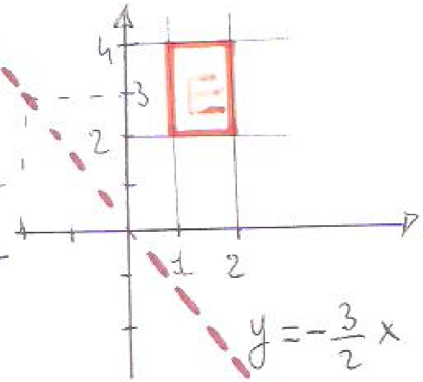
PRIMA ESERCITAZIONE SUGLI INTEGRALI DOPPI

$\boxed{1}$ Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{1}{(3x+2y)^2}\,dx\,dy$

su $E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid 1\leq x\leq 2,\ 2\leq y\leq 4\}$



Svolgimento: Sappiamo che in dimensione maggiore di 1 non esiste un Teorema fondamentale del Calcolo Integrale. Esiste però prima di tutto il Teorema di RIDUZIONE su un rettangolo:

Sia $f: E\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione CONTINUA definita sul rettangolo $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$. Allora

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

Questo teorema ci consente di ridurre il calcolo di un integrale doppio al calcolo di due integrali definiti.

Nel nostro caso $\operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq -\frac{3}{2}x\}$;

La funzione è definita e CONTINUA in E, che non è attraversato da $y=-\frac{3}{2}x$. E è un rettangolo. Possiamo quindi utilizzare il Teorema di RIDUZIONE su un RETTANGOLO:

$$\int_E \frac{1}{(3x+2y)^2}\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_2^4 \frac{1}{(3x+2y)^2}\,dy\right)dx =$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+c}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{3x+4}-\frac{1}{3x+8}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{1}{3x+4}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{3x+8}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{\overset{f'(x)}{3}}{\underset{f(x)}{3x+4}}\,dx - \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{\overset{f'(x)}{3}}{\underset{f(x)}{3x+8}}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\log|3x+4| - \log|3x+8|\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{6}\left(\log 10 - \log 14 - \log 7 + \log 11\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\log 110 - \log 98\right)$$

$$= \frac{1}{6}\log\frac{110}{98} = \frac{1}{6}\log\frac{55}{49}$$

VARIABILE y, x PARAMETRO

$$\int_2^4 \frac{1}{(3x+2y)^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^4 \underset{f'(y)}{2}\,\underset{f(y)}{(3x+2y)}^{-2}\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}\,\frac{(3x+2y)^{-1}}{-1}\right]_{y=2}^{y=4}$$

$$= \left[-\frac{1}{2(3x+2y)}\right]_{y=2}^{y=4}$$

$$= -\frac{1}{2(3x+8)} + \frac{1}{2(3x+4)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3x+4} - \frac{1}{3x+8}\right)$$

$$\boxed{\int f'(y)\,[f(y)]^{\alpha}\,dy = \frac{[f(y)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \qquad (\alpha\neq -1)}$$

Abbiamo utilizzato 2 proprietà dei LOGARITMI: $\log A + \log B = \log A\cdot B$
e $\log A - \log B = \log\frac{A}{B}$

Abbiamo integrato prima rispetto a y, considerando x parametro, poi rispetto a x, ma avremmo potuto anche fare il contrario:

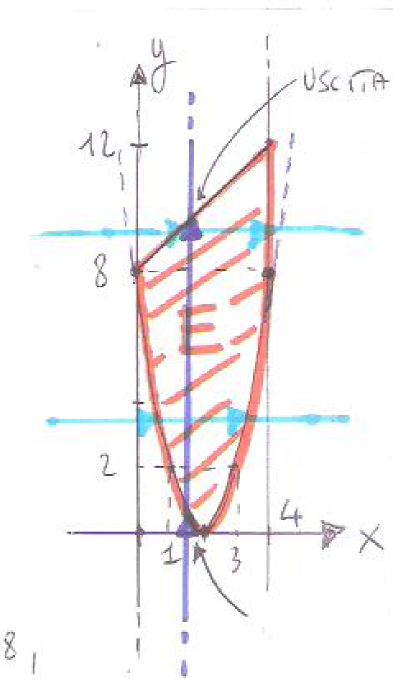
$$\int_2^4 \left(\int_1^2 \frac{1}{(3x+2y)^2}\, dx \right) dy$$

, con lo stesso livello di difficoltà e naturalmente lo stesso risultato.

