Analisi Matematica 2

EQ DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

$$y'_{(x)} = a(x) \cdot g(y)$$

PROBLEMA DI CAUCHY
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'_{(x)} = a(x)\, g(y) \end{cases}$$

METODO:
VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE

$$y_{(x)} = a(x) \cdot y_{(x)}$$

$$y_{(x)} = c_1 \cdot e^{A(x)}$$

EQUAZIONI DIFFE

$$y'_{(x)} = a(x)\, y + b(x)$$

$$y_{(x)} = e^{A(x)} \cdot \left[\int_{x_0}^{x} b(x) \cdot e^{-A(x)}\, dx + c\right]$$

$$A = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds$$

EQ. DIFFERENZIALI 1° ORDINE

$$y_{(x)} = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)\, ds}\, dt\right]$$

$$y_{(x)} = e^{\int_{x_0}^{x} (1-\alpha)\, a(t)\, dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} a(s)\, ds}\, dt\right]^{(1-\alpha}$$

$$\begin{cases} y' = a(x)\, y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y_{(x)} = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} \cdot \left\{ y_0^{(1-\alpha)} + (1-\alpha) \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} a(s)\, ds}\, dt \right\}^{(1-\alpha)}$$

$$= e^{A(x)} \cdot \left\{ y_0^{(1-\alpha)} + (1-\alpha) \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-(1-\alpha) A(x)}\, dt \right\}^{(1-\alpha)}$$

$$\begin{cases} y' = (1-\alpha) \cdot a_{(x)} \cdot y + (1-\alpha)\, b(x) \\ y_{(x_0)} = y_0^{(1-\alpha)} \end{cases}$$

Capitolo 1: Curve

1) Curve in $\mathbb{R}^2$

def si dice curva (piana) una funzione $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo non vuoto al variare di $t \in I$ ho

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_1(t) \\ y(t) = \varphi_2(t) \end{cases} \qquad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (x(t), y(t))$$

I è un intervallo di parametri e $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ sono le eq. parametriche della curva

def una curva $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ si dice
"chiusa" se $I = [a,b]$ dove $a,b \in \mathbb{R}$ e $a<b$ e $\varphi(a) = \varphi(b)$
"semplice" se fissati $t_1, t_2 \in I$ e tali che almeno uno tra i due non sia un estremo di I (se I contiene entrambi gli estremi) si ha $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$
"derivabile" in $t_0 \in I$ se $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$ e φ è derivabile in I se lo è $\forall$ punto di I
"di classe C^1" su I se φ è derivabile in I e $\varphi' = (\varphi_1', \varphi_2')$ sono continue su $I \to \mathbb{R}$ per ciascuna
"regolare" in $t_0 \in I$ se φ è derivabile e ho che $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0)) \neq (0,0)$ ed è regolare in I se lo è $\forall$ punto di I
"regolare a tratti" su I se lo posso suddividere in k intervallini I_k disgiunti tali che in ogni I_k la curva sia regolare

attenzione alla continuità

def dico "sostegno della curva" con $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ l'insieme $\varphi(I) = \{\varphi(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$
sia $I \subset \mathbb{R}$ e una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ continua, posso costruire una curva il cui sostegno sia il grafico di f con $\varphi(t) = (t, f(t))$ $\forall t \in I$ ed è la curva in forma cartesiana.
dato cioè un sostegno esistono diverse parametrizzazioni di questo, quindi si è scelto di definire curva come una funzione e non il suo sostegno.

due curve $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ e $\psi: J \to \mathbb{R}^2$ aventi lo stesso sostegno $S = \varphi(I) = \psi(J)$
si dicono equivalenti se esiste una funzione $g: I \to J$ biiettiva di classe C^1
con derivata sempre diversa da zero in I, tale che $\varphi(t) = \psi(g(t))$ $\forall t \in I$

~~sono~~ $\cancel{\varphi: I \to \mathbb{R}^2}$ $\cancel{\psi: I \to \mathbb{R}^2}$ ~~aventi lo stesso sostegno~~ $\cancel{S = \varphi(I) = \psi(I)}$

siano $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ e $\psi: I \to \mathbb{R}^2$ due curve equivalenti:

la φ è regolare in $I \Leftrightarrow \psi$ è regolare in J

infatti preso $g: I \to J$, biunivoca, C^1 e con $g'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$
e: $\varphi = (\psi \circ g)$; se ψ è regolare ho che $\psi' \neq 0$ $\forall t \in I$ e poiché $\varphi'(t) = \psi'(g(t)) \cdot g'(t)$
in I, neanche φ' si annulla in I (e vale il viceversa)

2) Dal sostegno alla curva

Potrebbe presentarsi il problema inverso: dato un insieme: dato un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$
stabilire se esiste o meno la curva $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(I) = S$ (anche regolare a tratti)
ovvero che ha S come sostegno
se ha soluzione ce ne sono ∞, infatti dato un insieme parametrizzabile, esistono
∞ modi di parametrizzare con curve equivalenti (o non per forza equivalenti)

data $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ e sia $P_0 = \varphi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$ un punto del suo supporto
se φ è regolare in t_0 ho che $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$ è il vettore tangente nel punto $P_0 = \varphi(t_0)$
se non esiste $t_1 \neq t_0$ tale che $\varphi(t_1) = P_0$
la retta di equazione $(x(t), y(t)) = \varphi(t_0) + t\,\varphi'(t_0)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

retta tangente a φ in $P_0 = \varphi(t_0)$ $\quad \begin{cases} x(t) = \varphi_1(t_0) + t\,\varphi_1'(t_0) \\ y(t) = \varphi_2(t_0) + t\,\varphi_2'(t_0) \end{cases}$

$\varphi = (\psi \circ g)$ è una composizione di funzioni

φ, ψ equivalenti allora $\quad \varphi$ regolare in $I \Leftrightarrow \psi$ regolare in I

data una curva definita da una funzione $\varphi(t) = (x, y)$ (detta forma param.)
il sostegno è un concetto astratto, date le coord. (x, y) si ottiene t

se esiste un unico punto t_0 (dove non esistono $t_1 = t_0$) allora la retta tangente al punto
è unica e si scrive: $\quad \varphi(t_0) + t\,\varphi'(t_0)$ per $t \in \mathbb{R}$

2 tangente a φ in t_0 $= (x(t), y(t)) = (\varphi_1(t_0) + t\,\varphi_1'(t_0), \varphi_2(t_0) + t\,\varphi_2'(t_0))$

osservazioni:

1 φ regolare $\Rightarrow \exists$ vettore tangente a φ in $\varphi(t_0)$

2 la retta medesima in un qualsiasi punto $\varphi(t_0)$ di φ è la retta tangente

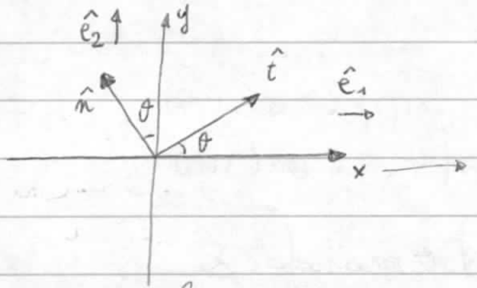
3 $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ la retta tangente in $P = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$ se esiste
è $y = \varphi_2(t_0) + \frac{\varphi_2'(t_0)}{\varphi_1'(t_0)}(x - \varphi_1(t_0)) \to$ diventa forma cartesiana se $\varphi_1'(t_0) \neq 0$

4 il concetto di vettore tangente è legato più al parametro $t_0 \in I$ che a P_0 stesso dove calcolo $\varphi(t_0)$, mentre P_0 è legato al concetto di retta tangente
(io nella def. voglio che la retta in P_0 sia unica e che ci sia un solo P_0 con quella retta tange

5 φ è regolare $\Rightarrow$ esiste un vettore tangente $\forall t \in I$, quindi non ci sono "punti di arresto" e la curva è percorsa nello stesso "verso"
(se A è inizio e B è la fine, la distanza tra $\varphi(t)$ e A è funzione di t monotone crescente)

data $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ regolare in t_0 ho che il versore tangente $\hat{t}(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} = \frac{(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))}{\sqrt{(\varphi_1'(t_0)^2 + \varphi_2'(t_0)^2)}}$

e il versore normale $\hat{n}(t_0) = \frac{(\varphi_2'(t_0) - \varphi_1'(t_0))}{\sqrt{(\varphi_1'(t_0)^2 + \varphi_2'(t_0)^2)}}$



$$\begin{cases} \hat{t} = \cos(\theta \hat{e}_1) + \text{sen}(\theta \hat{e}_2) = \frac{d\hat{t}}{d\theta} \\ \hat{n} = -\text{sen}(\theta \hat{e}_1) + \cos(\theta \hat{e}_2) \end{cases}$$

se φ regolare in t_0, dato $\hat{t}$ esistono due possibili versori $\hat{n}$, con la nostra scelta se ci muoviamo lungo una curva piana chiusa in senso antiorario (orient. pos.) esso sarà esterno alla porzione di piano delimitata dalla curva

$x(t) = 1 + 2t \qquad y(t) = 3 - t$
$= \varphi_1(t) \qquad = \varphi_2(t)$

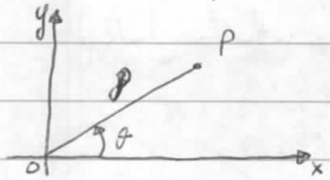
$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 6 - 2y \\ t = 3 - y \end{cases} \quad \begin{matrix} x + 2y - 7 = 0 \\ x + 2y = 7 \end{matrix}$

Sost. $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 7\}$

funz. $= \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (x(t), y(t)) = (1 + 2t, 3 - t)$

3) Curve in coordinate polari

noto che si può individuare un punto $P=(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$ con ρ e θ (coord. pola



$\rho = \overline{OP}$ $\quad \theta$ è l'angolo in radianti che forma con x

corrispondenza biunivoca $\rightarrow \rho \in]0,+\infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi[$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \Longrightarrow \circledast \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta \rightarrow \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0,\ y>0 \\ \pi/2 & \text{se } x=0,\ y>0 \\ 3\pi/2 & \text{se } x=0,\ y<0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x<0,\ y>0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x<0 \end{cases} \\ \rho^2 = x^2+y^2 \end{cases}$$

una curva è in forma polare se espressa nella forma $\rho = f(\theta)$ o $\theta = g(\rho)$ (rispettivamente θ varia in I e ρ varia in J)

$$\rho = f(\theta) \longrightarrow \begin{cases} x(t) = f(t)\cdot\cos(t) \\ y(t) = f(t)\cdot \operatorname{sen}(t) \end{cases} \text{ per } t\in I \qquad \theta = g(\rho) \rightarrow \begin{cases} x(t) = t\cos(g(t)) \\ y(t) = t\operatorname{sen}(g(t)) \end{cases} \text{ con } t \in J$$

una curva $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ in I posso esprimerla con ρ, θ usando $\circledast$

osservazioni: sia $f: I \to [0,+\infty[$ continua e sia $\rho = f(\theta)$ con $\theta \in I$
se $f \in C^1 \Rightarrow \varphi \in C^1$ e se f derivabile $\Rightarrow \varphi$ regolare e se $|f|$ è iniettiva $\Rightarrow \varphi$ è semplice (iniettiva $\Leftrightarrow$ strettamente monotona)
sia $g: J \subset [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua e sia $\theta = g(\rho)$ con $\rho \in J$, se $g \in C^1 \Rightarrow \varphi \in C^1$
e se g derivabile $\Rightarrow \varphi$ regolare (la curva è semplice $\forall g$ e non è mai chiusa)

4

4) Lunghezza di una curva

data una curva $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sia $A = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n < b\}$ una suddivisione di $[a,b]$, i punti sul sostegno di φ $\{P_0 = \varphi(t_0), P_1 = \varphi(t_1), P_n = \varphi(t_n)\}$ determinano una spezzata $\varphi_A = \overline{P_0P_1} \cup \overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup \dots \cup \overline{P_{n-1}P_n}$ che approssima φ.

la lunghezza di $\varphi_A \longrightarrow L_{\varphi_A} = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i)$ e con genericamente

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} \qquad P = (x_0, y_0) \quad Q = (x_1, y_1)$$

def dato $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, il valore (finito o ∞) di $L(\varphi) = \sup_{[A]} L(\varphi_A)$ è la lunghezza della curva, essa si dice "rettificabile" se $L(\varphi) < +\infty$ (se valore finito)

la definizione è costruttiva, perché si mostrano esplicitamente le spezzate approssimanti il sostegno della curva

$L(\varphi)$ può essere $+\infty$,

se $\varphi \in C^1$ si ha:

Teorema (di φ rettificabili):

sia $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2 \in C^1$ allora ho che $\begin{cases} L(\varphi) < +\infty \\ L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\, dt \end{cases}$

la $L(\varphi)$ non cambia al variare della parametrizzazione

infatti siano $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ e $\psi: [c,d] \to \mathbb{R}^2 \in C^1$ ed equivalenti e sia $g [a,b] \to [c,d]$ con $g' \neq 0$ in $[a,b]$ e tale che $\varphi(t) = \psi(g(t))$ $\forall t \in [a,b]$ e allora ho

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |\psi'(g(t))| \cdot |g'(t)| dt = \int_c^d |\psi'(t)| dt = L(\psi)$$

la $L(\varphi)$ non dipende dal verso di percorrenza

$L(\varphi)$ tiene conto anche di quante volte il sostegno è percorso (infatti $L(\varphi)$ non dipende dal sostegno, ma dalla curva stessa).

introduzione ora l' "ascissa curvilinea" s:

$s(t) = \int_a^t |\varphi'(\sigma)| d\sigma$ con $t \in [a,b]$ di φ con $\varphi(a)$ origine e assegnare un valore ~~s∈[0~~ $s \in [0, L(\varphi)]$ equivale ad assegnare in modo univoco la posizione di un punto su φ.

se φ regolare, s è strettamente crescente (infatti $s'(t) = |\varphi'(t)| > 0$ $\forall t$) in $[a,b]$ allora s è invertibile sull'insieme $[0, L(\varphi)]$ con inversa di classe C^1

(funzione inversa derivabile in $[0, L(\varphi)]$ perché $|\varphi'(t)| \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$)

cioé se $s \to t(s)$ é inversa di $t \to s(t)$ ho che $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(t(s))$ in $[0, L(\varphi)]$ é equivalente a φ (per def. di equivalenza).

se una curva é parametrizzata dal $s(t)$ ho

$$\frac{d\tilde{\varphi}(s)}{ds} = \varphi'(t(s)) \cdot \frac{dt(s)}{ds} = \frac{\varphi'(t(s))}{|\varphi'(t(s))|}$$

cioé il vettore tangente é coincidente con il versore tangente

le curve possono essere anche date in forma cartesiana o coord. polari, infatti:

forma cartesiana: da $\varphi(x) = (x, f(x))$ $\forall x \in [a, b]$ ho $L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

forma polare: da $\varphi(\theta) = (\rho(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho(\theta) \operatorname{sen}\theta)$ $\forall \theta \in (\theta_1, \theta_2)$ ho

$$L(\varphi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\, d\theta$$

la nozione di lunghezza di una curva nasce dal bisogno di estendere la classe di "linee" (piane) di cui si possa calcolare la lunghezza (come l'integrale di Riemann serve a calcolare aree di figure elementari piuttosto dell'uso delle formule elementari).

5) Integrale curvilineo

il concetto di lunghezza di una curva rientra nel concetto più generale di integrale curvil

c'é bisogno della continuità (le sono i polinomi $ax^n y^m$, le $f(x, y) = h(x) + k(y)$ e $g(x, y) = h(x) \cdot k(y)$ e le somme di funz. continue).

def dato $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \in C^1$ e data una densità di massa per unità di lunghezza $f : \varphi([a, b]) \to \mathbb{R}$ ho

$$x_G = \frac{\int_\varphi x f\, ds}{\int_\varphi f\, ds} \qquad y_G = \frac{\int_\varphi y f\, ds}{\int_\varphi f\, ds}$$

sono le coordinate del baricentro G di φ relativo alla densità di massa f (se $f = 1$ allora G coincide con il baricentro geometrico)

la definizione di integrale curvilineo può essere estesa a curve $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ che $\in C^1$ e a tratti

qui basta sommare i contributi degli integrali in ogni suddivisione

$$\int_\varphi f\, ds = \sum_{k=1}^{m} \int_{\varphi_k} f\, ds$$

6) Curve in $\mathbb{R}^3$

def una curva in $\mathbb{R}^3$ continua $\varphi: I \to \mathbb{R}^3$ al variare di $t \in I$ ho:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_1(t) \\ y(t) = \varphi_2(t) \\ z(t) = \varphi_3(t) \end{cases} \qquad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \qquad \text{eq. parametriche di } \varphi$$

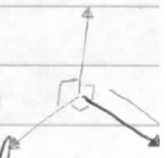
i concetti restano gli stessi stessi, con alcuni accorgimenti:

$$\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), \varphi_3'(t_0))$$

e lo stesso per G con

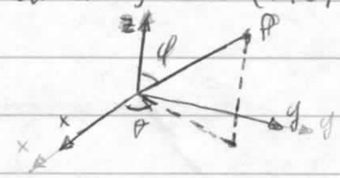
$$|\varphi'(t)| = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 + (\varphi_3'(t))^2}$$ in più le stesse coordinate z_G

la vera differenza è legata al versore normale (unico per curve piane)
(è meglio dire che è unica la direzione ortogonale al vettore tangente)



data una direzione nello spazio ne esistono 2 ortogonali (e sono ortogonali tra loro)
in $\mathbb{R}^3$ si parla cioè di "triedro principale" ovvero un sistema di 3 vettori ortogonali spiccati in $P = \varphi(t)$, uno dei quali è vettore tangente (un'altro il normale, e il terzo è il binormale), nello spazio $\mathbb{R}^3$ si hanno le coordinate sferiche (ρ, θ, φ)

$$0 < \rho < +\infty \qquad \begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$
$$0 \leq \theta < 2\pi$$
$$0 \leq \varphi \leq \pi$$



si può dire anche che una curva in $\mathbb{R}^3$ è piana se il sostegno è contenuto in un piano, infatti in questo caso si ritorna alle condizioni in $\mathbb{R}^2$

le definizioni e le principali proprietà delle curve in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ possono essere estese in $\mathbb{R}^n$ con n intero generico

def data $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2 \in C^1$ con sostegno $\varphi[a,b]$ e una funzione $f: \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ continua si ha

$$\int_\varphi f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\,dt$$

è l'integrale curvilineo di f su φ
(si ha che $s(t) = \int_a^t |\varphi'(t)|\,dt$ e $ds = |\varphi'(t)|\,dt$)
è ovvio che se $f = 1 \Rightarrow \int_\varphi f\,ds = L(\varphi)$
l'integrale curvilineo non cambia se si prende una curva equivalente
l'integrale di f positivo su una curva φ è positivo

7) Interpretazione fisica delle curve

il moto di un corpo materiale è descritto del tutto da una curva piana (legge oraria) il cui sostegno è la traiettoria del moto

se nota la legge oraria è nota la traiettoria (non vale il viceversa per le definizioni di curve precedenti).

