CONDUTTORI, CAPACITÀ E DIELETTRICI

Conduttori in equilibrio elettrostatico

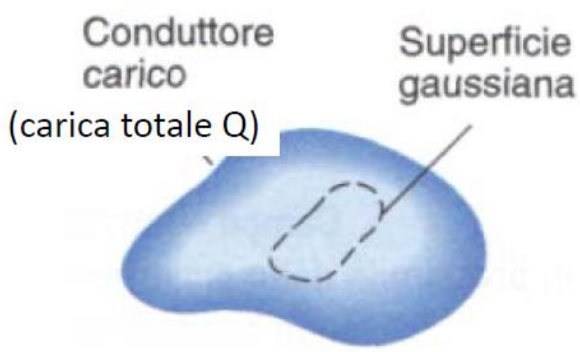
Conduttore: oggetto indeformabile all'interno del quale vi sono degli elettroni liberi di muoversi

-Il campo elettrico all'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico è nullo

(Altrimenti i portatori di carica si muoverebbero sotto l'effetto del campo elettrico)

- Le cariche si dispongono quindi in modo da realizzare (in media macroscopica) la condizione:

$$\vec{\mathbf{E}} = 0$$



Dal momento che ***E è nullo nei punti interni al conduttore allora è*** nullo su ogni superficie interna. Quindi la legge di Gauss comporta che la carica totale racchiusa sia pari a zero per qualunque superficie chiusa, purché completamente interna al conduttore.

Conduttori in equilibrio elettrostatico

La conclusione è che non ci possono essere eccessi di carica in nessun punto interno di un conduttore, ossia che per un conduttore la densità di carica di volume ρ *deve essere nulla.*

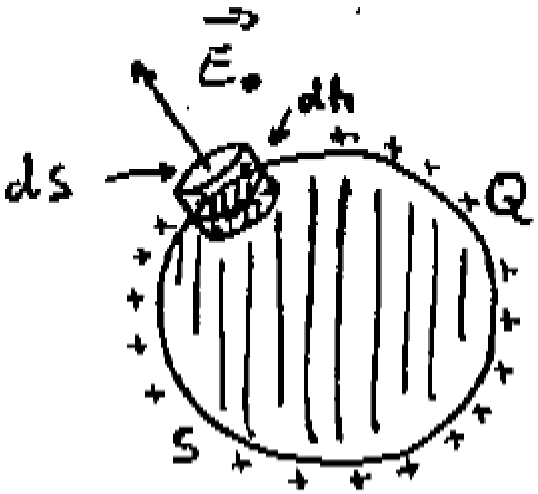
-Quindi l'eccesso di carica del conduttore deve essere localizzato sulla superficie del conduttore (con una densità superficiale $\sigma(x,y,z)$).

Campo elettrico nelle immediate vicinanze di un conduttore

E **perpendicolare alla superficie**: se infatti il campo avesse una componente tangenziale E_t, i portatori di carica si muoverebbero lungo la superficie per effetto della forza tangenziale e non vi sarebbero condizioni di equilibrio elettrostatico.

Il campo elettrico alla superficie di un conduttore ha soltanto la componente normale alla superficie.

$$\int_S \sigma(x,y,z)\, dS = Q$$



Il volumetto cilindrico è sufficientemente piccolo perché in esso qualunque variazione di E_0 o della curvatura della superficie del conduttore sia trascurabile.

$$d\phi(\vec{E}_0) = \vec{E}_0 \cdot \vec{dS} = \frac{dQ_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0}$$

$$\downarrow$$

$$E_0\, dS = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

In prossimità dei punti della superficie se $\sigma > 0$ il campo è diretto dalla superficie verso l'esterno, mentre dove $\sigma < 0$ il campo è diretto verso *la* superficie stessa.

Conduttori in equilibrio elettrostatico (2)

-Poiché **E = O** all'interno di un conduttore, il volume occupato da un materiale conduttore deve essere una regione equipotenziale.

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

Cammino dii integrazione TUTTO all’interno del conduttore

Percio’ E = O in ogni punto del cammino, l'integrale è nullo e $\mathbf{V_b = V_a}$.

