ESERCITAZIONE SULLE CURVE n. 1

$\boxed{1}$ Sia $\gamma : [-\pi, 9]$ la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita da:

$$\begin{cases} x(t) = -4 + 5\cos t \\ y(t) = 3 - 2 \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [-\pi, 0]$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = \sqrt{9-t} \end{cases} \quad t \in \,]0, 9]$$

Disegnare con cura il sostegno di γ, specificando per ogni tratto il verso di percorrenza e l'equazione (cartesiana o implicita).

Svolgimento: Ricordiamo che una $\boxed{\text{curva}}$ in $\mathbb{R}^2$ è una funzione CONTINUA $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ dove I è un INTERVALLO di $\mathbb{R}$.
Il $\boxed{\text{sostegno}}$ di γ è invece l'insieme di tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ corrispondenti ai valori di I [SOSTEGNO DI $\gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$]

Si tratta di una curva perché le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono tutte continue nel loro dominio, in entrambi i tratti di variazione del parametro t. L'unico punto in cui ci possono essere dei dubbi (ma non ci saranno) è quello corrispondente a $t=0$, perché il sostegno di una curva DEVE POTER ESSERE DISEGNATO "SENZA STACCARE LA PENNA DAL FOGLIO", cioè senza interruzioni, come la traiettoria di un corpo che si muove dal punto P_{in}(iniziale) al punto P_{fin}(finale), in un certo <u>VERSO</u>.

Vediamo:

<u>1° Tratto</u> - Si tratta di un arco di ELLISSE (la parametrizzazione è infatti della forma $\begin{cases} x(t) = x_c + a\cos t \\ y(t) = y_c \pm b \,\text{sen}\, t \end{cases}$)

percorso in verso $\boxed{\text{orario}}$ $(b<0)$.

$\boxed{x_c = -4}$, $\boxed{y_c = 3}$, $\boxed{a = 5}$ e $\boxed{b = 2}$ SEMIASSI.

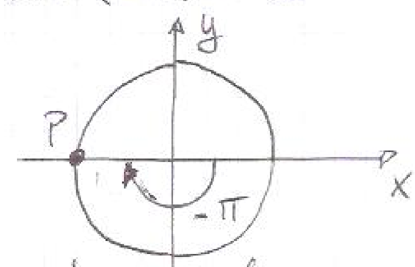
L'equazione implicita è $\boxed{\dfrac{(x+4)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1}$

(in generale $\dfrac{(x-x_c)^2}{\ } + \dfrac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$)

Determiniamo $P_{in} = \gamma(-\pi)$ VALORE INIZIALE DI t

$$\begin{cases} x(-\pi) = -4 + 5\cos(-\pi) = -4-5 = -9 \\ y(-\pi) = 3 - 2\,\text{sen}\,(-\pi) = 3 \end{cases}$$

Infatti ragionando sulla circonferenza goniometrica deduciamo che $\cos(-\pi) = -1$ e $\operatorname{sen}(-\pi) = 0$



(ricordiamo che in generale $\boxed{\operatorname{sen}\alpha = y_P}$ e $\boxed{\cos\alpha = x_P}$, dove P è il punto di intersezione fra il lato termine dell'angolo α e la circonferenza di raggio 1; il lato inizio corrisponde sempre al verso positivo dell'asse x)

Quindi $\boxed{P_{in} = (-9, 3)}$

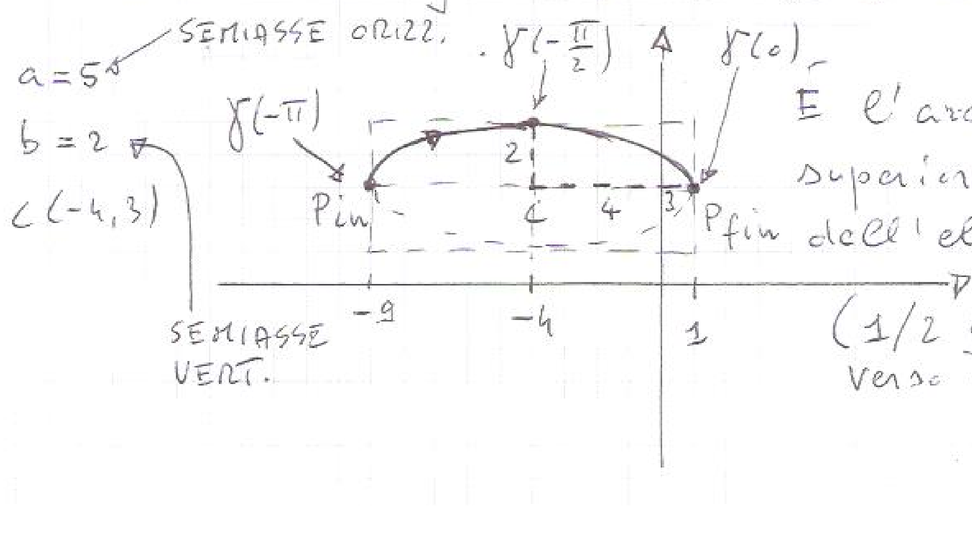
$P_{fin} = \gamma(0) = (-4 + 5\cos 0, 3 - 2\operatorname{sen} 0) = \boxed{(1, 3)}$

perché $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$.

