1^a SETTIMANA del CORSO

ANALISI MATEMATICA 2
Prof.ssa ALESSANDRA COSCIA
Ingegneria Gestionale

$\boxed{1}$ Presentazione del corso

Leggete con molta attenzione il file INFORMAZIONI SUL CORSO e, giusto per avere un'idea, il file PROGRAMMA del CORSO.

$\boxed{2}$ VETTORI in $\mathbb{R}^2$ ed in $\mathbb{R}^3$

- Ripassate i VETTORI (programma del corso di GEOMETRIA del 1° anno) utilizzando gli appunti posti nella sezione **CONOSCENZE PRELIMINARI**.

  Studiate le pagine da 105 a 111 e da 113 (Rappresentazione cartesiana dei vettori) a 120 (escluso punto 2) a pag. 115-16). Leggete pag. 124.
- Svolgete gli esercizi 1) 2) 3) 4) 5) 6) a pag. 125 e 10) 11) a pag. 126.

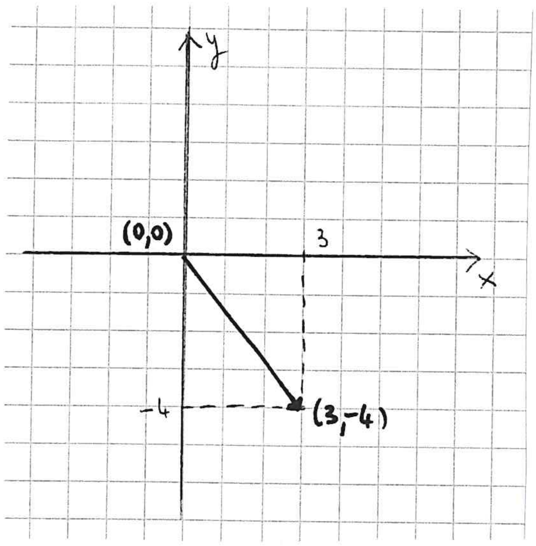
Dovete avere ben chiaro:

- che cos'è un VETTORE
- quali sono le componenti di un vettore
- che cos'è il MODULO di un vettore
- come si DISEGNA un vettore APPLICATO in (0,0)
- le OPERAZIONI sui vettori: SOMMA, DIFFERENZA, PRODOTTO per uno scalare
- che cos'è un VERSORE e come si determina il versore associato ad un vettore
- chi sono i VERSORI CANONICI della BASE di $\mathbb{R}^2$ $\vec{i}, \vec{j}$ e quelli della base di $\mathbb{R}^3$ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
- che cos'è e come si calcola il PRODOTTO SCALARE tra due vettori.

ESEMPIO

Consideriamo il VETTORE $\vec{v} = (3, -4)$: le due componenti del vettore sono $v_1 = 3$ e $v_2 = -4$ e il vettore si può anche scrivere utilizzando la base canonica come $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Se dobbiamo disegnare il vettore $\vec{v}$ con origine in $(0,0)$ dobbiamo disegnare un segmento che parte da $(0,0)$ ed ha la PUNTA nel punto $(3,-4)$. Quindi, partendo da $(0,0)$, ci spostiamo a destra di 3 e poi in basso di 4. In generale ci si sposta in ORIZZONTALE di v_1 e in VERTICALE di v_2.



L'origine del vettore è in $(0,0)$, mentre l'estremo del vettore, detto anche PUNTA, è in $(3,-4)$

Il modulo di $\vec{v}$ è

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} =$$
$$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

significa che il vettore è LUNGO 5.

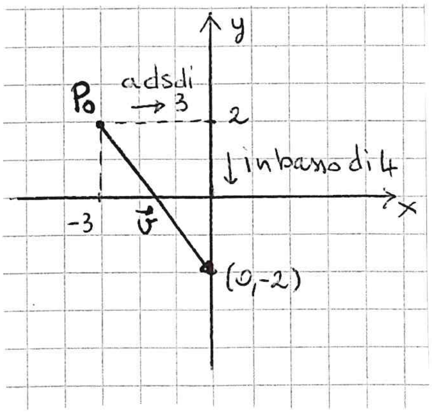
Il VERSORE associato al vettore $\vec{v}$ è dato da VERSORE $\vec{v} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} =$

$$= \frac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{5} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$: è un vettore di LUNGHEZZA o MODULO unitario avente gli stessi direzione e verso di $\vec{v}$.

