PRIMA ESERCITAZIONE SULLE FUNZIONI DI 2 VARIABILI

In questa esercitazione ci occuperemo di funzioni di 2 variabili reali, cioè

$$\boxed{f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}}$$

Tratteremo i seguenti argomenti:

1) Il DOMINIO di una funzione, tenendo conto, come per le funzioni di una variabile, di tre condizioni di esistenza (i tre casi più importanti) (C.E.)
   - $\boxed{a}$ Un denominatore non può valere 0.
   - $\boxed{b}$ Il radicando di una radice quadrata non può essere negativo
   - $\boxed{c}$ L'argomento di un logaritmo deve essere positivo

2) L'insieme degli ZERI di una funzione, cioè $\{(x,y) \in \mathrm{dom} f \mid f(x,y) = 0\}$

3) Il SEGNO di una funzione, cioè:

   $\{(x,y) \in \mathrm{dom} f \mid f(x,y) > 0\}$ (INS. DI POSITIVITÀ)

   $\{(x,y) \in \mathrm{dom} f \mid f(x,y) < 0\}$ (INS. DI NEGATIVITÀ)

4) Gli INSIEMI DI LIVELLO K di una funzione: chiameremo $E_K = \{(x,y) \in \mathrm{dom} f \mid f(x,y) = K\}$ l'INSIEME DI LIVELLO K, con $K \in \mathbb{R}$.

1 Determinare il dominio della seguente funzione e disegnatela nel piano: $\boxed{f(x,y) = \frac{y^2}{6-x-y} + \sqrt{6x-x^2-y^2}}$;

Calcolate poi $f(3,3)$ e $f(3,2)$.

__Svolgimento__. CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.) di f:

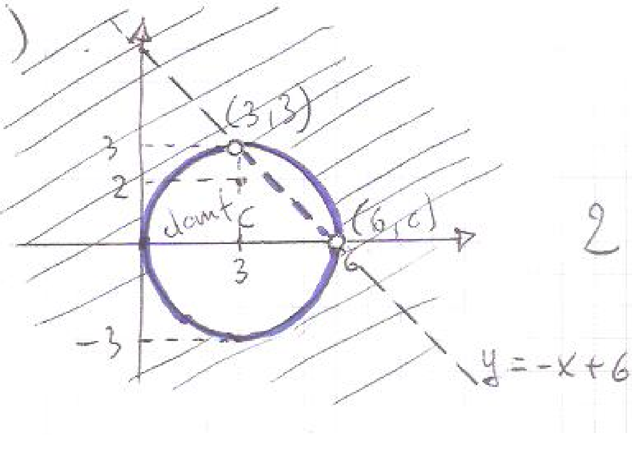
$$\begin{cases} 6-x-y \neq 0 \\ 6x-x^2-y^2 \geq 0 \end{cases}$$

1. $6-x-y \neq 0 \longrightarrow \boxed{y \neq -x+6}$ (la retta di equazione $y=-x+6$ __non__ appartiene al dominio)

2. $6x-x^2-y^2 \geq 0 \longrightarrow \boxed{x^2+y^2-6x \leq 0}$

Utilizzando la tecnica del completamento del quadrato otteniamo $x^2-6x+9+y^2 \leq 9$ e quindi $(x-3)^2+y^2 \leq 9$; si tratta quindi della parte di piano delimitata dalla circonf. di eq. $(x-3)^2+y^2=9$, cioè di $C(3,0)$ e raggio 3, circonferenza compresa (cioè di un CERCHIO chiuso di $C(3,0)$ e raggio 3)

n.b.: Tratteggiamo o - - - i punti che __NON__ appartengono a dom f



Quindi $\mathrm{dom}\, f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x+6,\ (x-3)^2+y^2 \leq 9 \}$

• $f(3,3)\ \nexists$ perché $(3,3) \notin \mathrm{dom}\, f$ (sta sulla retta esclusa)

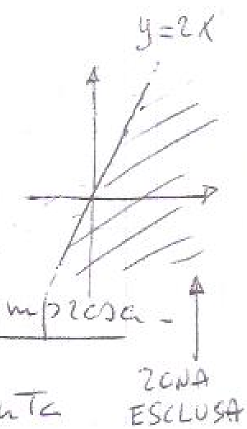
• $f(3,2) = \dfrac{4}{6-3-2} + \sqrt{6 \cdot 3 - 9 - 4} = 4 + \sqrt{5}$

dato che $(3,2) \in \mathrm{dom}\, f$ (si vede anche il grafico)

$\boxed{2}$ Determinare il dominio di:

$$\boxed{f(x,y) = x\sqrt{y-2x} + \log(9-x^2-y^2)},$$

rappresentarlo e calcolare $f(-2,2)$ e $f(2,0)$.

