Argomento #9

Quantità di moto e urti

- Quantità di moto
- Quantità di moto di un sistema isolato
- Urti

—o—o—

Ricordiamo la seconda legge di Newton:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \,,$$

dove la somma include tutte le forze che agiscono sul punto materiale in considerazione. Nel caso di un punto materiale, non esistono forze interne. In questo capitolo vedremo cosa succede se invece di considerare un semplice punto materiale, prendiamo in esame sistemi di due o più punti.
Prima di tutto però riscriviamo la 2ª legge di Newton come:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F} \,,$$

dove abbiamo definito la quantità di moto del punto materiale

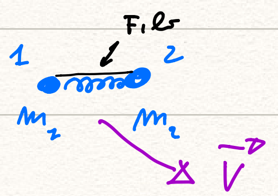
$$\boxed{\vec{P} \equiv m\vec{v}}$$

Quantità di moto
o
momento della q. di moto

La 2ª legge di Newton, quindi, può essere più correttamente espressa come: "la derivata della quantità di moto nel tempo è data dalla risultante delle forze agenti sul punto materiale". Questa formulazione permette di affrontare anche il caso in cui la massa cambia col tempo (p.es. razzo, palloncino che perde, ...), che discuteremo in seguito.

Nel caso in cui $\sum_i \vec{F}_i = 0$, concludiamo che la quantità di moto si conserva (= rimane costante): $\vec{P} = \text{cost}$ se $\sum_i \vec{F}_i = 0$.

Consideriamo ora il caso di due punti materiali di massa m_1 e m_2 legati a una molla, inizialmente compressa:



$M = m_1 + m_2$

$\vec{V}$: velocità del sistema

Se consideriamo il sistema dei due punti e della molla (che ha massa trascurabile), su questo non agiscono forze esterne, e quindi, prima di rompere il filo che tiene compressa la molla si ha: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{V}$, e $\frac{d(M\vec{V})}{dt} = 0$

A un certo punto il filo si rompe. Questo però non è dovuto all'azione di forze esterne, per cui la quantità di moto del sistema dopo la rottura sarà uguale a quella prima della rottura:

$$\vec{P}' = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V} = \vec{P}$$

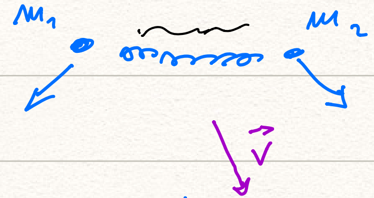
Nota che questa condizione riguarda solo la quantità di moto TOTALE, non le singole $m_1 \vec{v}_1$ e $m_2 \vec{v}_2$. Infatti in generale sarà $\vec{P}_1' = m_1 \vec{v}_1' \neq m_1 \vec{v}_1 = \vec{P}_1$ e $\vec{P}_2' \neq \vec{P}_2$.

Per ricavare le velocità di 1 e 2, considereremo i due sottosistemi, 1 e 2, e useremo il terzo principio della dinamica (azione e reazione): una volta rotto il filo, 2 esercita su 1 una forza uguale e contraria a quella che 1 esercita su 2:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Questo implica, per il secondo principio: $\dfrac{d\vec{P}_2}{dt} = -\dfrac{d\vec{P}_1}{dt}$, che conferma che $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = 0$, $\vec{P} = \text{cost.}$

Una volta che le due particelle si saranno staccate dalla molla, saranno libere dall'azione di qualunque forza, e si muoveranno di moto rettilineo e uniforme:



La variazione totale della quantità di moto della particella 1 sarà $\Delta \vec{P}_1 = \vec{P}_1(t_f) - \vec{P}_1(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d\vec{P}_1}{dt} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \vec{F}_{21}$;

Per la 2 abbiamo: $\Delta \vec{P}_2 = \vec{P}_2(t_f) - \vec{P}_2(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \vec{F}_{12}$

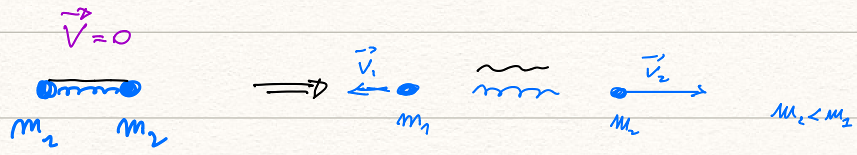
dove t_i è un qualunque tempo prima della rottura del filo, e t_f è un qualunque tempo dopo che le due masse si sono staccate dalla molla. Dato che $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ abbiamo il risultato

$$\Delta \vec{P}_2 = -\Delta \vec{P}_1 \Rightarrow m_2\left(\vec{v}_2(t_f) - \vec{v}_2(t_i)\right) = -m_1\left(\vec{v}_1(t_f) - \vec{v}_1(t_i)\right)$$

