Lezione #2

CINEMATICA

* moto di un "punto materiale" in una dimensione
* spostamento, velocità, accelerazione.
* caduta libera ___ o ___

Per "CINEMATICA" si intende lo studio del moto, indipendentemente dalle sue cause (→ dinamica).

Per cominciare, considereremo la situazione più semplice immaginabile: il moto di un punto lungo una linea retta.

Non dovremo così occuparci della forma del corpo, o dei possibili cambi di direzione.

Più avanti vedremo situazioni più complesse (2 e 3 dimensioni; corpi non puntiformi...) ma per fissare i concetti base questo è un ottimo punto di partenza.

Per descrivere questo moto abbiamo bisogno di un RIGHELLO (o un metro...) e di un OROLOGIO, cioè di un SISTEMA DI RIFERIMENTO SPAZIO-TEMPORALE

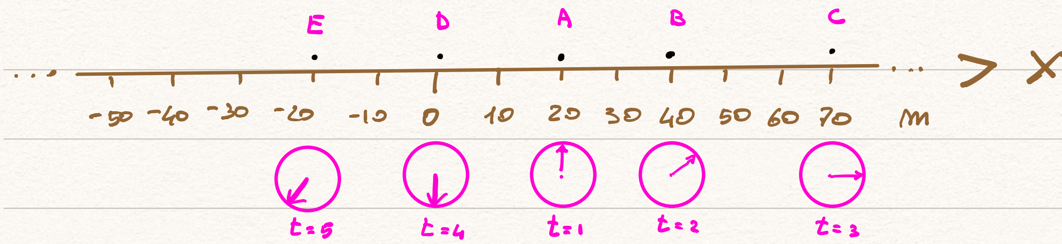
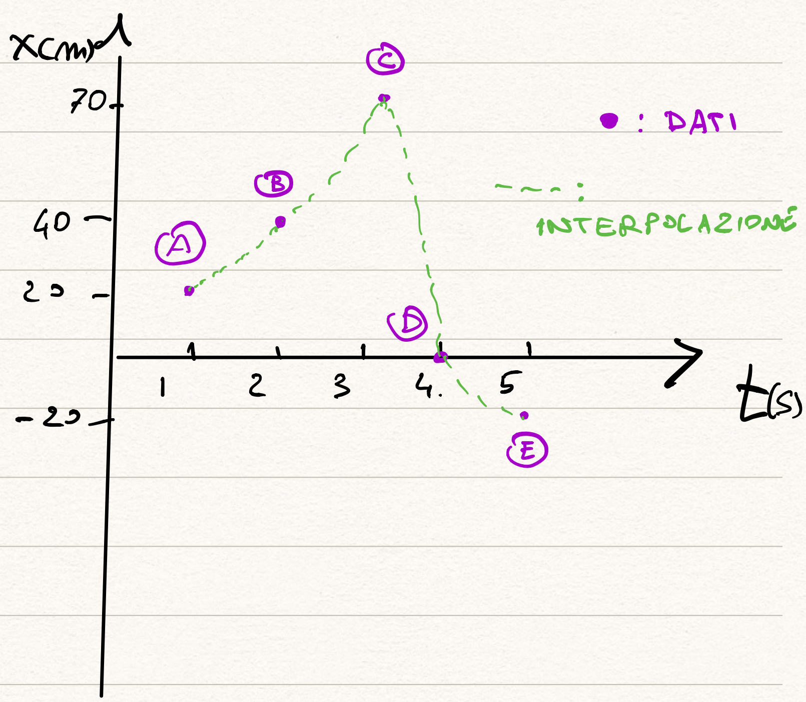


TABELLA ORARIA:

POSIZIONE	t(s)	x(m)
A	1	20
B	2	40
C	3	70
D	4	0
E	5	-20

GRAFICO SPAZIO-TEMPO



Nota che la posizione nei punti Ⓐ, Ⓑ,... dà una descrizione incompleta del moto, come se scattassimo delle fotografie ad intervalli di 1 secondo. Riducendo l'intervallo tra le foto avremmo una descrizione sempre più completa.

$$\boxed{\text{SPOSTAMENTO TRA (A) e (B)}: \Delta x_{BA} \equiv x_B - x_A = x(t_B) - x(t_A)}$$

In questo caso $x_A = 20\,m$, $x_B = 40\,m$ $\Longrightarrow$ $\Delta x_{BA} = (40-20)\,m = 20\,m$

$(t_A = 1\ sec,\ t_B = 2\ sec)$

Analogamente: $\Delta x_{EB} = x_E - x_B = (-20-40)\,m = -60\,m$

$\Rightarrow$ Lo <u>SPOSTAMENTO</u> tra due istanti della traiettoria è la distanza tra le posizioni che aveva il punto materiale nei due istanti di tempo. Per convenzione lo spostamento è <u>positivo</u> se il punto si è spostato verso destra, <u>negativo</u> in caso contrario

<u>NOTA BENE</u>: 1) Lo spostamento ha un segno!

