CIRCONFERENZA

di centro (0,0) e raggio R EQUAZIONE $x^2+y^2=R^2$

di centro $C(x_c,y_c)$ e raggio R EQUAZIONE $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$

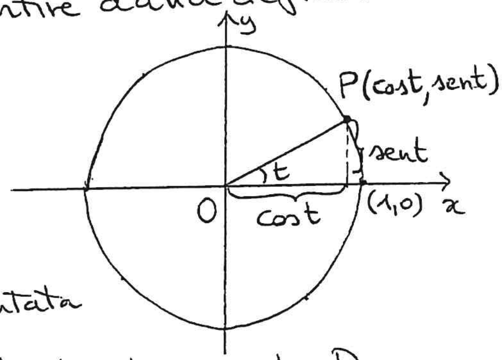
EQUAZIONI PARAMETRICHE

Come già visto nell'esempio (4), per percorrere la circonferenza di C(0,0) e R=1 possiamo utilizzare la curva

$\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$

che compie 1 giro sulla circonferenza in VERSO ANTIORARIO partendo dal punto (1,0).

Queste equazioni sono costruite a partire dalla definizione di seno e coseno di un angolo:



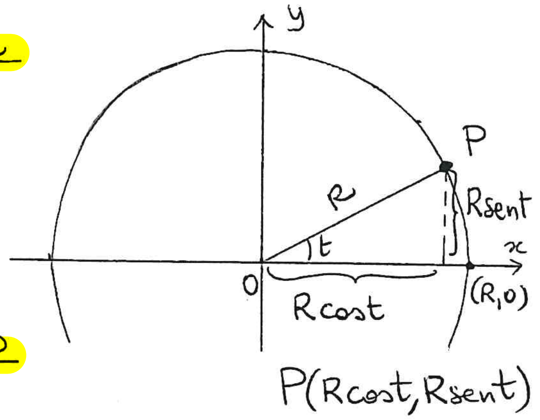
Se prendiamo come parametro t l'angolo compreso tra il semiasse positivo delle x e la semiretta OP (orientata da O verso P) possiamo scrivere le coordinate del punto P utilizzando il seno e il coseno dell'angolo t.

Quindi, nelle equazioni parametriche scritte sopra, il parametro t RAPPRESENTA L'ANGOLO corrispondente al punto; si impiegherà $\frac{\pi}{2}$ di tempo per $\frac{1}{4}$ di giro, π di tempo per $\frac{1}{2}$ giro, 2π di tempo per 1 giro e così via.

Allo stesso modo possiamo scrivere le equazioni parametriche di una qualsiasi circonferenza.

CIRCONFERENZA di $C(0,0)$ e raggio R

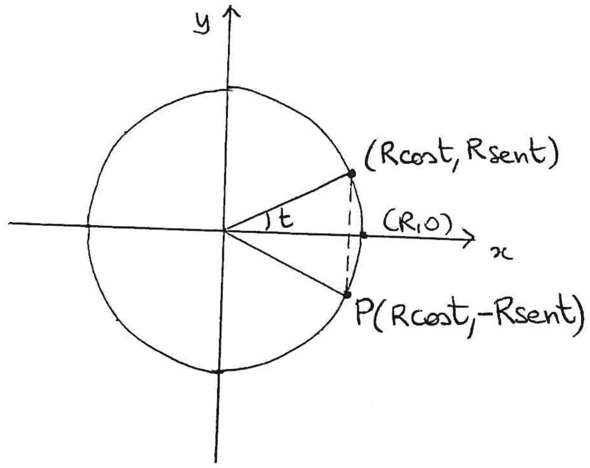
$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



compie 1 giro in VERSO ANTIORARIO partendo da $(R,0)$

VERSO ORARIO

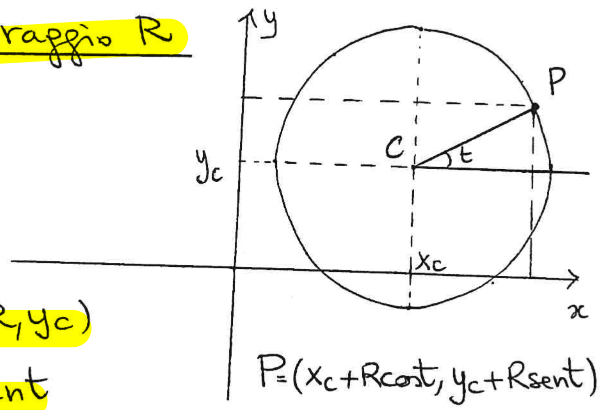
$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = -R\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



compie 1 giro in VERSO ORARIO partendo da $(R,0)$

CIRCONFERENZA di $C(x_c, y_c)$ e raggio R

$$\begin{cases} x(t) = x_c + R\cos t \\ y(t) = y_c \pm R\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



