QUARTA ESERCITAZIONE sulle FUNZIONI di 2 VARIABILI

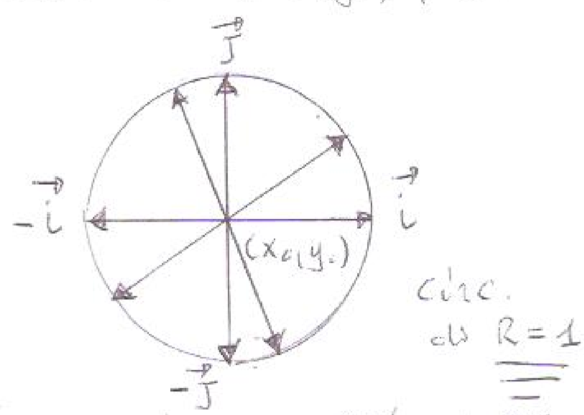
In questa esercitazione ci occuperemo di DERIVATE DIREZIONALI e di tutte le problematiche ad esse connesse.

Iniziamo ricordando alcune definizioni.

- Si dice DIREZIONE in $\mathbb{R}^2$ un qualunque VERSORE di $\mathbb{R}^2$, cioè un vettore $\vec{v}=(v_1,v_2)$ tale che $\|\vec{v}\|=1$, cioè $\boxed{v_1^2+v_2^2=1}$.

Dato un punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ possiamo individuare, mediante VERSORI applicati in (x_0,y_0), tutte le possibili direzioni.

Le punte dei versori appartengono a una circonferenza di centro (x_0,y_0) e raggio 1.



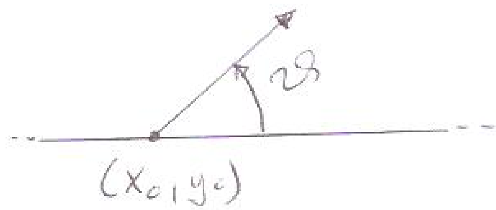
Tra questi versori troviamo anche quelli dell'asse x ($\vec{i}$ e $-\vec{i}$) e quelli dell'asse y ($\vec{j}$ e $-\vec{j}$)

Una direzione può essere identificata in 3 modi:

1. Mediante un vettore $\vec{w}$. Se $\vec{w}$ non è già un versore determiniamo $\boxed{\vec{v}=\dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}}$.

(2) - Mediante un angolo ϑ orientato, avente come lato iniziale il verso positivo della retta orizzontale passante per (x_0, y_0), cioè $y=y_0$ e lato finale la semiretta del versore corrispondente alla direzione:

$$\boxed{\vec{v} = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)}$$



(3) - Mediante un punto $P_1(x_1, y_1)$ che individua, a partire da $P_0(x_0, y_0)$, la direzione:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|}}$$ -

- Sia $f: \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di 2 variabili, sia $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} f$ e $\vec{v}$ una DIREZIONE in $\mathbb{R}^2$. Si dice che f è DERIVABILE in (x_0, y_0) nella direzione $\vec{v}$ se esiste FINITO

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ si dice DERIVATA DIREZIONALE di f in (x_0, y_0) nella DIREZIONE $\vec{v}$.

(n.b.) Spesso il calcolo della derivata direzionale mediante il calcolo del limite risulta complicato. Si può dimostrare che **se** f è DIFFERENZIABILE in (x_0, y_0)

allora $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}}$$

e il calcolo diventa molto più semplice.

A questo punto diventa fondamentale capire quando una funzione è DIFFERENZIABILE in (x_0, y_0).

- Sia $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di 2 variabili e $(x_0, y_0) \in \text{dom} f$. Si dice che f è DIFFERENZIABILE in (x_0, y_0) se

$$f(x, y) - \big(f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)\big) =$$
$$= o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \text{ per } \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0$$

cioè se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \big(f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)\big)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

n.b. Pare una definizione molto complicata, ma significa che in (x_0, y_0) il grafico di f ammette PIANO TANGENTE NON VERTICALE nel punto corrispondente a (x_0, y_0).

