COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________________		
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	1 2 3 4	
CORSO	AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL		

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2018-2019 — PARMA, 10 SETTEMBRE 2019

AN2-100919-1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare** **la risposta** .

$\sqrt{2} \simeq 1{,}4$ $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$ $\frac{15}{4} = 3{,}75$ $\frac{27}{4} = 6{,}75$ $\frac{25}{4} = 6{,}25$

0) **(30 PUNTI) PARTE PRELIMINARE**

a) Sia E l'insieme definito da

A pag. 4

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 11 - x^2 - y^2 + 4x + 2y \le 0 \, , \, 1 \le y \le \frac{3}{2}x + 2 \, , \, 2 \le x \le 6\}$$

i) Disegnate con cura l'insieme E sul foglio a quadretti.

ii) Per ogni tratto del bordo di E scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre tale tratto, specificando il verso di percorrenza.

iii) Determinate la lunghezza di uno dei tratti a vostra scelta del bordo di E, utilizzando il Teorema per il calcolo della lunghezza di una curva.

AN2-10/9/19-2-

b) Considerate la funzione $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 4$.

A pag 4-5-6

i) Determinate il dominio di f , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano in modo che risulti perfettamente chiaro quali punti vi appartengono.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f , poi spiegate di quale tipo di superficie si tratta (senza dimenticare l'intersezione con il piano (x, y) e per gli eventuali coni circolari precisate se l'angolo di apertura risulta minore o maggiore di 45 gradi e come si calcola); infine disegnate con cura il grafico di f .

iii) Determinate l'insieme di livello E_k cui appartiene il punto $P_0 = (2, 2)$; poi disegnate sia l'insieme di livello trovato, sia il punto P_0 .

iv) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre l'insieme di livello trovato al punto iii) ed utilizzatele per determinare i vettori normali e la retta normale in P_0 . Disegnate i vettori normali trovati.

v) Determinate l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 .

vi) Determinate la retta per P_0 perpendicolare al grafico di f .

vii) Determinate la derivata direzionale di f nel punto $P_1 = (2, -2\sqrt{3})$ nella direzione individuata dall'angolo $\theta = \frac{5}{3}\pi$.

c) Sia E l'insieme definito da $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2 - \frac{1}{2}x^2, x \ge 0\}$

A pag. 6

i) Disegnate con cura l'insieme E sul foglio a quadretti.
ii) Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme E come normale rispetto a x ; ripetete come normale rispetto a y .
iii) Determinate la prima coordinata del baricentro dell'insieme E .

d) Si consideri l'equazione differenziale $4y''(x) + 25y(x) = 5 \operatorname{sen}(\frac{5}{2}x)$.

Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono ...

Calcoli: eq.ne omog. associata $4y''(x)+25y(x)=0$ eq.ne caratt. $4t^2+25=0$
$t^2=-\frac{25}{4}$ $t=\pm\frac{5}{2}i$ sol.ni FONDAM. $y_1(x)=\operatorname{sen}(\frac{5}{2}x)$ $y_2(x)=\cos(\frac{5}{2}x)$

La soluzione particolare va cercata nella forma ... $\bar{y}(x) = x\,(A\operatorname{sen}(\frac{5}{2}x)+B\cos(\frac{5}{2}x))$

perchè ... il 2° membro dell'eq.ne è una combinazione lineare di $\operatorname{sen}(\frac{5}{2}x)$ e $\cos(\frac{5}{2}x)$ e si deve moltiplicare per x perchè le due sol.ni FONDAM. dell'eq.ne omogenea sono proprio $\operatorname{sen}(\frac{5}{2}x)$ e $\cos(5/2\,x)$.

(Non è richiesto di determinare la soluzione particolare).

e) (Sul foglio a quadretti) Sia f la funzione definita da $f(x,y) = \frac{1}{4}(x-3)(x^2+y^2-9)$ (è la stessa funzione considerata nell'esercizio n.1).