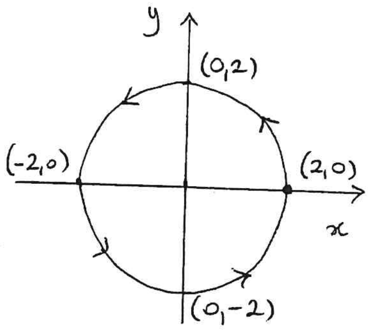
compie un giro partendo da $(x_c + R, y_c)$

in VERSO ANTIORARIO se $+R\,\text{sen}\,t$

in VERSO ORARIO se $-R\,\text{sen}\,t$

ESEMPI

- $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$



$P_{in} = P_{fin} = (2,0)$ 1 giro sulla circonf. di $C(0,0)$ $R = 2$ in verso antiorario partendo da $(2,0)$

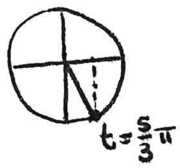
eq.ne : $x^2 + y^2 = 4$

RELAZIONE TEMPO-PUNTO in una CIRCONFERENZA percorsa in verso ANTIORARIO

Consideriamo la circonferenza dell'ultimo esempio

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

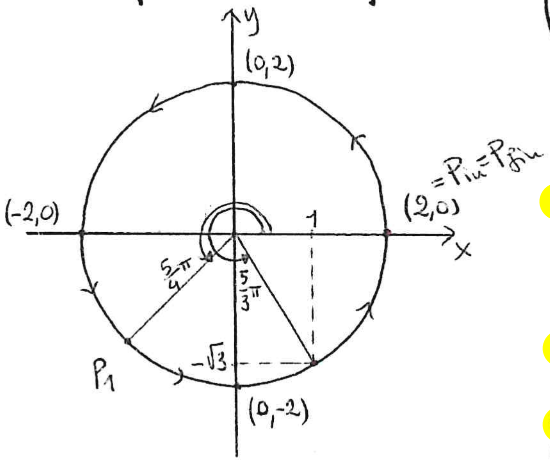
Cerchiamo il punto corrispondente all'istante di tempo $t_0 = \frac{5}{3}\pi$:
basta sostituire nelle equazioni poiché ad ogni valore di t corrisponde un punto



$\text{sen}\,\frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}$

$P_0 = \gamma\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \left(1, -\sqrt{3}\right)$



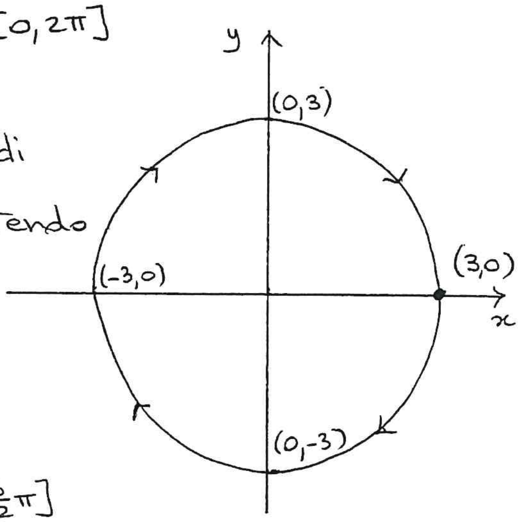
OSSERVAZIONE quando una circonferenza viene percorsa in verso antiorario la posizione del punto corrisponde esattamente all'angolo indicato da t.

Viceversa sia $P_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ un punto appartenente alla circonferenza:
dobbiamo trovare il tempo t_1 corrispondente a P_1
inseriamo le coordinate di P_1 nelle equazioni e ricaviamo t_1

$$\begin{cases} -\sqrt{2} = 2\cos t \\ -\sqrt{2} = 2\,\text{sen}\, t \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\, t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \boxed{t_1 = \frac{5}{4}\pi}$$

OSSERVAZIONE Per determinare l'angolo è necessario conoscerne sia il seno sia il coseno. È un errore dedurre l'angolo solo, ad esempio, dal valore del coseno perché in generale ci sono due angoli diversi aventi lo stesso coseno.

