Argomento #8 Conservazione dell'Energia

* Trasferimenti di energia
* Principio di conservazione dell'energia
* Potenza.

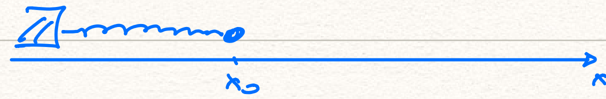
—o—o—

Abbiamo visto che, nel caso in cui le uniche forze agenti su un sistema siano CONSERVATIVE, è possibile definire una energia potenziale U, tale che la somma

$$E_{mec.} = K + U,$$

chiamata "energia meccanica" del sistema, si conserva, cioè ha lo stesso valore in ogni fase del moto, cioè $\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0$, dove $\Delta E_{mec} = E^f_{mec} - E^i_{mec}$, $\Delta K = K^f - K^i$, $\Delta U = U^f - U^i$.

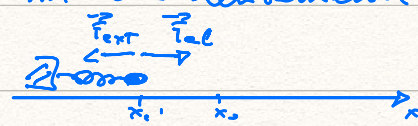
Consideriamo ancora una volta il sistema "molla + massa":



$$E_{mec} = K(x) + U(x) = K(x_i) + U(x_i) = \text{costante}.$$

Consideriamo una situazione in cui $K(x_0) = U(x_0) = 0$. Allora $E_{mec} = 0$.

Se da questa situazione comprimo la molla lentamente fino a $x_i' < x_0$ l'energia meccanica è:



$$E'_{mec} = \underbrace{K(x_i')}_{\simeq 0} + U(x_i') = \frac{1}{2} k(x_i' - x_0)^2 > E_{mec}.$$

Quindi l'energia meccanica non si è conservata. Perché? Perché per comprimere la molla abbiamo dovuto esercitare una forza sul sistema "massa + molla" e quindi compiere, dall'esterno, un lavoro: $W_{ext} = \int_{x_0}^{x_i} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{x} = +\frac{1}{2}k(x_i - x_0)^2$

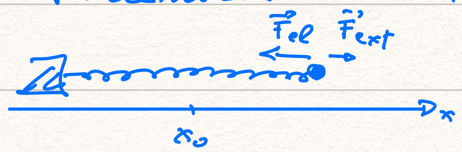
$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{el} = +k(x - x_0)\hat{x}$

Nota che il lavoro della forza esterna va nel verso dello spostamento, e quindi e' positivo!

Come risultato di questo lavoro dall'esterno, l'energia meccanica della molla e' aumentata esattamente della quantità W_{ext}:

$$\Delta E_{mec} = E'_{mec} - E_{mec} = \frac{1}{2}k(x_i - x_0)^2 = W_{ext}$$

Vediamo che il lavoro compiuto dall'esterno sul sistema può essere visto come un TRASFERIMENTO DI ENERGIA dall'esterno, che cambia l'energia meccanica totale. Notiamo che il lavoro dall'esterno può essere positivo, come nell'esempio appena considerato, ma anche negativo, per esempio se applico una forza per rallentare una molla in movimento:



$\Rightarrow \Delta E_{mec} = W_{ext} < 0$

Abbiamo anche visto una relazione tra la variazione di energia cinetica e il lavoro compiuto sul sistema dalla somma delle forze che agiscono su di esso:

$$\Delta K = W_{tot}$$

Questa rimane sempre vera, ma attenzione che K e' l'energia cinetica della massa, e in W_{TOT} dobbiamo includere tutte le forze, cioè, in questo caso, quella elastica e quella esterna, non solo quella esterna. Per esempio, se comprimiamo la molla lentamente da x_0 a x_1, $\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{el} = 0$

$$\Rightarrow W_{TOT} = 0 \Rightarrow K(x_1) = \underbrace{K(x_0)}_{=0} + \underbrace{W_{TOT}}_{=0} = 0. \quad \text{OK!}$$
$$\Rightarrow \Delta K = 0$$

Se avessimo scritto erroneamente $\Delta K = W_{ext} > 0$, avremmo trovato $K(x_1) = W_{ext} > 0$.

