Argomento # 15

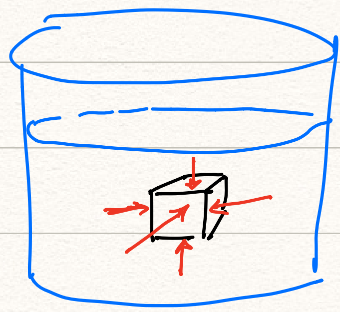
Meccanica dei fluidi

* Pressione
* Pressione e profondità
* Spinta di Archimede
* Eq. di Bernoulli

— o — o —

Fluido: un insieme di molecole, distribuite casualmente e tenute insieme da deboli forze di coesione. Sia i liquidi che i gas sono fluidi.

La forza che un fluido esercita su una superficie è sempre perpendicolare alla superficie stessa.



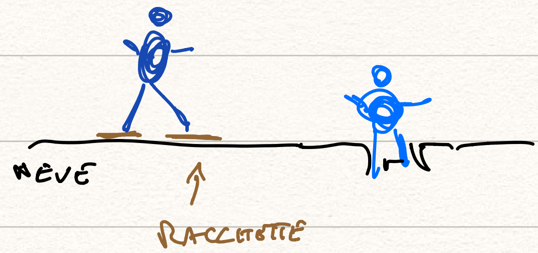
Superficie di area A.

Pressione: Rapporto fra forza e superficie alla quale è proporzionale: $P = \frac{F}{A}$

Se la pressione non è costante su tutta la superficie,

$$P = \frac{dF}{dA}$$ ← Forza sulla sup. infinitesima dA.

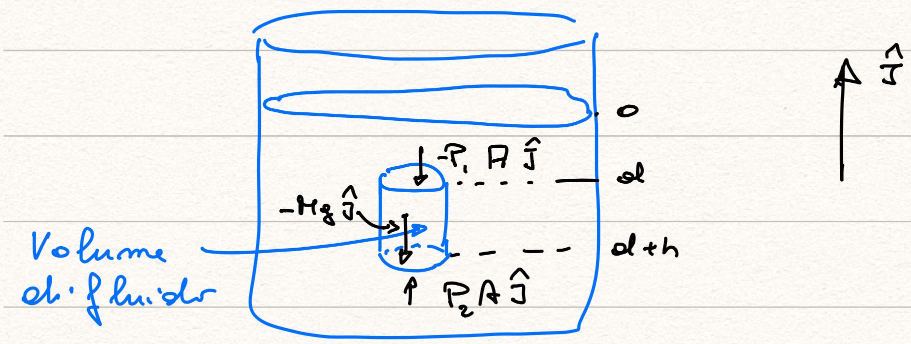
La pressione si misura in PASCAL: $1\,Pa = \frac{1\,N}{m^2}$.



Stessa forza peso, ma distribuita su superfici diverse → diverse pressioni.

Variazione di pressione con la profondità in un fluido incomprimibile.

Incomprimibile ⇒ densità $\rho = \frac{M}{V}$ uguale in ogni punto.



Consideriamo un cilindro immaginario di fluido, immerso in un fluido identico. Dato che questo non si muove, la risultante delle forze applicate lungo $\hat{J}$ si annulla:

$$-Mg\,\hat{J} - P_1 A\,\hat{J} + P_2 A\,\hat{J} = 0$$

Forza peso — Pressione sulla faccia superiore — Pressione sulla faccia inferiore

$$\Rightarrow (P_2 - P_1)A = +Mg$$

$M = \rho V = \rho A h$

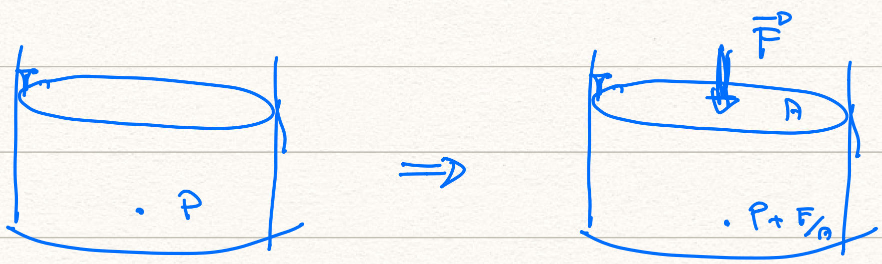
$$(P_2 - P_1)\cancel{A} = \rho \cancel{A} h g$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2 - P_1 = \rho g h}$$

La pressione in un fluido di densità ρ aumenta con la profondità h di una quantità $\rho g h$.

