COGNOME	____________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	____________		
MATRICOLA		1 2 3 4	
CORSO	AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL		

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2019-2020 — PARMA, 3 FEBBRAIO 2020

AN2 - 3/2/20 -1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare** **la risposta**.

$36^2=1296$ $39^2=1521$ $\frac{4}{3}\sqrt{2}\simeq 1{,}9$ $\sqrt{5}\simeq 2{,}24$ $12^2=144$ $20^2=400$ $16^2=256$ $4^4=256$ $14^2=196$ $8^4=4096$

0) **PARTE PRELIMINARE** (30 PUNTI) Completate:

a) Sia γ una curva nel piano.

A pag. 4

Se nel punto $P_0 = (-2, 3)$ il vettore tangente è $\mathbf{v} = 3\,\mathbf{i} - \frac{36}{5}\,\mathbf{j}$, allora

la velocità scalare in P_0 è: $39/5$

i vettori normali in P_0 sono: $\vec{N}_{or} = -\frac{36}{5}\vec{i} - 3\vec{j}$ $\vec{N}_{ant} = \frac{36}{5}\vec{i} + 3\vec{j}$

i versori normali in P_0 sono: $\text{VERS}\,\vec{N}_{or} = -\frac{12}{13}\vec{i} - \frac{5}{13}\vec{j}$ $\text{VERS}\,\vec{N}_{ant} = \frac{12}{13}\vec{i} + \frac{5}{13}\vec{j}$

la retta tangente in P_0 ha equazione cartesiana ... $y = -\frac{12}{5}x - \frac{9}{5}$

la retta normale in P_0 ha equazione cartesiana ... $y = \frac{5}{12}x + \frac{23}{6}$

Disegnate sul foglio a quadretti il punto P_0, il vettore tangente ed entrambi i vettori normali.

b) Sia E l'insieme definito da

A pag. 5

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 3x - \frac{7}{4} \le y \le -x + \frac{7}{2},\ x \ge 0\}$$

i) Disegnate con cura l'insieme E sul foglio a quadretti.

ii) Per ogni tratto del bordo di E scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre tale tratto, specificando il verso di percorrenza.

c) Considerate la funzione $f(x,y) = -6 + \sqrt{81 - x^2 - y^2}$.

A pag. 6-7

i) Determinate il dominio di f, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f, poi spiegate di quale tipo di superficie si tratta (senza dimenticare l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari precisate se l'angolo di apertura risulta minore o maggiore di 45 gradi e come si calcola); infine disegnate con precisione il grafico di f.

iii) Stabilite per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello E_k risulti diverso dall'insieme vuoto.

iv) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 corrrispondente a $(x_0 = 1, y_0 = -4)$ è: ... $z = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y + \frac{33}{8}$

v) La derivata direzionale di f nel punto $(x_0 = 1, y_0 = -4)$ nella direzione dell'angolo $\theta = \frac{7}{4}\pi$ vale .... $-\frac{5}{16}\sqrt{2}$

d) Considerate il triangolo T di vertici $(-2,1)$, $(2,5)$, $(6,5)$.

A pag. 7

i) Disegnate con precisione l'insieme T sul foglio a quadretti.

ii) Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme T come normale rispetto a x; ripetete come normale rispetto a y.

e) Considerate l'equazione differenziale $\frac{1}{6}y''(x) + \frac{3}{2}y(x) = (2x - 3x^3)\,e^{3x}$.

Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = c_1 \operatorname{sen}(3x) + c_2 \cos(3x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: .. eq.ne omog. $\frac{1}{6}y''(x) + \frac{3}{2}y(x) = 0$ eq.ne caratt $\frac{1}{6}t^2 + \frac{3}{2} = 0$ $t^2 = -9$ $t = \pm 3i$

$\alpha = 0$ $\beta = 3$ SOL.ni FONDAM. $y_1(x) = \operatorname{sen}(3x)$ $y_2(x) = \cos(3x)$

La soluzione particolare va cercata nella forma .. $\bar{y}(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{3x}$

il 2° m dell'eq.ne è il prodotto di un polinomio di 3° grado per un'esponenziale

perchè ... e^{kx} con $k=3$, e non va moltiplicato né per x né per x^2 perchè $k=3$ NON è sol.ne dell'EQUAZIONE CARATTERISTICA.

(Non è richiesto di determinare la soluzione particolare).

f) (Sul foglio a quadretti) Sia f la funzione definita da $f(x,y) = \frac{1}{5}(x^2 + y^2 - 16)(y + 1)$ (è la stessa funzione considerata nell'esercizio n.1).

A pag. 7-8

i) Determinate il dominio di f.

ii) Determinate i punti in cui f vale 0 e il segno di f negli altri punti (illustrate i risultati con un disegno).

iii) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

1) (Sul foglio a quadretti, 8 PUNTI) Considerate la funzione dell'esercizio 0f):

A pag. 8-9

$$f(x,y) = \frac{1}{5}(x^2 + y^2 - 16)(y + 1).$$

Dopo averne giustificato l'esistenza, (utilizzando anche quanto ottenuto nell'esercizio n.0f) determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme (del quale è richiesto il disegno)

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 36, y \geq 0\}.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti, 10 PUNTI) Considerate la funzione $g(x,y) = -2 + \frac{9}{16}(x^2 + y^2)$.

