COGNOME	______________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________		
MATRICOLA			
CORSO	AMB CIV GEST MEC ELN INF TEL	1 2 3 4	

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2018-2019 — PARMA, 17 GIUGNO 2019

AN2-17/6/19-1-

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (SOLO SE RICHIESTO).

$\frac{16}{3} \approx 5{,}3$ $\quad \frac{8}{3} \approx 2{,}7$ $\quad \sqrt{2} \approx 1{,}4$ $\quad \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}94$

0) **(28 PUNTI) PARTE PRELIMINARE**

Completate (dove richiesto):

a) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{3}\, x\, y^3 \log(2x - y + 1)$.

A pag. 4

i) Determinate il dominio di f, spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano in modo che risulti perfettamente chiaro quali punti vi appartengono.

ii) Determinate e disegnate il gradiente di f nel punto $(x_0 = -1\,, y_0 = -2)$.

iii) La derivata direzionale di f nel punto $(x_0 = -1\,, y_0 = -2)$ nella direzione del punto $(1\,, -6)$ vale ... $\dfrac{32}{3\sqrt{5}} = \dfrac{32}{15}\sqrt{5}$

b) (Sul foglio a quadretti) Considerate la funzione $f(x,y) = -4 + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$.

A pag 4-5-6

i) Determinate il dominio di f , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

ii) Scrivete l'equazione del grafico di f , poi spiegate di quale tipo di superficie si tratta (senza dimenticare l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari precisate se l'angolo di apertura risulta minore o maggiore di 45 gradi e come si calcola); infine disegnate con cura il grafico di f .

iii) Determinate e disegnate l'insieme di livello E_k cui appartiene il punto $P_0 = (3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$.

iv) Determinate e disegnate il gradiente di f nel punto P_0 .

v) Determinate la massima pendenza del grafico di f nel punto P_0 e la direzione nella quale tale pendenza viene raggiunta.

vi) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre l'insieme di livello determinato al punto iii). Poi calcolate il vettore tangente, i vettori normali e la retta normale nel punto P_0 .

c) Sia E l'insieme definito da $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, x \leq 0, y \geq 0\}$.

i) Disegnate E (sul foglio a quadretti). a pag. 6

ii) Eventualmente suddividendolo, scrivete l'insieme E come normale rispetto a x ; ripetete come normale rispetto a y .

Risposta: $E_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$

$E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4,\ -\sqrt{16-y^2} \leq x \leq 0\}$

d) Si consideri l'equazione differenziale $\frac{1}{4}y''(x) - 2y'(x) = -4y(x) + 4x^2 e^{4x}$.

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Calcoli: eq.ne omog. associata $\frac{1}{4}y''(x) - 2y'(x) + 4y(x) = 0$

eq.ne caratt. $\frac{1}{4}t^2 - 2t + 4 = 0$ $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{1/4} = 4$ $\Delta = 0$ $t_1 = 4$ con molt. 2

SOL.ni FONDAM. $y_1(x) = e^{4x}$ $y_2(x) = x e^{4x}$

La soluzione particolare va cercata nella forma .. $\bar{y}(x) = x^2 \cdot (Ax^2 + Bx + C) e^{4x}$

perchè il 2° m. $= f(x) = 4x^2 \cdot e^{kx}$ è il prodotto di un polinomio di grado 2 per un' esponenziale con $k=4$ (da cui $(Ax^2+Bx+C)e^{4x}$); inoltre si moltiplica per x^2 perché $k=4$ è soluzione dell'eq.ne caratteristica con molteplicità 2 -

(Non è richiesto di determinare la soluzione particolare).

e) (Sul foglio a quadretti) Sia f la funzione definita da $f(x,y) = \frac{1}{2}xy\,(x + y + 6)$ (è la stessa funzione considerata nell'esercizio n.1).

A pag. 7-8

i) Determinate il dominio di f .

ii) Determinate i punti in cui f vale 0 e il segno di f negli altri punti (illustrate i risultati con un disegno).

iii) Determinate gli eventuali punti stazionari di f nel suo dominio e studiatene la natura.

1) (Sul foglio a quadretti, 6 PUNTI) Considerate la funzione dell'esercizio 0e):

A pag. 8-9

+ con i MOLTIPLICATORI p. 9-10

$$f(x,y) = \frac{1}{2} x\, y\, (x + y + 6)\,.$$

Dopo averne giustificato l'esistenza, (utilizzando anche quanto ottenuto nell'esercizio n.0e) determinate il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y + 8 \geq 0\,,\, x \leq 0\,,\, y \leq 0\}\,.$$

---

2) (Sul foglio a quadretti, 9 PUNTI) Considerate la funzione $g(x,y) = 5 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

A pag. 10-11

a) Determinate il dominio di g , spiegate di che insieme si tratta e disegnatelo se non è tutto il piano.

b) Scrivete l'equazione del grafico di g , poi spiegate di quale tipo di superficie si tratta (senza dimenticare l'intersezione con il piano (x,y) e per gli eventuali coni circolari precisate se l'angolo di apertura risulta minore o maggiore di 45 gradi e come si calcola); infine disegnate con cura il grafico di g .

c) Considerate l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2 \leq z \leq 5 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\ ,\, y \leq 0\}\,.$$

Disegnate V e le sue proiezioni sui piani coordinati (denotate con Π_{xy} , Π_{xz} e Π_{yz}).

d) Calcolate il volume di V utilizzando gli integrali doppi.

