Argomento II 14

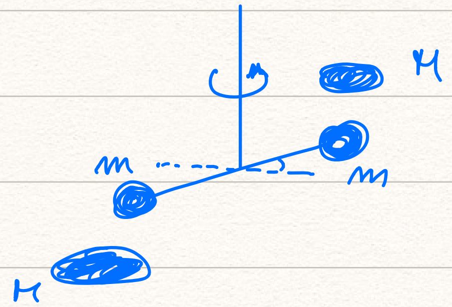
La Gravitazione Universale

1687: Newton pubblica i' "Mathematical principles of Natural Phylosophy". Quest'opera contiene la Legge di gravitazione universale: "Ogni punto materiale dell'Universo attrae ogni altro punto materiale con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza reciproca".

Espressa in forma matematica, per due corpi di massa m_1 e m_2 e distanza r, il modulo della forza è:

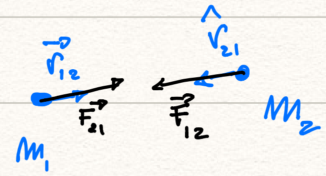
$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \, ,$$

dove $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \ N\, m^2/kg^2$ è nota come costante di gravitazione universale, o "costante di Newton". Questa fu misurata per la prima volta da Cavendish nel 1798, più di cento anni dopo la formulazione della legge da parte di Newton!



bilancia a torsione

Esprimiamo la legge di Newton in forma vettoriale:



$$\boxed{\vec F_{21} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat r_{21}}$$

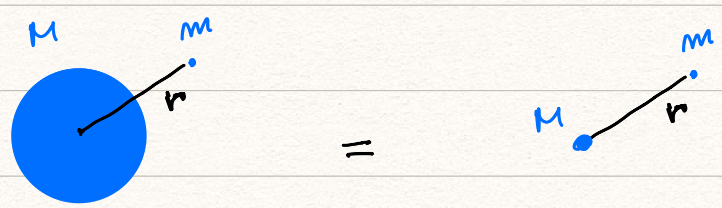
Forza esercitata da 2 su 1

e $\vec F_{12} = -G\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat r_{12} \underset{\hat r_{12} = -\hat r_{21}}{=} +G\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat r_{21} = -\vec F_{21}$

$\Rightarrow \boxed{\vec F_{12} = -\vec F_{21}}$ d'accordo col terzo principio della dinamica.

Nota bene:

1) La forza cala col quadrato della distanza: es., se la distanza raddoppia, la forza si riduce a $\frac{1}{4}$;

2) 

La forza esercitata da una distribuzione sferica di massa totale M su un punto di massa m a distanza r dal centro è uguale alla forza esercitata da una distribuzione puntiforme di massa M posta alla stessa distanza r. Questa è una conseguenza della dipendenza $\frac{1}{r^2}$ della forza di gravità.

Accelerazione g e forza gravitazionale

Finora abbiamo espresso la forza di gravità vicino alla superficie terrestre come

$$\vec{F}_g = m\,\vec{g},$$

dove $|\vec{g}| = 9.80\ m/s^2$ è l'accelerazione di gravità. Ora possiamo capire il significato di $\vec{g}$. Una massa m è attratta verso il centro della Terra con una forza di modulo:

$$\frac{G\,m\,M_T}{R_T^2} = m\,g.$$

Da cui, vicino alla superficie terrestre $g = \dfrac{G M_T}{R_T^2} = 9.80\,m/s^2$

Salendo di quota, a un'altezza h rispetto al livello del mare avremo,

$$g(h) = \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2},$$

quindi g decresce all'aumentare della quota h.

Ex: $g(1000\ km) \simeq 7.33\ m/s^2$

$g(5000\ km) \simeq 3.08\ m/s^2$

ESEMPIO: Usando il fatto che $g(h=0) = 9.80\ m/s^2$ calcolare la densità della Terra:

$$g(h=0) = \frac{G M_T}{R_T^2} \qquad \rho_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M_T}{\frac{4\pi}{3} R_T^3}$$

$$\Rightarrow g = G \rho_T \frac{4\pi}{3} R_T \quad \Rightarrow$$

$$\rho_T = \frac{3}{4\pi} \frac{g}{G R_T} = \frac{3}{4\pi} \frac{9.80\ m/s^2}{6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2\ 6.37 \cdot 10^6 m} = 5.5 \cdot 10^3\ kg/m^3$$

(ricorda: $N = kg\ m/s^2$)

<u>ESEMPIO</u>: Peso della Stazione Spaziale Internazionale

Sulla superficie della Terra peserebbe $4.22 \cdot 10^6$ N. Orbita a una quota di 350 km. Quanto vale il suo peso in orbita? (= quanto vale la forza gravitazionale che la Terra esercita sulla Stazione Spaziale?).

