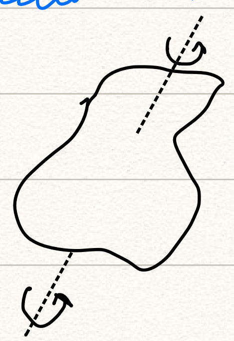
Argomento # 11

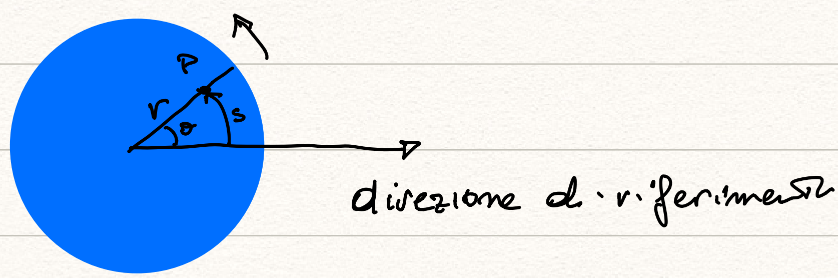
Rotazione di un corpo rigido

Finora abbiamo considerato movimenti di traslazione. Nel caso dei punti materiali, questi sono gli unici moti possibili. Ma se consideriamo corpi estesi (non puntiformi) questi possono sia traslare che ruotare. Ora ci concentriamo sui moti di rotazione, e per semplicità assumiamo che la rotazione avvenga sempre attorno allo stesso asse fisso.



Se il corpo è rigido e l'asse di rotazione è fisso la posizione del corpo è individuata unicamente dall'angolo θ tra una direzione di riferimento e un asse perpendicolare all'asse di rotazione e solidale col corpo.

ES: disco



θ cresce in senso antiorario

Il punto P, posto a distanza r dal centro, descrive un arco s di lunghezza $s = r\theta$, dove θ è espresso in radianti.

ricorda $\theta(\mathrm{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ}\,\theta(\mathrm{grad.})$

La posizione del disco e' identificata da θ.
Possiamo quindi definire uno SPOSTAMENTO ANGOLARE
tra una posizione θ_i e una posizione θ_f:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \qquad \left(\text{ricorda } \Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i\right)$$

↳ si misura in rad

Dalla variazione nel tempo della posizione angolare possiamo definire una velocita' angolare media:

$$\omega_{MEDIA} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

e, per $\Delta t \to 0$ $\quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$ velocita' angolare istantanea.

↳ si misura in rad/s

$$\left(\text{ricorda: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Infine, la variazione nel tempo della velocita' angolare da' l'accelerazione angolare media: $\alpha_{MEDIA} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

e, per $\Delta t \to 0$ l'accelerazione angolare istantanea

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \qquad \left(\text{ricorda: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

↳ si misura in rad/s²

Nota che, <u>per il momento</u>, ϑ, ω, e α sono degli scalari, non dei vettori; a differenza di $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{a}$. Questo perché l'asse di rotazione è fisso. (È analogo al moto in una dimensione: x, v, a sono scalari, non vettori).

Un caso semplice è il moto rotatorio con accelerazione angolare costante:

$$\boxed{\alpha = \text{cost.}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

Notare l'analogia con le leggi del moto uniformemente accelerato. ($a = \text{cost}$, $v = v_0 + at$, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$).

Inoltre $t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$ $\Rightarrow$ $\vartheta - \vartheta_0 = \omega_0 \frac{(\omega-\omega_0)}{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha \frac{(\omega-\omega_0)^2}{\alpha^2}$

$$= \frac{1}{2\alpha}(\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\vartheta - \vartheta_0)} \qquad (v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0))$$

ES: Una ruota gira con accelerazione angolare costante $\alpha = 3.50 \text{ rad}/s^2$

1) Se la velocità angolare a $t_i = 0$ s è $\omega_i = 2.00$ rad/s qual è lo spostamento angolare della ruota a $t_f = 2.00$ s ?

