Argomento # 16 — Moto Oscillatorio

Un **moto periodico** si ha quando i vettori posizione assumono gli stessi valori dopo un tempo sempre uguale, chiamato

PERIODO: $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(t+T)$ $\quad T$ = periodo.

Iterando l'espressione precedente: $t' = t+T$

Posizione del punto i: $\longrightarrow \vec{r}_i(t') = \vec{r}_i(t'+T)$

$\downarrow \vec{r}_i(t+T)$ $\quad \hookrightarrow \vec{r}_i(t+2T)$, ecc. ecc.

Così per $t+3T, \dots t+nT$.

Un particolare tipo di moto periodico è il

MOTO ARMONICO:

Si ha un moto armonico quando l'accelerazione è proporzionale alla distanza dalla posizione di equilibrio, e diretta verso di essa.

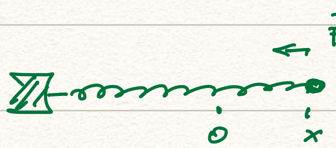
$\longleftrightarrow \quad \vec{F} = -k\vec{x}$

Legge di Hooke: vale per una molla ideale

$\vec{x}$: distanza dalla posizione di equilibrio

k: costante elastica

$\vec{F}$: forza di richiamo



Nel caso unidimensionale: $F = -kx = ma$

$\Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$ $\quad$ Accelerazione proporzionale allo spostamento

Scrivendo $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL MOTO ARMONICO

La soluzione di un'eq. differenziale non è un numero (o più numeri), ma una funzione: trovare la funzione $x(t)$ tale che la sua derivata seconda è uguale alla funzione stessa, moltiplicata per $-\omega^2$.

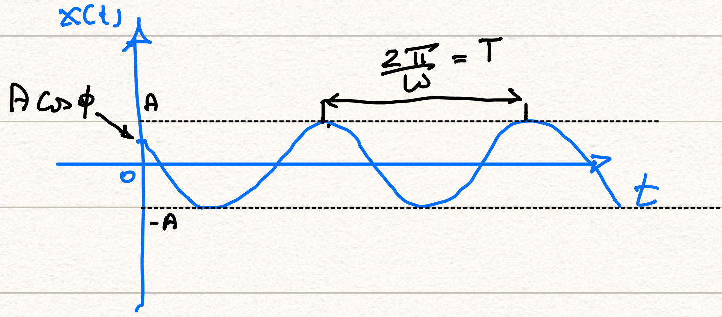
La soluzione non è unica, esistono infinite funzioni con questa proprietà. Esse sono della forma:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi).$$

Per ogni valore di A e ϕ ho una soluzione dell'eq. differenziale, Infatti:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi), \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 \overbrace{A\cos(\omega t+\phi)}^{x(t)}$$
$$= -\omega^2 x(t) \quad \underline{\text{Ok}}!$$

ω, A, ϕ sono costanti. Ma mentre ω appare nell'equazione, e quindi è fissato, A e ω sono liberi di variare da $-\infty$ a $+\infty$. Per capire il loro significato studiamo il grafico della funzione $x(t) = A\cos(\omega t+\phi)$.



$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

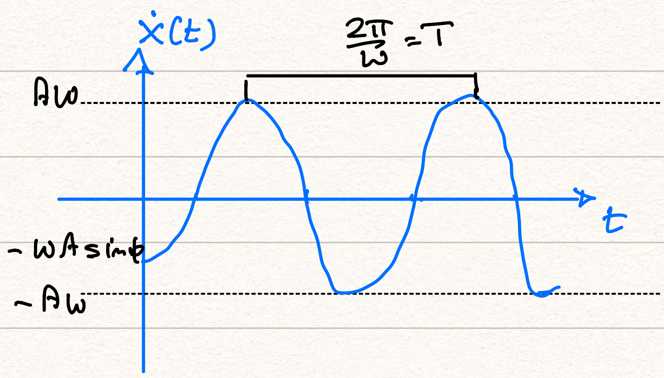
$$x(t) = x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

ω = frequenza angolare, legato al periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

A = ampiezza ↳ frequenza: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

ϕ = fase

E' istruttivo studiare anche il grafico di $\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$