Continuità → "Natura non facit saltum"

Capitolo 2: funzioni di più variabili

1) Cenni di Topologia

ci si limita a $\mathbb{R}^2$, ma l'estensione a $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 3$ è immediata
si indica con $B(x_0, y_0, r)$ il cerchio centrato in (x_0, y_0) e raggio r privato della circonferenza di bordo (insieme punti che distano da (x_0, y_0) meno di r)

$$B(x_0, y_0, r) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \| (x,y) - (x_0, y_0) \|^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2 \right\}$$

(è la generalizzazione a $\mathbb{R}^2$ degli intervalli di $\mathbb{R}$ e centro z_0)

def un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è detto intorno di $P_0 (x_0, y_0)$ se esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0, r) \subset A$
U_{P_0} è l'insieme degli intorni, P_0 interno ad A, se A è intorno di P_0
($B(x_0, y_0, r)$ è intorno di ogni suo punto)

def un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è intorno di ∞ se esiste $r > 0$ tale che $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > r \} \subset A$
U_∞ è l'insieme degli intorni di ∞ [in $\mathbb{R}^2$ (e in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$) si parla solo di ∞, non di $+\infty$ o $-\infty$ (prima in $\mathbb{R}$ dovevo specificare una determinata "direzione")]

def un punto (x_0, y_0) è detto di frontiera (o di bordo) per A se $\forall r > 0$ ho
$B(x_0, y_0, r) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x_0, y_0, r) \cap (C(A)) \neq \emptyset$
($C(A)$ è l'insieme dei complementari di A, cioè dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che non appartengono ad A)
∂A è l'insieme dei punti di bordo di A (o di frontiera)
allora un punto di bordo può appartenere tanto ad A quanto al suo complementare
$\forall$ insieme A, $\partial A \equiv \partial C(A)$, un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è di frontiera $\Leftrightarrow (x_0, y_0) \notin A$ e $(x_0, y_0) \notin C(A)$

def un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ è "chiuso" se $\delta C \subseteq C$

$C \to$ possibile bordo non compreso

$\underline{C} \to$ possibile bordo compreso

ogni insieme chiuso è unione dei suoi punti interni e dei punti di frontiera

dato un qualsiasi insieme A, la sua δA è l'insieme chiuso

def dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$, è detta "chiusura" l'insieme $\bar{A} = \delta A \cup A$

se C è chiuso $\Rightarrow C = \bar{C}$ si ha che $\overline{A \cup B} \subseteq (\bar{A} \cup \bar{B})$ e si ha $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$ e per provarlo trovo che $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$ e:

$$\overline{(\bar{A})} \equiv \overline{(\delta A \cup A)} \subseteq (\overline{\delta A} \cup \bar{A}) \subseteq (\delta A \cup (\delta A \cup A)) \subseteq \bar{A}$$

allora la chiusura di un insieme è un insieme chiuso

in realtà $\overline{A \cup B} \equiv \bar{A} \cup \bar{B}$ e infatti poichè $A \subseteq \bar{A}$ e $B \subseteq \bar{B}$ segue che $(A \cup B) \subset (\bar{A} \cup \bar{B})$

e $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} = \bar{A} \cup \bar{B}$ infatti $\bar{A} \cup \bar{B}$ è chiuso.

def un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è "aperto" se $c(A)$ è chiuso

$\mathbb{R}^2$ e ϕ sono insiemi sia aperti che chiusi

dato A, l'insieme $A/\delta A$ è aperto (anche per i chiusi)

def un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è "limitato" se $\exists R > 0 \,/\, A \subset B(x_0, y_0, r)$

segue che A è limitato $\Leftrightarrow \forall K > 0, \forall K \in \mathbb{R} \,/\, \|(x, y)\| \leq K \quad \forall (x, y) \in A$

se A è limitato, esiste un cerchio $B(x_0, y_0, r)$ che contiene tutti gli elementi di A,

infatti ho (dalla disuguaglianza triangolare):

$$\|(x, y)\| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| + \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| + r \qquad \forall (x, y) \in A$$

allora vale con $K = \|(x_0, y_0)\| + 1$ viceversa se vale l'osservazione $\Rightarrow A \subset B(0, 0, k+1)$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$||a| - |b|| \leq |a - b|$

l'insieme $B(x_0, y_0, r)$ è limitato per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ e ogni $r > 0$

un qualsiasi intorno di ∞ non è limitato

def un punto (x_0, y_0) é di "accumulazione" per A se $\forall r>0$
$(B(x_0,y_0,r) \setminus \{(x_0,y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$, ∞ é di accumulazione per A se $\forall R>0$, $A \cap c(B(0,0,R)) \neq \emptyset$
un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ di accumulazione per A può o non appartenere ad A
nel secondo caso sarà di frontiera per A
se (x_0,y_0) interno di A $\Rightarrow$ $(x_0,y_0) \in$ accumulazione di A
l'insieme q di tutti i punti di accumulazione dell'insieme $B(x_0,y_0,r)$ é $q = B(x_0,y_0,r) \cup \partial B$

def un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ é "isolato" per A se appartiene ad A e non é di accumulazione di A
cioé (x_0,y_0) é isolato per A se $\exists r>0 \,/\, B(x_0,y_0,r) \cap A = \{(x_0,y_0)\}$
non é vero che l'insieme dei punti di accumulazione di A coincide con la chiusura di A
come si potrebbe pensare!
infatti l'insieme dei punti di accumulazione di A é unione dei punti interni
e dei punti di frontiera che non sono isolati
in $\mathbb{R}$ un intorno di un punto é un qualsiasi intervallo contenente il punto, in $\mathbb{R}^2$ é un cerchio
centrato nel punto $\rightarrow$ tali definizioni si possono estendere a $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$
(sfera in $\mathbb{R}^3$ e ipersfera in $\mathbb{R}^n$).

def un insieme A é detto "connesso" se, fissati ad arbitrio due punti (x_0,y_0) e $(x_1,y_1) \in A$,
esiste $\varphi: [a,b] \rightarrow A$ continua tale che $\varphi(a) = (x_0,y_0)$ e $\varphi(b) = (x_1,y_1)$
(per ogni coppia di punti $(x_0,y_0), (x_1,y_1) \in A$ esiste una curva continua con supporto
tutto contenuto in A e avente punto iniziale (x_0,y_0) e finale (x_1,y_1).
in $\mathbb{R}$ gli insiemi non banali (cioé che non si riducono a punti) cioé gli intervalli,
sono connessi, in $\mathbb{R}^2$ un cerchio (aperto o chiuso) é connesso.

def un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è "convesso" se, scelti ad arbitrio $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1) \in A$
il punto $tP_0 + (1-t)P_1 \in A$ $\forall t \in [0,1]$ (segmento da P_0 a P_1 contenuto in A)
$B(x_0, y_0, r)$ è convesso
in $\mathbb{R}$ un insieme è convesso $\Leftrightarrow$ è un intervallo in $\mathbb{R}^2$ (e in $\mathbb{R}^n$)
un insieme convesso è anche convesso (ma non vale il viceversa)

2) Insiemi di Livello

def sia A sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è una "legge" che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo numero reale (insieme A è il dominio di f e si scrive $dom(f)$)
spesso di una funzione viene data la legge, non il dominio e si intende che il dominio (detto massimale) è l'insieme più grande in cui la relazione ha senso, cioè nei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dove $f(x,y)$ ha senso.

def sia data $f: A \to \mathbb{R}$, un punto $(x_0, y_0) \in A$ è:

- punto minimo relativo interno se $\exists\, B(x_0, y_0, R) \subseteq$ tale che $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ $\forall (x,y) \in B(x_0, y_0, R)$, ($f(x_0, y_0)$ è di minimo relativo interno di f)
- punto di minimo assoluto se $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ $\forall (x,y) \in A$. ($f(x_0, y_0)$ è di minimo assoluto di f in A)
- punto di massimo relativo interno se $\exists B(x_0, y_0, R) \subseteq A$ tale che $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ $\forall (x,y) \in B(x_0, y_0, R)$ ($f(x_0, y_0)$ è di massimo relativo interno di f)
- punto di massimo assoluto se $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ $\forall (x,y) \in A$ ($f(x_0, y_0)$ è di massimo assoluto di f in A)

def sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione, definisco:

- sopralivello k di $f \to \{f \geq k\} = \{(x,y) \in A : f(x,y) \geq k\}$
  sottolivello k di $f \to \{f \leq k\} = \{(x,y) \in A : f(x,y) \leq k\}$
  di livello k di $f \longrightarrow \{f = k\} = \{(x,y) \in A : f(x,y) = k\}$

con gli insiemi di livello si possono determinare per via grafica i punti di massimo e/o minimo di f continue su intervalli chiusi e limitati

3) Limiti di funzioni di più variabili

def (limite finito) siano $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto di accumulazione di A fissato $l \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ si dice che f tende a l per $(x,y) \to (x_0, y_0)$ se:

$\forall J \in U_l, \exists H \in U_{(x_0,y_0)} : H \cap A \setminus \{(x_0,y_0)\}, f(x,y) \in J$ e si scrive che

~~tende a l per (x,y)~~ - $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$

def (limite infinito) sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\infty \in$ accumulazione di A, fissato $l \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ si dice che f tende a l per $\|x,y\| \to +\infty$ se

$\forall J \in U_l, \exists H \in U_\infty : \forall (x,y) \in (H \cap A), f(x,y) \in J$ e si scrive anche

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = l$$

il limite, se esiste, è unico.

il limite può non esistere in qualche punto (o in nessuno) di accelerazione del dominio di f.

se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e B sottoinsieme di A

diciamo "restrizione" di f a B ($f_{|B}$) la funzione f definita su B con valori in $\mathbb{R}$:

$f_{|B}(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in B$

def se f ammette limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ in un solo $(x_0,y_0) \in$ accelerazione del dominio di f allora ogni restrizione $f_{|B}$ di f a sottoinsieme B per cui $(x_0,y_0) \in$ accelerazione di B ammette limite l.

dominio di una funzione è detto massimale

13

se troviamo due restrizioni per cui esistono e sono diversi i limiti per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ allora $\nexists l$ per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ (stessi risultati per ∞)

se una funzione f non ammette limite in un (x_0,y_0), presso un sottoinsieme B in cui $(x_0,y_0) \in$ accelerazione di B, può accadere che esista il limite per $f_{|B}$ con $(x,y) \to (x_0,y_0)$

in $\mathbb{R}$, il limite per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ scrivendo $|x| \to +\infty$, ha senso per una funzione e i due valori devono coincidere, ma non vale in $\mathbb{R}^2$ perché ci sono ∞ modi per avvicinarsi a ∞ (cioè rendere $\|(x,y)\|$ sempre più grande).

osservazione il fatto che esista il limite a ∞ di ogni restrizione di f a una retta per l'origine e che questo limite non dipende dalla direzione considerata, non è sufficiente a garantire l'esistenza del limite per $\|(x,y)\| \to +\infty$

dato che il limite se esiste è unico, esso deve coincidere con qualsiasi restrizione

~~teorema~~

teo sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \supseteq B(0,0,R)$ per qualche $R>0$ è equivalente affermare che:
- $f \to l \in \mathbb{R}$ quando $\|(x,y)\| \to +\infty$
- esistono $\rho_0 > 0$ e funzione $g:]\rho_0, +\infty[\to [0,+\infty[$ tale che:
  - $g(\rho) \to 0$ con $\rho \to +\infty$
  - $|f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) - l| \leq g(\rho)$ $\quad \forall \rho > \rho_0 \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$

teo sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \supseteq C(B(0,0,R))$ per qualche $R>0$ è equivalente affermare che:
- $f \to +\infty$ quando $\|(x,y)\| \to +\infty$
- esistono $\rho_0 > 0$ e funzione $g:]\rho_0, +\infty[\to [0,+\infty[$ tale che
  - $g(\rho) \to +\infty$ con $\rho \to +\infty$
  - $f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) \geq g(\rho)$ $\quad \forall \rho > \rho_0 \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$

teo sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente (x_0,y_0), è equivalente affermare che:
- $f \to l \in \mathbb{R}$ quando $(x,y) \to (x_0,y_0)$
- esistono $\rho_0 > 0$ e funzione $g:]0, \rho_0[\to [0,+\infty[$ tale che:
  - $g(\rho) \to 0$ con $\rho \to 0^+$
  - $|f(x_0 + \rho\cos\vartheta, y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) - l| \leq g(\rho)$ $\quad \forall \rho \in]0, \rho_0[, \ \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$

11.

tes sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente il punto (x_0, y_0), è equivalente affermare che

- $f \to +\infty$ quando $(x,y) \to (x_0, y_0)$
- esistono $\rho_0 > 0$ e funzione $g:]0, \rho_0[\to [0, +\infty[$ tale che:
  - $g(\rho) \to +\infty$ con $\rho \to 0^+$
  - $f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta) \geq g(\rho) \quad \forall \rho \in]0, \rho_0[, \ \forall \theta \in [0, 2\pi]$

se voglio provarlo per $f: \Omega \to \mathbb{R}$ che $\to -\infty$ per $(x,y) \to (x_0, y_0)$ o $\|(x,y)\| \to +\infty$ cambio (f) in $(-f)$

valgono tutti i risultati ottenuti in $\mathbb{R}$ cioè:

- limite della somma = somma dei limiti
- limite del prodotto = prodotto dei limiti
- limite del rapporto = rapporto dei limiti

purché abbiano senso i limiti, valgono sempre il teorema del confronto e dei carabinieri

tes (limite della funzione composta) valgono

- sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \in$ accelerazione di A, suppongo che esista $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$
  sia $\varphi: I \to \mathbb{R}$ una curva tale che $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$ per $t_0 \in I$ e suppongo che $\varphi(t) \neq (x_0, y_0)$ in un intorno di t_0 e che $l = f(x_0, y_0) \Rightarrow \lim_{t \to t_0} f(\varphi(t)) = l$
- supponiamo f come nel punto precedente e sia $g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che ammette $l \in$ (accelerazione di A) e esiste $\lim_{y \to l} g(y) = m \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$, se g continuo in l, o $f = l$ in intorno di $(x_0, y_0) \Rightarrow$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y)) = m$$
valgono anche per ∞

sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione, valgono:

- sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \in$ (accumulazione di A) ~~sono~~ equivalenti:
  - $\exists \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$
  - comunque si prenda una successione $\{(x_n, y_n)\} \subseteq (A \setminus (x_0, y_0))$ tale che $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$ per $n \to +\infty$, allora $f(x_n, y_n) \to l$
- sia $\infty \in$ (accumulazione di A), sono equivalenti:
  - $\exists \lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = l$
  - comunque si prenda $\{(x_n, y_n)\} \subseteq A$ tale che $\|(x_n, y_n)\|^2 = x_n^2 + y_n^2$ che $\to +\infty$ per $n \to +\infty$, allora $f(x_n, y_n) \to l$

