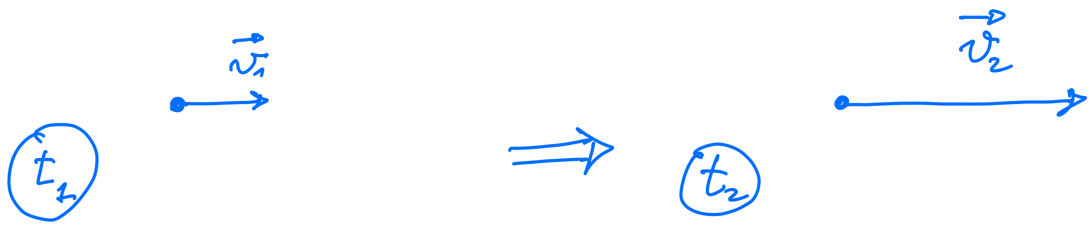
Argomento # 7 — Energia di un sistema

- Lavoro: Forza costante
- Lavoro: Forza variabile → integrali
- Energia cinetica
- Energia potenziale
- Forze conservative

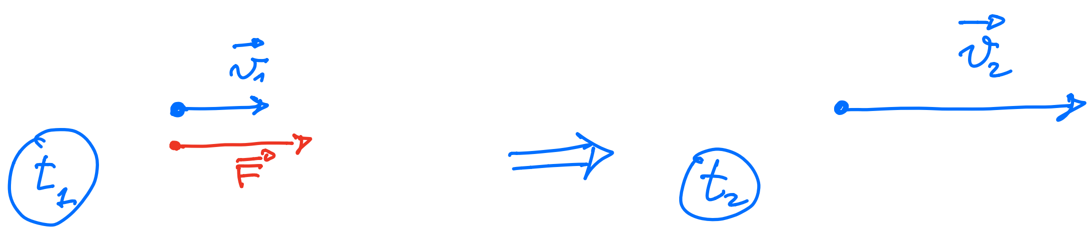
— o — o —

Supponiamo di guardare un sistema fisico in due istanti di tempo successivi. Per esempio, un punto materiale.



Se $|\vec{v}_2| \neq |\vec{v}_1|$ ne deduciamo che tra t_1 e t_2 una FORZA ESTERNA abbia agito sul sistema.

Inoltre, visto che nell'esempio in figura, il modulo della velocità è aumentato ma la direzione non è cambiata, deduciamo che la forza fosse diretta come la velocità.



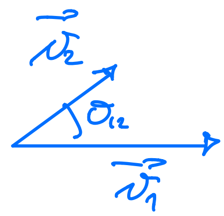
Poi ci possiamo chiedere per quanto tempo, e per quale distanza abbia agito la forza. Maggiore sarà questa distanza, maggiore sarà l'effetto sul moto del sistema.

In base a queste considerazioni definiamo il LAVORO W compiuto su un sistema da una forza esterna $\vec{F}$ (che per ora assumiamo essere COSTANTE) lungo uno spostamento $\Delta\vec{r}$ come il PRODOTTO SCALARE:

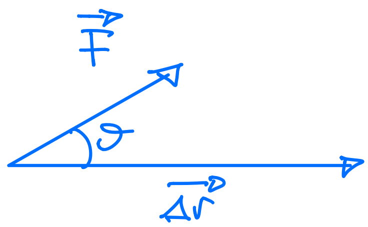
$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \qquad (\vec{F} \text{ costante})}$$

Ricordiamo la definizione di prodotto scalare:

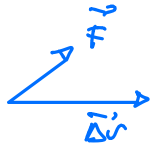
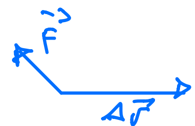
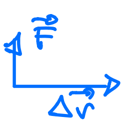
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2| \cos\theta_{12}$$



Il prodotto scalare, e quindi anche il LAVORO, è un numero!



$$W = |\vec{F}|\,|\Delta \vec{r}| \cos\theta$$

Può essere positivo (), negativo () o nullo () a seconda dell'angolo tra $\vec{F}$ e $\Delta\vec{r}$.

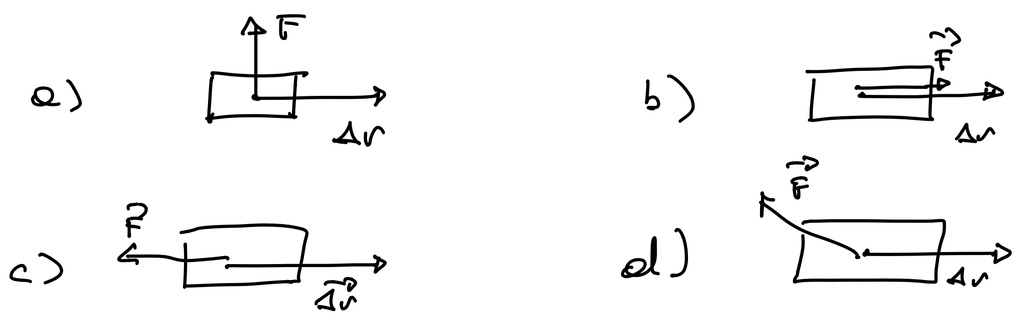
Dimensioni del lavoro: $[W] = [F][\Delta r] = [MLT^{-2}]\cdot[L] =$
$= M L^2 T^{-2}$

Si misura in $kg \cdot m^2/s^2 = N_w \cdot m$ = Joule

Newton

Unità di misura del Lavoro.