Tutti i punti del conduttore sono allo stesso potenziale. In particolare, la superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale. Possiamo assegnare un valore del potenziale ad un intero conduttore.

Conduttore cavo

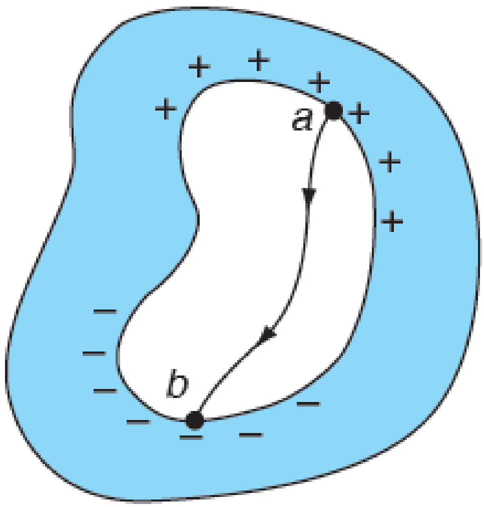


Figura 3.23
Dimostrazione che $\vec{E} = 0$ in una cavità interna a un conduttore e che $\sigma = 0$ sulla superficie interna. L'ipotetica linea di forza tracciata tra a e b non può esistere in realtà.

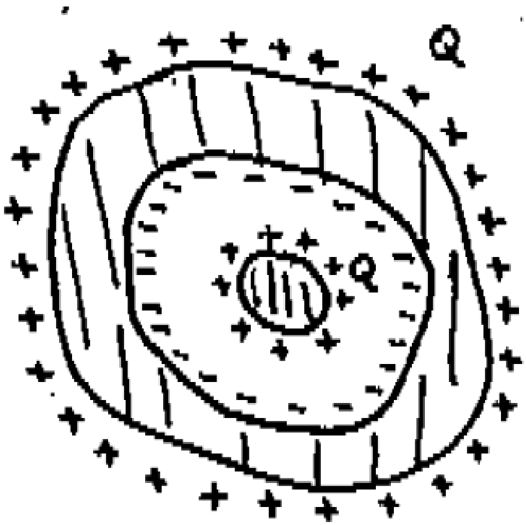
-Legge di Gauss: la carica totale sulla superficie interna è nulla

Ma ciò non esclude la possibilità che sia $\sigma > 0$ *su una parte della superficie* della cavità e $\sigma < 0$ *su un'altra parte,* in modo tale che la carica totale sia zero.

Ragioniamo sulle conseguenze di ipotizzare che $\sigma \neq 0$ all'interno della superficie e vedremo che cio' non puo' essere.

Cariche di segno opposto presuppongono che puo' esistere una linea di forza interna come a-b.

Ma lungo quella E >0 e diretto parallelo a dl. Dunque l'integrale di linea del campo non puo' essere nullo -> $V_b \neq V_a$ il che e' assurdo perche' tutti I punti devono essere allo stesso potenziale



Se il conduttore esterno è inizialmente scarico, acquista una carica –Q
sulla superficie interna e +Q su quella esterna:
induzione completa (o totale).

Schermo elettrostatico

Capacità di un conduttore isolato

La carica elettrica su di un conduttore isolato si distribuisce sulla superficie in modo che il conduttore sia equipotenziale.

Il valore del potenziale dipende da
come si distribuiscono le cariche e questo dipende a sua volta dalla
forma del conduttore.

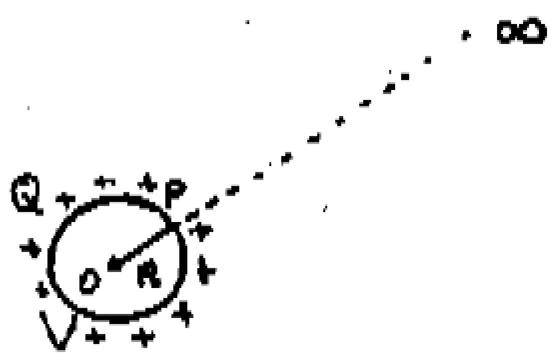
Si può però affermare che **se si raddoppia o si dimezza la carica totale Q anche il potenziale raddoppierà o si dimezzerà.**

$$Q = C\,V$$

La costante *C* dipende solo dalla forma e dalle dimensioni del conduttore ed è detta capacità elettrica del conduttore.