A pag 10-11

a) Determinate il dominio di g, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g, poi spiegate di quale tipo di superficie si tratta (senza dimenticare l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari precisate se l'angolo di apertura risulta minore o maggiore di 45 gradi e come si calcola); infine disegnate con cura il grafico di g.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq -2 + \frac{9}{16}(x^2 + y^2), 2 \leq z \leq 7, x \geq 0, y \leq 0\}.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti, 5 PUNTI) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

A pag. 11-12

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y''(x) + y'(x) + 5y(x) = -8\,\text{sen}(2x) + 12\cos(2x) \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Risposta: ... $y(x) = \frac{1}{3}e^{-x}\,\text{sen}(3x) + 4\cos(2x)$

---

es.0) a) Velocità scalare $= \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{36}{5}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{1296}{25}} = \sqrt{\frac{225+1296}{25}} =$

$= \sqrt{\frac{1521}{25}} = \frac{39}{5}$ $\qquad \frac{36}{5} = 7{,}2$

i vettori NORMALI sono $\vec{N}_{or} = -\frac{36}{5}\vec{i} - 3\vec{j}$ $\qquad \vec{N}_{aut} = \frac{36}{5}\vec{i} + 3\vec{j}$

i VERSORI NORMALI sono VERS $\vec{N}_{or} = -\frac{\frac{36}{5}}{\frac{39}{5}}\vec{i} - \frac{3}{\frac{39}{5}}\vec{j} = -\frac{36}{39}\vec{i} - \frac{15}{39}\vec{j} =$

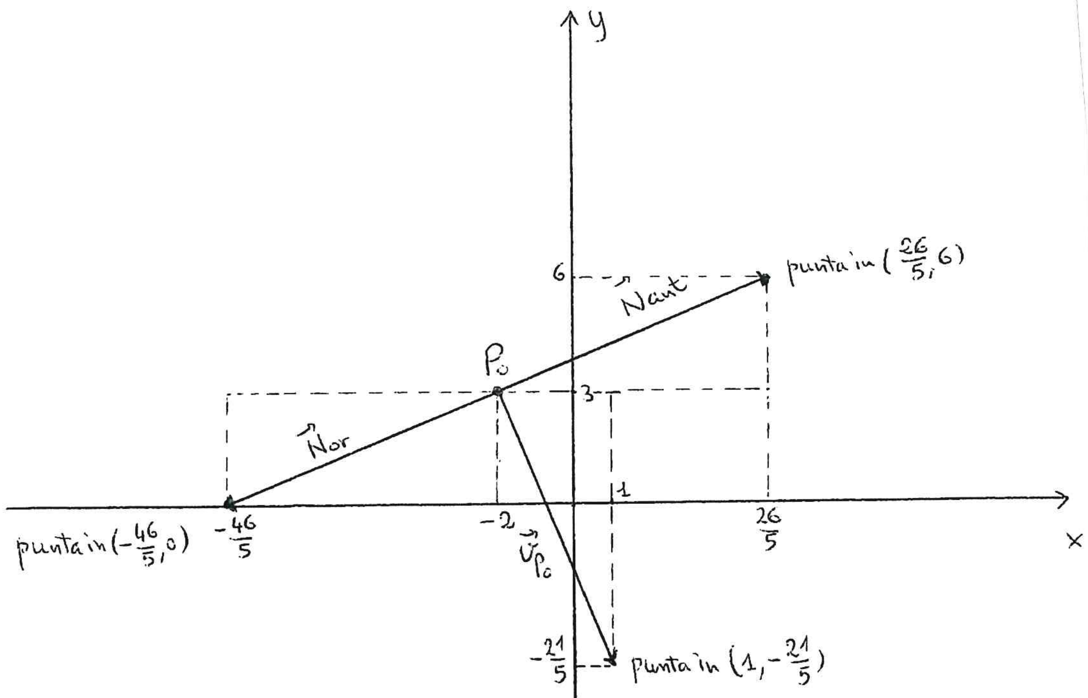
VERS $\vec{N}_{aut} = \frac{12}{13}\vec{i} + \frac{5}{13}\vec{j}$ $\qquad = -\frac{12}{13}\vec{i} - \frac{5}{13}\vec{j}$

$m_{tau} = \frac{-\frac{36}{5}}{3} = -\frac{12}{5}$ $\qquad r_{tau}: \; y = 3 - \frac{12}{5}(x+2)$ $\qquad y = -\frac{12}{5}x - \frac{9}{5}$

$3 - \frac{24}{5} = \frac{15-24}{5} = -\frac{9}{5}$

$r_{norm}: \; m_{norm} = -\frac{1}{m_{tau}} = \frac{5}{12}$

$y = 3 + \frac{5}{12}(x+2)$ $\qquad y = \frac{5}{12}x + \frac{23}{6}$ $\qquad 3 + \frac{5}{6} = \frac{23}{6}$



$\frac{26}{5} = 5{,}2$ $\qquad \frac{46}{5} = 9{,}2$ $\qquad \frac{21}{5} = 4{,}2$