ES: $|\vec{F}|$ e $|\Delta\vec{r}|$ sempre uguali. Ordina le figure da a) a d) in ordine decrescente di W.



ES: Forza gravitazionale del Sole sulla Terra, assumendo l'orbita circolare. Il lavoro è

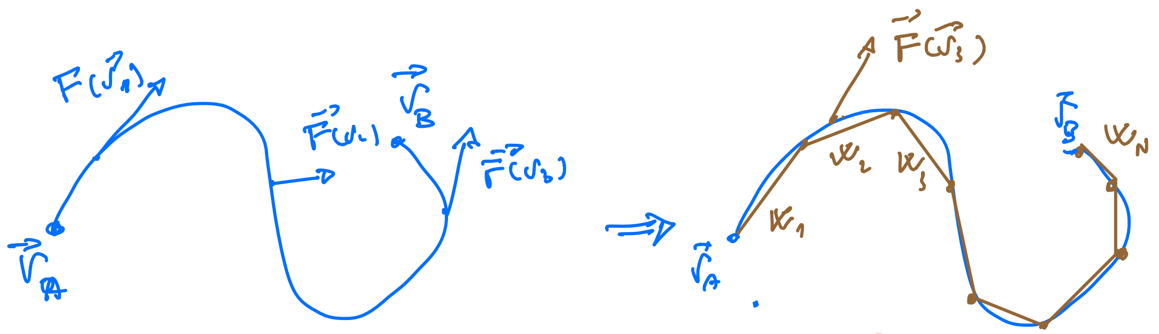
a) positivo, b) negativo, c) nullo, d) mancano dati.

Finora abbiamo discusso il caso di forza $\vec{F}$ costante. Vediamo come estendere la definizione di lavoro al caso di forza variabile. Supponiamo una forza $\vec{F}_1$ per uno spostamento $\Delta\vec{r}_1$ e poi $\vec{F}_2$ per uno spostamento $\Delta\vec{r}_2$:

Nel primo tratto ho un lavoro $W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1$, nel secondo $W_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2$. Il lavoro totale è

$$W_{1 \oplus 2} = W_1 + W_2$$

Per una traiettoria generica, su cui la forza varia, si suddivide la traiettoria in tanti tratti piccoli, su cui la forza è approssimativamente costante, e si somma il lavoro fatto. Nel limite di tratti infinitesimi (e di numero infinito di tratti) questa operazione dà il lavoro complessivo.



$$W_i = \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

$$W \simeq \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

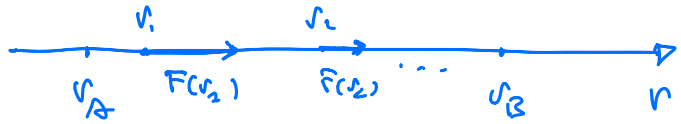
$$\boxed{W = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i \equiv \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

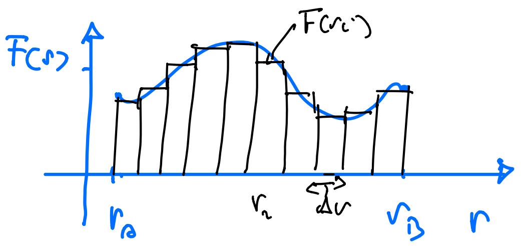
Integrale sul percorso

Caso semplificato: $\vec{F}(\vec{r}) \parallel d\vec{r}$ Forza variabile ma sempre parallela a $d\vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F(\vec{r})\, dr \cos\theta = F(\vec{r})\, dr$$

$\uparrow$ $\cos\theta = 1$

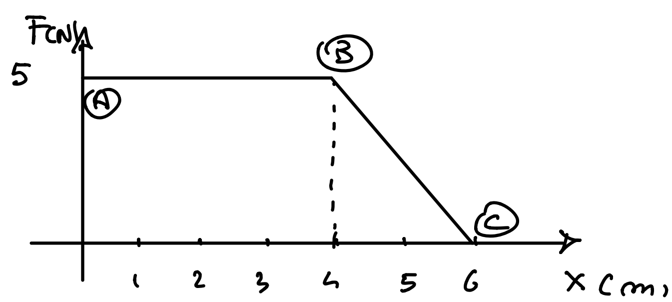




$$W \approx \sum_{i=1}^{N} F(r_i)\Delta r \xrightarrow[\substack{N \to \infty \\ \Delta r \to 0}]{} \int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr$$

Graficamente, il lavoro corrisponde all'area tra la curva $F(r)$ e l'asse r.

