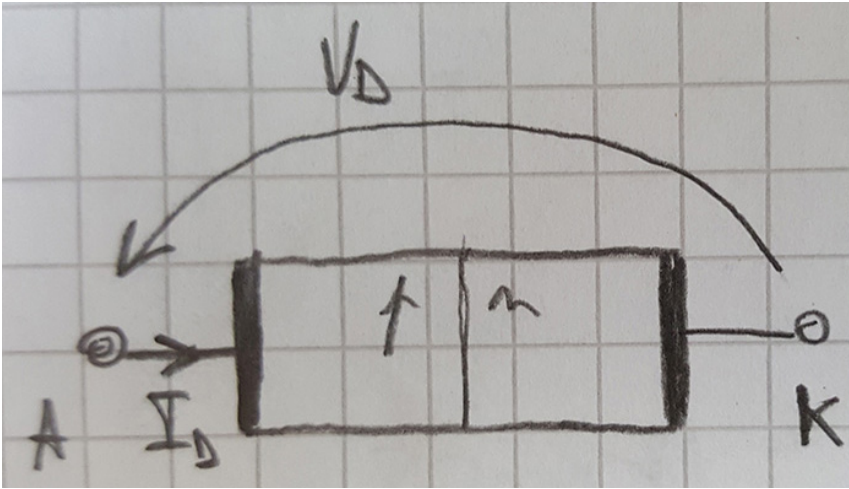


# Esercitazioni Elettronica 1

## 1. Ripasso delle equazioni dei dispositivi ¶

### 1.1 Diodo



Il diodo pn è un dispositivo a due terminali con una relazione corrente-tensione non lineare. L'equazione che ne governa il funzionamento è (notare la convenzione di correnti-tensioni riportata in figura):

$$I_d = I_s(\exp qV/kT - 1) = I_s(\exp V/V_T - 1)$$

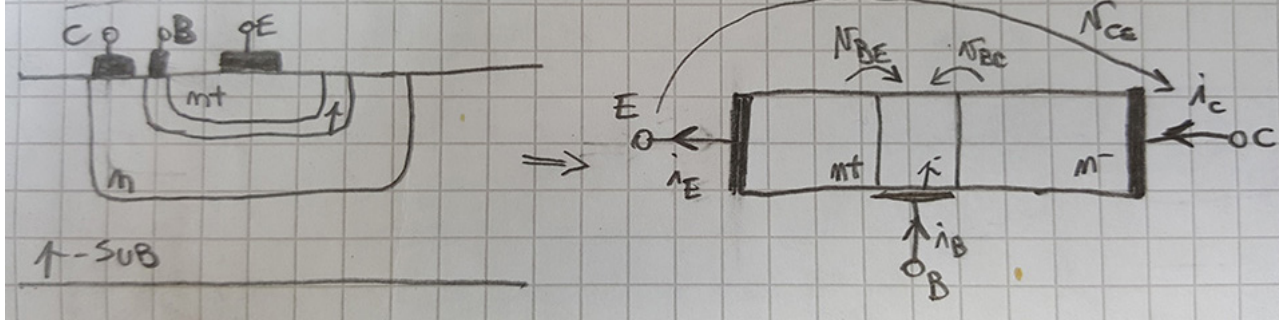
Tale relazione può essere approssimata da un **modello a soglia**:

$$f(I_d, V_D) = \begin{cases} I_d = 0 & \text{per } V_D < V_\gamma \\ V_D = V_\gamma & \text{per } I_d > 0 \end{cases}$$

Questo modello può essere usato per semplificare i calcoli nella risoluzione degli esercizi dei temi d'esame. Esso esprime sia l'equazione che la relativa condizione di validità, che va quindi controllata a posteriori per assicurarsi che fosse possibile applicare tale relazione.

### 1.2 BJT

# BJT



Il BJT ([https://it.wikipedia.org/wiki/Transistor\\_a\\_giunzione\\_bipolare](https://it.wikipedia.org/wiki/Transistor_a_giunzione_bipolare)) può essere realizzato in tecnologia planare come mostrato a sinistra nell'immagine soprastante. Di fatto è possibile astrarre il dispositivo come mostrato a destra (notate la convenzione di correnti-tensioni riportata).

Applicando le leggi di Kirchhoff alla struttura del BJT valgono sempre le seguenti relazioni:

$$I_e = I_b + I_c$$

$$V_{be} = V_{bc} + V_{ce}$$

Come per il diodo, è possibile approssimare il funzionamento del BJT usando un **modello a soglia** caratterizzato da **regioni di funzionamento**. Nello specifico, considerando lo stato delle varie giunzioni del BJT, si individuano le seguenti regioni di funzionamento:

BE	BC	REGIONE
DIR	INV	<b>R.N., A.D.</b>
INV	DIR	<b>ATT. INV.</b>
INV	INV	<b>OFF</b>
DIR	DIR	<b>SAT</b>

In regione **Attiva Diretta (AD)** si ha un elevato guadagno di corrente ( $\beta_F \approx 100$ ), sfruttando l'effetto transistor. La corrente di collettore è costante, a prescindere dalla tensione *collettore-emettitore* e pari a  $\beta_F$  volte quella di base.

La regione *attiva inversa* è analoga a quella attiva diretta, con l'eccezione che le polarizzazioni delle giunzioni sono speculari. Per l'asimmetria nel profilo di drogaggio delle varie parti del BJT (B,C,E), il guadagno di corrente che si ottiene in tale regione è minore che quello in attiva diretta. Infatti la giunzione BC, che è polarizzata in diretta, inietta cariche, ma l'efficienza del processo è minore (a causa del drogaggio più lieve della regione n del collettore rispetto a quello dell'emettitore).

