SECONDA ESERCITAZIONE sugli INTEGRALI DOPPI

1 Dato l'insieme

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 2x^2,\ y \leq 3-x \}$$

(a) Disegnare E

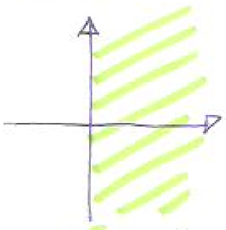
(b) Scrivere E, eventualmente spezzandolo, come normale sia rispetto a x che rispetto a y

(c) Calcolare $\int_E y \, dx\, dy$ in entrambi i modi

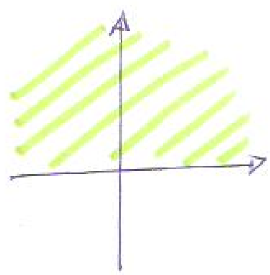
(d) Calcolare il baricentro di E.

Svolgimento:

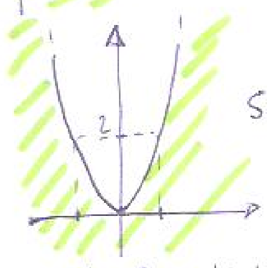
(a) $x \geq 0$



$y \geq 0$



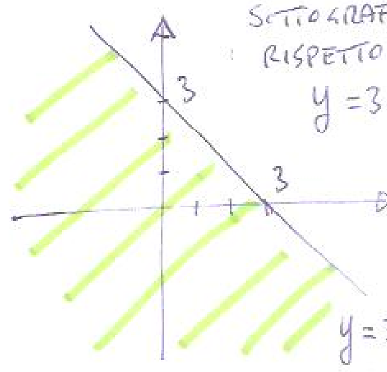
$y \leq 2x^2$



SOTTOGRAFICO RISPETTO A $y = 2x^2$

$y = 2x^2$ parabola di $V(0,0)$ passante per $(\pm 1, 2)$

SOTTOGRAFICO RISPETTO A $y = 3-x$



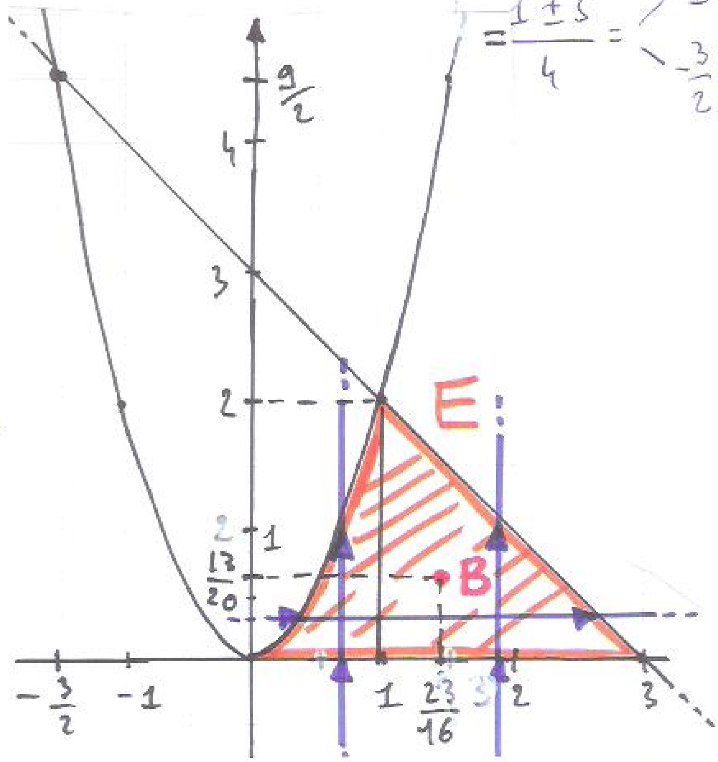
$y = 3-x$

Per disegnare E occorre trovare le interse-zioni tra $y=+3-x$ e $y=2x^2$:

$\begin{cases} y=3-x \\ y=2x^2 \end{cases}$ $\quad 2x^2=3-x \quad 2x^2+x-3=0 \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1\pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=\frac{9}{2} \end{cases}$

Intersecando le zone tratteggiate nella pagina precedente otteniamo l'insieme rappresentato a fianco:



(b) E non è normale rispetto a x: va spezzato con la retta verticale $x=1$ per ottenere due insiemi normali rispetto a x.

$E_{1,x} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 2x^2\}$

$E_{2,x} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le 3, \ 0\le y\le 3-x\}$

$E = E_{1,x} \cup E_{2,x}$

E è invece normale rispetto a y.

Per scriverlo come dominio normale rispetto

a y dobbiamo determinare le due funzioni $x=\gamma(y)$ e $x=\delta(y)$ tali che $\gamma(y)\leq x\leq\delta(y)$.
(INGRESSO) (USCITA)

Da $y=2x^2$ ricaviamo $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}y}$; $\boxed{x=\sqrt{\frac{1}{2}y}}$ rappresenta la mezza parabola di destra. $(x\geq 0)$ e $x=-\sqrt{\frac{1}{2}y}$ la mezza parabola di sinistra. $(x\leq 0)$ È chiaro che $\gamma(y)=\sqrt{\frac{1}{2}y}$.