Se il <u>vettore</u> $\vec{v}$ è considerato <u>APPLICATO</u> in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ (sono vettori applicati le FORZE, la VELOCITÀ, l'ACCELERAZIONE, il vettore tangente, il vettore NORMALE ecc.), allora è necessario <u>DISEGNARLO con l'ORIGINE in P_0.</u>

Ad esempio, se il vettore $\vec{v}$ è APPLICATO nel punto $P_0 = (-3,2)$ vuol dire che l'origine del vettore è in P_0, mentre la punta del vettore si ottiene partendo da P_0 e spostandosi a destra di 3 ed in basso di 4. Otteniamo quindi che la PUNTA $= P_0 + \vec{v} = (-3,2)+(3,-4)$
$= (-3+3, 2-4) = (0,-2)$.

DISEGNO



PRODOTTO SCALARE di 2 VETTORI

IMPORTANTE: come dice il NOME è uno $\boxed{\text{SCALARE}}$ (cioè un NUMERO REALE) e NON È un VETTORE.

Si utilizzerà il prodotto scalare per calcolare la DERIVATA DIREZIONALE di una FUNZIONE di più VARIABILI.

⊙ Se il prodotto scalare tra due vettori $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ è NULLO, cioè $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$, allora vuol dire che i due vettori sono PERPENDICOLARI.

⊙ Se $\vec{v} = \vec{w}$ allora $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 = \|\vec{v}\|^2$.

