CAMPI VETTORIALI:

In questa tipologia di esercizi viene fornito un campo vettoriale e sarà richiesto di verificare se è conservativo e eventuali altre richieste.

Dominio del campo:

il dominio di un campo vettoriale è l'unione dei domini delle funzioni che lo compongono.

Es. sia il campo vettoriale $f(f^1, f^2)$ con

$f^1(x, y) = 1/x + y$, $f^2(x, y) = \sqrt{x-y}$

avrò che il dominio di $f^1 = \forall x, y$ con $x \neq 0$ mentre quello di f^2 sarà $(x - y) \geq 0$. il dominio del campo è dunque

$$x \neq 0 \cup (x - y) \geq 0$$

Campo conservativo:

Un campo vettoriale è conservativo se è irrotazionale cioè se le sue derivate parziali sono:

$$\begin{cases} \frac{df^1}{dy} \equiv \frac{df^2}{dx} \\ \frac{df^2}{dz} \equiv \frac{df^3}{dy} \\ \frac{df^3}{dx} \equiv \frac{df^1}{dz} \end{cases}$$

Esercizio 1. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ il campo vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2, f^3)$ definite da

$$\begin{cases} f^1(x,y,z) = \operatorname{sen}(yz^2) - 2xyz\operatorname{sen}(x^2z) \\ f^2(x,y,z) = \cos(x^2z) + xz^2\cos(yz^2) \\ f^3(x,y,z) = -x^2y\operatorname{sen}(x^2z) + 2xyz\cos(yz^2) \end{cases} \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Stabilite se f è conservativo.

$$\frac{df^1}{dy} = z^2\cos(yz^2) - 2xz\,sen(x^2z) \equiv -2xz\,sen(x^2z) + z^2\cos(yz^2) = \frac{df^2}{dx}$$

$$\frac{df^2}{dz} = -x^2sen(x^2z) + 2xzcos(yz^2) - 2xyz^3sen(yz^2)$$

$$\equiv -x^2sen(x^2z) + 2xzcos(yz^2) - 2xyz^3sen(yz^2) = \frac{df^3}{dy}$$

$$\frac{df^3}{dx} = -2xysen(x^2z) - 2x^3yz\,cos(x^2z) + 2yzcos(yz^2)$$

$$\equiv 2yzcos(yz^2) - 2xysen(x^2z) - 2x^3yz\,cos(x^2z) = \frac{df^1}{dz}$$

Il campo è dunque conservativo.

Potenziale del campo:

Il potenziale del campo si calcola con la formula:

$F(x, y, z) = \int_0^x f^1(t,0,0)dt + \int_0^y f^2(x,t,0)\,dt + \int_0^z f^3(x,y,t)dt$

ES. Il potenziale del precedente campo è:

$F(x, y, z) = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y [\cos(0)]\,dt + \int_0^z -x^2ysen(x^2t) + 2xyt\,cos(yt^2)\,dt = \; = ycos(x^2z) + xsen(yz^2)$

Integrale curvilineo sul campo:

Spesso viene chiesto di calcolare l'integrale curvilineo su un campo vettoriale. Se il campo vettoriale è conservativo il calcolo si riduce a :

Siano $f(f^1, f^2, f^3)$ il campo vettoriale e $\gamma(t)$ una curva con $t \in [a, b]$

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dove F è il potenziale del campo e $\gamma(b)$ è il valore di γ nel punto b.

ES.

(b) Calcolate l'integrale curvilineo di f lungo l'arco parametrico $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}t^2 e_1 + \frac{(\pi-6)t+6}{6}e_2 + t^4 e_3, \qquad t \in [0,1].$$

Con F = $y\cos(x^2 z) + x\,\mathrm{sen}\,(yz^2)$

$\gamma(0) = 0 * e_1 + 1 * e_2 + 0 * e_3 = (0,1,0)$, $\gamma(1) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} * e_1 + \frac{\pi}{6} * e_2 + 1 * e_3 = (\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \frac{\pi}{6}, 1)$,

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \frac{\pi}{6}, 1) - F(0,1,0) = \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\pi}{6}\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3\pi}}{6} - 1$$

STUDIO DI FUNZIONE O DI UN INSIEME

Per punti critici si intendono tutti i massimi, minimi e punti di sella.

Punti critici di una funzione in 2/3 dimensioni:

Per calcolare i punti critici di una funzione in 3 dimensioni (nel caso di 2 dimensioni basta togliere tutto quello relativo all'asse z).