4) Funzioni continue

def siano $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$, f continua in (x_0, y_0) se
$\forall J \in U_{f(x_0,y_0)}, \exists I \in U_{(x_0,y_0)} : \forall (x,y) \in (I \cap \Omega), f(x,y) \in J$
f é continua se lo é $\forall (x,y) \in \Omega$
se (x_0, y_0) é isolato per $\Omega \Rightarrow f$ é continua in (x_0, y_0)
infatti preso I abbastanza piccolo ho $(I \cap \Omega) = (x_0, y_0)$, se $(x_0, y_0) \in$ (accumulazione di Ω) e $(x_0, y_0) \in \Omega$ allora f é continua in $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$ esiste $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

teo teorema algebrico di funzione continua
siano $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $(x_0, y_0) \in \Omega$ allora
- $(f+g)$ continua in (x_0, y_0)
- $(f \cdot g)$ continua in (x_0, y_0)
- (f/g) continua in (x_0, y_0), se $g(x_0, y_0) \neq 0$

teorema della continuità della funzione composta
sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua in $(x_0, y_0) \in \Omega$, allora:
- se $\varphi: I \to \mathbb{R}$ curva tale che $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$ per $t_0 \in I \Rightarrow (f \circ \varphi)$ continua in t_0
- se $g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $f(x_0, y_0) \Rightarrow (g \circ f)$ continua in (x_0, y_0)

teo (esistenza degli zeri) sia $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un insieme connesso e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua connesso e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua in Ω

supponiamo che $(x_0, y_0)\ (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$ allora:

$$\exists\ (x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0$$

dim poiché Ω è connesso, esiste curva $\varphi: [0,1] \to \Omega$ tale che $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ e $\varphi(1) = (x_1, y_1)$

la $g(t) = f(\varphi(t))$ è continua in un intervallo chiuso e limitato e

$$g(0) < 0 < g(1) \Rightarrow \exists\ s \in]0,1[: g(s) = 0$$

teo (di Weierstrass) sia $f: C \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intorno chiuso e limitato $C \subset \mathbb{R}^2$ allora f ammette minimo e/o massimo assoluti in C, cioè esistono due punti $(x_0, y_0)\ (x_1, y_1) \in C$

allora $f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \leq f(x_1, y_1)\quad \forall (x,y) \in C$

una conseguenza è data da il corollario

cor sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che esiste $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = \ell$ valgono:

se $\ell = +\infty \Rightarrow \exists\ m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$

se $\ell = -\infty \Rightarrow \exists\ M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$

se $\ell = 0$ e $\exists (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) > 0 \Rightarrow \exists\ M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$

se $\ell = 0$ e $\exists (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) < 0 \Rightarrow \exists\ m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$

compatto significa chiuso e limitato

17

Capitolo 3: Calcolo Differenziale in $\mathbb{R}^2$

1) Da retta a piano tangente

è naturale considerare piano tangente quel piano (se esiste) che contiene tutti i vettori tangenti a curve regolari il cui sostegno appartiene al grafico di f.
(il piano tangente è l'analogo di ciò che la retta tangente è per le curve)

2) Derivabilità e Differenziabilità

Ω è un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

def siano $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data (x_0, y_0) un punto di Ω e v una direzione (vettore di $\mathbb{R}^2$ di norma unitaria), f è derivabile parzialmente rispetto alla direzione $v = (v_1, v_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite:

$\lim_{t \to 0} (f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0))/t$ oppure si denota con $\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta v}$

che è detta anche derivata direzionale di f rispetto a v in (x_0, y_0)

segue che la derivata direzionale di f in (x_0, y_0) e direzione $v = (v_1, v_2)$ è la derivata in funzione di una variabile $t \mapsto f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ in $t = 0$

questa è ben definita in $t=0$ e infatti (x_0, y_0) è interno di Ω ed esiste quindi $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0, r) \subset \Omega$ (f sarà definita almeno in $(-r, r)$)

se $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ ammettono derivata in direzione v in $(x_0, y_0) \in \Omega$ allora:

- $\frac{\delta (f+g)}{\delta v}(x_0, y_0) = \frac{\delta f}{\delta v}(x_0, y_0) + \frac{\delta g}{\delta v}(x_0, y_0)$
- $\frac{\delta (f \cdot g)}{\delta v}(x_0, y_0) = \cancel{\frac{\delta f}{\delta v}}(x_0, y_0) \cdot \frac{\delta g}{\delta v}(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta v}(x_0, y_0) \cdot g(x_0, y_0)$

se $g(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{\delta}{\delta v}(f/g)(x_0, y_0) = \left(g(x_0, y_0) \cdot \frac{\delta f}{\delta v}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \cdot \frac{\delta g}{\delta v}(x_0, y_0)\right) / \left((g(x_0, y_0))^2\right)$

le direzioni privilegiate sono gli assi cartesiani def siano $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data e $(x_0, y_0) \in \Omega$, allora dico:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x in (x_0, y_0) se esiste la $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ con $v = (1, 0)$ ed è il numero $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1,0)}(x_0, y_0)$
- f è derivabile parzialmente rispetto a y in (x_0, y_0) se esiste la $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ con $v = (0, 1)$ ed è il numero $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0,1)}(x_0, y_0)$

se esistono entrambe, il vettore definito da:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$ è il "gradiente" di f in (x_0, y_0)

sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, preso $(x_0, y_0) \in \Omega$, si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esiste un vettore (a, b) tale che: $$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

e l'Applicazione Lineare $(h, k) = (x - x_0, y - y_0) \to (a, b) \cdot (h, k)$ è detta differenziale della f in (x_0, y_0) e si pone $df(x_0, y_0) = (a, b)$

se f è differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in (x_0, y_0)

infatti se vale $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} (f(x,y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)) = 0$

siccome $(x - x_0)$ e $(y - y_0)$ tendono a zero allora si vede che

$f(x,y) \to f(x_0, y_0)$ per $(x,y) \to (x_0, y_0)$ allora f è continua

se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora f ammette derivate parziali nel punto e $df(x_0, y_0) \cdot (h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$ e infatti da prima ho $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

se f è differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ è derivabile in questo punto secondo una qualsiasi direzione e si ha che $$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle$$

infatti se la f è differenziabile in (x_0, y_0) la conoscenza delle derivate parziali permette di determinare tutte le altre derivate direzionali

se $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ sono differenziabili in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ allora $f + g$ e λf con $\lambda \in \mathbb{R}$ sono differenziabili in (x_0, y_0) e ho

$$d(f + g)(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + dg(x_0, y_0)$$
$$d(\lambda f)(x_0, y_0) = \lambda \, df(x_0, y_0)$$

se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente a f in $((x_0, y_0), (f(x_0), f(y_0))$ e $z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$

se f differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ allora la direzione $v = \dfrac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$ individuata dal gradiente é quella di "max pendenza" e cioé:

$$\frac{\delta f}{\delta v}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\delta f}{\delta v}(x_0, y_0) : v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta),\ \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

se si dimostra che non esiste una derivata parziale direzionale di f in (x_0, y_0) allora necessariamente f non é differenziabile in (x_0, y_0), un altro modo per dimostrare la non differenziabilité in (x_0, y_0) é verificare se $v = \frac{\delta f}{\delta v}(x_0, y_0)$ non risulta lineare in v_1, v_2. (se $\frac{\delta f}{\delta v}(x_0, y_0)$ non lineare $\Rightarrow$ f non é differenziabile in (x_0, y_0))

esistono f continue ma non differenziabili, non tutte le f continue sono differenziabili

esistono f derivabili parziali in qualsiasi direzione in un punto ma qui non é differenziabile ed esistono f derivabili parzialmente in qualsiasi direzione in un punto ma qui non continue.

def (del differenziale totale) siano $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data e $(x_0, y_0) \in \Omega$
e si supponga che esistano le derivate parziali in un intorno di (x_0, y_0) e
che siano continue in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ é differenziabile in (x_0, y_0)
se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ é differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ e l'equivalente del piano tangente é:
$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$ si conclude che il vettore gradiente é $\perp$
al vettore tangente in $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in P,
che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ e infatti riscrivendo
$\langle (\nabla f(x_0, y_0), -1), (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \rangle = 0$ si conclude che la direzione normale
al piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é individuata
dal vettore $(\nabla f(x_0, y_0), -1)$ e si deduce che la rispettiva equazione della retta
tangente in $P = (x_0, y_0)$ che sia semplice, regolare in (x_0, y_0) e che abbia come
sostegno l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ é data da $\langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0$

def sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data, f si dice di classe C^1 (in Ω) se f ammette
derivate parziali continue in Ω, lo spazio delle f di classe C^1 é $C^1(\Omega)$

3) Derivate di ordine superiore, Punti stazionari e la loro natura
def sia Ω aperto di ordine $\mathbb{R}^2$ e siano v e ξ due direzioni date, si dice che $f: \Omega \to \mathbb{R}$
ammette derivata direzionale di ordine due $(\delta^2 f / \delta v \delta \xi)$ in $(x_0, y_0) \in \Omega$ se $\exists (\delta f / \delta v)$
in un intorno di (x_0, y_0) e la funzione $(\delta f / \delta v)$ é derivabile in (x_0, y_0) lungo ξ e si pone
$(\delta^2 f / \delta v \delta \xi)(x_0, y_0) = \frac{\delta}{\delta \xi} (\delta f / \delta v)(x_0, y_0)$ e fatte rispetto agli assi coordinati:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) \qquad \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) \qquad \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) \qquad \frac{\delta f}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)$$

e sono le derivate parziali di ordine 2 e le due derivate al centro sono delle derivate miste
attenzione all'ordine di derivazione mista, in direzioni diverse può esistere per una
e non esistere per cui un'altra, e non é detto che le derivate parziali coincidano.

def sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice che f è di classe C^2 (in Ω) se f ammette derivata direzionale di ordine 2 per ogni coppia di ξ, v e tali derivate sono continue in Ω (spazio $C^2(\Omega)$

(di Schwartz) sia Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$ supponago che $f: \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 in un intorno (x_0, y_0) allora $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = (\partial^2 f / \partial x \partial y)(x_0, y_0)$

il teorema vale quando:

- le direzioni degli assi coordinati sostituite da generiche ξ e v
- esistono $(\partial^2 f / \partial x \partial y)$ e $(\partial^2 f / \partial y \partial x)$ e almeno una è continua

def sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, e f differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ e questo si dice "stazionario" (o critico) per f se $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

se f è un polinomio $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$

per il piano tangente, (x_0, y_0) è stazionario per $f \Leftrightarrow$ il piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è orizzontale e $z = f(x_0, y_0)$

teo sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e f differenziabile in (x_0, y_0) e se $(x_0, y_0) \in \Omega$ è punto di max (min) relativo interno per $f \Rightarrow (x_0, y_0)$ è stazionario per f

per una $f \in C^1$ e Ω aperto, i punti di max e min vanno ricercati tra le soluzioni di $\nabla f(x, y) = (0,0)$. un punto stazionario può essere un punto di max o min o nessuno dei due.

Per trovarli si usa:

sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano le derivate parziali di ordine 2 in $(x_0, y_0) \in \Omega$. si dice matrice "Hessiana" di f in (x_0, y_0)

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ generalmente non coincide (la matrice non è simmetrica)

la matrice $Hf(x_0, y_0)$ è simmetrica quando vale il teo. Schwartz cioè quando $f \in C^2(\Omega)$
$Hf(x_0, y_0)$ ammette due autovalori λ_1, λ_2 (con dovuta molteplicità) che si calcolano con il polinomio caratteristico che è $p(\lambda) = \det(Hf(x_0, y_0) - \lambda I) = 0$
(con I matrice identità)

teo sia $f: \Omega \to \mathbb{R} \in C^2$ in Ω aperto e $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto stazionario per f, valgono le prop:

- se $\det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ e $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ punto di minimo relativo interno
- se $\det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ e $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ punto di massimo relativo interno
- se $\det(Hf(x_0, y_0)) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di sella (né min, né max)

vedo poi anche i punti di frontiera, perchè i $(x_0, y_0) \in \Omega$ possono anche $\notin$ a una restrizione a un insieme $\subset$ dif

le prime due condizioni del teorema precedente forniscono condizioni sufficienti affinchè un punto stazionario di una $f \in C^2$ sia di max o min (sono condizioni solo sufficienti).
una condizione necessaria (ma non sufficiente) è: sia $f: \Omega \to \mathbb{R} \in C^2$ in Ω aperto e $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto stazionario di f. affinché (x_0, y_0) sia di max [[min]] relativo di f è che gli autovalori di $Hf(x_0, y_0)$ siano entrambi non positivi [[non negativi]]

4) Massimi e Minimi vincolati

sia E un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e sia $f: E \to \mathbb{R}$ continua
per il teorema di Weierstrass, f ammette max e min assoluti in E, ma non fornisce un metodo per determinarli.
un metodo è l'uso degli insiemi di livello o con il grafico, o con secondo metodo avendo l'espressione analitica di E nella forma $E = \{g(x,y) \le 0\}$ per qualche funzione continua g e fare $\begin{cases} f(x,y) = k \\ g(x,y) \le 0 \end{cases}$ cercando il più piccolo e il più grande valore di k.
un altro metodo: f continua su E e $\in C^2$ in $(E/\partial E)$ (se $E/\partial E \neq \emptyset$) (che è aperto)
e posso ragionare così:

- se $E/\partial E \neq \emptyset$ determino i punti stazionari di f e ne vedo la natura
- si cercano max e min di f su ∂E (∂E compatto allora vale Weierstrass)
- confronto i valori dei punti precedenti, il più alto sarà il max, il più basso sarà il min.

se E è il sostegno di una curva chiusa di classe C^1 a tratti, uso che se $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi([a,b]) = \partial E$.
un punto $(x_0, y_0) \in \partial E$ è di max [min] relativo di f rispetto a $\partial E \iff$ posto $(x_0, y_0) = \varphi(t_0)$, il t_0 è di max [min] della funzione di una variabile $g: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definita da $g(t) = f(\varphi(t))$ $\forall t \in [a,$
il motivo per cui max e min su insiemi non aperti sono detti "vincolati", si vede nel fatto che mentre un (x_0, y_0) di max/min relativo interno è di max/min per la restrizione di f ad ogni retta che passa per (x_0, y_0), se il punto (x_0, y_0) è di max o min per E ma non è interno ad E, non tutte le direzioni di avvicinamento a (x_0, y_0) sono ammesse.

Capitolo 4: Equazioni differenziali ordinarie

1) Introduzione

un'equazione differenziale di ordine n è una relazione funzionale che lega la funzione incognita y alle sue derivate fino all'ordine n cioè:

$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0$ con $f: \Omega \in \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ assegnata

def siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una funzione data

una funzione $y: I \to \mathbb{R}$ si dice soluzione dell'equazione differenziale se:

- $\forall x \in I$, $(x, y(x)) \in \Omega$
- $y \in C^n(I, \mathbb{R})$
- vale $f(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0 \quad \forall x \in I$

(problema di Cauchy) sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una funzione data

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ e ogni $(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, tali che $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in \Omega$ il problema:

$$\begin{cases} f(x, y(x), \dots, y^n(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

si dice problema di Cauchy associato all'eq. differenziale

(problema di determinare una soluzione dell'equazione differenziale definita in un intero contenente x_0 e soddisfacente le condizioni $y(x_0) = (y_0, \dots, y^{n-1}(x_0))$)

molti fenomeni fisici si possono modellizzare con equazioni differenziali.

2) Equazioni differenziali a variabili separabili

sono nella forma: $y' = a(x) \cdot g(y)$ con $a: I \to \mathbb{R}$ e $g: J \to \mathbb{R}$ continue su I e J

la funzione $(x,y) \to f(x,y) = a(x) \cdot g(y)$ é continua e derivabile rispetto a y in $I \times J$ (deriv. continua). il problema di Cauchy: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y' = a(x) \cdot g(y) \end{cases}$

ha una ed una sola soluzione per ogni $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$ (tale soluzione definita in un intervallo contenente x_0, in generale non su tutto I)

per determinare la soluzione del problema:

- se $g(y_0) = 0$, la soluzione é $y(x) = y_0$ $\forall x \in I$ (una soluzione costante di $y = a(x) \cdot g(y)$ é detta stazionaria
- se $g(y_0) \neq 0$, allora la soluzione $\hat{y}$ soddisfa $g(\hat{y}(x)) \neq 0$ $\forall x \in I$ ed é ovvio se $\nexists z: g(z) = 0$ con $z \in J$ (ma anche se $g(z) = 0$, sarebbe comunque soluzione per un punto precedente) (infatti i grafici delle soluzioni non si intersecano)

se W é il più grande intervallo interno aperto aperto contenente y_0 in cui $g \neq 0$ (qui $1/g$ é ben definita) e la funzione $\varphi(u) = \int_{y_0}^{u} (dz / g(z))$ $\forall u \in W$ é continua strettamente monotona e invertibile in W, dividendo per $g(y)$ i membri dell'eq. differenziale

(*) ho $(\hat{y}'(x) / g(\hat{y}(x))) = a(x)$ e per il teorema fondamentale del calcolo integrale

(*) $(\varphi(\hat{y}))' = \hat{y}' / g(\hat{y})$, allora $\hat{y}$ é soluzione di $(\hat{y}'(x) / g(\hat{y}(x))) = a(x) \Leftrightarrow$ é soluzione di $(\varphi(\hat{y}))'(x) = a(x)$ e integrando da x_0 a x ho:

$$\varphi(\hat{y}(x)) = \varphi(y_0) + \int_{x_0}^{x} a(s)ds = \int_{x_0}^{x} a(s)ds$$

la funzione $\varphi: W \to \varphi(W)$ é invertibile, quindi $\forall x \in Z = \{x \in I : \int_{x_0}^{x} a(s)ds \in \varphi(W)\}$

la formula prima permette di esplicitare:

$$\hat{y}(x) = \varphi^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} a(s)ds\right) \quad \forall x \in Z \longrightarrow \text{"integrale generale"}$$

nel caso in cui g sia continua soltanto, il metodo illustrato per determinare le soluzioni di $y' = a(x) \cdot g(y)$ può essere applicato ma può non fornire tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

se g non si annulla nel suo dominio, il metodo fornisce invece tutte le soluzioni.

le equazioni nella forma $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma) \to (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \ \alpha, \beta \neq 0)$
non sono a variabili separabili, ma possiamo ricondurci ad esse,
infatti y è soluzione $\iff$ $z(x) = \alpha x + \beta y(x) + \gamma$ è soluzione
dell'equazione a variabili separabili $z' = \alpha + \beta f(z)$

(*) $a(x) = \dfrac{\hat{y}'(x)}{g(\hat{y}(x))}$ $\qquad a, b : I \to \mathbb{R}$ (?)

