INTEGRALI DOPPI e TRIPLI
Esercizi risolti

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

   (a) $\displaystyle\int_A xy\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\};$

   (b) $\displaystyle\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 3\le x\le 4,\ \ 1\le y\le 2\};$

   (c) $\displaystyle\int_A (2x^2+3y)\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ x^2\le y\le 1\};$

   (d) $\displaystyle\int_A (x-2y)\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 2-x\};$

   (e) $\displaystyle\int_A xy\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ x^2\le y\le 1+x\};$

   (f) $\displaystyle\int_A (x+y)\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 2x^3\le y\le 2\sqrt{x}\};$

   (g) $\displaystyle\int_A \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le \pi,\ \ x\le y\le \pi\};$

   (h) $\displaystyle\int_A (x+2y)\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ \ \min\{x^2,x\}\le y\le \max\{x^2,x\}\};$

   (i) $\displaystyle\int_A x\sin|x^2-y|\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\};$

   (j) $\displaystyle\int_A |\sin x-y|\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le \pi,\ \ 0\le y\le 1\};$

   (k) $\displaystyle\int_A x^2\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ y\le -x^2+x/2+3,\ \ y\ge -x^2-x,\ \ y\ge -x^2+2x\}.$

2. Sia A il triangolo di vertici $A_1=(0,0)$, $A_2=(1,1)$ e $A_3=(2,0)$ dotato di densità unitaria (cioè densità costante $=1$). Calcolare il momento di inerzia di A rispetto al vertice A_1.

3. Sia B il triangolo di vertici $B_1=(0,0)$, $B_2=(0,1)$ e $B_3=(1,0)$ dotato di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di B rispetto al vertice B_3.

4. Calcolare il baricentro delle seguenti regioni del piano dotate di densità unitaria:

   (a) $A=\{(x,y):\ x^2\le y\le 1\};$

   (b) $B=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1,\ \ y\ge 0\}.$

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

   (a) $\displaystyle\int_D y^2\,dx\,dy\,,\quad D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1,\ \ y\ge 0\};$

   (b) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,,\quad D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1,\ \ 0\le y\le x\};$

   (c) $\displaystyle\int_D x^2\,dx\,dy\,,\quad D=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\};$

(d) $\displaystyle\int_D y\,dx\,dy\,,\quad D=\{(x,y):\ 4x^2+9y^2\le 36,\ \ y\ge 0\}.$

6. Sia D un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C=(r,0)$ e raggio r. Verificare la relazione $I_0=I_C+r^2A$, dove I_0 e I_C sono i momenti di inerzia di D rispetto a O e a C e A è l'area di D.

7. Calcolare i seguenti integrali doppi impropri:

   (a) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha}\,dx\,dy\,,\ D=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\};$

   (b) $\displaystyle\int_D \frac{xy}{(x^4+y^4)}\,dx\,dy\,,\ D=\{(x,y):\ 4\le x^2+y^2,\ \ x\ge 0, y\ge 0\};$

   (c) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,,\ D=\{(x,y):\ x^2+y^2\ge 1,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\};$

   (d) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,,\ D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1,\ \ 0\le y\le x\};$

   (e) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,,\ D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1,\ \ -x\le y\le 0\}.$

8. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\int_A xye^{xz}\,dx\,dy\,dz$, dove A è il parallelepipedo $A=[0,2]\times[1,3]\times[0,1]=\{(x,y,z):\ 0\le x\le 2,\ \ 1\le y\le 3,\ \ 0\le z\le 1\}.$

9. Calcolare $\displaystyle\int_D x\,dx\,dy\,dz$, dove $D=\{(x,y,z):\ x,y,z\ge 0,\ \ x+y+z\le 1\}.$

10. Calcolare $\displaystyle\int_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, dove $D=\{(x,y,z):\ 0\le x\le 1,\ \ 2x\le y\le x+1,\ \ 0\le z\le x+y\}.$

11. Calcolare il volume della calotta sferica $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 9,\ \ z\ge 1\}.$

12. Calcolare il volume del solido di rotazione S ottenuto ruotando attorno all'asse z la figura piana (contenuta nel piano yz) $D=\{(y,z):\ 1\le y\le 2,\ \ 0\le z\le (y-1)^2\}.$

13. Utilizzando le coordinate polari sferiche, calcolare $\displaystyle\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$, dove $A=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1\}.$

14. Calcolare $\displaystyle\int_D \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, dove $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge 0\}.$

INTEGRALI DOPPI e TRIPLI

Esercizi risolti - SOLUZIONI

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\displaystyle\int_A xy\,dx\,dy\,,\ A = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1\}.$