In regione di **Saturazione (SAT)** **entrambe le giunzioni iniettano portatori in base e l'efficienza cala** ( $\beta_F$  molto minori che in AD, ovvero l'effetto di amplificazione della corrente di base è molto minore).

Infine, in regione **OFF** il transistor è interdetto e non conduce corrente (idealmente, in realtà vi sono sempre delle *correnti di leakage*, che però trascuriamo nei nostri modelli semplificati).

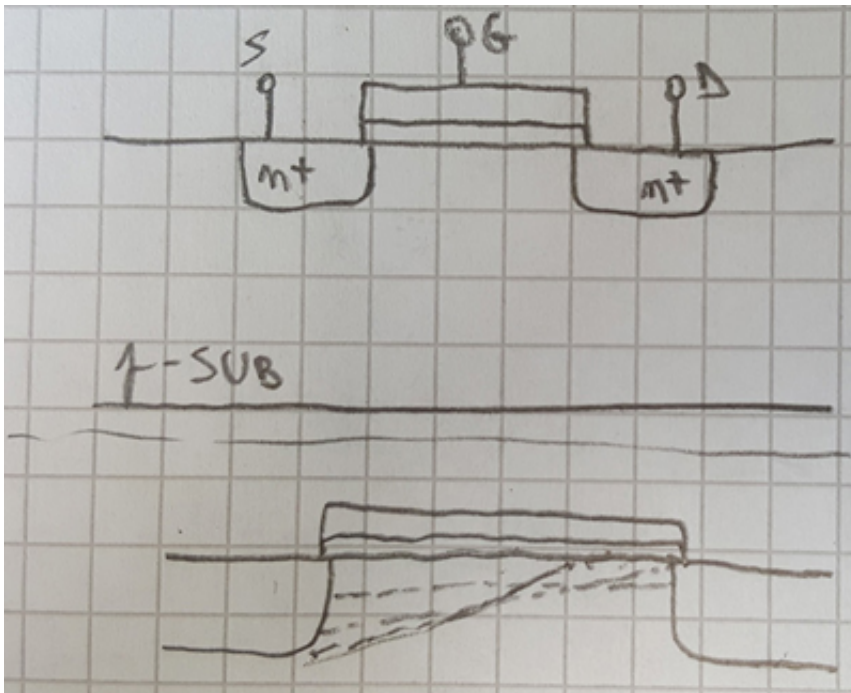
Riassumendo, possiamo identificare un **modello a soglia** che descriva il funzionamento del BJT nelle principali regioni:

$$f(I_c, I_b, V_{be}, V_{ce}) = \begin{cases} I_c = I_b = I_E = 0 & \textbf{(OFF)} \quad \text{per } V_{be} < V_\gamma \\ V_{be} = V_\gamma, I_c = \beta_F I_b & \textbf{(AD)} \quad \text{per } V_{ce} > V_{ce,SAT} \\ V_{be} = V_\gamma, V_{ce} = V_{ce,SAT} & \textbf{(SAT)} \quad \text{per } I_c < \beta_F I_b \end{cases}$$

Si ricorda che *il modello a soglia considerato può essere applicato alla risoluzione dei circuiti nel caso in cui vi siano elementi passivi in grado di regolare la polarizzazione (resistenza di base, emettitore etc.)*, altrimenti il modello produce singolarità. Negli esercizi che vedremo questo assunto viene rispettato.

Infine, si precisa che, ove non indicato, si assume che  $V_\gamma \approx 750mV$ ,  $V_{ce,SAT} \approx 200mV$ .

## 1.3 MOSFET



Il MOSFET (<https://it.wikipedia.org/wiki/MOSFET>) è un transistor ad effetto di campo "a maggioritari". Il *gate* forma il canale sotto di sé e la tensione *drain-source* controlla lo scorrere della corrente. Nel *modello semplificato* che trattiamo, il MOSFET è un dispositivo *simmetrico*, pertanto il *drain* ed il *source* sono intercambiabili.

**Per gli *n-MOS* il *drain* è il terminale a potenziale maggiore rispetto al *source*, mentre nei *p-MOS* si ha la situazione opposta.**

Inoltre, la *corrente di gate* del modello semplificato prevede che in condizioni statiche la corrente di gate sia nulla. In condizioni dinamiche si può avere scorrimento di corrente ma viene solitamente modellata come capacità esterna equivalente.

Consideriamo il caso di un *n-MOS*. Per tensioni *gate-source* piccole ( $V_{gs}$  tensione di soglia logica), il dispositivo è in stato di interdizione (**OFF**), col canale svuotato, e la corrente non può scorrere tra *drain* e *source* (ancora una volta, questa è una semplificazione, esistono correnti di leakage che però trascureremo).

Diversamente, per tensioni *gate-source* maggiori della tensione di soglia ( $V_{gs} \geq V_{Tn}$ ) sotto al gate si forma uno *strato invertito* di carica (elettroni in substrato *p* nel caso di *n-MOS*, lacune in substrato *n* nel caso di *p-MOS*). A questo punto la corrente può scorrere tra drain e source.

Per *modeste* tensioni *drain-source* l'andamento della corrente, almeno all'inizio, è quasi lineare (per  $V_{ds}$  crescenti acquista peso il termine quadratico e si devia dalla linearità). La regione di funzionamento è denominata **lineare (LIN)**, e si permane in questo stato *finchè si rimane sotto la tensione di saturazione* ( $V_{ds} \leq V_{ds,SAT} = V_{gs} - V_{Tn}$ ). Al crescere di  $V_{ds}$  il canale si deforma assottigliandosi sempre più nelle vicinanze del drain, come mostrato in figura.

