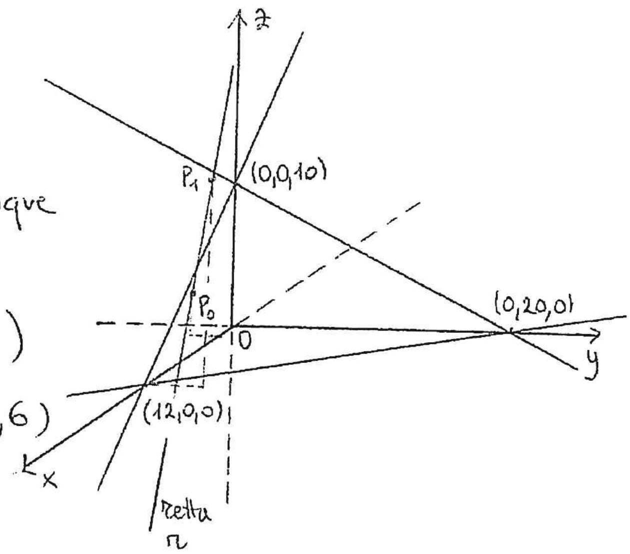
$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sqrt{17}\, sen t\cos t\, dt + \int_{\pi}^{3/2\,\pi} 2\sqrt{17}\, sen t\cos t\, dt =$$

$$|sen t| = \begin{cases} sen t & \frac{\pi}{2}\le t\le\pi \\ -sen t & \pi\le t\le \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$= -\sqrt{17}\,\left[sen^2 t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \sqrt{17}\,\left[sen^2 t\right]_{\pi}^{3/2\,\pi} =$$

$$= -\sqrt{17}\,[0-1] + \sqrt{17}\,[1-0] = \boxed{2\sqrt{17}}$$

5) $z=-\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}y+10$ è il piano inclinato passante per $(0,0,10)$ $(12,0,0)$ e $(0,20,0)$



Possiamo prendere come vettore direttore per la retta un qualunque vettore normale al piano:

$$\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}y+z-10=0 \rightarrow \vec{N}_{piano}=\left(\frac{5}{6},\frac{1}{2},1\right)$$

e possiamo anche prendere $\vec{N}=(5,3,6)$

$P_0=(2,-2,3)$

$$r_{P_0,\perp piano}\begin{cases} x=2+5t \\ y=-2+3t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=3+6t \end{cases}$$

per $t=2$ la retta passa per $(12,4,15)=P_1$

6) $I=[0,4]$ è chiuso e limitato

$x(t)$ e $y(t)$ sono continue e derivabili in quanto polinomi

$\gamma'(t)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\sqrt{2}t,\frac{1}{3}t^2\right)$ con $x'(t),y'(t),z'(t)$ continue

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}t^2+\frac{1}{9}t^4}=\frac{1}{3}\sqrt{1+2t^2+t^4}=\frac{1}{3}\sqrt{(1+t^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}|1+t^2|=\frac{1}{3}(1+t^2)$$ perchè $1+t^2\geq 1 \ \forall t$

$$L(\gamma)=\int_0^4\frac{1}{3}(1+t^2)\,dt=\frac{1}{3}\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^4=\frac{1}{3}\left(4+\frac{64}{3}\right)=\boxed{\frac{76}{9}}$$

7) $P_0=(4,-4,14)$ corrisponde a $t_0=2$ $\begin{cases} 4=t^2 \rightarrow t=\pm 2 \\ -4=-t^2 \rightarrow t=\pm 2 \\ 14=7t \rightarrow t=2 \end{cases} \rightarrow t=2$

$\gamma'(t)=(2t,-2t,7)$

$\vec{v}_{P_0}=4\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$ $\quad \|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{16+16+49}=\sqrt{81}=9$

$\vec{T}_{P_0}=\frac{4}{9}\vec{i}-\frac{4}{9}\vec{j}+\frac{7}{9}\vec{k}$

$$r_{tan}\begin{cases} x=4+4t \\ y=-4-4t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=14+7t \end{cases} \quad \cap \text{ PIANI} \begin{cases} y=-x \\ z=\frac{7}{4}x+7 \end{cases}$$

