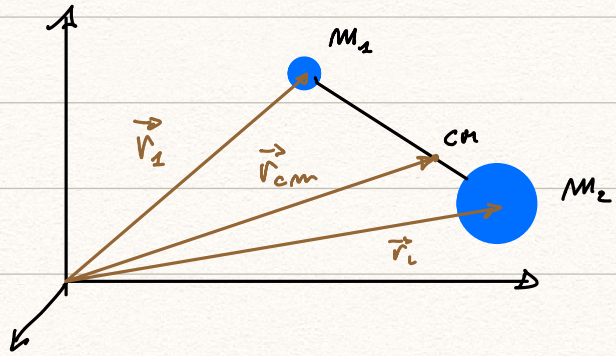
# Argomento # 10

## Il centro di massa

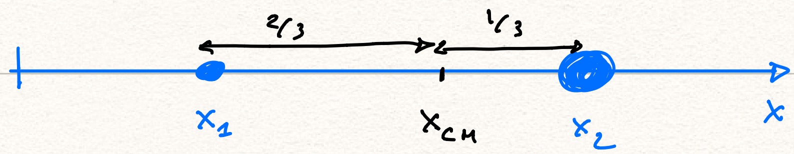
Considereremo sistemi costituiti da più punti materiali.
Cominciamo con 2 punti.




Il vettore posizione del centro di massa è definito come:

$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Ex:




$$m_2 = 2 m_1 \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\cancel{m_1}(x_1 + 2x_2)}{3 \cancel{m_1}} = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$$

$$(x_{CM} - x_1) = \frac{2}{3}(x_2 - x_1) \quad \rightarrow \quad \frac{|x_2 - x_{CM}|}{|x_{CM} - x_1|} = \frac{m_1}{m_2}$$ dimostralo!

$$x_{CM} - x_1 = \frac{1}{M}\left(m_2 x_2 - (M - m_2)x_1\right) = \frac{m_2}{M}(x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_{CM} = \frac{1}{M}\left(x_2(M - m_2) - m_1 x_1\right) = \frac{m_1}{M}(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \frac{x_2 - x_{CM}}{x_{CM} - x_1} = \frac{m_1}{m_2}$$ ok!

Nota che il CM è spostato verso il punto di massa maggiore.

## SISTEMI A MOLTI PUNTI

Se invece di 2 soli punti il sistema ne contiene N:

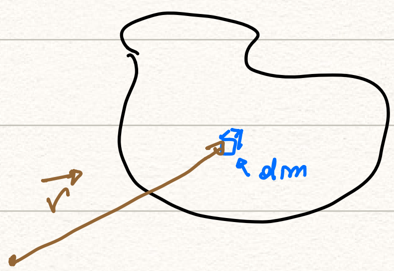
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{r}_i}{\sum_1^N m_i} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

dove $M = \sum_1^N m_i$ è la MASSA TOTALE

dove $m_i$ è la massa dell'i-esimo punto e $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ è il vettore posizione dell'i-esimo punto (coordinate $(x_i; y_i; z_i)$)

## SISTEMI CONTINUI

Se consideriamo un corpo solido, questo può essere visto come la somma di infiniti volumetti infinitesimi. In questo caso la posizione del centro di massa è data da un'integrale



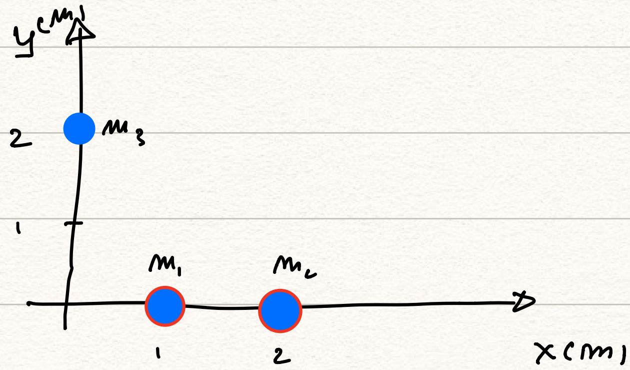

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\substack{\Delta m \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{\sum_i \vec{r}_i \Delta m}{M} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

$dm = \rho(\vec{r})\, dV$ ← volume infinitesimo

↑ densità nel punto $\vec{r}$

$$\longrightarrow = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r})\, dV$$