Da $y=3-x$ ricaviamo $\boxed{x=3-y}$; quindi $\delta(y)=3-y$.

$$E_y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\leq y\leq 2,\ \sqrt{\tfrac{1}{2}y}\leq x\leq 3-y\right\}$$

(c)
$$\int_E y\,dx\,dy=\int_{E_{1,x}} y\,dx\,dy+\int_{E_{2,x}} y\,dx\,dy$$

$$\int_{E_{1,x}} y\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{2x^2} y\,dy\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[y^2\right]_0^{2x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(4x^4)\,dx=2\int_0^1 x^4\,dx=$$

$$=\frac{2}{5}\left[x^5\right]_0^1=\frac{2}{5}$$

$$\int_{E_{2,x}} y\,dx\,dy = \int \left(\int_0^{3-x} y\,dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \left[y^2 \right]_0^{3-x} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (3-x)^2\,dx \overset{*}{=}$$

n.b.: anche
$$\int (3-x)^2\,dx = -\int -(3-x)^2\,dx = -\frac{(3-x)^3}{3} + c$$
(STRADA ALTERNATIVA)

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 (9 + x^2 - 6x)\,dx = \frac{1}{2} \left[9x + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\cancel{27} + 9 - \cancel{27}) - \left(9 + \frac{1}{3} - 3\right) \right] = \frac{1}{2} \left(9 - \frac{19}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

Quindi $\displaystyle\int_E y\,dx\,dy = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{6+20}{15} = \frac{26}{15}$

$$\int_{E_y} y\,dx\,dy = \int_0^2 y \left(\int_{\sqrt{\frac{1}{2}y}}^{3-y} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^2 y \left(3 - y - \frac{\sqrt{2}}{2} y^{\frac{1}{2}} \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(3y - y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^2$$

$$= 6 - \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{2^5} = 6 - \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2}$$

$\sqrt{16} = 4$

$$= 6 - \frac{8}{3} - \frac{8}{5} = \frac{90 - 40 - 24}{15} = \frac{26}{15}$$

Si può osservare che il calcolo relativo al dominio normale rispetto all'asse y è più rapido, anche se leggermente complicato dalla presenza della radice.

Per determinare y_B dobbiamo trovare Area E. Possiamo calcolare Area E_1 come $\int_{E_1} dx\,dy$, con E_1 normale rispetto a x e Area E_2 in modo elementare.

$$\text{Area } E_1 = \boxed{\int_{E_1} dx\,dy} = \int_0^1 \left(\int_0^{2x^2} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Area } E_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \qquad \text{Area } E = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Quindi
$$\boxed{y_B} = \frac{\int_E y\,dx\,dy}{\text{Area } E} = \frac{\cancel{26}^{\,13}}{\cancel{15}_{\,5}} \cdot \frac{3}{\cancel{8}_{\,4}} = \frac{13}{20} \simeq 0{,}65$$

Per determinare x_B dobbiamo calcolare $\int_E x\,dx\,dy$. Lo calcoliamo come dominio normale rispetto a y perché non dobbiamo spezzare e x integrata per prima dà $\frac{1}{2}x^2$ e fa sparire la radice.

$$\int_E x\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{\frac{1}{2}y}}^{3-y} x\,dx \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[x^2\right]_{\sqrt{\frac{1}{2}y}}^{3-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[(3-y)^2 - \frac{1}{2}y\right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(9 + y^2 - 6y - \frac{1}{2}y\right) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(9 + y^2 - \frac{13}{2}y\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left[9 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{13}{4}y^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(18 + \frac{8}{3} - 13\right) =$$

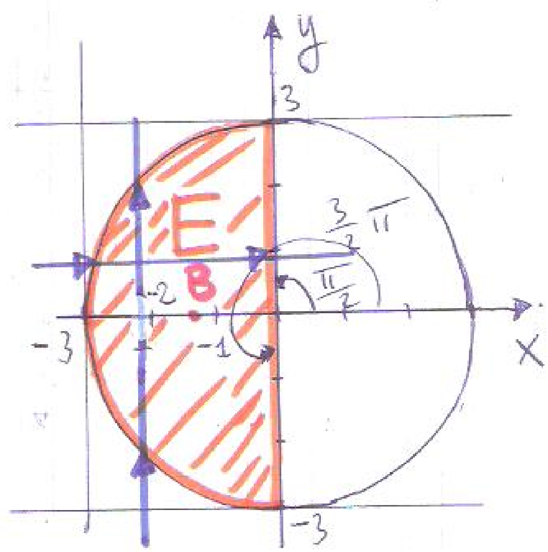
$$= \frac{1}{2}\left(5 + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{23}{3} = \frac{23}{6}$$

$$\boxed{x_B} = \frac{\int_E x\,dx\,dy}{\text{Area } E} = \frac{23}{6}\cdot\frac{3}{8} = \frac{23}{16} \simeq 1{,}44$$

Quindi $\boxed{B\left(\frac{23}{16}, \frac{13}{20}\right)} \simeq (1{,}44; 0{,}65)$

I valori ottenuti sono verosimili: B si trova naturalmente all'interno di E, a circa $\frac{1}{3}$ del valore massimo di y e a circa la metà del massimo valore di x, all'interno di E_2, cioè della parte di E avente area maggiore. Sempre opportuno fare questi controlli di verosimiglianza perché errori grossolani vengono facilmente scoperti. Altro controllo molto semplice e importante è quello sul segno: $\int_E x\,dxdy > 0$ e $\int_E y\,dxdy > 0$, perché $x \geq 0$ e $y \geq 0$ $\forall x, y \in E$!

