$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$ della SCHEDA N. 8

ES1) a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^2 - 12x^2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 + 4x^2y - 4x^3$

b) $\nabla f(1,-1) = (4+12,\ 3-4-4) = (16,-5)$

ES2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-(y+3)^2 - 2x}{2\sqrt{9 - x(y+3)^2 - x^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x(y+3)}{2\sqrt{9-x(y+3)^2-x^2}}$

$\frac{\partial g}{\partial x} = -2ye^{2x} \cdot \cos(x^2 y - 3x) - (4 - ye^{2x}) \cdot (2xy-3) \cdot \operatorname{sen}(x^2y - 3x)$

$\frac{\partial g}{\partial y} = -e^{2x} \cdot \cos(x^2y - 3x) - (4 - ye^{2x}) \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen}(x^2y - 3x)$

$\frac{\partial h}{\partial x} = y^2 \cdot e^{xy^2+4y} \cdot \sqrt{6 - x \cdot \operatorname{sen}(3xy)} + e^{xy^2+4y} \frac{(-\operatorname{sen}(3xy) - 3xy \cdot \cos(3xy))}{2\sqrt{6 - x\operatorname{sen}(3xy)}}$

$\frac{\partial h}{\partial y} = (2xy+4) \cdot e^{xy^2+4y} \cdot \sqrt{6 - x\operatorname{sen}(3xy)} + e^{xy^2+4y} \cdot \frac{-3x^2\cos(3xy)}{2\sqrt{6-x\operatorname{sen}(3xy)}}$

$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2y^3(2y-x) - (2xy^3 - y)\cdot(-1)}{(2y-x)^2} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{(6xy^2 - 1)\cdot(2y-x) - (2xy^3 - y)\cdot 2}{(2y-x)^2}$

ES 3) a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{8}xy^4 - \frac{3}{4}y^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{3}{2}xy$

dom $f = \mathbb{R}^2$ f è <u>continua</u> su $\mathbb{R}^2$ in quanto somma, prodotto e diffenza di funzioni continue (potenze di x e di y) (*) pag. dopo

b) $\nabla f(-1,-2) = \left(3(-1)^2 + \frac{1}{8}(-1)(-2)^4 - \frac{3}{4}(-2)^2,\ \frac{1}{4}(-1)^2(-2)^3 - \frac{3}{2}(-1)(-2)\right) =$

$= (3-2-3,\ -2-3) = (-2,-5)$

c) $f(-1,-2) = (-1)^3 + \frac{1}{16}(-1)^2(-2)^4 - \frac{3}{4}(-2)^2(-1) + 2 = -1+1+3+2 = 5$

eq.^{ne} del piano tangente: $z = f(-1,-2) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-2)(x+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-2)(y+2)$

$z = 5 - 2(x+1) - 5(y+2) \qquad z = -2x - 5y - 7$

(*) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sono definite su $\mathbb{R}^2$ e sono anch'esse CONTINUE su $\mathbb{R}^2$ (sempre somma, differenza e prodotto di potenze di x e di y)

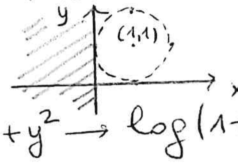
$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2) \xRightarrow{\text{per il Teorema del DIFFERENZIALE TOTALE}}$ f è DIFFERENZIABILE in ogni punto di $\mathbb{R}^2$

$\xRightarrow{\text{per la definizione di funzione differenziabile}}$ f ammette PIANO TANGENTE in ogni punto di $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \exists$ il piano tangente al grafico di f nel punto corrisp. a $x_0=-1$ e $y_0=-2$.

ES. 4) Per $\boxed{1^a \text{ cosa}}$ dimostriamo che ESISTE IL PIANO TANGENTE

a) $\mathrm{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, il punto $P_0=(1,1)$ è interno al dom f ($B_1(1,1) \subset \mathrm{dom} f$), il bordo del dom f è l'asse y,



▨ $\notin$ dom f
asse y $\in$ dom f

$f \in C^0(\mathrm{dom} f)$ in quanto composizione ($1+y^2 \to \log(1+y^2)$) e prodotto ($\sqrt{x}\cdot\log(1+y^2)$) di funzioni continue

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\log(1+y^2)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x}\cdot\frac{2y}{1+y^2}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}$ è definita su $x>0$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ " " su $x \geq 0$

entrambe sono definite e continue sull'insieme $A=\{(x,y): x>0\}$

($\frac{\partial f}{\partial x}$ composizione ($\log(1+y^2)$) e rapporto ($\frac{\log(\,)}{2\sqrt{x}}$) di funzioni continue)

($\frac{\partial f}{\partial y}$ prodotto ($\sqrt{x}\cdot 2y$) e rapporto ($\frac{\sqrt{x}\cdot 2y}{1+y^2}$) di funzioni continue)

$\Rightarrow f \in C^1(A) \xRightarrow{\text{Teor DIFF. TOT}}$ f è DIFFERENZIABILE su A $\Rightarrow$

f ammette piano tangente in ogni $(x_0,y_0)\in A \Rightarrow$

f ammette piano tangente in (1,1).

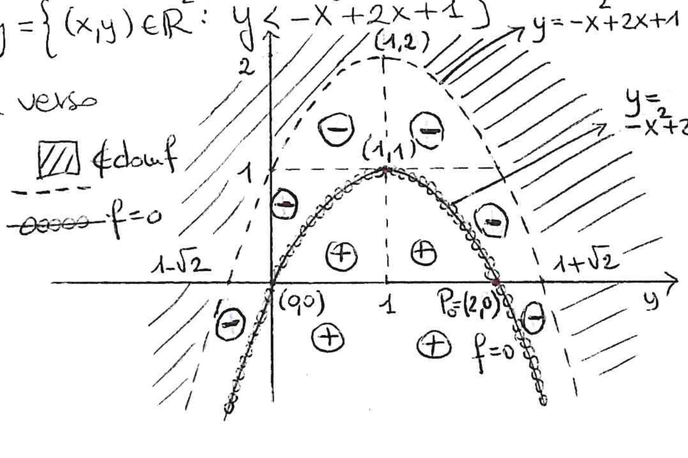
il DOMINIO è SOTTO LA PARABOLA, parabola ESCLUSA

b) $\mathrm{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x-x^2-y+1>0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y < -x^2+2x+1\}$
(**) pag. dopo

$y=-x^2+2x+1$ è una parabola rivolta verso il basso di $V(1,2)$, passa per (0,1)

$x_V: -2x_V+2=0 \to x_V=1$

$y_V = -1^2+2\cdot1+1 = 2$ $\quad \cap\, y=0 \quad x = 1\pm\sqrt{2}$



$f(x,y)=0 \iff 2x-x^2-y+\cancel{1}=\cancel{1} \iff y=-x^2+2x$ parabola di $V(1,1)$ per $(0,0)$ e $(2,0)$