**ES:** Centro di massa di 3 particelle




$m_1 = m_2 = 1.0\ kg$

$m_3 = 2.0\ kg$

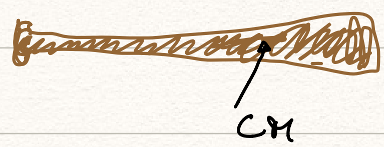
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{M}$$

$$\Rightarrow x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} = \frac{1.0\ kg\,(1+2)\,m}{4.0\ kg} = 0.75\ m$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} = \frac{2.0\ kg \cdot 2\ m}{4.0\ kg} = 1.0\ m$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = (0.75\ \hat{i} + 1.0\ \hat{j})\ m$$

**ES:**

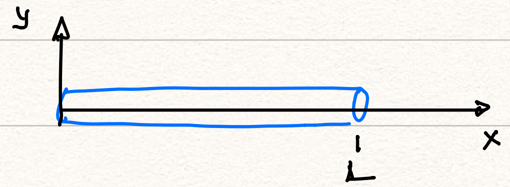



MAZZA DA BASEBALL di densità uniforme.

La mazza viene segata in due parti in corrispondenza del centro di massa. Quale delle due parti contiene più massa?

1) Quella di sinistra
2) " " destra
3) uguali
4) non si può dire.

ES: Centro di massa di una sbarretta omogenea.



Massa $M$, lunghezza $L$, densità uniforme.

→ Trovare la posizione x del baricentro.

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm \qquad \text{densità lineare}: \lambda = \frac{M}{L}$$

in una lunghezza dx c'è una massa $dm = \lambda dx$

$$\Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\int_0^L x dx = \frac{\lambda}{M}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} =$$

$$\underset{\lambda = \frac{M}{L}}{=} \frac{\frac{M}{L}L^2}{2M} = \frac{L}{2}$$ → il baricentro è a metà lunghezza

## Velocità e quantità di moto di un sistema di punti

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i^N m_i \vec{r}_i}{M} \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i \vec{v}_i$$

Dato che $m_i \vec{v}_i = \vec{P}_i$ quantità di moto del punto i-esimo

$$\Rightarrow \boxed{M\vec{V}_{CM} = \sum_i \vec{P}_i = \vec{P}_{TOT}}$$

"La quantità di moto totale di un sistema di punti materiali è uguale al prodotto della massa totale per la velocità del baricentro."

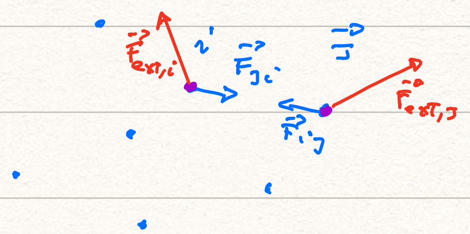
**Accelerazione:** $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$\Rightarrow M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$ ← forza totale agente sul punto i-esimo

2a legge dinamica




La forza su ogni punto è la risultante delle forze esterne su quel punto + la somma delle forze che ogni altro punto esercita sul punto considerato:

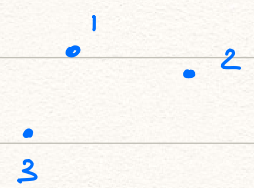
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}_{ji}^{int}$$

ma $\vec{F}_{ji}^{int} = -\vec{F}_{ij}^{int}$ (3° principio della dinamica)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext}$$

somma di solo le forze esterne!

