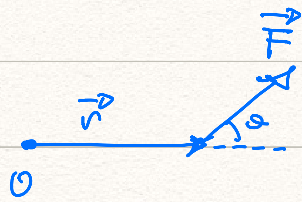
Argomento # 12 Il momento angolare

- Prodotto vettoriale
- Momento di una forza e momento angolare
- Conservazione del momento angolare in un sistema isolato
- Mom. angolare di un corpo rigido

— o — o —

Ricordiamo la definizione di momento di una forza rispetto a un punto:



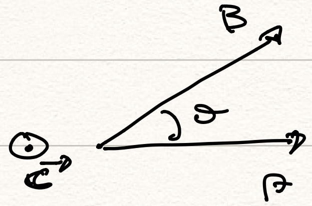
$$\tau = rF\sin\theta$$

inoltre abbiamo assegnato segno + nel caso in cui la forza causi una accelerazione tangenziale in verso antiorario, e − nel caso opposto. E' naturale definire τ come un vettore, perpendicolare al piano formato da $\vec{r}$ e $\vec{F}$ e avente verso uscente dal foglio se $\tau > 0$ ed entrante se $\tau < 0$. Questa definizione, che sarà utile nel caso in cui la rotazione non avvenga sempre nello stesso piano, si può formalizzare tramite la definizione di PRODOTTO VETTORIALE TRA DUE VETTORI.

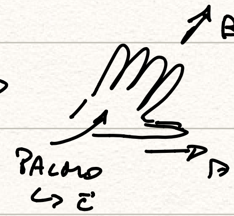
Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si definisce il PRODOTTO VETTORIALE, $\vec{A} \times \vec{B}$, il vettore $\vec{C}$ tale che

$|\vec{C}| = AB\sin\theta$, dove θ è l'angolo tra $\vec{A}$ e $\vec{B}$,

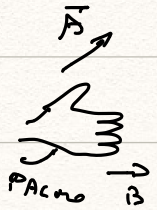
direzione ortogonale al piano su cui giacciono $\vec{A}$ e $\vec{B}$, e verso dato dalla regola della mano destra:

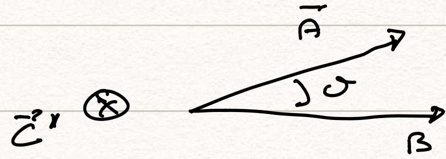


$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$



← mano destra

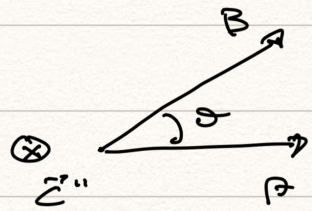




$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}'$ $\qquad \vec{C}' = -\vec{C}$

$|\vec{C}| = |\vec{C}'| = AB \sin\theta$

Nota che $\vec{B} \times \vec{A} = \vec{C}''$



$\vec{C}'' = \vec{C}' = -\vec{C}$

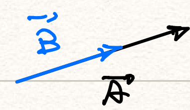
$$\boxed{\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}}$$

proprietà anti-commutativa del prodotto vettoriale

[ricordare la definizione del PRODOTTO SCALARE:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta = c$ è uno scalare (numero) non un vettore]

- Notare inoltre che se $\vec{A} \parallel \vec{B}$



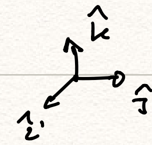
$\vec{A} \times \vec{B} = 0$

$(\sin\theta = \sin 0 = 0)$

- Quindi, in particolare, $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

- Se $\vec{A} \perp \vec{B}$ $\quad (\cos\theta = \cos 90° = 1) \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = AB$
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ $\quad$ proprietà distributiva
- $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{A}(t) \times \vec{B}(t)\right) = \dfrac{d\vec{A}}{dt} \times B + \vec{A} \times \dfrac{d\vec{B}}{dt}$ $\quad$ derivata del prodotto vettoriale

Prodotto vettoriale tra i versori:



$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = -\hat{j}\times\hat{i} = \hat{k}$$

$$\hat{j}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{j} = \hat{i}$$

$$\hat{k}\times\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{k} = \hat{j}$$