---

3) (Sul foglio a quadretti, 5 PUNTI) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

A pag. 11-12

$$\begin{cases} \frac{1}{3} y''(x) \ -\ 3\,y'(x) \ =\ 10\ \mathrm{sen}(3x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2\,. \end{cases}$$

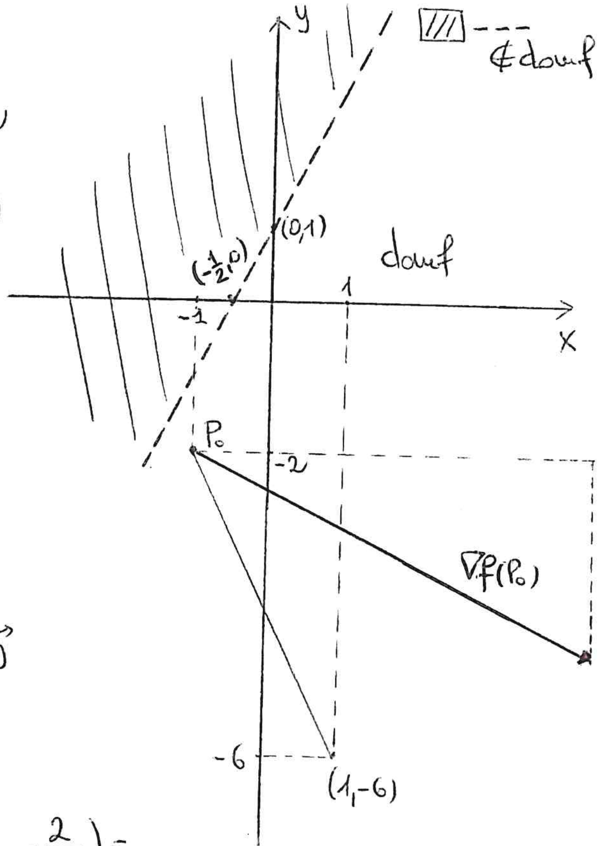
Risposta: ... $y(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{9x} - \frac{1}{3} \mathrm{sen}(3x) + \cos(3x)$

AN2 - 17/6/19 - 4 -

ES0) PARTE PRELIMINARE

a) i) $\mathrm{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x-y+1>0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<2x+1\}$

SOTTO LA RETTA $y=2x+1$ ($m=2$ per $(0,1)$ e $(-\frac{1}{2},0)$), retta ESCLUSA dal dom f



ii) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{3}y^3\log(2x-y+1) + \frac{1}{3}xy^3\cdot\frac{2}{2x-y+1},\right.$

$\left. xy^2\log(2x-y+1) - \frac{1}{3}xy^3\cdot\frac{1}{2x-y+1}\right)$

$\nabla f(-1,-2) = \left(-\frac{8}{3}\underbrace{\log 1}_{0} + \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{1}, -4\underbrace{\log 1}_{0} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1}\right)$

$= \boxed{\left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right)}$

$\simeq 5{,}3 \quad \simeq -2{,}7$

$P_0=(-1,-2)$

iii) $\vec{v} = \frac{P_1-P_0}{\|P_1-P_0\|} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{4+16}} = \frac{(2,-4)}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt5}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt5}\vec{j}$

