CURVE (ESERCITAZIONE n. 3)

L'intera esercitazione sarà dedicata a $\mathbb{R}^3$: ci occuperemo di rette e piani in $\mathbb{R}^3$ e di curve $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$\boxed{1}$ Disegnare in $\mathbb{R}^3$ il piano di equazione $6x + 2y + 3z - 12 = 0$ e determinare un vettore normale al piano stesso.

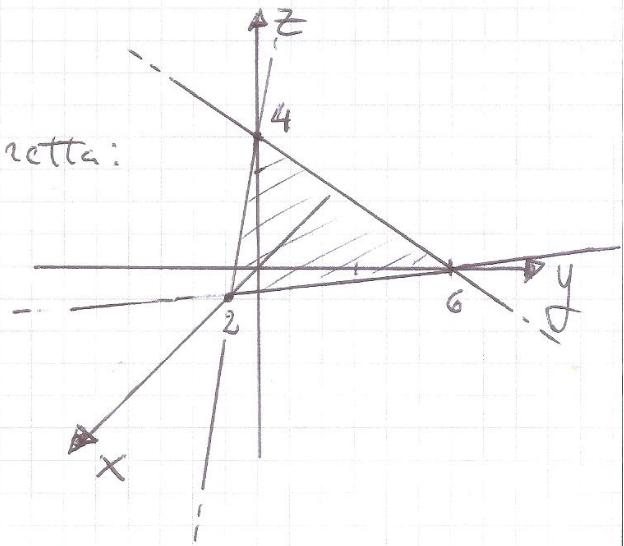
Svolgimento: Notiamo che l'equazione di un piano nello spazio è $ax + by + cz + d = 0$ (ovviamente possiamo sempre dividere i 4 parametri per una costante ottenendo una equazione equivalente). Per disegnare il piano (o almeno una porzione di esso) dobbiamo determinare i punti di intersezione tra il piano stesso e i tre assi coordinati, tenendo conto che un' equazione di una retta nello spazio si ottiene sempre come intersezione fra 2 piani (ovviamente, dato che per una retta passano infiniti piani, la possiamo ottenere in infiniti modi).

In particolare l'equazione dell'asse x è data dall'intersezione tra il piano xy $(z=0)$ e quella del piano xz $(y=0)$ ed è quindi $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

In modo analogo l'<u>equazione dell'asse y</u> è $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ e <u>l'equazione dell'asse z</u> è $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

(ho scritto "l'equazione" per dire "il sistema delle due equazioni")

Determiniamo i 3 punti come intersezione piano-retta:



<u>∩ Asse x</u> $\begin{cases} 6x+2y+3z-12=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$6x=12 \longrightarrow \boxed{x=2}$$

<u>∩ Asse y</u> $\begin{cases} 6x+2y+3z-12=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$2y=12 \longrightarrow \boxed{y=6}$$

<u>∩ Asse z</u> $\begin{cases} 6x+2y+3z-12=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\downarrow$$

