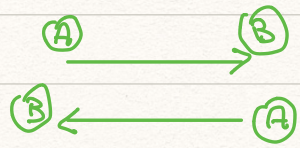
Lezione #3

• I vettori: definizioni, proprietà, operazioni

—— o —— o ——

Abbiamo già visto esempi di quantità vettoriali: spostamento, velocità, accelerazione.

Es. spostamento.



Questi due vettori spostamento hanno eguale lunghezza, cioè il modulo (= valore assoluto) dello spostamento è lo stesso, per esempio 3 m.
Ma i due vettori hanno diversa orientazione. Nel primo caso lo spostamento avviene da sinistra verso destra, nel secondo, da destra verso sinistra.

Spostamento, velocità e accelerazione sono esempi di <u>GRANDEZZE VETTORIALI</u>: per essere specificate hanno bisogno di <u>un numero</u> con la sua unità di misura (= modulo = lunghezza del vettore) e di <u>una direzione orientata</u>.

Esistono poi grandezze, come il volume,

la massa, la densità, che vengono specifi- cate unicamente da un numero. Queste si chiamano GRANDEZZE SCALARI.

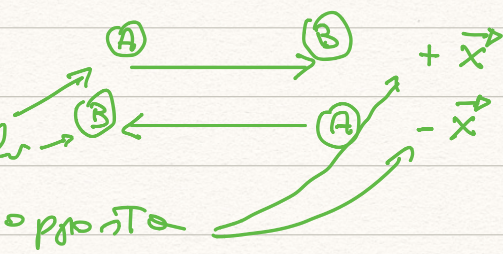
Indicheremo le grandezze vettoriali con una freccia sopra il simbolo. P. esempio,

$\vec{x}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ → vettore spostamento, velocità accelerazione.

I moduli rispettivi verranno indicati con x, v, a, o anche con $|\vec{x}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{a}|$.

Nota bene: il modulo è sempre positivo!

per esempio: $x = 3\,m$

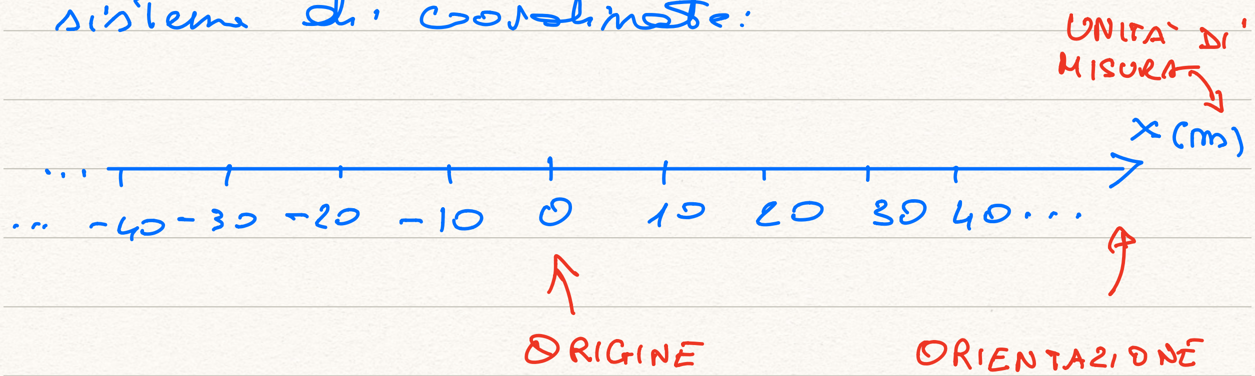


stesso modulo

orientazione opposta

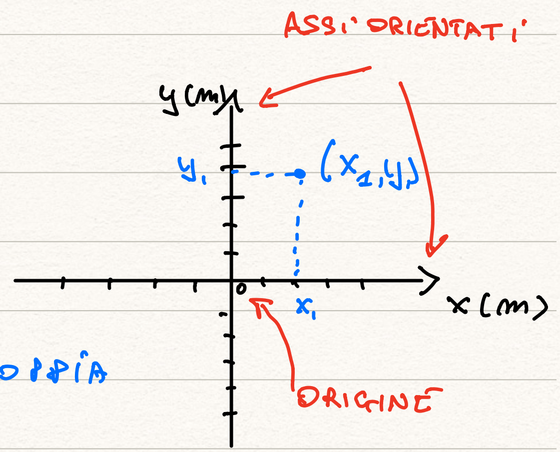
SISTEMI DI COORDINATE

Nel caso del moto unidimensionale abbiamo visto il primo esempio di sistema di coordinate:



Passando dalla retta al piano (da una a due dimensioni spaziali) abbiamo diverse possibilità di scelta per il sistema di coordinate.