• $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = -3\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

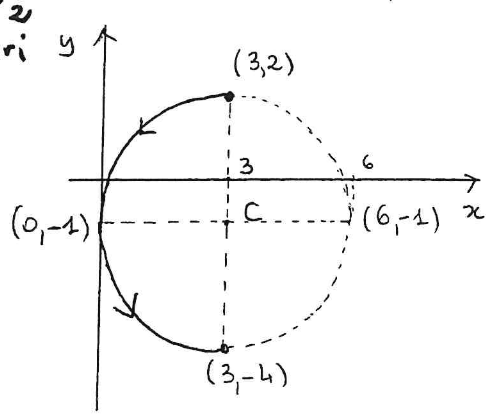


$P_{in} = P_{fin} = (3,0)$ 1 giro sulla circonf. di $C(0,0)$ e $R = 3$ in verso ORARIO partendo da $(3,0)$ eq.^{ne} $x^2 + y^2 = 9$

• $\gamma : [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = 3 + 3\cos t \\ y(t) = -1 + 3\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$

$P_{in} = (3,2)$ $P_{fin} = (3,-4)$ $\Delta t = t_{fin} - t_{in} = \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}$
$= \pi$ ci dice quanti giri

$\pi/2$ $\frac{3}{2}\pi$



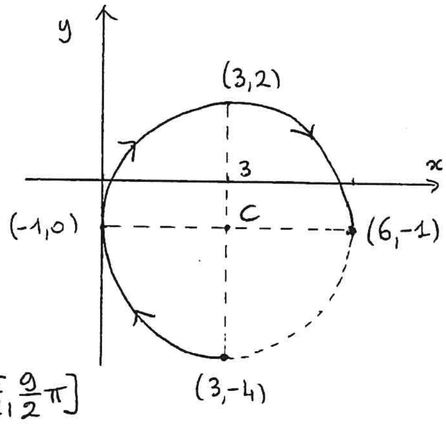
$\frac{1}{2}$ giro sulla circonf. di $C(3,-1)$ e $R = 3$ in verso antiorario da $(3,2)$ a $(3,-4)$

eq.^{ne} $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$

• $\gamma : [\frac{\pi}{2}, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = 3 + 3\cos t \\ y(t) = -1 - 3\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$

$P_{in} = (3,-4)$ $P_{fin} = (6,-1)$ $\Delta t = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$

$\pi/2$ 2π



$\frac{3}{4}$ di giro sulla circonferenza di $C(3,-1)$ e $R = 3$ in verso <u>orario</u> da $(3,-4)$ a $(6,-1)$

• $\gamma : [\frac{\pi}{2}, \frac{9}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = -2 + 4\cos t \\ y(t) = 4\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{9}{2}\pi]$

$P_{in} = (-2,4)$ $P_{fin} = (-2,4)$ $t_{finale} - t_{iniziale} = \Delta t = \frac{9}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = 4\pi$ 2 giri

$\pi/2$ $9/2\,\pi$

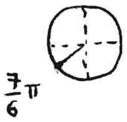
2 giri sulla circonferenza di $C(-2,0)$ e $R = 4$ in verso antiorario partendo da $(-2,4)$.

Relazione TEMPO-PUNTO in una CIRCONFERENZA percorsa in verso ORARIO

Consideriamo la circonferenza del penultimo esempio:

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{cases} x(t) = 3 + 3\cos t \\ y(t) = -1 - 3\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$$

Cerchiamo il punto corrispondente all'istante di tempo $t_0 = \frac{7}{6}\pi$: basta sostituire nelle equazioni e ad ogni istante di tempo corrisponde un punto

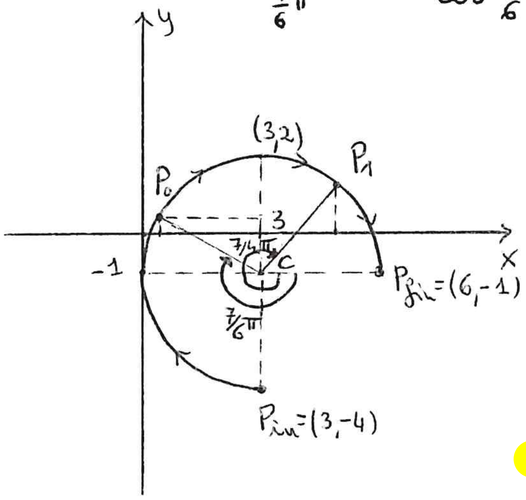


$\mathrm{sen}\,\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$P_0 = \gamma(t_0) = \left(3 + 3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), -1 - 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}, +\frac{1}{2}\right)$$

$\approx 0{,}4$



<u>OSSERVAZIONE</u> Quando una circonferenza viene percorsa in verso antiorario la posizione del punto corrisponde esattamente all'angolo indicato da t. Invece, come nell'esempio, se la circonferenza viene percorsa in verso orario la posizione del punto corrisponde ad aver percorso un angolo pari a quello indicato da t, ma <u>in verso orario</u>.