Volendo possiamo calcolare anche un punto intermedio.

Ad esempio $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-4 + 5\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), 3 - 2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
$= (-4, 5)$

Passiamo al disegno del 1° tratto del sostegno:



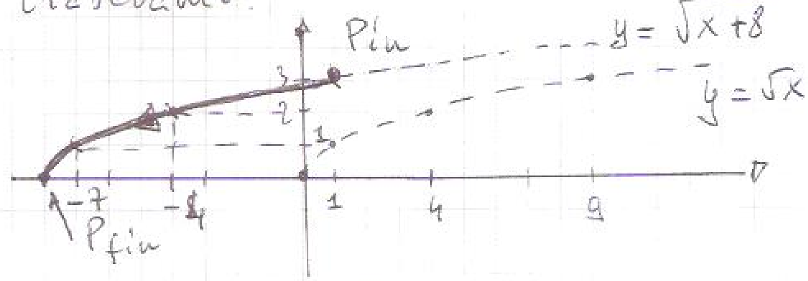
È l'arco superiore dell'ellisse.

(1/2 giro in verso orario)

2° Tratto: Arriviamo all'equazione cartesiana eliminando il parametro tra le 2 equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \sqrt{9 - t} \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} t &= 1 - x \\ y &= \sqrt{9 - (1-x)} = \sqrt{x+8} \end{aligned}$$

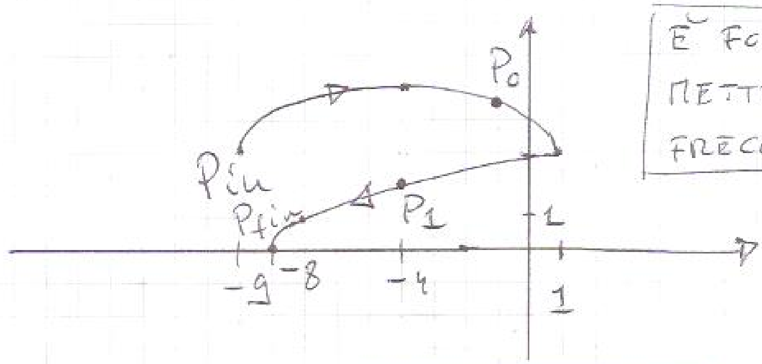
Osserviamo che $y = \sqrt{x+8}$ si ottiene da $y = \sqrt{x}$ con una traslazione orizzontale di 8 verso sx. (da $f(x)$ a $f(x+8)$). Disegnamo $y = \sqrt{x}$ per punti e trasliamo:



$P_{in} = \gamma(0) = (1, 3)$ $\qquad$ $P_{fin} = \gamma(9) = (-8, 0)$

ANCHE SE 0 APPARTIENE AL 1° TRATTO

Disegnamo ora tutto il sostegno (ci sono 2 tratti, ma la curva è unica e CONTINUA):



È FONDAMENTALE METTERE LE FRECCE

$\boxed{2}$ Con riferimento alla curva dell'es. $\boxed{1}$, calcolare:

a) IL VETTORE TANGENTE IN $P_0 \left(-4+\frac{5\sqrt{2}}{2}, 3+\sqrt{2}\right)$

b) LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA TANGENTE IN P_0

c) I DUE VETTORI NORMALI IN $P_1=\gamma(5)$

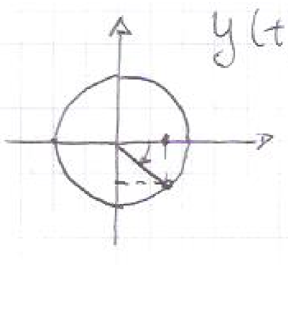
d) L'EQUAZIONE CARTESIANA DELLA RETTA NORMALE IN P_1

e) DISEGNARE P_0, IL VETTORE TANGENTE IN P_0, P_1 ED ENTRAMBI I VETTORI NORMALI IN P_1 -

Svolgimento: a) Occorre capire a quale valore di t corrisponde P_0 - Facendo un calcolo approssimativo ($\sqrt{2} \simeq 1,4$) vediamo che $x_0 \simeq -0,5$ e $y_0 \simeq 4,4$ - Siamo quindi sull'arco di ellisse (1° tratto) - Quindi

$$x(t) = \boxed{\cancel{-4}+5\cos t = \cancel{-4}+\frac{5\sqrt{2}}{2}} \longrightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y(t) = \boxed{3-2\,\text{sen}\,t = 3+\sqrt{2}} \longrightarrow \text{sen}\,t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$\longleftarrow$ IL VALORE DI t CHE SODDISFA LE 2 CONDIZIONI È $\boxed{-\frac{\pi}{4}}$

