COGNOME ____________		
NOME ____________	NON SCRIVERE QUI	A
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	1 2 3 4 5 6	
LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2018-2019 — PARMA, 21 FEBBRAIO 2019

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $E = \{(x,y):\ 2-|y|/3 \le x+1 \le 10-y^2\}$. Allora,

(a) E è convesso; (b) $(1,0)$ non è punto interno; (c) E non è misurabile.

Soluzione. L'insieme E non è convesso poiché il segmento di estremi $(0,\pm 3)$ non è contenuto in E ed è misurabile poiché è limitato e il suo bordo è unione di sostegni di curve regolari. Il punto di coordinate $(1,1)$ appartiene al bordo di E e quindi non è un punto interno. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 2. Siano $\varphi, \Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tali che $\varphi(0,0) = 0$, $\nabla\varphi(0,0) = (1,-1)$ e $\nabla\Phi(0,0) = (-1,2)$. Allora, il gradiente di

$$f(x,y) = \Phi(x+\varphi(x,y), x\varphi(x,y)), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

in $(0,0)$ è

(a) $\nabla f(0,0) = (0,1)$; (b) $\nabla f(0,0) = (-1,2)$; (c) $\nabla f(0,0) = (-2,1)$.

Soluzione. Denotiamoo con $\Phi(u,v)$ le variabili di Φ. Per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \Phi_u(x+\varphi(x,y), x\varphi(x,y))[1+\varphi_x(x,y)] + \Phi_v(x+\varphi(x,y), x\varphi(x,y))[\varphi(x,y)+x\varphi_x(x,y)]; \\ f_y(x,y) &= \Phi_u(x+\varphi(x,y), x\varphi(x,y))\varphi_y(x,y) + \Phi_v(x+\varphi(x,y), x\varphi(x,y))x\varphi_y(x,y)]; \end{aligned}$$

e quindi risulta $f_x(0,0) = -2$ e $f_y(0,0) = 1$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = -x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in $(-1,0)$ è

(a) $\mathrm{e}x - (\mathrm{e}+1)y + \mathrm{e}z = 0$; (b) $(1+\mathrm{e})x - \mathrm{e}y + \mathrm{e}z = 0$; (c) $\mathrm{e}x - y + \mathrm{e}z = 0$.

Soluzione. Si ha $f(-1,0) = 1$ e

$$f_x(-1,0) = -\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x\big|_{x=-1,y=0} = -1; \qquad f_y(-1,0) = -x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x\big|_{x=-1,y=0} = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}};$$

da cui segue $z = 1 - (x+1) + (1+1/\mathrm{e})y$ ovvero $\mathrm{e}x - (\mathrm{e}+1)y + \mathrm{e}z = 0$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 4. Sia $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$, $f = (f^1, f^2)$ il campo vettoriale definito da

$$f^1(x, y) = \frac{2x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \qquad \text{e} \qquad f^2(x, y) = \frac{-xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

per ogni $(x, y) \in U$.

(a) Determinate il dominio U di f.

(b) Stabilite se f è irrotazionale e conservativo.

(c) Verificate che il sostegno della curva parametrica

$$\gamma(t) = (2 + t^2 - t^4)e_1 + (t - 1)e_2, \qquad t \in [0, 1],$$

è contenuto in U e calcolate l'integrale curvilineo di f lungo γ.

Soluzione. (a) Il dominio U di f è l'insieme aperto

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}$$

che è unione dei due insiemi aperti, convessi e disgiunti

$$U_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\} \quad \text{e} \quad U_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -|y|\} .$$

(b) Poiché il campo vettoriale f è di classe C^∞ in U e ciascuno dei due insiemi aperti e disgiunti $U_\pm$ è convesso, f è conservativo se e solo è irrotazionale. Si ha con facili calcoli

$$f^1_y(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 - y^2)\,3/2} \qquad \text{e} \qquad f^2_x(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 - y^2)\,3/2}$$

per ogni $(x, y) \in U$ e quindi f risulta essere conservativo.