$P_1=(1,-6)$ $\qquad \sqrt{20}=2\sqrt5$

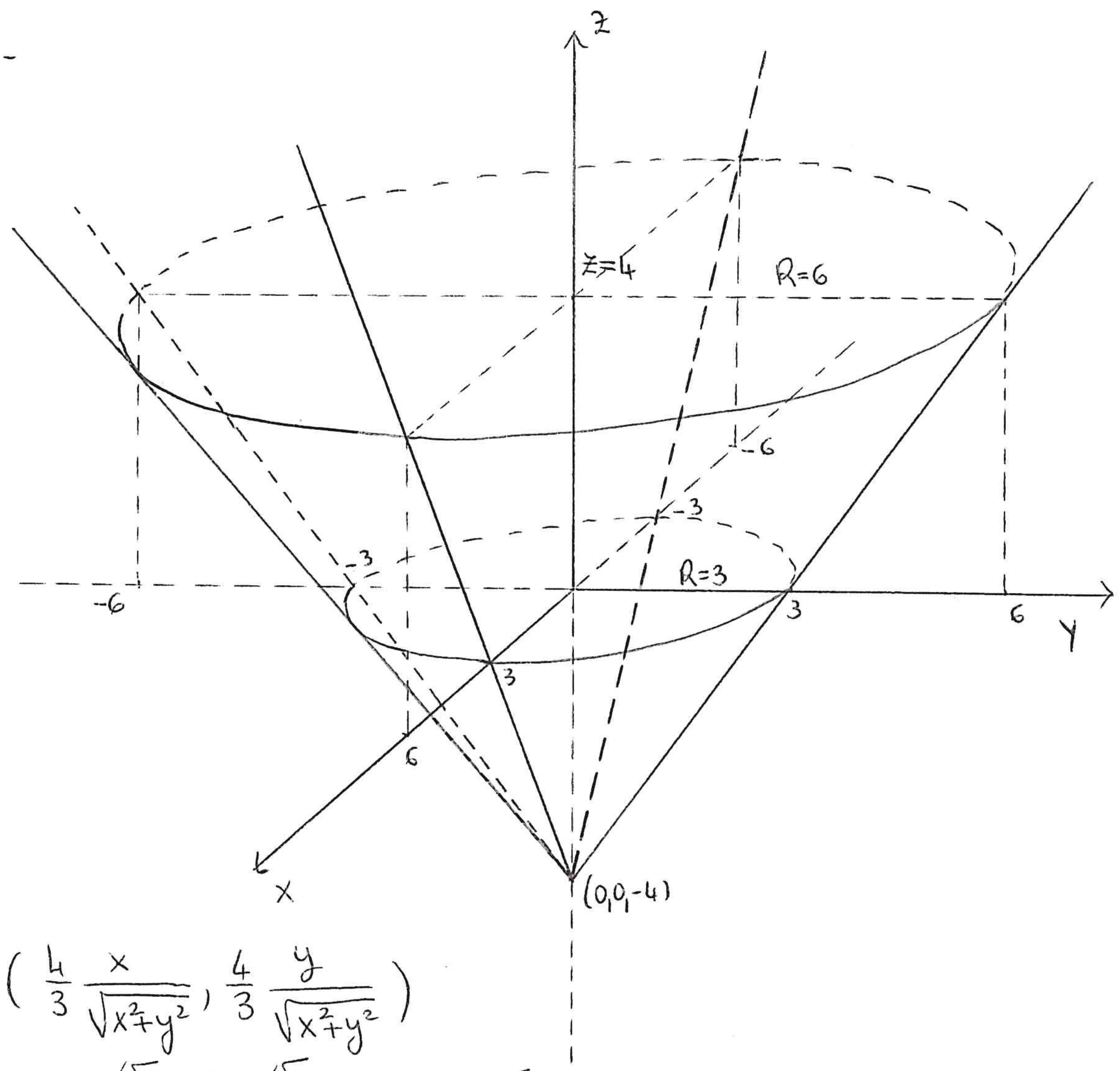
$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-1,-2) = \nabla f(-1,-2)\cdot\vec{v} = \left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}, -\frac{2}{\sqrt5}\right) =$

$= \frac{16}{15}\sqrt5 + \frac{16}{15}\sqrt5 = \boxed{\frac{32}{15}\sqrt5}$ (o che è lo stesso $\frac{32}{3\sqrt5}$)

b) i) $\mathrm{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 0\} = \mathbb{R}^2$ perchè x^2+y^2 è una somma di quadrati e come tale sempre ≥ 0.

ii) eq.ne del grafico $z=-4+\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ si tratta del CONO CIRCOLARE di $V(0,0,-4)$, verso l'alto, $a=\frac{4}{3}>1 \rightarrow 0<\hat{ap}<45°$ ($\hat{ap}=\arctan\frac{3}{4}$),

$\cap\, z=0$ su $x^2+y^2=9$ $\quad R=3$



iv) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{4}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{4}{3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

$\nabla f(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) = \left(\frac{4}{3} \frac{3\sqrt{2}}{6}, \frac{4}{3} \frac{-3\sqrt{2}}{6} \right) = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{2} \right)$