$f(x,y)>0 \iff 2x-x^2-y+1>1 \iff \underbrace{y<}_{\text{SOTTO}}-x^2+2x$

f è continua sul suo dominio in quanto composizione di funzioni continue ($\log$ e $2x-x^2-y+1$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2-2x}{2x-x^2-y+1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{2x-x^2-y+1}$$ sono definite su dom$f$ e

Sono continue in quanto rapporto di funzioni continue -

Allora $f\in C^1(\text{dom}f) \underset{\substack{\text{DIFF}\\ \text{TOT}}}{\overset{\text{Teor}}{\Longrightarrow}}$ f è differenziabile in ogni $(x_0,y_0)\in$ dom$f$

$\Rightarrow$ f ammette piano tangente in ogni $(x_0,y_0)\in$ dom$f$

$\Rightarrow$ f ammette piano tangente in $(x_0=2, y_0=0)$

(**) dom$f$ è APERTO quindi tutti i punti (e in particolare $P_0=(2,0)$) sono INTERNI al dom$f$, il bordo è la parabola $y=-x^2+2x+1$ che $\notin$ dom$f$

Ora calcoliamo ∇f e PIANO TANGENTE -

a)

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\log(1+y^2),\ \sqrt{x}\,\frac{2y}{1+y^2}\right)$$

$$f(1,1)=\log 2 \qquad \nabla f(1,1)=\left(\tfrac{1}{2}\log 2,\ 1\right)$$

P.T. $$z=\log 2+\tfrac{1}{2}\log 2\,(x-1)+1(y-1)$$

$$z=\tfrac{1}{2}\log 2\cdot x+y+\tfrac{1}{2}\log 2-1$$

b)

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{2-2x}{2x-x^2-y+1},\ -\frac{1}{2x-x^2-y+1}\right)$$

$$f(2,0)=\log 1=0 \qquad \nabla f(2,0)=(-2,-1)$$

Eq.^{ne} P.T. $$z=0-2(x-2)-(y-0)$$

$$\boxed{z=-2x-y+4}$$

c) $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-2x}{(x^2-y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{3}{1+3y} \right)$$

$P_0 = (2,0)$ è interno al domf
$B_{\frac{1}{4}}(2,0) \subset$ domf

$$f(2,0) = \frac{1}{4} + \log 1 = \frac{1}{4}$$

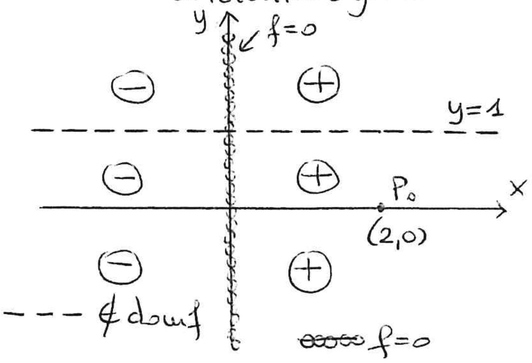
$$\nabla f(2,0) = \left(\frac{-4}{16}, 0+3 \right) = \left(-\frac{1}{4}, 3 \right)$$

$$z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(x-2) + 3y \qquad z = -\frac{1}{4}x + 3y + \frac{3}{4}$$

d) domf $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-1)^2 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 1\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{y=1\}$ tutto il piano esclusa la retta orizzontale $y=1$

$f(x,y) = 0 \iff x \cdot e^{3y} = 0 \iff x = 0$ ASSE y
$e^{3y} > 0 \ \forall y$

$f(x,y) > 0 \iff \dfrac{x \cdot e^{3y}}{(y-1)^2} > 0 \iff x > 0$ perché $e^{3y} > 0 \ \forall y$
$(y-1)^2 > 0 \ \forall y \neq 1$



$(2,0)$ è INTERNO al domf ($B_1(2,0) \subset$ domf, oppure domf è APERTO, quindi ogni punto è interno)
il bordo è la retta $y=1$ che $\notin$ domf

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{e^{3y}}{(y-1)^2}, \frac{-2x e^{3y}}{(y-1)^3} + \frac{3x e^{3y}}{(y-1)^2} \right)$$

$f(2,0) = 2 \qquad \nabla f(2,0) = (1, 10)$

eq.^{ne} P.T. $z = 2 + (x-2) + 10(y-0)$ $\boxed{z = x + 10y}$

e) $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ è interno al domf (domf $= x^2+y^2 < 4$ aperto)

$$\nabla f(x,y) = \left(\log\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}(x^2+y^2)\right) + x \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}(x^2+y^2)} \left(-\frac{2}{3}x\right), \right.$$
$$\left. x \cdot \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}(x^2+y^2)} \left(-\frac{2}{3}y\right) \right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\log 1 = 0$$ ($P_0 \in x^2+y^2 = 1$ che è E_0)

$$\nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Piano tangente $z = f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\boxed{z = -\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3}}$$

f) $P_0=(3,1)$ è interno al dom f ($B_1(3,1) \subset$ dom f)

$$\nabla f(x,y) = \left(2y\sqrt{25-x^2} - (2x-4)\,y\,\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \,,\, (2x-4)\sqrt{25-x^2} \right)$$

$f(3,1) = 2\cdot 1\cdot 4 = 8$

$\nabla f(3,1) = \left(8 - \frac{3}{2} \,,\, 8 \right) = \left(\frac{13}{2} \,,\, 8 \right)$

Piano tg: $z = 8 + \frac{13}{2}(x-3) + 8(y-1)$

$$\boxed{z = \frac{13}{2}x + 8y - \frac{39}{2}}$$

g) $P_0=(2,1)$ è interno al dom f ($B_{1/4}(2,1) \subset$ dom f, oppure il dom f è APERTO)

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{4(x-3y)-(4x-2y)\cdot 1}{(x-3y)^2} \,,\, \frac{-2(x-3y)-(4x-2y)(-3)}{(x-3y)^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{-10y}{(x-3y)^2} \,,\, \frac{10x}{(x-3y)^2} \right)$$

$f(2,1) = -6$

$\nabla f(2,1) = (-10, 20)$

eq.^{ne} P.T. $z = -6 - 10(x-2) + 20(y-1)$

$$\boxed{z = -10x + 20y - 6}$$

h) $P_0=(-3,2)$ è interno al dom f ($B_{\frac{1}{2}}(-3,2) \subset$ dom f, oppure $P_0 \notin$ bordo dell'insieme)

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x(y-1)}{\sqrt{(x^2+y^2-9)(y-1)}} \,,\, \frac{2y(y-1)+(x^2+y^2-9)}{2\sqrt{(x^2+y^2-9)(y-1)}} \right)$$

$f(-3,2) = \sqrt{4} = 2$ $\quad \nabla f(-3,2) = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

Piano tangente $z = -\frac{3}{2}x + 2y - \frac{13}{2}$ $\quad \left(z = 2 - \frac{3}{2}(x+3) + 2(y-2) \right)$

5) Per l'enunciato si vedano gli appunti.