(c) Si ha $2 + t^2 - t^4 \geq 2$ e $-1 \leq t \leq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$ e quindi il sostegno di γ è contenuto in U_+. Poiché f è conservativo, si ha

$$\int_\gamma f \cdot dl = \int_\sigma f \cdot dl$$

dove σ è una qualunque curva parametrica regolare con sostegno contenuto in U_+ avente i medesimi estremi di γ. Scegliendo ad esempio $\sigma(t) = 2e_1 + te_2$, $t \in [0, 1]$, risulta

$$\int_\gamma f \cdot dl = \int_\sigma f \cdot dl = \int_{-1}^0 \langle f(\sigma(t)) \,|\, \sigma'(t)\rangle \, dt = \int_{-1}^0 f^2(2, t)\, dt = \int_{-1}^0 \frac{-2t}{\sqrt{4 - t^2}}\, dt = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Alternativamente si può determinare un potenziale di f che è dato da

$$F(x, y) = \int_1^x f^1(t, 0)\, dt + \int_0^y f^2(x, t)\, dt = \int_1^x \frac{2t^2}{\sqrt{t^2}}\, dt + \int_0^y \frac{-xt}{\sqrt{x^2 - t^2}}\, dt = x\sqrt{x^2 - y^2} + 1$$

per ogni $(x, y) \in U_+$ cosicché risulta

$$\int_\gamma f \cdot dl = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(2, 0) - F(2, -1) = 4 - 2\sqrt{3}.$$

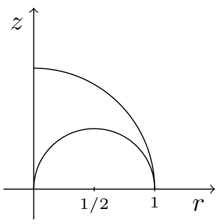
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{ (x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ \left(2\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2 + 4z^2 \ge 1 \text{ e } x, y, z \ge 0 \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K z\, dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione compresa tra i semispazi $x \ge 0$, $y \ge 0$ e $z \ge 0$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra le circonferenze di equazione $r^2 + z^2 = 1$ e $(r - 1/2)^2 + z^2 = 1/4$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Inoltre, K è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione e di semispazi. La funzione

$$f(x, y, z) = z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è lineare e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la porzione del cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x, y) :\ x^2 + y^2 \le 1 \text{ e } x, y \ge 0 \right\}$$

e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è il segmento

$$K_{(x,y)} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(2\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2}, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right]$$

che scriviamo brevemente nella forma

$$K_{(x,y)} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{1 - (2r-1)^2}, \sqrt{1 - r^2} \right] \qquad \text{con } r = r(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{\frac{1}{2}\sqrt{1-(2r-1)^2}}^{\sqrt{1-r^2}} z\, dz \right) dV_2(x, y)$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$I = \frac{\pi}{4} \int_0^1 r \left[(1 - r^2) - \frac{1}{4}\left[1 - (2r-1)^2\right] \right] dr = \frac{\pi}{4} \int_0^1 r(1 - r)\, dr = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{24}.$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 2\cos^2 t \\ x(0) = 1 \text{ e } x'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 1 = 0$ con soluzioni $\lambda = \pm i$. Quindi, le funzioni $x_1(t) = \cos t$ e $x_2(t) = \operatorname{sen} t$ con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Per determinare un soluzione dell'equazione completa, osserviamo che per le formule di addizione risulta

$$2\cos^2 t = 2\frac{1 + \cos(2t)}{2} = 1 + \cos(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi è possibile cercare una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = A + B\cos(2t) + C\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) + x(t) = A - 3B\cos(2t) - 3C\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $A = 1$, $B = -1/3$ e $C = 0$ da cui segue

$$x_p(t) = 1 - \frac{1}{3}\cos(2t) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\cos^2 t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\cos^2 t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Alternativamente, procedendo con il metodo delle costanti arbitrarie, si può cercare una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $c_1(t)$ e $c_2(t)$ funzioni da determinare in modo che che risulti

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'\operatorname{sen} t = 0 \\ -c_1'(t)\operatorname{sen} t + c_2'\cos t = 2\cos^2 t. \end{cases}$$

Si ricava facilmente

$$c_1(t) = \frac{2}{3}\cos^3 t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = 2\operatorname{sen} t - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 t$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e risulta quindi

$$x_p(t) = \frac{2}{3}\cos^4 t - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^4 t + 2\operatorname{sen}^2 t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

che coincide (anche se non sembra) con la soluzione trovata sopra.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + 2/3 = 1 \\ x'(0) = C_2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 1/3$ e $C_2 = 0$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\cos^4 t - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^4 t + 2\operatorname{sen}^2 t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

COGNOME	______________	NON SCRIVERE QUI	B
NOME	______________	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA	______________		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2018-2019 — PARMA, 21 FEBBRAIO 2019

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $E = \{(x,y) :\ 2 - |y|/3 \le x + 1 \le 10 - y^2\}$. Allora,

(a) E è convesso; (b) $(1,0)$ non è punto interno; (c) E non è misurabile.