2) Quanti giri ha compiuto la ruota da t_i a t_f?

3) Qual è la velocità angolare della ruota a t_f?

1) Velocità angolare costante: $\theta_f = \theta_i + \omega_i (t_f - t_i) + \frac{1}{2} \alpha (t_f - t_i)^2$

$$= 0 + (2.00\ \mathrm{rad/s}) \cdot 2\ \mathrm{s} + $$

$$+ \frac{1}{2} (3.50\ \mathrm{rad/s^2}) (2.00\ \mathrm{s})^2$$

$$= 11.0\ \mathrm{rad} \qquad = 11.0\ \mathrm{rad}\ \frac{180^\circ}{\pi\ \mathrm{rad}}$$

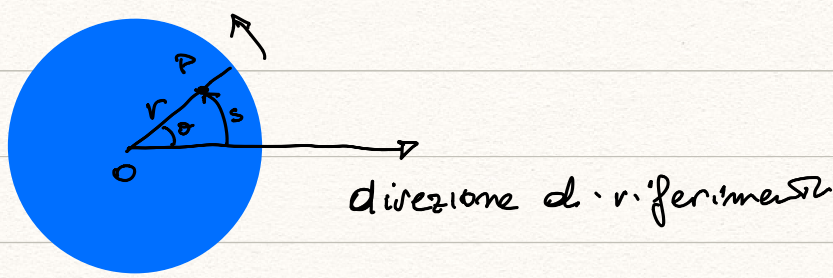
$$= \underline{\underline{630^\circ}}$$

2) Giri compiuti $\quad N = \dfrac{11.0\ \mathrm{rad}}{2\pi\ \mathrm{rad}} = 1.75$ giri

3) $\quad \omega_f = \omega_i + \alpha (t_f - t_i) = 2.00\ \mathrm{rad/s} + 3.50\ \mathrm{rad/s^2} \cdot 2.00\ \mathrm{s}$

$$= 9.00\ \mathrm{rad/s}$$

— o — o —



Durante la rotazione attorno al punto O, P descrive una circonferenza di raggio r finito con una VELOCITÀ TANGENZIALE

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega \implies v = r\omega$$

vel. tangenziale — vel. angolare

Nota che, mentre ω è la stessa per tutti i punti del corpo rigido, v dipende dalla distanza dall'asse di rotazione!

Derivando rispetto al tempo: $\quad a_t = \frac{dv_t}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = \alpha r$

acc. angolare

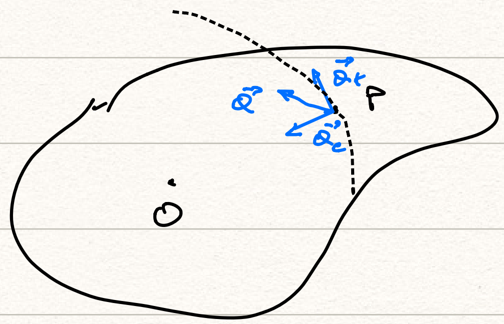
$$\Rightarrow \boxed{a_t = \alpha r}$$

acc tangenziale

Oltre a poter avere una accelerazione tangenziale, un punto in moto curvo con raggio r ha una accelerazione radiale, o centripeta, data da

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

accelerazione radiale o centripeta



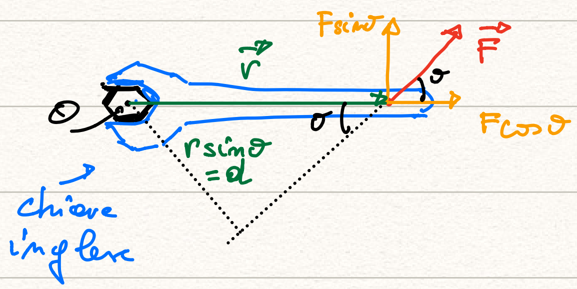
In ogni momento quindi, l'accelerazione risultante è data dalla somma $\quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$, e quindi il modulo è

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

Es: compact disc.

