Argomento # 13 Sovrapposizione e onde stazionarie

* Interferenza
* Onde stazionarie
* Risonanza
* Battimenti
* Onde non sinusoidali

— o — o —

Sovrapposizione di due onde sinusoidali

Finora abbiamo considerato onde singole, di funzione d'onda $f(x,t) = f(x - vt)$, in particolare nel caso di onde sinusoidali: $f(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$.

$(kx - \omega t = k(x - \frac{\omega}{k} t) = k(x - vt))$

$\frac{\omega}{k} = v$

Ora consideriamo il caso in cui nella stessa regione di spazio si propagano due (o più) onde. In questo caso, se le ampiezze delle onde sono piccole, vale il principio di sovrapposizione: "l'effetto risultante di due onde è dato dalla somma delle due onde":

$$f_R(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t)$$

ES: Onde sinusoidali di stessa ampiezza, frequenza e lunghezza d'onda, ma diversa fase:

$$y_1(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\phi_1), \quad y_2(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\phi_2)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Principio di sovrapposizione $\rightarrow$ $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$

$$= A[\sin(kx-\omega t+\phi_1) + \sin(kx-\omega t+\phi_2)]$$

Usiamo l'identità trigonometrica: $\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\Rightarrow y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)\sin\left(kx-\omega t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$$

Notare che:

1) L'onda risultante è ancora un'onda sinusoidale con le stesse k e ω delle onde iniziali;
2) L'ampiezza dipende dalla fase relativa tra le due onde:

- se $\boxed{\phi_1 = \phi_2 = \phi}$: ONDE y_1 e y_2 "IN FASE"

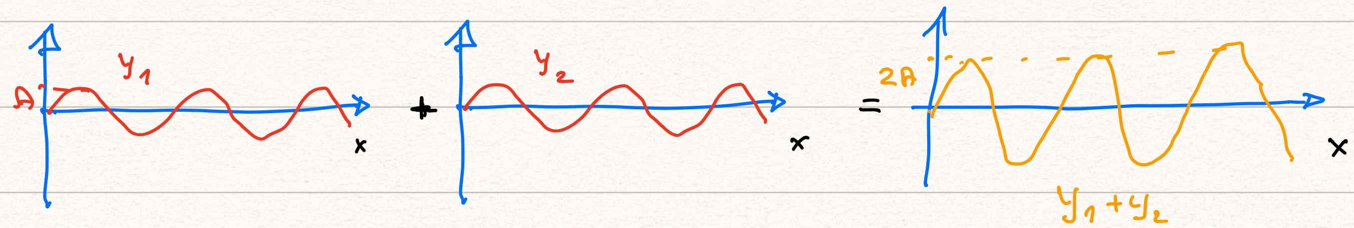
$$\rightarrow y(x,t) = 2A\sin(kx-\omega t+\phi)$$

$\rightarrow$ l'onda risultante ha la stessa k, ω, e ϕ delle onde iniziali. AMPIEZZA DOPPIA!

→ in questo caso si dice che le due onde interferiscono costruttivamente.

→ si ha interferenza costruttiva quando

$$\frac{\phi_1-\phi_2}{2} = n\pi \Rightarrow \phi_1-\phi_2 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$



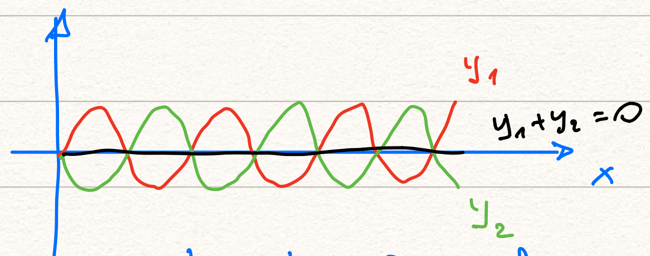
se $\phi_1-\phi_2 = n\pi$

– se $\boxed{\frac{\phi_1-\phi_2}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \phi_1-\phi_2 = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$

onde in "OPPOSIZIONE DI FASE"

$\Rightarrow y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 0$

→ Interferenza distruttiva:



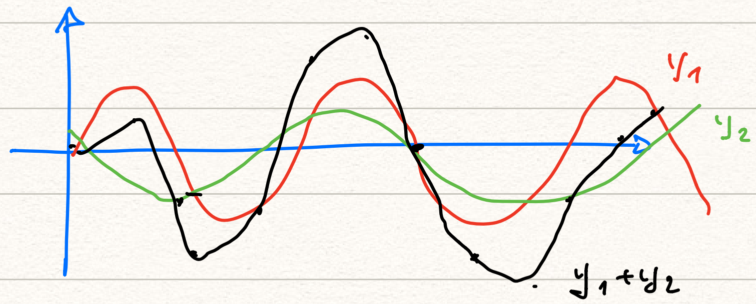
stesso k, ω, A, ma fase che differisce per un multiplo di π.

[per esempio $y_1 = A\sin(kx-\omega t)$

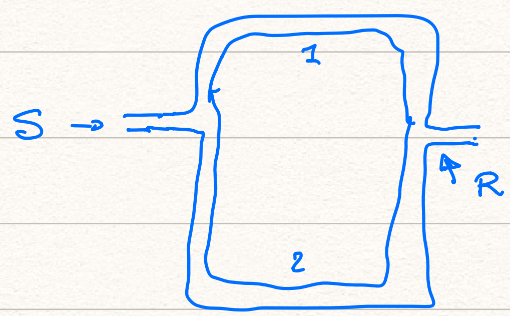
$y_2 = A\sin(kx-\omega t+\pi) =$

$= -A\sin(kx-\omega t)$]

Nel caso più generale, se $A_1 \neq A_2$, e $k_1 \neq k_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$, ho sempre $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$, ma l'interferenza non è esattamente costruttiva né distruttiva.



Un modo per variare l'interferenza tra onde consiste nel variare il cammino relativo di una rispetto all'altra. Per esempio:



in R: $y_1 = A \sin(k\ell_1 - \omega t)$ $\Rightarrow y(R,t) = 2A \cos\left(k\frac{\ell_2-\ell_1}{2}\right) \sin\left(k\frac{\ell_1+\ell_2}{2} - \omega t\right)$

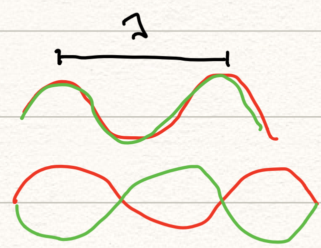
$y_2 = A \sin(k\ell_2 - \omega t)$

Ricordiamo che $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Se $\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\ell_2-\ell_1}{2}\right) = m\pi \rightarrow$ int. costruttiva

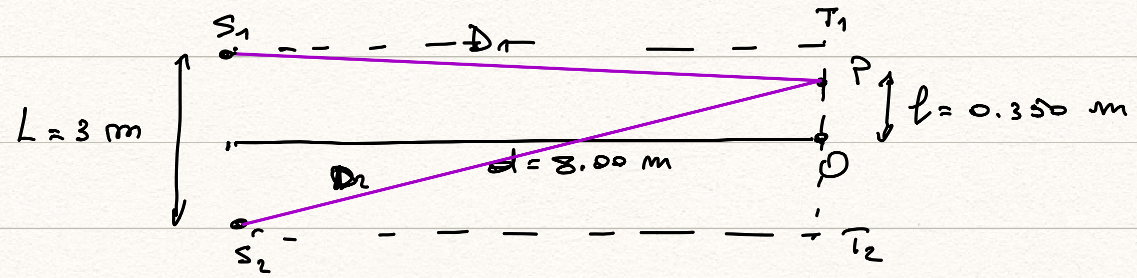
Se $\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\ell_2-\ell_1}{2}\right) = (2m+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow$ int. distruttiva

$\Rightarrow \ell_2 - \ell_1 = m\lambda \rightarrow$ int. costruttiva

$\ell_2 - \ell_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow$ int distruttiva



ES: Due sorgenti alimentate dallo stesso oscillatore, distano 3 m.
Inizialmente O è sull'asse mediano tra i due oscillatori a distanza $d = 8.00$ m dal centro.
Poi O si sposta perpendicolarmente all'asse fino a incontrare il primo minimo dell'intensità sonora nel punto P a distanza $l = 0.350$ m dall'asse. Trovare la frequenza dell'oscillatore:



Interferenza distruttiva in P se $D_2 - D_1 = \frac{\lambda}{2}$ (2n+1 per n=0 primo minimo)

Cateto T_1P : $(1.5 - 0.350)$ m
" S_1T_1 : 8.00 m

$$\Rightarrow D_1 = \sqrt{(8.00)^2 + (1.5-0.35)^2}\ m = 8.08\ m$$

Cateto T_2P : $(1.5 + 0.35)$ m
" S_2T_2 : 8.00 m

$$\Rightarrow D_2 = \sqrt{(8.00)^2 + (1.5+0.35)^2}\ m = 8.21\ m$$

$$\Rightarrow \lambda = 2(D_2 - D_1) = 0.26\ m$$

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343\ m/s}{0.26\ m} = 1319\ Hz = 1.32\ kHz$$

— o — o —

Onde stazionarie

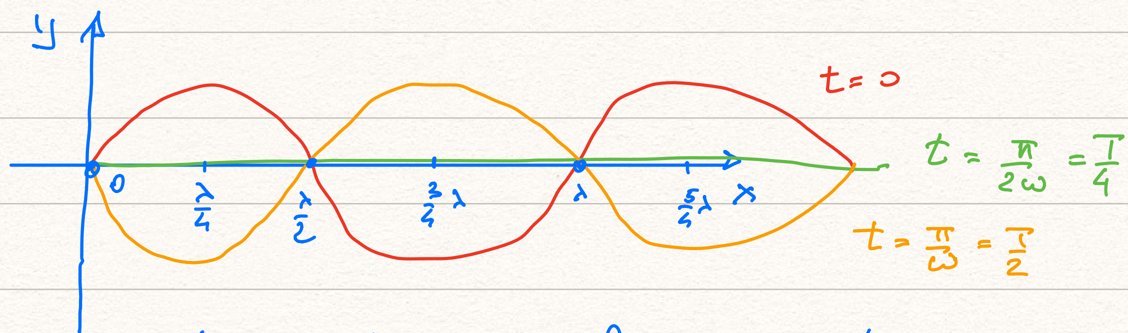
Consideriamo ora due onde identiche ma con verso di propagazione opposto: $y_1 = A\sin(kx-\omega t)$, $\longrightarrow$

$y_2 = A\sin(kx+\omega t)$ $\longleftarrow$

L'onda risultante è: $y = y_1+y_2 = A[\sin(kx-\omega t)+\sin(kx+\omega t)] =$

$$= \boxed{2A\sin kx\cos\omega t}$$

Notiamo che l'argomento non è più del tipo "$kx-\omega t$", o "$kx+\omega t$". Questa funzione non descrive una propagazione. Una funzione di questo tipo si chiama ONDA STAZIONARIA.



In ogni punto a x fissato si ha un moto armonico di pulsazione ω e ampiezza $\underline{2A\sin kx}$.

Quindi ci sono punti in cui l'oscillazione è sempre nulla, questi si chiamano <u>NODI</u> e sono quelli per cui vale

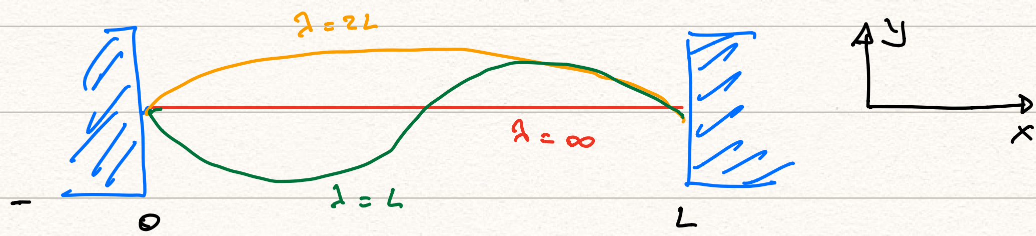
$$\sin kx = 0 \Rightarrow x = n\frac{\pi}{k} \underset{\substack{\downarrow \\ k=\frac{2\pi}{\lambda}}}{=} n\frac{\lambda}{2} = 0, \pm\frac{\lambda}{2}, \pm\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \ldots$$

Ci sono poi punti in cui l'ampiezza è massima, e vale $2A$, questi sono gli ANTINODI, che si trovano in

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2k} = (2n+1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}, \pm\frac{3}{4}\lambda, \pm\frac{5}{4}\lambda, \dots$$

ONDE CON CONDIZIONI AL CONTORNO

L'esempio tipico è quello di una corda tesa tra due estremità. In questo caso i due punti agli estremi non possono oscillare.



Le uniche onde possibili sono stazionarie:

$$y = 2A \sin kx \cos\omega t$$

dove l'ampiezza, $2A\sin kx$, deve essere nulla in $x=0$ e $x=L$.

$$\Rightarrow \quad kL = n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} = \infty, 2L, L, \frac{2}{3}L, \dots$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

sono le uniche lunghezze d'onda possibili.

λ_n si dicono anche i "modi" di oscillazione della corda.

A queste λ_n corrispondono le frequenze:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} = 0, \frac{v}{2L}, \frac{v}{L}, \dots$$

Quindi una corda tesa può oscillare solamente in un numero discreto (ma infinito) di modi.

La velocità delle onde in una corda di tensione T e massa per unità di lunghezza μ è $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ quindi

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

La frequenza per $n=1$, $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ è detta FREQUENZA FONDAMENTALE, o PRIMA ARMONICA

$f_2 = 2 f_1$ è la SECONDA ARMONICA, e

$f_n = n f_1$ è la n-esima ARMONICA.

Nota che le frequenze possono essere variate modificando L o T, oppure usando corde con diversa μ.

Sovrapposizione di onde di frequenza diversa:

i battimenti:

$$y_1 = A \sin(kx - \omega_1 t)$$

$$y_2 = A \sin(kx - \omega_2 t) \qquad \text{con } \omega_1 \neq \omega_2$$

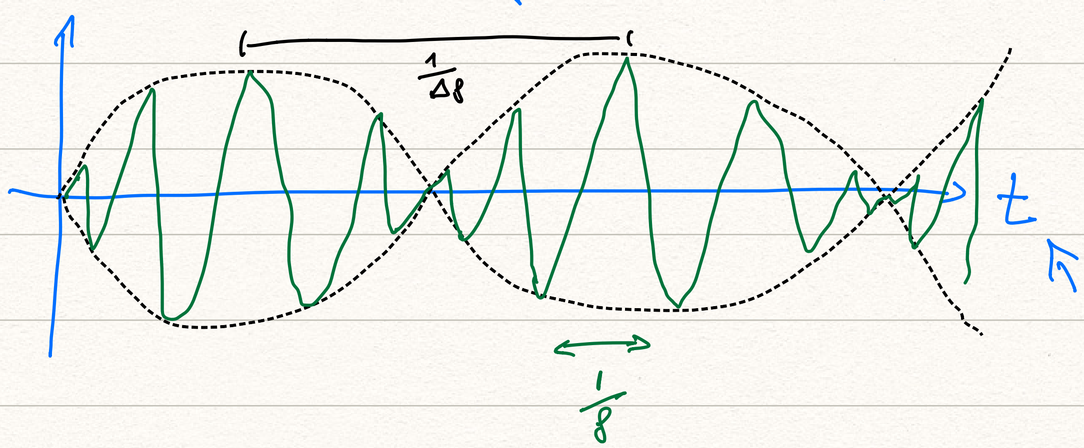
$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(kx - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Se le due frequenze sono quasi uguali, possiamo scrivere

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi (f + \Delta f)$$
$$\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi (f - \Delta f) \quad \text{con } \Delta f \ll f$$

Quindi $$y = 2A \cos(2\pi \Delta f t) \sin(kx - 2\pi f t)$$

L'onda risultante è quindi la sovrapposizione di due oscillazioni: una "rapida" di frequenza f, e una "lenta" di frequenza Δf.



$$\boxed{\Delta f \text{ è la FREQUENZA DI BATTIMENTO}}$$