Peso sulla terra: $F_g(h=0) = G \frac{m_s M_T}{R_T^2} = 4.22 \cdot 10^6 N$

Peso in orbita: $F_g(h=350 km) = G \frac{m_s M_T}{(R_T + h)^2} = ?$

Prendiamo il rapporto tra le due equazioni:

$350 \cdot 10^3$

$$\frac{F_g(h=350\,km)}{F_g(h=0)} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

$$\Rightarrow F_g(h=350\,km) = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} F_g(h=0) = \frac{(6.37 \cdot 10^6\,m)^2}{(6.37 \cdot 10^6 + 3.50 \cdot 10^5)^2 m^2} F_g(h=0)$$

$$= 0.90\, F_g(h=0) = \underline{\underline{3.80 \cdot 10^6\, N}}$$

In orbita, il peso della S.S.I. è 10% inferiore rispetto che a Terra.

Domanda: E il peso degli astronauti? Perché li vediamo fluttuare senza peso?

Le tre leggi di Keplero

1453 Niccolò Copernico propone il modello Eliocentrico:

Le Terra e i pianeti orbitano attorno al Sole.

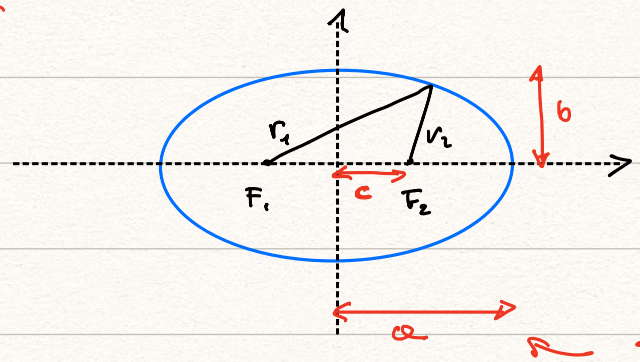
Fine '500: Tycho Brahe esegue osservazioni astronomiche sul moto dei pianeti.

Inizio '600 → Giovanni Keplero, allievo di Brahe, formula 3 leggi sul loro moto:

1) Tutti i pianeti percorrono orbite ellittiche, in cui il Sole occupa uno dei fuochi;
2) Il raggio vettore che unisce il Sole a un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali;

3) Il quadrato del periodo orbitale di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita ellittica. La costante di proporzionalità è uguale per tutti i pianeti.

1 Legge: Le orbite non sono cerchi perfetti; ma ellissi



$r_1 + r_2 =$ costante

$a^2 - b^2 = c^2$ ← posizione del fuoco

semiasse minore

semiasse maggiore

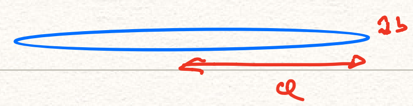
Nota che $c = 0$ equivale a una circonferenza $(a = b = r)$

Per misurare quanto un'ellisse differisce da una circonferenza, si definisce l'ECCENTRICITÀ:

$$e \equiv \frac{c}{a}$$

$e = 0 \rightarrow$ circonferenza

$e = 1 \Rightarrow c = a, \; b = 0$



l'eccentricità può assumere valori $0 \leq e \leq 1$

La prima legge dice che le orbite sono ellittiche e il Sole occupa uno dei due fuochi:

Le orbite dei pianeti hanno eccentricità varie:

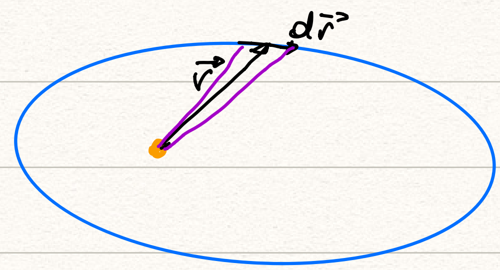
$e_{Terra} = 0.017$ (quasi circonferenza)

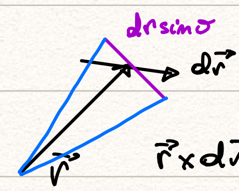
$e_{Mercurio} = 0.21$ (la più alta tra i pianeti)

