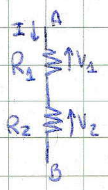
Formulario elettrotecnica

II legge di Ohm

$$R = R_0 \cdot [1 + \alpha (T - T_0)]$$ α = coeff temperatura , T_0 = T ambiente , $R_0 = R|_{T=T_0}$

$$T_j - T_a = P \cdot R_T$$ dove R_T resistenza termica, T_j temperatura finale, T_a temperatura ambiente, P potenza $= R \cdot I^2$

Partitore di tensione



$$V_1 = V_{AB} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$ $\left(V_{TOT} \cdot \frac{\text{R su cui voglio la V}}{\text{somma delle R}} \right)$

Partitore di corrente

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$ $\left(\text{solo se ne ho due: } I_{TOT} \cdot \frac{\text{R opposta}}{\text{somma R}} \right)$

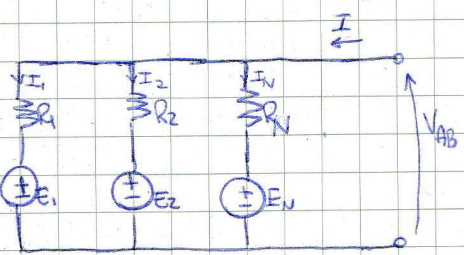
Generale (più di 2 R): $I_k = I \cdot \dfrac{\frac{1}{R_k}}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}}$

Parallelo di resistenze

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$ se ne ho due.

Generale: $R_{eq} = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}}$ In parallelo si sommano le conduttanze.

Millmann

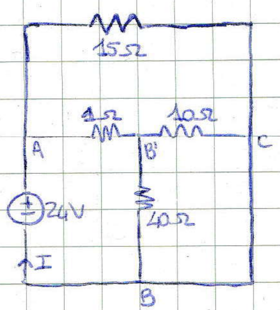


A vuoto: $\overbrace{\sum_{k=1}^{N} I_k = 0}^{I=0} \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \frac{V_{AB} - E_K}{R_K} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \frac{V_{AB}}{R_K} = \sum_{k=1}^{N} \frac{E_K}{R_K} \Rightarrow V_{AB} = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} \frac{E_K}{R_K}}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_K}} =$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{\sum_{k=1}^{N} I_{cc}}{\sum_{k=1}^{N} G_{INCREMENTALI}}$$ (NB $G_{INC} = \frac{\Delta I}{\Delta V_{AB}}$)

Quindi a numeratore metto la somma delle I di ogni ramo dopo che è messo in cortocircuito. Al denominatore vanno le G incrementali, cioè guardo ramo per ramo la G relativa, considerando che R in serie a gen di correnti sono irrilevanti (perché $\Delta I = 0$)

Trasformazioni λ-Δ e Δ-λ



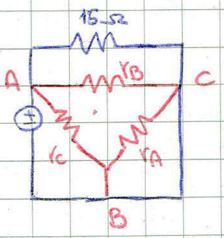
Date R_A, R_B, R_C le R a stella (nome riferito al nodo a cui sono collegate)

Date r_A, r_B, r_C le R a triangolo (nome riferito al mancante dei due a cui é collegata)

Per passare a stella: $R_A = \frac{r_B r_C}{r_A + r_B + r_C}$ cioé $= \frac{\text{moltiplico r opposte al nome che voglio}}{\text{somma r a triangolo}}$

Per passare a triangolo: $r_A = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_A}$ cioé $= \frac{\text{moltiplico a coppie e sommo}}{\text{R che cerco}}$

λ → Δ :

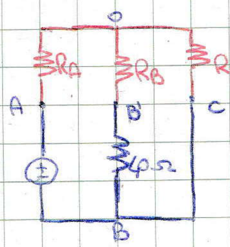


$r_B = \frac{1\cdot 40 + 40\cdot 10 + 1\cdot 10}{40} = \frac{45}{4}\,\Omega$

$r_C = \frac{450}{10} = 45\,\Omega$ ⟹ poi $r_C // r_B // 15$

r_A in corto da BC

Δ → λ



$R_A = \frac{15\cdot 1}{26} = \frac{15}{26}\,\Omega$

$R_B = \frac{10\cdot 1}{26}$ ⟹ poi uso Millmann su V_{OB}

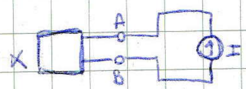
$R_C = \frac{15\cdot 10}{26}$

Teorema di Thevenin

Dato una rete lineare, é sempre possibile ridurla a un generatore reale di tensione