1. procedo per prima cosa **calcolando le derivate parziale** della funzione lungo x, y, z e successivamente le metto a sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) = 0 \\ f_z(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

2. Risolvo il sistema trovando n punti $p_1(x, y, z),..,p_n(x, y, z)$. Il numero dei punti totali trovati deve essere $\leq$ a n = grado max(f_x) $*$ grado max(f_y) $*$ grado max(f_z) (solitamente =)
3. **Calcolo la matrice Hessiana** riempiendola con le derivate parziali seconde in questo modo:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yx}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

Se solo in 2 dimensioni:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

4. Sostituisco le coordinate di ciascun punto al posto delle x,y,z nella Hessiana e calcolo il determinante Per le matrici 3x3 si usa il metodo di Sarrus
5. Suddividiamo ora il problema in due casi; se la matrice è 2x2 allora:

   a. se il primo elemento è negativo il punto deve essere un punto di sella

b. se il primo elemento è positivo e il determinante è positivo, allora è un minimo

c. se il primo elemento è positivo e il determinante è negativo, allora è un massimo

se la matrice è 3x3 allora, calcolo il determinante 1x1, 2x2, 3x3 della matrice e se:

a. Sono tutti positivi è un punto di minimo

b. Se sono positivi 1x1, 3x3 e negativi il 2x2 allora è un massimo

c. Altrimenti è un punto di sella.

Nb. per determinante 1x1 intendiamo il punto in alto a destra, 2x2 è la matrice in altro a destra di dimensione 2 e 3x3 è la matrice completa. (anche detti minori nord-ovest)

ES.

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + z^2 - 2xz, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate i punti critici di f e stabilitene la natura.

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 4x^3 - 2x - 2z = 0 \\ f_y(x,y,z) = 4y^3 - 2y = 0 \\ f_z(x,y,z) = 2z - 2x = 0 \end{cases}$$

Il numero di punti totali è n = 3 * 3 * 1 = 9

I Punti che soddisfano sono:

$$P = (0,0,0); \qquad Q_\pm = (0, \pm 1/\sqrt{2}, 0); \qquad R_\pm = (\pm 1, 0, \pm 1); \qquad S_{\pm,\pm} = (\pm 1, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1);$$

Calcolo la matrice Hessiana

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y,z) &= 12x^2 - 2; & f_{xy}(x,y,z) &= f_{yx}(x,y,z) = 0; \\ f_{yy}(x,y,z) &= 12y^2 - 2; & f_{yz}(x,y,z) &= f_{zy}(x,y,z) = 0; \\ f_{zz}(x,y,z) &= 2; & f_{xz}(x,y,z) &= f_{zx}(x,y,z) = -2; \end{aligned}$$

per ogni (x, y, z) e quindi le matrici hessiane nei punti critici sono

$$D^2 f(P) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad D^2 f(Q_\pm) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$D^2 f(R_\pm) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad D^2 f(S_{\pm,\pm}) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per P abbiamo DET1x1 = - 2 , DET2x2 = (4 - 0) = 4, DET3x3 = 8 – (-8) = 16 è dunque un punto di sella, cosi come $R\pm$ e $Q\pm$, mentre $S\pm,\pm$ sono punti di minimo locale.

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2z = 0 \\ 4y^3 - 2y = 0 \\ 2z - 2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^3 - 2x - 2z = 0 \\ 4y^3 - 2y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

PROCEDIAMO PER IPOTESI:

IPOTESI 1: $x = z = 0 \Rightarrow 4y^3 - 2y = 0 \rightarrow y(4y^2 - 2y) = 0$

SOL $\Rightarrow y = 0$, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$P_1 = (0, 0, 0)$

$P_{2,3} = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

IPOTESI 2: $y = 0$ (E $x = z \neq 0$ PERCHÉ SE NO CASO PREC.)

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2z = 0 \\ z = x \end{cases} \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0$$

$\rightarrow x = 0$ (GIÀ TRATTATA)

$\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$, $x = -1$

$P_{4,5} = (\pm 1, 0, \pm 1)$

IPOTESI $x, y, z \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ 4y^3 - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x^2 - 1) = 0 \\ y(4y^2 - 2y) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 = z \text{ SCARTIAMO, GIÀ VISTA} \\ y = 0 \text{ SCARTIAMO, GIÀ VISTE} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ 2y^2 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 1 \\ y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$P_{6,7,8,9} = (\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1) \rightarrow$

$P_6 = (+1, +\frac{1}{\sqrt{2}}, +1)$

$P_7 = (-1, +\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$

$P_8 = (+1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, +1)$

$P_9 = (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$

Punti critici di una funzione su un insieme

In questo caso utilizzo i **moltiplicatori di Lagrange**. Siano dati una funzione f(x, y, z) ed una curva (o un insieme) γ(x, y, z)

1. Scrivo la funzione L(x, y, z, λ) = f(x, y, z) - λ[γ(x, y, z)]
2. Risolvo il sistema

$$\begin{cases} L_x(x, y, z, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, z, \lambda) = 0 \\ L_z(x, y, z, \lambda) = 0 \\ -\gamma(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ -\gamma(x, y) = 0 \end{cases}$$ se in due dimensioni

3. Se f è solo in x, y allora è possibile semplificare il calcolo nel caso riuscissi a trovare una matrice nelle due prime righe nella forma (solitamente avviene se il grado massimo del sistema è 2)

$$\begin{bmatrix} ax & + & by \\ cx & + & dy \end{bmatrix}$$

   In quel caso pongo il DET della matrice a 0 per trovare i punti da valutare poi con la matrice Hessiana come nel caso precedente.