COORDINATE CARTESIANE:



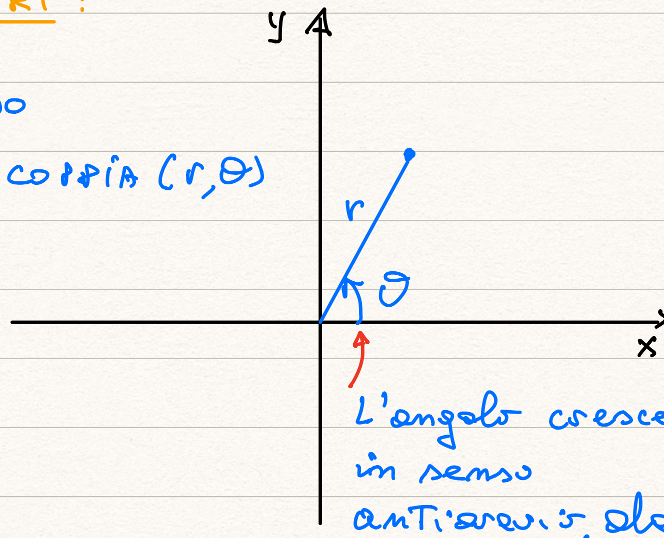
OGNI PUNTO DEL PIANO

È IDENTIFICATO DALLA COPPIA

(x, y)

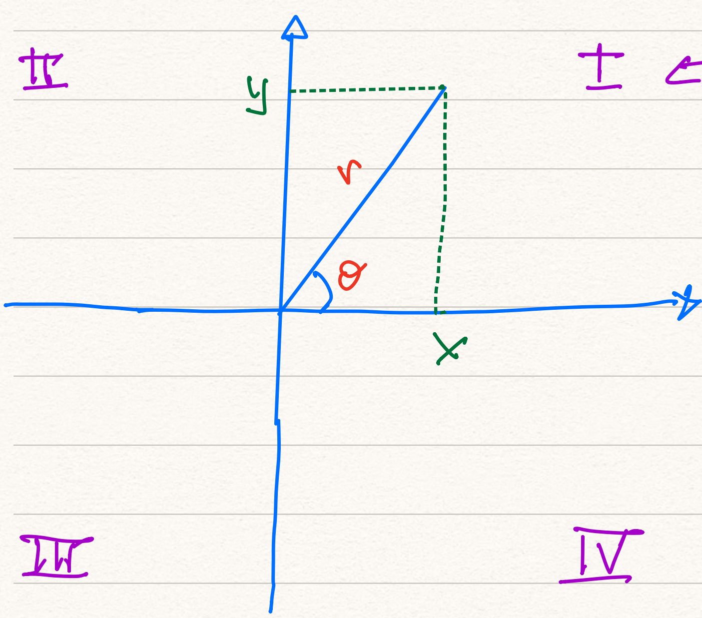
COORDINATE POLARI:

OGNI PUNTO DEL PIANO È IDENTIFICATO DALLA COPPIA (r, θ)



L'angolo cresce in senso antiorario, da $\theta = 0$, a $\theta = 2\pi$ rad $(= 360°)$

TRASFORMAZIONE DA COORDINATE POLARI A COORDINATE CARTESIANE:



← QUADRANTI

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

TRASFORMAZIONE DA COORDINATE CARTESIANE A COORDINATE POLARI:

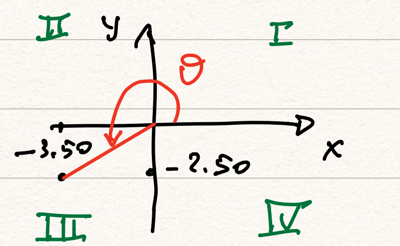
$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = tg\,\theta$$

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2\overbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}^{=1}$$

$$= r^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{se } (x,y) \text{ in I, III} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{se } (x,y) \text{ in II, III} \end{cases} \end{cases}$$

ESEMPIO: Un punto ha coordinate cartesiane $(x,y) = (-3.50, -2.50)\,m$. Trovare le coordinate polari.