2 Calcolare le coordinate del baricentro di $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9 \,,\, x \leq 0\}$.



Svolgimento: E è il semicerchio sinistro $(x \leq 0)$ di centro O e raggio 3.

Per motivi di simmetria è evidente che $y_B = 0$ (il baricentro è sull'asse x). Area $E = \frac{9}{2}\pi$ (calcolata in modo elementare).

Ci concentriamo quindi sul calcolo di x_E.

- Possiamo vedere E come dominio normale rispetto a x, tenendo conto che entriamo in E dalla semicirconferenza inferiore ($x^2+y^2=9 \longrightarrow y^2 = 9-x^2 \longrightarrow \boxed{y = -\sqrt{9-x^2}}$ perché $y \leq 0$) e usciamo dalla semicirconferenza superiore ($\boxed{y = +\sqrt{9-x^2}}$ perché $y \geq 0$). Quindi

$$E_x = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{-3 \leq x \leq 0}_{\text{STRISCIA VERTICALE}} \,,\, \underbrace{-\sqrt{9-x^2}}_{\alpha(x)} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{9-x^2}}_{\beta(x)}\Big\}$$

$\alpha(x)$: INGRESSO $\quad$ $\beta(x)$: USCITA

$$\int_E x\,dx\,dy = \int_{-3}^{0} x\left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy\right)dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} 2x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\int_{-3}^{0} -2x\,(9-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= -\frac{\left[(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{0}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}-0\right) = -\frac{2}{3}\cdot 27 = -18$$

$$x_E = \frac{1}{\text{Area }E}\cdot\int_E x\,dx\,dy = \frac{2}{9\pi}(-18) = -\frac{4}{\pi} \simeq -1{,}3$$

Ovviamente B è all'interno del semicerchio, leggermente spostato a destra rispetto al punto medio di $[-3,0]$.

Se avessimo voluto integrare utilizzando i domini normali rispetto all'asse y avremmo dovuto risolvere l'equazione $x^2+y^2=9$ rispetto a x: $x^2 = 9-y^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{9-y^2} \longrightarrow \boxed{x = -\sqrt{9-y^2}}$

che rappresenta la semicirconferenza sinistra $(x \le 0)$

$$E_y = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; \underbrace{-3\le y\le 3}_{\substack{\text{STRISCIA}\\ \text{ORIZZONTALE}}},\ \underbrace{-\sqrt{9-y^2}}_{\substack{\gamma(y)\\ \text{INGRESSO}}} \le x \le \underbrace{0}_{\substack{\delta(y)\\ \text{USCITA}}}\Big\}$$

$$\int_E x\,dx\,dy = \int_{-3}^{3}\left(\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} x\,dx\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\left[x^2\right]_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} dy = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} -(9-y^2)\,dy =$$

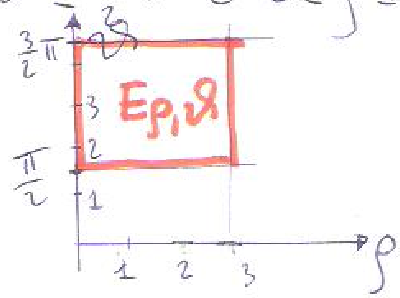
$$= -\frac{1}{2}\left[9y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-3}^{3} = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(27-9) = -18$$

(strada più rapida, visto che integrando x si ottiene $\frac{1}{2}x^2$ e la radice sparisce)-

Terza possibilità: passare a coordinate polari $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$:

$$\int_E x\,dx\,dy = \int_{E_{\rho,\vartheta}} \rho\cos\vartheta\cdot\boxed{\rho}\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_{E_{\rho,\vartheta}} \rho^2\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta \qquad \text{con } \frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\frac{3}{2}\pi \text{ e } 0\le\rho\le 3$$



$$= \int_0^3 \rho^2\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta\right)d\rho$$

$$= \int_0^3 \rho^2\left[\mathrm{sen}\,\vartheta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}d\rho = -2\int_0^3\rho^2\,d\rho = -\frac{2}{3}\left[\rho^3\right]_0^3 =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot 27 = -18$$

Sicuramente il passaggio a coordinate polari rappresenta la strada migliore, visto che, quanto a calcoli, comporta solo il calcolo di un integrale elementare di $\cos\vartheta$-

$\boxed{3}$ Considerare l'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1,\ -x \le y \le 2 - x^2\}$$

(a) Disegnare E

(b) Eventualmente suddividendolo, scrivere E come normale rispetto a x, poi come normale rispetto a y.