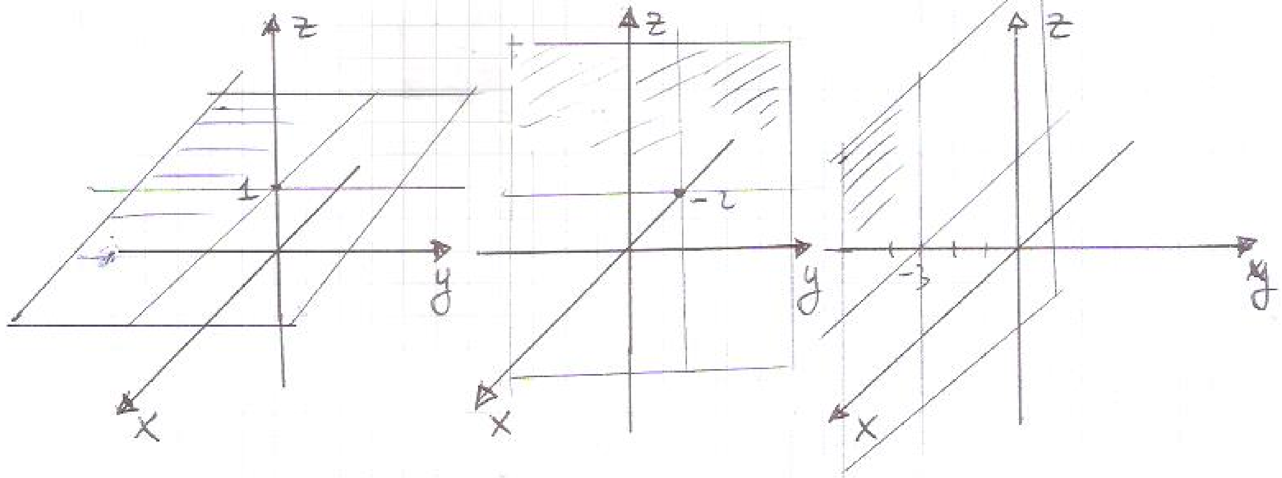
$$3z=12 \longrightarrow \boxed{z=4}$$

Il triangolo ottenuto collegando i 3 punti rappresenta una porzione del piano e illustra la sua inclinazione.

La determinazione di <u>un</u> vettore normale al piano è molto semplice: se il piano ha equazione $ax+by+cz+d=0$, un vettore normale è $\vec{N}=(a,b,c)$. Nel nostro caso quindi $\vec{N}=(6,2,3)$.

2 Disegnate i piani di equazioni $z = 1$, $x = -2$, $y = -3$ -

<u>Svolgimento</u>: Si tratta di piani paralleli ai piani xy, yz e xz rispettivamente -
Paradossalmente disegnarli è più complicato -



3 Determinare il piano passante per $P_0(-3,2,5)$ e parallelo al piano di equazione $z = 2x - 3y + 4$ -

<u>Svolgimento</u>: Il piano $z = 2x - 3y + 4$ diventa $2x - 3y - z + 4 = 0$ - Un suo vettore normale è quindi $\vec{N} = (2,-3,-1)$ - Un piano parallelo avrà lo stesso vettore normale - Avrà quindi equazione $2x - 3y - z + k = 0$ - Per determinare k imponiamo il passaggio per P_0 sostituendo a x, y, z le 3 coordinate di P_0 - Quindi $2 \cdot (-3) - 3(2) - 5 + k = 0$

$$-6 - 6 - 5 + k = 0 \rightarrow k = 17$$

Il piano avrà equazione $\boxed{2x - 3y - z + 17 = 0}$

$\boxed{4}$ Determinare l'equazione della retta passante per $P_0(-2,1,3)$ e perpendicolare al piano $3x-4y-5z+7=0$.

Svolgimento: Un vettore direttore della retta, normale al piano, sarà, come abbiamo visto nell'es. $\boxed{1}$, $\vec{N}=(3,-4,-5)$. La retta avrà equazione vettoriale $\boxed{P = P_0 + t\vec{N}}$, $t\in\mathbb{R}$, cioè $(x,y,z)=(-2,1,3)+t(3,-4,-5)$, $t\in\mathbb{R}$; quindi le equazioni parametriche saranno:

$$\begin{cases} x(t) = -2+3t \\ y(t) = 1-4t \\ z(t) = 3-5t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Per ottenere il sistema di 2 equazioni che definisce la retta in forma cartesiana dobbiamo eliminare t tra 2 equazioni 2 volte (ad es. tra la 1ª e la 2ª e tra la 2ª e la 3ª).

$$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-4t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3t=+2+x \longrightarrow t=\dfrac{x+2}{3} \\ \boxed{y}=1-4\cdot\dfrac{x+2}{3}=1-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3}=\boxed{-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1-4t \longrightarrow 4t = 1-y \rightarrow t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}y \\ z = 3-5t \end{cases}$$

$$\boxed{z} = 3 - 5\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}y\right) = 3 - \frac{5}{4} + \frac{5}{4}y = \boxed{\frac{7}{4} + \frac{5}{4}y}$$

La retta è quindi definita da: $\boxed{\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \\ z = \frac{7}{4} + \frac{5}{4}y \end{cases}}$

$\boxed{5}$ Determinare l'equazione del piano passante per $P_0(4,-3,1)$ e perpendicolare alla retta avente vettore direttore $\vec{v} = (-2,4,-5)$.