AN2 - 3/2/2020 -5-

b) $y = -x + \frac{7}{2}$ è una retta di coeff. angolare $m = -1$ che interseca gli assi in $(\frac{7}{2}, 0)$ e $(0, \frac{7}{2})$

$y \leq -x + \frac{7}{2}$ si deve stare SOTTO la retta

$y = x^2 - 3x - \frac{7}{4}$ è una parabola rivolta verso l'alto, di

VERTICE $V = (\frac{3}{2}, -4)$ $\quad x_V: \ 2x - 3 = 0 \quad x_V = \frac{3}{2}$

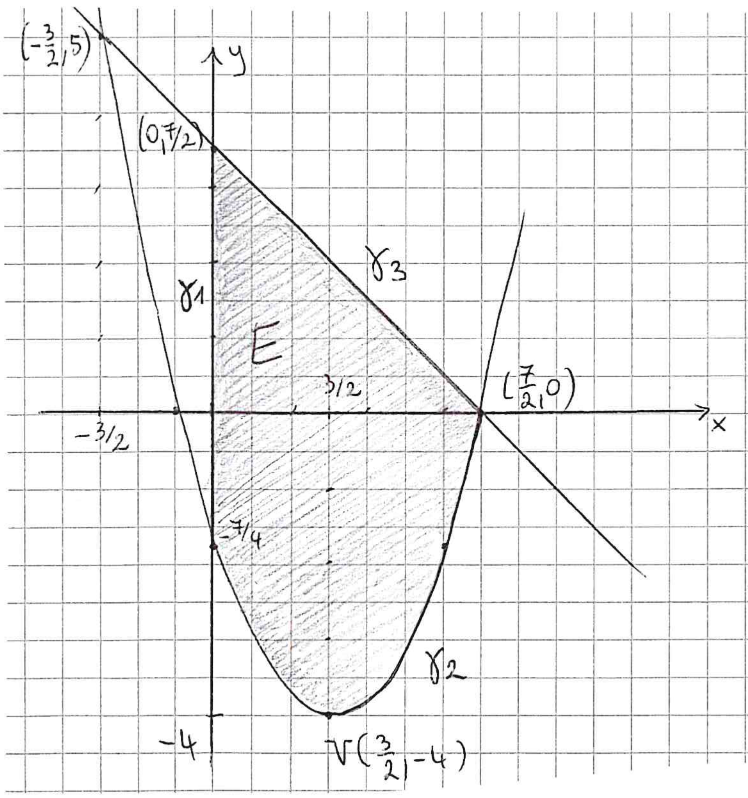
$$y_V = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - \frac{7}{4} = -\frac{9}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{16}{4} = -4$$

$\cap$ asse x $\quad x^2 - 3x - \frac{7}{4} = 0 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+7}}{2} = \frac{3 \pm 4}{2} \nearrow x_1 = \frac{7}{2}, \ \searrow x_2 = -\frac{1}{2}$

$y \geq x^2 - 3x - \frac{7}{4}$ si deve stare SOPRA la parabola

$x \geq 0 \rightarrow$ 1° e 4° quadrante

Retta $\cap$ parabola : abbiamo già trovato $(\frac{7}{2}, 0)$ e l'altra non serve. (è $(-\frac{3}{2}, 5)$)



$$\gamma_1 \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-\frac{7}{4}, \frac{7}{2}]$$

verso delle y crescenti

$$\gamma_2 \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 3t - \frac{7}{4} \end{cases} \quad t \in [0, \frac{7}{2}]$$

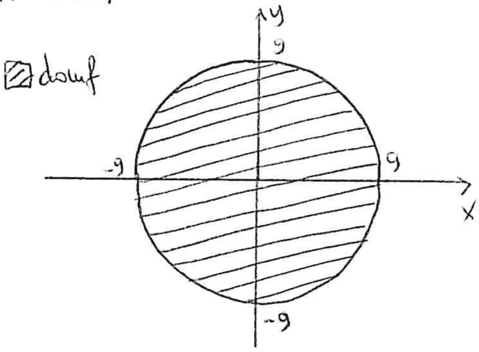
verso delle x crescenti

$$\gamma_3 \begin{cases} x = t \\ y = -t + \frac{7}{2} \end{cases} \quad t \in [0, \frac{7}{2}]$$

verso delle x crescenti

c) i) $\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 81 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 81\} =$

= CERCHIO CHIUSO (interno + bordo) di $C(0,0)$ e $R = 9$



ii) eq.ne del grafico $z = -6 + \sqrt{81 - x^2 - y^2}$:

si tratta della METÀ SUPERIORE della SUPERFICIE SFERICA di $C(0,0,-6)$ e $R = 9$

$z_{max} = z_C + R = -6 + 9 = 3$

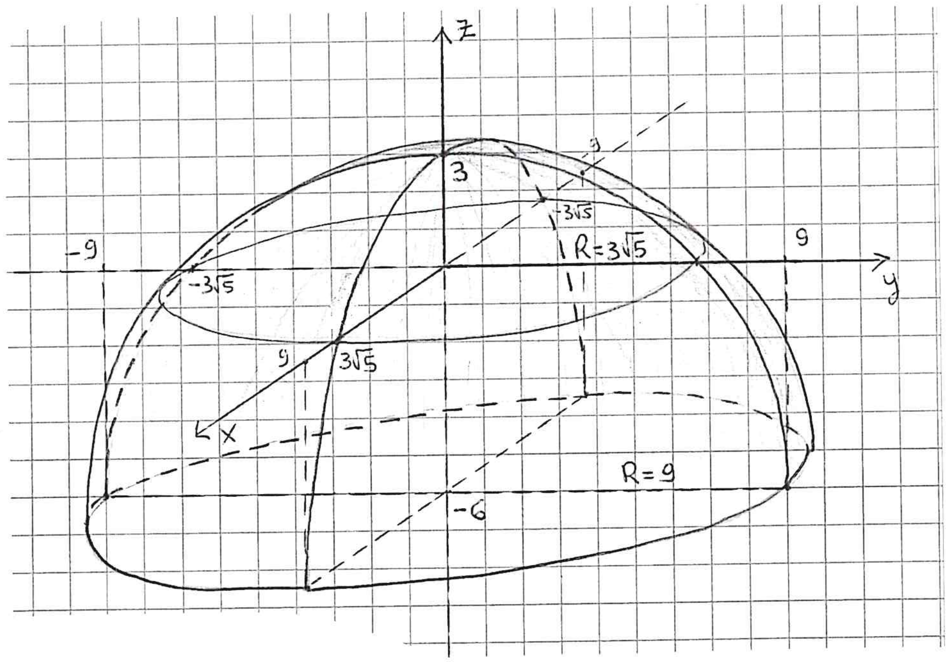
$\cap\, z = 0$ se $-6 + \sqrt{81 - x^2 - y^2} = 0 \iff \sqrt{81 - x^2 - y^2} = 6 > 0$ elevo $(\cdot)^2$

$81 - x^2 - y^2 = 36 \quad x^2 + y^2 = 45$ circonf $C(0,0)$ e $R = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$

iii) $E_K \neq \emptyset$

$\Updownarrow$

$-6 \leq K \leq 3$



iv) $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{81 - x^2 - y^2}}, \dfrac{-2y}{2\sqrt{81 - x^2 - y^2}} \right)$

$= \left(-\dfrac{x}{\sqrt{81 - x^2 - y^2}}, -\dfrac{y}{\sqrt{81 - x^2 - y^2}} \right)$ $\quad \nabla f(x_0 = 1, y_0 = -4) = \left(-\dfrac{1}{8}, -\dfrac{-4}{8} \right)$

$\sqrt{81 - 1 - 16} = \sqrt{64} = 8$

$\nabla f(1,-4) = \left(-\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{2} \right)$

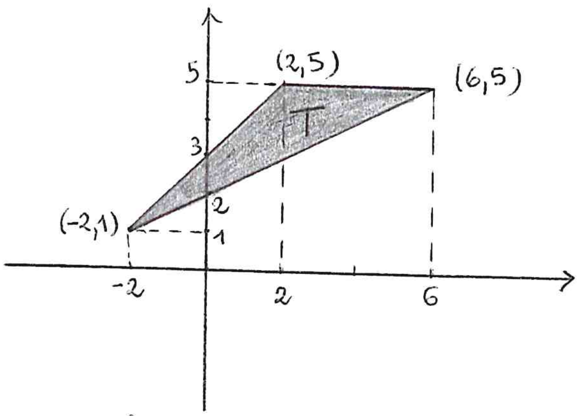
$z_0 = f(x_0, y_0) = f(1,-4) = -6 + 8 = 2$ Piano tang. $z = 2 - \dfrac{1}{8}(x - 1) + \dfrac{1}{2}(y + 4)$

$\boxed{z = -\dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{33}{8}}$ $\qquad 2 + \dfrac{1}{8} + 2 = 4 + \dfrac{1}{8} = \dfrac{33}{8}$

v) $\vec{v}_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_\theta}(1,-4) = \nabla f(1,-4)\cdot \vec{v}_\theta = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{16}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \boxed{-\frac{5}{16}\sqrt{2}}$$

d) i)



retta per (2,5), (6,5) : $\boxed{y=5}$

retta per (-2,1), (2,5) :

$m = \frac{4}{4} = 1 \quad y = 1 + (x+2) \quad \boxed{y = x+3}$

retta per (-2,1), (6,5) :

$m = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad y = 1 + \frac{1}{2}(x+2) \quad \boxed{y = \frac{1}{2}x + 2}$

ii) $E_{1,x} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 2,\ \frac{1}{2}x + 2 \le y \le x+3 \right\}$

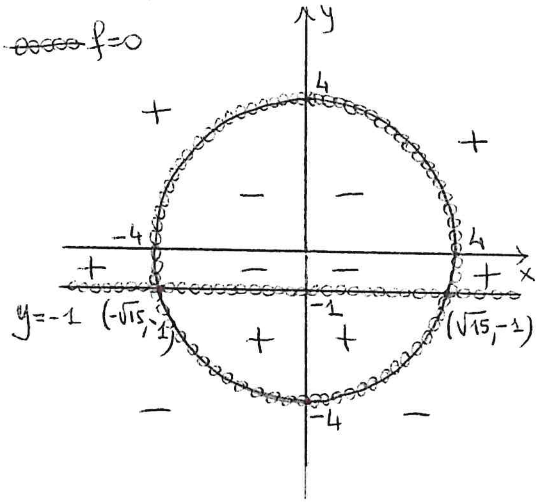
$E_{2,x} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 6,\ \frac{1}{2}x + 2 \le y \le 5 \right\}$