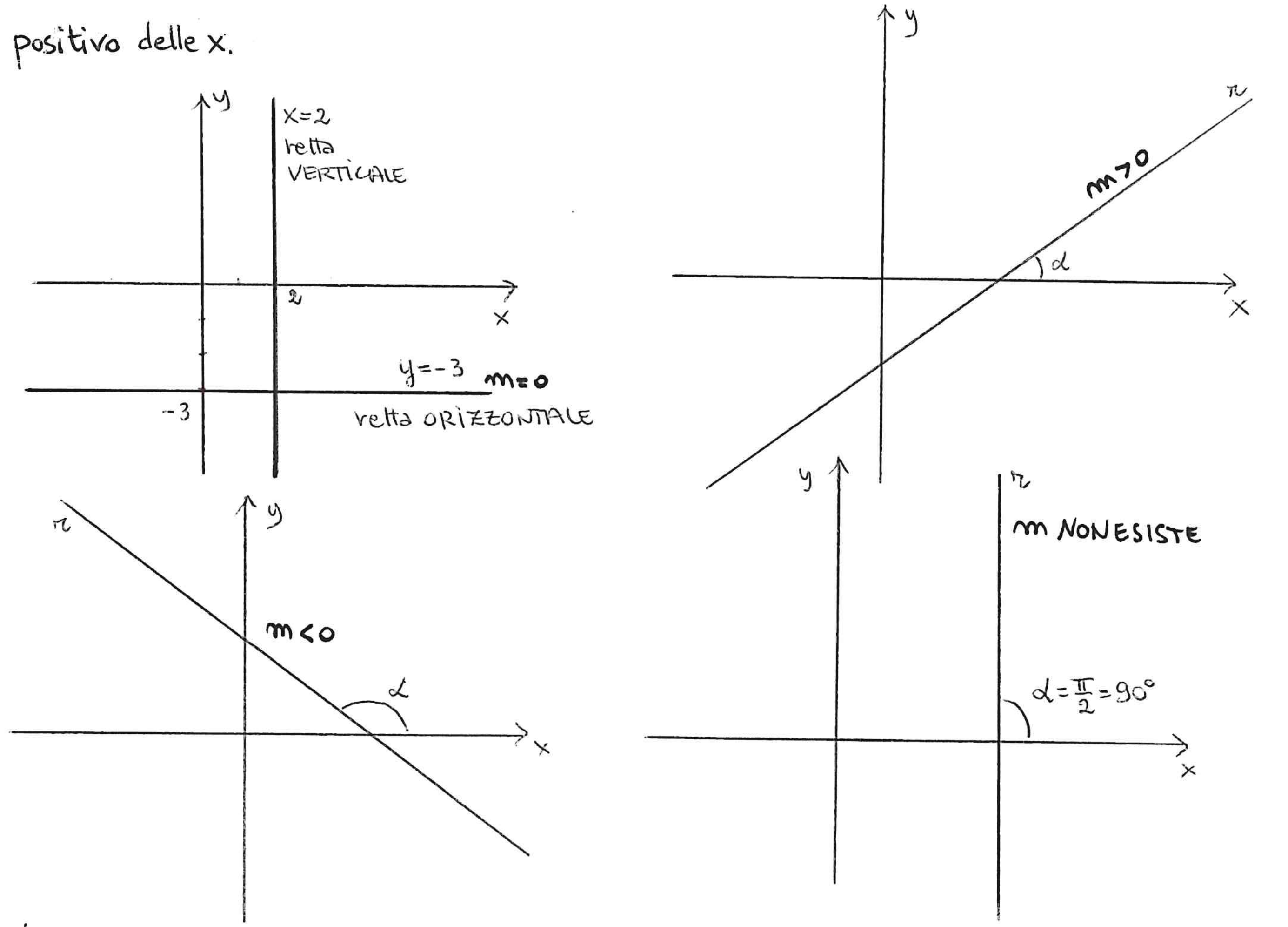
$\boxed{3}$ le RETTE

Una retta può essere ORIZZONTALE, VERTICALE o INCLINATA.

Le RETTE ORIZZONTALI hanno EQUAZIONE $\boxed{y=k}$.

Le RETTE VERTICALI hanno EQUAZIONE $\boxed{x=k}$.

Con l'EQUAZIONE CARTESIANA $\boxed{y = mx + q}$, dove m = COEFFICIENTE ANGOLARE e q = ORDINATA all'origine (cioè la retta interseca l'asse y in $(0,q)$), si ottiene una generica retta che può essere ORIZZONTALE se $m=0$, oppure INCLINATA se $m \neq 0$. Questa eq.ne non rappresenta mai una retta verticale. Il COEFFICIENTE ANGOLARE m, che indica l'INCLINAZIONE o PENDENZA della retta, è definito come la TANGENTE dell'angolo α che la retta forma con il semiasse positivo delle x.



Le RETTE VERTICALI sono le uniche RETTE PRIVE del COEFFICIENTE ANGOLARE perchè $\tan\frac{\pi}{2}$ non è definita e la retta non ha una inclinazione.

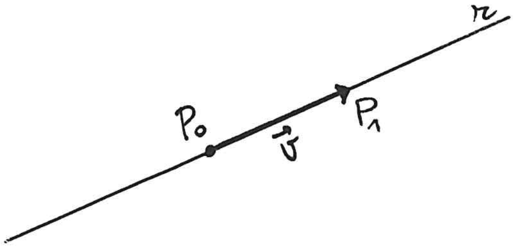
<u>IMPORTANTE</u> Consideriamo una qualunque retta r NON VERTICALE di equazione $y = mx + q$. Allora, presi comunque due punti $P_0, P_1 \in r$ il coefficiente angolare si ottiene calcolando

$$(1) \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{dove } P_0 = (x_0, y_0) \text{ e } P_1 = (x_1, y_1).$$

<u>Dimostrazione</u>. Se $P_0 \in r$ allora $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, mx_0 + q)$. Allo stesso modo $P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, mx_1 + q)$. Quindi ($x_1 \neq x_0$ perchè la retta NON è verticale)

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{mx_1 + q - (mx_0 + q)}{x_1 - x_0} = \frac{m\cancel{(x_1 - x_0)}}{\cancel{x_1 - x_0}} = m.$$

Consideriamo ora la retta passante per un punto $P_0=(x_0,y_0)$ e avente la direzione del vettore $\vec{v}=(v_1,v_2)$. Si dice che il vettore $\vec{v}$ DIRIGE la retta r.