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2$, $f \in C^0$ su $\mathbb{R}^2$ in quanto PRODOTTO e DIFFERENZA di funzioni continue

$$\begin{array}{ccc} x \quad y \quad x^2+y^2 & & 3y \\ \searrow \ \downarrow \ \swarrow & & \downarrow \\ x \cdot y \cdot (x^2+y^2) & - & 3y \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(x^2+y^2) + 2x^2 y = 3x^2y + y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot(x^2+y^2) + 2xy^2 - 3 = x^3 + 3xy^2 - 3$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sono definite su tutto $\mathbb{R}^2$ e sono continue (somma e diff. di funzioni continue)

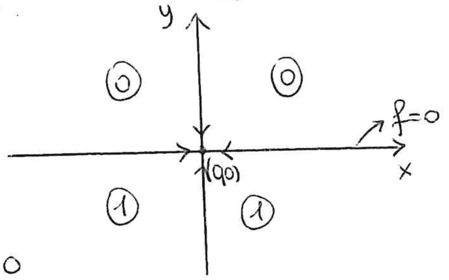
$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e pertanto si può applicare a f il Teorema del DIFFERENZIALE TOTALE ottenendo che f è DIFFERENZIABILE in ogni punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

6) Se (x_0,y_0) è interno al dominio di f $\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & y \geq 0 \\ 1 & y < 0 \end{cases} \qquad f(0,0)=0$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \begin{cases} \nearrow \lim_{h\to 0^+} \frac{0}{h} = 0 \\ \searrow \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} = -\infty \end{cases}$$

$f(0,h) = 0$ se $h>0$, $=1$ se $h<0$

$\nexists$

7) f si dice DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0) INTERNO al $\mathrm{dom} f$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, a,b \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

Se $(-1,3)$ è interno al $\mathrm{dom} f$, allora f si dice DIFFERENZIABILE in $(-1,3)$

$\Leftrightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{R}$: $f(x,y) = f(-1,3) + a(x+1) + b(y-3) + o\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)$

a) $f(x,y) = x^2 \cdot y^3 + e^{y \operatorname{sen} x}$ ha dom$f = \mathbb{R}^2$ ed è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ in quanto vale il Teorema del DIFF. TOTALE. Infatti $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ in quanto prodotto ($x^2 \cdot y^3$, $y \cdot \operatorname{sen} x$), composizione ($e^{y \operatorname{sen} x}$) e somma ($x^2 y^3 + e^{y \operatorname{sen} x}$) di funzioni continue. Inoltre le derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + y\cos x \cdot e^{y \operatorname{sen} x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \operatorname{sen} x \cdot e^{y \operatorname{sen} x}$$

sono definite su $\mathbb{R}^2$ e sono anch'esse continue su $\mathbb{R}^2$:

$\frac{\partial f}{\partial x}$ prodotto $2x \cdot y^3$, $y \cdot \cos x$, $y \cdot \operatorname{sen} x$
compos. $e^{y \cdot \operatorname{sen} x}$
prodotto $y\cos x \cdot e^{y \operatorname{sen} x}$
somma $2xy^3 + y\cos x\, e^{y \operatorname{sen} x}$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ prodotto $3x^2 \cdot y^2$, $y \cdot \operatorname{sen} x$
compos. $e^{y \operatorname{sen} x}$
prodotto $\operatorname{sen} x \cdot e^{y \operatorname{sen} x}$
somma $3x^2y^2 + \operatorname{sen} x\, e^{y \operatorname{sen} x}$

Allora $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

b) $g(x,y) = |y|$ ha dom$g = \mathbb{R}^2$ e NON È DIFFERENZIABILE in tutti i punti in cui $y=0$, ossia nei punti dell'asse x.

$g(x,y) = y$ in tutti i punti dell'aperto $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$,
$g \in C^1(A_1)$ $(\partial_x g = 0, \partial_y g = 1)$ e quindi g è DIFF. in A_1
allo stesso modo $g(x,y) = -y$ in tutti i punti dell'aperto $A_2 = \{(x,y) : y < 0\}$,
$g \in C^1(A_2)$ $(\partial_x g = 0, \partial_y g = -1)$ e quindi g è DIFF. in A_2

Invece nei punti in cui $y=0$ si ha $g(x,y) = 0$, g è CONTINUA, $\partial_x g = 0$, ma $\partial_y g$ NON ESISTE:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{g(x_0+h,0)}^{=0} - \overbrace{g(x_0,0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

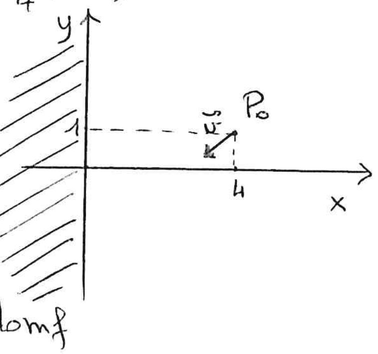
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0,h) - g(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \text{ che NON ESISTE } \quad \lim_{h\to 0^+} = 1, \quad \lim_{h\to 0^-} = -1$$

In conclusione se g non è derivabile $\Rightarrow$ NON è DIFF. in $(x_0,0)$.
Quindi g è DIFF. $\forall (x_0,y_0) \in A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{asse } x\}$, mentre NON È DIFF. in tutti i punti $(x_0,0) \in$ asse x.

