CONOSCENZE PRELIMINARI

1) Ripassiamo le frazioni :

a) $-\frac{21}{15}+4=\ldots$ b) $-\frac{7}{5}+\frac{1}{4}=\ldots$ c) $-\frac{3}{2}-1=\ldots$ d) $-\frac{8}{9}+\frac{2}{3}=\ldots$

e) $\frac{8}{12}\cdot\frac{3}{2}=\ldots$ f) $\frac{6}{9}\cdot\frac{(-3)}{(-2)}=\ldots$ g) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\right]:\frac{5}{8}=\ldots$

h) $\dfrac{\frac{6}{7}-1}{\frac{7}{2}}=\ldots$ i) $\left[\left(\frac{10}{9}\cdot\frac{3}{(-5)}\right):4\right]+\frac{5}{12}-\frac{3}{18}=\ldots$

j) $\dfrac{\frac{2}{\frac{1}{3}}}{\frac{2}{9}}=\ldots$ k) $\left[\frac{2}{5}:\frac{1}{6}\right]:6=\ldots$

OSSERVAZIONE Ricordate che

- conviene prima semplificare le singole frazioni e poi procedere con le successive operazioni
- se si sommano o sottraggono più frazioni il denominatore è il m.c.m. dei denominatori

l) $\dfrac{\frac{7}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{6}{5}-\frac{12}{10}}=\ldots$ m) $\dfrac{\frac{5}{3}-\frac{8}{9}+\frac{1}{15}}{\frac{1}{12}-\frac{3}{4}}=\ldots$ n) $\dfrac{\frac{5}{3}-\frac{15}{9}}{\frac{5}{6}-\frac{8}{3}}=\ldots$

o) $$\frac{\left(\frac{24}{40}-\frac{40}{100}\right)-\left[-\frac{1}{15}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]}{\frac{17}{32}+\frac{7}{16}\cdot\left(\frac{13}{4}+\frac{50}{40}\right)}=\ldots$$

p) $$\frac{\frac{3}{5}-1}{\frac{4}{5}}\cdot\frac{\frac{88}{22}-\frac{13}{39}+\frac{35}{42}}{\frac{3}{4}-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}=\ldots$$

2) Ripassiamo le potenze:

a) $\frac{5^4}{5^2} = \ldots \qquad 5^2 \cdot 5^3 = \ldots \qquad (5^2)^3 = \ldots \qquad 5^{-3} = \ldots$

utilizzate le proprietà delle potenze : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

b) $5^2 \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5^4}\right) - 2 \cdot (5^{-2}) \right] = \ldots$

c) $\frac{3^3}{3} - 5 \cdot (2)^{-2} + 6 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-2)^{-4} = \ldots$

d) $-(25)^3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{-4}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{-3}{-4}\right)^2 = \ldots$

e) $\frac{3}{5} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \frac{14}{30} = \ldots$

f) $-4^2 - (-4)^2 - (-2)^3 - (-2)^4 - 1^4 = \ldots$

g) $-\frac{2^6}{8 \cdot 3^2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3^2 = \ldots$

h) $\left[\frac{5^2}{3^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 4^2 \right]^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} \cdot \frac{9}{25} = \ldots$

i) $-\frac{2^5}{4 \cdot 3^2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{-3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{2^3}{(-2)^3} - 1^4\right) = \ldots$

j) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{3}\right)^5 \right]^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \ldots$

2bis) Ripassiamo i calcoli con le RADICI

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \dots$ $\qquad \sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \dots$ $\qquad \sqrt{2}\cdot\sqrt{40} = \dots$

$3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \dots$ $\qquad (3\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2}) = \dots$

$2\cdot\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} + 3\sqrt{6} = \dots$ $\qquad \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = \dots$

b) $(\sqrt{2})^{-1}\cdot\sqrt{8} = \dots$ $\qquad \dfrac{\sqrt{12}}{2} - 4\sqrt{3} = \dots$

$\dfrac{\sqrt{75}}{5} = \dots$ $\qquad 7\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \dots$

$7\sqrt{3} + 4\sqrt{2} = \dots$ $\qquad \sqrt{25-16} = \dots$ $\qquad \sqrt{100-49} = \dots$

SOLUZIONE

Ricordiamo che: • $\sqrt{a}$ è definita solo se $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ = il numero ≥ 0 il cui quadrato è a, $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{2^2}=2$, $\sqrt{(-2)^2}=2$, in generale $\sqrt{a^2}=|a|$ e non è corretto semplificare la $\sqrt{\ }$ con la potenza

• $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ se $a\geq 0, b \geq 0$ altrimenti $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$

$\sqrt{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ $a>0$, $\quad (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$ $a \geq 0$, $\quad \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $a\geq 0$ $b>0$, $\quad \sqrt{a^2\cdot b} = a\cdot\sqrt{b}$ $a\geq 0$ $b \geq 0$

a) $\dfrac{\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{3}$ $\qquad \sqrt{2}\cdot\sqrt{2^2\cdot 2} = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot 2 = 4$

(oppure $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$)

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8\cdot 5} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\qquad (3\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2}) = 3\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 3\cdot 2\cdot 2 = 12$

$2\,\dfrac{\sqrt{2\cdot 3\cdot 5}}{\sqrt{5}} + 3\sqrt{3\cdot 2} = 2\,\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}} + 3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} =$

$= 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ oppure $5\sqrt{6}$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2} = 2 \qquad \left((\sqrt{2})^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right.$ in generale $\left. a^{-1} = \dfrac{1}{a} \right)$

$\dfrac{\sqrt{3\cdot 2^2}}{2} - 4\sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt{3\cdot 5^2}}{5} = \dfrac{5\cdot\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \qquad 7\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$7\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$ rimane così, non si possono sommare insieme
RADICI DIVERSE

$\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{100-49} = \sqrt{51}$ che rimane così oppure
$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{17}$

IMPORTANTE : <u>NON ESISTE</u> nessuna proprietà su $\sqrt{a^2-b^2}$
(infatti $\sqrt{25-16} = \sqrt{5^2-4^2}$ non è $5-4$ che dà 1)

c) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}} = \ldots \qquad \dfrac{\frac{1}{4\cdot 9\cdot\sqrt{9}}}{\frac{37}{36}\cdot\sqrt{\frac{37}{36}}} = \ldots$

$\dfrac{\frac{1}{8\sqrt{2}}}{\frac{9}{8}\cdot\sqrt{\frac{9}{8}}} = \ldots$

SOLUZIONE c) $\dfrac{1}{\cancel{4}}\cdot\dfrac{\cancel{4}}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$

$\dfrac{1}{\cancel{4}\cdot\cancel{9}\cdot 3}\cdot\dfrac{\cancel{36}}{37}\cdot\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{37}} = \dfrac{\cancel{6}\,2}{\cancel{3}\cdot 37\cdot\sqrt{37}} = \dfrac{2}{37\sqrt{37}}$

$\dfrac{1}{\cancel{8}\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\cancel{8}}{9}\cdot\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot 9\cdot 3} = \dfrac{2}{27}$

