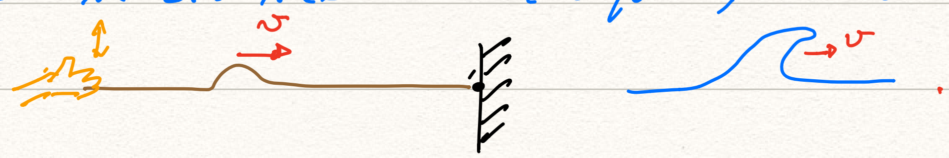
Argomento #17 — Onde e Oscillazioni

In termini del tutto generali, un'onda è un fenomeno in cui si ha trasmissione di energia attraverso lo spazio senza che ci sia trasmissione di materia.

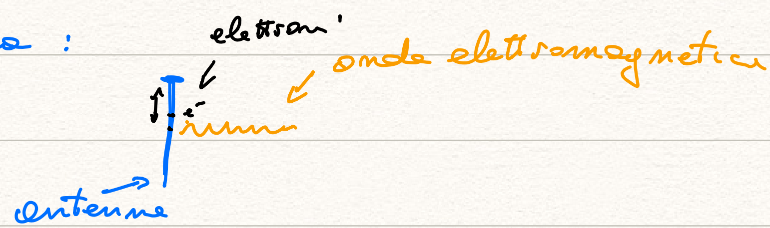
Finora abbiamo associato l'energia alla velocità (cinetica) o a uno spostamento (potenziale) di un punto materiale, di un insieme di punti; o di un corpo esteso.

Invece se consideriamo un'onda nel mare, o in una corda, vediamo che si trasmette energia senza che questo sia accompagnato da un trasferimento di materia. Quello che si propaga è una "perturbazione" nel mezzo materiale (liquido, corda):



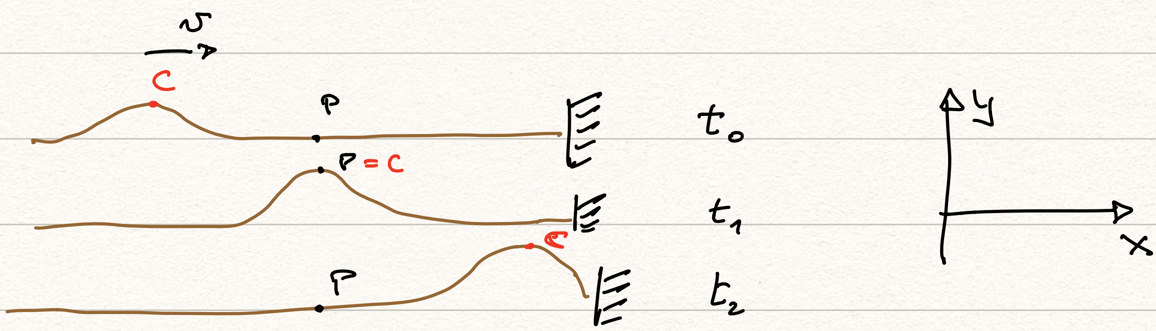
Questo tipo di onde, che hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi, vengono dette "onde meccaniche".

Esistono poi le "onde elettromagnetiche" in cui non si perturba un mezzo materiale, ma il campo elettromagnetico, per esempio a causa dell'accelerazione di una carica elettrica:



Infine, più recentemente, (2015) si sono rivelate un nuovo tipo di onde, fino ad allora solo predette in teoria, le "onde gravitazionali". In questo caso le onde sono prodotte dal moto di grandi masse, che "perturbano" lo spazio tempo. Le onde gravitazionali si propagano alla stessa velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto, indicata con $c = 299792458 \ m/s$, la velocità della luce (che è un particolare tipo di onda elettromagnetica).

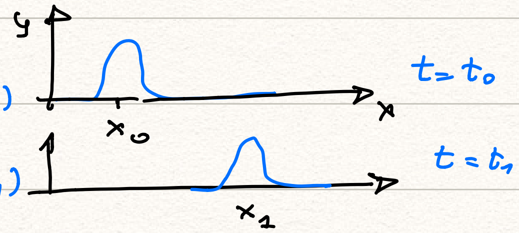
PROPAGAZIONE DI UNA PERTURBAZIONE



Il punto P si muove lungo l'asse y, l'onda, a tempi successivi occupa posizioni sempre più a destra.
La cresta dell'onda si muove con velocità v.
La forma dell'onda, scattando fotografie a tempi successivi, è sempre la stessa, ma la sua posizione si sposta.

Per esempio $\quad t = t_0 \quad y_0(x) = y(x,t_0)$

$\qquad\qquad\quad t = t_1 \quad y_1(x) = y(x,t_1)$



Nota che y_1 ha il massimo in $x = x_1$, mentre y_0 in x_0. Quindi

$y_1(x) = y_0(x - x_1 + x_0)$. Infatti, in questo modo,

$y_1(x_1) = y_0(x_1 - x_1 + x_0) = y_0(x_0)$. Le due funzioni hanno

la stessa forma, traslata della quantità $x_1 - x_0$ lungo l'asse x.

