COGNOME ____________	NON SCRIVERE QUI
NOME ____________	1 2 3 4
MATRICOLA	B
CORSO AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL	

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2017-2018 — PARMA, 3 LUGLIO 2018

AN2/3lug18/1B

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

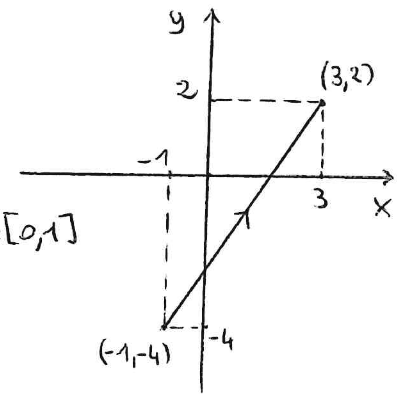
Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

0) **PARTE PRELIMINARE**

Completate:

a) Le equazioni parametriche di una curva che percorre il segmento di estremi $(3,2)$ e $(-1,-4)$ nel verso delle x crescenti sono



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$r \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{3}{2}t - \frac{5}{2} \end{cases} \qquad t \in [-1, 3]$$

oppure $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -4 + 6t \end{cases}$ $t \in [0,1]$

b) Sia $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = -3 + \frac{7}{2}\cos t \\ y(t) = \quad 2 - \frac{7}{2}\operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi].$$

Svolgim. a pag. 4B

$C(-3,2)$
$R = \frac{7}{2}$

La curva percorre la circonferenza di equazione $(x+3)^2 + (y-2)^2 = (\frac{7}{2})^2$

dal punto iniziale $P_{in} = (-3, \frac{11}{2})$ al punto finale $P_{fin} = (-3, \frac{11}{2})$ (la curva è CHIUSA)

in verso ORARIO per 2 giri. $(\Delta t = \frac{7}{2}\pi - (-\frac{\pi}{2}) = 4\pi \to$ tempo di 2 giri$)$

Il vettore tangente nel punto $P_0 = (-3 + \frac{7}{4}\sqrt{2}, 2 + \frac{7}{4}\sqrt{2})$ è $\vec{v}_{P_0} = \frac{7}{4}\sqrt{2}\,\vec{\imath} - \frac{7}{4}\sqrt{2}\,\vec{\jmath}$

La velocità scalare in P_0 è: $\|\vec{v}_{P_0}\| = \frac{7}{2}$

AN2 - 3lug18 - 2B

c) Sia γ una curva nel piano.

Se il punto $P_0 = (-4, -3)$ appartiene al sostegno di γ e in tale punto il vettore tangente è $\mathbf{v} = \dfrac{15}{2}\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, allora $\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{\frac{225}{4} + 16} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2}$

i $\boxed{\text{versori}}$ normali in P_0 sono ... $\vec{N}_{or} = -4\vec{i} - \frac{15}{2}\vec{j}$, $\vec{N}_{ant} = 4\vec{i} + \frac{15}{2}\vec{j}$ $\Rightarrow$ VERS $\vec{N}_{or} = -\frac{8}{17}\vec{i} - \frac{15}{17}\vec{j}$, VERS $\vec{N}_{ant} = \frac{8}{17}\vec{i} + \frac{15}{17}\vec{j}$

e la retta normale in P_0 ha equazione cartesiana ...

$m_{tan} = \frac{-4}{15/2} = -\frac{8}{15}$ $\quad m_{norm} = -\frac{1}{m_{tan}} = \frac{15}{8}$ $\quad r_{norm}\ y = \frac{15}{8}x + \frac{9}{2}$

$\left(y = -3 + \frac{15}{8}(x+4)\right)$

d) Sia $\gamma : [-3, 3] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{4}{3}t^2 \\ y(t) = t \\ z(t) = -\dfrac{4}{3}t^3 \end{cases} \qquad t \in [-3, 3]\,.$$

Svolgim. a pag. 4B

La retta tangente a γ nel punto $P_0 = (-3, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ ha equazione: ... $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = -\frac{3}{2} + t \\ z = \frac{9}{2} - 9t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Il piano passante per $P_1 = (-3, 9, \frac{17}{3})$ e perpendicolare alla retta tangente trovata

ha equazione: ... $z = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + 6$

e) Considerate la funzione $f(x,y) = -4 + 2\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$.