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per verticali si ottiene

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,dy\right) dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(b) $\displaystyle\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy\,,\ A = \{(x,y):\ 3 \le x \le 4,\ \ 1 \le y \le 2\}.$

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per orizzontali si ottiene

$$\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\right) dy = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_3^4 dy =$$
$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{4+y} + \frac{1}{3+y}\right) dy = \left[-\log(4+y) + \log(3+y)\right]_1^2 = \ln\left(\frac{25}{24}\right).$$

(c) $\displaystyle\int_A (2x^2+3y)\,dx\,dy\,,\ A = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ \ x^2 \le y \le 1\}.$

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per verticali si ottiene

$$\int_A (2x^2+3y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 (2x^2+3y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[2x^2y + \frac{3}{2}y^2\right]_{x^2}^1 dx =$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{7}{2}x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{7}{10}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x\right]_0^1 = \frac{22}{15}.$$

(d) $\displaystyle\int_A (x-2y)\,dx\,dy\,,\ A = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 2-x\}.$

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per orizzontali si ottiene

$$\int_A (x-2y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-y} (x-2y)\,dx\right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} - 2xy\right]_0^{2-y} dy =$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{5}{2}y^2 - 6y + 2\right) dy = \left[\frac{5}{6}y^3 - 3y^2 + 2y\right]_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

(e) $\displaystyle\int_A xy\,dx\,dy\,,\ A = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ \ x^2 \le y \le 1+x\}.$

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa, ma per la forma esplicita di A è più conveniente integrare per verticali. Si ha quindi

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{1+x} xy\,dy\right) dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1+x} dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (-x^5 + x^3 + 2x^2 + x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{8}.$$

(f) $\displaystyle\int_A (x+y)\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 2x^3\le y\le 2\sqrt{x}\}.$

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali risulta

$$\int_A (x+y)\,dx\,dy\ =\int_0^2\left(\int_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}}(x+y)\,dx\right)dy\ =\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}}dy=$$

$$=\int_0^2\left(-\frac{x^4}{32}-\frac{y^3}{4}+\frac{y^{2/3}}{2^{5/3}}+\frac{y^{4/3}}{2^{1/3}}\right)dy=\left[-\frac{y^5}{5\cdot 32}-\frac{y^4}{16}+\frac{3y^{5/3}}{5\cdot 2^{5/3}}+\frac{3y^{7/3}}{7\cdot 2^{1/3}}\right]_0^2=\frac{39}{35}.$$

(g) $\displaystyle\int_A \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le\pi,\ \ x\le y\le\pi\}.$

Sebbene la regione A sia verticalmente e orizzontalmente convessa, non è possibile calcolare esplicitamente l'integrale per verticali, infatti la funzione $(\sin y)/y$ non è integrabile elementarmente rispetto a y. Integrando per orizzontali si ottiene invece

$$\int_A \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy\ =\int_0^\pi\left(\int_0^y\frac{\sin y}{y}\,dx\right)dy=\int_0^\pi \sin y\,dy=[-\cos y]_0^\pi=2.$$

(h) $\displaystyle\int_A (x+2y)\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ \ \min\{x^2,x\}\le y\le\max\{x^2,x\}\}.$

L'insieme A può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ x^2\le y\le x\},\qquad A_2=\{(x,y):\ 1\le x\le 2,\ \ x\le y\le x^2\}$$

la cui intersezione si riduce ad un punto delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A (x+2y)\,dx\,dy\ =\int_{A_1}(x+2y)\,dx\,dy+\int_{A_2}(x+2y)\,dx\,dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali. Si ha

$$\int_{A_1}(x+2y)\,dx\,dy\ =\int_0^1\left(\int_{x^2}^x(x+2y)\,dy\right)dx=\int_0^1[xy+y^2]_{x^2}^x\,dx=$$

$$=\int_0^1(2x^2-x^3-x^4)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{13}{60}$$

e

$$\int_{A_2}(x+2y)\,dx\,dy\ =\int_1^2\left(\int_x^{x^2}(x+2y)\,dy\right)dx=\int_1^2[xy+y^2]_x^{x^2}\,dx=$$

$$=\int_1^2(-2x^2+x^3+x^4)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\frac{317}{60}$$

Quindi

$$\int_A (x+2y)\,dx\,dy\ =\frac{13}{60}+\frac{317}{60}=\frac{11}{2}.$$

(i) $\displaystyle\int_A x\sin|x^2-y|\,dx\,dy\,,\ A=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\}.$

