Onde

Le onde trasportano energia e momento lineare. Occorre energia per produrre delle Onde.

Esempi nella vita quotidiana:
onde marine, onde sonore, corde di strumenti, canne d’organo

Tutte gli esempi sopra sono di onde che hanno bisogno di un mezzo per propagarsi (acqua, aria.....).

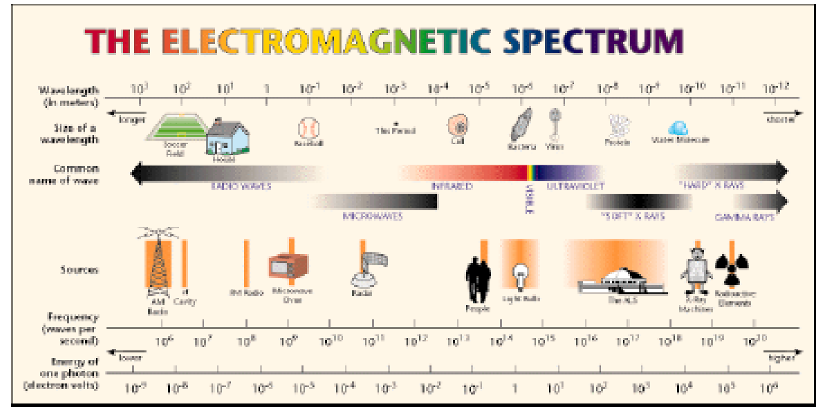
In questi casi si osserva che l’onda è una perturbazione che si propaga nel mezzo, il quale pero’ si muove solo localmente mentre l’onda passa.

Le onde elettromagnetiche sono un caso speciale di onde che non hanno bisogno Di un mezzo per propagarsi.

Electromagnetic spectrum

Tutta l'energia e l' informazione che riceviamo dallo spazio è portata da onde E.M.

Parti diverse dello spettro EM
Sono legate a processi fisici diversi.



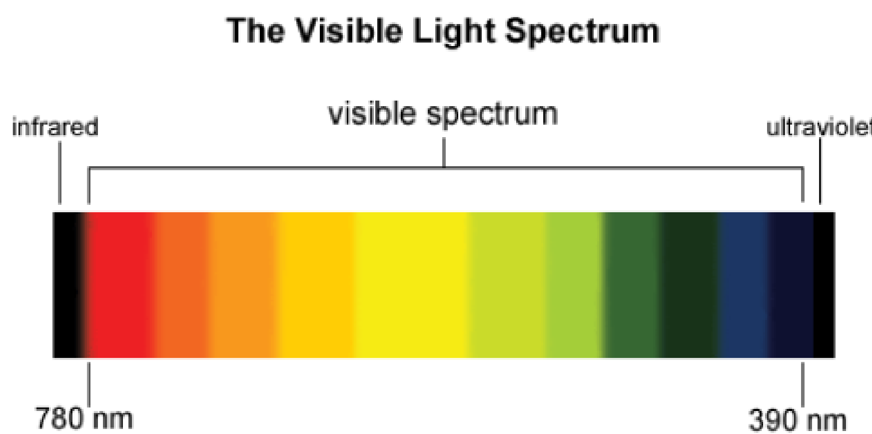
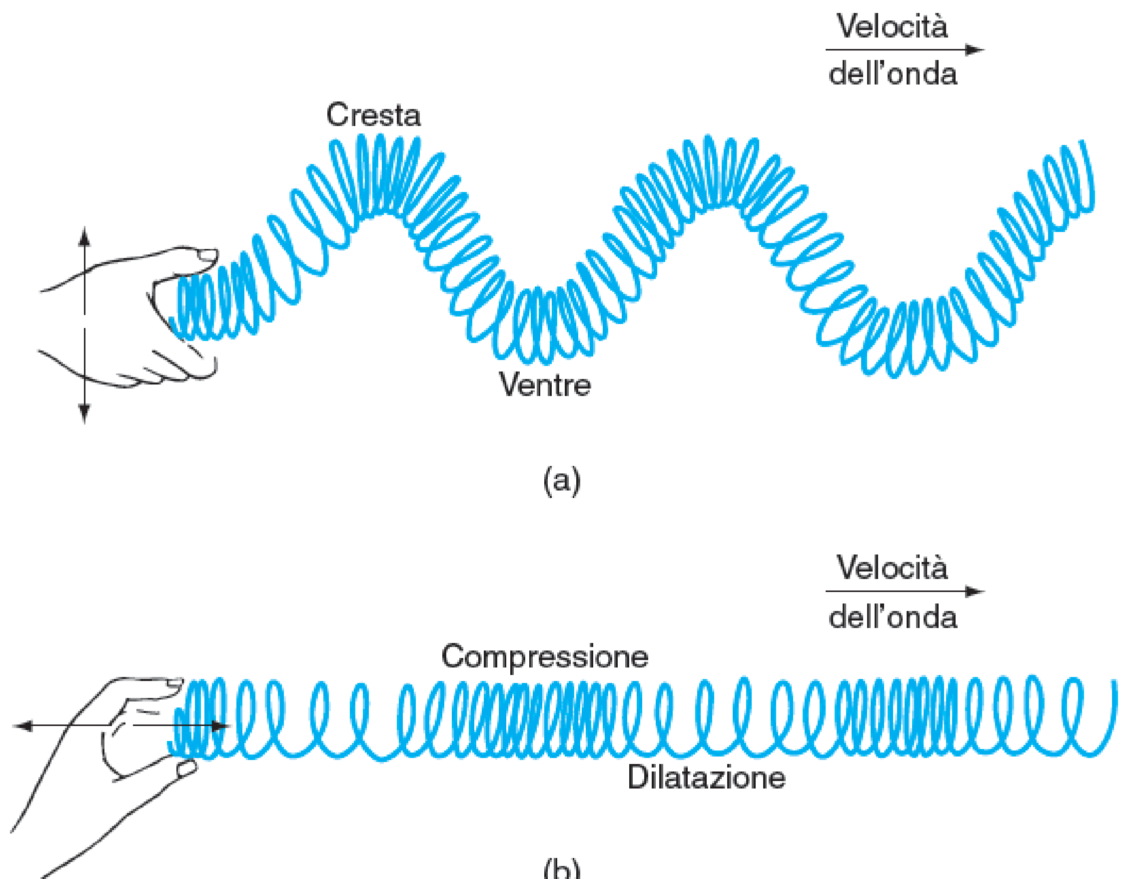


Tabella 13.1 Esempi di onde con indicazione dei parametri fisici caratteristici del fenomeno e dell'espressione che dà la velocità di propagazione

Mezzo	Tipo di onde	Parametri caratteristici del fenomeno fisico	Velocità di propagazione dell'onda
fune tesa	meccaniche trasversali	F tensione della fune (unità SI: N)\ μ densità lineare della fune (unità SI: kg/m^2)	$v = \sqrt{F/\mu}$
fluido	meccaniche longitudinali	B_s modulo di compressibilità adiabatica (unità SI: N/m^2) ρ densità del fluido (unità SI: kg/m^3)	$v = \sqrt{B_s/\rho}$
gas	meccaniche longitudinali	γ rapporto tra i calori specifici a pressione e a volume costante R = 8.31 J/(mol K) costante dei gas T temperatura assoluta del gas (unità SI:K) M peso molecolare del gas (unità SI: kg/mol)	$v = \sqrt{\gamma RT/M}$
solido	meccaniche longitudinali	Y modulo di Young (unità SI: N/m^2) ρ densità del solido (unità SI: kg/m^3)	$v = \sqrt{Y/\rho}$
solido	meccaniche trasversali	G modulo di scorrimento (unità SI: kg/m^3) ρ densità del solido (unità SI: kg/m^3)	$v = \sqrt{G/\rho}$
vuoto	elettromagnetiche trasversali	$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m costante dielettrica del vuoto $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$ H/m permeabilità magnetica del vuoto	$v = c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3.00 \times 10^8$ m/s
dielettrico omogeneo e isotropo	elettromagnetiche trasversali	ε_r costante dielettrica relativa ($\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m) μ_r permeabilità magnetica relativa (solitamente $\mu_r \cong 1$)	$v = 1/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r} = c/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ (si noti che $v < c$)

Onde trasversali ed onde longitudinali

Figura 13.1
Onde su di una molla tesa.
(a) Onda trasversale. (b) Onda longitudinale.