Si arriva quindi ad un valore critico della tensione  $V_{ds}$  (ovvero per  $V_{ds} > V_{ds,SAT} = V_{gs} - V_{Tn}$ ), tale per cui il canale viene *strozzato (pinch-off)* e la corrente non cresce più al crescere della tensione *drain-source* applicata. La corrente satura ad un valore massimo e si ha la regione di funzionamento in **Saturazione (SAT)**.

Da notare che la regione di funzionamento **LIN** del **MOSFET** corrisponde alla regione **SAT** del **BJT** (una scelta infelice di nomi). Allo stesso modo, la condizione **SAT** del **MOSFET** corrisponde alla regione **AD** del **BJT**.

Riassumendo, si può schematizzare il funzionamento del transistor **n-MOS** come segue:

$$f(I_{ds}, V_{gs}, V_{ds}) = \begin{cases} I_{ds} = 0 & \text{(OFF) per } V_{gs} < V_{Tn} \\ I_{ds} = \frac{\beta}{2}(V_{gs} - V_{Tn})^2 & \text{(SAT) per } V_{ds} \geq V_{gs} - V_{Tn}, V_{gs} \geq V_{Tn} \\ I_{ds} = \beta(V_{gs} - V_{Tn} - \frac{V_{ds}}{2}) & \text{(LIN) per } V_{ds} < V_{gs} - V_{Tn}, V_{gs} \geq V_{Tn} \end{cases}$$

Per i **p-MOS** la trattazione è del tutto analoga a patto che si effettuino le seguenti sostituzioni:

$$I_{ds} \rightarrow I_{sd}$$

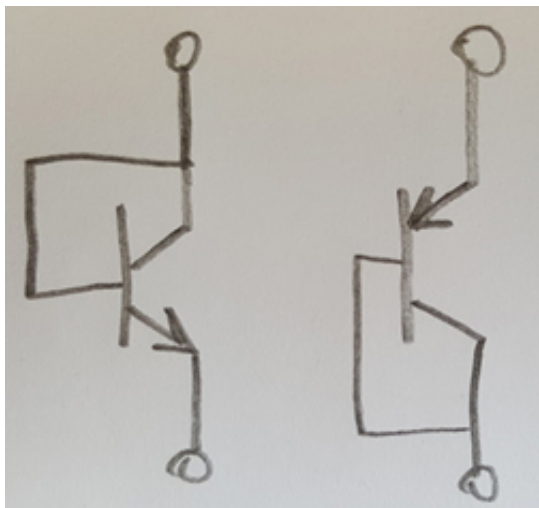
$$V_{ds} \rightarrow V_{sd}$$

$$V_{gs} \rightarrow V_{sg}$$

$$V_{Tn} \rightarrow |V_{Tp}|$$

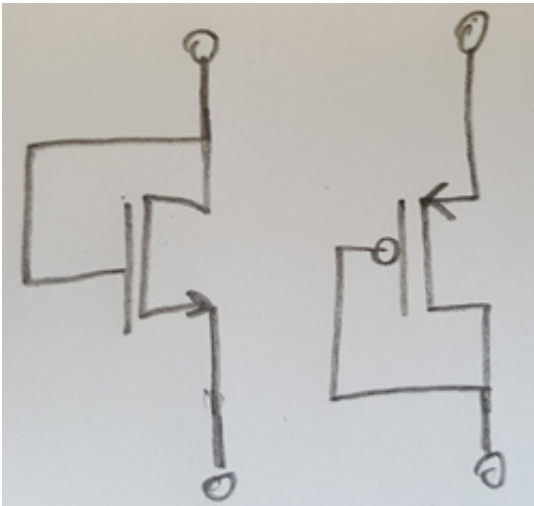
## 2. Casi notevoli

### 2.1 Connessione a diodo



Il BJT connesso come sopra si dice **connesso a diodo**. In tale modalità il transistor può funzionare solamente in due regimi: **OFF** o **AD**. Infatti:

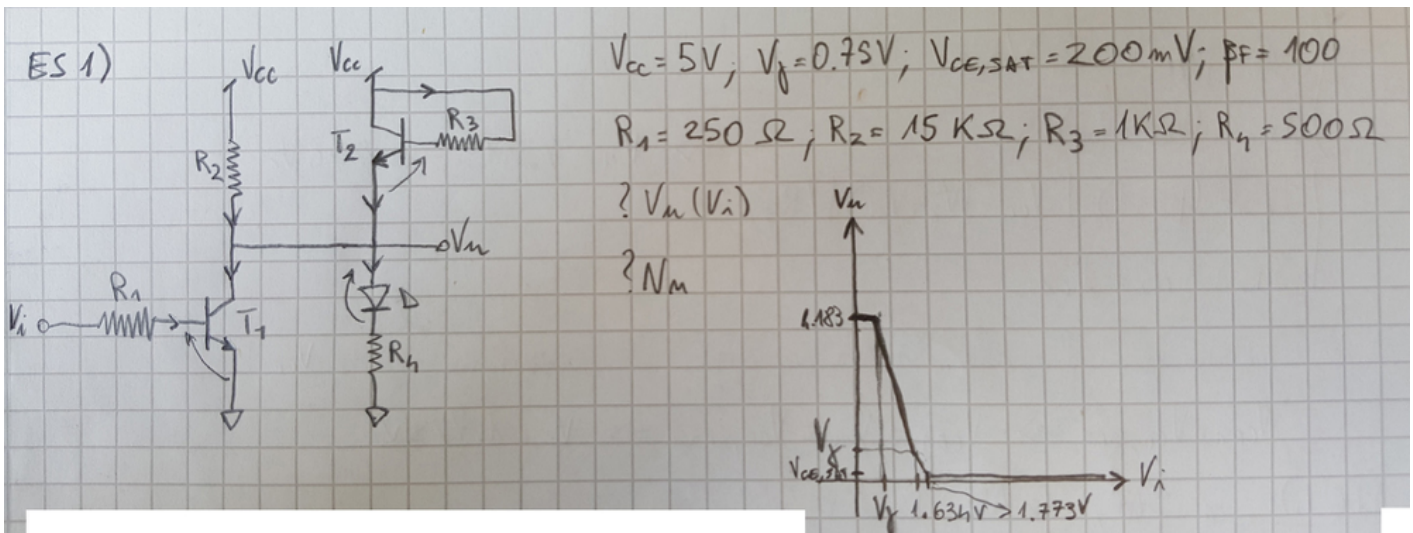
$$V_b = V_c \Rightarrow \text{in ON} : V_{\gamma} = V_{be} = V_{ce} > V_{ce,SAT} \Rightarrow \text{AD}$$



