COGNOME	______________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________		
MATRICOLA		1 2 3 4	
CORSO	AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL		

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2018-2019 — PARMA, 30 AGOSTO 2019

AN2-30/8/19 -1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare la risposta.**

$12^2=144$ $13^2=169$ $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ $\sqrt{5}\approx 2{,}24$ $\sqrt{6}\approx 2{,}45$ $\frac{32}{27}\approx 1{,}9$ $\frac{21}{5}=4{,}2$ $\sqrt{289}=17$

0) **(32 PUNTI) PARTE PRELIMINARE**

a) Considerate la curva $\gamma:[0\,,\,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ $(\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t)))$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{5}{2}\,\mathrm{sen}\,t \\ y(t) = \dfrac{13}{2}\cos t \\ z(t) = 4 + 6\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t\in[0\,,\,2\pi]\,.$$

i) Determinate la lunghezza di γ.

b1) Sia E l'insieme definito da $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2-4\le y\le \frac{1}{2}x+\frac{13}{2}\,,\ x\le 0\}$

i) Disegnate con cura l'insieme E sul foglio a quadretti.

ii) Per ogni tratto del bordo di E scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre tale tratto, specificando il verso di percorrenza.

b2) Sia E l'insieme definito nell'esercizio b1).

i) Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme E come normale rispetto a x; ripetete come normale rispetto a y.

c) Considerate la funzione $f(x,y) = 2 + 9\log\left(\frac{y^2}{9} - 1 + \frac{x^2}{36}\right)$.

i) Determinate il dominio di f, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano in modo che risulti perfettamente chiaro quali punti vi appartengono.

ii) Determinate l'insieme di livello E_k cui appartiene il punto $P_0 = (-6, 3)$; poi disegnate sia l'insieme di livello trovato, sia il punto P_0.

iii) Determinate e disegnate il gradiente di f nel punto P_0.

iv) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre l'insieme di livello trovato al punto ii) ed utilizzatele per determinare il vettore tangente e l'equazione cartesiana della retta tangente all'insieme di livello in P_0. Disegnate il vettore tangente trovato.

v) Utilizzate il gradiente di f per determinare di nuovo con un procedimento diverso l'equazione cartesiana della retta tangente richiesta al punto iv), spiegando con precisione il ragionamento seguito.

vi) Determinate la massima e la minima pendenza del grafico di f in P_0 e le direzioni nelle quali queste pendenze vengono raggiunte.

vii) Determinate le direzioni nelle quali la derivata direzionale di f nel punto P_0 vale -6.

d) Si consideri l'equazione differenziale $\frac{1}{2}y''(x) - 3y'(x) + 5y(x) = 3x\,e^{3x}$.

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = c_1 e^{3x}\operatorname{sen}x + c_2 e^{3x}\cos x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: .. eq.^ne omog. associata $\frac{1}{2}y''(x) - 3y'(x) + 5y(x) = 0$

eq.^ne caratt. $\frac{1}{2}t^2 - 3t + 5 = 0 \quad t^2 - 6t + 10 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-10}}{1} = 3 \pm i \quad \alpha = 3 \quad \beta = 1$

$\Delta < 0$ sol.^ni complesse coniugate

Sol.^ni FONDAM. $y_1(x) = e^{3x}\operatorname{sen}x \quad y_2(x) = e^{3x}\cos x$

La soluzione particolare va cercata nella forma $\bar{y}(x) = (Ax + B)e^{3x}$

il 2° m. dell'eq.^ne è della forma Pol 1° grado per e^{kx} con $k = 3$ e

perchè .. non si deve moltiplicare né per x, né per x^2 perchè $k = 3$ non è sol.^ne dell'eq.^ne caratteristica (le cui sol.^ni sono $t = 3 \pm i$).

(Non è richiesto di determinare la soluzione particolare).

e) (Sul foglio a quadretti) Sia f la funzione definita da $f(x,y) = \frac{1}{8}(x^2 - 4)(y + x + 1)$ (è la stessa funzione considerata nell'esercizio n.1).

i) Determinate il dominio di f.

ii) Determinate i punti in cui f vale 0 e il segno di f negli altri punti (illustrate i risultati con un disegno).

iii) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

1) (Sul foglio a quadretti, 6 PUNTI) Considerate la funzione dell'esercizio 0e):

$$f(x,y) = \frac{1}{8}(x^2 - 4)(y + x + 1)$$

Dopo averne giustificato l'esistenza, (utilizzando anche quanto ottenuto nell'esercizio n.0e) determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \text{triangolo di vertici } (2,-3),\ (-2,1),\ (-4,-3)\ .$$

---

2) (Sul foglio a quadretti, 10 PUNTI) Considerate la funzione $g(x,y) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 - 4$.

a) Determinate il dominio di g, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g, poi spiegate di quale tipo di superficie si tratta (senza dimenticare l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari precisate se l'angolo di apertura risulta minore o maggiore di 45 gradi e come si calcola); infine disegnate con cura il grafico di g.