3) Risolviamo le equazioni di 1° grado:

a) $5-2x=-x+\frac{1}{3}$ b) $3x-4=\frac{x}{4}+1$ c) $\frac{2x}{\frac{5}{6}}=1$

d) $5x-6=x+2(2x-3)$ e) $2-4x=-2(5+2x)$

f) $1-\frac{x}{6}=\frac{3}{2}x+2$ g) $\frac{\frac{x}{3}}{\frac{4}{5}}=x+2$ h) $\frac{\frac{3}{4}}{x}=3$

i) $\frac{x-2}{3x}=5$ j) $\frac{4x}{1-x}=3$

k) $\frac{\frac{2x+8}{3}-\frac{x-5}{2}}{\frac{13}{6}}=0$ l) $\frac{2-3x}{4}+\frac{1}{8}-2x=\frac{27}{8}-\frac{5}{4}x$

m) $5\cdot\frac{(5-3x)}{6}+\frac{1}{8}-\frac{7}{6}x=2-\frac{5}{4}x$

4) Risolviamo le equazioni di 2° grado:

a) $x^2+3x-10=0$ b) $x^2-2x=0$ c) $x^2+4x+5=0$

d) $\frac{1}{2}x^2+4x+8=0$ e) $7x^2=-4x$ f) $12x^2-7x=-1$

g) $3x^2-10x+\frac{25}{3}=0$ h) $x^2-4x-12=0$ i) $-x^2+6x-13=0$

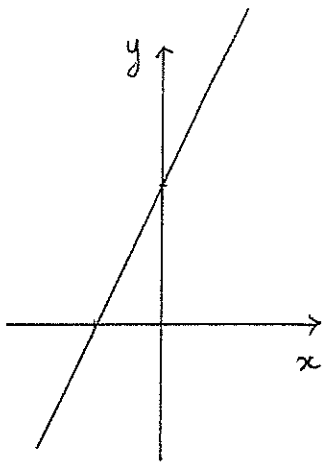
j) $2x^2+12x+18=0$ k) $x^2-9=0$ l) $x^2+1=0$ m) $4x^2-25=0$

5) Lavoriamo con le rette:

Per ogni coppia di rette stabilite se sono parallele o se si intersecano e se si intersecano trovate il punto di intersezione.
Disegnate tutte le rette

a) $3x-2y=4$, $x+2y=4$ b) $x-y=0$, $y=x+2$

c) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$, $3x-6y+2=0$



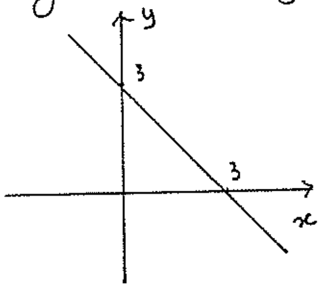
Individuate quale sia l'unica possibile eq.^{ne} per la retta nel disegno e spiegate bene le ragioni della scelta

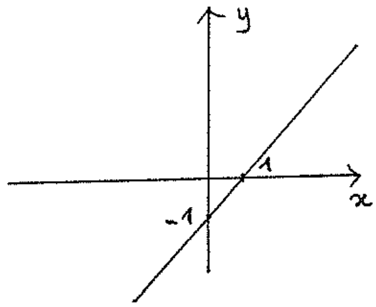
a) $y=-2x-2$ b) $y=-2x+2$ c) $y=2x+1$

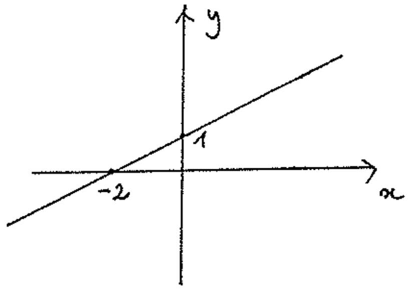
d) $y=2x-1$

Associate ad ogni retta in figura la sua equazione spiegando le ragioni della scelta (una delle equazioni resta esclusa):

a) $y=x-1$ b) $y=-\frac{1}{2}x-3$ c) $y=-x+3$ d) $y=\frac{1}{2}x+1$







6) Lavoriamo con le parabole:

Disegnate le seguenti parabole, dopo averne individuato il VERTICE e le eventuali intersezioni con gli assi

a) $y=\frac{9}{4}x^2$ b) $y=\frac{1}{4}x^2-2x$ c) $y=-\frac{5}{16}x^2+5$ d) $y=x^2-2x$

e) $y = x^2 - 2x + 2$ f) $y = -x^2 - 4x$ g) $y = -x^2 - 2x - 2$

h) $y = (x-2)^2$ i) $y = (x-1)(x-2)$ j) $y = \dfrac{(x+2)^2}{4}$

k) $y = -x^2 - 2x + 2$ l) $y = 3 - x^2$ m) $y = 2x^2 - 3x + 1$

n) $y = x^2 + 3x - \dfrac{7}{4}$ o) $y = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2}$

7) Risolviamo le disequazioni di 1° grado:

a) $1 + x < 7x + 5$ b) $x + \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{2}x \leq 2x + 1$

c) $\dfrac{2x-1}{4} - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{(x+1)}{2} \geq 1$ d) $3 > 5 + 2(2-x)$

e) $\dfrac{x}{5} - \dfrac{\left(x+\frac{1}{3}\right)}{4} < \dfrac{1-2x}{5}$ f) $\dfrac{2-3x}{5} - \left[4 - \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}(x-1)\right] \leq \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{10}x$

g) $\dfrac{2-3x}{4} + \dfrac{1}{8} - 2x < \dfrac{27}{8} - \dfrac{5}{4}x$

h) $4(1-x) - \dfrac{1}{4}(x-2) \geq -\dfrac{27}{4}x - 1$

i) $\dfrac{\dfrac{3x+9}{2} - \dfrac{x-5}{3}}{\dfrac{17}{6}} < 0$

8) Risolviamo le equazioni e disequazioni di 2° grado.
Per le DISEQUAZIONI utilizziamo il METODO delle PARABOLE

a) $x^2-2x-3>0$ b) $x^2-9x+20=0$ c) $x^2+x+1<0$

d) $x^2-4x+8\geq 0$ e) $x^2+2x-63\leq 0$ f) $3x^2+2x-1>0$

g) $-4x^2+12x-59\geq 0$ h) $-x^2+3x+4<0$ i) $x^2-8x-12=0$

j) $-x^2+x-9=0$ k) $2x^2+4>0$ l) $6x^2-3x+8<0$

m) $21x^2-25x-4>0$ n) $1-4x^2\geq 0$ o) $-1-4x^2>0$

p) $x^2+\frac{1}{16}\geq 0$ q) $x^2-4x+4>0$ r) $-4x^2+4x-1\geq 0$

8 bis)

a) $x^2+5x+6\leq 0$ b) $15-x-2x^2>0$ c) $x^2-x\geq 0$

d) $x^2-4>0$ e) $x^2+2>0$ f) $3x^2\geq 0$ g) $4x^2>0$

h) $2x^2\leq 0$ i) $x^2+1<0$ j) $x^2\leq 25$ k) $x-3x^2>0$

l) $-x^2+13x+2>-3x^2+x-14$ m) $-6x^2<0$ n) $x^2\geq 100$

o) $x^2-5x+7>0$ p) $x^2+6x+5<0$ q) $-5x^2\geq 0$ r) $-x^2-3>0$

s) $4x^2+3x-3<x^2-3x+6$ t) $4x^2-4x+1\geq 0$ u) $x^2+2x+1>0$

v) $-9x^2+12x-4 \geq 0$ w) $x^2-10x+32<0$

x) $4x^2+9>0$ y) $-2x^2-3x>0$ z) $-11x+4x^2-3 \geq 0$

SOLUZIONI ESERCIZI N. 1-8

1) a) $\frac{13}{5}$ b) $-\frac{23}{20}$ c) $-\frac{5}{2}$ d) $-\frac{2}{9}$ e) 1 f) 1