L'unità SI della capacità è il Farad=Coulomb/volt (C/V). Il farad è un'unità di capacità molto grande; la capacità dei condensatori che si trovano nei circuiti elettrici è tipicamente compresa nell'intervallo tra 10^{-12} F = 1pF e 10^{-6} F = 1 μF.

Capacità di una sfera conduttrice isolata



Quando mettiamo una carica su di un conduttore non possiamo dire a priori in che modo si distribuirà sulla sua superficie. In questo caso però, dato che il conduttore ha simmetria sferica, tutti punti della superficie sono equivalenti tra loro per cui la carica si disporrà in maniera uniforme (σ uniforme sulla superficie).

$$V = V_0(P) = \int_P^{\infty} E_0(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

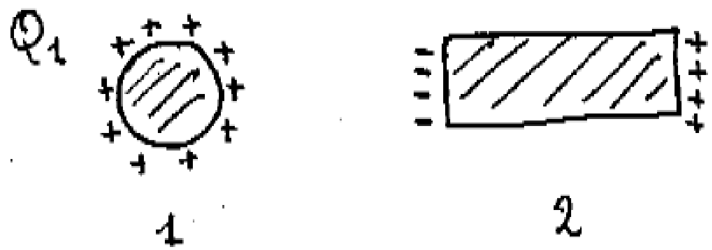
Oppure

$$V = V_0(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma\, dS}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_S \sigma\, dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Esempio: capacità della terra

$$C_T = 4\pi\varepsilon_0 R_T = 4\,(3.142)\left(8.854\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}\right)\left(6370\times10^{3}\ \mathrm{m}\right) = 7.09\times10^{-4}\ \mathrm{F} = 709\,\mu\mathrm{F}$$

Il potenziale di un conduttore è influenzato dalla presenza di altri conduttori.



La presenza del conduttore 2 implica che per
ottenere lo stesso potenziale di prima devo caricare di più 1

Induzione totale

Due conduttori sono in condizioni di induzione totale quando tutte le linee di forza del campo elettrico che partono da un conduttore terminano nell'altro conduttore.

Ciò accade quando un conduttore è totalmente racchiuso dall'altro oppure quando i due conduttori hanno ampie superfici poste a piccola distanza.

L'induzione totale fa sì che le cariche presenti sulle superfici tra loro affacciate siano di segno opposto ma abbiano lo stesso modulo.

Condensatore

Un *condensatore è costituito da due conduttori tra loro isolati posti* l'uno vicino all'altro in modo che vi sia induzione totale.

Indipendentemente dalla loro forma, questi conduttori sono detti "piatti" o "armature".

Un condensatore può essere caricato collegando i fili connessi alle armature con i morsetti di una batteria o *generatore di tensione.*

Quando una batteria è collegata a un condensatore scarico, fa muovere i portatori di carica da un'armatura all'altra. Il moto cessa quando il condensatore e’ carico.

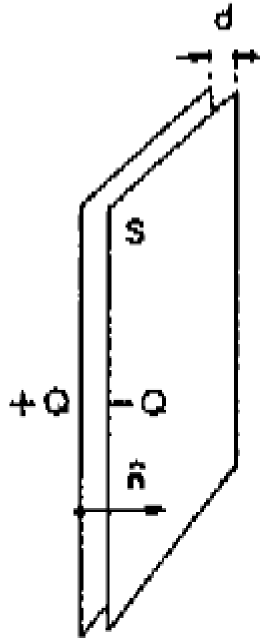
La differenza di potenziale ΔV tra l'armatura positiva e l'armatura negativa è uguale a quella tra i morsetti della batteria. Quando si parla della carica Q di un condensatore, si intende il valore assoluto della carica presente su ciascuna armatura.