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 - 4 \leq z \leq 7 - \frac{5}{3}\sqrt{x^2+y^2}\ y \leq 0\}.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti, 5 PUNTI) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y''(x) - 5y'(x) = -2y(x) + 5\,\text{sen}(\frac{x}{2}) + 3\cos(\frac{x}{2}) \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Risposta: ... $y(x) = -\frac{22}{3}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{7}{3}e^{2x} + 2\cos(\frac{x}{2})$

ES. 0) a) $I=[0,2\pi]$ è un intervallo chiuso e limitato, $(x(t), y(t), z(t))$ sono di classe C^1 : $\gamma'(t)=\left(-\frac{5}{2}\cos t, -\frac{13}{2}\operatorname{sen} t, 6\cos t\right)$, quindi possiamo applicare il teorema e la lunghezza sarà finita.

$$\|\gamma'\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\cos t\right)^2 + \left(-\frac{13}{2}\operatorname{sen} t\right)^2 + (6\cos t)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}+36\right)\cos^2 t + \frac{169}{4}\operatorname{sen}^2 t} =$$

$$= \sqrt{\frac{\overbrace{25+144}^{=169}}{4}\cos^2 t + \frac{169}{4}\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\frac{169}{4}\left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right)} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$$

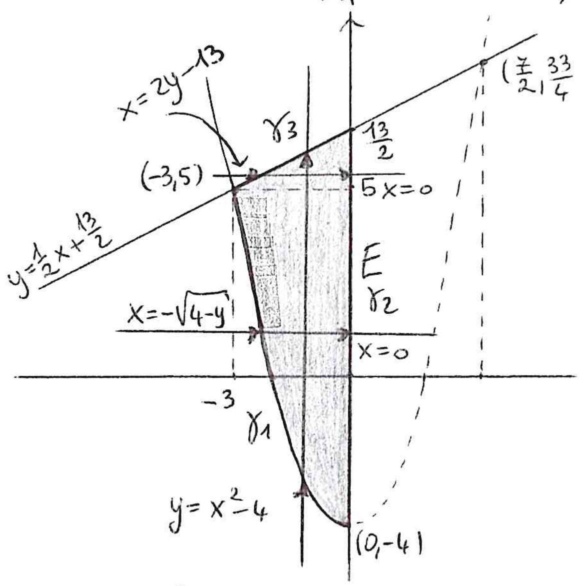
$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{13}{2}\,dt = \boxed{13\pi}$$

b1) $y=x^2-4$ è la parabola di $V(0,-4)$ verso l'alto $\cap$ asse x in $x=\pm 2$.

$y=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}$ è la retta per $(-13,0)$ e $\left(0,\frac{13}{2}\right)$.

$$\cap \begin{cases} y=x^2-4 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2} \end{cases} \quad x^2-\frac{1}{2}x-\frac{21}{2}=0 \quad 2x^2-x-21=0 \quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+168}}{4}=\frac{1\pm 13}{4}$$

$x_1=-3 \to (-3,5)$ $\qquad x_2=\frac{14}{4}=\frac{7}{2} \to \left(\frac{7}{2},\frac{33}{4}\right)$ (non interessa perchè c'è la condizione $x\le 0$)



$x\le 0$ a sinistra dell'asse y

$$\gamma_1 \begin{cases} x=t \\ y=4-t^2 \end{cases} \quad t\in[-3,0] \quad \text{verso delle } x \text{ crescenti}$$

$$\gamma_2 \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} \quad t\in\left[-4,\frac{13}{2}\right] \quad \text{verso delle } y \text{ crescenti}$$

$$\gamma_3 \begin{cases} x=t \\ y=\frac{1}{2}t+\frac{13}{2} \end{cases} \quad t\in[-3,0] \quad \text{verso delle } x \text{ crescenti}$$

b2) $E_x=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -3\le x\le 0,\ 4-x^2\le y\le \frac{1}{2}x+\frac{13}{2}\right\}$

$E_{y,1}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -4\le y\le 5,\ -\sqrt{4-y}\le x\le 0\right\}$

$E_{y,2}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 5\le y\le \frac{13}{2},\ 2y-13\le x\le 0\right\}$