Dimostrazione:

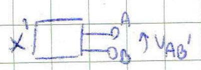
1) collego un gen di I



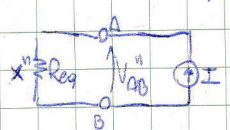
$V_{AB} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \overset{\text{costanti}}{H_k} E_k + \sum_{k=1}^{m} k_k I_{gk}}_{\text{contributo rete X}} + \underbrace{k I}_{\text{contributo gen esterno}}$

Applico sovrapposizione effetti:

1) gen esterno spento: $V_{AB}' = \sum_{k=1}^{N} H_k E_k + \sum_{k=1}^{m} k_k I_{gk} = V_0$ tensione a vuoto

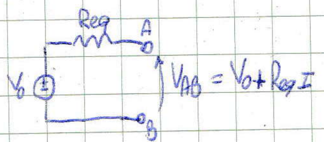


2) gen interni spenti: la rete X'' é equivalente a una sola R



$V_{AB}'' = R_{eq} \cdot I$

Quindi $V_{AB} = V_{AB}' + V_{AB}'' = V_0 + R_{eq} I$

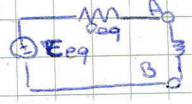


Risoluzione tramite Thevenin:

1) Calcolo del gen. equiv. di tensione mettendo a vuoto i morsetti A e B e risolvendo per es. con Millmann su AB

2) Calcolo Req mettendo a vuoto A e B e spegnendo tutti i generatori.

3) Riscrivo il circuito e ricollego il carico ad A e B:



Teorema di Norton

Data una rete lineare X, si può sempre ridurre a un generatore reale di corrente

Per calcolare I_{eq} basta mettere in corto A e B e la corrente passerà di lì. La R_{eq} si calcola come con Thevenin

Con generatori pilotati:

1) Calcolo E_{eq} mettendo a vuoto A e B (V_{TH})

2) Calcolo I_{eq} mettendo in corto (I_{NO})

3) Calcolo $R_{eq} = \frac{E_{eq}}{I_{eq}}$ $\left(= \frac{V_{TH}}{I_{NO}}\right)$

4) Calcolo I voluta

Oppure ci si riconduce a un'espressione del tipo:

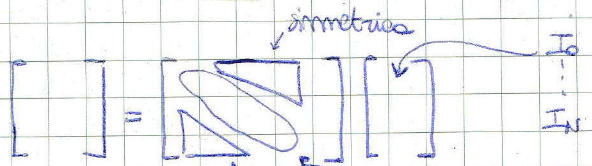
1) Thevenin: $V' = E_{eq} + R_{eq} I'$ dove V' è la V sul gen. di corrente su A e B. Si ottiene imponendo una I' su AB

2) Norton: $I^* = -I_{eq} + \frac{V^*}{R_{eq}}$ dove I^* è la I erogata dal gen di tensione su A e B. Si ottiene imponendo una V^* su AB e determinando I^*

Metodo correnti di maglia

Pongo I_a e I_b correnti fittizie nello stesso verso e uso Kirchoff sulle maglie

Metodo per ispezione

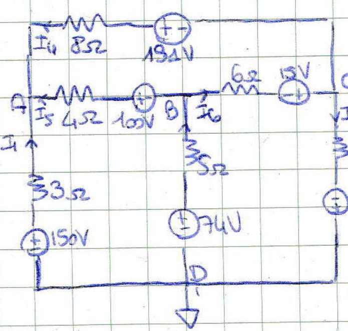


Somme algebriche dei generatori (I riga - I maglia ecc)

resistenze "di confine" cambiate di segno (quelle in comune tra le maglie)

Somma delle resistenze della maglia

Metodo del potenziale di nodo



$$
\begin{array}{c}
A\\ B\\ C
\end{array}
\begin{bmatrix}
\frac{150}{3} + \frac{100}{4} + \frac{191}{8} \\
\frac{74}{5} - \frac{15}{6} - \frac{100}{4} \\
\frac{15}{6} - \frac{23}{7} - \frac{191}{8}
\end{bmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}\\
\begin{bmatrix}
\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\
-\frac{1}{4} & \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\
-\frac{1}{8} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix}
V_A \\ V_B \\ V_C
\end{bmatrix}
$$