$e_{Halley} = 0.97$

↗
Cometa

2ª Legge





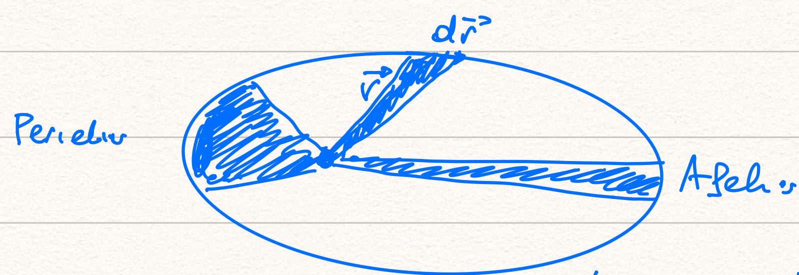
$\vec{r} \times d\vec{r} = r\,dr\sin\theta$

$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2M_p}|\vec{r} \times (M_p\vec{v})| = \frac{L}{2M_p}$$

Dato che il momento angolare L è costante, e anche la massa del pianeta lo è, $\frac{dA}{dt}$ = costante.

→ In tempi uguali, il vettore Sole - pianeta copre aree uguali.



Come conseguenza, il pianeta va più veloce quando è più vicino al Sole (perielio) e più lento all'afelio.

Questa legge è una conseguenza della conservazione del momento angolare : $\vec{L} = \vec{r} \times (M_p \vec{v})$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \underset{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{perché } \vec{v} \parallel \vec{P}}}{\vec{v} \times \vec{P}} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 \text{ perché } \vec{F} \propto \hat{r},$$

cioè perché la forza è "centrale"

La seconda legge di Keplero è una conseguenza del fatto che la forza di gravità è "centrale". $\vec{F}_g \propto \hat{r}$.

3° Legge: Le terza legge di Keplero discende invece dal fatto che la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Proviamolo nel caso di orbite perfettamente circolari: In questo caso il moto è circolare uniforme e la forza di gravità è uguale alla forza centripeta:

$$G \frac{\cancel{m_p} M_s}{r^2} = \cancel{M_p} \underbrace{\frac{v^2}{r}}_{\text{accelerazione centripeta}}$$

Dato che $v = \frac{2\pi r}{T}$, abbiamo:

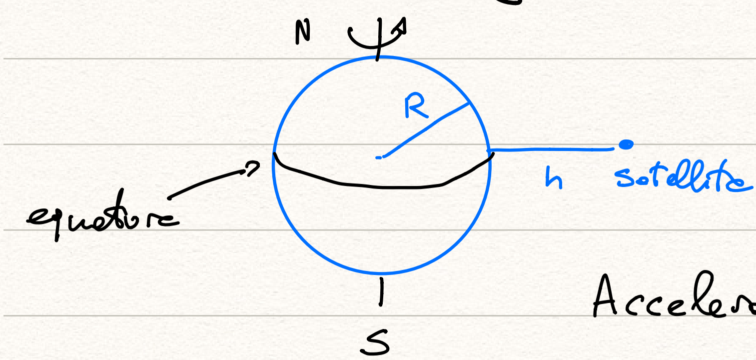
$$G \frac{M_s}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} \Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{G M_s} r^3}$$

"Il quadrato del periodo è proporzionale al cubo del raggio dell'orbita. Nel caso di un'ellisse, il raggio è sostituito dal semiasse maggiore":

Nota che la costante di proporzionalità non dipende dalla massa del pianeta, ma solo da quella del Sole.

DOMANDA: Se considerassimo l'orbita della Luna attorno alla Terra la legge sarebbe ancora valida?

ESEMPIO: Determinare la quota di un satellite in orbita geostazionaria.



Accelerazione centripeta = Acc. gravitazionale

$$\frac{v^2}{R+h} = G\frac{M_T}{(R+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R+h}}$$

Satellite geostazionario: periodo di rotazione = 24 h.

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM_T}}$$

$$\Rightarrow R+h = \left(\frac{G_T M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \qquad h = \left(\frac{G_T M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$$

$$h = \left(\frac{6.67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\; 5.97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\;(86400\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - 6.37\cdot 10^{6}\,\mathrm{m} =$$

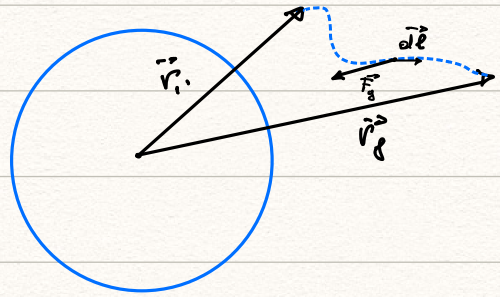
$$= 3.6\cdot 10^{7}\,\mathrm{m} = 36000\ \mathrm{km}$$

Energia potenziale gravitazionale

Ricordiamo che nel caso in cui la forza di gravità può essere approssimata costante, come succede se si rimane vicino alla superficie terrestre, $\vec{F}_g = m\vec{g}$, avevamo ottenuto l'espressione $U = mgy$ per la differenza di energia potenziale fra il suolo e l'altezza y.
Ora vogliamo trovare l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale valida in generale, cioè anche per grandi cambiamenti di quote.