$y=4-x^2$

$x^2=4-y \quad x=\pm\sqrt{4-y}$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2} \quad \frac{1}{2}x=y-\frac{13}{2}$

$x=2y-13$

AN2 - 30/8/19 - 5 -

c) $f(x,y) = 2 + 9\log\left(\frac{y^2}{9} - 1 + \frac{x^2}{36}\right)$

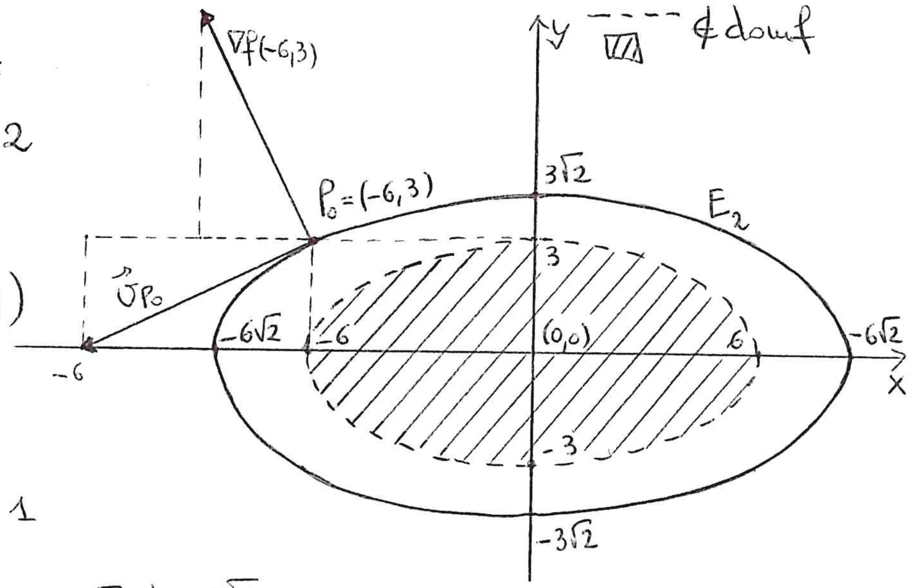
i) $\operatorname{dom} f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - 1 > 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} > 1\right\}$ ESTERNO

all' ELLISSE di $C(0,0)$ e semiassi $a=6$, $b=3$, ellisse ESCLUSO dal dominio

ii) $P_0(-6,3) \in E_K$ per $K = f(-6,3) =$

$= 2 + 9\log(\underbrace{1-1+1}_{1}) = 2 + 9\cdot 0 = 2$ ($\log 1 = 0$)

$P_0 \in E_2$



$E_2 : \cancel{2} = \cancel{2} + 9\log\left(\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$

$\log\left(\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - 1\right) = 0$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - 1 = 1 \qquad \frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{18} = 1$

ELLISSE di $C(0,0)$ e semiassi $a = 6\sqrt{2}$ $b = 3\sqrt{2}$.
$\approx 8{,}48$ $\approx 4{,}24$

iii) $\nabla f(x,y) = \left(9\frac{\frac{1}{18}x}{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-1}, 9\frac{\frac{2}{9}y}{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-1}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-1}, \frac{2y}{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-1}\right)$

$\nabla f(-6,3) = (-3, 6)$

iv) $\gamma \begin{cases} x(t) = 6\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = 3\sqrt{2}\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $P_0 = (-6,3)$ corrisponde a $t_0 = \frac{3}{4}\pi$:

$\begin{cases} -6 = 6\sqrt{2}\cos t \\ 3 = 3\sqrt{2}\operatorname{sen} t \end{cases}$ $\begin{cases} \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \to t = \frac{3}{4}\pi$ $\gamma'(t) = (-6\sqrt{2}\operatorname{sen} t, 3\sqrt{2}\cos t)$

$\vec{v}_{P_0} = \gamma'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -6\vec{i} - 3\vec{j}$ r_{tan}: $m = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$ $y = 3 + \frac{1}{2}(x+6)$

(punta del vettore in $(-6,0)$) $y = \frac{1}{2}x + 6$

v) Poichè nel punto $P_0 = (-6,3)$ il $\nabla f(-6,3)$ è

perpendicolare all'insieme di livello che passa per P_0, cioè E_2 $\Rightarrow$

r_{tan} : $(P - P_0)\cdot\nabla f(P_0) = 0$ usando $\nabla f(P_0)$ come vettore NORMALE

$(x+6, y-3)\cdot(-3,6) = 0$ $-3(x+6) + 6(y-3) = 0$ $6y = 3x + 36$

$y = \frac{1}{2}x + 6$.

