TERZA ESERCITAZIONE sulle FUNZIONI di DUE VARIABILI

In questa esercitazione ci occuperemo di DERIVATE PARZIALI, GRADIENTE e PIANO TANGENTE.

Ricordiamo che, data $f(x,y)$, e $(x,y) \in \text{dom} f$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ è la DERIVATA PARZIALE rispetto a x (si deriva $f(x,y)$ considerando x variabile e y costante)

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ è la DERIVATA PARZIALE rispetto a y (si deriva $f(x,y)$ considerando y variabile e x costante)

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\vec{j}$$

è il vettore GRADIENTE di f.

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right)$$

è il vettore gradiente in $(x_0,y_0) \in \text{dom} f$.

Se esiste, il piano tangente al grafico di f nel punto $P_0\,(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ ha equazione:

$$\boxed{z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)}$$

Veniamo agli esercizi:

1 Determinare le derivate parziali delle seguenti funzioni, dopo aver trovato dom f:

a) $f(x, y) = 5x^4y^3 - 4x^2y^5 + 2x - 3y + 4$

b) $f(x, y) = (3x - x^2)\, e^{3x - 4y}$

c) $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2 - 16}$

d) $f(x, y) = \dfrac{3x - 2y}{2x + 3y}$

e) $f(x, y) = \log(-x^2 + 1 - y)$

f) $f(x, y) = \dfrac{\log(x - x^2)}{2 - y^2}$

g) $f(x, y) = \cos(5x^3 - 4xy^2 + 2y)$

Svolgimento: a) $f(x,y)=5x^4y^3-4x^2y^5+2x-3y+4$

dom $f=\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=5\cdot 4x^3\cdot y^3-4\cdot 2x\cdot y^5+2\cdot 1-0+0$$
$$=20x^3y^3-8xy^5+2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=5x^4\cdot 3y^2-4x^2\cdot 5y^4+0-3\cdot 1+0=$$
$$=15x^4y^2-20x^2y^4-3$$

---

b) $f(x,y)=(3x-x^2)\,e^{3x-4y}$ dom $f=\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(3-2x)\,e^{3x-4y}+(3x-x^2)\cdot e^{3x-4y}\cdot 3$$
$$=e^{3x-4y}\left(3-2x+9x-3x^2\right)=$$
$$=e^{3x-4y}\left(-3x^2+7x+3\right)$$

(derivata di un prodotto fra due funzioni)

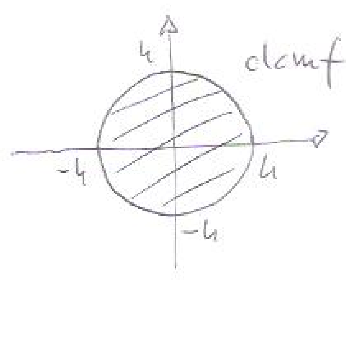
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(3x-x^2)\cdot e^{3x-4y}\cdot(-4)$$

(attenzione: x diventa un parametro costante, quindi si tratta della derivata di una costante per una funzione)

---

c) $f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2-16}$

dom $f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 16\right\}$



dom f è quindi la parte del piano esterna alla circonf. di equazione $x^2+y^2=16$, di $C(0,0)$ e $R=4$, bordo compreso.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \cdot \sqrt{x^2+y^2-16} + x\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2-16}}$$

$$= \frac{x^2+y^2-16+x^2}{\sqrt{x^2+y^2-16}} = \frac{2x^2+y^2-16}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$$

(era la derivata del prodotto tra 2 funzioni)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cdot \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2-16}} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$$

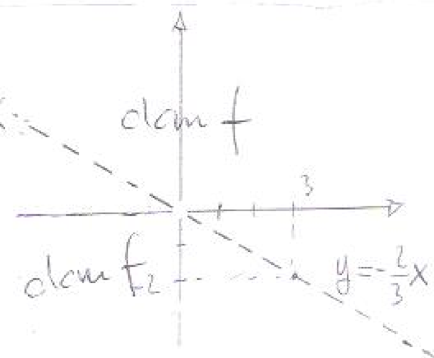
(derivata di una costante per una funzione)

Osserviamo che queste 2 derivate parziali non esistono sul bordo di dom f $(x^2+y^2-16=0)$.