$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(-3.50)^2+(-2.50)^2}\ m =$$

$$= \sqrt{12.25+6.25}\ m = 4.30\,m$$

(3 cifre significative)

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi = \operatorname{arctg} 0.714 + \pi$$

III quadrante

$$= 0.62 + 3.14 = 3.76\ rad$$

$$\boxed{3.76\ \text{rad} = 3.76\ \frac{180}{\pi}\ \text{grad} = 216^\circ}$$

$$\left[\ \theta(\text{grad}) = \theta(\text{rad})\ \frac{180}{\pi}\ \right]$$

— o — o —

PROPRIETA' E OPERAZIONI COI VETTORI

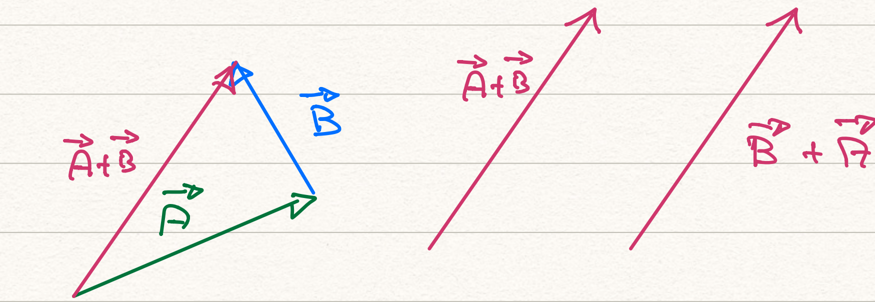
1) UGUAGLIANZA: Due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono uguali se hanno modulo uguale e uguale direzione orientata, cioè se sono PARALLELI e puntano nello stesso verso.

$$\vec{A} = \vec{B} = \vec{C} = \vec{D}$$

2) OPPOSTO DI UN VETTORE L'opposto di un vettore $\vec{A}$, è un vettore che ha lo stesso modulo, stessa DIREZIONE, ma VERSO OPPOSTO. Si indica con $-\vec{A}$.

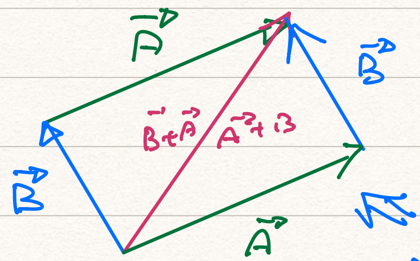
3) SOMMA DI' VETTORI'

$\vec{A} + \vec{B}$



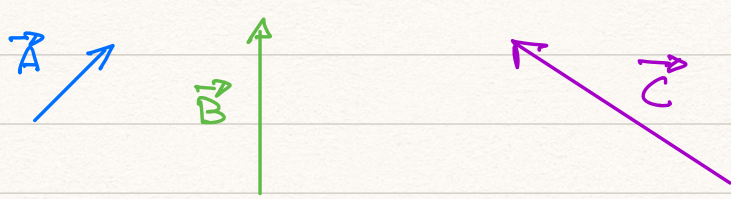
$$\Rightarrow \vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$$