AN2 - 30/8/19 - 6

v) La massima pendenza del grafico in P_0 è data dal $\|\nabla f(P_0)\| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

ed è raggiunta nella direzione $\vec{v}_{max} = \dfrac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|} = \dfrac{-3}{3\sqrt{5}}\vec{i} + \dfrac{6}{3\sqrt{5}}\vec{j}$

$\vec{v}_{max} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

Di conseguenza la minima pendenza è $-3\sqrt{5}$ raggiunta nella direzione $\vec{v}_{min} = -\vec{v}_{max} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

vi) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = -6 \quad \begin{cases} -3v_1 + 6v_2 = -6 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$ una delle sol.^{ni} dev'essere $\vec{v} = -\vec{j}$

$\begin{cases} 3v_1 = 6v_2 + 6 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 2v_2 + 2 \\ (2v_2+2)^2 + v_2^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 5v_2^2 + 8v_2 + 3 = 0 \end{cases}$

$v_2 = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-15}}{5} = \dfrac{-4 \pm 1}{5}$

$\nearrow v_2 = -1 \to v_1 = 0 \qquad \vec{v} = (0,-1) = -\vec{j}$

$\searrow v_2 = -\dfrac{3}{5} \to v_1 = \dfrac{4}{5} \qquad \vec{v} = \dfrac{4}{5}\vec{i} - \dfrac{3}{5}\vec{j}$.

e) $f(x,y) = \frac{1}{8}(x^2-4)(y+x+1)$

i) $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

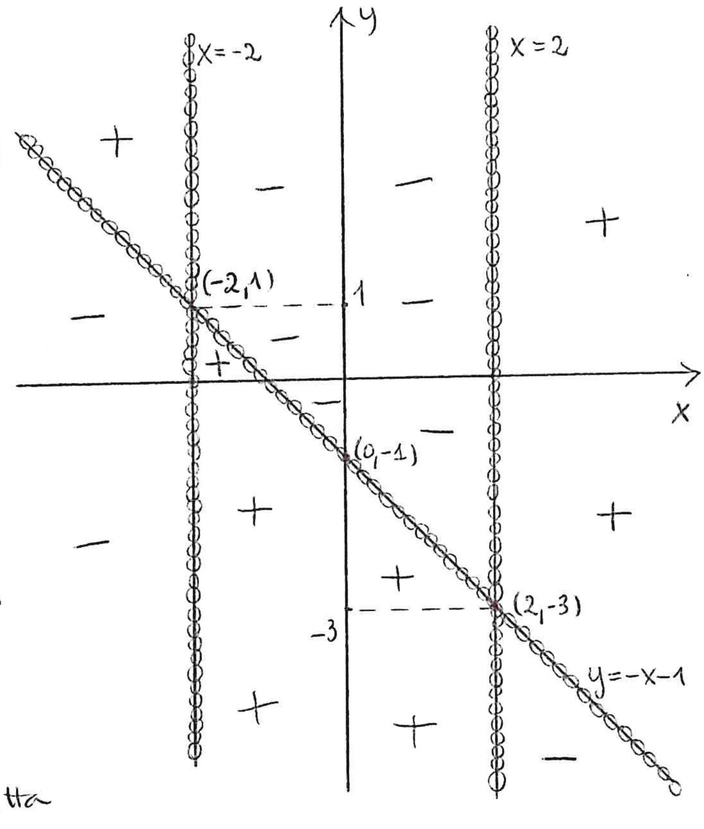
ii) $f(x,y) = 0 \iff x^2-4=0 \iff x = \pm 2$
o
$y+x+1=0 \qquad y=-x-1$

$x = \pm 2$ sono 2 rette VERTICALI

$y=-x-1$ retta per $(0,-1)$ e $(-1,0)$
$x=-2 \; y=1 \quad x=2 \; y=-3$

$f(x,y)>0 \iff \begin{cases} x^2-4>0 \\ y+x+1>0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x^2-4<0 \\ y+x+1<0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x<-2 \text{ o } x>2 \\ y>-x-1 \end{cases}$ o $\begin{cases} -2<x<2 \\ y<-x-1 \end{cases}$
sopra la retta / sotto la retta



iii) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{8} \cdot 2x(y+x+1) + \frac{1}{8}(x^2-4), \frac{1}{8}(x^2-4) \right)$

P.ti stazionari $\begin{cases} \frac{1}{4}x(y+x+1) + \frac{1}{8}(x^2-4) = 0 \\ \frac{1}{8}(x^2-4) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dots \\ x = \pm 2 \end{cases}$

se $x = 2 \Rightarrow$ 1ª eq.ne $\frac{1}{2}(y+3) = 0 \Rightarrow y = -3$ $\quad P_0(2,-3)$