(c) Calcolare $\int x^3 y \, dx\,dy$ nel modo più opportuno.

Svolgimento:

(a) $\boxed{|x| \le 1} \iff -1 \le x \le 1$ (striscia verticale)

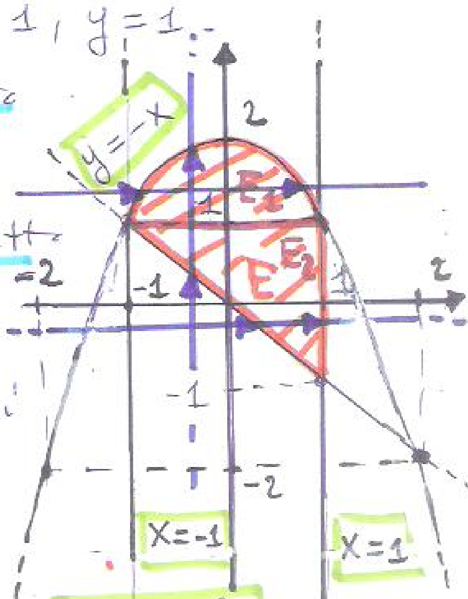
$\boxed{y = 2 - x^2}$ parabola di $V(0,2)$; per $x = \pm 1$, $y = 1$;

$\boxed{y = -x}$ bisettrice del 2° e del 4° quadrante; per $x = 1$, $y = -1$; per $x = -1$, $y = 1$.

$\boxed{y \ge -x}$ sopragrafico rispetto a $y = -x$

$\boxed{y \le 2 - x^2}$ sottografico rispetto a $y = 2 - x^2$

Intersecando le 3 condizioni otteniamo il grafico a fianco:



(b) È semplice scrivere E come dominio normale rispetto a x:

$$E_x = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 1 \,,\, \underbrace{-x}_{\alpha(x)} \le y \le \underbrace{2-x^2}_{\beta(x)} \right\}$$

Per scriverlo come unione fra 2 insiemi normali rispetto all'asse y dobbiamo spezzarlo in 2 domini E_1 ed E_2.

Per E_2 non ci sono problemi ($y=-x \rightarrow x=-y$):

$$E_{2,y} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{-1 \le y \le 1}_{\substack{\text{STRISCIA} \\ \text{ORIZZONTALE}}} \,,\, \underbrace{-y}_{\substack{\gamma(y) \\ \text{INGRESSO}}} \le x \le \underbrace{1}_{\substack{\delta(y) \\ \text{USCITA}}} \right\}$$

Per determinare $E_{1,y}$ dobbiamo risolvere l'equazione $y = 2-x^2$ rispetto a x: $x^2 = 2-y \longrightarrow$ $\boxed{x = \pm\sqrt{2-y}}$; $x=\sqrt{2-y}$ è l'equazione che rappresenta la mezza parabola a destra dell'asse y ($x \ge 0$) ; mentre $x = -\sqrt{2-y}$ è l'equazione che rappresenta la mezza parabola a sinistra ($x \le 0$). L'ingresso è rappresentato da $\boxed{x=-\sqrt{2-y}}$, l'uscita da $\boxed{x=\sqrt{2-y}}$. Quindi:

$$E_{1,y} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{1 \le y \le 2}_{\substack{\text{STRISCIA} \\ \text{ORIZZONTALE}}} \,,\, \underbrace{-\sqrt{2-y}}_{\gamma(y)} \le x \le \underbrace{\sqrt{2-y}}_{\delta(y)} \right\}$$

(c) Il modo più opportuno di eseguire il calcolo è vedere E come dominio normale rispetto all'asse x (un solo insieme e niente radici):

$$\int_E x^3 y \, dx\, dy = \int_{-1}^{1} x^3 \left(\int_{-x}^{2-x^2} y \, dy \right) dx =$$

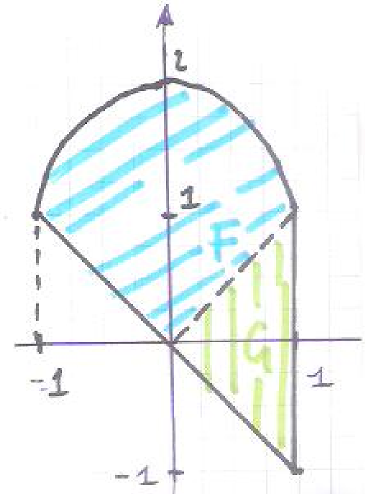
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^3 \left[y^2 \right]_{-x}^{2-x^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^3 \left[(2-x^2)^2 - (-x)^2 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^3 (4 + x^4 - 4x^2 - x^2) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (4x^3 + x^7 - 5x^5) \, dx = \frac{1}{2} \left[x^4 + \frac{1}{8} x^8 - \frac{5}{6} x^6 \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{8} - \frac{5}{6}\right) - \left(1 + \frac{1}{8} - \frac{5}{6}\right) \right] = 0$$