A pag. 7-8

i) Determinate il dominio di f .
ii) Determinate i punti in cui f vale 0 e il segno di f negli altri punti (illustrate i risultati con un disegno).
iii) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

1) (Sul foglio a quadretti, 7 PUNTI) Considerate la funzione dell'esercizio 0e):

A pag. 8-9

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x - 3)(x^2 + y^2 - 9)$$

Dopo averne giustificato l'esistenza, (utilizzando anche quanto ottenuto nell'esercizio n.0e) determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4 , \ x \leq 0\} .$$

---

2) (Sul foglio a quadretti, 10 PUNTI) Considerate la funzione $g(x,y) = 2 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

A pag 9-10

a) Determinate il dominio di g, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g, poi spiegate di quale tipo di superficie si tratta (senza dimenticare l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari precisate se l'angolo di apertura risulta minore o maggiore di 45 gradi e come si calcola); infine disegnate con cura il grafico di g.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2 - \sqrt{16 - x^2 - y^2} \leq z \leq 5 , \ x \leq 0 , \ y \leq 0\} .$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy} , Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti, 5 PUNTI) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

A pag 11

$$\begin{cases} \frac{8}{9} y''(x) = \frac{2}{3} y'(x) - \frac{3}{2} x^2 + \frac{16}{3} \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 3 . \end{cases}$$

Risposta: ... $y(x) = -6 + 4e^{3/4 x} + \frac{3}{4}x^3 + 3x^2$

AN2 - 10/9/19 - 4 - <u>Soluzione</u>

ESO) a) i) $y=1$ retta orizzontale : $y \geq 1$ SOPRA tale retta (retta compresa)

$y=\frac{3}{2}x+2$ retta di coeff angolare $m=\frac{3}{2}$ per $(0,2)$ e $(-\frac{4}{3},0)$

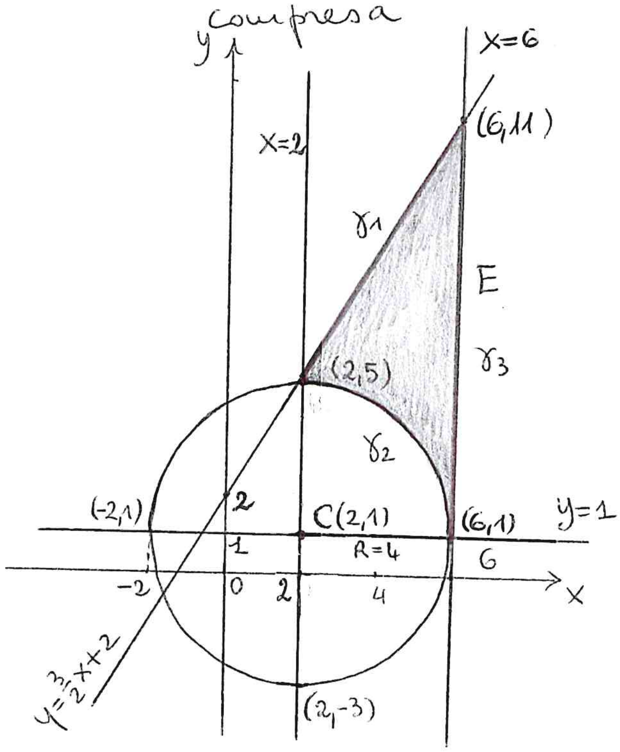
$y \leq \frac{3}{2}x+2$ SOTTO LA RETTA (retta compresa)

$2 \leq x \leq 6$ ascissa compresa tra $x=2$ e $x=6$ (rette verticali $x=2$ e $x=6$ compresa)

$11-x^2-y^2+4x+2y \leq 0 \qquad x^2-4x+y^2-2y-11 \geq 0$

$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1-11 \geq 0 \qquad (x-2)^2+(y-1)^2 \geq 16$

<u>ESTERNO</u> alla circonferenza di $C(2,1)$ e $R=4$, circonferenza compresa



$\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{3}{2}x+2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=\frac{3}{2}x+2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=11 \end{cases}$

ii) $\gamma_1 \begin{cases} x=t \\ y=\frac{3}{2}t+2 \end{cases}$ $t \in [2,6]$ verso delle x crescenti

$\gamma_2 \begin{cases} x=2+4\cos t \\ y=1+4\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ verso antiorario

$\gamma_3 \begin{cases} x=6 \\ y=t \end{cases}$ $t \in [1,11]$ verso delle y crescenti

iii) $L(\gamma_2)$ $\quad \gamma_2'(t)=(-4\,\text{sen}\,t, 4\cos t)$

$\|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{16\,\text{sen}^2 t+16\cos^2 t} = \sqrt{16} = 4$