Come per un conduttore isolato anche per un condensatore, quando si aumenta ΔV *di un certo fattore, Q aumenta dello stesso fattore e* viceversa. Il rapporto tra queste quantità è chiamato *capacità C del condensatore:*

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Per convenzione tutte le grandezze che compaiono nell'equazione sono positive, quindi *C è positiva. C si misura in Farad.*

Condensatore piano



Se le dimensioni dei piatti di un condensatore piano sono maggiori della distanza tra i piatti, la densità superficiale di carica sulle superfici affacciate è uniforme $\sigma = Q/A$.

Come nell'esercizio delle due lamine sottili caricate in modo opposto:

Nella zona tra le armature $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{n}$

$$\Delta V = V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

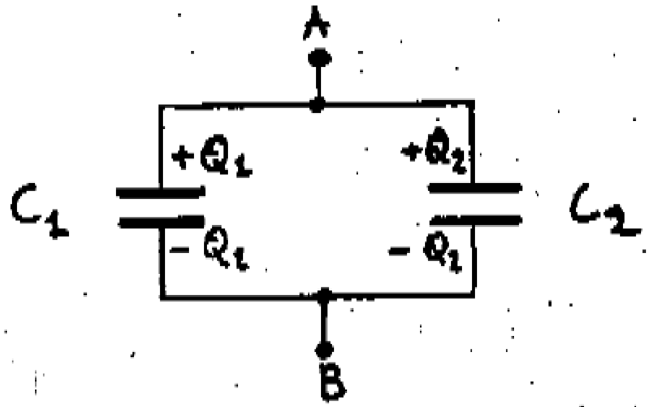
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Qd/\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

La capacità di un condensatore piano dipende dall'area dei piatti e dalla loro distanza.

Sistemi di condensatori

Collegamento in parallelo



$$Q_1 = C_1 \Delta V_1 = C_1 \Delta V$$

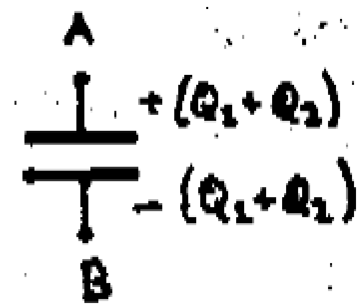
$$Q_2 = C_2 \Delta V_2 = C_2 \Delta V$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = |V_B - V_A| \doteq \Delta V$$

La capacità equivalente C di un sistema di condensatori è la capacità di un singolo condensatore che, quando viene usato in luogo del sistema, ha lo stesso effetto esterno.

$$Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\Delta V$$

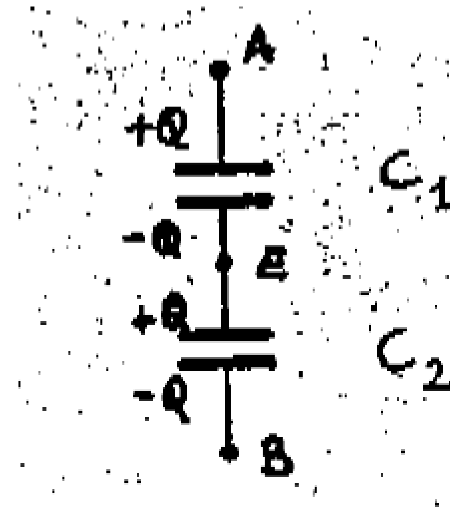
$$C_1 + C_2 = \frac{(Q_1 + Q_2)}{\Delta V}$$



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C = C_1 + C_2$$

Collegamento in serie



$$V_A - V_E = \frac{Q}{C_1}$$

$$V_E - V_B = \frac{Q}{C_2}$$

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = Q\,\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Energia elettrostatica

L’energia elettrostatica di una distribuzione di cariche è il lavoro fatto dall’esterno per assemblare il sistema di cariche (portare le cariche dall'infinito alla posizione loro assegnata).