Soluzione. L'insieme E non è convesso poiché il segmento di estremi $(0,\pm 3)$ non è contenuto in E ed è misurabile poiché è limitato e il suo bordo è unione di sostegni di curve regolari. Il punto di coordinate $(1,1)$ appartiene al bordo di E e quindi non è un punto interno. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 2. Siano $\varphi, \Phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tali che $\varphi(0,0) = 0$, $\nabla\varphi(0,0) = (1,-1)$ e $\nabla\Phi(0,0) = (-1,2)$. Allora, il gradiente di

$$f(x,y) = \Phi(x + \varphi(x,y), x\varphi(x,y)), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

in $(0,0)$ è

(a) $\nabla f(0,0) = (0,1)$; (b) $\nabla f(0,0) = (-1,2)$; (c) $\nabla f(0,0) = (-2,1)$.

Soluzione. Denotando con $\Phi(u,v)$ le variabili di Φ, si ha

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \Phi_u(x + \varphi(x,y), x\varphi(x,y))[1 + \varphi_x(x,y)] + \Phi_v(x + \varphi(x,y), x\varphi(x,y))[\varphi(x,y) + x\varphi_x(x,y)];\\
f_y(x,y) &= \Phi_u(x + \varphi(x,y), x\varphi(x,y))\varphi_y(x,y) + \Phi_v(x + \varphi(x,y), x\varphi(x,y))x\varphi_y(x,y)];
\end{aligned}$$

e quindi risulta $f_x(0,0) = -2$ e $f_y(0,0) = 1$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = -x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in $(-1,0)$ è

(a) $\mathrm{e}x - (\mathrm{e}+1)y + \mathrm{e}z = 0$; (b) $(1+\mathrm{e})x - \mathrm{e}y + \mathrm{e}z = 0$; (c) $\mathrm{e}x - y + \mathrm{e}z = 0$.

Soluzione. Si ha $f(-1,0) = 1$ e

$$f_x(-1,0) = -\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x\big|_{x=-1,y=0} = -1; \qquad f_y(-1,0) = -x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x\big|_{x=-1,y=0} = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}};$$

da cui segue $z = 1 - (x+1) + (1 + 1/\mathrm{e})y$ ovvero $\mathrm{e}x - (\mathrm{e}+1)y + \mathrm{e}z = 0$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 4. Sia

$$f(x\,,y)=x^2-2xy, \qquad (x\,,y)\in\mathbb{R}^2,$$

e sia

$$K=\left\{(x\,,y):\ 2x^2+y^2\le 6\right\}.$$

Determinate

(a) il minimo e il massimo globale di f su K;

(b) l'insieme immagine $f(K)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e dunque è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e l'insieme K è la parte di piano delimitata dall'ellisse di equazione

$$2x^2+y^2=6$$

i cui assi sono gli assi coordinati x e y con lunghezza dei corrispondenti semiassi $\sqrt{3}$ e $\sqrt{6}$. L'insieme K è chiuso perché controimmagine della semiretta chiusa $(-\infty\,,6]$ mediante il polinomio $q(x\,,y)=x^2-2xy$, $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$, ed è evidentemente limitato. Pertanto K è compatto e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass.
Per determinare tali punti osserviamo che l'unico punto critico di f è l'origine che risulta essere punto di sella. Conseguentemente, i punti di minimo e massimo globale di f devono trovarsi sul bordo

$$\partial K=\left\{(x\,,y):\ 2x^2+y^2=6\right\}$$

di K che è una curva regolare nel piano e possiamo quindi cercare tali punti con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 2x-2y-4\lambda x=0\\ -2x-2\lambda y=0\\ 2x^2+y^2=6 \end{cases} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} (1-2\lambda)x-y=0\\ x+\lambda y=0\\ 2x^2+y^2=6. \end{cases}$$