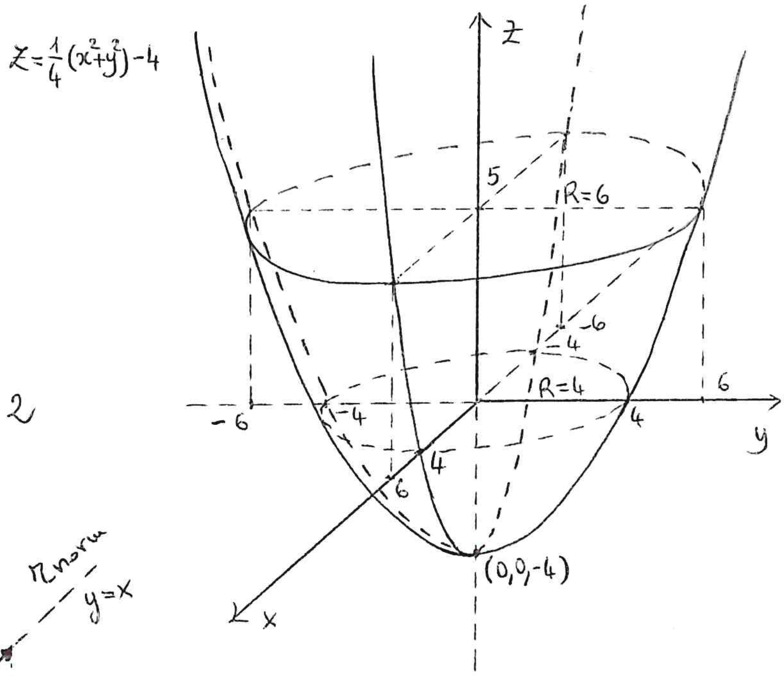
$16(\underbrace{\text{sen}^2 t+\cos^2 t}_{1})$

$L(\gamma_2) = \int_0^{\pi/2} \|\gamma_2'(t)\|\,dt = \int_0^{\pi/2} 4\,dt = \boxed{2\pi}$

ES. b) i) $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

ii) eq.^{ne} del grafico $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-4$: si tratta del PARABOLOIDE CIRCOLARE di $V(0,0,-4)$ verso l'alto, $a=\frac{1}{4}$ (più largo di $z=x^2+y^2$)

$\cap\ z=0$ su $x^2+y^2=16$ $R=4$ $\qquad$ (se $R=6 \Rightarrow z=5$)



iii) $P_0 = (2,2) \in E_k$ per $k = f(2,2) =$

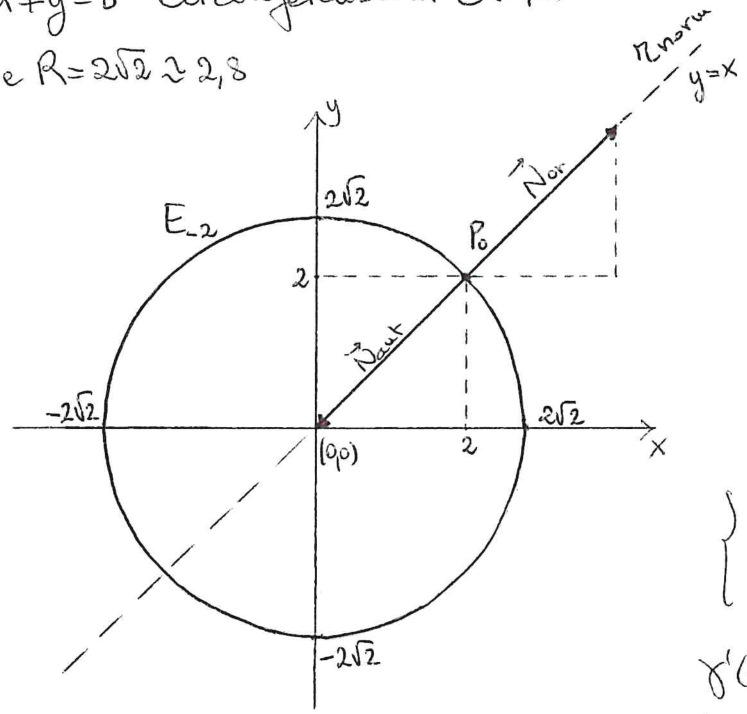
$= \frac{1}{4}(4+4) - 4 = 2 - 4 = -2$

$P_0 \in E_{-2}$

$E_{-2}: \quad -2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2) - 4 \quad \frac{1}{4}(x^2+y^2) = 2$