29

$[a,b] = I$

$a, b \in I$?

$\uparrow$

$a, b : I \to \mathbb{R}$

3) Equazioni differenziali lineari del primo ordine

(*) sono nella forma $a(x) = (\hat{y}'(x) / g(\hat{y}(x)))$ $\quad y' = a(x)\, y + b(x)$ con $a, b \in I \to \mathbb{R}$
continue, si dicono lineari perché se y_1, y_2 sono due soluzioni dell'equazione
omogenea associata $y' = a(x)\, y(x)$ allora $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ è la soluzione
(queste eq. differenziali ammettono ∞ soluzioni).

Metodo del "fattore integrante":

A = primitiva di a e se moltiplico per $e^{-A(x)}$ ho $y' \cdot e^{-A(x)} = a(x) \cdot y \cdot e^{-A(x)} + b(x) \cdot e^{-A(x)}$

$$(y' \cdot e^{-A(x)})' = b(x) \cdot e^{-A(x)} \quad \forall x \in I$$

e integrando ho $\quad y(x) = e^{A(x)} \left(\int b(x) \cdot e^{-A(x)}\, dx \right) \quad \forall x \in I$

se fisso $x_0 \in I$ e in generale ho

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} b(x)\, e^{-A(x)}\, dt + c \right) \qquad \forall x \in I$$

Metodo di "variazione delle costanti arbitrarie"

- considero l'eq. omogenea associata $y' = a(x) \cdot y$ (è a variabili separabili) e si dimostra che la soluzione generale è data da
$$y(x) = c \cdot e^{A(x)} \quad \forall x \in I \quad \text{al variare di } c \in \mathbb{R}$$
- cerco una soluzione dell'equazione differenziale completa nella forma
$$V(x) = c(x) \cdot e^{A(x)} \quad \forall x \in I$$

(*) derivando e sostituendo in $a(x) = (\hat{y}'(x) / g(\hat{y}(x)))$ ho
$$c'(x) \cdot e^{A(x)} + c(x) \cdot a(x) \cdot e^{A(x)} = a(x) \cdot c(x) \cdot e^{A(x)} + b(x) \qquad \forall x \in I$$
ora semplificando e integrando ho $c(x) = \int b(x) e^{-A(x)} dx$

fissato x_0, una soluzione particolare è:
$$y(x) = e^{A(x)} \cdot \int_{x_0}^{x} b(x) \cdot e^{-A(x)} dx \qquad \forall x \in I$$
- la soluzione generale si trova sommando la soluzione particolare a quella dell'omogenea

A differenza delle soluzioni di equazioni a variabili separabili, quelle delle equazioni differenziali (di 1° ordine) sono definite in tutto I di definizione dove a, b continue.

la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a(x) y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è data da:
$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t) dt\right)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t) \cdot e^{-\int_{x_0}^{t} a(s) ds} dt\right) \qquad \forall x \in I$$

(4) Equazioni di Bernoulli

sono nella forma $y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^\alpha$ con $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue e α cost $(\neq 0, 1)$

la funzione $f(x, y) = a(x) y + b(x) y^\alpha$ é continua in $I \times]0, +\infty[$ e ammette

(*) derivata parziale in y continua in $I \times]0, +\infty[$ e il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a(x) y + b(x) y^\alpha \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (*)

ammette una ed una sola soluzione (pos) in un intorno di x_0

per determinarla si opera il cambiamento $y = z \wedge (1/(1-\alpha))$ che trasforma il problema di Cauchy in $\begin{cases} z' = (1-\alpha) \cdot a(x) \cdot z + (1-\alpha) \cdot b(x) \\ z(x_0) = y_0^{(1-\alpha)} \end{cases}$ che diventa

un'equazione differenziale lineare del primo ordine e la soluzione é data da

$$z(x) = \left[\exp\left((1-\alpha) \int_{x_0}^{x} a(t)dt\right)\right] \left\{ y_0^{(1-\alpha)} + (1-\alpha) \int_{x_0}^{x} b(t) \cdot e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt \right\} \quad \forall x \in I$$

e cioé

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \cdot \left\{ y_0^{(1-\alpha)} + (1-\alpha) \cdot \int_{x_0}^{x} b(t) \cdot e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt \right\}^{(1-\alpha)}$$

e per dominio $I = \left\{ x \in \mathbb{R} : y_0^{(1-\alpha)} + (1-\alpha) \int_{x_0}^{x} b(t) \cdot e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt > 0 \right\}$

A seconda di α, la funzione y si potrebbe estendere a un intervallo che contiene propriamente I

Nel caso $\alpha \in (0, 1)$ (e solo in questo caso) se I é un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$, la funzione $\hat{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

(*) $$\hat{y}(x) \begin{cases} y(x), & x \in I \\ 0 & x \notin I \end{cases} \quad \in C^1 \text{ ed é soluzione in } \mathbb{R} \text{ di } (*)$$

5) Equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine $n > 1$
nella forma $y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ con $f: I \to \mathbb{R}$ continua e
a_i costanti reali $\forall i = 0, \dots, n-1$ queste equazioni sono dette lineari perché se y, w
(*) sono due soluzioni distinte dell'omogenea $y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ (*)
allora anche una qualsiasi combinazione lineare $z = cy + dw$ $(c,d) \in \mathbb{R}$ è soluzione
l'equazione ammette soluzione su tutto I, e possiamo applicare il metodo di
variazioni delle costanti, per prima cosa si determinano le soluzioni per l'eq. omogenea.
questa ammette n soluzioni linearmente indipendenti $y_1, \dots, y_n$ (dalla combinazione lineare di $y_1 \dots y_n$)
quindi per la soluzione più generale devo applicare n soluzioni lin. indip.
(*) se $y' = ky$ le soluzioni sono $y(x) = c e^{kx}$, una possibile soluzione di (*) si può
definire nella forma $y(x) = e^{\lambda x}$?
se questa è soluzione ho $e^{\lambda x}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) = 0$ $\forall x \in I$
ed è soluzione se radice del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$
per il teorema fondamentale dell'algebra si hanno n radici (anche in campo $\mathbb{C}$,
dato che abbiamo supposto $e^{\lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$) in $\mathbb{C}$ con le loro molteplicità
se $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ è soluzione di $P(\lambda) = 0$ anche $\bar{\lambda}_0$ è radice di $P(\lambda) = 0$ (il suo coniugato)
supponiamo che P ammette n radici distinte e sono $\lambda_1 \dots \lambda_k$ $(k \le n)$ le soluz. reali:

- per ogni radice $\lambda_i \in \mathbb{R}$ si trova $y_j(x) = e^{\lambda_j x}$ $\forall x \in I$ e se $k = n$, le $y_j(x)$ sono n soluzioni lin. indip.
- ora se $k < n$, per calcolare le restanti $(n-k)$ y_i:

∞ se $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ è radice di $P(\lambda)$, anche la coniugata $\bar{\lambda}_s = \alpha_s - i\beta_s$ la è.
quindi la funzione $y(x) = e^{\lambda_s x}$ e $z(x) = e^{\bar{\lambda}_s x}$ sono due soluzioni (a valori in $\mathbb{C}$)
per avere soluzioni con valori reali basta sostituire a y, z le ~~[illegible]~~ funzioni
$z_s = \frac{1}{2}(y+z)$ e $w_s = \frac{1}{2i}(y-z)$ cioè:
$$z_s = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \qquad w_s = e^{\alpha_s x} \cdot \operatorname{sen}(\beta_s x)$$
siccome le radici complesse sono a due a due coniugate, $n-k$ è pari
e il procedimento permette di determinare $(n-k)$ soluzioni dell'equazione
che insieme a $y_1, \dots, y_k$ determinate nel primo punto formiscono le n sol lin. indip.
(a valori reali).

o ora per radici con molteplicità >1:

oo in corrispondenza a ciascuna radice reale λ_s con $m_s>1$ del $P(\lambda)$ si trovano le m_s soluzioni

$$(*)\quad \begin{cases} y_{\lambda_{s,1}}(x) = e^{\lambda_s x} \\ y_{\lambda_{s,2}}(x) = e^{\lambda_s x}\cdot x \\ \vdots \\ y_{\lambda_{s,m_s}}(x) = e^{\lambda_s x}\cdot x^{m_s-1} \end{cases} \qquad (*)\begin{pmatrix} y_1(\bar{x}) & \cdots & y_n(\bar{x}) \\ y_1'(\bar{x}) & \vdots & y_n'(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\bar{x}) & \cdots & y_n^{(n-1)}(\bar{x}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = W^{-1}_{(\bar{x})} \cdot \left[\begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z(\bar{x}) \\ z'(\bar{x}) \\ \vdots \\ z^{n-1}(\bar{x}) \end{pmatrix} \right]$$

oo in corrispondenza a ciascuna radice complessa $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ di $P(\lambda)$ con molteplicità algebrica $m_s>1$, si trova anche la sua complementare con $\bar{\lambda}_s = \alpha_s - i\beta_s$ (e ha stessa molteplicità algebrica), quindi le funzioni $x \longmapsto z_k = x^k \cdot e^{\lambda_s x}$ e $x \longmapsto w_k = x^k e^{\bar{\lambda}_s x}$ $(k=0,\dots,m_s-1)$ sono soluzioni dell'equazione, quindi determino le $2m_s$ (λ_s e $\bar{\lambda}_s$):

$$\begin{cases} y_{\lambda_{s,1}}(x) = e^{\alpha_s x}\cdot \cos(\beta_s x) \\ y_{\bar{\lambda}_{s,1}}(x) = e^{\alpha_s x}\,\mathrm{sen}(\beta_s x) \\ \vdots \\ y_{\lambda_{s,m_s}}(x) = \cancel{x}^{m_s-1}\cdot e^{\alpha_s x}\cos(\beta_s x) \\ y_{\bar{\lambda}_{s,m_s}}(x) = x^{m_s-1}\cdot e^{\alpha_s x}\,\mathrm{sen}(\beta_s x) \end{cases}$$

prendendo tutte le soluzioni nei punti prima, riesco a determinare n soluzioni lin. indip. dell'eq.. quindi si cerca una sol. particolare φ nella forma

$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{n} y_s(x)\cdot c_s(x)$ $\forall x\in I$ dove la funzione incognita $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ si determina da $W(x)\cdot c'(x) = B(x)$ $\forall x \in I$ dove $B(x) = (0,0,\dots,0,f(x))$ $\forall x\in I$ mentre $W(x)$ è detta matrice Wronskiana

$$W(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \cdots & y_n^{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

matrice Wronskiana $W(x)$ che è invertibile $\forall x \in I$, data la lin. indip. delle soluzioni dell'omogenea e infine da

$$c'(x) = W^{-1}(x) \cdot B(x) \qquad \forall x \in I$$

si ricava (determinando una primitiva di ciascun componente della funzione vettoriale a secondo membro) una soluzione dell'equazione.

(*) fissato $\bar{x}$ in I, una possibile soluzione di (*) è la funzione $c: I \to \mathbb{R}^n$ le cui componenti c_j ($j=1,\dots,n$) sono definite da

$$c_1(x) = \int_{\bar{x}}^{x} (W^{-1}(t) \cdot B(t))_1 \, dt, \ \dots, \ c_n(x) = \int_{\bar{x}}^{x} (W^{-1}(t) \cdot B(t))_n \, dt \qquad \forall x \in I$$

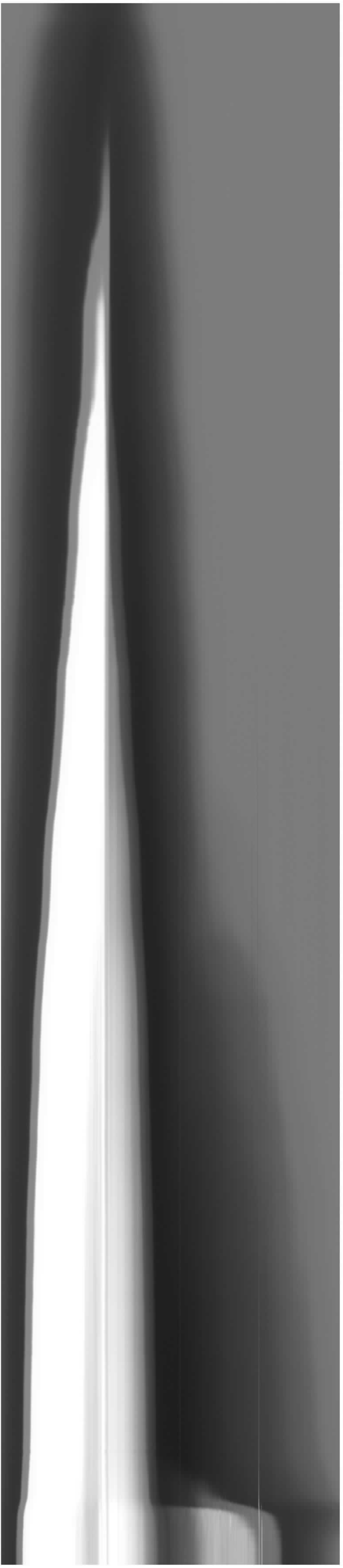
e

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x) \cdot \left(c_s + \int_{\bar{x}}^{x} (W^{-1}(t) \cdot B(t))_s \, dt \right) \qquad \forall x \in I$$

al variare di $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}$

in alcuni casi è possibile determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale senza ricorrere all'integrale:

- se f nella forma $f(x) = Q(x) \cdot e^{\mu x}$ $\forall x \in I$ dove Q è un polinomio a coeff di $\mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}$, si può fare con:
  p = molteplicità algebrica di μ come radice di $P(\lambda)$ (con $p=0$ se μ non è radice)
  l è grado di Q e cerco $\varphi(x) = x^p \cdot R(x) \cdot e^{\mu x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con R un polinomio di grado l da determinare
- se f nella forma $f(x) = e^{\alpha x} \cdot Q(x) \cdot \cos(\beta x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ oppure
  $f(x) = e^{\alpha x} \cdot Q(x) \cdot \mathrm{sen}(\beta x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e Q come prima
  cerco $\varphi(x) = e^{\alpha x} \cdot x^p \cdot (R(x) \cdot \cos(\beta x) + S(x) \cdot \mathrm{sen}(\beta x))$ $\forall x \in \mathbb{R}$
  dove p è la molteplicità di $\mu = \alpha + i\beta$ come radice del polinomio $P(\lambda)$
  e R, S sono di grado l da determinare.