4. Negli altri casi (grado massimo del sistema > 2) devo creare la seguente matrice

M = $\begin{pmatrix} fx & fy \\ \gamma_x & \gamma_y \end{pmatrix}$ se in 3 dimensioni aggiungo fz ed γ_z

E poi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} DET\ (M) = 0 \\ \gamma\ (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ES.

Esercizio 4. Sia

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e sia

$$K = \{(x, y) :\ 2x^2 + 4xy + 3y^2 \leq 6\}.$$

L(x, y, z, λ) = $x^2 - y^2 - \lambda(2x^2 + 4xy + 3y^2 - 6) = x^2 - y^2 + \lambda(-2x^2 - 4xy - 3y^2 + 6)$ (sbagliato da sistemare)

$$\begin{cases} L_x(x, y, z, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, z, \lambda) = 0 \\ -\gamma(x, y, z) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 4x\lambda - 4y = 0 \\ -2y - 4x\lambda - 6y\lambda = 0 \\ -2x^2 - 4xy - 3y^2 + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2x\lambda - 2\lambda y = 0 \\ 4\lambda x + (2 + 6\lambda)y = 0 \\ 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x(1 - 2\lambda) - 2\lambda y = 0 \\ 2\lambda x + (1 + 3\lambda)y = 0 \\ 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$ è una matrice nella forma $\begin{bmatrix} ax & + & by \\ cx & + & dy \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (1 - 2\lambda) & - & 2\lambda \\ 2\lambda & + & (1 + 3\lambda) \end{bmatrix}$

DET = $(1 - 2\lambda) * (1 + 3\lambda) - 2\lambda * (-2\lambda) = 0 \rightarrow 1 + 3\lambda - 2\lambda - 6\lambda^2 + 4\lambda^2 = 0 \rightarrow -2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightarrow$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}, 1$$

Valutiamo: per λ = $-\frac{1}{2}$ →

$$\begin{cases} x + x + y = 0 \\ -2x + (2 - 3)y = 0 \\ 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 2x - 2x = 0 \\ 2x^2 - 8x^2 + 12x^2 - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \mp 2 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$P_{1,2} = (\pm 1, \mp 2)$

Valutiamo: per λ = 1 →

$$\begin{cases} x - 2x - 2y = 0 \\ 4x + (2 + 6)y = 0 \\ 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -8y + 8y = 0 \\ 8y^2 - 8y^2 + 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \mp 2\sqrt{2} \\ 0 = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$P_{3,4} = (\pm 2\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$

Valutiamo quali sono minimo e quale massimo:

per $P_{1,2}$ abbiamo che f(p) = 1 - 4 = 3

per $P_{3,4}$ abbiamo che f(p) = 8 – 2 = 6

dunque $P_{1,2}$ sono il minimo mentre $P_{3,4}$ sono il massimo.

ES.2

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + z^2 - 2xz, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate i punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate il massimo ed il minimo globale di f sull'insieme $\Gamma = \{(x, y, z) :\ x^2 + 4y^2 = 4 \text{ e } z = 0\}$.

Saltando il punto a perché già visto. Siccome il grado è > 2 calcolo: (escludiamo z visto che è nulla in Γ)

$$M = \begin{pmatrix} fx & fy \\ \Gamma_x & \Gamma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x & 4y^3 - 2y \\ 2x & 8y \end{pmatrix}$$

Il sistema sarà dunque:

$$\begin{cases} DET\ (M) = 0 \\ \gamma\ (x, y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 32x^3y - 8xy^3 - 12xy = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} = \begin{cases} xy\ (8x^2 - 2y^2 - 3) = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} =$$

Le della prima equazione sono x = 0 od y = 0 (ma non x, y = 0) ed x, y ≠0

Per x = 0 dalla secondo otteniamo $y = \pm 1$

Per y = 0 dalla secondo otteniamo $x = \pm 2$

Per x, y ≠ 0 dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases} 8x^2 - 2y^2 - 3 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 = 0 \end{cases}$ = che hanno come soluzioni $(\pm\sqrt{\frac{20}{34}}, \pm\sqrt{\frac{29}{34}})$

I punti ottenuti sono dunque:

$P_{1,2} = (0, \pm 1)$ $\quad$ $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$ $\quad$ $P_{5,6,7,8} = (\pm\sqrt{\frac{20}{34}}, \pm\sqrt{\frac{29}{34}})$

In $P_{1,2}$ → f(x, y) = 0

In $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$ → f(x, y) = 12

In $P_{5,6,7,8} = (\pm\sqrt{\frac{20}{34}}, \pm\sqrt{\frac{29}{34}})$ → f(x, y) = - 0.36

Dunque massimo in $P_{3,4}$ ed minimo in $P_{5,6,7,8}$

INTEGRALI TRIPLI

In questo tipo di esercizi possiamo trovarci di fronte a due possibili tipi di esercizi

a. Integrali tripli classici
b. Integrali tripli parametrici

In entrambi i casi i primi passaggi sono uguali, verrà dato un insieme K e delle **limitazioni** riferite agli assi x,y e una **funzione descrittiva** in x, y, z.