Momento di una forza.

Nei moti traslazionali l'accelerazione è legata alla risultante delle forze esterne ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$). Ora vogliamo capire cosa causa una accelerazione angolare in un moto rotazionale.



L'effetto rotatorio non dipende dalla componente $F\cos\theta$ della forza, ma solo dalla $F\sin\theta$. Inoltre è tanto maggiore quanto maggiore è r.

Un modo equivalente di vederlo, è osservare che l'effetto di $\vec{F}$ è tanto maggiore quanto grande è il BRACCIO $d = r\sin\theta$.

Definiamo quindi il MOMENTO DELLA FORZA $\vec{F}$ rispetto al PUNTO O come

$$\boxed{\tau = rF\sin\theta = Fd}$$

F: modulo della forza applicata

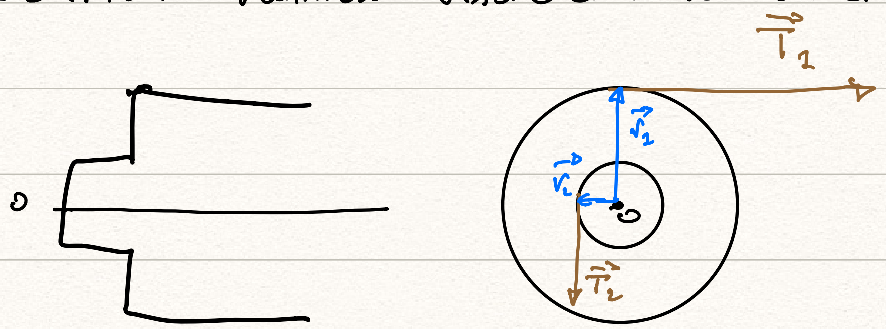
r: distanza tra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione

θ: angolo compreso tra $\vec{F}$ e $\vec{r}$.

Per convenzione il momento è positivo se causa una rotazione antioraria, negativo in caso opposto.

Nel caso di più forze applicate il momento risultante è la somma dei momenti di ogni forza, presi ognuno col proprio segno!

ESEMPIO: Momento risultante su un cilindro.



Profilo Fronte

Trovare il momento risultante delle forze applicate tramite le funi di tensione $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$, con $T_1 = 5.0\,N$, $T_2 = 15\,N$, $r_1 = 1.0\,m$ e $r_2 = 0.50\,m$.

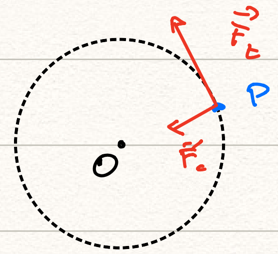
$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = -r_1 T_1 + r_2 T_2 = \left(-(1.0 \cdot 5.0) + (0.50 \cdot 15)\right) Nm$$

$$= +2.5\ N \cdot m$$

momento risultante positivo $\rightarrow$ rotazione antioraria

Effetto del momento e forze → accelerazione angolare

Per prima cosa, consideriamo un punto materiale in moto circolare:



La componente $\vec{F}_c$ è responsabile del moto circolare attorno a O.

La componente $\vec{F}_t$ causa una accelerazione tangenziale $\vec{a}_t$:

$$F_t = m a_t$$

Il momento della forza TOTALE $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_c$ rispetto a O dipende solo da F_t, perché $\vec{F}_c \parallel \vec{r}$ ($\sin\theta = 0$)