$\Delta x_{gi} = -5\,m$ è diverso da $\Delta x_{g'i'} = +5\,m$

2) Lo spostamento è diverso dalla distanza totale percorsa!

EX:

$\Delta x_{CA} = (5-5)\,m = 0\,m$, ma il punto ha percorso 5 m in avanti (segno +) per andare da (A) a (B) e 5 m indietro (segno −) per andare da B a C, cioè 10 m in totale. Attenzione a non fare confusione!

Osservando le tabelle orarie, ci rendiamo conto che, nei diversi tratti, lo spostamento differisce sia per segno che per valore assoluto. → CAMBIA LA VELOCITÀ.

VELOCITÀ MEDIA TRA A e B: $v_{BA} = \dfrac{\Delta x_{BA}}{\Delta t_{BA}}$

dove $\Delta t_{BA} = t_B - t_A$. $[v] = [x][t]^{-1} = LT^{-1}$

La velocità si esprime in m/s.

Nel nostro esempio: $v_{BA} = \dfrac{(40-20)\,m}{(2-1)\,s} = 20\ m/s$

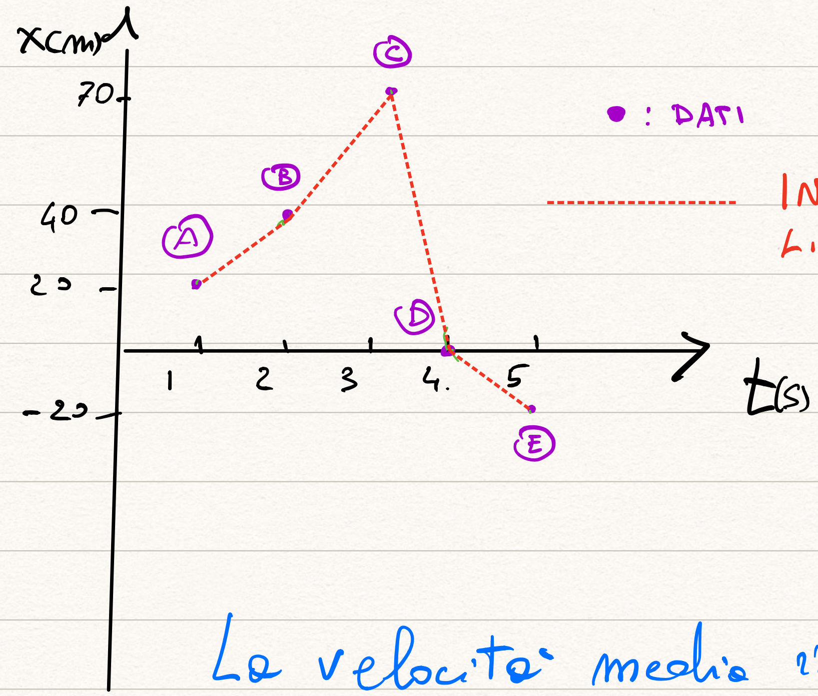
$$v_{EB} = \frac{(-20-40)\,m}{(5-2)\,s} = -20\ m/s$$

$$v_{EC} = \frac{(-20-70)\,m}{(5-3)\,s} = -45\ m/s$$

Aggiungiamo alla tabella oraria una colonna con le velocità medie tra intervalli successivi:

TABELLA ORARIA:

POSIZIONE	$t\,(s)$	$x\,(m)$	$v\,(m/s)$
A	1	20	
			20
B	2	40	
			30
C	3	70	
			-70
D	4	0	
			-20
E	5	-20	



La velocità media in un intervallo è data dalla PENDENZA del segmento corrispondente:

ex.:

$v = 0$

$v > 0$

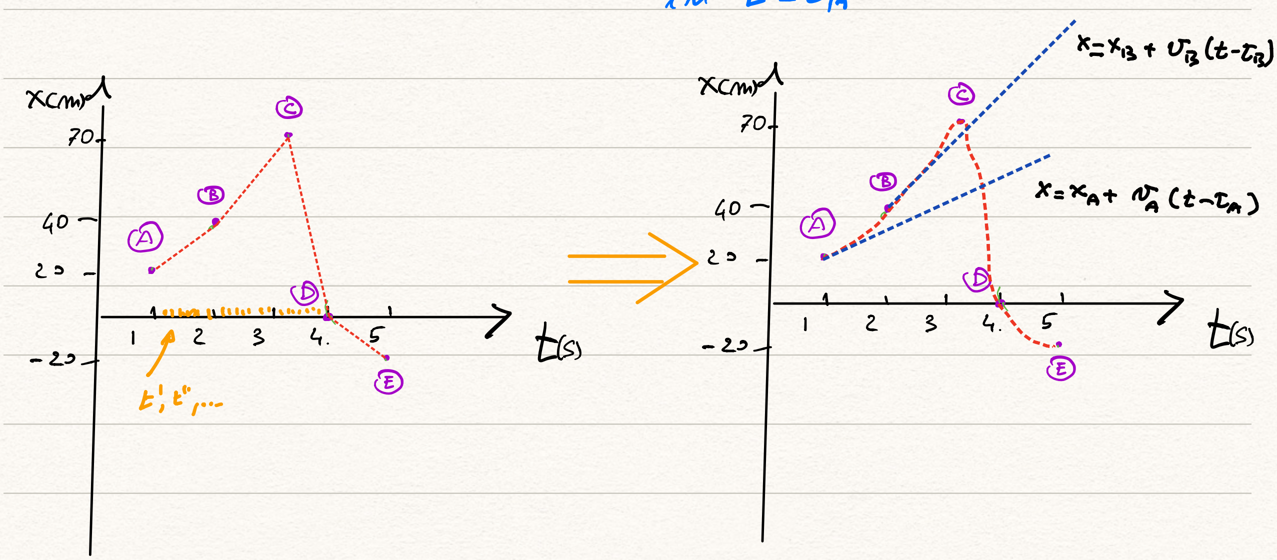
$v < 0$

Come già anticipato, per avere una descrizione più accurata del moto dobbiamo ridurre l'intervallo di tempo tra gli "scatti" di fotografie, tali da ridursi, al limite, a zero. In questo modo definiamo la

VELOCITÀ ISTANTANEA IN A :

$$\lim_{t'\to t_A} \frac{x(t')-x(t_A)}{t'-t_A} = v_A = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_A}$$

"derivata rispetto al tempo dello spostamento, valutata in $t=t_A$"



Nota bene: 1) Anche la velocità istantanea può essere positiva, negativa o nulla;

2) La velocità istantanea in un punto è la pendenza della retta tangente

alla curva spazio-tempo del moto in quel punto.

EX: $\bar{x}$, $\bar{t}$, $\bar{v}$ $\Rightarrow$ retta tangente in $(\bar{t}, \bar{x})$:

$$x(t) = \bar{x} + \bar{v}(t - \bar{t}) \qquad \left(\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=\bar{t}} = \bar{v} \right)$$

3) Anche la velocità istantanea si esprime in m/s.

Lo spostamento è una FUNZIONE del tempo:

$$x = f(t) = x(t).$$

Anche la velocità è una funzione del tempo:

$$v = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

In alcuni casi queste funzioni sono note e sono semplici:

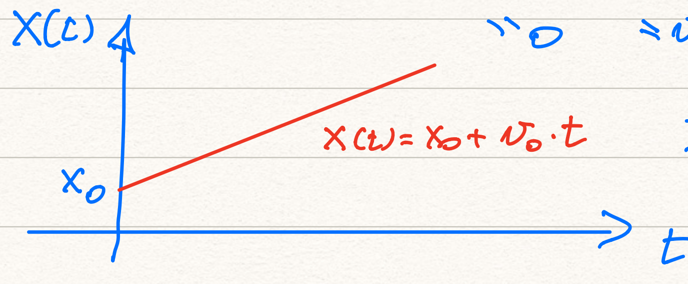
ESEMPI: 1) corpo fermo nel punto $x_0 \Rightarrow x(t) = x_0$ (costante)

$\rightarrow$ velocità al tempo t: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_0}{dt} = 0$

2) moto rettilineo e uniforme

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) \quad \text{con } v_0 = \text{costante}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dx_0}{dt}}_{=0} + \underbrace{\frac{d(v_0 t)}{dt}}_{=v_0} - \underbrace{\frac{d(v_0 t_0)}{dt}}_{=0} = v_0$$



Il grafico è una retta

Quando la velocità non è costante, ma varia nel tempo, il moto si dice "accelerato".