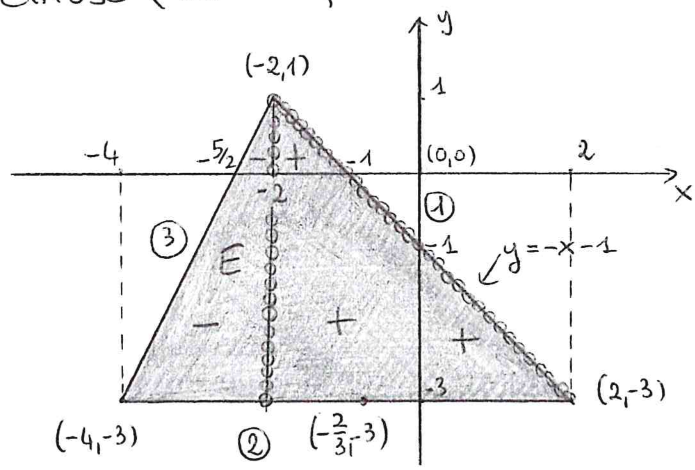
se $x = -2 \Rightarrow$ 1ª eq.ne $-\frac{1}{2}(y-1) = 0 \Rightarrow y = 1$ $\quad P_1 = (-2,1)$ 2 PUNTI STAZIONARI

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(y+x+1) + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x & \frac{1}{4}x \\ \frac{1}{4}x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4} & \frac{1}{4}x \\ \frac{1}{4}x & 0 \end{pmatrix}$$

$Hf(2,-3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(2,-3) = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow (2,-3)$ è PUNTO di SELLA

$Hf(-2,1) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-2,1) = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow (-2,1)$ è PUNTO di SELLA.

ES. 1) 1° passo E è il TRIANGOLO CHIUSO (lati compresi) di vertici $(2,-3), (-2,1), (-4,-3)$:



è CHIUSO perchè contiene il ∂E costituito dai 3 lati del triangolo

è LIMITATO perchè $E \subset B_6(0,0)$ (il punto di E più lontano da $(0,0)$ è $(-4,-3)$ e $\text{dist}((-4,-3),(0,0)) = 5$).

In più f è CONTINUA su $\mathbb{R}^2$ (perchè prodotto di 2 polinomi, uno di 2° grado in x e uno di 1° grado in x e y), in particolare f è CONTINUA su E.

Allora per il Teorema di Weierstrass siamo sicuri che f ammette MASSIMO e MINIMO ASSOLUTI su E.

AN2 - 30/8/19 - 8

2° passo: non ci sono punti di massimo o minimo locali interni a E.

3° passo: studio del BORDO di E

Sul lato 1 $f(x,y)=0$

2 $\begin{cases} x=t \\ y=-3 \end{cases}$ $t\in[-4,2]$ $g_2(t)=f(t,-3)=\frac{1}{8}(t^2-4)(-3+t+1)=$

$=\frac{1}{8}(t^2-4)(t-2)=\frac{1}{8}(t^3-2t^2-4t+8)$

$g_2'(t)=\frac{1}{8}(3t^2-4t-4)$ $\quad g_2'(t)=0 \iff 3t^2-4t-4=0$

$\iff t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\frac{2\pm4}{3}$ $\nearrow t_1=-\frac{2}{3}$, $\searrow t_2=2$ entrambi accettabili

TEMPI : $t=-4$ $\quad t=-\frac{2}{3}$ $\quad t=2$

PUNTI : $(-4,-3)$ $\quad (-\frac{2}{3},-3)$ $\quad (2,-3)$

VALORI : $f(-4,-3)=\frac{1}{8}(16-4)(-6)=\frac{1}{\cancel{8}_2}\cancel{12}^3(\cancel{-6}^3)=-9$

$f(-\frac{2}{3},-3)=\frac{1}{8}(\frac{4}{9}-4)(-3-\frac{2}{3}+1)=\frac{1}{\cancel{8}}(-\frac{\cancel{32}^4}{9})(-\frac{8}{3})=\frac{32}{27}$

$f(2,-3)=0$

3 $\begin{cases} x=t \\ y=2t+5 \end{cases}$ $t\in[-4,-2]$ retta per $(-4,-3)$ e $(-2,1)$ $\quad m=2$ $\quad y=1+2(x+2)$

$y=2x+5$

$g_3(t)=\frac{1}{8}(t^2-4)(2t+5+t+1)=\frac{1}{8}(t^2-4)(3t+6)=\frac{1}{8}(3t^3+6t^2-12t-24)$

