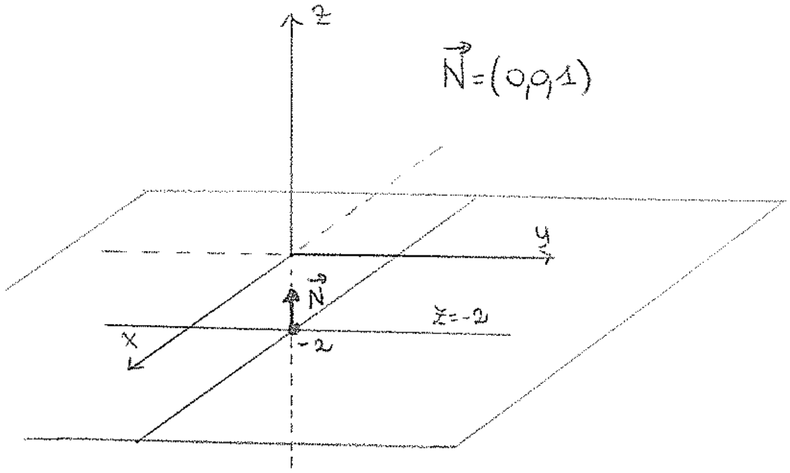
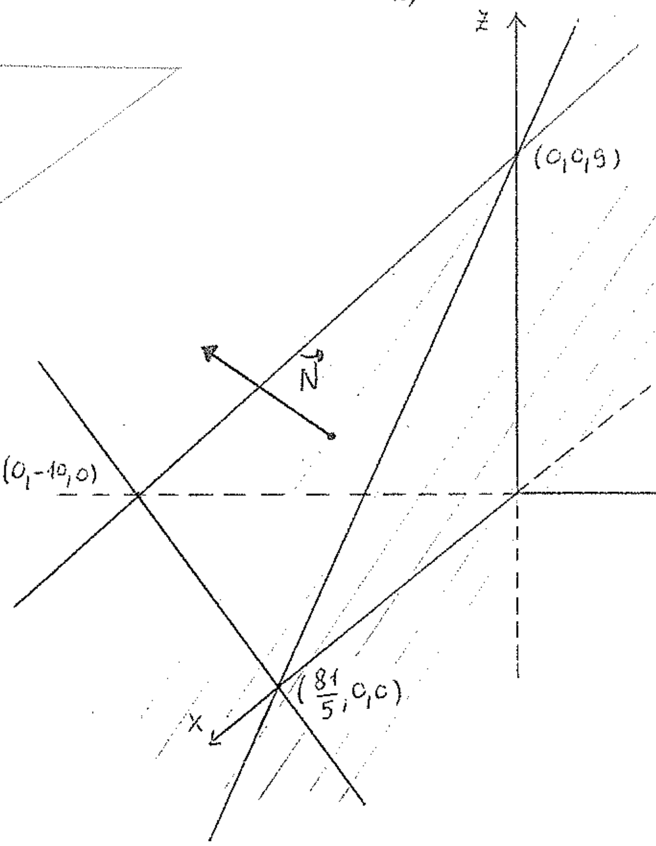
SOLUZIONE SCHEDA N.4

2) i) $z=-2$ PIANO ORIZZONTALE

$\vec{N}=(0,0,1)$

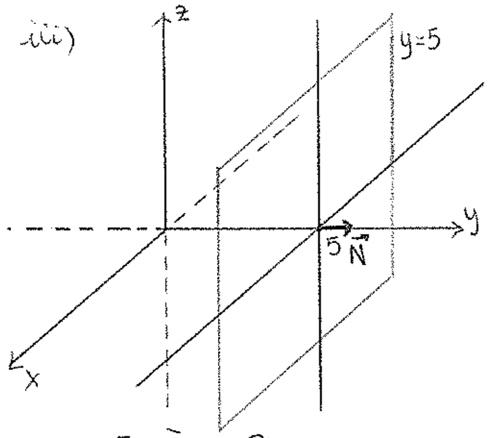


ii) piano inclinato per $(0,0,9)$ $\left(\frac{81}{5},0,0\right)$ $(0,-10,0)$



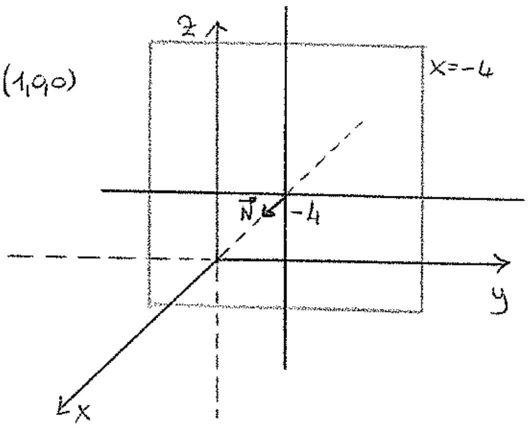
$\vec{N}=\left(\frac{5}{9},-\frac{9}{10},1\right)$ oppure $\vec{N}=\left(\frac{5}{3},-\frac{27}{10},3\right)$

iii)