ACCELERAZIONE MEDIA TRA (A) e (C) : $a_{CA} \equiv \frac{v_{CB} - v_{BA}}{\Delta t_{CA}}$

$\left(\Delta t_{CA} = \frac{t_C + t_B}{2} - \frac{t_B + t_A}{2} \right)$

$[a] = [v][t]^{-1} = LT^{-1} \cdot T^{-1} = L \cdot T^{-2}$ si esprime in m/s^2

ES: $a_{CA} = \frac{(30-20)\,m/s}{\left(\frac{3+2}{2} - \frac{2+1}{2}\right)s} = 10\ m/s^2$

TABELLA ORARIA:

POSIZIONE	t(s)	x(m)	v(m/s)	a(m/s²)
A	1	20		
			20	
B	2	40		10
			30	
C	3	70		-100
			-70	
D	4	0		+50
			-20	
E	5	-20		

Nota che anche l'accelerazione può essere positiva (verso destra), negativa (verso sinistra) o nulla.

L'accelerazione rappresenta la variazione della velocità nel tempo. No accelerazione $\Longrightarrow$ velocità costante (moto uniforme).

Anche in questo caso, considerando intervalli di tempo sempre più piccoli, possiamo definire la

ACCELERAZIONE ISTANTANEA IN t_A:

$$a(t_A) = \lim_{t' \to t_A} \frac{v(t') - v(t_A)}{t' - t_A} = \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=t_A}$$

derivata prima della velocità rispetto al tempo valutata in $t = t_A$

Nota bene: poichè la velocità è la derivata prima rispetto al tempo dello spostamento, l'accelerazione è la DERIVATA SECONDA dello spostamento rispetto al tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Riprendiamo in esame i moti particolari già visti in precedenza e calcoliamo l'accelerazione:

1) CORPO FERMO IN x_0 : $x(t) = x_0$ $\quad v(t) = \frac{dx}{dt} = 0$

$$\hookrightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d(0)}{dt} = 0$$

2) MOTO RETTILINEO e UNIFORME : $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 = \text{cost.}$

$$\hookrightarrow a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv_0}{dt} = 0$$

L'accelerazione è nulla in entrambi i casi.
E' corretto, perché in entrambi i casi $v = v_0 = \text{cost.}$

Proviamo ad aggiungere alla velocità un termine dipendente dal tempo. Prendiamo il più semplice possibile, una dipendenza lineare da t :

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0) \qquad (*)$$

costanti

L'accelerazione in questo caso è :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dv_0}{dt}}_{=0} + \underbrace{\frac{d(a_0 t)}{dt}}_{=a_0} - \underbrace{\frac{d(a_0 t_0)}{dt}}_{=0}$$

$$= a_0 = \text{costante}$$

Quindi: $v(t) = v_0 + a_0(t-t_0)$ descrive un <u>MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO</u> (= accelerazione costante).

La legge per lo spostamento si ottiene aggiungendo un termine quadratico

$$x(t) = \underbrace{x_0 + v_0(t-t_0)}_{\text{moto uniforme}} + \underbrace{\frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2}_{\text{moto uniformemente accelerato}}$$

Per verificarlo, calcoliamo la velocità:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dx_0}{dt}}_{=0} + \underbrace{\frac{d(v_0(t-t_0))}{dt}}_{=v_0} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d(a_0(t-t_0)^2)}{dt}}_{=a_0(t-t_0)}$$

$$= v_0 + a_0(t-t_0)$$ come nell'eq. (*) ok!