$\boxed{2}$ Calcolare $\int_E x \, dx \, dy$ con

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4, \; 2x^2 - 8x + 8 \le y \le x + 8 \right\}$$

dopo aver disegnato E.



<u>Svolgimento</u>: E è inscritto in una striscia verticale delimitata dalle rette $x=0$ e $x=4$. $y = 2x^2 - 8x + 8$ è l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y. Per trovare x_v risolviamo l'equazione

$y'(x) = 4x - 8 = 0 \longrightarrow x_v = 2$; $y_v = 0$

$V(2,0)$. Per $x=0$ $y=8$, per $x=4$ $y=8$, per $x=1$ $y=2$, per $x=3$ $y=2$. $y = x+8$ è invece

l'equazione di una retta parallela alla bisettrice del 1° quadrante. Per $x=0$, $y=8$; per $x=4$, $y=12$.
E si ottiene quindi come intersezione fra il SOPRAGRAFICO rispetto alla parabola e il SOTTOGRAFICO rispetto alla retta (vedi figura), nella striscia verticale delimitata da $x=0$ e $x=4$.

Notiamo che mentre x è compreso tra due costanti, la stessa cosa non accade per y, che è compreso tra due funzioni di x.
Non possiamo quindi utilizzare la formula di RIDUZIONE su un RETTANGOLO. Ma E è un DOMINIO NORMALE rispetto a X
($E \subset \mathbb{R}^2$ è DOMINIO NORMALE rispetto a x se si può scrivere come $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b,\ \alpha(x)\leq y\leq \beta(x)\}$ con $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ funzioni CONTINUE definite su $[a,b]$.)

Nel nostro caso $\boxed{\alpha(x)=2x^2-8x+8}$ e $\boxed{\beta(x)=x+8}$ che sono CONTINUE su $\mathbb{R}$ e quindi anche su $[0,4]$.

Applichiamo allora il Teorema di RIDUZIONE per DOMINI NORMALI RISPETTO A X:

Se $E \subset \mathbb{R}^2$ è DOMINIO NORMALE rispetto a x definito da $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ con $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni CONTINUE su $[a,b]$, allora $\forall f : E \to \mathbb{R}$ CONTINUA si ha:

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Quindi:

$$\int_E x\,dx\,dy = \int_0^4 \left(\int_{2x^2-8x+8}^{x+8} x\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^4 x \left(\int_{2x^2-8x+8}^{x+8} dy \right) dx$$

essendo x un parametro nell'integrale nella variabile y possiamo "portarla fuori" dall'integrale più interno

$$= \int_0^4 x\,(x + \cancel{8} - 2x^2 + 8x - \cancel{8})\,dx =$$

$$= \int_0^4 x\,(-2x^2 + 9x)\,dx = \int_0^4 (-2x^3 + 9x^2)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 \right]_0^4 = \left[x^3\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) \right]_0^4 = 64\,(1) = 64$$

Nella figura abbiamo disegnato una retta verticale evidenziando con delle frecce dove la retta ENTRA in E e dove ESCE da E: la retta entra da $y = 2x^2 - 8x + 8$ ed esce da $y = x + 8$, che sono gli estremi di integrazione inferiore e superiore dell'integrale più interno (si va sempre dal basso verso l'alto (retta blu)).

Ma E è normale anche rispetto a y?

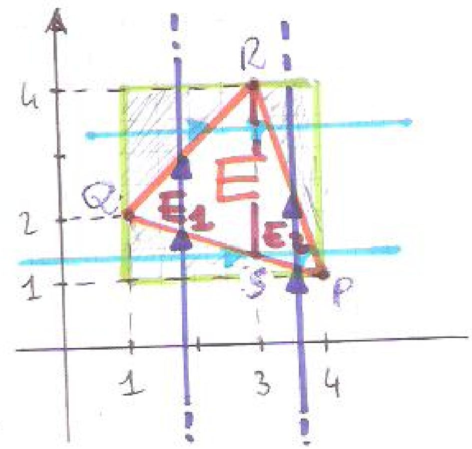
(si dovrebbe poter scrivere come
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \delta(y) \leq x \leq \gamma(y)\}$ con
$\gamma, \delta : [c, d] \to \mathbb{R}$ funzioni CONTINUE definite in R).