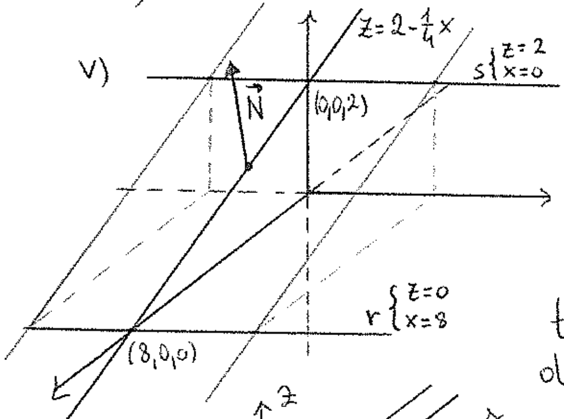


$y=5$ è un PIANO VERTICALE $\parallel (x,z)$ $\vec{N}=(0,1,0)$

iv) $x=-4$ è un PIANO VERTICALE $\parallel (y,z)$ $\vec{N}=(1,0,0)$

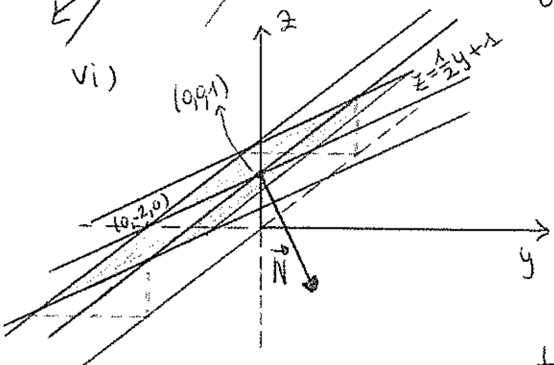


v)



si tratta di un piano inclinato ottenuto dalla retta nel piano (x,z) per $(0,0,2)$ e $(8,0,0)$ trascinata nella direzione dell'asse y $\rightarrow$ $\vec{N}=\left(\frac{1}{4},0,1\right)$ oppure $\vec{N}=\left(\frac{1}{2},0,2\right)$

vi)



$z=\frac{1}{2}y+1$ si tratta di un piano inclinato ottenuto dalla retta nel piano (y,z) per $(0,-2,0)$ e $(0,0,1)$ trascinata nella direzione dell'asse x

$\vec{N}=\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$

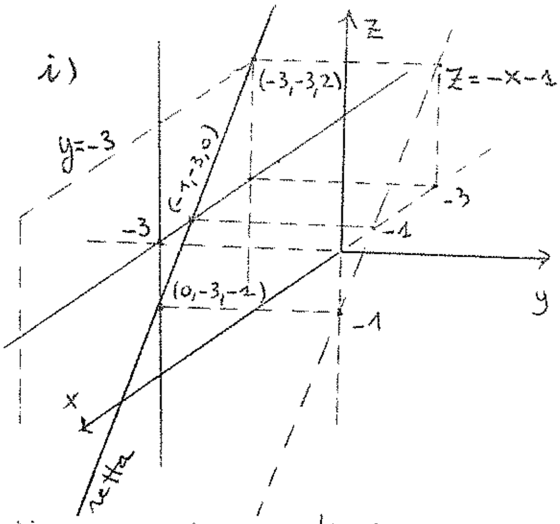
oppure $\vec{N}=(0,1,-2)$

3) i) $\cap$ dei piani $y=-3$ VERTICALE $\parallel (x,z)$ e $z=-x-1$ inclinato ottenuto dalla retta nel piano (x,z) per $(0,0,-1)$ e $(-1,0,0)$

La retta passa per $(0,-3,-1)=P_0$ e $(-1,-3,0)=P_1$ $\quad \vec{v}=(-1,0,1)$ vettore direttore

(anche $P_2=(-3,-3,2)$)

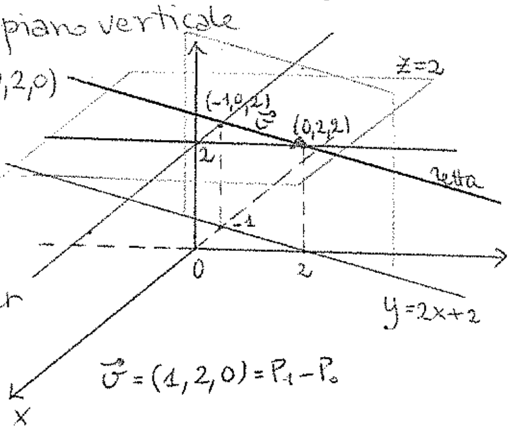
i)



