SCHEDA N°5-bis – SOLIDI nello SPAZIO

ES. 1) Disegnate nello spazio i seguenti solidi (e anche le proiezioni sui piani coordinati)

a) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -8+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\le z\le \frac{19}{2}-\sqrt{x^2+y^2},\ y\le 0,\ z\ge -\frac{7}{2}\right\}$

b) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2\le z\le 10-\sqrt{25-x^2-y^2},\ x\le 0, y\le 0\right\}$

ES. 2) Disegnate nello spazio l'insieme

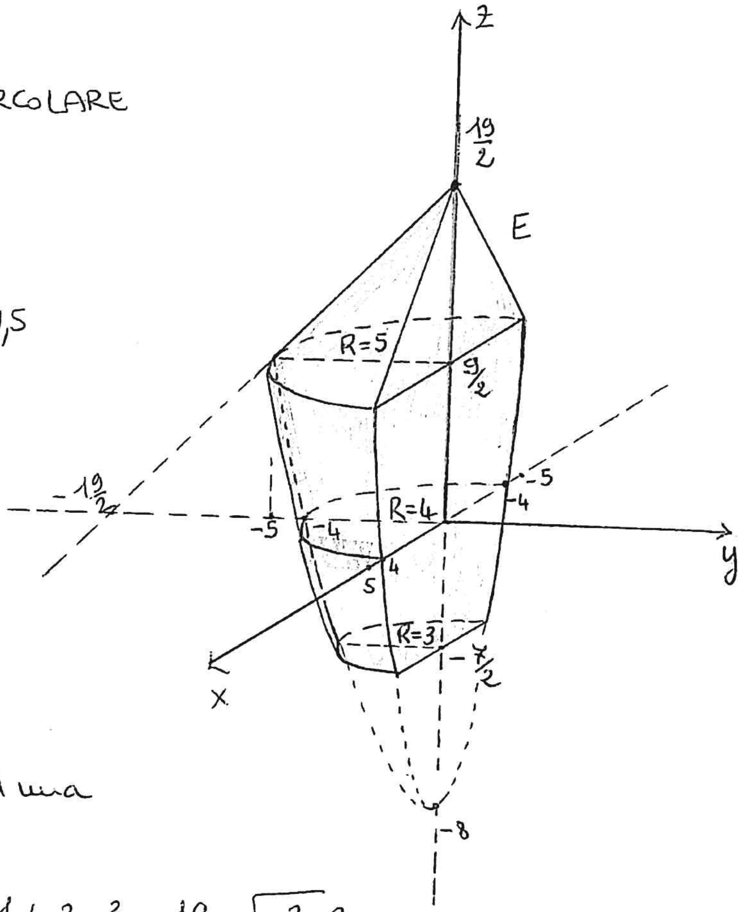
$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 9,\ 1\le z\le 6,\ z\ge \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-1\right\}$$

e le sue proiezioni sui piani coordinati.

SOLUZIONE SCHEDA N° 5-bis

ES. 1) a) $z = -8 + \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ è un PARABOLOIDE CIRCOLARE di $V(0,0,-8)$, verso l'alto, $a = \frac{1}{2}$ ($0<a<1 \rightarrow$ più largo del paraboloide $z = x^2+y^2$)

$\cap\, z=0$ su $x^2+y^2=16$ $R=4$



$z = \frac{19}{2} - \sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,\frac{19}{2})$, verso il basso, apertura $a=1$ ($\hat{ap}=45°$)

$\cap\, z=0$ su $x^2+y^2 = \left(\frac{19}{2}\right)^2$ $R = \frac{19}{2} = 9{,}5$