Se nella figura disegnamo rette orizzontali osserviamo che per $8 \leq y \leq 12$ una retta (azzurra) entra da $y = x + 8$ $(x = y - 8)$ ed esce dalla retta $x = 4$, mentre per $0 \leq y \leq 8$ entra ed esce sempre dalla parabola. Non è quindi un dominio normale rispetto all'asse y (per $0 \leq y \leq 12$ andando da sinistra verso destra dovremmo avere una sola funzione di "INGRESSO" e una sola funzione "di uscita")

$\boxed{3}$ Calcolare $\int_E x \, dx\,dy$ dove

E è il triangolo di vertici $P(4,1)$, $Q(1,2)$ e $R(3,4)$

<u>Svolgimento</u>: disegniamo E.



Purtroppo non è normale né rispetto all'asse x (le rette verticali entrano sempre da QP ma escono da QR o da PR), né rispetto all'asse y (le rette orizzontali entrano da QR o da QP ed escono da PR).

In casi del genere dobbiamo spezzare E in 2 domini (ad esempio mediante il segmento RS) che siano entrambi normali (in questo caso abbiamo scelto i domini normali rispetto all'asse x): li chiameremo E_1 ed E_2.

$$\boxed{\int_E x \, dx\,dy = \int_{E_1} x \, dx\,dy + \int_{E_2} x \, dx\,dy}$$

con $\boxed{E = E_1 \cup E_2}$.

Per calcolare i 2 integrali ci servono però le equazioni delle 3 rette dei lati:

$$\boxed{y = y_0 + m\,(x - x_0)}$$

- PQ : $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2-1}{1-4} = -\dfrac{1}{3}$

$$y = 1 - \frac{1}{3}(x-4)$$
$$\boxed{y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}$$

- PR : $m = \dfrac{4-1}{3-4} = -3$

$$y = 1 - 3(x-4)$$
$$\boxed{y = -3x + 13}$$

- QR : $m = \dfrac{4-2}{3-1} = 1$

$$y = 2 + (x-1)$$
$$\boxed{y = x + 1}$$

$$E_{1,x} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le x \le 3,\ \underbrace{-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}_{\alpha(x)\ PQ} \le y \le \underbrace{x+1}_{\beta(x)\ QR} \right\}$$

$$E_{2,x} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3 \le x \le 4,\ \underbrace{-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}_{\alpha(x)\ PQ} \le y \le \underbrace{-3x+13}_{\beta(x)\ PR} \right\}$$

Quindi:

$$\int_{E_1} x\,dx\,dy = \int_1^3 x \left(\int_{-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}^{x+1} dy \right) dx =$$

$$= \int_1^3 x\left(x + 1 + \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}\right) dx = \int_1^3 \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x\right) dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int_1^3 (x^2 - x)\,dx = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{4}{3}\left[x^2\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^3$$

$$= \frac{4}{3}\left(9 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{14}{3} = \frac{56}{9}$$

$$\int_{E_2} x \, dx \, dy = \int_3^4 x \left(\int_{-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}}^{-3x+13} dy \right) =$$

$$= \int_3^4 x \left(-3x + 13 + \frac{1}{3}x - \frac{7}{3} \right) dx =$$

$$= \int_3^4 \left(-\frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{3}x \right) dx = \left[-\frac{8}{9}x^3 + \frac{16}{3}x^2 \right]_3^4 =$$

$$= \left[x^2 \left(-\frac{8}{9}x + \frac{16}{3} \right) \right]_3^4 = 16 \left(-\frac{32}{9} + \frac{16}{3} \right) - 9 \left(-\frac{8}{3} + \frac{16}{3} \right)$$

$$= 16 \, \frac{-32+48}{9} - 9 \cdot \left(\frac{8}{3} \right) = \frac{256 - 216}{9} = \frac{40}{9}$$

$$\int_E x \, dx \, dy = \int_{E_1} x \, dx \, dy + \int_{E_2} x \, dx \, dy =$$

$$= \frac{56}{9} + \frac{40}{9} = \frac{96}{9} = \frac{32}{3}$$

Anche in un esercizio relativamente semplice come questo i calcoli nascondono molte insidie. Ricordando che essendo B il baricentro di E, si può dimostrare che

$$x_B = \frac{\int_E x \, dx \, dy}{\text{Area } E},$$

potremmo calcolare, anche in modo ele- mentare, l'area E come differenza fra l'area del quadrato in verde nella figura e le aree dei 3 triangoli rettangoli grigi -

$$\text{Area } E = 3^2 - \frac{2^2}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} = 9 - 2 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 4,$$

da cui $x_B = \dfrac{\int_E x\,dx\,dy}{\text{Area } E} = \dfrac{\frac{32}{3}}{4} = \dfrac{8}{3}$, che è

un risultato sensato, vista la figura, e giusto, dato che una formula di geometria analitica afferma che $x_B = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{8}{3}$ in un triangolo -

Naturalmente, non sempre è possibile effettuare verifiche di questo tipo ...

$\boxed{4}$ Dato $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{y-1} f(x,y)\,dx \right) dy$

scrivere, se possibile, l'integrale come riferito a un dominio normale rispetto all'asse x. -

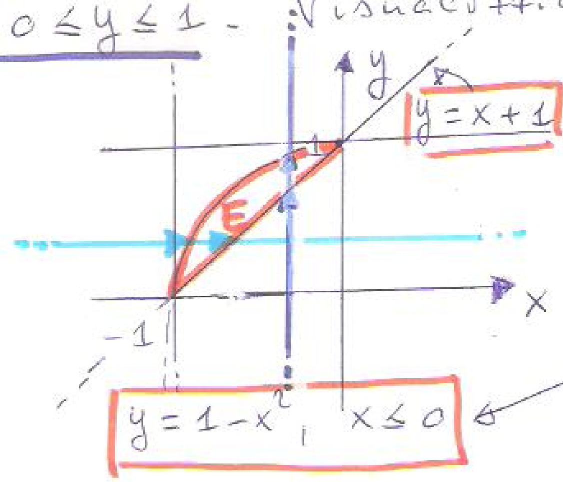
Svolgimento: $E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1; \underbrace{-\sqrt{1-y}}_{\gamma(y)} \le x \le \underbrace{y-1}_{\delta(y)}\}$

Se pensiamo alla retta orizzontale, essa entra in E, a sinistra, da $\gamma(y)$ ed esce, a destra, da $\delta(y)$.

$-x \geq 0$ (POSSO ELEVARE AL QUADRATO)

$$x = -\sqrt{1-y} \xrightarrow[x \leq 0]{} -x = \sqrt{1-y} \longrightarrow x^2 = 1-y \longrightarrow y = 1-x^2$$

Quindi la curva "di entrata" è $\boxed{y = 1-x^2,\ x \leq 0}$, mentre quella di uscita è $\boxed{y = x+1}$, nella striscia $0 \leq y \leq 1$. Visualizziamo la situazione:



META SINISTRA DELLA PARABOLA $y = 1-x^2$, di $V(0,1)$

$$E_x = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, -1 \leq x \leq 0,\ \underbrace{x+1}_{\substack{\alpha(x) \\ \text{ENTRATA}}} \leq y \leq \underbrace{1-x^2}_{\substack{\beta(x) \\ \text{USCITA}}} \Big\}$$

(la curva di entrata è $\boxed{y = x+1}$, quella di uscita $\boxed{y = 1-x^2}$ nella striscia $-1 \leq x \leq 0$)

Quindi
$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{y-1} f(x,y)\,dx \right) dy =$$

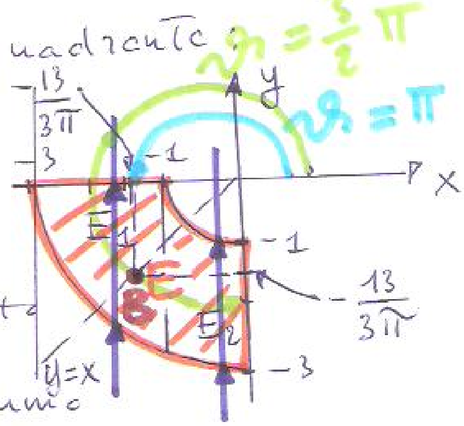
$$= \int_{-1}^{0} \left(\int_{x+1}^{1-x^2} f(x,y)\,dy \right) dx \,.$$

$\boxed{5}$ Calcolare $\int_E y \, dx \, dy$

con $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 0, \ y \le 0, \ 1 \le x^2+y^2 \le 9 \}$

e determinare le coordinate di B, baricentro di E.

<u>Svolgimento</u>: E è un quarto di una corona circolare compresa tra le circonferenze di raggio 1 e 3, nel terzo quadrante.



Per poter utilizzare la formula di riduzione per domini normali (rispetto a x o rispetto a y) dovremmo spezzare E, ad esempio verticalmente, in 2 domini normali:

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ y^2 = 9-x^2 \\ y = -\sqrt{9-x^2} \end{array}}$$

$$E_{1,x} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \le x \le -1, -\sqrt{9-x^2} \le y \le 0 \}$$

y è NEGATIVA

$$E_{2,x} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0, -\sqrt{9-x^2} \le y \le -\sqrt{1-x^2} \}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ y^2 = 1-x^2 \\ y = -\sqrt{1-x^2} \end{array}}$$

e calcolare poi

$$\int_E y \, dx\, dy = \int_{E_1} y \, dx \, dy + \int_{E_2} y \, dx \, dy \ldots$$

Per fortuna c'è una strada più breve:

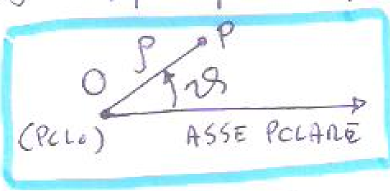
possiamo passare a $\boxed{\text{coordinate polari } (\rho, \vartheta)}$:

la trasformazione $\vec{\varphi}$ utilizzata ha equazioni

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}}$$

; il fattore CORRETTIVO risulta

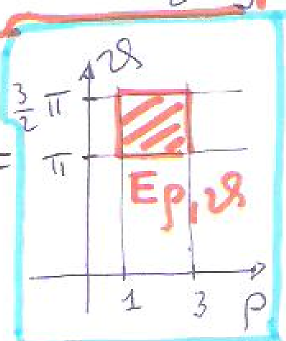
$$\left| \det J \begin{pmatrix} x & y \\ \rho & \vartheta \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \operatorname{sen} \vartheta \\ \operatorname{sen} \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{pmatrix} \right| = \left| \rho (\cos^2 \vartheta + \operatorname{sen}^2 \vartheta) \right| = \boxed{\rho}$$



Passando a coordinate polari otteniamo il

RETTANGOLO $E_{\rho,\vartheta} = \left\{ (\rho, \vartheta) : 1 \le \rho \le 3, \ \pi \le \vartheta \le \frac{3}{2}\pi \right\}$

la distanza da O è compresa tra 1 e 3



Quindi

$$\int_E y \, dx \, dy = \int_{E_{\rho,\vartheta}} \rho \operatorname{sen} \vartheta \cdot \boxed{\rho} \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= \int_1^3 \left(\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \rho^2 \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= \int_1^3 \rho^2 \left(\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \right) d\rho = \int_1^3 \rho^2 \left[-\cos \vartheta \right]_\pi^{\frac{3}{2}\pi} d\rho$$

$$= \int_1^3 \rho^2 \Big(\underbrace{-\cos \tfrac{3}{2}\pi}_{=0} + \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \Big) d\rho = \int_1^3 \rho^2 \, d\rho = -\frac{1}{3} \left[\rho^3 \right]_1^3$$

$$= -\frac{1}{3} (27 - 1) = -\frac{26}{3}$$

Il valore di $\int_E y\,dx\,dy$ DOVEVA essere negativo.

Infatti $y_B = \dfrac{\int_E y\,dx\,dy}{\text{Area } E} < 0$ (E è situata sotto l'asse x).

Calcoliamo y_B: Area $E = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$. Quindi

$$y_B = \frac{-\frac{26}{3}}{2\pi} = -\frac{26}{6\pi} = -\frac{13}{3\pi} \simeq -\frac{13}{9{,}42} = -1{,}4$$

Essendo E simmetrico rispetto a $y = x$, il baricentro si dovrà trovare su $y = x$ e quindi $x_B = -\frac{13}{3\pi}$. Di conseguenza anche $\int_E x\,dx\,dy = -\frac{26}{3}$.

Controllare sempre che B si trovi in una posizione "sensata" (in questo caso è naturalmente all'interno di E e su $y = x$ si trova più vicino alla circonferenza di raggio maggiore che a quella di raggio minore).