Poichè

$$\sin|x^2-y|=\begin{cases}\sin(x^2-y) & \text{se}\quad y\le x^2\\ \sin(y-x^2) & \text{se}\quad y>x^2,\end{cases}$$

si ha

$$\int_A x\sin|x^2-y|\,dx\,dy\ =\int_{A_1}x\sin(x^2-y)\,dx\,dy+\int_{A_2}x\sin(y-x^2)\,dx\,dy$$

dove

$$A_1=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le x^2\},\qquad A_2=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ x^2\le y\le 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\int_{A_1} x\sin(x^2-y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{x^2} x\sin(x^2-y)\,dy\right)dx = \int_0^1 x[\cos(x^2-y)]_0^{x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 (x - x\cos(x^2))\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\sin(x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 1$$

e

$$\int_{A_2} x\sin(y-x^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{x^2}^1 x\sin(y-x^2)\,dy\right)dx = \int_0^1 x[-\cos(y-x^2)]_{x^2}^1\,dx =$$

$$= \int_0^1 (x - x\cos(1-x^2))\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin(1-x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 1$$

Quindi

$$\int_A (x+2y)\,dx\,dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 1 = 1 - \sin 1.$$

(j) $\displaystyle\int_A |\sin x - y|\,dx\,dy$, $A = \{(x,y):\ 0 \le x \le \pi,\ \ 0 \le y \le 1\}$.

Poichè

$$|\sin x - y| = \begin{cases} \sin x - y & \text{se} \quad y \le \sin x \\ y - \sin x & \text{se} \quad y > \sin x, \end{cases}$$

si ha

$$\int_A |\sin x - y|\,dx\,dy = \int_{A_1} (\sin x - y)\,dx\,dy + \int_{A_2} (y - \sin x)\,dx\,dy$$

dove

$$A_1 = \{(x,y):\ 0 \le x \le \pi,\ \ 0 \le y \le \sin x\}, \qquad A_2 = \{(x,y):\ 0 \le x \le \pi,\ \ \sin x \le y \le 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\int_{A_1} (\sin x - y)\,dx\,dy = \int_0^\pi\left(\int_0^{\sin x} (\sin x - y)\,dy\right)dx = \int_0^\pi \left[y\sin x - \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{4}$$

e

$$\int_{A_2} (y - \sin x)\,dx\,dy = \int_0^\pi\left(\int_{\sin x}^1 (y - \sin x)\,dy\right)dx = \int_0^\pi [\frac{y^2}{2} - y\sin x]_{\sin x}^1\,dx =$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{4}(1-\cos 2x) - \sin x + \frac{1}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}\sin 2x + \cos x\right]_0^\pi = \frac{3}{4}\pi - 2.$$

Quindi

$$\int_A |\sin x - y|\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi - 2 = \pi - 2.$$

(k) $\displaystyle\int_A x^2\,dx\,dy$, $A = \{(x,y):\ y \le -x^2 + x/2 + 3,\ \ y \ge -x^2 - x,\ \ y \ge -x^2 + 2x\}$.

L'insieme A può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1 = \{(x,y):\ -2 \le x \le 0,\ \ -x^2 - x \le y \le -x^2 + x/2 + 3\},$$

$$A_2 = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\ \ -x^2 + 2x \le y \le -x^2 + x/2 + 3\}$$

aventi in comune solo punti delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A x^2\,dx\,dy = \int_{A_1} x^2\,dx\,dy + \int_{A_2} x^2\,dx\,dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali.

Si ha

$$\int_{A_1} x^2\,dx\,dy = \int_{-2}^{0}\left(\int_{-x^2-x}^{-x^2+x/2+3} x^2\,dy\right)dx = \int_{-2}^{0}\left(\frac{3}{2}x^3+3x^2\right)dx = \left[\frac{3}{8}x^4+x^3\right]_{-2}^{0} = 2$$

e

$$\int_{A_2} x^2\,dx\,dy = \int_{0}^{2}\left(\int_{-x^2+2x}^{-x^2+x/2+3} x^2\,dy\right)dx = \int_{0}^{2}\left(-\frac{3}{2}x^3+3x^2\right)dx = \left[-\frac{3}{8}x^4+x^3\right]_{0}^{2} = 2$$

Quindi

$$\int_A x^2\,dx\,dy = 2+2=4.$$

2. Sia A il triangolo di vertici $A_1=(0,0)$, $A_2=(1,1)$ e $A_3=(2,0)$ dotato di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di A rispetto al vertice A_1.