ESEMPIO: Una forza agente su un punto materiale varia con x come descritto in figura. Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza nello spostamento da $x=0$ a $x=6.0$ m



Tratto A → B : $F = 5$ N, $x_A = 0$, $x_B = 4$ m

" B → C F variabile linearmente da $F(4) = 5$ N a $F(6) = 0$ N.

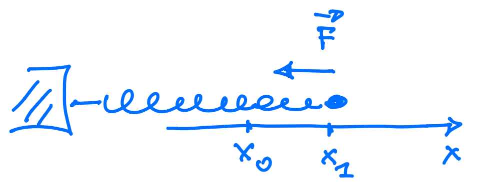
Metodo grafico: $W = W_{AB} + W_{BC}$

W_{AB} = area del rettangolo $= 5\,N \cdot 4\,m = 20\,J$

W_{BC} = " " triangolo $= \frac{5\,N \cdot 2\,m}{2} = 5\,J$

$\Rightarrow \boxed{W = 25\,J}$

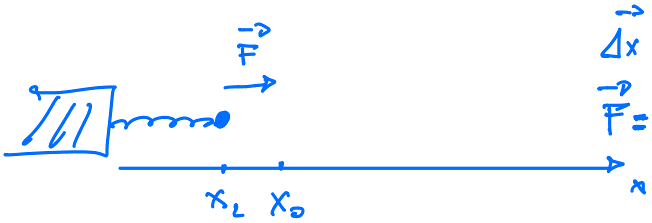
Forza elastica: Un esempio notevole di forza dipendente dalla posizione è la forza elastica, per esempio di una molla ideale.



Posizione di riposo della molla

$\vec{\Delta x} = (x_1 - x_0)\,\hat x$

$\vec F = -\underbrace{k(x_1 - x_0)}_{<0}\,\hat x$ $\quad k$ = costante elastica.



$\vec{\Delta x} = (x_2 - x_0)\,\hat x$

$\vec F = -k\underbrace{(x_2 - x_0)}_{>0}\,\hat x$

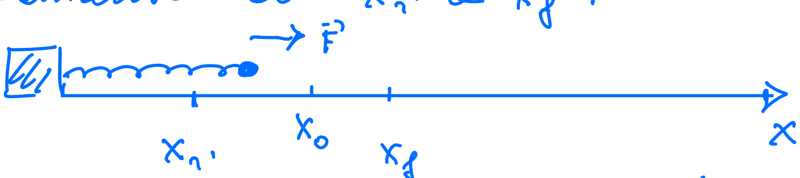
La forza ha sempre verso opposto allo spostamento:

$$\vec F = -k(x - x_0)\,\hat x$$

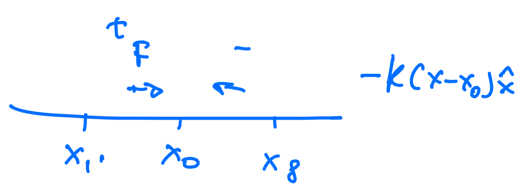
$x > x_0 \Rightarrow \vec F \,//\, -\hat x$

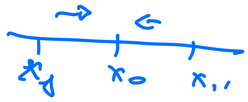
$x < x_0 \Rightarrow \vec F \,//\, \hat x$

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza elastica in uno spostamento da x_i a x_f:



$x_i \to x_0$

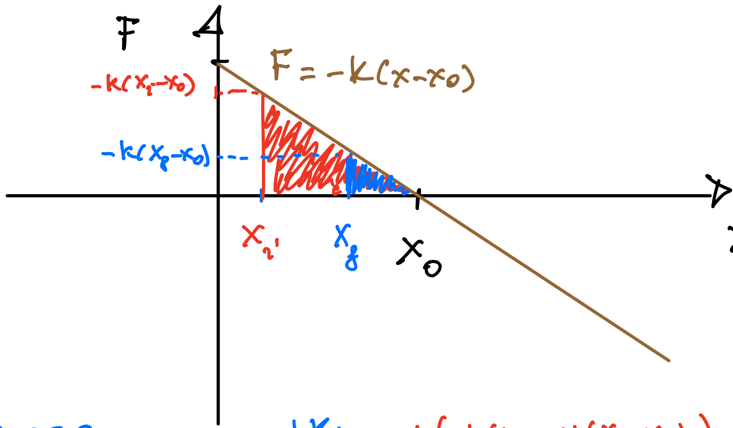




$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-k(x-x_0))\,\hat{x}\cdot d\vec{x} =$$