Cc i rami e metto correnti con + se entrano e - se escono

Conduttanza cambiata di segno del ramo che unisce i due nodi

Somma conduttanze che vanno sul nodo

Eq. differenziali

- Soluzione completa = sol. omog. associata + sol. particolare (condiz. finali)

O.A: es $RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0 \Rightarrow a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 = 0$

Risolvo: $sol.\ OA. = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \dots$

Determino i k ponendo le condiz. iniziali cioè $t=0$

NB $x(t) = \left[x(0^+) - x(+\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + x(+\infty)$

$x(t) = (\text{iniziali} - \text{finali})\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \text{finali}$

Condensatore

$C = \frac{Q}{V}$ $\quad C = \varepsilon\frac{S}{d}$ $\quad \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

NB a regime è un circuito aperto

- $v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + V_{C0}$
- $i(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$
- $P = \frac{dL}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}CV^2\right)}{dt} = C v_C(t)$

- Carica: $v_C(t) = (V_{C0} - E)e^{-\frac{1}{RC}t} + E$ $\quad i(t) = \left(\frac{E - V_{C0}}{R}\right)e^{-\frac{1}{RC}t}$ $\quad \tau = RC$
- Scarica: $v_C(t) = E \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$ $\quad i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$

Elettriche	Magnetiche
V	NI (I concatenata)
I	Φ
R	$\mathcal{R}$
ρ	$\frac{1}{\mu}$
$\gamma = \frac{1}{\rho}$	μ

Induttore

campo magnetico $H = \frac{NI}{L}$ (n° spire) $\quad \bar{B} = \mu\bar{H}$ dove μ = permeabilità magnetica $\quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

flusso $\Phi = B \cdot S$

$\Phi_C = \Phi \cdot N$

riluttanza magnetica $\mathcal{R} \cdot \Phi = NI$ $\quad \mathcal{R} = \frac{1}{\mu}\frac{l}{S}$

NB a regime è un corto

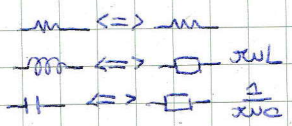
- $v_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ dove $L = \frac{N^2 \cdot S \cdot \mu}{l} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$
- Lavoro $L = \frac{1}{2}LI^2$ (induttanza)
- $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

induttanza $L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \mu \cdot \frac{S}{l} \cdot N^2$

Regime sinusoidale

$e(t) = E_{MAX}\cos(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow E_{MAX}e^{j\alpha}$

$i(t) = I_{MAX}\cos(\omega t + \beta) \Leftrightarrow \bar{I} = I_{MAX}e^{j\beta}$



NB $V_{eff} = \frac{V_{MAX}}{\sqrt{2}}$

$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^t i^2(t)dt}$

Potenze:

Attiva $P = \frac{V_{MAX}I_{MAX}}{2}\cos\varphi = VI\cos\varphi$

Fluttuante $P_f(t) = VI\cos(2\omega t - \varphi)$

$\} = P(t) = v(t)\,i(t)$

Attiva istantanea $P_A(t) = 2VI\cos^2(\omega t)\cos\varphi$

Reattiva istantanea $P_R(t) = VI\,\text{sen}(2\omega t)\,\text{sen}\varphi$

$\} = P(t) = v(t)\,i(t)$

Reattiva $Q = VI\,\text{sen}\varphi \Longrightarrow P + jQ = \bar{A}$ complessa $\Rightarrow A = VI$ apparente (ampiezza)

Rifasamento

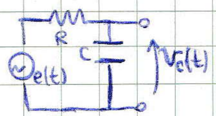
$$C = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega V^2}$$

Trifase

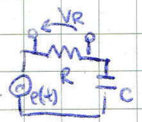
- V (di fase) $= \sqrt{3}\,E$ (di linea)