In ogni caso verificare la DIFFERENZIABILITÀ usando la definizione è molto complicato; si utilizza invece il <u>TEOREMA del DIFFERENZIALE TOTALE</u>:

Sia $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di 2 variabili e sia $A \subseteq \mathrm{dom} f$. Allora

$$\boxed{f \in C^1(A) \Longrightarrow f \text{ è DIFFERENZIABILE in ogni punto } (x_0, y_0) \in A}$$

(continua e derivabile con $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue in A)

- Quindi $f \in C^1(A) \Longrightarrow f$ DIFFERENZIABILE in ogni punto $(x_0, y_0) \in A \Longrightarrow \exists$ PIANO TANGENTE in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$

Passiamo agli esercizi:

1 $\boxed{f(x,y) = (5y^2 + 3x)\, e^{3x+2y} - \cos(xy^2)}$

è differenziabile in $\mathbb{R}^2$?

Svolgimento: f è CONTINUA in $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2$ perché somma, prodotto e composizione di funzioni continue ($5y^2+3x$, $3x+2y$ e xy^2 sono polinomi, le funzioni esponenziale e coseno sono continue in $\mathbb{R}^2$);

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 \cdot e^{3x+2y} + (5y^2+3x) \cdot 3e^{3x+2y} + y^2 \operatorname{sen}(xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 10y\, e^{3x+2y} + (5y^2+3x)\cdot 2\, e^{3x+2y} + 2xy \,\mathrm{sen}(xy^2)$$

sono, per gli stessi motivi di f, funzioni continue in $\mathbb{R}^2$, quindi, per il TEOREMA del DIFFERENZIALE TOTALE, f è DIFFERENZIABILE in $\mathbb{R}^2$.

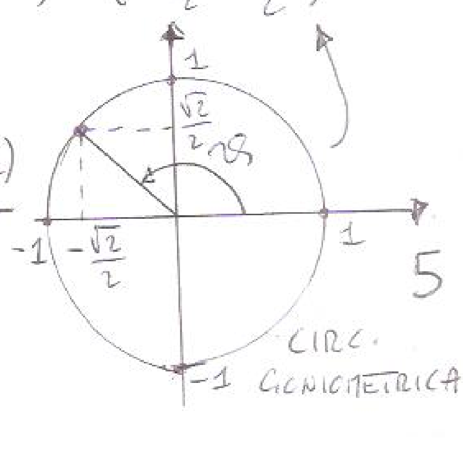
(dimostrare la differenziabilità usando la definizione sarebbe stato complicatissimo)

$\boxed{2}$ Data $\boxed{f(x,y) = -x^2-4y^2+16}$ (vedi esercizio $\boxed{3}$ dell'esercitazione precedente) determinare

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1)$ nella direzione identificata da $\vartheta = \frac{3}{4}\pi$, utilizzando la definizione e poi, dopo aver dimostrato la differenziabilità, la formula $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}$.

Svolgimento: $\vec{v} = \left(\cos\frac{3}{4}\pi, \mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(-2,-1)}{t}$$



$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\left(-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2-4\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+16-8}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\left(4+\frac{1}{2}t^2+2\sqrt{2}\,t\right)-4\left(1+\frac{1}{2}t^2-\sqrt{2}\,t\right)+8}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{-4}-\frac{1}{2}t^2-2\sqrt{2}\,t\cancel{-4}-2t^2+4\sqrt{2}\,t\cancel{+8}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{5}{2}t^2+2\sqrt{2}\,t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\left(-\frac{5}{2}t+2\sqrt{2}\right)}{\cancel{t}} = 2\sqrt{2}$$

- Altro modo: f è differenziabile in $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ per il Teorema del differenziale Totale (è continua, in polinomio, con derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -8y$ continue) e quindi anche in $(-2,-1)$. Possiamo quindi utilizzare la formula: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1) = \nabla f(-2,-1)\cdot\vec{v}}$;

$\nabla f(-2,-1) = (4,8)$; $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, per cui

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}+4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

(strada molto più semplice)

$\boxed{2}$ Data $\boxed{f(x,y) = 7 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}}$, calcolare