   Essendo

$$A=\{(x,y):\ y\le x\le 2-y,\ \ 0\le y\le 1\}$$

   si ha

$$I_0=\int_A (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\,dx\right)dy = \int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_y^{2-y}dy =$$
$$= \int_0^1\left(-\frac{8}{3}y^3+4y^2-4y+\frac{8}{3}\right)dy = \left[-\frac{2}{3}y^4+\frac{4}{3}y^3-2y^2+\frac{8}{3}y\right]_0^1=\frac{4}{3}.$$

3. Sia B il triangolo di vertici $B_1=(0,0)$, $B_2=(0,1)$ e $B_3=(1,0)$ dotato di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di B rispetto al vertice B_3.

   Risulta

$$B=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x\}.$$

   Poichè la distanza del generico punto $(x,y)\in B$ dal vertice B_3 è $\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, si ha

$$I_{B_3}=\int_B\left((x-1)^2+y^2\right)dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left((x-1)^2+y^2\right)dy\right)dx = \int_0^1\left[y(x-1)^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}dx =$$
$$=-\frac{4}{3}\int_0^1 (x-1)^3\,dx = -\frac{1}{3}[(x-1)^4]_0^1=\frac{1}{3}.$$

4. Calcolare il baricentro delle seguenti regioni del piano dotate di densità unitaria:

   (a) $A=\{(x,y):\ x^2\le y\le 1\}$.

   Siano $\overline{x}_A$ e $\overline{y}_A$ le coordinate del baricentro di A.

   Per simmetria risulta $\overline{x}_A=0$.

   Invece

$$\overline{y}_A=\frac{1}{M(A)}\int_A y\,dx\,dy$$

   dove $M(A)$ è la massa di A.

   Poichè

$$M(A)=\int_A dx\,dy = \int_{-1}^1\left(\int_{x^2}^1 dy\right)dx = \int_{-1}^1(1-x^2)\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{4}{3}$$

   e

$$\int_A y\,dx\,dy = \int_{-1}^1\left(\int_{x^2}^1 y dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1(1-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1=\frac{4}{5},$$

   risulta $\overline{y}_A=3/5$.

(b) $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.
Siano $\overline{x}_B$ e $\overline{y}_B$ le coordinate del baricentro di B.
Per simmetria risulta $\overline{x}_B = 0$.
Invece

$$\overline{y}_B = \frac{1}{M(B)} \int_B y\, dx\, dy$$

dove $M(B)$ è la massa di B.
Poichè

$$M(B) = \int_B dx\, dy = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\int_B y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

risulta $\overline{y}_B = 4/(3\pi)$.

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\displaystyle\int_D y^2\, dx\, dy\,, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.
L'integrale può essere calcolato utilizzando le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ diventa $0 \leq \rho \leq 1$, mentre $y \geq 0$ diventa $\sin\theta \geq 0$, ossia $0 \leq \theta \leq \pi$.
L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) :\ 0 \leq \rho \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\int_D y^2\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \rho^3 \sin^2\theta\, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta \right) d\rho =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

(b) $\displaystyle\int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy\,, \quad D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq x\}$;
L'integrale può essere calcolato utilizzando le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ diventa $0 \leq \rho \leq 1$, mentre $0 \leq y \leq x$ diventa $0 \leq \sin\theta \leq \cos\theta$, ossia $0 \leq \theta \leq \pi/4$.
L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) :\ 0 \leq \rho \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho^3\, d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

(c) $\displaystyle\int_D x^2\, dx\, dy\,, \quad D = \{(x,y) :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \ y \geq 0\}$.
L'integrale può essere calcolato utilizzando le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ diventa $1 \le \rho \le 2$, mentre $y \ge 0$ diventa $0 \le \theta \le \pi$. L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : \ 1 \le \rho \le 2, \ \ 0 \le \theta \le \pi\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\int_D x^2 \, dx \, dy = \int_1^2 \left(\int_0^\pi \rho^3 \cos^2\theta \, d\theta \right) d\rho = \int_1^2 \rho^3 \left(\int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta \right) d\rho =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{8}\pi.$$

(d) $\displaystyle\int_D y \, dx \, dy \,, \quad D = \{(x, y) : \ 4x^2 + 9y^2 \le 36, \ \ y \ge 0\}.$

La disequazione che definisce D si può riscrivere come

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \le 1.$$

Quindi D è una mezza ellisse di semiassi $a = 3$ e $b = 2$. Utilizziamo la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

l'insieme di integrazione nel piano ρ, θ diventa il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : \ 0 \le \rho \le 1, \ \ 0 \le \theta \le \pi\}.$$

Essendo 6ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\int_D y \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^\pi 12\rho^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 12\rho^2 [-\cos\theta]_0^\pi \, d\rho = 24 \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = 8[\rho^3]_0^1 = 8.$$

6. Sia D un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C = (r, 0)$ e raggio r. Verificare la relazione $I_0 = I_C + r^2 A$, dove I_0 e I_C sono i momenti di inerzia di D rispetto a O e a C e A è l'area di D.