8) a) $\operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ $P_0=(4,1)$ è interno al dom f ($B_3(P_0) \subset \operatorname{dom} f$)

$\partial_x f = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot y^2$ $\quad \partial_y f = 1-2\sqrt{x}\,y$ $\quad \nabla f(P_0) = \left(-\frac{1}{4}, -3\right)$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot \vec{v} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{5}\right) - 3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}+\frac{9}{5} = 2$



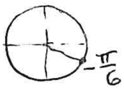
▨ ∉ dom f

asse y compreso nel dom f

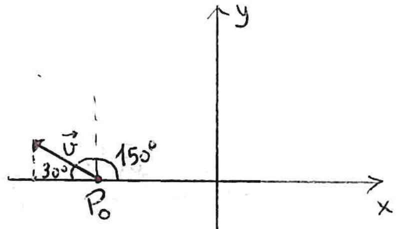
b) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ $\quad \partial_x f = \frac{1}{3}e^{-2y}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

$\partial_y f = -2e^{-2y}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$

$\nabla f(P_0) = \left(\frac{1}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), -2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$



$= \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, 1\right)$ $\quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{sen}\left(-\pi/6\right) = -\frac{1}{2}$

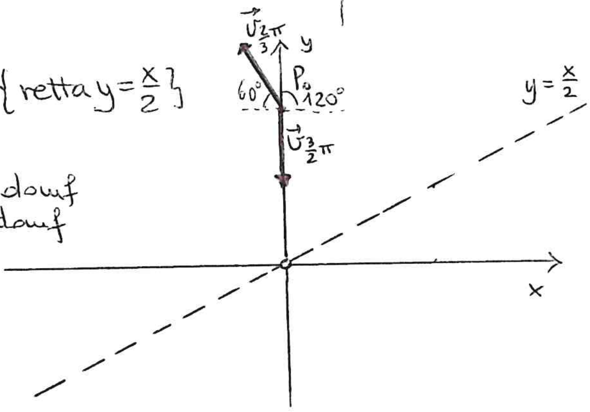


$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1\cdot\frac{1}{2} =$

$= -\frac{3}{12}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

9) a) $\operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \neq x/2\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{retta } y=\frac{x}{2}\}$

$P_0 = (0,2)$ è interno al dom f ($B_1(0,2) \subset \operatorname{dom} f$)



---- ∉ dom f

o ∉ dom f

$\partial_x f = \frac{x-2y-(x+2y)}{(x-2y)^2} = -\frac{4y}{(x-2y)^2}$

$\partial_y f = \frac{2(x-2y)-(x+2y)(-2)}{(x-2y)^2} = \frac{4x}{(x-2y)^2}$

$\nabla f(P_0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ $\quad v_{3/2\pi} = (0,-1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$

$\vec{v}_{\frac{2}{3}\pi} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \frac{1}{4}$

OSS. Negli ES. 8) e 9) nei punti assegnati ESISTE la derivata direzionale in qualunque direzione e si calcola $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f\cdot\vec{v}$ perchè la funzione è sempre differenziabile nel punto (es. 8) a) f è sicuramente DIFF. su $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$, b) f è DIFF. su $\mathbb{R}^2$, es 9) a) f è DIFF. sul suo dominio, b) f è DIFF. sul suo dominio)

b) $\operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y>0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<x^2\}$ sotto la parabola $y=x^2$, parabola esclusa

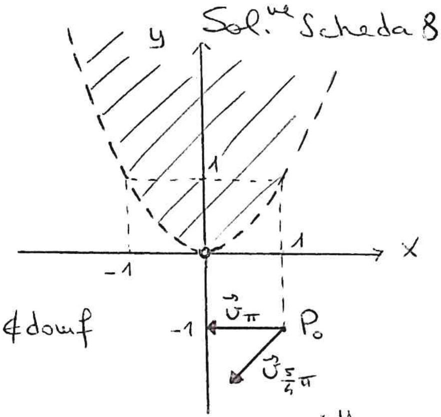
$P_0=(1,-1)$ è interno al dom f ($B_1(1,-1)\subset \operatorname{dom} f$)

Sol.^{ne} Scheda 8-9 -

$\partial_x f = \dfrac{2x}{x^2-y}$ $\quad \partial_y f = -\dfrac{1}{x^2-y}$ $\quad \nabla f(P_0) = (1, -\tfrac{1}{2})$

$\vec{v}_\pi = (-1,0) \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) = -1$

$\vec{v}_{\frac{5}{4}\pi} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$



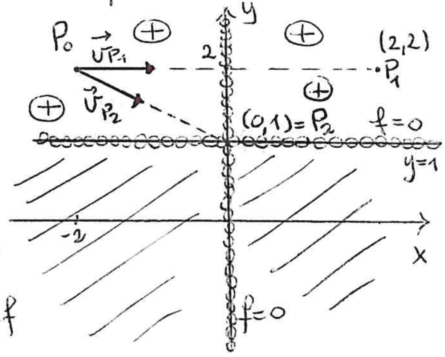
$\boxed{///}$ - - o - - $\}$ $\notin$ dom f

10) $\mathrm{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(y-1) \geq 0\}$

$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x^2 \leq 0 \\ y-1 \leq 0 \end{cases}$ $\iff \begin{cases} x^2 \geq 0 \ \forall x \\ y \geq 1 \end{cases}$ o $\begin{cases} x=0 \\ y \leq 1 \end{cases}$

$\iff y \geq 1$ o $\begin{cases} x=0 \\ y \leq 1 \end{cases}$ Il dominio è il semipiano

delle $y \geq 1$ unito con l'asse delle y



$\boxed{///}$ $\notin$ dom f

~~oooo~~ f=0

asse y $\in$ dom f

$f(x,y) = 0 \iff x^2(y-1) = 0 \iff x=0$ o $y=1$
asse y

$f(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \in \mathrm{dom} f$ in cui f non si annulla perché f è definita tramite una RADICE.

$P_0 = (-2,2)$ è interno al dom f $\left(B_{\frac{1}{2}}(P_0) \subset \mathrm{dom} f\right)$

$\vec{v}$ nella diret $P_1 = (2,2)$ è $\vec{v}_{P_1} = \dfrac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|} = \dfrac{4\vec{\imath}}{4} = \vec{\imath} = (1,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}_{P_1}}(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)$

$\partial_x f = \dfrac{x(y-1)}{\sqrt{x^2(y-1)}} \quad \partial_y f = \dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2(y-1)}} \quad \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}_{P_1}}(P_0) = -1$

$\vec{v}$ nella diret di $P_2 = (0,1)$ è $\vec{v}_{P_2} = \dfrac{P_2 - P_0}{\|P_2 - P_0\|} = \dfrac{2\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}_{P_2}}(P_0) = \underset{(-1,\,1)}{\underbrace{\nabla f(P_0)}} \cdot \vec{v}_{P_2} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

OSS. f è sicuramente DIFF. su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y > 1\}$ e quindi è DIFF. in P_0 ($\Rightarrow$ possiamo calcolare tutte le derivate direzionali con la formula)

Nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 > 1$ $\quad f(x, y_0) = \sqrt{x^2(y_0 - 1)} = |x|\sqrt{y_0 - 1}$ quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) \nexists$ (in quanto $|x|$ non è derivabile in $x=0$).

11) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,1) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(-2+\frac{1}{2}t, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}t) - f(-2,1)}{t}$

$f(x,y) = 3x^2y - 3 \quad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2 \quad f(-2,1) = 9$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,1) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{3(-2+\frac{1}{2}t)^2(1-\frac{\sqrt{3}}{2}t) - 3 - 9}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{3(4 + \frac{1}{4}t^2 - 2t)(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t) - 12}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{12} + \frac{3}{4}t^2 - 6t - 6\sqrt{3}t - \frac{3\sqrt{3}}{8}t^3 + 3\sqrt{3}t^2 - \cancel{12}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{3\sqrt{3}}{8}t^2 + \frac{3}{4}t + 3\sqrt{3}t - 6 - 6\sqrt{3} = -6 - 6\sqrt{3} = -6(1+\sqrt{3}) \simeq -16{,}4$$

$f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ in quanto prodotto $(3x \cdot y^2)$ e differenza $(3xy^2 - 3)$ di funzioni continue, $\partial_x f = 6xy$ $\partial_y = 3x^2$ sono definite e continue su $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \boxed{f \in C^1(\mathbb{R}^2)}$

$\Rightarrow$ Teor del DIFF. TOTALE f è DIFF. su $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ è DIFF. in $(-2,1)$ e possiamo calcolare $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,1)$ in qualunque direzione.

Inoltre $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,1) = \nabla f(-2,1) \cdot \vec{v}$.

Quindi $\nabla f(-2,1) = (-12, 12)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,1) = (-12,12)\cdot\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6 - 6\sqrt{3}$.

Nella direzione $\vec{w} = (-1, 0)$ si ha $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = -\frac{\partial f}{\partial x}$. Quindi $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(-2,1)$ si può calcolare nei seguenti modi:

1- $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(-2,1) = -\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = 12$

2- $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(-2,1) = \nabla f(-2,1) \cdot \vec{w} = -12 \cdot (-1) + 12 \cdot 0 = 12$

3- $$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(-2,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(-2-t,1) - f(-2,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3(-2-t)^2 \cdot 1 - 3 - 9}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3(4+t^2+4t) - 12}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2 + 12t}{t} = \lim_{t\to 0} 3t + 12 = 12$$

Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$ è una generica direzione nel piano $\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,1) = \nabla f(-2,1) \cdot (v_1, v_2) = -12 v_1 + 12 v_2$$

Con la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,1) = \lim_{t\to 0} \frac{3(-2+tv_1)^2(1+tv_2) - 3 - 9}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3(4 + t^2v_1^2 - 4tv_1)(1+tv_2) - 12}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{12} + 3t^2v_1^2 - 12tv_1 + 12tv_2 + 3t^3v_1^2v_2 - 12t^2v_1v_2 - \cancel{12}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} 3t^2v_1^2v_2 + 3tv_1^2 - 12tv_1v_2 - 12v_1 + 12v_2 = -12v_1 + 12v_2.$$

12) $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2$ $\quad z = 4 - \frac{1}{9}(x^2+y^2)$ è un PARABOLOIDE CIRCOLARE di $V(0,0,4)$ verso il basso, $a = \frac{1}{9}$ (+ largo di $z = x^2+y^2$), $\cap z = 0$ su $x^2+y^2 = 36$ $R = 6$

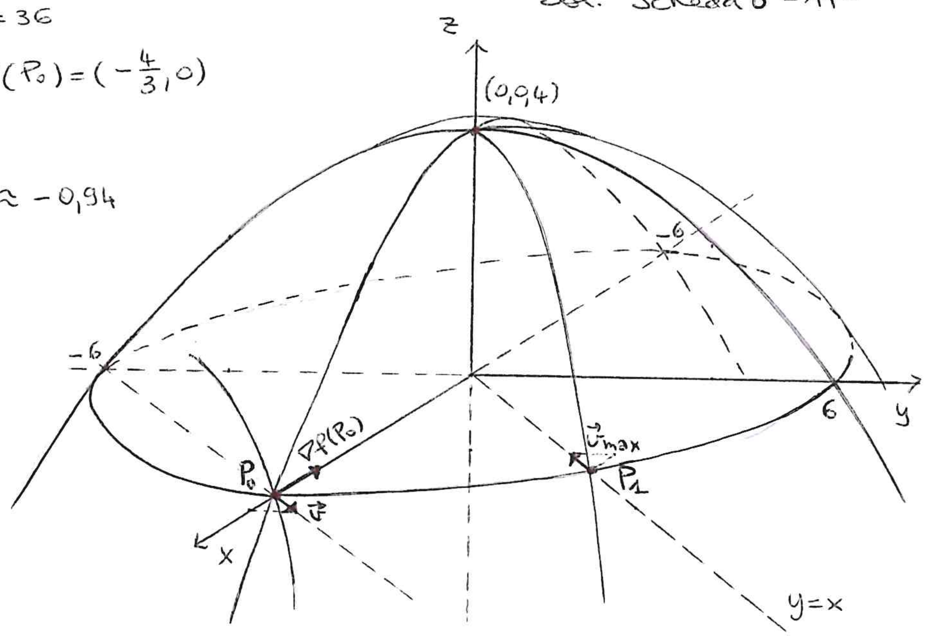
$P_0 = (6,0) \in E_0 \qquad E_0: x^2+y^2=36$

$\partial_x f = -\frac{2}{9}x \quad \partial_y f = -\frac{2}{9}y \qquad \nabla f(P_0) = (-\frac{4}{3}, 0)$

f è DIFF. su $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \quad -\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0{,}94$

$\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$



OSS. Nella DIREZIONE del ∇f la pendenza del grafico è massima, nella diret. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ la pendenza è negativa.

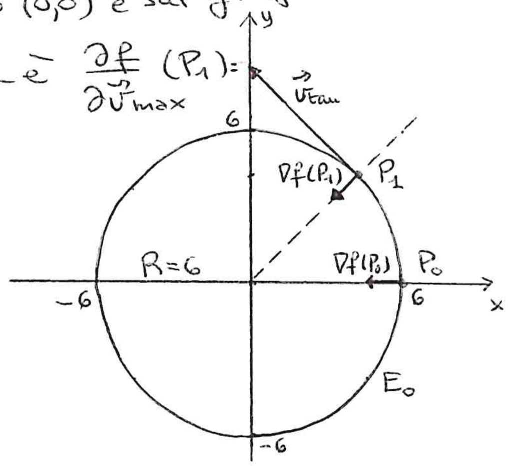
$P_1 = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \in E_0 : \; x^2+y^2=36 \quad R=6$

$P_1 \in$ bisettrice $y=x \qquad \nabla f(P_1) = (-\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{2}) \qquad \|\nabla f(P_1)\| = \sqrt{\frac{8}{9}+\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

la direzione in cui la pendenza è massima è $\vec{v}_{max} = \frac{\nabla f(P_1)}{\|\nabla f(P_1)\|} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

che ovviamente è quella che punta a terra verso (0,0) e sul grafico verso la cima. La pendenza massima raggiunta è $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_{max}}(P_1) =$