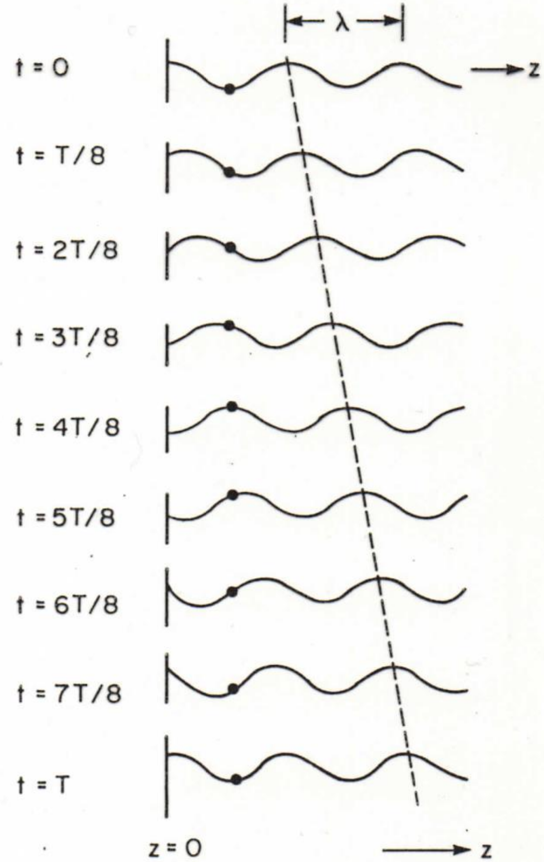


Fig. 2.2 Un'onda sinusoidale trasversale su un filo, che si propaga verso destra, disegnata ad intervalli di un ottavo di periodo. Il trasmettitore è a $z = 0$. I punti mostrano la posizione di un elemento del filo. La linea tratteggiata mostra come la forma d'onda avanza verso destra. Si assume che le oscillazioni si siano stabilite per un tempo sufficiente che tutti i transienti sono scomparsi.

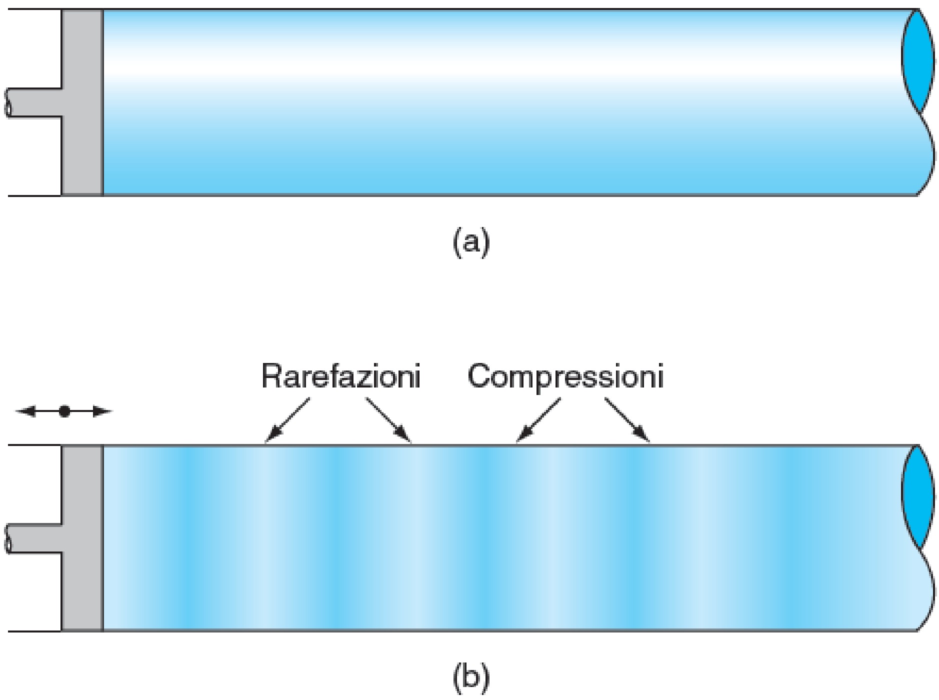


Figura 13.3
(a) Dispositivo costituito da un lungo cilindro riempito di fluido e chiuso a una estremità da un pistone, utilizzato per produrre onde in un fluido. (b) Piccoli movimenti del pistone provocano l'avanzamento lungo il cilindro di regioni di compressione e di rarefazione.

Onde sonore in un tubo

Come secondo esempio consideriamo la propagazione di onde sonore in un fluido che potrebbe essere aria o un altro gas, o addirittura un liquido. Rappresentiamo questo fluido contenuto in un lungo tubo che si estende lungo l'asse z e forzato da un pistone che oscilla avanti e indietro lungo l'asse z come in Fig. 2.5. Questo comporta che ogni elemento del fluido si muova avanti e indietro lungo z attorno ad una posizione di equilibrio. Questo comporta che anche la pressione nel fluido oscilli e queste oscillazioni sono accom

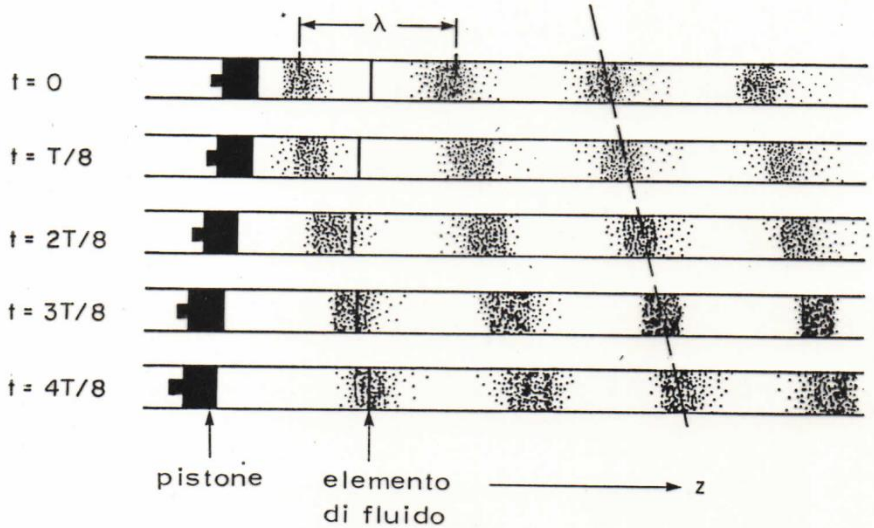


Fig. 2.5 Onde sonore longitudinali in un tubo, provocate da un pistone che oscilla. Le aree scure rappresentano addensamenti nel fluido; le aree chiare rarefazioni. La linea verticale rappresenta la posizione istantanea di un elemento di fluido; esegue vibrazioni attorno ad una posizione di equilibrio. La linea tratteggiata mostra la propagazione di un particolare addensamento; si muove lungo z con velocità di fase v.