$\simeq 0{,}94 \quad \simeq -0{,}94$

$\sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6$

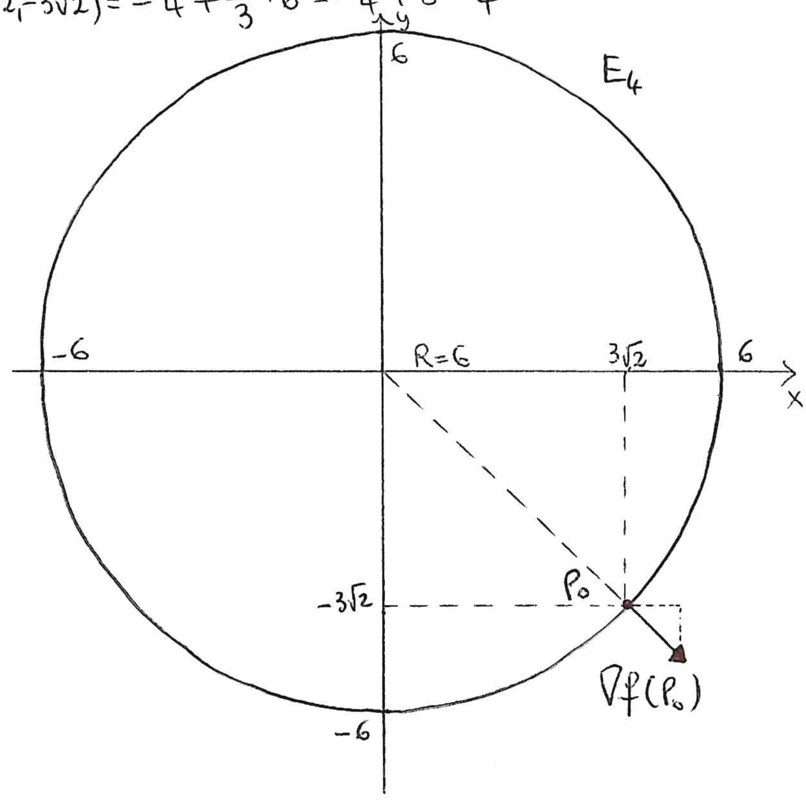
iii) $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) = P_0 \in E_K$ per $K = f(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) = -4 + \frac{4}{3} \cdot 6 = -4 + 8 = 4$

$P_0 \in E_4$

$E_4 : 4 = -4 + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} \quad \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} = 8$

$\sqrt{x^2+y^2} = 6 \quad x^2+y^2 = 36 \quad R = 6$

E_4 è la circonferenza di $C(0,0)$ e $R=6$



v) massima pendenza in P_0 $= \| \nabla f(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) \| =$

$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9} + \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

raggiunta nella direzione di massima salita $\vec{v}_{max} = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)}{\frac{4}{3}} \Rightarrow$

$\vec{v}_{max} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

vi) $\gamma \begin{cases} x(t) = 6\cos t \\ y(t) = 6 \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ percorre E_4 in senso antiorario per 1 giro.

$P_0 = (3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ corrisponde a $t_0 = \frac{7}{4}\pi$ $\begin{cases} 3\sqrt{2} = 6\cos t \\ -3\sqrt{2} = 6 \operatorname{sen} t \end{cases}$ $\begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

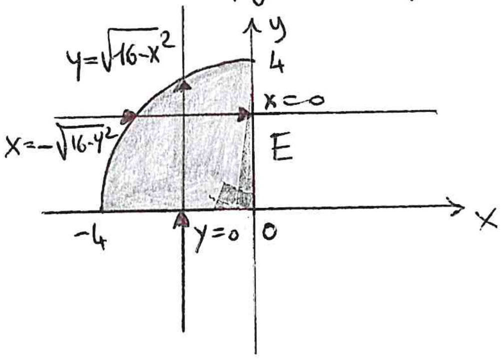
$\gamma'(t) = (-6 \operatorname{sen} t, 6\cos t)$ $\quad \vec{v}_{P_0} = \gamma'\left(\frac{7}{4}\pi\right) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}\,\vec{i} + 3\sqrt{2}\,\vec{j}$

$\vec{N}_{or} = 3\sqrt{2}\,\vec{i} - 3\sqrt{2}\,\vec{j}$ $\quad \vec{N}_{ant} = -3\sqrt{2}\,\vec{i} + 3\sqrt{2}\,\vec{j}$

$m_{tan} = 1$ $\quad m_{norm} = -1$ $\quad r_{norm}$ $\; y = -3\sqrt{2} - (x - 3\sqrt{2})$ $\quad y = -x$

c) $x^2 + y^2 \le 16$ CERCHIO CHIUSO (interno + bordo) di $C(0,0)$ $R = 4$

$x \le 0, y \ge 0$ 2° quadrante



$x^2 + y^2 = 16 \rightarrow y^2 = 16 - x^2$ $\quad y = \pm\sqrt{16 - x^2}$ $\quad$ + metà superiore, − " inferiore

$x^2 = 16 - y^2$ $\quad x = \pm\sqrt{16 - y^2}$ $\quad$ + metà destra, − " sinistra