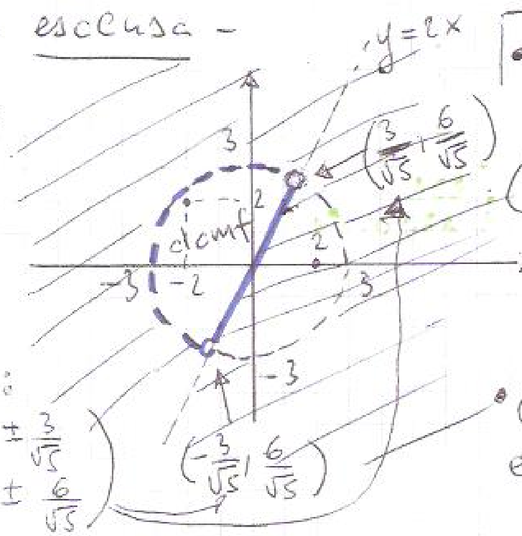


Svolgimento. C.E.: $\begin{cases} y-2x \geq 0 \\ 9-x^2-y^2 > 0 \end{cases}$

1. $y-2x \geq 0 \longrightarrow \boxed{y \geq 2x}$ rappresenta il sopragrafico rispetto a $y=2x$, compresa.

2. $9-x^2-y^2>0 \longrightarrow \boxed{x^2+y^2<9}$ rappresenta i punti interni alla circonferenza di eq. $x^2+y^2=9$ ($C(0,0)$, $R=3$), circonferenza esclusa.

Intersecando i 2 insiemi relativi ai punti 1 e 2 otteniamo:



$\begin{cases} y=2x \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{3}{\sqrt5} \\ y = \pm\frac{6}{\sqrt5} \end{cases}$ $\left(\frac{3}{\sqrt5}, \frac{6}{\sqrt5}\right)$ $\left(-\frac{3}{\sqrt5}, \frac{6}{\sqrt5}\right)$

• $(-2,2) \in \mathrm{dom}\, f$ e

$f(-2,2) = -2\sqrt{2+4} + \log(9-4-4) = -2\sqrt6 + \underbrace{\log 1}_{0} = -2\sqrt6$

• $(2,0) \notin \mathrm{dom}\, f$ e quindi $f(2,0)\ \nexists$

$\text{dom} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x \ , \ x^2 + y^2 \leq 9 \}$

---

3 Determinare il dominio di

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x+2y}{x+1} + \sqrt{y - x^2 - 5x}}$$, rappresentarlo

e calcolare $f(-2,-3)$.

Svolgimento. C.E.: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ y - x^2 - 5x \geq 0 \end{cases}$

1. $x + 1 \neq 0 \longrightarrow \boxed{x \neq -1}$ la retta di equazione $x = -1$ NON appartiene al dominio.

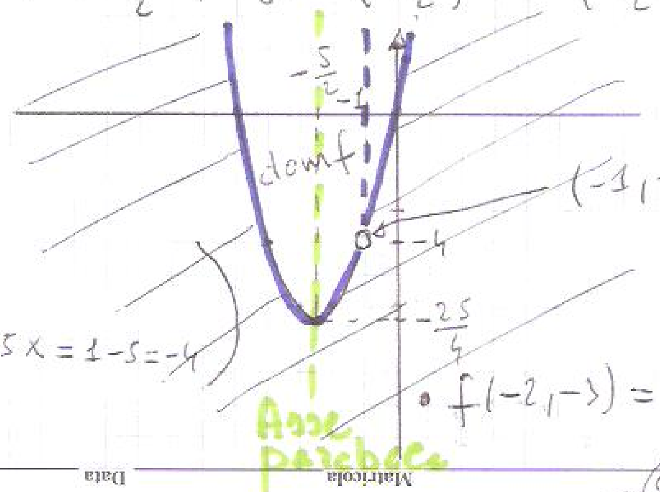
2. $y - x^2 - 5x \geq 0 \longrightarrow \boxed{y \geq x^2 + 5x}$ che è il sopragrafico rispetto alla parabola di equazione $y = x^2 + 5x$, parabola INCLUSA.
Per determinare x_V poniamo $y' = 2x + 5 = 0$