Dato che l'onda si sposta da x_0 a x_1 in un

tempo $t_1 - t_0$, ad essa è associata una velocità:

$$v = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow x_1 - x_0 = v(t_1 - t_0)$$

Quindi $y_1(x) = y_0(x - v(t_1 - t_0))$.

$y_1(t)$ è la funzione "deformazione della corda al tempo t_1".

La indicheremo con $y(x, t_1)$. A un tempo generico, t, avremo $y(x,t)$.

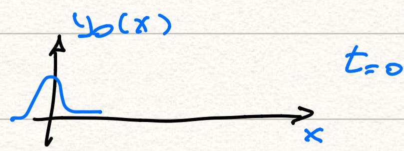
Prendiamo $t_0 = 0$, $t_1 = t$ $\Rightarrow y(x,t) = y_0(x - vt)$.

La funzione $y(x,t)$ è ottenuta dalla forma dell'onda al tempo $t=0$,

$y_0(x)$, semplicemente cambiandone l'argomento in

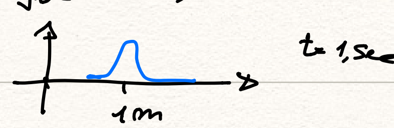
$x \to x - vt$.

ESEMPIO: $v = 1\,m/s$. $t=0$



a $t_1 = 1s$ avremo $y(x,t_1) = y_0(x - vt_1) = y_0(x - 1m)$.

Il massimo si ha per $x - 1m = 0 \Rightarrow x = 1m$ $\Rightarrow$



Se l'onda si sposta verso valori negativi di x allora l'argomento della funzione è

$$y(x,t) = y_0(x+vt) \qquad \text{(onda verso sinistra)}$$

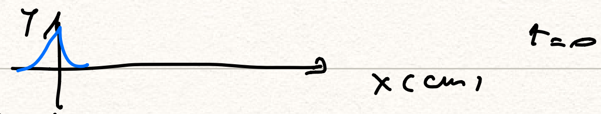
ESEMPIO: Un impulso ondoso verso destra è descritto dalla funzione d'onda

$$y(x,t) = \frac{2}{(x-3.0t)^2+1}$$

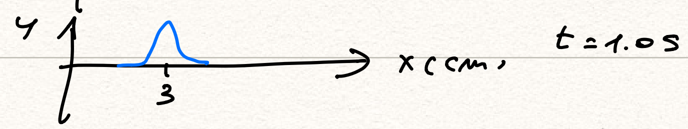
con x, y in cm e t in secondi.

Disegnare la funzione d'onda a $t=0$ s, $t=1$ s e $t=2.0$ s.

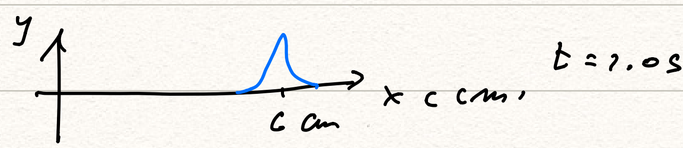
$t=0$: $y(x,0) = \dfrac{2}{x^2+1}$



$t=1$ s: $y(x,1) = \dfrac{2}{(x-3)^2+1}$



$t=2$ s: $y(x,2) = \dfrac{2}{(x-6.0)^2+1}$



La velocità dell'onda è $v=3$ cm/s.

Prova a descrivere il comportamento della funzione d'onda

$$y(x,t) = \frac{2}{(x+3.0t)^2+1}.$$

ONDA SINUSOIDALE

Un particolare tipo d'onda è quella in cui la funzione d'onda è data dalla funzione seno:

$$y(x,t) = A \sin(c(x-vt)+\phi)$$

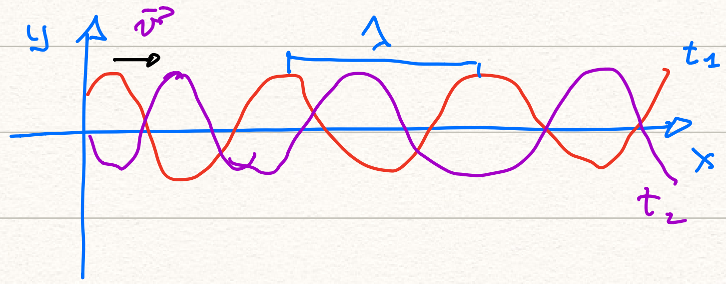
ampiezza.

(Nota che per $\phi = \frac{\pi}{2}$ questa è $A\cos(c(x-vt))$, quindi quello che diremo vale anche per onde che sono descritte dalla funzione coseno).

D'ora in poi, per semplicità di notazione, metteremo $\phi = 0$.

Dato che è funzione della combinazione $x-vt$, questa descrive una perturbazione che si muove verso la direzione dell'asse x positivo con velocità v.