$x^2+y^2 = 8$ circonferenza di $C(0,0)$

e $R = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}8$



iv) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

(1 giro, verso antiorario)

$P_0 = (2,2)$ corrisponde a $t_0 = \frac{\pi}{4}$:

$\begin{cases} 2 = 2\sqrt{2}\cos t \\ 2 = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad \begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\gamma'(t) = (-2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t, 2\sqrt{2}\cos t)$

$\vec{v}_{P_0} = -2\vec{i} + 2\vec{j} \quad \vec{N}_{or} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{N}_{ant} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

$m_{tan} = -1 \quad m_{norm} = 1$

$r_{norm}: \quad y = 2 + (x-2) \quad y = x$

v) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) \quad \nabla f(2,2) = (1,1) \quad z_0 = f(2,2) = -2$

eq.^{ne} del piano tangente $z = -2 + (x-2) + (y-2)$ $\boxed{z = x + y - 6}$

vi) la retta per $P_0 \perp$ grafico di f ha come vettore direttore il VETTORE NORMALE al PIANO TANGENTE. Essendo $x+y-z-6=0$

$\vec{N} = (1,1,-1)$ e $\quad r_\perp \begin{cases} x = x_{P_0} + t \\ y = y_{P_0} + t \\ z = z_{P_0} - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ -

vii) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ $\nabla f(P_1) = (1, -\sqrt{3})$ $\vec{v}_\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

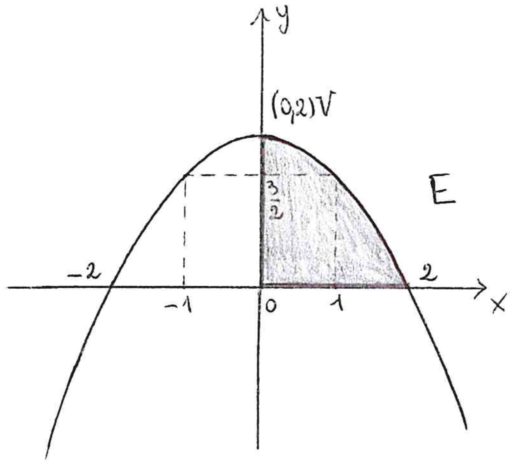
$\theta = \frac{5}{3}\pi$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_\theta}(P_1) = \nabla f(P_1) \cdot \vec{v}_\theta = (1, -\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$

c) i) $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ parabola di $V(0,2)$ verso il basso $\cap$ asse x $x = \pm 2$

$y \leq 2 - \frac{1}{2}x^2$ SOTTO LA PARABOLA

$y \geq 0, x \geq 0 \Rightarrow 1°$ quadrante



ii) $E_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x^2\right\}$

$E_y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-2y}\right\}$

$y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ $\frac{1}{2}x^2 = 2 - y$ $x^2 = 4 - 2y$

$x = \pm\sqrt{4-2y}$ $+$ se $x \geq 0$, $-$ se $x \leq 0$

iii) $B = (x_B, y_B) = \left(\frac{1}{\text{area}E}\int_E x\,dx\,dy, \frac{1}{\text{area}E}\int_E y\,dx\,dy\right)$

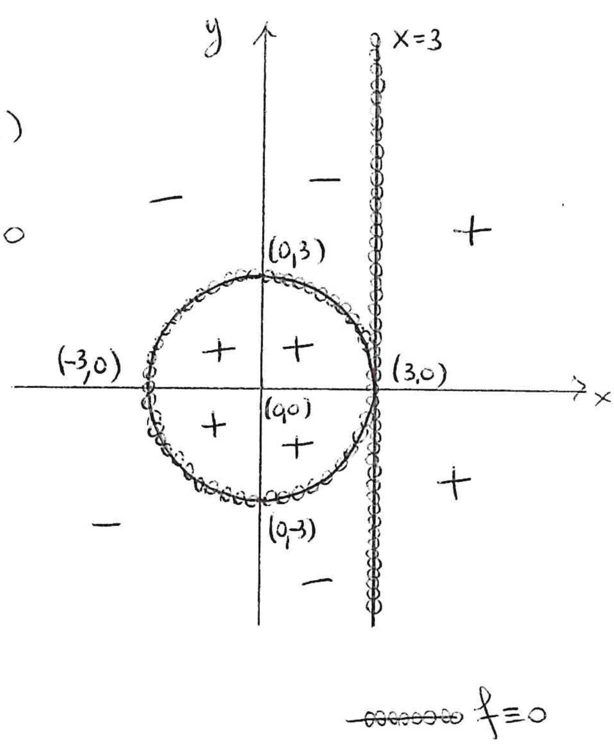
$x_B = \frac{1}{\text{area}E}\int_E x\,dx\,dy$ $\quad \underset{\text{usando } E_x}{\text{area}E =} \int_0^2\left(\int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} dy\right)dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx =$