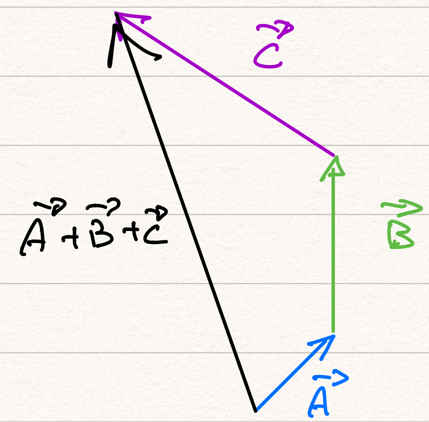
$\Uparrow$



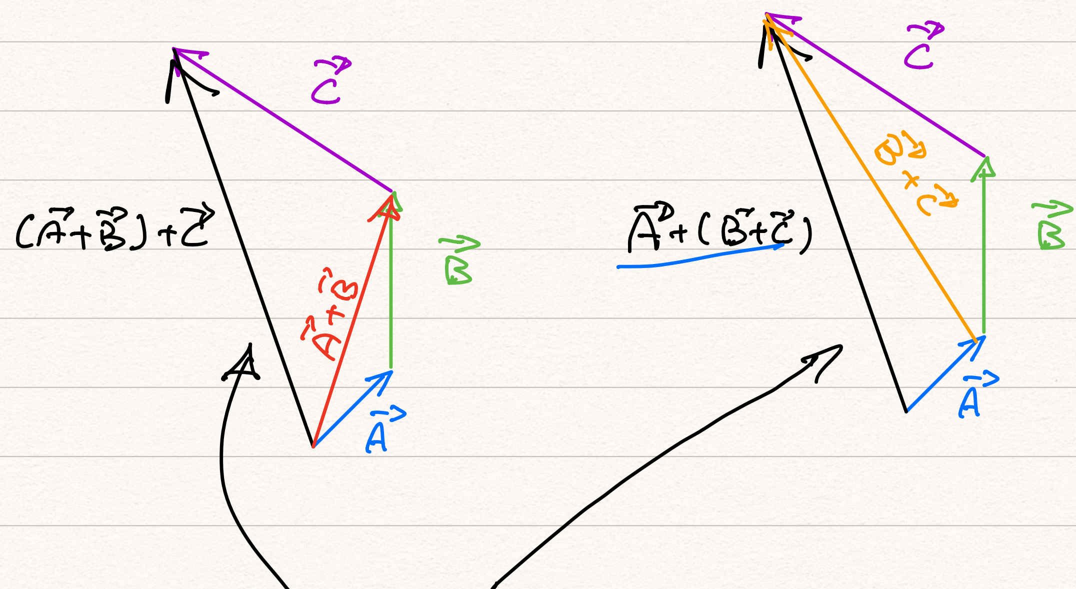
$\Leftarrow$ PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELLA SOMMA VETTORIALE

SOMMA DI TRE VETTORI:





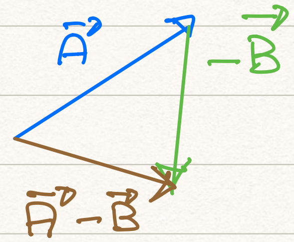
Vale la proprietà ASSOCIATIVA: $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$



UGUALI

4) SOTTRAZIONE TRA VETTORI:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



5) MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

m uno scalare (numero), $\vec{A}$ un vettore

$\Rightarrow$ $m\vec{A}$ è un VETTORE che

ha modulo $m \cdot A$, DIREZIONE DI $\vec{A}$, e verso uguale ad $\vec{A}$, se $m>0$, verso opposto se $m<0$.

ES: $m = 2$, $\vec{A} =$

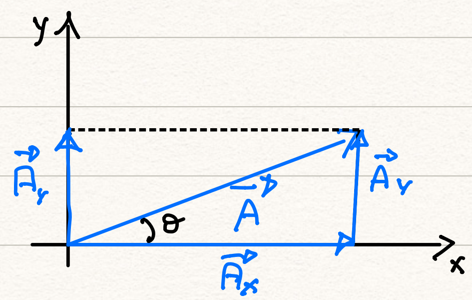
$\Rightarrow m\vec{A} = 2\vec{A} =$

$m = -3$, $\vec{B} =$

$\Rightarrow m\vec{B} = -3B =$

COMPONENTI DI UN VETTORE E VETTORI UNITARI (= VERSORI)

POSSIAMO SEMPRE VEDERE UN VETTORE COME SOMMA DEI SUOI VETTORI PROIEZIONE SUGLI ASSI CARTESIANI



$\Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$

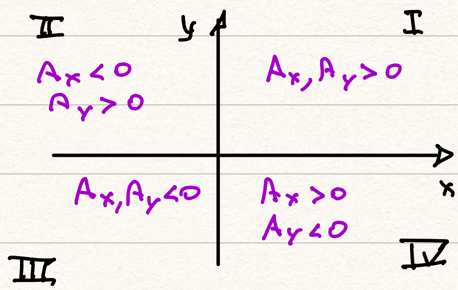
Questo è utile, perché $\vec{A}_x$ è allineato con l'asse x, e $\vec{A}_y$ è allineato con l'asse y, che sono ortogonali fra loro.