Notiamo che la pressione dipende solo dalla profondità e da niente altro: per esempio non dipende dalla direzione.

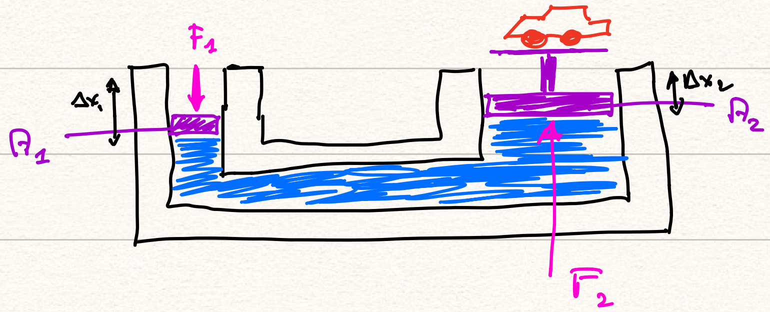
Principio di Pascal: una variazione di pressione applicata ad un fluido viene trasmessa invariata ad ogni altro punto del fluido e alle pareti del contenitore.



Pressione iniziale nel punto indicato: P

Applicando una forza $\vec{F}$ su un pistone di area A, la pressione aumenta di una quantità F/A in ogni punto.

Applicazione del principio di Pascal: Pressa idraulica



Pressione nel tubo 1: $P_1 = \frac{F_1}{A_1}$

" " " 2: $P_2 = \frac{F_2}{A_2}$

Principio di Pascal: $P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 > F_1$

$\Rightarrow$ Applicando una piccola forza su una piccola superficie posso generare una grande forza sulla superficie A_2, e quindi sollevare un peso molto maggiore.

Dato che il volume del fluido è incomprimibile,

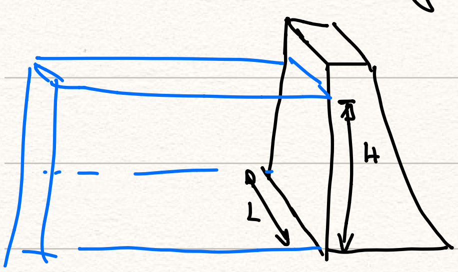
$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$

Quindi il lavoro fatto dalla forza 1 è

$$F_1 \Delta x_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} \Delta x_1 = F_2 \Delta x_2 \quad \text{lavoro di } F_2.$$

Quindi il lavoro fatto per sollevare il peso è fornito interamente dalla forza che schiaccia il pistone 1.

ESEMPIO: La forza su una diga.



Diga di larghezza L e acqua ad altezza H.

Trovare la forza risultante sulla diga.

La pressione dipende dalla profondità:

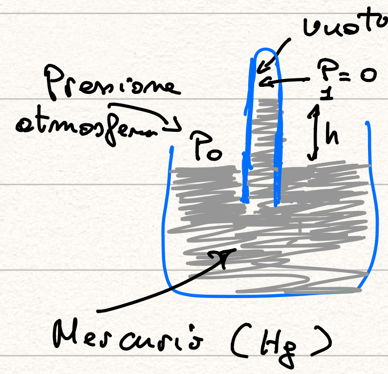
$$P(h) = \rho g h \Rightarrow dF = P(h)\, dA = P(h)\, L\, dh = \rho g L\, h\, dh$$

$$F(H) = \int_0^H dF = \rho g L \int_0^H h\, dh = \frac{1}{2} \rho g L H^2$$

Notare che la forza aumenta come H^2, non come H. Quindi raddoppiando l'altezza della diga, la forza che essa deve sopportare quadruplica.