(n.b.: le due condizioni sono verificate da $t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ma abbiamo scelto tra le infinite soluzioni $-\frac{\pi}{4}$ perché è la sola che appartiene a $[-\pi, 0]$; se l'intervallo fosse stato ad esempio $[0, 2\pi]$ avremmo scelto $\frac{7}{4}\pi$ che si ottiene per $k = 1$)

Quindi $t_0 = -\frac{\pi}{4}$ e $P_0 = \gamma\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Determiniamo ora le equazioni del vettore tangente $\gamma'(t)$ nel 1° tratto per t generico:

$$\begin{cases} x'(t) = -5 \operatorname{sen} t \\ y'(t) = -2 \cos t \end{cases} \qquad \gamma'(t) = (-5 \operatorname{sen} t, -2 \cos t)$$

QUINDI: $\vec{v}_{P_0} = \gamma'(t_0) = \left(-5 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right), -2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

VETTORE TANG. IN P_0

$$= \left(-5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), -\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j}$$

Questo vettore è applicato in P_0 e termina (punta) in $\boxed{P_0 + \vec{v}_{P_0}}$, cioè nel punto avente coordinate:

$$x = -4 + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = -4 + 5\sqrt{2} \simeq 3$$

$$y = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$$

(SERVIRANNO PER IL DISEGNO)

b) Le equazioni parametriche della retta tangente in generale si ottengono da $P = P_0 + \vec{v}_{P_0} t$, con $t \in \mathbb{R}$.

Quindi: $\begin{cases} x(t) = -4 + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} t \\ y(t) = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{2} t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

c) $5 \in]0, 9]$; siamo quindi nel 2° tratto

$\gamma(5) = (1-5; \sqrt{9-5}) = \boxed{(-4, 2) = P_1}$

Il vettore tangente nel 2° tratto è

$\gamma'(t) = \left(-1, \frac{-1}{2\sqrt{9-t}}\right)$ (la derivata di $\sqrt{f(t)}$ è $\frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}$)

Quindi:

$\gamma'(5) = \left(-1, \frac{-1}{2\sqrt{9-5}}\right) = \left(-1, -\frac{1}{4}\right)$

I vettori normali si ottengono dal vettore tangente scambiando fra loro le coordinate e cambiando segno a una sola di esse.

Quindi: $\vec{N}_{ant} = \left(\frac{1}{4}, -1\right)$ e $\vec{N}_{or} = \left(-\frac{1}{4}, 1\right)$

(LE PUNTE SONO IN $\left(-\frac{15}{4}, 1\right)$ e $\left(-\frac{17}{4}, 3\right)$) $= \frac{1}{4}\vec{i} - \vec{j}$ $\quad = -\frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j}$

d) L'equazione cartesiana della retta normale al sostegno in P_1 si ottiene tenendo conto che la retta che corrisponde a un vettore $a\vec{i}+b\vec{j}$ e passa per $P_0(x_0,y_0)$ ha equazione:

$$\boxed{y=y_0+\frac{b}{a}(x-x_0)}$$

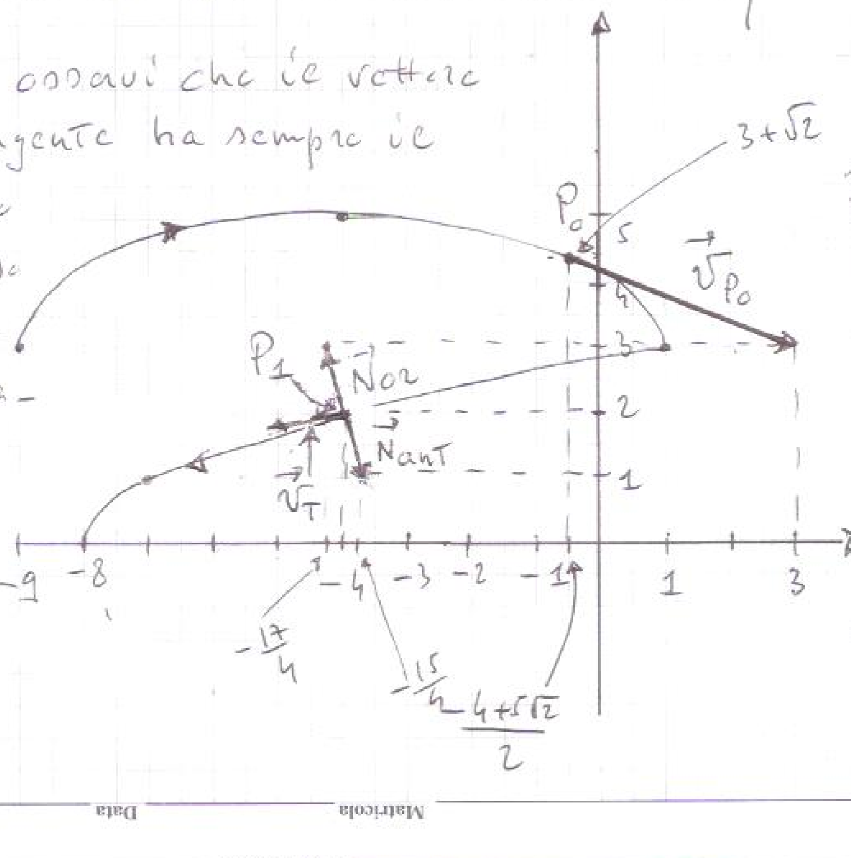
dove $\frac{b}{a}$ è il COEFFICIENTE ANGOLARE m.