Svolgim. a pag. 4B-5B

i) Determinate il dominio di f, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f, spiegate di quale tipo di superficie si tratta (anche l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari calcolate l'angolo di apertura) e disegnate con cura il grafico.

iii) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corrrispondente a $(x_0 = 3, y_0 = -2)$ è: ... $z = \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{4}{5}$

iv) La derivata direzionale di f nel punto $(x_0 = 3, y_0 = -2)$ nella direzione del punto $P_1 = (1, -4)$ vale .... $\frac{\sqrt{2}}{5}$

f) Le soluzioni dell'equazione differenziale $\frac{1}{5}y''(x) + \frac{1}{5}y'(x) + \frac{13}{4}y(x) = 0$

sono ... $y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(4x) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\cos(4x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: ... eq.^{ne} caratt. $\frac{1}{5}t^2 + \frac{1}{5}t + \frac{13}{4} = 0$ $\quad t^2 + t + \frac{65}{4} = 0$ $\quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-64}}{2}$ $\quad \Delta < 0$

$t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm 4i$ $\quad$ SOL.^{NI} FOND. $y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(4x)$ $\quad y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos(4x)$

1) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione
Svolgim. a pag. 5B-6B-7B

$$f(x,y) = (y - 4 + x^2)\,(y + 5)\,.$$

a) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

b) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 5 \leq y \leq 0\}\,.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti) Sia E l'insieme definito da $E = E_1 \cup E_2$ con
Svolgim. a pag. 8B-9B

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 9\,,\, y \geq 0\}$$

$$E_2 = \text{triangolo di vertici } (-3,0)\,,\, (3,0)\,,\, (3,-3)\,.$$

a) Disegnate E.

b) Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme E come normale rispetto a x; ripetete come normale rispetto a y.

c) Calcolate l'integrale doppio

$$\int_E \frac{1}{9}\,|y|\,dxdy.$$

---

3) (Sul foglio a quadretti) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:
Svolgim. a pag 9B-10B

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,y''(x) + y'(x) + \frac{1}{2}\,y(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Risposta: ... $y(x) = -3e^{-x} - 2xe^{-x} + 3x^2e^{-x}$

AN2, 31/7/2018 - 4B

b) $P_0=(-3+\frac{7}{4}\sqrt{2}, 2+\frac{7}{4}\sqrt{2})$ corrisponde a $t_0=\frac{7}{4}\pi$

$$\begin{cases} -3+\frac{7}{4}\sqrt{2}=-3+\frac{7}{2}\cos t \\ 2+\frac{7}{4}\sqrt{2}=2-\frac{7}{2}\operatorname{sen} t \end{cases} \quad \begin{cases} \cos t=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} t=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad t_0=\frac{7}{4}\pi \text{ (o anche } t_0=-\frac{\pi}{4})$$

passa 2 volte per P_0

$\gamma'(t)=(-\frac{7}{2}\operatorname{sen} t, -\frac{7}{2}\cos t)$ $\quad \gamma'(t_0)=\vec{v}_{P_0}=\frac{7}{4}\sqrt{2}\vec{i}-\frac{7}{4}\sqrt{2}\vec{j}$

$\|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{(\frac{7}{4}\sqrt{2})^2+(-\frac{7}{4}\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{49}{8}+\frac{49}{8}}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$ $(=R_{circonf})$.