$g_3'(t)=\frac{1}{8}(9t^2+12t-12)$ $\quad g_3'(t)=0 \iff 9t^2+12t-12=0 \iff 3t^2+4t-4=0$

$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\frac{-2\pm4}{3}$ $\nearrow t_1=-2$, $\searrow t_2=\frac{2}{3}\notin[-4,-2]$

Tempi : $t=-4$ $\quad t=-2$

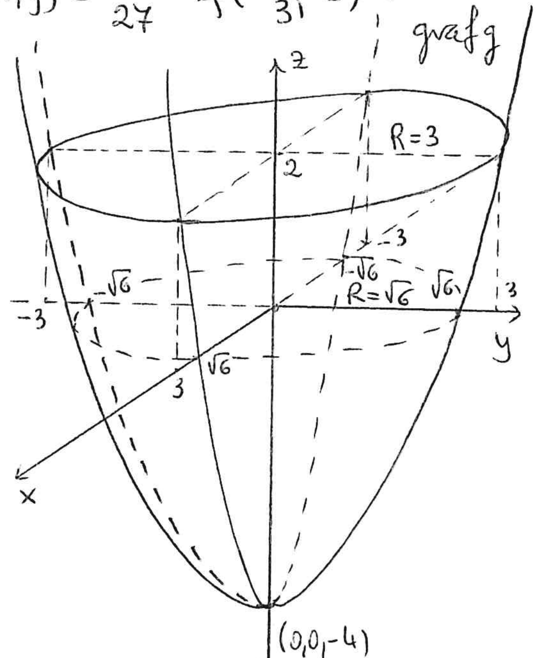
PUNTI : $(-4,-3)$ $\quad (-2,1)$

VALORI : $f(-4,-3)=-9$ $\quad f(-2,1)=0$

AN2 - 30/8/19 - 9

<u>4° passo</u> conclusione: sul bordo ∂E f è compresa tra -9 e $\frac{32}{27}$, non ci sono max o min locali interni, quindi

$$\min_E f(x,y) = -9 = f(-4,-3) \qquad \max_E f(x,y) = \frac{32}{27} = f\left(-\frac{2}{3},-3\right).$$



ES.2) a) dom $g = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

b) eq.^{ne} del grafico di g: $z = \frac{2}{3}(x^2+y^2) - 4$

Si tratta del PARABOLOIDE CIRCOLARE di $V(0,0,-4)$, verso l'alto, $a = \frac{2}{3}$ ($a<1 \Rightarrow$ è più largo di $z = x^2+y^2$), $\cap\ z=0$ su

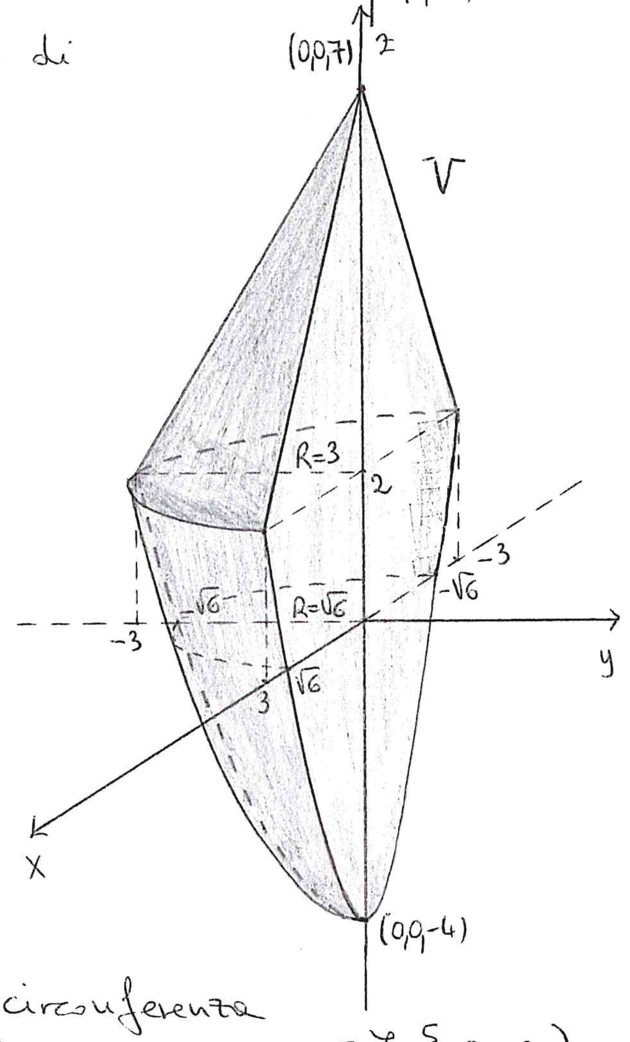
$x^2+y^2 = 6 \quad R = \sqrt{6} \simeq 2{,}45$

se $x^2+y^2 = 9 \Rightarrow z = 2$

c) $z = 7 - \frac{5}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO CIRCOLARE di $V(0,0,7)$, rivolto verso il basso, apertura $a = \frac{5}{3}$