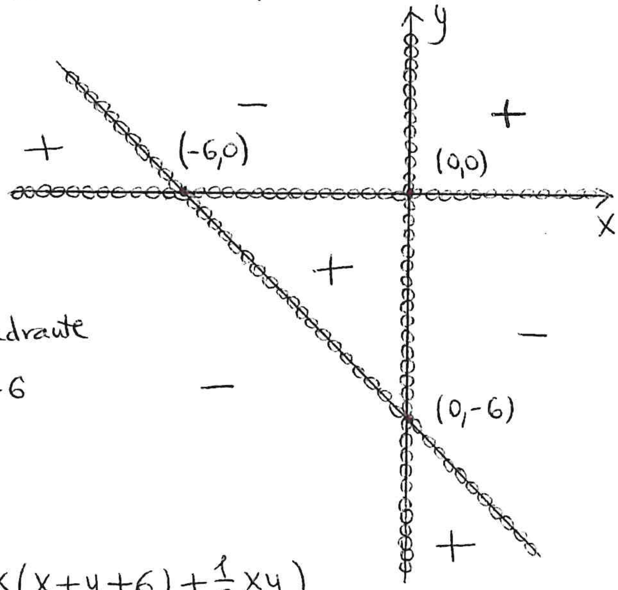
AN2 - 17/6/19 - 7 -

e) i) dom $f = \mathbb{R}^2$ (non ci sono condizioni)

$f(x,y)=0 \iff x=0$ o $y=0$ o $x+y+6=0$

asse y   asse x $y=-x-6$ retta per $(0,-6)$ e $(-6,0)$

$f=0$



$f(x,y)>0 \iff \begin{cases} xy>0 \\ x+y+6>0 \end{cases}$ o $\begin{cases} xy<0 \\ x+y+6<0 \end{cases}$

1° e 3° quadrante   2°, 4° quadrante

$y>-x-6$ $y<-x-6$

SOPRA LA RETTA

ii) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2}y(x+y+6)+\frac{1}{2}xy,\ \frac{1}{2}x(x+y+6)+\frac{1}{2}xy\right)$

P.TI STAZIONARI:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y(x+y+6)+\frac{1}{2}xy=0 \\ \frac{1}{2}x(x+y+6)+\frac{1}{2}xy=0 \end{cases}$$

Si può risolvere in molti modi:

- 1ª eq.ne: $\frac{1}{2}y(2x+y+6)=0 \iff y=0$ o $y=-2x-6$
- ricavare $\frac{1}{2}xy$ e sostituire nella 2ª
- $1^a - 2^a = 0$

Proviamo a ricavare $\frac{1}{2}xy = -\frac{1}{2}y(x+y+6)$

nella 2ª $\frac{1}{2}x(x+y+6)-\frac{1}{2}y(x+y+6)=0 \iff (x-y)(x+y+6)=0$

$\iff y=x$ o $y=-x-6$

Se $y=x \to$ nella 1ª $\frac{1}{2}x(x+x+6)+\frac{1}{2}x^2=0$ $\frac{3}{2}x^2+3x=0$ $3x(\frac{1}{2}x+1)=0$

$\iff x=0$ o $x=-2 \implies \boxed{(0,0)}\ \boxed{(-2,-2)}$

se $y=-x-6 \to$ nella 1ª $\frac{1}{2}(-x-6)(\cancel{x-x-6+6})+\frac{1}{2}xy=0$ $\frac{1}{2}xy=0$

$\iff x\cdot y=0 \iff x=0$ o $y=0 \implies \boxed{(0,-6)}\ \boxed{(-6,0)}$

4 P.TI STAZIONARI: $(0,0)\ (0,-6)\ (-6,0)\ (-2,-2)$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}(x+y+6)+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}(x+y+6)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & x+y+3 \\ x+y+3 & x \end{pmatrix}$$

$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(0,0)=-9<0$ $(0,0)$ P.TO di SELLA

$Hf(-2,-2)=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-2,-2)=4-1=3>0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2)<0$ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,-2)<0\right)$

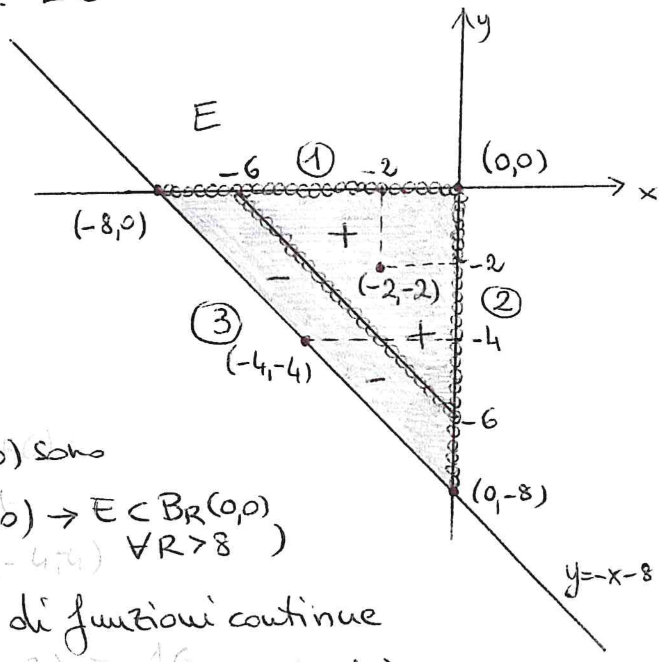
$(-2,-2)$ P.TO di Massimo Locale

$Hf(0,-6)=\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\det Hf(0,-6)=-9<0$ $(0,-6)$ P.TO di SELLA

$Hf(-6,0)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ $\det Hf(-6,0)=-9<0$ $(-6,0)$ P.TO di SELLA.

