EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

Sono equazioni differenziali del tipo

$$y' = g(x)f(y) \text{ con } f(y) \neq 0$$

che, sfruttando la relazione $y' = \frac{dy}{dx}$, possiamo portare nella forma

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$$

in cui le variabili x e y sono separate.

La soluzione generale di questo tipo di equazione si ottiene integrando ambo i membri dell'equazione:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx + c$$

In alcuni casi anche la funzione identicamente nulla $y = 0$ può essere soluzione dell'equazione, e lo si verifica immediatamente.

ESEMPIO 1

Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$2x\left(y^2+1\right) - y' = 0$$

e l'integrale particolare che soddisfa la condizione $y(0) = 1$ (problema di Cauchy).

Si deve per prima cosa determinare l'integrale generale. Si separano le variabili:

$$\frac{dy}{1+y^2} = 2xdx$$

poi si integra

$$\text{arctg}\, y = x^2 + c$$

poi si esplicita la funzione $y(x)$

$$y = \text{tg}\left(x^2 + c\right)$$

Trovato l'integrale generale si può risolvere il problema di Cauchy.

Imponiamo la condizione iniziale

$$1 = \operatorname{tg}(0 + c)$$

da cui ricaviamo che il valore da attribuire alla costante è $c = \frac{\pi}{4}$.

Pertanto la soluzione cercata è

$$y = \operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Con un'altra condizione, ad esempio $y\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, avremo

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + c\right)$$

e dal momento che $\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{\pi}{3} + c = \frac{\pi}{6}$$

che ci permette di stabilire il valore della costante

$$c = -\frac{\pi}{6}$$

La soluzione cercata in questo caso è

$$y = \operatorname{tg}\left(x^2 - \frac{\pi}{6}\right)$$

ESEMPIO 2

Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y' = \frac{y^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

L'equazione ammette la soluzione $y = 0$.

Posto invece $y \neq 0$ possiamo separare le variabili ottenendo:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Integrando:

$$-\frac{1}{y} = \arcsin x + c$$

e quindi

$$y = -\frac{1}{\arcsin x + c}.$$

ESEMPIO 3

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = 2xy$$

e l'integrale particolare che soddisfa la condizione: $y(0) = -1$

La funzione $y = 0$ è soluzione dell'equazione.
Posto invece $y \neq 0$, separando le variabili si ha:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx.$$

Integriamo:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

perciò

$$\ln|y| = x^2 + c \quad \Rightarrow \qquad y = \pm e^{x^2+c} = ke^{x^2}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha:

$$-1 = ke^0$$

quindi l'integrale particolare cercato è:

$$y = -e^{x^2}.$$

ESEMPIO 4

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

Osserviamo che l'equazione è sicuramente soddisfatta dalle due funzioni costanti $y = \pm 1$ e che la funzione y deve sottostare alla condizione $-1 \leq y \leq 1$.
Posto invece $y \neq \pm 1$ possiamo separare le variabili:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$$

che con l'integrazione diventa:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx$$

cioè

$$\arcsin y = x + c \qquad \Rightarrow \qquad y = \sin(x+c).$$