Se abbiamo una carica q in un punto P in presenza di un campo elettrico

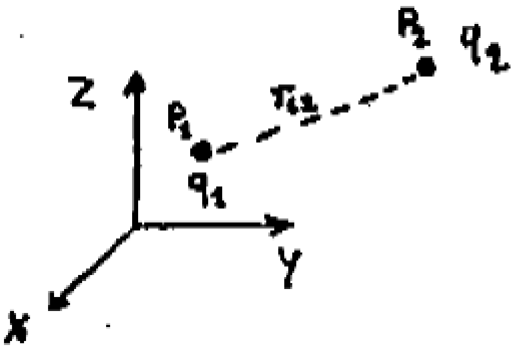
$$U = q\,V(\mathrm{P})$$

È il lavoro fatto dal campo per portare q da P all’infinito o, equivalentemente, il lavoro fatto dall’esterno per portare q dall’infinito a P.

ESEMPIO : assemblare un sistema di tre cariche q_1, q_2 e q_3

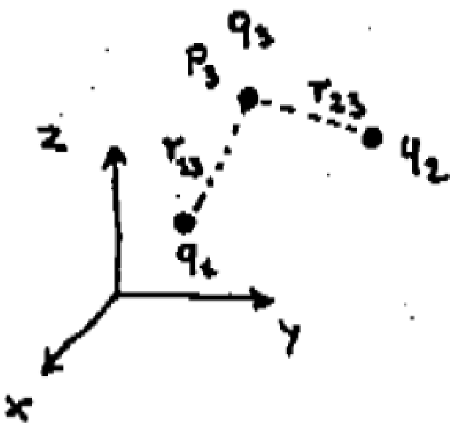
Il lavoro U_1 compiuto per portare la prima carica in P_1 è nullo dato che all'inizio non vi sono altre cariche

$$U_1 = 0$$



Il lavoro fatto dall'esterno per portare la carica q_2 in P_2 in presenza della carica q_1 in P_1 è

$$U_2 = q_2 V_1(P_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$



Il lavoro fatto dall'esterno per portare la carica q_3 in P_3 in presenza della carica q1 in P1 e della carica q_2 in P_2 è

$$U_3 = q_3 V_{12}(P_3) = q_3 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + q_3 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

SISTEMA DI n CARICHE

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{j\neq i,1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

Ma

$$V_i = \sum_{j\neq i,1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V \, d\tau$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{S} \sigma V \, dS$$

Energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore

Quando una batteria carica un condensatore compie lavoro per trasferire i portatori di carica da un'armatura all'altra: questo lavoro costituisce *l'energia (elettrostatica) immagazzinata nel condensatore.*

In un certo intervallo di tempo durante la carica, la variazione *dU’* dell'energia potenziale del sistema di cariche dovuta al trasferimento della carica *dQ’ da parte della batteria è (V’ differenza di potenziale):*

$$dU' = V' dQ'$$

Per determinare l'energia U fornita al condensatore durante la carica da zero a Q, si integra dU':

$$U = \int_0^Q V' \, dQ'$$

V’ non può essere portata fuori dall'integrale perché varia mentre *Q‘* cresce. Si trova:

$$U = \int_0^Q \frac{Q'}{C} \, dQ' = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' \, dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} \qquad U = \frac{CV^2}{2} \qquad U = \frac{QV}{2}$$

Densità di energia elettrostatica di un campo elettrico

Per un condensatore piano (armature di superficie S)

Densità di energia elettrostatica (validità generale). Si misura in J/m^3.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Calcoliamo l'energia per unità di volume

$$u = \frac{U}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C\tau} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 S^2 d} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{S}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2}$$

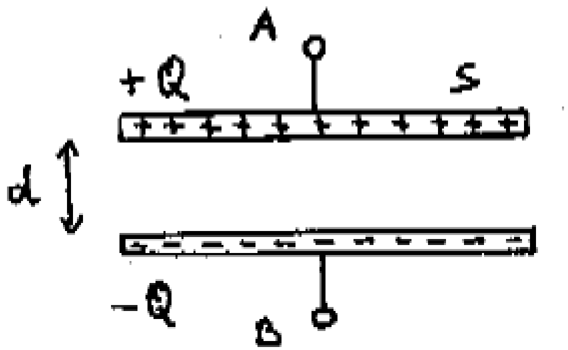
Densità di energia elettrostatica (validità generale).
Si misura in J/m^3.