<u>Svolgimento</u>: Un qualunque vettore $\boxed{P - P_0}$ del piano dovrà essere perpendicolare a $\vec{v}$.
Il problema si risolve quindi ponendo $\boxed{(P-P_0)\cdot\vec{v} = 0}$, cioè

$$(x-4,\ y+3,\ z-1)\cdot(-2,4,-5) = 0$$

da cui: $-2(x-4) + 4(y+3) - 5(z-1) = 0$

$$-2x + 8 + 4y + 12 - 5z + 5 = 0$$

$$\boxed{-2x + 4y - 5z + 25 = 0}$$

(Avremmo anche potuto procedere anche tenendo conto che il piano doveva avere un'equazione della forma $-2x+4y-5z+K=0$; imponendo il passaggio per P_0 si ottiene $-8-12-5+K=0$ da cui $K=25$)

5

6 Determinare le coordinate del punto P_0 di intersezione fra la retta di eq. parametriche $\begin{cases} x(t) = -2+3t \\ y(t) = 4-5t \\ z(t) = -1+t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

e il piano di equaz. $2x - y + 5z + 6 = 0$.

Svolgimento: Sostituendo nell'equazione del piano $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ si ottiene:

$$2(-2+3t) - (4-5t) + 5(-1+t) + 6 = 0$$

$$-4 + 6t - 4 + 5t - 5 + 5t + 6 = 0$$

$$16t - 7 = 0 \longrightarrow t = \frac{7}{16}$$

Calcolando $\gamma\left(\frac{7}{16}\right)$ otteniamo P_0:

$$\begin{cases} x\left(\frac{7}{16}\right) = -2 + 3 \cdot \frac{7}{16} = -2 + \frac{21}{16} = -\frac{11}{16} \\ y\left(\frac{7}{16}\right) = 4 - 5 \cdot \frac{7}{16} = 4 - \frac{35}{16} = \frac{29}{16} \\ z\left(\frac{7}{16}\right) = -1 + \frac{7}{16} = -\frac{9}{16} \end{cases}$$

$$\boxed{P_0\left(-\frac{11}{16}, \frac{29}{16}, -\frac{9}{16}\right)}$$

7 Scrivere l'equazione parametrica della retta passante per $A(2,-1,1)$ e $B(3,2,-1)$. Scrivere l'equazione sia vettoriale che cartesiana del piano passante per $C(-1,3,2)$ e perpendicolare alla retta stessa. Disegnare retta e piano.

<u>Svolgimento</u>: Un <u>vettore direttore</u> della retta è dato ad esempio da $(3,2,-1)-(2,-1,1) = (1,3,-2) = \vec{v}$. L'equazione vettoriale può essere dunque $P = P_0 + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, con $P_0 \equiv A$.
Otteniamo le eq. parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = -1 + 3t \\ z(t) = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

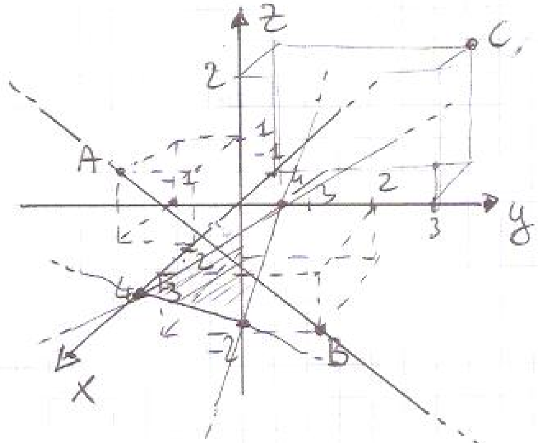
n.b. $\vec{v}$ è il vettore $B - A$ (da A a B)

Osserviamo che, ovviamente, per $t = 0$ si ottiene A e per $t = 1$ B.