$= \left[2x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{6} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

$\int_E x\,dx\,dy \underset{\text{usando } E_x}{=} \int_0^2\left(x\int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} dy\right)dx = \int_0^2 \underbrace{x\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)}_{2x - \frac{1}{2}x^3}dx = \left[x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^2 =$

$= 4 - 2 = 2 \Rightarrow \boxed{x_B = \frac{1}{\frac{8}{3}} \cdot 2 = \frac{3}{4}}$

AN2 – 7 – 10/9/19



es. e) i) $dom f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

ii) ZERI $f(x,y) = 0 \iff x-3=0$ o $x^2+y^2-9=0$

$\iff x=3$ o $x^2+y^2=9$

retta verticale — circonf $C(0,0)$ $R=3$

SEGNO

$$f(x,y)>0 \iff \begin{cases} x-3>0 \\ x^2+y^2-9>0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-3<0 \\ x^2+y^2<9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>3 \\ x^2+y^2>9 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x<3 \\ x^2+y^2<9 \end{cases}$$

fuori dalla circonf — dentro la circonf

iii) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{4}(x^2+y^2-9) + \frac{1}{4}(x-3)\cdot 2x,\ \frac{1}{4}(x-3)\cdot 2y \right)$

P.ti STAZIONARI:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(x^2+y^2-9)+\frac{1}{4}(x-3)\cdot 2x = 0 \\ \frac{1}{4}(x-3)\cdot 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ x=3 \text{ o } y=0 \end{cases}$$

Se $x=3$ 1ª eq.ne $\frac{1}{4}y^2=0 \to y=0$ $\quad P_0=(3,0)$

Se $y=0$ 1ª eq.ne $\frac{1}{4}(x^2-9)+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x=0$ $\quad x^2-9+2x^2-6x=0$

$3x^2-6x-9=0$ $\quad x^2-2x-3=0$ $\quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{1}=1\pm2$ $\nearrow x_1=-1$, $\searrow x_2=3$

$P_1=(-1,0)$ $\quad P_2=P_0$.

2 PUNTI STAZIONARI $P_0=(3,0)$ $\quad P_1=(-1,0)$.

Dallo studio di zeri e segno si vede subito che P_0 non è né massimo né minimo locale né una sella (manca la retta per (3,0) lungo la quale f abbia un massimo locale), invece P_1 dovrebbe essere un punto di MASSIMO LOCALE.

AN2 - 10/9/19 - 8

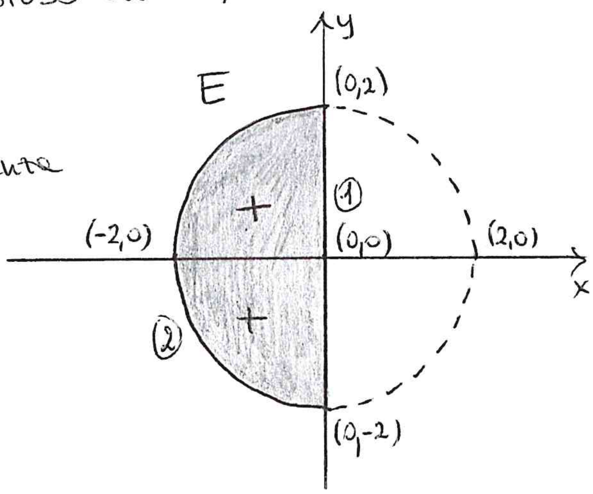
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + x - \frac{3}{2} & \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}(x-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(x-1) & \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}(x-3) \end{pmatrix}$$

$Hf(3,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(3,0) = 0$ NON SI PUÒ DIRE NULLA con il determinante, ma lo abbiamo già studiato con zeri e segno.

$Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-1,0) = 6 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) < 0$ come pure $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0) < 0$,

$\Rightarrow (-1,0)$ è PUNTO di MASSIMO LOCALE.

es. 1). 1° passo E è la metà del CERCHIO CHIUSO di $C(0,0)$ e $R=2$, con $x \leq 0$.



E è CHIUSO perchè contiene tutti i punti del suo bordo costituito dalla metà circonferenza (per $x \leq 0$) e dall'asse y (per $y \in [-2,2]$).

E è LIMITATO perchè $E \subset B_3(0,0)$, anzi essendo una parte di cerchio $E \subset B_R(0,0)$ $\forall R > 2$.

f è CONTINUA su $\mathbb{R}^2$ in quanto prodotto di due polinomi (uno di 1° grado in x ed uno di 2° grado in x,y) e pertanto è continua su E. Allora sono verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass che ci garantisce l'esistenza del MASSIMO e del MINIMO ASSOLUTI di f su E.

2° passo $(-1,0)$ è punto di massimo locale interno ad E con

$$f(-1,0) = \frac{1}{4}(-4)(1-9) = 8.$$

3° passo studio del bordo di E

① $\gamma_1 \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ $t \in [-2,2]$ $g_1(t) = f(0,t) = -\frac{3}{4}(t^2-9) = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{27}{4}$

$g_1'(t) = -\frac{3}{2}t \quad g_1'(t)=0 \iff -\frac{3}{2}t = 0 \iff t=0$

TEMPI $\quad t=-2 \quad t=0 \quad t=2$

PUNTI $\quad (0,-2) \quad (0,0) \quad (0,2)$

VALORI $\quad f(0,-2) = \frac{1}{4}(-3)(4-9) = \frac{15}{4} \quad f(0,0) = \frac{27}{4} \quad f(0,2) = \frac{15}{4}$

② $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \quad g_2(t) = f(2\cos t, 2\,\text{sen}\, t) =$

$$= \frac{1}{4}(2\cos t - 3)(\underbrace{4\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t}_{4} - 9) =$$

$$= -\frac{5}{4}(2\cos t - 3) = -\frac{5}{2}\cos t + \frac{15}{4}$$

$g_2'(t) = \frac{5}{2}\,\text{sen}\, t \quad g_2'(t) = 0 \iff \frac{5}{2}\,\text{sen}\, t = 0 \iff \underbrace{t=0}_{\substack{\text{non accettabile} \\ t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]}}$ o $t = \pi$

TEMPI $\quad t = \frac{\pi}{2} \quad t = \pi \quad t = \frac{3}{2}\pi$

PUNTI $\quad (0,2) \quad (-2,0) \quad (0,-2)$

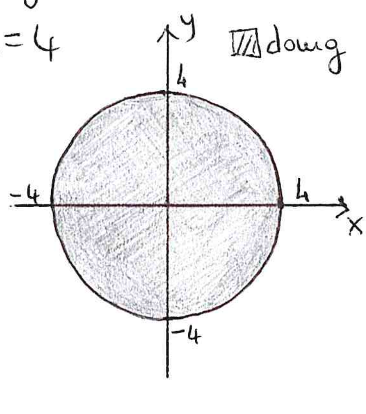
VALORI $\quad f(0,2) = f(0,-2) = \frac{15}{4} \quad f(-2,0) = \frac{1}{4}(-5)(-5) = \frac{25}{4}$

4° passo: conclusione: nel punto di max locale interno $f(-1,0) = 8$, sul bordo f è compresa tra $\frac{15}{4}$ e $\frac{27}{4}$ $\Rightarrow$

$$\max_E f(x,y) = 8 = f(-1,0) \qquad \min_E f(x,y) = \frac{15}{4} = f(0,\pm 2).$$

OSS. E è tutto contenuto in una regione con segno ⊕ quindi sia il minimo sia il massimo sono POSITIVI.