$$\tau = F_t r \text{, quindi}$$

$$\tau = F_t r = m a_t r \text{.}$$ Usando $a_t = \alpha r$

↑ acc. angolare

$$\boxed{\tau = m r^2 \alpha \equiv I \alpha}$$

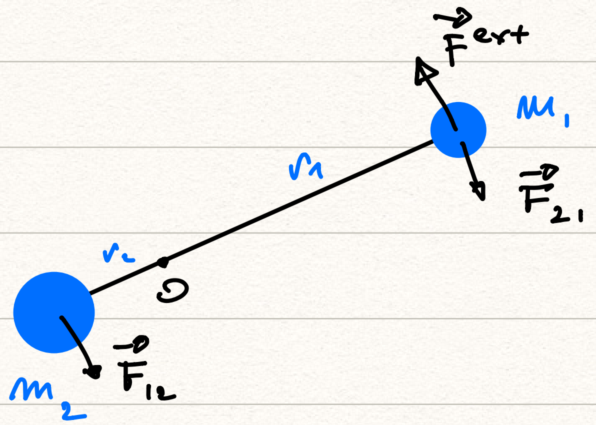
dove abbiamo definito $I = m r^2$

"Il momento delle forze esterne è proporzionale all'accelerazione angolare. La costante di proporzionalità è il MOMENTO DI INERZIA I, che per un solo punto materiale in moto su un raggio r vale $I = m r^2$"

Notare l'analogia tra $F = m a$ e $\tau = I \alpha$

forza → F, accelerazione → a, momento delle forze → τ, accelerazione angolare → α

Ora consideriamo un sistema formato da due masse m_1 e m_2 collegate da una barra rigida di massa trascurabile e rotanti attorno a un punto O della barra a distanze r_1 e r_2 rispettivamente:



La presenza della massa m_2 e della barra causa una forza $\vec{F}_{21}$ su m_1, e, analogamente, la presenza di m_1 e della barra, causa una forza $\vec{F}_{12}$ su m_2.

Il momento totale delle forze agenti sul sistema quindi è dato da

$$\sum_i \tau_i = \tau_1^{ext} + \tau_{21} + \tau_{12}$$

Notiamo che in questo esempio la forza esterna agisce su 1 ma non su 2. Il momento totale delle forze è ancora proporzionale ad α:

$$\sum_i \tau_i = \tilde{I} \alpha$$, dove $\tilde{I}$ è il momento

di inerzia del sistema a 2 masse, che vogliamo calcolare.
In assenza di momenti delle forze esterne il sistema continua a ruotare con ω costante, quindi, con $\alpha = 0$.
Questo implica che

$$\tau_{12} + \tau_{21} = 0.$$

Guardiamo ora cosa succede su ciascuna delle due masse:

$$① : \quad \tau^{ext} + \tau_{21} = m_1 r_1^2 \alpha$$

$$② : \quad \tau_{12} = m_2 r_2^2 \alpha$$

Prendendo la somma delle due equazioni:

$$\tau^{ext} + \tau_{21} + \tau_{12} = \tau^{ext} = \underbrace{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)}_{= \tilde{I}} \alpha$$

Quindi, se $\tilde{I} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$ vale ancora la relazione della forma trovata per una sola massa:

$$\tau^{ext} = \tilde{I} \alpha$$

Per un sistema di N masse il momento di inerzia rispetto a un asse O e' dato da

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \quad \text{dove}$$

m_i e' la massa della i-esima particella e r_i la sua distanza dell'asse O. Se abbiamo più forze esterne dobbiamo sommarne tutti i momenti:

$$\sum_j \tau_j^{ext} = I \alpha$$

Il momento di inerzia ($I = \sum_i m_i r_i^2$) si misura in $kg \cdot m^2$.

Notiamo che il momento d'inerzia è definito RISPETTO A UN DATO ASSE! Lo stesso corpo rigido può avere I diversi rispetto ad assi diversi.

