Argomento n° 6

# Il moto circolare e altre applicazioni delle leggi di Newton.

Abbiamo già visto che un moto circolare uniforme è caratterizzato da una accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} \,,$$

diretta verso il centro della traiettoria. Per poter realizzare questo moto è quindi necessario avere un'interazione che dia luogo a una forza tale che

$$\vec{F} = m\vec{a}_c = -m\frac{v^2}{r}\,\hat{r}.$$

Questa forza può essere di varia natura: la tensione di una fune, la forza gravitazionale, una forza elettrica o magnetica...

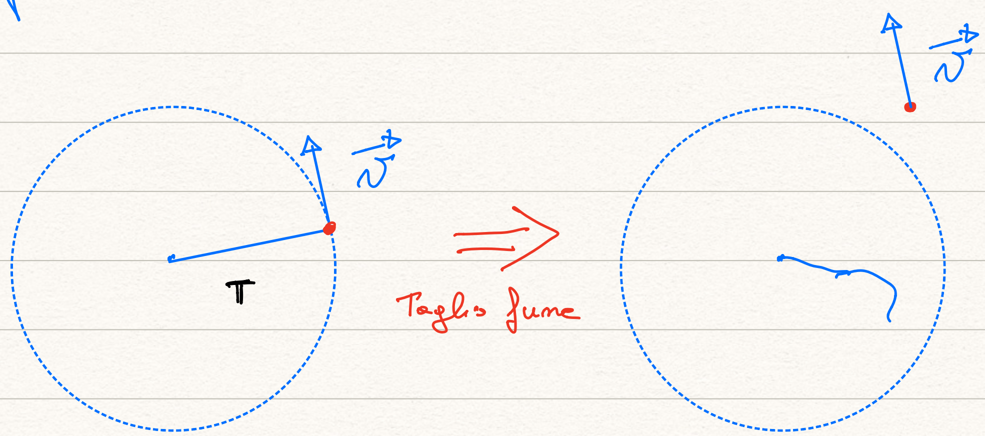
$$\vec{F}_g = -\frac{mM}{r^2}\,G_N\,\hat{r}, \quad \text{(forza gravit.)}$$

$$\vec{F}_e = -\frac{qQ}{r^2}\,\hat{r} \quad \text{(forza elettrica)}$$

$$\vec{F}_T = - T\,\hat{r} \qquad \text{(Tensione)}$$

$$\vec{F}_B = - q v B\,\hat{r} \qquad \text{(Forza di Lorentz in un campo Magnetico } B\text{)}$$

In assenza di interazioni $\Rightarrow$ moto rettilineo uniforme.




Es: Calcolo la velocità dell'orbita di un pianeta a distanza R dal sole (approssimando l'orbita come circolare).

$$\cancel{m}\frac{v^2}{R} = G_N \frac{M \cancel{m}}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G_N M}{R}}$$

$M = M_{SUN} = 2.0 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$

$G_N \simeq 6.7 \cdot 10^{-11}\,m^3\,kg^{-1}/s^2$

Terra: $R = R_{TERRA} = 1.50\cdot10^{8}$ km

$$\Rightarrow v_{TERRA} = \left(\frac{6.7\cdot10^{-11}\;2.0\cdot10^{30}}{1.50\cdot10^{11}}\right)^{1/2} m/s$$

$$\simeq \left(9\cdot10^{8}\right)^{1/2} m/s \simeq 30\ km/s$$

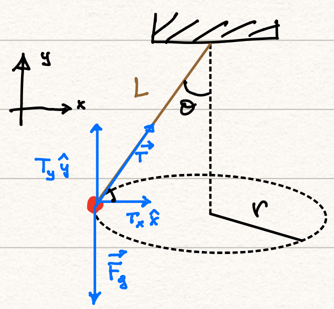
Mercurio: $R = R_{MERCURIO} = 5.7\cdot10^{7}$ km

Nota che $v \propto R^{-1/2}$, quindi:

$$\frac{v_{MERCURIO}}{v_{TERRA}} = \left(\frac{R_{TERRA}}{R_{MERCURIO}}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{15}{5.7}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow v_{MERC} \simeq 1.6\, v_{TERRA} \simeq 49\ km/s$$

<u>ESEMPIO</u>: Pendolo conico:




$$T_y = T\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right) = T\cos\theta$$
$$T_x = T\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right) = T\sin\theta$$

asse y: $\quad T_y - F_g = 0 \;\Rightarrow\; T\cos\theta = mg$

No accelerazione

asse x (direzione radiale): $\quad T_x = m a_c \;\Rightarrow\; T\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$

prendiamo il rapporto tra la seconda equazione e la prima: $\quad \tan\theta = \dfrac{v^2}{rg} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{rg \cdot \tan\theta}}$