Pressione atmosferica.

Esperienza di Torricelli (1608 - 1647):



$$P_0 - P_1 = \rho_{Hg}\, g\, h$$

$P_1 = 0 \Rightarrow$ pressione atmosferica $P_0 = \rho_{Hg}\, g\, h$

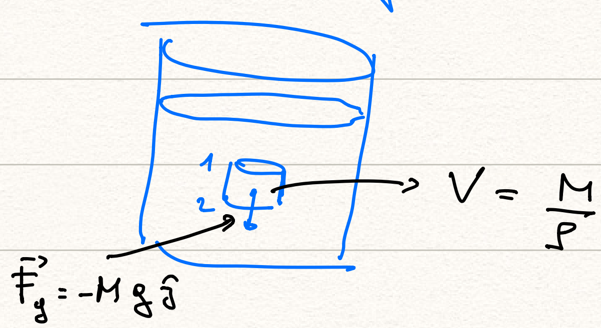
La misura da' $h = 0.760\ m$. Conoscendo $\rho_{Hg} = 13.6 \cdot 10^3\ Kg/m^3$

$$\Rightarrow P_0 = 1.013 \cdot 10^5\ Pa \equiv 1.00\ atm$$

Atmosfera

Spinta di Archimede e galleggiamento.

Torniamo al cilindro di fluido immerso nel fluido circostante:



Su esso agisce una forza peso pari a Mg. Come mai non si muove? Il fluido circostante deve esercitare sul volume V una forza pari a Mg verso l'alto.

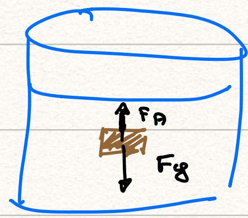
Infatti: $P_2 - P_1 = Mgh \Rightarrow F_2 - F_1 = P_2 A - P_1 A =$

$= A \rho g h = \rho V h = Mg$

Questo vale anche se, invece di essere occupato dallo stesso fluido, il volume V e' occupato da un corpo di densità diversa:

"Un corpo immerso in un fluido di volume V riceve una spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato, cioè $F_A = \rho_{fluido} V g$. Questa forza si dice SPINTA DI ARCHIMEDE".

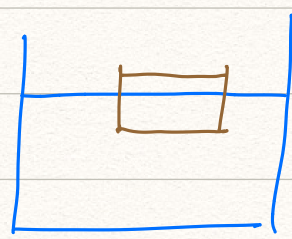
→ Se $\rho_{corpo} > \rho_{fluido}$



$$\vec{F}_A = V \rho_{fluido}\, g\, \hat{j}$$
$$\vec{F}_g = -V \rho_{corpo}\, g\, \hat{j}$$

⇒ il corpo affonda.

→ Se $\rho_{corpo} < \rho_{fluido}$ il corpo sale in superficie e, all'equilibrio, galleggerà.



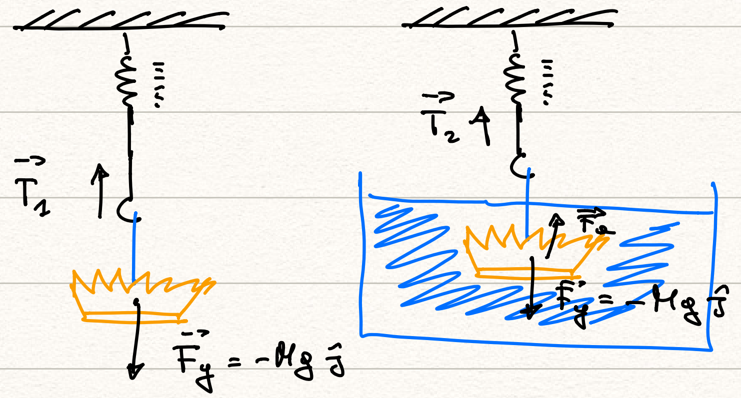
In questa situazione,

$$\rho_{corpo} V_{corpo}\, g = \rho_{fluido} V_{immerso}\, g$$

Quindi la frazione del Volume totale che e' immerso è data da:

$$\frac{V_{immerso}}{V_{corpo}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_{fluido}} < 1 .$$

Esempio: La corona di Archimede. Determinare se una corona è di oro massiccio oppure no, attraverso due pesate, una in aria (→ 7.84 N) e una con la corona immersa in acqua (→ 6.84 N).