La velocità ha lo stesso periodo della posizione, ma diversa ampiezza. Possiamo esprimere A e ϕ in termini della velocità e posizione a un tempo dato, per esempio, a $t=0$:

$$x(0) = x_0 = A\cos\phi$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A\omega\sin\phi \qquad \left(\dot{x} \equiv \frac{d}{dt}x,\ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

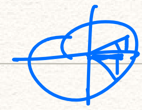
$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = A^2 \\ \frac{v_0}{\omega x_0} = -\operatorname{tg}\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\ , \quad \phi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)}$$

$Kx = ma$

$\frac{k}{m} = \frac{a}{x}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



ESEMPI:

1) Se $x_0 \neq 0,\ v_0 = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega t)}$

2) Se $x_0 = 0,\ v_0 \neq 0 \Rightarrow \phi = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega}$ $\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t}$

<u>ESEMPIO</u> Un blocco di 200 g attaccato a una molla di costante elastica $k = 5{,}00$ N/m è libero di oscillare su un piano orizzontale senza attrito. Inizialmente il blocco è in quiete a 5,00 cm dalla posizione di equilibrio e viene lasciato libero di oscillare:

A) trovare il periodo del moto

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00\ \text{N/m}}{0.200\ \text{kg}}} = 5.00\ \text{rad/sec}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.26\ \text{sec.}$$

B) trovare la velocità massima del blocco.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$x(0) = A\cos(\omega \cdot 0) = A = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \qquad x(t) = A\cos\omega t$$

velocità al tempo t: $\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t)$

è massima quando $\sin(\omega t) = 1$ $\left(t = \frac{\pi}{2\omega}\right)$

$$\Rightarrow |\dot{x}_{max}| = v_{max} = +A\omega = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 5\ \text{m/s} = 0.250\ \text{m/s}$$

C) Accelerazione massima del blocco.

$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t)$ $\qquad |a_{max}| = \omega^2 A = 0.250 \times 5.00 \ m/s^2$

$= 1.25 \ m/s^2$

Notare che, poiché $\ddot{x} = -\omega^2 x$, il massimo dell'accelerazione si ha quando lo spostamento è massimo.
Corrispondentemente, la velocità è minima $(=0)$.

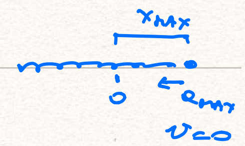
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$\omega t + \phi = m\pi \Rightarrow |x|$ e $|a|$ sono massimi

$\Rightarrow |v| = 0$



$\omega t + \phi = (2m+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow |x| = |a| = 0,$

$|v|$ è massima.

— o — o —

ESEMPIO: Automobile di massa $M = 1300$ kg ha 4 sospensioni che si comportano come molle ognuna di $k = 20'000$ N/m.
A bordo vi sono due persone di massa totale $m_p = 160$ kg.
Trovare la frequenza con cui oscilla l'auto quando prende una buca.

$$M_{TOT} = M + m_p = 1460 \text{ kg}$$

$$K_{TOT} = 4 \cdot k = 80'000 \text{ N/m}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K_{TOT}}{M_{TOT}}} = 7.402 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 1.18 \text{ s}^{-1} = 1.18 \text{ Hz}}$$

Energia di un oscillatore armonico

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \qquad v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

L'energia cinetica di un corpo di massa m che si muove di moto armonico e' :

$$K = \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi),$$

L'energia potenziale elastica invece e' :

$$U = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Notiamo che sia K, che U non sono costanti nel tempo
Ma se consideriamo l'energia totale :

$$E = K + U = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) =$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \left(\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi) \right) = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} k A^2} \quad \text{costante.}$$

L'energia totale è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del moto.

Conoscendo l'energia totale, $\frac{1}{2}kA^2$, possiamo ricavare la velocità del corpo in ogni posizione:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\Rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

ESEMPIO: blocchetto di massa $m = 0.500\,kg$ collegato a una molla di $k = 20.0\,N/m$ oscilla su un piano orizzontale senza attrito.

1) Se l'ampiezza dell'oscillazione è $A = 3.00\,cm$, trovare la velocità massima del blocchetto;

2) Che velocità ha il blocchetto quando passa per $x = 2.00$ cm?

3) Calcolare la energia cinetica e potenziale del blocchetto in $x = 2.00$ cm.