---

d) $f(x,y) = \dfrac{3x-2y}{2x+3y}$

$y \neq -\frac{2}{3}x$



$\text{dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+3y \neq 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3(2x+3y)-(3x-2y)\cdot 2}{(2x+3y)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{6x}+9y-\cancel{6x}+4y}{(2x+3y)^2} = \frac{13y}{(2x+3y)^2}$$

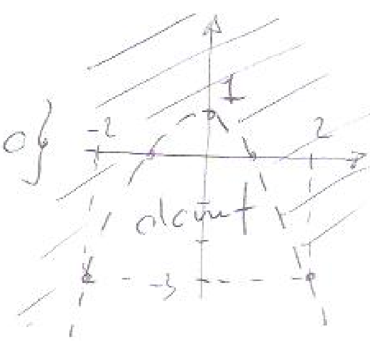
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2(2x+3y)-(3x-2y)\cdot 3}{(2x+3y)^2} =$$

$$= \frac{-4x-\cancel{6y}-9x+\cancel{6y}}{(2x+3y)^2} = \frac{-13x}{(2x+3y)^2}$$

(entrambe derivate di un quoziente)

---

e) $f(x,y) = \log(-x^2+1-y)$



$$\mathrm{dom}\, f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -x^2+1-y>0\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y<-x^2+1}\}$$

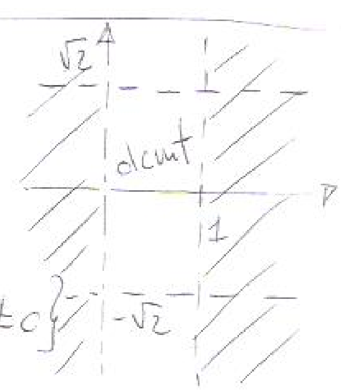
SOTTOGRAFICO RISPETTO A $y=-x^2+1$, ESCLUSA

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{-x^2+1-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{-x^2+1-y}$$

---

f) $f(x,y) = \dfrac{\log(x-x^2)}{2-y^2}$



$$\mathrm{dom}\, f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-x^2>0,\ 2-y^2\neq 0\}$$

$$x-x^2>0 \ \Downarrow\ 0<x<1 \qquad 2-y^2\neq 0\ \Downarrow\ y\neq\pm\sqrt{2}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2-y^2}\cdot \log(x-x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2-y^2}\cdot\frac{1-2x}{x-x^2} = \frac{1-2x}{(2-y^2)(x-x^2)}$$

($\frac{1}{2-y^2}$ è costante, quindi si tratta della derivata di una costante per una funzione)

$\log(x-x^2)$ è una costante

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{0\cdot(2-y^2) - [\log(x-x^2)]\cdot(-2y)}{(2-y^2)^2} =$$

$$= \frac{+2y\log(x-x^2)}{(2-y^2)^2}$$

(derivata di un quoziente, ma si poteva fare anche come derivata di $\log(x-x^2)\cdot(2-y^2)^{-1}$, cioè prodotto tra una costante e una funzione: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \log(x-x^2)\cdot(-1)(2-y^2)^{-2}(-2y)$)

9) $f(x,y) = \cos(5x^3-4xy^2+2y)$ dom $f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left[-\sin(5x^3-4xy^2+2y)\right]\cdot(15x^2-4y^2) =$$
$$= (4y^2-15x^2)\sin(5x^3-4xy^2+2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left[-\sin(5x^3-4xy^2+2y)\right]\cdot(-8xy+2) =$$
$$= (8xy-2)\sin(5x^3-4xy^2+2y)$$

2 Considerata la funzione

$$\boxed{f(x,y) = 5x^3 - 2x^2y - 3xy^2 + 4y^3 - 1}$$

a) determinare le derivate parziali di f

b) determinare il gradiente di f in $(-2,-1)$

c) determinare l'equazione del piano tangente nel punto del grafico corrisp. a $x_0=-2$, $y_0=-1$ (tralasciando di dimostrare l'esistenza del piano tangente)