   Risulta

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_D ((x - r + r)^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_D ((x - r)^2 + 2r(x - r) + r^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_D ((x - r)^2 + y^2) \, dx \, dy + r^2 \int_D dx \, dy + 2r \int_D (x - r) \, dx \, dy \\ &= I_c + r^2 A + 2r \int_D (x - r) \, dx \, dy \\ &= I_c + r^2 A \end{aligned}$$

   poichè per simmetria risulta

$$\int_D (x - r) \, dx \, dy = 0.$$

7. Calcolare i seguenti integrali doppi impropri:

(a) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha}\, dx\, dy\,,\ D=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\}.$

Sia

$$D_R=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le R^2\},\qquad (R>1)$$

allora

$$\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha}\, dx\, dy=\lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}(x^2+y^2)^{-\alpha}\, dx\, dy.$$

Utilizzando le coordinate polari si ha

$$\int_{D_R}(x^2+y^2)^{-\alpha}\, dx\, dy=\int_1^R\left(\int_0^{2\pi}\rho^{-2\alpha+1}\, d\theta\right)d\rho=2\pi\int_1^R\rho^{-2\alpha+1}\, d\rho$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{1-\alpha}(R^{-2\alpha+2}-1) & \text{se}\quad \alpha\neq 1\\ 2\pi\log R & \text{se}\quad \alpha=1.\end{cases}$$

Pertanto

$$\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha}\, dx\, dy=\lim_{R\to+\infty}\begin{cases}\dfrac{\pi}{1-\alpha}(R^{-2\alpha+2}-1) & \text{se}\quad \alpha\neq 1\\ 2\pi\log R & \text{se}\quad \alpha=1.\end{cases}$$

e quindi l'integrale diverge positivamente se $\alpha\le 1$, vale $\pi/(\alpha-1)$ se $\alpha>1$.

(b) $\displaystyle\int_D \frac{xy}{(x^4+y^4)}\, dx\, dy\,,\ D=\{(x,y):\ 4\le x^2+y^2,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\}.$

Sia

$$D_R=\{(x,y):\ 4\le x^2+y^2\le R^2,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\},\qquad (R>2)$$

allora

$$\int_D \frac{xy}{(x^4+y^4)}\, dx\, dy=\lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}\frac{xy}{(x^4+y^4)}\, dx\, dy.$$

Utilizzando le coordinate polari si ha

$$\int_{D_R}\frac{xy}{(x^4+y^4)}\, dx\, dy=\int_2^R\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}\, d\theta\right)d\rho$$

$$=\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}\, d\theta\right)\left(\int_2^R\frac{1}{\rho}\, d\rho\right)=I(\log R-\log 2),$$

dove $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}\, d\theta>0$. Si può calcolare che $I=\frac{\pi}{4}$. Tuttavia l'integrale diverge positivamente in quanto

$$\int_D \frac{xy}{(x^4+y^4)}\, dx\, dy=I\lim_{R\to+\infty}(\log R-\log 2).=+\infty.$$

(c) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy\,,\ D=\{(x,y):\ x^2+y^2\ge 1,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\}.$

Sia

$$D_R=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le R^2,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\},\qquad (R>1)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy=\lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy.$$

Utilizzando le coordinate polari si ha

$$\int_{D_R}\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy=\int_1^R\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\rho^2}\cos\theta\, d\theta\right)d\rho=\int_1^R\frac{1}{\rho^2}[\sin\theta]_0^{\pi/2}\, d\rho$$

$$=\int_1^R\frac{1}{\rho^2}\, d\rho=\left[-\frac{1}{\rho}\right]_1^R=1-\frac{1}{R}.$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy=\lim_{R\to+\infty}\left(1-\frac{1}{R}\right)=1.$$