ES. $\quad K = \left\{(x, y, z) : \boxed{(x^2+y^2)^2 \le z \le 2(x^2+y^2)} \text{ e } \boxed{x \le y \le \sqrt{3}x}\right\}$

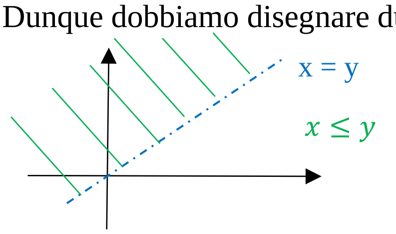
Il nostro scopo sarà capire gli estremi di integrazione lungo l'asse x, y e z.

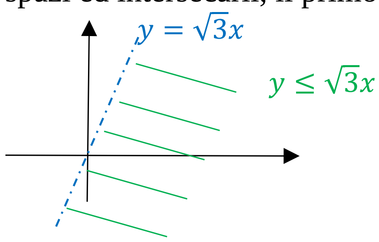
1. **Asse z**: l'asse z è il più facile da identificare visto che è descritto direttamente dalla funzione descrittiva, nel caso precedente avremmo che gli estremi sono:

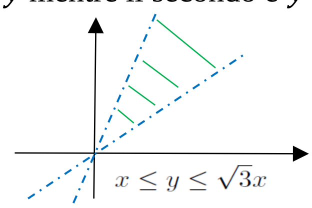
   da $\quad (x^2+y^2)^2 \quad$ a: $\quad 2(x^2+y^2)$
2. **Asse x, y**: Per identificare i seguenti estremi dovremmo utilizzare le limitazioni e il disegno grafico di esse.
   Facciamo il veloce ripasso del disegno in 2D, nel nostro caso abbiamo che le limitazioni sono:

   $$x \le y \le \sqrt{3}x$$

   Dunque dobbiamo disegnare due spazi ed intersecarli, il primo è $x \le y$ mentre il secondo è $y \le \sqrt{3}x$







Dopo aver identificato tutti gli estremi andremo a scrivere e risolvere l'integrale.

a. **INTEGRALI TRIPLI CLASSICI**

Andiamo a vedere più nello specifico entrambi i casi con degli esempi:

Esercizio 3. Sia

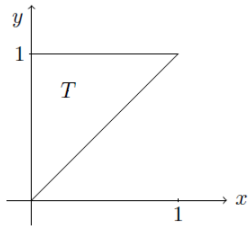
$$K = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq x + 2y + 2\}$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K (x + y)\, d(x, y, z)$.

Per il disegno in 3D si cerca di avvicinarsi il più possibile al disegno reale.

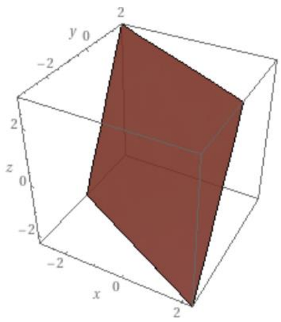
Le limitazioni sono $0 \leq x \leq y \leq 1$ andiamo dunque a disegnarle sull'asse x, y. Il risultato è un triangolo :



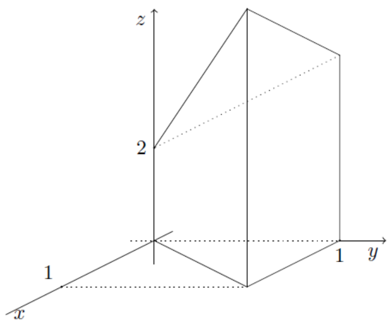
Si nota facilmente che gli estremi di x, y sono [0, 1].

NB. nello andare a segnare gli estremi di integrazione su x, y una delle due coordinate deve sempre avere un estremo che varia rispetto all'altra coordinata.

Disegniamo il grafico in 3D; $z \leq x + 2y + 2$ è l'equazione di un piano, prendiamo alcuni punti del piano e poi lo disegniamo in 3D (al meglio possibile).



Il grafico finale con tutte le condizioni è quello di un poliedro.



$$I = \int_K (x + y) dx, dy, dz = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{x+2y+2} (x + y) dz, dx, dy = \cdots = \frac{47}{24}$$

b. **INTEGRALI TRIPLI PARAMETRICI**

Sono la tipologia di esercizi che capitano nel 90% dei casi.