Il MOS connesso come sopra si dice **connesso a diodo**. In tale modalità il transistor può funzionare solamente in due regimi: **OFF** o **SAT**. Infatti:

$$V_g = V_d \Rightarrow \text{in ON} : V_{ds} = V_{gs} > V_{ds,SAT} = V_{gs} - V_{Tn} \Rightarrow \text{SAT}$$

## Esercizio 1 - caratteristica statica e Noise Margins



```
In [33]: #Basic importing
from sympy import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

#set matplotlib appearance
import matplotlib as mpl
mpl.rcParams['figure.figsize'] = (12.0, 6.0)
%matplotlib inline

#Data
Vcc = 5
Vgamma = 0.75
Vcesat = 0.2
betaf = 100
R1 = 250
R2 = 15e3
R3 = 1e3
R4 = 500

#Unknowns
Vu = Symbol('Vu')
Vi = Symbol('Vi')
Id = Symbol('Id')
Ir2 = Symbol('Ir2')
Ie2 = Symbol('Ie2')
Ic1 = Symbol('Ic1')
```

## Regione 1

Di solito si comincia da piccoli valori di  $V_i$  e poi a crescere. In particolare, consideriamo il caso  $V_i$  (beve corrente), sia sufficientemente lontana da  $V_{cc}$  per garantire l'accensione di T2. Riconosciamo poi che T2 è connesso a diodo e quindi se è ON si trova in AD. Riassumendo:

### Hp: T1 OFF, D ON, T2 AD

Applicando le leggi di Kirchhoff al circuito, tenuto conto delle ipotesi fatte:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R2} + I_{E2} = I_D \\ I_D = \frac{V_u - V_\gamma}{R_4} \\ I_{R2} = \frac{V_{cc} - V_u}{R_2} \\ I_{E2} = (\beta_F + 1)I_{B2} = (\beta_F + 1)\frac{V_{cc} - (V_{be2} + V_u)}{R_3} = (\beta_F + 1)\frac{V_{cc} - (V_\gamma + V_u)}{R_3} \end{array} \right.$$

```
In [ ]: solve([Ir2+Ie2-Id, Id-(Vu-Vgamma)/R4, Ir2-(Vcc-Vu)/R2, Ie2-(betaf+1)
*(Vcc-Vgamma-Vu)/R3], [Ir2, Id, Ie2, Vu])
```

Da cui si ottiene l'unica soluzione  $V_u \approx 4.183$  V. **(Ricordatevi sempre le unità di misura!)**

Si deve quindi verificare che T2 sia ON e D sia ON.

- T2 ON, AD  $\Rightarrow V_{cc} - 4.183 = 0.817 > V_\gamma \Rightarrow \text{OK}$
- D ON verificato dato che  $I_d > 0$

## Regione 2

Ora  $V_i$  è sufficientemente grande da fare accendere il transistor T1 di ingresso. Dal momento che da **una regione all'altra varia un solo dispositivo alla volta**, le  $H_p$  saranno uguali a prima, eccezion fatta per T1.

Supporremo T1 ON, AD dal momento che la  $V_u = V_{ce}$  è ancora alta e dunque maggiore della  $V_{ce, SAT}$

**H<sub>p</sub>: T1 ON, AD, D ON, T2 AD**

Applicando le leggi di Kirchhoff al circuito, tenuto conto delle ipotesi fatte:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R2} + I_{E2} = I_D + I_{C1} \\ I_{E2} = (\beta_F + 1)I_{B2} = (\beta_F + 1) \frac{V_{cc} - (V_{be2} + V_u)}{R_3} = (\beta_F + 1) \frac{V_{cc} - (V_\gamma + V_u)}{R_3} \\ I_D = \frac{V_u - V_\gamma}{R_4} \\ I_{R2} = \frac{V_{cc} - V_u}{R_2} \\ I_{C1} = \beta_F I_{B1} = \beta_F \frac{V_i - V_\gamma}{R_1} \end{array} \right.$$

```
In [ ]: solve([Ir2+Ie2-Id-Ic1, Id-(Vu-Vgamma)/R4, Ir2-(Vcc-Vu)/R2, Ie2-(beta
f+1)*(Vcc-Vgamma-Vu)/R3, Ic1-betaf*(Vi-Vgamma)/R1],
[ Ir2, Ic1, Vu, Ie2, Id])
```



Da cui la soluzione  $V_u = 7.093 - 3.881 V_i$ . Come prima, fate i check che le soluzioni trovate soddisfino le ipotesi fatte a priori.

