SOL.^{NE} SCHEDA N. 2. ANALISI 2 - Ing. GESTIONALE

0) TRIGONOMETRIA:

Dopo aver disegnato l'angolo corrispondente sul cerchio trigonometrico, calcolate

$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1.$ $\quad$ $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos(-3\pi) = -1$ $\quad$ $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

---

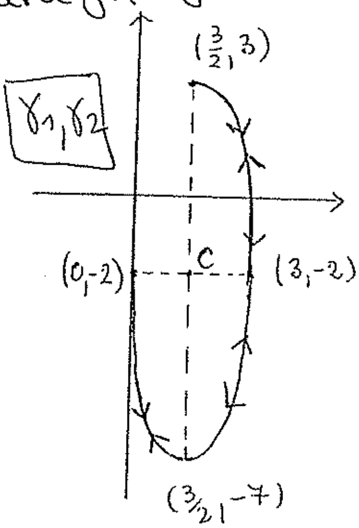
1) γ_1: curva avente per sostegno l'ellisse di $C\left(\frac{3}{2},-2\right)$ e semiassi $a=\frac{3}{2}$, $b=5$ percorsa in verso antiorario per $\frac{3}{4}$ di giro da $P_{in}=(0,-2)$ a $P_{fin}=\left(\frac{3}{2},3\right)$

γ_2: curva avente per sostegno l'ellissse di $C\left(\frac{3}{2},-2\right)$ e semiassi $a=\frac{3}{2}$, $b=5$ percorsa in verso orario per $\frac{3}{4}$ di giro da $P_{in}=\left(\frac{3}{2},3\right)$ a $P_{fin}=(0,-2)$

Le due curve hanno LO STESSO SOSTEGNO perchè percorrono esattamente gli stessi $\frac{3}{4}$ di ellisse, anche se in verso opposto e in intervalli di tempo differenti (le due curve γ_1 e γ_2 sono diverse, ma hanno lo stesso sostegno).

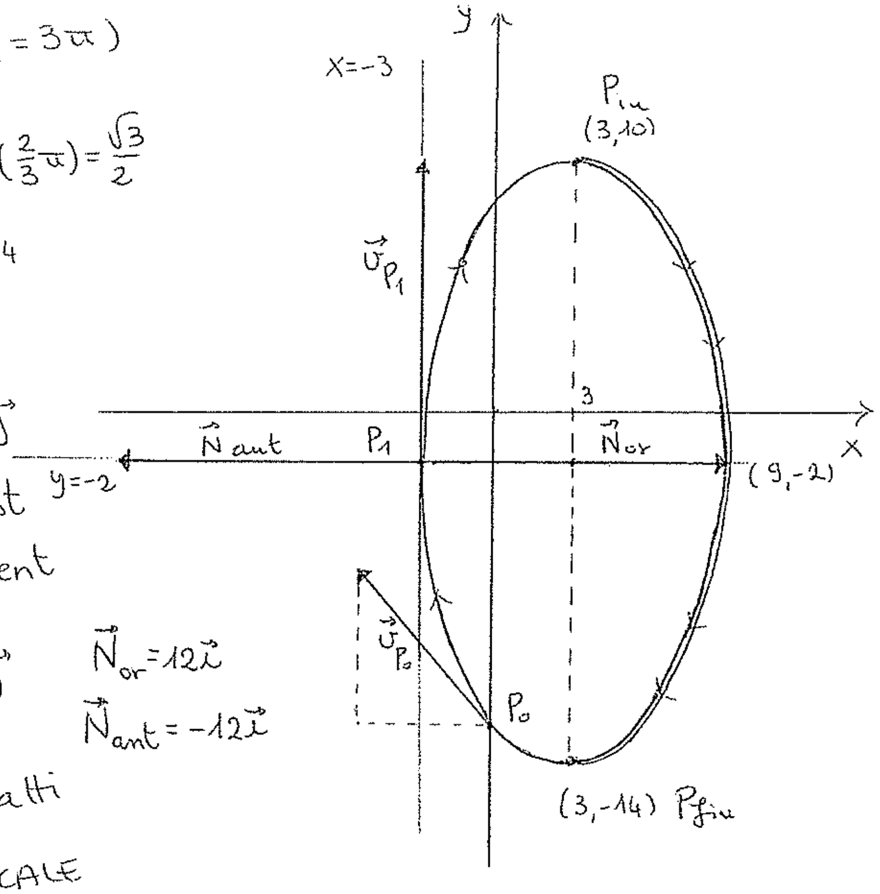
γ_2 per $\left[\pi,\frac{5}{2}\pi\right]$ $\rightarrow$ la chiamiamo $\tilde{\gamma}_2$ percorre $3/4$ di giro in verso orario da $P_{in}=(0,-2)$ a $P_{fin}=\left(\frac{3}{2},-7\right)$