Prima pesata: $T_1 = Mg = F_g$

Seconda pesata $\underbrace{T_2 + F_a}_{\uparrow\ \text{spinta di Archimede}} = F_g$

$$F_a = Mg - T_2 = V\rho g - T_2$$

$$\hookrightarrow = V\rho_{H_2O}\, g$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_{H_2O} + \frac{T_2}{Vg} = \rho_{H_2O} + \frac{T_2\,\rho_{H_2O}}{F_a} =$$

$$Vg = \frac{F_a}{\rho_{H_2O}}$$

$$= \rho_{H_2O}\left(1 + \frac{T_2}{Mg - T_2}\right)$$

$$= \rho_{H_2O}\,\frac{Mg}{Mg - T_2} = \frac{1000\,\mathrm{kg/m^3}\ 7.84\,\mathrm{N}}{(7.84 - 6.84)\,\mathrm{N}} = 7.84\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$$

La densità della corona è di $7.84\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Quella dell'oro zecchino è di $19.3\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ $\Rightarrow$ La corona non è di oro massiccio!

ESEMPIO: Quale frazione dell'iceberg è sommersa in acqua?

$\rho_{H_2O,liq} = 1030\, kg/m^3$

↑ Acqua di mare

$\rho_{H_2O,ghiaccio} = 917\, kg/m^3 \Rightarrow \dfrac{V_{SOMMERSO}}{V_{TOTALE}} = \dfrac{\rho_{ghiaccio}}{\rho_{ACQUA}} = \dfrac{917}{1030} = 89\%$

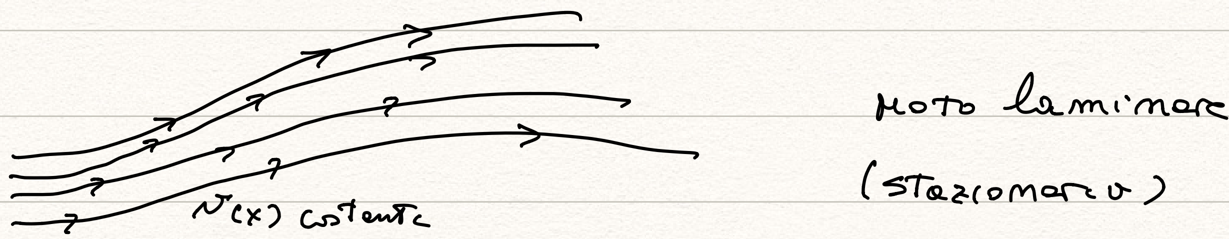
Quindi il 90% del volume di un iceberg è sommerso

Fluidodinamica

Fino ad ora abbiamo considerato fluidi a riposo (= fluidostatica). Ora estendiamo la trattazione al caso in cui i fluidi siano in movimento.

In generale, la trattazione è complicata dal fenomeno della "Turbolenza", che si realizza quando la velocità supera un certo valore critico e il moto diventa disordinato e presenta la formazione di vortici. (ES: onde prodotte da un motoscafo, getto d'aria emesso da un phon a massima potenza, ...).