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,-4)$

a) nella direzione del vettore $\boxed{\vec{w}\,(4,-3)}$

b) nella direzione definita da $\boxed{\vartheta = \frac{11}{6}\pi}$

c) nella direzione di $\boxed{P_1\,(9,4)}$

<u>Svolgimento</u>: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ $\left(x^2+y^2 \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$

f è <u>CONTINUA</u> $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ essendo la composizione fra un polinomio e una radice, che è continua nel suo dominio; le derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, <u>non sono definite in $(0,0)$</u> perché si annulla il denominatore e <u>sono continue</u>, perché rapporto fra 2 funzioni continue, <u>in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$</u>. Per il Teorema del differenziale Totale la funzione è quindi <u>differenziabile in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$</u>

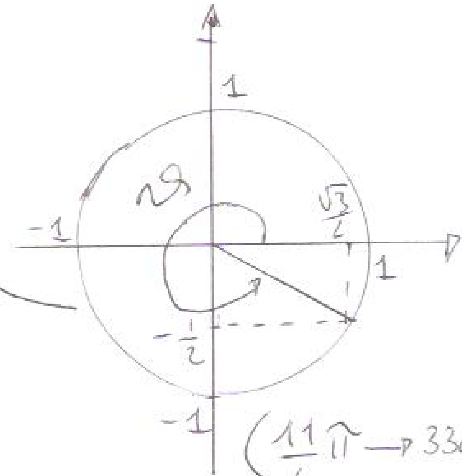
a) $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{(4,-3)}{\sqrt{16+9}} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ $\nabla f(3,-4) = \left(\frac{3}{10}, -\frac{2}{5}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,-4) = \boxed{\nabla f(3,-4) \cdot \vec{v}} = \frac{3}{\cancel{10}_{5}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{5} - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{25}$

POSSIAMO USARE LA FORMULA

b) $\vec{v} = \left(\cos \frac{11}{6}\pi, \operatorname{sen} \frac{11}{6}\pi\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



$\left(\frac{11}{6}\pi \to 330^\circ\right)$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,-4) = \nabla f(3,-4) \cdot \vec{v} =$

$= \frac{3}{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3\sqrt{3}+4}{20}$

c) $P_1 - P_0 = (9-3, 4+4) = (6, 8)$

$\| P_1 - P_0 \| = \sqrt{36+64} = 10$

$\vec{v} = \frac{P_1 - P_0}{\| P_1 - P_0 \|} = \frac{(6,8)}{10} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,-4) = \nabla f(3,-4) \cdot \vec{v} = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{7}{50}$

$\boxed{3}$ Data $\boxed{f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + 16}$ (vedi es. $\boxed{1}$

ed es. $\boxed{3}$ dell'esercitazione precedente)

determina:

a) le direzioni nelle quali $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1) = 0}$

b) la direzione di massima salita e quella di massima discesa

c) la massima pendenza del grafico in $(-2,-1)$, la direzione in cui tale pendenza viene raggiunta e l'intervallo delle pendenze assunte dal grafico in $(-2,-1)$.

d) le direzioni in cui $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1)=4}$

e) Rappresentare in una circonferenza di raggio 1 tali direzioni attraverso i VERSORI.

Svolgimento:

a) Possiamo procedere in 3 modi diversi:

1- determinare $\vec{v}$ tale che $\nabla f(-2,-1)\cdot\vec{v}=0$ e $v_1^2+v_2^2=1$, essendo $\nabla f(-2,-1)=(4,8)$:

$$\begin{cases} 4v_1+8v_2=0 \\ v_1^2+v_2^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1=-2v_2 \\ 4v_2^2+v_2^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} * \\ v_2^2=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1=\mp\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ v_2=\pm\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \qquad \vec{v}=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i}+\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j}$$

oppure $\vec{v}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i}-\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j}$

2 - determinare l'insieme di livello a cui $(-2,-1)$ appartiene: sappiamo già (es. $\boxed{3}$ esercitazione precedente) che $(-2,-1) \in E_8$ -
Scriviamo le eq. parametriche di una curva che percorre E_8 e utilizzarle per determinare il vettore tangente, da cui determiniamo il VERSORE TANGENTE in $(-2,-1)$ -
Nell'es. $\boxed{3}$ dell'esercitazione precedente avevamo ricavato il vettore tangente $v_t=(2,-1)$ da cui i 2 versori $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

(tutto questo perché sappiamo che le due direzioni in cui in (x_0,y_0) la derivata direzionale è nulla sono le due direzioni TANGENTI in (x_0,y_0) all'insieme di livello passante per (x_0,y_0), ossia $\vec{T}$ e $-\vec{T}$)