$E_y = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 5,\ y-3 \le x \le 2y-4 \right\}$

$y = x+3 \to x = y-3 \qquad y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \frac{1}{2}x = y-2$

$x = 2y-4$

f) i) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)



ii) $f(x,y) = 0 \iff x^2+y^2 = 16$ o $y = -1$

circonf $C(0,0)$, $R=4$ retta orizzontale

$f(x,y) > 0 \iff \begin{cases} x^2+y^2 > 16 \\ y > -1 \end{cases}$ o $\begin{cases} x^2+y^2 < 16 \\ y < -1 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{fuori dalla crf} \\ \text{sopra la retta} \end{cases}$ o $\begin{cases} \text{dentro la crf} \\ \text{sotto la retta} \end{cases}$

iii) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{2}{5}x(y+1), \frac{2}{5}y(y+1) + \frac{1}{5}(x^2+y^2-16) \right) =$

$= \left(\frac{2}{5}x(y+1), \frac{1}{5}(3y^2 + x^2 + 2y - 16) \right)$

PTI STAZIONARI :

$\begin{cases} \frac{2}{5}x(y+1) = 0 \\ \frac{1}{5}(3y^2+x^2+2y-16) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \text{ o } y = -1 \\ \dots \end{cases}$

Se $x=0$ la 2^a eq.^{ne} diventa: $3y^2+2y-16=0$

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{3}=\frac{-1\pm7}{3}= \begin{cases} y_1=-\frac{8}{3} \\ y_2=2\end{cases}$$

$$\boxed{P_1=\left(0,-\frac{8}{3}\right) \quad P_2=(2,0)}$$

Se $y=-1$ la 2^a eq.^{ne} diventa: $3+x^2-2-16=0$ $\quad x^2=15$

$x=\pm\sqrt{15}$ $\quad \boxed{P_3=(-\sqrt{15},-1) \quad P_4=(\sqrt{15},-1).}$

4 PUNTI STAZIONARI

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}(y+1) & \frac{2}{5}x \\ \frac{2}{5}x & \frac{1}{5}(6y+2)\end{pmatrix}$$

$$Hf\left(0,-\frac{8}{3}\right)=\begin{pmatrix} -2/3 & 0 \\ 0 & -\frac{14}{5}\end{pmatrix} \quad \det Hf\left(0,-\frac{8}{3}\right)=\frac{28}{15}>0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1)<0$$

P_1 è PUNTO di MASSIMO LOCALE

$$Hf(0,2)=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{14}{5}\end{pmatrix} \quad \det Hf(0,2)=\frac{84}{25}>0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2)>0$$

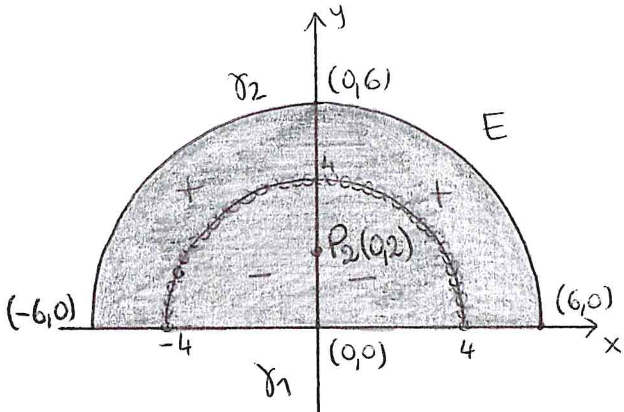
P_2 è PUNTO di MINIMO LOCALE

$$Hf(\pm\sqrt{15},-1)=\begin{pmatrix} 0 & \pm\frac{2}{5}\sqrt{15} \\ \pm\frac{2}{5}\sqrt{15} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix} \quad \det Hf(P_3,P_4)=-\frac{4}{\cancel{25}_{5}}\cdot\cancel{15}^{3}=-\frac{12}{5}<0$$

P_3, P_4 sono PUNTI di SELLA

ES.1) $\overset{1^\circ \text{passo}}{\vee}$ E è il mezzo CERCHIO (interno + bordo) di $C(0,0)$ e $R=6$

contenuto nel 1° e 2° quadrante ($y\geq 0$).



E è CHIUSO perchè contiene tutti i punti del suo bordo, costituito dai punti della semicirconf di $R=6$ con $y\geq 0$ e dai punti dell'asse x con $x\in[-6,6]$.

E è LIMITATO perchè $E\subset B_7(0,0)$.

f è continua su $\mathbb{R}^2$ perchè prodotto di una costante per 2 polinomi (uno di 2° grado in x e y e l'altro di 1° grado in y). In particolare f è continua su E.

Allora per il Teorema di Weierstrass f AMMETTE MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI su E.

<u>2° passo</u> Abbiamo il punto $(0,2)$ di MINIMO LOCALE interno ad E in cui $f(0,2) = \frac{1}{5}(4-16)(2+1) = -\frac{12}{5} \cdot 3 = -\frac{36}{5} = -7,2$.