$\tilde{\gamma}_2$



In questo caso le due CURVE NON HANNO LO STESSO SOSTEGNO in quanto γ_1 percorre, rispetto a $\tilde{\gamma}_2$, in più il quarto di giro da $(0,-2)$ e $\left(\frac{3}{2},-7\right)$ e in meno il quarto di giro da $(0,-2)$ a $\left(\frac{3}{2},3\right)$ - In particolare nessuno dei due sostegni è contenuto nell'altro

2) $P_{in}=(3,10)$ $P_{fin}=(3,-14)$ la curva percorre l'ellisse di $C(3,-2)$ e semiassi $a=6$, $b=12$ per 1 giro e $\frac{1}{2}$ in verso orario ($\Delta t=\frac{5}{2}\pi+\frac{\pi}{2}=3\pi$)



$t_0=\frac{2}{3}\pi$ $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}$ $\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_0=(0,-2-6\sqrt{3})$ $y_{P_0}\simeq-12{,}4$

$\gamma'(t)=(-6\operatorname{sen}t,-12\cos t)$

$\vec{v}_{P_0}=\gamma'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\underbrace{-3\sqrt{3}}_{\simeq-5{,}2}\vec{i}+6\vec{j}$

$P_1=(-3,-2)$ $\begin{cases}-3=3+6\cos t\\-2=-2-12\operatorname{sen}t\end{cases}$

$\begin{cases}\cos t=-1\\ \operatorname{sen}t=0\end{cases}$ $t_1=\pi$ $\vec{v}_{P_1}=12\vec{j}$ $\vec{N}_{or}=12\vec{i}$
$\vec{N}_{ant}=-12\vec{i}$

$m_{tan}=\frac{12}{0}$ NON ESISTE, infatti la RETTA TANGENTE è VERTICALE di eq.^{ne} $\boxed{x=-3}$

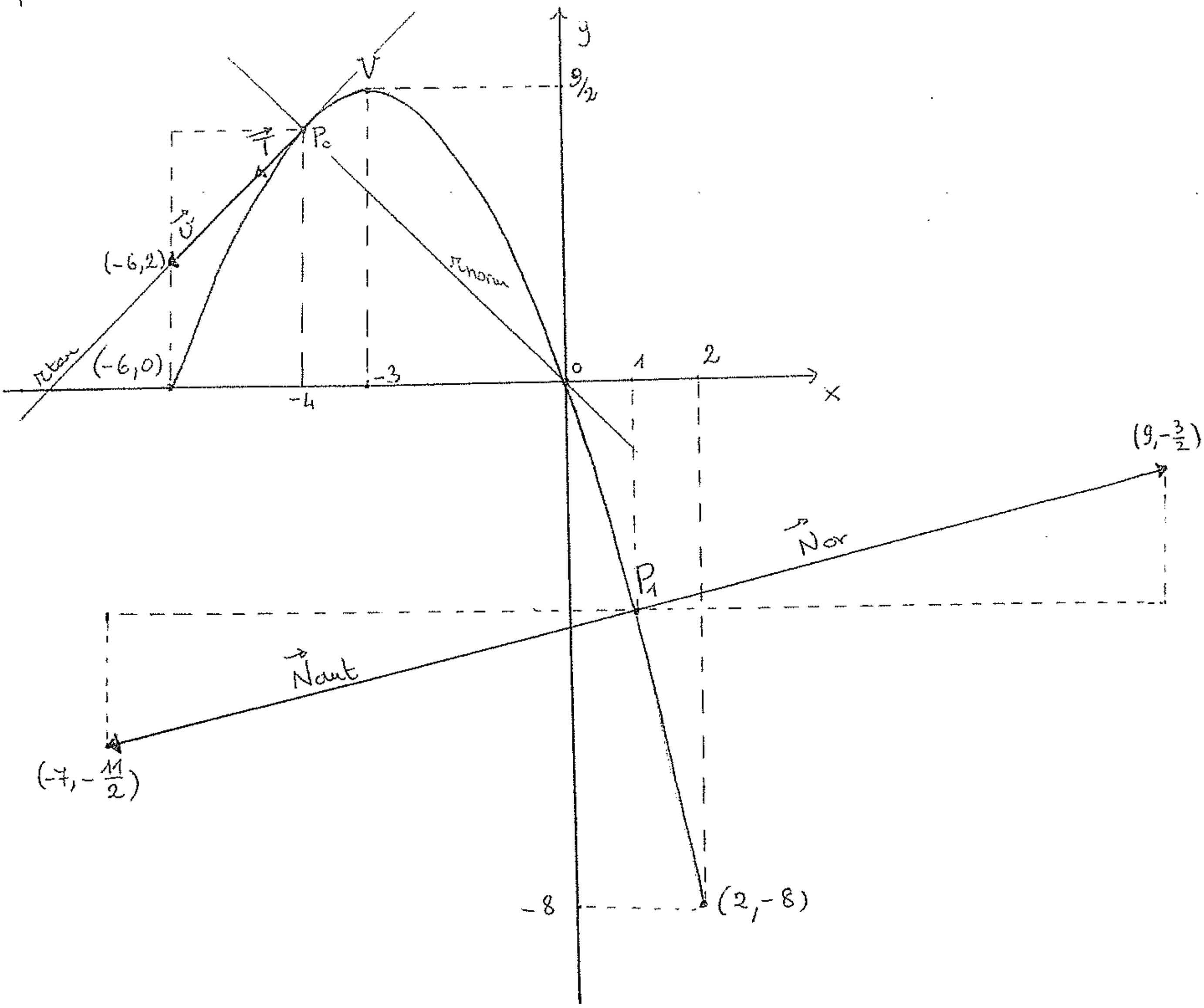
$m_{norm}=-\frac{0}{12}=0 \rightarrow$ retta ORIZZONTALE $\boxed{y=-2}$