Svolgimento:

a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^2 - 4xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^2 - 6xy + 12y^2$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,-1) = 15(-2)^2 - 4(-2)(-1) - 3(-1)^2 = 60 - 8 - 3 = \boxed{49}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,-1) = -2(-2)^2 - 6(-2)(-1) + 12(-1)^2 = -8 - 12 + 12 = \boxed{-8}$$

quindi $\nabla f(-2,-1) = (49,-8) = 49\vec{i} - 8\vec{j}$

c) $$f(-2,-1) = 5(-2)^3 - 2(-2)^2(-1) - 3(-2)(-1)^2 + 4(-1)^3 - 1 = -40 + 8 + 6 - 4 - 1 = \boxed{-31} = z_0$$

L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)$ in $(-2,-1,-31)$ è quindi:

$$z = -31 + 49\,(x+2) - 8\,(y+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,-1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(-2,-1)$$

cioè $z = -31 + 49x + 98 - 8y - 8 \longrightarrow \boxed{z = 49x - 8y + 59}$

$\boxed{3}$ Data $\boxed{f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + 16}$

a) determinare dom f

b) determinare l'espressione generale di E_K, spiegando di cosa si tratta e per quali $K \in \mathbb{R}$ risulta $E_K \neq \emptyset$

c) determinare l'insieme di livello a cui appartiene il punto $(-2,-1)$

d) scrivere l'equazione parametrica di una curva che percorre l'insieme di livello trovato, poi utilizzarla per determinare vettore tangente e retta tangente, in forma parametrica e cartesiana in $(-2,-1)$

e) calcolare il gradiente di f in $(-2,-1)$

f) determinare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)$ nel punto corrispondente a $x_0 = -2$, $y_0 = -1$.

g) disegnare l'insieme di livello, il vettore tangente e il gradiente.

<u>Svolgimento</u>: a) $\text{dom } f = \mathbb{R}^2$

b) $E_k = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 - 4y^2 + 16 = k \right\} =$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 16 - k \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{16-k} + \frac{y^2}{\frac{16-k}{4}} = 1 \right\}$$

Si tratta di ellissi di centro $(0,0)$ e

$a = \sqrt{16-k}$, $b = \dfrac{\sqrt{16-k}}{2}$.

$E_k \neq \emptyset \iff 16 - k \geq 0 \longrightarrow \boxed{k \leq 16}$

---

c) Per determinare k basta sostituire $(-2,-1)$ in $-x^2 - 4y^2 + 16 = k \longrightarrow k = -4 - 4 + 16 = 8$

Quindi $(-2,-1) \in E_8$.

$$E_8 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \right\}$$

<u>ellisse</u> di $C(0,0)$ e $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ (si veda grafico a pag. 12)

d) $\gamma: \begin{cases} x(t) = 2\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

è una curva che percorre E_8.

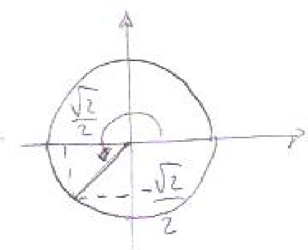
$\begin{cases} x'(t) = -2\sqrt{2}\,\text{sen}\, t \\ y'(t) = \sqrt{2}\cos t \end{cases}$ è il vettore tangente a γ

Per determinare il vettore tangente in $(-2,-1)$ dobbiamo trovare il valore di t tale che $\gamma(t) = (-2,-1)$. Sostituendo nelle equazioni che definiscono γ otteniamo:

$$\begin{cases} -2 = 2\sqrt{2}\cos t \longrightarrow \cos t = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 = \sqrt{2}\,\text{sen}\, t \longrightarrow \text{sen}\, t = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Determiniamo $t \in [0, 2\pi]$ ragionando sulla circonferenza goniometrica:

$t = \frac{5}{4}\pi \leftarrow 225°$



Il vettore tangente in $(-2,-1)$ sarà quindi

$$\gamma'\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \left(-2\sqrt{2}\,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi,\ \sqrt{2}\cos\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$= \left(-\cancel{2}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right),\ \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = (2,-1)$$

$$= 2\vec{i} - \vec{j}$$

(si veda il disegno a pag. 12)