Per determinare l'equazione del piano per C perpendicolare alla retta: $\boxed{(P - C)\cdot\vec{v} = 0}$ [EQ. VETT.]
cioè $(x+1,\ y-3,\ z-2)\bullet(1,3,-2) = 0$,

da cui $x + 1 + 3(y-3) - 2(z-2) = 0$ [EQ. CART.]

cioè $x + 1 + 3y - 9 - 2z + 4 = 0 \rightarrow \boxed{x + 3y - 2z - 4 = 0}$

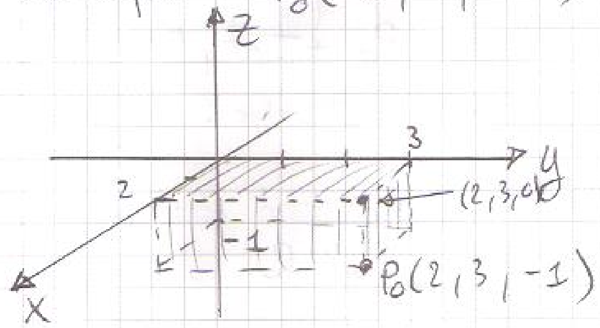


$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \boxed{z = -2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \boxed{x = 4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \boxed{y = \frac{4}{3}} \end{cases}$$

Osservazione

Per rappresentare i punti nello spazio è meglio partire da x_0 e y_0 sul piano, poi salire o scendere a seconda del valore di z_0: esempio $P_0(2,3,-1)$.



n.b.: l'asse x di solito viene costruito con un angolo di 45° e un'unità di misura METÀ rispetto agli altri assi

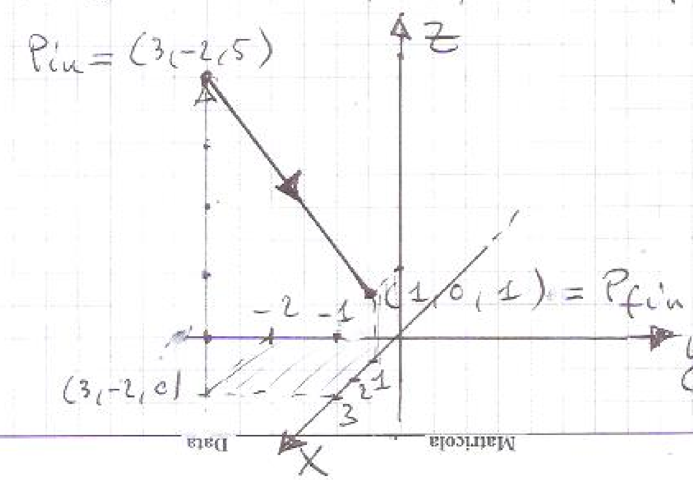
Il punto P_0 diventa così un vertice di un parallelepipedo.

$\boxed{8}$ Rappresentare il sostegno della curva

$$\gamma(t) = (2-t, -1+t, 3-2t) \quad t \in [-1,1]$$

Svolgimento: Si tratta di un segmento appartenente a una retta di vettore direttore $\vec{v} = (-1,1,-2)$

$P_{in} = \gamma(-1) = (3,-2,5)$ e $P_{fin} = \gamma(1) = (1,0,1)$



$\boxed{9}$ Sia $\gamma : [-3,2] \longrightarrow R^3$ la curva definita da:

$$\begin{cases} x(t) = -t^3 \\ y(t) = t^2 - 1 \quad t \in [-3,2] \\ z(t) = -2t \end{cases}$$

Determinate: a) il vettore tangente in $P_0 = (8,3,4)$

b) il versore tangente in P_0

c) la retta tangente in P_0, in forma parametrica e cartesiana

d) il piano per $P_1(2,-1,3)$ perpendicolare alla retta tangente.