Essendo il piano $\perp$ r_{tau} $\Rightarrow$ il vettore tangente in P_0 che dirige la retta risulta normale al piano

$\vec{N}_{piano} = (4, -4, 7)$

Eq.ne vettoriale del piano

$(P - (7,0,5)) \cdot (4,-4,7) = 0$

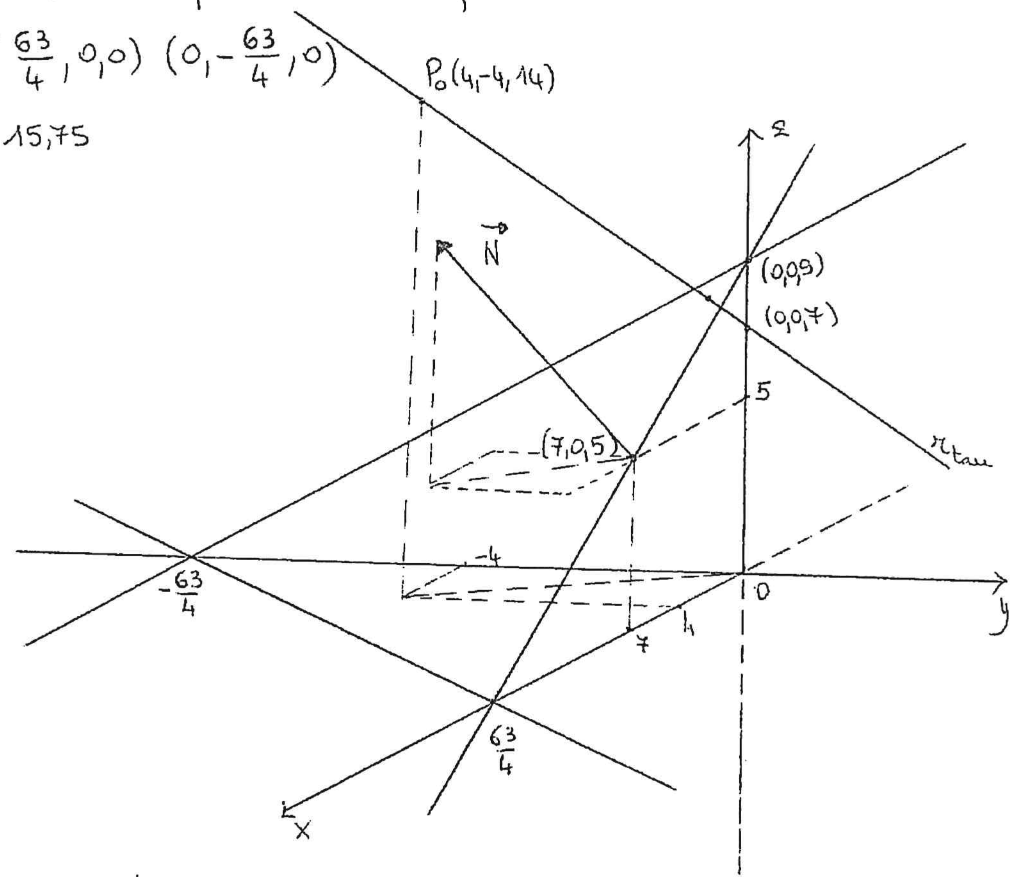
Eq.ne cartesiana $4(x-7) - 4y + 7(z-5) = 0$

$7z = -4x + 4y + 63$

$z = -\frac{4}{7}x + \frac{4}{7}y + 9$ piano inclinato per

$(0,0,9)$ $\left(\frac{63}{4}, 0, 0\right)$ $\left(0, -\frac{63}{4}, 0\right)$

$\frac{63}{4} = 15{,}75$



Per $t=-1$ la r_{tau} passa per $(0,0,7)$