g) $\frac{1}{4}:\frac{5}{8}=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$ h) $-\frac{2}{49}$ i) $\frac{1}{12}$ j) 27 k) $\frac{2}{5}$

l) $\frac{\frac{11}{4}}{0}=$ IMPOSSIBILE m) $-\frac{19}{15}$ n) $\frac{0}{-\frac{11}{6}}=0$

o) $\frac{4}{25}$ p) -9

2) a) 5^2 5^5 5^6 $\frac{1}{5^3}$

b) $5^2\left[\frac{1}{5}-\frac{2}{5^2}\right]=5-2=3$

c) $3^2-\frac{5}{2^2}-6+\frac{5}{2^4}=9-\frac{5}{4}-6+\frac{5}{16}=\frac{33}{16}$

d) $-(5^2)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\left[-\left(\frac{4}{9}\right)^3\right]\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=+5^6\cdot\frac{3^4}{5^4}\cdot\frac{2^6}{3^6}\cdot\frac{3^2}{2^4}=5^2\cdot2^2=(10)^2=100$

e) $\frac{3}{5}-5\cdot\frac{2^3}{3^3}\cdot\frac{3^2}{2^2\cdot5^2}-\frac{14}{30}=\frac{3}{5}-\frac{2}{3\cdot5}-\frac{14}{30}=\frac{3}{5}-\frac{2}{15}-\frac{14}{30}=0$

f) $-4^2-4^2+2^3-2^4-1^4=-16-16+8-16-1=-41$

g) $-\frac{2^6}{2^3\cdot3^2}\cdot\frac{3^2}{2^2}-\frac{2^3}{3^3}\cdot3^2=-2-\frac{2^3}{3}=-2-\frac{8}{3}=-\frac{14}{3}$

h) $\left[\frac{5^2}{3^2}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot2^4\right]^3\cdot\frac{3^3}{5^3}\cdot\frac{3^2}{5^2}=\left[\frac{5^2\cdot2}{3^2}\right]^3\cdot\frac{3^5}{5^5}=\frac{5^6\cdot2^3}{3^6}\cdot\frac{3^5}{5^5}=\frac{5\cdot2^3}{3}=\frac{40}{3}$

i) $-\frac{2^5}{2^2\cdot3^2}\cdot\frac{3^2}{2^2}+\frac{2^3}{3^3}-\frac{2^4}{3^4}-(-1-1)=-2+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+2=\frac{8}{27}-\frac{16}{81}=\frac{8}{81}$

j) $\left[\frac{4^3}{3^3}:\frac{2^5}{3^5}\right]^2\cdot\frac{5^2}{4^2}=\left[\frac{2^6}{3^3}\cdot\frac{3^5}{2^5}\right]^2\cdot\frac{5^2}{2^4}=\left(2\cdot3^2\right)^2\cdot\frac{5^2}{2^4}=\frac{2^2\cdot3^4\cdot5^2}{2^4}=\frac{3^4\cdot5^2}{2^2}=$
$=\frac{2025}{4}$

3) a) $x=\frac{14}{3}$ b) $x=\frac{20}{11}$ c) $x=\frac{5}{12}$ d) $\forall x\in\mathbb{R}$

e) impossibile f) $x=-\frac{3}{5}$ g) $x=-\frac{24}{7}$ h) C.E. $x\neq 0$ sol.^{ne} $x=\frac{1}{4}$

i) C.E. $x\neq 0$ sol.^{ne} $x=-\frac{1}{7}$ j) C.E. $x\neq 1$ sol.^{ne} $x=\frac{3}{7}$

K) $x=-31$ l) $x=-\frac{13}{6}$ m) $x=\frac{55}{58}$

4) Ordinare il trinomio e fare in modo che il coefficiente di x^2 sia un numero >0 - Poi la formula risolutiva è

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{per l'eq.}^{ne}\ ax^2+bx+c=0$$

(FORMULA RIDOTTA : $x_{1,2}=\dfrac{-b/2\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$)

a) $x^2+3x-10=0$ $\quad x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}$ $\nearrow x_1=-5$, $\searrow x_2=2$

b) $x_1=0$ $x_2=2$ c) nessuna sol.^{ne} $(\Delta=b^2-4ac<0)$

d) $x_1=-4$ con molteplicità 2 e) $7x^2+4x=0$ $\quad x_1=-\frac{4}{7}$ $x_2=0$

f) $12x^2-7x+1=0$ $\quad x_1=\frac{1}{4}$ $x_2=\frac{1}{3}$ g) $x_1=\frac{5}{3}$ con molteplicità 2

h) $x_1=-2$ $x_2=6$ j) $x_1=-3$ con molteplicità 2 i) nessuna sol.^{ne}

K) $x_1=-3$ $x_2=3$ l) nessuna sol.^{ne} m) $x_1=-\frac{5}{2}$ $x_2=\frac{5}{2}$

5) IMPORTANTE
Quando una retta viene scritta in forma cartesiana

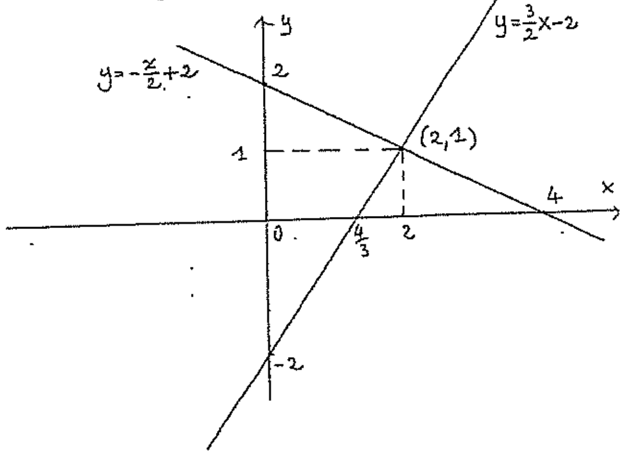
$y=mx+q$, m rappresenta il coefficiente angolare e q l'ordinata all'origine. Il coefficiente angolare m è la tangente dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle x e dal suo segno è subito nota l'inclinazione della retta (

$m=\tan\theta>0$,

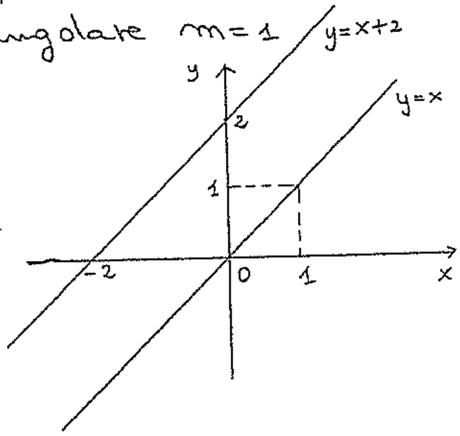
$m=\tan\theta<0$). L'ordinata all'origine è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y, quindi la retta passa per $(0,q)$. (Gli ANGOLI sono a pag. 23 e la TRIGONOMETRIA a pag. 34)