La punta del vettore $\vec{v}$ è il punto $P_1=P_0+\vec{v}=(x_0+v_1, y_0+v_2)$

Quindi, utilizzando la proprietà (1) a pag. 4 per il calcolo del coefficiente angolare, otteniamo che

$$m_r = \frac{y_{P_1}-y_{P_0}}{x_{P_1}-x_{P_0}} = \frac{y_0+v_2-y_0}{x_0+v_1-x_0} = \frac{v_2}{v_1}.$$

IMPORTANTE: se si conosce un VETTORE che dirige la retta che stiamo considerando possiamo calcolare facilmente il coefficiente angolare della retta tramite $\boxed{m=\frac{v_2}{v_1}}$.

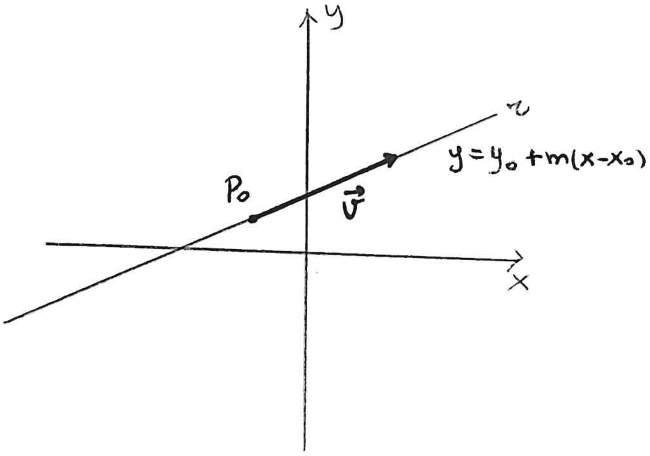
OSSERVAZIONE: Supponiamo di considerare una retta di coefficiente angolare $m=3$. Allora per qualunque coppia di punti sulla retta avremo $\frac{\Delta y}{\Delta x}=3$: questo significa che se $\Delta x=1$ allora $\Delta y=3$, quindi che ad ogni spostamento verso destra di 1 corrisponde uno spostamento verso l'alto di 3 (con i quadretti è anche facile disegnare la retta....).

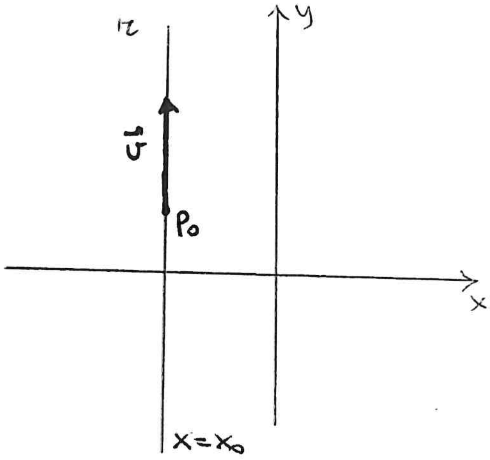
EQUAZIONI di una RETTA

Consideriamo la retta r passante per $P_0=(x_0,y_0)$ avente per direzione il vettore $\vec{v}=(v_1,v_2)$.

Esistono diversi modi nei quali possiamo scrivere l'equazione di questa retta.

⊙ EQUAZIONE CARTESIANA





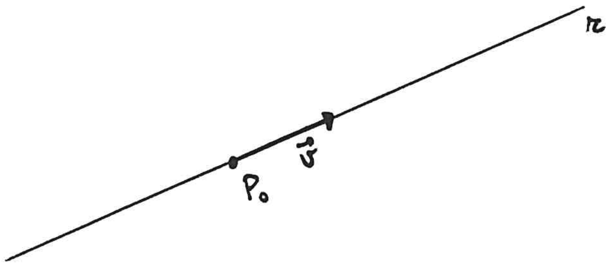
<u>1° caso</u> $\vec{v}$ non è verticale, cioè $v_1 \neq 0$

calcoliamo il coefficiente angolare $\boxed{m=\frac{v_2}{v_1}}$ e poi scriviamo la retta come $\boxed{y=y_0+m(x-x_0)}$ (retta per un punto con un dato coefficiente angolare)