R polinomio? domanda retorica?

vale il principio di sovrapposizione delle soluzioni (per le equazioni diff. lineari)
cioé se f, g sono continue in un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, una soluzione particolare $\varphi(x)$ di $y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f + g$ é la somma di $\varphi_1(x)$ di $y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f$ e di
$\varphi_2(x)$ di $y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g$

per il problema di Cauchy si garantisce che per ogni funzione $f: I \to \mathbb{R}$ ogni $x_0 \in I$ e $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f \\ y(x_0) = y_0 \\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione generale dell'eq. differenziale
$y = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot y_j$ dove $(y_1, \dots, y_n)$ sono n soluzioni lin. indip. dell'omogenea associata e $(c_1, \dots, c_n)$ sono n costanti arbitrarie, e devo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{n-1}(x_0) + \dots + c_n y_n^{n-1}(x_0) = y_n \end{cases}$$

che lo posso scrivere matrice Wronskiana (valutata in x_0) e costruita da $(y_1, \dots, y_n)$ e $(c_1, \dots, c_n)$ oppure $y(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x) \cdot \left(c_j + \int_{x_0}^{x} (W^{-1}(t) \cdot B(t))\, dt\right) \quad \forall x \in I$
e dove il vettore $c = (c_1, \dots, c_n)$ é dato da $c = W^{-1}(x_0) \cdot y_0$ e $y_0 = (y_0, \dots, y_{n-1})$

6) Regole delle equazioni differenziali e criterio di somiglianza
varie considerazioni per determinare la soluzione caratteristica di un eq. differenziale non omogenea

$$y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \Rightarrow y(x) = y_0(x) + \varphi(x)$$

- se $f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x}$ $\quad \alpha$ = costante $\quad P(x)$ = polinomio di grado m
  se α non é soluzione di $P(\lambda) \Rightarrow \varphi(x) = Q(x) \cdot e^{\alpha x}$ ($Q(x)$ é un polinomio di grado m)
  se α é soluzione di $P(\lambda) \Rightarrow \varphi(x) = Q(x) \cdot x^r \cdot e^{\alpha x}$ (r é molteplicità)

- se $f(x) = P(x) \cdot e^{hx} \cdot \text{sen}(kx)$ o $f(x) = P(x) \cdot e^{hx} \cdot \cos(kx)$ ($P(x)$ è un polinomio di grado m (*))
  - se $(h+ik)$ non è soluzione $\rightarrow \varphi(x) = e^{hx} \cdot (P_1(x) \cdot \cos(kx) + P_2(x) \cdot \text{sen}(kx))$
  - se $(h+ik)$ è soluzione $\varphi(x) = x^r \cdot e^{hx} \cdot (P_1(x) \cdot \cos(kx) + P_2(x) \cdot \text{sen}(kx))$
  - ($\varphi(x)$ è un polinomio di grado m)

- per il calcolo di $y_0(x)$ (soluzione dell'equazione differenziale omogenea)
  - se $\lambda = k$ con $m_a = 1$ ho $y_0(x) = c_1 \cdot e^{kx}$
  - se $\lambda = k$ con $m_a = 2$ ho $y_0(x) = c_1 \cdot e^{kx} + x \cdot c_2 \cdot e^{kx}$
  - se $\lambda = \pm ki$ con $m_a = 1$ ho $y_0(x) = c_1 \cdot \text{sen}(kx) + c_2 \cdot \cos(kx)$
  - se $\lambda = h \pm ki$ con $m_a = 1$ ho $y_0(x) = c_1 \cdot e^{hx} \cdot \cos(kx) + c_2 \cdot e^{hx} \cdot \text{sen}(kx)$
  - se $\lambda = 0$ con $m_a = 2$ ho $y_0(x) = c_1 \cdot e^{0x} + x \cdot c_2 \cdot e^{0x} = c_1 + x \cdot c_2$

N.B. scambiare le costanti arbitrarie ci non varia il risultato finale
se nella stessa eq. differenziale ho a termine noto $\cos x$ e $\text{sen} x$, li tengo uniti per la soluzione particolare $\varphi(x)$ basandomi su (*)

se $y' = a(x) \cdot y + b(x) \longrightarrow y(x) = e^{A(x)} \cdot \left(\int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx + c\right)$ e posto $\exp(z) = e^z$
con $y(x_0) = y_0$ ho $y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t) dt\right) \cdot \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s) ds\right) dt\right]$
se $y' = a(x) \cdot f(y) \longrightarrow y(x) = G^{-1} \cdot (A(x) + c)$ con G prima di $(1/f)$,
A è primitiva di a e $c \in \mathbb{R}$, se $a(x) = a$ è "autonoma" e si ha
$y(x) = G^{-1} \cdot (ax + c)$ e se $f(y_0) = 0$, $y(x) = y_0$ è soluzione
se $y' = a(x) \cdot y + b(x) y^\alpha \rightarrow y(x) = \left[\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t) dt\right)\right] \left\{ y_0^{(1-\alpha)} + (1-\alpha) \int_{x_0}^{x} b(t) \cdot \exp\left(-(1-\alpha) \int_{x_0}^{t} a(s) ds\right) dt \right\}^{(1-\alpha)}$

Capitolo 5: Teoria della Misura e dell'Integrazione

1) Misura e Integrazione in $\mathbb{R}^2$

si introduce il concetto di "insieme misurabile" secondo Peano-Jordan e di "misura" di un insieme; si richiede una classe di insiemi di cui sia possibile calcolare l'area, quindi sia M la famiglia di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$ e la funzione di misura $m: M \mapsto [0,+\infty[$ con proprietà:

- ogni rettangolo R, tale che $]a,b[\times]c,d[\subseteq R \subseteq [a,b]\times[c,d]$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ e $a<b$, $c<d$ appartiene a M e $m(R)=(b-a)(c-d)$
- se appartiene a M e $E+\{(x_0,y_0)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x-x_0, y-y_0)\in E\}\in M$ $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e $m(E+\{(x_0,y_0)\})=m(E)$ (invarianza misura per traslazione)
- se $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ è una rotazione e $E\in M$ allora $T(E)\in M$ e $M(T(E))=M(E)$ (invarianza misura a rotazione)
- dati $E_i\in M$, $(i=1,\dots,n)$ tali che $E_i\cap E_j=\emptyset$ $\forall i\neq j$ allora anche $E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i\in M$ e $m(E)=\sum_{i=1}^{n} m(E_i)$
- se $A,B\in M$ e $A\subseteq B \Rightarrow m(A)\leq m(B)$

M deve contenere gli insiemi nella forma $P=\bigcup_{i=1}^{m} R_i$ cioè i plurirettangoli ($\text{con}(R_i\cap R_j)\subset(\delta R_i\cap\delta R_j)$ per $i\neq j$), il $\emptyset$ è un plurirettangolo e si dimostra che:

- unione finita di plurirettangoli è un plurirettangolo
- intersezione finita di plurirettangoli è un plurirettangolo

def (insieme misurabile) un insieme $E\subset\mathbb{R}^2$ si dice misurabile se $m^-(E)=m^+(E)$ con $m^-(E)=\sup\{m(P): P \text{ è plurirettangolo} \subset E\}$, $m^+(E)=\inf\{m(P): P \text{ è plurirettangolo} \supset E\}$

$m(P)$ è l'area del plurirettangolo, cioè se $P=\bigcup_{i=1}^{m} R_i \Rightarrow m(P)=\sum_{i=1}^{m} m(R_i)$

si definisce "misura" di E un numero reale >0 $m(E)=m^-(E)=m^+(E)$

si pone $m^-(E)=0$ se E non contiene alcun P non vuoto

E misurabile $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists P_\varepsilon^-, P_\varepsilon^+ : P_\varepsilon^-\subseteq E\subseteq P_\varepsilon^+$ e $m(P_\varepsilon^+)-m(P_\varepsilon^-)<\varepsilon$

i plurirettangoli sono insiemi misurabili, se E è misurabile con misura nulla, ogni suo sottoinsieme è misurabile, non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono misurabili e ne esistono sempre qualunque sia la definizione sensata di misura.

teo se E, F misurabili $\Rightarrow E \cup F$, $E \cap F$, E/F sono misurabili e si ha che se:

- $E \subset F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$
- $m(E \cap F) \leq m(E) + m(F)$
- $E \cap F = \emptyset \Rightarrow m(E \cup F) = m(E) + m(F)$
- se E é misurabile, allora lo sono anche $\bar{E}$, $E/\partial E$ e $m(E) = m(\bar{E}) = m(E/\partial E)$

teo sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato $\Rightarrow E$ é misurabile $\Leftrightarrow \partial(E)$ é misurabile e $m(\partial E) = 0$

oro sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato la cui frontiera é il sostegno di una curva φ, regolare a tratti e C^1 a tratti $\Rightarrow m(\partial E) = m(\varphi([a,b])) = 0$, cioé E é misurabile

def siano $E \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile e k intero e $E_1, \dots, E_k$ sottoinsiemi misurabili di E, l'insieme $\Delta = \{E_i, (i = 1, \dots, k)\}$ si dice suddivisione di E se valgono:

- $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$
- $(E_i \cap E_j) \subseteq (\partial E_i \cap \partial E_j) \quad \forall i \neq j = 1, \dots, k$

se E é un insieme limitato é facile costruire una sua suddivisione.

sia A un generico insieme misurabile e limitato e considero $f: E \to \mathbb{R}$ limitata e una successione Δ di E, si definiscono:

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{k} \left(\inf_{(x,y) \in E_i} f(x,y) \right) \cdot m(E_i), \quad S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{(x,y) \in E_i} f(x,y) \right) \cdot m(E_i)$$

e dato che f limitata, inf e sup $\in \mathbb{R}$, cioé $s(f, \Delta)$, $S(f, \Delta) \in \mathbb{R}$

def sia $f: E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata in $E \subset \mathbb{R}^2$ misurabile, f si dice integrabile su E se:

$s(f) = \sup\{s(f, \Delta) : \Delta \text{ suddivisione di } E\} \quad S(f) = \inf\{S(f, \Delta) : \Delta \text{ suddivisione di } E\}$

e $s(f) = S(f)$ e $\int_E f(x,y)\, dx\, dy = s(f) = S(f) \rightarrow$ integrale di f su E

Varie proprietà:

- $\forall \Delta$ di E, $\forall f: E \to \mathbb{R}$ limitata, ho $s(f,\Delta) \leq S(f,\Delta) \to s(f) \leq S(f)$
- Δ e Δ' due suddivisioni di E, e Δ' più fine di Δ, ho che
  $s(f,\Delta) \leq s(f,\Delta') \leq S(f,\Delta') \leq S(f,\Delta)$
- se $f: E \to \mathbb{R}$ limitata su E misurabile, allora f integrabile su $E \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta$ di E:
  $S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \varepsilon$
- se $E = [a,b] \times [c,d]$ si dimostra che $f: E \to \mathbb{R}$ limitata e pos. è integrabile $\iff$
  $\iff \forall \varepsilon > 0$ esiste una suddivisione di E in rettangoli $E_1, \dots, E_m$:
  $$\sum_{j=1}^{m} \left(\sup_{(x,y) \in E_i} f(x,y) \right) \cdot m(E_i) - \sum_{j=1}^{m} \left(\inf_{(x,y) \in E_i} f(x,y) \right) \cdot m(E_i) < \varepsilon$$

f è integrabile su $E \iff$ il suo sottografico si può racchiudere tra 2 pluriparallelepipedi la cui differenza tra volumi può essere resa a piacere (ε).

seguono le seguenti proprietà:

- se $f = 1$ in $E \in M$, è integrabile e $m(E) = {}_E\int 1 \, dx\, dy$
- se E ha misura nulla $\implies \forall f: E \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile e ${}_E\int f(x,y)\, dx\, dy = 0$

teo siano $E \subset \mathbb{R}^2$ misurabile e $f, g: E \to \mathbb{R}$ integrabile e λ una costante $\in \mathbb{R}$, allora:

- ${}_E\int (f(x,y) + g(x,y))\, dx\, dy = {}_E\int f(x,y)\, dx\, dy + {}_E\int g(x,y)\, dx\, dy$ (teorema di spezzamento)
- ${}_E\int (\lambda f(x,y))\, dx\, dy = \lambda \cdot {}_E\int f(x,y)\, dx\, dy$ (moltiplicazione per scalare)

teo sia $E \subset \mathbb{R}^2$ misurabile, se $f: E \to \mathbb{R}$ continua e limitata $\to f$ integrabile su E

teo sia E sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ e siano $f, g: E \to \mathbb{R}$ integrabili, valgono:

- se $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \implies {}_E\int f(x,y)\, dx\, dy \leq {}_E\int g(x,y)\, dx\, dy$
  e se f integrabile in E e $f \geq 0 \implies {}_E\int f(x,y)\, dx\, dy \geq 0$
- $m(E) \inf_E f \leq {}_E\int f(x,y)\, dx\, dy \leq m(E) \sup_E f$
- $|f|$ integrabile su $E \iff \left| {}_E\int f(x,y)\, dx\, dy \right| \leq {}_E\int |f(x,y)|\, dx\, dy$
- se $F \subset E$ misurabile $\implies f$ integrabile su F
- $\forall F, G \subset E$, $(F \cap G) = 0 \implies \int_{F \cup G} f(x,y)\, dx\, dy = \int_F f(x,y)\, dx\, dy + \int_G f(x,y)\, dx\, dy$
- $\forall F, G \subset E$, $G \subset F \implies \int_{F/G} f(x,y)\, dx\, dy = \int_F f(x,y)\, dx\, dy - \int_G f(x,y)\, dx\, dy$

Anche per gli integrali doppi è necessario sviluppare delle tecniche per il calcolo esplicito dell'integrale.
ci si ridurrà il calcolo di un integrale doppio al calcolo di 2 integrali semplici (si estende anche agli integrali tripli).

def un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice "dominio normale rispetto a x" se $\exists$ due funzioni $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\alpha(x) \leq \beta(x)$ e $\forall x \in [a,b]$ $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

def un insieme $F \subset \mathbb{R}^2$ si dice "dominio normale rispetto a y" se $\exists$ due funzioni $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ e $\gamma(y) \leq \delta(y)$ e $\forall y \in [c,d]$ $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$

N.B. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ devono essere continue!!
ogni dominio A normale rispetto a x, y è misurabile

teo (di riduzione) sia $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e Ω misurabile.
valgono le proprietà
- se $A \subseteq \Omega$ è dominio normale rispetto a x, ovvero $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ e la funzione $U(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$
  ho che $\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b U(y)\,dy$
- se $B \subseteq \Omega$ è dominio normale rispetto a y, ovvero $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ e la funzione $V(y) = \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx$
  ho che $\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d V(y)\,dy$

Attenzione, può capitare che, invertendo i sensi di integrazione, non si raggiunge il risultato

def sia C un corpo materiale che occupa una regione $G \subset \mathbb{R}^2$ (misurabile)
sia $\rho : G \to \mathbb{R}$ la densità di massa di C e che sia continua
allora ho che il punto (x_G, y_G):

$$x_G = \frac{\int_G x\, \rho(x,y)\, dx\,dy}{\int_G \rho(x,y)\, dx\,dy} \qquad y_G = \frac{\int_G y\, \rho(x,y)\, dx\,dy}{\int_G \rho(x,y)\, dx\,dy}$$ è il baricentro di C

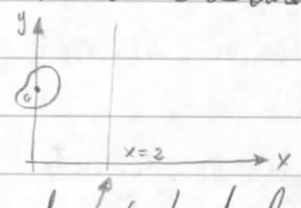
se la densità è costante $x_G = \frac{1}{m(G)} \int_G x\, dx\,dy \quad y_G = \frac{1}{m(G)} \int_G y\, dx\,dy$
sono le coordinate del baricentro (geometrico) di C.
se E, F misurabili e $E \cap F = \emptyset$, $\Rightarrow C = E \cup F$ misurabili e ho

$$x_C = \frac{m(E)\cdot x_E + m(F)\cdot x_F}{m(F) + m(E)} \qquad y_C = \frac{m(E)\cdot y_E + m(F)\cdot y_F}{m(E) + m(F)}$$

con (x_E, y_E) e (x_F, y_F) coordinate dei baricentri di E e F (stessa cosa per E / F solo con $-$ nelle formule)
se l'insieme E possiede un asse di simmetria r, allora il baricentro geometrico di E, appartiene a r.
se l'insieme E è convesso e ammette punti interni, allora il baricentro cade all'interno di E

def sia C un corpo materiale che occupa una regione $G \subset \mathbb{R}^2$ misurabile
denota $\rho : G \to \mathbb{R}$ la densità di massa di C, e ρ continua, data una retta $r = ax + by + c = 0$
si dice "momento d'inerzia di G" rispetto a r

$$I_r = \int_G (d(x,y,r))^2 \cdot \rho(x,y)\, dx\,dy \quad \text{e} \quad d(x,y,r) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ è la distanza da $(x,y) \in G$



generico da r e se:
- $y = 0 \to I_{y=0} = I_x = \int_G y^2 \cdot \rho(x,y)\, dx\,dy$
- $x = 0 \quad I_{x=0} = I_y = \int_G x^2 \cdot \rho(x,y)\, dx\,dy$

se Ω ha baricentro sull'asse y e $x = L$ un asse ad esso perpendicolare,
ho dal teorema di Huygens che:

$$I_{x=L} = I_y + m(\Omega)\, L^2 \quad \text{(o teorema degli assi paralleli)}$$

(analogamente se Ω ha baricentro su x e ho asse $y = L$)
il momento d'inerzia da informazioni su come la massa sia distribuita sul corpo e, più in generale il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse da indicazione su quanta forza (o meglio quanto momento) si debba impiegare per fare ruotare il corpo intorno a tale asse.

teo (cambiamento di variabile degli integrali doppi)

siano $\Omega, \Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti e sia $\varphi : \Omega \to \Lambda$ biettiva, $\in C^1$ e tale che $0 < |\det J_{\varphi(u,v)}| < +\infty$ $\forall (u,v) \in \Omega$ e se $f : (E \subseteq \Lambda) \to \mathbb{R}$ è continua e limitata su E misurabile, allora ho

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(u,v)) \cdot |\det J_{\varphi(u,v)}|\, du\, dv \qquad J_{\varphi(u,v)} = \begin{pmatrix} \delta x/\delta u & \delta x/\delta v \\ \delta y/\delta u & \delta y/\delta v \end{pmatrix}$$

con J la matrice Jacobiana

(è la generalizzazione dell'integrale per sostituzione in $\mathbb{R}^1$, solo che la J_φ in $\mathbb{R}^1$ è la sola derivata prima (J è un'applicazione lineare generica)

una trasformazione di notevole importanza è quella in coordinate polari con centro (x_0, y_0) che è rappresentata dalla funzione $\vartheta :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0) : x \geq x_0\}$

definita da $\vartheta(\rho,\theta) = (x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho \,\mathrm{sen}\,\theta)$ $\forall (\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$

questa è biunivoca tra i due insiemi aperti $\Omega =]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ e $\Lambda = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0) : x \geq x$

e inoltre la matrice Jacobiana è

$$J_{\vartheta(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \forall (\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\text{ e}$$

e quindi $|\det J_{\vartheta(\rho,\theta)}| = \rho$

se E è misurabile, simmetrico con x [o y] e f integrabile su E

- ~~se f(x,y) = f(x,y) ∀(x,y)∈E si ha~~

  se $f(x,y) = f(x,-y)$ $\forall (x,y) \in E$ si ha $\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = 2 \iint_{E \cap (\mathbb{R} \times [0,+\infty[)} f(x,y)\,dx\,dy$

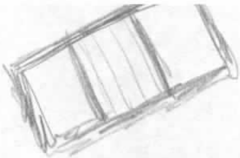
  se $f(x,y) = f(-x,y)$ $\forall (x,y) \in E$ si ha $\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = 2 \int_{E \cap (\mathbb{R} \times [0,+\infty[)} f(x,y)\,dx\,dy$