Il punto di massimo locale $(0, -\frac{8}{3}) \notin E$.

<u>3° passo</u>: studio del BORDO di E

$$\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [-6,6] \quad g_1(t) = f(t,0) = \frac{1}{5}(t^2-16)\cdot 1 = \frac{1}{5}t^2 - \frac{16}{5}$$

$$g_1'(t) = \frac{2}{5}t \qquad g_1'(t) = 0 \iff t = 0$$

TEMPI $\quad t=-6 \quad t=0 \quad t=6$

PUNTI $\quad (-6,0) \quad (0,0) \quad (6,0)$

VALORI $\quad f(-6,0) = f(6,0) = \frac{1}{5}(36-16) = \frac{20}{5} = 4$

$\quad f(0,0) = -\frac{16}{5}$

$$\gamma_2 \begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 6\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0,\pi] \quad \text{(verso antiorario)} \qquad g_2(t) = f(6\cos t, 6\,\mathrm{sen}\,t) =$$

$$= \frac{1}{5}(\underbrace{36\cos^2 t + 36\,\mathrm{sen}^2 t}_{36(\underbrace{\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t}_{=1})} - 16)(6\,\mathrm{sen}\,t + 1) =$$

$$= \frac{1}{5}(36-16)(6\,\mathrm{sen}\,t+1) =$$

$$= 4(6\,\mathrm{sen}\,t + 1) = 24\,\mathrm{sen}\,t + 4.$$

$$g_2'(t) = 24\cos t \qquad g_2'(t) = 0 \iff \cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} \text{ o } t = \frac{3}{2}\pi$$

NON ACC. $\notin [0,\pi]$

TEMPI $\quad t=0 \quad t=\frac{\pi}{2} \quad t=\pi$

PUNTI $\quad (6,0) \quad (0,6) \quad (-6,0)$

VALORI $\quad f(\pm 6, 0) = 4 \quad f(0,6) = \frac{1}{5}(36-16)(6+1) = 4 \cdot 7 = 28$

<u>4° passo</u>: conclusione

In P_2 (MIN LOC INTERNO) $f(P_2) = -\frac{36}{5}$, sul ∂E f è compresa tra $-\frac{16}{5}$ e 28, allora

$$\boxed{\min_E f(x,y) = -\frac{36}{5} = f(0,2)} \qquad \boxed{\max_E f(x,y) = 28 = f(0,6)}$$

ES. 2) a) dom $g = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

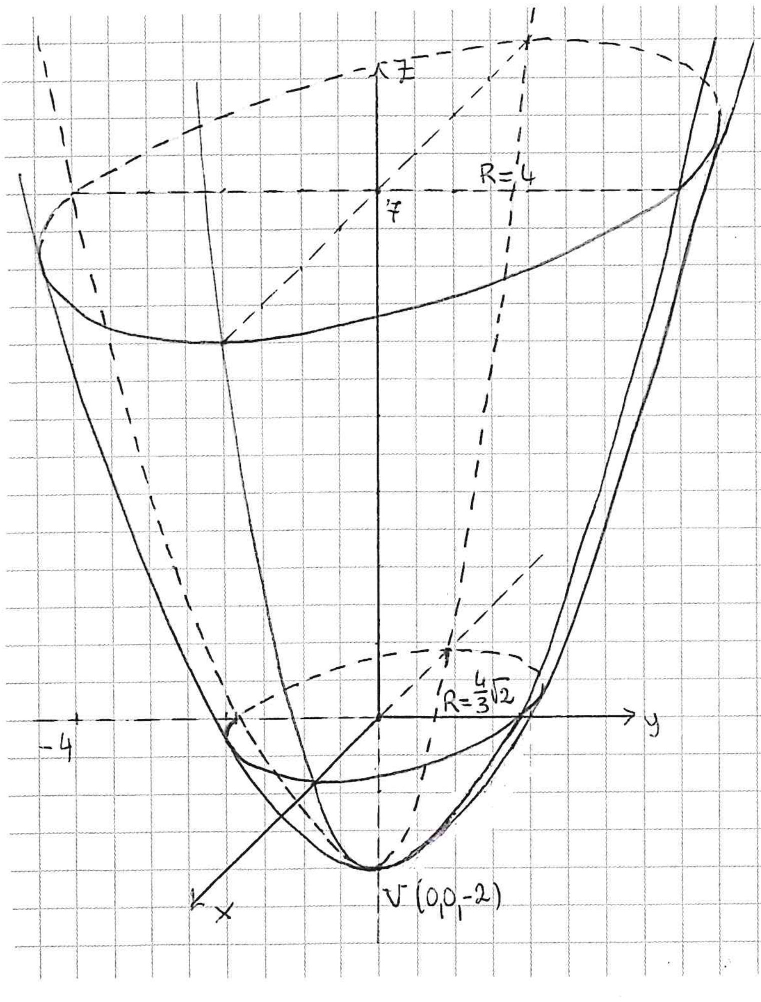
b) eq.^{ne} del grafico $z = -2 + \frac{9}{16}(x^2+y^2)$ si tratta del PARABOLOIDE CIRCOLARE, di VERTICE $V(0,0,-2)$, apertura $a = \frac{9}{16}$ ($a<1$ quindi più largo di $z = x^2+y^2$), rivolto verso l'alto, $\cap\ z=0$ se $\frac{9}{16}(x^2+y^2) = 2$