Prodotto vettoriale per componenti: usiamo le proprietà appena ricavate: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$, $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}$$

$$(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = A_x B_y\hat{k} + A_x B_z(-\hat{j}) +$$

$$+ A_y B_x(-\hat{k}) + A_y B_z\hat{i} + A_z B_x\hat{j} + A_z B_y(-\hat{i}) =$$

$$= \underbrace{(A_y B_z - A_z B_y)}_{C_x}\hat{i} + \underbrace{(A_z B_x - A_x B_z)}_{C_y}\hat{j} + \underbrace{(A_x B_y - A_y B_x)}_{C_z}\hat{k}$$

__ESEMPIO__ Una forza $\vec{F} = (2.00\hat{i} + 3.00\hat{j})$ N è applicata ad un corpo vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso coincidente con l'asse z. La forza è applicata nel punto di coordinate $\vec{r} = (4.00\hat{i} + 5.00\hat{j})$ m. Si calcoli il momento $\vec{\tau}$ applicato al corpo.

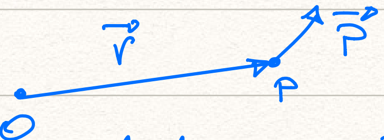
$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = (4.00\hat{i} + 5.00\hat{j})\times(2.00\hat{i} + 3.00\hat{j})\ \text{Nm} =$$

$$= (4.00\cdot 3.00 - 5.00\cdot 2.00)\hat{k}\ \text{Nm} = 2.00\hat{k}\ \text{Nm}$$

MOMENTO ANGOLARE DI UN PUNTO MATERIALE

Il momento angolare di un punto materiale P rispetto ad un asse O è il prodotto vettoriale del vettore $\vec{r}$ da O a P e il momento della quantità di moto del punto:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \text{dove } \vec{p} = m\vec{v}.$$



Prendiamo la derivata rispetto al tempo di $\vec{L}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} =$$

$$= \vec{v} \times \vec{v}\, m + \vec{r} \times \vec{F}_{TOT} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}_{TOT}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{v} \times \vec{v} = 0$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{tot}.}$$

La derivata temporale del momento angolare di un punto materiale rispetto a un asse O è uguale al momento delle forze agenti sul punto, rispetto allo stesso asse O.

Notiamo la somiglianza tra questa relazione e la $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{tot}$.

MOMENTO ANGOLARE DI UN SISTEMA DI PUNTI

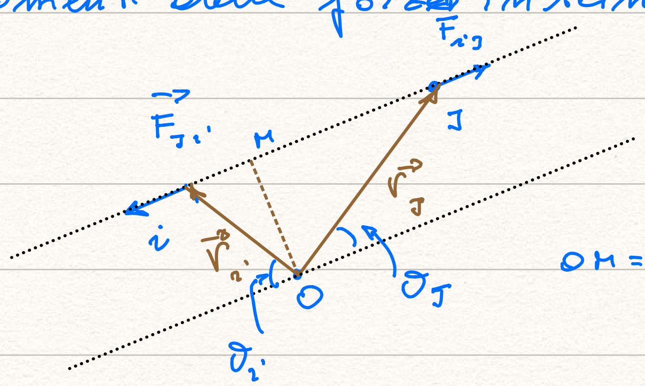
Per un sistema di punti, il momento angolare totale rispetto a uno stesso asse O è:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \dots + \vec{L}_N = \sum_1^N \vec{L}_i .$$

Prendendo la derivata rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{tot} = \sum_1^N \frac{d}{dt}\vec{L}_i = \sum_1^N \vec{\tau}_i = \sum_1^N \tau_i^{ext} + \sum_1^N \tau_i^{int}$$

I momenti delle forze interne, sommati, si annullano:



$OM = r_i \sin\theta_i = r_j \sin\theta_j$

Poiché $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (3° principio della dinamica) e il braccio delle due forze è uguale, il momento di $\vec{F}_{ij}$ e il momento di $\vec{F}_{ji}$ rispetto a O si cancellano.