Questa relazione suggerisce la possibilità di considerare l'energia elettrostatica di una distribuzione di carica come associata al campo elettrico prodotto dalla distribuzione di carica stessa.

Questo concetto risulterà utile nello studio delle onde elettromagnetiche. La grandezza fisica che si propaga è l'energia associata al campo elettrico e al campo magnetico.

Proprietà elettrostatiche dei dielettrici

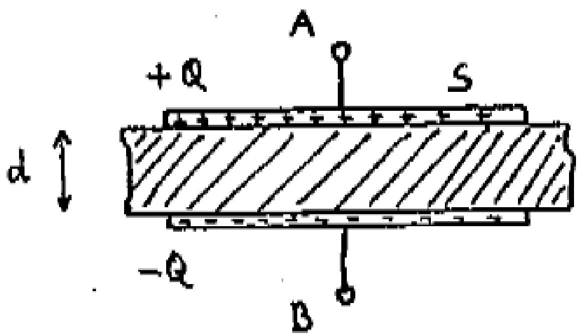
Consideriamo un condensatore piano con il vuoto tra le armature. Carichiamo il condensatore e poi togliamo il collegamento con la batteria in modo che le cariche presenti sulle armature non possano variare.



$$V_A - V_B = \Delta V_0$$

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V_0} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Ora inseriamo il materiale isolante nella regione compresa tra le armature e misuriamo nuovamente la differenza di potenziale ΔV.



$$\Delta V \leq \Delta V_0$$

La diminuzione di differenza di potenziale non può essere dovuta ad una riduzione della carica presente sulle armature perché ciascuna armatura è isolata.

Proprietà elettrostatiche dei dielettrici

Si vede che il rapporto $\Delta V_0/\Delta V$ dipende dal tipo di isolante o dielettrico come vengono anche chiamati. Il rapporto $\Delta V_0/\Delta V$ prende il nome di

COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA

$$k = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} \quad > 1$$

COSTANTE DIELETTRICA DEL MATERIALE

$$\varepsilon = k\,\varepsilon_0$$

Per l'aria ad esempio $k \approx 1$ e $\varepsilon \approx \varepsilon_0$

Riduzione campo elettrico in presenza di un dielettrico

$$\Delta V_0 = E_0\, d$$
Senza dielettrico

$$\Delta V = E\, d$$
con dielettrico

$$k = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} = \frac{E_0 d}{E d} = \frac{E_0}{E}$$

$$E = \frac{E_0}{\kappa}$$

Aumento della capacità in presenza di un dielettrico

$$k = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} = \frac{Q/C_0}{Q/C} = \frac{C}{C_0}$$

$$\boxed{C = \kappa C_0}$$

Riduzione energia elettrostatica in presenza di un dielettrico

$$U = \tfrac{1}{2}\, QV$$

$$k = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} = \frac{2U_0/Q}{2U/Q} = \frac{U_0}{U} \qquad U = \frac{U_0}{\kappa}$$

Siccome *U* diminuisce quando il dielettrico viene inserito, c'è una forza elettrica che tende ad attirare il dielettrico nella regione compresa tra le armature.

Se invece inseriamo il dielettrico lasciando il generatore collegato la differenza di potenziale tra le armature non cambia perché sono collegate al generatore $\Delta V = \Delta V_0$.

Per mantenere la differenza di potenziale il generatore è costretto a trasferire una certa quantità di carica da un'armatura all'altra.

$$Q = \kappa Q_0 \qquad C = k\,\frac{Q_0}{\Delta V_0} = k\, C_0$$

La capacità è la stessa di quella che abbiamo trovato inserendo il dielettrico dopo aver scollegato il generatore.