A tempo t fissato il grafico y vs x è:



$t_2 > t_1$ $\quad y(x,t_1) = A\sin(c(x-vt))$

$y(x,t_2) = A\sin(c(x-vt))$

La distanza fra due creste successive è λ = lunghezza d'onda

Questa si ottiene dalla equazione

$$y(x,t) = y(x+\lambda,t) \Rightarrow$$

$$\sin((x-vt)c) = \sin((x+\lambda-vt)c) = \sin((x-vt)c+\lambda c)$$

Questo implica che $\lambda c = 2\pi \Rightarrow c = \frac{2\pi}{\lambda}$

Per cui possiamo riscrivere la funzione d'onda come

$$y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right).$$

Ora fissiamo x, per esempio $x = 0$ e guardiamo come cambia y nel tempo:

$$y(0,t) = A \sin\left(-\frac{2\pi v}{\lambda} t\right)$$

Moto armonico, con Ampiezza A, e frequenza angolare

$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$, cioè periodo:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v}}$$

relazione fra lunghezza d'onda, periodo e velocità.

Quindi possiamo riscrivere:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x,t) &= A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right) = \\ &= A \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) \end{aligned}}$$

Il moto è periodico nel tempo, per x fissato, con periodo T. Per t fissato, la forma dell'onda si ripete dopo una lunghezza λ.

Possiamo definire la frequenza f:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \,,$$ dove ω è la frequenza angolare (o PULSAZIONE)

Inoltre introduciamo il numero d'onda angolare

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} .$$

In termini di ω e k abbiamo:

$$\boxed{y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)}$$

Ricordiamo che $v = \frac{\lambda}{T}$ quindi, $v = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{K}$

$\hookrightarrow = \lambda f$.

In generale possiamo aggiungere una fase ϕ non nulla

$$\boxed{y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)}$$

Forma generale di un'onda sinusoidale

Velocità e accelerazione lungo l'asse y:

Se fisso il moto della coordinata y per x fissata, questo avrà una velocità pari a

$$v_y = \frac{dy(x,t)}{dt}\Big|_{x=\text{costante}} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega\cos(kx-\omega t+\phi),$$

$$\frac{\partial V_y(x,t)}{\partial t}$$

e un'accelerazione

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}\Big|_{x=\text{cost}} = \frac{\partial v_y(x,t)}{\partial t} = -A\omega^2\sin(kx-\omega t+\phi)$$

dove abbiamo introdotto il simbolo di derivata parziale

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \equiv \frac{dy(x,t)}{dt}\Big|_{x=\text{cost}}, \qquad \frac{\partial v_y(x,t)}{\partial t} \equiv \frac{dv_y(x,t)}{dt}\Big|_{x=\text{cost.}}$$

La velocità e l'accelerazione massime si hanno quando le funzioni sin o cos sono 1. Quindi

$$\boxed{\begin{aligned} v_{y,max} &= \omega A \\ a_{y,max} &= \omega^2 A \end{aligned}}$$

Energia e potenza trasmessa da un'onda.

Le onde trasportano energia. Studiamo il caso di una corda tesa lungo la quale si trasmette un'onda

L'energia cinetica di un tratto dm è: $dK = \frac{1}{2} dm\, v_y^2$

se μ è la massa per unità di lunghezza, $dm = \mu\, dx$

$$\Rightarrow dK = \frac{1}{2} \mu\, dx\, v_y^2$$

Ma $v_y = -\omega A \cos(kx - \omega t)$ $\Rightarrow dK = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)\, dx$

A un tempo fissato, $t = 0$, l'energia cinetica è $dK = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx)\, dx$

In una lunghezza pari a λ, la lunghezza d'onda, si ha

$$K_\lambda = \int_0^\lambda dK = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \underbrace{\int_0^\lambda \cos^2(kx)\, dx}_{= \lambda/2} =$$

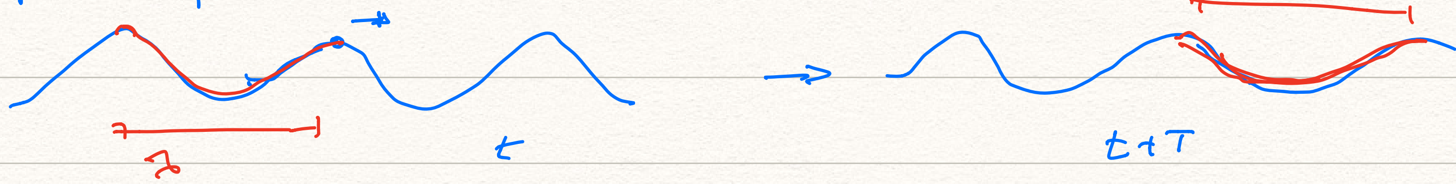
$$= \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

Oltre all'energia cinetica si ha un'energia potenziale

$$U_\lambda = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda = K_\lambda$$

Quindi: $E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$ energia contenuta in una lunghezza λ

Questa energia attraversa un punto fisso in un tempo pari al periodo dell'onda



Quindi la potenza trasferita è

$$\boxed{P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v}$$

La potenza di un onda è prop. a A^2, a ω^2, e a v.