d) $P_0=(-3,-\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ corrisponde a $t_0=-\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} -3=-\frac{4}{3}t^2 \\ -\frac{3}{2}=t \\ \frac{9}{2}=-\frac{4}{3}t^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t^2=9/4 \to t=\pm\frac{3}{2} \\ t=-3/2 \\ t^3=-\frac{27}{8} \to t=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\gamma'(t)=(-\frac{8}{3}t, 1, -4t^2)$ $\quad \gamma'(t_0)=\vec{v}_{P_0}=4\vec{i}+\vec{j}-9\vec{k}$

$$r_{tan} \begin{cases} x=-3+4t \\ y=-\frac{3}{2}+t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=\frac{9}{2}-9t \end{cases}$$

Essendo il piano $\perp$ alla retta $\Rightarrow$ il vettore direttore della retta risulta NORMALE al piano $\Rightarrow$ $\vec{N}_{piano}=(4,1,-9)$. Allora

piano per $P_1 \perp r_{tan}$: $(P-P_1)\cdot\vec{N}_{piano}=0$

$4(x+3)+(y-9)-9(z-\frac{17}{3})=0 \qquad 4x+y-9z+12-9+51=0$

$z=\frac{4}{9}x+\frac{1}{9}y+6$

e) i) $\operatorname{dom} f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2\geq 0\}=\mathbb{R}^2$ in quanto $x^2+(y-2)^2$ è una somma di 2 quadrati e in quanto tale sempre ≥ 0 (è $=0$ $\Leftrightarrow$ $(x=0, y=2)$).

ii) grafico di f: eq.ne $z=-4+2\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

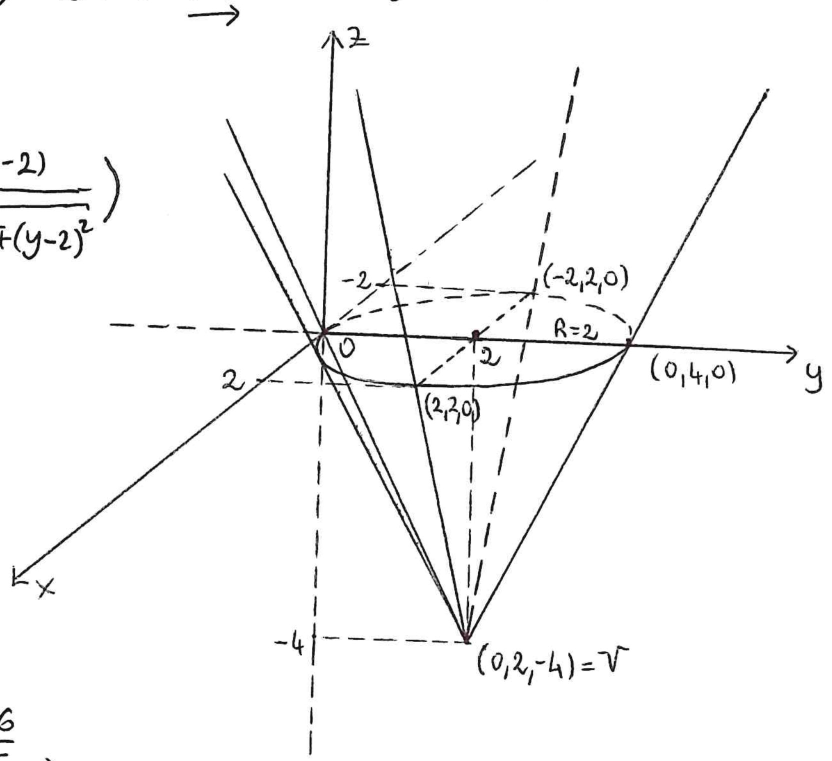
Si tratta di un CONO CIRCOLARE di $V(0,2,-4)$, verso l'alto, AN2, 3/7/2018 – 5B

$a=2$ ($\widehat{ap}=\arctan\frac{1}{2}\simeq 26{,}6°$), $\cap\, z=0$ su $2\sqrt{x^2+(y-2)^2}=4$

$\downarrow$

$0<\widehat{ap}<45°$ $\qquad \sqrt{x^2+(y-2)^2}=2>0 \xrightarrow{(\cdot)^2} x^2+(y-2)^2=4$ CIRCONF. di

$C(0,2)$ e $R=2$.