[Abbiamo usato $\frac{d[(t-t_0)^2]}{dt} = 2(t-t_0)$]

[Ricorda che $\frac{d}{dt}(A(t-t_0)^n) = A\,n(t-t_0)^{n-1}$ se A, n costanti]

Riassumendo:

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO:

$a(t) = a_0, \quad v(t) = v_0 + a_0(t - t_0), \quad x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$

$$\Big\downarrow a_0 = 0$$

MOTO (RETTILINEO) UNIFORME:

$a(t) = 0, \quad v(t) = v_0, \quad x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0)$

$$\Big\downarrow a_0 = v_0 = 0$$

PUNTO A RIPOSO:

$a(t) = 0, \quad v(t) = 0, \quad x(t) = 0$

Questi sono i moti semplici. In generale però possiamo avere $a(t)$ non costante!

<u>Esempio</u>: La velocità di un punto materiale in moto lungo l'asse x varia nel tempo secondo l'espressione: $v(t) = v_0 - c\,t^2$, dove

$v_0 = 40\ m/s$

$c = 5\ m/s^3$

A) Trovare l'accelerazione <u>MEDIA</u> nell'intervallo di tempo tra $t = 0\ s$ e $t = 2.0\ s$.

B) Trovare l'accelerazione (istantanea) al tempo $t = 2.0\ s$

Per prima cosa, verifichiamo che la legge per la velocità sia corretta dal punto di vista dimensionale:

$v(t)$ deve essere una velocità: $[v(t)] = L \cdot T^{-1}$

v_0 è espresso in m/s, quindi va bene.

Anche ct^2 deve avere le dimensioni di una velocità:

$$[ct^2] = [c] \cdot T^2 = L \cdot T^{-1}$$

$$\Rightarrow [c] = L \cdot T^{-1} \cdot T^{-2} = L \cdot T^{-3}$$

$\Rightarrow$ c deve essere espresso in m/s^3. Ok!

A) $t_0 = 0\ s$ $\Rightarrow$ $v(t_0) = (40 - 5 \cdot 0)\ m/s = +40\ m/s$

$t_1 = 2.0\ s$ $\quad v(t_1) = (40 - 5 \cdot 2^2)\ m/s = +20\ m/s$

$$\Rightarrow a_{10} = \frac{(20-40)\ m/s}{(2.0-0)\ s} = -10\ m/s^2$$

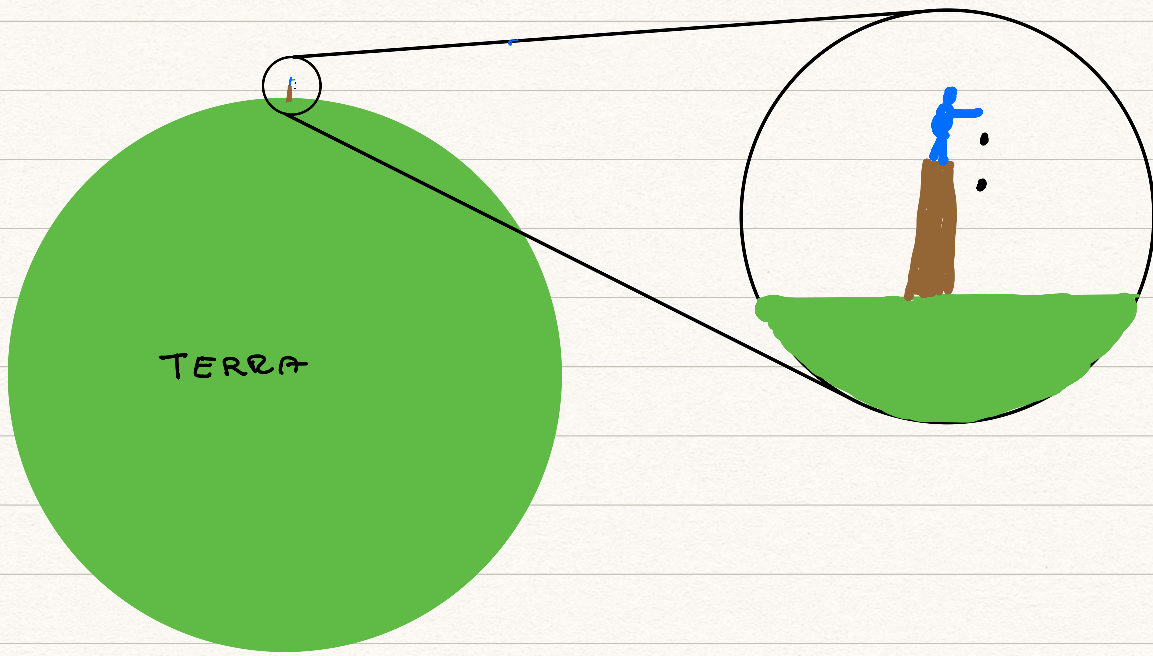
B) $$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(v_0 - ct^2)}{dt} = \frac{dv_0}{dt} - c\frac{dt^2}{dt} =$$

$$= -2ct$$

$$a(t_1) = -2ct_1 = -2 \cdot 5 \cdot 2\ m/s^3 \cdot s = -20\ m/s^2$$

CORPI IN CADUTA LIBERA.