$= \nabla f(P_1)\cdot \vec{v}_{max} = \nabla f(P_1)\cdot \frac{\nabla f(P_1)}{\|\nabla f(P_1)\|} = \|\nabla f(P_1)\| = \frac{4}{3}$



Eq.ni param di E_0 $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 6\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$

$P_1 \in E_0$ per $t = \frac{\pi}{4} \qquad \gamma'(t) = (-6\,\mathrm{sen}\,t, 6\cos t)$

Vettore tangente in $P_1 \quad \vec{v}_{P_1} = -3\sqrt{2}\,\vec{i} + 3\sqrt{2}\,\vec{j}$

$\nabla f(P_1)$ è $\perp \vec{v}_{P_1}$ in quanto $\nabla f(P_1)\cdot \vec{v}_{P_1} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot(-3\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} =$

$= 4 - 4 = 0$

Nella direzione generica $\vec{v}(v_1, v_2)$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_1) = \nabla f(P_1)\cdot(v_1,v_2) = -\frac{2}{3}\sqrt{2}\,v_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,v_2$

Con la definizione: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(3\sqrt{2}+tv_1, 3\sqrt{2}+tv_2) - f(P_1)}{t} =$

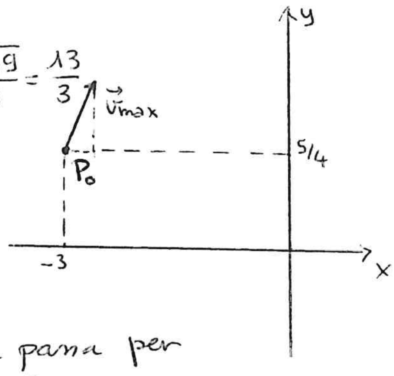
$= \lim_{t\to 0} \frac{4 - \frac{1}{9}((3\sqrt{2}+tv_1)^2 + (3\sqrt{2}+tv_2)^2) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{4 - \frac{1}{9}(18 + t^2v_1^2 + 6\sqrt{2}\,v_1 t + 18 + t^2v_2^2 + 6\sqrt{2}\,v_2 t)}{t} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{4 - \frac{36}{9}} - \frac{1}{9}t^2\overbrace{(v_1^2+v_2^2)}^{=1} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,v_1 t - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,v_2 t}{t} = \lim_{t\to 0} -\frac{1}{9}t - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,v_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,v_2 =$

$= -\frac{2}{3}\sqrt{2}\,v_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,v_2$

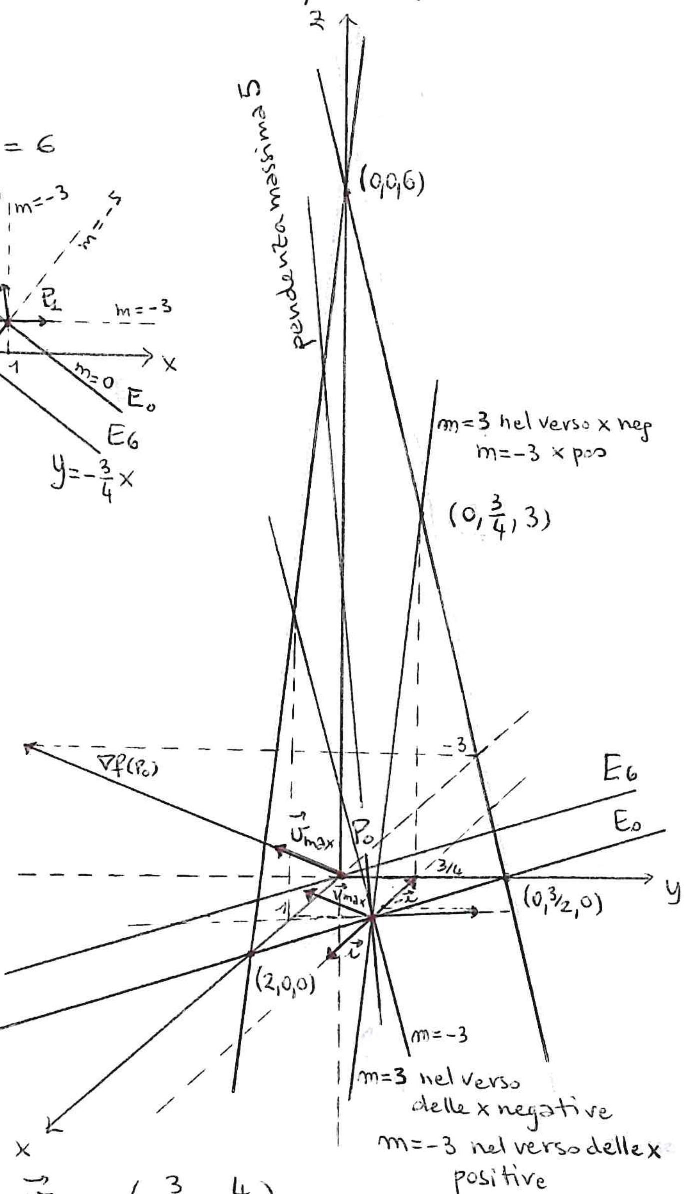
13) $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}^2 \quad \partial_x f = \frac{5}{3}\cos\left(\frac{5}{3}x+4y\right) \quad \partial_y f = 4\cos\left(\frac{5}{3}x+4y\right)$

$\nabla f\left(-3,\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{5}{3}\cos(0), 4\cos 0\right)=\left(\frac{5}{3},4\right) \quad \|\nabla f(P_0)\| = \sqrt{\frac{25}{9}+16} = \sqrt{\frac{169}{9}} = \frac{13}{3}$



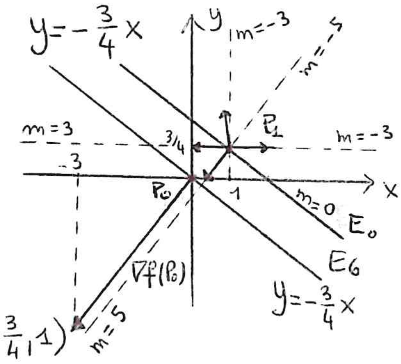
$\vec{v}_{max} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\left(5/3, 4\right)}{13/3} = \left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$ - La massima pendenza del grafico è $\frac{13}{3} \simeq 4{,}3$ raggiunta nella direzione $\vec{v}_{max} = \left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$

14) $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}^2 \quad z=-3x-4y+6$ è un PIANO INCLINATO che passa per $(0,0,6)$, $(2,0,0)$, $\left(0,\frac{3}{2},0\right)$



$\boxed{P_0=(0,0)} \in E_6 \quad f(0,0)=6 \qquad E_6: -3x-4y+6=6$

$\partial_x f=-3 \quad \partial_y f=-4$



$\nabla f=(-3,-4)$ in ogni punto

$\nabla f(P_0)=(-3,-4)$

$\boxed{\nabla f(P_0) \perp E_6}$

1° modo eq.^{ne} della retta $y+\frac{3}{4}x=0$

vettore normale alla retta $\vec{N}=\left(\frac{3}{4},1\right)$

∇f e $\vec{N}$ sono PARALLELI in quanto

$-4\vec{N}=(-3,-4)=\nabla f(P_0)$

2° modo la retta si può scrivere come la retta per $P_0=(0,0)$ con direzione il vettore $\vec{v}=(4,-3)$ (per $x=4 \rightarrow P_1=(4,-3)$)

e $\nabla f \perp \vec{v}$ in quanto $\nabla f \cdot \vec{v} = -12+12=0$.