se $x_f > x_i$ $\quad d\vec{x}\cdot\hat{x} = dx$

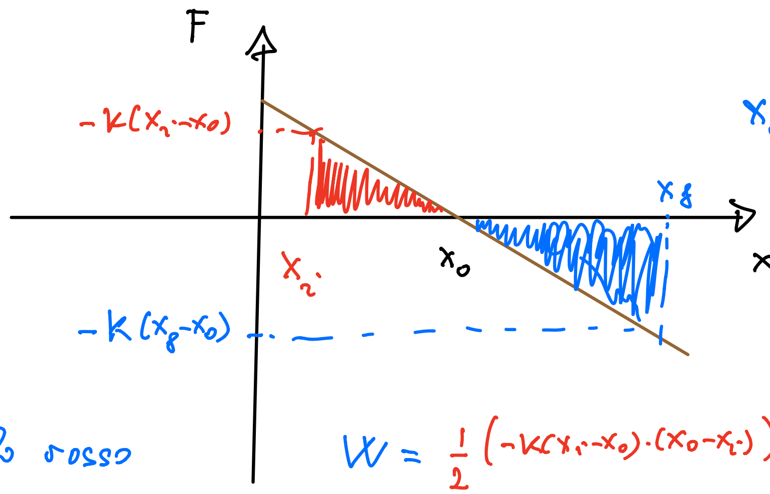
$$= -\int_{x_i}^{x_f} k(x-x_0)\,dx = -\frac{1}{2}k(x-x_0)^2\Big|_{x_i}^{x_f} = -\frac{k}{2}\left[(x_f-x_0)^2-(x_i-x_0)^2\right]$$



$x_f > x_i$

W = Area Triangolo rosso
− " " blu

$$W = \frac{1}{2}\left(-k(x_i-x_0)(x_0-x_i)\right) \quad \text{Triangolo rosso}$$
$$-\frac{1}{2}\left(-k(x_f-x_0)(x_0-x_f)\right) \quad \text{Triangolo blu}$$
$$= -\frac{1}{2}k\left[(x_f-x_0)^2-(x_i-x_0)^2\right]$$



$x_f > x_i$

Stesso risultato

W = Area Triangolo rosso
+ Area Triangolo blu

$$W = \frac{1}{2}\left(-k(x_i-x_0)\cdot(x_0-x_i)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(-k(x_f-x_0)(x_f-x_0)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}k\left[(x_f-x_0)^2-(x_i-x_0)^2\right]$$

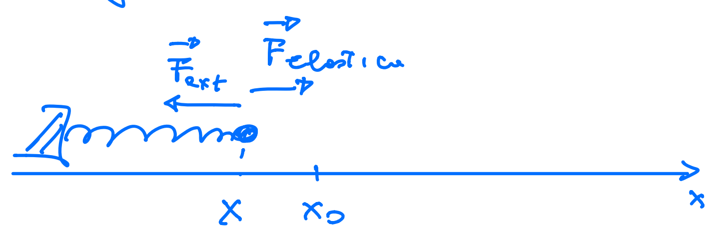
Abbiamo dovuto usare l'integrale della funzione

$$f(x) = k\cdot(x-x_0): \quad \int_{x_B}^{x_A} dx\, k(x-x_0) =$$

$$= \frac{1}{2}k\left[(x_A-x_0)^2-(x_B-x_0)^2\right]$$

<u>Nota Bene!</u> Se $x_i = x_f \Rightarrow W = 0$, indipendentemente dal percorso!

<u>Nota Bene!!</u> È sempre necessario chiarire qual è la Forza che sta compiendo lavoro. I risultati qui sopra si riferiscono al lavoro compiuto dalla forza elastica esercitata dalla molla. Supponiamo ora di voler muovere un punto materiale legato ad una molla applicando una forza esterna.



Per farlo, devo applicare una $\vec F_{ext}$ tale che $\vec F_{ext} + \vec F_{elastica} \le 0$

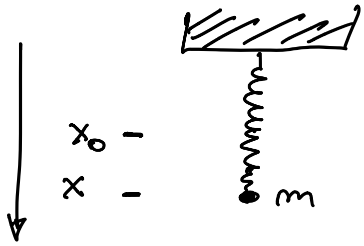
Come minimo, devo applicare

$$\vec F_{ext} = -\vec F_{elastica} = +k(x-x_0)\hat{x}$$

In questo caso, visto che la forza esterna ha segno opposto, avrò

$$\boxed{W_{ext} = -W_{elastica}}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$: Misura della costante elastica k di una molla



$m = 0.55\ kg$
$x - x_0 = 2.0\ cm$

1) determinare k, sapendo che il corpo ha massa m e la molla si allunga di $l = x - x_0$.

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow mg - k(x - x_0) = 0 \qquad k = \frac{mg}{x - x_0} = 2.7 \cdot 10^2\ N/m$$

2) Quanto vale il lavoro compiuto dalla molla sul corpo nello spostamento tra $x = x_0$ e $x = x_0 + 2\ cm$?

$$W_{el} = -\frac{1}{2} k \left((x_f - x_0)^2 - (x_i - x_0)^2 \right) = -\frac{1}{2} k \cdot (2 \cdot 10^{-2}\ m)^2 = -5.4 \cdot 10^{-2}\ J$$

$x_f = x_0 + 2\ cm$
$x_i = x_0$

$W_{el} < 0$

3) Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza di gravità sul corpo nello stesso spostamento?