Per  $V_i$  crescenti la situazione può evolvere in due direazioni:

- T1 AD  $\Rightarrow$  SAT
- D ON  $\Rightarrow$  OFF

Ma, guardando il circuito, si vede che la  $V_{ce1}$  include nella maglia la tensione del diodo:

$$V_{ce1} = V_\gamma + R_4 * I_{R4} > V_\gamma > V_{ce,SAT}$$

Dunque **accadrà prima che D passi da ON ad OFF**. A questo punto occorre chiedersi quando ciò accadrà.

**D andrà OFF quando la sua corrente (pari a  $I_{R4}$ ) si annullerà**. Dal sistema precedente:

$$I_D = I_{R4} = 0 \Rightarrow \frac{(V_u - V_\gamma)}{R_4} = 0 \Rightarrow V_u = V_\gamma$$

Sostituendo nella soluzione trovata sopra

$$V_u = V_\gamma \Rightarrow V_i = 1.643 \text{ V}$$

Dunque **si resta in questa regione finché  $V_i < 1.643 \text{ V}$**

Inoltre, ai fini dei calcoli dei *noise margins*, **dal momento che il guadagno è  $< -1$ , si avrà che il punto di raccordo tra Regione 1 e Regione 2 definisce  $V_{OH,MIN} = 4.183 \text{ V}$  e  $V_{IL,MAX} = 0.75 \text{ V}$ .**\*\*\*

## Regione 3

Abbiamo detto che in questa regione il cambiamento era del diodo, che si spegneva. Pertanto:

**Hp: T1 AD, T2 AD, D OFF**

Andando ad applicare le leggi di Kirchhoff al circuito, tenuto conto delle ipotesi:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R2} + I_{E2} = I_{C1} \\ I_{E2} = (\beta_F + 1)I_{B2} = (\beta_F + 1) \frac{V_{cc} - (V_{be2} + V_u)}{R_3} = (\beta_F + 1) \frac{V_{cc} - (V_\gamma + V_u)}{R_3} \\ I_{R2} = \frac{V_{cc} - V_u}{R_2} \\ I_{C1} = \beta_F I_{B1} = \beta_F \frac{V_i - V_\gamma}{R_1} \end{array} \right.$$

```
In [2]: solve([Ir2+Ie2-Ic1, Ir2-(Vcc-Vu)/R2,Ie2-(betaf+1)*(Vcc-Vgamma-Vu)/R
3,Ic1-betaf*(Vi-Vgamma)/R1],
[Ir2,Ic1,Vu,Ie2])
```

```
Out[2]: {Ir2: 0.000263852242744063*Vi - 0.000147922163588391,
Ic1: 0.4*Vi - 0.3,
Ie2: 0.399736147757256*Vi - 0.299852077836412,
Vu: -3.95778364116095*Vi + 7.21883245382586}
```

Da cui  $V_u = 7.219 - 3.958 V_i$ .

Di nuovo, occorre testare le condizioni di esistenza (Hp soddisfatte?). Lasciamo come esercizio la verifica delle ipotesi, tenendo presente che **si starà in questa regione finché  $V_u$ , che sta calando, arriverà a far saturare T1**. Infatti dal circuito *si vede facilmente che  $V_u = V_{ce}$* , pertanto si resterà in questa regione finché

$$V_u = V_{ce1} > V_{ce,SAT} \Rightarrow (\text{sostituendo nella soluzione di } V_u) \Rightarrow V_i < 1.773 \text{ V}$$

## Regione 4

In questa regione T1 è SAT, pertanto *fissa l'uscita alla tensione di saturazione*

**Hp: T1 SAT, T2 AD, D OFF**

Si ha, banalmente:  $V_u = V_{ce1} = V_{ce,SAT} = 0.2 \text{ V}$ .

Inoltre, ***dal momento che, rispetto alla precedente regione, siamo passati da un guadagno <-1 ad uno maggiore (0 in questa regione), il raccordo tra regione 3 e 4 definisce i punti  $V_{IH,MIN} = 1.773 \text{ V}$  e  $V_{OL,MAX} = 0.2 \text{ V}$*** \*\*\*

## Calcolo dei noise margins

Si usa la formula nota dalla teoria:

$$\begin{cases} N_{ML} = V_{IL,MAX} - V_{OL,MAX} = 0.55 \text{ V} \\ N_{MH} = V_{OH,MIN} - V_{IH,MIN} = 2.41 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow N_M = \min(N_{ML}, N_{MH}) = 0.55 \text{ V}$$

```

In [35]: #region 1
rg1_v = np.linspace(0,0.75,num=100)
rg1_i = 4.183*np.ones((len(rg1_v)))

#region 2
rg2_v = np.linspace(0.75,1.634,num=100)
rg2_i = 7.093*np.ones((len(rg2_v)))-3.881*rg2_v

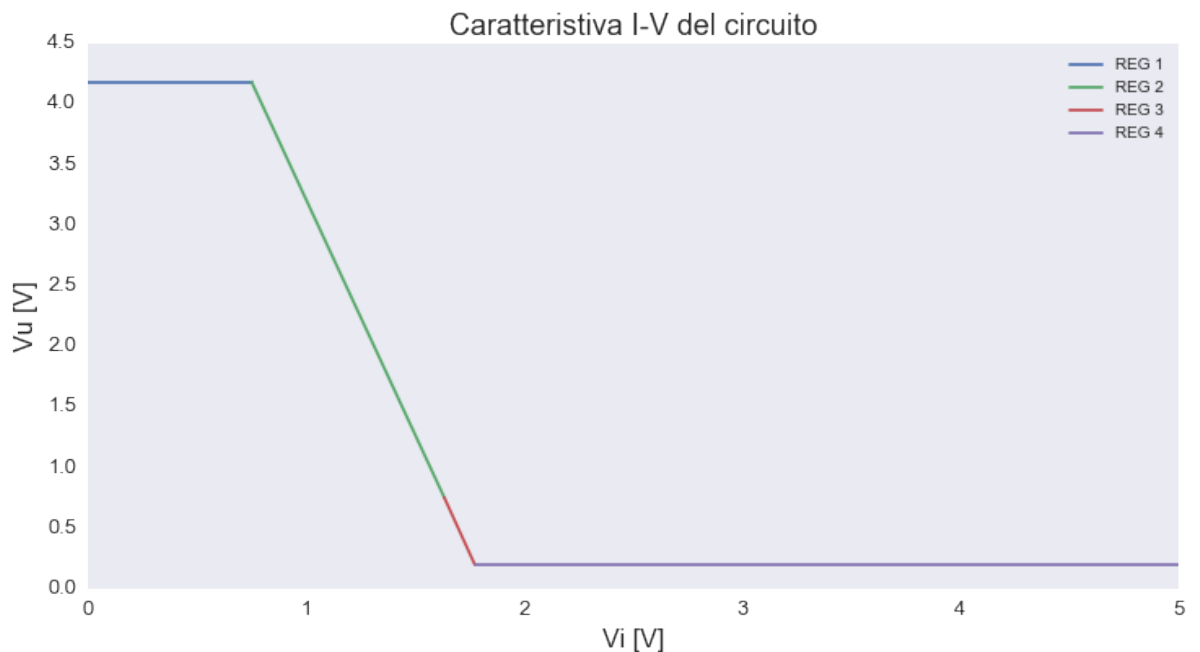
#region 3
rg3_v = np.linspace(1.634,1.773,num=100)
rg3_i = 7.219*np.ones((len(rg3_v)))-3.958*rg3_v

#region 2
rg4_v = np.linspace(1.773,5,num=100)
rg4_i = 0.2*np.ones((len(rg4_v)))

#plot results
mpl.rcParams['figure.figsize'] = (12.0, 6.0)
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(rg1_v,rg1_i,label='REG 1')
ax.plot(rg2_v,rg2_i,label='REG 2')
ax.plot(rg3_v,rg3_i,label='REG 3')
ax.plot(rg4_v,rg4_i,label='REG 4')
ax.grid()
ax.set_title('Caratteristica I-V del circuito', fontsize=18)
ax.set_xlabel('Vi [V]', fontsize=16)
ax.set_ylabel('Vu [V]', fontsize=16)
ax.tick_params(labelsize=13)
ax.legend()

```

Out[35]: <matplotlib.legend.Legend at 0xdd62d68>



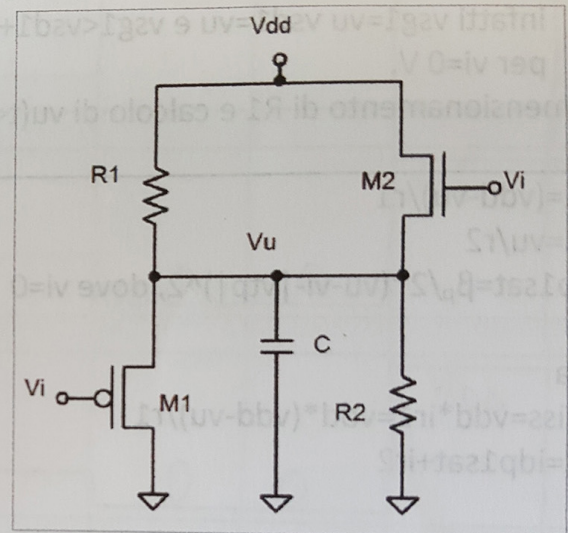
## Esercizio 2 - tempo di propagazione

1) Nel circuito in figura, i transistori MOS sono caratterizzati dalle tensioni di soglia  $V_{Tn}$  e  $V_{Tp}$  e dai coefficienti  $\beta_n$  e  $\beta_p$ . Il segnale d'ingresso abbia il seguente andamento:

$$t < 0: V_i = 0 \text{ V}$$

$$t > 0: V_i = V_{dd}$$

- Si dimensioni la resistenza  $R_1$ , in modo tale che per  $t < 0$  la potenza statica dissipata dal circuito, sia  $P_{diss} = 1.8 \text{ mW}$ .
- Si calcoli, quindi, il ritardo di propagazione  $t_p$  associato alla transizione del segnale di uscita  $v_u$ .



$$V_{dd} = 3.5 \text{ V}, \beta_n = 5 \text{ mA/V}^2, \beta_p = 1 \text{ mA/V}^2, V_{Tn} = 0.5 \text{ V}, V_{Tp} = -0.6 \text{ V}, R_2 = 2 \text{ k}\Omega, C = 10 \text{ nF}.$$

```
In [38]: #General imports
import scipy.integrate

#Data
Vdd = 3.5
betan = 5e-3
betap = 1e-3
Vtn = 0.5
Vtp_abs=0.6
R2 = 2e3
C = 10e-9
Vi=0 #UPDATE THIS!
Pdiss = 1.8e-3

#Unknowns
Vu = Symbol('Vu')
R1_x = Symbol('R1_x')
Id1 = Symbol('Id1')
Ir1 = Symbol('Ir1')
Ir2 = Symbol('Ir2')
```

## Dimensionamento resistenza (t<0)

Per prima cosa occupiamoci del dimensionamento della resistenza R1. In particolare si richiede che la potenza dissipata (pari al prodotto tra corrente erogata dalla batteria e tensione della batteria) sia pari ad un certo valore, per t<0.