<u>2° caso</u> $\vec{v}$ è verticale, cioè $\vec{v}=v_2\vec{j}$ e $v_1=0$

allora $m=\frac{v_2}{0}$ è IMPOSSIBILE, quindi <u>il coefficiente angolare non esiste</u> e pertanto la retta è verticale ed ha eq.ne $\boxed{x=x_0}$

⊙ EQUAZIONE VETTORIALE (noto un <u>vettore direttore</u>)

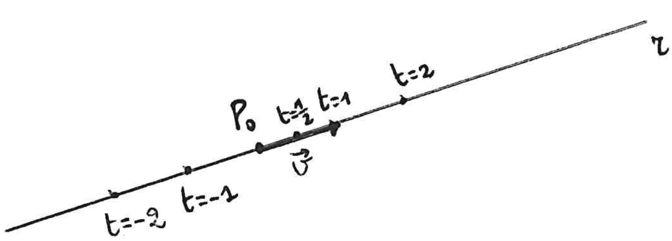


La retta è l'insieme di tutti i punti P del tipo

$$\boxed{P=P_0+t\vec{v} \quad (t\in\mathbb{R})}$$

<u>EQ.NE VETTORIALE</u>

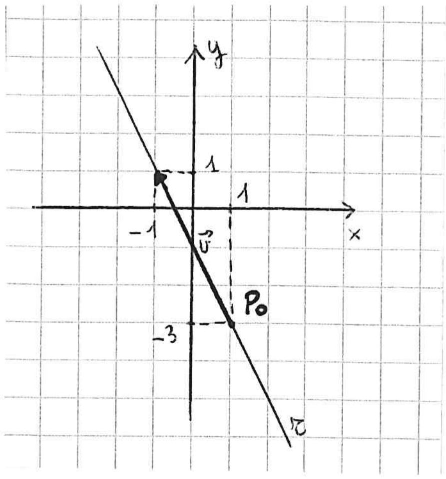
Infatti al variare di t in tutto $\mathbb{R}$ otteniamo tutti i punti della retta:
es. $t=0$ $P=P_0$ $t=1$ $P=P_0+\vec{v}$ = punta del vettore $t=\frac{1}{2}$ $P=P_0+\frac{1}{2}\vec{v}$ = punto medio del vettore $t=2$ $P=P_0+2\vec{v}$
$t=-1$ $P=P_0-\vec{v}$ $t=-2$ $P=P_0-2\vec{v}$



e così via. Per ogni punto della retta esiste $t\in\mathbb{R}$: $P=P_0+t\vec{v}$.

($-\vec{v}$ = vettore OPPOSTO di $\vec{v}=(-v_1,-v_2)$)

<u>ESEMPIO</u> Si consideri la retta r per $P_0=(1,-3)$ avente come vettore direttore il vettore $\vec{v}=(-2,4)=-2\vec{i}+4\vec{j}$



il vettore $\vec{v}$ va disegnato applicato in P_0, quindi con l'origine in P_0 e la punta in $P_1=P_0+\vec{v}=(1,-3)+(-2,4)=(-1,1)$.
Partendo da P_0 ci si deve spostare a sinistra di 2 e in alto di 4.

<u>Eq.^{ne} cartesiana di r</u>:

$$m=\frac{v_2}{v_1}=\frac{4}{-2}=-2 \qquad \text{da cui } y=-3-2(x-1) \quad \boxed{y=-2x-1}$$

<u>Eq.^{ne} vettoriale di r</u>: $P=P_0+t\vec{v}$ $t\in\mathbb{R}$ cioè

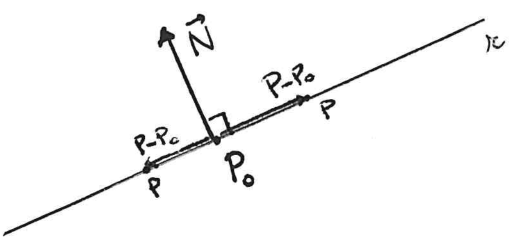
$$\boxed{P=(1,-3)+t(-2,4) \quad t\in\mathbb{R}.}$$