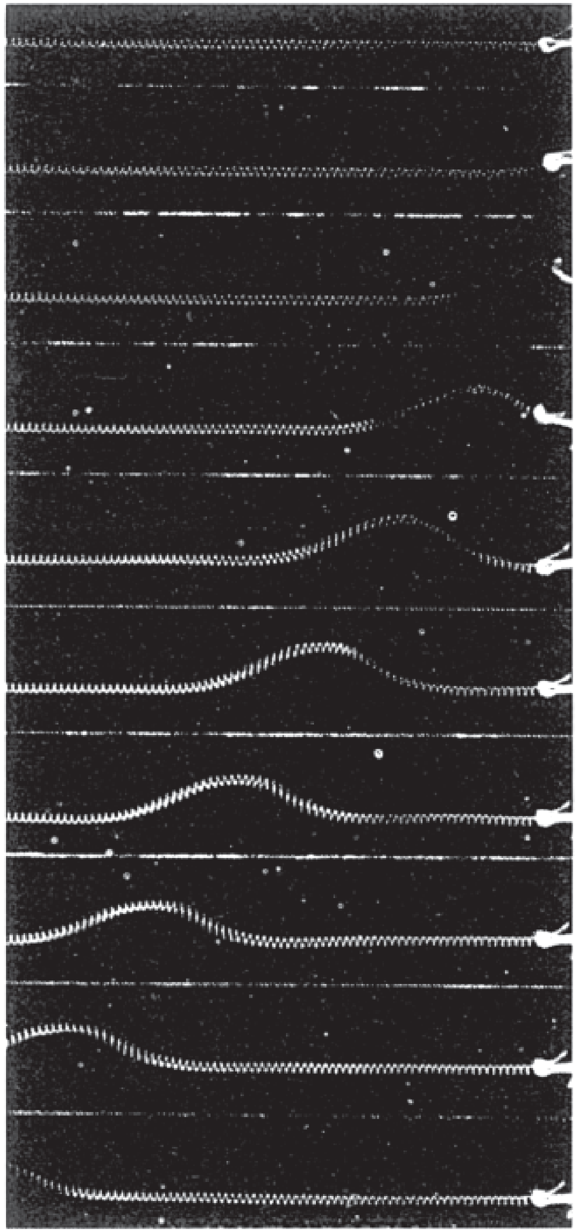
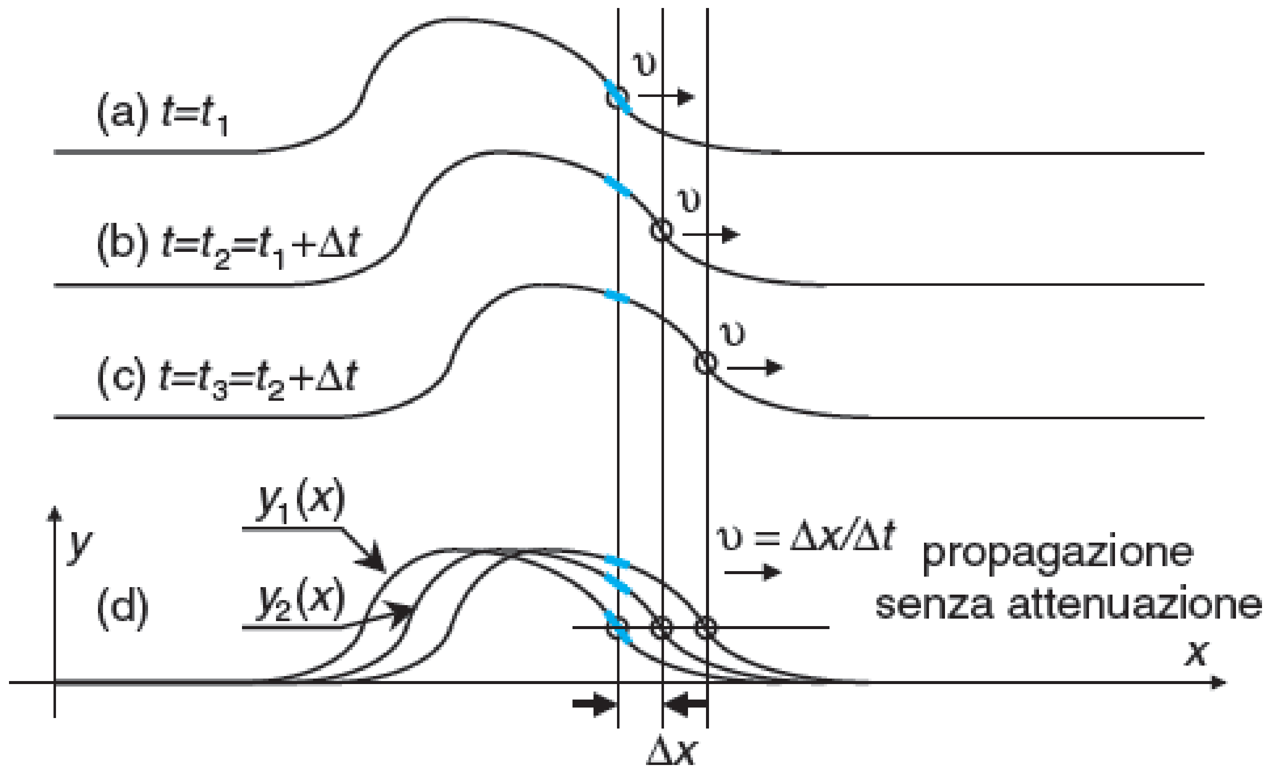


Figura 13.4
Un'onda impulsiva generata scuotendo rapidamente l'estremità di una lunga molla tesa. L'intervallo di tempo tra ciascuna fotografia e la successiva è sempre lo stesso. L'impulso si propaga verso sinistra e, per quanto si può dire dalle fotografie, viaggia a velocità costante mantenendo la propria forma. (Physics, 2ª edizione, *Physical Science Study Committee, 1965. Riprodotta su autorizzazione di D.C. Heath & Co. e dell'Educational Development Center*)

Figura 13.5
Un'onda progressiva che si propaga su di una fune tesa, rappresentata in più istanti successivi: (a) all'istante $t = t_1$, (b) dopo un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e (c) dopo un ulteriore intervallo di tempo $\Delta t = t_3 - t_2$. Dal confronto dei grafici, o meglio, riportandoli sugli stessi assi, (d) si osserva che l'onda mantiene la propria forma e si propaga con velocità v nella direzione $+x$. Si osservi anche che l'elementino di fune evidenziato si sposta invece nella direzione y.



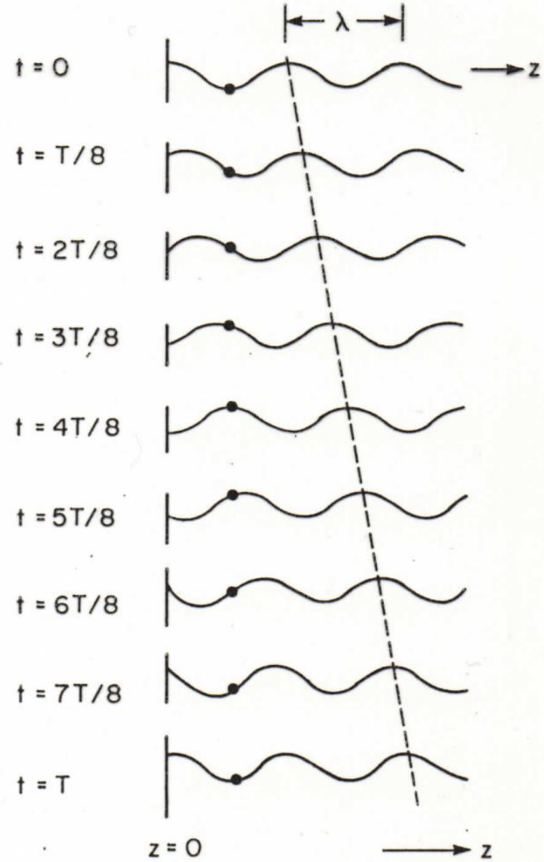
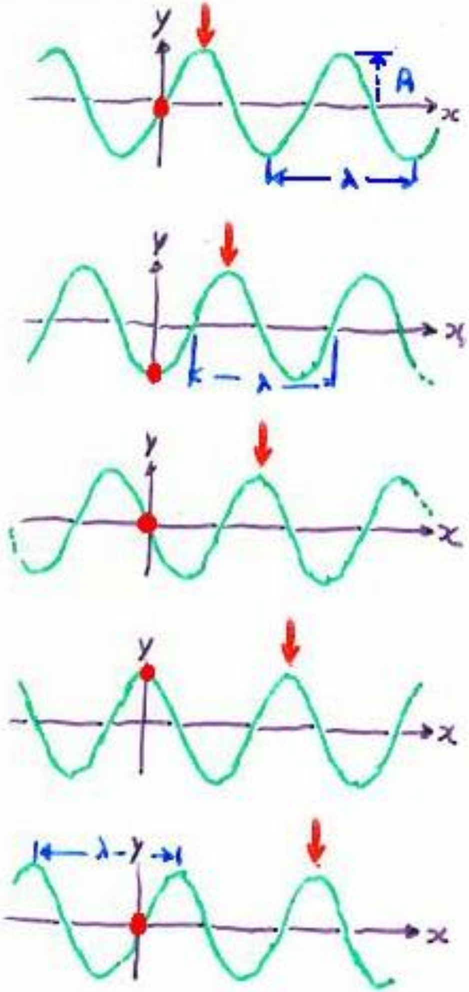