1) Se l'ampiezza è A, l'energia totale è $E = \frac{1}{2} k A^2$.
La velocità massima si ha quando tutta l'energia è sotto forma di energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m v_{MAX}^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_{MAX} = \pm A \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm 3.00 \cdot 10^{-2} m \sqrt{\frac{20.0 \text{ N/m}}{0.5 \text{ kg}}} = 0.190 \text{ m/s}$$

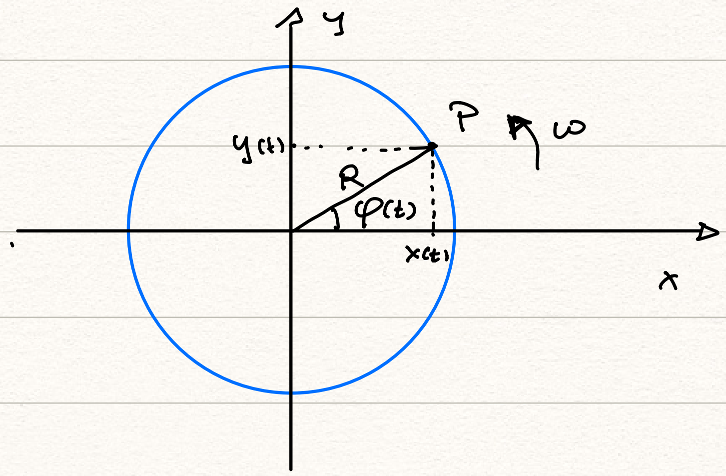
2) In $\bar{x} = 2. \text{cm}$ si ha: $\frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} k \bar{x}^2 = \frac{1}{2} k A^2$

$$\Rightarrow \bar{v} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - \bar{x}^2)} = \pm 0.141 \text{ m/s}$$

3)
$$U = \frac{1}{2} k \bar{x}^2 = 4.00 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$
$$K = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = 5.00 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

controllo che $E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 20.0 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 \text{ J} =$
$= 9 \cdot 10^{-3} \text{ J} = U + K.$

Moto armonico e moto circolare uniforme.



Raggio = R

velocità angolare $\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt}$

costante perché il moto è uniforme

Moto della coordinata x del punto: $x(t) = R\cos(\varphi(t))$

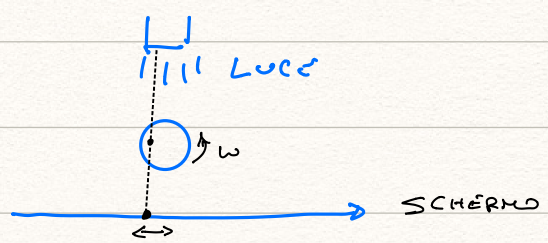
$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega \Rightarrow \varphi(t) = \omega t + \underset{\uparrow\ \text{costante}}{\phi}$$

$$\Rightarrow x(t) = R\cos(\omega t + \phi)$$ → MOTO ARMONICO con ampiezza R e fase ϕ

Inoltre: $y(t) = R\sin(\omega t + \phi) =$

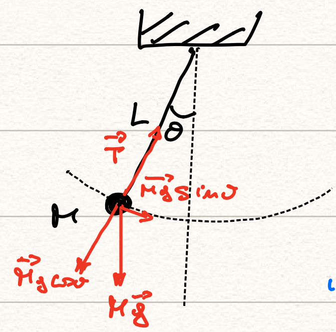
$$= R\cos(\omega t + \underbrace{\phi - \tfrac{\pi}{2}}_{\phi'})$$ → Moto armonico con ampiezza R e fase $\phi' = \phi - \frac{\pi}{2}$.

"La proiezione di un moto circolare uniforme su ciascuno degli assi, è un moto armonico unidimensionale"



Il pendolo semplice

Non solo le molle perfette realizzano un moto armonico. Un altro esempio è fornito dal pendolo semplice, nel limite in cui si considerano OSCILLAZIONI SU PICCOLI ANGOLI. Il sistema è costituito da una massa m appesa tramite un filo di lunghezza L e massa trascurabile:



Direzione radiale: $T = Mg\cos\theta$

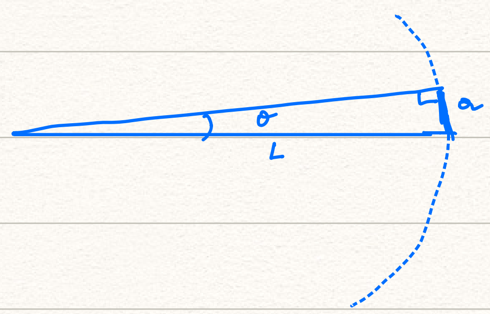
" tangenziale: $-Mg\sin\theta = M\frac{d^2(L\theta)}{dt^2}$

(L = costante) $= ML\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta}$$

equazione del pendolo valida per angoli arbitrari.