Eq.^{ni} param. della retta tang in P_1 $\begin{cases}x=-3\\y=-2+12t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

3) $P_{in} = (2, -8)$ $P_{fin} = (-6, 0)$ parabola di equazione

$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$ di $V(-3, \frac{9}{2})$, rivolta verso il basso (passa per $(-6,0)$ e $(0,0)$)

percorsa nel verso delle x decrescenti



$P_0 \to t_0 = 0 \quad \gamma'(t) = (-2, -\frac{2}{2}(2t+1)\cdot 2) = (-2, -4t-2)$

Il vettore tangente o vettore velocità in $P_0 = (-4, 4)$ è: $\vec{v}_{P_0} = \vec{v}(0) = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

La velocità scalare in P_0 è: $\|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Il versore tangente in P_0 è: $\vec{T}_{P_0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

Disegnate sul foglio a quadretti il punto P_0, il vettore e il versore tangente.

L'equazione cartesiana della retta tangente in P_0 è: $m_{tan} = 1 \quad y = x + 8$

Le equazioni parametriche della retta tangente nel punto P_0 sono:

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

L'equazione cartesiana della retta normale in P_0 è: $m_{norm} = -1$ $\quad y = -x$

$P_1 = (1, -7/2)$ $\quad \vec{v}_{P_1} = -2\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$

I due vettori normali alla curva nel punto P_1 corrispondente a $t_1 = -\dfrac{5}{2}$ sono: $\vec{N}_{or} = 8\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ $\quad \vec{N}_{ant} = -8\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

Disegnate sul foglio a quadretti il punto P_1 ed entrambi i vettori normali in P_1.