$x_V = -\frac{5}{2}$; $y_V = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} = -\frac{25}{4}$

ZERI: $x^2 + 5x = 0$

$x(x+5) = 0$

$x = 0 \vee x = -5$



$\begin{cases} x = -1 \\ y = x^2 + 5x = 1 - 5 = -4 \end{cases}$

$x = -1 \quad y = -4$

$x = -2 \quad y = -6$

• $f(-2,-3) = \frac{-2-6}{-2+1} + \sqrt{-3-4+10}$

$= 8 + \sqrt{3}$

$\boxed{4}$ Determina il dominio di

$$\boxed{f(x,y) = \frac{1}{x-y} + \sqrt{16x^2+y^2-16}}$$, rappresentalo

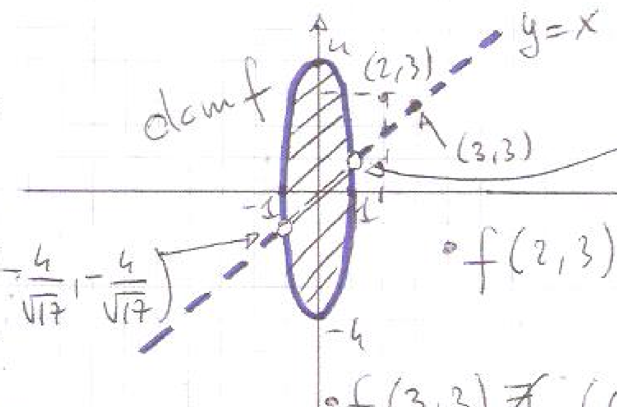
e calcola $f(2,3)$ e $f(3,3)$.

<u>Svolgimento</u>: C.E: $\begin{cases} x-y \neq 0 \\ 16x^2+y^2-16 \geq 0 \end{cases}$

1. $x-y \neq 0 \longrightarrow y \neq x$. La retta di equazione $\boxed{y=x}$ non appartiene al dominio.

2. $16x^2+y^2-16 \geq 0 \longrightarrow 16x^2+y^2 \geq 16 \longrightarrow \boxed{x^2+\frac{y^2}{16} \geq 1}$, che rappresenta i punti esterni all'ellisse di eq. $x^2+\frac{y^2}{16}=1$ di centro O e semiassi $a=1$ e $b=4$, ellisse compresa.

$$\left(\begin{cases} y=x \\ 16x^2+y^2=16 \end{cases} \rightarrow 17x^2=16 \rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4}{\sqrt{17}} \\ y = \pm \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}\right)$$



$\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

- $f(2,3) = \frac{1}{2-3} + \sqrt{64+9-16}$
$= -1+\sqrt{57}$
- $f(3,3) \nexists$ $\quad ((3,3) \notin \text{dom} f)$

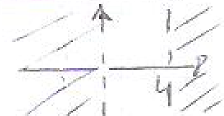
$\boxed{5}$ Determina il dominio di

$$\boxed{f(x,y) = \frac{\log(4x-x^2)}{4-y^2} + 3y\sqrt{4x-4y-x^2}}$$

rappresentalo e calcola $f(2,-1)$ e $f(3,1)$

Svolgimento: C.E.: $\begin{cases} 4x - x^2 > 0 \\ 4 - y^2 \neq 0 \\ 4x - 4y - x^2 \geq 0 \end{cases}$

1 - $4x - x^2 > 0 \longrightarrow x^2 - 4x < 0 \longrightarrow \boxed{0 < x < 4}$