Essendo il cono rivolto verso il basso e il paraboloide rivolto verso l'alto con $z_{V_{cono}} > z_{V_{par}}$, le due superfici si incontreranno sicuramente su una circonferenza $x^2+y^2=R^2$ ad una certa quota z

$$\begin{cases} z = -8 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \\ z = \frac{19}{2} - \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} -8 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{19}{2} - \sqrt{x^2+y^2} \\ \end{cases}$$

poniamo $x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$, $\sqrt{x^2+y^2}=R$ e cerchiamo la circonferenza sulla quale si intersecano

$$-8 + \frac{1}{2}R^2 = \frac{19}{2} - R \rightarrow \frac{1}{2}R^2 + R - \frac{35}{2} = 0 \quad R^2+2R-35=0$$

$$R_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+35}}{1} = -1 \pm 6 \begin{cases} \nearrow R_1 = -7 < 0 \text{ NON ACCETT} \\ \searrow R_2 = 5 \end{cases}$$

Quindi CONO e PARABOLOIDE si intersecano sulla circonferenza $x^2+y^2=25$ di $R=5$ a quota $z=\frac{9}{2}$

Infatti $\begin{cases} z_{par} = -8+\frac{1}{2}25 = \frac{9}{2} \\ z_{cono} = \frac{19}{2}-5 = \frac{9}{2} \end{cases}$.

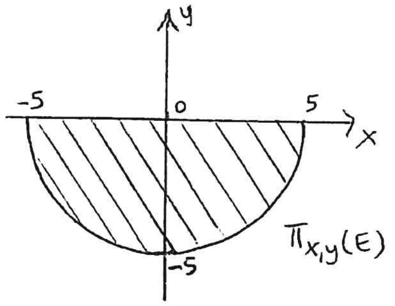
La condizione $y \le 0$ DIVIDE IL SOLIDO a metà, mentre la condizione $z \geq -\frac{7}{2}$ taglia via la punta del paraboloide.

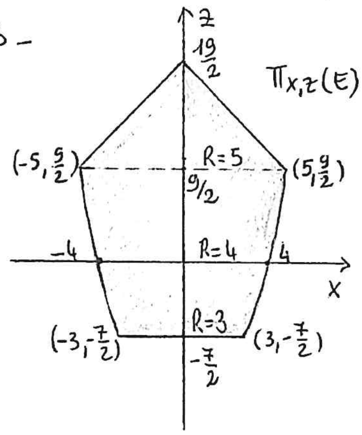
$$\begin{cases} z = -\frac{7}{2} \\ z = -8+\frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} = -8+\frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\frac{7}{2} \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases}$$

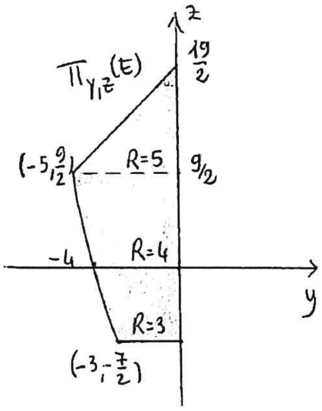
$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{9}{2}$$

il piano orizzontale $z=-\frac{7}{2}$ interseca il paraboloide nella circonferenza di $R=3$.