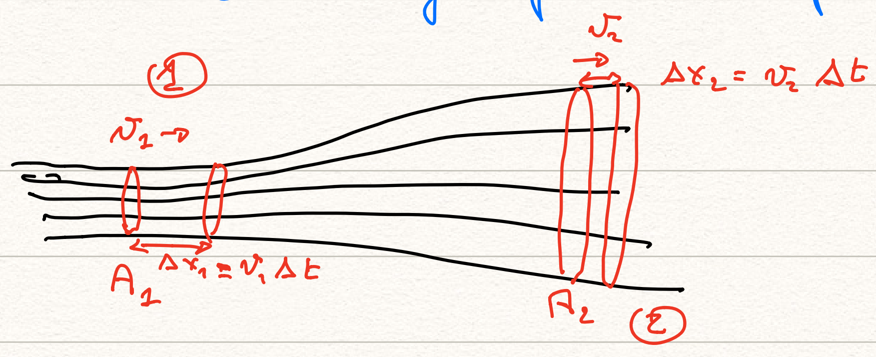
Noi ci limiteremo a considerare fluidi in moto laminare: questo è un regime in cui le traiettorie delle singole particelle di fluido non si intersecano, e la velocità del fluido in un punto si mantiene costante.



Inoltre trascureremo la VISCOSITÀ del fluido, ossia l'attrito tra porzioni di fluido in moto relativo tra di loro.

Considereremo inoltre, come fatto in precedenza, fluidi incompressibili:

Consideriamo per cominciare una situazione in cui la variazione di quota sia trascurabile, per cui possiamo trascurare la forza di gravità e quindi le variazioni di energia potenziale gravitazionale.



Le linee nere rappresentano le "LINEE DI CORRENTE", ossia le traiettorie delle singole particelle di fluido.

In 1 le linee di corrente considerate in figura attraversano un'area A_1 con velocità v_1. In ② attraversano un'area A_2 con velocità v_2. Dato che il fluido è incompressibile, in uno stesso intervallo di tempo Δt la stessa quantità di fluido deve passare per ① e per ②. Questo è dato da

$$\rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_2 \Delta x_2 ,$$

dove $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$ e $\Delta x_2 = v_2 \Delta t$

$$\Rightarrow \cancel{\rho} A_1 v_1 \cancel{\Delta t} = \cancel{\rho} A_2 v_2 \cancel{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2} ,$$

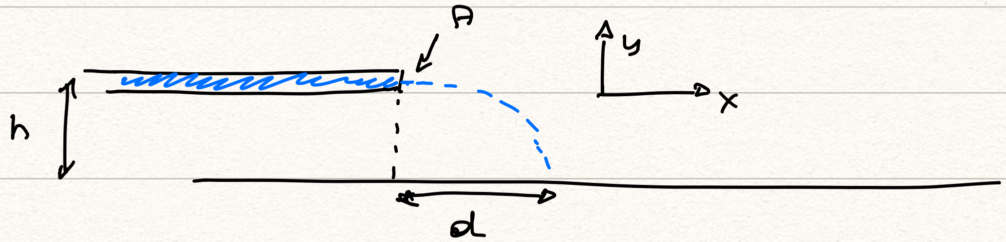
e questo vale per ogni altra sezione di fluido. Questa espressione si chiama "equazione di continuità" ed esprime il fatto che la massa di un fluido incomprimibile non si crea e non si distrugge.

L'eq. di continuità ci dice che, per un fluido in moto stazionario, riducendo la sezione la velocità aumenta.
Es: tubo per innaffiare. Moto di una folla in una strettoia...

Il prodotto Av si chiama "PORTATA". $[Av] = L^3 T^{-1}$

La portata ha le dimensioni di volume/tempo.

ESEMPIO: Un tubo può riempire una tanica da 30 litri in un minuto. Se l'estremità del tubo ha una sezione di 0.500 cm² e il tubo è disposto orizzontalmente a un'altezza di 1m rispetto al suolo, trovare la distanza alla quale l'acqua uscita dal tubo raggiunge il suolo.