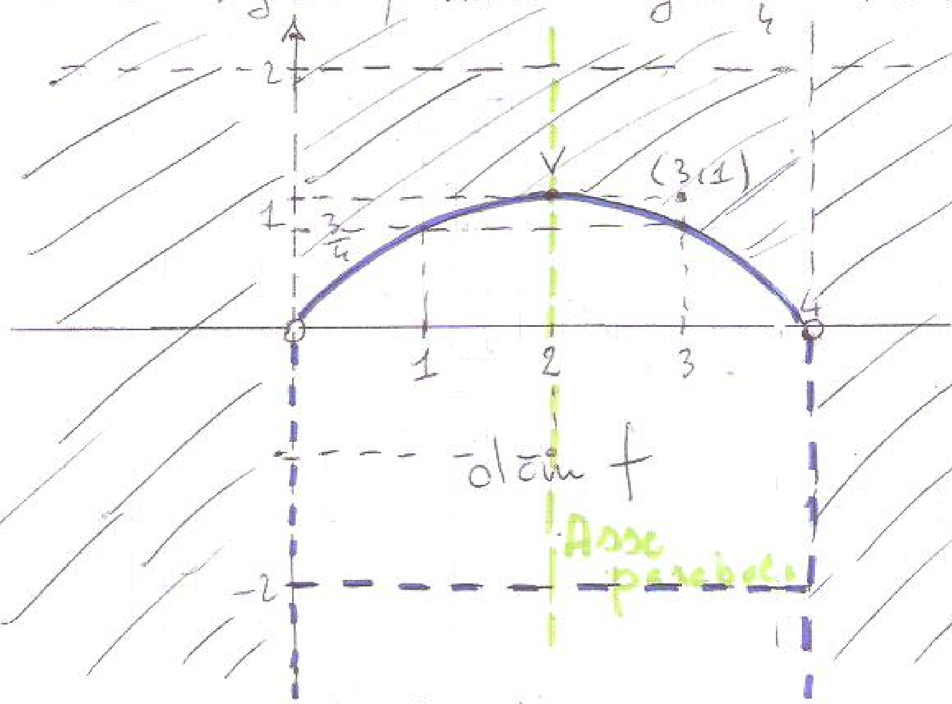
2 - $4 - y^2 \neq 0 \longrightarrow \boxed{y \neq \pm 2}$

3 - $4x - 4y - x^2 \geq 0 \longrightarrow -4y \geq x^2 - 4x \longrightarrow 4y \leq -x^2 + 4x$

$\boxed{y \leq -\frac{1}{4}x^2 + x}$ che è il sottografico rispetto alla parabola di equazione $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$, parabola compresa; $y' = -\frac{1}{2}x + 1 = 0 \longrightarrow x_V = 2$

$y_V = -\frac{1}{4}\cdot 4 + 2 = 1$ $V(2,1)$; altri punti:

$x = 0 \longrightarrow y = 0$, $x = 1 \longrightarrow y = \frac{3}{4}$ - Per simmetria rispetto all'asse $(0,0) \downarrow \boxed{(4,0)}$ e $(1, \frac{3}{4}) \downarrow \boxed{(3, \frac{3}{4})}$



$\circ\ f(2,-1) = \frac{\log(8-4)}{4-1} - 3\sqrt{8 \cancel{+4} \cancel{-4}} =$ 6

$= \frac{1}{3}\log 4 - 6\sqrt{2}$ $\circ\ f(3,1) \nexists$ $((3,1) \notin \text{dom} f)$

$\boxed{5}$ Data la funzione $f(x,y) = \log(1-x^2-y)$ determinare e rappresentare:

a) dom f

b) l'insieme degli zeri

c) l'insieme di positività e quello di negatività.

d) gli insiemi di livello di f corrispondenti a $k=-1$, $k=1$.