Quindi l'equazione è: $y = 2+\frac{\overset{b}{-1}}{\underset{a}{\frac{1}{4}}}(x+4)$

$$y=2-4(x+4) \longrightarrow \boxed{y=-4x-14}$$

n.b: se la retta è VERTICALE l'equazione è $\boxed{x=x_0}$

e) Si osservi che il vettore tangente ha sempre il verso stesso della curva.



n.b.: $\vec{N}_{or}$ e $\vec{N}_{ant}$ si ottengono da $\vec{v}_{tang}$ ruotando in verso orario o antiorario

3 Data la curva γ di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x(t) = t - 17 \\ y(t) = \frac{1}{4}(t-13)^2 - 4 \end{cases} \quad t \in [9, 19]$$
disegnare con cura il sostegno di γ, specificando il verso di percorrenza e la equazione cartesiana.

Svolgimento: Eliminando il parametro:

$$x = t - 17 \longrightarrow t = x + 17$$

$$y = \frac{1}{4}(x + 17 - 13)^2 - 4$$

$$y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4$$

$$y = \frac{1}{4}(x^2 + 8x + 16) - 4$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4 - 4$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x^2 + 2x}$$

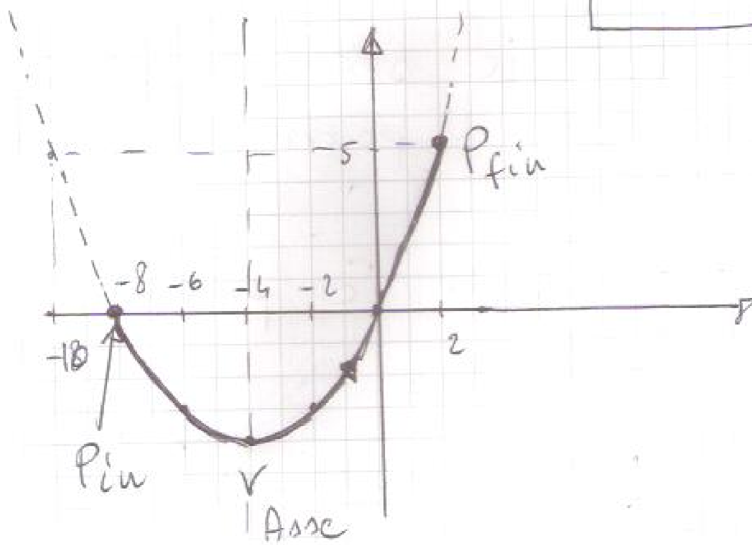
ARCO DI PARABOLA CON ASSE // ASSE y PASSANTE PER L'ORIGINE

Costruiamo per punti il grafico (in alternativa potremmo determinare punti dalle equazioni parametriche, ma è più facile partire dall'equazione cartesiana).

Per trovare l'ascissa x_V del vertice calcoliamo $y'(x) = \frac{1}{2}x + 2$ e poniamo $y'(x) = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}x + 2 = 0$

Quindi
$$\begin{cases} x_v = -4 \\ y_v = \frac{1}{4}(-4)^2 + 2(-4) = 4 - 8 = -4 \end{cases}$$

$$\boxed{V(-4,-4)}$$



x	y
-4	-4
-2	-3
0	0
-6	-3
-8	0
2	5
-10	5

Potevamo anche trovare meno punti - Abbiamo utilizzato la simmetria della parabola rispetto all'asse (la retta verticale passante per il vertice)

Vediamo ora di delimitare il sostegno.

$$P_{in} = \gamma(9) = (-8, 0)$$
$$P_{fin} = \gamma(19) = (2, 5)$$

Otteniamo quindi l'arco di parabola evidenziato, nel verso delle x crescenti (da sx verso dx) -