Fig. 2.2 Un'onda sinusoidale trasversale su un filo, che si propaga verso destra, disegnata ad intervalli di un ottavo di periodo. Il trasmettitore è a z = 0 . I punti mostrano la posizione di un elemento del filo. La linea tratteggiata mostra come la forma d'onda avanza verso destra. Si assume che le oscillazioni si siano stabilite per un tempo sufficiente che tutti i transienti sono scomparsi.

FONDAMENTALMENTE LA DESCRIZIONE DELLE ONDE DAL PUNTO DI VISTA MATEMATICO SI BASA SULLO STUDIO DELLE ONDE ARMONICHE (SINUSOIDALI)



LA FUNZIONE CHE DESCRIVE LO SPOSTAMENTO DELLE "PARTICELLE" DELLA CORDA È

$y = A \sin(kx)$ AL TEMPO $t = 0$

SE INDICHIAMO CON λ LUNGHEZZA D'ONDA LA DISTANZA FRA DUE PUNTI IN FASE FRA LORO $\Rightarrow$ y HA LO STESSO VALORE PER ASCISSE x, $x+\lambda$, $x+2\lambda$, ... ETC

$\Rightarrow A \sin(kx) = A \sin(kx + k\lambda) \Rightarrow k\lambda = 2\pi$

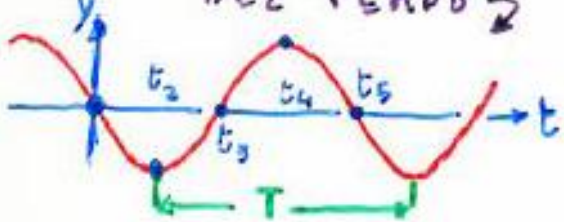
$\Rightarrow$ $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ NUMERO D'ONDA ANGOLARE}}$

SE L'ONDA È PROGRESSIVA CON VELOCITÀ v

$$y = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

L'ELEMENTO DI CORDA IN $x=0$ SI SPOSTA IN FUNZIONE DEL TEMPO

$$y = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$



⇒ PER $x=0$ AD ESEMPIO

$$\longrightarrow \quad y = -A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} v t\right)$$

⇒ SE T PERIODO DELL'ONDA $\quad A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} v t\right) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} v (t+T)\right] \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} v T = 2\pi$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{\lambda}{T}}$$

IL PERIODO T È IL TEMPO NECESSARIO A COMPIERE UNA DISTANZA PARI ALLA LUNGHEZZA D'ONDA λ

v, λ, T SONO LEGATE FRA LORO

$$v = \frac{\lambda}{T}\frac{2\pi}{2\pi} = \frac{\omega}{k} \; (\rightarrow \text{PULSAZIONE}) \quad \text{O ALTERNATIVAMENTE} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

NELLA FORMA PIÙ GENERALE

$$\boxed{y = A \sin(kx - \omega t + \varphi)}$$

- Onde periodiche: la $f(\xi)$ è funzione periodica del suo argomento (e quindi lo è sia in x che in t)

- Onde sinusoidali: particolari onde periodiche in cui la $f(\xi)$ è una funzione sinusoidale. Per un'onda progressiva:

$$f(x,t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \varphi\right] \equiv A \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v} - t\right) + \varphi\right] \equiv$$

$$\equiv A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi\right] \equiv A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

A : ampiezza

φ : sfasamento o angolo di fase

T : periodo (temporale)

λ : lunghezza d'onda (periodo spaziale)

$\omega = 2\pi\nu$: pulsazione

dove: $\nu = 1/T$: frequenza

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$: numero d'onda

Questo conferma il fatto che in generale per un'onda periodica il profilo rigido rappresentato dalla $f(\xi)$ ricopre se stesso per traslazione di un tratto $\Delta x = \lambda$ in un tempo $\Delta t = T$, per cui $v = \Delta x / \Delta t = \lambda / T$.
Si noti che, per definizione dei vari parametri prima introdotti, per un'onda periodica, e in particolare sinusoidale, si hanno le relazioni:

$$\boxed{v = \lambda / T = \lambda \nu = \omega / K}$$

N.B. L'interesse dello studio delle onde sinusoidali sta nel fatto che le equazioni delle onde sono **lineari**. Le loro soluzioni soddisfano dunque il **principio di sovrapposizione**. Grazie alla sua sviluppabilità in **serie o integrale di Fourier**, la soluzione più generale può essere scritta come **sovrapposizione di onde sinusoidali**.

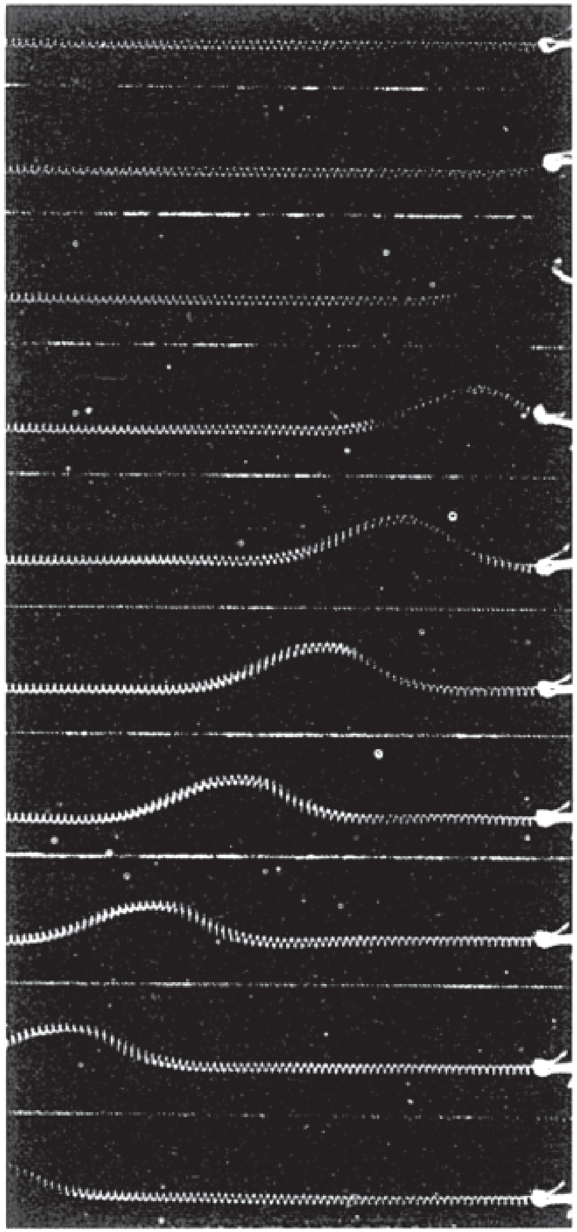
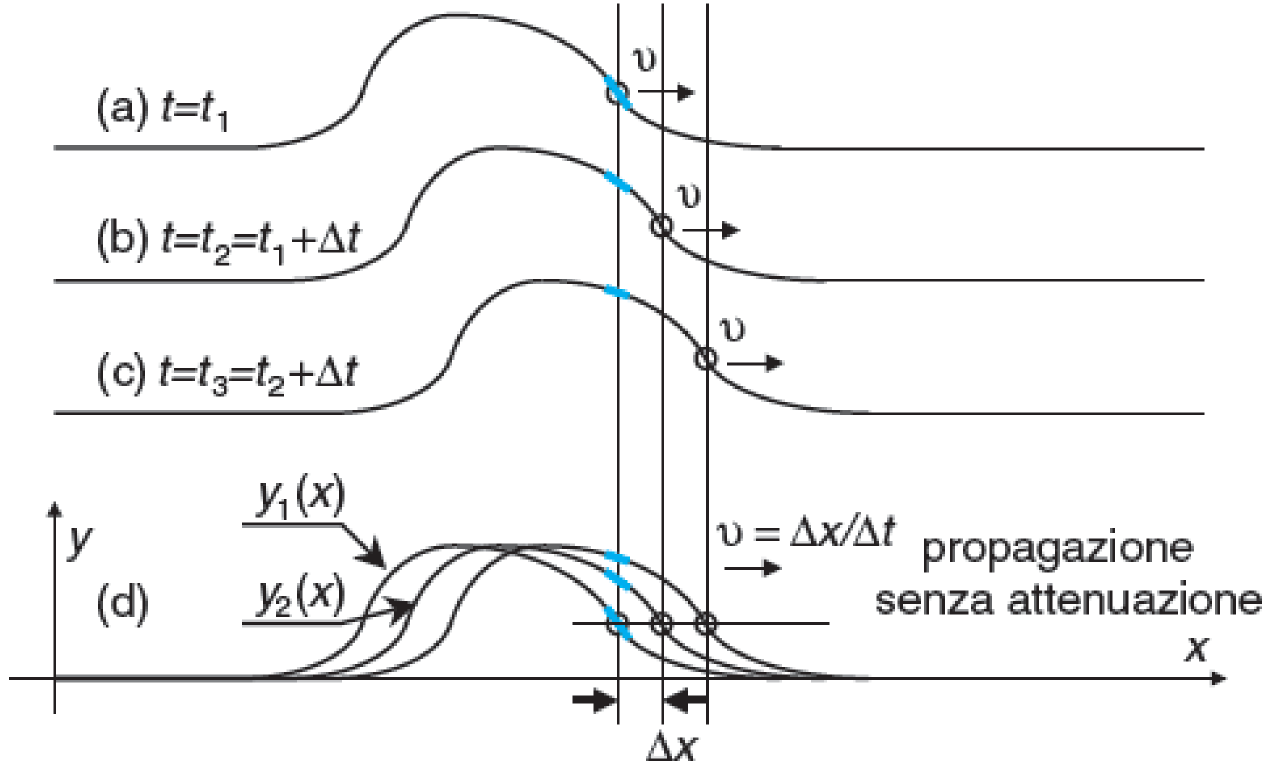