Descrizione molecolare dei dielettrici

Dagli esperimenti sin qui discussi sappiamo che:

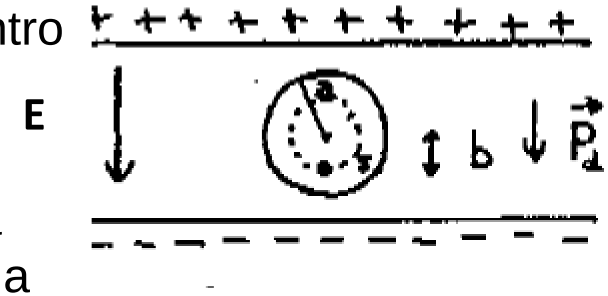
1. Quando un dielettrico viene posto tra le armature di un condensatore carico non connesso alla batteria di carica, E diminuisce benché la Q carica presente su di esse rimanga costante.

2. Quando il dielettrico viene inserito tra le armature senza scollegare il generatore, **il potenziale e quindi il campo resta costante anche se la quantità di carica Q su ciascuna armatura aumenta.**

Questa fenomenologia può essere spiegata solo considerando il contributo di altre cariche, le cariche di polarizzazione.

Polarizzazione per deformazione

ATOMO: in assenza di campi elettrici esterni il baricentro della carica negativa coincide con la posizione del nucleo (baricentro della carica positiva).



Se l'atomo viene posto in un campo elettrico esterno la forza esercitata dal campo sul nucleo ha verso opposto rispetto alla forza esercitata dal campo sugli elettroni.

All'equilibrio, la posizione relativa del nucleo e del baricentro della carica elettronica E' determinata da:

- le forza elettrica dovuta al campo esterno **E** (che tende a separare nucleo ed elettroni)

- la forza elettrica tra il nucleo e gli elettroni (che tende a far coincidere il nucleo e il baricentro della carica elettronica).

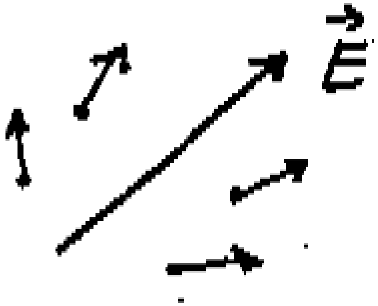
Polarizzazione per deformazione : l'atomo presenta un momento di dipolo indotto **p_d** e viene detto **polarizzato** se nella nuova posizione di equilibrio il baricentro della carica positiva e della carica negativa non coincidono.

Polarizzazione per orientamento

Alcune molecole possiedono momenti di dipolo permanenti e vengono perciò chiamate molecole polari. In una molecola polare, il baricentro della carica positiva non coincide con il baricentro della carica negativa nemmeno in assenza di campo elettrico. Es. Molecola dell'acqua.

Se non c'è alcun campo elettrico esterno, questi dipoli molecolari hanno un orientamento casuale.

Quando un dipolo di momento **p viene posto in un campo E, il campo** tende ad allineare **p nella direzione di E.**



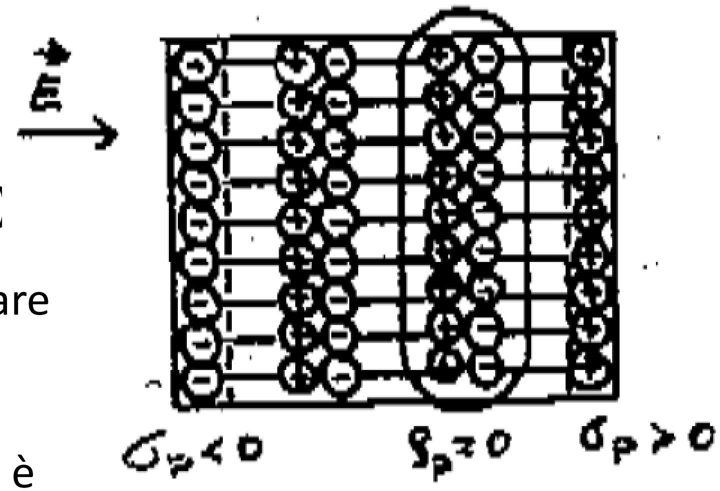
Il moto di agitazione termica si oppone all'allineamento

Quindi :

-l'allineamento non è completo a causa del moto di agitazione termica delle molecole.