Per θ piccolo vale: $\sin\theta \simeq \theta$ in radianti.



$a = L\sin\theta$
$\simeq L\theta$ ← radianti
$\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

Se $\theta \ll 1 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$ ⇒ MOTO ARMONICO NELLA VARIABILE $\theta(t)$ CON

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T}$$

⇒ Periodo del pendolo (piccole oscillazioni)

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$ indipendente da ϑ

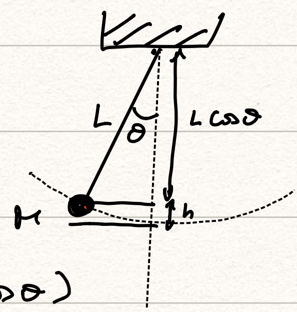
→ Legge dell'isocronismo del pendolo (G. Galilei).

Dipende solo da L. Non dipende da M!!

ES: Quanto deve essere lungo un pendolo per avere $T = 1s$?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = g\frac{T^2}{4\pi^2} = 9.80\ m/s^2\ \frac{1.00\ s^2}{4\pi} = 0.248\ m$$

Energia e pendolo:



$h = L - L\cos\theta$

$$U = Mg\ L(1-\cos\theta)$$
$$\simeq Mg\frac{L}{2}\theta^2$$

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2$$

$$E = K+U = \frac{1}{2}ML^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \frac{g}{L}\vartheta^2\right) \underset{\omega=\sqrt{g/L}}{=} \frac{1}{2}ML^2(\dot{\vartheta}^2+\omega^2\vartheta^2)$$

se il pendolo viene lasciato, inizialmente fermo, da $\vartheta = \vartheta_{max}$ ($\dot{\vartheta}=0$) $\Rightarrow$ $E = \frac{1}{2}ML^2\omega^2\vartheta_{MAX}^2 = \frac{1}{2}ML^2(\dot{\vartheta}^2+\omega^2\vartheta^2)$

→ in una posizione generica θ, la velocità angolare è

$$\dot{\vartheta}^2 = \omega^2(\vartheta_{max}^2 - \vartheta^2) \rightarrow \boxed{\dot{\vartheta} = \pm\omega\sqrt{\vartheta_{max}^2 - \vartheta^2}}$$

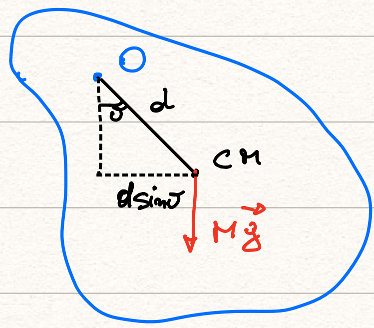
NOTA CHE $\dot{\vartheta} = 0$ in $\vartheta = \pm\vartheta_{max}$.

$\dot{\vartheta} = max$ in $\vartheta = 0$.

N.B. $\dot{\vartheta} \neq \omega$ Non confondere le due quantità, una è costante (ω) l'altro no!

Pendolo fisico

Un corpo rigido appeso per un punto in generale può oscillare. In questo caso, non si può approssimare a un pendolo semplice.



$$\tau = -Mg\,d\sin\vartheta = I\alpha = I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

I : momento di inerzia

α : accelerazione angolare

$$\Rightarrow \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{Mgd}{I}\sin\vartheta$$

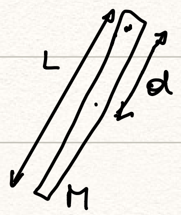
per piccoli angoli $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \simeq -\left(\frac{Mgd}{I}\right)\vartheta = -\omega^2\vartheta}$