ii) $y = 2x+2$ è un piano verticale sulla retta per $(0,2,0)$ e $(-1,0,0)$

$z=2$ è un piano orizzontale

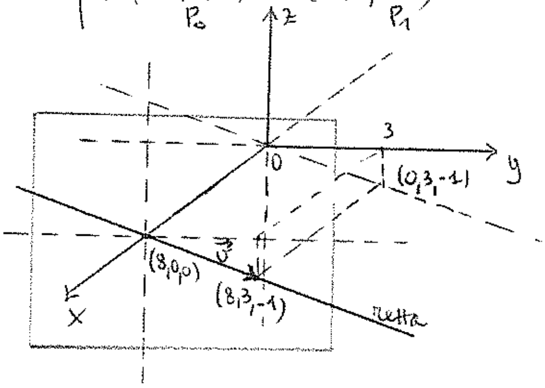
La retta passa per $\underset{"P_1}{(0,2,2)}$ e $\underset{"P_0}{(-1,0,2)}$



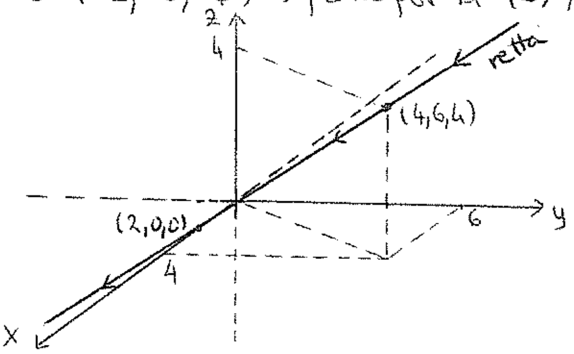
$\vec{v} = (1,2,0) = P_1 - P_0$

iii) $x = 8$ piano verticale // (y,z)

$z = -\frac{1}{3}y$ piano inclinato ottenuto dalla retta nel piano (y,z) per $(0,0,0)$ e $(0,3,-1)$ trascinata nella direzione dell'asse x. La retta passa per $\underset{P_0}{(8,0,0)}$ e $\underset{P_1}{(8,3,-1)}$ $\quad \vec{v} = (0,3,-1)$



iv) è la retta per $P_0 = (4,6,4)$ e direzione $\vec{v} = (-2,-6,-4) \to$ passa per $P_1 = (2,0,0)$



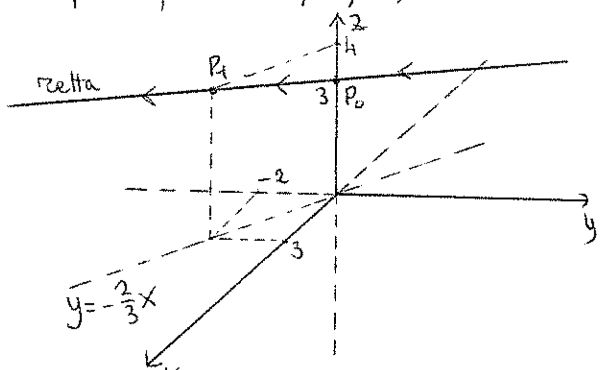
il verso è delle x decrescenti (o y decrescenti o z decrescenti)

$\cap$ PIANI $\begin{cases} y = 3x-6 & \text{PIANO VERTICALE} \\ z = 2x-4 & \text{PIANO INCLINATO indipendente da } y \end{cases}$

v) è la retta per $\overset{P_0}{(0,0,3)}$ e direzione $\vec{v} = (3,-2,1) \to$ passa per $P_1 = (3,-2,4)$

il verso è delle x crescenti (o y decrescenti) (o z crescenti)

$\cap$ PIANI $\begin{cases} y = -2/3\,x & \text{PIANO VERTICALE} \\ z = \frac{1}{3}x+3 & \text{PIANO INCLINATO INDIP. da } y \end{cases}$



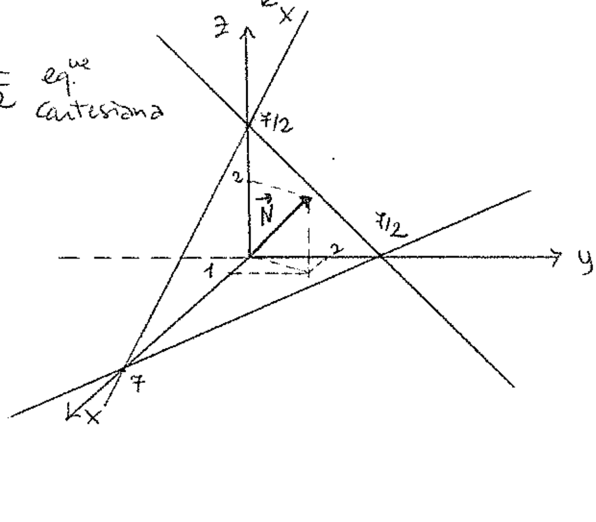
4) Eq.^{ne} vettoriale $(x+1,\, y-2,\, z-2)\cdot(1,2,2) = 0$