Svolgimento: Il generico vettore tangente è $\gamma'(t) = (-3t^2, 2t, -2)$ - Dobbiamo determinare il valore di t a cui corrisponde P_0: partiamo da $z = -2t$, $z_0 = 4 \longrightarrow 4 = -2t$ da cui $\boxed{t_0 = -2}$ - Controlliamo con le altre 2 equazioni: $x = -t^3 \longrightarrow +8 = -(-2)^3$ e $y = t^2 - 1 \longrightarrow 3 = (-2)^2 - 1$ - O.K. P_0 appartiene quindi al sostegno di γ (occorre SEMPRE verificarlo)-
Il valore $t_0 \in [-3,2]$ (fondamentale)

Calcoliamo quindi $\gamma'(-2) = (-3(-2)^2, 2(-2), -2)$
$= \boxed{(-12, -4, -2)}$

$\vec{v}_{P_0} = (-12, -4, -2)$ è il vettore tangente in P_0

$\|\vec{v}_{P_0}\| = \sqrt{(-12)^2+(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{144+16+4} = \sqrt{164} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{41}$
$= 2\sqrt{41}$

b) Il versore tangente in P_0 è quindi

$$\vec{T} = \left(-\frac{6}{\sqrt{41}}, -\frac{2}{\sqrt{41}}, -\frac{1}{\sqrt{41}}\right)$$

c) La retta tangente in P_0 ha quindi equazione parametrica:

$$\begin{cases} x(t) = 8-12t \\ y(t) = 3-4t \\ z(t) = 4-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \leftarrow \boxed{P = P_0 + \vec{v}_{P_0} t, t \in \mathbb{R}}$$

Per semplificare la scrittura avremmo potuto prendere qualunque altro vettore avente la stessa direzione (ad esempio $(6,2,1)$)

In questo modo avremmo ottenuto

$$\begin{cases} x(t) = 8+6t \\ y(t) = 3+2t \\ z(t) = 4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(La retta tangente può essere descritta da infinite equazioni parametriche)

Da queste seconde equazioni ricaviamo le equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} z = 4+t \longrightarrow t = z-4 \\ x = 8+6t \qquad x = 8+6(z-4) = 8+6z-24 = 6z-16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 4+t \longrightarrow t = z-4 \\ y = 3+2t \qquad y = 3+2(z-4) = 3+2z-8 = 2z-5 \end{cases}$$

EQ. CART.: $\boxed{\begin{cases} x = 6z-16 \\ y = 2z-5 \end{cases}}$

d) Possiamo scegliere come $\vec{N} = (6,2,1)$.

Il piano perpendicolare passante per $P_1(2,-1,3)$ avrà equazione vettoriale $\boxed{(P-P_1)\cdot\vec{N} = 0}$, cioè $(x-2, y+1, z-3)\cdot(6,2,1) = 0$

$$6(x-2)+2(y+1)+z-3 = 0$$

$$6x-12+2y+2+z-3 = 0$$

$$\boxed{6x+2y+z-13 = 0}$$

$\boxed{10}$ Sia $\gamma : [0,2] \longrightarrow R^3$ la curva definita da:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 3t^2 \qquad t \in [0,2] \\ z(t) = 6t^3 \end{cases}$$

calcolare $L(\gamma)$

Svolgimento: Possiamo calcolare $L(\gamma)$ perché γ è di classe C^1 (tutte e tre le componenti sono continue e derivabili con derivata continua) e $[0,2]$ è chiuso e limitato.