$\sin\vartheta \simeq \vartheta$

con $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}}$ frequenza angolare

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

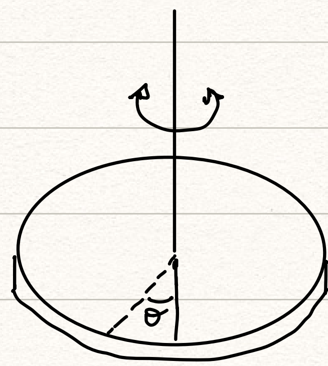
Esempio 1 Una sbarra di massa M e lunghezza L è incernierata ad una estremità e oscilla senza attrito. Trovare il periodo delle oscillazioni.



$$I = \frac{1}{3} M L^2 \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} M L^2}{M g L/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$d = L/2$$

Pendolo a Torsione



Momento di richiamo

$$\tau = -K\theta$$
$$= I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\rightarrow$ MOTO ARMONICO $\ddot{\theta} = -\frac{k}{I}\theta$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

Oscillazioni smorzate

Finora abbiamo trascurato la forza di attrito. Nel caso in cui il moto avvenga in un fluido (aria, acqua) è presente una forza che si oppone al moto in modo proporzionale alla velocità: $\vec{R} = -b\vec{v}$ dove b = coefficiente di smorzamento. L'equazione allora diventa (nel caso 1-dimensionale)

$$\Sigma F = -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Forza elastica — smorzamento — accelerazione

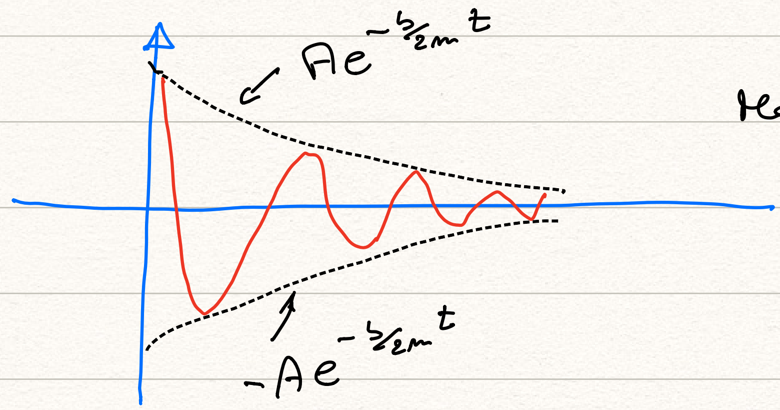
e quindi l'equazione differenziale viene modificata:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

quando $\frac{b}{m} \ll \omega_0$ la soluzione è: $x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t+\phi)$

con $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

[Provate a verificarla da soli]



moto oscillatorio smorzato

Se $\frac{b}{2m} \gtrsim \omega_0$ il sistema si smorza prima di aver compiuto una sola oscillazione.

Per effetto dello smorzamento, l'energia iniziale dell'oscillatore viene dissipata.

Oscillazioni forzate

Supponiamo ora di esercitare una ulteriore forza esterna periodica sull'oscillatore smorzato, di forma

$$F_0 \sin \omega t .$$

L'equazione totale ora è

$$F_0 \sin \omega t - Kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Per esempio $F_0 \sin \omega t$ è la forza con cui si spinge un'altalena, o la vibrazione causata dal vento su un ponte.

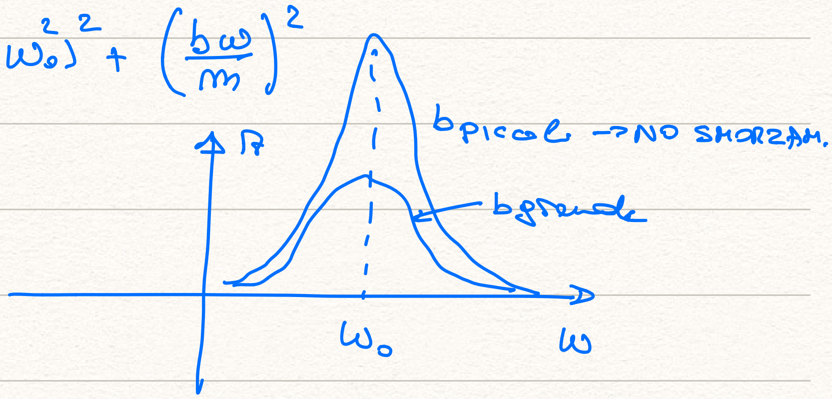
La soluzione dell'eq. è complessa, ma dopo un tempo sufficientemente lungo prende la forma