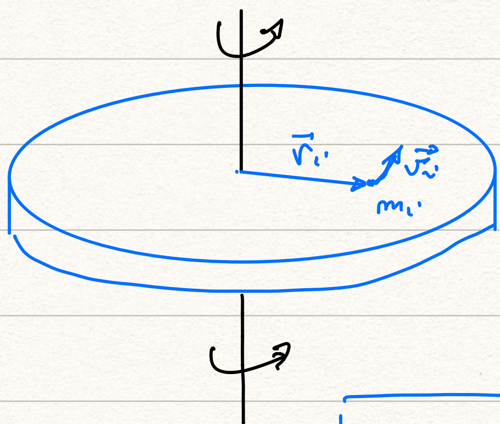
Questo succede, a coppie, per tutte le forze interne.

$$\Rightarrow \sum_1^N \tau_i^{int} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_1^N \tau_i^{ext}}$$

"La derivata rispetto al tempo del momento angolare totale di un insieme di punti è data dal momento delle forze di tutte le forze esterne."

Dopo un punto materiale, e un sistema di punti, consideriamo ora un corpo rigido che, ricordiamo, può essere visto come un sistema di punti che ruotano tutti attorno allo stesso asse con la stessa velocità angolare ω. Consideriamo una rotazione attorno all'asse z:



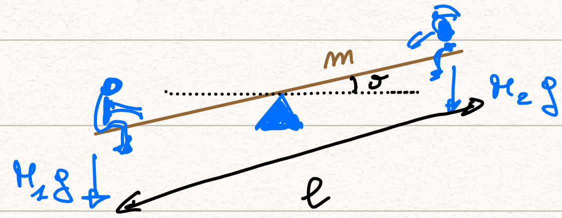
$$\vec{v}_i \perp \vec{r}_i \Rightarrow m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$$

$$\boxed{L_{TOT} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right)}_{I}\omega = I\omega}$$

ricordiamo che $\frac{d\omega}{dt} = \alpha \Rightarrow \underbrace{\frac{dL_{TOT}}{dt}}_{\tau_{ext}} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$

Quindi, ritroviamo il risultato del capitolo precedente: $\tau_{ext} = I\alpha$.

ESEMPIO: Altalena per due:



Due masse, M_1 e M_2 ai lati opposti, a distanza $l/2$ dall'asse.

Rotazione con velocità angolare ω.

1) Trovare il modulo del momento angolare del sistema;

2) " il modulo dell'accelerazione angolare del sistema, α, quando l'altalena forma un angolo θ con l'orizzontale.

1)
$$L_1 = M_1\, \omega \left(\frac{l}{2}\right)^2, \quad L_2 = M_2\, \omega \left(\frac{l}{2}\right)^2,$$
$$L_{barra} = I_{barra}\, \omega = \frac{1}{12} m l^2 \omega$$

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 + L_{barra} = l^2 \omega \left(\frac{M_1}{4} + \frac{M_2}{4} + \frac{m}{12} \right)$$
$$= I_{TOT}\, \omega$$
$$\text{dove } I_{TOT} = \frac{l^2}{4}\left(M_1 + M_2 + \frac{m}{3} \right)$$

2)
$$I_{TOT}\, \alpha = \Sigma \tau_{ext} = \tau_1 + \tau_2$$
$$= M_1 g \frac{l}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - M_2 g \frac{l}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$= g \frac{l}{2} \cos\theta \,(M_1 - M_2)$$

(La forza di gravità della barra ha momento nullo rispetto al fulcro)

$$\Rightarrow \alpha = \frac{g \frac{l}{2} \cos\theta\, (M_1 - M_2)}{\frac{l^2}{4}\left(M_1 + M_2 + \frac{m}{3}\right)} = \frac{2g (M_1 - M_2)}{l \left(M_1 + M_2 + \frac{m}{3}\right)} \cos\theta$$

dal risultato $\boxed{\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i}^{N} \tau_i^{ext}}$ segue direttamente che

"Se il momento totale delle forze esterne è nullo, il momento angolare totale di un sistema si conserva."

$$\sum_{i}^{N} \tau_i^{ext} = 0 \iff \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = 0 \implies \boxed{\vec{L}_f = \vec{L}_i .}$$

Per un sistema di punti, questo implica $\boxed{I_f \omega_f = I_i \cdot \omega_i .}$

Questo principio di conservazione è altrettanto importante di quello del momento della quantità di moto.
Una delle conseguenze è che l'asse di rotazione di un pianeta non cambia nel tempo. Non solo, ma anche che il moto di rotazione continua per sempre.