ES 1) $\overset{1^\circ \text{passo}}{y\geq -x-8}$ SOPRA LA RETTA per $(-8,0)$ e $(0,-8)$ $x\leq 0$ $y\leq 0$ nel 3° quadrante. E è il TRIANGOLO di VERTICI

$(0,0)$ $(0,-8)$ $(-8,0)$



E è CHIUSO perché contiene tutti i punti del suo bordo ∂E che è costituito dai 3 lati del triangolo

E è LIMITATO perché $E\subset B_9(0,0)$

(i due punti di E più lontani da $(0,0)$ sono $(-8,0)$ e $(0,-8)$ che distano 8 da $(0,0)$ $\rightarrow E\subset B_R(0,0)$ $\forall R>8$)

f è continua su $\mathbb{R}^2$ perché prodotto di funzioni continue (x, y e un polinomio di 1° grado oltre alla costante $\frac{1}{2}$) e quindi in particolare è CONTINUA su E

Allora sono verificate le IPOTESI del Teorema di Weierstrass e possiamo concludere che ESISTONO IL MASSIMO e IL MINIMO ASSOLUTI di f su E.

2° passo esiste un punto $(-2,-2)$ di Max locale interno ad E in cui $f(-2,-2) = \frac{1}{2}(-2)(-2)(-2-2+6) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4$

$f(-2,-2)=4$

3° passo Studio del ∂E: come si vede dal DISEGNO a pag. 8

sui lati ① e ② $f\equiv 0$, con in particolare $f(0,0)=f(-8,0)=f(0,-8)=0$.

Studiamo il lato ③

$$\gamma_3 \begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=-t-8 \end{cases} \quad t\in[-8,0] \qquad g_3(t)=f(t,-t-8) = \frac{1}{2}t(-t-8)(\cancel{t}-\cancel{t}-8+6) =$$

$$= -t(-t-8) = t^2+8t$$

$g_3'(t)=2t+8 \qquad g_3'(t)=0 \iff 2t+8=0 \iff t=-4$

TEMPI	$t=-8$	$t=-4$	$t=0$
PUNTI	$(-8,0)$	$(-4,-4)$	$(0,-8)$
VALORI	$f(-8,0)=0$	$f(-4,-4)=\frac{1}{2}\cdot 16(-2)=-16$	$f(0,-8)=0$

4° passo Conclusione: sul ∂E f è compresa tra -16 e 0, nel punto di max locale $f(-2,-2)=4 \Rightarrow$

$$\min_E f(x,y) = -16 = f(-4,-4) \qquad \max_E f(x,y) = 4 = f(-2,-2).$$

Lato ③ con i MOLTIPLICATORI di Lagrange:

$\nabla f(x,y) = (xy+\frac{1}{2}y^2+3y,\ xy+\frac{1}{2}x^2+3x) \qquad g(x,y)=x+y+8$

$\nabla g(x,y)=(1,1)$

SISTEMA

$$\begin{cases} xy+\frac{1}{2}y^2+3y=\lambda \\ xy+\frac{1}{2}x^2+3x=\lambda \\ y=-x-8 \quad x\in[-8,0] \end{cases}$$

eliminando λ si ottiene:

$$\cancel{xy}+\frac{1}{2}y^2+3y = \cancel{xy}+\frac{1}{2}x^2+3x$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y^2+3y = \frac{1}{2}x^2+3x \\ y=-x-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(-x-8)^2+3(-x-8)=\frac{1}{2}x^2+3x \\ y=-x-8 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}}x^2+8x+32-3x-24=\cancel{\frac{1}{2}}x^2+3x \\ \dots \end{cases}$$

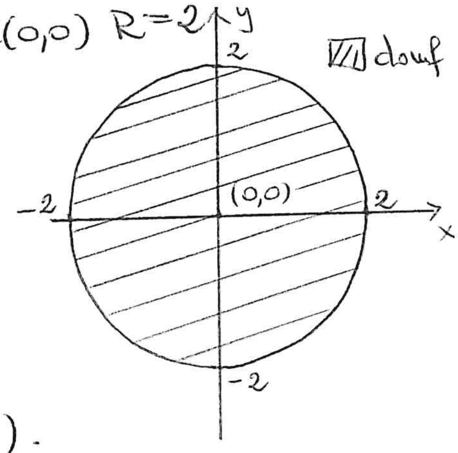
$$\begin{cases} 2x=-8 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \end{cases} \qquad (-4,-4) \text{ con } \lambda=16+8-12=12$$