Figura 13.4
Un'onda impulsiva generata scuotendo rapidamente l'estremità di una lunga molla tesa. L'intervallo di tempo tra ciascuna fotografia e la successiva è sempre lo stesso. L'impulso si propaga verso sinistra e, per quanto si può dire dalle fotografie, viaggia a velocità costante mantenendo la propria forma. (Physics, 2ª edizione, *Physical Science Study Committee, 1965. Riprodotta su autorizzazione di D.C. Heath & Co. e dell'Educational Development Center*)

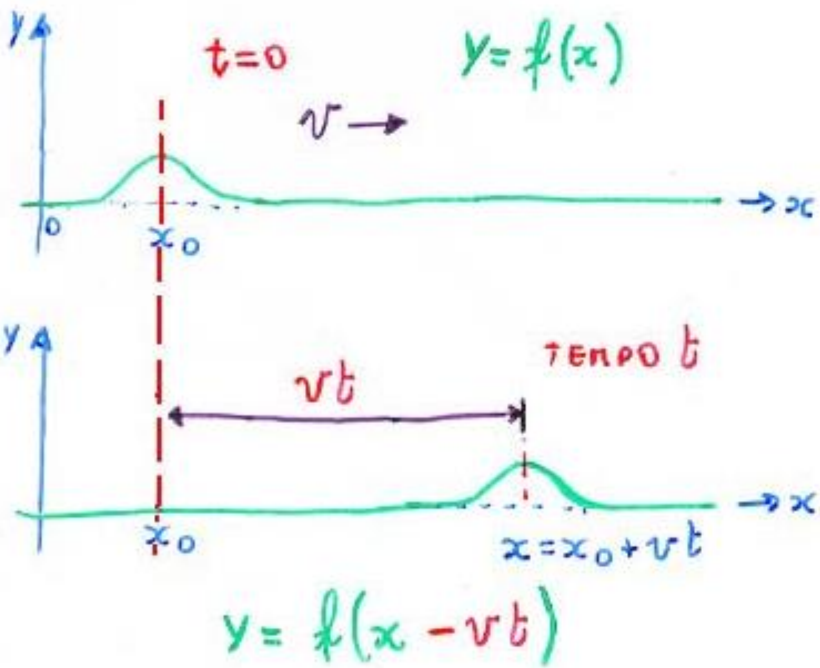
Figura 13.5
Un'onda progressiva che si propaga su di una fune tesa, rappresentata in più istanti successivi: (a) all'istante $t = t_1$, (b) dopo un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e (c) dopo un ulteriore intervallo di tempo $\Delta t = t_3 - t_2$. Dal confronto dei grafici, o meglio, riportandoli sugli stessi assi, (d) si osserva che l'onda mantiene la propria forma e si propaga con velocità v nella direzione $+x$. Si osservi anche che l'elementino di fune evidenziato si sposta invece nella direzione y.



UN'ONDA IMPULSIVA O SINUSOIDALE CHE AVANZA È DETTA

ONDA PROGRESSIVA

SE CONSIDERIAMO UN ONDA IMPULSIVA SU UNA CORDA TESA



SE AL TEMPO $t=0$ LA FORMA DELL'IMPULSO È DESCRIVIBILE DA UNA FUNZIONE $f(x)$

AL TEMPO t LA FUNZIONE SARÀ TRASLATA VERSO DESTRA DI UNA DISTANZA PARI A vt

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x - vt)}$ È LA NUOVA FUNZIONE CHE DESCRIVE L'IMPULSO TRASLATO DI UN TRATTO vt NELLA DIREZIONE DELLE x POSITIVE

IN ANALOGIA UNA ONDA IMPULSIVA CHE SI MUOVA VERSO SINISTRA CON VELOCITÀ v SARÀ DESCRITTA DA UNA FUNZIONE $f(x+vt)$

LA FUNZIONE $f(x-vt)$ $\left(\text{o } f(x+vt)\right)$ MI FORNISCE LO SPOSTAMENTO y DELLA CORDA IN FUNZIONE DELLO SPAZIO x E DEL TEMPO t

$$y(x,t) = f(x-vt)$$
$$y(x,t) = f(x+vt)$$

$y(x,t)$ È DETTA FUNZIONE D'ONDA

v È LA VELOCITÀ DELL'IMPULSO NEL SUO INSIEME MA ANCHE QUELLA DI UN QUALSIASI PUNTO DELL'IMPULSO

ES CRESTA $\quad t=0 \rightarrow x=x_0$, $t \longrightarrow x$ $\Rightarrow x = x_0 + vt \Rightarrow$ LA VELOCITÀ DELLA CRESTA $\dfrac{dx}{dt} = v$ VELOCITÀ DI FASE

NEL TRATTARE LE ONDE MECCANICHE SI È VISTO COME ABBIANO ORIGINE DALLA PERTURBAZIONE LOCALE DI UN MEZZO MATERIALE E COME SI PROPAGHINO NEL MEZZO GRAZIE ALLE SUE PROPRIETÀ MECCANICHE

VENIAMO ORA COME NELLE EQUAZIONI DI MAXWELL SIANO CONTENUTI I FENOMENI ONDULATORI E NEL CASO PIÙ SEMPLICE IL CONCETTO DI ONDA PIANA ELETTROMAGNETICA

NELLA TEORIA UNIFICATA DI MAXWELL (1865) IL PUNTO DI PARTENZA SONO LE QUATTRO EQUAZIONI SEGUENTI

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0}$$

LEGGE DI GAUSS

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$$

LEGGE DI GAUSS

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{\partial t}$$

LEGGE DI FARADAY

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL

IN ASSENZA DI CARICHE E CORRENTI

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

MAXWELL DIMOSTRÒ COME NEL VUOTO IN ASSENZA DI CARICHE E CORRENTI LE QUATTRO EQUAZIONI COMBINATE INSIEME CONDUCANO ALLA EQUAZIONE DELLE ONDE; CON SOLUZIONI $\vec{E}$ o $\vec{B}$ E CON VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE PARI A QUELLA DELLA LUCE

QUESTO RISULTATO CONDUSSE MAXWELL AD IPOTIZZARE L'ESISTENZA DI ONDE ELETTROMAGNETICHE

LA TRATTAZIONE ANALITICA NECESSITA DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL IN FORMA DIFFERENZIALE ANZICHÉ IN FORMA INTEGRALE.