3° modo scrivere le equazioni parametriche della retta in un qualche modo, trovare il vettore tangente e controllare che $\nabla f \cdot \vec{v}=0$

DIREZIONE di MASSIMA SALITA

$\nabla f(P_0)=(-3,-4) \quad \|\nabla f(P_0)\| = \sqrt{9+16}=5 \qquad \vec{v}_{max}=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$

La direzione di massima salita (che è la stessa in tutti i punti del PIANO è $\vec{v}_{max}=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ e la PENDENZA MASSIMA del piano è 5 -

$\boxed{P_1=\left(1,\frac{3}{4}\right)} \quad P_1 \in E_0: -3x-4y+6=0 \quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2} \qquad f\left(1,\frac{3}{4}\right)=-3-3+6=0$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_{max}}(P_1)=5$ come in tutti i punti $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_1)\right|_{\vec{v}=-\vec{j}} = -\frac{\partial f}{\partial x}(P_1)=3$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_1) = -3v_1 - 4v_2$: cerchiamo le direzioni nelle
$\vec{v} = (v_1, v_2)$

quali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_1) = -3$. Una delle due direzioni deve essere $\vec{v} = \vec{i}$ perchè

$\frac{\partial f}{\partial x}(P_1) = -3$.

$$\begin{cases} -3v_1 - 4v_2 = -3 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \quad (\|\vec{v}\| = 1) \end{cases} \quad \begin{cases} 3v_1 = 3 - 4v_2 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 1 - \frac{4}{3}v_2 \\ (1 - \frac{4}{3}v_2)^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ \cancel{1} + \frac{16}{9}v_2^2 - \frac{8}{3}v_2 + v_2^2 = \cancel{1} \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ \frac{25}{9}v_2^2 - \frac{8}{3}v_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ \frac{1}{3}v_2\left(\frac{25}{3}v_2 - 8\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ v_2 = 0 \ \underline{o} \ v_2 = \frac{24}{25} \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = 0 \rightarrow v_1 = 1 \qquad (1,0) = \vec{i} \\ v_2 = \frac{24}{25} \rightarrow v_1 = 1 - \frac{4}{\cancel{3}}\frac{24^{8}}{25} = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25} \quad \vec{v} = \left(-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right) \end{cases}$$

15) $\mathrm{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$ perchè $x^2 + y^2 \geq 0$ è sempre vera in quanto somma di due quadrati

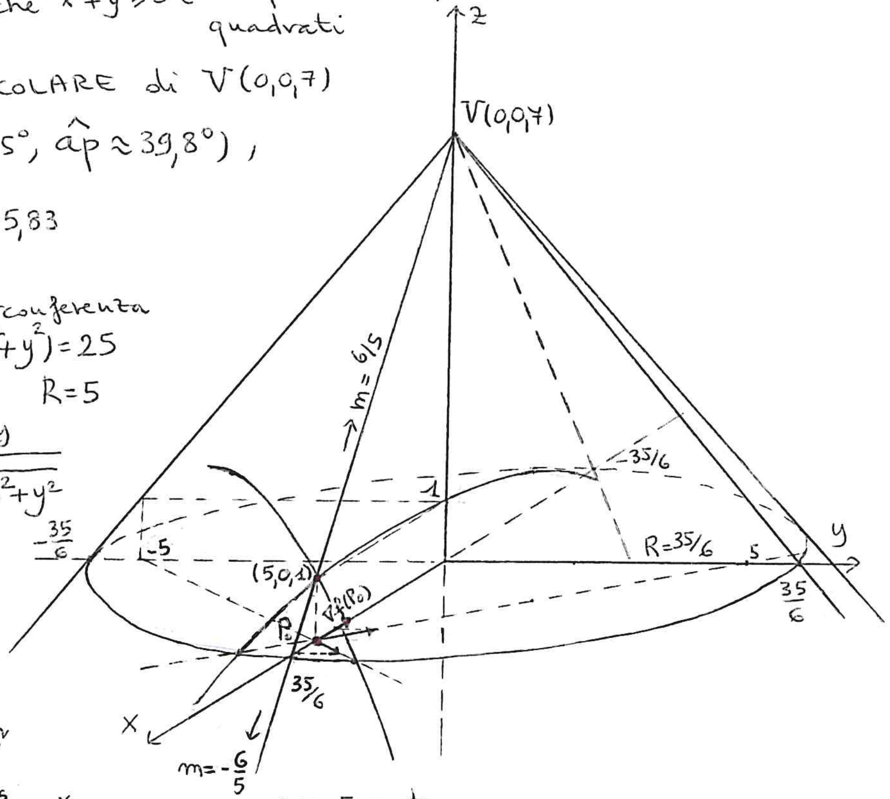
$z = 7 - \frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,7)$

verso il basso, $a = \frac{6}{5}$ ($0 < \hat{ap} < 45°$, $\hat{ap} \simeq 39{,}8°$),

$\cap\, z = 0$ su $x^2 + y^2 = \left(\frac{35}{6}\right)^2$ $R = \frac{35}{6} \simeq 5{,}83$

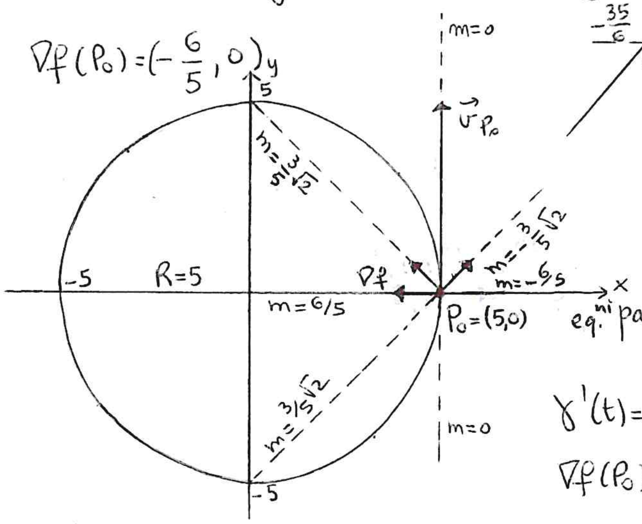
$P_0 = (5,0) \in E_1$ $f(5,0) = 7 - 6 = 1$