iii) $\nabla f(x,y)=\left(\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}},\dfrac{2(y-2)}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}\right)$

$\nabla f(3,-2)=\left(\dfrac{6}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$

$z_0=f(3,-2)=-4+2\cdot 5=6$

Piano tang ha EQ.^{ne}

$z=6+\frac{6}{5}(x-3)-\frac{8}{5}(y+2)$

$z=\frac{6}{5}x-\frac{8}{5}y+6-\frac{18}{5}-\frac{16}{5} \quad \to \quad \frac{30-18-16}{5}=-\frac{4}{5}$

$z=\frac{6}{5}x-\frac{8}{5}y-\frac{4}{5}$

iv) $\vec{v}=\dfrac{P_1-P_0}{\|P_1-P_0\|}$ con $P_0=(3,-2)$ $P_1=(1,-4)$

$\vec{v}=\dfrac{-2\vec{i}-2\vec{j}}{\sqrt{4+4}}=\dfrac{-2\vec{i}-2\vec{j}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,-2)=\nabla f(3,-2)\cdot\vec{v}=\frac{6}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{8}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt{2}+\frac{4}{5}\sqrt{2}=\frac{1}{5}\sqrt{2}\simeq 0{,}28$

ES.1) a) $\mathrm{dom} f=\mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

$\nabla f(x,y)=\left(2x(y+5),(y+5)+(y-4+x^2)\right)$

P.ti STAZ. $\nabla f(x,y)=(0,0)$ $\begin{cases}2x(y+5)=0\\(y+5)+(y-4+x^2)=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=0 \text{ o } y=-5\\ \dots\end{cases}$

se $\boxed{x=0}$ $\to$ 2^a eq.^{ne} $2y+1=0$ $y=-\frac{1}{2}$ $\qquad P_0=(0,-\frac{1}{2})$

se $\boxed{y=-5}$ $\to$ 2^a eq.^{ne} $x^2=9$ $x=\pm 3$ $\qquad P_1=(3,-5)$ $P_2=(-3,-5)$

3 P.TI STAZ. : $P_0=(0,-\frac{1}{2})$ $P_1=(3,-5)$
$P_2=(-3,-5)$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 2(y+5) & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix} \qquad Hf(0,-\tfrac{1}{2})=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det Hf(0,-\frac{1}{2})=18>0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=9>0$

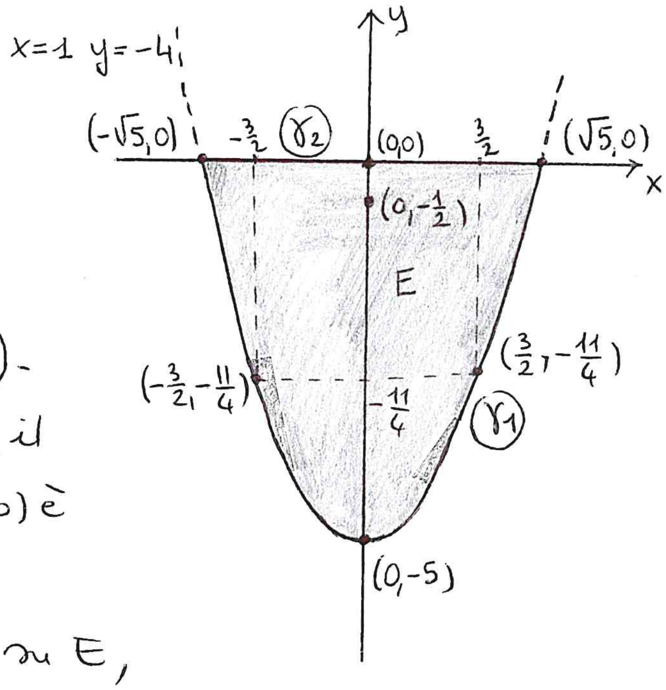
$\Rightarrow (0,-\frac{1}{2})$ è P.TO di MINIMO LOCALE $\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2>0\right)$

$Hf(3,-5)=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(3,-5)=-36<0 \rightarrow (3,-5)$ è P.TO di SELLA

$Hf(-3,-5)=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-3,-5)=-36<0 \rightarrow (-3,-5)$ è P.TO di SELLA.

b) E è la parte di piano compresa tra la parabola $y=x^2-5$
(parabola di base $y=x^2$ abbassata di 5 $\rightarrow V(0,-5)$ verso l'alto $\quad \cap\, y=0$ $\quad x=\pm\sqrt{5}$)

e l'asse x.