ANTICIPANDO ALCUNE CONCLUSIONI CERCHIAMO DI DIMOSTRARE COME LE EQUAZIONI DI MAXWELL POSSANO CONDURRE ALL'EQUAZIONE DELLE ONDE

POSSIAMO VISUALIZZARE L'ONDA ELETTROMAGNETICA CHE SI PROPAGA NELLA DIREZIONE DELL'ASSE DELLE x COME L'INSIEME DI DUE CAMPI ELETTRICO $\vec{E}$ E MAGNETICO $\vec{B}$

1) CHE DESCRIVONO UN'ONDA SINUSOIDALE IN MOTO

$$E = E_{max} \cos(kx - \omega t)$$

$$B = B_{max} \cos(kx - \omega t)$$

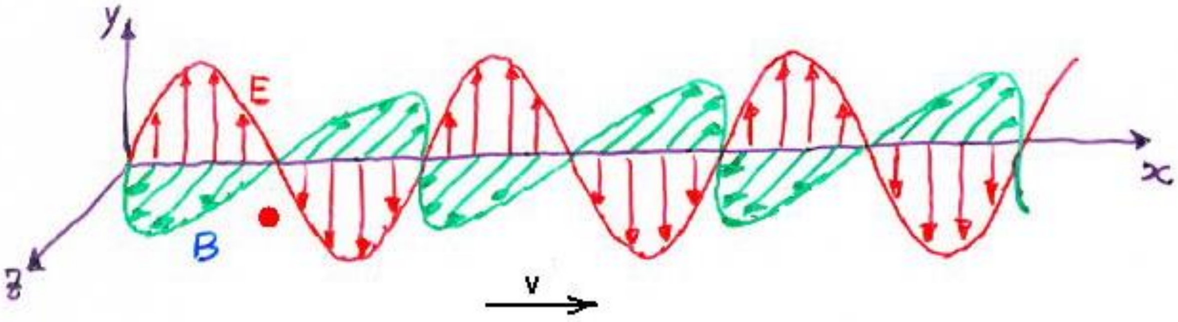
IN OGNI ISTANTE SONO FRA LORO IN FASE

(per semplicità $\varphi = 0$)

2) SONO ORTOGONALI FRA DI LORO E ORTOGONALI ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE x (ONDE TRASVERSALI)

3) IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO $\vec{E}$ E $\vec{B}$ NON DIPENDONO DA y E z $\Rightarrow$ ENTRAMBI I CAMPI SONO UNIFORMI SUI PIANI NORMALI ALL'ASSE x

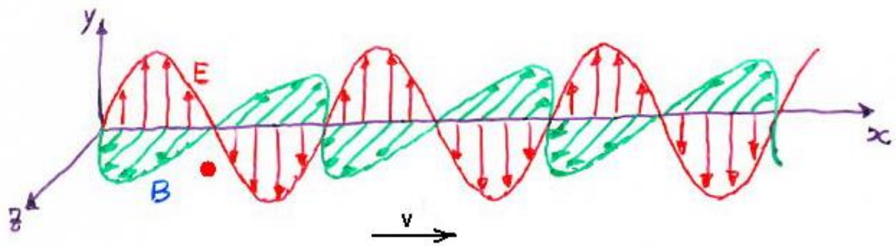
$\Rightarrow$ SIAMO IN PRESENZA DI UN'ONDA PIANA



$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$

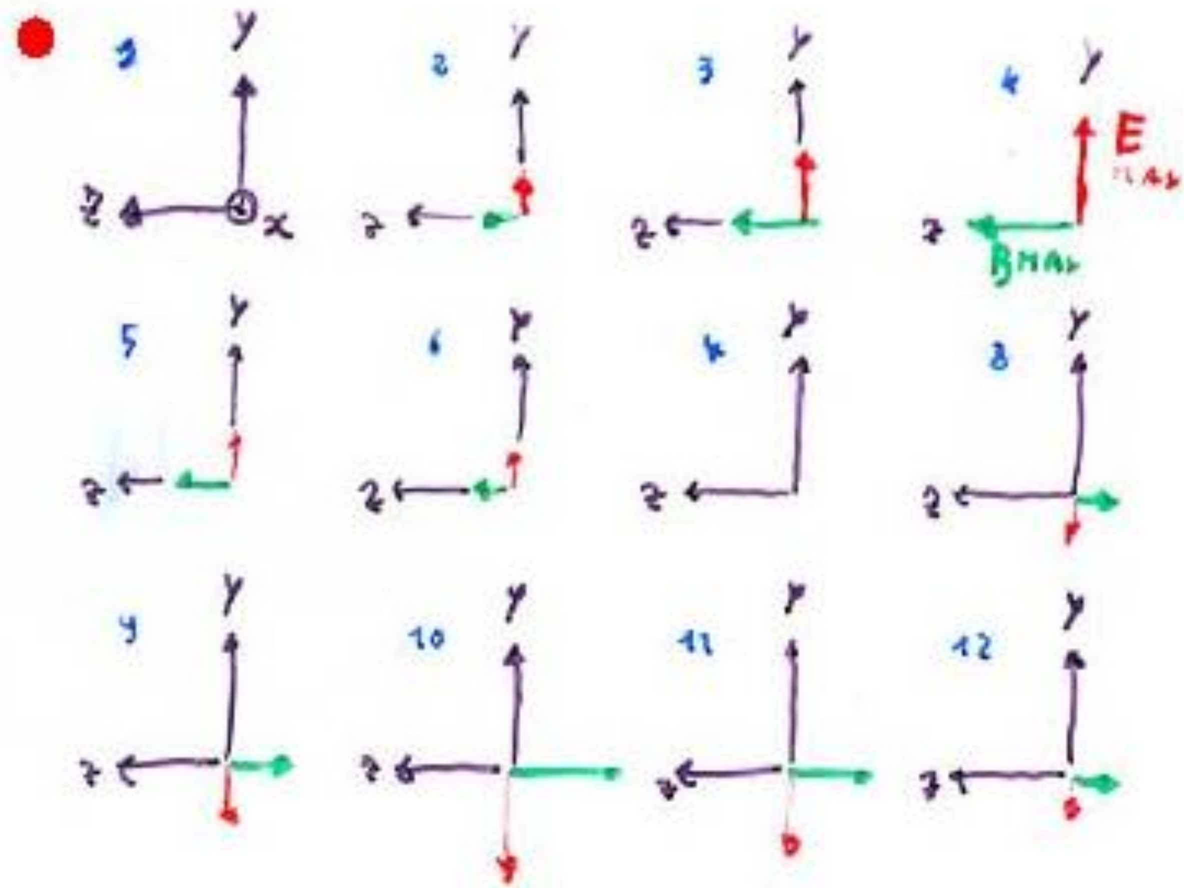
$\vec{E} \times \vec{B} = EB\hat{x}$

CERCANDO DI VISUALIZZARE UNA SEQUENZA TEMPORALE IN UN DATO PUNTO



$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{E} \times \vec{B} = EB\hat{x}$