Il fatto che l'integrale dia come risultato 0 non è per niente casuale: infatti possiamo spezzare E mediante la bisettrice del 1° quadrante in due insiemi F e G. F è simmetrico rispetto all'asse y, G rispetto all'asse x.



$$\int_F x^3 y \, dx\, dy = 0$$ perché F è simmetrico rispetto all'asse y e $\boxed{f(-x,y)} = (-x)^3 y = -x^3 y = \boxed{-f(x,y)}$

Similmente:

$$\int_G x^3 y \, dx\, dy = 0$$ perché G è simmetrico rispetto all'asse x e $\boxed{f(x,-y)} = x^3(-y) = -x^3 y = \boxed{-f(x,y)}$

Quindi $\int_E x^3 y \, dx\, dy =$

$$= \int_F x^3 y \, dx\, dy + \int_G x^3 y \, dx\, dy = 0$$

$\boxed{4}$ Dato $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4,\ x+|y| \leq 0,\ y \leq 0\}$

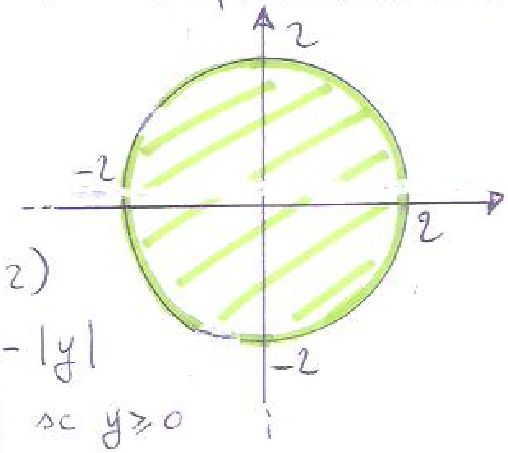
(a) Disegnare E

(b) Eventualmente suddividendolo, scrivere E come normale rispetto a x e rispetto a y.

(c) Calcolare $\int_E x^3 y \, dx\, dy$ nel modo che si ritiene più opportuno.

Svolgimento: Per arrivare al disegno occorre interpretare le 3 condizioni che definiscono E:

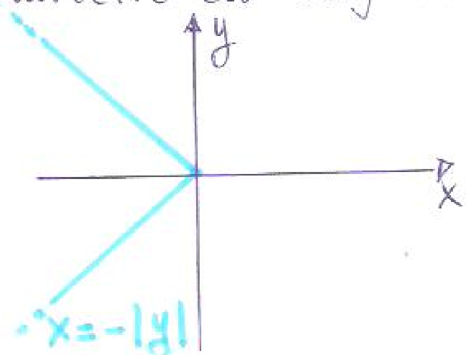
1. $x^2+y^2 \le 4$ rappresenta il CERCHIO delimitato da $x^2+y^2=4$ (centro O e raggio 2)



2. $x+|y| \le 0$ significa $x \le -|y|$

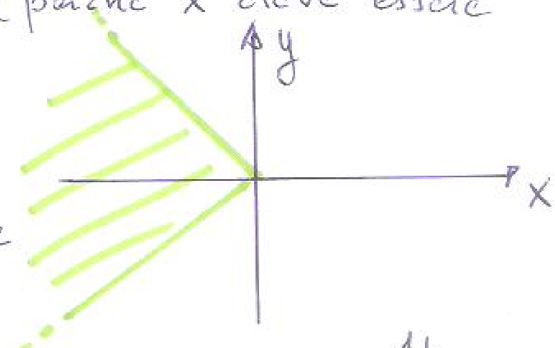
$x=-|y|$ significa $x=-y$ se $y \ge 0$
o $x=-(-y)=+y$ se $y \le 0$,

cioè le due semirette di origine O rappresentate:

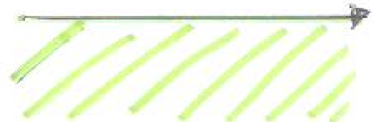


metà di $y=x$ (la metà inferiore) e metà di $y=-x$ (la metà superiore). Ma $x \le -|y|$ cosa rappresenta? È la parte di piano che sta a sinistra di $x=-|y|$ (perché x deve essere minore di $x=-|y|$)

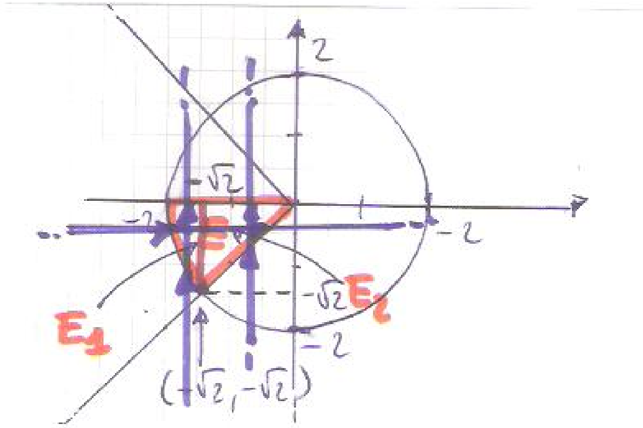
La zona rappresentata è quindi quella disegnata a fianco:



3 - $y \leq 0$ rappresenta il semipiano inferiore rispetto all'asse x :



Intersecando le 3 zone otteniamo E:



(E è $\frac{1}{8}$ del cerchio di centro O e raggio 2.)