La differenza di energia potenziale è definita come il lavoro fatto dalla forza gravitazionale, cambiato di segno:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(r)\cdot d\vec{l}$$



$$\vec F_g \cdot d\vec\ell = -\frac{G M_T m}{r^2}\,\hat r\cdot d\vec\ell = -\frac{G M_T m}{r^2}\,dr$$

← Conta solo la variazione della distanza rispetto al centro della Terra!

$$d\vec\ell = dr\,\hat r + r\,d\theta\,\hat t$$

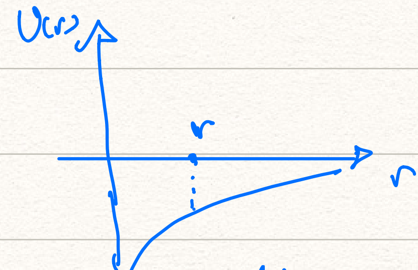
$$\hat r\cdot\hat r = 1 \qquad \hat r\cdot\hat t = 0$$

$$\Rightarrow \Delta U = U_f - U_i = +\,G M_T m\int_{r_i}^{r_f}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= G M_T m \left.\frac{-1}{r}\right|_{r_i}^{r_f} = -G M_T m\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right)$$

Scegliamo un punto di riferimento in cui fissiamo $U=0$. Nel caso della forza costante $\vec F = -mg\hat y$ avevamo scelto la superficie della Terra: $U(y=0)=0 \Rightarrow U(y)=mgy$.
In questo caso scegliamo $r=\infty$: $U(\infty)=0$. Allora, mandando $r_i\to+\infty$ nel risultato precedente si ha

$$U(r) = -\frac{G M_T m}{r}.$$



Questa espressione può essere interpretata come l'opposto del lavoro compiuto dalla forza di gravità per portare il corpo di massa m da $r=\infty$ a r.

Oppure come il lavoro (cambiato di segno) necessario per una forza esterna per allontanare il corpo da r all'infinito.

$$W_{ext} = U(\infty) - U(r) = \frac{G M_T m}{r} > 0$$

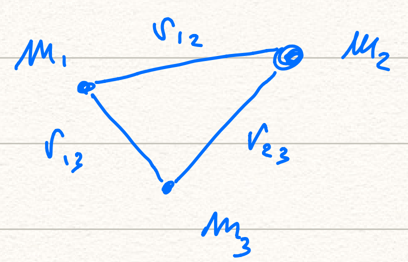
$$= \int_r^{\infty} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r}$$

Questa quantità si chiama anche "energia di legame": è l'energia necessaria per liberare la massa m dall'attrazione gravitazionale della Terra.

Questo risultato vale per qualunque due masse, non solo nel caso della Terra:

$$m_1, m_2, r \implies U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}.$$

Nel caso di più punti materiali l'energia potenziale gravitazionale totale è data dalla somma dei contributi di ogni coppia di punti. ES. per 3 masse



$$U_{TOT} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right)$$

$-U_{TOT}$ rappresenta l'energia necessaria per portare le 3 particelle a distanza infinita le une dalle altre.

ES: Dimostra che per variazioni di quota $\Delta y \ll R_T$ la variazione di energia potenziale gravitazionale può essere approssimata come $\Delta U \approx m g \Delta y$.

$$\Delta U = U_f - U_i = -G M_T m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

$r_i = R_T + y_i$

$r_f = R_T + y_f$ con $y_i, y_f \ll R_T$

$$\Delta U = +G M_T m \frac{r_f - r_i}{r_f \cdot r_i} = G M_T m \frac{y_f - y_i}{R_T^2 + R_T(y_f + y_i) + y_f y_i}$$

$$= \underbrace{\frac{G M_T m}{R_T^2}}_{g} \frac{y_f - y_i}{1 + \underbrace{\frac{y_f + y_i}{R_T} + \frac{y_f y_i}{R_T^2}}_{\ll 1}} \simeq g m \underbrace{\Delta y}_{y_f - y_i}$$

Energia totale nel moto di pianeti e satelliti.