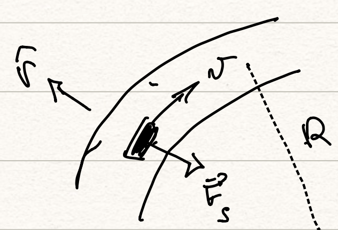
poiché $L\sin\theta = r$, abbiamo anche

$$\boxed{v = \sqrt{Lg \sin\theta \tan\theta}}$$

non dipende dalla massa!

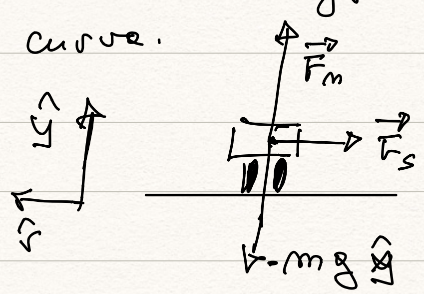
Fissata la $L$, dipende solo dall'angolo.

<u>ESEMPIO</u>: Velocità massima in curva.




- Auto di massa $M = 1500\,kg$
- $R = 35.0\ m$
- $\mu_s = 0.523$ coeff di attrito statico

trovare $v_{MAX}$ affinché gli pneumatici tengano in curva.




$$\vec{F}_s = -M\, a_c\, \hat{r}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$-\mu_s F_n\, \hat{r} \qquad -M\frac{v^2}{R}\,\hat{r}$$

$$\vec{F}_n - Mg\,\hat{y} = 0 \Rightarrow F_n = Mg$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{\mu_s F_n R}{M} = \frac{\mu_s M g R}{M} = \mu_s g R$$

se $\quad v > \sqrt{\mu_s g R} = v_{MAX}$ , l'asfalto e la gomma non tengono

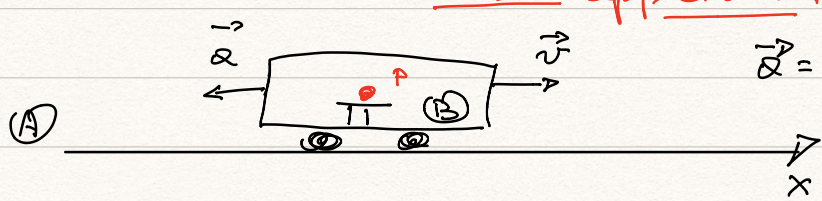
$$v_{MAX} = \sqrt{0.523 \cdot 9.80 \cdot 35.0} \ \ m/s =$$

$$= 13.4 \ m/s = 48.2 \ km/h$$

Nota che $v_{MAX}$ NON DIPENDE DALLA MASSA!

Moto visto da sistemi di riferimento NON inerziali.

$\rightarrow$ Forze apparenti:




$\vec{a} = -a\hat{x}$

Il treno viaggia con velocità $\vec{v}$ verso $\hat{x}$, ma decelera con $\vec{a}$ rivolto verso $-\hat{x}$.

$$\vec{a}_{PA} = \frac{\vec{F}}{m} = 0 \qquad \left( \begin{array}{l} \text{asse } x: \text{ Nessuna forza} \\ \text{asse } y: -mg + F_n = 0 \end{array} \right)$$

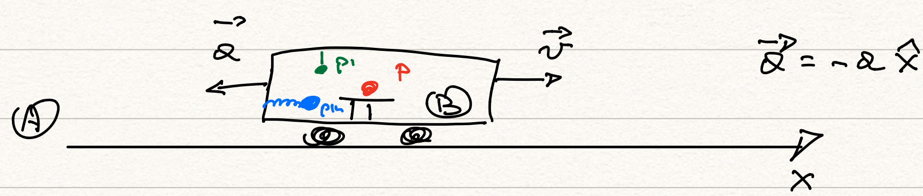
(Trascuriamo le forze di attrito tra P e il tavolo)