<u>Osservazione</u>: L'equazione cartesiana è UNICA, mentre ci sono infinite possibilità diverse di scrivere l'equazione vettoriale. Infatti se $\vec{v}$ dirige la retta r, allora ad es. anche i vettori $-\vec{v}$, $2\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$ ecc. dirigono la retta. Ad es. $\frac{1}{2}\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$ e quindi

$P=(1,-3)+t(-1,2)$ $t\in\mathbb{R}$ è un'altra possibile equazione vettoriale della retta r.

Se invece di disporre di un VETTORE DIRETTORE della retta possediamo un VETTORE NORMALE alla retta r, possiamo scrivere un altro tipo di equazione vettoriale detta

⊙ EQUAZIONE VETTORIALE (noto un <u>VETTORE NORMALE</u>)



indichiamo il vettore normale con $\vec{N}$

La retta r è l'insieme dei punti P

tali che il vettore $(P-P_0)$ risulti perpendicolare a $\vec{N}$:

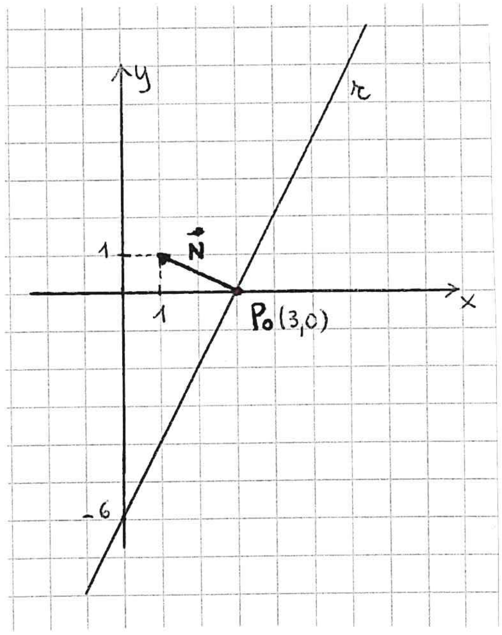
$$P: \quad P-P_0 \perp \vec{N}$$

Utilizzando il prodotto scalare otteniamo l'eq.ne

(2) $\boxed{\begin{array}{l} \langle P-P_0, \vec{N} \rangle = 0 \\ (\text{o } (P-P_0)\cdot\vec{N} = 0) \end{array}}$ Eq.ne vettoriale dato un vettore normale

OSSERVAZIONE: Quando si sviluppano i calcoli nell'equazione vettoriale (2) si ottiene l'equazione cartesiana della retta.

ESEMPIO: Si consideri la retta passante per $P_0 = (3,0)$ perpendicolare al vettore $\vec{N} = (-2,1) = -2\vec{i} + \vec{j}$



L'eq.ne VETTORIALE (dato $\vec{N}$) della retta r

è $\boxed{(P-P_0)\cdot\vec{N} = 0}$ cioè

$P = (x,y)$ $P_0 = (3,0)$ $\vec{N} = (-2,1)$ $P-P_0 = (x-3,y)$

$$\boxed{(x-3,y)\cdot(-2,1) = 0}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo

$(x-3)(-2) + y\cdot 1 = 0 \quad -2x+6+y=0$

$\boxed{y = 2x-6}$ che è l'eq.ne cartesiana.