$\Delta x \downarrow \ \downarrow F_g \ \Rightarrow \ W_g = + mg(x - x_0) = 0.55 \cdot 9.80 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ kg\, m/s^2 \cdot m$

$= \underline{\underline{1.1\ 10^{-1}\ J}} > 0$

Nota che $|W_g| \neq |W_{el}|$

Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica.

Applichiamo una forza su un corpo. Sappiamo, dal 2° principio della dinamica che il corpo subirà una accelerazione $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{ext}}{m}$. Possiamo allora legare il lavoro eseguito da una forza alla variazione di velocità del corpo, vediamo come.
Consideriamo per semplicità un moto unidimensionale.

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} F_{ext}\,dx \underset{F_{ext} = ma}{=} \int_{x_i}^{x_f} m\,a\,dx \underset{a = \frac{dv}{dt}}{=} \int_{x_i} m \frac{dv}{dt}\,dx \underset{\frac{dx}{dt} = v}{=}$$

$$= \int_{v_i}^{v_f} m\,v\,dv = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} M v_i^2$$

⇒ Il lavoro della forza esterna è uguale alla variazione di energia cinetica: (Teorema dell'energia cinetica, o delle forze vive)

$$W_{ext}(i \to f) = K_f - K_i \qquad \text{dove } K = \frac{1}{2} M v^2$$

ENERGIA CINETICA

Se $W_{ext} > 0 \Rightarrow K_f > K_i \Rightarrow |v_f| > |v_i|$

Se $W_{ext} < 0 \Rightarrow K_f < K_i \Rightarrow |v_f| < |v_i|$

Nota bene: vale anche per moti tridimensionali:

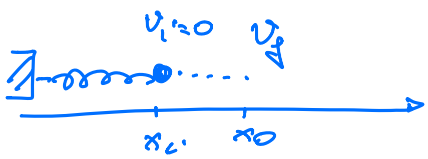
$$W_{ext} = \int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{x} = \dots = \underbrace{\frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2}_{K_f} - \underbrace{\frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2}_{K_i}$$

Dimensioni di K: $[K] = [m][v^2] = M \cdot L^2 T^{-2} = [W]$

Si misura in JOULE, come il lavoro.

Lavoro ed energia cinetica sono due forme di energia!

Nel caso delle forze elastiche: $W_{el} = -\frac{1}{2} k \left[(x_f - x_0)^2 - (x_i - x_0)^2 \right]$



da $x_i < x_0$ a $x_f = x_0$ $\Rightarrow W_{el} = \frac{1}{2} k (x_i - x_0)^2$

Questo significa che $K_f = K_i + W_{el} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} k (x_i - x_0)^2$

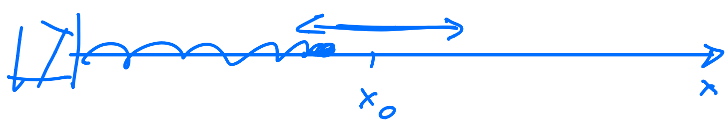
$K_i = 0$
$v_i = 0$

Ricordiamo che se $x_i = x_f \Rightarrow W_{el} = 0$.

Questo significa che $\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_i^2$

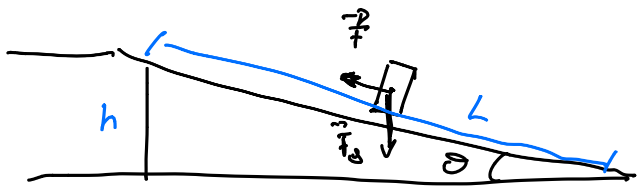
l'energia cinetica quando il corpo ripassa dallo stesso punto è sempre la stessa! (in assenza di attrito!)

Nota che il segno della velocità può cambiare, ma il modulo no:

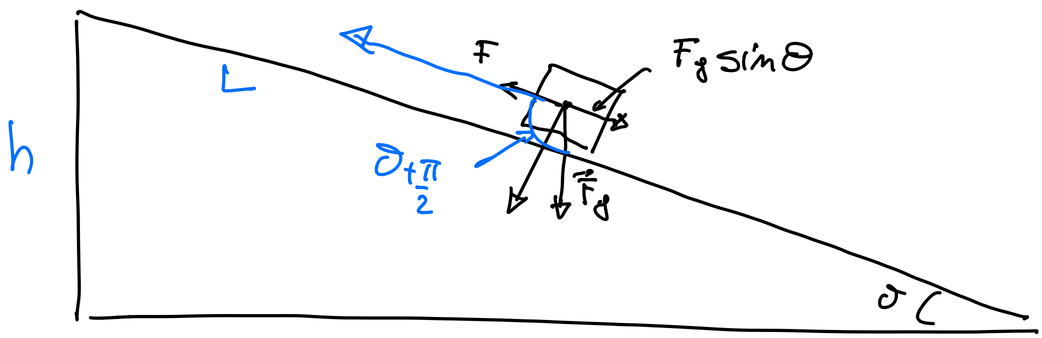


Ad ogni passaggio da $x_0 \to$ stessa velocità.