$$\gamma'(t) = (1, 6t, 18t^2)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2 + (6t)^2 + (18t^2)^2} = \sqrt{1 + 36t^2 + 324t^4} =$$

$$= \sqrt{(1+18t^2)^2} = |1 + 18t^2| = 1 + 18t^2$$

$> 0 \ \forall t$

Quindi $L(\gamma) = \int_0^2 \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^2 (1 + 18t^2) \, dt =$

$$= \left[t + 6t^3 \right]_0^2 = 2 + 48 = \boxed{50}$$

11 Stesso esercizio per $\gamma(t) = \left(t^2, 2t, \frac{4\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}}\right)$ con $t \in [0,2]$.

$$\gamma'(t) = \left(2t, 2, 2\sqrt{2}\, t^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4 + 8t} = \sqrt{(2t+2)^2} = |2t+2|$$

$$|2t+2| = \begin{cases} 2t+2 & \text{per } 2t+2 \geq 0 \longrightarrow t \geq -1 \\ -2t-2 & \text{"} \ 2t+2 < 0 \longrightarrow t < -1 \end{cases} = \boxed{2t+2}$$

Ma t non può essere mai negativo perché $t \in [0,2]$ ma anche perché $t^{3/2} \nexists$ per $t < 0$.

Quindi $L(\gamma) = \int_0^2 (2t+2) \, dt = \left[t^2 + 2t \right]_0^2 = \boxed{8}$

Stessa cosa per:

$\boxed{12}$ $\gamma(t) = (4\cos 2t, 4\operatorname{sen} 2t, 8t)$, con $t \in [0, \pi]$

<u>Svolgimento:</u>

$\gamma'(t) = (-8\operatorname{sen} 2t, 8\cos 2t, 8)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{64\operatorname{sen}^2 2t + 64\cos^2 2t + 64} =$

$= \sqrt{64\underbrace{(\operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t)}_{1} + 64} = \sqrt{128}$

$= \sqrt{2^7} = \sqrt{2^6}\cdot\sqrt{2}$ (prima RELAZIONE FONDAMENTALE della goniometria)

$= 8\sqrt{2}$

$L(\gamma) = \int_0^{\pi} 8\sqrt{2}\,dt = 8\sqrt{2}\int_0^{\pi} dt = \boxed{8\sqrt{2}\,\pi}$

$\boxed{13}$ Calcolare $L(\gamma)$ per $\gamma: [0,1] \to R^2$

con $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

$\int f'(t)\cdot[f(t)]^{\alpha}\,dt = \frac{[f(t)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

$\gamma'(t) = (1, \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}})$ $\quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} =$

$= \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{1}{2}}$

$L(\gamma) = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{4}{9}\int_0^1 \boxed{\underbrace{\frac{9}{4}}_{f'}\,\underbrace{\left(1 + \frac{9}{4}t\right)}_{f}^{\frac{1}{2}}}\,dt$

$= \frac{4}{9}\cdot\left[\frac{\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$ $\qquad \frac{13}{4}\sqrt{\frac{13}{4}}$

$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\cdot\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right) =$

$\boxed{14}$ Calcolare $L(\gamma)$ per $\gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$

con $\begin{cases} x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y(t) = \operatorname{sen} t - t \cos t \end{cases}$

$$x'(t) = \cancel{-\operatorname{sen} t} + \cancel{\operatorname{sen} t} + t \cos t = t \cos t$$

$$y'(t) = \cancel{\cos t} - \cancel{\cos t} + t \operatorname{sen} t = t \operatorname{sen} t$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \operatorname{sen}^2 t} =$$

$$= \sqrt{t^2 (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} = \sqrt{t^2} = |t|$$

Quindi $L(\gamma) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |t| \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -t \, dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t \, dt =$

$$= \left[-\frac{1}{2} t^2\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[\frac{1}{2} t^2\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = +\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4} =$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

(Abbiamo utilizzato la proprietà degli integrali definiti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

con $\boxed{a < c < b}$

Capita spesso di usare questa proprietà in presenza del valore assoluto di una funzione.)