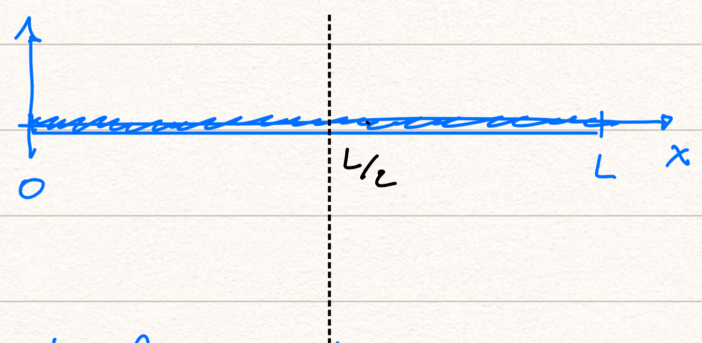
Nel caso di un corpo continuo, la sommatoria diventa un integrale:

densità costante

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \frac{dm}{dV} \, dV \overset{\downarrow}{=} \rho \int r^2 dV$$

$\uparrow$ ρ cioè densità del corpo

Calcoliamo, come esempio, il momento di inerzia di una sbarretta omogenea di lunghezza L rispetto a un asse perpendicolare passante per il centro:



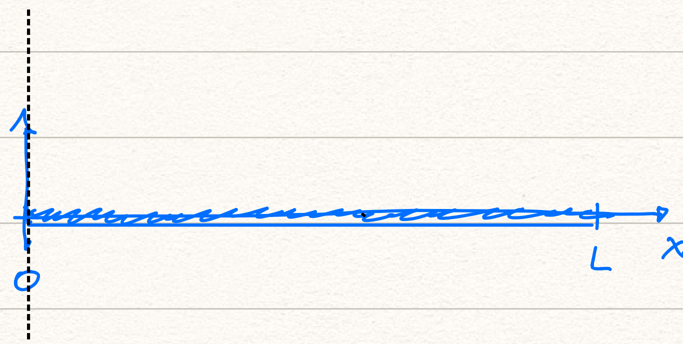
$\lambda = \frac{M}{L}$ densità lineare di massa.

$$I = \int \underbrace{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}_{\text{distanza dal centro}} dm = \int_0^L \left(x-\frac{L}{2}\right)^2 \underbrace{\frac{dm}{dx}}_{=\lambda} dx = \lambda \int_0^L \left(x-\frac{L}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\lambda}{3}\left(x-\frac{L}{2}\right)^3\Bigg|_0^L = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right) = \frac{\lambda}{3}\frac{L^3}{4} \underset{\lambda=\frac{M}{L}}{=} \frac{1}{12}ML^2$$

$I = \frac{1}{12}ML^2$ rispetto a un asse ortogonale passante per il baricentro.

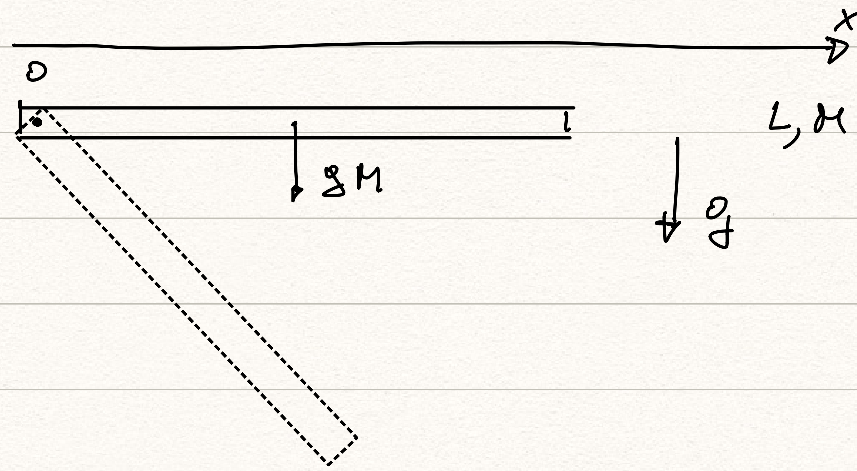
Consideriamo ora la stessa sbarretta, ma un asse passante per una delle due estremità:



$$I = \int \underbrace{x^2}_{\text{distanza dall'origine}} dm = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{\lambda}{3}L^3 \underset{\lambda=\frac{M}{L}}{=} \frac{1}{3}ML^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}ML^2 \quad \text{asse passante per l'origine}}$$

ES: Una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza L può ruotare su un piano verticale attorno a un perno senza attrito, posto a una delle due estremità. Inizialmente si trova in posizione orizzontale e viene lasciata libera di ruotare sotto l'azione della forza di gravità.
Trovare l'accelerazione angolare iniziale e l'accelerazione tangenziale della sua estremità libera.