($a>1 \Rightarrow \hat{ap} < 45°$, $\hat{ap} = \arctan\left(\frac{3}{5}\right)$)

$\cap\ z=0$ su $x^2+y^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2 \quad R = \frac{21}{5} = 4{,}2$



paraboloide $\cap$ cono

$$\begin{cases} z = \frac{2}{3}(x^2+y^2) - 4 \\ z = 7 - \frac{5}{3}\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \frac{2}{3}(x^2+y^2) - 4 = 7 - \frac{5}{3}\sqrt{x^2+y^2}$$

$R = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \qquad \frac{2}{3}R^2 + \frac{5}{3}R - 11 = 0$

$2R^2 + 5R - 33 = 0 \qquad R_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+264}}{4} =$

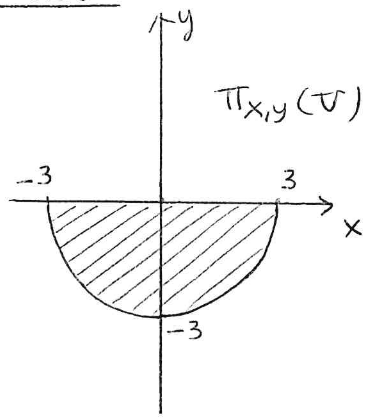
$= \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{-5 \pm 17}{4} = \nearrow R_1 = -\frac{22}{4} < 0$ non acc.

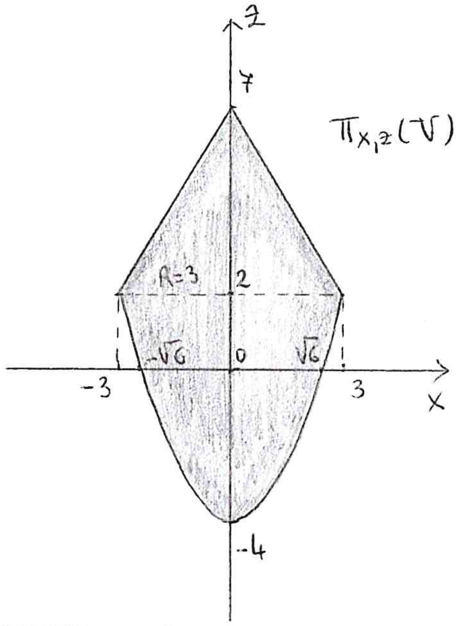
$\searrow R_2 = \frac{12}{4} = 3$

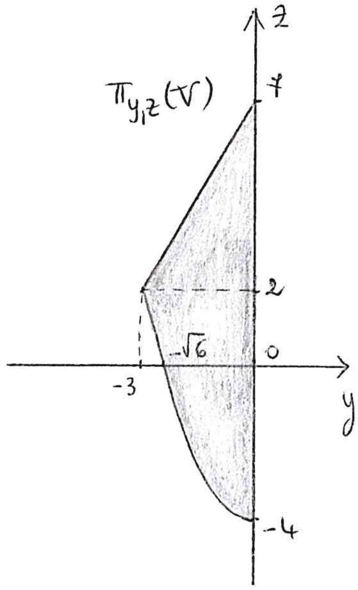
Cono e paraboloide si intersecano sulla circonferenza di $R=3$ a quota $z=2$ ($z_{par, R=3} = \frac{2}{3}\cdot 9 - 4 = 2$, $z_{cono, R=3} = 7 - \frac{5}{3}\cdot 3 = 2$).