Ci interessa determinare le coordinate della intersezione tra $y = x$ e $x^2 + y^2 = 4$:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} * \\ x^2 + x^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} * \\ x^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

(potevamo anche scrivere le equazioni parametriche della circonf. e inserire $t = 5/4\,\pi$)

Il punto che ci interessa ha le due coordinate entrambe negative : $\boxed{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$.

(b) E non è un dominio normale rispetto a x: è necessario spezzarlo all'altezza di $x = -\sqrt{2}$. Ci serve anche riuscire a scrivere l'equazione della circonferenza in forma esplicita rispetto a y: da $x^2 + y^2 = 4$ otteniamo

$y^2 = 4 - x^2$, da cui $y = \pm\sqrt{4-x^2}$; $y = \sqrt{4-x^2}$ rappresenta la semicirconferenza superiore rispetto all'asse x, $\boxed{y = -\sqrt{4-x^2}}$ quella inferiore, che è quella che ci interessa ($y \leq 0$)

Quindi:

$$E_{1,x} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{-2 \leq x \leq -\sqrt{2}}_{\text{STRISCIA VERTICALE}}, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 0 \right\}$$

$$E_{2,x} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{-\sqrt{2} \leq x \leq 0}_{\text{STRISCIA VERTICALE}}, \; x \leq y \leq 0 \right\}$$

E è invece un dominio normale rispetto a y: si entra dalla circonferenza e si esce dalla semiretta. Dobbiamo scrivere l'equazione della circonferenza in forma esplicita rispetto a x:

$x^2 + y^2 = 4 \longrightarrow x^2 = 4 - y^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{4-y^2}$, dove $x = \sqrt{4-y^2}$ rappresenta la semicirconferenza destra $(x \geq 0)$, mentre $\boxed{x = -\sqrt{4-y^2}}$ rappresenta quella sinistra, che è quella che ci interessa.

Quindi:

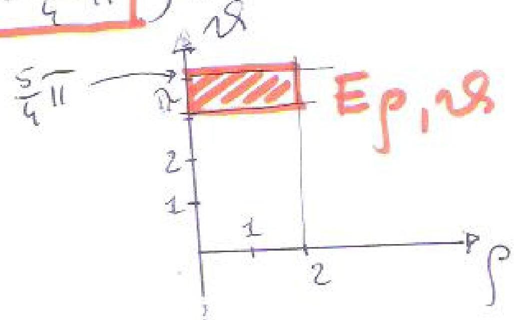
$$E_y = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{-\sqrt{2} \leq y \leq 0}_{\text{STRISCIA ORIZZONTALE}}, -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq y \right\}$$

$y = x \longrightarrow x = y$

(c) La via più semplice per calcolare l'integrale non passa né da $E_{1,x}$ e $E_{2,x}$, né da E_y: consiste, come sempre quando si ha a che fare con un settore circolare, nel passaggio a coordinate polari,

$\boxed{x = \rho\cos\vartheta}$, $\boxed{y = \rho \,\mathrm{sen}\,\vartheta}$, con $\boxed{0 \le \rho \le 2}$ (la distanza da O varia nel settore da 0 a 2) e ϑ (che va misurato sempre a partire dal verso positivo dell'asse x) che varia da π (180°) a $\frac{5}{4}\pi$ (225°) $\left(\boxed{\pi \le \vartheta \le \frac{5}{4}\pi}\right)$.

Quindi:



$$\int_E x^3 y \, dx\,dy =$$

$$= \int_{E_{\rho,\vartheta}} (\rho\cos\vartheta)^3 \cdot (\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\, \boxed{\rho}\, d\rho\, d\vartheta$$

FATTORE CORRETTIVO, da NON DIMENTICARE

$$= \int_0^2 \left(\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \rho^5 \cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta \, d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \rho^5 \left(\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} (\cos\vartheta)^3 \mathrm{sen}\,\vartheta \, d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= -\int_0^2 \rho^5 \left(\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (\underbrace{\cos\vartheta}_{f})^3 (\underbrace{-\operatorname{sen}\vartheta}_{f'})\, d\vartheta \right) d\rho$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{n.b.:} \\ \int f(\vartheta)^{\alpha} \cdot f'(\vartheta)\, d\vartheta \\ = \dfrac{[f(\vartheta)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \end{array}}$$

$$= -\int_0^2 \rho^5 \left[\frac{1}{4} (\cos\vartheta)^4 \right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} d\rho$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^2 \rho^5 \cdot \left[\left(\cos \frac{5}{4}\pi\right)^4 - (\cos\pi)^4 \right] d\rho$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \int_0^2 \rho^5\, d\rho = -\frac{1}{4} \left(-\frac{\cancel{3}^{\,1}}{4} \right) \cdot \frac{1}{\cancel{6}_{\,2}} \left[\rho^6 \right]_0^2 =$$