---

4) $P_{in} = \left(3, \frac{5}{2}\right)$

$P_{fin} = \left(\frac{15}{2}, -2\right)$

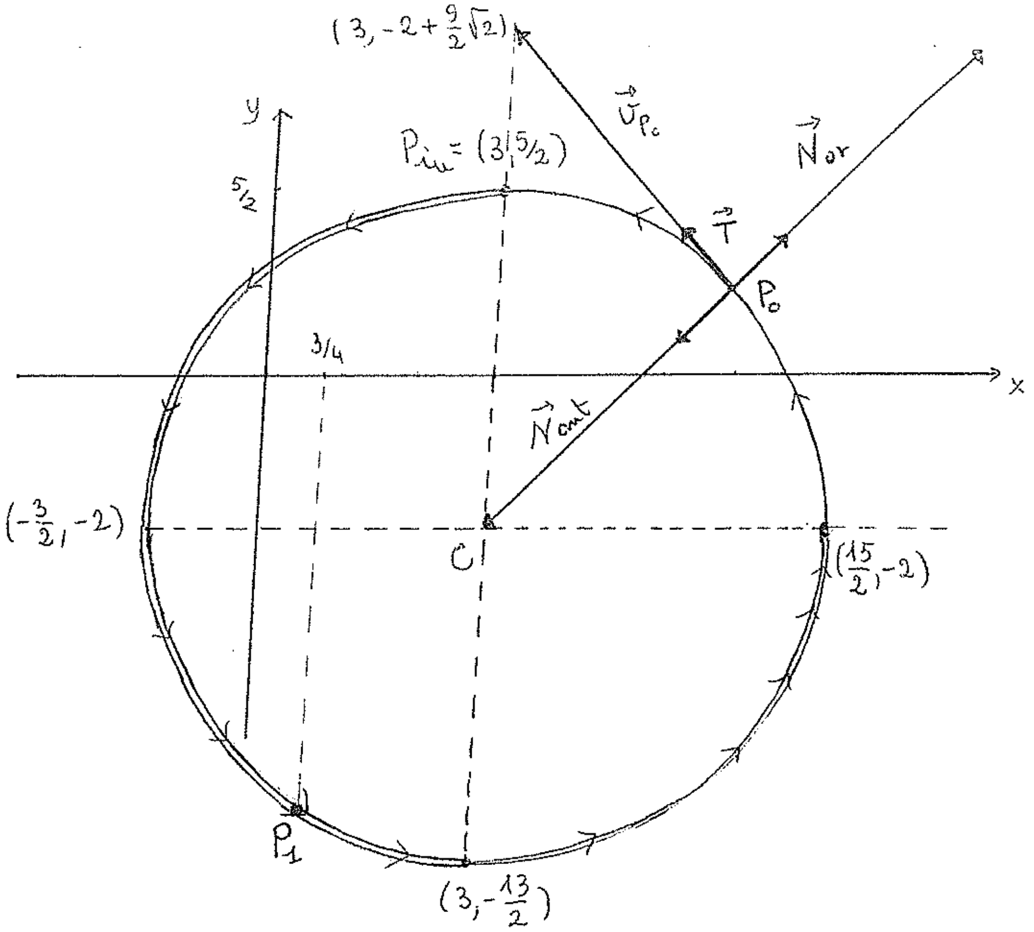
$\Delta t = \frac{7}{2}\pi$

circonferenza di $C(3,-2)$ e $R = \frac{9}{2}$

percorsa in verso ANTIORARIO per 1 giro e $\frac{3}{4}$

eq.^{ne}:

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = \frac{81}{4}$



$$P_0 \begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, 4\pi\right] \end{cases} \rightarrow t_0 = \frac{9}{4}\pi \qquad \gamma'(t) = \left(-\frac{9}{2}\operatorname{sen} t, \frac{9}{2}\cos t\right) \qquad \vec{v}_{P_0} = -\frac{9}{4}\sqrt{2}\,\vec{\imath} + \frac{9}{4}\sqrt{2}\,\vec{\jmath}$$

$$\|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{\cancel{16}_8}\cdot\cancel{2} + \frac{81}{\cancel{16}_8}\cdot\cancel{2}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$$

$$\vec{T}_{P_0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$$

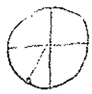
$m_{tan} = -1 \qquad y = -x + 1 + \frac{9}{2}\sqrt{2}$

eq.^{ni} param. $\begin{cases} x = 3 + \frac{9}{4}\sqrt{2} - \frac{9}{4}\sqrt{2}\,t \\ y = -2 + \frac{9}{4}\sqrt{2} + \frac{9}{4}\sqrt{2}\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$m_{norm} = 1 \qquad y = x - 5$