- se $f(x,y) = -f(x,-y)$ $\forall (x,y) \in E$ si ha $\int_E f(x,y)\,dx\,dy = 0$

  $f(x,y) = -f(-x,y)$ $\forall (x,y) \in E$ si ha $\int_E f(x,y)\,dx\,dy = 0$

Verificando che

$$f(-x,y) = f(x,y) \quad \vee \quad f(-x,y) = -f(x,y)$$



2) Misura e integrazione in $\mathbb{R}^3$

la teoria precedente si estende da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$, in $\mathbb{R}^3$ si considerano i pluriparallelepipedi

def un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^3$ si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) se $m^-(E) = m^+(E)$ e

$m^-(E) = \sup\{m(P) : P$ é pluriparallelepipedo $\subset E\}$

$m^+(E) = \inf\{m(P) : P$ e " $\supset E\}$

i sottografici di funzioni misurabili e pos $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono misurabili in $\mathbb{R}^3$

def sia $f : E \to \mathbb{R}$ limitata e $E \subset \mathbb{R}^3$ misurabile, f si dice integrabile su E se con

$s(f) = \sup\{s(f,\Delta) : \Delta$ é suddivisione di $E\}$

$S(f) = \inf\{S(f,\Delta) : \Delta$ é suddivisione di $E\}$

si ha $s(f) = S(f)$ e

$s(f) = S(f) = \int_E f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ è l'integrale di f su E

def sia C un corpo materiale che occupa una regione $G \subset \mathbb{R}^3$ misurabile e $\rho : G \to \mathbb{R}$ la densità di massa di C e ρ continua

allora il punto (x_G, y_G, z_G):

$$x_G = \frac{\int_G x\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz}{\int_G \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz} \qquad y_G = \frac{\int_G y\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz}{\int_G \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz} \qquad z_G = \frac{\int_G z\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz}{\int_G \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz}$$

é il baricentro di C, se ρ costante allora il baricentro G coincide con il baricentro geometrico

def sia C un corpo materiale che occupa una regione $G \subset \mathbb{R}^3$ misurabile e $f: G \to \mathbb{R}^3$ densità di massa di C, continua e sia $\hat{\pi} = ax+by+cz+d=0$ un piano si dice momento d'inerzia di C rispetto a $\hat{\pi}$: $I_{\hat{\pi}} = {}_G\int (d(x,y,z))^2 \cdot f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
dove $d(x,y,z,\hat{\pi}) = (|ax+by+cz+d|)/(\sqrt{a^2+b^2+c^2})$ è la distanza del generico punto di G da $\hat{\pi}$ e se:

- $x=0 \to I_{x=0} = I_{yz} = \int_G x^2 \cdot f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
- $y=0 \to I_{y=0} = I_{xz} = \int_G y^2 \cdot f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
- $z=0 \to I_{z=0} = I_{xy} = \int_G z^2 \cdot f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

le vere differenze tra integrale doppio e triplo sorgono quando si definisce il concetto di insieme normale in $\mathbb{R}^3$

sia $E \subset \mathbb{R}^2$ misurabile e limitato, si dice "dominio semplice rispetto a x" se esistono un intero I limitato e una famiglia $\{E_x\}_{x\in I}$ di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$:
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in I,\ (y,z) \in E_x\}$, $\forall x_0 \in I$, E_{x_0} è l'intersezione di E con $x = x_0$
cioè $E_{x_0} = E \cap (x = x_0)$ (vale anche per y e z)
(in generale si preferisce una rappresentazione a un'altra)

te (Integrazione per strati) sia $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata su Ω e sia $E \subseteq \Omega$ un dominio semplice rispetto a x ovvero $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ (y,z) \in E_x\}$
allora $U(x) = {}_{E_x}\int f(x,y,z)\,dx\,dy$ continua $\forall x \in [a,b]$ e si ha che
$${}_E\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = {}_a^b\int U(x)\,dx \quad \text{(uguale con gli altri assi)}$$

def un insieme $E \subset \mathbb{R}^3$ misurabile e limitato si dice "normale* rispetto al piano xy" se la proiezione $V = \hat{\Pi}_{xy}(E)$ su xy è misurabile ed esistono $a, b: V \to \mathbb{R}$ con $a(x,y) \le b(x,y)$ $\forall (x,y) \in V$
(*) tale che $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in V,\ a(x,y) \le z \le b(x,y)\}$ (*)
(analogamente per piani xz e yz)

teo (integrazione per fili) sia $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata definita con Ω e sia $E \subseteq \Omega$ un dominio normale rispetto a xy: $E = (*)$
allora la funzione $B(x,y) = \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ continua $\forall (x,y) \in \Pi_{xy}(E)$ e si ha che
$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Pi_{xy}(E)} B(x,y)\,dx\,dy$
(analogo per xz e yz)

(cambiamento Variabile Integrali tripli)
siano $\Omega, \Lambda \subset \mathbb{R}^3$ aperti e sia $\varphi: \Omega \to \Lambda$ funzione biiettiva, di classe C^1 e tale che
$0 < |\det J\varphi_{(u,v,w)}| < +\infty \quad \forall (u,v,w) \in \Omega$
se $f: E \to \mathbb{R}$ è continua e limitata su $E \subseteq \Lambda$ allora

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(u,v,w)) \cdot |\det J\varphi_{(u,v,w)}|\,du\,dv\,dw$$

si introducono le coordinate polari nello spazio (sferiche):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad (\rho,\theta,\varphi) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, \times \,]0,\pi[$$

il $|\det J\theta_{(\rho,\theta,\varphi)}| = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi$
sono utili nell'integrazione per fili le coordinate "cilindriche":

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (\rho,\theta,\varphi) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R}$$

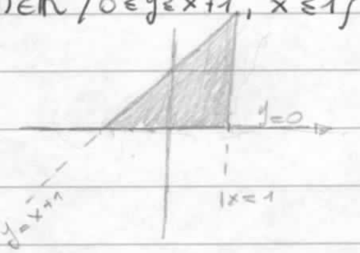
e con la funzione $\varphi(\rho,\theta,z)$: $(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta, z)$ è biiettiva, $\in C^1$ e ho che $\rho = |\det J\varphi_{(\rho,\theta,z)}|$

N.B. il $|\det J\varphi|$ o $|\det J_T|$ generici sono i "pagamenti" e se si cambiano le coordinate da x,y,z a cilindriche o sferiche, devono essere aggiunte all'integrale come fattore moltiplicativo

Calcolo dei punti stazionari

$f(x,y) = -x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - y^2 + 2y + 2x^2 - 1$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le x+1,\ x \le 1\}$



$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 + 2y^2x - 4yx + 4x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 2x^2 - 2y + 2$

$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \partial f(x_0,y_0)/\partial x \\ \partial f(x_0,y_0)/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(x_0,y_0) è un punto stazionario

$\begin{cases} -4x^3 + 2y^2x - 4yx + 4x = 0 \\ 2x^2y - 2x^2 - 2y + 2 = 0 \end{cases}$ $\quad 2x^2(y-1) - 2(y-1) = 0 \quad 2(x^2-1)(y-1) = 0 \quad \begin{matrix} x^2-1=0 \\ y-1=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^2=1 \\ y=1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=\pm 1 \\ y=1 \end{matrix}$

$\begin{cases} x=1 \\ -4+2y^2-4y+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ 2y(y-2)=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y=0 \\ y=2 \end{matrix}$

$\begin{cases} x=-1 \\ 4-2y^2+4y-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ +2y(y-2)=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y=0 \\ y=2 \end{matrix}$

$\begin{cases} y=1 \\ -4x^3+2x-4x+4x=0 \end{cases}$ $\quad -4x^3+2x=0 \quad +2x(2x^2-1)=0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=\pm 1/\sqrt{2} \end{matrix}$

$(1,0)$ $\quad (1,2)$ $\quad (-1,0)$ $\quad (-1,2)$ $\quad (0,1)$ $\quad (1/\sqrt{2},1)$ $\quad (-1/\sqrt{2},1)$

non appartiene al dominio $\qquad$ non appartiene al dominio

$\frac{\partial f}{\partial x^2} = -12x^2 + 2y^2 - 4y + 4 \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = 4xy - 4x \quad \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = 4xy - 4x \quad \frac{\partial f}{\partial y^2} = 2x^2 - 2$

$Hf = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x^2 & \partial f/\partial y \partial x \\ \partial f/\partial x \partial y & \partial f/\partial y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x^2+2y^2-4y+4 & 4xy-4x \\ 4xy-4x & 2x^2-2 \end{pmatrix}$

$\det Hf(1,0) = \begin{pmatrix} -12+4 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -16 \quad < 0$ sella

$\det Hf(1,2) = \begin{pmatrix} -12+8-8+4 & 8-4 \\ 8-4 & 0 \end{pmatrix} = -16 \quad < 0$ sella

$\det Hf(-1,2) = \begin{pmatrix} -12+8-8+4 & -8+4 \\ -8+4 & 0 \end{pmatrix} = -16 \quad < 0$ selle

$\det Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2-4+4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 \quad < 0$ sella

$\det Hf(1/\sqrt{2},1) = \begin{pmatrix} -6+2-4+4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = 4 \quad > 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x^2} < 0$ massimo

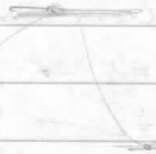
$\det Hf(x_0,y_0) \to < 0$ selle

$\det Hf(x_0,y_0) \to > 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^2} \to < 0$ punto massimo relativo

$\frac{\partial f}{\partial x^2} \to > 0$ punto minimo relativo

- studio del bordo

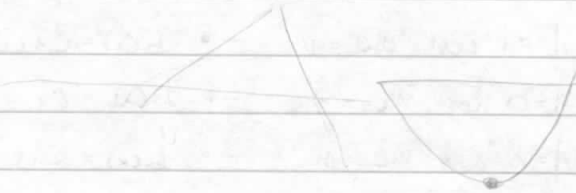
$f(x,0) = -x^4 + 2x^2 - 1 \qquad f'(x,0) = -4x^3 + 4x$



$x = 1 \quad f(1,0) = 0$

$x = 0 \quad f(0,0) = -1$

$x = -1 \quad f(-1,0) = 0$



$f(1,y) = \cancel{-1} \cancel{+y^2} \cancel{-2y} \cancel{+2} \cancel{-y^2} \cancel{+2y} \cancel{-1} = 0$

$\forall y \quad f(1,y) = 0$

- $f(x,x+1) = -x^4 + x^2(x+1)^2 - 2x^2(x+1) + 2x^2 - (x+1)^2 + 2(x+1) - 1 =$

$= \cancel{-x^4} \cancel{+x^4} \cancel{+2x^3} \cancel{+x^2} \cancel{-2x^3} \cancel{-2x^2} \cancel{+2x^2} \cancel{-x^2} \cancel{-1} \cancel{-2x} \cancel{+2x} \cancel{+2} \cancel{-1} = 0$

$\forall x, x+1 \quad f(x,x+1) = 0$

punti stazionari

$f(1,0) = 0$

$f(1,2) = 0$

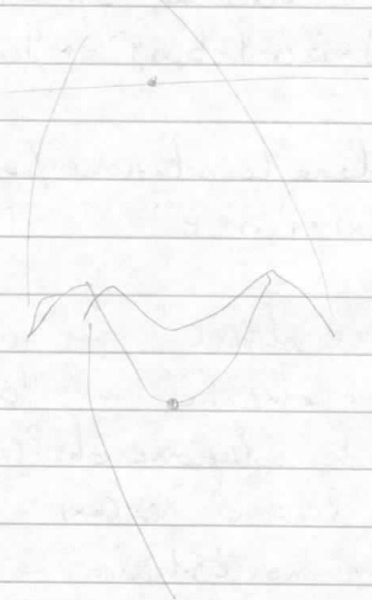
$f(-1,2) = 0$

$f(0,1) = 0$

$f(1/\sqrt{2},1) = 1/4$

$\min_K f = -1$

$\max_K f = 1/4$



-

-

Regole principali per le equazioni differenziali $y(x) = y_0(x) + \varphi(x)$

per calcolare $y_0(x)$ in base alle radici di $P(\lambda) = 0$

- se $\lambda = k$ con $ma = 1 \rightarrow y_0(x) = c_1 \cdot e^{kx}$
- se $\lambda = k$ con $ma = 2 \rightarrow y_0(x) = c_1 \cdot e^{kx} + c_2 \cdot x \cdot e^{kx}$
- se $\lambda = h \pm ik$ con $ma = 1 \rightarrow y_0(x) = c_1 \cdot e^{hx} \cdot \cos(kx) + c_2 \cdot e^{hx} \operatorname{sen}(kx)$
- se $\lambda = 0$ con $ma = 2 \rightarrow y_0(x) = c_1 + x \cdot c_2$
- se $\lambda = \pm i$ con $ma = 1 \rightarrow y_0(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \operatorname{sen}(kx)$
- se $\lambda = 0$ con $ma = 1 \rightarrow y_0(x) = c_1$
- se $\lambda = k$ con $ma = n \rightarrow y_0(x) = c_1 e^{kx} + x \cdot c_2 \cdot e^{kx} + \dots + x^{n-1} \cdot c_n \cdot e^{kx}$

Per calcolare l'Integrale Generale di un' Eq. Differenziale

- se $y' = a(x) \cdot f(x) \rightarrow y(x) = G^{-1} \cdot (A(x) + c) = (\int 1/f(x)\, dx) \cdot (\int a(x)dx + c)$
- se $y' = a(x) y + b(x) \rightarrow y(x) = e^{A(x)} \cdot (\int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx + c)$ e se ho
  $y(x_0) = y_0$ con $\exp(z) = e^z$ ho $y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right) \cdot \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)ds\right)dt\right]$
- se $y' = a(x) y + b(x) y^{\alpha} \rightarrow y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right) \cdot \left[y_0^{(1-\alpha)} + (1-\alpha) \int_{x_0}^{x} b(t) \cdot \exp\left(-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} a(s)ds\right) dt\right]^{(1-\alpha)^{-1}}$

Per calcolare la soluzione particolare $\varphi(x)$

- se $f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x}$ $\quad P(x)$ é polinomio di grado n e α é una costante

se α non é soluzione $\rightarrow \varphi(x) = a(x) e^{\alpha x}$

se α é soluzione $\rightarrow \varphi(x) = a(x) \cdot x^r \cdot e^{\alpha x}$ dove r é la molteplicità

(si intende soluzione di $P(\lambda) = 0$) e $a(x)$ é un polinomio di grado n

- se $f(x) = P(x) \cdot e^{hx} \cdot \operatorname{sen}(kx)$ o $f(x) = P(x) \cdot e^{hx} \cdot \cos(kx)$

se $h \pm ik$ non é soluzione $\rightarrow \varphi(x) = e^{hx} \cdot (P_1(x) \cdot \cos(kx) + P_2(x) \cdot \operatorname{sen}(kx))$

se $h \pm ik$ é soluzione $\rightarrow \varphi(x) = x^r \cdot e^{hx} \cdot (P_1(x) \cdot \cos(kx) + P_2(x) \cdot \operatorname{sen}(kx))$

$\lambda = h \pm ki$ $\quad ma = 1$ $\quad y_0(x) = c_1 e^{hx} \cos(kx) + c_2 e^{hx} \operatorname{sen}(kx)$

$\lambda = h \pm ki$ $\quad ma = 2$ $\quad y_0(x) = \left[c_1 e^{hx} \cos(kx) + c_2 e^{hx} \operatorname{sen}(kx)\right] + \left[c_3 e^{hx} x \cos(kx) + c_4 e^{hx} x \operatorname{sen}(kx)\right]$

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$y''' - 3y' + 4y' - 2y = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + 4t - 2t^0 = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + 4t - 2 = 0 \qquad t = 1$$

$$(t-1)(t^2 - 2t + 2) = 0 \qquad t = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^x \operatorname{sen}(x) + c_3 e^x \cos(-x)$$

$$y = e^x \cdot x - \frac{1}{2} e^x x \operatorname{sen}(x) + c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \operatorname{sen}(x) + c_1 e^x$$