Viceversa sia $P_1 = \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}, -1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ un punto appartenente alla circonferenza: dobbiamo trovare il tempo t_1 corrispondente a P_1

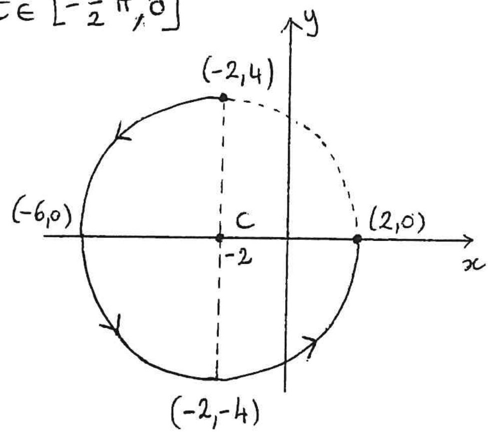
($\approx 5{,}12$, $\approx 1{,}12$)

inseriamo le coordinate di P_1 nelle eq.ni e ricaviamo t_1

$$\begin{cases} 3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} = 3 + 3\cos t \\ -1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} = -1 - 3\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{sen}\,t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \boxed{t_1 = \frac{7}{4}\pi}$$

<u>OSSERVAZIONE</u> Per ricavare t_1 servono sia il valore del seno dell'angolo sia il valore del coseno.

• $\gamma : [-\frac{3}{2}\pi, 0] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = -2 + 4\cos t \\ y(t) = 4\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [-\frac{3}{2}\pi, 0]$



$P_{in} = (-2, 4)$ $\quad P_{fin} = (2,0)$ $\quad \Delta t = 0 - (-\frac{3}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi$

$-\frac{3}{2}\pi \qquad 0$

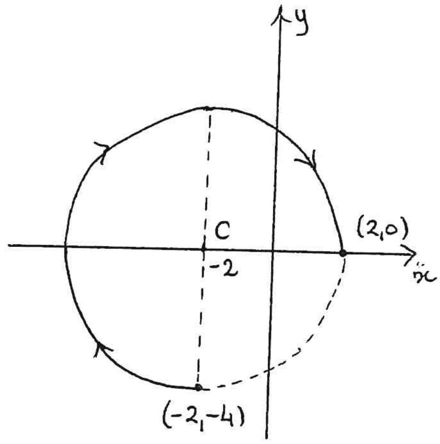
$\frac{3}{4}$ di giro sulla circonf. di $C(-2,4)$ e $R=4$

in verso antiorario da $(-2,4)$ a $(2,0)$

eq.^{ne} $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 16$

• $\gamma : [-\frac{3}{2}\pi, 0] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = -2 + 4\cos t \\ y(t) = -4\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$

$t \in [-\frac{3}{2}\pi, 0]$



$P_{in} = (-2,-4)$ $\quad P_{fin} = (2,0)$ $\quad \Delta t = \frac{3}{2}\pi$

$-\frac{3}{2}\pi \qquad 0$

$\frac{3}{4}$ di giro sulla circonf. di $C(-2,4)$ e $R=4$

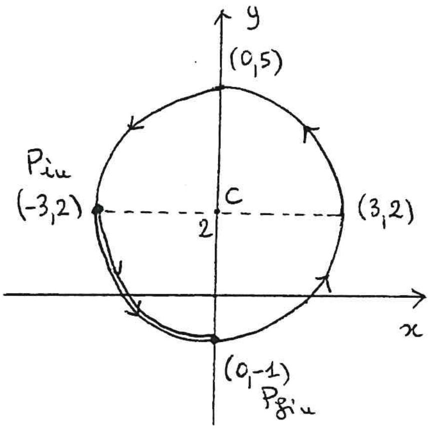
in verso <u>orario</u> da $(-2,-4)$ a $(2,0)$

• $\gamma : [\pi, \frac{7}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 2 + 3\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [\pi, \frac{7}{2}\pi]$

$P_{in} = (-3, 2)$ $\quad P_{fin} = (0,-1)$ $\quad \Delta t = t_{fin} - t_{in} = \frac{5}{2}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