Consideriamo un corpo di massa m e posizione $\vec{r}$ e uno di massa M e posizione $\vec{R}$.

Dato che non ci sono forze esterne l'energia totale è conservata.

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 - G \frac{Mm}{r} = \text{cons.}$$

Anche il momento totale lo è:

$$\vec{P}_{TOT} = M\vec{V} + m\vec{v} = \text{cons.}$$

Il centro di massa del sistema si trova in

$$\vec{r}_{CM} = \frac{M\vec{R} + m\vec{r}}{M + m}$$, e la sua velocità

è $$\vec{v}_{CM} = \frac{M}{M+m}\vec{V} + \frac{m}{M+m}\vec{v} .$$

Se ora assumiamo che $M >> m$ abbiamo:

$$\vec{r}_{CM} \simeq \vec{R} ,$$

e $$\vec{v}_{CM} \simeq \vec{V} .$$

Possiamo quindi metterci nel sistema di riferimento inerziale in cui il baricentro è fermo, e questo coincide con quello in cui il corpo pesante è fermo se $M >> m$.

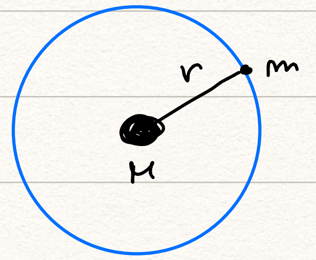
In questo riferimento, M ha energia cinetica nulla e quindi l'energia totale è:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \qquad (\vec{V} = 0)$$

Dato che E è conservata, se la sua distanza dal centro passa da r_i a r_f la sua velocità cambia secondo la relazione:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 - GmM\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

Nota che E può essere sia positiva, che nulla, che negativa. Per un corpo su un orbita stabile $E < 0$: infatti assumiamo per semplicità un'orbita circolare:



$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

Quindi $E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r} = +\frac{1}{2} G\frac{Mm}{r} - G\frac{mM}{r} =$

$$= -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} < 0$$

Questo corrisponde col fatto che per "liberare" il corpo m dall'attrazione gravitazionale di M devo fornirgli energia (es: accendere i razzi).

ESEMPIO: Calcolare il lavoro necessario per spostare un satellite di $m = 470\,kg$ da un'orbita di 280 km sulla superficie terrestre a un'orbita geostazionaria. Assumendo le orbite circolari:

$R_T = 6.37\cdot 10^6\,m$

$$E_i = -\frac{GmM_T}{2r_i}, \quad E_g = -G\frac{mM_T}{2r_g}$$

$r_i = R_T + 280\,km$

$r_g = R_T + 36000\,km$

$$\Delta E = E_g - E_i = -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{r_g} - \frac{1}{r_i}\right)$$

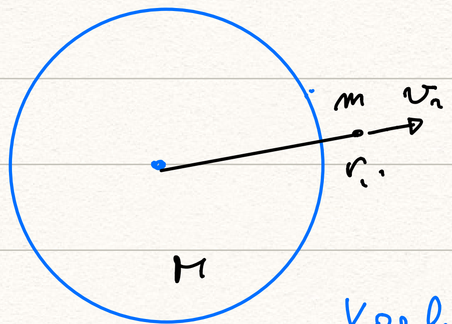
$$= -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.97\cdot 10^{24}\cdot 470}{2}\left(\frac{1}{4.22\cdot 10^{7}} - \frac{1}{6.65\cdot 10^{6}}\right) =$$

$$= 1.18\cdot 10^{10}\,J$$

~ corrisponde a circa 350 litri di benzina

Velocità di fuga.

La conservazione dell'energia può essere utilizzata per calcolare la velocità iniziale minima necessaria per sfuggire all'attrazione gravitazionale di un corpo M, partendo da distanza r_i dal suo centro:



$$\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GmM}{r_i} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GMm}{r_f}$$

Vogliamo che m raggiunga $r_f \to \infty$,

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{GMm}{r_i}$$

Al minimo, deve avere una velocità iniziale tale che $\frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{GMm}{r_i}$, in questo caso $v_f \to 0$ all'infinito. Questa velocità iniziale minima si chiama velocità di fuga:

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM}{r_i}}$$

Nota che non dipende dalla massa m del corpo in fuga.

Dalla superficie terrestre ($r_i = R_T$, $M = M_T$)

$$\rightarrow v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11 \ km/s .$$