(d) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, $D = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1,\ \ 0 \le y \le x\}$.
Sia
$$D_\epsilon = \{(x,y):\ \epsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1,\ \ 0 \le y \le x\} \qquad (\epsilon > 0),$$
allora
$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\ dy = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\ dy.$$
Utilizzando le coordinate polari si ha
$$\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\ dy = \int_\epsilon^1\left(\int_0^{\pi/4}\cos\theta\ d\theta\right)d\rho = \int_\epsilon^1 [\sin\theta]_0^{\pi/4}\ d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_\epsilon^1\ d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\epsilon).$$
Pertanto
$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\ dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}(1-\epsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(e) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$, $D = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1,\ \ -x \le y \le 0\}$.
Sia
$$D_\epsilon = \{(x,y):\ \epsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1,\ \ -x \le y \le 0\} \qquad (\epsilon > 0),$$
allora
$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\ dy = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\ dy.$$
Utilizzando le coordinate polari si ha
$$\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\ dy = \int_\epsilon^1\left(\int_{-\pi/4}^{0}\frac{1}{\rho^2}\cos\theta\ d\theta\right)d\rho = \int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2}[\sin\theta]_{-\pi/4}^{0}\ d\rho$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2}\ d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{1}{\rho}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right).$$
Pertanto
$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\ dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right) = +\infty.$$
Quindi l'integrale diverge positivamente.

8. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\int_A xye^{xz}\,dx\,dy\,dz$, dove A è il parallelepipedo
$A = [0,2]\times[1,3]\times[0,1] = \{(x,y,z):\ 0 \le x \le 2,\ \ 1 \le y \le 3,\ \ 0 \le z \le 1\}$.
Il calcolo dell'integrale triplo può essere ridotto al calcolo di tre integrali semplici successivi.
$$\int_A xye^{xz} = \int_1^3\left(\int_0^2\left(\int_0^1 xye^{xz}\ dz\right)dx\right)dy = \int_1^3 y\left(\int_0^2 [e^{xz}]_0^1\ dx\right)dy$$
$$= \int_1^3 y\left(\int_0^2 (e^x-1)\ dx\right)dy = \int_1^3 y[e^x-x]_0^2\ dy$$
$$= (e^2-3)\int_1^3 y\ dy = (e^2-3)\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 = 4(e^2-3).$$

9. Calcolare $\displaystyle\int_D x\ dx\,dy\,dz$, dove $D = \{(x,y,z):\ x,y,z \ge 0,\ \ x+y+z \le 1\}$.
D è la regione del primo ottante che sta al di sotto del piano di equazione $x+y+z=1$. Questo piano passa per i punti $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$ e $P_3 = (0,0,1)$. Dunque D è la piramide (tetraedro) di vertici P_1, P_2, P_3 e $(0,0,0)$. Integrando per strati paralleli al piano xy si ha
$$\int_D x\ dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_{A_z} x\ dx\,dy\right)dz,$$
dove A_z è la sezione di livello z dell'insieme D, cioè l'insieme degli (x,y) tali che $(x,y,z)\in D$, per ogni z fissato tra 0 e 1. Dunque A_z è la regione del piano xy definita dalle disequazioni
$$\begin{cases} x \ge 0 \\ 0 \le y \le 1-x-z. \end{cases}$$

È facile vedere che A_z è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1-z,0)$, $(0,1-z)$. Integrando per verticali su A_z otteniamo

$$\int_{A_z} x\,dx\,dy = \int_0^{1-z}\left(\int_0^{1-x-z} x\,dy\right)dx = \int_0^{1-z} x\Big[y\Big]_0^{1-x-z}\,dx =$$
$$= \int_0^{1-z}\Big(-x^2 + x(1-z)\Big)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + (1-z)\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-z} = \frac{(1-z)^3}{6}$$

e successivamente

$$\int_0^1\left(\int_{A_z} x\,dx\,dy\right)dz = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-z)^3\,dz = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1-z)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Possiamo anche integrare per fili paralleli all'asse z. Osserviamo che la sezione di livello $z=0$ dell'insieme D,

$$A_0 = \Big\{(x,y):\ x\geq 0,\ \ 0\leq y\leq 1-x\Big\},$$

è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ nel piano xy. Fissato $(x,y)\in A_0$, la variabile z varia lungo il filo $0\leq z\leq 1-x-y$. Possiamo dunque riscrivere l'insieme D nella forma

$$D = \Big\{(x,y,z):\ (x,y)\in A_0,\ \ 0\leq z\leq 1-x-y\Big\}.$$

Integrando per fili, ed integrando successivamente per verticali nell'insieme A_0, otteniamo

$$\int_D x\,dx\,dy\,dz = \int_{A_0}\left(\int_0^{1-x-y} x\,dz\right)dx\,dy = \int_{A_0}\Big(x - x^2 - xy\Big)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\Big(x-x^2-xy\Big)\,dy\right)dx = \int_0^1\left[(x-x^2)y - \frac{1}{2}xy^2\right]_0^{1-x}dx$$
$$= \int_0^1\Big(x(1-x)^2 - \frac{1}{2}x(1-x)^2\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(x + x^3 - 2x^2\big)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{24}.$$

10. Calcolare $\int_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, dove $D = \{(x,y,z):\ 0\leq x\leq 1,\ \ 2x\leq y\leq x+1,\ \ 0\leq z\leq x+y\}$.