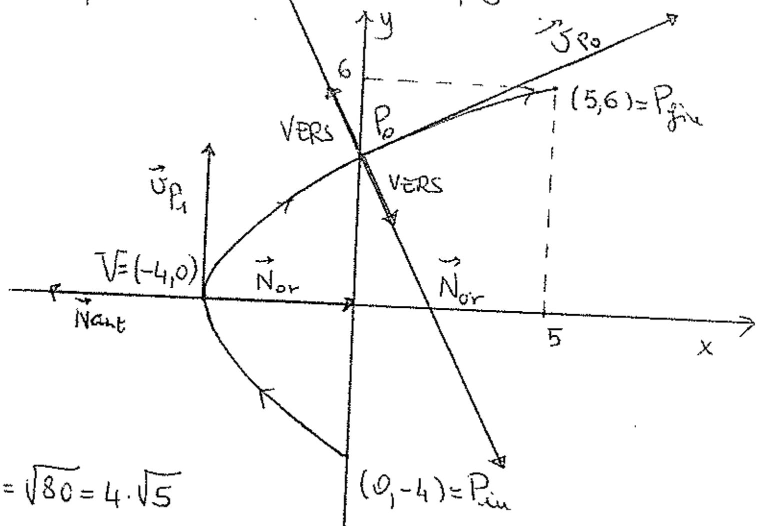
$\vec{N}_{or} = \frac{9}{4}\sqrt{2}\,\vec{i} + \frac{9}{4}\sqrt{2}\,\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{ant} = -\frac{9}{4}\sqrt{2}\,\vec{i} - \frac{9}{4}\sqrt{2}\,\vec{j}$

VERS $\vec{N}_{or} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{ant} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$t_1 = \frac{10}{3}\pi$  $\cos = -\frac{1}{2}$ $\quad \text{sen} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad P_1 = \left(-\frac{3}{4}, -2 - \frac{9}{4}\sqrt{3}\right)$ $\simeq -5{,}9$

5) $P_{in} = (0,-4)$ $\quad P_{fin} = (5,6)$ $\quad$ eq.^{ue} $t = \frac{y}{4} \rightarrow$ nella 1^a $x = \frac{1}{4}y^2 - 4$

la curva percorre la parabola di eq.^{ue} $x = \frac{1}{4}y^4 - 4$ (asse x, $V(-4,0)$, $\cap$ asse y $y = \pm 4$) nel verso delle y crescenti



$t_0 = 1 \rightarrow P_0 = (0,4)$

$\gamma'(t) = (8t, 4)$ $\quad \vec{v}_{P_0} = 8\vec{i} + 4\vec{j}$ $\quad \|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{80} = 4\cdot\sqrt{5}$

$\vec{N}_{or} = 4\vec{i} - 8\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{ant} = -4\vec{i} + 8\vec{j}$ $\quad$ VERS $\vec{N}_{OR} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ $\quad$ VERS $\vec{N}_{ant} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

$m_{tan} = \frac{1}{2}$ $\quad$ retta tang $y = \frac{1}{2}x + 4$ $\quad$ eq.^{ni} param. $\begin{cases} x = 8t \\ y = 4 + 4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\quad m_{norm} = -2$ $\quad y = -2x + 4$

$P_1 = V = (-4,0) \rightarrow t_1 = 0$ $\quad \vec{v}_{P_1} = 4\vec{j}$

$\vec{N}_{or_{P_1}} = 4\vec{i}$ $\quad \vec{N}_{ant_{P_1}} = -4\vec{i}$ $\quad m_{tan} = \frac{4}{0}$ IMPOSSIBILE

la retta tangente è verticale e ha eq.^{ue} $\boxed{x = -4}$ $\quad$ eq.^{ni} param. $\begin{cases} x = -4 \\ y = 4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$m_{norm} = \frac{0}{4} = 0 \rightarrow$ la retta normale è orizzontale e ha eq.^{ue} $\boxed{y = 0}$.

Sol.^{ne} SCHEDA 2 - An2 Gest - 6-

6) $\underline{1^\circ \text{ tratto}}$ $P_{in} = (18,4)$ $P_{fin} = (2,0)$ eq.^{ne} $y = \sqrt{x-2}$ $\quad x(t) = -4t+2$ la curva percorre il grafico della radice spostato a destra di 2 nel verso delle x decrescenti. Altri PUNTI: $(3,1), (6,2), (11,3)$