Nel caso in cui il sistema fosse inizialmente fermo: $\vec{v}_1(t_i) = \vec{v}_2(t_i) = \vec{V} = 0$, abbiamo

$$m_2 \vec{v}_2(t_f) = -m_1 \vec{v}_1(t_f) \qquad (\vec{V} = 0)$$

le due particelle partono in direzioni opposte, con momenti opposti $\rightarrow \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$: modulo delle velocità inversamente proporzionale alle masse.



$$m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2$$

Notiamo che per calcolare la variazione di $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ avremmo dovuto calcolare l'integrale:

$$\vec{I}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt = -\vec{I}_2$$

IMPULSO della FORZA $\vec{F}_{21}(t)$

Questo può essere complicato se non conosciamo i dettagli di $\vec{F}_{21}(t)$: per esempio se il filo si rompe improvvisamente, o se si sfilaccia poco a poco. In ogni caso, alla fine del processo di sganciamento avremo $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$ e quindi questa relazione vale qualunque sia la forza interna.

Per esempio, se invece di una molla con costante k, ho una molla di costante $2k$, i momenti finali delle singole particelle saranno più grandi, ma comunque staranno sempre in relazione fra di loro tale che $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$.

Riassumendo, possiamo enunciare il principio di conservazione della quantità di moto: "In un sistema isolato, la quantità di moto totale del sistema, definita come

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

(m_i : massa della particella i
$\vec{v}_i$: velocità " " "
$\vec{P}_i$: quantità di moto della particella i)

si conserva (= rimane costante)"!

Se sul sistema agiscono forze esterne (non è isolato), la variazione della quantità di moto tra due istanti t_2 e t_1 è data dall'impulso delle forze esterne:

$$\Delta \vec{P}_{21} = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \, \vec{F}_{ext}(t)}_{\text{Impulso}} \, ,$$

(questa ultima relazione è semplicemente l'integrale della seconda legge di Newton: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$).

Nota bene: il principio di conservazione della quantità di moto si aggiunge al principio di conservazione dell'energia. L'energia è uno scalare, la quantità di moto è un vettore.

La quantità di moto ha dimensioni: $[P] = [mv] = MLT^{-1}$

$$= kg \cdot m/s =$$

$$= N \cdot s$$

<u>Urti in una dimensione</u>: La conservazione della quantità di moto è molto utile per studiare processi di urto. In questo caso spesso è difficile seguire tutte le

forze interne nel corso del tempo. Ma se siamo interessati solo alle velocità iniziali e dopo l'urto, possiamo ricavare informazioni utili usando i principi di conservazione.

Le quantità rilevanti sono le quantità di moto e le energie cinetiche ($\frac{1}{2} m v_i^2$) delle singole particelle coinvolte nell'urto. Mentre $\vec{P}_{TOT}$ è sempre conservata, K_{TOT} può essere o non essere conservata: il principio di conservazione dell'energia per un sistema isolato riguarda l'energia totale, non la sola energia cinetica.

Distingueremo quindi diversi tipi di urti, a seconda del comportamento di K_{TOT}:

URTI ELASTICI $\rightarrow$ K_{TOT} si conserva (oltre a $\vec{P}_{TOT}$)

URTI ANELASTICI $\rightarrow$ $\Delta K_{TOT} \neq 0$ ($\Delta \vec{P}_{TOT} = 0$) per effetto di ΔE_{int}, ΔU, attrito.

Un caso particolare di urti anelastici sono gli

URTI PERFETTAMENTE ANELASTICI $\rightarrow$ $\vec{v}_1(t_f) = \vec{v}_2(t_f) = \dots = \vec{v}_N(t_f)$

$\rightarrow$ dopo l'urto gli oggetti rimangono attaccati e si muovono con la stessa velocità.

Consideriamo l'urto tra due punti 1 e 2, con velocità iniziali $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e velocità finali $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}_2'$.