ES: 3 punti

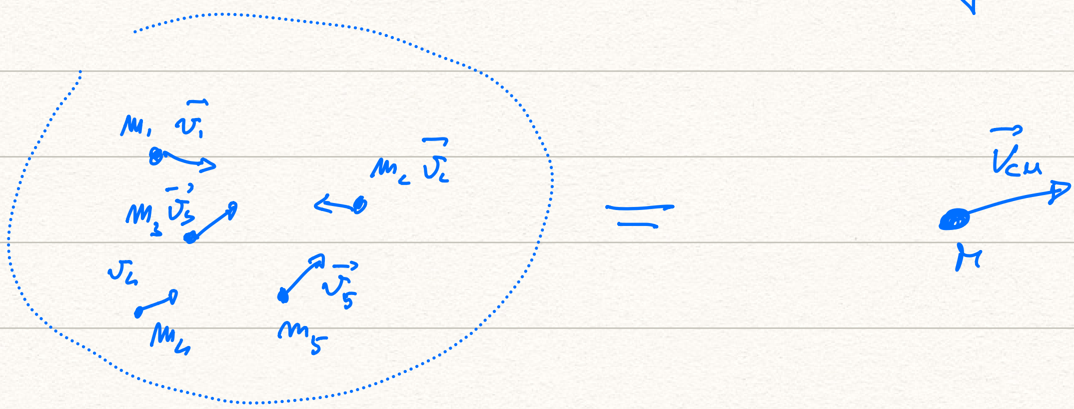



$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \\ \vec{F}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} \\ \vec{F}_3 = \vec{F}_3^{ext} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i^{ext} + \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{32} + \vec{F}_{23}}_{=0}$$

Quindi abbiamo che $M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext}$

"Il centro di massa di un sistema di punti si muove come si muoverebbe un punto materiale di massa $M$ sottoposto a una forza data dalla risultante delle forze esterne"




Quindi la variazione del momento della quantità di moto del CM è data da:

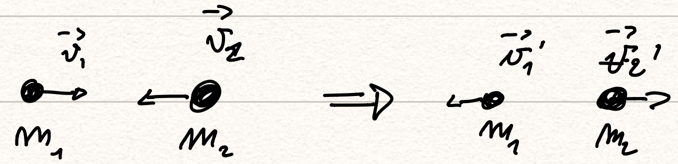
$$\Delta\vec{P}_{CM} = M\int \vec{a}_{CM}\,dt = \underbrace{\int \sum_i \vec{F}_i^{ext}\,dt}_{\vec{I}}$$

$\vec{I}$ impulso delle forze esterne

Nel caso in cui $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{P}_{CM} = 0$

"In assenza di forze esterne, la quantità di moto del baricentro si conserva!"

ES: Urto elastico




$\Rightarrow \quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}'$ conservazione q. d. moto

Ma $\quad \vec{P}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$ , $\vec{P}_{CM}{}' = \dfrac{m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}'}{m_1+m_2}$

dalla conservazione della q. di moto vediamo che $\vec{P}_{CM}{}' = \vec{P}_{CM}$

$\rightarrow$ le singole particelle cambiano q. di moto

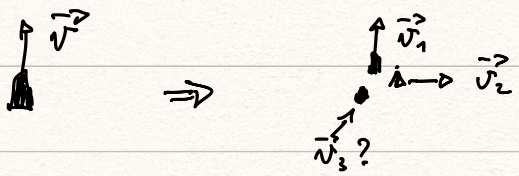
$\vec{P}_1{}' \neq \vec{P}_1$, $\vec{P}_2{}' = \vec{P}_2$, ma il CM NO

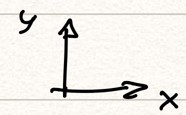
ES: RAZZO CHE ESPLODE

$\vec{v} = 300\, m/s\ \hat{j}$

$\vec{v}_1 = 450\, m/s\ \hat{j}$

$\vec{v}_2 = 240\, m/s\ \hat{i}$




Trovare $\vec{v}_3$ sapendo che $M_1 = M_2 = M_3 = M$

$$\Rightarrow M\vec{v} = \frac{M}{3}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)$$

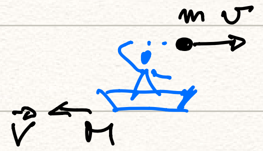
$$\vec{v}_3 = 3\vec{v} - \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$v_{3,x} = (0 - 0 - 240)\, m/s$

$v_{3,y} = (3\cdot 300 - 450)\, m/s$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = ((-240)\hat{i} + 450\,\hat{j})\, m/s$$

# Propulsione di un razzo → motori a reazione

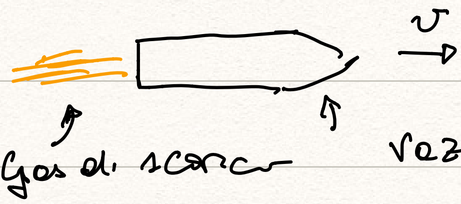



Lancio una palla verso destra con massa m e velocità $\vec{v}$, la barca, con massa M acquista una quantità di moto $M\vec{V}$.

$$\underbrace{M\vec{V} + m\vec{v} = 0}_{\text{baricentro rimane fermo}} \Rightarrow \vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

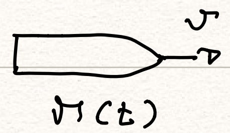
i due sottosistemi, palla e barca, si muovono con velocità opposte.