Esempio Rampa di carico:



Utilizzare una lunga rampa di carico riduce il lavoro necessario per sollevare un peso di un'altezza h?



Se l'oggetto viene fatto salire a velocità costante, $K_f = K_i$

e quindi $W_{TOT} = 0$.

Questo vuol dire che $W_F + W_{F_g} = 0$.

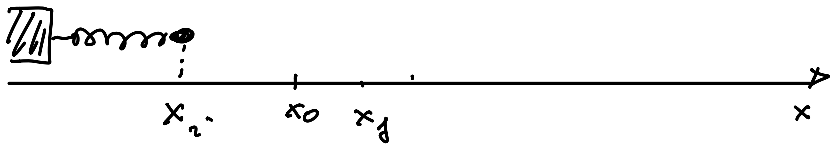
$$W_F = -W_{F_g} = -mgL\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = mg\overbrace{L\sin\theta}^{=h}$$

$$= mgh$$

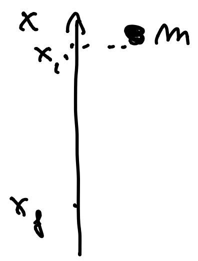
Il lavoro fatto contro la forza di gravità è lo stesso che si farebbe sollevando il peso verticalmente per la stessa altezza h.

La rampa non riduce il lavoro necessario!

Energia potenziale



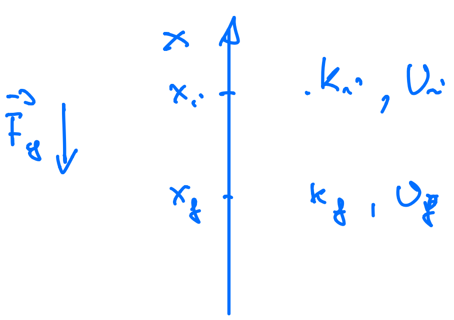
Forza elastica, compressione $x_0 - x_i$



Forza di gravità; altezza h

In entrambe queste situazioni il punto materiale, se lasciato andare da fermo, acquisterà energia cinetica, a causa del lavoro esercitato su di lui dalla forza in gioco.

Inoltre, ricordiamo che questo avverrà INDIPENDENTEMENTE da come il punto ha raggiunto quella posizione iniziale: in ogni caso, nel passaggio da x_i a x_f, SE SOTTOPOSTO UNICAMENTE alla forza in questione (elastica o gravitazionale), avrà acquistato la stessa energia cinetica. Possiamo così assegnare alla coppia di punti x_i e x_f una DIFFERENZA DI ENERGIA POTENZIALE, pari all'opposto della differenza tra le energie cinetiche nei due punti, qualora sul corpo agisca solo la forza in questione.



energia potenziale

$$\Delta U_{fi} \equiv U_f - U_i = -\Delta K = K_i - K_f$$

ES: in x_i: $v_i = 0$, $K_i = 0$ $U_i \neq 0$

x_f: $v_f = \sqrt{2g(x_i - x_f)} \Rightarrow K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = mg(x_i - x_f)$, $U_f \neq 0$

$$\Rightarrow \quad U_i - U_f = K_f - K_i = mg(x_i - x_f)$$

Allora possiamo assegnare $U_i = mgx_i$

$U_f = mgx_f$.

NOTA CHE QUELLO CHE CONTA È LA DIFFERENZA $(U_i - U_f)$.

ANCHE $U_i = mg(x_i - x_0)$, $U_f = mg(x_f - x_0)$ va bene!

Energia potenziale gravitazionale: $U_g = mgh + \text{cost}$, h = altezza rispetto a un riferimento fissato.

Dal teorema dell'energia cinetica, o anche dal calcolo diretto, vediamo che:

$$U_f - U_i = mg(x_f - x_i) = -\vec{F}_g \cdot \vec{\Delta x} = -W_g = K_i - K_f$$

$\vec{\Delta x} = -(x_i - x_f)\hat{x} = (x_f - x_i)\hat{x}$

$\vec{F}_g = -mg\,\hat{x}$

$$\boxed{W_g = K_f - K_i = U_i - U_f}$$

La differenza di energia potenziale gravitazionale tra due punti è uguale all'opposto del lavoro fatto dalla forza peso nello spostamento tra i due punti.

Nota che se $x_i = x_f \Rightarrow U_f = U_i \Rightarrow W_g = 0$ (e $K_f = K_i$).