$$\boxed{(-4,-4) \text{ con } \lambda=12}.$$

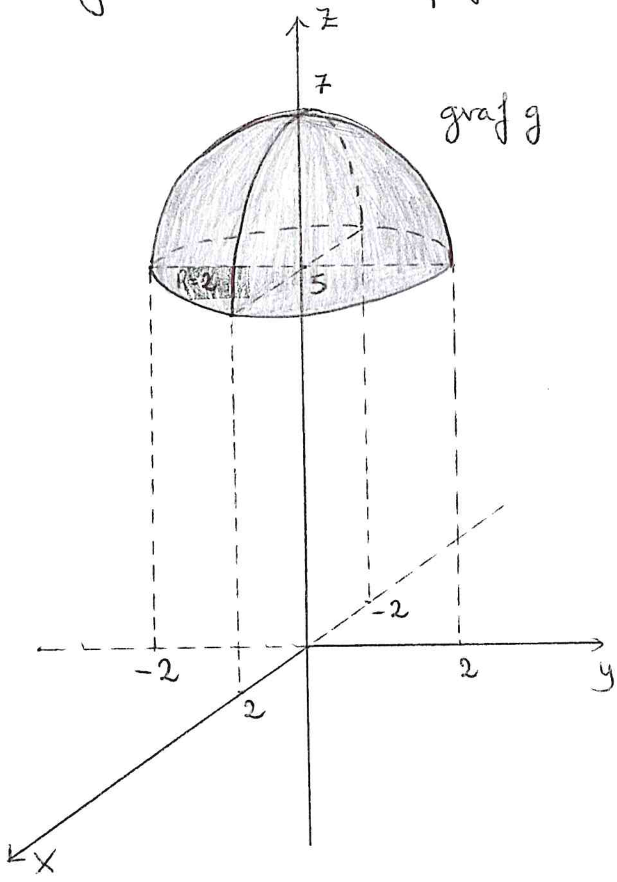
Poi si prosegue come prima PUNTI $P_{in}=(-8,0)$ $(-4,-4)$ $P_{fin}=(0,-8)$ ecc.

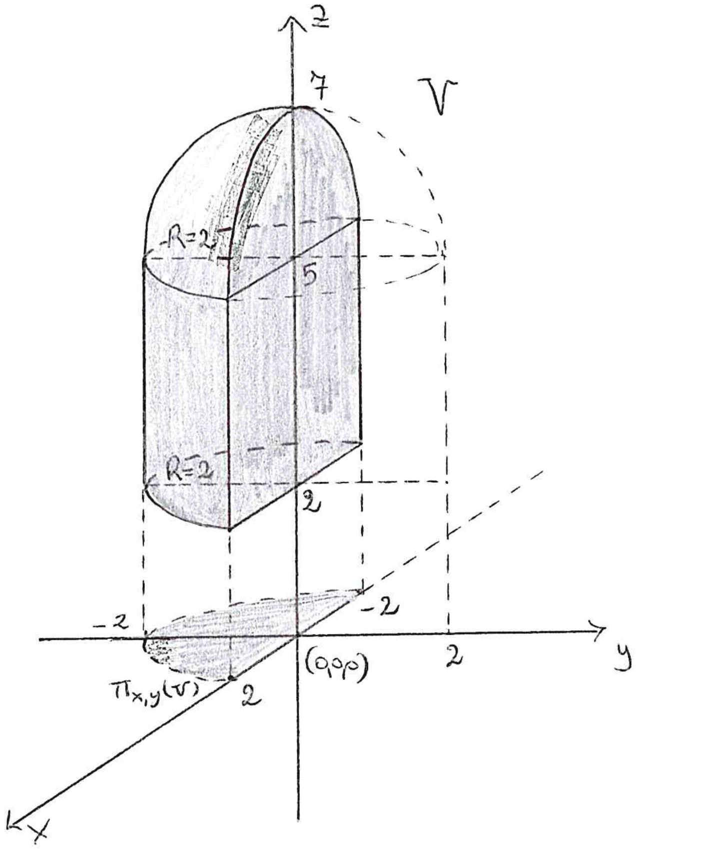
ES. 2) a) $\text{dom}\, g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4-x^2-y^2\geq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}=$

$=$ CERCHIO CHIUSO (interno + bordo) di $C(0,0)$ $R=2$

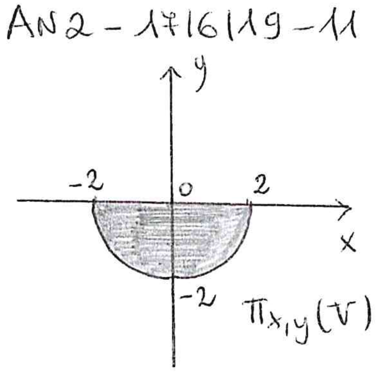


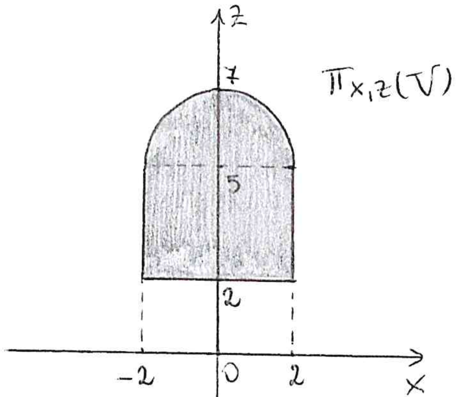
b) $z=5+\sqrt{4-x^2-y^2}$ è il grafico di g: si tratta della METÀ SUPERIORE della SUPERFICIE SFERICA di $C(0,0,5)$ e $R=2$, $z_{max}=5+2=7$, $\cap\, z=0$ $\emptyset$ ($\sqrt{4-x^2-y^2}=-5<0$ è IMPOSSIBILE e infatti la semisuperficie è tra $z=5$ e $z=7$).