$h = 1m$

$A = 0.500\ cm^2$

Portata: $R = Av = 30\ \text{litri}/\text{minuto} = 3 \cdot 10^{-2}\ m^3/60\ sec = 5 \cdot 10^{-4}\ m^3/sec$

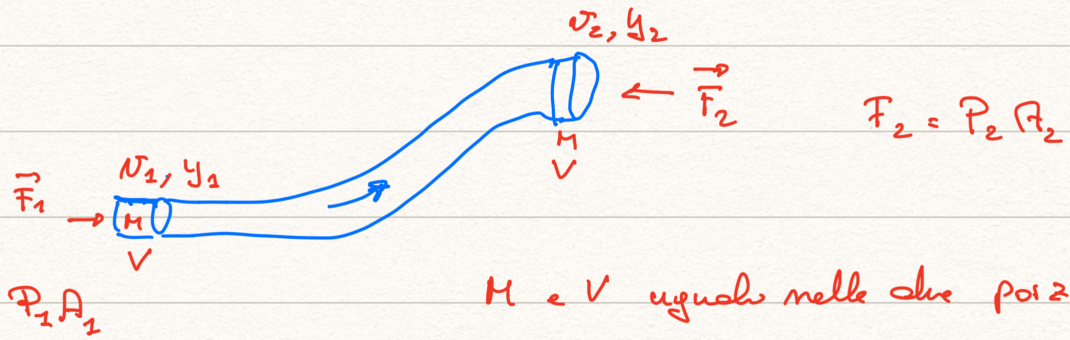
$$\begin{cases} y = h - \frac{1}{2} g t^2 \\ x = 0 + v t \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2} \qquad x = d = v \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2} = \frac{R}{A}\left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{5 \cdot 10^{-4}\ m^3/s}{5 \cdot 10^{-5}\ m^2} \left(\frac{2 \cdot 1m}{9.80\ m/s^2}\right)^{1/2} = 4.52\ m$$

L'equazione di Bernoulli

Ora consideriamo il caso più generale, in cui il fluido possa subire dei cambiamenti di quota, e quindi di energia potenziale gravitazionale. Anche la velocità, come abbiamo visto, può cambiare, e quindi varia anche l'energia cinetica del fluido in diversi punti del moto.



Il lavoro delle due forze esterne, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ dovute alla pressione del fluido prima e dopo il tubo di flusso preso in esame, causa una variazione dell'energia totale:

$$W = P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 =$$
$$= (P_1 - P_2) V$$
$$= \frac{1}{2} M v_2^2 + M g y_2 - \frac{1}{2} M v_1^2 - M g y_1$$

Nota che, dato che il moto è laminare, la variazione di energia meccanica nel tratto tra (1) e (2) è zero.

Usando $M = \rho V$,

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 = \text{cost}}$$

EQUAZIONE DI BERNOULLI

Nel caso in cui il fluido sia fermo, $v_1 = v_2 = 0$, riotteniamo

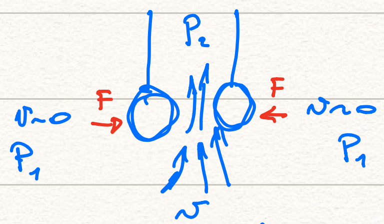
$$P_2 - P_1 = \rho g (y_1 - y_2),$$

già ottenuta in precedenza.

Nel caso di variazioni di quota nulle, $y_1 = y_2$, abbiamo

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho (v_1^2 - v_2^2)$$

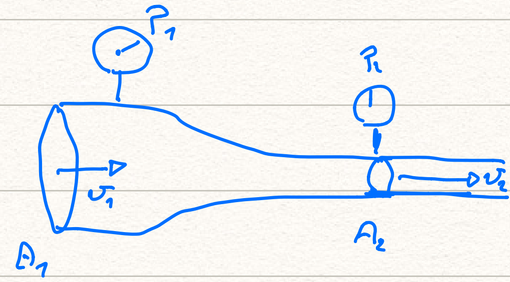
Cioè nelle regioni a velocità più elevata si ha una pressione minore → effetto Bernoulli



$$P_2 < P_1$$

Soffiando aria nello spazio tra due palloncini si crea una differenza di pressione rispetto allo spazio esterno, che fa avvicinare i due palloncini

ESEMPIO: Il tubo Venturi.