La retta tangente in forma parametrica è:

$$\begin{cases} x(t) = -2 + 2t \\ y(t) = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

e in forma cartesiana $\left(m = \frac{y'(t)}{x'(t)} \right)$:

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x+2) \longrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x - 2}$$

---

e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -8y$

$\nabla f(-2,-1) = (4, 8)$ (si veda disegno a pag. 12)

---

f) $f(-2,-1) = -4 - 4 + 16 = 8$ (ovviamente)

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(-2,-1,8)$ è:

$$z = 8 + 4(x+2) + 8(y+1)$$

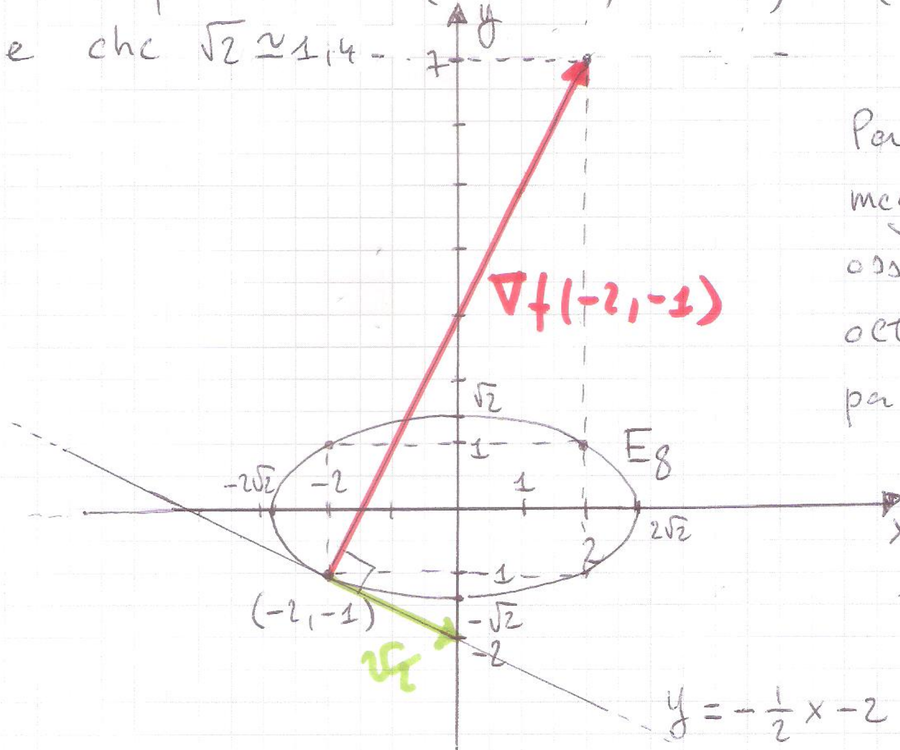
cioè

$$z = 8 + 4x + 8 + 8y + 8 \longrightarrow \boxed{z = 4x + 8y + 24}$$

---

g) Per il disegno teniamo conto che il vettore tangente parte da $(-2,-1)$ ed ha la punta in $(-2+2, -1-1) = (0,-2)$

mentre il gradiente parte in $(-2,-1)$ e ha la punta in $(-2+4, -1+8) = (2,7)$
e che $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$



Per disegnare meglio l'ellisse osserviamo che, oltre a $(-2,-1)$ per simmetria anche $(-2,1)$, $(2,1)$ e $(2,-1)$ le appartengono

- Osserviamo che $\nabla f(-2,-1)$ è perpendicolare rispetto al vettore tang.: vedremo che il gradiente è sempre perpendicolare alla curva di livello. Evidentemente il gradiente, essendo normale alla retta tangente, si potrebbe anche utilizzare per determinare l'equazione cartesiana della retta tangente in un modo diverso:

$\boxed{(P-P_0)\cdot \nabla f = 0}$, cioè

$$(x+2, y+1)\cdot(4,8) = 0$$

$$4(x+2) + 8(y+1) = 0 \longrightarrow 4x + 8 + 8y + 8 = 0$$

$$8y = -4x - 16$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x - 2}$$