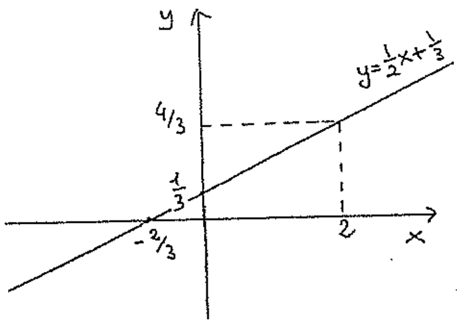
a) $y=\frac{3}{2}x-2$ $\quad y=-\frac{x}{2}+2$ non sono parallele (i coeff. angolari sono $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$) $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x-2 \\ y=-\frac{x}{2}+2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\ldots \\ \frac{3}{2}x-2=-\frac{x}{2}+2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

P.$^{\text{TO}}$ di intersezione $(2,1)$



b) $y=x$ $\quad y=x+2$ sono parallele perché entrambe hanno coeff. angolare $m=1$





c) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ $\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ sono la stessa retta

2° quesito escludiamo a) e b) perchè dall'inclinazione della retta il coefficiente angolare è >0.
Su $x=0$ poi è $y>0$ quindi escludiamo d)
Allora è $y=2x+1$ e i punti di intersezione con gli assi nel disegno sono allora $(0,1)$ e $(-\frac{1}{2},0)$.

3° quesito La retta a) corrisponde al 2° disegno ($\underset{m>0}{m=1}$, $q=-1$, se $x=1 \downarrow y=0$),
la retta c) al 1° disegno ($\underset{m<0}{m=-1}$, $q=3$, se $x=3 \rightarrow y=0$)
la retta d) al 3° disegno ($\underset{m>0}{m=\frac{1}{2}}$, $q=1$, se $x=-2 \rightarrow y=0$)
la retta b non ha disegno

6) Data una parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$:

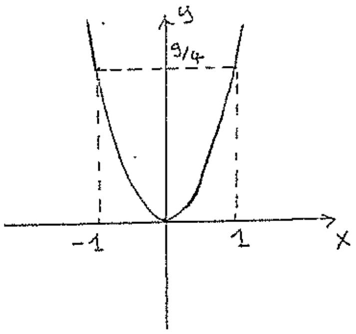
- la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto se $a>0$ 

  mentre se $a<0$ la concavità è verso il basso 

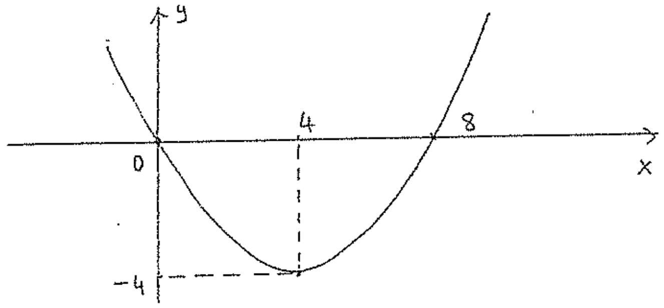
- la parabola è perfettamente simmetrica rispetto all'asse (retta verticale per il VERTICE)
- il vertice ha coordinate $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ con $\Delta=b^2-4ac$

  però per calcolare y_V conviene sostituire x_V nell'eq.^{ne} della parabola
- ponendo $y=0$ cioè $ax^2+bx+c=0$ si trovano le intersezioni con l'asse x
- ponendo $x=0$ si trova $y=c$ e $(0,c)$ è il punto di intersezione con l'asse y

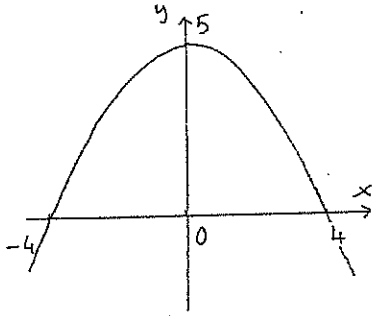
a) $V(0,0)$



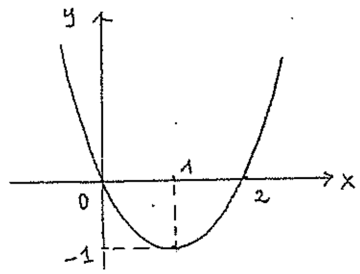
b) $V(4,-4)$ $\cap$ asse x $x=0$ $x=8$



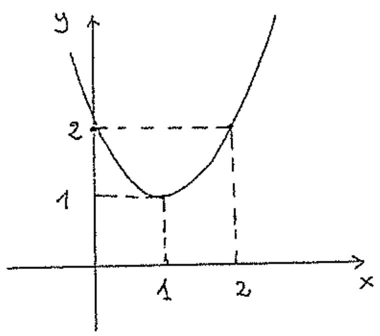
c) $V(0,5)$ rivolta verso il basso $\cap$ asse x $x=\pm 4$



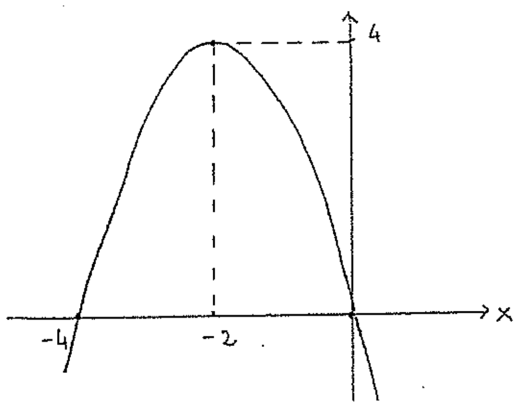
d) $V(1,-1)$ verso l'alto $\cap$ asse x $x=0,2$



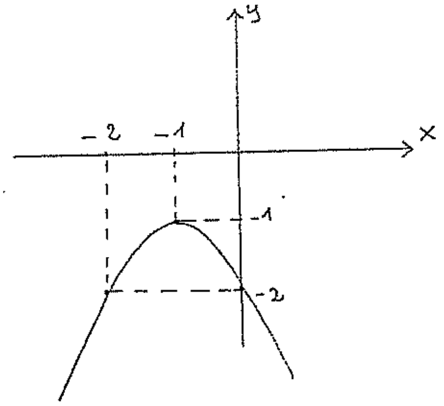
e) $V(1,1)$ verso l'alto no $\cap$ asse x