ES.2) a) $\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\} =$
$=$ CERCHIO CHIUSO (interno + bordo) di $C(0,0)$ $R=4$

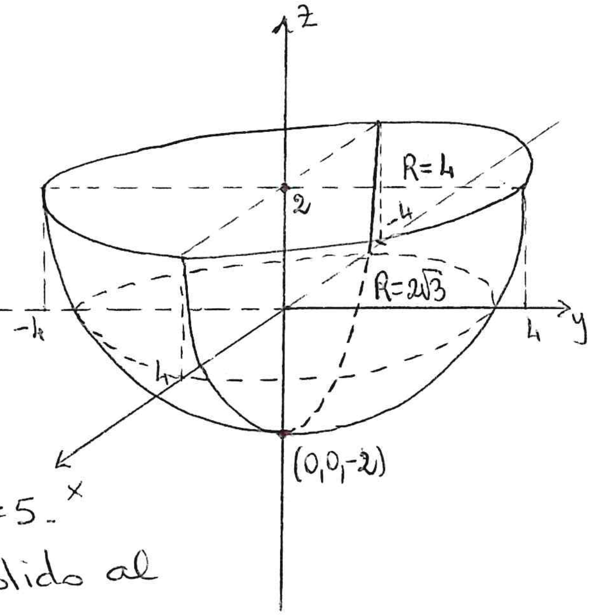


b) eq.ne del grafico $z = 2 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ si tratta della METÀ INFERIORE della SUPERFICIE SFERICA di $C(0,0,2)$ e $R=4$, $z_{min} = 2 - 4 = -2$

AN2 - 10/9/19 - 10

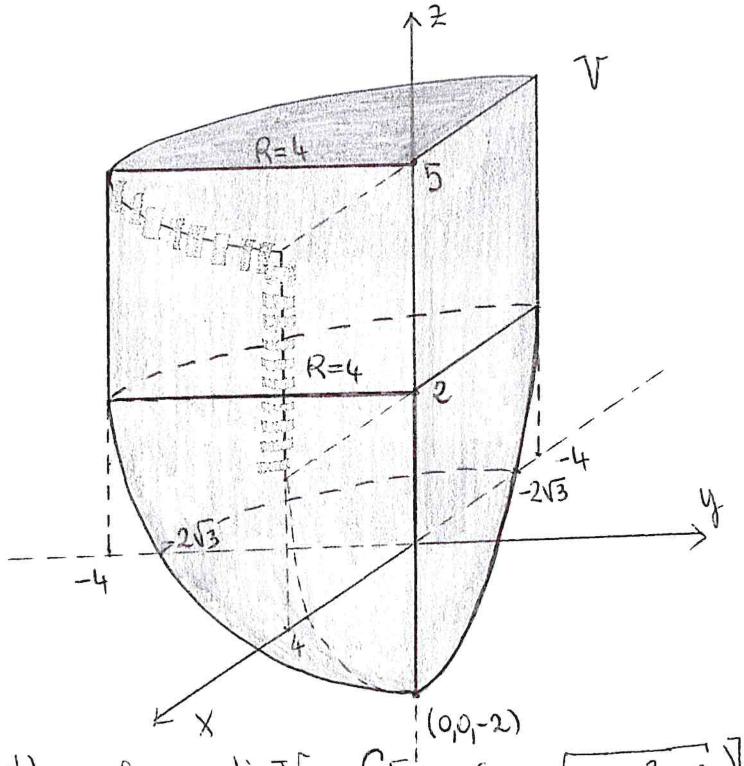
$\cap\, z=0$ se $\sqrt{16-x^2-y^2}=2>0$ elevo $(\cdot)^2$

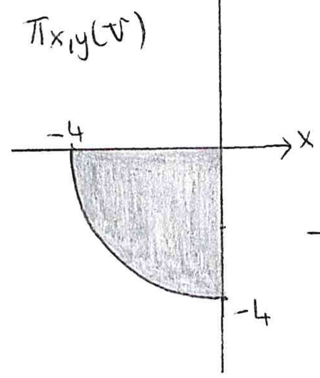
$16-x^2-y^2=4 \quad x^2+y^2=12 \quad R=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\approx 3{,}4$

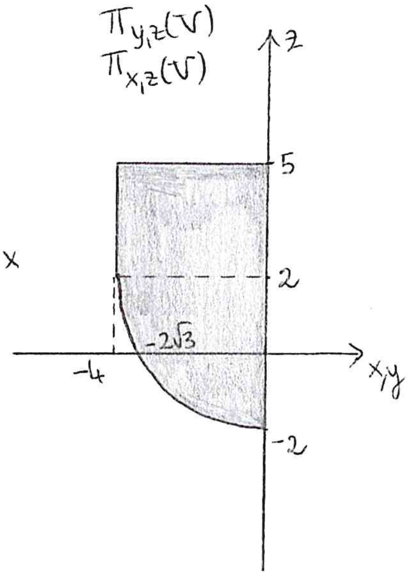


c) Si devono considerare tutti i punti $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ al di sopra della sup. sferica e al di sotto del piano orizzontale $z=5$.