$\pi \qquad \frac{7}{2}\pi$

1 giro e $\frac{1}{4}$



1 giro e $\frac{1}{4}$ sulla circonf di $C(0,2)$ e $R=3$

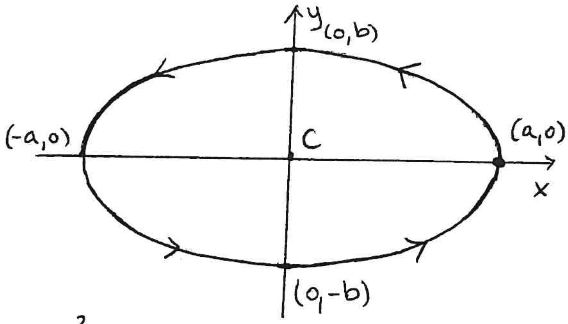
in verso antiorario da $(-3,2)$ a $(0,-1)$

ELLISSE

di centro $C(0,0)$ e semiassi a, b EQUAZIONE $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

di centro $C(x_c, y_c)$ e semiassi a, b EQUAZIONE $\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$

EQUAZIONI PARAMETRICHE



ELLISSE di $C(0,0)$ e SEMIASSI a, b

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$t=0 \to (a,0)$

$t=\frac{\pi}{2} \to (0,b)$

$t=\pi \to (-a,0)$

$t=\frac{3}{2}\pi \to (0,-b)$

$t=2\pi \to (a,0)$

EQ.$^{\text{NE}}$ $\frac{(x(t))^2}{a^2}+\frac{(y(t))^2}{b^2}=1$

infatti $\frac{\cancel{a^2}\cos^2 t}{\cancel{a^2}}+\frac{\cancel{b^2}\,\text{sen}^2 t}{\cancel{b^2}}=$

$=\cos^2 t+\text{sen}^2 t = 1 \quad \forall t$

Compie 1 giro sull'ellisse di $C(0,0)$ e semiassi a, b in verso antiorario partendo da $(a,0)$.

ELLISSE di $C(x_c, y_c)$ e semiassi a, b

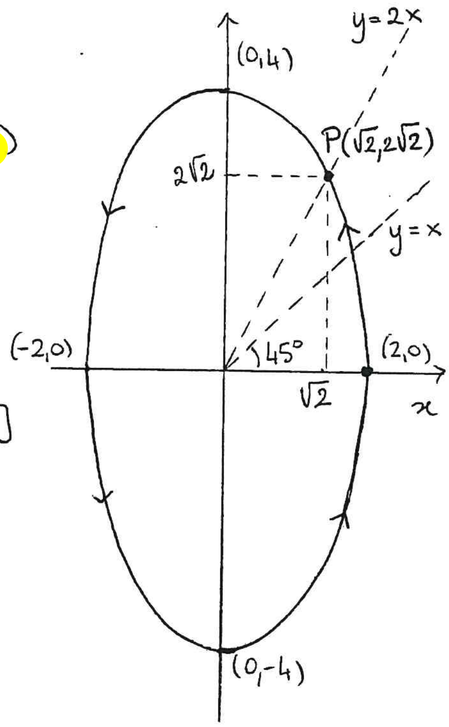
$$\begin{cases} x(t) = x_c + a\cos t \\ y(t) = y_c \pm b\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

compie un giro partendo da (x_c+a, y_c)

in VERSO ANTIORARIO se $+b\,\text{sen}\,t$

in VERSO ORARIO se $-b\,\text{sen}\,t$

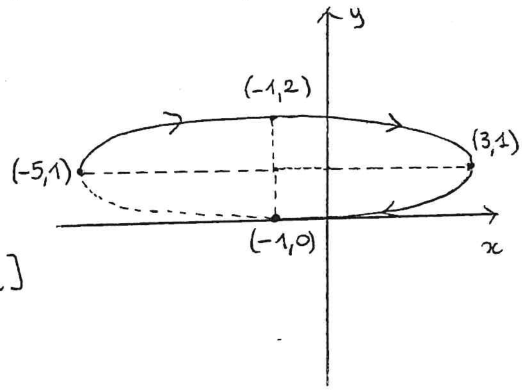
ESEMPI



- $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 4\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

$P_{in} = P_{fin} = (2,0)$ 1 giro sull'ellisse di $C(0,0)$ e semiassi 2, 4 in verso antiorario

OSSERVAZIONE (IMPORTANTE). Il parametro t utilizzato nelle equazioni parametriche dell'ellisse NON È L'ANGOLO corrispondente al punto, come invece accade per la circonferenza. Infatti, se nell'esempio precedente consideriamo $t=\frac{\pi}{4}$ troviamo il punto $P=(2\cos\frac{\pi}{4}, 4\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ che si trova al di sopra della bisettrice $y=x$ e quindi non corrisponde all'angolo $\frac{\pi}{4}=45°$. Infatti tale punto appartiene alla retta $y=2x$.