f) $V(-2,4)$ verso il basso $\cap$ asse x $x=0,-4$

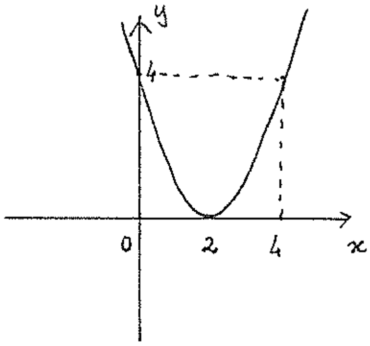


g) $V(-1,-1)$ verso il basso no $\cap$ asse x



h) $V(2,0)$ rivolta verso l'alto $\cap$ asse x : $x=2$

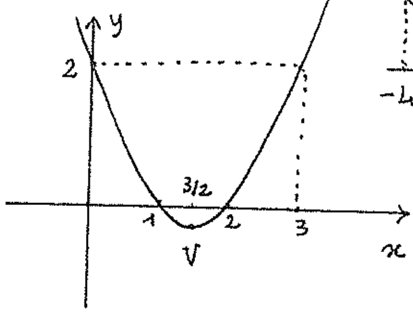
in $x=0 \to y=4$



i) $V(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ rivolta verso l'alto

$\cap$ asse x : $x=1$, $x=2$

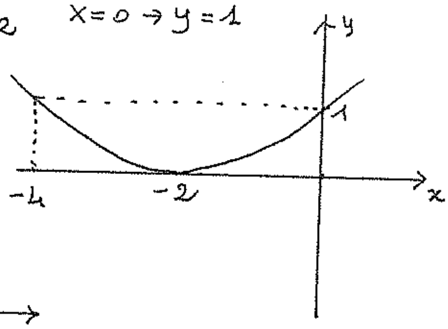
in $x=0$ $y=2$



j) $V(-2,0)$ verso l'alto

$\cap$ asse x : $x=-2$

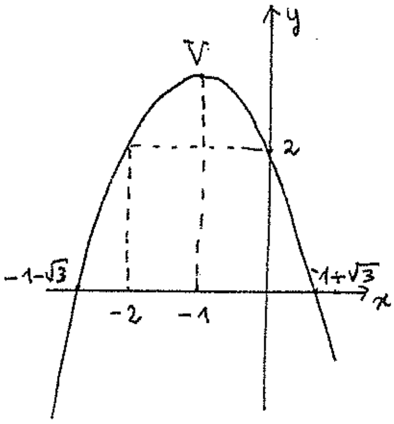
$x=0 \to y=1$



K) $V(-1,3)$ verso il basso

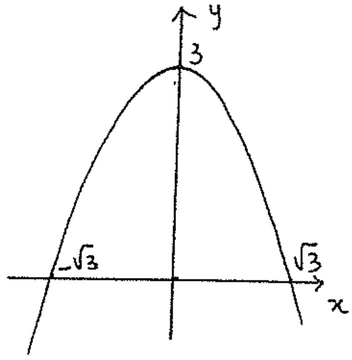
$\cap$ asse x : $x=-1\pm\sqrt{3}$

$x=0 \to y=2$



l) $V(0,3)$ verso il basso

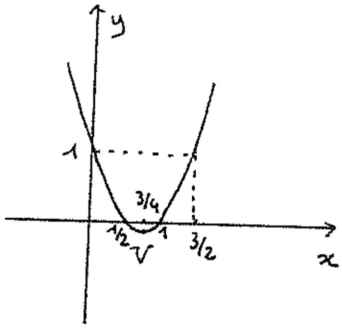
$\cap$ asse x : $x=\pm\sqrt{3}$



m) $V(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$

$\cap$ asse x : $x=\frac{1}{2}$ $x=1$

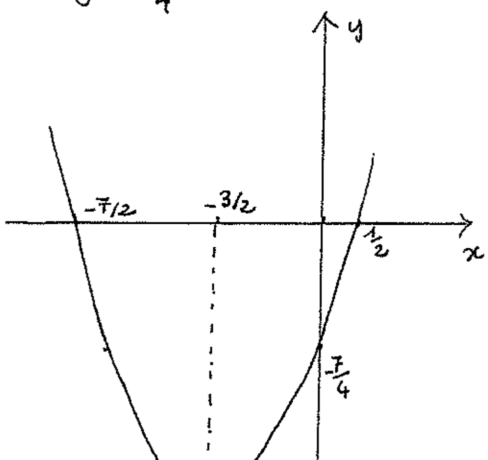
$x=0 \to y=1$



n) $V(-\frac{3}{2}, -4)$ verso l'alto

$\cap$ asse x : $x=-\frac{7}{2}$ $x=\frac{1}{2}$

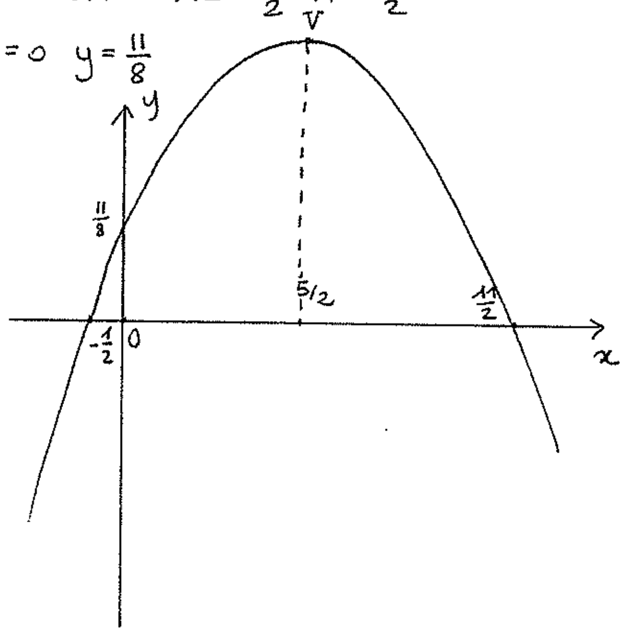
$x=0$ $y=-\frac{7}{4}$



o) $V(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$ verso il basso

$\cap$ asse x : $x=-\frac{1}{2}$ $x=\frac{11}{2}$

$x=0$ $y=\frac{11}{8}$



7) a) $x > -\frac{2}{3}$ b) $x \geq \frac{8}{9}$ c) $x \geq \frac{9}{8}$ d) $x > 3$

e) $x < \frac{17}{21}$ f) $x \leq \frac{46}{11}$ g) $x > -\frac{13}{6}$ h) $x \geq -\frac{11}{5}$

i) $x < -\frac{37}{7}$

8) $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola

- se ci chiediamo in quali punti la parabola interseca l'asse x

otteniamo $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$ e siamo

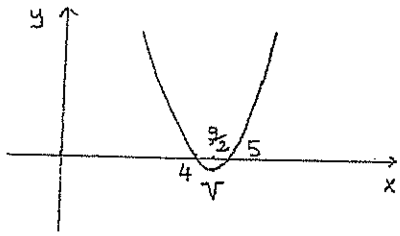
ricondotti ad un' eq.ne di 2° grado:

- se l'eq.ne ha 2 sol.ni reali e distinte $x_1, x_2 \Rightarrow$ la parabola interseca l'asse x in due punti distinti $(x_1, 0), (x_2, 0)$
- se l'eq.ne ha una sola sol.ne x_1 con molteplicità 2 $\Rightarrow$ la parabola interseca l'asse x in un solo punto $(x_1, 0)$ che è il vertice e la parabola risulta tangente all'asse x
- se l'eq.ne non ammette sol.ni reali $\Rightarrow$ la parabola non interseca l'asse x e quindi è tutta al di sopra di $y = 0$ se è rivolta verso l'alto, oppure tutta al di sotto se è rivolta verso il basso.