ESEMPIO: Stella di neutroni

Una stella ruota attorno al proprio asse con un periodo di 30 giorni. Dopo che la stella esplode, il suo nucleo centrale, di raggio iniziale $r_1 = 1.0 \cdot 10^4$ km, collassa in una stella di neutroni di raggio $r_2 = 3$ km. Si determini il periodo di rotazione della stella di neutroni.

$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$ conservazione del mom. angolare.

Per una sfera $I = \frac{2}{5} M R^2 \Rightarrow \frac{2}{5} M R_1^2 \omega_1 = \frac{2}{5} M R_2^2 \omega_2$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 30\,g \cdot \left(\frac{3.0\ km}{1\cdot 10^4\ km}\right)^2 = 30\,\frac{9.0}{10^8}\,g = 0.23\ sec.$$

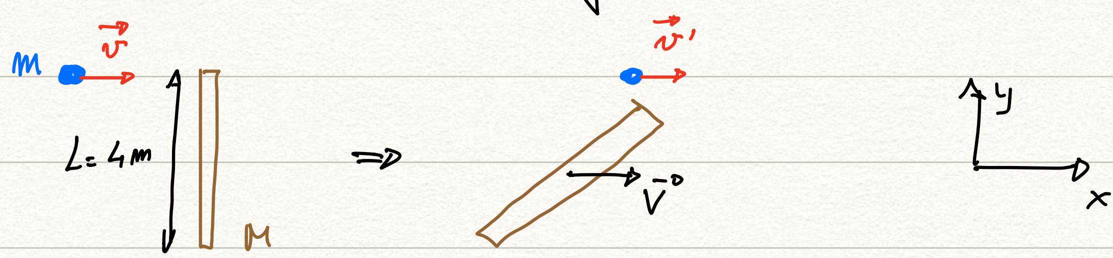
da 30 giorni a 0.23 sec !

— o — o —

Esercizio : Un disco di $m = 2.0$ kg e velocità $v = 3.0$ m/s colpisce in una estremità un'asta di $M = 1.0$ kg e lunghezza $L = 4.0$ m che giace a riposo su una lastra di ghiaccio. Il punto di impatto dista $r = 2.0$ m dal centro.

Supponendo che l'urto sia elastico e che il disco continui a muoversi nella direzione del suo moto prima dell'urto si trovino:

1) la velocità del disco dopo l'urto;
2) il modulo della velocità di traslazione dell'asta;
3) il modulo della sua velocità angolare di rotazione.



Urto elastico: $\frac{1}{2} m v^2 + 0 = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2$ 1)

Conservazione Momento: $m\vec{v} = m\vec{v}' + M\vec{V} \xRightarrow{\text{stessa direzione}} mv = mv' + MV$ 2)

" Momento angolare $m v L/2 = m v' \frac{L}{2} + I\omega$ 3)

↑ attorno al baricentro

(Nota: il baricentro non ha moto verso l(asse y))

$$2) \cdot L/2 - 3 \Rightarrow MVL/2 - I\omega = 0 \qquad \omega = \frac{ML}{2I} V$$

$$2) \qquad v' = v - \frac{M}{m} V$$

$$1) \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(v^2 + \frac{M^2}{m^2} V^2 - 2\frac{M}{m} v V \right) + \frac{1}{2} I \frac{M^2 L^2}{4 I^2} V^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

$$\Rightarrow \quad V^2 \frac{M}{2} \left(1 + \frac{M}{m} + \frac{ML^2}{I4} \right) = M v V$$

$I = \frac{1}{12} M L^2$

$$V = \frac{2v}{1 + \frac{M}{m} + 3} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2} + 3} v = \frac{4}{9} v = \frac{4}{3} m/s$$

$$|\vec{\omega}| = \frac{ML}{2I} V = 6\frac{V}{L} = \frac{8.0}{4} = 2 \text{ rad/s}$$ senso antiorario

$$v' = v - \frac{M}{m} V = \left(3.0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \right) m/s = 2.33 \text{ m/s}$$