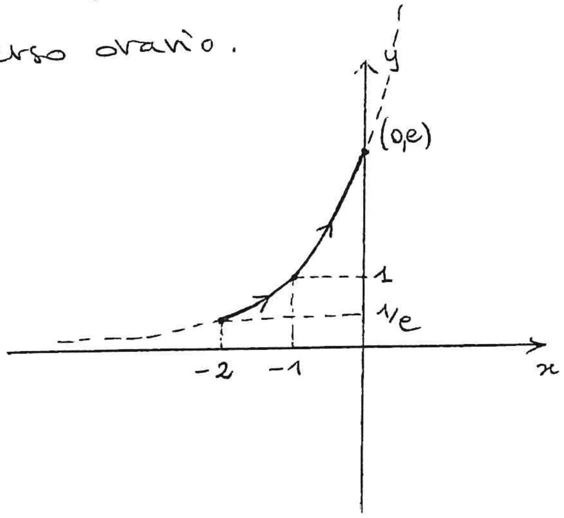
- $\gamma : [-\pi, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} x(t) = -1 + 4\cos t \\ y(t) = 1 - \mathrm{sen}\, t \end{cases}$ $t \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$

$P_{in} \underset{t=-\pi}{=} (-5,1) \quad P_{fin} \underset{t=\frac{\pi}{2}}{=} (-1,0)$

$-\pi$ $\quad$ $\pi/2$

$\Delta t = t_{fin} - t_{in} = \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$ $\quad$ $\frac{3}{4}$ di giro sull'ellisse di $C(-1,1)$ e semiassi $4,1$ in verso orario.

ALTRI ESEMPI



- $\begin{cases} x(t) = t-1 \\ y(t) = e^t \end{cases}$ $\quad t \in [-1, 1]$

$P_{in} \underset{t=-1}{=} (-2, \frac{1}{e})$ $\quad P_{fin} \underset{t=1}{=} (0, e)$

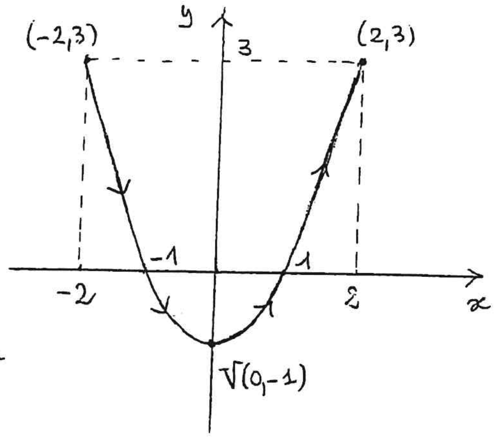
$e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0{,}37$ $\quad e^1 = e$

per $t=0 \to (-1,1)$ $\quad e^0 = 1$

<u>equazione</u> dalla 1^a eq.^{ue} $t = x+1$ nella 2^a eq.^{ue} $y = e^{x+1}$

la curva percorre il grafico $y=e^{x+1}$ della funzione esponenziale spostata a sinistra di 1 nel verso delle x crescenti.

• $\begin{cases} x(t) = t-2 \\ y(t) = (t-2)^2 - 1 \end{cases} \quad t \in [0,4]$

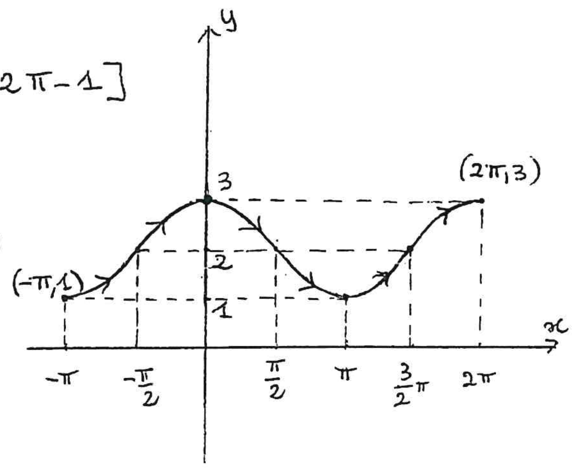


$P_{in} \underset{t=0}{=} (-2, 3) \quad P_{fin} \underset{t=4}{=} (2,3)$

$\boxed{eq.^{ue}}$ dalla 1^a eq.^{ne} $t = x+2$, nella 2^a eq.^{ue} $y = (x+2-2)^2 - 1 = x^2 - 1$

la curva percorre la parabola di equazione $y = x^2 - 1$ ($V(0,-1)$, verso l'alto, $y=0 \to x = \pm 1$) nel verso delle x crescenti.