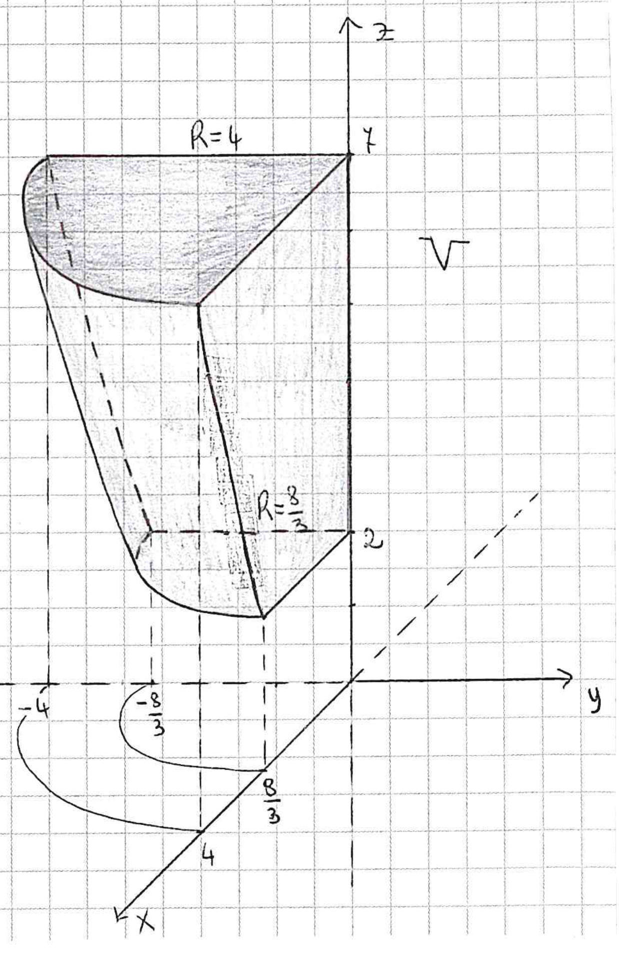
$x^2+y^2 = \frac{32}{9}$ circonf $C(0,0)$ e $R = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \simeq 1{,}9$.

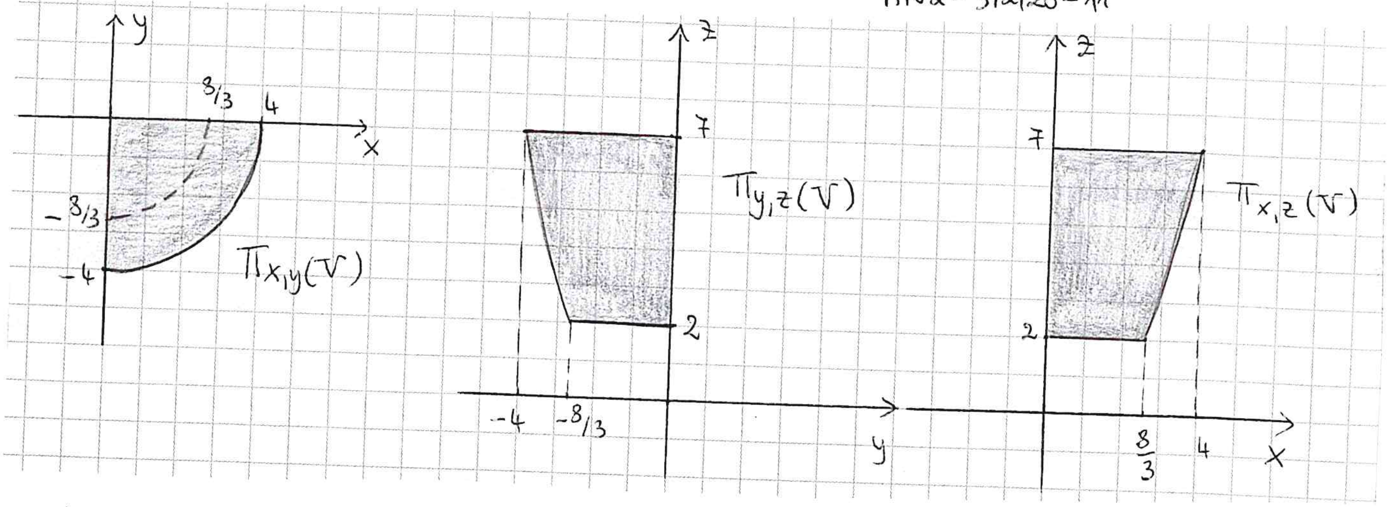
c) V è costituito dai punti aventi $z \geq$ paraboloide, cioè al di sopra del paraboloide, con la condizione $2 \leq z \leq 7$. Se $z = 2$ allora $2 = -2 + \frac{9}{16}(x^2+y^2)$ $\quad \frac{9}{16}(x^2+y^2) = 4$ $\quad (x^2+y^2) = \frac{64}{9}$ $\quad R = \frac{8}{3}$,

mentre se $z = 7$ allora $\frac{9}{16}(x^2+y^2) = 9$ $\quad x^2+y^2 = 16$ $\quad R = 4$.