3 - Sapendo che $\nabla f(-2,-1)$ è PERPENDICOLARE all'ins. di livello E_8 che passa per $(-2,-1)$, ci basta ruotare di $90°$ in vers. orario e antiorario il versore nella direzione del

gradiente – Nel nostro caso $\nabla f(-2,-1) = (4,8)$:
il versore nella direzione del gradiente

sarà $\dfrac{(4,8)}{\|(4,8)\|} = \dfrac{(4,8)}{\sqrt{16+64}} = \dfrac{(4,8)}{\sqrt{80}} = \dfrac{(4,8)}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{(4,8)}{4\sqrt{5}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) =$

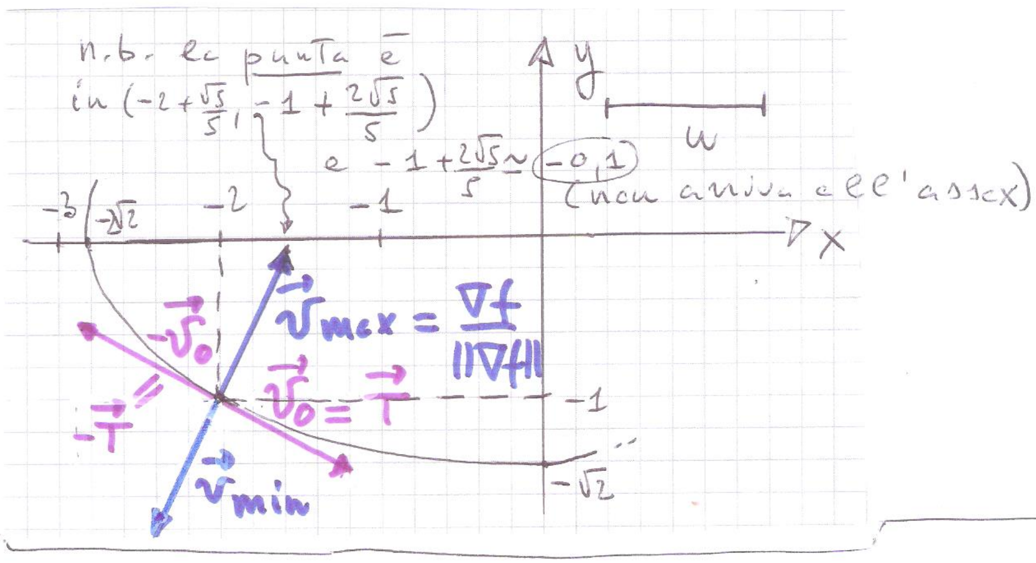
$= \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \vec{v}_{max}$

ruotando in verso ORARIO

da cui otteniamo $\vec{v}_0 = \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $-\vec{v}_0 = \left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

ruotando in verso ANTIORARIO

$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \simeq \dfrac{2\cdot 2{,}2}{5} = \dfrac{4{,}4}{5} \simeq 0{,}88 \qquad \dfrac{\sqrt{5}}{5} \simeq \dfrac{2{,}2}{5} \simeq 0{,}44\right)$



b) La direzione di massima salita è quella corrispondente al vettore gradiente, quindi

$\vec{v}_{max} = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}}$

mentre $\underset{-\vec{v}_{max}}{\underset{\parallel}{\vec{v}_{min}}} = -\dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \boxed{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}}$

c) La massima pendenza del grafico in $(-2,-1)$

è $p_{max} = \|\nabla f(-2,-1)\| = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

ed è raggiunta nella direzione $\vec{v}_{max} = \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}$

La massima pendenza negativa sarà $p_{min} = -4\sqrt{5}$,

quindi in $(-2,-1)$ il grafico assume tutte

le pendenze $p \in [-4\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$.