Osservazione: L'equazione cartesiana della retta r si può trovare anche nel seguente modo. La retta s passante per P_0 e $\perp r$ ha come vettore direttore il vettore $\vec{N}$, quindi per la proprietà che lega il coefficiente angolare di una retta al suo vettore direttore abbiamo che

$$m_s = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \quad \left(\frac{2^a \text{comp } \vec{N}}{1^a \text{comp } \vec{N}} = \frac{N_2}{N_1} \right)$$

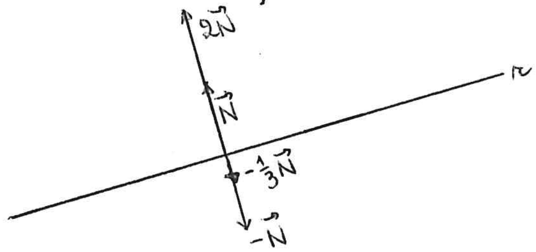
IMPORTANTE

$\boxed{\begin{array}{l} r \perp s \\ m_r = -\frac{1}{m_s} \end{array}}$

Essendo $r \perp s$ allora $m_r = -\frac{1}{m_s} = 2$, da cui

$r: \quad y = 0 + 2(x-3) \quad y = 2x-6.$

<u>Osservazione</u>: anche i vettori NORMALI ad una retta sono infiniti ($\vec{N}, 2\vec{N}, -\vec{N}, -\frac{1}{3}\vec{N}$ ecc.) e quindi esistono infinite possibilità diverse di scrivere l'equazione vettoriale dato un vettore normale.



<u>IMPORTANTE</u>: Data l'equazione di una retta in <u>FORMA IMPLICITA</u>

$$r: \quad \boxed{ax+by+c=0}$$

il VETTORE $\boxed{\vec{N}=(a,b)}$ risulta NORMALE alla retta r.

<u>Dimostrazione</u> Sia $P_0=(x_0,y_0)$ un punto $\in r$, allora $\boxed{ax_0+by_0+c=0}$.

Sottraendo le due equazioni otteniamo che

$$(ax+by+c)-(ax_0+by_0+c)=0$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \qquad \text{posto } \boxed{\vec{N}=(a,b)} \text{ poiché } P-P_0=(x-x_0,y-y_0)$$

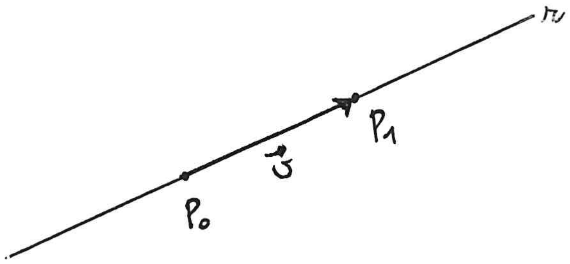
scriviamo r come $\boxed{\vec{N}\cdot(P-P_0)=0}$

quindi r ammette EQUAZIONE VETTORIALE con VETTORE NORMALE $\vec{N}=(a,b)$.

<u>ESEMPIO</u>: Consideriamo la retta $y=2x-6$ dell'esempio precedente. Scriviamo la retta in forma implicita $-2x+y+6=0$ da cui deduciamo che un <u>vettore normale</u> è proprio $\vec{N}=(-2,1)$.

Esistono però infinite equazioni implicite. Se avessimo considerato $2x-y-6=0$ avremmo trovato come vettore normale $(2,-1)=-\vec{N}$, mentre se avessimo diviso per 2 dall'eq.ne $-x+\frac{1}{2}y+3=0$ avremmo trovato come vettore normale $(-1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\vec{N}$ e così via.

RETTA per due PUNTI $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$



Come VETTORE DIRETTORE della retta r si può considerare

$$\boxed{\vec{v} = P_1 - P_0}$$

da cui l'equazione VETTORIALE

$$\boxed{P = P_0 + t(P_1 - P_0) \quad t \in \mathbb{R}}$$

Per quanto riguarda invece l'equazione CARTESIANA si sconsiglia di utilizzare la nota formula della retta per 2 punti (che nel 90% dei casi porta ad errori di calcolo) e si suggerisce invece di calcolare il coefficiente angolare

$$\boxed{m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$

e poi utilizzare $\boxed{y = y_0 + m(x - x_0)}$ controllando, una volta trovata l'equazione, che la retta passi per entrambi i punti.

⊙ ESERCIZI

Svolgete gli esercizi n° 3 della SCHEDA N.1 e n° 1-2-3 della SCHEDA N.1bis