$E_1 : 1 = 7 - \frac{6}{5}\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 5$ $(x^2+y^2) = 25$ circonferenza $R = 5$



$\partial_x f = -\frac{6}{5} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad \partial_y f = -\frac{6}{5} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\nabla f(P_0) = \left(-\frac{6}{5}, 0\right)$



eq.^{ni} param. di E_1 : $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\quad P_0 \in E_1$ per $t = 0$

$\gamma'(t) = (-5\sin t, 5\cos t)$ $\quad \vec{v}_{P_0} = (0,5) = 5\vec{j}$

$\nabla f(P_0) \cdot \vec{v}_{P_0} = -\frac{6}{5} \cdot 0 + 0 \cdot 5 = 0 \Rightarrow$ sono $\perp$

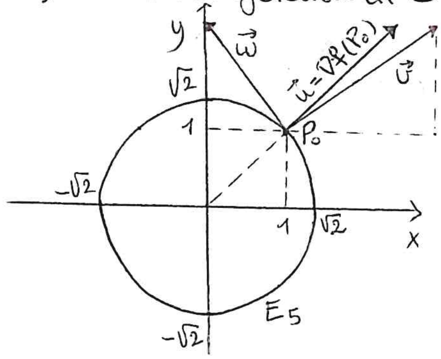
massima pendenza in $P_0 = \|\nabla f(P_0)\| = 6/5$ $\qquad \vec{v}_{max} = (-1, 0) = -\vec{i}$

massima pendenza <u>negativa</u> in $P_0 = -6/5$ $\qquad \vec{v}_{min} = -\vec{v}_{max} = \vec{i}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = -\frac{6}{5}$

$\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \frac{3}{5}\sqrt{2} \simeq 0{,}85$ $\qquad \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt{2} \simeq -0{,}85$

16) $(1,1) \in E_5$ $\quad \nabla f(1,1)$ deve essere $\perp$ E_5 in $P_0=(1,1)$

E_5 è la circonferenza di $C(0,0)$ $R=\sqrt{2}$



un vettore $\perp$ a E_5 in $(1,1)$ deve avere entrambe le componenti positive oppure entrambe negative: questo esclude $\vec{w}$. Inoltre le due componenti devono essere uguali e questo esclude $\vec{v}$.

Allora il $\nabla f(1,1)$ può essere solo $\vec{u}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ $(\|\nabla f(1,1)\|=2)$.

17) • $\text{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 8x^2+18y^2 \geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (2\sqrt{2}x)^2+(3\sqrt{2}y)^2\geq 0\} = \mathbb{R}^2$

perchè $(2\sqrt{2}x)^2+(3\sqrt{2}y)^2 \geq 0$ è sempre vera in quanto somma di due quadrati

$\rightarrow$ $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$

• $\partial_x f = \dfrac{8x}{\sqrt{8x^2+18y^2}}$ $\qquad \partial_y f = \dfrac{18y}{\sqrt{8x^2+18y^2}}$ $\qquad \nabla f(3,2) = \left(\dfrac{24}{\sqrt{144}}, \dfrac{36}{\sqrt{144}}\right) = \left(\dfrac{24}{12}, \dfrac{36}{12}\right)$

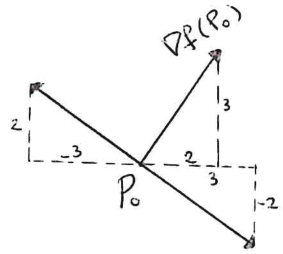
$\boxed{\nabla f(3,2) = (2,3)}$

• $f(3,2) = \sqrt{144} = 12 \rightarrow (3,2) \in E_{12}$

E_{12} : $12 = \sqrt{8x^2+18y^2} \longrightarrow 144 = 8x^2+18y^2 \rightarrow \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$ ELLISSE di $C(0,0)$ $a=3\sqrt{2}$ $b=2\sqrt{2}$

• Se il vettore $\nabla f(3,2)=(2,3)$ è $\perp E_{12}$ nel punto $P_0=(3,2)$

$\Rightarrow$ i vettori $(3,-2)$ e $(-3,2)$ sono entrambi tangenti a E_{12} in P_0. Dall'inclinazione di entrambi i vettori si ricava $m_{tau} = -\dfrac{2}{3}$ e quindi l'equazione cartesiana della retta tangente $y=-\frac{2}{3}x+4$.



(oss. Il coeff. angolare m_{tau} si ricava anche direttamente da $\nabla f(3,2)$ in quanto la retta per P_0 con diret. il $\nabla f(P_0)$ ha $m=\dfrac{\partial_y f(P_0)}{\partial_x f(P_0)}=\dfrac{3}{2}$, da cui $m_{tau} = -\dfrac{2}{3}$ essendo le due rette $\perp$ fra loro).

• eq.^{ni} param. di E_{12} $\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

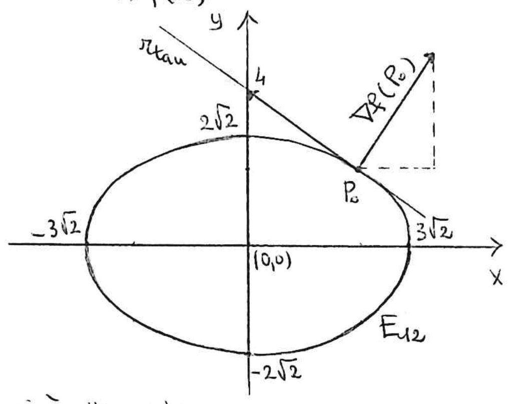
$P_0 \in E_{12}$ per $t_0=\frac{\pi}{4}$

$\gamma'(t) = (-3\sqrt{2}\sin t, 2\sqrt{2}\cos t)$ $\quad \vec{v}_{P_0} = -3\vec{i}+2\vec{j}$ (*)

eq.^{ni} param. retta tang $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 2+2t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\quad$ eq.^{ne} cartesiana $m_{tau}=\dfrac{2}{-3}=-\dfrac{2}{3}$

$y = 2-\frac{2}{3}(x-3)$

$y=-\frac{2}{3}x+4$ come già ottenuto.



(*) $\nabla f(P_0)\cdot \vec{v}_{P_0} = 2\cdot(-3)+3\cdot 2 = 0$