Le componenti A_x e A_y si ottengono a partire dal modulo A e dall'angolo θ come:

$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases}$$

e, inversamente,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$



$$\theta = \begin{cases} \mathrm{arctg}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) & (\mathrm{I\ e\ III}) \\ \mathrm{arctg}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) + \pi & (\mathrm{II\ e\ IV}) \end{cases}$$

<u>Nota bene:</u> La relazione $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ vale solo perché abbiamo scomposto il vettore $\vec{A}$ in due componenti ORTOGONALI, $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$. In questo caso $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ e $\vec{A}$ formano un triangolo rettangolo e quindi possiamo applicare il teorema di PITAGORA.

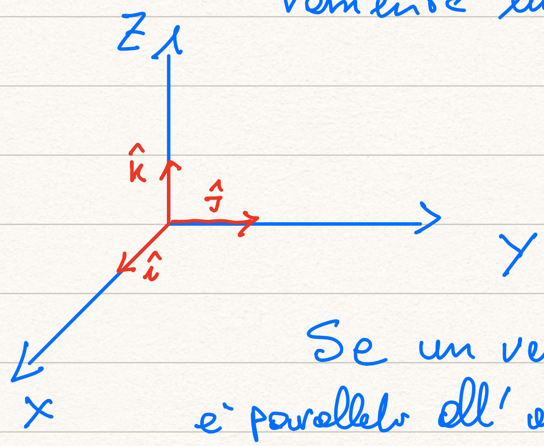
In futuro, considereremo scomposizioni simili per esempio, per un piano inclinato.

$$\vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_T$$

Con $\vec{F}_N$ e $\vec{F}_T$ ortogonali.

VETTORI UNITARI = VERSORI

$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$: Vettori adimensionali, di modulo = 1, diretti rispettivamente lungo l'asse x, y, e z.



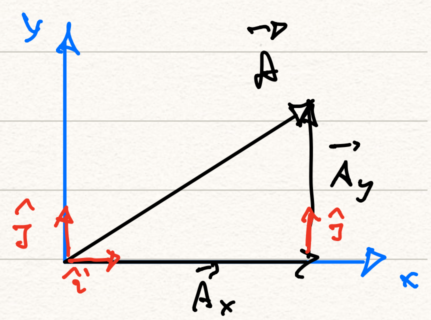
$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

Se un vettore, per esempio $\vec{A}_x$, è parallelo all'asse $\vec{x}$ (cioè non ha componenti y e z) allora possiamo esprimerlo come

$$\vec{A}_x = A_x \hat{i} .$$

Analogamente, $\vec{A}_y = A_y \hat{j}$

Il vettore $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$ si può allora scrivere come

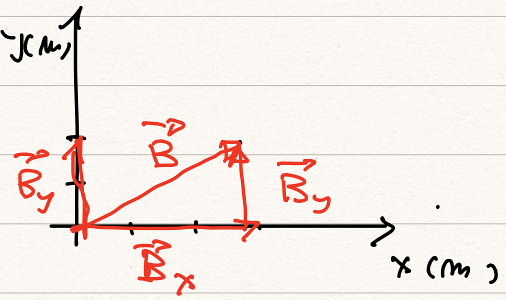


$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

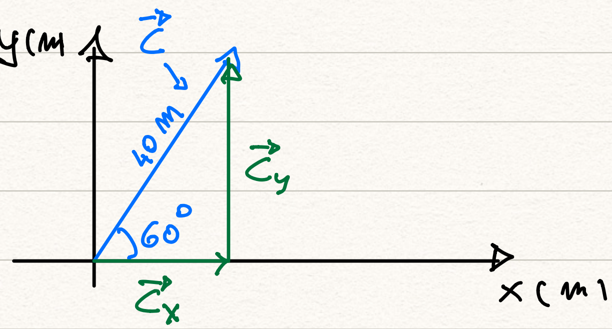
Quindi diciamo che "il vettore $\vec{A}$ ha componenti (A_x, A_y)" (oppure (A_x, A_y, A_z) se consideriamo 3 dimensioni).

Viceverso, se di un vettore vengono date le componenti, (A_x, A_y), si può immediatamente ricostruire il vettore completo, $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$,

ES: Disegnare il vettore $\vec{B}$ di componenti $(B_x, B_y) = (3, 2)$ m



ES: Trovare le componenti (C_x, C_y) del vettore in figura:



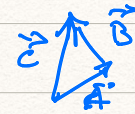
$$C_x = C \cos(\theta)$$
$$C_y = C \sin(\theta)$$

$C = 40\,m$, $\theta = 60°$ $\Rightarrow$ $C_x = 40 \cdot \frac{1}{2}\,m = 20\,m$

$$C_y = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,m = 20 \sqrt{3}\,m$$

La scomposizione in versori è molto utile per sommare e sottrarre vettori.