Visto da (B) : $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$

$\vec{a}_{PA} = 0$

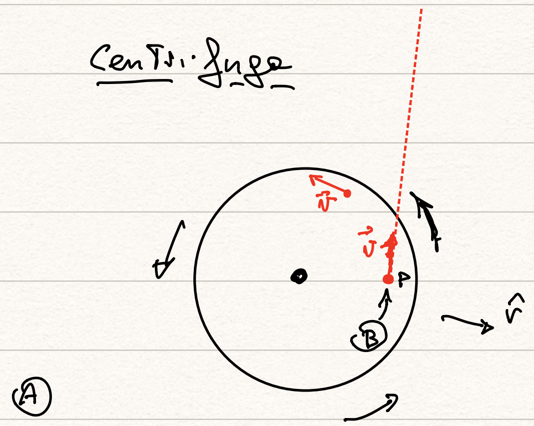
$\Rightarrow \vec{a}_{PB} = -\vec{a}_{BA} = -\vec{a} = a\hat{x}$

(B) osserva una accelerazione in avanti pari ad $a$ in modulo. NON è una forza! Ma è l'effetto dell'essere un osservatore non inerziale. Dato che (B) osserva un'accelerazione $a\hat{x}$ questa è equivalente all'effetto che avrebbe una forza $m_P a \hat{x}$ in un riferimento inerziale $\rightarrow$ FORZA APPARENTE




(B) osserva su tutti i corpi, una accelerazione $a\hat{x}$ che non è dovuta a nessuna interazione.

**ESEMPIO:** Centrifuga




$\vec{a}_{PA} = 0$ P segue la sua traiettoria tangenziale

Visto da B $\quad \vec{a}_{PB} = -\vec{a}_{BA} = -\left(-\frac{v^2}{r}\hat{r}\right) = +\frac{v^2}{r}\hat{r}$

→ accelerazione verso l'esterno (centrifuga)

$m\frac{v^2}{r}\hat{r}$ → "forza" centrifuga.

**Resistenza dei fluidi:** Il moto di un corpo in un fluido (es: acqua, aria, olio, ...) è soggetto a una forza frenante $\vec{R}$ che è diretta in direzione opposta alla velocità del corpo rispetto al fluido, e il cui modulo, $|\vec{R}|$ dipende dal modulo della velocità.

Questa dipendenza può essere di vario tipo, a seconda del tipo di fluido, della velocità, delle dimensioni dell'oggetto. Considereremo solo due situazioni semplificate:

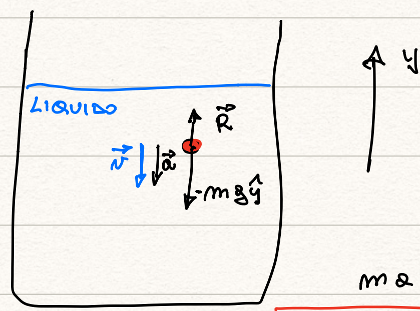
1) Forza frenante proporzionale alla velocità relativa:

$$\vec{R} = -b\,\vec{v}$$

$b > 0$ dipende dal fluido

$\vec{v}$ velocità del corpo rispetto al fluido

Questo tipo di legge approssima bene il comportamento a piccole velocità, o per corpi molto piccoli (es: grani di polvere in acqua).




$$R - mg = ma$$
$$\overset{\shortparallel}{bv - mg}$$

$$ma = mg - bv$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$\rightarrow v(t)$ SOLUZIONE

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)$$

$$v(t=0) = 0$$

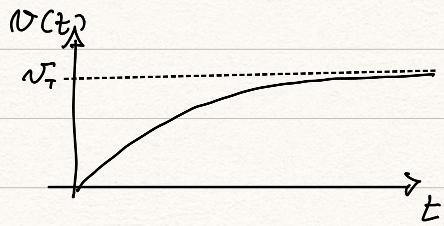
$$v(t \to \infty) = \frac{mg}{b} \quad \text{velocità limite} \equiv v_T$$

[ Verifica che sia una soluzione:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \frac{mg}{b}\left(0 + \frac{b}{m}e^{-bt/m}\right) = g e^{-\frac{bt}{m}} \\ g - \frac{b}{m}v = g - g\left(1 - e^{-bt/m}\right) = g e^{-bt/m} \end{array}\right\} \text{ok!}$$
]

Possiamo scrivere la soluzione come

$$v(t) = v_T\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \text{con } \tau = \frac{m}{b} = \frac{v_T}{g}$$




2) $\vec{R}$ proporzionale a $v^2$: Vale per corpi che si muovono ad alta velocità; corpi grandi (es. paracadutisti...)

$$|\vec{R}| = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

D: costante empirica da misurare "COEFFICIENTE DI ATTRITO VISCOSO"

$\rho$: densità del fluido

A: area della sezione trasversale del corpo.

$v$: velocità relativa

$$mg - \frac{1}{2} D\rho A v^2 = \frac{dv}{dt}$$

Velocità limite: $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}}$