- il momento medio di dipolo nella direzione di **E decresce** all'aumentare della temperatura.

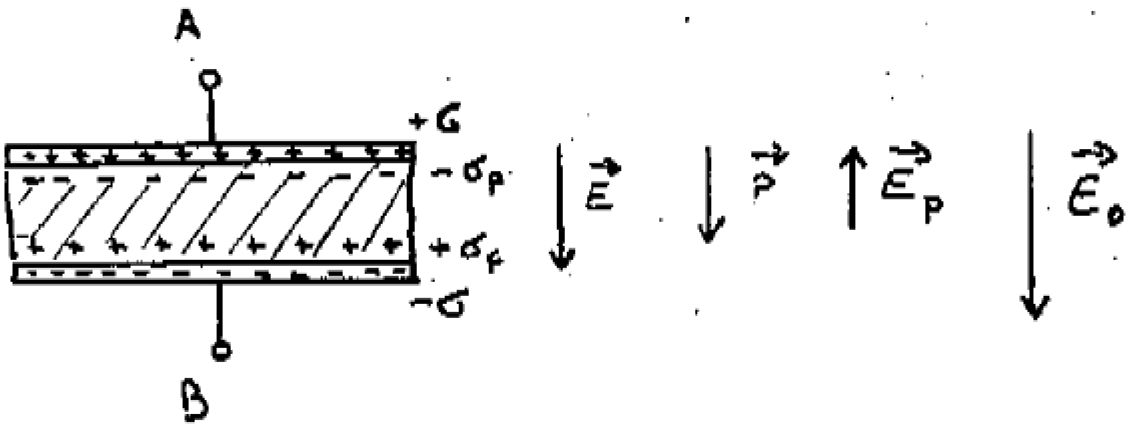
Interpretazione esperimenti condensatore con/senza dielettrico



Nel campo prodotto dalle armature
Il dielettrico si polarizza (per deformazione e/o orientamento)

Sulle due facce del dielettrico adiacenti alle armature compare una distribuzione superficiale di carica di densità σ_p.

Il segno della carica indotta su ciascuna faccia del dielettrico è opposto a quello della carica che si trova sull'armatura adiacente.



La carica localizzata sulle armature non è stata influenzata dall'inserimento del dielettrico ($\sigma_l=\sigma$)

Quindi possiamo scrivere

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 + \vec{\mathbf{E}}_p$$

$$E\hat{\mathbf{i}} = E_0\hat{\mathbf{i}} + (-E_p)\hat{\mathbf{i}} = (E_0 - E_p)\hat{\mathbf{i}}$$

$$E = E_0 - E_p \qquad E_0 = |\sigma_\ell|/\varepsilon_0 \qquad E_p = |\sigma_p|/\varepsilon_0$$

$$E = \frac{|\sigma_\ell| - |\sigma_p|}{\varepsilon_0}$$ ma dalla def. di *k* abbiamo anche $$E = \frac{E_0}{\kappa}$$

$$\frac{|\sigma_\ell|}{\kappa\varepsilon_0} = \frac{|\sigma_\ell| - |\sigma_p|}{\varepsilon_0} \Longrightarrow |\sigma_p| = \frac{\kappa - 1}{\kappa}|\sigma_\ell|$$

Il campo dovuto alla carica libera presente sulle armature induce una *carica di polarizzazione di segno opposto sulle facce adiacenti del* dielettrico.

Il contributo al campo dovuto alla carica di polarizzazione (sulle superfici del dielettrico) è opposto al contributo al campo dovuto alla *carica libera (sulle armature) e quindi il campo elettrico risulta ridotto a* causa della presenza del dielettrico (ovviamente lo stesso vale per la differenza di potenziale).

Quando invece si introduce il dielettrico tra le armature del condensatore lasciandolo collegato al generatore non si osserva alcuna diminuzione né del campo elettrico né del potenziale perché la comparsa delle cariche di polarizzazione è compensata dal simultaneo aumento delle cariche libere sulle armature.