Energia potenziale elastica:

Nel caso della forza elastica abbiamo visto che il lavoro esercitato dalla molla sul corpo è

$$W_{el} = -\frac{k}{2}\left[(x_f - x_0)^2 - (x_i - x_0)^2\right] \quad (*)$$

In analogia con quanto fatto per la forza gravitazionale, possiamo introdurre una ENERGIA POTENZIALE ELASTICA che soddisfa

$$W_{el}(x_i \to x_f) = U_i - U_f \quad (**)$$
$$= K_f - K_i$$

dove la seconda uguaglianza è il teorema dell'energia cinetica. Confrontando le equazioni (*) e (**) abbiamo

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \text{cost}$$

Notiamo che, come nel caso della forza gravitazionale,

1) l'energia potenziale dipende solo dalla posizione x, e non da come è stata raggiunta tale posizione (dal percorso);
2) l'energia potenziale è definita a meno di una costante che, nel caso della forza elastica, possiamo mettere a zero.

$$\rightarrow U_{el}(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Con questa scelta, vediamo che $U_{el}(x)$ è sempre ≥ 0.
Il valore $U_{el}=0$ si ha per $x=x_0$, cioè nella posizione di riposo della molla.

Consideriamo ancora la molla:

Se $v_i=0$, $K_i=0$. $\quad U_i=\frac{1}{2}k(x_i-x_0)^2$

Lasciando andare la molla, quando passa da x_0 si ha:

$$U_0=0 \qquad K_0 = K_i + W(x_i\to x_0) = 0+\frac{1}{2}k(x_i-x_0)^2$$

Quindi notiamo che
$$\underbrace{U_0}_{0}+\underbrace{K_0}_{\frac{1}{2}k(x_i-x_0)^2} = \underbrace{U_i}_{\frac{1}{2}k(x_i-x_0)^2}+\underbrace{K_i}_{0}$$

Inoltre $K_0=\frac{1}{2}m v_0^2$

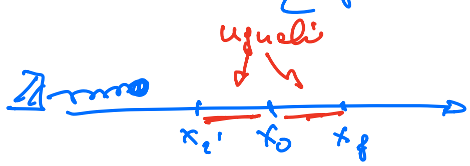
$$\Rightarrow v_0 = |x_i-x_0|\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Se prosegue, chiediamoci il valore massimo raggiunto da x, x_f:

in x_f si ha $v_f=0 \to K_f = 0 = K_0 + W(x_0\to x_f)$

$$W(x_0\to x_f) = -\frac{k}{2}(x_f-x_0)^2$$
$$= -K_0 = -\frac{1}{2}m v_0^2$$
$$\Rightarrow (x_f-x_0)^2 = \frac{m}{k}v_0^2 = \frac{\cancel{m}}{\cancel{k}}\frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}(x_i-x_0)^2$$

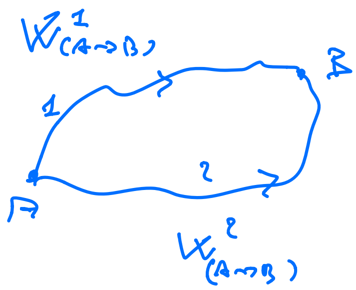
$$\Rightarrow x_f-x_0 = \pm(x_i-x_0) \Rightarrow \begin{cases} x_f=x_i \\ x_f = 2x_0-x_i \Rightarrow x_f-x_0 = x_0-x_i \end{cases}$$



$\Rightarrow$ La massa si ferma in due posizioni: $x = x_i$ e $x = 2x_0 - x_i$, entrambi alla stessa distanza $d = x_0 - x_i$ da x_0.

Quindi, nel caso di forze elastiche e gravitazionali, si ha

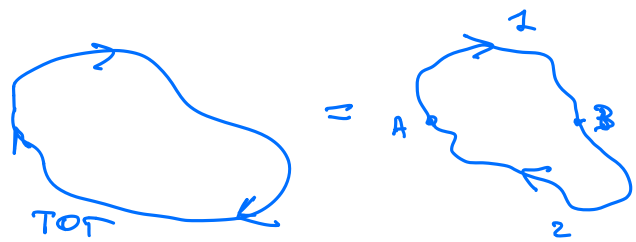
1) Il lavoro compiuto dalle forze tra due punti non dipende dal percorso;
2) Il lavoro compiuto lungo un percorso chiuso è nullo:



$$W^1_{(A\to B)} = W^2_{(A\to B)}$$

per ogni percorso

Percorso chiuso:



$$W_{TOT} = W^1_{(A\to B)} + W^2_{(B\to A)} = W^1_{(A\to B)} - W^2_{(A\to B)}$$

$$= 0$$

$W^1_{(A\to B)} = W^2_{(A\to B)}$

Poiché il lavoro non dipende dal percorso, è stato possibile introdurre l'energia potenziale (che dipende solo dalla posizione: $U_g = mgx$, $U_{el} = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$).

Forze che soddisfano la 1) o la 2) (sono condizioni equivalenti) si dicono FORZE CONSERVATIVE. In questo caso abbiamo visto che la somma $K+U$ è uguale in ogni posizione → si "conserva" durante il moto.

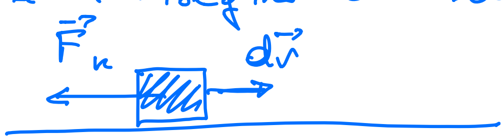
Esistono però anche forze NON CONSERVATIVE: un esempio è la forza di attrito:

Posso partire da x_{in} e rimanere in x_{in} $\Rightarrow W_k = 0$

Ma posso partire da x_{in}, e fare una lunga traiettoria per poi tornare in x_{in} $\Rightarrow W_k \neq 0$

$\Rightarrow$ Il lavoro della forza di attrito dipende dal percorso fatto!