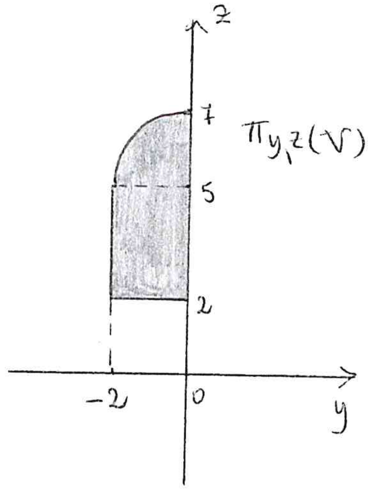




AN2 - 17/6/19 - 11







Volume $V = \displaystyle\int_{\substack{x^2+y^2\le 4 \\ y\le 0}} \left(5+\sqrt{4-x^2-y^2}-2\right) dx\,dy =$

$$= \int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{2} \left(3+\sqrt{4-\rho^2}\right)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_{0}^{2} 3\rho+\rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi}\left[3\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_{0}^{2}(-2\rho)\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho\right) d\theta =$$

$$= 6\int_{\pi}^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\left[\frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 d\theta =$$

$$= 6\pi - \frac{1}{3}\int_{\pi}^{2\pi}\left[0-\underbrace{4^{3/2}}_{=(\sqrt{4})^3=2^3=8}\right] d\theta = 6\pi + \frac{8}{3}\int_{\pi}^{2\pi} d\theta = \left(6+\frac{8}{3}\right)\pi = \boxed{\frac{26}{3}\pi}$$

ES.3) Eq.ne omogenea associata $\frac{1}{3}y''(x)-3y'(x)=0$

Eq.ne caratt. $\frac{1}{3}t^2-3t=0$ $\quad t(t-9)=0$ $\quad t_1=0$ $\quad t_2=9$

Sol.ni FONDAM. $y_1(x)=e^{0x}=1$ $\quad y_2(x)=e^{9x}$ (*)

Sol.ni eq.ne omogenea $y(x)=c_1+c_2e^{9x}$ $\quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$

Sol.ne particolare $\bar{y}(x)=A\,\mathrm{sen}(3x)+B\cos(3x)$ perché il 2° m è una combinazione lineare di $\mathrm{sen}(3x)$ e $\cos(3x)$, mentre non si deve moltiplicare per x perché le sol.ni fondamentali dell'eq.ne omogenea (*) NON SONO $y_1=\mathrm{sen}(3x)$ e $y_2=\cos(3x)$

$$\bar{y}'(x) = 3A\cos(3x) - 3B\,\text{sen}(3x)$$
$$\bar{y}''(x) = -9A\,\text{sen}(3x) - 9B\cos(3x)$$

Sostituendo nell'eq.^{ne} otteniamo:

$$\frac{1}{3}\left(-9A\,\text{sen}(3x) - 9B\cos(3x)\right) - 3\left(3A\cos(3x) - 3B\,\text{sen}(3x)\right) = 10\,\text{sen}(3x) \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R}}$$

$$(-3A+9B)\,\text{sen}(3x) + (-3B-9A)\cos(3x) = 10\,\text{sen}(3x) \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R}}$$

Poiché 2 combinazioni lineari di seno e coseno dello stesso argomento sono $= \forall x \in \mathbb{R} \iff$ hanno entrambi i coeff. uguali otteniamo

$$\begin{cases} -3A+9B=10 \\ -3B-9A=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 3B=-9A \end{cases} \quad \begin{cases} -3A-27A=10 \\ B=-3A \end{cases} \quad \begin{cases} 30A=-10 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=1 \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = -\frac{1}{3}\,\text{sen}(3x) + \cos(3x)$$

Tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} sono

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{9x} - \frac{1}{3}\,\text{sen}(3x) + \cos(3x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$
$$y'(x) = 9c_2 e^{9x} - \cos(3x) - 3\,\text{sen}(3x)$$

Pb. di Cauchy $\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + 1 = 1 \\ y'(0) = 9c_2 - 1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 9c_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{3} \\ c_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

<u>UNICA SOL.^{ne}</u>

$$y(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{9x} - \frac{1}{3}\,\text{sen}(3x) + \cos(3x).$$