Useremo $\tau_{ext} = I\alpha$ per trovare α quando la barretta si trova in posizione orizzontale. Dato che il perno passa per un'estremità $I = \frac{1}{3}ML^2$.
Per calcolare τ_{ext} devo considerare la forza di gravità.
Su un tratto dx della barra, la forza di gravità è

$$g\lambda dx \qquad \text{con } \lambda = \frac{M}{L}.$$

Il tratto a distanza x dal perno dà un momento pari a $\underset{\text{distanza}}{x} \cdot \underbrace{g\lambda dx}_{g\,dm}$. Sommando da 0 a L

$$\Rightarrow \tau_{ext} = g\lambda\int_0^L x\,dx = \frac{1}{2}g\lambda L^2 = Mg \times \frac{L}{2}$$

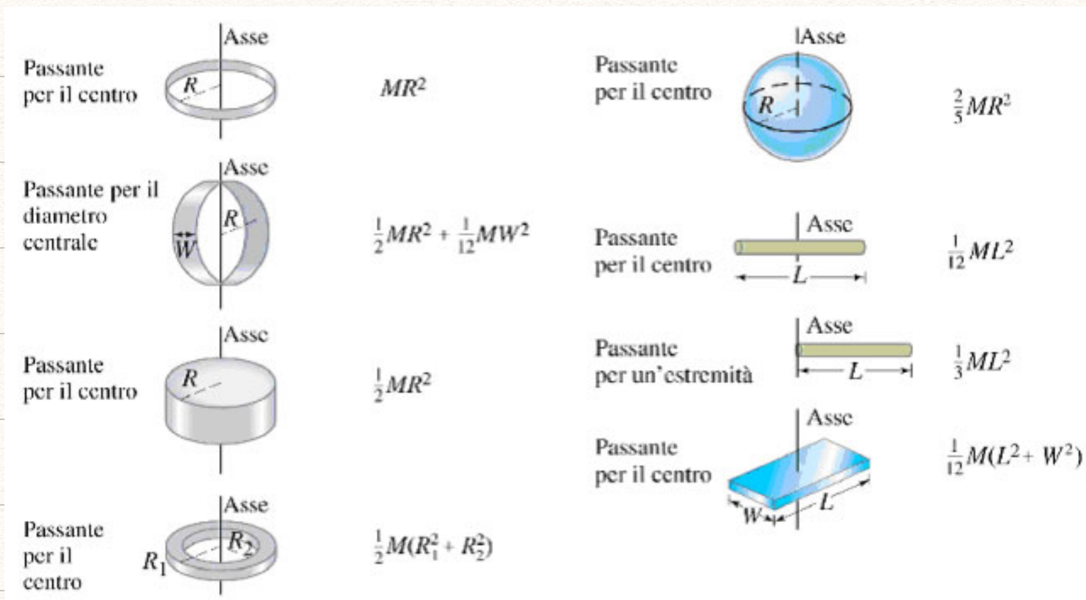
Notiamo che questo risultato è equivalente a quello che si otterrebbe considerando la forza di gravità di tutto il corpo (Mg) applicata nel baricentro ($x = L/2$)

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\tau_{ext}}{I} = \frac{Mg\,L/2}{\frac{ML^2}{3}} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}}$$

accelerazione iniziale a $x = L$. $\boxed{a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g}$

Notare che $a_t > g$!

MOMENTI DI INERZIA DI CORPI NOTEVOLI



Attenzione all'asse rispetto al quale si calcola I !!