$\cos \frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \pi = -1$

$$= \frac{1}{32} \cdot 64 = 2$$

Proviamo, in conclusione, a vedere se la via di E_y era molto più complicata:

$$\int_E x^3 y\, dx\, dy = \int_{-\sqrt{2}}^{0} y \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y} x^3\, dx \right) dy =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{2}}^{0} y \cdot \left[x^4 \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{y} dy =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{2}}^{0} y \left(y^4 - (4-y^2)^2 \right) dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{2}}^{0} y\,(\cancel{y^4} - 16 - \cancel{y^4} + 8y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{2}}^{0} (-16y + 8y^3)\,dy =$$

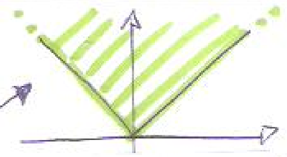
$$= \frac{1}{4} \left[-8y^2 + 2y^4 \right]_{-\sqrt{2}}^{0} = \frac{1}{4} \left(+8 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \right) = 2$$

Più o meno lo stesso livello di difficoltà, anche perché per fortuna $\sqrt{4-y^2}$, elevata alla quarta, non ci pone problemi. In generale però è conveniente passare a coordinate polari, soprattutto se nella funzione integranda compaiono $\sqrt{x^2+y^2}$ oppure x^2+y^2 o sue potenze, dato che $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$, $x^2+y^2 = \rho^2$, come si vedrà nel prossimo esempio.

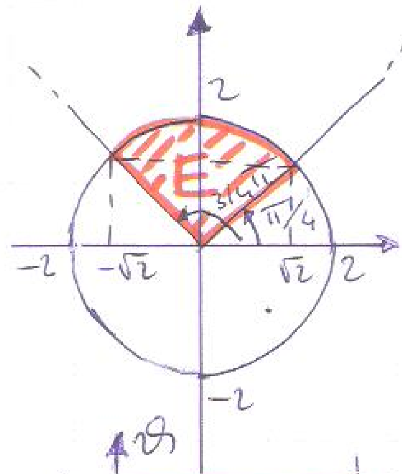
$\boxed{5}$ Calcolare $\displaystyle\int_E \left(3 - 2\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$

con $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq |x|\}$

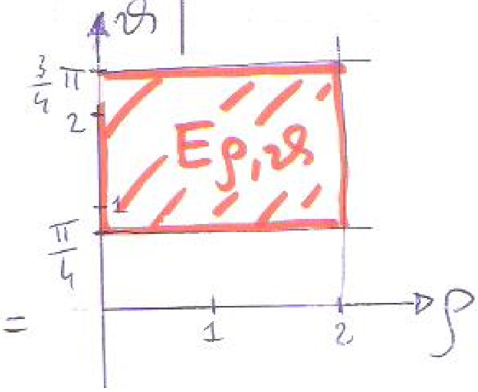
<u>Svolgimento</u>: $x^2+y^2 \leq 4$ rappresenta un cerchio di centro O e raggio 2; $y \geq |x|$ è il SOPRAGRAFICO

rispetto a $y=|x|$ 

Passando a coordinate polari otteniamo



$$\int_E \left(3-2\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy =$$



$$= \int_{E_{\rho,\vartheta}} (3-2\rho)\cdot\rho \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (3\rho-2\rho^2)\, d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \left[(3\rho-2\rho^2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\vartheta \right] d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^2 (3\rho-2\rho^2)\, d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{3}{2}\rho^2 - \frac{2}{3}\rho^3 \right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(6-\frac{16}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$\boxed{6}$ Calcolare nel modo più semplice

$$\int_E x^3 |y| \, dx\, dy$$

con $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1,\ -x\le y\le 2-x^2\}$

(vedi es. $\boxed{3}$)

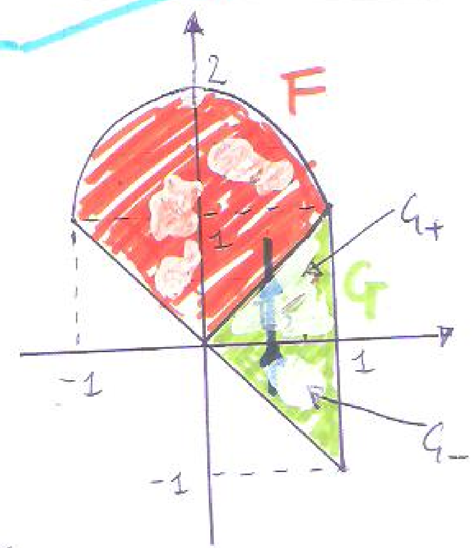
Spezzando come a pag. 12

otteniamo

$$\int_E x^3|y|\,dx\,dy = \int_F x^3|y|\,dx\,dy + \int_G x^3|y|\,dx\,dy$$

$\int_F x^3|y|\,dx\,dy = 0$ essendo F simmetrico risp. all'asse y e $\boxed{f(-x,y)} = (-x)^3|y| = -x^3|y| = \boxed{-f(x,y)}$