$(x+1)\cdot 1 + (y-2)2 + (z-2)\cdot 2 = 0$

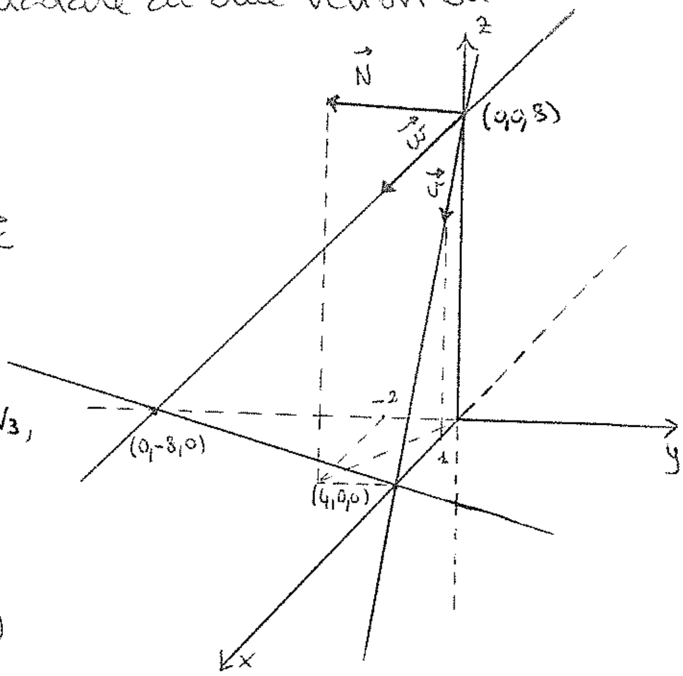
$2z = -x-2y+7 \qquad z = -\frac{1}{2}x - y + \frac{7}{2}$ eq.^{ne} cartesiana

piano inclinato per

$(0,0,7/2)$, $(7,0,0)$, $(0,7/2,0)$



5) Per determinare un vettore NORMALE ad un piano (senza calcolarne prima l'equazione) si possono considerare due vettori che $\in$ piano e poi il loro PRODOTTO ESTERNO, che per definizione è un vettore perpendicolare ai due vettori di partenza. Nel nostro caso possiamo considerare (detti $P_0=(0,0,8)$, $P_1=(0,-8,0)$ e $P_2=(4,0,0)$)



$\vec{v}=\frac{1}{4}(P_2-P_0)= \vec{i}-2\vec{k}$ e $\vec{w}=\frac{1}{4}(P_1-P_0)=-2\vec{j}-2\vec{k}$

$\Rightarrow$ un vettore normale è $\vec{N}=\vec{w}\wedge\vec{v}$

essendo $\vec{w}\wedge\vec{v}=(w_2v_3-w_3v_2,\ w_3v_1-w_1v_3,\ w_1v_2-w_2v_1)$

otteniamo $\vec{N}=(4,-2,2)$

(sono normali al piano anche $\vec{N}=(-2,1,-1)$ o $\vec{N}=(2,-1,1)$)

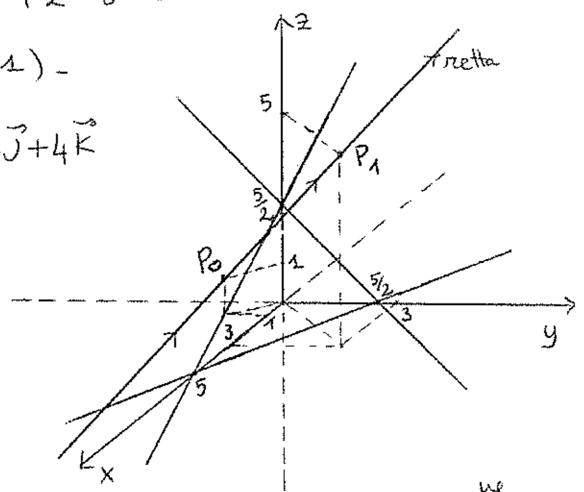
Eq.ne vettoriale: $(P-P_0)\cdot\vec{N}=0 \rightarrow ((x,y,z-8)\cdot(4,-2,2))=0$
$x\cdot(4)+y(-2)+(z-8)\cdot(2)=0$

$2z=-4x+2y+16 \Rightarrow \boxed{z=-2x+y+8}$ eq.ue cartesiana

(*) a pag. ~~8~~ 9 sul calcolo dell'eq.ne

Naturalmente dall'eq.ne cartesiana $2x-y+z-8=0$ si deduce che un vettore normale al piano è $\vec{N}=(2,-1,1)$.