Per **t<0 il circuito è in condizioni statiche** e sappiamo che la corrente statica attraverso una capacità è nulla.

Occorre formulare ipotesi sulle condizioni operative dei dispositivi. In particolare, osserviamo che **Vi=0 implica che M1 sia SAT** (è infatti ON, essendo un p-mos, e con Vi=0 risulta connesso a diodo, da cui la saturazione). Allo stesso modo, **Vi=0 implica che M2 sia OFF**. Dunque, in questo regime: **M1 SAT, M2 OFF**

Pertanto è possibile impostare il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} I_{R1} = I_{D1} + I_{R2} \\ I_{D1} = \frac{\beta_p}{2}(V_{SG1} - |V_{Tp}|)^2 = \frac{\beta_p}{2}(V_u - V_i - |V_{Tp}|)^2 \\ I_{R2} = \frac{V_u}{R2} \\ I_{R1} = \frac{V_{DD} - V_u}{R1} \\ I_{R1} = P_{DISS}/V_{DD} \quad (\text{da constraint su potenza dissipata}) \end{cases}$$

Risolvendo rispetto ad R1:

```
In [39]: Vi=0
solve([Id1-betap/2*(Vu-Vi-Vtp_abs)**2,Ir1-(Vdd-Vu)/R1_x,Ir2-Vu/R2,Ir1-Id1-Ir2,Ir1-Pdiss/Vdd],[Vu,Id1,Ir2,Ir1,R1_x])
```

```
Out[39]: [(-0.723754471047914,
0.000876162949809671,
-0.000361877235523957,
0.000514285714285714,
8212.85591592650),
(0.923754471047914,
5.24084787617573e-5,
0.000461877235523957,
0.000514285714285714,
5009.36630629572)]
```

Vediamo che si hanno due soluzioni, di cui solo una accettabile dal momento che l'altra conduce a valori non accettabili per il circuito:

$$\begin{cases} R1 \approx 5 \text{ k}\Omega, V_u \approx 0.925 \text{ V} & \Rightarrow \text{ACCETTABILE} \\ R1 \approx 8.2 \text{ k}\Omega, V_u \approx -0.725 \text{ V} & \Rightarrow \text{NON ACCETTABILE} \end{cases}$$

Si nota che, per la soluzione accettabile,  $V_u > V_{Tn} \Rightarrow M1 \text{ ON}$  è verificato.

Inoltre, notiamo che **dalla soluzione accettabile si ha la condizione al contorno** (vedi dopo):

$$V_u(t = 0^+) = V_u(t = 0^-) \approx 0.925 \text{ V.}$$

```
In [40]: #update values
          R1=5e3
          Vi=Vdd
```

## Valore a regime per $t \rightarrow \infty$

Dal momento che  $V_i = V_{dd}$ , allora il p-mos di ingresso è OFF. M2, invece, risulta ON. Essendo sempre  $V_i = V_{dd}$ , M2 è connesso a diodo, pertanto è SAT. Inoltre, a regime, la corrente attraverso la capacità C è nulla (circuito aperto in continua)

**Hp: M1 OFF, M2 SAT**

Si può scrivere dunque:

$$\begin{aligned} I_{R1} + I_{D2} &= I_{R2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{V_{DD} - V_u}{R_1} + \frac{\beta_N}{2} (V_i - V_u - V_{Tn})^2 &= \frac{V_u}{R_2} \\ \Rightarrow \frac{V_{DD} - V_u}{R_1} + \frac{\beta_N}{2} (V_{DD} - V_u - V_{Tn})^2 &= \frac{V_u}{R_2} \end{aligned}$$

```
In [41]: solve([(Vdd-Vu)/R1+betan/2*(Vdd-Vu-Vtn)**2-Vu/R2],[Vu])
```

```
Out[41]: [(2.37868534757303,), (3.90131465242697,)]
```

Notiamo che **solo la prima soluzione è accettabile**, dal momento che la seconda produce risultati non validi per  $V_u$ .

Pertanto,  $V_u(t \rightarrow \infty) \approx 2.379 \text{ V.}$

## Transitorio

Per la presenza della capacità, che non ammette cambiamenti repentini di tensione **AI SUOI CAPI**, abbiamo che

$$V_u(t = 0^+) = V_u(t = 0^-) \approx 0.925 \text{ V}$$

Per quanto riguarda il calcolo del **tempo di propagazione** sappiamo che esso è definito come il **tempo per arrivare a metà dell'escursione logica del circuito**. Dunque il transitorio avrà i seguenti limiti:

$$V_{u,START} = V_u(t \rightarrow -\infty) = 0.925 \text{ V}$$

$$V_{u,STOP} = \frac{V_u(t \rightarrow \infty) + V_u(t \rightarrow -\infty)}{2} = 1.652 \text{ V}$$

Le condizioni di funzionamento dei dispositivi, visto che  $V_i = V_{DD}$  ( $V_i$  può variare istantaneamente, non ha capacità attaccate), saranno dunque:

**Hp: M1 OFF, M2 SAT** (come prima)

Possiamo dunque scrivere l'equazione del transitorio come segue:

$$\begin{cases} I_{R1} + I_{D2} = I_{R2} + C \frac{dV_u}{dt} \\ I_{R1} = \frac{V_{DD} - V_u}{R_1} \\ I_{R2} = \frac{V_u}{R_2} \\ I_{D2} = \frac{\beta_N}{2} (V_{DD} - V_u - V_{Tn})^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_p} dt = \int_{V_{u,START}}^{V_{u,STOP}} \frac{C}{I_{R1} + I_{D2} - I_{R2}} dV_u$$

$$\Rightarrow t_p = \int_{V_{u,START}}^{V_{u,STOP}} \frac{C}{I_{R1} + I_{D2} - I_{R2}} dV_u$$