RAZZO:



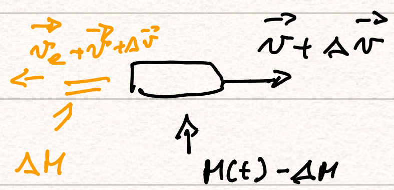

razzo più combustibile non ancora espulso.

tempo $t$:




$$\vec{P}_{TOT} = M(t)\,\vec{v}(t)$$

tempo $t+\Delta t$




$\vec{v}_e$: velocità dei gas rispetto al razzo

$$\vec{P}'_{TOT} = (M(t)-\Delta M)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + \Delta M(\vec{v}_e+\vec{v})$$

È un sistema isolato → $\vec{P}'_{TOT} = \vec{P}_{TOT}$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{M\vec{v}} + M\Delta\vec{v} - \vec{v}\Delta M - \Delta M\Delta\vec{v} + \Delta M(\vec{v}_e+\vec{v}+\Delta\vec{v})}_{\vec{P}'_{TOT}}$$

$$= \underbrace{\cancel{M\vec{v}}}_{\vec{P}_{TOT}}$$

$$\Rightarrow \quad M \Delta \vec{v} = -\Delta M \vec{v}_e$$

quando $\Delta t \to dt \to 0$, $\Delta \vec{v} \to d\vec{v}$, $\Delta M \to dm$

$$\Rightarrow \quad d\vec{v} = -\frac{dM}{M} \vec{v}_e$$

Velocità di combustione

$\rightarrow$ SPINTA: $\vec{F} = M \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}_e \frac{dM}{dt}$

Velocità di espulsione

Se assumiamo $\vec{v}_e$ costante $\Rightarrow$ $\vec{v}_f - \vec{v}_i = \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} d\vec{v} = -\vec{v}_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i = -\vec{v}_e \ln \frac{M_f}{M_i}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M_f}{M_i} = e^{-\frac{|\Delta \vec{v}|}{|\vec{v}_e|}}$$

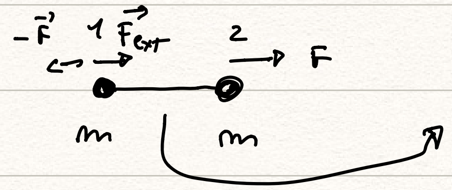
Per avere il $\Delta \vec{v}$ più grande bisogna avere $|\vec{v}_e|$ il più grande possibile e $\frac{M_f}{M_i}$ il più piccolo possibile. Cioè il razzo vuoto deve essere il più leggero possibile.

— o — o —

ES: Moto di un corpo rigido come insieme di punti materiali.

2 punti

$\vec{F}_{ext}$ su 1




Può essere una barra rigida ma anche una molla

1 esercita su 2 una forza $\vec{F}$, 2 esercita su 1 una forza $-\vec{F}$

$$1: \quad \vec{F}_{ext} - \vec{F} = m\,\vec{a}_1$$

$$2: \quad \vec{F} = m\,\vec{a}_2$$

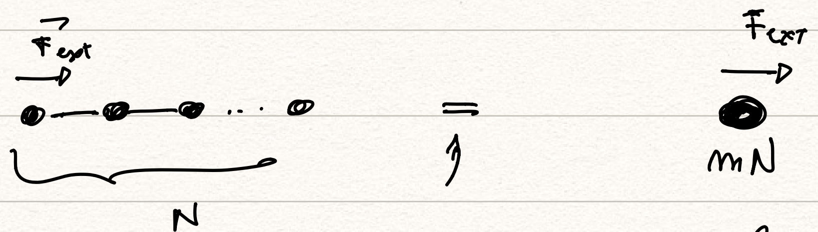
sommando le due equazioni: $\vec{F}_{ext} = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$

$$= m\frac{d}{dt}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$\vec{X}_{CM} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2} \Longrightarrow \quad = 2m\frac{d}{dt}\vec{v}_{cm}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$$

L'effetto della forza esterna, che è applicata solo su un punto, è di accelerare un corpo di massa 2m e coordinata $\vec{x}_{cm}$




se guardiamo solo il moto del baricentro

Questo vale qualunque siano le forze interne: barre rigide, molle, forze inter-atomiche...