Le condizioni $x\le 0, y\le 0$ riducono il solido al quarto relativo al 3° quadrante







d) volume di $V = \int_{\Pi_{x,y}(V)} \left[5-\left(2-\sqrt{16-x^2-y^2}\right)\right]dx\,dy = \int_{\substack{x^2+y^2\le 16 \\ x\le 0\ y\le 0}} \left(3+\sqrt{16-x^2-y^2}\right)dx\,dy =$

$\overset{\text{Coord. polari}}{=} \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\int_0^4 \left(3\rho+\rho\sqrt{16-\rho^2}\right)d\rho\right)d\theta =$

$= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left[3\frac{\rho^2}{2} \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{(16-\rho^2)^{3/2}}{3/2}}_{-\frac{1}{3}(16-\rho^2)^{3/2}}\right]_0^4 d\theta = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\underbrace{\left[3\cdot 8-\frac{1}{3}\cdot 0-\left(0-\frac{1}{3}16^{3/2}\right)\right]}_{24+\frac{1}{3}16^{3/2}}d\theta = \quad 16^{3/2}=(\sqrt{16})^3=4^3=64$

$= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(24+\frac{64}{3}\right)d\theta = \frac{72+64}{3}\left[\theta\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{\cancel{136}}{3}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{68}{3}\pi}$

es.3) eq.^{ne} omog. associata $\frac{8}{9}y''(x) - \frac{2}{3}y'(x) = 0$

eq.^{ne} caratt. $\frac{8}{9}t^2 - \frac{2}{3}t = 0 \quad \frac{2}{3}t\left(\frac{4}{3}t - 1\right) = 0 \quad t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{3}{4}$

SOL.^{ni} FONDAM. $y_1 = 1 \quad y_2 = e^{3/4 x}$

Sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea $y(x) = c_1 + c_2 e^{3/4 x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x) = x(Ax^2 + Bx + C)$ perchè il 2° m dell' eq.^{ne} ($f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{16}{3}$) è un polinomio di 2° grado e si deve moltiplicare per x perchè nell' eq.^{ne} non compare $y(x)$ ma compare $y'(x)$.

$\bar{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx \quad \bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B$

Sostituendo nell'eq.^{ne} si ottiene:

$$\frac{8}{9}(6Ax + 2B) - \frac{2}{3}(3Ax^2 + 2Bx + C) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{16}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{16}{3}Ax + \frac{16}{9}B - 2Ax^2 - \frac{4}{3}Bx - \frac{2}{3}C = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{16}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-2Ax^2 + \left(\frac{16}{3}A - \frac{4}{3}B\right)x + \frac{16}{9}B - \frac{2}{3}C = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{16}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poichè due polinomi dello stesso grado sono $= \forall x \in \mathbb{R}$ se e solo se hanno uguali tutti i coefficienti, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -2A = -\frac{3}{2} \\ \frac{16}{3}A - \frac{4}{3}B = 0 \\ \frac{16}{9}B - \frac{2}{3}C = \frac{16}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3/4 \\ 4 - \frac{4}{3}B = 0 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3/4 \\ B = 3 \\ \frac{16}{3} - \frac{2}{3}C = \frac{16}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3/4 \\ B = 3 \\ C = 0 \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = \frac{3}{4}x^3 + 3x^2$

Tutte le sol.^{ni} $y(x) = c_1 + c_2 e^{3/4 x} + \frac{3}{4}x^3 + 3x^2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$y'(x) = \frac{3}{4}c_2 e^{3/4 x} + 9/4\, x^2 + 6x$

Pb. di Cauchy $\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = -2 \\ y'(0) = \frac{3}{4}c_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -c_2 - 2 = -6 \\ c_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -6 \\ c_2 = 4 \end{cases}$

Sol.^{ne} $\boxed{y(x) = -6 + 4e^{3/4 x} + \frac{3}{4}x^3 + 3x^2}$