Filtri

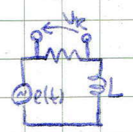
- RC passabasso



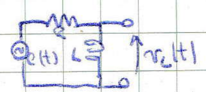
- RC passalto



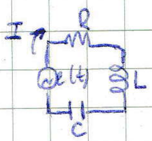
- RL passabasso



- RL passalto

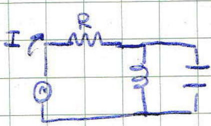


- RLC passabanda



$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad B = \frac{R}{L} \qquad \underset{\text{fattore di qualità}}{Q} = \frac{|V_c|}{|E|} = \frac{\omega^*}{B} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_{max}^2}{\frac{1}{2} R I_{max}^2 T}$$

- Eliminabanda (antirisonanza)



$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Funzione di trasferimento

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{Y}(j\omega)}{\bar{X}(j\omega)} = \underbrace{H_0 \cdot \frac{\left(\frac{j\omega}{z_1}+1\right)\cdots\left(\frac{j\omega}{z_N}+1\right)}{\left(\frac{j\omega}{p_1}+1\right)\cdots\left(\frac{j\omega}{p_N}+1\right)} \cdot (j\omega)^m}_{\text{Forma canonica}} \qquad m = \frac{n^\circ \text{ zeri origine}}{n^\circ \text{ poli origine}}$$

NB decibel $= 20\log_{10}\left(\frac{V_u, I_u}{V_i, I_i}\right)$ guadagno

- Nel caso di poli complessi coniugati

$$H(j\omega) = RC\,(j\omega)\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega^*}\right)^2 + 2\delta\left(\frac{j\omega}{\omega^*}\right)+1} \quad \text{con } \omega^* = \sqrt{\underset{\text{reale del polo}}{\sigma_1^2} + \underset{\text{Im del polo}}{\omega_1^2}} \qquad \delta = \frac{\sigma_1}{\omega^*} \qquad \text{Errore} = \frac{1}{2\delta}$$

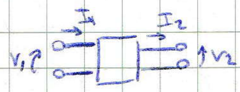
Se δ piccolo errore grande, siamo vicini a risonanza con alto fattore di qualità. δ = fattore di smorzamento

Doppi bipoli

- Matrice delle ammettenze: $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}}_{\|Y\|} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

- Matrice $\|h\|$ ibrida $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

- Matrice trasmissione diretta $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{\|T\|} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$



In questo caso I_2 é uscente

Doppi bipoli in serie

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove } \|Z\| = \|Z'\| + \|Z''\|$$

Doppi bipoli in parallelo

$$\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\|$$

Doppi bipoli in cascata

$$\|T\| = \|T'\| \cdot \|T''\|$$

Eq. differenziali di secondo grado

Ottengo un'eq. integro-differenziale (c'é la derivata per la L e integrale per il C). Posso derivarla membro a membro e ottenerla differenziale di secondo grado. Risolvo la caratteristica associata: $\alpha_{1/2} = -\alpha_r \pm \sqrt{k_r}$ (per es)

1) $k_r > 0$ reali distinte: $x(t) = k_1 e^{(-\alpha_r + \sqrt{k_r})t} + k_2 e^{(-\alpha_r - \sqrt{k_r})t}$ pongo $t=0$ per trovare k_1 e k_2

Metto in sistema $\begin{cases} i(0) = \cancel{val}\ k_1 + k_2 = \text{val della tabella} \\ \left.\frac{di}{dt}\right|_0 = \text{quello che trovo dalla formula iniziale con } t=0 \end{cases}$ } trovo i k

2) $k_r = 0$ reali coincidenti:

$x(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{-\alpha_r t}$ Metto in sistema $\begin{cases} i(0) = \text{val tabella} = k_1 \\ \left.\frac{di}{dt}\right|_0 = \text{val trovato} = -\alpha_r k_1 + k_2 \end{cases}$

3) $k_r < 0$ complesse coniugate

$x(t) = k e^{-\alpha_r t} \operatorname{sen}(\sqrt{-k_r}\, t + \gamma)$ Metto in sistema: $\begin{cases} i(0) = \cancel{val} = k \operatorname{sen}\gamma \\ \left.\frac{di}{dt}\right|_0 = \text{val trovato} = -\frac{R}{2L} k \operatorname{sen}\gamma + k\sqrt{-k_r} \cos\gamma \end{cases}$