Svolgimento. a) C.E.: $1-x^2-y>0$

$$-y > x^2-1$$

$$\boxed{y < -x^2+1}$$

che è sottografico rispetto a $y=-x^2+1$, parabola con $V(0,+1)$ e zeri ± 1; altri punti: $x=\pm 2 \rightarrow y=-3$

b) L'insieme degli zeri è $\{(x,y) \in \text{dom} f \mid \log(1-x^2-y)=0\}$

n.b.: $0 = \log 1$

$$\cancel{1}-x^2-y = \cancel{1} \longrightarrow y=-x^2$$

Quindi $f(x,y)=0 \Longleftrightarrow \boxed{y=-x^2}$

c) L'insieme di positività è

$\{(x,y)\in \text{dom} f \mid \log(1-x^2-y)>0\} =$

$= \{(x,y)\in \text{dom} f \mid \cancel{1}-x^2-y > \cancel{1}\} =$

$= \{(x,y)\in \text{dom} f \mid y<-x^2\}$, cioè il ~~sottografico~~ rispetto a $y=-x^2$; viceversa l'insieme di negatività sarà

$\{(x,y)\in \text{dom} f \mid y>-x^2\}$ che è il sopragrafico, naturalmente all'interno del dominio.

Rappresentiamo il dominio, l'insieme degli zeri (IN ROSSO) e le zone di positività (+) e negatività (−).

(n.b.: $e \simeq 2{,}7$
$1/e \simeq 0{,}4$)

d) $E_{-1} =$

$= \{(x,y)\in \text{dom} f \mid \log(1-x^2-y)=-1\}$

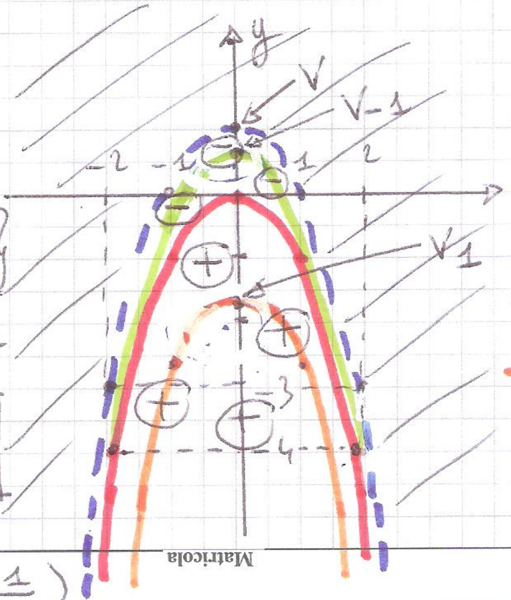
$\Downarrow$

$1-x^2-y=e^{-1}$

$\boxed{y=-x^2+1-\frac{1}{e}}$

$\Downarrow$

$V_{-1}(0, 1-\frac{1}{e})$



$E_1 = \{(x,y)\in \text{dom} f \mid \log(1-x^2-y)=1\}$

$\Downarrow$

$1-x^2-y=e^1$

$\boxed{y=-x^2+1-e}$

$\Downarrow$

$V_1(0, 1-e)$ $\simeq -1{,}7$

$\boxed{7}$ Data la funzione

$$\boxed{f(x,y) = xy\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)}$$ determinare

e rappresentare graficamente:

a) dom f

b) ins. degli ZERI

c) Positività / negatività

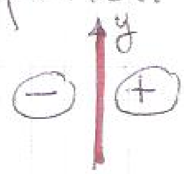
<u>Svolgimento</u>: a) dom $f = \mathbb{R}^2$

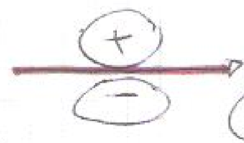
b) L'ins. degli zeri è

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 0 \vee y = 0 \vee \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$$

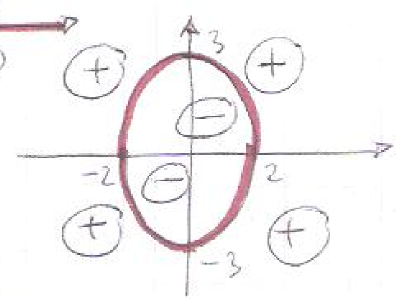
ed è costituito quindi da <u>asse y</u>, <u>asse x</u> ed <u>ellisse</u> di centro O e semiassi $a = 2$ e $b = 3$

c) Per studiare il SEGNO della funzione occorre valutare il segno del prodotto tra i 3 fattori, tenendo conto che