Affinché il sistema lineare formato dalle prime due equazioni abbia altre soluzioni oltre alla soluzione $x=y=0$, deve essere

$$\det\begin{pmatrix} (1-2\lambda) & -1\\ 1 & \lambda \end{pmatrix}=-2\lambda^2+\lambda+1=0$$

e ciò avviene per $\lambda=-1/2$ e $\lambda=1$.
Nel primo caso $\lambda=-1/2$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti $(x\,,y)$ tali che $y=2x$. Imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti di coordinate $P_\pm=(\pm1\,,\pm2)$.
Nell'altro caso $\lambda=1$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti $(x\,,y)$ tali che $y=-x$ e, imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti di coordinate $Q_\pm=(\pm\sqrt{2}\,,\mp\sqrt{2})$.
Risulta infine

$$f(P_\pm)=1-4=-3 \qquad \text{e} \qquad f(Q_\pm)=2+4=6$$

e conseguentemente il minimo globale di f su K è assunto nei punti $P_\pm$ mentre il massimo globale è assunto nei punti $Q_\pm$.
Gli insiemi di livello $\{f=-1/2\}$, $\{f=2\}$ e il bordo di K sono rappresentati nella seguente figura.
(b) L'insieme K è convesso e quindi anche connesso cosicché per il teorema dei valori intermedi risulta

$$f(K)=[f(P_\pm)\,,f(Q_\pm)]$$

e dunque da (a) segue $f(K)=[-3\,,6]$.

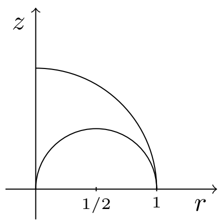
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{ (x, y, z) : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; \left(2\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2 + 4z^2 \geq 1 \text{ e } x, y, z \geq 0 \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K z \, dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione compresa tra i semispazi $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra le circonferenze di equazione $r^2 + z^2 = 1$ e $(r - 1/2)^2 + z^2 = 1/4$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Inoltre, K è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione e di semispazi. La funzione

$$f(x, y, z) = z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è lineare e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la porzione del cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x, y) : \; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x, y \geq 0 \right\}$$

e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è il segmento

$$K_{(x,y)} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(2\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2}, \sqrt{1 - (x^2+y^2)} \right]$$

che scriviamo brevemente nella forma

$$K_{(x,y)} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{1 - (2r-1)^2}, \sqrt{1 - r^2} \right] \qquad \text{con } r = r(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{\frac{1}{2}\sqrt{1-(2r-1)^2}}^{\sqrt{1-r^2}} z \, dz \right) dV_2(x, y)$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$I = \frac{\pi}{4} \int_0^1 r \left[(1 - r^2) - \frac{1}{4}\left[1 - (2r-1)^2\right] \right] dr = \frac{\pi}{4} \int_0^1 r(1-r) \, dr = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{24}.$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 2\cos^2 t \\ x(0) = 1 \text{ e } x'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 1 = 0$ con soluzioni $\lambda = \pm i$. Quindi, le funzioni $x_1(t) = \cos t$ e $x_2(t) = \operatorname{sen} t$ con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Per determinare un soluzione dell'equazione completa, osserviamo che per le formule di addizione risulta

$$2\cos^2 t = 2\frac{1 + \cos(2t)}{2} = 1 + \cos(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi è possibile cercare una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = A + B\cos(2t) + C\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) + x(t) = A - 3B\cos(2t) - 3C\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $A = 1$, $B = -1/3$ e $C = 0$ da cui segue

$$x_p(t) = 1 - \frac{1}{3}\cos(2t) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\cos^2 t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\cos^2 t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Alternativamente, procedendo con il metodo delle costanti arbitrarie, si può cercare una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $c_1(t)$ e $c_2(t)$ funzioni da determinare in modo che che risulti

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'\operatorname{sen} t = 0 \\ -c_1'(t)\operatorname{sen} t + c_2'\cos t = 2\cos^2 t. \end{cases}$$

Si ricava facilmente

$$c_1(t) = \frac{2}{3}\cos^3 t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = 2\operatorname{sen} t - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 t$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e risulta quindi

$$x_p(t) = \frac{2}{3}\cos^4 t - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^4 t + 2\operatorname{sen}^2 t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

che coincide (anche se non sembra) con la soluzione trovata sopra.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + 2/3 = 1 \\ x'(0) = C_2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 1/3$ e $C_2 = 0$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\cos^4 t - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^4 t + 2\operatorname{sen}^2 t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