Con le condizioni $x \geq 0$, $y \leq 0$ si tratta di un QUARTO di V di tronco di paraboloide, quello al di sopra del 4° quadrante per $2 \leq z \leq 7$.







$$\text{Volume di } V = \int_{\substack{x^2+y^2\le \frac{64}{9}\\ x\ge 0,\, y\le 0}} (7-2)\,dx\,dy + \int_{\substack{\frac{64}{9}\le x^2+y^2\le 16\\ x\ge 0,\, y\le 0}} \left[7-\left(-2+\frac{9}{16}(x^2+y^2)\right)\right]dx\,dy =$$

$$\underset{\text{coordinate polari}}{=} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(\int_0^{8/3} 5\rho\,d\rho\right)d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(\int_{8/3}^{4}\left(9\rho-\frac{9}{16}\rho^3\right)d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left[5\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{8/3}d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left[9\frac{\rho^2}{2}-\frac{9}{64}\rho^4\right]_{8/3}^{4}d\theta =$$

$$= \left(\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\frac{\overset{32}{\cancel{64}}}{9}\right)[\theta]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} + \left[9\cdot 8-\frac{9}{\cancel{4^3}}\cdot\cancel{4^4}-\left(\frac{\cancel{9}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\overset{32}{\cancel{64}}}{\cancel{9}}-\frac{\cancel{9}}{\cancel{8^2}}\cdot\frac{8^{\cancel{4}\,2}}{3^{\cancel{4}\,2}}\right)\right][\theta]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{5\cdot\overset{16}{\cancel{32}}}{9}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} + \left[72-36-32+\frac{64}{9}\right]\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{80}{9}\pi + \left[4+\frac{64}{9}\right]\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{80}{9}\pi + \frac{\overset{50}{\cancel{100}}}{9}\frac{\pi}{\cancel{2}} = \left(\frac{80}{9}+\frac{50}{9}\right)\pi = \boxed{\frac{130}{9}\pi}$$

ES.3) Equaz. omogenea associata $\frac{1}{2}y''(x)+y'(x)+5y(x)=0$

Equaz. caratteristica $\frac{1}{2}t^2+t+5=0$ $t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-10}}{1}=-1\pm\sqrt{-9}$ $\Delta<0$

$t_{1,2}=-1\pm 3i$ $\alpha=-1$ $\beta=3$

SOL.^{ni} FONDAM. $y_1(x)=e^{-x}\,\text{sen}(3x)$ $y_2(x)=e^{-x}\cos(3x)$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} OMOG $y(x)=c_1e^{-x}\text{sen}(3x)+c_2e^{-x}\cos(3x)$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x)=A\,\text{sen}(2x)+B\cos(2x)$ perchè il 2° m dell'eq.^{ne} è una combinazione lineare di seno e coseno di $2x$; non si deve moltiplicare per x perchè le due SOL.^{ni} FONDAM. dell'eq.^{ne} omogenea (y_1 e y_2) sono diverse da sen(2x) e cos(2x).

$\bar{y}'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\,\text{sen}(2x) \qquad \bar{y}''(x) = -4A\,\text{sen}(2x) - 4B\cos(2x)$

Sostituiamo nell'eq.^{ne}

$$\frac{1}{2}(-4A\,\text{sen}(2x) - 4B\cos(2x)) + 2A\cos(2x) - 2B\,\text{sen}(2x) + 5(A\,\text{sen}(2x) + B\cos(2x)) =$$

$$= -8\,\text{sen}(2x) + 12\cos(2x) \quad \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$$

$$(-2A - 2B + 5A + 8)\,\text{sen}(2x) + (-2B + 2A + 5B - 12)\cos(2x) = 0 \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R}}$$

Poichè una combinazione lineare di seno e coseno <u>dello stesso argomento</u> è $= 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \iff$ entrambi i coeff. sono nulli, otteniamo il SISTEMA

$$\begin{cases} 3A - 2B + 8 = 0 \\ 3B + 2A - 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2B = 3A + 8 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} B = \frac{3}{2}A + 4 \\ 3(\frac{3}{2}A + 4) + 2A - 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ \frac{9}{2}A + 2A + \cancel{12} - \cancel{12} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ \frac{13}{2}A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 4 \\ A = 0 \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = 4\cos(2x)$$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} sono $y(x) = c_1 e^{-x}\text{sen}(3x) + c_2 e^{-x}\cos(3x) + 4\cos(2x)$

Pb. di Cauchy: $y'(x) = -c_1 e^{-x}\text{sen}(3x) + 3c_1 e^{-x}\cos(3x) - c_2 e^{-x}\cos(3x)$
$\qquad - 3c_2 e^{-x}\text{sen}(3x) - 8\,\text{sen}(2x)$

$$\begin{cases} y(0) = c_2 + 4 = 4 \\ y'(0) = 3c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 + 4 = 4 \\ 3c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = 0 \\ 3c_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1/3 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

SOL.^{ne} $\boxed{y(x) = \frac{1}{3}e^{-x}\text{sen}(3x) + 4\cos(2x)}$