Nel caso di URTI ELASTICI abbiamo:

CONSERVAZIONE MOMENTO TOTALE : $\underbrace{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}_{\vec{P}_i} = \underbrace{m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'}_{\vec{P}_f}$

" energia cinetica totale : $\underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2}_{K_f}$

Queste equazioni valgono per urti in 3 dimensioni ($v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \ldots$)

Nel caso di moti in 1 dimensione abbiamo le due equazioni:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (*)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \qquad (**)$$

La (**) può essere scritta come $m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$

$$\Rightarrow m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$$

La (*) dà $\Rightarrow m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$ che, inserito nell'equazione precedente, dà:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \Rightarrow \boxed{v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')}$$

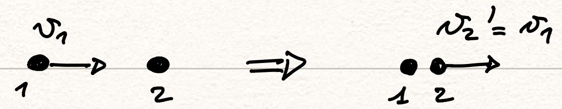
VALE SOLO PER URTI ELASTICI !!

Se conosciamo v_1 e v_2 (oltre a m_1 e m_2) possiamo ottenere v_1' e v_2' risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2') \\ m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = v_2 + \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \\ v_2' = v_1 + \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \end{cases}$$

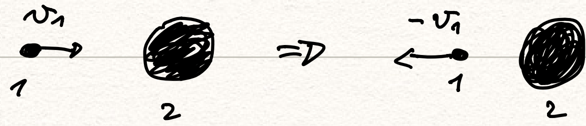
solo per urti 1D, elastici !!

Esempio: $m_1 = m_2$, $v_2 = 0$



$v_1' = 0$, $v_2' = v_1$

Esempio: $m_2 >>> m_1$, $v_2 = 0$

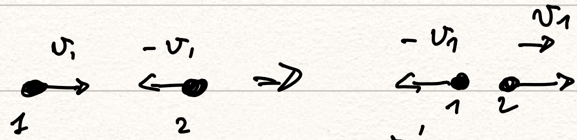


$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \to -1$$

$v_1' = -v_1$

$v_2' = v_1 - v_1 = 0$

Esempio $m_1 = m_2$ $v_1 = -v_2$



$v_1' = -v_1$

$v_2' = v_1$

Nel caso di URTI PERFETTAMENTE ANELASTICI abbiamo:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

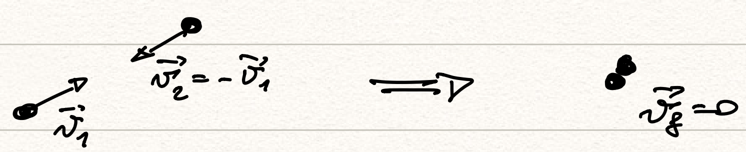
(Perché questi urti sono definiti come $\vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \vec{v}_f$)

Nota che in questo caso l'energia <u>cinetica NON E' CONSERVATA</u> e quindi non possiamo usare l'equazione (**) qui sopra.

$$\Rightarrow \vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

velocità finale in un urto perfettamente anelastico

ESEMPIO: $m_1 = m_2$ $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$



$\vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \vec{v}_f = 0$

La quantità di moto iniziale era $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$, così come quella finale.

L'energia cinetica iniziale è: $K_i = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \underset{\vec{v}_2 = -\vec{v}_1}{=} m v_1^2$

L'energia cinetica finale è $K_f = 0$. Tutta l'energia cinetica si è convertita in altre forme di energia (potenziale, calore....).

CONFRONTA QUESTO RISULTATO CON L'ULTIMO ESEMPIO DEL CASO DI URTI ELASTICI, CHE HA ESATTAMENTE LE STESSE CONDIZIONI INIZIALI $\Longrightarrow$

Nota bene: bisogna stabilire se, nell'urto considerato, l'energia cinetica si conserva!

URTI in 2D e 3D. In 2D e 3D bisogna prestare attenzione alla natura vettoriale delle quantità di moto.

$\hookrightarrow \quad \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} P_{1x} + P_{2x} = P_{1x}' + P_{2x}' \\ P_{1y} + P_{2y} = P_{1y}' + P_{2y}' \\ P_{1z} + P_{2z} = P_{1z}' + P_{2z}' \end{array}\right\}$ 3 equazioni (in 3D)

dove $P_{1x} = m_1 v_{1x}$, ecc. ecc.

La conservazione dell'energia cinetica (se applicabile) dà invece una sola equazione!

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) = \frac{1}{2} m_1 (v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2 + v_{1z}'^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2 + v_{2z}'^2)$$