ONDA PIANA

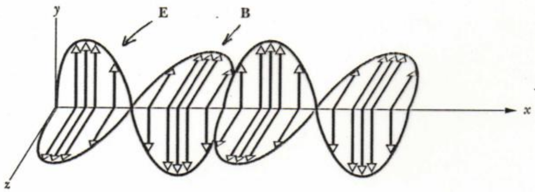


Figura 10 Un'onda piana, variabile sinusoidalmente e polarizzata linearmente che si propaga in direzione x. La figura rappresenta una fotografia in un particolare istante.

$$E(x,t) = E_m \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$
$$B(x,t) = B_m \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

$\vec{E} \perp \vec{B}$

$\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{v}$ onde e.m. trasversali

$E/B = v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = Z/\mu$

$Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ impedenza caratteristica $\left(Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377\ \Omega\right)$

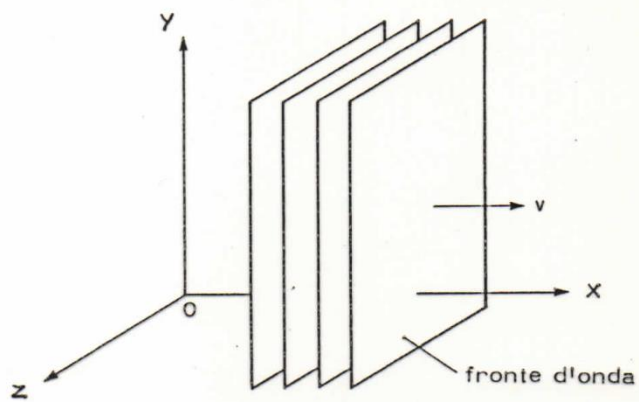
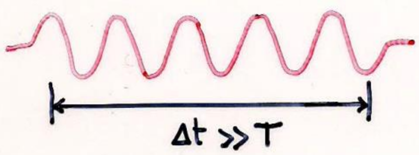
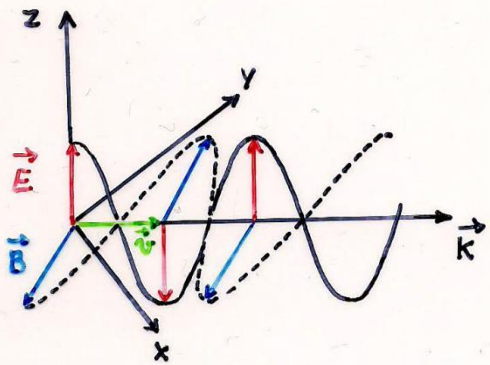


Fig. 2.12 Porzione di un'onda piana che si propaga nella direzione X . I fogli sono fronti d'onda successivi che corrispondono a valori decrescenti della fase $(\omega t - kx + \phi)$.

- Onda piana monocromatica

Intendiamo per onda piana monocromatica un'onda piana sinusoidale di frequenza costante e durata infinita, cioè in pratica un "treno d'onda" di durata $\Delta t \gg T$:





Il vettore d'onda $\vec{K}$ è diretto e orientato come $\hat{n}$ (cioè nella direzione di propagazione dell'onda) ed ha modulo:

$$\boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}}$$

Un'onda piana monocromatica viene scritta usualmente nella forma:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\end{aligned}}\begin{aligned}&= \vec{E}_0\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\\ &= \vec{B}_0\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\end{aligned}$$

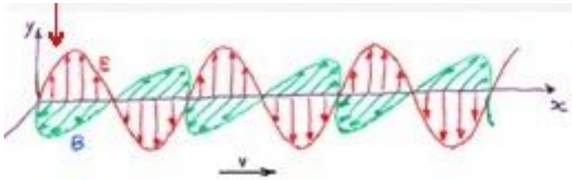
con:

$$\vec{E} = \vec{B}\times\vec{v} \qquad \vec{E}_0 = \vec{B}_0\times\vec{v} \qquad E/B = E_0/B_0 = v$$

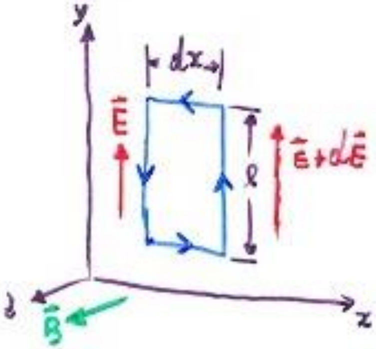
N.B. Punto per punto e istante per istante la densità di energia associata al campo elettrico è uguale a quella associata al campo magnetico. Questo è vero in generale per un'onda e.m.. Vediamo per l'onda piana monocromatica:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\mu v^2} = \frac{1}{2}\frac{E^2\varepsilon\mu}{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = u_E\ .$$



CONSIDERIAMO L'ONDA E.M. PIANA APPENA DESCRITTA E UNA LINEA RETTANGOLARE NEL PIANO xy



CI SI PROPONE DI CALCOLARE

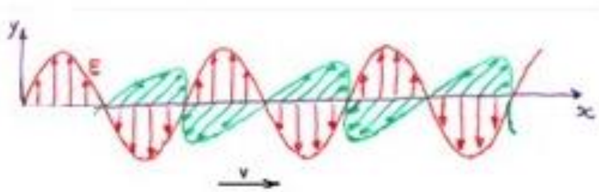
$$\oint \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$ LEGGE DI FARADAY

• $\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = E(x+dx,t)\,\ell - E(x,t)\,\ell$ I CONTRIBUTI DEI LATI // x SONO NUL

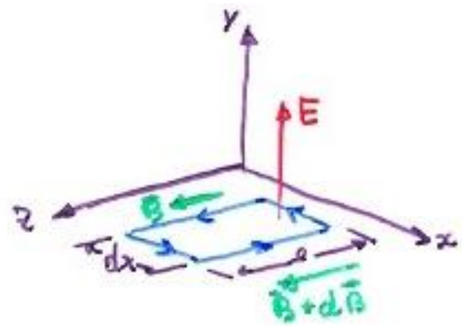
MA $E(x+dx,t) \cong E(x,t) + dE \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = dE\cdot\ell$

• $\phi_B = B\,\ell\,dx \Rightarrow dE\,\ell = -\frac{d(B\ell dx)}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}$

PIÙ PRECISAMENTE LE DERIVATE SONO PARZIALI



$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$



ORA IL RETTANGOLO È NEL PIANO xz

CI SI PROPONE DI CALCOLARE

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$ LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL

- $\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B(x,t)\,\ell - B(x+dx,t)\,\ell$ I CONTRIBUTI DEI LATI $\parallel$ A x SONO NULLI

MA $B(x+dx,t) = B(x,t) + dB \Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = -dB\cdot\ell$

- $\phi_E = E\,\ell\,dx \Rightarrow -dB\,\ell = \frac{d(E\ell dx)}{dt}\mu_0\varepsilon_0 \Rightarrow \frac{dB}{dx} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$

ANCHE QUI LE DERIVATE SONO PARZIALI

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

DALLE RELAZIONI TROVATE

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad\qquad \frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

DERIVANDO RISPETTO A x

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

E

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

SIA E CHE B SONO DUNQUE SOLUZIONI DI EQUAZIONI NELLA FORMA DELL' EQUAZIONE LINEARE DELLE ONDE

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

DEL TIPO $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{H}{m} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}}} \simeq 2.998 \cdot 10^{8}\ m/s = c$$

VELOCITÀ DELLA LUCE NEL VUOTO

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

ESSENDO $E = E_{MAX} \cos(Kx - \omega t)$ E $B = B_{MAX} \cos(Kx - \omega t)$

DALLE RELAZIONI VALIDE PER LE ONDE

- $c = \dfrac{\omega}{K} = \lambda \nu$

INOLTRE DA $\dfrac{\partial E}{\partial x} = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow -K E_{MAX} \cancel{\sin(kx-\omega t)} = -\omega B_{MAX} \cancel{\sin(kx-\omega t)}$