• $\begin{cases} x(t) = t+1 \\ y(t) = 2 + \cos(t+1) \end{cases} \quad t \in [-\pi - 1, 2\pi - 1]$



$P_{in} \underset{t=-\pi-1}{=} (-\pi, 2 + \underbrace{\cos(-\pi)}_{-1}) = (-\pi, 1)$

$P_{fin} \underset{t=2\pi-1}{=} (2\pi, 2 + \underbrace{\cos(2\pi)}_{1}) = (2\pi, 3)$

$\underline{eq.^{ue}}$ $t = x - 1 \to y = 2 + \cos x$

percorre il grafico del coseno in alto di 2 nel verso delle x crescenti.

⊙ $\boxed{\text{ESERCIZI}}$

Svolgete gli esercizi sul DISEGNO di una CURVA nel PIANO

es. 1) da e) a m) es. 2) 3).

CURVE DEFINITE IN PIÙ TRATTI

Vediamo insieme come si disegna il SOSTEGNO di una curva definita in più tratti. Prendiamo ad esempio

$\gamma : [-\frac{3}{2}, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\begin{cases} x(t) = -(4t-2) \\ y(t) = -\frac{1}{4}(4t+4)^2 + 4 \end{cases}$ $t \in [-\frac{3}{2}, 0]$

$\begin{cases} x(t) = -4 + 6\cos t \\ y(t) = -15\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $t \in]0, \frac{3}{2}\pi]$ $\begin{cases} x(t) = -4 + 12\cos t \\ y(t) = 3 - 12\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $t \in]\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$

→ Si deve disegnare UN TRATTO ALLA VOLTA seguendo questo schema

- P_{in}, P_{fin}
- stabilire se si tratti di una circonferenza o di un'ellisse: in caso affermativo individuare C, R o semiassi, verso e giri dall'equazione; determinare qualche altro punto.
- in caso non si tratti di circonferenza o ellisse determinare l'equazione del tratto, stabilire di che cosa si tratta ed in quale verso venga percorso; determinare qualche altro punto.
- disegnare il tratto controllando che tutto sia coerente.

→ PASSARE al tratto SUCCESSIVO: poichè per definizione le curve sono CONTINUE il P_{in} del tratto successivo DEVE coincidere con il P_{fin} del tratto precedente.

SVOLGIMENTO

1° tratto $P_{in} = (8,3)$ $P_{fin} = (2,0)$

$x(t) = -4t+2$

eq.ne $4t = 2-x$ $y = -\frac{1}{4}(2-x+4)^2+4 = -\frac{1}{4}(6-x)^2+4$
$(x^2+36-12x)$

$y = -\frac{1}{4}x^2+3x-5$ si tratta di una PARABOLA rivolta verso il basso di $V(x_v=6, y_v=4)$

x_v : $y'(x) = -\frac{1}{2}x+3=0$ $\frac{1}{2}x=3$
$x=6$

(*) $y_v = -\frac{1}{4}\cdot 36+3\cdot 6-5 = -9+18-5=4$

La curva percorre la parabola di eq.ne $y=-\frac{1}{4}x^2+3x-5$ ($V(6,4)$, verso l'alto) nel verso delle x decrescenti da $(8,3)$ a $(2,0)$. Inoltre

Per simmetria la parabola passa per $(4,3)=P_0$. Inoltre

$\cap$ asse x per $x=2$ e $x=10$.

2° tratto $P_{in} = (2,0)$ $P_{fin} = (-4,15)$

La curva percorre l'ELLISSE di $C(-4,0)$, $a=6$, $b=15$,

eq.ne $\frac{(x+4)^2}{36}+\frac{y^2}{225}=1$, per $\frac{3}{4}$ di giro $(\Delta t = \frac{3}{2}\pi)$ in verso ORARIO.

a $t=\frac{\pi}{2}$ corrisponde $(-4,-15)$ e a $t=\pi \rightarrow (-10,0)$.