Proiezioni



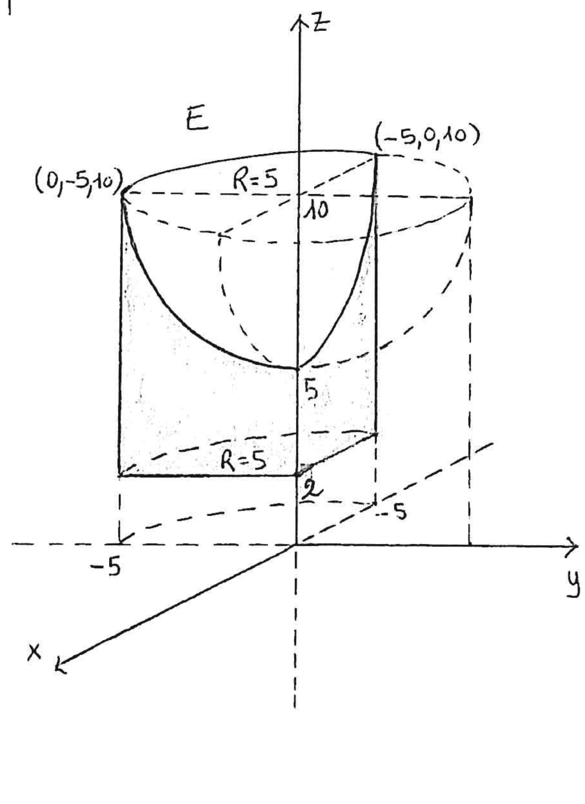




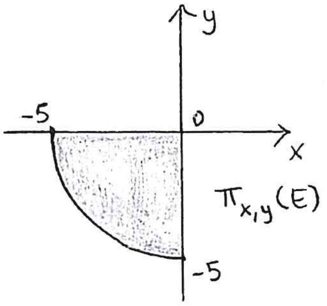
b) $z = 10-\sqrt{25-x^2-y^2}$ è la metà inferiore della superficie sferica di $C(0,0,10)$ e $R=5$, $z_{min}=5$

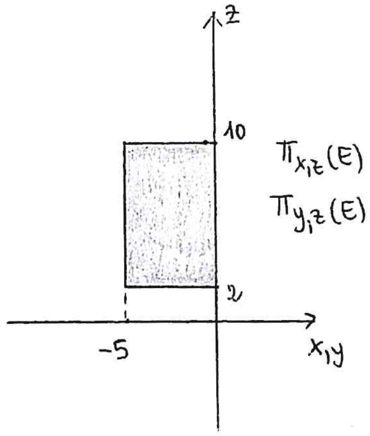
$z \geq 2$ sopra il piano orizzontale $z=2$

Dovendo considerare i punti con $z \geq 2$ e sotto la semisuperficie sferica si ottiene un cilindro (per $2 \le z \le 10$) scavato di metà sfera. Poi le condizioni $x \le 0, y \le 0$



dividono il solido in 4.

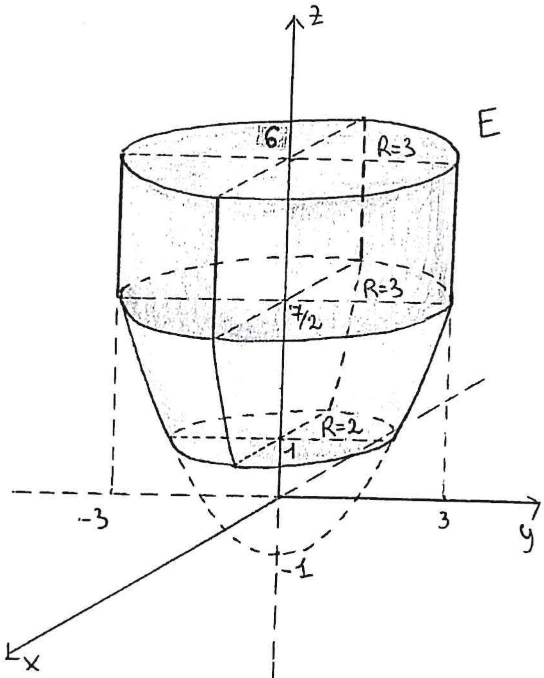




ES. 2) $x^2+y^2 \leq 9$ DENTRO IL CILINDRO di asse z e R = 3

per $1 \leq z \leq 6$

$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)-1$ è un paraboloide circolare di $V(0,0,-1)$, verso l'alto, $a = \frac{1}{2}$ $(0<a<1)$



$\begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)-1 \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \quad R=2 \\ z = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 9 \\ z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 = 9 \\ z = \frac{7}{2} \end{cases}$

Il solido risulta composto da un tronco di paraboloide (per $1 \leq z \leq \frac{7}{2}$) sormontato da un cilindro di $R=3$ e $h = \frac{5}{2}$ (per $\frac{7}{2} \leq z \leq 6$)