- per x è 

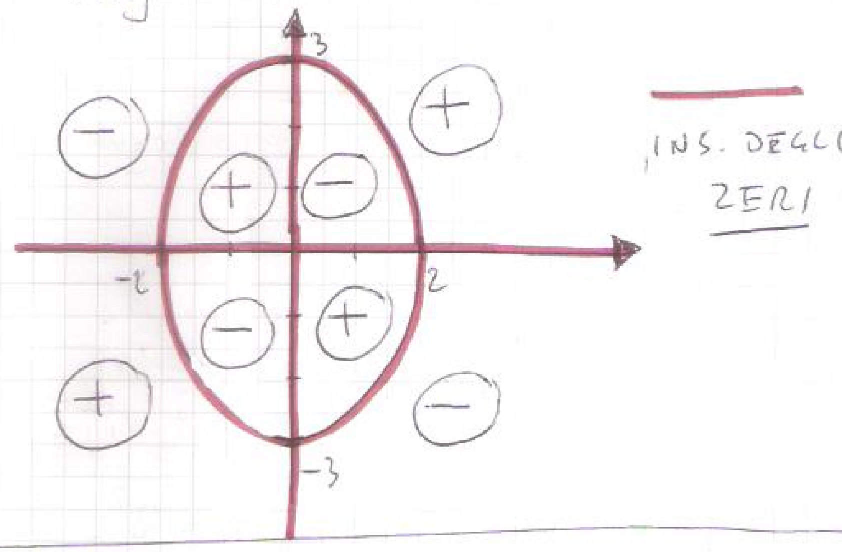
- per y è 

- per $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$ è:



dato che $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} > 1$ all'esterno dell'ellisse.

Valutando il segno del prodotto otteniamo il grafico seguente:



$\boxed{8}$ Data la funzione

$$\boxed{f(x,y) = \frac{(x^2+y^2-2y)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2-\frac{1}{4}}}}$$

determinare e rappresentare graficamente:

a) dom f

b) ins. degli ZERI

c) Positività / negatività

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{1}{4} \geq 0 \\ x^2+y^2-\frac{1}{4} \neq 0 \end{cases}$$

Svolgimento: a) C.E.: $x^2+y^2-\frac{1}{4} > 0$

$$x^2+y^2 > \frac{1}{4}$$

che definisce l'esterno (bordo escluso) rispetto alla circonferenza di centro O e raggio $\frac{1}{2}$ -

b) L'insieme degli zeri è

$$\{(x,y) \in \mathrm{dom} f \mid x^2+y^2-2y=0 \ \vee \ y=0\}$$

$$x^2+y^2-2y+1=1 \qquad \text{Asse } x$$

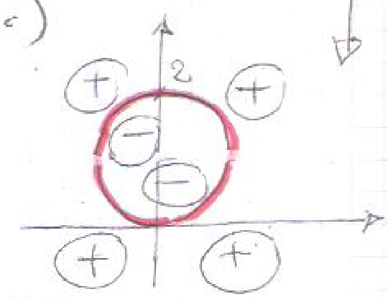
$$x^2+(y-1)^2=1$$

(CIRCONF. DI $C(0,1)$ e $R=1$)

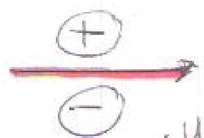
c) Tenendo conto che il denominatore è >0 $\forall (x,y) \in \mathrm{dom} f$, lo studio del segno di f riguarda solo i due fattori:

- (x^2+y^2-2y) $\qquad x^2+y^2-2y>0 \iff x^2+(y-1)^2>1$

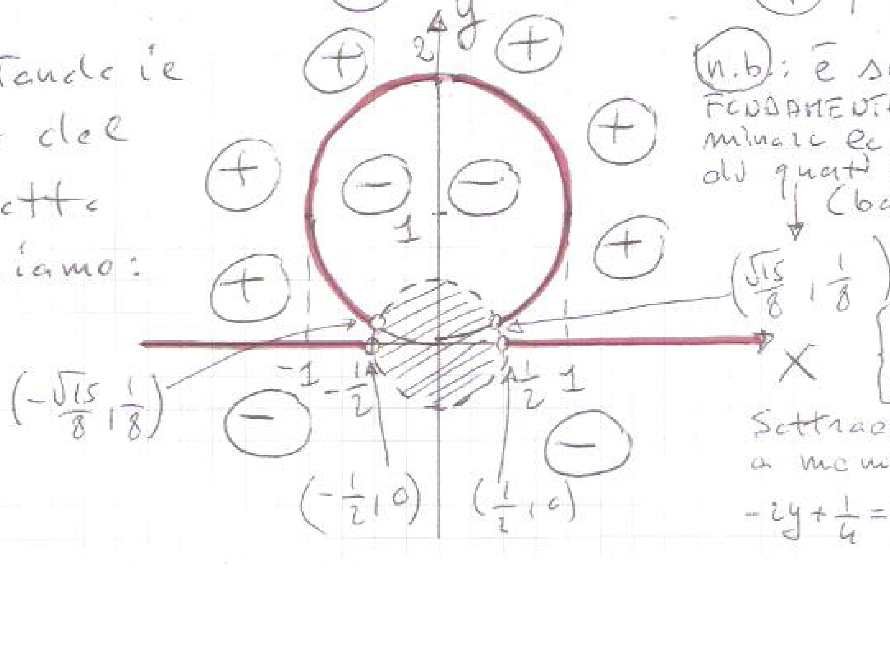
(è quindi positivo all'esterno della circonf. di equazione $x^2+y^2-2y=0$ e negativo al suo interno)



- (y)



Valutando il segno del prodotto otteniamo:



n.b.: è sempre FONDAMENTALE determinare le coordinate di questi punti (basta risolvere il sistema)

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ x^2+y^2-\frac{1}{4}=0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro:

$$-2y+\frac{1}{4}=0 \rightarrow y=\frac{1}{8}$$

9 Data la funzione

$$\boxed{f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + 16}$$

a quale E_K appartiene $P_0(-2,-1)$? Disegnare E_K.

<u>Svolgimento</u>. Osserviamo che $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}^2$

e che in generale $E_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 - 4y^2 + 16 = k\}$

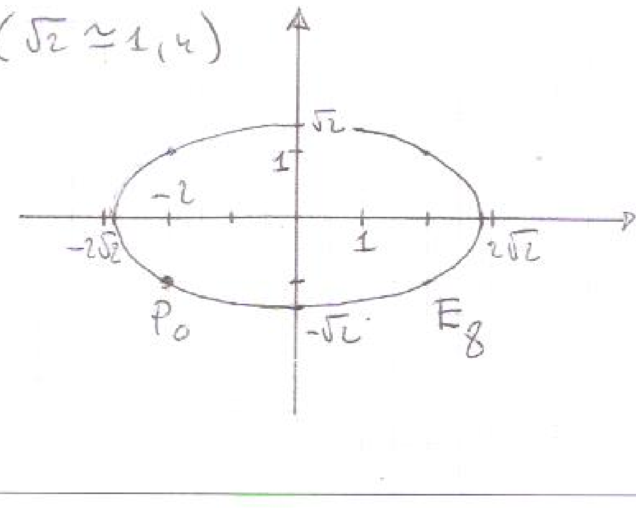
è l'insieme di livello k. Per determinare il valore di k basta <u>sostituire</u> nell'equazione le coordinate di P_0:

$$-4 - 4 + 16 = k \longrightarrow k = 8 \longrightarrow P_0 \in E_8$$

L'equazione di E_8 è:

$$-x^2 - 4y^2 + 16 = 8 \longrightarrow +x^2 + 4y^2 = +8 \longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1}$$

che è un'ellisse di centro O e semiassi $a = 2\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}$ $(\sqrt{2} \simeq 1{,}4)$



$\boxed{10}$ Data $\boxed{f(x,y) = 2x^2+2y^2+8x+6y}$,

determinare l'equazione dell'insieme di livello -8 e disegnarlo.

<u>Suggerimento</u>: $E_{-8} = \{(x,y)\in R^2 \mid 2x^2+2y^2+8x+6y=-8\}$

$= \{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2+4x+3y+4=0\}$

$$\downarrow$$

$\left(\text{n.b.: } 3y = 2\cdot y\cdot \frac{3}{2}\right)$ $\quad \underbrace{x^2+4x+4}_{} + \underbrace{y^2+3y+\frac{9}{4}}_{} = \cancel{-4}+\cancel{4}+\frac{9}{4}$

$$\boxed{(x+2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}}$$

Si tratta di una circonferenza di $C\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$ e $R=\frac{3}{2}$