1°) E è CHIUSO in quanto contiene tutti i punti del bordo (costituiti dalla parabola e dall'asse x entrambi per $x\in[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$).
E è LIMITATO $\rightarrow E\subset B_6(0,0)$ (il punto di E più lontano da (0,0) è (0,-5) che dista 5 da (0,0))
f è continua su $\mathbb{R}^2$, e quindi su E, in quanto prodotto di 2 polinomi (uno di 2° grado in x, y, e uno di 1° grado in y).
Allora vale il Teorema di Weierstrass che ci garantisce l'esistenza del MASSIMO e del MINIMO assoluti di f su E.

AN2 - 3/7/18 - 7B

2°) C'è un punto di MINIMO LOCALE interno a E $(0,-\frac{1}{2})$ in cui $f(0,-\frac{1}{2}) = -\frac{81}{4} = -20{,}25$.

3°) Studio del bordo di E

$$\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 5 \end{cases} \quad t \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \quad g_1(t) = f(t, t^2-5) = (t^2-5-4+t^2)(t^2) =$$
$$= (2t^2-9)(t^2) = 2t^4 - 9t^2$$

$g_1'(t) = 8t^3 - 18t$ $\qquad g_1'(t) = 0 \iff 8t^3 - 18t = 0$

$\iff 2t(4t^2-9) = 0 \iff t=0$ o $t^2 = \frac{9}{4} \iff t=0$ o $t = \pm\frac{3}{2}$

TEMPI $\quad t=-\sqrt{5} \quad t=-\frac{3}{2} \quad t=0 \quad t=\frac{3}{2} \quad t=\sqrt{5}$

PUNTI $\quad (-\sqrt{5},0) \quad (-\frac{3}{2},-\frac{11}{4}) \quad (0,-5) \quad (\frac{3}{2},-\frac{11}{4}) \quad (\sqrt{5},0)$

VALORI $\quad f(-\sqrt{5},0) = 5(-4+5) = 5 = f(\sqrt{5},0)$

$f(-\frac{3}{2},-\frac{11}{4}) = (-\frac{11}{4}-4+\frac{9}{4})(-\frac{11}{4}+5) = (-\frac{9}{2})(\frac{9}{4}) = -\frac{81}{8} = -10{,}125$

$f(+\frac{3}{2},-\frac{11}{4}) = -\frac{81}{8} \quad f(0,-5) = 0$

$$\gamma_2 \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \quad g_2(t) = f(t,0) = (t^2-4)\cdot 5 = 5t^2 - 20$$

$g_2'(t) = 10t \qquad g_2'(t) = 0 \iff t = 0$

TEMPI $\quad t=-\sqrt{5} \quad t=0 \quad t=\sqrt{5}$ $\qquad$ PUNTI $\quad (-\sqrt{5},0) \quad (0,0) \quad (\sqrt{5},0)$

VALORI $\quad f(-\sqrt{5},0) = f(\sqrt{5},0) = 5 \quad f(0,0) = -20$

4°) CONCLUSIONE: nel punto di minimo locale interno (UNICO CANDIDATO interno ad E) $f(0,-\frac{1}{2}) = -\frac{81}{4}$, nel bordo ∂E f è compresa tra -20 e 5 $\Rightarrow$

$$\min_E f(x,y) = -\frac{81}{4} = f(0,-\tfrac{1}{2}) \qquad \max_E f(x,y) = 5 = f(\pm\sqrt{5},0).$$