Qual è il segno del lavoro di $\vec{F}_k$? $\vec{F}_k \cdot d\vec{r} < 0$



la forza si oppone sempre allo spostamento $\Rightarrow W_k < 0$.

$\Rightarrow$ Teorema dell'energia cinetica applicato alle forze di attrito:

$$K_f = K_i + \underbrace{W_k(i\to f)}_{<0} < K_i$$

$K_f < K_i \Rightarrow$ l'effetto dell'attrito è di diminuire l'energia cinetica

$\Rightarrow$ Non è possibile definire un'energia potenziale per una forza di attrito.

Dove va a finire l'energia cinetica? $\rightarrow$ calore tra le superfici.

Relazione tra energia potenziale e forza.

Abbiamo introdotto l'energia potenziale come:

$$\Delta U = U_f - U_i = K_i - K_f = -W(i\to f),$$

dove la seconda uguaglianza è il Teorema dell'energia cinetica.

$$U(x_f) - U(x_i) := -W(i\to f) = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

che possiamo anche usare per definire la funzione $U(x)$:

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(y)\,dy \; .$$

Se prendo la derivata rispetto a x ho: (ricorda, integrale e derivata sono l'una l'inversa dell'altra)

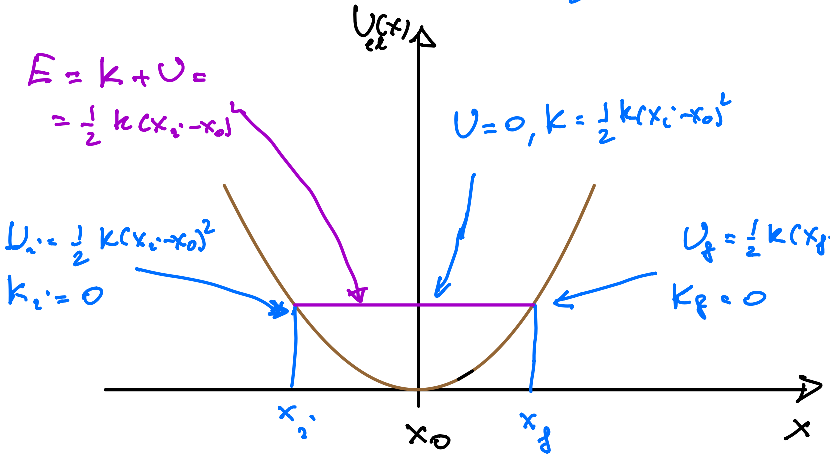
$$\frac{dU(x)}{dx} - 0 = -F(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$

$\Rightarrow$ Per una forza non conservativa, la derivata del potenziale rispetto a x è uguale a meno la forza in x.

Verifichiamolo nei due con visti finora:

1) Campo gravitazionale: $U_g = mgx \Rightarrow F_g = -\dfrac{dU_g}{dx} = -mg$ OK

2) Forza elastica: $U_{el} = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \Rightarrow F_{el} = -\dfrac{dU_{el}}{dx} = -k(x-x_0)$



$|x_0 - x_i| = |x_f - x_0|$

$F(x_0) = 0$

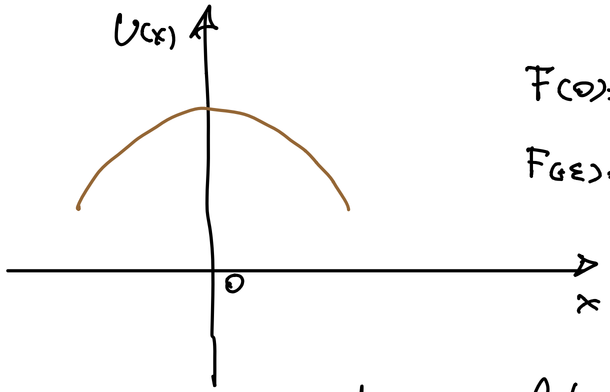
$F(x_0 + \varepsilon) = -k\varepsilon < 0$

$F(x_0 - \varepsilon) = +k\varepsilon > 0$

$\Downarrow$

$x = x_0$ punto di equilibrio stabile, perché la forza in x_0 è nulla, e se mi sposto di poco a destra o a sinistra la forza mi spinge all'indietro.

Se avessi un potenziale della forma come in figura:



$$F(0) = -\frac{dU}{dx} = 0$$

$$F(\varepsilon) = -\frac{dU}{dx}\Big|_{x=\varepsilon} > 0 \qquad F(-\varepsilon) = -\frac{dU}{dx}\Big|_{x=-\varepsilon} < 0$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile.

Relazione tra potenziale e forza nel caso 2 e 3-dimensionale:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$