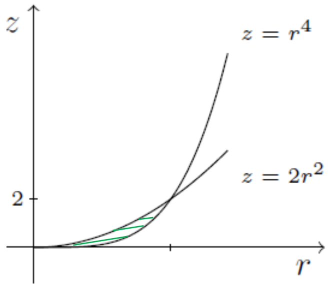
$$K = \left\{(x, y, z) : \ (x^2 + y^2)^2 \leq z \leq 2\,(x^2 + y^2) \text{ e } x \leq y \leq \sqrt{3}x\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

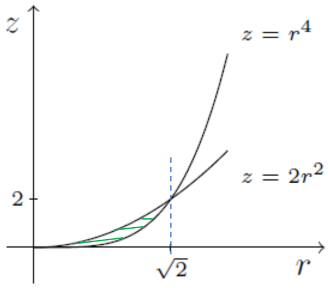
(b) Calcolate $I = \int_K xy \, d(x, y, z)$.

Si riconoscono per la presenza di $(\sqrt{x^2 + y^2})^k$, il procedimento è simili ai precedenti.

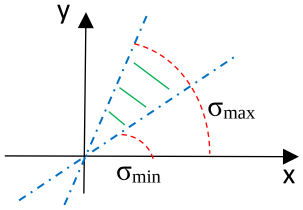
1. Il primo passo è porre **r** = $\boldsymbol{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ed andare a sostituire le eventuali occorrenze, in questo caso avrò
$$r^4 \leq \ z \leq 2r^2$$
2. Andiamo a disegnare il grafico sull'asse z, r.



3. Identifichiamo l'intersezione delle due funzioni ponendo semplicemente l'uguaglianza degli estremi
$$r^4 = 2r^2 \rightarrow \ r = \pm\sqrt{2}$$
L'opzione negativa è però da scartare visto che non abbiamo un grafico sull'asse negativo.



4. Passiamo ora a tracciare il grafico sull'asse x, y. Abbiamo $x \leq y \leq \ \sqrt{3}x$



Quello che ci interessa fare ora non è identificare gli estremi di x e y ma l'angolo θ di variazione. Per farlo basterà fare un piccolo studio del grafico, ad esempio in questo caso la retta y = x taglia a metà il primo quadrante dunque l'angolo con l'asse delle x sarà di 45° cioè $\frac{\pi}{4}$ mentre per y = $\sqrt{3}$x avrò che l'angolo sarà di 60° e dunque $\frac{\pi}{3}$, in questo caso per capirlo basta ricordarsi i valori delle tangenti:

α(radianti)	tangα
0	0
π/6	√3/3
π/4	1
π/3	√3
π/2	N.E.
2/3π	-√3
3/4π	-1
5/6π	-√3/3
π	0

5. Identifico gli estremi di r e di σ e me li segno:
$$0 \leq r \leq \ \sqrt{2}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{3}$$

6. Scrivo l'integrale lungo z e tengo parametrico quello lungo x,y:

$$I = \int_K xy\, dx, dy, dz = \int_\pi (\int_{(x^2+y^2)^2}^{x^2+y^2} xy\, dz\,)\, dxdy = \int_\pi xy * [x^2 + y^2 - (x^2+y^2)^2] dxdy$$

7. Passo alle coordinate polari; utilizzo la seguente tabella andando a sostituire i valori:

Se trovo	Allora scrivo
x	$r\, cos(\sigma)$
y	$r\, sin(\sigma)$
z	$r\, cos(\sigma) \sin(\sigma)$
$(\sqrt{x^2+y^2})^k$	r^k
dxdy	$r * dr d\sigma$

$$\int_\pi r\, cos(\sigma) * r\, sin(\sigma) * [r^2 - r^4] * r * dr d\sigma$$

8. Separo quello che varia per r a quello che varia per σ ed utilizzo gli estremi trovati precedentemente:

$$\int_0^{\sqrt{2}} r^3 (r^2 - r^4) dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} cos(\sigma) sin(\sigma)\, d\sigma$$

9. Risolvo gli integrali e calcolo il valore:

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\theta \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{3}r^6 - \frac{1}{8}r^8\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{1}{12}.$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Le equazioni differenziali si risolvono in modo diverso in base alla tipologia.

1. LINEARI DI PRIMO GRADO

Sono nella forma:

$$x' = a(t)x + b(t)$$

1. Calcolo $A(t) = \int a(t)dt$
2. Le soluzioni sono date dalla seguente formula $x(t) = e^{A(t)}\left[\int b(t)e^{A(t)} dx + c\right]$
   Dove c_1 è la costante derivata dall'integrazione.