Energia cinetica di rotazione

Quando un corpo ruota attorno ad un asse, anche in assenza di moto traslazionale, possiede energia cinetica, dato che i vari punti che lo compongono sono in moto.

L'energia cinetica è data dalla somma delle energie cinetiche dei singoli componenti:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Se il moto è dovuto interamente a una rotazione rigida attorno a un asse fisso, tutti i punti si muovono con la stessa velocità angolare: $v_i = \omega r_i$

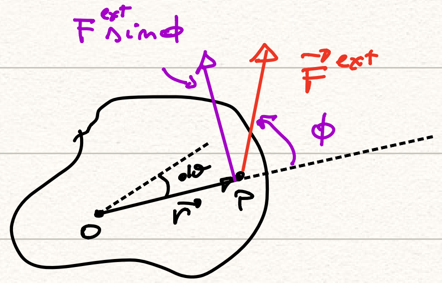
Quindi: $$K_{ROT} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \overbrace{\left(\sum_i m_i r_i^2\right)}^{I} \omega^2$$

$$\boxed{K_{ROT} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

"Un corpo in rotazione attorno a un asse con velocità angolare ω possiede un'energia cinetica $\frac{1}{2} I \omega^2$, dove I è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione."

Notare la similitudine con l'espressione per l'energia cinetica traslazionale: $K = \frac{1}{2} M v^2$.
In generale, ci sarà sia l'una che l'altra.

Lavoro ed energia cinetica in un moto rotatorio



- Componente della forza che causa rotazione : $F \sin\phi$
- spostamento : $ds = r\,d\theta$

$\Rightarrow$ Lavoro $\quad dW = \underbrace{F^{ext}\sin\phi \; r}_{\tau \text{ momento di } \vec{F}^{ext} \text{ rispetto a } O} d\theta$

$\Rightarrow \boxed{dW = \tau_{ext}\, d\theta}$ Lavoro infinitesimo di una forza F^{ext} per una rotazione $d\theta$.

Ricordando che $\tau_{ext} = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt}$ e scrivendo $d\theta = \omega\,dt$,
abbiamo $\quad dW = I \frac{d\omega}{dt} \omega\, dt = I \omega\, d\omega$

$$\Delta W = W_f - W_i = \int_i^f dW = I \int_{\omega_i}^{\omega_f} \omega\, d\omega = \underbrace{\frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2)}_{K_f^{ROT} - K_i^{ROT}}$$

$$\Delta W = K_f^{ROT} - K_i^{ROT}$$

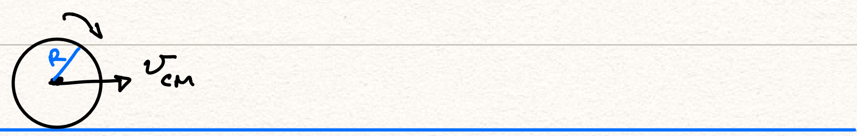
" La variazione di energia cinetica rotazionale è data dal lavoro delle forze esterne applicate"

Questo teorema si combina con quello del moto traslazionale: il lavoro delle forze esterne è pari alla variazione di energia cinetica TOTALE: traslazionale + rotazionale.

POTENZA: $$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \tau_{ext}\frac{d\theta}{dt} = \tau_{ext}\,\omega}$$

ROTOLAMENTO DI UN CORPO RIGIDO

Consideriamo un corpo cilindrico che rotola senza strisciare



Questo moto compone una traslazione e una rotazione attorno all'asse.

Il corpo fa un giro completo in un tempo $T = \frac{2\pi R}{v_{CM}}$

Se mi metto in un riferimento in cui $\vec{v}_{CM}=0$ il corpo ruota con velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v_{CM}}{R} \Rightarrow K^{ROT} = \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2$

Tornando nel sistema di riferimento iniziale, dobbiamo aggiungere la energia cinetica di traslazione: $K^{TR} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$

Quindi l'energia cinetica totale è

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

dove, per un cilindro, $I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2$.