Differenziali semplici (esercizio 1)

$$y''+y'=0 \qquad t^2+t=0 \qquad t(t+1)=0 \qquad \begin{matrix} t=0 & ma=1 \\ t=-1 & ma=1 \end{matrix}$$

$$y_0(x)=c_1e^{0x}+c_2e^{-x}=c_1+c_2e^{-x}$$

Integrale generale

$$y'=a(x)y+b(x) \qquad y(x)=e^{A(x)}\cdot\left[\int b(x)\cdot e^{-A(x)}dx+c\right]$$

$$A(x)=\int a(x)dx$$

$$y'=a(x)y+b(x)y^{\alpha} \qquad y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}a(t)dt}\cdot\left[y_0^{(1-\alpha)}+(1-\alpha)\int_{x_0}^{x}b(t)e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t}a(s)ds}dt\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

esercizio 2

$$y'=-\cos(x)y+sen(x)\cos(x) \qquad a=(-\cos(x)) \qquad b(x)=sen(x)\cos(x) \qquad A(x)=\int a(x)dx=-senx$$

$$y(x_0)=e^{-senx}\left[\int senx\cos x\, e^{senx}dx+c\right]=e^{-senx}\left[\int \cos x\, e^{senx}senx\,dx+c\right]=$$

$$=e^{-senx}\left(senx\, e^{senx}+\int e^{senx}\cos x\,dx+c\right)=e^{-senx}\left(senx\, e^{senx}-e^{senx}+c\right)=$$

$$=senx-1+ce^{-senx}$$

esercizio 3

$$\begin{cases} y'=3x^2y+x^2-x^5 \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad a(x)=3x^2 \qquad A(x)=\int a(x)dx=x^3 \qquad b(x)=x^2-x^5$$

$$y(x)=e^{x^3}\left[\int(x^2-x^5)e^{-x^3}dx+c\right]=e^{x^3}\left(\int x^2e^{-x^3}dx-\int x^5e^{-x^3}dx+c\right)=e^{x^3}\left(-\frac{1}{3}\int -3x^2e^{-x^3}dx+\frac{1}{3}\int -3x^2e^{-x^3}\cdot -x^3dx+c\right)=$$

$$e^{x^3}\left(-\frac{1}{3}e^{-x^3}+\frac{1}{3}\left(-x^3e^{-x^3}-e^{-x^3}\right)+c\right)=-e^{x^3}\cdot e^{-x^3}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}e^{x^3}\cdot e^{-x^3}+ce^{x^3}=-x^3/3+ce^{x^3}-2/3$$

$$\begin{cases} y(x)=ce^{x^3}-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad y(0)=c-0-\frac{2}{3}=0 \qquad c=2/3$$

$$y_0(x)=\frac{2}{3}e^{x^3}-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}$$

esercizio 4

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)\,\text{sen}x \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = (1+y^2)\,\text{sen}x \qquad \left(\frac{1}{1+y^2}\right)\delta y = \text{sen}x\ \delta x$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \text{sen}x\,dx \qquad \arctan y = -\cos x + c \qquad y = \tan(-\cos x + c)$$

$$\begin{cases} y(x) = \tan(-\cos x + c) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y(0) = \tan(-1+c) = 1 \qquad c-1 = \arctan(1)$$

$$c = \frac{\pi}{4} + 1$$

$$y_0(x) = \tan\left(-\cos x + \frac{\pi}{4} + 1\right)$$

esercizio 5

$$\begin{cases} y' = 2xy + 3x^3 y^{2/3} \\ y(0) = 8 \end{cases} \qquad y(x) = e^{x^2}\left(8^{1/3} + \frac{1}{3}\int 3x^3 e^{-\frac{1}{3}x^2}\,dx\right) =$$

$$\int_0^x 2x\,dx = [x^2]_0^x = x^2 \qquad (1-\alpha)\int_0^t a(s)\,ds = \frac{1}{3}t^2 \qquad \begin{matrix} s = -\frac{1}{3}t^2 \\ ds = -\frac{2}{3}t\,dt \end{matrix}$$

$$\int_0^x 3t^3 e^{-\frac{1}{3}t^2}\,dt = -\frac{9}{2}\int -\frac{2}{3}t\cdot t^2\cdot e^{-\frac{1}{3}t^2}\,dt = -\frac{9}{2}\int -3s\,e^s\,ds = \frac{27}{2}\int s e^s\,ds = \frac{27}{2}\left(e^s s - e^s\right) =$$

$$= \frac{27}{2}\left[e^{-\frac{1}{3}t^2}\cdot\left(-\frac{1}{3}t^2 - 1\right)\right]_0^x = \frac{27}{2}\left[e^{-\frac{1}{3}x^2}\cdot\left(-\frac{1}{3}x^2 - 1\right) + 1\right]$$

$$(1-\alpha)\ \frac{27}{2}\left[e^{-\frac{1}{3}x^2}\cdot\left(-\frac{1}{3}x^2 - 1\right) + 1\right] = \frac{9}{2}\left[e^{-1/3x^2}\cdot\left(-\frac{1}{3}x^2 - 1\right) + 1\right]$$

$$y_0(x) = e^{x^2}\cdot\left[2 - \frac{3}{2}e^{-\frac{x^2}{3}} - \frac{9}{2}e^{-\frac{x^2}{3}} + \frac{9}{2}\right]^3 = 2e^{x^2} - 6e^{\frac{2}{3}x^2} + \frac{9}{2}e^{x^2}$$

esercizio 6

$$y' - y(x - xy) = 0 \qquad a(x) = x \qquad \alpha = 2$$
$$y' = xy - xy^2 \qquad b(x) = x \qquad (1-\alpha) = -1$$

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = \left[\tfrac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

$$y' = a(x)y + b(x)y^2$$
$$y(0) = 1/2$$

$$-\int_0^x t\,e^{+t^2/2}\,dt = -\left[e^{t^2/2}\right]_0^x = -e^{x^2/2} - e^0 = -e^{x^2/2} - 1$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left[(1/2)^{-1} - e^{-x^2/2} - 1\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = e^{x^2/2}\left[1 - e^{-x^2/2}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

esercizio 7

$$y'' + y' = x \qquad \varphi_1 = ax^2 + bx + c \qquad \varphi_1'' + \varphi_1' = x$$
$$t^2 + t = 0 \qquad \varphi_1' = 2ax + b \qquad (2a) + (2ax + b) = x$$
$$t(t+1) = 0 \quad \begin{matrix} t = 0 \\ t = -1 \end{matrix} \qquad \varphi_1'' = 2a$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 2ax = x \end{cases} \qquad \begin{matrix} b = -2a = -2\left(\tfrac{1}{2}\right) = -1 \\ 2a = 1 \quad a = 1/2 \end{matrix}$$

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$$
$$= y(x) + \varphi(x)$$

esercizio 8

$$y' = 2xy + 3x^3 y^{2/3}$$
$$y(0) = 8$$

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^x a(t)dt}\left[y_{(0)}^{(1-\alpha)} + (1-\alpha)\int_{x_0}^x b(t)\,e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^t a(s)ds}\,dt\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$$
eq. bernoulli

$$= e^{x^2}\left[2 - \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}x^2} - \frac{9}{2}e^{-\frac{1}{3}x^2} + \frac{9}{2}\right] = 2e^{x^2} - 6e^{\frac{2}{3}x^2} - \frac{9}{2}e^{x^2}$$

$$\int_{x_0}^x a(t)\,dt = \int_0^x 2t\,dt = \left[2\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \left[t^2\right]_0^x = x^2$$

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$$
$$y(x) = y(0)$$

esercizio 9

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x(\text{sen}x + 1)$$
$$= e^x \text{sen}x + e^x$$

$t^3 - 3t^2 + 4t - 2 = 0$

$t^3 - t^2 - 2t^2 + 2t + 2t - 2 = 0$

$t^2(t-1) + 2t(t-1) + 2(t-1) = 0$

$(t-1)(t^2 - 2t + 2) = 0$

$t - 1 = 0 \qquad t = 1$

$t^2 - 2t + 2 = 0 \qquad t = 1 \pm i$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \text{sen}x}$$

$\varphi_1 = a x e^x$

$\varphi_1' = a e^x + a x e^x$

$\varphi_1'' = 2a e^x + a x e^x$

$\varphi_1''' = 3a e^x + a x e^x$

$\varphi_1''' - 3\varphi_1'' + 4\varphi_1' - 2\varphi_1 = e^x$

$(axe^x + (3ae^x) - 3(2ae^x + axe^x) + 4(ae^x + axe^x) - 2(axe^x) = e^x$

$e^x(3a - 6a + 4a) + xe^x(-3a + 4a - 2a + a) = e^x$

$e^x(a) = e^x \qquad \varphi_1 = xe^x$

$a = 1$

$$\varphi_2 = e^x x(a\cos x + b\,\text{sen}x)$$

$\varphi_2 = a x \cos x e^x + b x \,\text{sen}x e^x$

$\varphi_2' = (a\cos x e^x + a x \,\text{sen}x e^x + a x \cos x e^x) + (b\,\text{sen}x e^x + b x \cos x e^x + b x \,\text{sen}x e^x)$

$\varphi_2'' = (\cancel{-a\,\text{sen}x e^x} + a\cos x e^x) + (\cancel{a\,\text{sen}x e^x} + \cancel{a x \cos x e^x} + \cancel{a x \,\text{sen}x e^x}) + (a\cos x e^x - \cancel{a x \,\text{sen}x e^x} + \cancel{a x \cos x e^x}) +$
$(b\cos x e^x + b\,\text{sen}x e^x) + (b\cos x e^x + b x \,\text{sen}x e^x - b x \cos x e^x) + (b\,\text{sen}x e^x - b x \cos x e^x + b x \,\text{sen}x e^x) =$
$= 2a \cos x e^x - 2b\cos x e^x + 2b\,\text{sen}x e^x + 2bx\,\text{sen}x e^x - 2bx\cos x e^x$

$\varphi_2''' = -2a\,\text{sen}x e^x + 2a\cos x e^x + 2b\,\text{sen}x e^x - 2b\cos x e^x + 2b\cos x e^x + 2b\,\text{sen}x e^x + 2b\,\text{sen}x e^x - 2bx\cos x e^x + 2bx\,\text{sen}x e^x$
$-2b\cos x e^x + 2bx\,\text{sen}x e^x - 2bx\cos x e^x$
$= -2a\,\text{sen}x e^x + 2a\cos x e^x + 6b\,\text{sen}x e^x - 6b\cos x e^x$

equazione di eulero

$$e^{\alpha + i\beta} = e^\alpha \cos(\beta) + i e^\alpha \text{sen}(\beta)$$

$e^x \Rightarrow e^{\lambda x}$

$(e^{\lambda x})''' - 3(e^{\lambda x})'' + 4(e^{\lambda x})' - 2(e^{\lambda x}) = 0$

$\lambda^3 e^{\lambda x} - 3\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0$

$(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \qquad \lambda = 1$
$\qquad\qquad \lambda = 1 \pm i$

$c_1 e^x + c_2 e^{(1+i)x} + c_3 e^{(1-i)x}$

esercizio 10

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 2e^x \operatorname{sen} x \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$t^2 - 2t + 2 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$$

$\varphi(x)$

Quadratiche

equazione sfera

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad C=(0,0,0) \qquad \overrightarrow{PQ}=r$$

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0 \qquad \overrightarrow{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=r^2$$

equazione ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad C=(0,0,0)$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \qquad \text{con} \quad C=(x_0,y_0,z_0)$$

equazione cilindro

$$x^2+y^2=a^2 \qquad z=x^2 \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$x^2+z^2=b^2 \qquad y=x^2$$

$$y^2+z^2=c^2 \qquad x=z^2$$

(ellittico) (parabolico) (iperbolico)

coordinate sferiche

$$(x,y,z)=\begin{pmatrix}\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \rho \cos\varphi\end{pmatrix}$$

equazione cono

$$x^2+y^2=z^2 \longrightarrow x^2+y^2-z^2=0$$

$$x^2+y^2=a^2\cdot z^2 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z^2$$

equazione paraboloide

$$y=x^2 \longrightarrow y=x^2+z^2 \quad \text{lungo } y$$

$$y=x^2 \longrightarrow z=x^2+y^2 \quad \text{lungo } z$$

$$y=x^2 \longrightarrow x=y^2+z^2 \quad \text{lungo } x$$

coordinate cilindriche

$$(x,y,z)=\begin{pmatrix}\rho\cos\theta \\ \rho \operatorname{sen}\theta \\ z\end{pmatrix}$$

equazione iperboloide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=1 \longrightarrow \text{iperboloide a 1 falda}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=-1 \longrightarrow \text{iperboloide a 2 falde}$$

$$\cancel{\Omega = \{x^2+y^2<4,\ x>0\}}$$

$$\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<\frac{\sqrt2}{2},\ y<x<\sqrt{1-y^2}\right\}$$

dominio normale rispetto a y

$$\int_0^{\sqrt2/2} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx = \int_0^{\sqrt2/2} dy \left[yx + \frac{x^2}{2}\right]_y^{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^{\sqrt2/2} dy\left[y\sqrt{1-y^2} + \frac{1-y^2}{2} - y^2 - \frac{y^2}{2}\right] = \int_0^{\sqrt2/2} dy\left[\frac12 + y\sqrt{1-y^2} - 2y^2\right] =$$

$$\int_0^{\sqrt2/2}\left(\frac12 + y\sqrt{1-y^2} - 2y^2\right)dy = \int_0^{\sqrt2/2}\left[\frac12 - \frac12\left(-2y\sqrt{1-y^2}\right) - 2y^2\right]dy = \left[\frac12 y - \frac12\,\frac{(1-y^2)^{\frac12+1}}{\frac12+1} - 2\,\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt2/2} =$$

$$\left[\frac{y}{2} - \frac13(1-y^2)^{3/2} - \frac23 y^3\right]_0^{\sqrt2/2} = \frac{\sqrt2}{4} - \frac13\left(\frac11 - \frac12\right)^{3/2} - \frac23\,\frac{1}{2\sqrt2} + \frac13 = -\frac13\,\cancel{\frac{1}{2\sqrt2}} - \frac23\,\cancel{\frac{1}{2\sqrt2}} + \cancel{\frac{\sqrt2}{4}} + \frac13 = \frac13$$

$$\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0\right\}$$

ρ^2

$x = \rho\cos\vartheta$

$y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta$

$x^2+y^2 = \rho^2$

$$J(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \delta x/\delta\rho & \delta x/\delta\vartheta \\ \delta y/\delta\rho & \delta y/\delta\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\,\text{sen}\,\vartheta \\ \text{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} = \rho\cos^2\vartheta + \rho\,\text{sen}^2\vartheta = \rho(\text{sen}^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = \rho$$

$$\begin{cases} 1<\rho^2<4 \\ \rho\cos\vartheta>0 \\ \rho\,\text{sen}\,\vartheta>0 \end{cases} \qquad \sqrt1 < \sqrt{\rho^2} < \sqrt4 \qquad 1<\rho<2$$

$\rho>0$ per definizione

$$\begin{cases}\cos\vartheta>0 \\ \text{sen}\,\vartheta>0\end{cases} \qquad 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$$

$$0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$$
$$1<\rho<2$$

$$\iint \rho\cdot\frac{(\rho\cos\vartheta)(\rho\,\text{sen}\,\vartheta)}{\rho^2\text{sen}^2\vartheta + \rho^2\cos^2\vartheta}\,d\rho\,d\vartheta = \iint \rho\cos\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = \int_1^2 \rho\,d\rho \int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta\,d\vartheta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2\cdot\left[\frac12\,\text{sen}^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left(2-\frac12\right)\cdot\left(\frac12 - 0\right) = \frac14$$

Disegno di Dominio

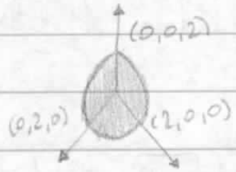
$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}$$

sferiche $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ y = \rho \cos\varphi \end{cases}$

$$\begin{cases} \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \geq 0 \\ \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \geq 0 \\ \rho \cos\varphi \geq 0 \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta + \rho^2 \cos^2\varphi \leq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta \geq 0 \\ \operatorname{sen}\theta \geq 0 \end{cases} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\varphi \geq 0 \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \rho \leq 2$$



$$\int_\Omega xy\,dx\,dy \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2<1,\ x^2+y^2<2x,\ y>0\right\} \qquad \Omega = \Omega_A + \Omega_B$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2+y^2 = 2x \end{cases} \quad x = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} + y^2 = 1 \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad m_{retta} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \quad \theta = \pi/3$$

$$\Omega_A = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < \theta < \pi/3,\ 0 < \rho < 1\right\} \qquad |\det J_{(\rho,\theta)}| = \rho$$

$$\Omega_B = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 < \rho < 2\cos\theta\right\}$$

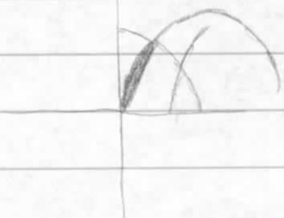
$$\int_{\Omega_A} xy\,dx\,dy = \int_{\Omega_A} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \left[\rho^4/4\right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/3} = \left(\frac{1}{4} - 0\right)\cdot\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{32}$$

$$\int_{\Omega_B} xy\,dx\,dy = \int_{\Omega_B} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \left[\rho^4/4\right]_0^{2\cos\theta} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \left(\frac{16}{4}\cos^4\theta\right) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = 4\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos^5\theta\,d\theta = -\int_{\pi/3}^{\pi/2} (-4\operatorname{sen}\theta)(\cos^5\theta)\,d\theta =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\cos^6\theta\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = -\frac{2}{3}\left(\cos^6\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{2}{3}\left(0 - \frac{1}{2^6}\right) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2^6}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{3\cdot 32} = \frac{1}{96}$$

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = \frac{3}{32} + \frac{1}{96} = \frac{9}{96} + \frac{1}{96} = \frac{10}{96} = \frac{5}{48}$$