6) $P_1=(3,3,5)$ $P_0=(1,-1,1)$ $\vec{v}=P_1-P_0= 2\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$



eq.ne param. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+4t \\ z=1+4t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\left(\begin{array}{l} t=0\rightarrow P_0 \\ t=1\rightarrow P_1\end{array}\right)$

verso x cresc (o y cresc) (o z cresc)

$\vec{N}_{piano}=\vec{v}=(2,4,4)$ $P_2=(1,1,1)$

Eq.ne vettoriale $(P-P_2)\cdot(2,4,4)=0 \rightarrow$

$(x-1)\cdot 2+(y-1)4+(z-1)\cdot 4=0$ $\quad 4z=-2x-4y+10 \quad z=-\frac{1}{2}x-y+\frac{5}{2}$ eq.ue cartesiana

(dall'eq.ue $\vec{N}=(\frac{1}{2},1,1)\,//\,(2,4,4)$) $\quad$ piano per $(0,0,5/2)$ $(5,0,0)$ $(0,\frac{5}{2},0)$

7) π_1 piano per $(2,0,1)$ $\perp \vec{N}_1=(1,2,3)$ $\quad \pi_2$ piano per $(0,0,0)$ $\perp \vec{N}_2=(2,0,1)$

essendo i due vettori $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ <u>NON PARALLELI</u> (in quanto linearmente indipendenti) i due piani non sono paralleli e pertanto si intersecano.

Eq.^{ni} dei due piani $\begin{cases} (x-2)+2y+3(z-1)=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x+2y+3z-5=0 \\ z=-2x \end{cases} \text{ l'intersezione dei due piani è una \underline{retta}}}$

Il punto $(0,\frac{5}{2},0) \in$ retta

(per $x=0$ dalla 2ª si ricava $z=0$ e dalla 1ª $y=5/2$)

Per trovare un vettore direzione per la retta si può procedere in due modi: <u>1° modo</u> trovo un 2° punto $\in$ retta $(x=1 \to z=-2 \to y=5)$

$P_1=(1,5,-2)$ e considero $\vec{v}=P_1-P_0=\vec{i}+\frac{5}{2}\vec{j}-2\vec{k}$

eq.^{ni} param (*) $\begin{cases} x=t \\ y=5/2+\frac{5}{2}t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$

La retta è anche $\cap$ dei DUE PIANI $\begin{cases} y=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}x \\ z=-2x \end{cases}$

<u>2° modo</u> il vettore direzione della retta è contemporaneamente perpendicolare a entrambi i vettori normali $\Rightarrow \vec{v}=\vec{N}_1\wedge\vec{N}_2$ ottenendo $\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$ e le eq.^{ni} $\begin{cases} x=2t \\ y=5/2+5t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-4t \end{cases}$

Tuttavia per scrivere le equazioni parametriche della retta si può anche considerare x come parametro $(x=t)$ e ricavare y e z dalle eq.^{ni} dei due piani ottenendo di nuovo (*).

$2y=-t-3z+5$
$=-t+6t+5$
$=5t+5$

$\hookrightarrow z=-2t$

CURVE NELLO SPAZIO

8) $P_0=(0,1,5/4) \to t_0=\frac{5}{2}\pi$ $\begin{cases} \cos t=0 \\ \operatorname{sen} t=1 \\ \frac{1}{2\pi}t=5/4 \to t_0=\frac{5}{2}\pi \end{cases}$ sono verificate

$\gamma'(t)=(-\operatorname{sen} t, \cos t, \frac{1}{2\pi})$

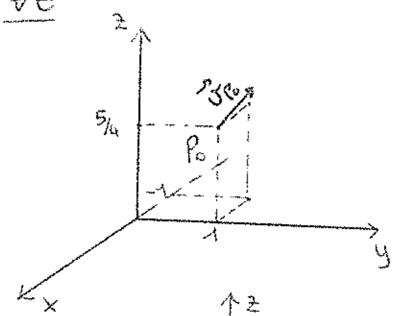
- $\gamma'(t_0)=$ vett. tg in $P_0=(-1,0,\frac{1}{2\pi}) \to \vec{v}_{P_0}=-\vec{i}+\frac{1}{2\pi}\vec{k}$

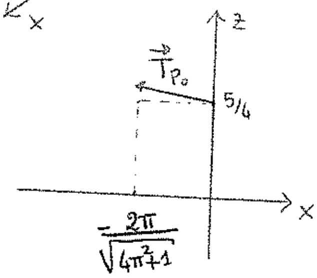
$\|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2+1}$. $\vec{T}_{P_0}=-\frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2+1}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{4\pi^2+1}}\vec{k}$

- retta tangente in P_0 $\begin{cases} x=-t \\ y=1 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=5/4+\frac{1}{2\pi}t \end{cases}$ $\cap$ PIANI $\begin{cases} y=1 \quad \text{piano VERTICALE} \\ z=-\frac{1}{2\pi}x+\frac{5}{4} \end{cases}$

γ è di classe $C^1 \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + \frac{1}{4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2+1}$ $\underline{\forall t}$

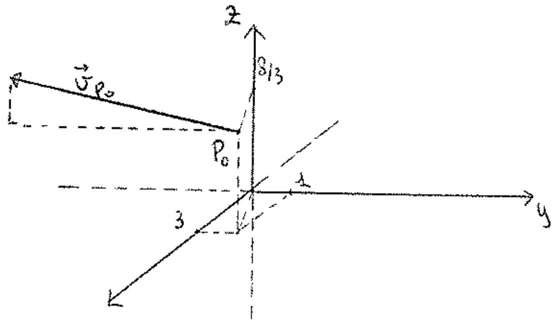
- $L(\gamma) = \int_0^{4\pi} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2+1}\, dt = 2\sqrt{4\pi^2+1}$