Altre forme di trasferimento di energia: Oltre al lavoro meccanico, cioè eseguito da una forza, l'energia può essere trasferita anche attraverso altri tipi di processi:

Onde meccaniche: esempio, onde acustiche, onde elastiche

TSUNAMI'

Calore: conduzione, irraggiamento, convezione

Trasferimento di materia: es rifornimento del serbatoio dell'automobile, batterie...

Conduzione di elettricità: qualunque apparecchio elettrico

...

Possiamo quindi esprimere il risultato trovato precedentemente includendo tutte le possibili forme di trasferimento di energia, oltre al lavoro esterno:

$$\underbrace{\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}}_{\substack{\text{variazione dell'}\\ \text{energia del sistema}}} = \underbrace{\overbrace{W}^{\text{Lavoro delle forze esterne}} + \overbrace{Q}^{\text{Calore}} + \overbrace{\dots}^{\text{altre forme di trasferimento di energia}}}_{\substack{\text{Energia trasferita}\\ \text{dall'esterno sul sistema}\\ (\text{può essere} >, <, = 0)}}$$

A membro di sinistra, oltre ai noti ΔK e ΔU, abbiamo aggiunto ΔE_{int}, la variazione di energia interna che può essere associata a variazioni dello STATO del sistema (p.es. gas → liquido), a sue deformazioni, ecc. Vedremo caso per caso se attribuire un valore non nullo a ΔE_{int}.

La relazione in rosso va sotto il nome di "PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA". In altri termini, esso indica che l'energia non si crea né si distrugge, essa può solamente venire trasferita da un sistema a un altro. E' UN PRINCIPIO fondato sull'osservazione sperimentale: non si è mai osservato un processo in cui venisse creata energia dal nulla, o viceversa, in cui energia venisse distrutta.

Esempio: Una pietra di massa m viene lasciata cadere da un'altezza h.
Una seconda pietra, di massa $2m$ viene lasciata cadere

della stessa altezza. Quale sarà l'energia cinetica della seconda pietra quando raggiunge il suolo?

a) uguale a quella della prima pietra, b) $\frac{1}{4}$ della prima

c) 2 volte la prima, d) 4 volte la prima.

Nota: sistema isolato: $W = Q = \dots = 0 \Rightarrow E = K + U = \text{costante}$

1^a pietra: $E^1_{TOT} = E^1_{in} = K^1_{in} + U^1_{in} = mgh \Rightarrow E^1_{fin} = K^1_{fin} + U^1_{fin} = K^1_{fin}$

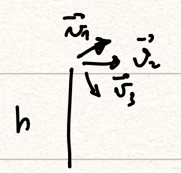
$K^1_{in} = 0$, $E^1_{fin} = E^1_{in}$, $U^1_{fin} = 0$

$$\Rightarrow K^1_{fin} = E^1_{in} = mgh$$

2^a pietra: $E^2_{TOT} = E^2_{in} = 2mgh \Rightarrow K^2_{fin} = E^2_{in} = 2mgh$

$$\Rightarrow \boxed{K^2_{fin} = 2K^1_{fin}}$$

<u>Esempio</u>: Lanciamo 3 palle identiche da un'altezza h con velocità uguali in modulo, ma diverse in direzione.



$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}_3|$

→ Dire quale delle tre arriva al suolo con la velocità maggiore in modulo e quale con velocità più piccola.

$$E_1^{in} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh, \quad E_2^{in} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh, \quad E_3^{in} = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgh$$

$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}_3| \Rightarrow E_1^{in} = E_2^{in} = E_3^{in} = E^{in}$

Conservazione dell'energia $\rightarrow E_1^{fin} = E_1^{in}, \ E_2^{fin} = E_2^{in}, \ E_3^{fin} = E_3^{in}$

$$\Rightarrow E_1^{fin} = E_2^{fin} = E_3^{fin} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2$$

$\Rightarrow v_1^{fin} = v_2^{fin} = v_3^{fin}$. Arrivano tutte e 3 con la stessa velocità in modulo