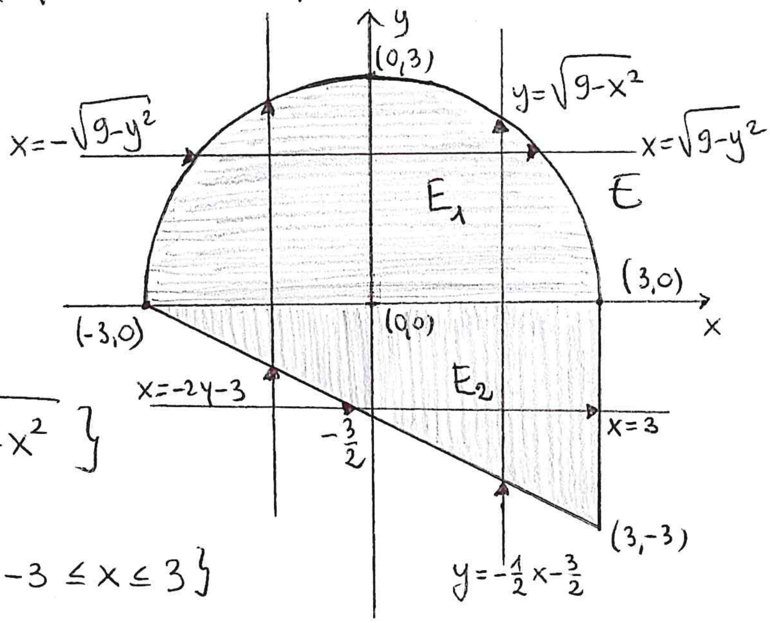
(*) Studio ∂E con i MOLTIPLICATORI di LAGRANGE a pag. 10B

AN2 - 3/7/18 - 8B

ES. 2) a) E_1 è la metà del CERCHIO CHIUSO (interno + bordo) di $C(0,0)$ e $R=3$ con $y \geq 0$ (quindi al di sopra dell'asse x

la retta per $(-3,0)$ e $(3,-3)$ ha eq.^{ne}: $m = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$



b) $E_x = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, \; -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \right\}$

$E_{1,y} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq y \leq 0, \; -2y-3 \leq x \leq 3 \right\}$

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}x = -y - \frac{3}{2} \quad x = -2y-3$

$E_{2,y} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3 \; -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2} \right\}$

c) Poiché nella funzione integranda compare $|y|$ per $\int$ usando E_x dobbiamo comunque dividere E nella regione con $y \geq 0$ e con $y \leq 0$ per poter eliminare il $|\cdot|$

$E_{1,x} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, \; -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \leq y \leq 0 \right\}$

$E_{2,x} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, \; 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \right\}$.

Usando dunque E_x otteniamo: $\int_E \frac{1}{9} |y| \, dx\, dy =$

$$= \frac{1}{9} \int_{-3}^{3} \left(\int_{-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}^{0} (-y)\, dy \right) dx + \frac{1}{9} \int_{-3}^{3} \left(\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} y\, dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{9} \int_{-3}^{3} -\frac{1}{2} \left[y^2 \right]_{-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}^{0} dx + \frac{1}{9} \int_{-3}^{3} \frac{1}{2} \left[y^2 \right]_{0}^{\sqrt{9-x^2}} dx =$$

AN2 - 3/7/18 - 9B

$$= -\frac{1}{18}\int_{-3}^{3}\Big[0-(\underbrace{-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{2})^2}_{-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}}\Big]dx + \frac{1}{18}\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx =$$

$$= +\frac{1}{18}\Big[\frac{x^3}{12}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x\Big]_{-3}^{3} + \frac{1}{18}\Big[9x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-3}^{3} =$$

$$= \frac{1}{18}\Big[\frac{27}{12}^{9}_{4}+\cancel{\frac{27}{4}}+\frac{27}{4}+\frac{27}{12}^{9}_{4}-\cancel{\frac{27}{4}}+\frac{27}{4}\Big]+\frac{1}{18}\big[27-9+27-9\big]=$$

$$= \frac{1}{18}\cdot 18+\frac{1}{18}\cdot 36 = 1+2 = \boxed{3}$$

ES.3) Eq.^{ne} omog. associata $\frac{1}{2}y''(x)+y'(x)+\frac{1}{2}y(x)=0$

Eq.^{ne} caratt. $\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}=0 \quad t^2+2t+1=0 \quad (t+1)^2=0$