$\underline{2^\circ \text{ tratto}}$ $P_{in} = (2,0)$

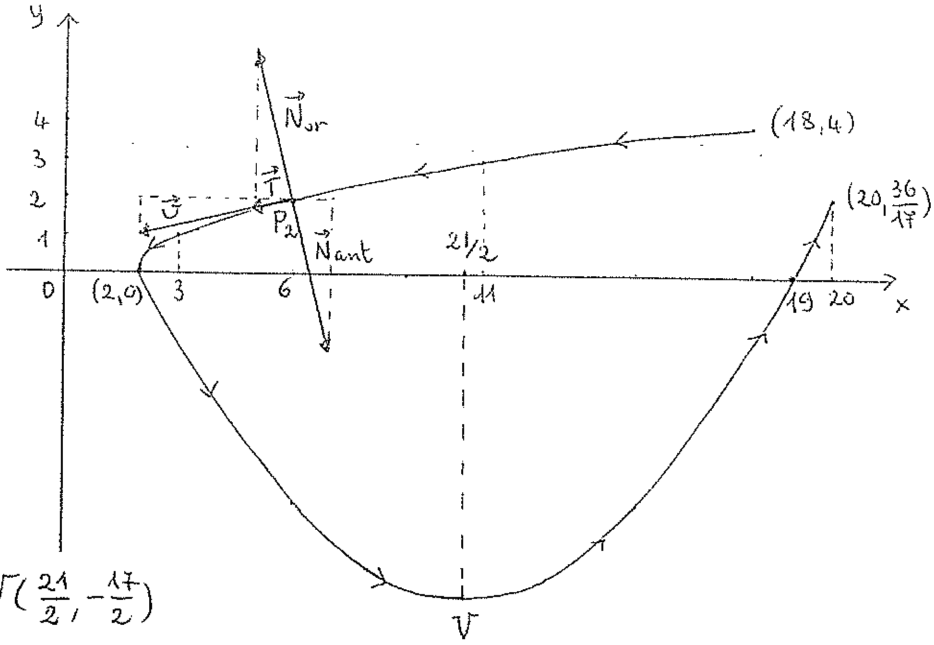
$P_{fin} = \left(20, \frac{36}{17}\right)$
$\frac{36}{17} \simeq 2{,}12$

eq.^{ne} $y = \frac{2}{17}\left(x - \frac{21}{2}\right)^2 - \frac{17}{2}$

oppure

$y = \frac{2}{17}x^2 - \frac{42}{17}x + \frac{76}{17}$

La curva percorre la parabola di equazione nel verso delle x crescenti



$\cap\, y=0$: $(2,0)$ $(19,0)$ $V\left(\frac{21}{2}, -\frac{17}{2}\right)$

$P_2 = (6,2) \in 1^\circ$ tratto: $\begin{cases} 6 = -4t+2 \to 4t = -4 \to t = -1 \\ 2 = \sqrt{-4t} \end{cases}$ e con $t=-1$ $2 = \sqrt{4}$ ok $\quad t_2 = -1$

$\gamma'(t) = \left(-4, \frac{1}{2\sqrt{-4t}} \cdot (-4)\right) = \left(-4, -\frac{2}{\sqrt{-4t}}\right)$ $\vec{v}_{P_2} = \vec{v}(-1) = -4\vec{i} - \vec{j}$ (*)

Il punto più a destra in cui la curva interseca l'asse x è $(19,0)$ che $\in$ al 2° tratto e corrisponde a $t = \frac{17}{3}$

$\begin{cases} 19 = 2+3t \quad \to 3t = 17 \quad t = \frac{17}{3} \\ 0 = \frac{2}{17}\left(3t - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{17}{2} \end{cases}$ $\quad 0 = \frac{2}{17}\left(17 - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{17}{2} = \frac{17}{2} - \frac{17}{2} = 0$ ok

$\gamma'(t) = \left(3, \frac{2}{17} \cdot 2\left(3t - \frac{17}{2}\right) \cdot 3\right) = \left(3, \frac{36}{17}t - 6\right)$

$\vec{v}_{(19,0)} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ $\quad \|\vec{v}_{(19,0)}\| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5} \approx 6{,}7$

(*) $\|\vec{v}_{P_2}\| = \sqrt{17}$ $\quad \vec{T}_{P_2} = -\frac{4}{\sqrt{17}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{or} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{ant} = \vec{i} - 4\vec{j}$

$m_{tan} = \frac{1}{4}$ retta tg $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ eq.^{ni} param. $\begin{cases} x = 6-4t \\ y = 2-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$m_{norm} = -4$ retta norm $y = -4x + 26$