Cambio di coordinate sferiche e fogamenti

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-1)^2+y^2} - 2 \leq z \leq 2\} \qquad \int_E dx\,dy\,dz$$

$$\begin{cases} z \leq 2 \\ z+2 \geq \sqrt{(x-1)^2+y^2} \end{cases} \qquad (z+2)^2 = (x+1)^2+y^2 \longrightarrow \begin{cases} x-1 = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1-\rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = z \end{cases}$$

$$z+2 \geq \sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta}$$

$$z+2 \geq \sqrt{\rho^2}$$

$$\begin{cases} z \geq \rho-2 \\ z \leq 2 \end{cases} \qquad \rho-2 \leq z \leq 2$$

tra 0 e $\rho-2=2$

$\rho=4$

$$0 \leq \rho \leq 4$$
$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$
$$\rho-2 \leq z \leq 2$$

$$\det J(\rho,\vartheta,z) = \begin{pmatrix} \delta x/\delta\rho & \delta x/\delta\vartheta & \delta x/\delta z \\ \delta y/\delta\rho & \delta y/\delta\vartheta & \delta y/\delta z \\ \delta z/\delta\rho & \delta z/\delta\vartheta & \delta z/\delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho\cos^2\vartheta + \rho\,\mathrm{sen}^2\vartheta = \rho$$

$$\int dx\,dy\,dz = \int \rho\,d\rho\,d\vartheta\,dz = \int_0^4 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\rho-2}^{\cancel{\rho}+2} dz = [z]_{\rho-2}^{2} \int_0^4 \rho\,d\rho\,[\vartheta]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi \int_0^4 \rho(4-\rho)\,d\rho = 2\pi \int_0^4 (\rho^2+4\rho)\,d\rho = 2\pi\left[-\frac{\rho^3}{3} - 4\frac{\rho^2}{2}\right]_0^4 = \cancel{2\pi\left[-\frac{64}{3}+32\right] = 2\frac{224}{3}\pi} =$$

$$= 2\pi\left[2\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3\right]_0^4 = 2\pi\left(2\cdot 16 - \frac{1}{3}\cdot 64\right) = 2\pi\left(32 - \frac{1}{3}64\right) = 2\pi\left(\frac{96-64}{3}\right) =$$

$$= \frac{64}{3}\pi$$

~~si introducono le coord. polari nello spazio (sferiche)~~
$\cancel{\begin{cases} x=\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi \quad (\rho,\theta,\varphi)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[\\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}}$

~~il~~ $\cancel{|\det J_\varphi(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\,\mathrm{sen}\varphi}$

~~Sono utili nell'integr. per fili le coord. "cilindriche"~~
$\cancel{\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\theta \\ z=z \end{cases} (\rho,\theta,z)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}}$ ~~e con la~~
~~funz.~~ $\cancel{\varphi(\rho,\theta,z)=(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\theta,z)}$ ~~è biett.,~~ $\cancel{\in C^1}$ ~~e~~
~~ho che~~ $\cancel{|\det J_\varphi(\rho,\theta,z)|=\rho}$

~~N.B. il |det Jφ| o |det Jψ| generati sono i "pagamenti" se si cambiano le coord. da x,y,z a cilindriche o sferiche, devono essere aggiunte all'integrale come fattore moltiplicativo!~~

Teoria → Appendice

Appendice A → Funzioni

il concetto di limite di una funz. in due variabili
$(\forall J\in \mathcal{J}_\ell,\ \exists H\in \mathcal{J}_{(x_0,y_0)}: \forall (x,y)\in H\cap A\subset\mathbb{R}^2 \setminus (x_0,y_0),\ f(x,y)\in J)$
si estende a $\mathbb{R}^n$; un intorno di $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ è un ins. che contiene un'ipersfera centrata in $(x_1^0,\dots,x_n^0)$;
Tutti i teoremi algebrici si estendono a $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$

<u>Teorema</u> (di Weierstrass per più variabili) sia $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ un ins. chiuso e lim. e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ cont., allora esistono due punti $(x_1^m,\dots,x_n^m)$ e $(x_1^M,\dots,x_n^M)$ tali che

$$m=f(x_1^m,\dots,x_n^m)=\min_{(x_1,\dots,x_n)\subset\Omega} f(x_1,\dots,x_n)$$
$$M=f(x_1^M,\dots,x_n^M)=\max_{(x_1,\dots,x_n)\in\Omega} f(x_1,\dots,x_n)$$

<u>Corollario</u> sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(n\geq 2)$ continua e tale che $f(x_1,\dots,x_n)\to 0$ per $\|(x_1,\dots,x_n)\|\to\infty$, allora valgono:
- se $\exists (x_1^0,\dots,x_n^0): f(x_1^0,\dots,x_n^0)\geq 0 \Rightarrow \exists \max_{\mathbb{R}^n} f$
- se " " $f(x_1^0,\dots,x_n^0)\leq 0 \Rightarrow \exists \min_{\mathbb{R}^n} f$

Appendice A → Calcolo Diff. in più Variabili

<u>Def</u> si dice che $f:\Omega\to\mathbb{R}$ $(\Omega\subset\mathbb{R}^n)$ ammette derivata direzionale in $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ lungo v se $g_v(t)=f(x_1^0+tv_1,\dots,x_n^0+tv_n)$ risulta derivabile in $t=0$ e ho $\frac{\partial f}{\partial v}(x_1^0,\dots,x_n^0)=g_v'(0)$
importanti le derivate direz. lungo gli assi coord. cioè $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,\dots,x_n^0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0,\dots,x_n^0)$ e il vettore ∇f da esse formato è il "vett. gradiente" di f in $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ e la $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0,\dots,x_n^0)$ è la deriv. parziale rispetto all'asse coord. x_j.

<u>Def</u> sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e $(x_1^0,\dots,x_n^0)\in\Omega$, una $f:\Omega\to\mathbb{R}$ si dice diff. in quel punto se ammette tutte le deriv. parziali in tale punto e vale
$$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1^0,\dots,x_n^0)+\langle\nabla f(x_1^0,\dots,x_n^0),(x_1-x_1^0,\dots,x_n-x_n^0)\rangle+$$
$$+\,o\left(\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\dots+(x_n-x_n^0)^2}\right)\ \forall (x_1,\dots,x_n)\in\Omega \text{ e con}$$
$$o\left(\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\dots+(x_n-x_n^0)^2}\right)\Big/\left(\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\dots+(x_n-x_n^0)^2}\right)\longrightarrow 0 \text{ per } (x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)$$
e si indica $\langle\nabla f(x_1^0,\dots,x_n^0),(x_1-x_1^0,\dots,x_n-x_n^0)\rangle$ il prod. scalare e l'appl. lin. $\xi\longrightarrow\langle\nabla f(x_1^0,\dots,x_n^0),\xi\rangle$ è detta differ. della funz. f in $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ e si indica $df(x_1^0,\dots,x_n^0)$.
la differ. in un punto implica che f sia cont. in quel punto; se $\exists\nabla f$, non è sufficiente a garantire la differ. della funz. nel punto.

Se Ω è aperto e contenente $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ e $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ è differ. in $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ allora:

- f ammette deriv. direz. lungo v in $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ e ho $\frac{\partial f}{\partial v}(x_1^0,\dots,x_n^0)=df(x_1^0,\dots,x_n^0)v=\langle\nabla f(x_1^0,\dots,x_n^0),v\rangle$
- esiste l'iperpiano tg al grafico di f in $(x_1^0,\dots,x_n;f(x_1^0,\dots,x_n^0))$ e ha eq. $x_{n+1}=f(x_1^0,\dots,x_n^0)+\langle\nabla f(x_1^0,\dots,x_n^0),(x-x_1^0,\dots,x_n-x_n^0)\rangle$ e contiene tutti i vett. tangenti in $(x_1^0,\dots,x_n,f(x_1^0,\dots,x_n^0))$

Ogni derivata nella forma $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ $(i\neq j)$ è la derivata mista di f; in generale conta l'ordine di derivazione tra x_i e x_j, infatti non coincidono, a meno che una delle due deriv. miste calcolate in $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ non sia continua.

I max e min vanno ricercati nei punti stazion. di f, cioè dove $\nabla f=0$ e la matrice Hessiana è una matr. $n\times n$ il cui elem. di posto (i,j) è la deriv. di $\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j(x_1^0,\dots,x_n^0)$ dà info sulla natura del punto stazion.; se $f\in C^2$, le due deriv. miste coincidono, allora $Hf(x_1^0,\dots,x_n^0)$ è simmetrica e diag. in $\mathbb{R}^n$, se i suoi autovalori sono tutti >0, il punto $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ è di min. loc. interno, se sono tutti <0 è di max. loc. int., se sono sia >0 che <0 è di sella.

Per una matr. $Hf(x_1^0,\dots,x_n^0)$, $n\times n$, si usa:

<u>Criterio</u> (di Sylvester) siano A una matr. $n\times n$ simmetrica e A_j la matr. ottenuta da A eliminando le ultime $n-j$ righe e col.

- autoval. $>0 \iff \det(A_j)>0\quad\forall j=1,\dots,n$
- " " $<0 \iff (-1)^j\det(A_j)>0\quad\forall j=1,\dots,n$

Il crit. di Sylvester afferma che se (caso in $\mathbb{R}^3$), $\bar{x}\equiv(x_0,y_0,z_0)$ è stazionario di f, allora:

- è di min. rel. int. di $f\iff$ vale:
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bar{x}>0$ – $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bar{x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bar{x}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\bar{x}\right)^2>0$ – $\det Hf(\bar{x})>0$
- è di max rel. int. di $f\iff$ vale:
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bar{x}<0$ – $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bar{x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bar{x}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\bar{x}\right)^2<0$ – $\det Hf(\bar{x})<0$

Appendice A $\longrightarrow$ Svilappi di Taylor

si può affrontare il probl. di approssimare una funz f di più variabili in un intorno di un punto del suo dom. attraverso un opportuno polinomio di grado m (pol. di Taylor) purché la f sia sufficientemente regolare.

<u>Teorema</u> (Sviluppo di Taylor) sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f:\Omega\to\mathbb{R}\in C^2$, $\forall(x_1^0,\dots,x_n^0)\in\Omega$, $\exists B(x_1^0,\dots,x_n^0;r)\subset\Omega$:

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1^0,\dots,x_n^0)+\langle\nabla f(x_1^0,\dots,x_n^0),(x_1-x_1^0,\dots,x_n-x_n^0)\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\langle Hf(x_1^0,\dots,x_n^0)\cdot(x_1-x_1^0,\dots,x_n-x_n^0),(x_1-x_1^0,\dots,x_n-x_n^0)\rangle+$$
$$+o(\|(x_1-x_1^0,\dots,x_n-x_n^0)\|^2)\qquad\forall(x_1,\dots,x_n)\in B(x_1^0,\dots,x_n^0;r)$$

e con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prod. scal. in $\mathbb{R}^n$ e $o(\|(x_1-x_1^0,\dots,x_n-x_n^0\|^2)$ una funz. definita da $\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)}\frac{o(\|(x_1-x_1^0),\dots,(x_n-x_n^0)\|^2)}{\|(x_1-x_1^0),\dots,(x_n-x_n^0)\|^2}=0$

Nel caso $n=2$, la form. di Taylor centrata in (x_0,y_0) è

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\langle\nabla f(x_0,y_0),(x-x_0,y-y_0)\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\langle Hf(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0),(x-x_0,y-y_0)\rangle+o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$$

↳ la formula vale in tutto Ω, ma è significativa in un intorno di (x_0, y_0).

Appendice A → Cenni Funz. a Valori Vettoriali

In generale, dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una funz. $f: A \to \mathbb{R}^m$ si può vedere come l'insieme di m funz. definite in A con valori in $\mathbb{R}$ (m funz. scal.): le componenti. $\forall (x_1, \dots, x_n)$ fissato in A, $f(x_1, \dots, x_n)$ è un elem. di $\mathbb{R}^m$, perciò ha m componenti e variando $(x_1, \dots, x_n)$ in A si determinano m funz. scalari f_j legate a f da $\circledast\, f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in A$ e vale anche il viceversa, cioè $\circledast \Rightarrow f: \Omega \to \mathbb{R}^m$.

Appendice A → Moltiplicatori di Lagrange

quando si studiano i problemi di max/min di una f al variare di P sul sostegno di una curva (in $\mathbb{R}^2$) o di una superf. (in $\mathbb{R}^3$), si parla di problemi vincolati, dove il vincolo è il sostegno, che si suppone potersi rappresentare come insieme di livello pari a zero.

C'è una tecnica che permette di ricondurre il problema di massimizzare/minimizzare una funz. f su $\{g=0\}$ a quello di cercare i pti stazionari di $f - \lambda g$, cioè tra le soluzioni del primo si trovano quelle del secondo

<u>Teorema</u> (Moltiplicatori di Lagrange) siano $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due funz. $\in C^1$ nell'ins. aperto Ω e si supponga che:
- $g(x_0, y_0) = 0$
- (x_0, y_0) sia di min (o max) locale per f ristretta all'insieme $\{g=0\}$; allora esistono $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} \neq 0$, tali che $\lambda_0 \cdot \nabla f(x_0, y_0) + \lambda_1 \cdot \nabla g(x_0, y_0) = 0$ cioè $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ sono vett. lin. dip. e se $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, allora $\lambda_0 \neq 0$ e $\nabla f(x_0, y_0) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \cdot \nabla g(x_0, y_0)$, cioè il punto $(x_0, y_0; -\lambda_1/\lambda_0)$ è stazionario per la Lagrangiana $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$.

Il Teor. afferma che i punti (x_0, y_0) tali che $g(x_0, y_0) = 0$ e $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ (candidati a essere max/min di f ristretta a $\{g=0\}$) vanno ricercati nella soluzione di $\nabla L(x, y, \lambda) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \partial f/\partial x (x,y) = \lambda \cdot \partial g/\partial x (x,y) \\ \partial f/\partial y (x,y) = \lambda \cdot \partial g/\partial y (x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ e ovviamente non tutti i punti stazionari sono di min o max (possono essere di sella); λ_0 e λ_1 sono i "moltiplicatori" e il $-\lambda_1/\lambda_0$ può essere nullo.

Il Teor. vale anche per le funz. di 3 variabili, f, di classe C^1 su un $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto soggette a vincoli del tipo $G(x,y,z) = (0,0)$ e g_1 e g_2 sono le componenti di G e si ha $L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda g_1(x,y,z) - \mu g_2(x,y,z)$ definita in Ω e i punti (x_0, y_0, z_0) soggetti a $\{G = (0,0)\}$ per cui $J_G(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \\ \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$ ha rango $\mathcal{R} = 2$ e $\nabla L(x,y,z,\lambda,\mu) = (0,0,0,0,0)$, cioè tra le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} \partial f/\partial x (x,y,z) = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) + \mu \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) \\ \partial f/\partial y (x,y,z) = \lambda\, \partial g_1/\partial y (x,y,z) + \mu\, \partial g_2/\partial y (x,y,z) \\ \partial f/\partial z (x,y,z) = \lambda\, \partial g_1/\partial z (x,y,z) + \mu\, \partial g_2/\partial z (x,y,z) \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$D[f(x)+g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$D[f(x)\cdot g(x)] = D[f(x)]\,g(x) + f(x)\,D[g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

$$D[f(g(x))] = g'(x)\cdot f'(g(x)) = D[g'(x)]\cdot D[f(g(x))]$$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

$$D[|f(x)|] = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$D[k f(x)] = k\,D[f(x)] = k\,f'(x)$$

$$D[k] = k\,D[1] = k\cdot 0 = 0$$

$$D[a^{f(x)}] = f'(x)\cdot \log_e a\cdot a^{f(x)}$$

$$D[e^{f(x)}] = f'(x)\cdot \log_e e\cdot e^{f(x)} = f'(x)\,e^{f(x)}$$

$$D[\log_a f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}\,\log_e a$$

$$D[\log_e f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot \log_e e = \frac{f'(x)}{f(x)} = D[\ln f(x)]$$

$$D\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = D\left[f(x)^{1/n}\right] = \frac{1}{n}\,f(x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$$

$$D[f(x)^n] = n\,f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$$

$$D[\operatorname{sen}(f(x))] = \cos(f(x))\cdot f'(x)$$

$$D[\cos(f(x))] = -\operatorname{sen}(f(x))\cdot f'(x)$$

$$D[\tan(f(x))] = f'(x)\left(1+\tan^2(f(x))\right) = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$$

$$D[\operatorname{arcsen}(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$$

$$D[\arccos(f(x))] = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$$

$$D[\arctan(f(x))] = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$$

$$D[\operatorname{cotan}(f(x))] = D\left[\frac{1}{\tan(f(x))}\right] = -\frac{1+\tan^2(f(x))}{(\tan(f(x)))^2}\,f'(x) = -f'(x)\left(1+\operatorname{cotan}^2(f(x))\right)$$

$$= -\frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))}$$

teoreme fondamentale

$$D[F(x)] = f(x) = D\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

$$D[f(x)+g(x)+h(x)] = f'(x)+g'(x)+h'(x)$$

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

$$\int k\,dx = k\int dx = kx \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

$$\int \left(f'(x)\, f(x)^n\right)dx = \frac{1}{n+1}\left[f(x)\right]^{n+1}$$

$$\int f'(x)\cdot k^{f(x)}dx = \frac{1}{\log_e k}\, k^{f(x)} = \frac{k^{f(x)}}{\ln k}$$

$$\int f'(x)\, \mathrm{sen}(f(x))dx = -\cos(f(x))$$

$$\int f'(x)\cos(f(x))dx = \mathrm{sen}(f(x))$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}dx = \tan(f(x))$$

$$\int \frac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2(f(x))}dx = -\mathrm{cotan}(f(x))$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \arctan(f(x))$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f'(x))^2}}dx = \mathrm{arcsen}(f(x))$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\,(b-a)$$

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\int D[f(x)g(x)]dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g(x)dx$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)\left[|f(x)|\right]dx = |f(x)|$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

$$\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = \frac{e^{f(x)}}{\log_e e} = \frac{e^{f(x)}}{\ln e} = \frac{e^{f(x)}}{1} = e^{f(x)}$$

$$\int \mathrm{sen}(x)dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x)dx = \mathrm{sen}(x)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan(x)$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}dx = -\mathrm{cotan}(x) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \mathrm{arcsen}(x)$$