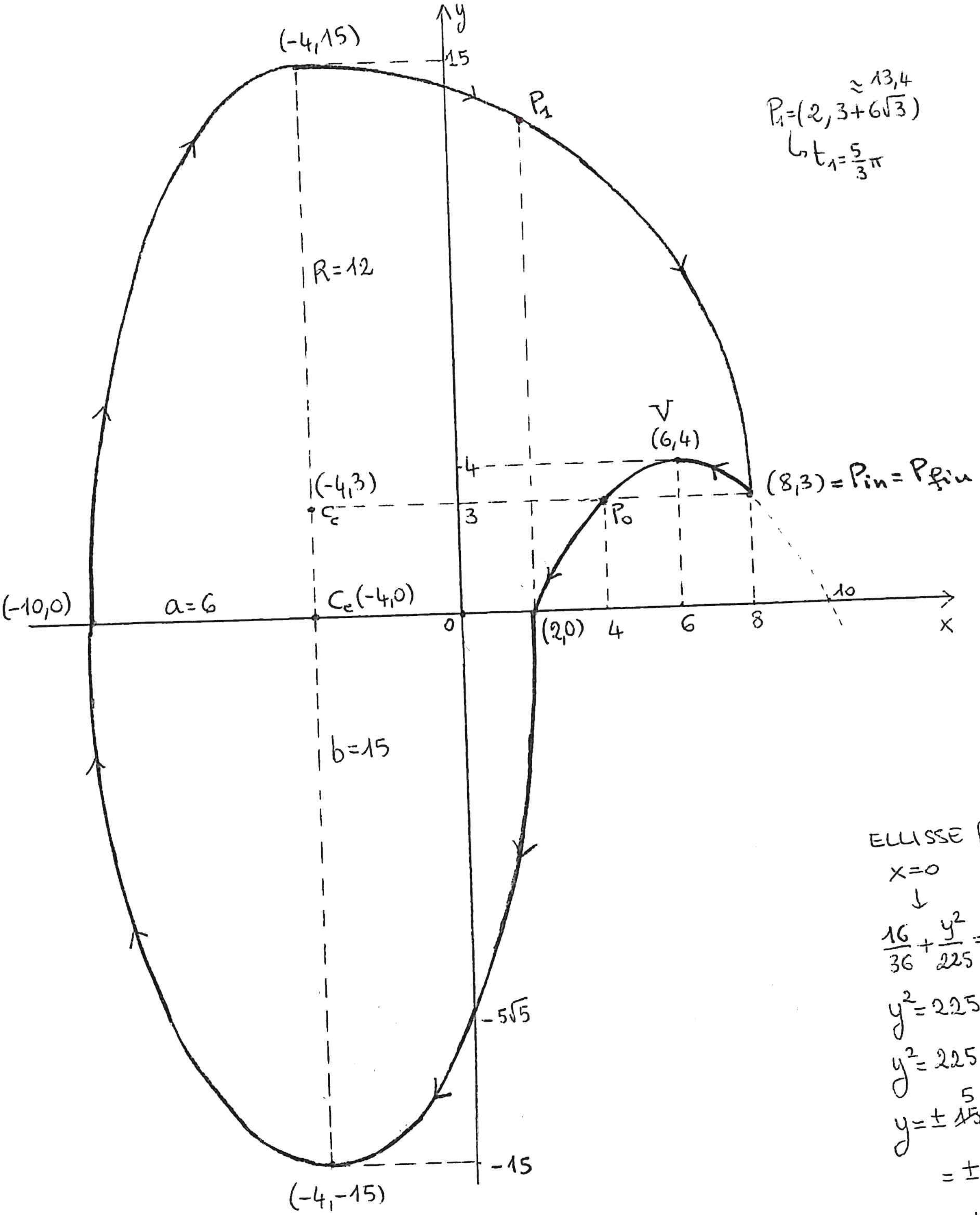
3° tratto $P_{in} = (-4,15)$ $P_{fin} = (8,3)$

Poiché $P_{in, 1° tratto} = P_{fin, 3° tratto}$ la curva è CHIUSA

La curva percorre la CIRCONFERENZA di $C(-4,3)$, $R=12$,

eq.ne $(x+4)^2+(y-3)^2=144$ per $\frac{1}{4}$ di giro $(\Delta t = 2\pi-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2})$ in verso ORARIO.

(*) il VERTICE di una parabola si calcola tramite $x_v = -\frac{b}{2a}$ $y_v = y(x_v)$ oppure (sconsigliato) $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. In alternativa si può calcolare x_v ponendo la derivata $y'(x)=0$, essendo x_v l'unico punto in cui una parabola ha la derivata $=0$.



ELLISSE Massey:

$x=0$

↓

$$\frac{16}{36}+\frac{y^2}{225}=1$$

$$y^2=225\cdot\left(1-\frac{16}{36}\right)$$

$$y^2=225\cdot\frac{20}{36}$$

$$y=\pm\frac{\cancel{15}^{\,5}}{1}\cdot\frac{\sqrt{20}}{\cancel{6}_{\,2}}=$$

$$=\pm\frac{5}{\cancel{2}}\cancel{2}\sqrt{5}$$

$$=\pm 5\sqrt{5}$$

$$\approx \pm 11,2$$

⊙ $\boxed{\text{ESERCIZI}}$

Svolgete l'es. 4) sul DISEGNO di una CURVA nel piano.