D è la regione dello spazio compresa tra il grafico della funzione $z=x+y$ (che è il piano passante per i punti $(0,0,0)$, $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$) e il piano xy con x e y che variano nell'insieme $A=\{(x,y):\ 0\leq x\leq 1,\ \ 2x\leq y\leq x+1\}$:

$$D = \{(x,y,z):\ (x,y)\in A,\ 0\leq z\leq x+y\}.$$

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha

$$\int_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_A\left(\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\right)dx\,dy.$$

A è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,2)$. Applicando su A la formula di integrazione per verticali, si ottiene:

$$\int_A\left(\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\right)dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{2x}^{x+1}\left(\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\right)dy\right)dx =$$
$$= \int_0^1\left(\int_{2x}^{x+1}\left[(x+y)z + \frac{z^2}{2}\right]_0^{x+y}dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_{2x}^{x+1}\frac{3}{2}(x+y)^2\,dy\right)dx =$$
$$= \int_0^1\left[\frac{1}{2}(x+y)^3\right]_{2x}^{x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1(-19x^3+12x^2+6x+1)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{19}{4}x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x\right]_0^1 = \frac{13}{8}.$$

11. Calcolare il volume della calotta sferica $D = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ \ z \geq 1\}$.

D è la calotta della sfera di raggio 3 e centro l'origine che si trova al di sopra del piano $z = 1$. Integrando per strati paralleli al piano xy si ha

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D dx\,dy\,dz = \int_1^3 \left(\int_{A_z} dx\,dy \right) dz,$$

dove per ogni z fissato tra 1 e 3, A_z è l'insieme

$$A_z = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 9 - z^2\},$$

cioè il cerchio centrato nell'origine di raggio $\sqrt{9 - z^2}$. Essendo

$$\int_{A_z} dx\,dy = \ \mathrm{area}(A_z)\ = \pi(9 - z^2),$$

si ottiene

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_1^3 \pi(9 - z^2)\,dz = \pi \left[9z - \frac{1}{3}z^3 \right]_1^3 = \frac{28\pi}{3}.$$

Possiamo anche integrare per fili paralleli all'asse z. Notiamo che la proiezione del punto $P = (x, y, z) \in D$ nel piano xy varia nell'insieme

$$A = A_1 = \{(x, y) :\ \ x^2 + y^2 \leq 8\}$$

(il cerchio chiuso centrato nell'origine di raggio $\sqrt{8}$), come si vede intersecando la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con il piano $z = 1$. Ne segue che l'insieme D si può descrivere come

$$D = \{x, y, z) :\ \ (x, y) \in A,\ \ 1 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}\},$$

cioè al variare di (x, y) in A, z varia lungo il filo $[1, \sqrt{9 - x^2 - y^2}]$. Integrando per fili e integrando successivamente in coordinate polari nel piano xy, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D) &= \int_A \left(\int_1^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dz \right) dxdy = \int_A \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} - 1 \right) dxdy \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{9 - r^2}\, r\,dr - 8\pi = -\frac{2\pi}{3} \left[(9 - r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{8}} - 8\pi = \frac{28}{3}\pi.\end{aligned}$$

12. Calcolare il volume del solido di rotazione S ottenuto ruotando attorno all'asse z la figura piana (contenuta nel piano yz) $D = \{(y, z) :\ 1 \leq y \leq 2,\ \ 0 \leq z \leq (y - 1)^2\}$.

Procediamo con la formula generale

$$\mathrm{Vol}(S) = 2\pi \int_D y\,dy\,dz$$

che fornisce il volume del solido S ottenuto ruotando attorno all'asse z la regione D del piano yz. Nel nostro caso D è la regione compresa tra l'asse y e la parabola $z = (y - 1)^2$ nel tratto $1 \leq y \leq 2$. Integrando per verticali otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(S) &= 2\pi \int_1^2 \left(\int_0^{(y-1)^2} y\,dz \right) dy = 2\pi \int_1^2 y(y - 1)^2\,dy \\ &= 2\pi \int_1^2 (y^3 - 2y^2 + y)\,dy = 2\pi \left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 \right]_1^2 = \frac{7}{6}\pi.\end{aligned}$$

13. Utilizzando le coordinate polari sferiche, calcolare $\displaystyle\int_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$, dove $A = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Ricordiamo che le coordinate polari sferiche (r, θ, φ) sono definite da