2. A VARIABILI SEPARABILI (DI 1° GRADO)

Sono nella forma:

$$x' = g(t) * h(x), \quad x(t0) = x0$$

1. Calcolo $H(x) = \int_{x0}^{x} h(z)dz$
2. Calcolo $G(t) = \int_{t0}^{t} \frac{1}{G(z)} dz$
3. Risolvo l'equazione H(t) = G(t) trovando una soluzione s(t) (rispetto dunque alla variabile x).
4. Cerco i limiti

$$L_1 = \lim_{x\to k} H(x)$$

$$L_2 = \lim_{x\to\pm\infty} H(x) \longrightarrow + \text{ se } x_0 \geq 0$$

Come trovare k: Se $x_0 \geq 0$ allora k sarà un valore positivo (viceversa). A meno di condizioni particolare k varrà 0^+ (viceversa 0^-). Se pero calcolando H(t) trovassimo condizioni particolare allora k potrebbe assumere valori maggiori (o viceversa minori). ES.

$$H(y) = \int_2^y \frac{1}{z^2-1} dz = \int_2^y \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) dz = \frac{1}{2}\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\Big|_2^y = \log\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} + \log\sqrt{3}, \qquad y > 1,$$

Per y < 1 avremmo che l'argomento di del log è < 0 (impossibile) dunque in questo caso k = +1.

5. Cerco gli estremi di validità della soluzione rispetto a t ponendo: $L_1 \leq G(t) \leq L_2$
   La soluzione di questa disequazione è il dominio di esistenza di s(t)
6. Scrivo il risultato che sarà $s(t)$ per t ∈ dom

3. SECONDO GRADO OMOGENEA

Sono nella forma:

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$$

1. Trovo l'equazione caratteristica $x_c(t)$ scrivendo: $az^2 + bz + c = 0$
2. Trovo le soluzioni $z_{1,2}$
   Se $z_1 \neq z_2$ → la soluzione x(t) = $c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t}$
   Se $z_1 = z_2$ → la soluzione x(t) = $c_1 e^{zt} + t\, c_2 e^{zt}$
   Se $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ → la soluzione x(t) = $c_1 e^{\alpha t} \cos(bt) + c_2 e^{\alpha t} sin(bt)$

4. SECONDO GRADO NON OMOGENEA

Sono nella forma:

$$\tilde{a}x''(t) + \tilde{b}x'(t) + \tilde{c}x(t) = f(x)$$

La soluzione della equazione sarà nella forma:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$

Dove $x_c(t)$ è l'equazione caratteristica e la ricavo ponendo $\tilde{a}x''(t) + \tilde{b}x'(t) + \tilde{c}x(t) = 0$ è risolvendo come il caso 3. (equazione di secondo grado omogenea).

Per trovare invece la **soluzione particolare** $x_p(t)$ invece si procede con il **metodo di somiglianza**. In pratica bisogna valutare la 'struttura' di f(t) per capire a quale dei seguenti casi assomiglia e scrivere poi la soluzione corretta ed infine andare a trovare il valore delle incognite presenti (che chiamo a e/o b e/o c, ecc..).

1- Caso esponenziale:
   a. se f(t) = $k\, e^{\alpha t}$ allora $x_p(t)$ = $c\, e^{\alpha t}$
   b. se f(t) = $k\, e^{\alpha t}$ ed α è soluzione di $x_c(t)$ allora $x_p(t)$ = $c\, te^{\alpha t}$

2- Caso polinomio: p(t) è un polinomio qualsiasi, ci interessa solo il grado max n
   a. Se f(t) = $p(t)^n$ allora $x_p(t) = p_1(t)^n$
   b. Se f(t) = $p(t)^n$ ed $\tilde{c}$ = 0 allora $x_p(t) = p_1(t)^{n-1}$
   c. Se f(t) = k bisogna lavorare come se il grado fosse 0.

   Il polinomio avrà come costanti le incognite a, b, c Es. se $p(t) = 3t^2 + 4t + 1$ → $p_1(t) = at^2 + bt + c$

3- Caso seno-coseno: dove uno tra α, β può anche essere nulla
   a. Se f(t) = α cos(ωt) + β sin(ωt) allora $x_p(t)$ = a cos(ωt) + b sin(ωt)
   b. Se f(t) = α cos(ωt) + β sin(ωt) ed $\tilde{b}$ = 0 allora $x_p(t)$ = t [a cos(ωt) + b sin(ωt)]

   NB. Se anche f(t) ha solo seno o coseno la soluzione ha entrambi.