9)

$P_0 = (3, 1, \frac{8}{3}) \to t_0 = \frac{2}{3}\pi$ $\begin{cases} 2\cos(3t) = 2 \\ 2\operatorname{sen}(3t) = 0 \\ \frac{4}{\pi} t = \frac{8}{3} \end{cases}$ $\to$ $\begin{matrix} 2\cos(2\pi) = 2 \text{ OK} \\ 2\operatorname{sen}(2\pi) = 0 \text{ OK} \end{matrix}$ $\to t_0 = \frac{2}{3}\pi$



$\gamma'(t) = (-6\operatorname{sen}(3t), -6\cos(3t), \frac{4}{\pi})$

- $\vec{v}_{P_0} = -6\vec{j} + \frac{4}{\pi}\vec{k}$

$\gamma'(\frac{2}{3}\pi) = (0, -6, \frac{4}{\pi})$

- retta tangente in P_0 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 - 6t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{8}{3} + \frac{4}{\pi} t \end{cases}$ $\cap$ PIANI $\begin{cases} x = 3 \\ z = -\frac{2}{3\pi} y + \frac{8}{3} + \frac{2}{3\pi} \end{cases}$

- γ è di classe C^1 $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\underbrace{36\operatorname{sen}^2(3t) + 36\cos^2(3t)}_{36(\operatorname{sen}^2(3t)+\cos^2(3t))} + \frac{16}{\pi^2}} =$

$= \sqrt{36 + \frac{16}{\pi^2}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{9\pi^2+4}$

$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi}\sqrt{9\pi^2+4}\, dt = 4\sqrt{9\pi^2+4}$

- $\vec{N} = (0, -6, \frac{4}{\pi})$ $\qquad \cancel{(x-3)\cdot 0} + (y-1)(-6) + (z - \frac{8}{3})\frac{4}{\pi} = 0$

$\frac{4}{\pi} z = 6y - 6 + \frac{32}{3\pi}$ $\qquad z = \frac{3}{2}\pi y + \frac{8}{3} - \frac{3}{2}\pi$

10) γ è di classe C^1 in quanto $\gamma'(t) = (2t\cos t - t^2\operatorname{sen} t, 2t\operatorname{sen} t + t^2\cos t, 2)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2\cos^2 t + t^4\operatorname{sen}^2 t - 4\cancel{t^3\operatorname{sen} t\cos t} + 4t^2\operatorname{sen}^2 t + t^4\cos^2 t + 4\cancel{t^3\operatorname{sen} t\cos t} + 4}$

$= \sqrt{4t^2 + t^4 + 4} = \sqrt{(t^2+2)^2} = |t^2+2| = t^2+2$ perché $t^2+2 \geq 2 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$$L(\gamma)=\int_0^{2\pi}(t^2+2)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+2t\right]_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^3+4\pi=$$
$$=4\pi\left(\frac{2}{3}\pi^2+1\right)$$

11) $t_0=1 \rightarrow P_0=(1,0,2)$ $\quad \gamma'(t)=(4t,\,2t-3t^2,\,6t^2)$

- $\gamma'(1)=(4,-1,6)$ $\quad \vec{v}_{P_0}=4\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}$