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

dove $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Lo jacobiano della trasformazione $(r, \theta, \varphi) \to (x, y, z)$ è

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta.$$

Essendo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $A = \{(r, \theta, \varphi) : \ r \leq 1\}$, otteniamo

$$\int_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r\, e^{-r^2}\, r^2 \sin \theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \left(\int_0^1 r^3\, e^{-r^2}\, dr\right) \left(\int_0^\pi \sin \theta\, d\theta\right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = 4\pi \int_0^1 r^3\, e^{-r^2}\, dr.$$

Ponendo $r^2 = t$ e integrando per parti si ha

$$\int_0^1 r^3\, e^{-r^2}\, dr = \frac{1}{2} \int_0^1 t\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} \left[-t\, e^{-t} + \int e^{-t}\, dt\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} \left[-t\, e^{-t} - e^{-t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(-\frac{2}{e} + 1) = \frac{e - 2}{2e}.$$

In definitiva, l'integrale proposto ha il valore $4\pi \dfrac{e-2}{2e} = \dfrac{2\pi(e-2)}{e}$.

14. Calcolare $\displaystyle\int_D \frac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, dove $D = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ z \geq 0\}$.

In coordinate polari sferiche (r, θ, φ) il dominio D diventa $\{(r, \theta, \varphi) : \ r \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$, cioè il parallelepipedo $[0, 2] \times [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. Pertanto

$$\int_D \frac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \theta}{1 + r^2}\, r^2 \sin \theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$
$$= 2\pi \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta\, d\theta\right) \left(\int_0^2 \frac{r^3}{1 + r^2}\, dr\right)$$
$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta\right]_0^{\pi/2} \int_0^2 \left(r - \frac{r}{1 + r^2}\right) dr$$
$$= \pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \log(1 + r^2)\right]_0^2 = \pi\Big(2 - \frac{1}{2} \log 5\Big).$$

Possiamo anche integrare per strati paralleli al piano xy. Per ogni z fissato con $0 \leq z \leq 2$, l'insieme $A_z = \{(x, y) : \ (x, y, z) \in D\}$ è il cerchio centrato nell'origine di raggio $\sqrt{4 - z^2}$,

$$A_z = \Big\{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 4 - z^2\Big\}.$$

Utilizzando le coordinate polari (ρ, φ) nel piano xy, otteniamo

$$\int_D \frac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 \left(\int_{A_z} \frac{z}{1 + z^2 + x^2 + y^2}\, dx\, dy\right) dz$$
$$= \int_0^2 z \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + z^2 + \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi\right) dz = \int_0^2 z \left(2\pi \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \frac{1}{1 + z^2 + \rho^2}\, \rho\, d\rho\right) dz$$
$$= 2\pi \int_0^2 z \left[\frac{1}{2} \log(1 + z^2 + \rho^2)\right]_0^{\sqrt{4-z^2}} dz = \pi \int_0^2 \Big(z \log 5 - z \log(1 + z^2)\Big)\, dz$$
$$= \pi \left\{\frac{1}{2} \log 5 \Big[z^2\Big]_0^2 - \frac{1}{2} \int_1^5 \log t\, dt\right\} = \pi \left\{2 \log 5 - \frac{1}{2} \Big[t \log t - t\Big]_1^5\right\}$$
$$= \pi \left(2 \log 5 - \frac{5}{2} \log 5 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) = \pi\Big(2 - \frac{1}{2} \log 5\Big).$$

Abbiamo fatto il cambio di variabile $1 + z^2 = t$ nell'integrale $\int z \log(1 + z^2)\, dz$.

Infine possiamo integrare per fili paralleli all'asse z. Fissato (x, y) tale che $x^2 + y^2 \leq 4$, la variabile z varia nell'insieme

$$A_{(x,y)} = \Big\{z : \ (x, y, z) \in D\Big\} = \Big\{z : \ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\Big\}.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int_D \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_{\{x^2+y^2\leq 4\}} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dz\right) dx\,dy\\
&= \int_{\{x^2+y^2\leq 4\}} \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2+z^2)\right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx\,dy\\
&= \int_{\{x^2+y^2\leq 4\}} \left(\frac{1}{2}\log 5 - \frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2)\right) dx\,dy\\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\log 5 - \frac{1}{2}\log(1+\rho^2)\right) \rho\,d\rho\,d\varphi = \pi \int_0^2 \Big(\rho\log 5 - \rho\log(1+\rho^2)\Big)\,d\rho.
\end{aligned}$$

Questo è lo stesso integrale ottenuto sopra e riotteniamo lo stesso risultato.