$t_1=-1$ con molt 2

Sol.^{ni} FONDAM. $y_1(x)=e^{-x} \quad y_2(x)=x\cdot e^{-x}$

Sol.^{ni} Eq.^{ne} omog. $y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x} \quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x)=Kx^2e^{-x}$ perchè il 2° m è nella forma $3\cdot e^{-x}$ cioè costante $\cdot e^{\alpha x}$ con $\alpha=-1$, ma si deve moltiplicare per x^2 essendo $\alpha=-1$ sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratt. con molteplicità 2.

$$\bar{y}'(x)=-Kx^2e^{-x}+2Kxe^{-x}=(-Kx^2+2Kx)e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x)=-(-Kx^2+2Kx)e^{-x}+(-2Kx+2K)e^{-x}=(Kx^2-4Kx+2K)e^{-x}$$

Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo:

$$\frac{1}{2}(Kx^2-4Kx+2K)e^{-x}+(-Kx^2+2Kx)e^{-x}+\frac{1}{2}Kx^2e^{-x}=3e^{-x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Big(\cancel{\tfrac{1}{2}Kx^2}-\cancel{2Kx}+K-\cancel{Kx^2}+\cancel{2Kx}+\cancel{\tfrac{1}{2}Kx^2}-3\Big)e^{-x}=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$(K-3)e^{-x}=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ Poichè $e^{-x}\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ dev'essere necessariamente $K=3$

$$\boxed{\bar{y}(x)=3x^2e^{-x}}$$

AN2 - 3/7/18 - 10B

Tutte le sol.^{ni} dell' eq.^{ne} sono dunque:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 3x^2 e^{-x}$$

PB di CAUCHY $\quad y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6x e^{-x}$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = -3 \\ y'(0) = -c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 1 + c_1 = -2 \end{cases}$$

<u>UNICA SOL.^{ne}</u> $\quad y(x) = -3e^{-x} - 2xe^{-x} + 3x^2 e^{-x}$.

(*) ES1) Studio del bordo di E (∂E) con il metodo dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE

Lato ① $\quad g(x,y) = x^2 - y - 5 \qquad \nabla g(x,y) = (2x, -1) \quad \nabla f(x,y) = (2x(y+5), x^2+2y+1)$

$$\begin{cases} 2x(y+5) = 2\lambda x \\ x^2 + 2y + 1 = -\lambda \\ y = x^2 - 5 \quad (x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1^a \text{eq.}^{ne} \quad 2x(y+5-\lambda) = 0 \iff x = 0 \text{ o } \lambda = y+5 \\ \text{se } \boxed{x=0} \to 3^a \ y = -5 \qquad P_0(0,-5) \text{ con } \lambda = 9 \\ \qquad\qquad (2^a \text{eq.}^{ne}) \end{cases}$$

se $\lambda = y+5 \to \begin{matrix} 2^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{vmatrix} x^2 + 3y + 6 = 0 \\ y = x^2 - 5 \end{vmatrix} \to x^2 + 3(x^2-5) + 6 = 0 \quad 4x^2 = 9 \quad x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm 3/2 \to P_1 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}\right) \quad P_2 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}\right)$

con $\lambda = \frac{9}{4}$

Lato ② $\quad g(x,y) = y \qquad \nabla g(x,y) = (0,1)$

$$\begin{cases} 2x(y+5) = 0 \\ x^2 + 2y + 1 = \lambda \\ y = 0 \quad x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \end{cases} \qquad \begin{cases} 3^a \ y = 0 \to 1^a \ x = 0 \\ (0,0) \text{ con } \lambda = 1 \ (2^a \text{eq.}^{ne}) \end{cases}$$