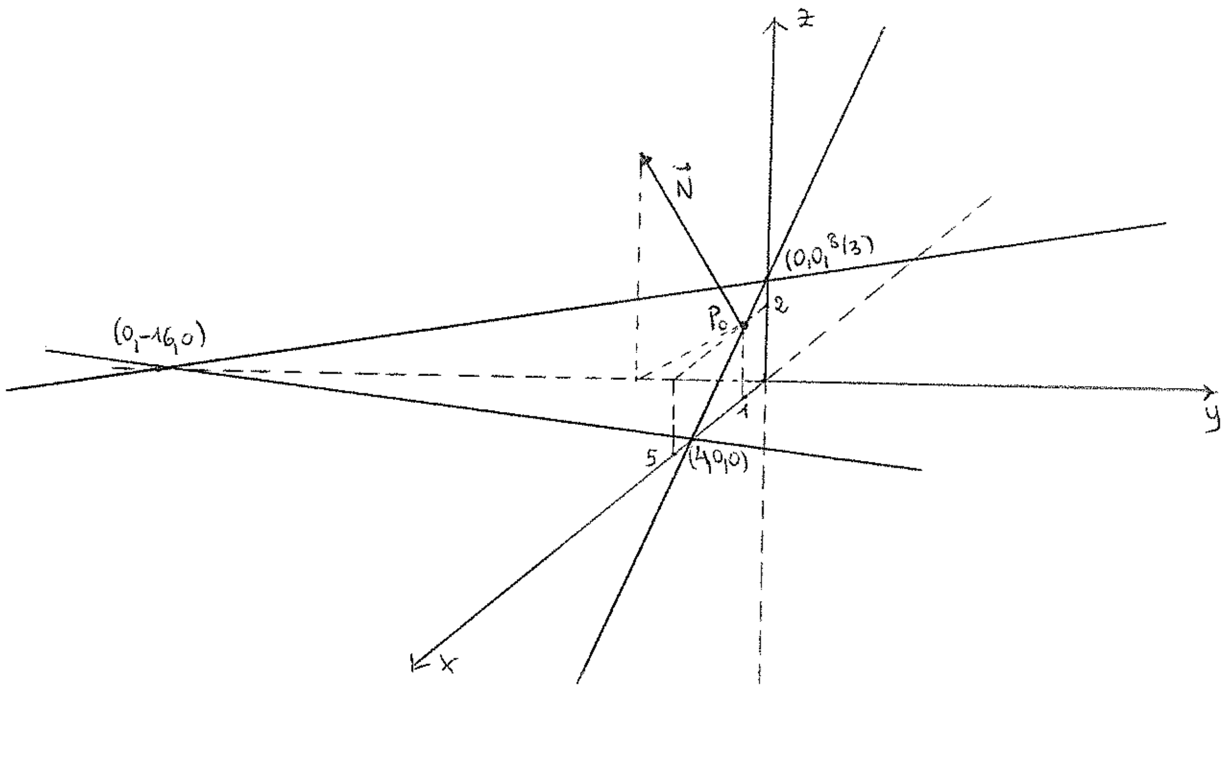
- retta tang in P_0 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=2+6t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\quad \cap$ PIANI $\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \\ z=2-6y \end{cases}$

- $\vec{N}=(4,-1,6)$ $\quad$ eq.^{ne} vettoriale $(P-(1,0,2))\cdot(4,-1,6)=0$

  $4(x-1)-y+6(z-2)=0$

  $6z=-4x+y+16$ $\qquad z=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y+\frac{8}{3}$

  piano per $(0,0,\frac{8}{3})$ $(4,0,0)$ $(0,-16,0)$



12) $P_0=(0,0,0)$ corrisponde a $t_0=\frac{\pi}{2}$ $\quad \begin{cases} 0=2\cos t \\ 0=2\cos t \\ 0=2\cos t \\ t\in[0,\pi] \end{cases} \to t_0=\frac{\pi}{2}$

$\gamma'(t)=(-2\,\mathrm{sen}\,t,-2\,\mathrm{sen}\,t,-2\,\mathrm{sen}\,t)$

$x(t),y(t),z(t)$ sono continue, derivabile e le derivate sono continue

$\Rightarrow \gamma$ è di classe C^1.

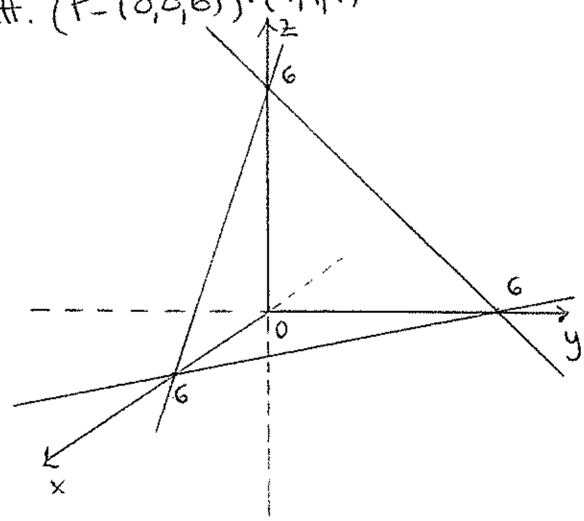
$\vec{v}_{P_0}=-2\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k} \qquad \|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\vec{T}_{P_0}=-\frac{1}{\sqrt3}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt3}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt3}\vec{k}$

$r_{tan}\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t \\ z=-2t \end{cases} t\in\mathbb{R} \quad \cap$ piani $\begin{cases} y=x \\ z=x \end{cases}$ piano verticale poggiato sulla bisettrice

$\vec{N}=(-2,-2,-2)$ oppure $\vec{N}=(1,1,1)$ eq.^{ne} vett. $(P-(0,0,6))\cdot(1,1,1)=0$

$x+y+(z-6)=0 \qquad z=-x-y+6$ piano inclinato per $(0,0,6)$ $(6,0,0)$ $(0,6,0)$



$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{12\,\mathrm{sen}^2 t}=2\sqrt3\,|\mathrm{sen}\,t|$

$I=[0,\pi]$ chiuso e limitato

$\Rightarrow L(\gamma)=\int_0^\pi 2\sqrt3\,|\mathrm{sen}\,t|\,dt = \underset{\substack{t\in[0,\pi] \\ \mathrm{sen}\,t\geq 0}}{} \int_0^\pi 2\sqrt3\,\mathrm{sen}\,t\,dt =$