Un esempio importantissimo di moto uniformemente accelerato è quello della caduta libera nel campo gravitazionale terrestre, considerando cadute su distanze << raggio terrestre, e trascurando la resistenza dell'aria.



Il risultato fondamentale fu ottenuto da Galileo Galilei (1564-1642): nelle condizioni citate sopra (no attrito e cadute su distanze << raggio Terra) tutti i corpi cadono verso il basso (centro della Terra) <u>con la stessa accelerazione</u>, indipendentemente dal loro peso, composizione chimica, ecc.

y

$a_y = -g$

verso il basso

$g = 9.80\ m/s^2$ <u>ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ</u>

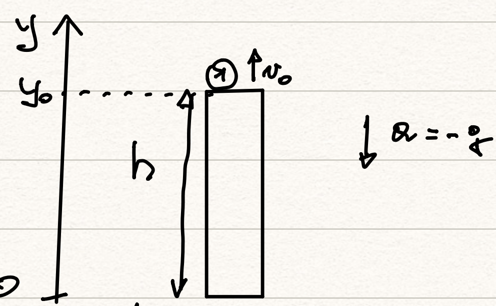
Nota bene: se la velocità iniziale del corpo è nulla o diretta lungo l'asse y, si tratta di un moto UNIDIMENSIONALE lungo l'asse y.

In questo caso le equazioni rilevanti sono le stesse già viste per il moto uniformemente accelerato, con $a_0 = -g$:

$$y(t) = y_0 + v_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$

$$v(t) = v_0 - g(t - t_0)$$

Esempio: Dal tetto di un palazzo alto 50 m viene lanciata una pietra verso l'alto, con velocità 20 m/s.



A) dopo quanto tempo la pietra raggiunge l'altezza massima?

B) a quale altezza massima arriva la pietra?

C) a che velocità la pietra ripassa vicino al tetto del palazzo?

D) Trovare velocità e posizione della pietra dopo 5 s dal lancio.

Dai dati del problema: $y_0 = h = 50\ m$,

$v_0 = +20\ m/s$

$a_0 = -g = -9.80\ m/s^2$.

Conviene scegliere $t_0 = 0\ s$.

A) Altezza massima per $t = t_1$, tale che $v(t_1) = 0$

$$v(t_1) = v_0 - g t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{20\ m/s}{9.80\ m/s^2} = 2.04\ s$$

3 cifre signif.

B) Altezza massima raggiunta $= y(t_1)$

$$y(t_1) = y_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$
$$= \left(50 + 20 \times 2.04 - \frac{1}{2} 9.80 \times (2.04)^2\right) m = 70.4\ m$$

C) Ripassa al livello del tetto ad un tempo t_2, tale che $y(t_2) = y_0$ (stessa quota che alla partenza)

$$y(t_2) = y_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = y_0$$

$$\Rightarrow v_0 t_2 = \frac{1}{2} g t_2^2$$

$t_2 = 0$ ← partenza

$t_2 = \frac{2 v_0}{g}$ ← passaggio

La velocità al tempo t_2 è

$$v(t_2) = v_0 - g t_2 = v_0 - g \times \frac{2 v_0}{g} = - v_0 = - 20 \, m/s$$

→ NOTA: RIPASSA CON LA STESSA VELOCITÀ CON CUI È STATO LANCIATO, MA CON SEGNO OPPOSTO!

D) Al tempo $t_3 = 5.00 \, s$, la velocità è

$$v(t_3) = v_0 - g \cdot t_3 = (+20.0 - 9.80 \times 5.00) \, m/s$$
$$= -29.0 \, m/s$$

e la posizione è

$$y(t_3) = y_0 + v_0 t_3 - \frac{1}{2} g t_3^2 =$$

$$= \left(50 + 20 \times 5.00 - \frac{1}{2} \times 9.80 \times (5.00)^2\right) m$$
$$= 27.5 \, m$$