Palla 1: $\uparrow v$

$$v_y^1 = v - gt$$

$$y = h + vt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - vt - h = 0 \qquad \Delta = \sqrt{v^2+2gh}$$

$$t_{1,2} = \frac{v \mp \Delta}{g} \xrightarrow[+]{} \frac{v+\sqrt{v^2+2gh}}{g} \equiv \bar{t}$$

$$\Rightarrow v_y^1(y=0) = v - g\bar{t} = -\sqrt{v^2+2gh}$$

$$v_x^1(y=0) = 0 \qquad \Rightarrow (v_x^1)^2 + (v_y^1)^2 = v^2+2gh$$

Palla 3: $\downarrow v$

$$v_y^3 = -v - gt$$

$$y = h - vt - \frac{1}{2}gt^2 \underset{y=0}{\Rightarrow} \frac{1}{2}gt^2 + vt - h = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2+2gh}}{g} \xrightarrow[+]{} \tilde{t} = \frac{-v+\sqrt{v^2+2gh}}{g}$$

$$v_y^3(y=0) = -v - g\tilde{t} = -\sqrt{v^2+2gh}$$

$$v_x^3(y=0) = 0 \qquad \Rightarrow |\vec{v}^3|^2 = v^2+2gh$$

Palla 2: $\overset{v}{\rightarrow}$

$$v_x^2 = v$$

$$v_y^2 = -gt$$

$$y=0 \Rightarrow h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow \hat{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$y=0 \Rightarrow v_x^2(y=0) = v$$

$$v_y^2(y=0) = -g\hat{t} = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow (v_x^2)^2 + (v_y^2)^2 = v^2+2gh$$

Usando le equazioni del moto troviamo lo stesso risultato, ma con un procedimento molto più lungo (e denso di insidie di calcolo!).

Sistemi con attrito dinamico.

L'attrito dinamico è una forza agente sul sistema e quindi il lavoro che esso compie, sempre negativo, deve essere incluso nel teorema dell'energia cinetica:

$$\boxed{\Delta K = W_{TOT} = \sum_{\substack{int\\+\\ext}} W_{\substack{forze\\non\ attrito}} + W_{attrito}} \qquad (*)$$

Se consideriamo l'attrito come una forza interna al sistema allora esso non va aggiunto al termine di destra della legge di conservazione dell'energia:

$$\boxed{\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = \sum_{ext} W_{\substack{forze\\non\ attrito}} + Q + \dots}$$

In questo caso, se il sistema è isolato $\left(\sum_{ext} W_{\substack{forze\\non\ attrito}} = Q = \dots = 0 \right)$, si ha:

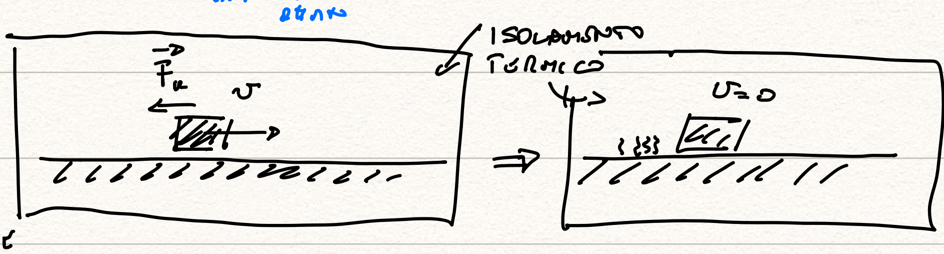
$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$$

e, usando la (*)

$$\sum_{int} W_{\substack{non\\attrito}} + W_{attrito} + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$$

ESEMPIO:

SISTEMA = MASSA + SUPERFICIE



$$\Rightarrow \Delta U = \sum_{int} W_{\substack{non\\attrito}} = 0 \quad \Rightarrow \Delta E_{int} = - W_{attrito} = \frac{1}{2} m v^2$$

$\Rightarrow$ Tramite la forza di attrito, l'energia cinetica iniziale si è convertito in energia interna → calore del sistema.