4) $\Rightarrow \dfrac{E_{MAX}}{B_{MAX}} = \dfrac{\omega}{K} = c \quad \Rightarrow \dfrac{E_{MAX}}{B_{MAX}} = \dfrac{E}{B} = c$

I VALORI DEI CAMPI E E B IN OGNI ISTANTE NON SONO FRA LORO INDIPENDENTI

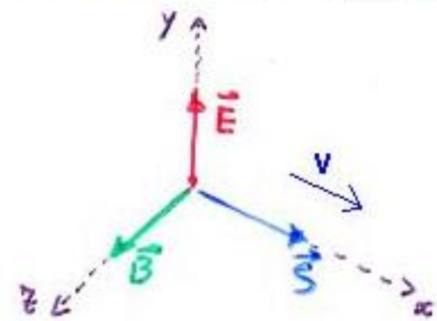
ABBIAMO QUINDI CHE NEL VUOTO LE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL SODDISFANO L'EQUAZIONE GENERALE DELLE ONDE

- E E B SONO DI TIPO ONDULATORIO
- E E B SI PROPAGANO NEL VUOTO CON VELOCITÀ $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$
- E E B SONO LEGATI DALLA RELAZIONE DI PROPORZIONALITÀ $E = cB$
- $\vec{E}$ E $\vec{B}$ SONO ORTOGONALI FRA DI LORO $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{E} \times \vec{B}$ DEFINISCE IL VERSO DI PROPAGAZIONE DELL'ONDA

- NEL TRATTARE LE ONDE MECCANICHE SI È VISTO COME ESSE TRASPORTINO ENERGIA TALE CHE $I \propto$ AL QUADRATO DELL'AMPIEZZA MASSIMA DELLA FUNZIONE D'ONDA

PER LE ONDE ELETTROMAGNETICHE SI DEFINISCE UN VETTORE $\vec{S}$ DETTO VETTORE DI POYNTING

$$\boxed{\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}}$$



CON DIREZIONE E VERSO COINCIDENTI CON QUELLI DELLA VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE

IL MODULO RAPPRESENTA L'ENERGIA ELETTROMAGNETICA CHE PER UNITÀ DI TEMPO ($\Rightarrow$POTENZA) ATTRAVERSA L'UNITÀ DI SUPERFICIE ORTOGONALE ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE $\quad [S] = \frac{W}{m^2}$

PER UN'ONDA E.M. PIANA

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \quad \Rightarrow S = \frac{1}{\mu_0} E B = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} E \frac{E}{c} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{E_{MAX}^2 \cos^2(kx - \omega t)}{\mu_0 c} \\ \frac{1}{\mu_0} B c B = \frac{B^2 c}{\mu_0} = \frac{c B_{MAX}^2 \cos^2(kx - \omega t)}{\mu_0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ENTRAMBE LE RELAZIONI CI FORNISCONO LA POTENZA ISTANTANEA PER UNITÀ DI SUPERFICIE

PASSANDO AL VALORE MEDIO

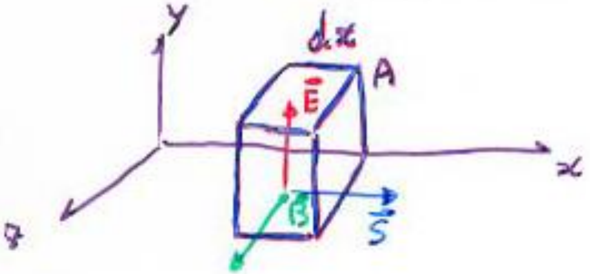
$$\bar{S} = \frac{1}{2}\frac{E_{MAX}^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2}\frac{c B_{MAX}^2}{\mu_0}$$

MA AVENDO DEFINITO PER LE ONDE MECCANICHE L'INTENSITÀ COME

$$I = \frac{\bar{P}}{A} \quad \Rightarrow \quad I = \bar{S}$$

L'INTENSITÀ TRASPORTATA DA UN'ONDA E.M. PIANA È PARI AL VALOR MEDIO DEL VETTORE DI POYNTING

QUESTI RISULTATI SONO IN ACCORDO CON QUELLO CHE SAPPIAMO DELLA ENERGIA ASSOCIATA A E E B



NEL VOLUMETTO $A\,dx$ POSSIAMO CALCOLARE L'ENERGIA PRESENTE IN OGNI ISTANTE

$$dU = dU_E + dU_B = u_E\,A\,dx + u_B\,A\,dx$$

$$\Rightarrow \quad dU = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right)A\,dx = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right)A\,c\,dt$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{dU}{dt\,A} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right)c = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E\,cB + \frac{B\,E/c}{\mu_0}\right)c =$$

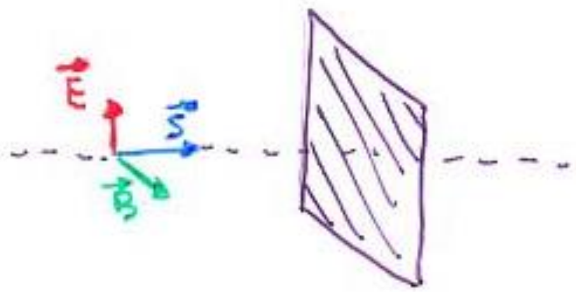
$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 c^2 + \frac{1}{\mu_0}\right)EB = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} + \frac{1}{\mu_0}\right)EB = \frac{1}{\mu_0}EB$$

DEFINIZIONE DEL VETTORE DI POYNTING

INOLTRE $u_B = u_E \Rightarrow$ ISTANTE PER ISTANTE LA DENSITÀ DI ENERGIA ASSOCIATA AL CAMPO MAGNETICO È UGUALE ALLA DENSITÀ DI ENERGIA ASSOCIATA AL CAMPO ELETTRICO

ALTRA CARATTERISTICA DELLE ONDE E.M. È CHE ESSE, OLTRE ALL'ENERGIA TRASPORTANO QUANTITÀ DI MOTO

SE UN'ONDA E.M. INCIDE SU UNA SUPERFICIE COMPLETAMENTE ASSORBENTE POSTA PERPENDICOLARMENTE ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE



- IL CAMPO ELETTRICO TRASFERIRÀ ENERGIA ALLA LASTRA COMPIENDO LAVORO SULLE CARICHE ESSENDO $\overline{E}=0$ => NON TENDE A SPOSTARE LA LASTRA

- IL CAMPO MAGNETICO VICEVERSA NON COMPIE LAVORO MA LA FORZA DI LORENTZ $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$ (DOVE $\vec{v}$ È LA VELOCITÀ COMUNICATA ALLE CARICHE DALLA FORZA ELETTRICA $q\vec{E}$) È QUINDI $\propto \vec{E} \times \vec{B}$ => TENDE A SPOSTARE LA LASTRA NELLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

SI HA CHE

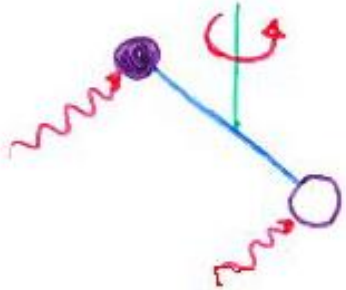
$$\text{QUANTITÀ DI MOTO} = \frac{U}{c} \quad \text{PER L'ASSORBIMENTO TOTALE}$$

⇒ LA PRESSIONE DI RADIAZIONE RISULTANTE P_{RAD}

$$P_{RAD} = \frac{F}{A} = \frac{\frac{d(U/c)}{dt}}{A} = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt}\cdot\frac{1}{c} = \frac{S}{c}$$

SE LA SUPERFICIE È COMPLETAMENTE RIFLETTENTE LA QUANTITÀ DI MOTO TRASFERITA NELL'UNITÀ DI TEMPO È DOPPIA RISPETTO AL CASO PRECEDENTE $= \frac{2U}{c}$

$$\Rightarrow P_{RAD} = \frac{2S}{c}$$ PER UNA SUPERFICIE COMPLETAMENTE RIFLETTENTE



APPARATO PER LA MISURA DI P_{RAD}