4- Caso esponenziale – polinomio:
   a. Se f(t) = $k\, e^{\alpha t}\, p(t)^n$ allora $x_p(t)$ =$a\, e^{\alpha t}\, p(t)^n$
   b. Se f(t) = $k\, e^{\alpha t}\, p(t)^n$ ed α è soluzione di $x_c(t)$ allora $x_p(t)$ =$a\, e^{\alpha t}\, p(t)^{n+1}$

5- Caso esponenziale – seno/coseno:
   a. Se f(t) = $k\, e^{\alpha t}$ $[\beta\, cos(\omega t) + \gamma\, sin(\omega t)]$ allora $x_p(t)$ = a $e^{\alpha t}$ [b cos(ωt) + c sin(ωt)]
   b. Se f(t) = $k\, e^{\alpha t}$ $[\beta\, cos(\omega t) + \gamma\, sin(\omega t)]$ ed α + iω è soluzione di $x_c(t)$ allora
      $x_p(t)$ = a $e^{\alpha t}$ [b cos(ωt) + c sin(ωt)]

Nel caso in cui invece ho la somma tra due o più casi precedenti dovrò eseguire 2 o più volte i ragionamenti precedenti andando a trovare $x_{p1}(t)$, $x_{p2}(t)$, … , $x_{pn}(t)$ per poi trovare la soluzione

$x(t) = x_{p1}(t) + … + x_{pn}(t) + x_c(t)$

ES. se abbiamo f(t) = $e^t + (2t+1)$ sono di fronte a due casi distinti uno in cui devo risolvere un esponenziale ed una in cui devo risolvere un polinomio. situazione diversa invece: f(t) = $e^t(2t+1)$ dove sono nel caso polinomi-esponenziale.

Ora devo **trovare i valori delle costanti**:

1- Sostituisco $x_p(t)$ al posto di x(t) e la chiamo $g_p(t)$
2- Risolvo l'equazione tra $g_p(t)$ e f(t).
3- Ricavo il valore delle costanti

ES. ho la seguente equazione: $x''(t) - 4x'(t) + 8x(t) = e^{2t}$

Dunque f(t) = e^{2t} ed $x_p(t)$ = $c\ e^{2t}$ (caso esponenziale (a))

Sostituisco $x_p(t)$ al posto di x(t) → $g_p(t) = x_p''(t) - 4x_p'(t) + 8x_p(t)$

e poi semplifico $4ce^{2t} - 8ce^{2t} + 8ce^{2t} \rightarrow \ 4ce^{2t}$

Ora uguaglio ad f(t) → $4ce^{2t} = e^{2t}$ si ricava dunque che $4c = 1$ → $c = \frac{1}{4}$

5. GRADO SUPERIORE AL 2

Sono nella forma:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1x(t) + a_0 = 0$$

Scrivo l'equazione caratteristica associata $x_c(t) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$

Trovo le n soluzioni:

- Se $z_1, …, z_n \in R^1$ e sono tutte diverse allora x(t) = $c_1e^{z_1t} + \cdots + c_ne^{z_nt}$
- Se $z_1, …, z_n \in R^k$ e sono tutte diverse allora: (ho più molteplicità per ogni z)

  $$x(t) = \underbrace{\boxed{c_1e^{z_1t} + t\,c_1e^{z_1t} + t^2\,c_1e^{z_1t} + \cdots + t^{k-1}c_1e^{z_1t}}}_{z_1} + \cdots + \underbrace{\boxed{c_ne^{z_nt} + t\,c_ne^{z_nt} + \cdots + t^{k-1}c_ne^{z_nt}}}_{z_n}$$
- Se $z_1, …, z_n \in C^1$ (cioè sono nella forma α + iβ) allora:

  $$x(t) = [c_{1a}e^{\alpha_1t}\cos(\beta_1t) + c_{1b}e^{\alpha_1t}\sin(\beta_1t)] + \cdots + [c_{na}e^{\alpha_nt}\,cos(\beta_nt) + c_{nb}e^{\alpha_nt}\,sin(\beta_nt)]$$
- Se $z_1, …, z_n \in C^1$ allora il ragionamento è uguale a caso $z_1, …, z_n \in R^k$

Nel caso avessi la somma di diverse di queste opzioni semplicemente risolvo i singoli casi e poi la soluzione finale sarà la somma dei vari casi.

ES:

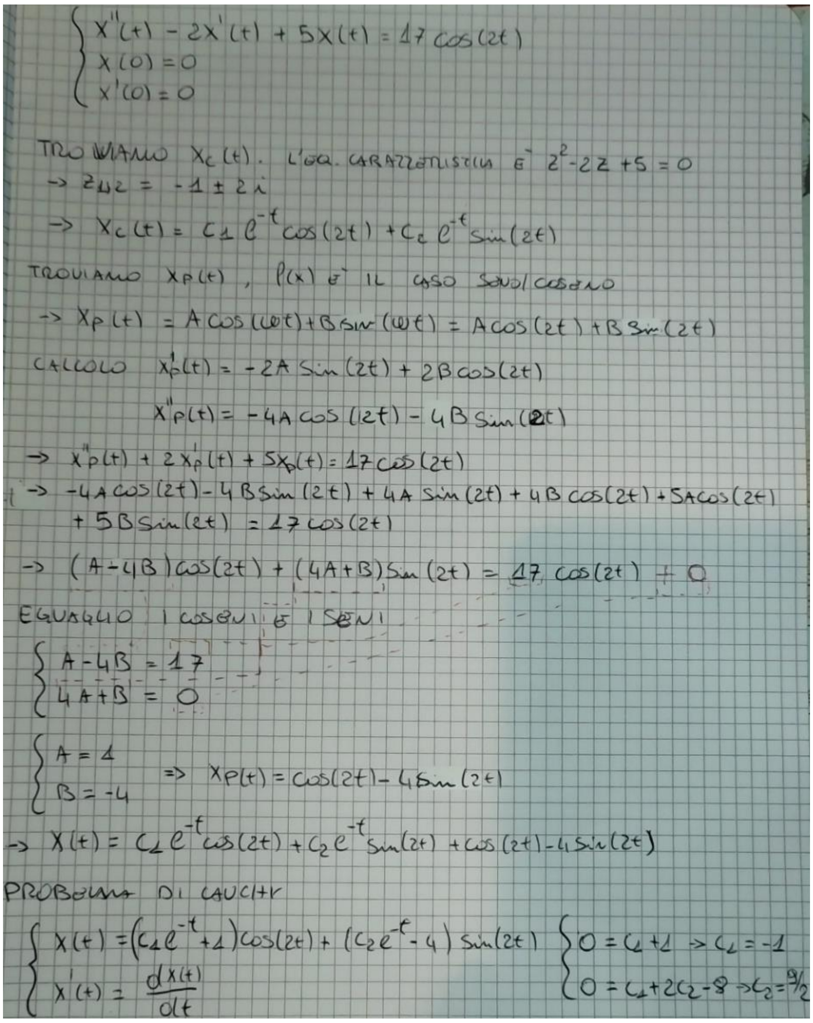
Esercizio 4. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\cos(2t)$$

determinate

(a) tutte le soluzioni dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione del problema di Cauchy con $x(0) = x'(0) = 0$;



$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\cos(2t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

TROVIAMO $x_c(t)$. L'eq. caratteristica è $z^2 - 2z + 5 = 0$

$\rightarrow z_{1,2} = -1 \pm 2i$

$\rightarrow x_c(t) = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t)$

TROVIAMO $x_p(t)$, $f(x)$ è il caso seno/coseno

$\rightarrow x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

CALCOLO $x_p'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$

$x_p''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$

$\rightarrow x_p''(t) + 2x_p'(t) + 5x_p(t) = 17\cos(2t)$

$\rightarrow -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) + 4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) + 5A\cos(2t) + 5B\sin(2t) = 17\cos(2t)$

$\rightarrow (A - 4B)\cos(2t) + (4A + B)\sin(2t) = 17\cos(2t) + 0$

EGUAGLIO I COSENI E I SENI

$$\begin{cases} A - 4B = 17 \\ 4A + B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -4 \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = \cos(2t) - 4\sin(2t)$$

$\rightarrow x(t) = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t) + \cos(2t) - 4\sin(2t)$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 e^{-t} + 1)\cos(2t) + (c_2 e^{-t} - 4)\sin(2t) \\ x'(t) = \dfrac{d\,x(t)}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = c_1 + 1 \rightarrow c_1 = -1 \\ 0 = c_1 + 2c_2 - 8 \rightarrow c_2 = 9/2 \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

Molto spesso quando viene richiesto di risolvere un equazione differenziale verrà anche richiesto di risolvere il relativo problema di Cauchy.

Ci verrà fornito un sistema nella seguente forma

$$\begin{cases} Equazione\ diff \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_1) = x_1 \end{cases}$$ ← Questa condizione è data solo se l'equazione diff. è di secondo grado

Una volta che ho risolto l'equazione differenziale con uno dei metodi precedenti ci troveremo con la soluzione x(t) con al suo interno alcune incognite da trovare, più precisamente il numero di incognite sarà pari al grado dell'equazione.

- **ED di 1°:** Sostituisco al posto di t il valore t_0 e al posto delle x(t) il valore x_0.
  ES. sia la condizione $x(0) = 1$ ed la soluzione x(t) = e^{2*t} + c → 1 = e^{2*t} + c →1 = 1 + c → c = 0
- **ED di 2°:** In questo caso devo effettuare due passaggi
  1. Uguale al caso precedente
  2. Derivo x(t) → x'(t) , dopo di che faccio lo stesso ragionamento di prima, sostituisco il valore t_1 al posto di t ed in x'(t) il valore x_1.
  3. Sostituisco e risolvo

  ES. siano le condizioni $x(1) = 2, x'(1) = 0$ ed la soluzione x(t) = e^{2t} + c_1 + t c_2

  → 2 = e^2 + c_1 + c_2 → c_1 = 2 - e^2 - c_2

  x'(t) = 2e^{2t} + c_2 → 0 = 2 e^2 + c_2 → c_2 = 2e^2

  Le incognite valgono dunque c_1 = 1 - 3e^2 , c_2 = 2e^2