Nota Bene: è importante definire con chiarezza qual è il sistema e identificare tutte le forze, interne ed esterne, il ruolo degli attriti, e i meccanismi di trasferimento del calore

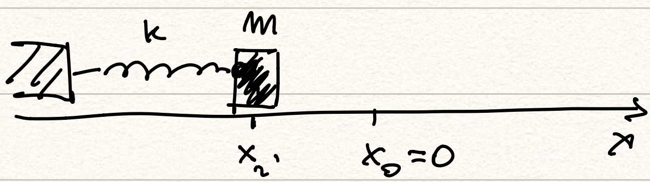
Esempio: Un'automobile si muove a velocità v. Frenando completamente si ferma dopo una distanza d. Stimare la distanza dopo la quale si ferma se la velocità iniziale è $2v$.

$$K_{in} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad K_f = 0$$

$$\underset{-\frac{1}{2} m v^2}{\Delta K} = W_k \simeq -F_k d \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{m}{2F_k} v^2}$$

$$\boxed{v \to 2v \quad \Rightarrow d \to 4d}$$

Esempio:



$v_i = 0$

$x_i = -2.0$ cm

$M = 1.6$ kg

$K = 1000$ N/m

1) Senza attrito, trovare la velocità in $x_0 = 0$.

No forze esterne: (No E_{int}) $\quad \Delta K + \Delta U = 0$

$K_i = 0 \quad U_i = \frac{1}{2} K x_i^2$

$K_f = \frac{1}{2} M v_f^2 \quad U_f = 0$

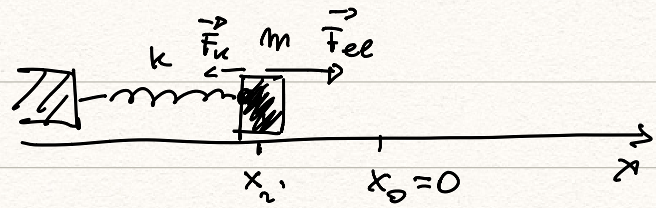
$$\Rightarrow \quad v_f = x_1' \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{10^3}{1.6}} \ m/s = 0.50 \ m/s$$

2) Con attrito dinamico di 4N, trovare v in $x = 0$.

Teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta K = W_{TOT} = W_{el} + W_{attrito}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0$$



$$W_{el} = -\int_{x_1'}^{0} k(x - x_0)\, dx = \frac{1}{2} k (x_1' - x_0)^2 \qquad > 0$$

$$= U(x_1') - U(x_0 = 0)$$

$$W_{attrito} = + F_k \cdot (x_1' - x_0) \qquad < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} k x_1'^2 + F_k \cdot x_1'$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{k}{m} x_1'^2 + \frac{2 F_k}{m} x_1'} = \sqrt{\frac{10^3 (2 \cdot 10^{-2})^2}{1.6} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{1.6}} = 0.39 \ m/s$$

Potenza: Misura la quantità di lavoro/energia nell'unità di tempo:

$$P = \frac{dE}{dt} \quad \left(= \frac{dW}{dt} \right)$$

dove E è ~~qualunque~~ può essere forma di energia: lavoro meccanico, calore, ...

Si misura in $\boxed{Joule/sec = Watt}$ UNITA' DI MISURA DELLA POTENZA

Nota che Watt · secondo è una misura di ENERGIA, NON di potenza.

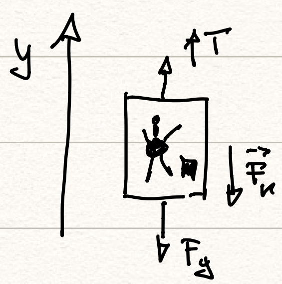
Si usa spesso il kWh = chilowattora

$$\boxed{1\,kWh = 10^3\,W\cdot(3600\,s) = 3.60\cdot 10^6\,W\cdot s = 3.60\cdot 10^6\,J}$$

Nota che usando $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ abbiamo che la potenza sviluppata da una forza $\vec{F}$ può essere espressa come

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{v}}_{\text{prodotto scalare di forza e velocità}}}$$

Esempio: Ascensore con forza di attrito.



$M_{asc} = 1600\,kg$ ascensore

$M_p = 200\,kg$ carico

$\vec{F}_k = -4\cdot 10^3\,N\,\hat{y}$

Trovare la potenza necessaria a sollevare l'ascensore alla velocità $\vec{v} = 3.\,m/s\,\hat{y}$.

$$T - F_k - F_g = 0 \qquad T = (4\cdot 10^3 + (1800)\cdot 9.80)\,N$$
$$= 21640\,N$$

$$P = T \cdot v = 21640 \cdot 3.0 \text{ W} = 64920 \text{ W} = 6.48 \cdot 10^4 \text{ W}$$