Quindi $\boxed{\int_E x^3|y|\,dx\,dy = \int_G x^3|y|\,dx\,dy}$



Ma G a sua volta può essere spezzato in due parti mediante l'asse x - Chiamiamo G_+ la metà corrispondente a $y \geq 0$ (superiore) e G_- la metà inferiore -

Essendo G simmetrico rispetto all'asse x e $\boxed{f(x,-y)} = x^3|-y| = x^3|y| = \boxed{f(x,y)}$

concludiamo che

in G_+ $|y| = y$

$$\boxed{\int_G x^3|y|\,dx\,dy = 2\int_{G_+} x^3|y|\,dx\,dy = 2\int_{G_+} x^3 y\,dx\,dy}$$

Concludendo $\boxed{\int_E x^3|y|\,dx\,dy = 2\int_{G_+} x^3 y\,dx\,dy}$

$$\int_{G_{+,x}} x^3 y\,dx\,dy = \int_0^1 x^3\left(\int_0^x y\,dy\right)dx =$$

$\boxed{0\le x\le 1,\ 0\le y\le x}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\left[y^2\right]_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\left[x^6\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

Quindi $\int_E x^3|y|\,dx\,dy = \frac{1}{6}$

Ragionando sulle simmetrie di E e di f(x,y) abbiamo limitato i calcoli al minimo possibile.

n.b: se avessimo scelto di integrare su G_-

$$\int_{G_{-,x}} x^3|y|\,dx\,dy = -\int_{G_{-,x}} x^3 y\,dx\,dy =$$

$\boxed{0\le x\le 1,\ -x\le y\le 0}$ $|y| = -y$ perché in G_- $y\le 0$

$$= -\int_0^1 x^3\left(\int_{-x}^0 y\,dy\right)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\left[y^2\right]_{-x}^0 dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\left[0^2-(-x)^2\right]dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -x^5\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{12}$$

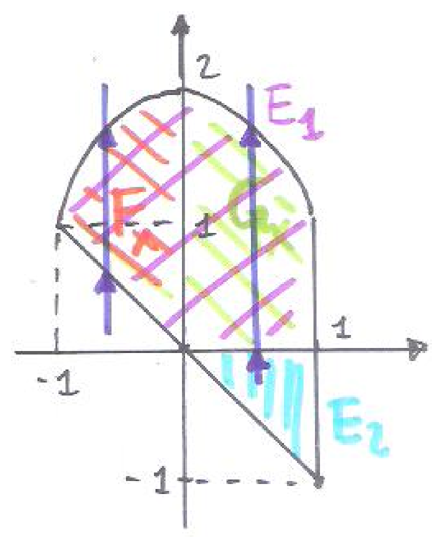
Se non ci fossimo accorti delle simmetrie avremmo dovuto spezzare E lungo l'asse x, con $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, -x \leq y \leq 2-x^2, y \geq 0\}$ relativo al semipiano superiore, in cui $y \geq 0$ e quindi $|y| = y$

ed $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 0\}$, relativo al semipiano inferiore, in cui $y \leq 0$ e quindi $|y| = -y$.

Per cui:

$$\int_E x^3 |y| \, dx\, dy = \int_{E_1} x^3 y \, dx\, dy + \int_{E_2} x^3 (-y) \, dx\, dy =$$

$$= \int_{E_1} x^3 y \, dx\, dy - \int_{E_2} x^3 y \, dx\, dy$$



A questo punto, mentre per $\int_{E_2} x^3 y \, dx\, dy$ non ci sono problemi e possiamo calcolarlo facilmente come dominio normale sia rispetto a x che rispetto a y, E_1 non si presenta come dominio normale né rispetto a x né rispetto a y e va spezzato: ad esempio, se ragioniamo rispetto a x^*, va spezzato come $E_1 = \bar{F}_X \cup G_X$

con $F_X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0,\ -x \le y \le 2-x^2\}$

e $G_X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2-x^2\}$

e quindi

$$\int_E x^3 |y|\, dx\, dy = \int_{F_X} x^3 y\, dx\, dy + \int_{G_X} x^3 y\, dx\, dy - \int_{E_2} x^3 y\, dx\, dy$$

Parecchie complicazioni quindi ----

Ricordiamo comunque che quando la funzione integranda contiene $|y|$ occorre spezzare E lungo l'asse x e quando contiene $|x|$ occorre spezzare lungo l'asse y, per eliminare i valori assoluti. Tutto questo a meno che non si riesca a ragionare, tenendo i valori assoluti, sulle simmetrie (strada, come abbiamo visto, ampiamente preferibile).

---

* è preferibile integrare come domini normali rispetto a x perché nell'integrale "interno" compare solo y che dà, integrato, $\frac{1}{2}y^2$; integrando rispetto a y si doveva partire integrando x^3 (oltre al problema delle radici nella metà superiore (vedi a pag. 11))