Può essere usato per misurare le velocità v_1, v_2, conoscendo P_1, P_2, A_1 e A_2

Eq. di Bernoulli: $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

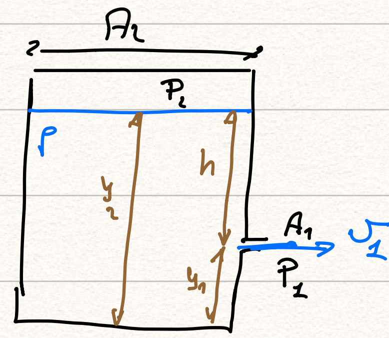
" " continuità: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)$$

$$= P_1 - P_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 = \left(\dfrac{2(P_1-P_2)}{\rho(A_1^2-A_2^2)}\right)^{\frac{1}{2}} A_1 \\ v_1 = \dfrac{A_2}{A_1} v_2 = \left(\dfrac{2(P_1-P_2)}{2(A_1^2-A_2^2)}\right)^{1/2} A_2 \end{cases}$$

ESEMPIO Legge di Torricelli.



Larghezza del foro $A_1 << A_2$.

Trovare la velocità di uscita dell'acqua dal foro.

$y_2 = h + y_1$

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1$$

$$A_2 v_2 = A_1 v_1 \quad \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \ll v_1$$

$\uparrow$ $A_2 >> A_1$

→ Trascuriamo $\frac{1}{2}\rho v_2^2$. $\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 - P_1 + \rho g (y_2 - y_1)$

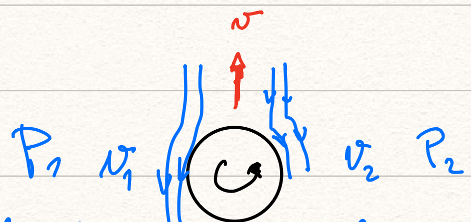
$$\Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho} + 2gh}$$

Se apriamo il serbatoio in alto → $P_2 = P_1$ ⇒ $v_1 = \sqrt{2gh}$

⇒ "la velocità di efflusso è uguale alla velocità di un corpo in caduta libera dall'altezza h"

<u>Legge di Torricelli</u>.

ES: "Effetto" su un pallone (o una pallina)



A causa dell'attrito fra pallone e aria $v_1 > v_2 \Rightarrow P_1 < P_2$

⇒ La pressione a sinistra è inferiore a quella a destra

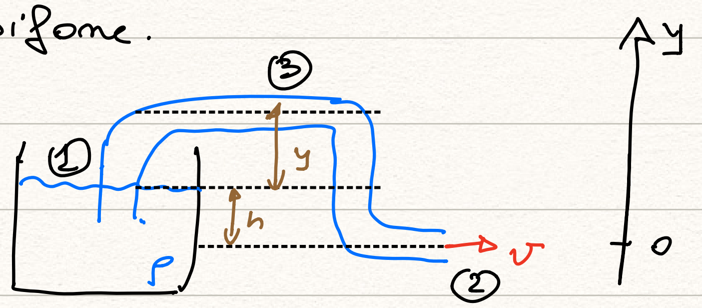
→ La traiettoria si incurva verso sinistra.

ESEMPIO: Aeroplano vola alla quota di 10km, dove la pressione esterna è $P_{ext} = 0.287$ atm. All'interno la pressione è $P_{int} = 1$ atm. Uno dei finestrini ha un piccolo foro. Trovare la velocità di uscita dell'aria dal foro.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \Delta P = P_{int} - P_{ext}$$

$$\Rightarrow v = \left(\frac{2\Delta P}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\,(1-0.287)\,1.013\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}}{1.29\ \mathrm{kg/m^3}}\right)^{1/2} \simeq 335\ \mathrm{m/s}$$

ESEMPIO: Il sifone.



Flusso stazionario senza attrito. Trovare la velocità v sapendo che $h = 1.00\ \mathrm{m}$.

$$(1):\quad P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h \underset{v_0=0}{=} P_0 + \rho g h$$

$$(2)\qquad P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$(1) = (2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \qquad \boxed{v = \sqrt{2gh} = 4.43\ \mathrm{m/s}}$$

Calcolare la pressione in (3): $P_3 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y$

$$(3) = (2) \Rightarrow P_3 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2} + \rho g(y+h) = P_0 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_3 = P_0 - \rho g(y+h)}$$