$= 2\sqrt3\,\left[-\cos t\right]_0^\pi = 2\sqrt3\,[1-(-1)] = 2\sqrt3\cdot 2 = \boxed{4\sqrt3}$

13) γ è di classe C^1 $\quad \gamma'(t)=\left(3(-\mathrm{sen}\,t+\cos t),\,3(\cos t+\mathrm{sen}\,t),\,\frac{3}{2}\sqrt{t}\right)$

($x'(t),y'(t),z'(t)$ sono continue), $I=[0,8]$ è chiuso e limitato

$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{9(\underbrace{\mathrm{sen}^2 t+\cos^2 t}_{1}-\cancel{2\,\mathrm{sen}\,t\cos t})+9(\underbrace{\cos^2 t+\mathrm{sen}^2 t}_{1}+\cancel{2\,\mathrm{sen}\,t\cos t})+\frac{9}{4}t} = \sqrt{18+\frac{9}{4}t} = 3\sqrt{2+\frac14 t}$

$L(\gamma)=\int_0^8 3\sqrt{2+\frac14 t}\,dt = 3\cdot4\cdot\int_0^8 \frac14\left(2+\frac14 t\right)^{1/2}dt = 12\left[\frac{\left(2+\frac14 t\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^8 =$

$= 8\left[\left(2+\frac14 t\right)^{3/2}\right]_0^8 = 8\left[4^{3/2}-2^{3/2}\right]=8\left[8-2\sqrt2\right]=\boxed{64-16\sqrt2}$

$(=16(4-\sqrt2))$

14) $P_0=(2,4,\frac{16}{3}) \to t_0=2$ $\quad \begin{cases} 2=t \to t=2 \\ 4=t^2 \to t=\pm 2 \\ \frac{16}{3}=\frac{2}{3}t^3 \to t^3=8 \to t=2 \end{cases}$ $\quad t_0=2$

$t\in[0,3]$

$\gamma'(t)=(1,2t,2t^2)$ $\quad \vec{v}_{P_0}=\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+8\vec{k}$ $\quad \|\vec{v}_{P_0}\|=\sqrt{1+16+64}=\sqrt{81}=9$

$\vec{T}_{P_0}=\frac{1}{9}\vec{\imath}+\frac{4}{9}\vec{\jmath}+\frac{8}{9}\vec{k}$ $\quad r_{tan}\begin{cases} x=2+t \\ y=4+4t \\ z=\frac{16}{3}+8t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\quad \cap$ PIANI $\begin{cases} y=4x-4 \\ z=8x-\frac{32}{3} \end{cases}$

γ è di classe C^1 (sia $x(t)\,y(t)\,z(t)$ sia $x'(t), y'(t), z'(t)$ sono POLINOMI)

$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+4t^2+4t^4}=\sqrt{(1+2t^2)^2}=|1+2t^2|=1+2t^2$

$1+2t^2\geq 1 \ \forall t$

$I=[0,3]$ chiuso e limitato

$$\Rightarrow L(\gamma)=\int_0^3(1+2t^2)\,dt=\left[t+\frac{2}{3}t^3\right]_0^3=3+18=\boxed{21}$$

(*) da pag. 3 Sol.^{ne} ES. 5) Se si volesse determinare l'equazione del piano per i 3 PUNTI è necessario prima stabilire se il piano è verticale oppure inclinato/orizzontale. Si considerano le proiezioni di $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ sul piano (x,y)

(x_0,y_0)
(x_1,y_1)
(x_2,y_2)

→ NON SONO ALLINEATI → piano è inclinato o orizzontale → $z=ax+by+c$ e si determinano i 3 coeff. imponendo il passaggio per i 3 PUNTI

→ SONO ALLINEATI

→ P_0, P_1, P_2 non sono ALLINEATI in $\mathbb{R}^3$ → il piano è VERTICALE con eq.^{ne} uguale a quella della retta per $(x_0,y_0), (x_1,y_1)\,(x_2,y_2)$

→ P_0, P_1, P_2 sono ALLINEATI in $\mathbb{R}^3$ → per 3 PUNTI allineati PASSANO INFINITI PIANI

OSS. Per verificare se 3 punti nello spazio sono allineati basta scrivere le equazioni parametriche della retta per due di essi e controllare se passa anche per il terzo punto.

Nel nostro caso $P_0 = (0,0,8)$ $P_1 = (0,-8,0)$ $P_2 = (4,0,0)$: le proiezioni su (x,y) sono i punti $(0,0)$ $(0,-8)$ e $(4,0)$ che ovviamente non sono allineati $\longrightarrow$ $z = ax+by+c$ piano inclinato (il nostro piano non è orizzontale perché $z_0 \neq z_1 = z_2$)

$$\begin{cases} 8 = c \\ 0 = -8b+c \\ 0 = 4a+c \end{cases} \quad \begin{cases} c = 8 \\ 8b = 8 \\ 4a = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 8 \end{cases} \quad \boxed{z = -2x+y+8}$$