---

d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1) = 4 \longrightarrow \nabla f(-2,-1) \cdot \vec{v} = 4$, da

cui $\begin{cases} 4v_1 + 8v_2 = 4 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 + 2v_2 = 1 \\ * \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = 1 - 2v_2 \\ (1-2v_2)^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} * \\ 1 + 4v_2^2 - 4v_2 + v_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

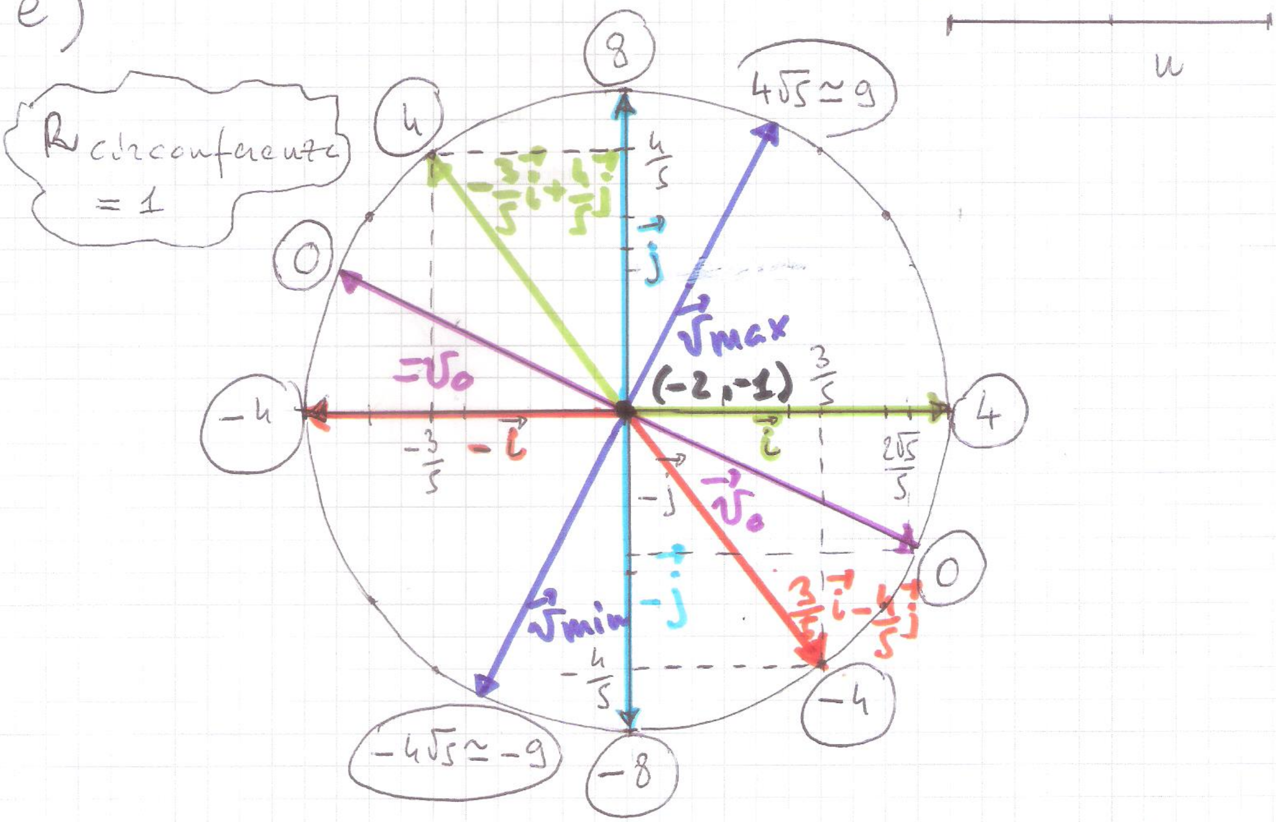
$$\begin{cases} * \\ 5v_2^2 - 4v_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} * \\ v_2(5v_2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} v_1 = -\frac{3}{5} \\ v_2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Quindi le 2 direzioni in cui $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1) = 4}$

sono $\boxed{\vec{i}}$ e $\boxed{-\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}}$

e)



Abbiamo ottenuto $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1) = -4$ per $\vec{v} = -\vec{i}$

e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1) = -4$ per $\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

(se $\vec{v}$ cambia verso si ottiene il valore opposto)

Per $\vec{v} = \vec{j}$ si ottiene $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1) = (4,8)\cdot\vec{j} =$

$= 4\cdot 0 + 8\cdot 1 = 8$.

All'esterno del cerchio abbiamo scritto i valori di $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2,-1)$ associati ai vari VERSORI rappresentati.