Viceversa, se abbiamo un'eq.^{ne} di 2° grado $ax^2+bx+c=0$ possiamo considerare la parabola $y=ax^2+bx+c$ e i valori di x che risolvono l'eq.^{ne} corrispondono alle ascisse dei punti in cui la parabola interseca l'asse x.

b) $x^2-9x+20=0$ parabola $y=x^2-9x+20$ $V(\frac{9}{2},-\frac{1}{4})$

rivolta verso l'alto $\Rightarrow$ 2 intersezioni con l'asse x (perchè $y_V<0$)



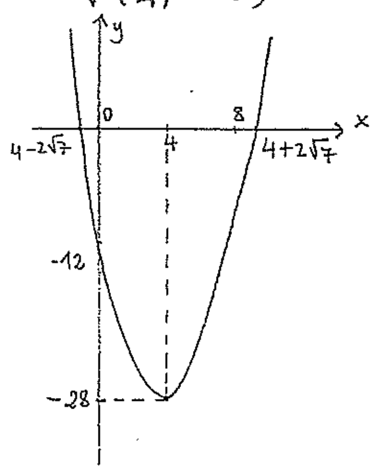
$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm1}{2}$$

$x_1=5$ $x_2=4$ $(4,0)$ $(5,0)$

SOL.^{NI} EQ.^{NE} $x=4, x=5$

i) $x^2-8x-12=0$ parabola $y=x^2-8x-12$ $V(4,-28)$

rivolta verso l'alto $\Rightarrow$ 2 intersezioni con l'asse x (perchè $y_V<0$)



$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+12}}{1}=4\pm2\sqrt{7}$$

$x_1=4-2\sqrt{7}$ $x_2=4+2\sqrt{7}$

P.^{ti}: $(4-2\sqrt{7},0)$ $(4+2\sqrt{7},0)$

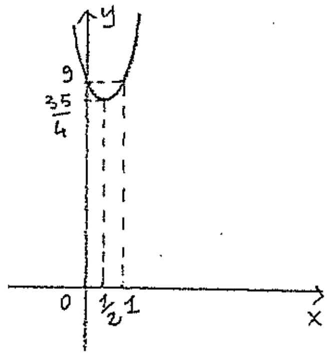
SOL.^{NI} EQ.^{NE} $x=4-2\sqrt{7}, x=4+2\sqrt{7}$

j) $-x^2+x-9=0$ $x^2-x+9=0$ parabola $y=x^2-x+9$ $V(\frac{1}{2},\frac{35}{4})$

rivolta verso l'alto $\Rightarrow$ nessuna intersezione con l'asse x (perchè $y_V>0$).

E infatti $x=\frac{1\pm\sqrt{1-36}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-35}}{2}$

nessuna sol.^{ne}



Naturalmente le parabole per risolvere le eq.^{ni} di 2° grado non sono assolutamente indispensabili, possono dare però una previsione sul risultato.

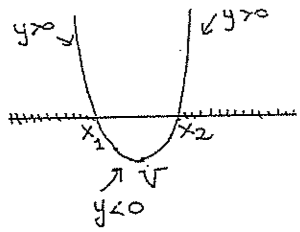
Molto più utili risultano invece per le DISEQUAZIONI.

- se ci chiediamo in quali punti la parabola $y=ax^2+bx+c$ ha ordinata $y>0$ (cioè in quali punti il disegno è sopra all'asse x) otteniamo

$$\begin{cases} y>0 \\ y=ax^2+by+c \end{cases} \qquad \begin{cases} y=ax^2+by+c \\ ax^2+by+c>0 \end{cases}$$ e siamo ricondotti

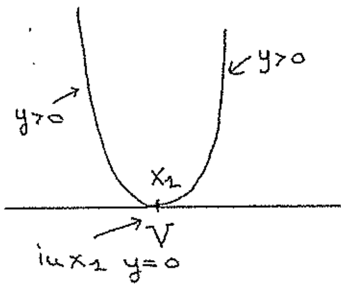
ad una disequazione di 2° grado:

CASO 1 $\boxed{a>0}$ (cioè la parabola è rivolta verso l'alto)



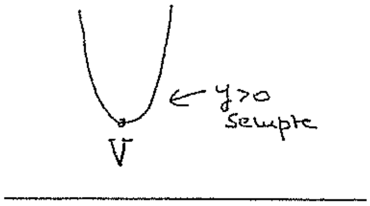
- se l'eq.^{ne} $ax^2+bx+c=0$ ha due sol.^{ni} reali e distinte $x_1<x_2 \Rightarrow y>0$ per

$$\boxed{x<x_1 \ \text{o} \ x>x_2}$$



- se l'eq.^{ne} $ax^2+bx+c=0$ ha una sola sol.^{ne} x_1 con molteplicità $2 \Rightarrow$ il vertice della parabola è sull'asse x e $y>0$

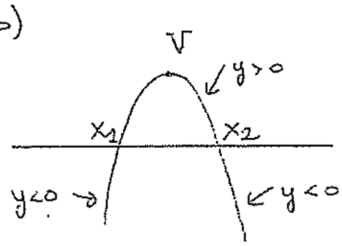
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}}$$



- se l'eq.^{ne} $ax^2+bx+c=0$ non ammette sol.^{ni} reali $\Rightarrow$ la parabola è tutta al di sopra dell'asse x e quindi è $y>0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$$

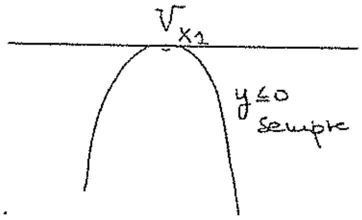
CASO 2 $\boxed{a<0}$ (cioè la parabola è rivolta verso il basso)



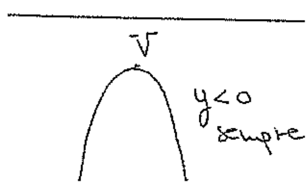
- se l'eq.^{ne} $ax^2+bx+c=0$ ha due sol.^{ni} reali e distinte $x_1<x_2 \Rightarrow y>0$ per

$$\boxed{x_1<x<x_2}$$

- se l'eq.^{ne} $ax^2+bx+c=0$ ha una sola sol.^{ne} x_1 con molteplicità 2 $\Rightarrow$ il vertice della parabola è sull'asse x e $y>0$ non è <u>mai verificata</u>

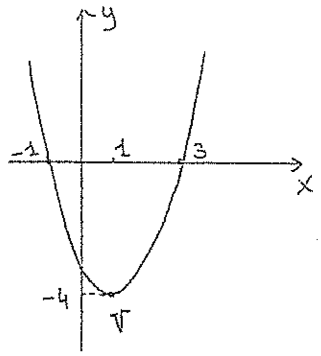


- se l'eq.^{ne} $ax^2+bx+c=0$ non ammette sol.^{ni} reali $\Rightarrow$ la parabola è tutta al di sotto dell'asse x e di nuovo $y>0$ non è <u>mai verificata</u>



Analoghi ragionamenti si usano se si vuole stabilire in quali punti la parabola $y=ax^2+bx+c$ ha ordinata $y\geq 0$, $y<0$, $y\leq 0$.

Viceversa, se abbiamo una diseq.^{ne} di 2° grado $ax^2+bx+c>0$ $(\geq, <, \leq)$ possiamo associare alla diseq.^{ne} una parabola per aiutarci a risolvere la diseq.^{ne}. Però prima sarebbe utile scrivere la disequazione in modo che risulti sempre $\boxed{a>0}$ (quindi se $a<0$ cambiamo di segno il 1° membro e invertiamo il segno di disuguaglianza).
Consideriamo allora la diseq.^{ne} $ax^2+bx+c>0$ con <u>$a>0$</u> (analoghi ragionamenti per $\geq, <, \leq$).
Possiamo allora utilizzare la parabola $y=ax^2+bx+c$ e cercare i valori di x per i quali l'ordinata y risulta >0.
La nostra parabola sarà sempre rivolta verso l'alto.



a) $x^2-2x-3>0$ considero la parabola

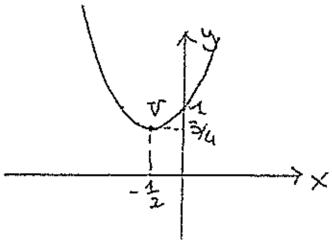
$y=x^2-2x-3$ ($V(1,-4)$, verso l'alto)

$x^2-2x-3=0 \iff x_1=-1$ o $x_2=3$

allora $y>0 \iff x<-1$ o $x>3$

Conclusione: La diseq.^{ne} $x^2-2x-3>0$ è verificata da

$x<-1$ o $x>3$



c) $x^2+x+1<0$ considero la parabola

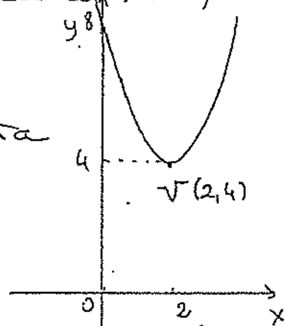
$y=x^2+x+1$. ($V(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$, verso l'alto)

il vertice è al di sopra dell'asse x

quindi la parabola è tutta al di sopra dell'asse x,

allora $y>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

La diseq.^{ne} $x^2+x+1<0$ non è mai verificata



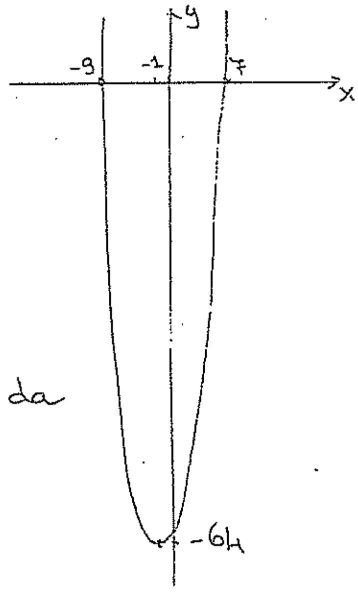
d) $x^2-4x+8\geq 0$ considero la parabola

$y=x^2-4x+8$ ($V(2,4)$, verso l'alto)

di nuovo il vertice è al di sopra dell'asse x, quindi

$y>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

La diseq.^{ne} $x^2-4x+8\geq 0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}$ (in realtà è sempre >0)



e) $x^2+2x-63\leq 0$ considero $y=x^2+2x-63$

($V(-1,-64)$, verso l'alto)

$x^2+2x-63=0 \iff x_1=7$ o $x_2=-9$

allora $y\leq 0 \iff -9\leq x\leq 7$

La diseq.^{ne} $x^2+2x-63\leq 0$ è verificata da

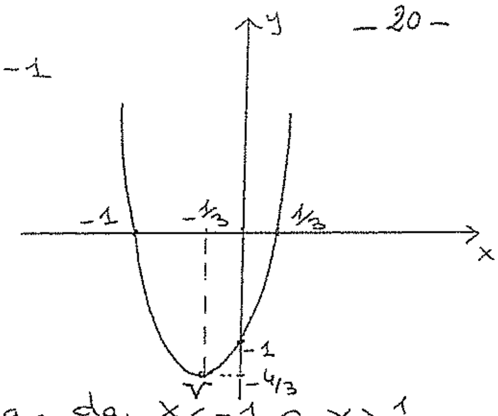
$$-9\leq x\leq 7.$$

f) $3x^2+2x-1>0$ considero $y=3x^2+2x-1$
$(V(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$, verso l'alto$)$

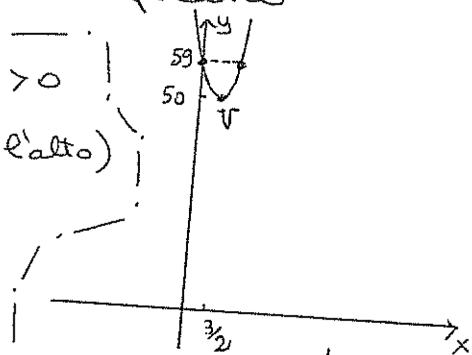
$3x^2+2x-1=0 \iff x_1=-1$ o $x_2=\frac{1}{3}$

allora $y>0 \iff x<-1$ o $x>\frac{1}{3}$

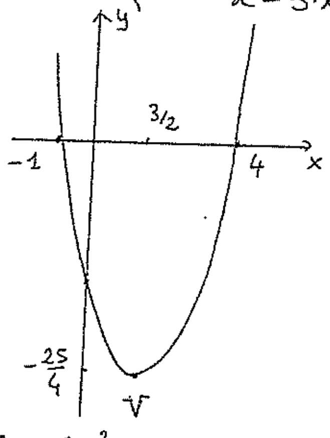
La diseq.^{ne} $3x^2+2x-1>0$ è verificata da $x<-1$ o $x>\frac{1}{3}$



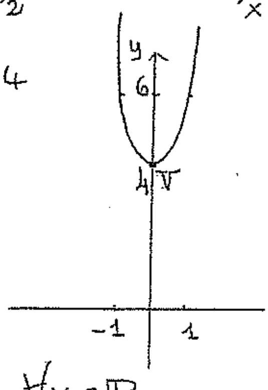
g) $-4x^2+12x-59\geq 0$ cambio segno: $4x^2-12x+59\leq 0$
Considero $y=4x^2-12x+59$ $(V(\frac{3}{2},50)$, verso l'alto$)$
il vertice è al di sopra dell'asse x per cui $y>0$ $\forall x$.
La diseq.^{ne} $4x^2-12x+59\leq 0$ non è mai verificata



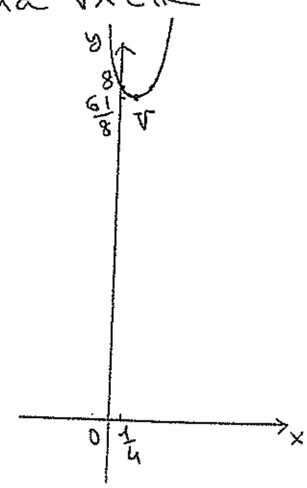
h) $-x^2+3x+4<0$ cambio segno: $x^2-3x-4>0$
considero $y=x^2-3x-4$ $(V(\frac{3}{2},-\frac{25}{4})$, verso l'alto$)$
$x^2-3x-4=0 \iff x_1=-1$ o $x_2=4$
allora $y>0 \iff x<-1$ o $x>4$
La diseq.^{ne} $x^2-3x-4>0$ è verificata da $x<-1$ o $x>4$



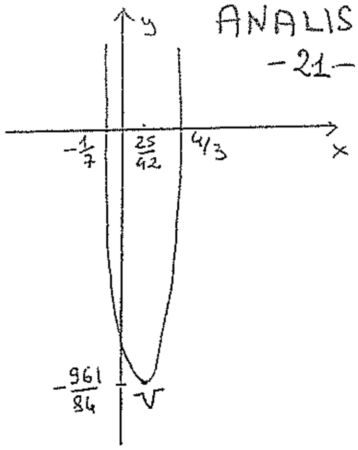
k) $2x^2+4>0$ considero $y=2x^2+4$
$(V(0,4)$, verso l'alto$)$
il vertice è al disopra dell'asse x
percui $y>0$ $\forall x$
La diseq.^{ne} $2x^2+4>0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}$



l) $6x^2-3x+8<0$ considero $y=6x^2-3x+8$
$(V(\frac{1}{4},\frac{61}{8})$, verso l'alto$)$
il vertice è al di sopra dell'asse x per cui
$y>0$ $\forall x$.
La diseq.^{ne} $6x^2-3x+8<0$ non è mai verificata



m) $21x^2-25x-4>0$ considero $y=21x^2-25x-4$



$\left(V\left(\frac{25}{42}, -\frac{961}{84}\right)\right.$, verso l'alto$)$

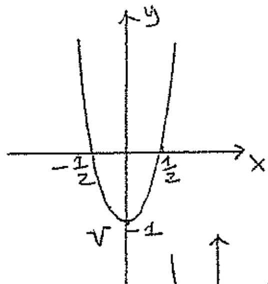
$21x^2-25x-4=0 \iff x=\dfrac{25\pm\sqrt{25^2+16\cdot 21}}{42}$

$\iff x=\dfrac{25\pm 31}{42} \iff x_1=-\frac{1}{7}$ o $x_2=\frac{4}{3}$

allora $y>0 \iff x<-\frac{1}{7}$ o $x>\frac{4}{3}$

La disep.ne $21x^2-25x-4>0$ è verificata da $x<-\frac{1}{7}$ o $x>\frac{4}{3}$.

n) $1-4x^2\geq 0$ cambio segno $4x^2-1\leq 0$

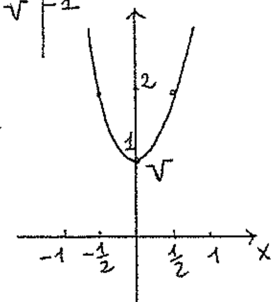


considero $y=4x^2-1$ $(V(0,-1)$, verso l'alto$)$

$4x^2-1=0 \iff x_1=-\frac{1}{2}$ o $x_2=\frac{1}{2}$

allora $y\leq 0 \iff -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$

La disep.ne $4x^2-1\leq 0$ è verificata da $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$

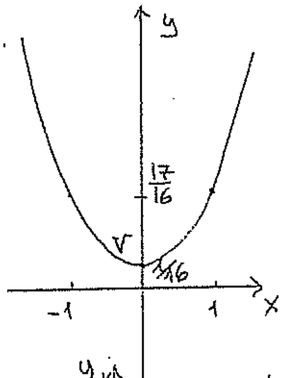


o) $-1-4x^2>0$ cambio segno $4x^2+1<0$

considero $y=4x^2+1$ $(V(0,1)$, verso l'alto$)$

il vertice è al disopra dell'asse x allora $y>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

La disep.ne $4x^2+1<0$ non è <u>mai</u> verificata.

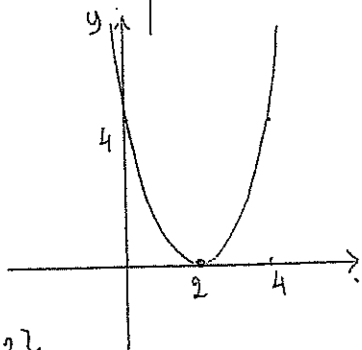


p) $x^2+\frac{1}{16}\geq 0$ considero $y=x^2+\frac{1}{16}$ $(V(0,\frac{1}{16})$, verso l'alto$)$. Il vertice è al di sopra dell'asse x,

allora $y>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

La disep.ne $x^2+\frac{1}{16}\geq 0$ è verificata <u>$\forall x\in\mathbb{R}$</u>

(anzi è $x^2+\frac{1}{16}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$)



q) $x^2-4x+4>0$ considero $y=x^2-4x+4$ $(V(2,0)$, verso l'alto$)$. Il vertice è sull'asse x, allora

$y\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ e $y>0$ $\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 2$

La disep.ne $x^2-4x+4>0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

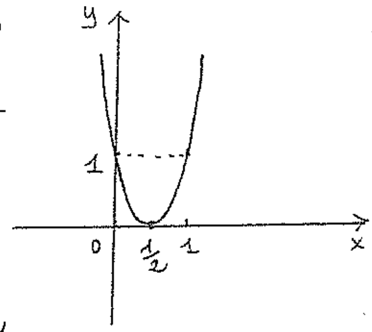
$(\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 2)$

r) $-4x^2+4x-1 \geq 0$ cambio segno $4x^2-4x+1 \leq 0$

Considero $y=4x^2-4x+1$ ($V(\frac{1}{2},0)$, verso l'alto).

Il vertice è sull'asse x, allora $y \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

e $y \leq 0$ solo in $x=\frac{1}{2}$ dove vale 0.



La diseq.ne $4x^2-4x+1 \leq 0$ è verificata per $x=\frac{1}{2}$.

OSSERVAZIONE

È chiaro che se ci si ricorda di trasformare la disequazione in una (equivalente) avente $a>0$, allora si avrà sempre:

- trinomio $ax^2+bx+c>0 \ \forall x$ se $ax^2+bx+c=0$ non ha sol.ni
- trinomio $ax^2+bx+c>0 \ \forall x \neq x_1$ se $ax^2+bx+c=0$ ha una sola sol.ne x_1
- trinomio $ax^2+bx+c>0 \ \forall x : x<x_1$ o $x>x_2$ se $ax^2+bx+c=0$ ha due sol.ni distinte $x_1<x_2$

e non è necessario utilizzare le parabole.

Tuttavia le parabole rendono molto chiaro quello che succede.

8 bis) a) $-3 \leq x \leq -2$, $x \in [-3,-2]$ b) $-3<x<\frac{5}{2}$, $x \in]-3,\frac{5}{2}[$ c) $x \leq 0 \cup x \geq 1$ $x \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$

d) $x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, $x<-2 \cup x>2$ e) $\forall x$ ($x \in \mathbb{R}$) f) $\forall x$ ($x \in \mathbb{R}$) g) $\forall x \neq 0$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) $x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

h) $x=0$ i) nessun x j) $-5 \leq x \leq 5$, $x \in [-5,5]$ k) $0<x<\frac{1}{3}$, $x \in]0,\frac{1}{3}[$ l) $x<-4 \cup x>-2$, $x \in]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$

m) $\forall x \neq 0$ n) $x \leq -10 \cup x \geq 10$ o) $\forall x \in \mathbb{R}$ p) $-5<x<-1$ q) $x=0$

r) nessun x s) $-3<x<1$ t) $\forall x \in \mathbb{R}$ u) $\forall x \neq -1$