AN2-30/8/19-10

Proiezioni







$$\text{Volume di } V = \int_{\substack{\Pi_{x,y}(V):\ x^2+y^2\le 9 \\ y\le 0}} \left[7-\frac{5}{3}\sqrt{x^2+y^2}-\left(\frac{2}{3}(x^2+y^2)-4\right)\right] dx\,dy =$$

$$\overset{\text{coord. polari}}{=} \int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_0^3 \left(11-\frac{5}{3}\rho-\frac{2}{3}\rho^2\right)\rho\, d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_0^3 \left(11\rho-\frac{5}{3}\rho^2-\frac{2}{3}\rho^3\right) d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi}\left[11\frac{\rho^2}{2}-\frac{5}{3}\frac{\rho^3}{3}-\frac{2}{3}\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 d\theta =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi}\left[\frac{99}{2}-15-\underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\overset{27}{\cancel{81}}}{\cancel{3}}}_{=\frac{27}{2}}\right] d\theta = \int_{\pi}^{2\pi}\left[\underbrace{\frac{99}{2}-\frac{27}{2}}_{\frac{72}{2}}-15\right] d\theta =$$

$$= (36-15)\int_{\pi}^{2\pi} d\theta = \boxed{21\,\pi}$$

ES. 3) eq.^{ne} omogenea associata $2y''(x)-5y'(x)+2y(x)=0$

eq.^{ne} caratt. $2t^2-5t+2=0$ $\quad t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \nearrow t_1=\frac{1}{2} \quad \searrow t_2=2$

(*) Sol.^{ni} fondam. $y_1(x)=e^{\frac{1}{2}x}$ $\quad y_2(x)=e^{2x}$

Sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea $y(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{2x}$ $\quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$

Sol.^{ne} particolare $\bar{y}(x)=A\,\mathrm{sen}(\frac{x}{2})+B\cos(\frac{x}{2})$ perchè il 2° membro dell'eq.^{ne} è una combinazione lineare di $\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$ e $\cos(\frac{x}{2})$ e non si deve moltiplicare per x perchè le due sol.^{ni} fondamentali dell'eq.^{ne} omogenea (*) NON SONO $\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$ e $\cos(\frac{x}{2})$.

$\bar{y}'(x)=\frac{1}{2}A\cos(\frac{x}{2})-\frac{1}{2}B\,\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$ $\quad \bar{y}''(x)=-\frac{1}{4}A\,\mathrm{sen}(\frac{x}{2})-\frac{1}{4}B\cos(\frac{x}{2})$

Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo

$$2\left(-\frac{1}{4}A\,\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2})-\frac{1}{4}B\cos(\tfrac{x}{2})\right)-5\left(\frac{1}{2}A\cos(\tfrac{x}{2})-\frac{1}{2}B\,\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2})\right)+2\left(A\,\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2})+B\cos(\tfrac{x}{2})\right)=$$
$$=5\,\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2})+3\cos(\tfrac{x}{2}) \quad \underline{\forall x\in\mathbb{R}}$$

$$\left(-\frac{1}{2}A+\frac{5}{2}B+2A-5\right)\mathrm{sen}(\tfrac{x}{2})+\left(-\frac{1}{2}B-\frac{5}{2}A+2B-3\right)\cos(\tfrac{x}{2})=0 \quad \underline{\forall x\in\mathbb{R}}$$

Poichè una combinazione lineare di $\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$ e $\cos(\frac{x}{2})$ è $=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ solo se entrambi i coefficienti sono nulli, otteniamo

$$\begin{cases}\frac{3}{2}A+\frac{5}{2}B-5=0\\ \frac{3}{2}B-\frac{5}{2}A-3=0\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{5}{2}B=5-\frac{3}{2}A\\ \dots\end{cases} \quad \begin{cases}B=2-\frac{3}{5}A\\ \frac{3}{2}(2-\frac{3}{5}A)-\frac{5}{2}A-3=0\end{cases} \quad \begin{cases}\dots\\ \cancel{3}-\frac{9}{10}A-\frac{5}{2}A-\cancel{3}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dots\\ -\frac{17}{5}A=0\end{cases} \quad \begin{cases}B=2\\ A=0\end{cases} \quad \bar{y}(x)=2\cos(\tfrac{x}{2})$$

Tutte le sol.^{ni}: $y(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{2x}+2\cos(\frac{x}{2})$ $\quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$

$y'(x)=\frac{1}{2}c_1e^{\frac{1}{2}x}+2c_2e^{2x}-\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$

Pb. di Cauchy
$$\begin{cases}y(0)=c_1+c_2+2=-3\\ y'(0)=\frac{1}{2}c_1+2c_2=1\end{cases} \quad \begin{cases}c_1=-c_2-5\\ \frac{1}{2}(-c_2-5)+2c_2=1\end{cases} \quad \begin{cases}\dots\\ \frac{3}{2}c_2=\frac{7}{2}\end{cases} \quad \begin{cases}c_1=-\frac{7}{3}-5=-\frac{22}{3}\\ c_2=\frac{7}{3}\end{cases}$$

Sol.^{ne} $y(x)=-\frac{22}{3}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{7}{3}e^{2x}+2\cos(\frac{x}{2})$