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad , \text{ dove ora}$$

ω è la frequenza angolare della forza esterna, non $\sqrt{\frac{k}{m}}$, e inoltre

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} ,$$

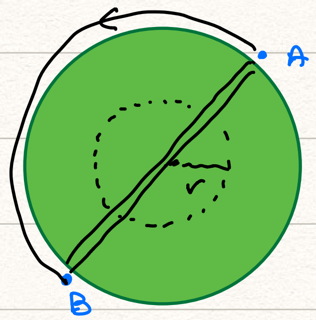
con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



L'ampiezza è massima per $\omega = \omega_0$, cioè quando la forza viene impressa con frequenza $= \omega_0$, la frequenza angolare propria dell'oscillatore. In assenza di smorzamento ($b \to 0$) l'effetto di questa "risonanza" può essere molto grande, e perfino distruttivo.

— o — o —

ESEMPIO:



Da un punto A sulla superficie terrestre vogliamo lanciare un oggetto in un punto B agli antipodi usando la forza di gravità.
Un primo modo consiste nel lanciare l'oggetto orizzontalmente con la velocità giusta per farlo orbitare fino a B. Il secondo modo consiste nello scavare un tunnel e lasciar cadere l'oggetto, passando per il centro della Terra, fino a B.
Quale dei due metodi è più veloce? Considera costante la densità della Terra.

Metodo 1: $\quad m\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{GmM}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

Per fare metà circonferenza terrestre si impiega un

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$$

tempo $T_1 = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{G 4\pi \rho_0}{3}}}$

Metodo 2: La distanza dal centro segue la legge:

$$m\ddot{r} = -\frac{G m M(r)}{r^2}$$ ← Massa contenuta in una sfera di raggio r

$$\Rightarrow \ddot{r} = -\underbrace{\left(G\frac{4\pi}{3}\rho_0\right)}_{\omega^2} r$$ moto armonico di frequenza angolare $\omega = \sqrt{\frac{G 4\pi \rho_0}{3}}$

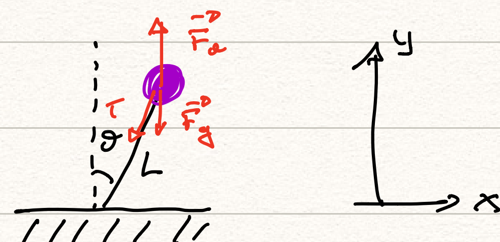
periodo $\Rightarrow \frac{2\pi}{\omega}$.

Il tempo T_2 è uguale a metà periodo: $T_2 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{G 4\pi \rho_0}{3}}}$

Quindi $T_1 = T_2$, i due percorsi richiedono esattamente lo stesso tempo!

— o — o —

ESEMPIO: Il pendolo inverso



Palloncino di massa trascurabile pieno di elio con densità $\rho_{He} = 0.179\ kg/m^3$, legato a un filo di $L = 3.00\ m$. Se il palloncino è spostato leggermente dalla posizione di equilibrio e poi rilasciato:

a) mostrare che il moto è armonico.

b) determinare il periodo del moto, assumendo una densità dell'aria pari a $\rho_{Aria} = 1.20\ kg/m^3$

Il palloncino è sottoposto a 3 forze: la tensione del filo, la spinta di Archimede, e la forza peso.

La risultante fra spinta di Archimede e forza peso è

$$\vec{F}_a + \vec{F}_g = V\rho_{Aria}\, g\, \hat{j} - V\rho_{He}\, g\, \hat{j} = V(\rho_{Aria} - \rho_{He})\, g\, \hat{j}$$

La componente lungo il filo è bilanciata dalla tensione,
La componente ortogonale agisce come forza di richiamo:

$$\rho_{He} V \frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = - V(\rho_{ARIA} - \rho_{He})\, g \sin\theta$$

per piccoli angoli $\sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = - \underbrace{\frac{g}{L}\,\frac{\rho_{ARIA} - \rho_{He}}{\rho_{He}}}_{\omega^2}\,\theta$

Moto armonico con frequenza angolare ω

Periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\dfrac{L\rho_{He}}{g(\rho_{ARIA} - \rho_{He})}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{3.00\ m\ 0.178\ kg/m^3}{9.80\ m/s^2\ (1.20 - 0.178)\ kg/m^3}}$

$\simeq 1.46\ s.$