ES: $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$
$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$ $\Longrightarrow$ TROVA $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

Possibilità: 1) metodo geometrico 

2) somma delle componenti

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} =$$
$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

scomponiamo $\vec{C}$ come $\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j}$

dal confronto tra le due espressioni, troviamo

$$\begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \end{cases} \Longrightarrow$$

Il vettore somma di due vettori ha come componenti la somma delle componenti dei due vettori di partenza.

Vale anche in 3 dimensioni: $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$
$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

$$\Longrightarrow \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} +$$
$$+ (A_z + B_z)\hat{k}.$$

Nota bene: A volte, invece di indicarli con $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, i tre versori verranno indicati anche con $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

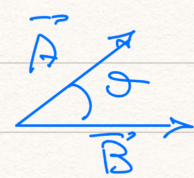
Abbiamo già visto il prodotto tra un vettore e uno scalare: $m, \vec{A} \to m\vec{A}$,

vettore di modulo $|m A|$ e segno il segno di m.

Consideriamo ora il primo esempio di prodotto tra due VETTORI: IL PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETTORI (più avanti incontreremo il PRODOTTO VETTORIALE).

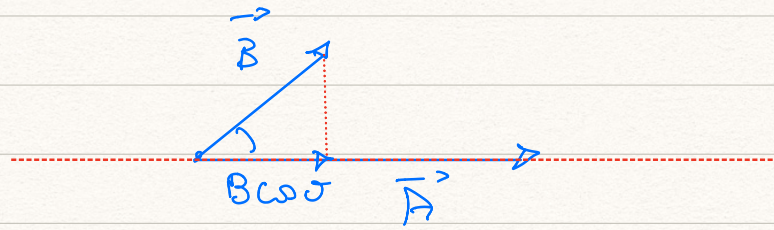
Il prodotto scalare è uno scalare (un numero) dato dal prodotto dei moduli dei due vettori e del coseno dell'angolo compreso tra di loro:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\,\cos\vartheta$$



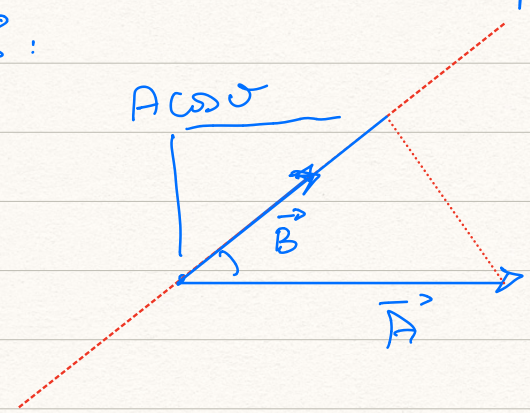
si indica con un punto

Notiamo che può essere interpretato come il prodotto del modulo di uno dei due vettori per il modulo della proiezione del primo sulla direzione del secondo



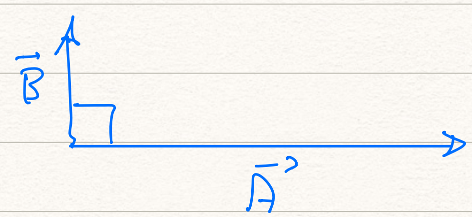
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A(B\cos\theta) = AB\cos\theta$$

Ma vale anche nel caso si proietti $\vec{A}$ sulla direzione di $\vec{B}$:



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A\cos\theta)B = AB\cos\theta$$

Notiamo in particolare che se due vettori sono ortogonali il loro prodotto scalare è nullo ($\cos\frac{\pi}{2} = 0$).



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Mentre se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono paralleli ($\theta = 0$) il prodotto scalare è uguale al prodotto dei moduli: $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$

($\cos 0 = 1$)

Quindi, per i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, valgono le relazioni:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \qquad (\hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{j}, \ldots)$$

Quindi il prodotto scalare tra due vettori $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$ e $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$ è dato da:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$
$$= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} +$$
$$+ A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} =$$

$$= A_x B_x + A_y B_y$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y (+ A_z B_z)$$

Il prodotto scalare tra due vettori è la somma dei prodotti delle componenti dei due vettori.