La soluzione è stata impostata mediante il metodo della separazione della variabile. Occorre risolvere l'integrale nel membro di destra. Il calcolo può essere fatto molto agilmente per via numerica:

```
In [42]: def integrand(Vu, Vdd, R1, betan, Vtn, C, R2):  
    #the symbolic expression of the integrand  
    return C/( (Vdd-Vu)/R1 + betan/2*(Vdd-Vu-Vtn)**2 - Vu/R2 )  
  
Vstart = 0.925  
Vstop = 1.652  
  
tp = scipy.integrate.quad(integrand, Vstart, Vstop, args=(Vdd,R1,betan,Vtn,C, R2) )  
print "tp = " + repr(tp[0])  
  
tp = 1.0857623289900909e-06
```

Da cui si ricava il risultato:

$$t_p \approx 1.08 \mu s$$

E' anche possibile ricavare la **traiettoria di  $V_u(t)$  integrando l'equazione differenziale** che governa il transitorio. In particolare:

$$I_{R1} + I_{D2} = I_{R2} + C \frac{dV_u}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dV_u}{dt} = \frac{1}{C}(I_{R1} + I_{D2} - I_{R2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dV_u}{dt} = \frac{1}{C} \left( \frac{V_{DD} - V_u}{R_1} + \frac{\beta_N}{2} (V_{DD} - V_u - V_{Tn})^2 - \frac{V_u}{R_2} \right)$$

L'equazione può essere risolta con solver numerico in Python come sotto riportato:



```
In [44]: def ode_rhs(y,t,args):
#right hand side of the differential equation in the form dy/dt
=f(y,t)
    Vdd, R1, betan, Vtn, C, R2 = args
    f = 1/C*( (Vdd-y)/R1 + betan/2*(Vdd-y-Vtn)**2 - y/R2 )
    return f

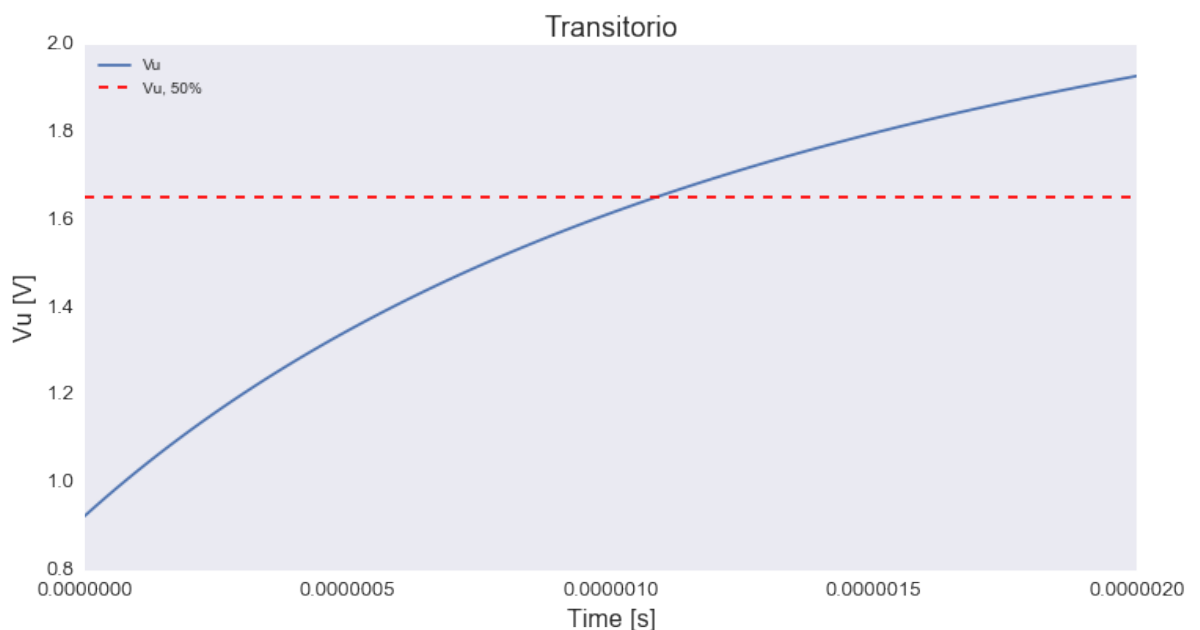
tstart = 0
tstop = 2e-6
steps = 100
#define time vector
t = np.linspace(tstart,tstop,num=steps)

#initial condition
initial_c = Vstart

#integrate the differential equation, providing the initial conditi
on
soln = scipy.integrate.odeint( ode_rhs,initial_c,t, args=(Vdd, R1,
betan, Vtn, C, R2],) )

#plot results
mpl.rcParams['figure.figsize'] = (12.0, 6.0)
fig2,ax2 = plt.subplots()
ax2.plot(t,soln[:,0],label='Vu')
ax2.set_title('Transitorio',fontsize=18)
ax2.set_xlabel('Time [s]', fontsize=16)
ax2.set_ylabel('Vu [V]', fontsize=16)
ax2.axhline(Vstop,color='r',linestyle='dashed',label='Vu, 50%')
ax2.tick_params(labelsize=13)
ax2.grid()
ax2.legend(loc='upper left')
```

Out[44]: <matplotlib.legend.Legend at 0xefe2e8>



In [ ]:

In [ ]:

In [ ]: