

21/09/2020

TEORIA DEI SEGNALI:

Appunti: contatti del 2018 nel quadernone d: T.D.S , questi: appunti: sono presi dalle lezioni online del 2020

Il syllabus è il documento con la quale vediamo come è strutturato il corso

I segnali sono di 2 tipi:

1 - DETERMINATI → Segnale d: cui conosciamo esattamente l'andamento nel tempo

2 - ALEATORI → (Alea = "dado") sono segnali pseudo casuali, con incognite probabilità

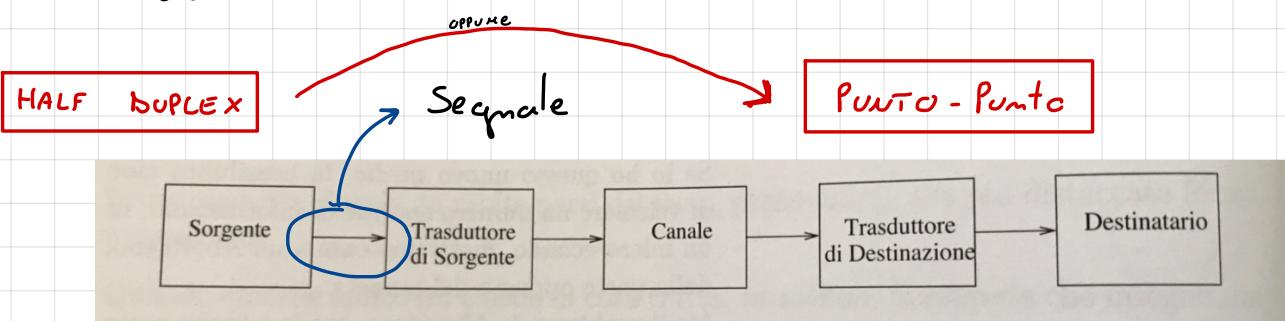
↳ utilizziamo la teoria della probabilità

Un'informazione si può trasmettere con messaggi differenti:

es: messaggio scritto: domani sorgerà il sole

messaggio disegnato: 

messaggio d: natura diversa, l'informazione è la stessa



Il segnale è la grandezza fisica (elettrica) che descrive l'informazione

Attraverso dei trasduttori trasformano i messaggi in segnali.

Attraverso il canale di Telecomunicazione (Modem, CODEC, Modulatore, Antenna), riusciamo a trasmettere il segnale, nella trasmissione appartengono: i disturbi.

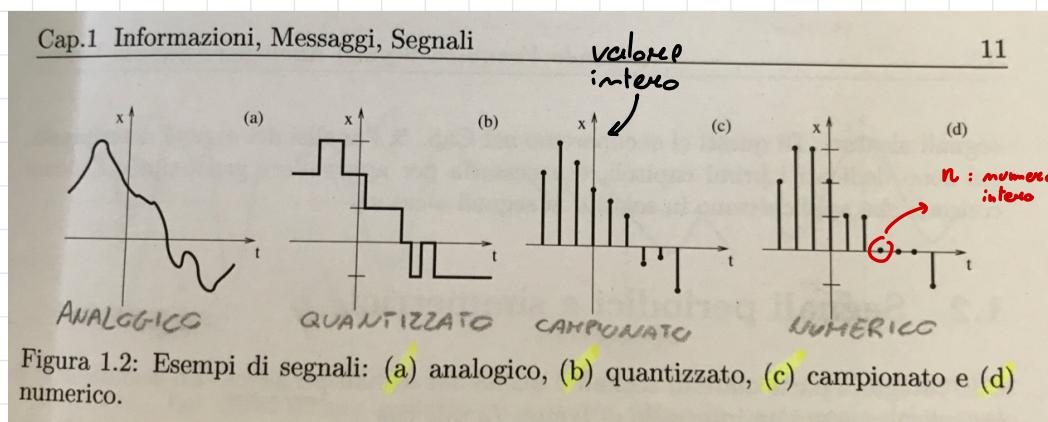
I disturbi: sono la causa per la quale è quasi impossibile ricostruire esattamente un messaggio da sorgente a destinazione.

22/09/2020

Il messaggio viene convogliato in un sistema di componenti elettroniche che devono riprodurre in modo fedele tale messaggio.

Se il messaggio non dovesse essere riprodotto in maniera fedele si avrà effetti che ci sono dei disturbi.

SEGNALE: funzione matematica che definisce la variazione di una grandezza fisica a cui è associata un'informazione è il modello matematico che rappresenta il segnale.



La funzione x può essere:

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad o \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad o \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

\downarrow

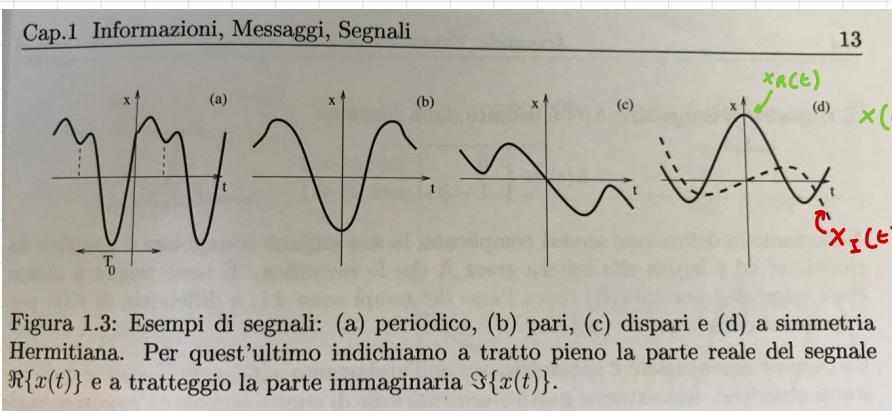
segnale campionato

L'asse del tempo può essere continuo o discettizzato.

In un **segnale campionato** l'ascissa è composta di valori interi.

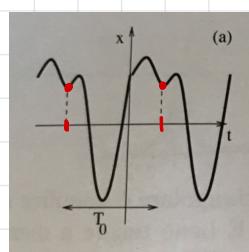
Noi ci occupiamo solo di segnali analogici.

Proviamo a usare la matematica per mettere ordine tra i segnali analogici:



d) È un segnale complesso

Un segnale periodico è un segnale che si ripete uguale a se stesso ogni T_0 secondi, in più possiede una frequenza.

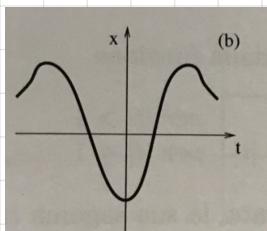


Matematicamente un segnale periodico è:

$$x(t+T_0) = x(t) \quad \forall t$$

Ed ovviamente il periodo è il min t per cui è vera quella funzione.

Un segnale pari è un segnale che si "specchia" sull'ascissa. Matematicamente si può descrivere:

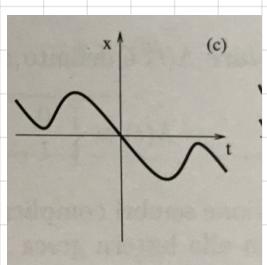


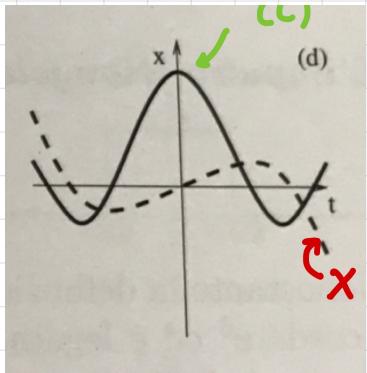
$$x(-t) = x(t)$$

Questo nel caso in cui si specchia sull'asse verticale.

→ Questo si specchia nell'origine e quindi:

$$x(-t) = -x(t)$$





Questo è un **grafico simmetrico** che prende il nome di: **simmetria Hermitiana**.
Per questo segnale indichiamo la parte reale col tratto pieno $\mathbb{R}\{x(t)\}$ e la tratteggia: o quella immaginaria $\mathbb{I}\{x(t)\}$

Vediamo qualche segnale

Segnale costante

$$x(t) = A$$

Serve a rappresentare

ad es. la corrente

continua $A[V]$. Anche

se prima o poi si scomponga

Gradino Unitario

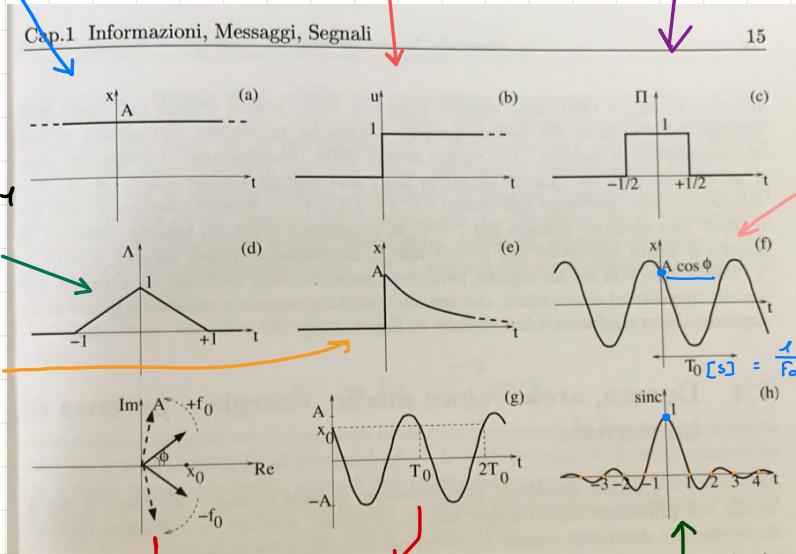
altezza è 1, prima dell'origine è 0.

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Impulso rettangolare

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

segnale d: durata breve



Fasone

$$f_0 = Ae^{j\phi}$$

$$-f_0 = Ae^{-j\phi}$$

SINC

Sono cosiddette, perché si annulla nei numeri interi ossia tutti i valori di ascissa

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$\lim_{t \rightarrow 0}$

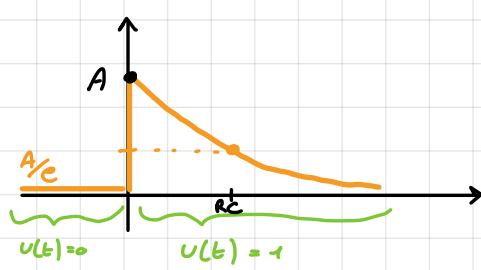
quindi quando $t = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{sinc}(t) = 0$$

con A e B costanti generiche

In questo caso la funzione è: $Ae^{-Bt} \cdot \frac{t}{T}$

ESPOENZIALE CAUSALE

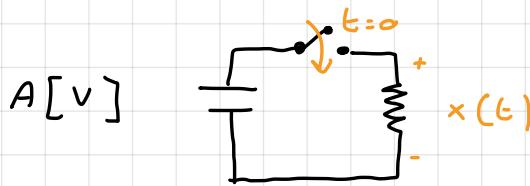


$$x(t) = A e^{-\frac{t}{T}} \quad u(t)$$

$$= A e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$x(t) = A/e \quad \text{per } t = RC > 0$$

Può essere una situazione del genere

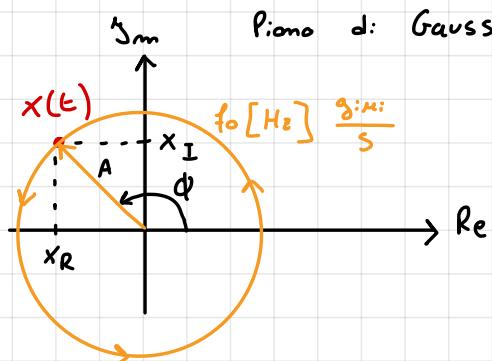


costante d: tempo

$$T = R \cdot C$$

$$[s] [s] [F]$$

SINUSOIDE

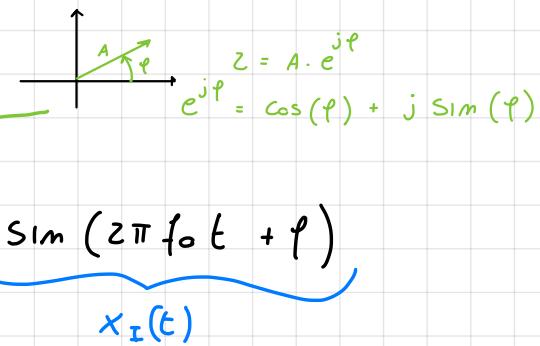


Più o meno d: Gauss
voglio che $x(t)$ si muova d:
moto circolare un:iforme

$$x \in \mathbb{C} \quad x(t) = A \cdot e^{j(z\pi f_0 t + \phi)}$$

$$= A \cdot \cos(z\pi f_0 t + \phi) + A j \sin(z\pi f_0 t + \phi)$$

$$\quad \quad \quad x_R(t) \qquad \qquad \quad x_I(t)$$



Questo si chiama FASORE: è la rappresentazione
della sinusode in modo vettoriale, per $t=0$ l'angolo è ϕ .
Quando $t>0$, il vettore ruota formando una circonferenza
e gira con frequenza f_0 .

Formule d: Eulero

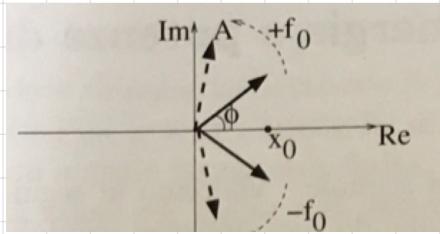
$$A e^{j\alpha} = A \cos \alpha + j A \sin \alpha$$

complesso
conjugato

$$\longrightarrow A e^{-j\alpha}$$

$$= A \cos \alpha - j A \sin \alpha$$

Se io sommo: 2 complessi coniugati:



$$x(t) + x^*(t) = z A \cos \alpha$$

I fasi: sono più facili da gestire delle sinusoidi, sono stretti: portanti.

Sinc

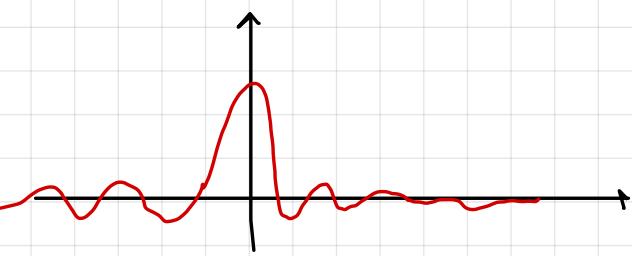
$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \text{sinc} \frac{\pi t}{\pi t} & \text{per } t \neq 0 \\ 1 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

→ Se dovesse simulare l'onda mette su un programma informatico deve fare:

:f(t=0) {

sinc(t)=1

}



25/09/2020

Se io ho un segnale sinusoidale, Quanta energia mi può dare?

→ Potenzialmente infinita

E la potenza?

→ Non è infinita, c'è un limite, dipende dal carico alla resistenza a cui la collego.

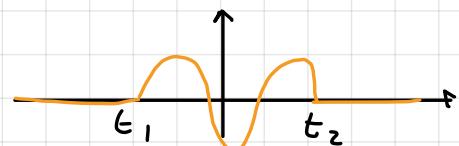
Tensione fonte su una resistenza piccola → Tanta potenza

Cosa ci interessa quando vogliamo fare misure sui segnali?

- DURATA: La misura del più piccolo intervallo fra i due quali il segnale è \emptyset

$$\text{es: } D_{\pi} = 1[\text{s}] ; \quad D_x = t_2 - t_1$$

Il segnale può essere:



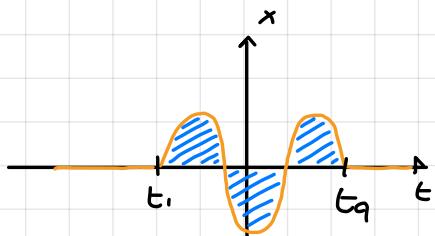
→ A durata strettamente limitata: se esiste un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ all'esterno del quale il segnale è nullo. $D = t_2 - t_1$ è la durata del segnale

→ A durata illimitata: $D = \infty$

→ A durata asintoticamente limitata: (es: sinc) quando $t \rightarrow \pm \infty$

- AREA A_x : Area algebrica data dall'integrale del segnale esteso a tutto l'asse dei tempi:

$$A_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$



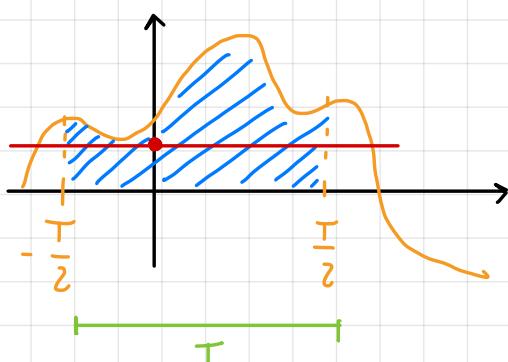
es: → la somma delle aree algebriche in una sinusode = \emptyset

- VALORE MEDIO TEMPORALE:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt$$

x_x

È detto anche componente continua di un segnale.



→ stiamo calcolando il valore medio della funzione x all'interno dell'intervallo $(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2})$

es: il valore medio temporale della sinusode è \emptyset

↳ poiché area nulla

Logicamente se il segnale è periodico facciamo sul periodo T_0

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

per $x(t)$ periodico

Se l'area tende all'infinito (gradino unitario), ho la chance che il valore medio temporale sia \emptyset ($\langle x(t) \rangle = 0$)

Se l'area è nulla (sinusode): $\langle x(t) \rangle = 0$

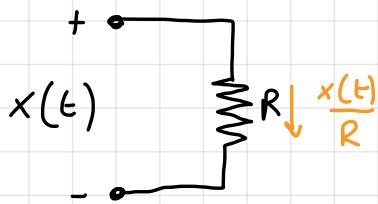
→ Il valore medio della voce umana è sempre nulla!

- ENERGIA TOTALE NORMALIZZATA :

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

usiamo il metodo perché ci importa solo l'ampiezza non della fase

Che è l'energia che passa in R ?



$$P = VI = \frac{x^2(t)}{R}$$

normalizz.

$$\text{potenza istantanea} \rightarrow P(x) = V \cdot I = \frac{x^2(t)}{R} = |x(t)|^2$$

Se mi interessa l'energia totale, lo integro totalmente

diciamo "normalizzata"
Poiché sceglio un $R = 1 \Omega$

questo poiché:

$$x(t) \xrightarrow{R=1\Omega} x^2(t) \cdot R = P_x(t)$$

R non dà contributo numerico.

- POTENZA MEDIA NORMALIZZATA :

mediamente quanti watt riesco a trasferire sul canale ?

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad \rightarrow \text{identica operazione del valore medio}$$

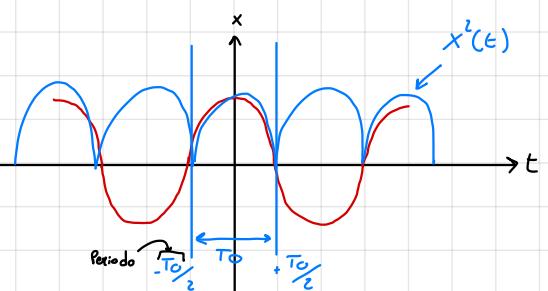
Il numeratore tende all'energia, il denominatore all'infinito.

Se $E_x < \infty$ (segna ad energia finita), $P_x = 0$

Se $E_x = \infty$, può avere P_x finita, poiché se abbiamo $\frac{\infty}{\infty}$ con non e den che vanno alla stessa velocità allora P_x finito.

Per segnali periodici:

$$P_x = \frac{\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt}{T_0}$$



Quindi: potremo scrivere $\langle P_x(t) \rangle = P_x$, per segnali elettrici che si applicano a misure normalizzate

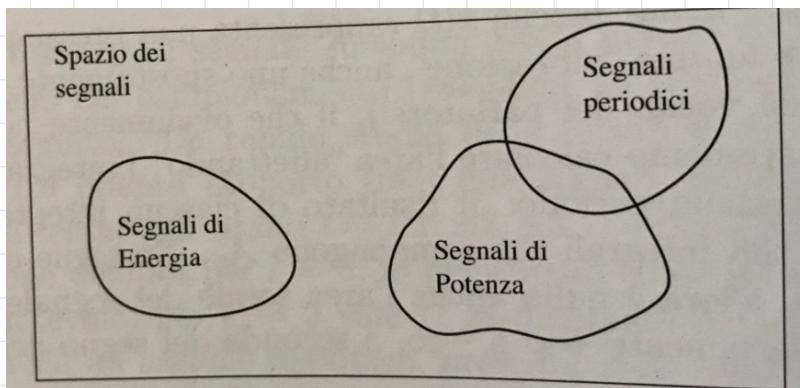
N.B.

Un segnale "di Energia" ha sempre Potenza media Normalizzata NULLA (quindi non è "di Potenza")

Se un segnale è "di potenza", allora non è "di Energia", quindi ha Energia Totale massimamente infinita

"di Potenza" vuol dire $0 < P_x < \infty \rightarrow$ potenza finita > 0

"di Energia" vuol dire $E_x < \infty \rightarrow$ energia finita



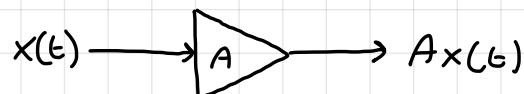
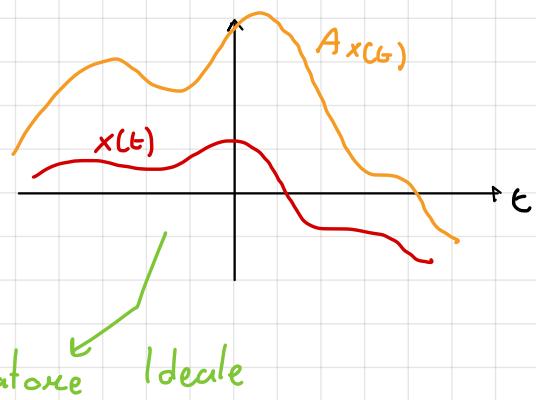
TRASFORMAZIONI SU SEGNALI

Succede quando : segnali transitano sui circuiti elettrici.

► MOLTIPLICAZIONE PER UNA COSTANTE

$$\boxed{A \cdot x(t)}$$

cost. Signal



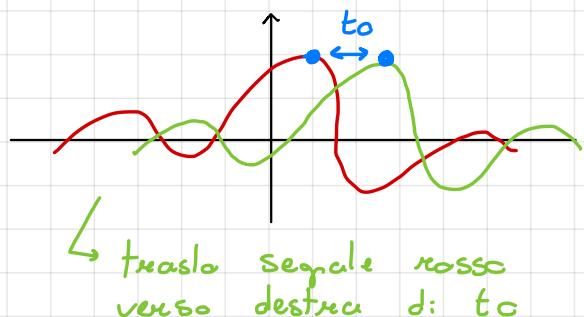
A può essere grande, ma anche < 1, in quel caso stiamo attenuando il segnale.

Ogni mezzo trasmissivo (es: filo di rame) è un attenuatore, il segnale perde energia più il filo è lungo. Per evitare di perdere il segnale usiamo Amplificatori: ogni T_0 Km.

Il miglior mezzo trasmissivo è la fibra ottica, Amplif. ogni T_0 Km.

► TRASLAZIONE TEMPORALE

$$x(t-t_0) \rightarrow \text{è un ritardo}$$



Se $t_0 > 0$ è un ritardo.

Se $t_0 < 0$ è un anticipo.

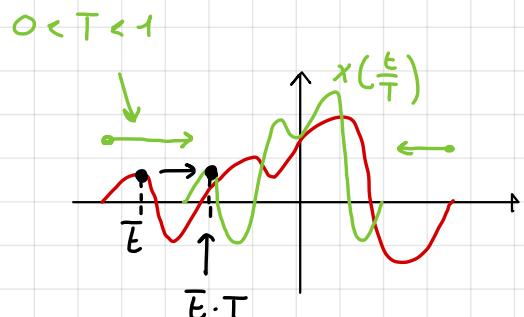
Se ho $x(t+t_0)$ ovviamente come funzione è il contrario.

Se $t_0 < 0$ è un ritardo.

Se $t_0 > 0$ è un anticipo.

► CAMBIO DI SCALA

$x\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$ nella variabile tempo viene divisa una costante T



Il segnale viene schiacciato orizzontalmente.

lo stesso punto del segnale originale in \bar{t} , lo troviamo nel nuovo segnale in $\bar{t} \cdot T$

Se $T < 1$ abbiamo una compressione

Se $T > 1$ abbiamo una espansione

} con $T \neq 0$

Se $x(t \cdot T)$... è il contrario

Se $T > 1$ abbiamo una compressione

Se $T < 1$ abbiamo una espansione

$$\Delta x = (t_2 - t_1) \longrightarrow (t_2 - t_1) T$$

la durata del segnale orig. \downarrow la nuova durata d: $x\left(\frac{t}{T}\right)$

A cosa corrisponde un cambio di scala nella resulta?

↪ Riprodurre ad es. un segnale audio velocizzato o rallentato, con compressione che cambia il timbro vocale, se volessimo mantenere il timbro vocale va fatta un'analisi spettrale.

28/09/2020

Un segnale $x(t)$ può subire delle trasformazioni:

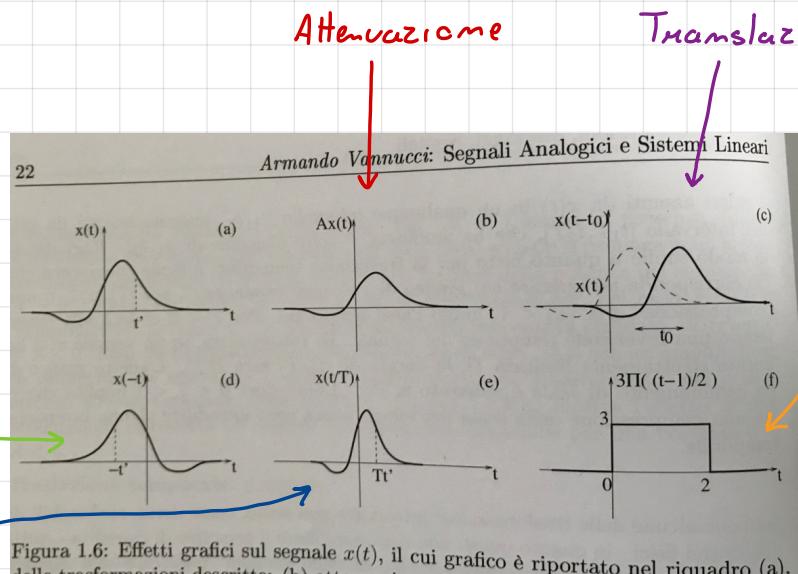
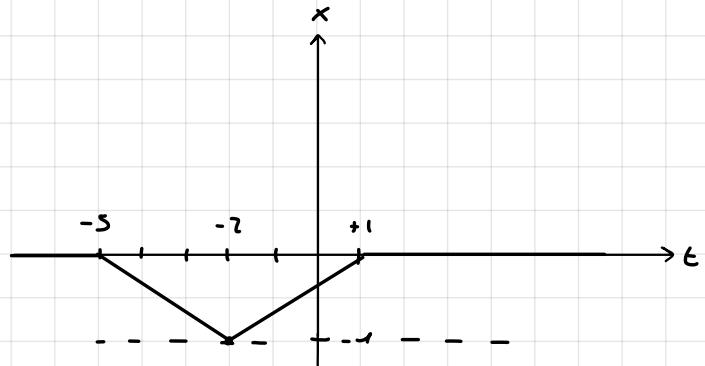
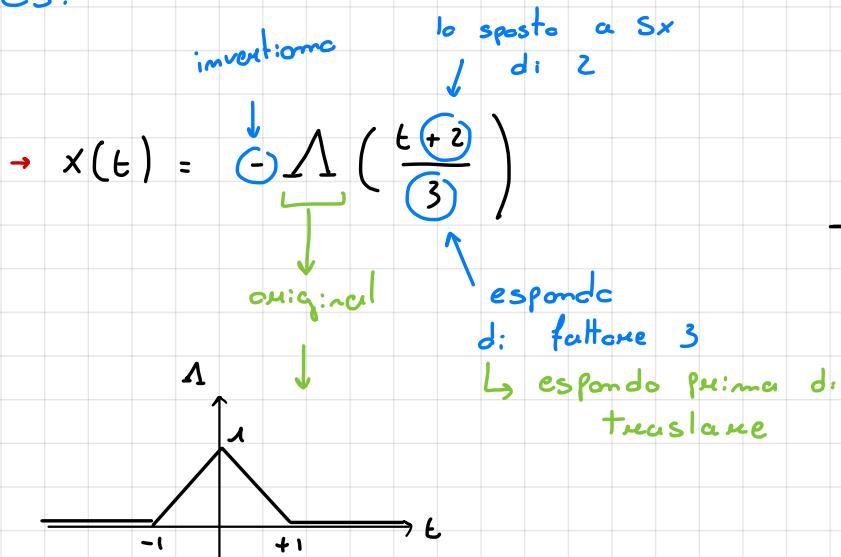


Figura 1.6: Effetti grafici sul segnale $x(t)$, il cui grafico è riportato nel riquadro (a), delle trasformazioni descritte: (b) attenuazione $Ax(t)$ con $0 < A < 1$; (c) traslazione temporale della quantità $t_0 > 0$; (d) inversione temporale; (e) cambiamento di scala con $0 < T < 1$; (f) segnale $\Pi(t)$ amplificato, traslato e scalato.

Combination
d:
Scala

ES:

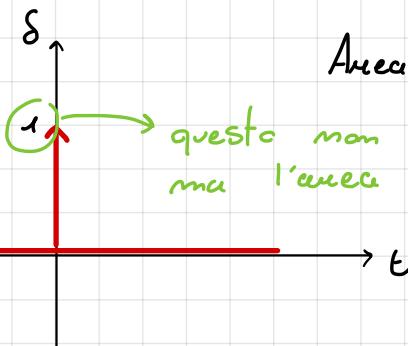


Secondo me d: applicazione è importante

$$\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda\left(\frac{t}{3}\right) \rightarrow -\Lambda\left(\frac{t+2}{3}\right)$$

L'IMPULSO DI DIRAC

$\delta(t)$



Area unitaria

questo non è il valore del segnale
ma l'area

Impulso stiamo, definito non da una funzione ma dalla
sua proprietà (Proprietà di Compionamento)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0)$$

$x(t)$ continuo in $t=0$

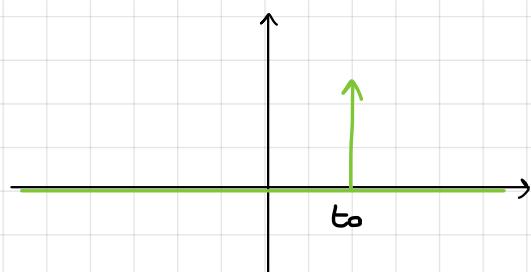
Su δ compiono il segnale $x(t)$ nell'origine andando a prelevare
il valore.

"Non è una funzione, è una DISTRIBUZIONE"

Per un matematico ...

Qualunque espressione include $\delta(t)$... deve essere contenuta
in un INTEGRALE

$A \delta(t-t_0)$



Un matematico lo vuole così:

$$\int A \delta(t-t_0) dt$$

$\delta(t)$ è un modello di un segnale "Breve ma intenso"

Vediamo le proprietà di campionamento applicata a segnali:

$$1) \underline{x(t) = 1} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

segnale continuo

Area della delta

$$2) x(t) = \prod \left(\frac{t}{2\epsilon} \right) \Rightarrow \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(t) dt = 1$$

campionamento

continuo nell'origine

area

$\frac{1}{2\epsilon} \prod \left(\frac{t}{2\epsilon} \right)$

Confrontando : 2 campionamenti (1) e (2), le 2 aree sono entrambe = 1 sia che il segnale abbia valore 1 su tutto l'asse dei tempi, sia che abbia valore 1 solo intorno all'origine

Altre proprietà:

3) $\delta(t) \rightarrow +\infty$ in $t=0$]> infinitamente breve e infinitamente alto

$$4) x(t) = y(t+t_0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+t_0) \delta(t) dt = y(t_0)$$

(1) \uparrow (2) \uparrow
 0 (3) \uparrow (4) \uparrow

Cambio di variabile
in un integrale

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) \delta(\tau-t_0) d\tau = y(t_0)$$

Proprietà d: Campionamento
Generalizzata

1) $t+t_0 = \tau$; $t = \tau + t_0$

2) $dt = d\tau$

3) $\tau_1 = t_1 + t_0 = -\infty$

4) $\tau_2 = t_2 + t_0 = +\infty$

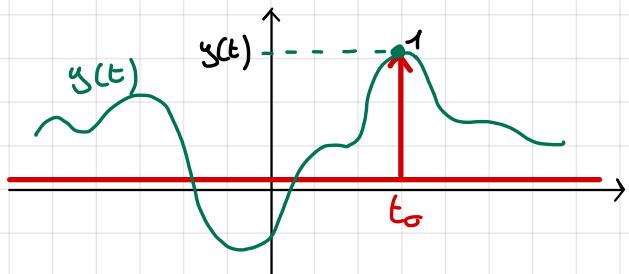
τ è una variabile di integrazione, possiamo chiamarla come vogliamo

PROPRIETÀ DI CAMPIONAMENTO
GENERALIZZATA

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \delta(t-t_0) dt = g(t_0)$$

$\forall y$ continua
in t_0

Rappresentazione grafica



Ma allora possiamo scrivere un'altra proprietà:

$$5) \underbrace{y(t) \delta(t-t_0)}_{\substack{\text{prodotto} \\ \text{tra} \\ \text{una} \\ \text{funzione} \\ \text{e} \\ \text{un} \\ \text{impulso}}} = \underbrace{y(t_0) \delta(t-t_0)}_{\substack{\text{velocità} \\ \text{costante}}} \rightarrow \underbrace{\text{segnale}}$$

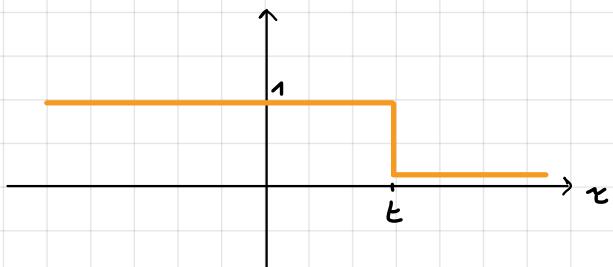
Proprietà di campionamento
in forma non
integrale

$$6) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\tau) d\tau = x(0)$$

con $x(\tau) = u(t-\tau) = u(-(t-\tau))$

\downarrow
inversione
temporanea

\uparrow
traslazione



$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

Su u annulla il prodotto da t in poi, perciò integreremo solo da $-\infty$ a t (dove vale 1). Ma allora non mi serve scrivere $u(t-\tau)$, scriverò:

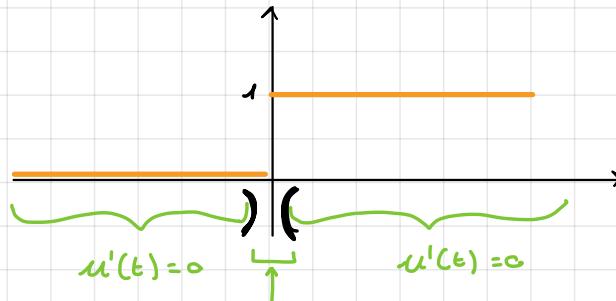
$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

derivando :

$$\frac{d}{dt}$$

$$\delta(t) = u'(t)$$

Ma allora la derivata del quadriime unitaria è proprio l'impulso di DIRAC.



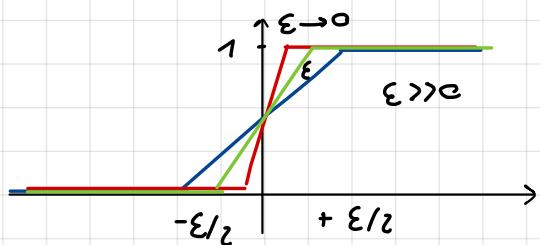
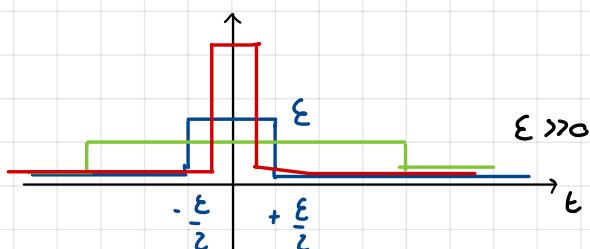
nell'origine abbiamo una transizione in cui $u'(t) = \delta(t)$

↳ DISTRIBUZIONE

↳ fosse stata una funzione non sarebbe stato derivabile.

ES: 5.6

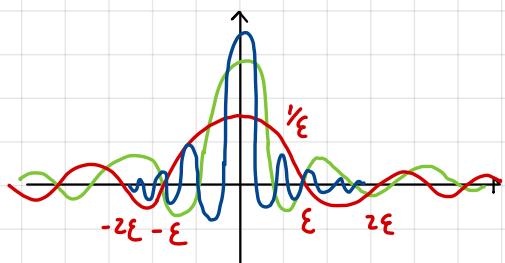
C'è una seconda maniera per vedere le distribuzioni
graficamente, e cioè come un limite di MOLTE
famiglie di funzioni.



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[u\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - u\left(0\right) \right] = \delta(t)$$

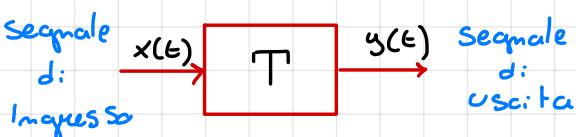
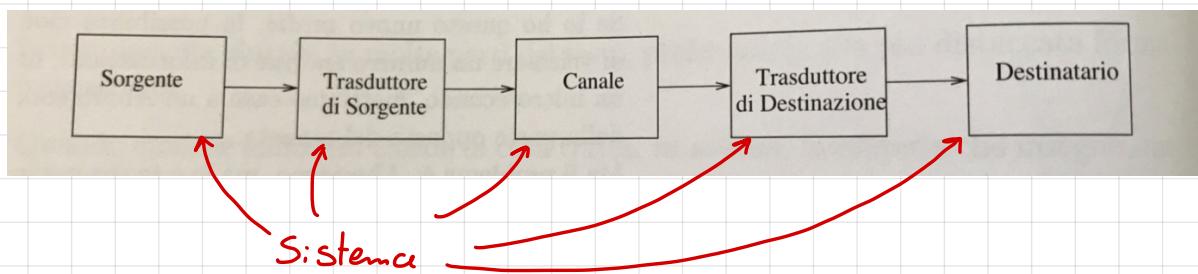
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \sin \left(\frac{t}{\varepsilon} \right)$$

Oltre alla famiglia delle rettangolari: ...



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \sin \left(\frac{t}{\epsilon} \right) = \delta(t)$$

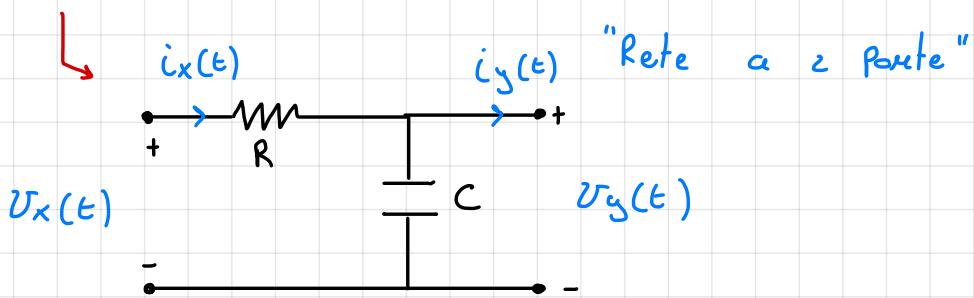
Altra famiglia di segnali il cui dato
un fattore di distribuzione e un
fattore di scala opportuno ad avere
 $\lambda_x = 1$, il limite è un $\delta(t)$.



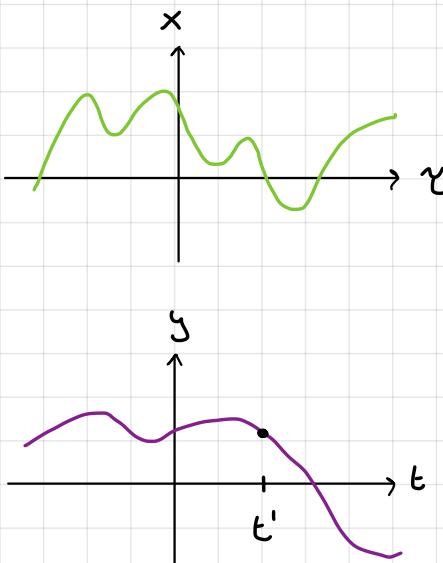
Un sistema ha il compito di modificare un segnale.

Modello matematico \rightarrow ci consente di sapere la variazione del valore d. ingresso rispetto a quello d. uscita

dispositivo fisico



Qual'è il modello matematico? Il 'funzionale'



"FUNZIONALE"

$$y(t') = T[x(z); t']$$

Diagram illustrating the functional T with its arguments:

- argomento**: $x(z)$
- istante**: t'
- tempo su cui scorre l'ingresso**: t'

Come una funzione associa un valore \mathbb{R} a un valore \mathbb{C}
 anche un **FUNZIONALE** può fare questa associazione per sapere
 la relazione tra segnale di ingresso e uscita

FUNZIONE $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

"**FUNZIONALE**" $T: x(t) \rightarrow y(t)$

Esempi:

"Amplificatore ideale"

$$x(t) \xrightarrow{A} y(t) = T[x(\tau); t] = A \cdot x(t)$$

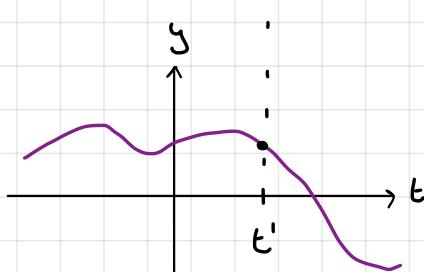
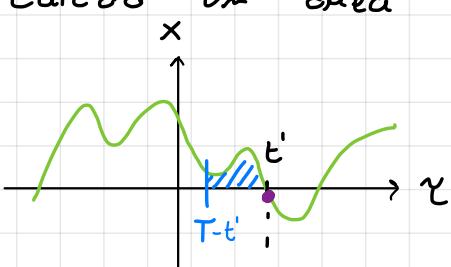
'Integratore a finestra mobile'

$$x(t) \xrightarrow{\int_T} y(t)$$

$$y(t) = T[x(\tau); t] = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

Veduta l'integrale tra $t-T$ del segnale di ingresso, quindi:

calcolo un'area

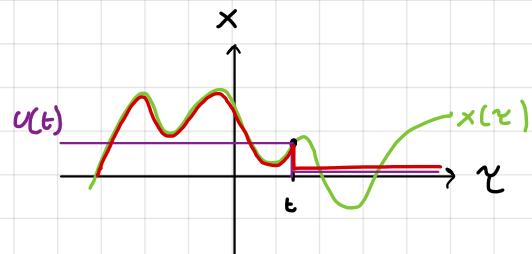


Classificazione dei sistemi in base a delle PROPRIETÀ

- Causale : $y(t)$ dipende da $x(\tau)$ per $\tau \leq t$

(Vogliamo il passato
e non il futuro)

$$T[x(\tau); t] = T[\underbrace{x(\tau)}_{\text{green}} \underbrace{u(t-\tau)}_{\text{purple}}; t]$$



C: cancella il futuro
il grado: non è stato inventato e traslato in
E

- Realizzabilità ideale: Condizione necessaria ma non sufficiente per poter costruire un sistema

$$\forall x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) \in \mathbb{R}$$

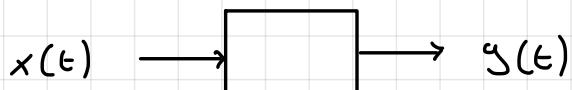
impresso

uscita

- F:sicomente realizable:

Idealmente realizzabile + Causale

- Stabilità "ingresso limitato - uscita limitata" B.I.B.O



$$|x(t)| < M \Rightarrow |y(t)| < L$$

Se la limitatezza dell'ingresso implica che anche l'uscita sia limitata, allora è stabile

B.I.B.O : Bounded Input → Bounded Output

Stazionarioietà

(Invarianza nel tempo)

$$y(t) = \overline{T} [x(t)]$$

Somma breve per
 $\overline{T}[x(\tau); t]$

$$y(t-t_0) = \overline{T} [x(t-t_0)]$$

$\overline{T}[x(\tau-t_0); t]$

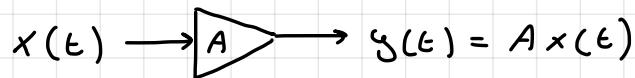
Un sistema si dice stazionario se applicando una traslaz.

temporale all'ingresso essa si presenta anche in uscita

ES: 8

Vediamo, in base alla definizione di stazionarioietà, se l'Amplificatore Ideale e l'integratore a finestra mobile sono o meno dei sistemi stazionari:

"Amplificatore Ideale"



$$y(t) = \overline{T} [x(\tau); t]$$

$$y(t-t_0) = \overline{T} [x(\tau-t_0); t]$$

$$x(t-t_0) \rightarrow A \rightarrow Ax(t-t_0) = y(t-t_0)$$

"Integratore a finestra mobile"

$$x(t) \rightarrow S_r \rightarrow \underline{\underline{y(t)}} = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau = \overline{T} [x(\tau); t]$$

\uparrow
uscita non mitondata

\uparrow
ingresso non ritardato

definiamo un nuovo segnale

$$\star x_n(t) \triangleq x(t-t_0)$$

calcolo: amo l'uscita applicando la relazione funzionale a x_R

$$x_R(t) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y_R(t) = \int_{t-T}^t x_R(\tau) d\tau = \int_{t-T}^t x(\tau - t_0) d\tau =$$

(1) \uparrow \downarrow (2)

$$= \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x(\alpha) d\alpha = y(t-t_0)$$

\uparrow $t-t_0-T$

- Cambio di variabile

- 1) $\tau - t_0 = \alpha$
- 2) $d\tau = d\alpha$
- 3) $t - T - t_0 = \alpha_1$
- 4) $t - t_0 = \alpha_2$

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

I.F.M.
integrazione a finestra mobile

Linearità

Combinaz. lineare imprese = Comb. lin uscite

IPOTESI

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y_m(t) \end{array} \right.$$

Combinazioni lineari:

$$a_1 x_1(t) + \dots + a_m x_m(t)$$

$$a_i \in \mathbb{C}$$

$$\rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y(t) = a_1 y_1(t) + \dots + a_m y_m(t)$$

TESI 2



OMOGENEITÀ

$$a_1 x_1(t) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow a_1 y_1(t)$$

TESI 1

Es: g a

$$x_R \rightarrow A \rightarrow A x_R(t) = y_R(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= A(a_1 x_1(t) + \dots + a_m x_m(t)) = \\ &= a_1 \underbrace{A x_1(t)}_{y_1(t)} + \dots + a_m \underbrace{A x_m(t)}_{y_m(t)} = a_1 y_1(t) + \dots + a_m y_m(t) \end{aligned}$$

Es: g b

$$x_m(t) \rightarrow S_T \rightarrow y_m(t) = \int_{t-T}^t x_m(\tau) d\tau \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Che succede se ci metto una combinazione lineare?

$$\begin{aligned} a_1 x_1(t) + \dots + a_m x_m(t) &\rightarrow S_T \rightarrow y(t) = \int_{t-T}^t (a_1 x_1(t) + \dots + a_m x_m(t)) dt = \\ &= a_1 \underbrace{\int_{t-T}^t x_1(t) dt}_{y_1(t)} + \dots + a_m \underbrace{\int_{t-T}^t x_m(t) dt}_{y_m(t)} \end{aligned}$$

I.F.M e Ampl. Id.

Sono

LINEARI e STAZIONARIE:

21/10/2020

Il sistema è un circuito elettrico che genera una modifica ai segnali. Vediamo quelli generati da Elementi Lineari:

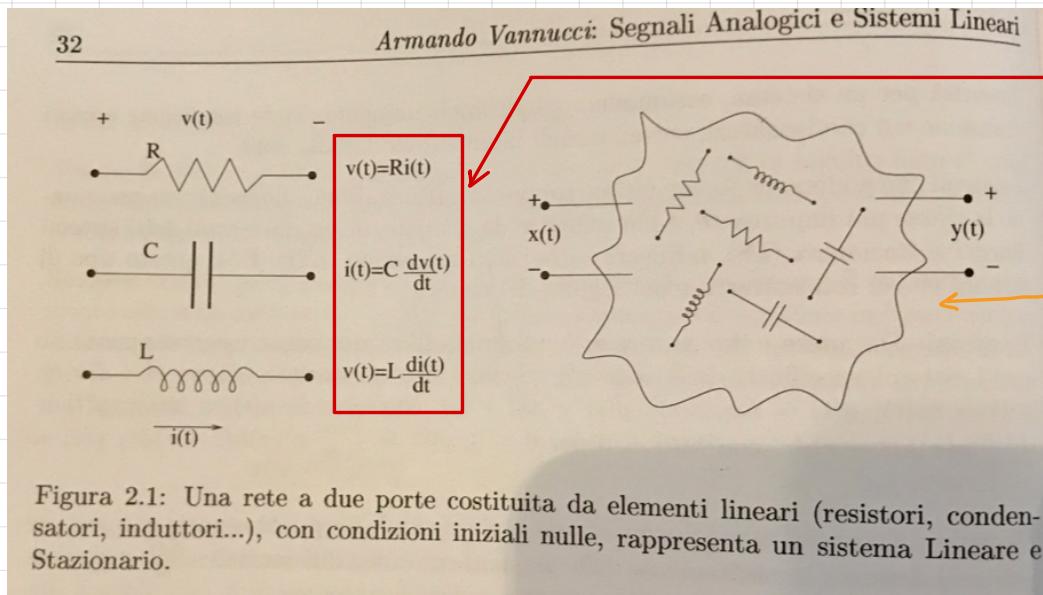
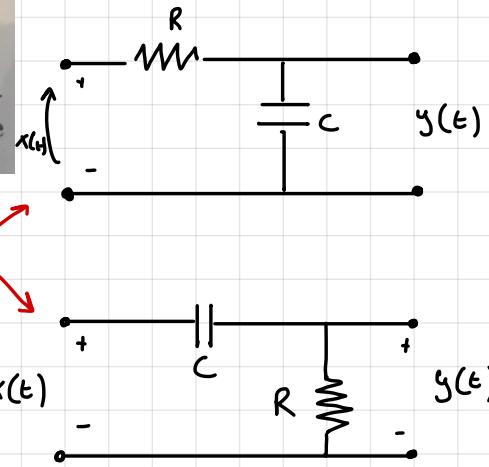


Figura 2.1: Una rete a due porte costituita da elementi lineari (resistori, condensatori, induttori...), con condizioni iniziali nulle, rappresenta un sistema Lineare e Stazionario.

Relazioni Costitutive

tanti componenti possono essere collegati tra loro



ES: 12, 13, [14], [15], 16, 17 *leggere*

FILTRI RC

Un qualsiasi circuito con funzionale che lega $x(t)$ con $y(t)$ in questo modo:

$$a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

↳ eq. differenziale

S: può verificarsi che questa definisce un **SISTEMA LINEARE e STAZIONARIO**.

Una rete a 2 porte costituita da elementi lineari (resistori, condensatori, induttori...), con condizioni iniziali nulle, rappresenta un sistema Lineare e Stazionario.

Se al posto de: $\frac{dx}{dt}$ ci metto:

$$\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$$

Vediamo la linearità e quindi che gode della proprietà di sovrapposizione.

Se al posto di $\frac{dy}{dt}$ avremo

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Allora il sistema sarà lineare. Ed è sempre lineare!

- Se costituita da elementi lineari
- rete a z-ponte
- condizioni iniziali nulle

Sarà famiglia di circuiti elettrici che funzionano in questo modo Sono: CIRCUITI LRC.

Identificazione di sistemi L.S. nel dominio del tempo

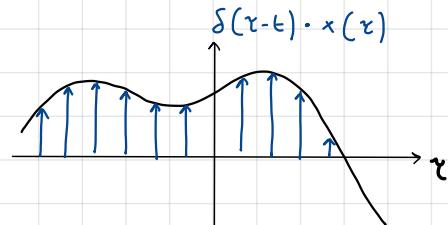
$$x(t) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y(t) = T[x(t); t]$$

Pur identificare un sistema nel dominio del tempo devo dare come segnale in ingresso $\delta(t)$ (Impulso di Dirac), il risultato sarà $h(t)$ (Risposta impulsiva)

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow h(t)$$

Se il sistema non fosse L.S. avremmo una risposta più vaghe. ma nel nostro caso è perfetto.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_k x(\tau_k) \delta(t-\tau_k) \Delta\tau$$



$$y(t) = T \left[\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_k x(\tau_k) \delta(t-\tau_k) \Delta\tau \right] =$$

COMBINAZIONE LINEARE
DI SEGNALI

Lineare: tā

$$= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_k x(\tau_k) \underbrace{T[\delta(t-\tau_k)]}_{h(t-\tau_k)} \Delta\tau =$$

Stazionario: etc

$$= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_k x(\tau_k) h(t-\tau_k) \Delta\tau =$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

"Commutazione d: operatore
lineare"

Questo risultato è straordinario

$$T \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) T[\delta(t-\tau)] d\tau$$

$x(t) * \delta(t)$

↓
Convoluzione

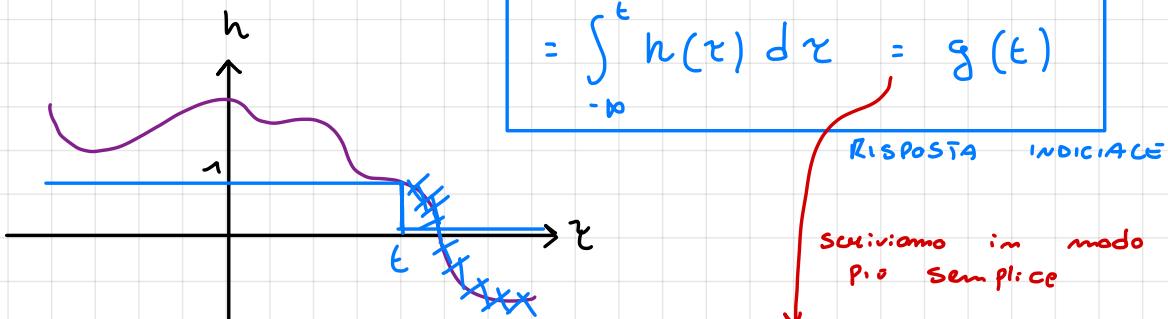
$$x(t) \rightarrow \boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

"METODO DELLA RISPOSTA
IMPULSIVA"

$$u(t) \rightarrow [h(t)] \rightarrow g(t) = u(t) * h(t) =$$

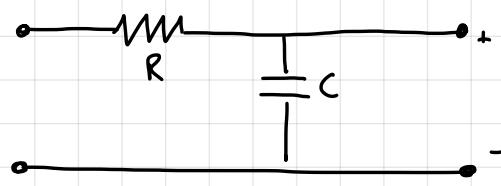
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

"METODO DELLA
RISPOSTA
INDICIALE"
(o risposta a
scadenza)



ES: 14

Filtro Passa basso RC



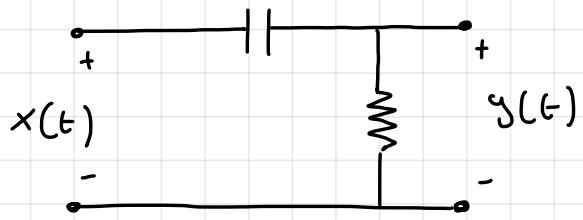
$$f(t) = x(t) * h(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

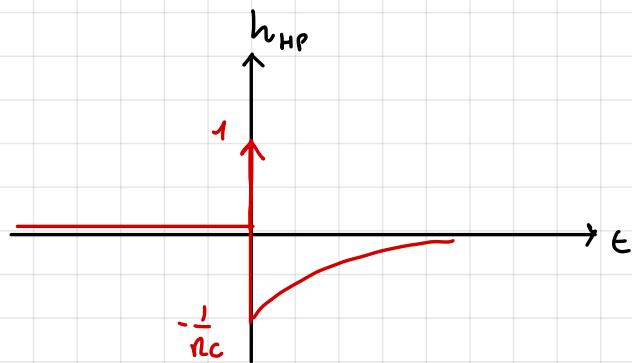
esp. meg causale

ES: 15

Filtro Passo alto RC



$$h_{HP}(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



Es: 12

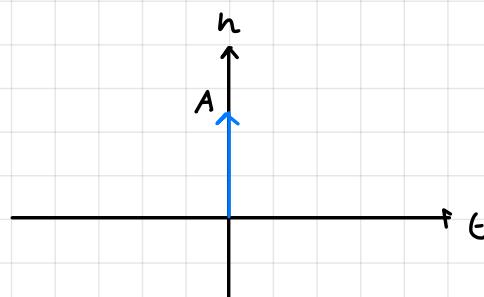
Valutare se la misura impulsiva

- Amplificatore ideale (è un sistema LS)

$$x(t) \rightarrow [A] \rightarrow y(t) = A x(t)$$

Se entra $\delta(t)$ invece di $x(t)$ trovo la misur. impulsiva

$$h(t) = A \delta(t)$$

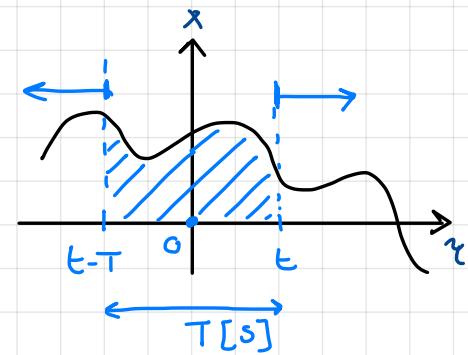


- I. F. M

$$x(t) \rightarrow [S_T] \rightarrow y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

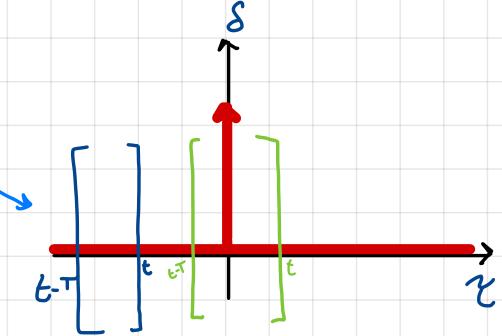
$$\downarrow$$

$$\delta(t) \rightarrow [] \rightarrow h(t) = \int_{t-T}^t \delta(\tau) d\tau$$



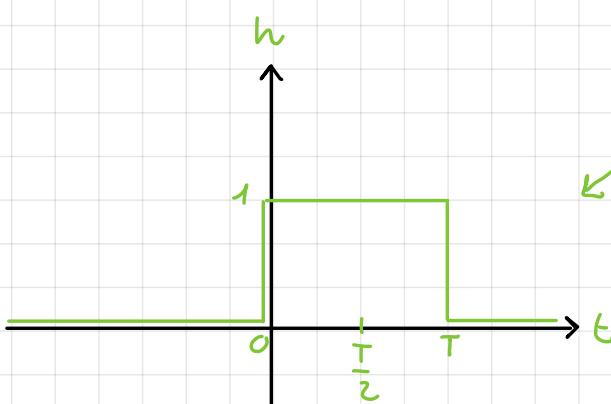
$$= \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{per } t > T \end{cases}$$

$\square \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{\frac{T}{2}} \right)$

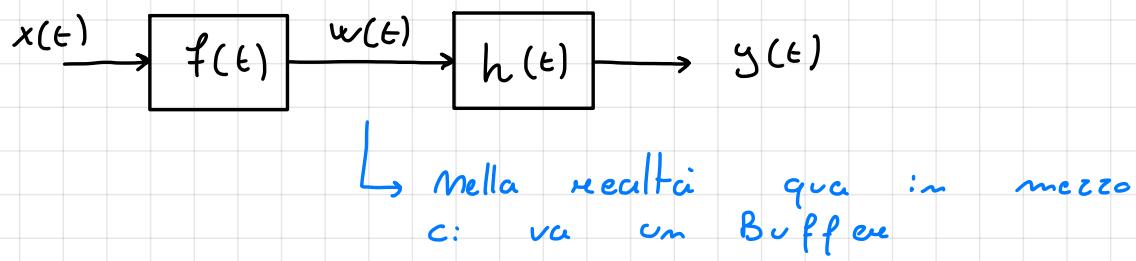


S_ϕ
Sto integrando
una parte
nulla

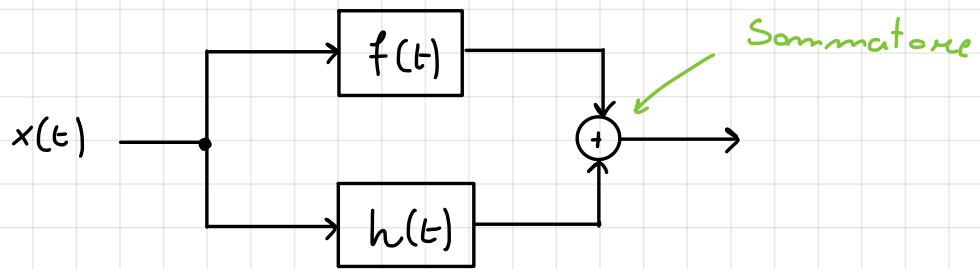
sto integrando
la parte con
area unitaria



CONNESSIONE IN SERIE

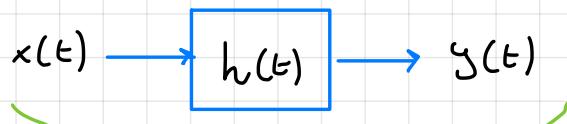


CONNESSIONE IN PARALLELO



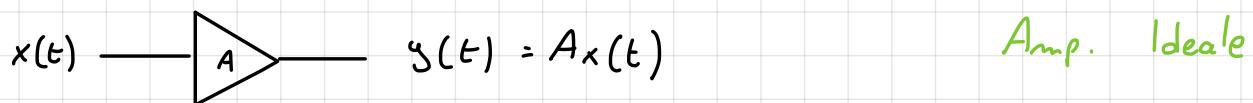
5/10/2020

"Filtraggio"

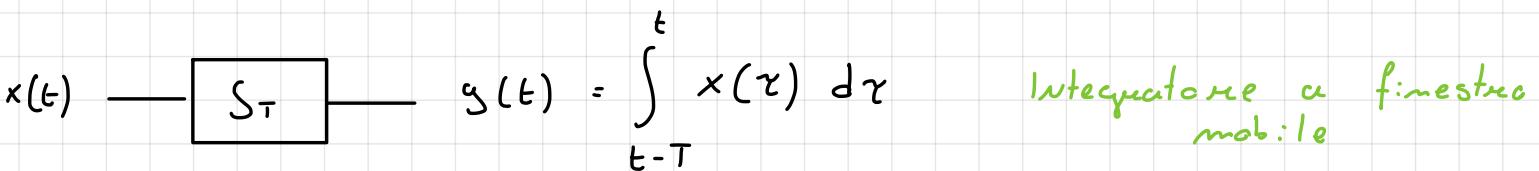


$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \quad \rightarrow \text{Convoluzione} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

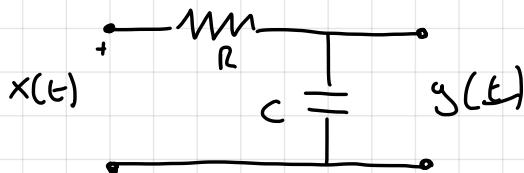
Qual filtro conosciamo?



Amp. Ideale

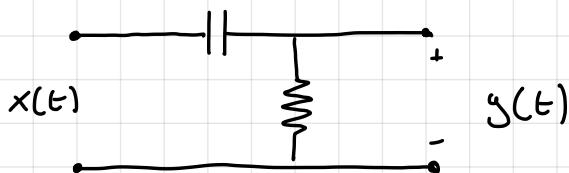


Integrazione a finestra mobile



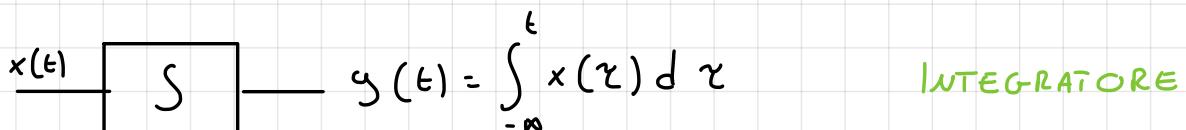
$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Filtro RC Passa-Basso

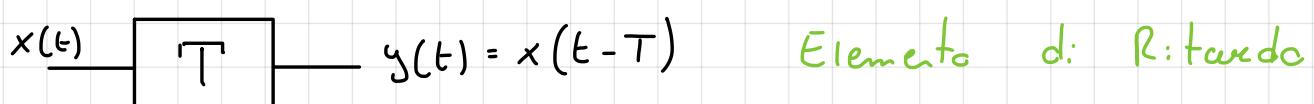


$$h_{HP}(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Filtro RC passa-alto



INTEGRATORE



Elemento di R: tarda

Se proprietà di convoluzione gode di diverse proprietà

Quelle della
multpl:caz.

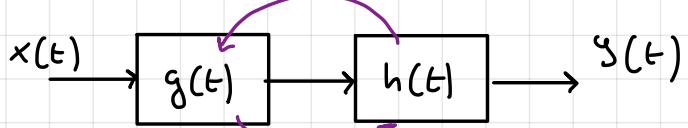
Proprietà

- Distributività

$$x(t) * (g(t) + h(t)) = x(t) * g(t) + x(t) * h(t)$$

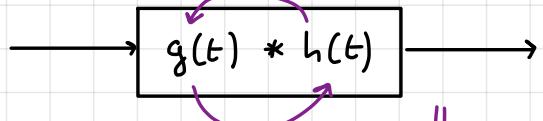
- Associatività

$$(x(t) * g(t)) * h(t) = x(t) * (g(t) * h(t))$$



p. commutativa *

$$= x(t) * (h(t) * g(t))$$

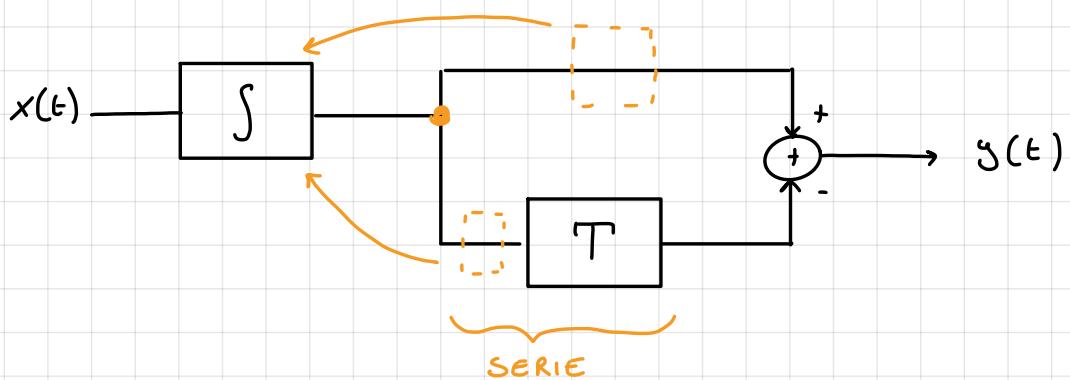


allowa posso invertire l'ordine
di connessione dei filtri

- COMMUTATIVA *

$$g(t) * h(t) = h(t) * g(t)$$

Vediamo uno schema a blocchi:



S: convolve sia sopra che sotto tramite le proprietà associativa e distributiva

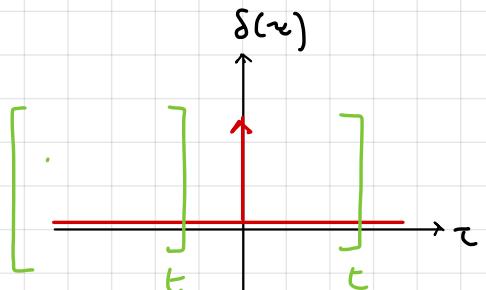
Esercizio

Risposta Impulsiva Filtro Integrazione

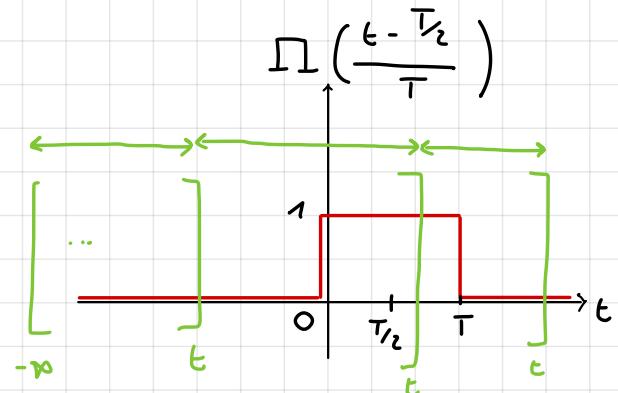
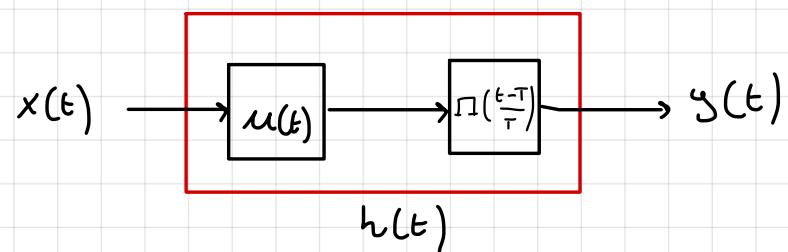
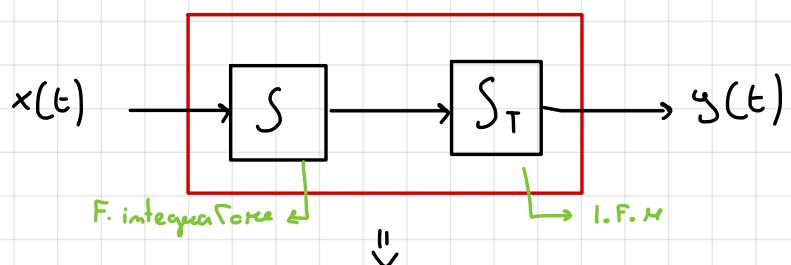
$$x(t) \rightarrow [S] \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$\delta(t) \rightarrow [S] \rightarrow h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$
$$= u(t)$$



ESERCIZIO 17a) Calcola Risposta Impulsiva complessiva



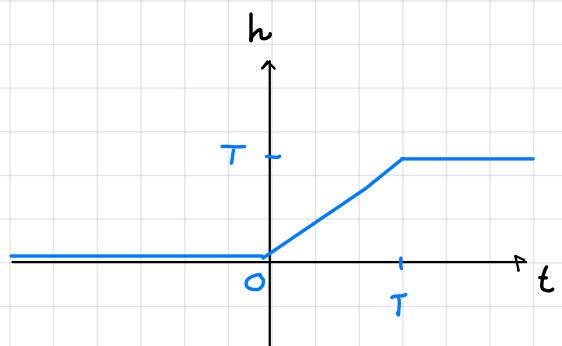
$$h(t) = u(t) * \Delta\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\left(\frac{\tau - T/2}{T}\right) u(t - \tau) d\tau$$

$\underbrace{\begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases}}_{u(t-\tau)}$

$$= \int_{-\infty}^t \Delta\left(\frac{\tau - T/2}{T}\right) d\tau$$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{per } t < 0 \\ t & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ T & \text{per } t > T \end{cases}$$



Es: 18, 18 b: s , 19

Calcolo dell'integrale d: convoluzione (Metodo grafico)

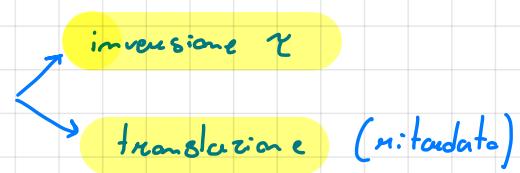
$$C(t) = a(t) * b(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau) b(t - \tau) d\tau \quad \text{def. convoluzione}$$

Che operaz. faccio?

1) TuH: e τ : segnali sull'asse τ per ottenere $C(t)$

2) Grafico di $a(\tau)$ immobile

3) $b(\tau)$ è soggetto a τ trasformazioni:

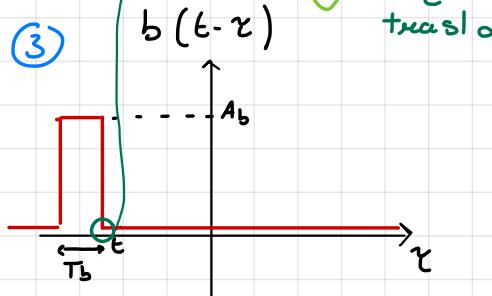
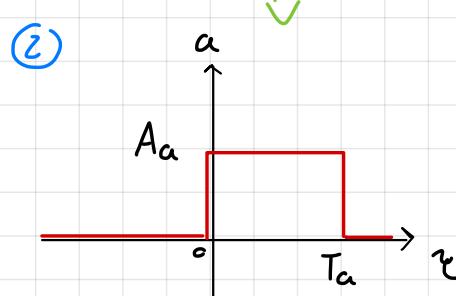
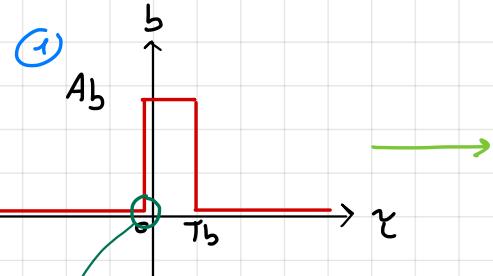
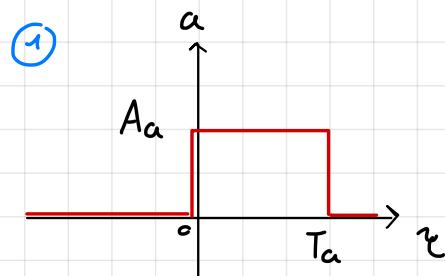


$$b(-)(\tau - t)$$

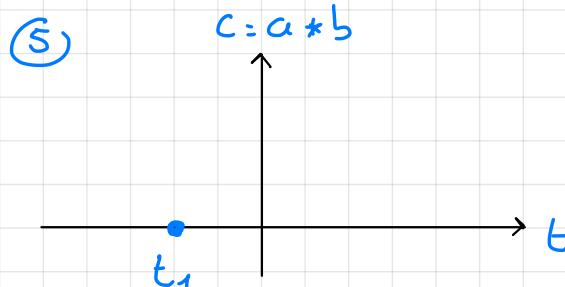
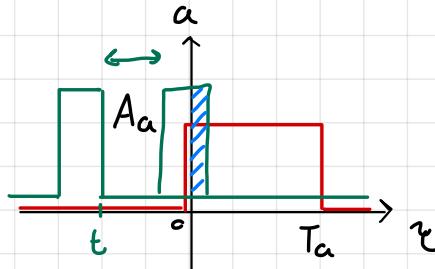
↑
inv.
↓
mit. a dx

4) Moltiplico a e b (se i segnali sono semplici)

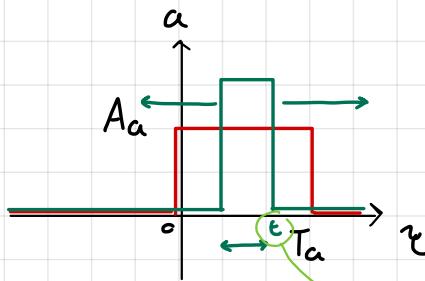
5) Integro ... Area $(-\infty, +\infty)$



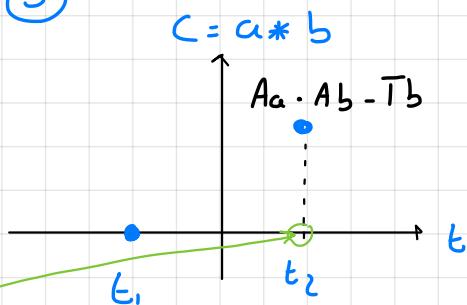
④ con b che si muove



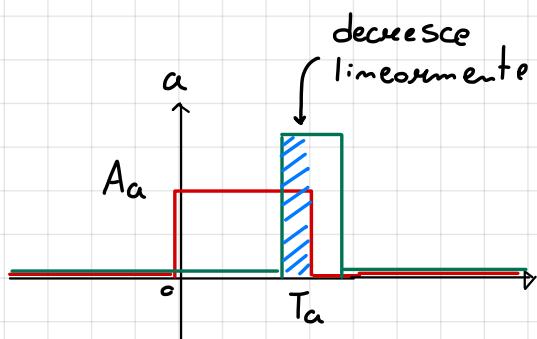
(4)



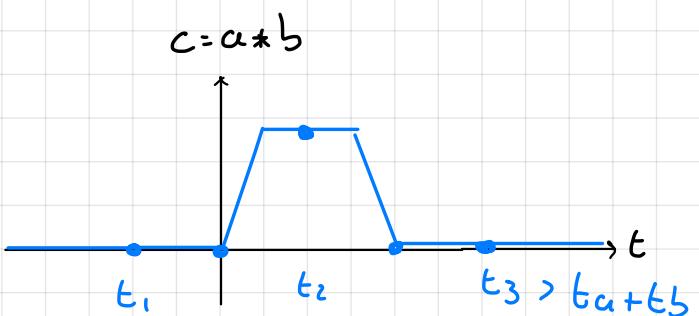
(5)



(4)



(5)



Se a e b hanno durata limitata (tra t_1 e t_2 per $a(t)$; tra t_3 e t_4 per $b(t)$) , Allora il risultato ($c(t)$) ha durata tra $(t_1 + t_3)$ e $(t_2 + t_4)$

2 Segnali convoluti: a durata strettamente limitata, da un segnale a durata strettamente limitata

Si andamento in salita e in discesa ci viene fornito dal punto (4) e dal punto (5)

nel nostro esempio:

(4) Moltiplico \rightarrow Polinomio di grado 0

(5) Integro \rightarrow Si: crea una Rampe

Un ingegnere deve sapere il risultato della convoluzione a memoria



↓

Come fare

→ Capire che tipi di polinomi siamo moltipli con

es: $t^4 \cdot t^2 = t^{4+2} = t^6$

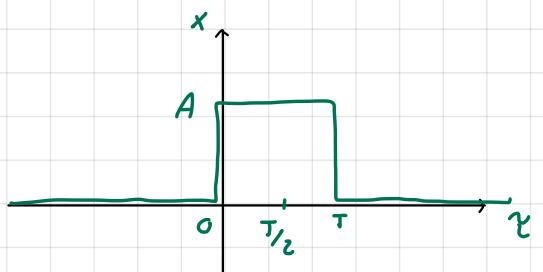
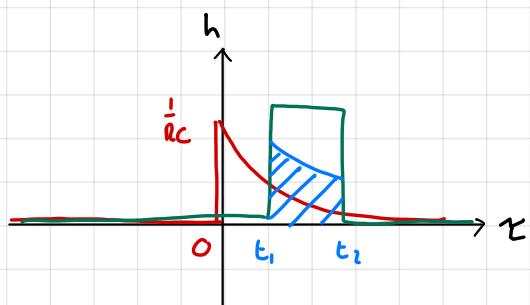
($\int t^6 = 6t^5$)

<https://it.wikipedia.org/wiki/Convoluzionej>

Es: 19)

$$x(t) = A \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi c} e^{-\frac{t}{\pi c}} u(t)$$



6/10/2020

Se più importanti proprietà dei sistemi sono LINEARITÀ e STAZIONARIETÀ.

Se queste 2 proprietà sono verificate allora il sistema è un filtro.

Un filtro ha una risposta impulsiva con la quale calcoliamo l'uscita.

Riprendo le proprietà generali dei sistemi, alla luce delle nuove mansioni acquisite

Proprietà dei sistemi → quando si verificano?

- Lineare
- Stazionario
- Idealmente realizzabili $\Leftrightarrow h(t) \in \mathbb{R}$
- Causalità $\Leftrightarrow h(t) = h(t) \cdot u(t)$
- Fisicom. realizzabili
- Stabile (B.I.B.C) $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < H$ → è FINITO, non diverge
- Con / senza memoria \Leftrightarrow

Idealmente realizzabili?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

Per essere idealmente realizzabile, se $x(\tau) \in \mathbb{R}$ anche il risultato della convoluzione lo sarà.

A questo comporta che anche $h(t)$ è Reale.

Causalità ? (Paragrafo 2.4)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

$$x(\tau) u(t-\tau)$$

$$x(t) * (u(t) \cdot h(t))$$

$$T[x(\tau) u(t-\tau); t]$$

futuro omnipluto
dato all'integrale
di conv.

Se $x(t) * h(t) = x(t) * (u(t) \cdot h(t))$ sign: f:ca

che $h(t)$ e $u(t) \cdot h(t)$ sono uguali.

Quindi è causale il sistema se

$$h(t) = h(t) \cdot u(t)$$

es: I.F.H.



Memoria ?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

In realtà dovremmo chiederci, quali segnali sono SENZA memoria? Chi è l'eccezione?

$$T[x(\tau); t] = f(x(t)) = y(t)$$

Per $\tau \neq t$

non conta

Se h è finita così non
può essere senza memoria.

Come deve essere $h(t-\tau)$

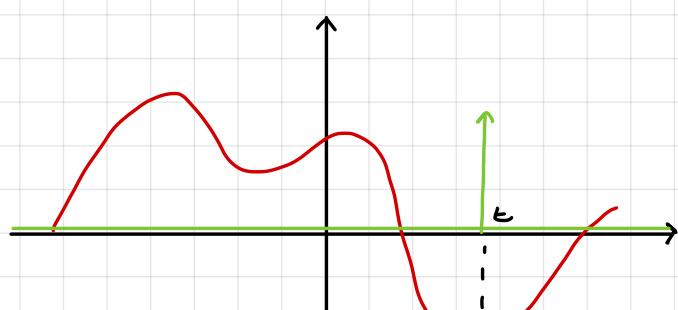
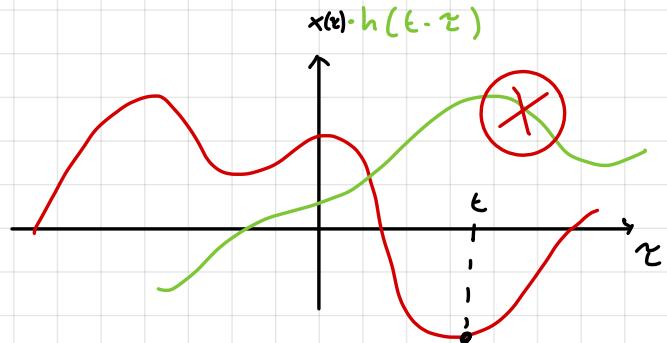
tale che nella moltiplicazione,

tutti gli istanti passati e
futuri vengono cancellati?

L'impulso di Dirac $\delta(t)$

$$T[x(\tau); t] = f(x(t)) = y(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$



$$h(t-\tau) = A \delta(t-\tau)$$

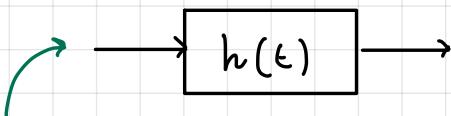


$$h(t) = A \delta(t) \rightarrow \underline{\text{Amp. Ideale}}$$

ES: z1

IDENTIFICAZIONE DEI SISTEMI

→ FILTRI Reali:



$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

segnale sinusoidale

Calcoliamo $y(t)$ quando in ingresso abbiamo una sinusoidale:

Si fa un identificazione: analisi in frequenza

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau$$

Ci viene in aiuto il fasore, vediamo con le leggi di:

Euler per semplificare l'integrale

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \frac{e^{+j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}}{2} = \\ &= \frac{A}{2} e^{+j\varphi} \underbrace{e^{+j2\pi f_0 t}}_{x_1(t)} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \underbrace{e^{-j2\pi f_0 t}}_{x_2(t)} \xrightarrow{\text{conjugato}} \\ &\quad x_2(t) = x_1^*(t) \end{aligned}$$

Se metto:

$$x_1(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x_1(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 (t-\tau)} d\tau$$

$$d\tau = e^{-j2\pi f_0 t}$$

Quando in un filtro entra un fasore di frequenza $\pm f_0$,
"sinusoida"

esce un altro fasore di:

frequ. identica

"sinusoida" conjugato

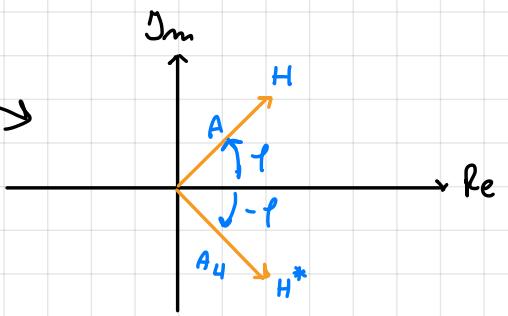
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau} = H^*$$

è un'area e quindi un numero

$$\text{Per un filtro Reale (Id. realezza)} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{+j2\pi f_0 \tau} d\tau = H^* = A_H e^{-jf_0 t}$$

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{+j2\pi f_0 \tau} d\tau}$

è come coniug. tutto l'integrale



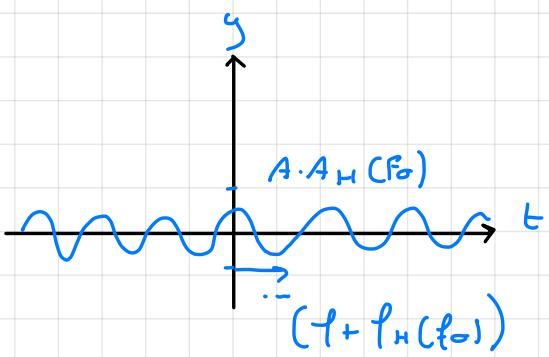
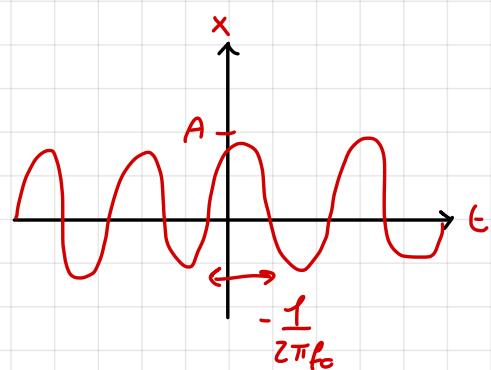
$$y_L(t) = e^{-j2\pi f_0 t} \cdot A_H e^{-j\varphi_H}$$

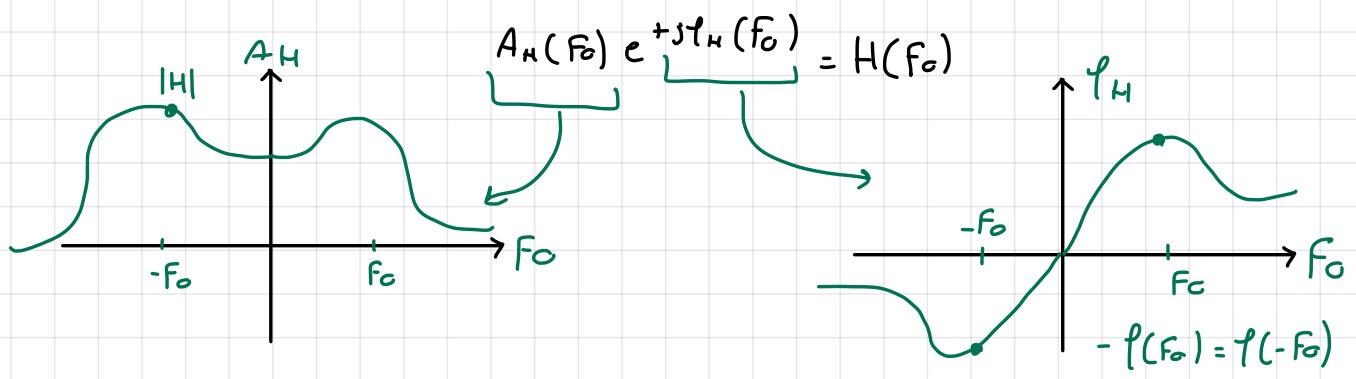
$x_L(t)$
 fasse che
 ruota in verso
 neg. (conario)

$$\begin{aligned}
 x(t) \rightarrow h(t) \in \mathbb{R} \rightarrow y(t) &= \frac{A}{2} e^{+j\varphi} \cdot A_H(f_0) e^{+j\varphi_H} \cdot e^{+j2\pi f_0 t} \\
 &\quad + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot A_H(f_0) e^{-j\varphi_H} \cdot e^{-j2\pi f_0 t} = \\
 &= A A_H(f_0) \frac{1}{2} \left\{ e^{+j(2\pi f_0 t + \varphi + \varphi_H(f_0))} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi + \varphi_H(f_0))} \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{A A_H(f_0)}_{\text{ampiezza}} \cos(\underbrace{2\pi f_0 t + \varphi + \varphi_H(f_0)}_{\substack{\text{Sinusoide} \\ \text{oscilla alla} \\ \text{stessa freq} \\ \text{dell'ingresso}}}) = y(t) \\
 &\quad \text{fase}
 \end{aligned}$$

Fusori: e sinusoidi: sono "AutoFunzioni" de: filtri reali:





FUNZIONE
DI
TRASFERIMENTO

$$H(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi F t} dt$$

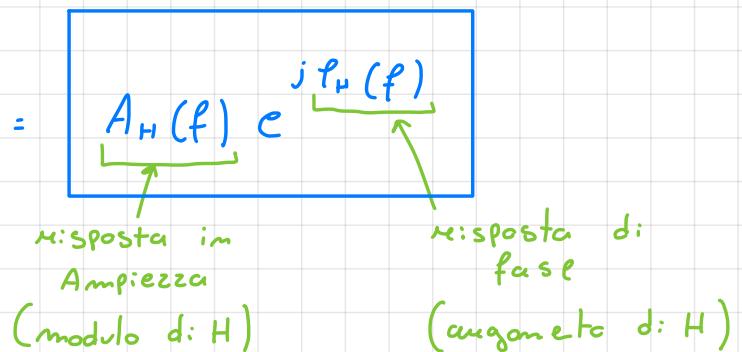
"Risposta in Frequenza"

$$h(t) = \dots [H(F)]$$

9/10/2020

Nella lezione scorsa abbiamo introdotto la funzione di trasferimento $H(f)$

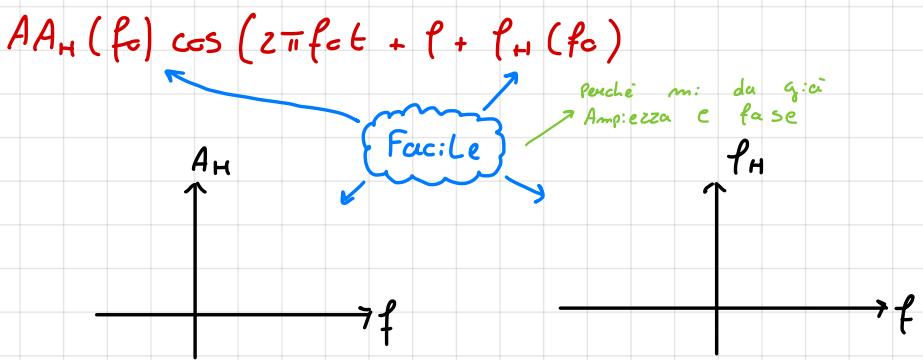
$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$



Cosa sappiamo ...

$$x(t) \rightarrow H(f) \rightarrow u(t) = x(t) * h(t) \\ A e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t}$$

$$AA_H(f_0) e^{j\varphi} e^{j\phi_H(f_0)} e^{j2\pi f_0 t}$$

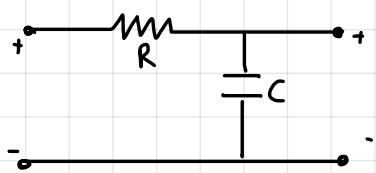


$$A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

La m:sposta in Ampiezza e la m:sposta in fase sono 2 valori. Reali.

La funzione d: trasferimento $H(f)$ è f. complessa.

ES: 21)



$$h_{LP}(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

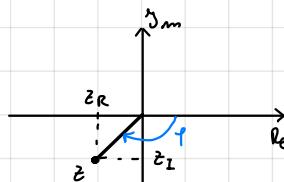
$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_{LP}(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \rightarrow \text{Ho 2 esponenziali, posso} \\ &\quad \text{scrivere come uno solo (*)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)t} dt \quad \rightarrow \text{Integrale definito di un} \\ &\quad \text{esponenziale nel tempo} \\ &= \left[\frac{1}{RC} \frac{e^{-\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)t}}{-\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)} \right]_0^{+\infty} \quad \downarrow \\ &= \frac{1}{1 + j2\pi R C f} \quad \text{La primitiva è l'esponenziale} \\ &\quad \text{stesso, diviso al coeff. dell}' \\ &\quad \text{esponente} \end{aligned}$$

RISPOSTA IN AMPIEZZA

$$A_H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi R C f)^2}}$$

RISPOSTA IN FASE

$$\varphi_H(f) = -\arctg(2\pi R C f)$$



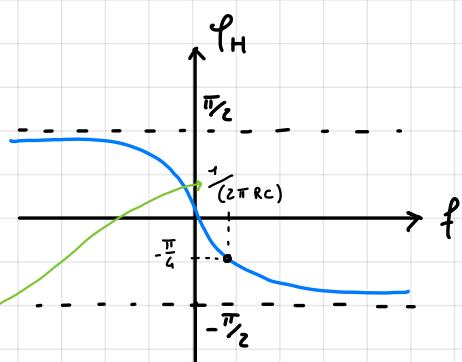
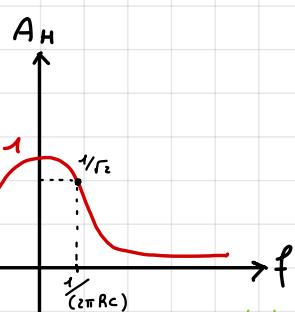
Calcolo del Modulo
(T. d: pitagorica)

$$\frac{a+jb}{a+jb} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Calcolo dell'argomento
 $\arg(H(f)) \rightarrow \angle H(f)$
l'argomento è l'angolo
che punta dal semiasse
positivo e maggiunge il
vettore (\rightarrow)

$$\arctg\left(\frac{c}{w}\right) = \arg[z] - \arg[w]$$

$$\begin{aligned} &= \arg[i] - \arg(1 + j2\pi R C f) \\ &= 0 - \arg(2\pi R C f) \end{aligned}$$



LIBRO P. 45

(*)

$$\begin{aligned} z &= A_z e^{j\varphi_z} \quad w = A_w e^{j\varphi_w} \\ z \cdot w &= A_z A_w e^{j(\varphi_z + \varphi_w)} \\ \frac{z}{w} &= \frac{A_z}{A_w} e^{j(\varphi_z - \varphi_w)} \end{aligned}$$

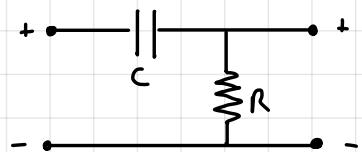
RISPOSTA IN AMPIEZZA
↓
i disegno va fatto a
occhio, dobbiamo fare:
funzione

grafico \downarrow \arctg

La frequenza di taglio è il limite per la quale (in questo caso \rightarrow filtro passa basso) il filtro fa transistore o no il segnale. Frequenza più grande ($> f_c$) si attenua.

Frequenze più piccole ($< f_c$) hanno la risposta in ampiezza che tende a 1.

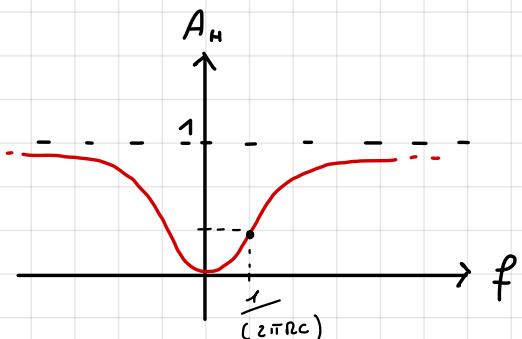
Esempio:



$$h(t) = S(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$H_{up}(f) = 1 - H_{lp}(f)$$

Il filtro CR passa alto si comporta come il complemento del passa basso

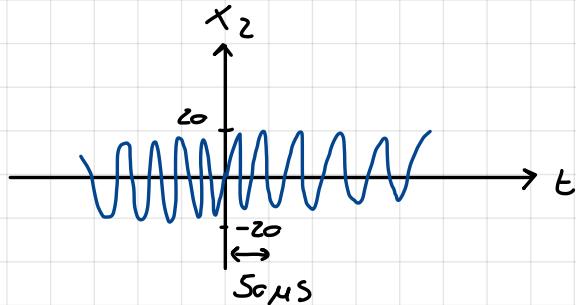
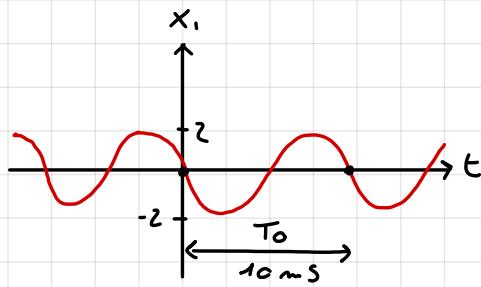
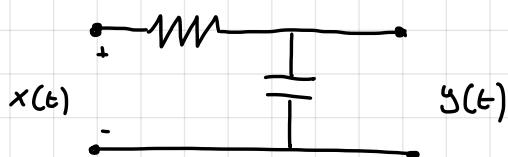


La freq. di taglio è la stessa

ES: 23) b)

$$R = 4 \text{ k} \Omega$$

$$C = 40 \text{ mF} = 40 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$



Se $x(t)$ é o sinal mestre de saída d'ingresso

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t - \frac{\pi}{2}) \\ y_1(t) &= A \cdot A_H(100) \cdot \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t + \frac{\pi}{2} + \varphi_H(100)) = \\ &= 1,99 \cos(2\pi \cdot 100t + \frac{\pi}{2} - 5,7) \end{aligned}$$

$$y(t) = [AA_H(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \varphi + \varphi_H(f_0))]$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j 2\pi R C f} = \frac{1}{1 + j 2\pi \cdot 4000 \cdot 40 \cdot 10^{-9} \cdot 100} = \frac{1}{1 + j 0,1}$$

$$A_H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi R C f)^2}} = 0,995$$

$$\varphi_H(f) = -\arctg(2\pi R C f) = -\arctg(0,1) = -5,7$$

→ fassione $x_2(t)$

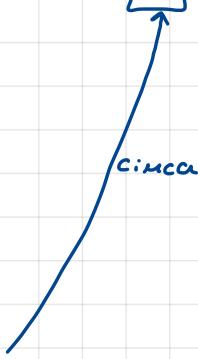
$$x_2(t) = 20 \sin(2\pi \cdot 20000 t)$$

$$y_2(t) = 20 \cdot A_H(20000) \sin(2\pi \cdot 20000 t + \varphi_H(20000)) =$$

$$= 20 \cdot 0,05 \cdot \sin(2\pi \cdot 20000 t - 87,15 - \frac{\pi}{2})$$

$$A_H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi R C f)^2}} = 0,05$$

$$\varphi_H(f) = -\arctg(2\pi R C f) = -87,15$$



Domanda:

Ma se per una sinusode ho risolto il problema, e anche per qualunque comb. lineare di sinus. riesco a calcolare il filtro ggi... C' sono altre categorie di segnali che si possono rappresentare come comb. lin. di sinusoidi?

È vero che un segnale rettangolare può essere descritto dalla comb. lineare di 13 sinusoidi?

Fournier: "ogni segnale periodico può essere descritto da sinusoidi"

Quindi: No! perché un segnale rettangolare non è periodico.

LA "SÉRIE DI FOURIER"

Per qualunque segnale periodico che rispetti cette condizioni, vale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot e^{+j2\pi k f_0 t}$$

Freg. del Fasore \rightarrow "K-ma armonica"

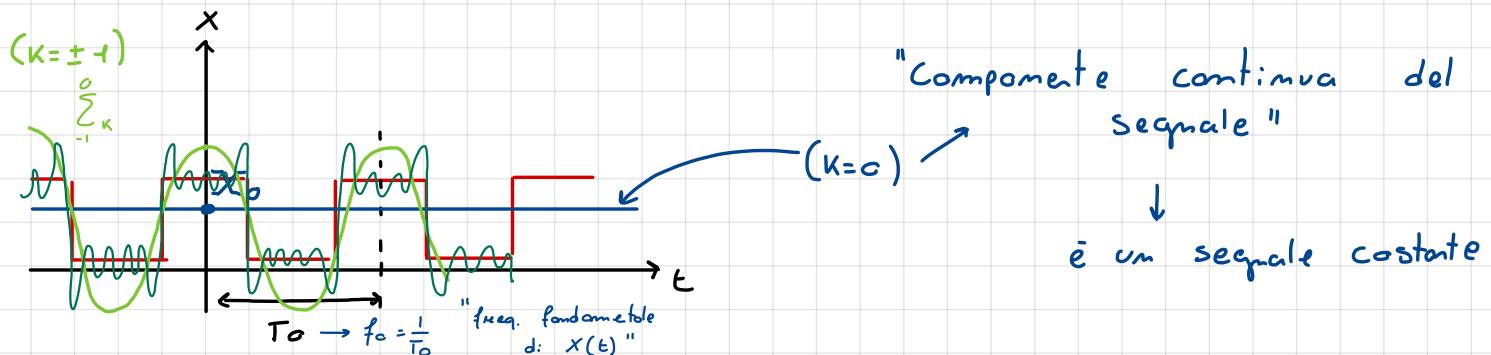
Somma di infiniti termini numerabili

Serie di numeri

Fasore armonico K-mo

$x_k(t)$

"SÉRIE COMPLESSA DI FOURIER"



$$x(t + mT_0) = x(t)$$

"COEFF. DI FOURIER"

C'è un modo per trovarlo : coeff. d: Fourier

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{-j2\pi(kf_0)t} x(t) e^{\underline{\text{fase}} \underline{\text{periodico}}} dt$$

RELAZIONE D'ANALISI

per $k=0$, $X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \langle x(t) \rangle$

"VALORE MEDIO TEMPORALE"

l'abbiamo già visto

Devo integrare su un periodo

$$\int_{T_0} (\quad) dt \equiv \int_0^{T_0} (\quad) dt \equiv \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} (\quad) dt \equiv \int_{-T_0/10}^t (\quad) dt \dots$$

Sa Serie d: Fourier è una rappresentazione di una funzione periodica mediante una combinazione lineare di funzioni sinusoidali.

12/10/2020

Riassunto della volta scorsa

"Rappresentazione spettrale"

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k e^{+j2\pi k f_0 t}$$

→ "Serie di Fourier"
SINTESI

$$\bar{X}_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{-j2\pi k f_0 t} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

→ "Coefficien:ti di Fourier"

ANALISI

Vale per segnali periodici che rispettano certe condizioni*

(No DIMOSTRAZIONE)

NOTA: $\bar{X}_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \langle x(t) \rangle$ "Componente continua"

Poiché si dice RAIPRESENTAZIONE SPETTRALE?

$$A e^{j\varphi} e^{j2\pi f t} \rightarrow H(f) \rightarrow A e^{j\varphi} A_H(f) e^{j\varphi_H(f)} e^{j2\pi f t}$$

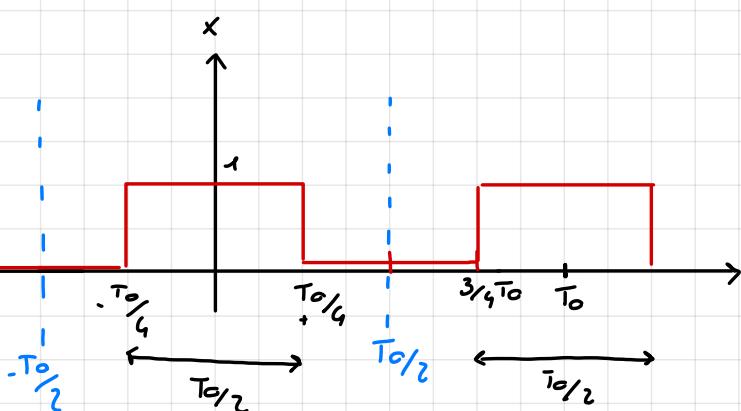
Sempre! Anche se $h(t) \in \mathbb{C}$

Ciascun coefficiente ha ampiezza A_k e fase φ_k :

$$\bar{X}_k = A_k \cdot e^{j\varphi_k} \rightarrow \text{siccome } \bar{X} \text{ è complesso}$$

Facciamo un esercizio:

25) Calcolare i coeff. d'Fourier dell'onda quadra con D.C. del So :



$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Gamma \left(\frac{t-mT_0}{T_0/2} \right)$$

$\bar{X}_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

Scelti in base al periodo

$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \Gamma \left(\frac{t}{T_0/2} \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

Sarà solo il termine del segnale con $m=0$

$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} 1 e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

unico intervallo in cui c'è qualcosa su $\neq 0$

$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos(2\pi k f_0 t) - j \sin(2\pi k f_0 t) dt$

$= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{4}} \cos(2\pi k f_0 t) dt - \frac{j}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \sin(2\pi k f_0 t) dt$

~~$\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \sin(2\pi k f_0 t) dt = 0$~~

$\int_0^{\frac{T_0}{4}} \cos(2\pi k f_0 t) dt = 0$

Si come segnale disponibile integrato su un intervallo pari:

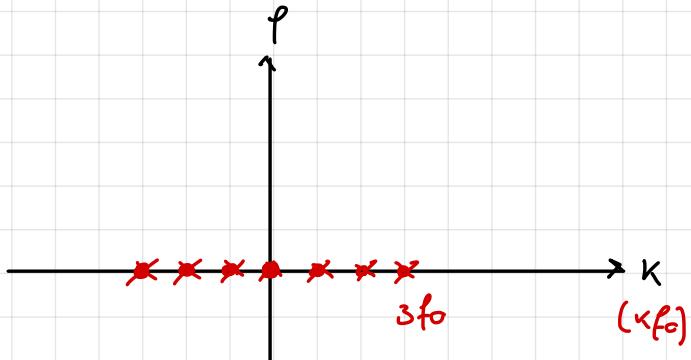
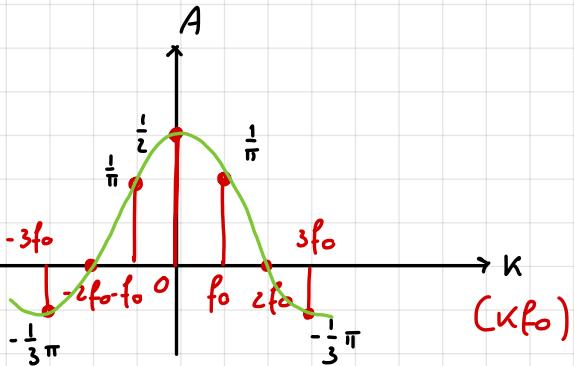
$= \frac{2}{T_0} \left[\frac{\sin(2\pi k f_0 \frac{T_0}{4})}{2\pi k f_0} \right]_0 = \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}$

$= \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{\frac{k\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{k}{2}\right) A_k e^{jkf_0 t} = 0$

multiplica $\frac{1}{2}$

$$X_K = \frac{1}{2} \sin c \left(\frac{k}{2} \right) A_K e^{j \frac{p_k}{2}} \quad \underline{\underline{K=0}}$$

SPETTRI A RIGHE

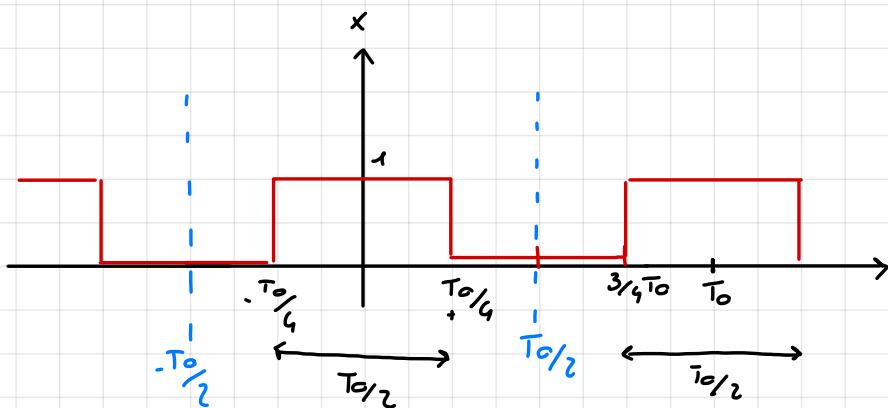


faccio onde che $K = 0, 1, \dots, m$
e sostituisci quando cosa
fa, possiamo trattare solo
la parte positiva, tanto è
simmetrica

Gli spettri a righe sono dei grafici discetti, rappresentano solo dei valori numerici, tramite le stringhe, secondo l'è componenti armoniche

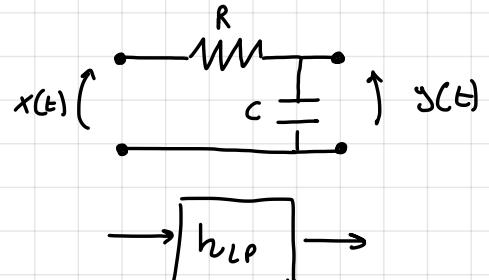
Per casa funz con D.C. del 25%.

3-1

Calcolare i coeff. di Fourier del segnale $x(t)$ 

→ Questa onda quadra entra nel circuito

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \left(\frac{t-mk}{T_0/2} \right)$$



filtraggio: segnaletico periodico

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k(t) \xrightarrow{H(f)} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k(t)$$

fasi: armoniche ($k f_0$) → Fasore ($k f_0$) armonico

Quando entra un fasore, esce un fasore della stessa frequenza.

Per questo vogliamo lavorare solo con essa

Il periodo T_0 è in ingresso ma sarà anche in uscita.

$$X_k(t) = \bar{X}_k e^{+j2\pi k f_0 t} \longrightarrow Y_k(t) = \bar{Y}_k \cdot H(k f_0) e^{+j2\pi k f_0 t}$$

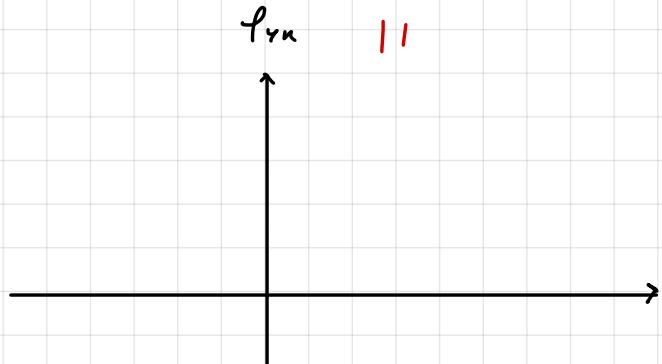
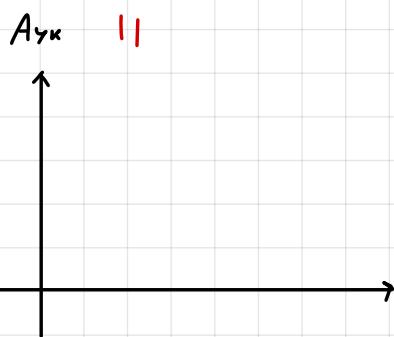
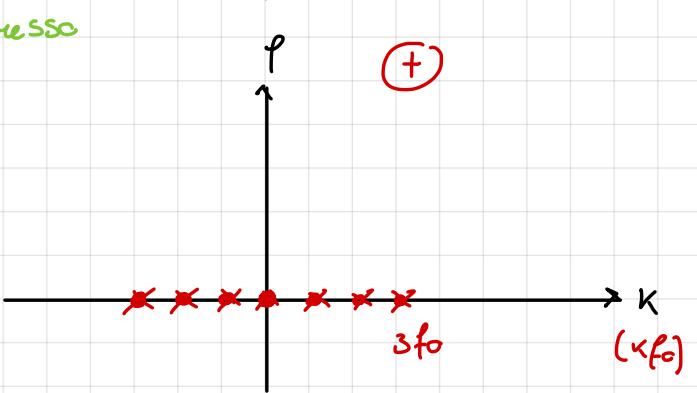
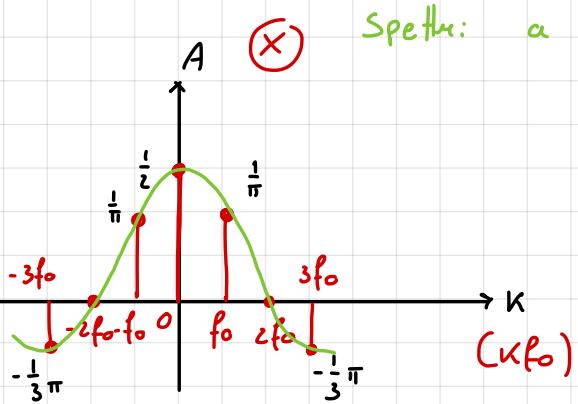
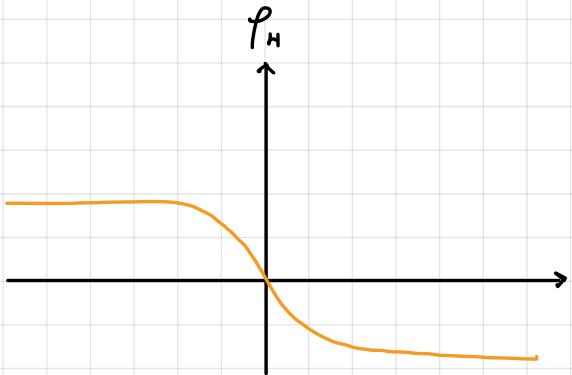
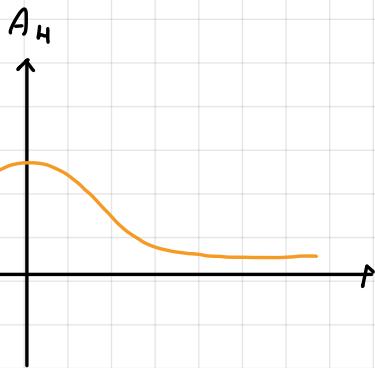
$$\begin{cases} A_{Y_k} = A_{X_k} \cdot A_H(k f_0) \\ \varphi_{Y_k} = \varphi_{X_k} + \varphi_H(k f_0) \end{cases} \rightarrow \text{moltiplico la risposta in ampiezza dell'ingresso con quello del filtro}$$

$$\bar{Y}_k = \bar{X}_k \cdot H(k f_0)$$

proprietà m complessi

la proprietà ci dice che per trovare Amplitude e fase della moltip. di 2 m compl. basta fare...

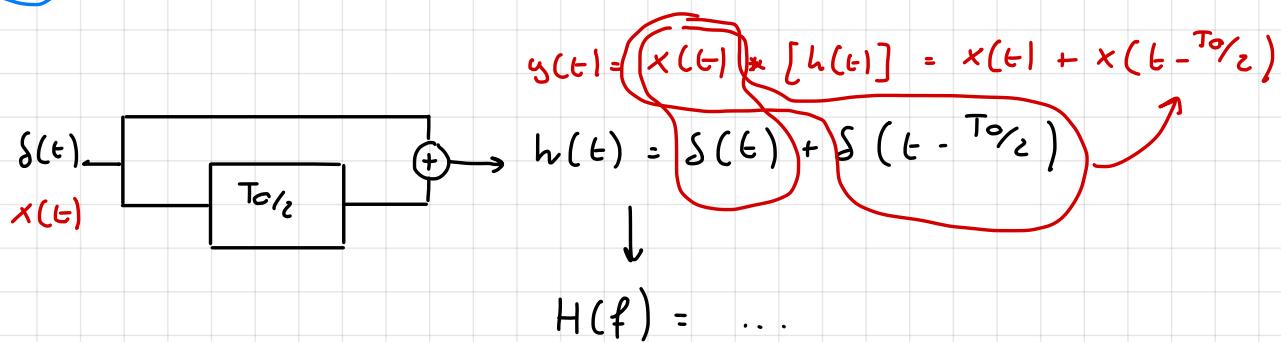
Pensavo che l'es. 31 devo ricordarmi: grafici A_H e φ_H
del filtro passa-basso



Salto d: qualità:

Le cose si gestiscono in questo modo, ma non sempre

es: (31) → caso particolare, conviene usare la convezione



— Condizioni d: CONVERGENZA PER Serie d: Fourier —

condiz. suff.

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

Separale "d: Potenza"

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t) - x_{SF}(t)|^2 dt = 0$$

errore

serie d:
Fourier

Potenza
dell'errore

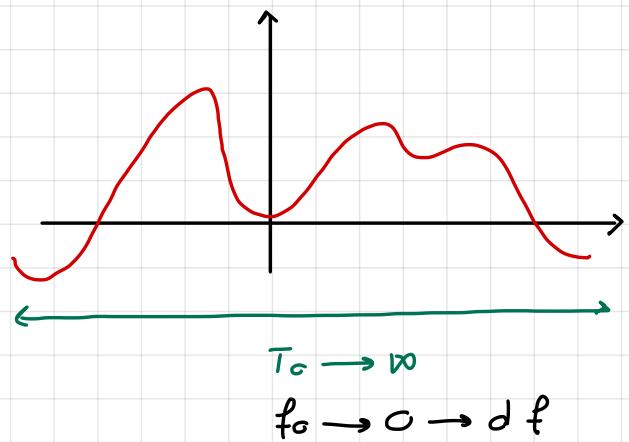
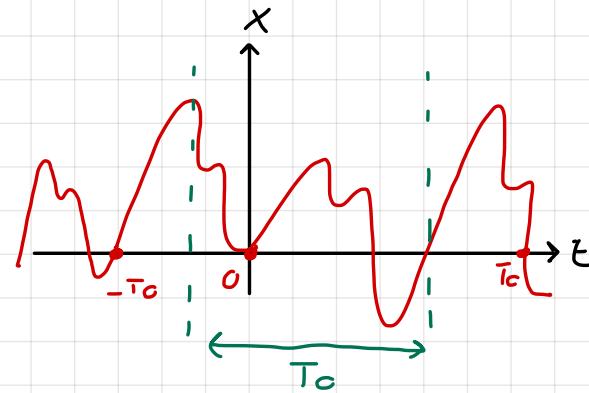
Condizioni d: DIRICHLET

1) $\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt < +\infty$

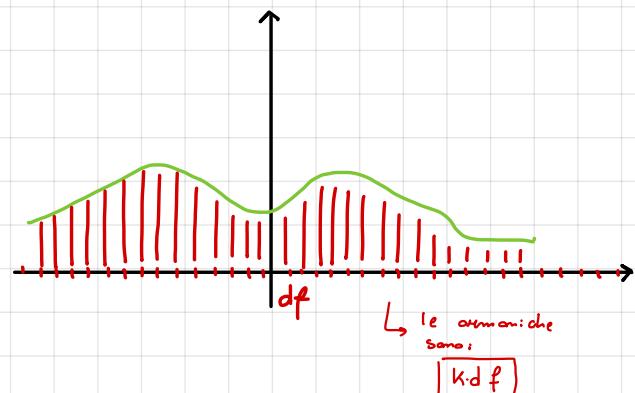
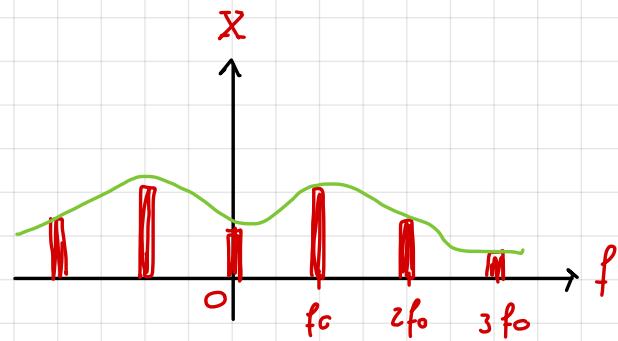
2) # d: max/min finito
(\forall periodo)

3) # d: disc. d: 1^a specie
(\forall periodo)

Analisi spettrale d. segnali non periodici:



Rappresentato nel dominio della frequenza



Cosa succede 'stimacchio' l'asse dei temp? :

Dinchiet 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty \dots \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

Segnali impulsivi:

Cosa succede invece ai coeff. d. Fourier

Ce lo dice:

Teorema dell'integrale d. Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] \cdot e^{+j2\pi f t} df = x(t)$$

Non è un segnale periodico ma impulso
infatti non ha f_0
è un passo a freq. negativa

Questo è proprio lo spettro della trasformata di Fourier che viene anti-trasformato

Se il primo integrale $\tilde{X}(f)$ verrà moltiplicato dal fasore $e^{-j2\pi f(t-\tau)}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f(\tau-t)} df \right] d\tau \rightarrow \text{Ho scambiato l'ordine degli integrali, lo posso fare!!}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j2\pi f(t-\tau)} df \right] d\tau \underbrace{\delta(t-\tau)}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{1}{2\epsilon}}^{\frac{1}{2\epsilon}} e^{+j2\pi f(t-\tau)} df = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{+j2\pi f(t-\tau)}}{+j2\pi(t-\tau)} \right]_{-\frac{1}{2\epsilon}}^{\frac{1}{2\epsilon}} =$$

$$= \frac{e^{+j2\pi \frac{1}{2\epsilon} (t-\tau)} - e^{-j2\pi \frac{1}{2\epsilon} (t-\tau)}}{+j2\pi(t-\tau)} \xrightarrow{\text{eveleno}} \frac{\text{sinc}(\frac{\pi}{\epsilon}(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{sinc}\left(\frac{t-\tau}{\epsilon}\right)$$



I abbiamo già visto! \rightarrow

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{sinc}\left(\frac{\bullet}{\epsilon}\right) = \delta(\bullet)$$

$$= \delta(t-\tau) \quad \rightarrow \underline{\text{INTEGRALE di FOURIER}}$$

fina P. SO libro, paragrafo 3.2

13/10/2020

Su serie di Fourier è valida se il segnale è integrabile nel suo periodo.

Se abbiamo uno spettro a righe e il periodo sta diventando infinitamente grande, cosa me è dei coeff. d'Fourier?

$$X_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

f_0

$T_0/2$

$-T_0/2$

e' elemento infinitesimale

df

Applico quello che ho appena detto alla formula dei coeff.

ottengo:

$$X_k = df \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Per la proprietà
dell'integrazione
di Fourier

$$= df \cdot X(f)$$

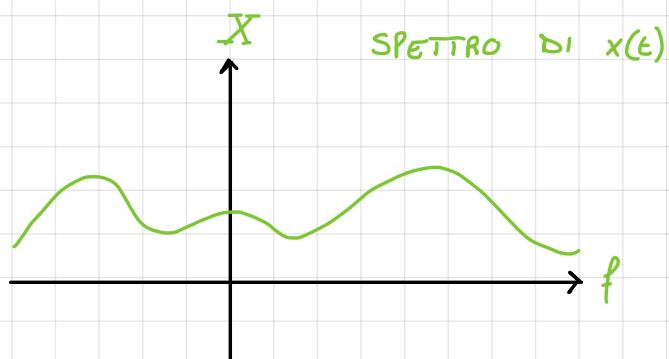
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

[v] [a] [s]

Relazione d'analisi:

dal tempo alla frequenza,
ricaviamo lo spettro

TRASFORMATA DI FOURIER $\equiv \mathcal{F}[x(t)]$



Inversamente possiamo trovare $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df$$

[v.s] [a.s] [Hz]

Relazione di Sintesi:

ANTITRASFORMATA DI FOURIER $\equiv \mathcal{F}^{-1}[X(f)]$

dalla freq. al tempo

Quando si può fare questa operazione?

CONVERGENZA "IN MEDIA"

- Teo. Plancherel:

$$\text{Se } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

allora $\exists \tilde{X}(f)$ ed è essa stessa integrabile in $|t|^2$

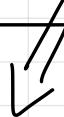
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 dt = 0$$

Eroe ... Energia Nulla!

CONDIZIONI DI CONVERGENZA PUNTUALE

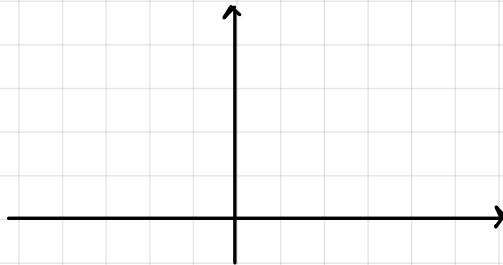
- 1) $x(t)$ impulsivo
- 2) # finito d: max/min
- 3) # finito d: discr. multà } intervallo
d: 1a specie } finito

$x(t)$ e $\tilde{x}(t)$ possono differire solo su un dominio Δt d: MISURA NULLA



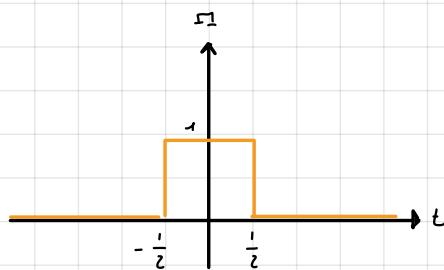
- Teorema d: Lorch

\exists ed è unica



Esercizio: Calcolare la trasformata d' un impulso rettangolare

$$\Pi(t)$$



Applico la definizione

$$\mathcal{F}(\Pi(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{+j\pi f} - e^{-j\pi f}}{j2\pi f}$$

$$= \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

$$\Pi(f) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S.M.C(f)$$

↓ segnale

↓ spettro

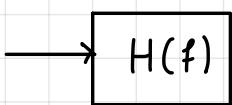
FILT RAGGIO DEI SEGNALI NON PERIODICI

→ IMPULSI: u:
d: ENERGIA

Voglio vedere $x(t)$ come
serie generalizzata d: fasom:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df$$

$\mathfrak{F}[X(f)]$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) H(f) e^{+j2\pi f t} df$$

"infinità non numerabile"
d: sommabile che"

Uma somma generalizzata entra e una somma generalizzata esce

Chiede dimostraz.

PROPRIETÀ DELLA \mathfrak{F} : Teorema della convoluzione

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

voglio applicare \mathfrak{F} all'uscita per sapere che spettro ha ...

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[y(t)] &= \mathfrak{F}[x(t) * h(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) e^{-j2\pi f t} d\tau dt \\ &\quad \text{Scambio l'ordine degli integrali} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j2\pi f t} dt}_{\Theta_1} d\tau \quad \text{Combio di variabile} \rightarrow \begin{cases} 1) t-\tau = \theta \\ 2) dt = d\theta \\ 3) \theta_1 = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) e^{-j\omega\pi f(\omega+\tau)} d\omega d\tau \\
 &\quad \text{Prodotto di } \tau \text{ : integrale:} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\pi f\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) e^{-j\omega\pi f\omega} d\omega d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\pi f\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) e^{-j\omega\pi f\omega} d\omega \\
 &\quad \boxed{\mathcal{F}[x(t)] \quad \mathcal{F}[h(t)]} \\
 &= X(f) \cdot H(f)
 \end{aligned}$$

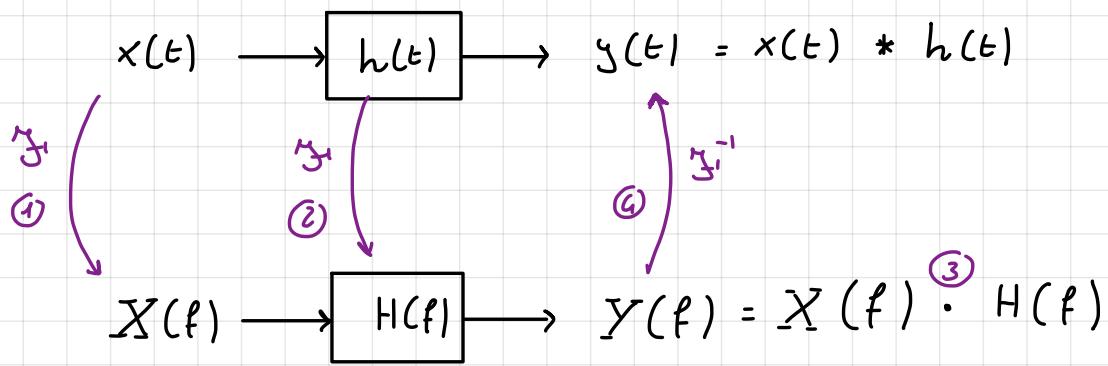
Multiplicazione

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$$\text{Ma allora } g(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(f)]$$

□

Questo ci apre un mondo sul filtraaggio dei segnali
 non periodici, senza questo teorema sarebbe stato impossibile ragionare su infinite armoniche.

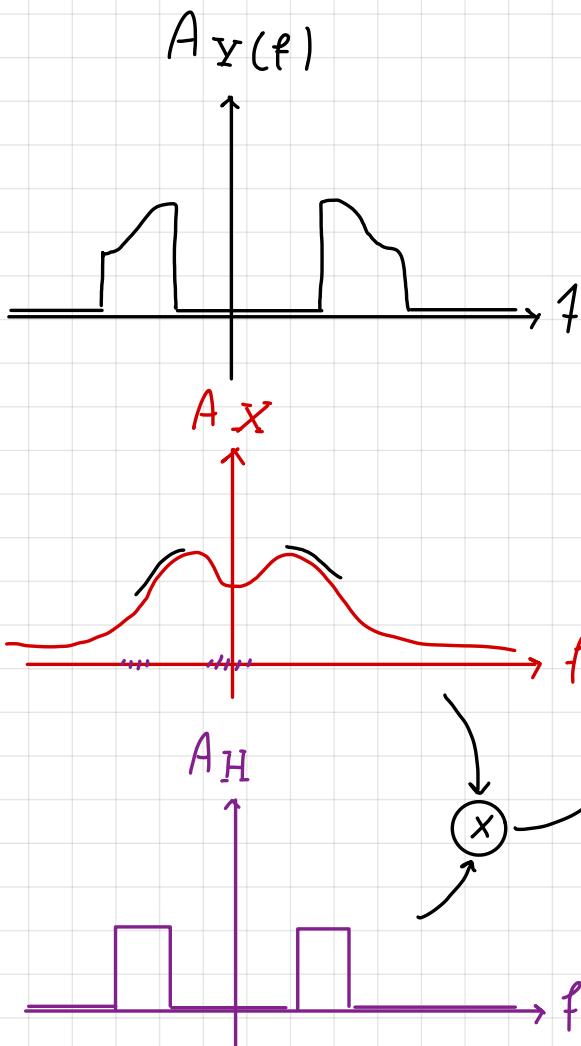


SPETTRI DI AMPIEZZA E DI FASE

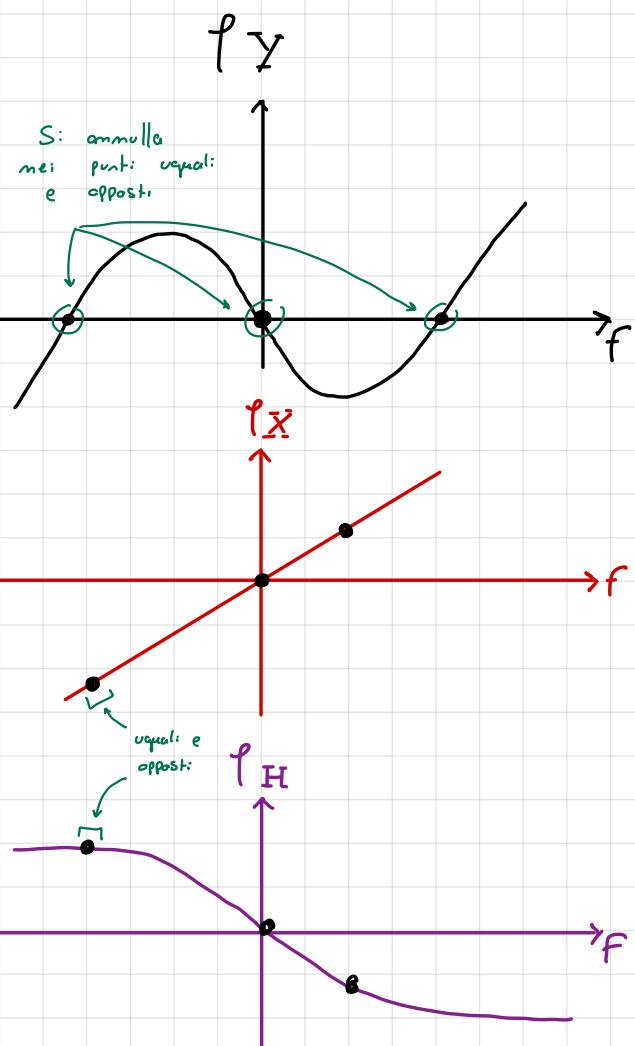
$$X(f) = A_x(f) \cdot e^{j\varphi_x(f)}$$

Poiché $\in \mathbb{C}$

Spettro di Ampiezza



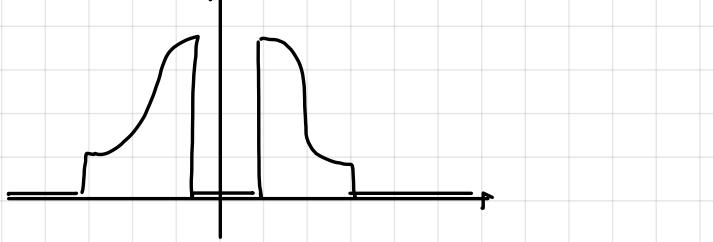
Spettro di fase



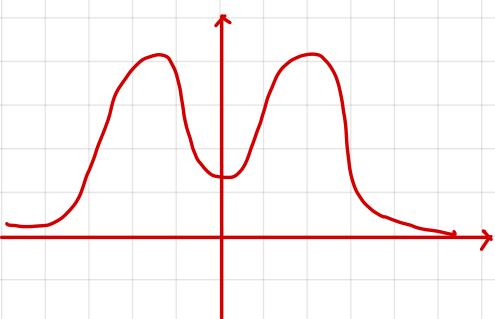
$$\begin{cases} A_Y(f) = A_X(f) \cdot A_H(f) \\ \varphi_Y(f) = \varphi_X(f) + \varphi_H(f) \end{cases}$$

Ora proviamo a rappresentare delle quantità particolari:

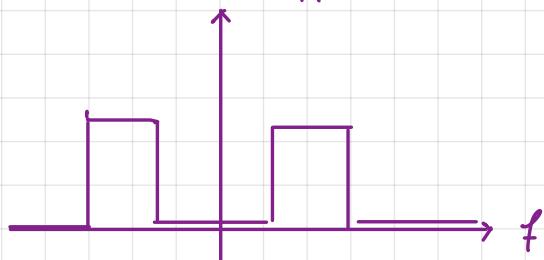
$$|y|^2 = A^2 y$$



$$|X|^2 = A^2 X$$



$$|H|^2 = A^2 H$$



Il modulo d: $|\bar{X}(f)|^2$ si chiama "Spettro di Energia"

o densità spettrale di energia. È non c'è altro che

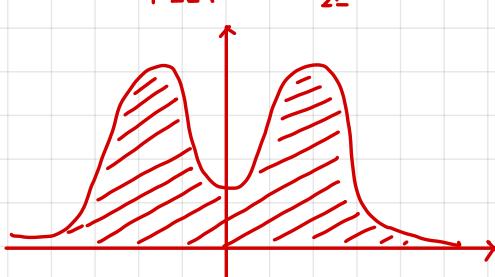
c'area d: $|\bar{X}|^2 \in \mathbb{R}$. (lo dimostriremo).

Quindi:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{X}(f)|^2 df$$

Teorema d:
RAYLEIGH

$$|\bar{X}|^2 = A^2 X$$



Ora abbiamo la libertà di decidere se effettuare i calcoli nel dominio del tempo o in quello della frequenza, in base a quale cosa sia più semplice.

Ovviamente senza scordarsi cosa succede nel dominio non utilizzato.

Il teorema di Rayleigh ci dice proprio questo.
(nell'es. 35 vediamo un esempio pratico)

16/10/20

TRASFORMATA (e ANTITRASFORMATA) DI FOURIER

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

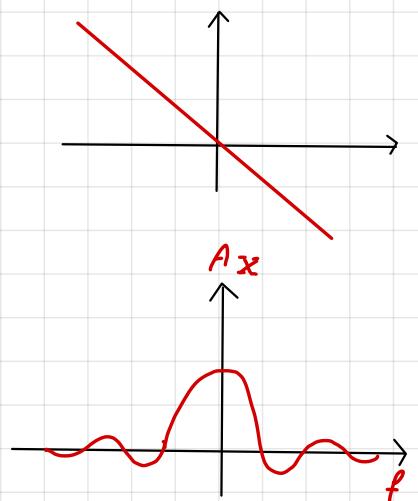


$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df$$

$A_x(f) \cdot e^{j\varphi_x(f)}$

Spettro d: fase

Spettro d:
Ampiezza



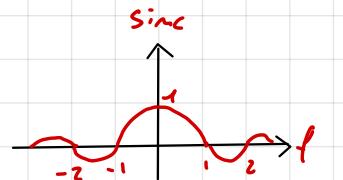
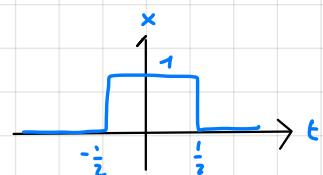
Perche' tanta fatiga?

↳ Teorema della convoluzione (Filtraggio)

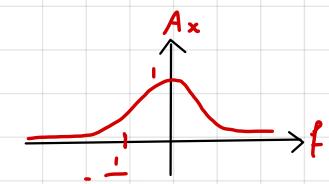
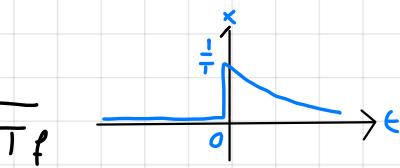
$$\mathcal{F}[x(t) * h(t)] = X(f) \cdot H(f)$$

Quali trasformate conosciamo?

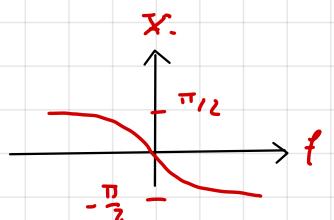
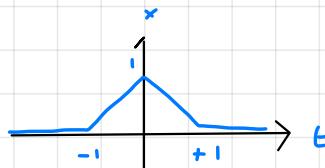
- $\mathcal{F}[\Pi(t)] = \text{sinc}(f)$



- $\mathcal{F}\left[\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)\right] = \frac{1}{1 + j2\pi T f}$



- $\mathcal{F}[\Lambda(t)] = \text{sinc}^2(f)$



E quali proprieà hai

da motore
le simmetrie

- $\mathcal{F}[x(t) * h(t)] = X(f) \cdot H(f)$

Trovaremo proprietà che ci permetteranno in molti casi:

- d: trovare le trasformate
- d: Fourier senza effettuare il calcolo dell'integrale

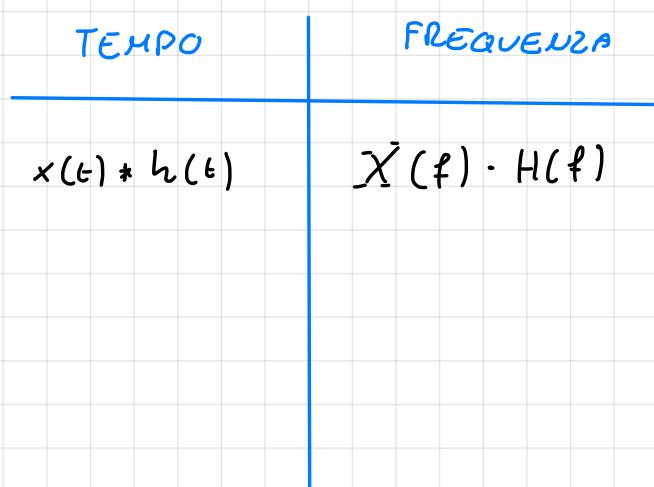
TRASFORMATE NOTEVOLI

" $\xleftrightarrow{\mathcal{H}}$ " : si compongono tramite l'operatore $\mathcal{H}[\cdot]$

- $\Pi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \text{sinc}(f)$

- $\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \frac{1}{1 + j2\pi f}$

- $\Lambda(t) \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \text{sinc}^2(f)$



Introduciamo Rayleigh.

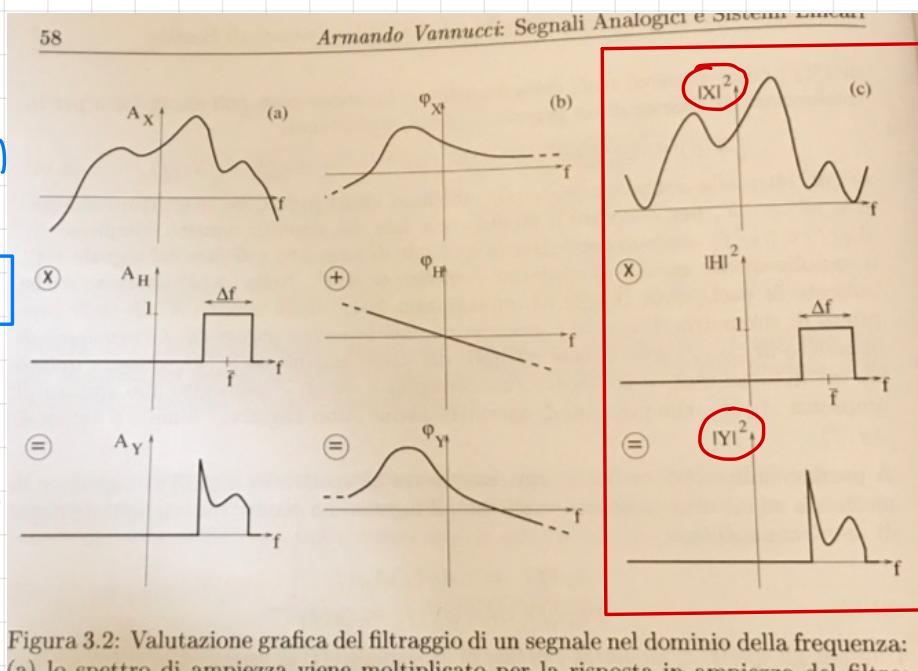


Figura 3.2: Valutazione grafica del filtraggio di un segnale nel dominio della frequenza:
(a) lo spettro di ampiezza viene moltiplicato per la risposta in ampiezza del filtro;
(b) lo spettro di fase viene sommato alla risposta in fase del filtro; (c) lo spettro di energia viene moltiplicato per $|H(f)|^2$.

$$A_x^2(f)$$

$$(Y(f))^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2$$

Analisi: Funzionale

"Prodotto Interno"

$$u(t) \cdot v(t) \quad (\in \mathbb{C})$$

Prod. scal. tua complessa:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^T \vec{w}^*$$

scombi: gl: integrali:

$$E_{uv} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot v^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} v(f) e^{-j2\pi f t} df}_{\text{conjugate}} \right] dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{v(f)} dt}_{\Im[u(f)]}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j2\pi f t} dt}_{\Im[u(t)]} df = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \overline{U(f)} df$$

E_{uv} "Prodotto scalare"

Proprietà

$$\int x(t) h^*(t) dt \xrightarrow{\text{S.}} \int X(f) H^*(f) df$$

→ Non lo useremo, ma questo ci permetterà di capire il T. d: Rayleigh

SEGNALI / FISICA

$$u(t) = u(t) \triangleq x(t)$$

$$E_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x}$$

E_x

TEOREMA DI RAYLEIGH

Vale per segnali di Energia (non periodici) che rispettano le condizioni di Richlet.

Si è energia del segnale di uscita y è l'area sottesa dal segnale y in modulo quadro.

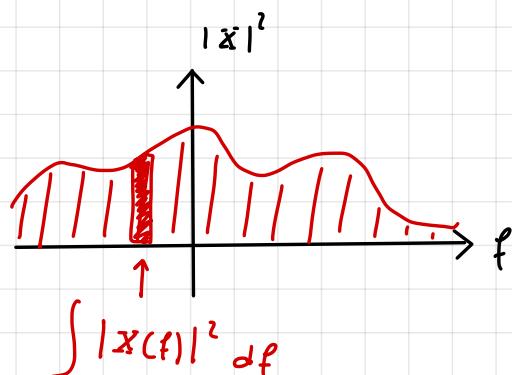
È sempre ≥ 0 .

Incluse solo l'energia che compete alle armoniche (frequenze) filtrate, quindi il segnale di uscita.

Si è energia del segnale di uscita y è \leq dell'energia del segnale di entrata x .

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

T. d: Rayleigh: Il modulo quadrato della trasformata di un segnale, corrisponde alla sua densità spettrale di energia.



All'esame: Formula + descrizione
BOL

Tutto quello che diciamo adesso è per la trasformata di Fourier ma anche la serie di Fourier.

SIMMETRIE NELLA TRASFORMATA DI FOURIER (e nella serie)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

$\Re\{X(f)\}$ è pari: $\Im\{X(f)\}$ è dispari:

Proprietà ①

Hip. $x(t) \in \mathbb{R}$

Tesi:

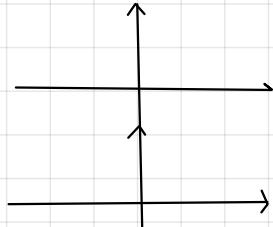
$$\begin{cases} X_R(-f) = X_R(f) \\ X_I(-f) = -X_I(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_X(-f) = A_X(f) \\ \varphi_X(-f) = -\varphi_X(f) \end{cases}$$

IMPORTANTE !!



Si dice che gode di:
SIMMETRIA HERMITIANA

$$X(-f) = X^*(f)$$



②

Se $x(t)$ fosse "immune" dal segno di t ?

Hip: $x(t)$ è PARI

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} x(-\tau) e^{-j2\pi f (-\tau)} d\tau$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} x(-\tau) e^{+j2\pi f \tau} d\tau$$

- 1) $t = -\tau$
- 2) $dt = d\tau$
- 3) $\tau_1 = -\infty \Rightarrow t_1 = +\infty$
- 4) $\tau_2 = +\infty \Rightarrow t_2 = -\infty$

$X(f)$ è PARI

$$\int_a^b x(t) dt = \int_b^a -x(t) dt$$

Prop.
conosciuta
dall'analisi:

Possiamo
Applicare

Z BIS

Hp.

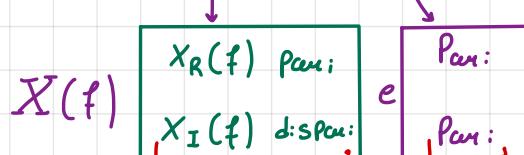
$x(t)$ è d:spac:

\Rightarrow

$X(f)$ è Pan:

(1) + (2)

: $x(t)$ Reale e Pan:



\rightarrow C'è un incongruenza!

Succede solo quando

$$X_I(f) = 0$$

Quindi: : $X(f)$ reale e Pan: sse $X_R(f)$ Pan: e $X_I(f) = 0$

(1) + (2 BIS)

$x(t)$ Reale e D:spac: \Rightarrow $\bar{X}(f)$ IMMAGINARIO e DISPARI

$X_R(f)$ Pan: e d:spac:

$$\Rightarrow X_R(f) = 0$$

$X_I(f)$ D:spac: e D:spac:

(1) $\boxed{\text{Hp: } x(t) \in \mathbb{R}}$

Notiamo

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_d(t) \\ &\quad \begin{array}{l} \text{reale e} \\ \text{Pan:} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{reale e} \\ \text{d:spac:} \end{array} \\ &\quad \uparrow \qquad \uparrow \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} x_p(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(-t) \\ x_d(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2} x(t) - \frac{1}{2} x(-t) \end{array} \right. \\ &\quad \text{I addendo} \qquad \text{II addendo} \\ &\quad \downarrow \qquad \downarrow \\ &\quad \boxed{x_p(t)} + \boxed{\bar{x}_d(f)} \end{aligned}$$

Parte Pan:

Parte d:spac:

$$\begin{aligned} X(f) &= \boxed{x_p(t)} + \boxed{\bar{x}_d(f)} \\ &\quad \begin{array}{l} \text{reale e} \\ \text{Pan:} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{immag. e} \\ \text{D:spac:} \end{array} \\ &\quad \uparrow \qquad \uparrow \end{aligned}$$

$$X(f) = \operatorname{Re} \{X(f)\} + j \operatorname{Im} \{X(f)\}$$

\rightarrow Abbiamo visto che si calcola la parte reale di $X(f)$ dalla parte Pan: di $x(t)$ reale.

$$E j \operatorname{Im} \{X(f)\} \leftrightarrow x_d(t)$$

19/10/2020

SIMMETRIE \Re (e Serie di Fourier) ... inoltre

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\bar{X}_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

||

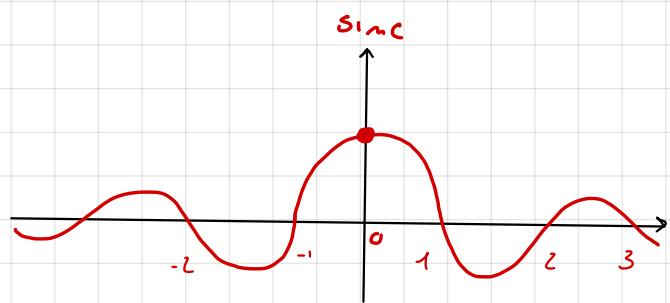
||

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = A_x$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) dt = \langle x(t) \rangle$$

"Area"

"Val. media temporale"



Esercizio (d: ff; c: le) :

$$\mathfrak{F}[\text{sinc}(t)]$$

quando noi sappiamo che

$$\Pi(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(t)$$

$$\mathfrak{F}[\text{sinc}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) e^{-j2\pi f t} dt =$$

Dobbiamo arrivareci per ragionamento:

dal grafico sopra sappiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\cdot) e^{-j2\pi f \cdot} d(\cdot) = \text{sinc}(\cdot) \quad \underline{\text{dualità}}$$

noi vogliamo cambiare con un antifiltero matematico da f a t

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(f) e^{-j2\pi \cdot f} d(f) = \text{sinc}(\cdot) \quad \text{sarebbe } \mathfrak{F}[\Pi(t)] = \text{sinc}(f)$$

$$\mathfrak{F} \updownarrow$$

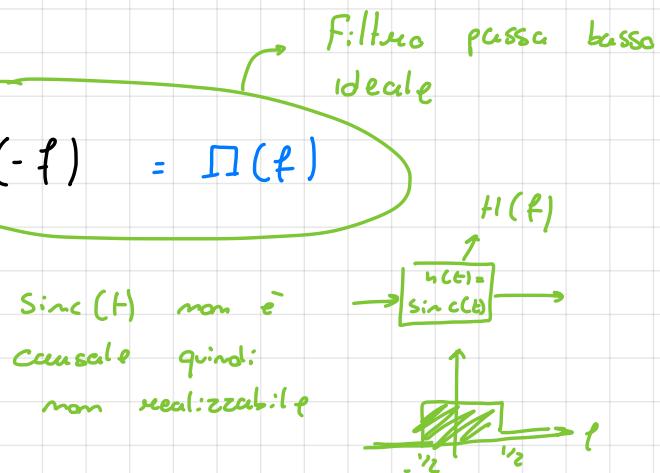
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\cdot) e^{+j2\pi \cdot f} d(\cdot) = \Pi(\cdot) \quad \text{sarebbe } \mathfrak{F}'[\text{sinc}(f)] = \Pi(t)$$

Se il pallino rosso (\cdot) fosse t . allora abbiamo ricavato quello che volevamo, descrivendo l'antitrasformata

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) e^{+j2\pi t f} d(t) = \Pi(\cdot)} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

ma c'è un bug, manca il '-' all'esponente per rispettare l'uguaglianza, allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) e^{-j2\pi t (-f)} d(t) = \Pi(-f) = \Pi(f)$$



Proprietà d. Dualità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = X(f)$$

Hp: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) e^{-j2\pi \alpha(-f)} d\alpha = x(-f)$$

Tesi: $X(t) \leftrightarrow x(-f)$

A cui: c'è una tabella delle proprietà:

PROPRIETÀ

t	f
$x(t) * h(t)$	$\bar{X}(f) \cdot H(f)$
$\underline{X}(t)$	$x(-f)$
$\sum a_i x_i(t)$	$\sum a_i \bar{X}_i(f)$
$x(t-t_0)$	$\bar{X}(f) e^{-j2\pi f t_0}$

LINEARITÀ

$$(A x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} A X(f)) \quad \text{"Omogeneità"}$$

$$\Im \left[a_1 x_1(t) + \dots + a_n x_n(t) \right] = a_1 \Im [x_1(t)] + \dots + a_n \Im [x_n(t)]$$

$a_i \in \mathbb{C}$ coefficienti

TRANSLAZIONE TEMPORALE

$$\Im \left[x(t-t_0) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

$t = \tau + t_0$

$\tau = t - t_0$ voglio togliere la traslazione, cambio di variabile

(1) $d\tau = dt$

(2) $\tau_1 = -\infty$

(3) $\tau_2 = +\infty$

(4) $\tau_1 = -\infty$

$$\dots = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f (\tau+t_0)} d\tau = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$\Im [x(t)]$

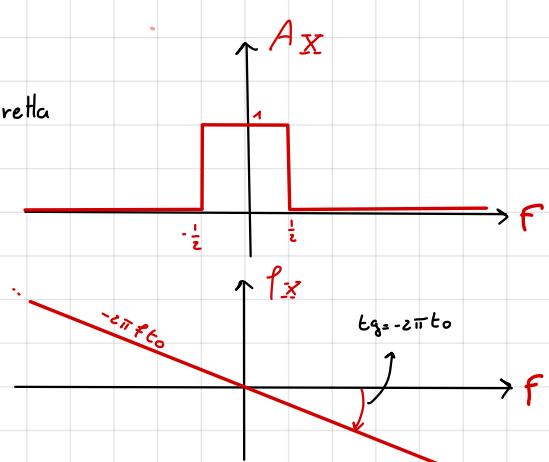
voglio far emergere $X(f)$

Quindi:

$$\text{Sinc}(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Pi(f) e^{-j2\pi f t_0} \cdot \Pi(f) \rightarrow \text{retta}$$

A_x

$\text{Sinc}(t-t_0) \cdot U(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left[\Pi(f) e^{-j2\pi f t_0} \right] \dots$

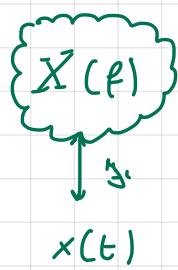


Un riferimento a un antecedente compongono una modifica solo allo spettro di fase.

CAMBIO DI SCALA

$$\mathcal{J} \left[x\left(\frac{t}{T}\right) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt = \dots$$

↑
operando
↑
(3) ζ_1
↓
(3) t



$$1) \frac{t}{T} = \zeta; \quad t = T\zeta$$

$$2) dt = T d\zeta$$

$$3) \zeta_1 = \frac{t_1}{T} = \pm \infty \quad (T \neq 0)$$

dipende
dal
segno di T

$$\zeta_2 = \frac{t_2}{T} = \pm \infty \quad (T \neq 0)$$

$$\dots = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\zeta) e^{-j2\pi f T \zeta} (\overbrace{T d\zeta}^{\text{comincia da: limiti}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\zeta) e^{-j2\pi f T \zeta} d\zeta = \dots$$

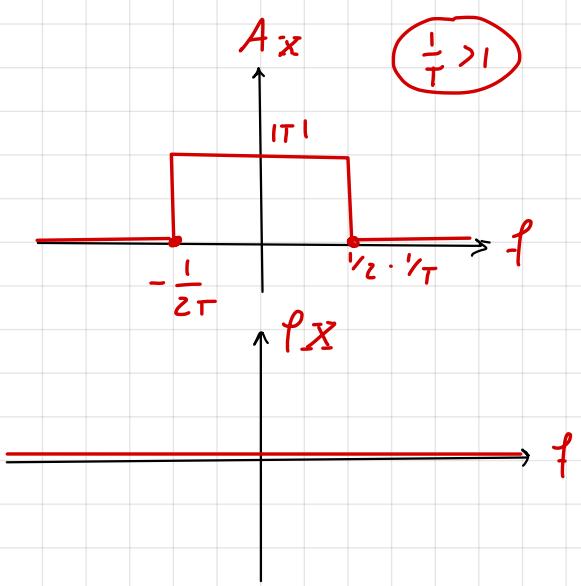
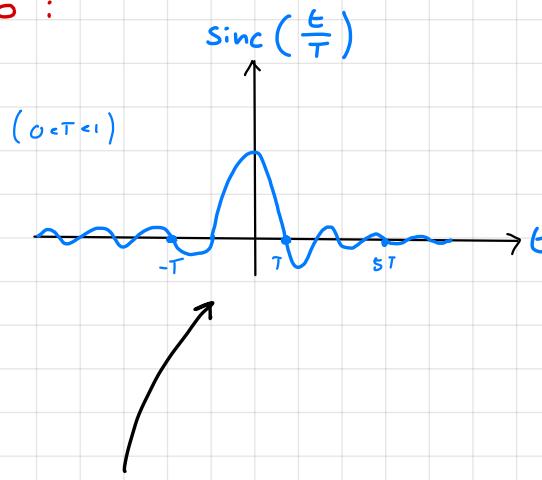
il cambio di segno dell'integrale

$$\dots = |T| \cdot X(fT)$$

□

$$x\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow |T| X\left(\frac{f}{T}\right)$$

Esempio :



Per tracciare la trasformata devo applicare un cambio d: scala

$$\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow |T| \cdot \text{rect}(Tf) \cdot e^{-j\varphi}$$

applico la proprietà alla trasf. notevole del sinc

$$\begin{aligned} \text{sinc}(t) &\xleftrightarrow{\text{tr}} \text{rect}(f) \\ x\left(\frac{t}{T}\right) &\xleftrightarrow{\text{tr}} |T| X(Tf) \end{aligned} \quad \left\{ \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{} |T| \text{rect}(Tf) \right.$$

Spettro d: fase
nullo

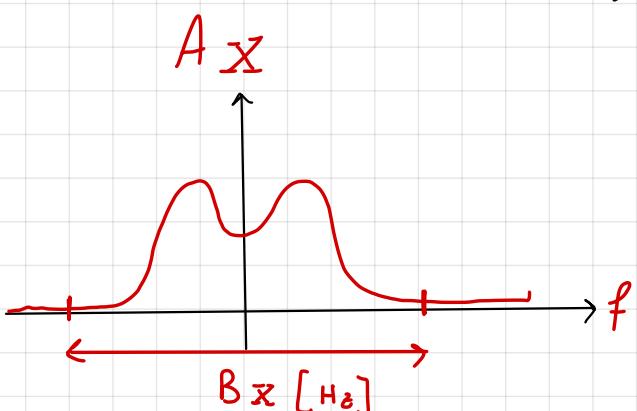
Pur: e d: spazi

Ora possiamo sapere cos'è la BANDA ...

BANDA (B_x) $\hat{=}$ La misura dell'intervallo dell'asse delle frequenze su cui si estende lo spettro $X(f)$

↳ La banda è d: pertinente dello spettro
non di un segnale

↳ Si come si misura un intervallo
si misura solo lo spettro d:
Ampiezza



RELAZIONE "Durata - Banda"

PROPRIETÀ

t	f
$x(t) * h(t)$	$\bar{X}(f) \cdot H(f)$
$\underline{X}(t)$	$x(-t)$
$\sum_i a_i x_i(t)$	$\sum_i a_i \bar{X}_i(f)$
$x(t-t_0)$	$\bar{X}(f) e^{-j2\pi f t_0}$
$x\left(\frac{t}{T}\right)$	$ T \underline{X}(Tf)$

RELAZIONE "Durata - Banda"

$$\left[(T \cdot D_x) \times \left(\frac{1}{T} B_x \right) \right] = D_x \cdot B_x \rightarrow \text{Prodotto Durata - Banda}$$

↑ ↑ ↓ ↓
 Nuova Nuova durata durata
 Durata Banda segnale segnale
 origionale spettro A_x

$$D_x \cdot B_x \geq K \quad (\text{Heisenberg})$$

Il prodotto $D \cdot B$ più piccolo, si chiama Gaussiano.

Heisenberg stabilisce che c'è un limite fisico di misura al di sotto del quale non riesci a misurare.

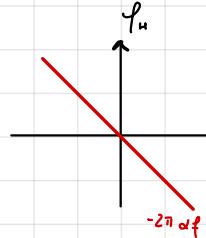
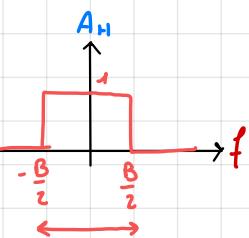
20/10/20

Riprendiamo il discorso di ieri

es: [48]

$$h(t) = B \cdot \operatorname{Sinc}(B(t-\alpha)) \quad (B > 0)$$

$$H(f) = \frac{B \cdot \Pi\left(\frac{1}{B} f\right)}{1 + \frac{1}{B^2}} e^{-j2\pi f \alpha}$$



Burata vs Banda
 $\Delta x \cdot B_x$ dipende solo da $x(\cdot)$
 (dalla sua "forma")

trasformata
elementare:

$$\begin{cases} A_X(t) \\ x(t-t_0) \\ x\left(\frac{t}{T}\right) \end{cases}$$

Segnale

$$\sum a_i x_i$$

spettro

$$\sum a_i X_i(f)$$

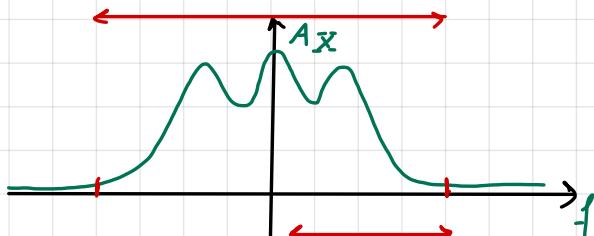
$$A_X(f)$$

$$X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

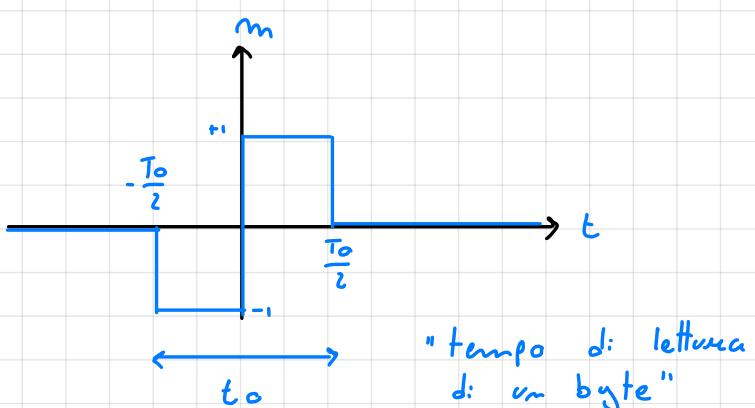
$$|T| X(Tf)$$

Se Δx diminuisce
 $\Rightarrow B_x$ aumenta di conseguenza

"BANDA BILATERALE" (B_x)



"Banda monilaterale" ($\frac{B_x}{2}$)



es: (51) Il "segnale Manchester"

PROPRIETÀ DI MODULAZIONE COMPLESSA (Traslazione in Frequenza)

Succede quando :

$$x(t) \cdot e^{+j2\pi f_0 t} \quad \begin{array}{l} \text{è un numero} \\ \text{t}_3 > t_2 > t_1 > 0 \end{array}$$

\uparrow
segnale
 \uparrow
fase

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{+j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$e^{-j2\pi(f-f_0)t}$$

→ Lì si conosce, usiamo $x(t)$ come segnale ma la frequenza cambia

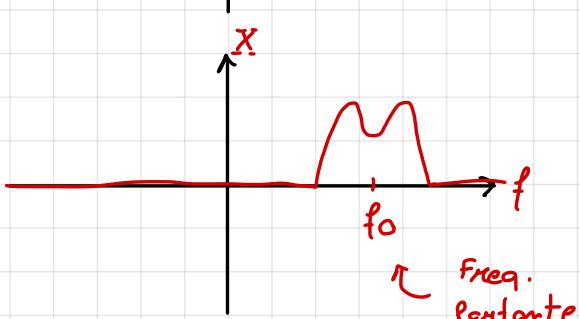
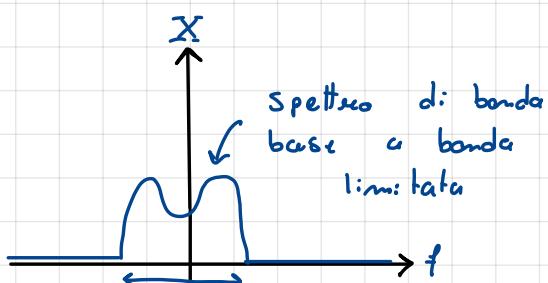
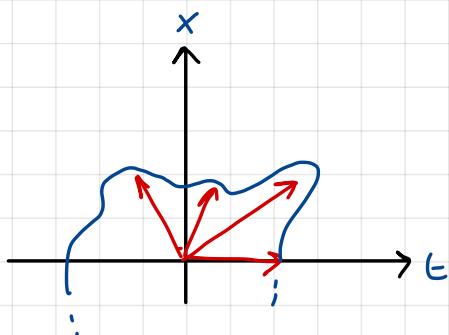
$$= X(f - f_0)$$

↙ Traslazione in frequenza

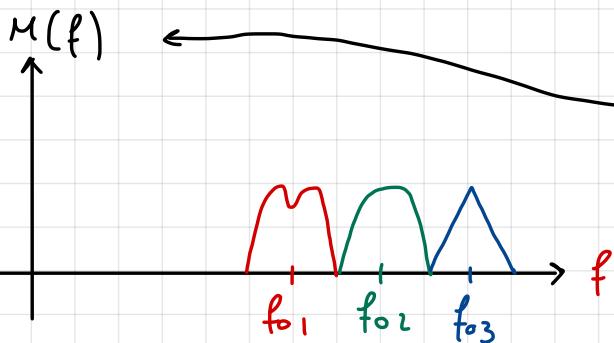
Aggiungeremo la Tabella

segnale	spettro
$\sum a_i x_i$	$\sum a_i X_i(f)$
$A x(t)$	$A X(f)$
$x(t-t_0)$	$X(f) e^{-j2\pi f t_0}$
$x(\frac{t}{T})$	$ T X(Tf)$
$x(t) \cdot e^{+j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$

Tracciamo i grafici:



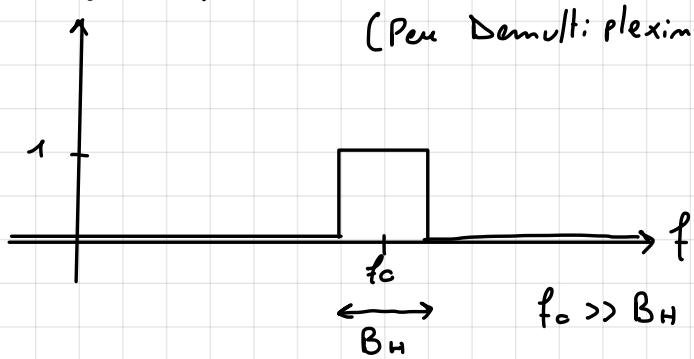
Se i vari spettri sono a banda stretta e limitata allora siamo di fronte ad un MULTIPLEX (raccolti insieme in un unico segnale)



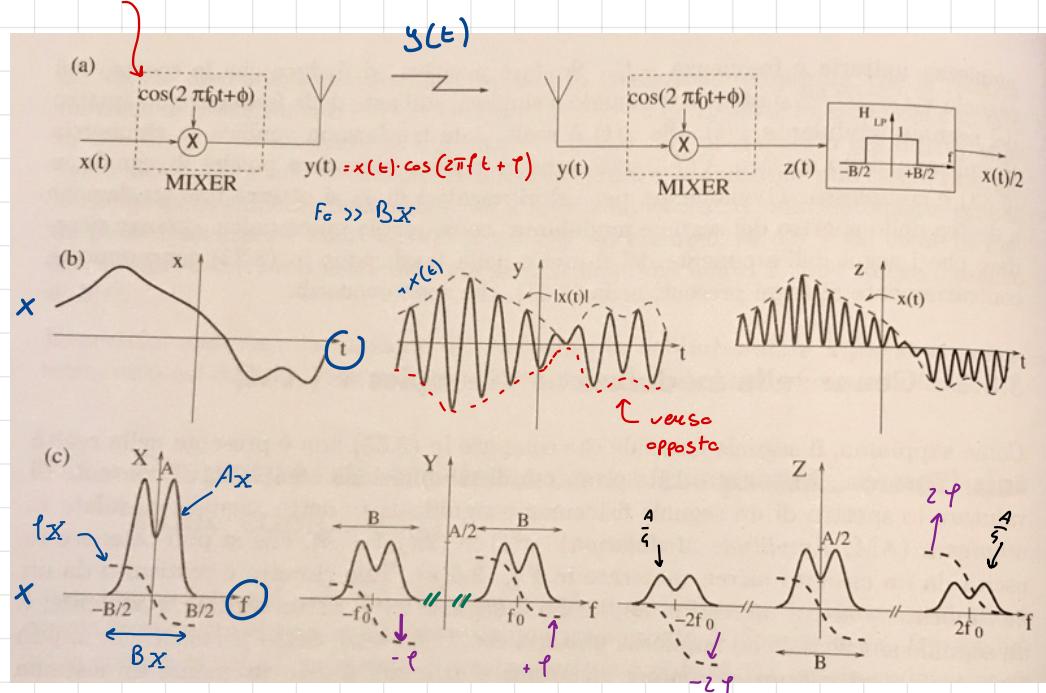
Multiplex in freq.

$$\hookrightarrow m(t) = x_1(t) e^{+j2\pi f_01 t} + x_2(t) e^{+j2\pi f_02 t} + x_3(t) e^{+j2\pi f_03 t}$$

H_{BP} → filtro Passa-Banda ideale
(Per Demultiplexing)



ti "oscillazione"
= i "multiplicazione"



" a_i " → mom di pende dal tempo

$$y(t) = \frac{1}{2} x(t) e^{+j\varphi} e^{+j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Linearietà + Modulazione complessa
↳ trasformo sda il segnale in funzione del tempo

$\uparrow \downarrow$

$$\underline{Y}(f) = \frac{1}{2} e^{+j\varphi} \underline{X}(f - f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \underline{X}(f + f_0) e^{j(\varphi_x(f + f_0) - \varphi)}$$

$A_x e^{j\varphi_x}$

Sono accoppiati e raccolti a fattore comune

$$e^{j(\varphi_x(f) + \varphi)}$$

"Modulazione di Ampiezza" (o "Modulazione Reale") AM

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

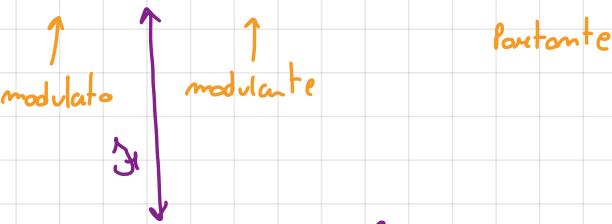
$\uparrow \downarrow$ Modulante portante

$$\underline{Y}(f) = \frac{1}{2} e^{+j\varphi} \underline{X}(f - f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \underline{X}(f + f_0)$$

"Demodulazione OMOSINTA" → Per il 3cL

Prendiamo dunque l'ultimo colonna della foto a pag. fa

$$z(t) = y(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$



$$Z(f) = \frac{1}{2} e^{+j\varphi} Y(f - f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} Y(f + f_0)$$

Applico i T. della modulazione di ampiezza

Cosa lega la modulazione e la demodulazione?

$$z(t) = x(t) \cdot \underbrace{\cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)}_{\geq 0}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} x(t)}_{\text{abbiamo quello}} + \underbrace{\frac{1}{2} x(t) \cos(4\pi f_0 t + \varphi)}_{\text{vogliamo cancellare questo}}$$



$$Z(f) = \frac{1}{2} \bar{X}(f) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{+j\varphi} X(f - 2f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} X(f + 2f_0) \right]$$

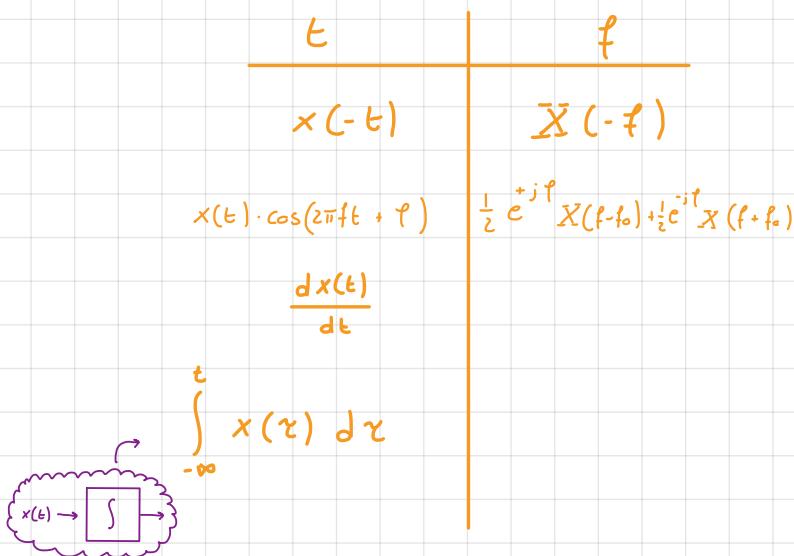
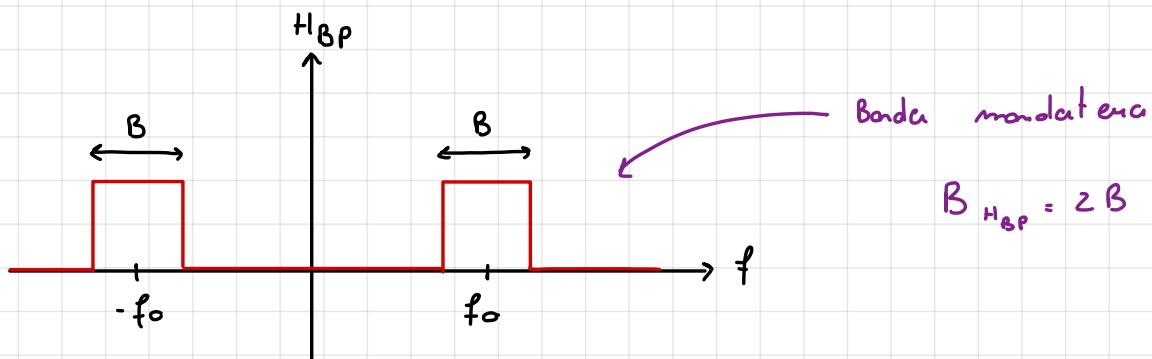
23/10/2020

(x casa 54, 53, 56, 57, 58, 59)

sezione

 $H_{BP}(f)$ con $x(t)$ e $H_{LP}(f)$ in "

PROPRIETÀ

es [ss] Filtri Passa-Banda Ideale \rightarrow (Anche su vecchi appunti) \rightarrow utile se devo demodulare un segnale

$$h_{BP}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_{BP}(f)$$

$$H_{BP}(f) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\Pi\left(\frac{f-f_0}{B}\right)}_{dx} + \underbrace{\Pi\left(\frac{f+f_0}{B}\right)}_{sx} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_0 > B & \quad \frac{1}{B} > T_0 \\ X(f) &= 2 \Pi\left(\frac{f}{B}\right) \\ x(t) &= 2|B| \operatorname{sinc}(Bt) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \cdot 2 \Pi\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \Pi\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 |B| \operatorname{sinc}(Bt) e^{+j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \cdot 2 |B| \operatorname{sinc}(Bt) e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= 2|B| \operatorname{sinc}(Bt) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

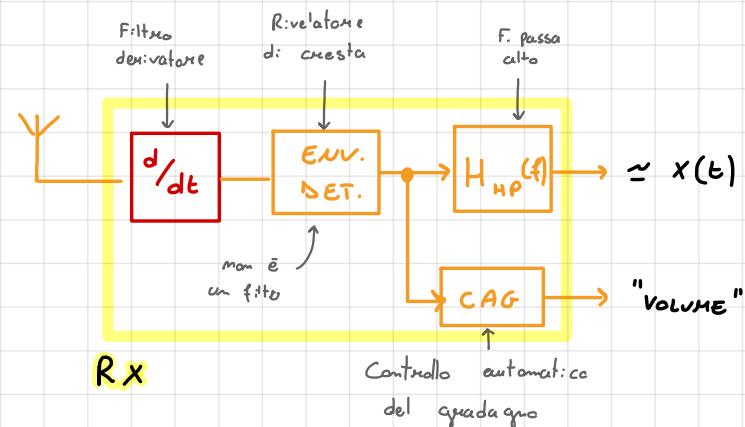
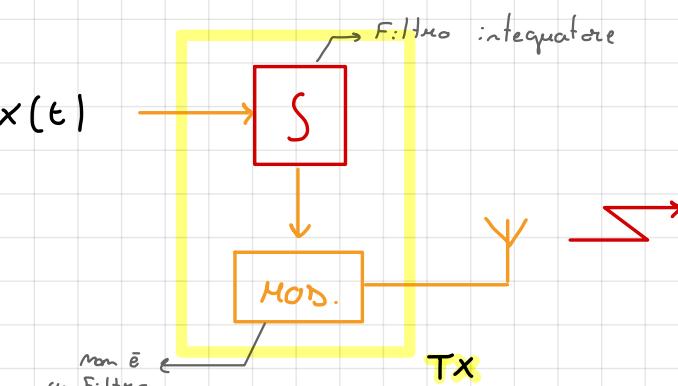
$$H_{BP}(f) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} h_{BP}(t) = 2|B| \operatorname{sinc}(Bt) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

MODULAZIONE DI FREQUENZA

(Frequency Modulation) FM

(P. 29)

Solo lettura



$$m(t) = \sin \left(2\pi f_0 t + \varphi + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right)$$

$\underbrace{g(t)}$

$$r(t) = m'(t) = (2\pi f_0 + 2\pi f_d x(t))$$

• $\cos \underbrace{(2\pi f_0 t + \varphi + 2\pi f_d g(t))}$

FREQ. ISTANTANEA
 $= (2\pi f_0 + 2\pi f_d x(t))$

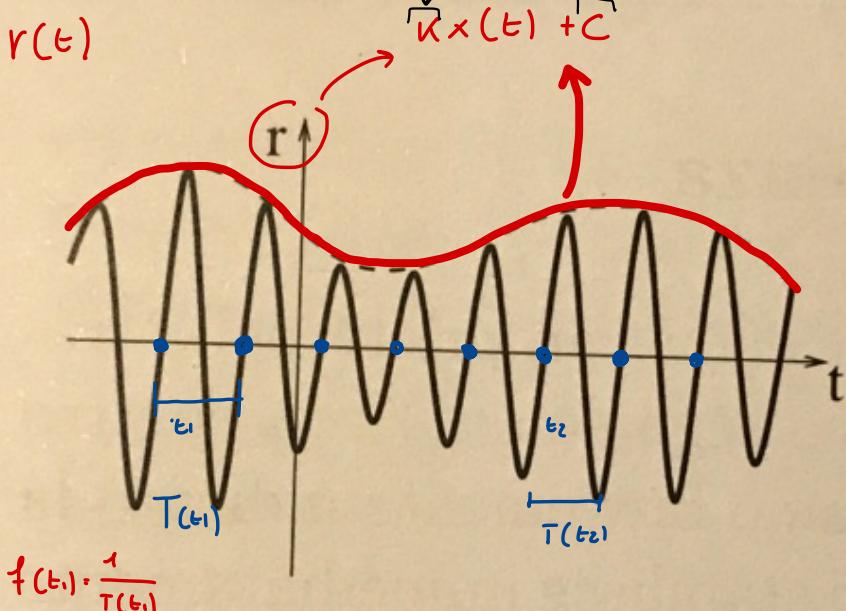
$\cos(2\pi g(t))$

"Frequenza"?

Se $g(t) = f \cdot t \Rightarrow f = g'(t)$

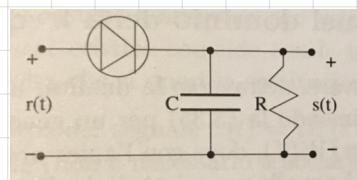
.. Sebbene $f(t)$.. $\dot{f}(t)$..

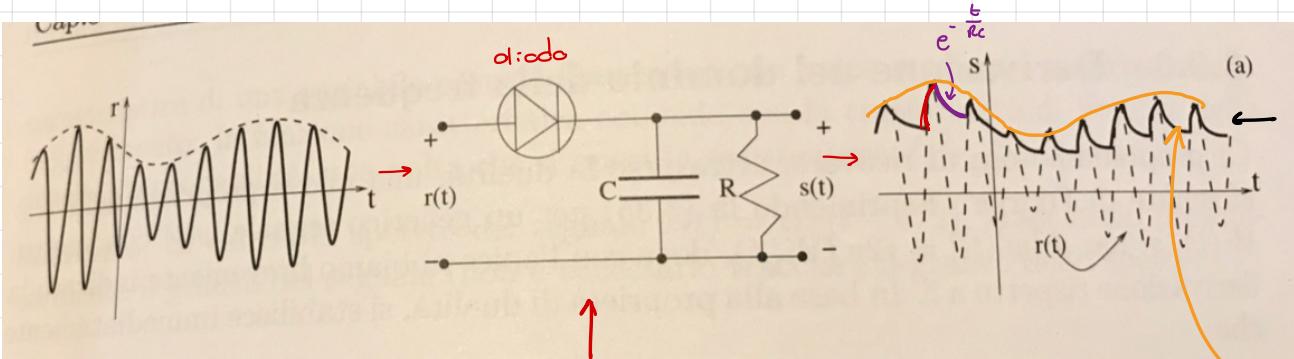
Se ci liberiamo di questo e costituimmo il segnale



→ Se io redessi misurare la distanza tra i pallini blu (-), troverei una misura di uno pseudo periodo (Ampiezza combina)

→ A noi non serve r ma l'envelope di r , non esiste filtro che faccia questo, ma ci avviciniamo con ...

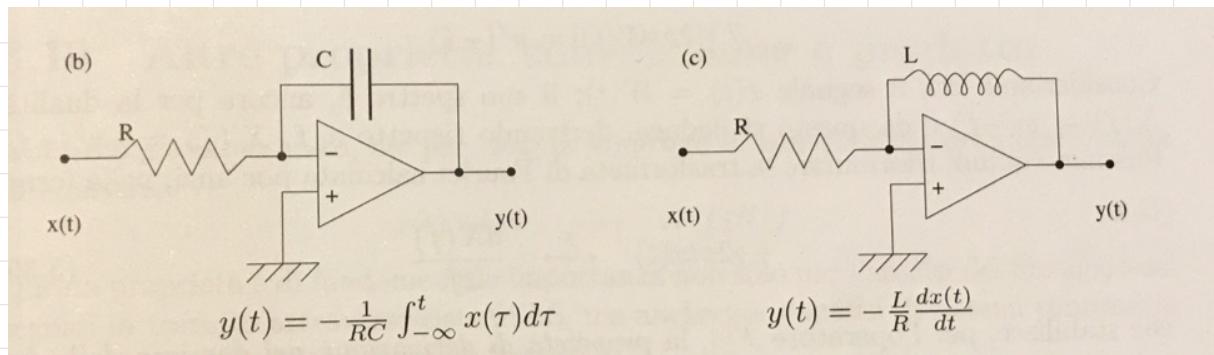




R:LEVATORE DI CRESTA
"ENVELOPE DETECTOR"

A moi penso
non serve
questa!
C: serve

$$Kx(t) + C$$



TEOREMA DI DERIVAZIONE

e

INTEGRAZIONE (ad area nulla)

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} j 2\pi f \cdot X(f)$$

integraz.
per punti:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \left[x(t) e^{-j2\pi ft} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \left(-j2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right) = \\ &\quad \downarrow \text{limite} \quad \downarrow \text{limite} \\ &\quad t \rightarrow \pm\infty \quad t \rightarrow \pm\infty \\ &= (+j2\pi f) \bar{X}(f) \end{aligned}$$

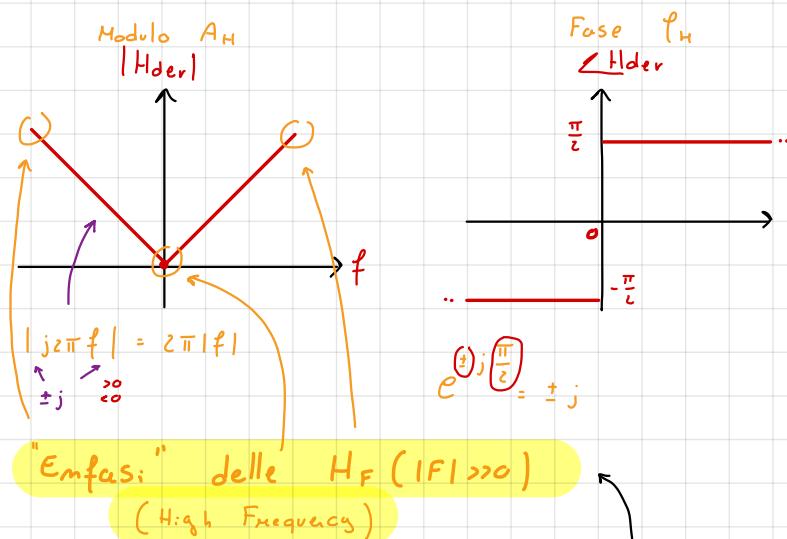
"FILTORO DERIVATORE"

$$X(f) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} (j2\pi f) \bar{X}(f)$$

$$H_{der}(f) = (j2\pi f)$$

Voglio anche l'interpretaz. grafica

Risposta in frequenza
(grado di simmetria Hermitiana)



$$\begin{aligned} H &= H_R + j H_I \\ \angle_H &= \arctg \left(\frac{H_I}{H_R} \right) \\ H &= A_H e^{j\angle_H} \end{aligned}$$

Lo chiede
all'esame
informatico

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

$= z(t) \rightarrow z'(t) = x(t)$ per punti:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[z(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \left[z(t) \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{j2\pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &\quad \downarrow \text{non sappiamo se } z \text{ è trasformabile} \\ &\quad \alpha \rightarrow 0 \quad \checkmark \\ &\quad \alpha + n \text{ dobbiamo fare un postulato} \quad (*) \\ &= \frac{1}{j2\pi f} X(f) \end{aligned}$$

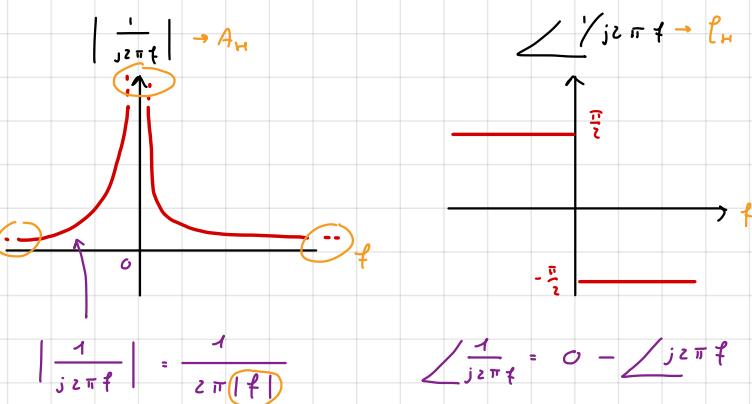
(*) Postulato → lo poniamo noi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z(t) dt = 0 \quad // \text{deve essere così!}$$

quindi: se $A_x = 0$ allora vale!

$$X(f) \xrightarrow{S} \frac{1}{(j2\pi f)} \bar{X}(f)$$

Vediamo il modulo e la fase del filtro (risposte in ampiezza e in fase)



$$\text{ang} \left[\frac{z}{w} \right] = \text{ang} [z] - \text{ang} [w]$$

"De-emfasici" delle HF ($|f| \gg 0$)

Emfasici delle LF ($|f| \approx 0$)

26/10/20

Se proprietà della trasformata sono mod: per capire come lavorare e osservare le trasformate di Fourier.

Infatti in generale tutte le proprietà hanno un utilizzo molto più vasto dell'esempio applicativo alla quale abbiamo appena accennato.

t f

LINEARITÀ
(e omogeneità)

Cambio d:
Scala] → $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$ → area invertita

Translazione in t] → inv. t

Translazione in f] → Modulazione AM

DUALITÀ

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{j2\pi f} jX(f)$$

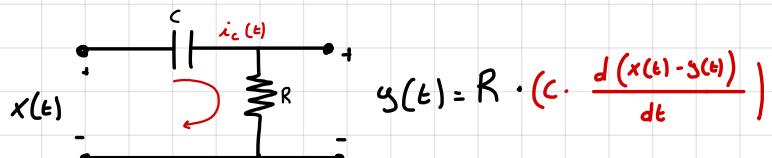
$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\frac{X(f)}{j2\pi f}} (Ax = 0)$$

$$x(t) + h(t) \xrightarrow{X(f) + H(f)}$$

$$x(t) \cdot h(t) \xrightarrow{X(f) * H(f)}$$

Facciamo un esercizio insieme

(60) n° es. 15



$$y(t) = R \cdot C \left(x'(t) - y'(t) \right)$$

$$RC y'(t) + y(t) = RC x'(t)$$

Prop. d: derivazione



'Se ho una derivata
Per farla trasformare
mi basta moltiplicare
per $j\omega f$ '

\Rightarrow Operazione Chiave

Usiamo una
Proprietà per
semplicificare
l'eq. differenziale

$$RC (j\omega f) \underline{Y(f)} + \bar{Y}(f) = RC (j\omega f) \bar{X}(f)$$

Notare: gli spettri:
non sono derivate

Raccordo a fattore comune

$$\underbrace{[1 + j\omega f RC]}_{\text{Fattore comune}} \underline{Y(f)} = [j\omega f RC] \underbrace{\bar{X}(f)}_{\text{Fattore comune}};$$

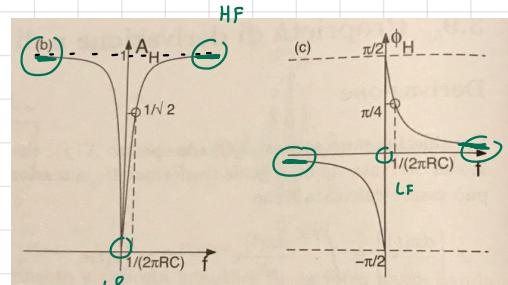
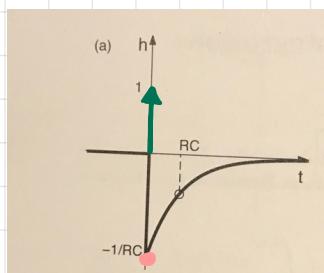
$$\frac{\underline{Y(f)}}{\underline{X(f)}} = \frac{(j\omega f RC)^{-1}}{1 + j\omega f RC} = H_{CR}(f)$$

$$= \textcircled{1} \ominus \frac{1}{1 + j\omega f RC}$$

Qual è il modulo
e l'argomento

$$h_{CR}(t) = \mathcal{S}(t) \ominus \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

go to p. 74



Allora mettiamo che (P. 31)

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (2.1)$$

$$a_n (j\omega \tau f)^n \cdot Y(f) + \cdots + a_1 (j\omega \tau f) Y(f) + a_0 Y(f) = b_m (j\omega \tau f)^m \cdot X(f) + b_1 (j\omega \tau f) X(f) + b_0 X(f)$$

$[$ $] Y(f) = [$ $] \cdot X(f)$

"Razionale in f "

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_e b_e (j\omega \tau f)^e}{\sum_o a_o (j\omega \tau f)^o}$$

Ch: è il duale del Teorema d: derivazione?

BALITÀ

$$X(t) \xleftrightarrow{f} X(-t)$$

Quindi .. È il T. d: integrazione? NO!

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{f} j\omega \bar{x} f X(f)$$

(f)

$$\frac{dX(f)}{df} = \frac{d}{df} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[e^{-j\omega t} \right] dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-j\omega t) e^{-j\omega t} dt$$

(t)

Cosa mi aveva?

$$= \Im \left[(-j\omega t) \cdot x(t) \right]$$

$$\boxed{-j\omega t \cdot x(t) \xleftrightarrow{f} \frac{dX(f)}{df}}$$

67 $x(t) = t \cdot \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right)$ s: calco: l'espressione analitica
dello spettro del segnale.

Suggerimenti:

$$s(t) = t \cdot \Pi(t)$$

o

$$s(t) = \left[\int_{-\infty}^t \Pi(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \right]$$

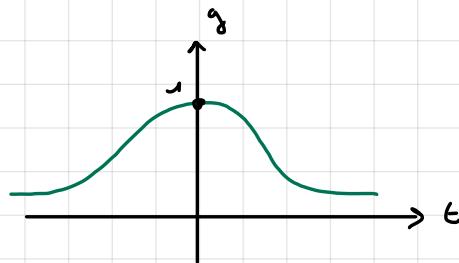
$t \rightarrow +\infty \rightarrow 1$
 $t \rightarrow -\infty \rightarrow 0$

$$z(t) = \int_{-\infty}^t \Pi(\tau) d\tau = \left(t + \frac{1}{2} \right) \cdot \Pi(t)$$

SEGNALE GAUSSIANO :

$$g(t) = e^{-\pi t^2}$$

$$G(f) = ?$$



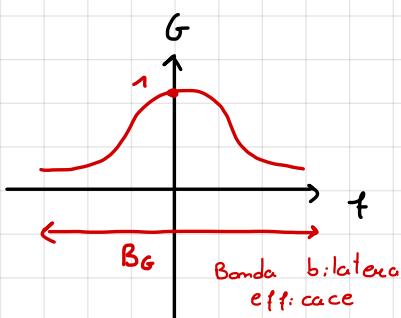
$$g'(t) = (-2\pi t) e^{-\pi t^2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{j} (-j2\pi f) g(t)$$

$\uparrow j$ $\uparrow j$
 (j^2) $(T_{CO} \cdot d/dt)$ $(T_{CO} \cdot d/df)$

$$(j2\pi f) G(f) = \frac{1}{j} G'(f);$$

$$G'(f) = -2\pi f G(f)$$

$$G(f) = e^{-\pi f^2}$$



$$D_g \cdot B_g$$

prodotto durata banda \rightarrow Minimo per $g(t)$... limite fisico

Il segnale Gaussiano è il migliore

TEOREMA CONVOLZIONE

$$w(t) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) \cdot z(t-\tau);$$

$\uparrow j$

$$\bar{W}(f) \cdot \bar{Z}(f)$$

$$W(f) \cdot Z(f)$$

$$\begin{aligned} W(t) &\xleftrightarrow{j} w(-f) \\ Z(t) &\xleftrightarrow{j} z(-f) \end{aligned}$$

$$\Im [W(f) \cdot Z(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) \cdot Z(t) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \left[w(t) * z(t) \right] \Big|_{t=-f} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) \cdot z(-\tau - f) d\tau \quad \cancel{= w(f) * z(f)}$$

dualità

$$1) f + \tau = 0$$

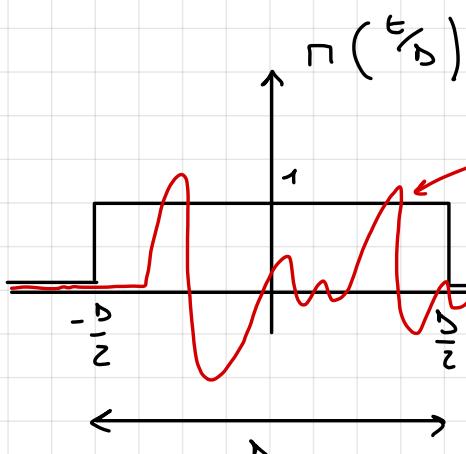
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} w(-(\tau - f)) \cdot z(-\tau) d\tau = w(-f) * z(-f)$$

$$2) d\tau = d\phi$$

$$3/4) \theta_{1,2} = \pm \infty$$

$$\boxed{\boxed{x(t) \cdot y(t) = X(f) * Y(f)}}$$

Teo. del prodotto



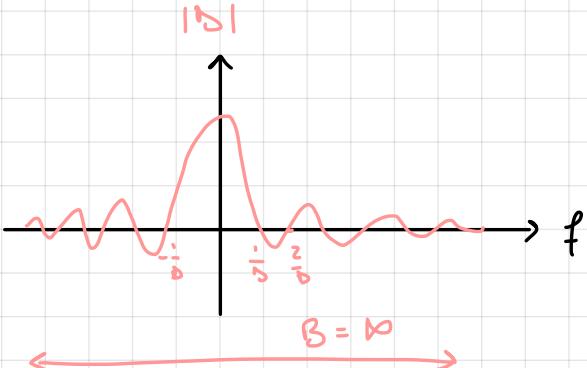
"impulso" $y(t)$

$\Delta y \leq D < +\infty$

$$\pi\left(\frac{t}{D}\right) \cdot y(t) = y(t)$$

Teo. del prodotto

$$\underbrace{|\Delta| \operatorname{sinc}(\Delta \cdot f)}_{B} * \underbrace{\overline{Y}(f)}_{B_Y} = \underbrace{\overline{Y}(f)}_{B_Y}$$



$$B + B_Y = B_Y$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \infty \quad \Downarrow \quad B_Y = \infty$$

"Segnali a durata strettamente limitata, hanno banda illimitata (a u:game)"

Aggiorniamo la tabella delle trasformate

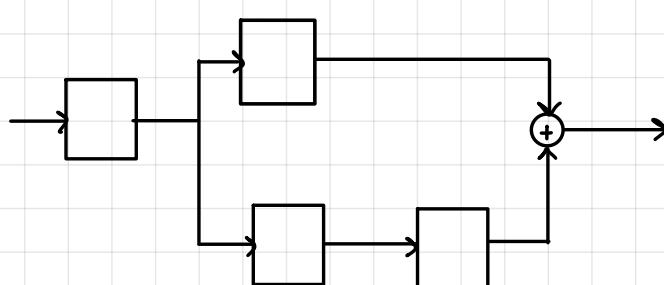
t	f
$\square(t)$	$\text{sinc}(f)$
$\Delta(t)$	$\text{sinc}^2(f)$
\vdots	\vdots
gaussiano $e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$S(t)$	1

Tabella Finale Proprietà di Fourier

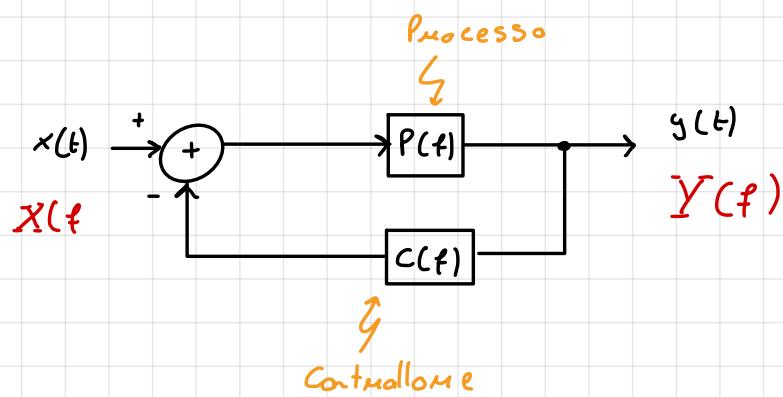
t	f
$\sum a_i x_i(t)$	$\sum a_i X(f)$
$X(t)$	$x(-f)$
$x(t/\tau)$	$ T X(Tf)$
$x(t-t_0)$	$X(f) e^{-j2\pi f t_0}$
$x(t) \cdot e^{+j2\pi f t}$	$X(f-f_0)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j 2\pi f X(f)$
$-j 2\pi t \cdot x(t)$	$\frac{dX(f)}{df}$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ $(A_x=0)$	$\frac{1}{j 2\pi f} X(f)$
$x(t) * g(t)$	$X(f) \cdot \bar{Y}(f)$
$x(t) \cdot g(t)$	$X(f) * Y(f)$
$x^*(t)$	$X^*(-f) \longrightarrow \Im[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt$ $= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^*$ $X(-f)$

27/10/20

ANALISI SCHEMA A BLOCCHI



"esempio schema a blocchi:"

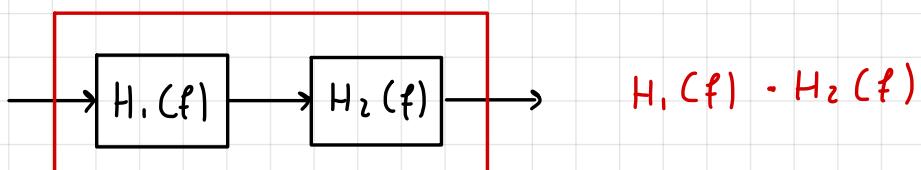


"Sistema in retroazione"
(Feedback)

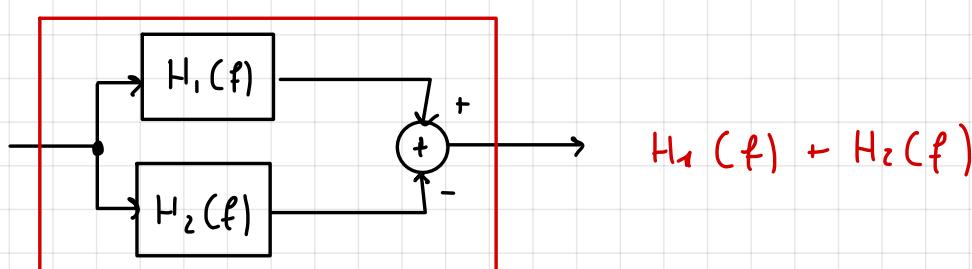
$$Y(f) = P(f) [X(f) - C(f) \cdot Y(f)]$$

$$Y(f) = \frac{P(f) \cdot X(f)}{1 + C(f) P(f)}$$

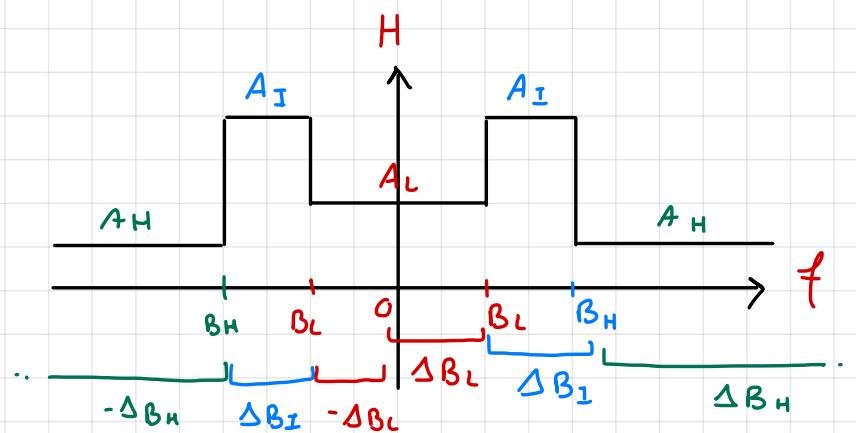
$$H_{\text{tot}}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{P(f)}{1 + C(f) P(f)}$$



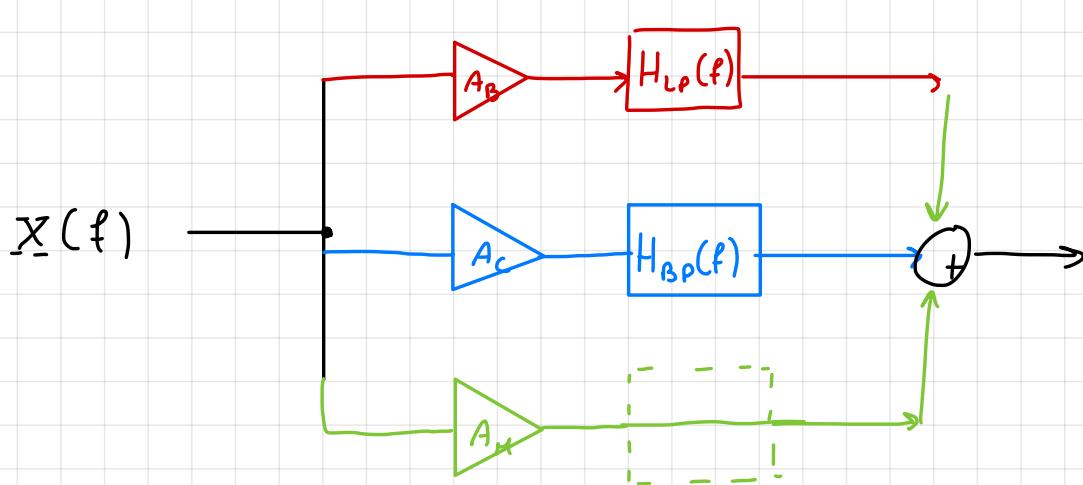
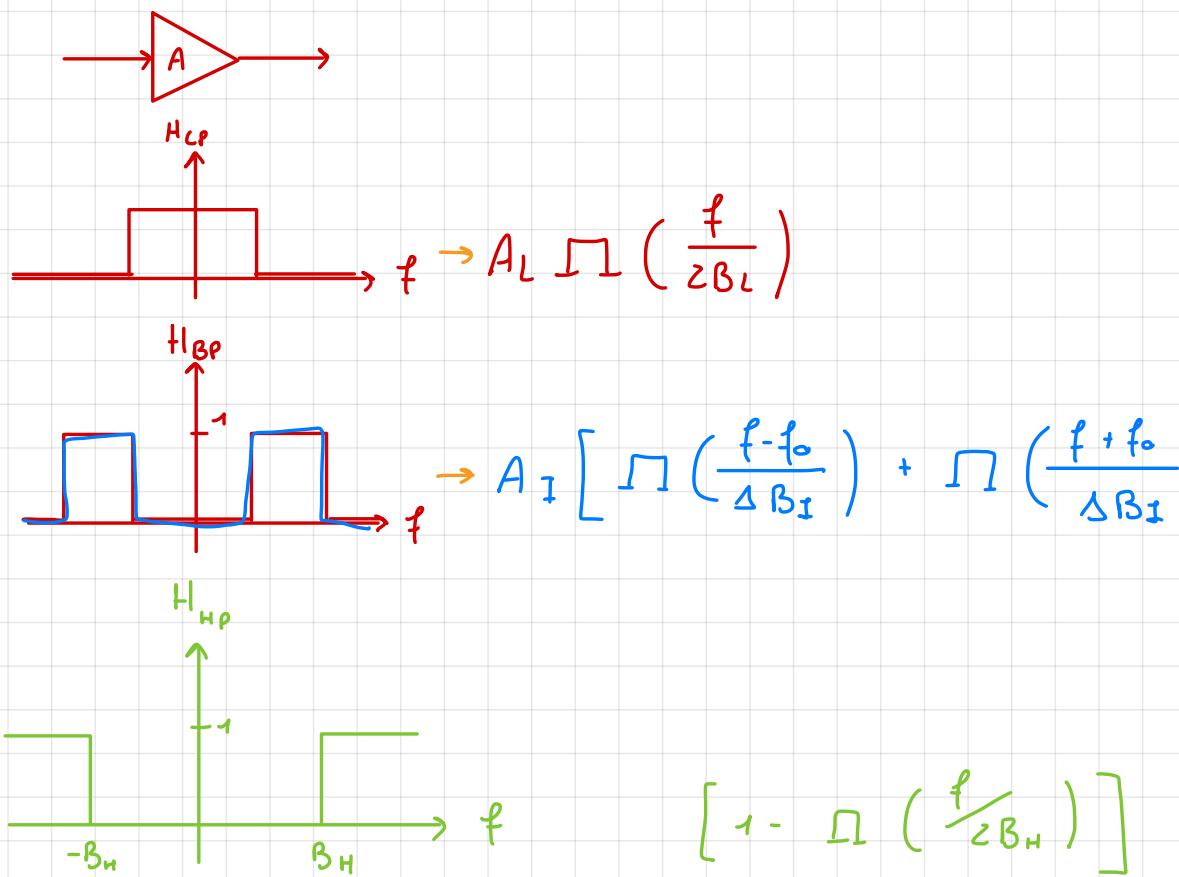
$$H_1(f) \cdot H_2(f)$$



$$H_1(f) + H_2(f)$$



Quello che ho a disposizione



CORRELAZIONE TRA 2 SEGNALI

(es: "Shazam")

$$e_{xy}(t) = x^*(-t) * y(t)$$

C: serve per scoprire se nel segnale y c'è da qualche parte un pezzo di segnale x

$$\dots = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-\sigma) y(t-\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(z) y(t+z) dz$$

↑
1) $\sigma = -z$
2) $d\sigma = -dz$
3/4) $z, t = \pm \infty$

$$|e_{xy}(t_0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(z) y(z+t_0) dz \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(z)|^2 dz \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(z+t_0)|^2 dz = E_x \cdot E_y$$

Ex tua Signal

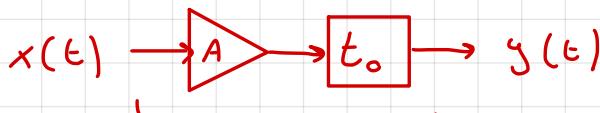
$$|e_{xy}(t_0)|^2 \leq E_x \cdot E_y$$

?

Se e solo se $y(z+t_0) = A_x(z)$ (a)

$$y(t) = A_x(t-t_0) \quad (b)$$

↓ è come se ..



"Canale perfetto"

$$|e_{xy}(t_0)| = \sqrt{E_x \cdot E_y}$$

Im R:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx$$

disegualanza di: Schawartz

$$|\vec{f} \cdot \vec{g}|^2 \leq |\vec{f}|^2 \cdot |\vec{g}|^2$$

$$(|\vec{f}| \cdot |\vec{g}| \cdot \cos(\alpha))^2 = \text{se } \alpha=0$$

Im C:

$$\vec{f}_0 \vec{g} = (\vec{f}^*)^T \vec{g}$$

Se lo vedessi: Transformazione?

$$e_{xy}(t) = x^*(-t) * y(t)$$

\updownarrow
 \mathfrak{F}

$$E_{xy}(f) = \bar{X}^*(f) \cdot \bar{Y}(f)$$

Rivediamo un po' tutto

$$e_{xy}(t) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) y(t+\tau) d\tau$$

\updownarrow
 \mathfrak{F}

$$E_{xy}(f) = \bar{X}^*(f) \cdot \bar{Y}(f)$$

TEOREMA S: Wiener & Kintchine

$$e_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) x(t+\tau) d\tau \xleftarrow{\mathfrak{F}} E_x(f) = |\bar{X}(f)|^2$$

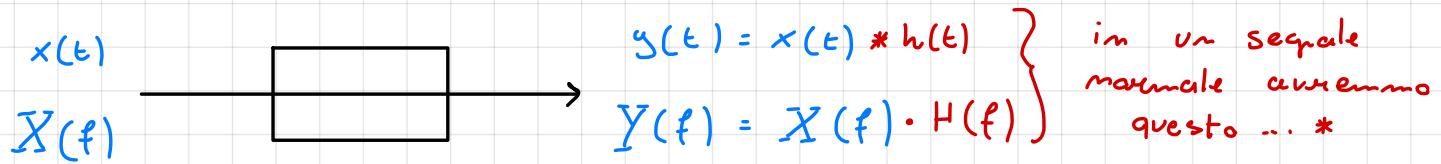
Spettro
di
Energia

$\left. \begin{array}{l} \text{corollario} \\ (x(t) = y(t)) \end{array} \right\}$

30/10/20

"CANALE IDEALE" → Teoria per es. 80

"è un contacircuito"



* Qual'è il segnale $h(t)$ che ci dà il canale ideale

$$h(t) = S(t) \quad \longleftrightarrow \quad H(f) = 1$$

Ma allora ha una risposta in frequenza facilissima

Poi convinciti: possiamo fare il calcolo diretto,

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

p. d:
campionato

Aggiorniamo la tabella delle Trasformate

t	f
$\Pi(t)$	$\text{sinc}(f)$
\vdots	\vdots
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$S(t)$	1
1	$S(-f) = S(f)$ poiché f. pari:

dualità

Dimostriamo che $\delta(\cdot f) = \delta(f)$

$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} dt = \delta(f)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

↓
 p. d.
 campionamento

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{+j2\pi f t} df = \delta(t)$$

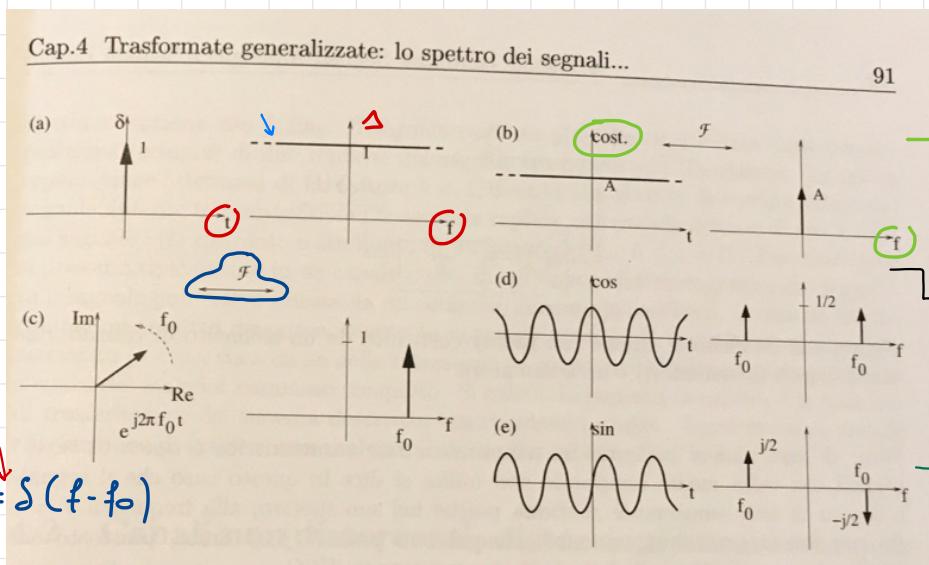
Amt: trasformata d: una costante

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j2\pi f t} df$$

FORMULA di Poisson

$$\mathcal{F}[A] = A \mathcal{F}[1] = A \cdot \delta(f)$$

(b)



$$A \cdot \mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} A dt = A \delta(f) \Big|_{f=0} = A \cdot \mathbf{0}$$

le curve (nel t e in f) coincidono.

$$\frac{1}{2} \delta(f-f_0) + \frac{1}{2} \delta(f+f_0)$$

Δ : δ è la collezione di tutti i possibili fasi: armonici, tutti con

la stessa misura e stessa importanza, Δ è la banda illimitata

maglie: gh

$$E_S = \int |\delta(t)|^2 dt = \int |1|^2 df = \infty$$

Impulsiva $\int \delta(t) dt = 1 < \infty$ Si

D'ur: ch'et ok



$$\Im[\delta(t)] \rightarrow \begin{array}{l} \text{s. pr\acute{e}} \\ \text{fome} \end{array}$$

→ δ è sequale di Energia

$$E_1 = \infty \quad x$$

1 non è d: Energia

$$\int |1| dt = \infty \quad x$$

→ non è impulsivo

TRASFORMATE GENERALIZZATE

Ci permette d: trasformare segnali non d: energ:ia e non impulsiv:, Semplicemente per Dualit\`a.

Per ora abbiamo introdotto 3 d: questi segnali notevol: , i. Segnale costante, ii. gradimo unitario, iii. Segnale sinusoidale, d: cui non abbiamo calcolato lo spettro d: Fourier.

$$\cdot \Im[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2} \Im[e^{+j2\pi f_0 t}] + \frac{1}{2} \Im[e^{-j2\pi f_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2} \delta(f-f_0) + \frac{1}{2} \delta(f+f_0)$$

$$\cdot \Im[\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2j} \Im[e^{+j2\pi f_0 t}] - \frac{1}{2j} \Im[e^{-j2\pi f_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2j} \delta(f-f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f+f_0)$$

voleva poss:omo appl:cone

l': dualit\`a d: Euler
 $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

Aggiorniamo la tabella delle trasformate

:	:
$\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$	$\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f-f_0) + \frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$	$\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}\varphi} \delta(f-f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}\varphi} \delta(f+f_0)$ → da rivedere e...
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$

P.G1 , parag. 3.6

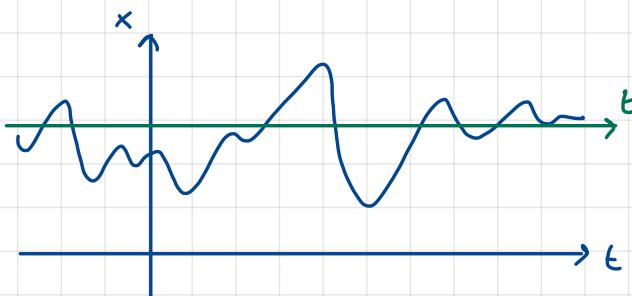
$$\mathcal{A}_x = \bar{X}(0) \quad (= X(f) \Big|_{f=0})$$

$$\mathcal{A}_X = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(f) e^{+j2\pi f t} df \Big|_{t=0} = x_0$$

$x(t)$

$$\mathcal{A}_x = \bar{X}(0)$$

$$\mathcal{A}_X = x_0$$



$$\langle x(t) \rangle = \bar{x}$$

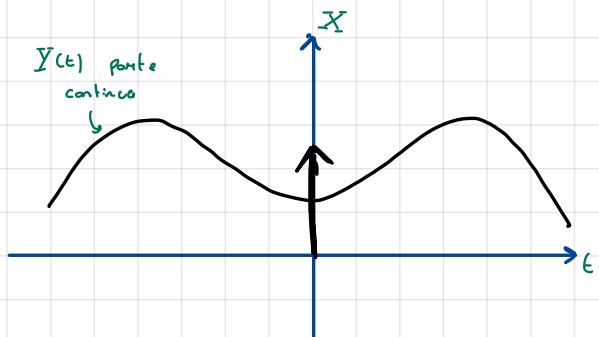
↑
valore medio
temporale, che sarà
non nullo

$$y(t) = x(t) - \bar{x} \quad \text{if } \bar{x} \neq 0 \text{ and } \int |x(t)| dt = +\infty$$

$$x(t) = y(t) + \bar{x}$$

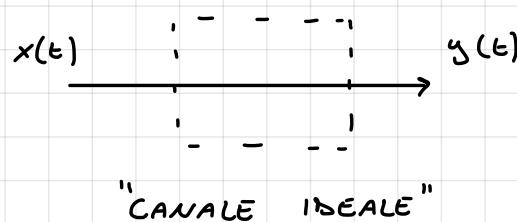


$$X(f) = Y(f) + \bar{x} \delta(f)$$



Su $\delta(f)$ sull'origine nella frequenza
indica un valore medio temporale che
non è nullo.

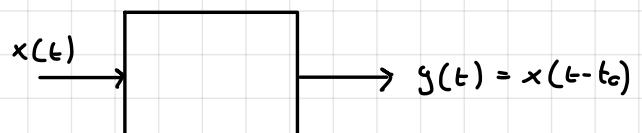
ES: 80



$$h_{id}(t) = \delta(t)$$

$\uparrow \Im$

$$H_{id}(f) = 1$$



"ELEMENTO DI RITARDO"

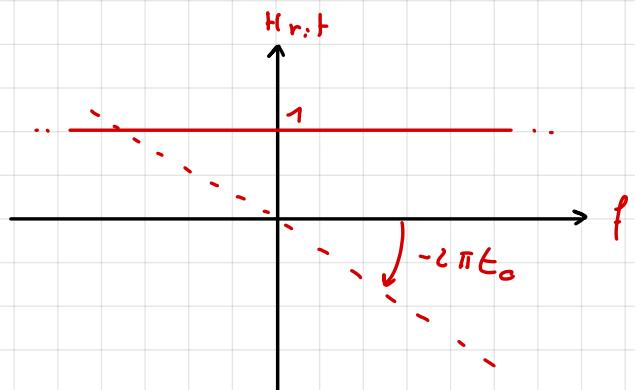
$$h_{rx}(t) = \delta(t - t_0)$$

$\uparrow \Im$

$$H_{r,t}(t) = e^{-j2\pi f t_0}$$

\uparrow
T. transiz. temporale

$A_{rit}(f)$
 $\varphi_{rit}(f)$



es: 81

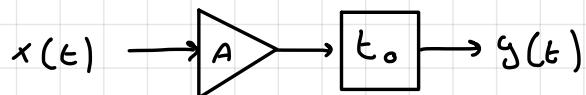
$$y(t) = A x(t - t_0)$$

"CANALE PERFETTO"

omogeneit.
+
traslaz. t.

$$\bar{Y}(f) = A \bar{X}(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$H_{perf}(f) = A e^{-j2\pi f t_0}$$

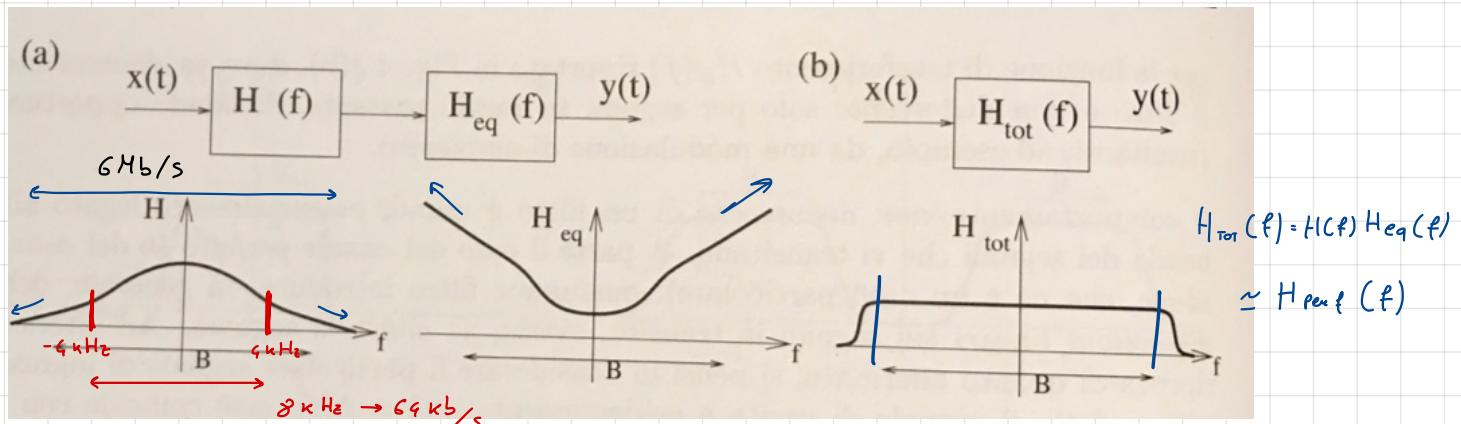


→ Figura 4.3 p. 94

→ P. 96

Distorsion: Lineare: d: Ampiezza $A_H(f) \neq A$

Distorsion: Lineare: d: Fase $\varphi_H(f) \neq (-2\pi\kappa t_0) f$



equal: 22.04

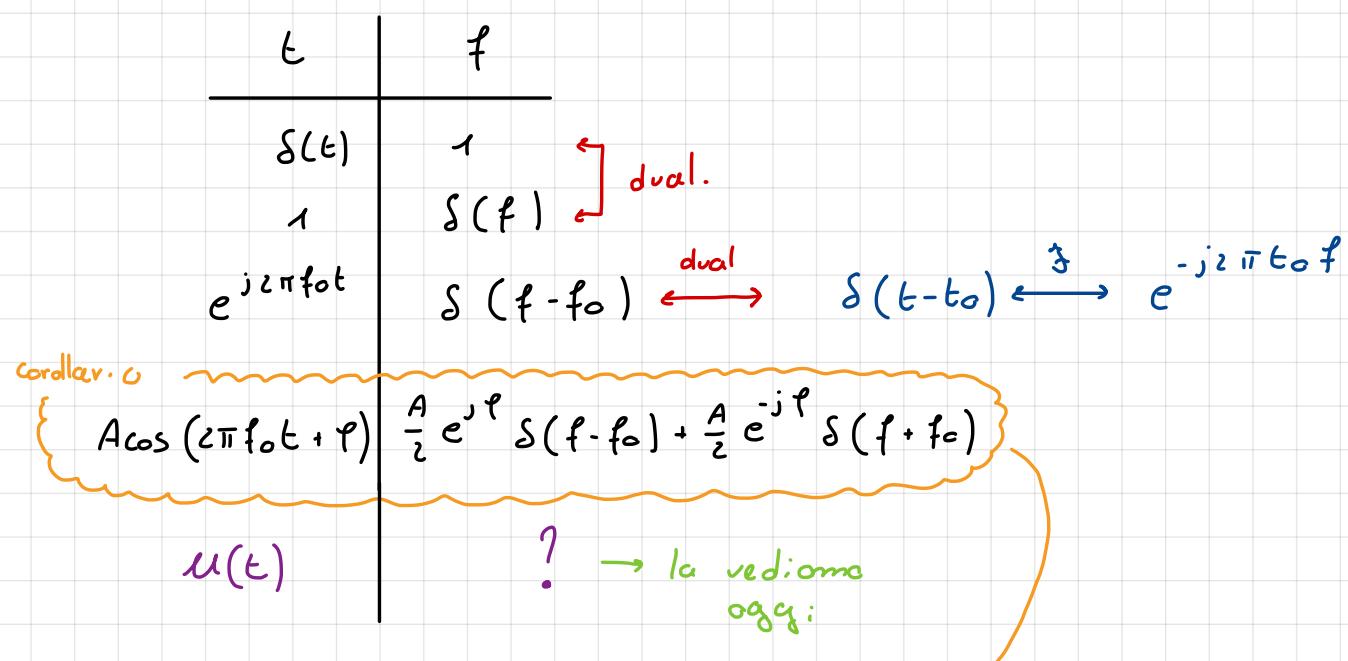
$$H_{eq}(f) = \begin{cases} \frac{H_{perf}(f)}{H(f)} & \text{per } |f| \leq B \\ \text{don't care} & \text{per } |f| > B \end{cases}$$

$$A_{eq}(f) = \frac{A}{A_H(f)}$$

$$\varphi_{eq}(f) = -2\pi t_0 f - \varphi_H(f)$$

2 / 11 / 2020

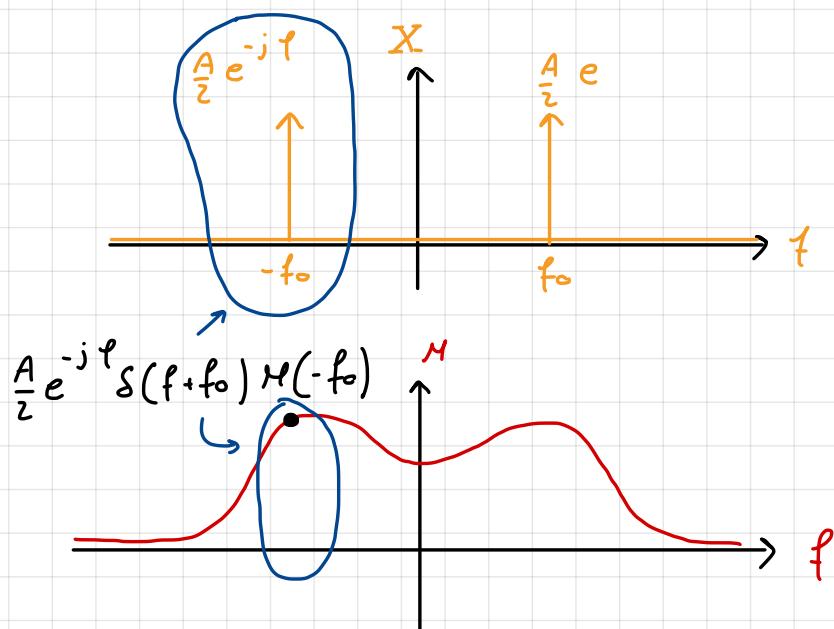
Aggiorniamo la tabella delle trasformate generalizzate.



Scenari: Noti...

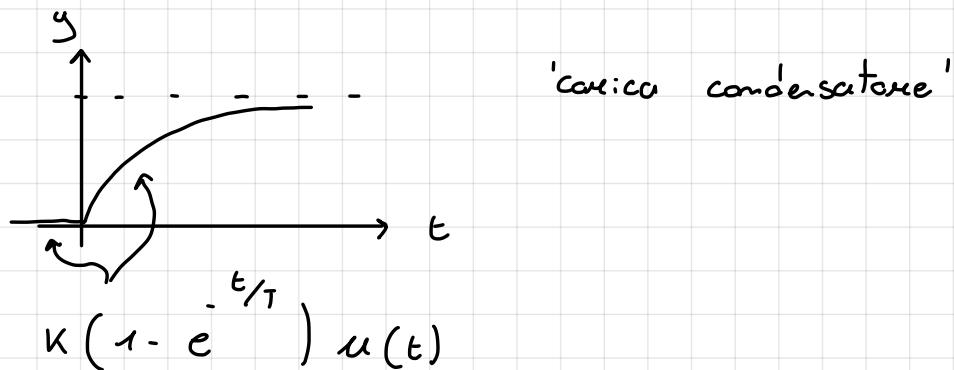
1) $x(t) \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow Y(f) = X(f) \cdot M(f)$

2) $m(t) \rightarrow \circlearrowleft x \rightarrow Y(f) = X(f) * M(f)$



ES: 87)

$$x(t) = T \left(\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t) \right) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t)$$



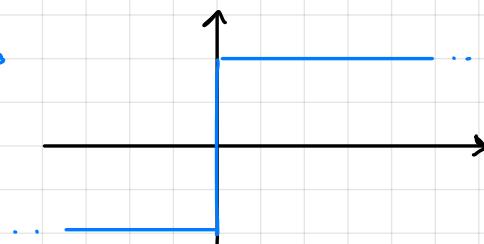
l'esercizio chiede lo spettro $\bar{Y}(f)$

Sfruttiamo il teorema d'integrazione

TRASFORMATURA DI $U(t)$



Lo modifichiamo



D: questo segnale sappiamo che ..

$$A_u = \infty$$

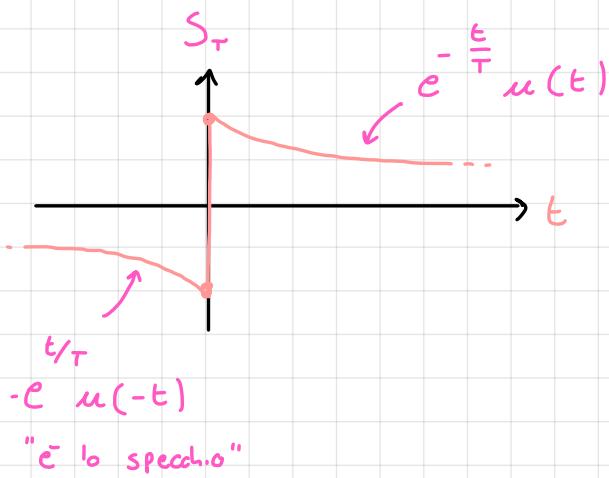
$$\langle u(t) \rangle \stackrel{def}{=} \bar{u} = \frac{1}{2} \Rightarrow U(f) = \dots \frac{1}{2} \delta(f)$$

Dopo la modifica ..

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

Vogliamo trasformare $\text{sgn}(t)$ "segno"

Usiamo una struttura genetica matematica



$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_T(t) = \text{sgn}(t)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_T(f) = \text{sgn}(f)$$

$$\begin{aligned} S_T(f) &= \frac{T}{1 + j 2\pi f T} - \frac{T}{1 - j 2\pi f T} \\ &= T \left(\frac{1}{1 + j 2\pi f T} - \frac{1}{1 - j 2\pi f T} \right) = T \frac{(1-j..) - (1+j..)}{1 - (j 2\pi f T)^2} \\ &= T \frac{-j 2\pi f \cdot 2}{1 + (2\pi f T)^2} \xrightarrow[\substack{\lim \\ T \rightarrow +\infty}]{\quad} \frac{-2j 2\pi f}{(2\pi f)^2} = \frac{1}{j\pi f} \end{aligned}$$

$$= T \frac{-j 2\pi f \cdot 2}{1 + (2\pi f T)^2} \xrightarrow[\substack{\lim \\ T \rightarrow +\infty}]{\quad} \frac{-2j 2\pi f}{(2\pi f)^2} = \frac{1}{j\pi f}$$

Allora trovando indietro aggiungono

$$\langle u(t) \rangle \triangleq \bar{u} = \frac{1}{2} \Rightarrow U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} S(f)$$

$$U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} S(f)$$

$$X(f) \xrightarrow{\boxed{S}} Y(f) = \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) S(f)$$

$u(t)$
 $U(f)$

Teorema d: Integrazione (per segnali con A_x qualunque)

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \underbrace{\frac{1}{2} A_x S(f)}$$

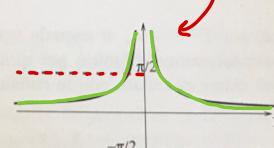
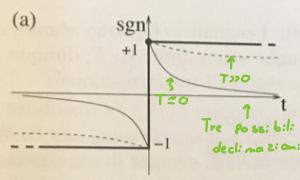
$$\frac{1}{-j} = +j = e^{+j\frac{\pi}{2}}; \quad \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$A_{sgn}(f) = \frac{1}{\pi |f|}$$

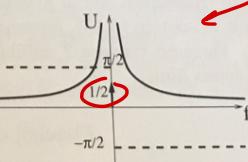
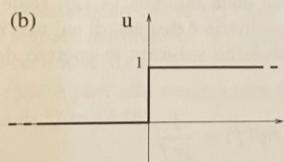
$$\varphi_{sgn}(f) = \pm \frac{\pi}{2}$$

Cap.4 Trasformate generalizzate: lo spettro dei segnali...

99



$$U(f) = \frac{1}{2} sgn(f) + \frac{1}{2} S(f)$$



Per il treno d'impulsi di Dirac ved: p. 102.

$$c(t) = \sum_m \delta(t - mT)$$

TRENO D'IMPULSI

Si segnale può essere anche chiamato "pettine di Delta"

$$[c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} c(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta(f - \frac{n}{T})$$

Abbiamo tutti gli ingredienti per il calcolo di:

$$G(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f n t} \xleftrightarrow{\text{linearietà / traslaz.}} [c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)]$$

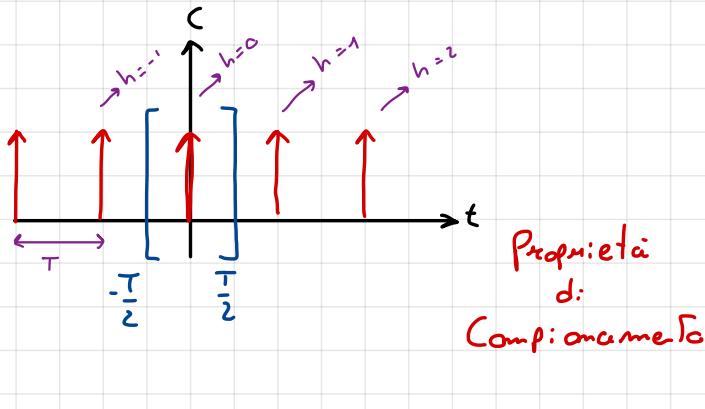
Segnale reale e pari → Spettro Reale e Pari:

Serie
di Fourier

Formula
di Poisson

$$c(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta(f - \frac{n}{T}) \xleftrightarrow[\text{LINEARITÀ}\braket{j2\pi f n t}]{} c(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

$$c(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$



$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} c(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} c(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Ricapitolando:

$$[c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} [C(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta(f - \frac{k}{T})]$$

N.B.: Non è la trasformata termine a termine

Es: 88 bis

$$c(f) \xrightarrow{H(f)} y(f) = c(t) * h(t)$$

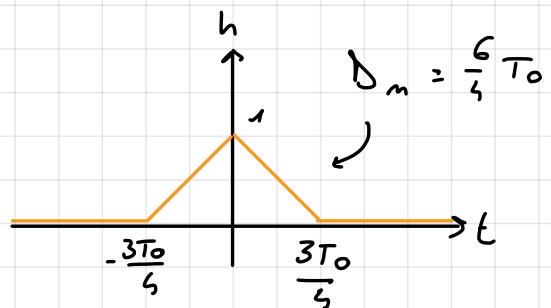
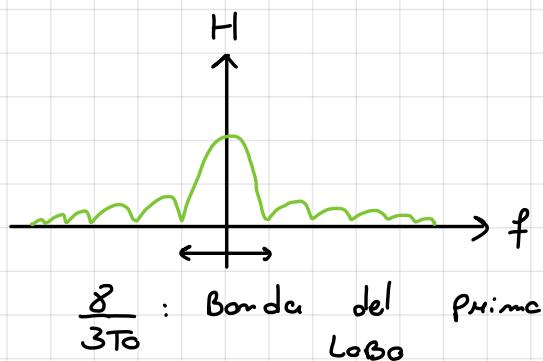
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} [s(t-mT_0) * h(t)]$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} s(t-mT_0) h(t)$$

$$H(f) = \frac{3T_0}{\zeta} \sin^2 \left(\frac{3T_0}{\zeta} f \right)$$

T. d: scalatura

$$h(t) = \frac{3T_0}{\zeta} \frac{1}{(3T_0/\zeta)} \Delta \left(\frac{t}{3T_0/\zeta} \right)$$

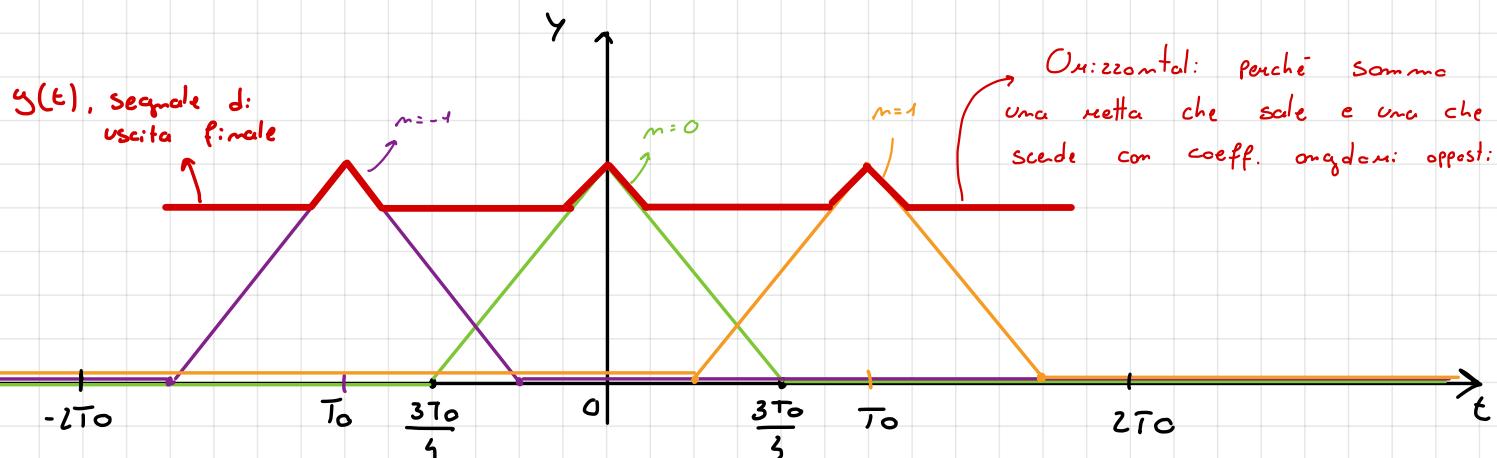


Devo mappare entore y(t): come è:

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(t-mT_0)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Delta \left(\frac{t-mT_0}{3T_0/\zeta} \right) \}$$

Sarà questo il risultato finale



Quello che esce è un segnale periodico con lo stesso periodo d: cioè che entra nel filtro.

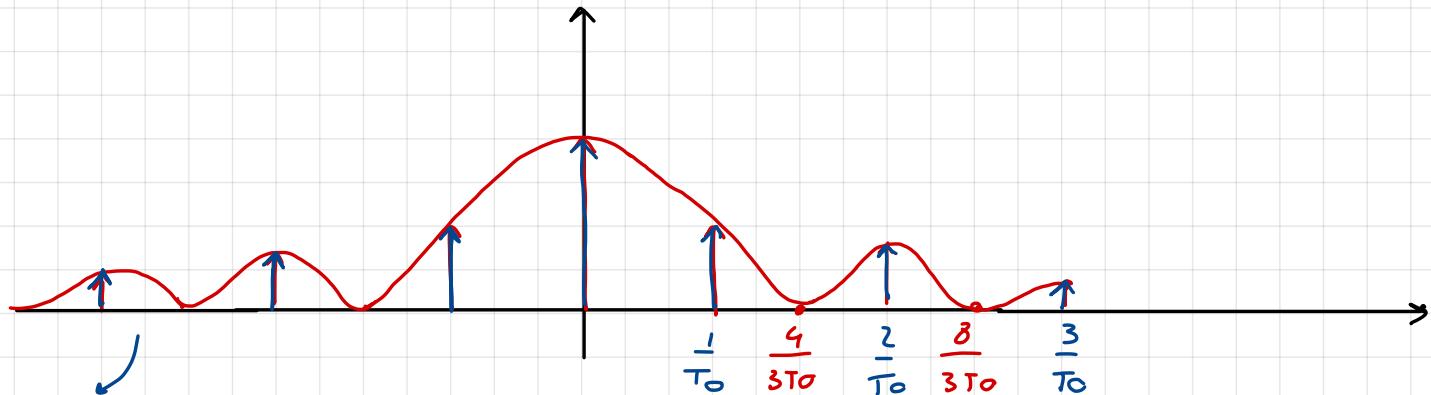
- Saltiamo nel mondo della frequenza:

$$Y(f) = G(f) \cdot H(f)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} k \frac{1}{T_0} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \cdot H(f)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} k \frac{1}{T_0} H\left(\frac{k}{T_0}\right) \underbrace{\delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)}_{\uparrow}$$

POSIZIONE DELLA DELTA, CHE
PRENDIAMO GRAZIE ALLA PROPRIETÀ
d: campionamento



Spettro "DELTI FORME", composto

d: serie d: delta

3/11/20

ES. 88) Treno di Impuli d: Dirac + filtro

$$c(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT) \quad \text{passa in un filtro con}$$

Mis. in f. $H(f) = \frac{T}{2} \sin(\frac{\pi}{2}f)$.

Valutare $h(t)$ e dunque $y(t) = h(t) * c(t)$ e dopodiché calcolare lo spettro $Y(f) = H(f) \cdot C(f)$

SPECTRO di SEGNALI PERIODICI (3[•])

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0(t - mT_0)$$

↓ ↓ ↓
 Segnale periodico "Impulso base" periodo
 $x(t + kT_0) = x(t)$

È dimostrabile che $x(t)$ sia periodica, basta sostituire $t = t + kT_0$, ma l'unica cosa che ci interessa è che sia **trasformabile**.

Dalla lezione di ieri: possiamo dimostrare questa equivalenza

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0(t - mT_0) = C(t) * x_0(t)$$

↑

$$C(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0)$$

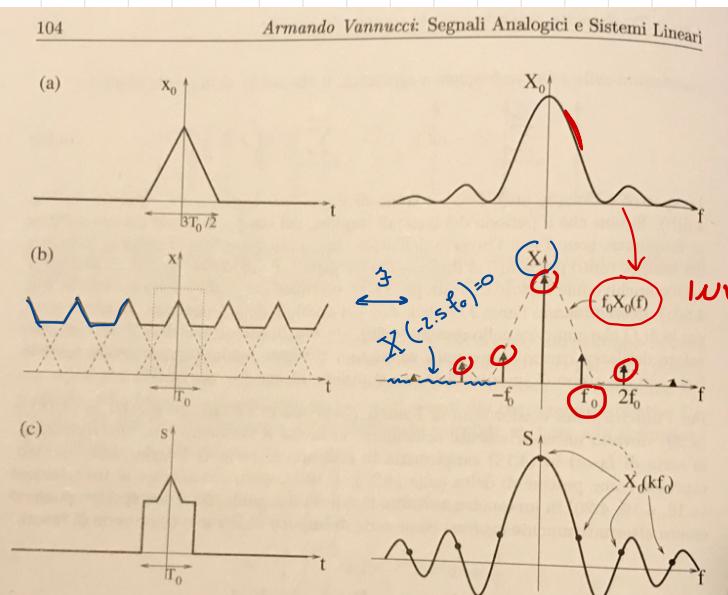
grazie a questa scr. Huxa siamo in condizione di valutare la trasformata d: F

↓
3

$$C(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_0 \delta(f - kf_0)$$

con $f_0 = \frac{1}{T_0}$

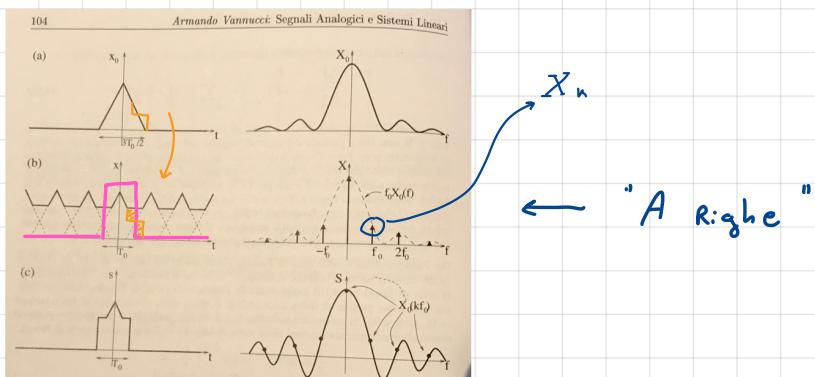
$$X(f) = C(f) \cdot X_0(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_0 X_0(f) \delta(f - kf_0)$$



Questa rappresentazione nel dominio della frequenza è uno spettro a righe. (Lo scopo è di sdoganare il vecchio concetto di spettro a righe)

dimostriamo

Applichiamo la tecnica della finestratura (utilizziamo una parte del segnale di una finestra lunga quanto il periodo)



$$S(t) = x(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} x(t) & \text{per } |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

"Replica base"

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S(t - mT_0) = S(t) * c(t)$$

$$X(f) = S(f) \cdot G(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_0 S(kf_0) S(f - kf_0)$$

Prop. Compionometrica
mon S

Per tornare dall'impulso al segnale periodico, si genera

$$\propto (x_1, x_2, \dots, x_m(t))$$

Se volessi calcolare $\{S(f)\}$

$$\rightarrow S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Ma si comincia con doc. dell'espressione precedente

$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_0 S(kf_0) S(f-kf_0) \right]$$

Prop. Compionometro
non \int

Scriviamo ...

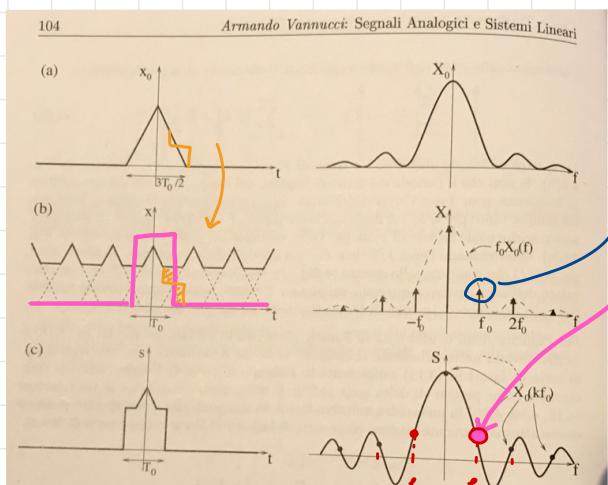
$$f_0 S(kf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi kf_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi kf_0 t} dt = X_k$$

$$f_0 S(kf_0) = X_k = f_0 X_0 (kf_0)$$

(dimostrazione esplicita
sul libro)

MAI PIÙ integrali: per il calcolo dei coeff. di Fourier

Perciò.



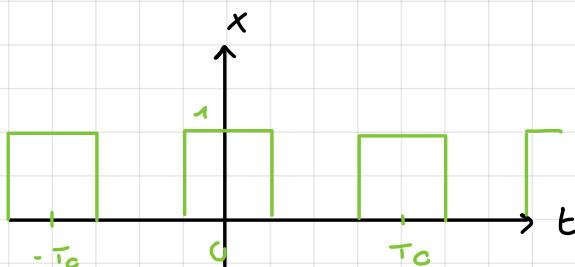
$$= f_0 X_0 (kf_0)$$

$$X_k = f_0 S(kf_0)$$

"A Righe"

Es: 95 parte 1)

Onda quadra con $D.C = 50\%$ (sgn. d. c.)



$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - mT_0}{T_0/2}\right) = C(t) * S(t)$$

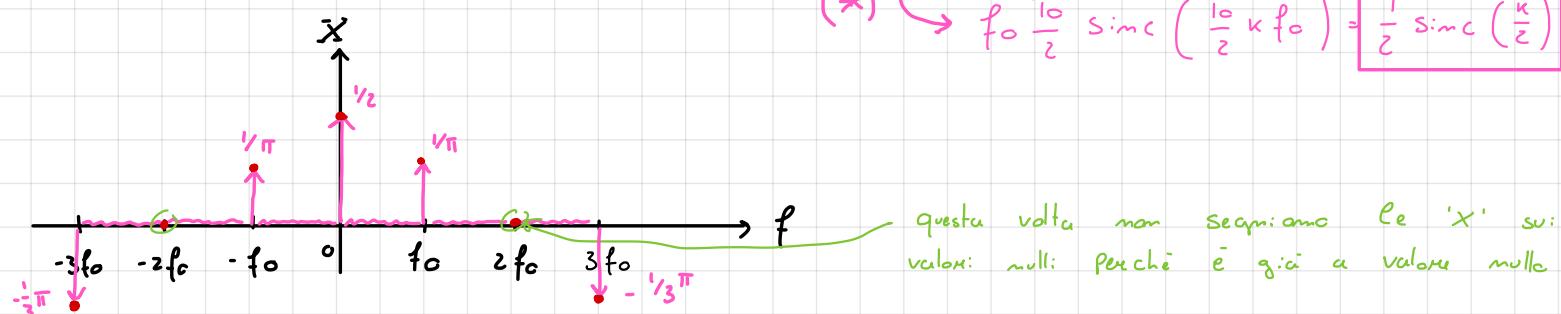
→ Esistenza periodicità (Somma di una + (-mT_0))

$$S(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_0/2}\right) \rightsquigarrow \text{Replica base}$$

Fa la T.d.F.

$$X(t) \longleftrightarrow \tilde{X}(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_0 S(\kappa f_0) \delta(f - \kappa f_0)$$

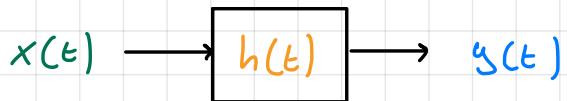
$$(*) \rightarrow f_0 \frac{T_0}{2} \sin\left(\frac{T_0}{2} \kappa f_0\right) = \boxed{\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\kappa}{2}\right)}$$



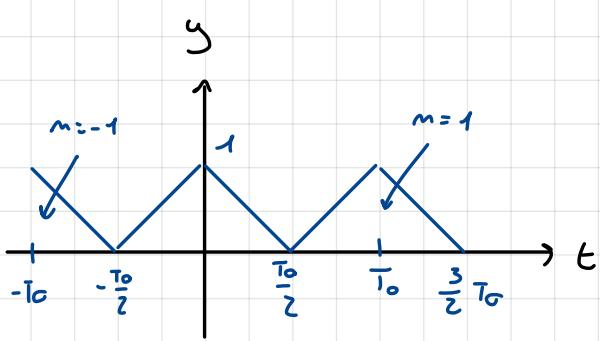
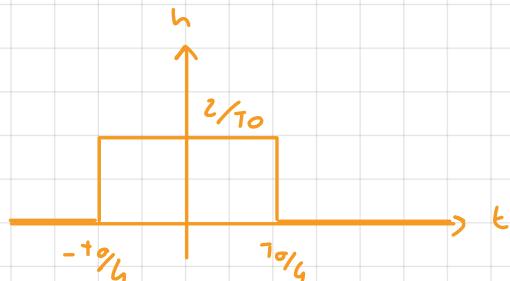
Per calcolare l'area delle Delta calcolo la trasformata della replica base

$$S(t) \longleftrightarrow \tilde{S}(f) = \left| \frac{T_0}{2} \right| \sin\left(\frac{T_0}{2} f\right); \rightarrow (*)$$

.. Continuiamo esercizio



$$h(t) = \frac{2}{T_0} \Pi\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$$



$$\begin{aligned} y_c(t) &= x_o(t) * h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_0/2}\right) * \frac{2}{T_0} \Pi\left(\frac{t}{T_0/2}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{t}{T_0/2}\right) \end{aligned}$$

↓
durezza T
nel trionfo
di dividere x2

$$Y_o(f) = X_o(f) \cdot H(f)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\left| \frac{T_0}{2} \right| \sin \left(\frac{T_0}{2} f \right) \right]^2 \cdot \frac{2}{T_0} \\ &= \frac{T_0}{2} \sin^2 \left(\frac{T_0}{2} f \right) \end{aligned}$$

Filtraggio di segnali periodici (3)

$$x(t) = c(t) * x_o(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = c(t) * (x_o(t) * h(t))$$

$$y_o(t) = x_o(t) * h(t)$$

↑
3

$$\bar{Y}_o(f) = X_o(f) \cdot H(f)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_o(t - mT_0)$$

↑
3

$$\begin{aligned} \bar{Y}(f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_o \underbrace{Y_o(kf_0)}_{Y_k} \delta(f - kf_0) \\ Y_k &= \underbrace{f_0 \bar{Y}(kf_0)}_{X_k} \cdot H(kf_0) \end{aligned}$$

$$= X_k \cdot H(kf_0)$$

Guardiamo ad un altro aspetto dei segnali periodici: la potenza che sono segnali di potenza.

TEOREMA DI PARSEVAL

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} k |\bar{X}_k|^2$$

(no "dopp: prodotti" = G
 ORTOGONALITÀ DEI
 FASORI ARMONICI)

$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k \bar{X}_k e^{+j2\pi k f_0 t}$

$|x(t)|^2 = \dots |\bar{X}_k e^{+j2\pi k f_0 t}|^2 \dots = \dots |\bar{X}_k|^2$

Regle: gh

$$Ex = \int |\bar{X}(f)|^2 df$$

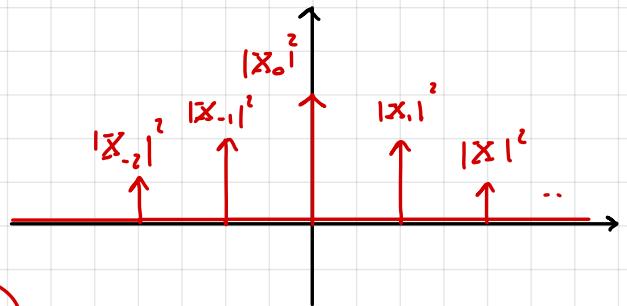
6/11/20

$$P_X(f) = \Im [P_X(t)]$$

"Per un segnale periodico, la densità spettrale di potenza è la $\Im[\cdot]$ della sua autocorrelazione"

TEOREMA DI WIENER & KINTCHINE

↳ densità spettrale di potenza



$$P_X(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

Teo. PARSEVAL

$$\text{Potenza media massim. } P_X \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(f) df \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

FUNZIONI DI AUTOCORRRELAZIONE

→ Segnali d' Energia

$$E_X(f) = |X(f)|^2$$

$$\Updownarrow$$

Wiener & Kintchine I

$$e_X(t) = \int x(\tau) x^*(t + \tau) d\tau$$

→ Segnali Periodici:

$$P_X \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(f) df \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$P_X(t) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) x^*(t + \tau) d\tau$$

Wiener & Kintchine II

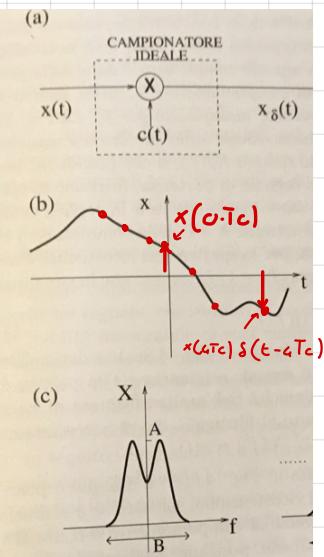
(P. 113)

IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

$$x_s(t) = x(t) \cdot c(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_c) \delta(t - mT_c)$$

$$c(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_c)$$

questo delta compiona
il segnale x

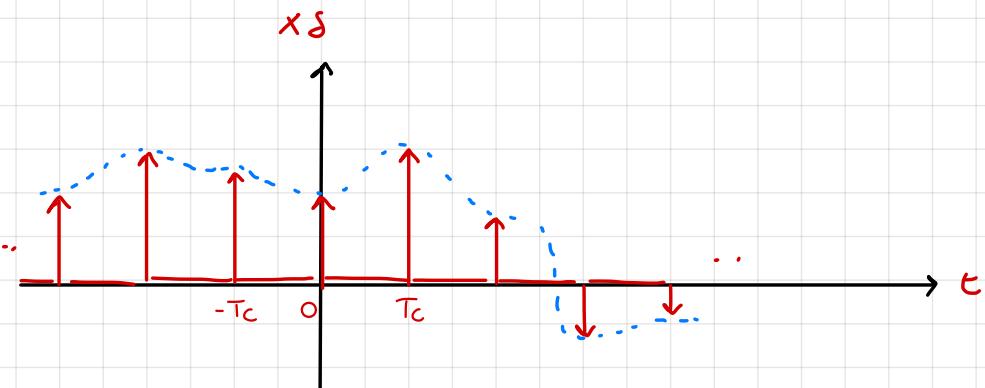


T_c : "Intervallo di campionamento"

mT_c : "Istanti di campionamento"

$x(mT_c)$: "Campioni"

$$f_c = \frac{1}{T_c}$$



Stiamo rendendo numerabile
un segnale

↓
Campionamento = digitalizzare

↓
Se un segnale è numerabile
possiamo memorizzarlo e
elaborarne informazioni come

↓
MOLTO UTILE

Stiamo entrando nel mondo DIGITALE

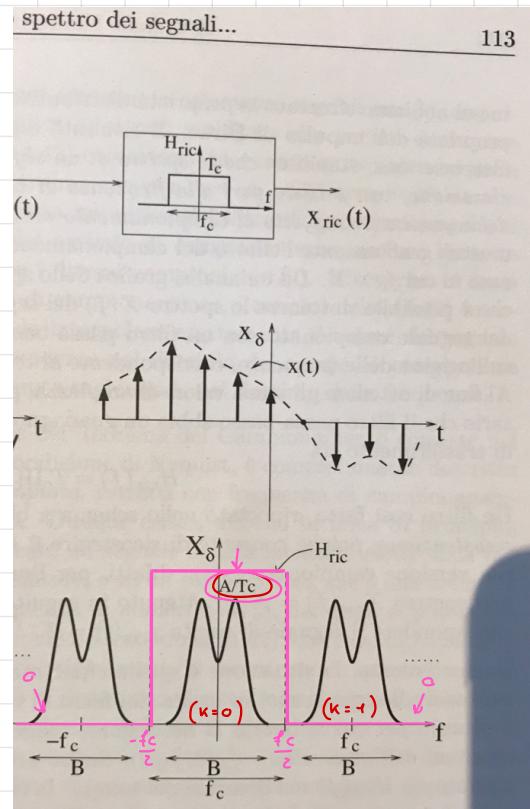
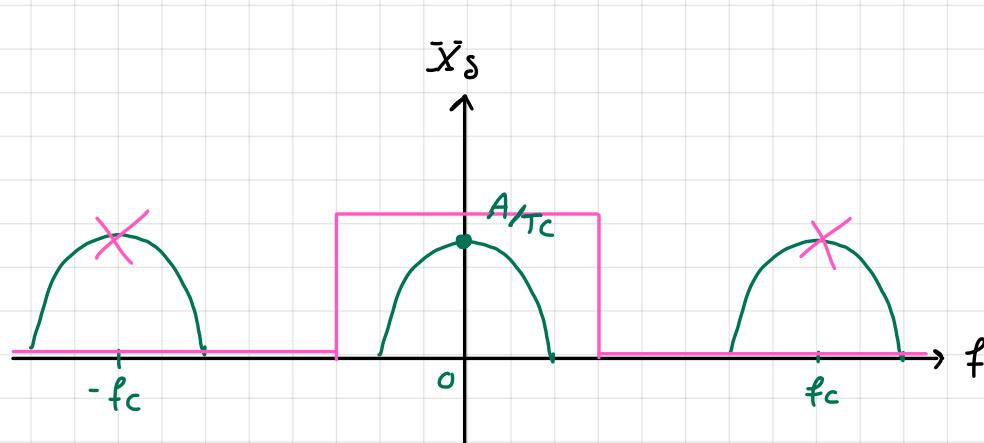
Calcoliamo la trasformata d: $X_s(t)$..

$$x_s(t) = x(t) \cdot c(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n(mT_c) \delta(t - mT_c)$$

$$\downarrow y_s$$

$$X_s(f) = X(f) * C(f) = X(f) * f_c \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} f_c X(f) * \delta(f - kf_c) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_c X(f - kf_c)$$

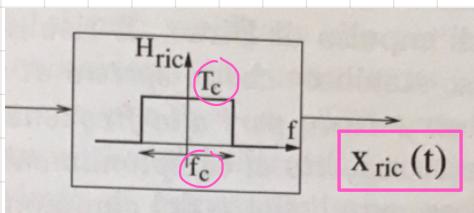


Notiamo che c'è un effetto di clonazione, allora lo spettro è periodico.
Questo spettro è replicato con cadenza regolare infinite volte.

→ Il campionamento ha creato indistintamente infinite repliche di componente spettrale in frequenza, ci sono componenti ormoni che non desideriamo

→ Ci serve un filtro che lasci passare (□).

Useremo un filtro passa basso ideale



$$H(f) = T_c \prod \left(\frac{f}{f_c} \right)$$

FILTO DI RICOSTRUZIONE

Il filtro di ricostruzione deve salvare lo spettro in $k=0$ con banda bilatera B tua $-\frac{f_c}{2}$ e $+\frac{f_c}{2}$, e d: periodo T_c

Allora a vedere cosa succede nel dominio del tempo per il FILTRO DI RICOSTRUZIONE



$$\mathcal{F}^{-1}[h(f)] = h_{ric}(t) = \text{Sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$$

↑
T. della
Scalatura

Teorema del CAMPIONAMENTO

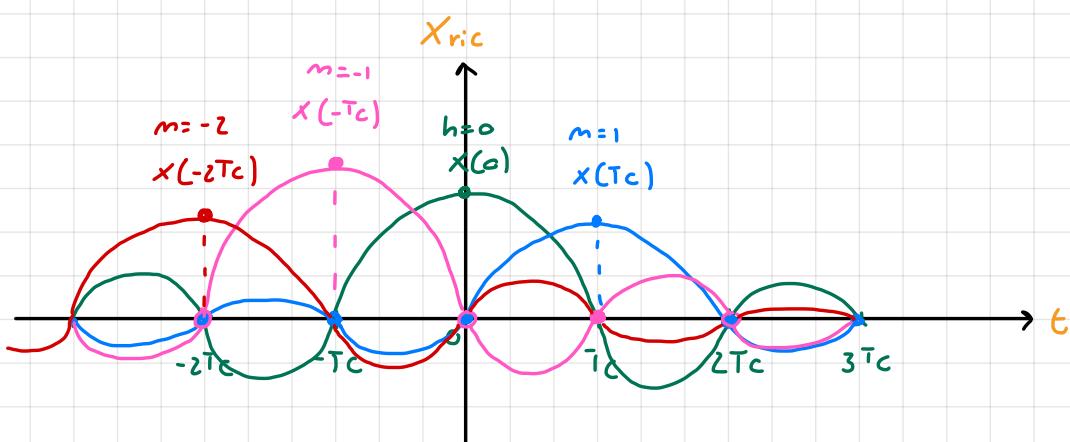
$$x_{ric}(t) = h_{ric}(t) * x_s(t) = \text{Sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_c) \delta(t - mT_c) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_c) \text{Sinc}\left(\frac{t - mT_c}{T_c}\right)$$

↳ Shannon, 1949

S: può anche chiamare "Formula di interpolazione cordinale"

Proviamo a scrivere graficamente $x_{ric}(t)$



È INCREDIBILE come questo funziona: per isolare ogni possibile k segnale, mettendo a 0 tutti gli altri: $t \neq k$ (motore tutte le campionature fatte con colori differenti)

$$x_{ric}(kT_c) = x(kT_c)$$

$$x(t) = X_{ric}(t)$$

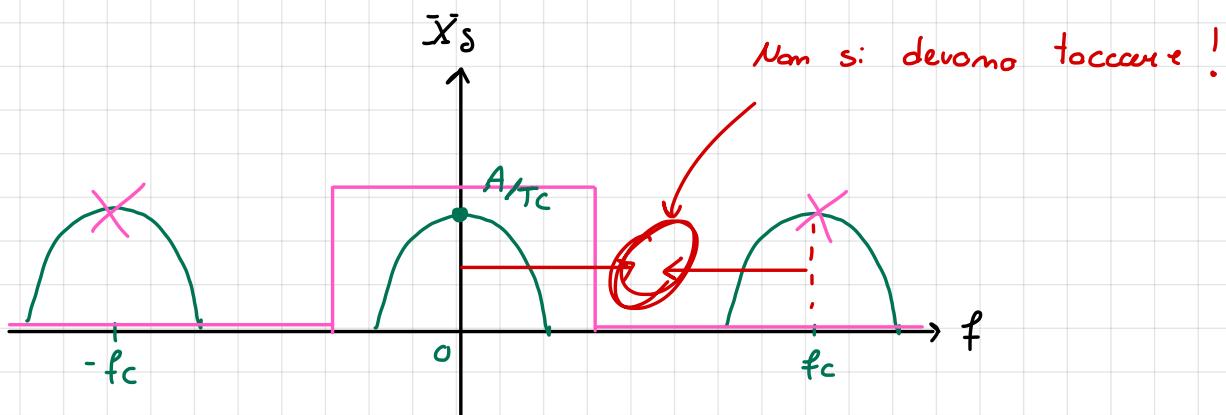
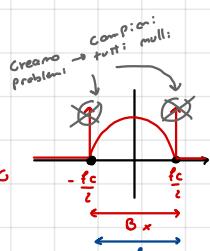
SEMPRE

Condizione di Nyquist: le t. del campionamento (formula di Shannon)

funziona bene, $X_{ric}(t) = x(t)$, soltanto se vale

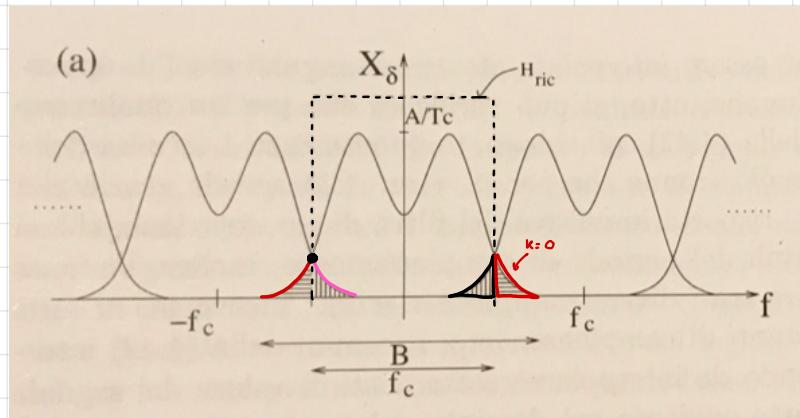
$$f_c \geq B_x$$

→ Vale a patto che non vi siano $\delta(f - \frac{f_c}{2})$ o $\delta(f + \frac{f_c}{2})$ NELLO SPETTRO
 ↳ caso $f_c = B_x$ OK, ma si su $\pm \frac{f_c}{2}$.
 $\delta(f \pm \frac{f_c}{2})$ Aliasing

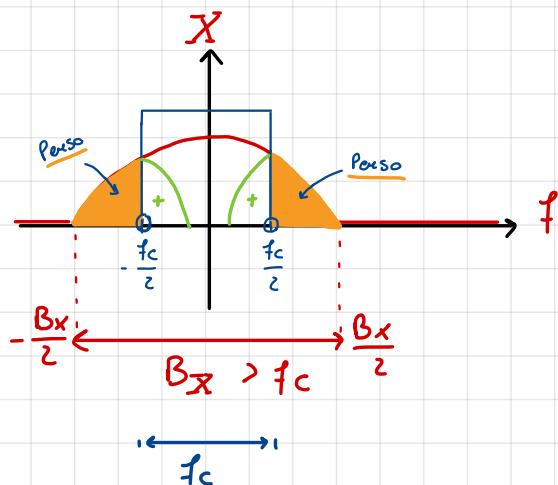


Se viene violata, abbiamo **Aliasing!** Se comincia con $|f| > \frac{f_c}{2}$ vengono replicate (periodicità, $\sum_{k=0}^{+\infty} \dots$) su frequenze che sono $|f| < \frac{f_c}{2}$.

FENOMENO DI ALIASING



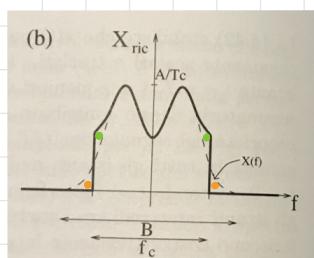
Come evitiamo questo fenomeno?



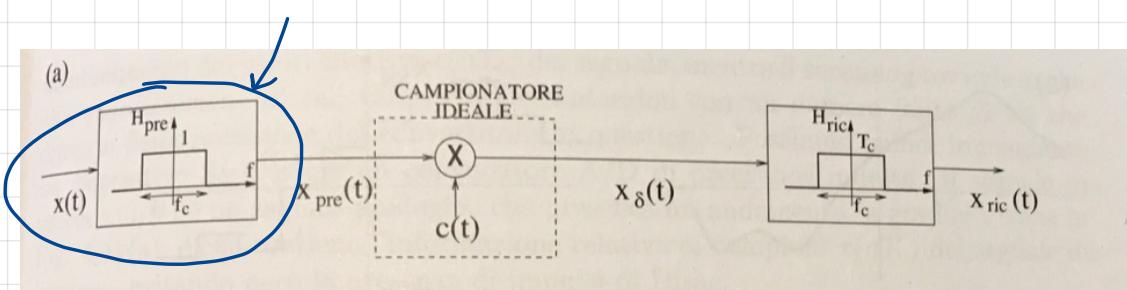
Rumore di Aliasing: radio deejay, slogan
"one nation, one station"

Come facciamo a recuperare la parte persa?

→ Ma: ora abbiamo questo segnale, vogliamo togliere la parte verde e recuperare la parte arancio



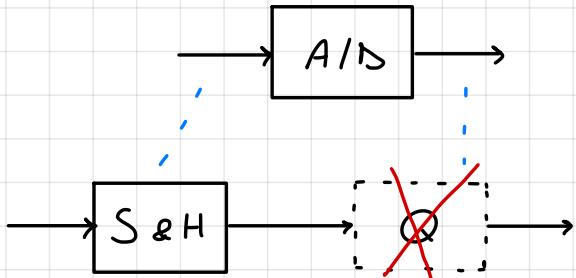
Usiamo un filtro passa basso, detto **filtro pre-aliasing**
da usare **PRIMA** di campionare



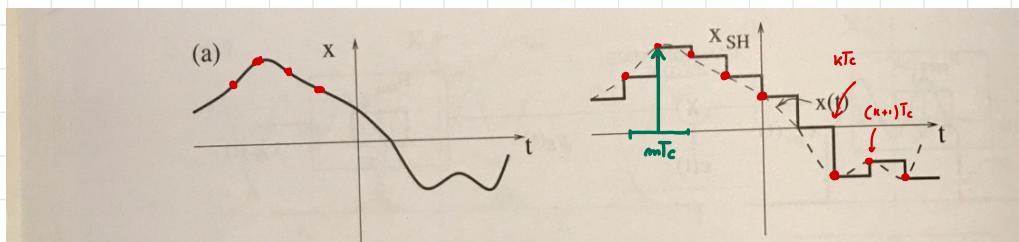
(P.117)

9/11/20

Mentre risultati un campionatore si chiama "convertitore analogico-digitale", esso deve campionare in alte frequenze e col numero maggiore di bit possibile.



Sample & Holol (P. 118)



$$x_{s_4}(t) = \begin{cases} x(kT_c) & \text{per } kT_c \leq t < (k+1)T_c \\ \vdots & \end{cases}$$

Che legame c'è tra $x_S(t)$ e $x_{S^H}(t)$?

→ ricordando che $X_S(t)$ è fatto come le frecce vedi:

$$X_{S_H}(t) = X_S(t) * h(t)$$

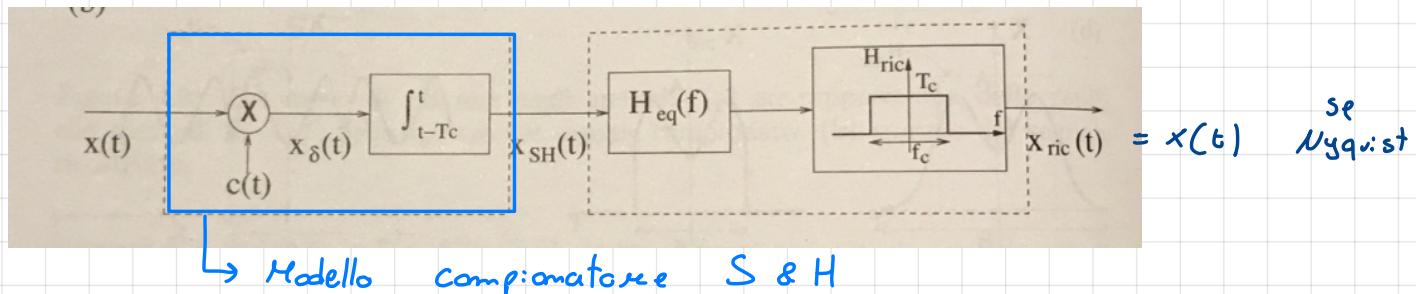
→ non è altro che $X_S(t)$ filtrata da un filtro con risposta quadratica qualsiasi, più in punti colorati un integratore a finestra mobile

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_c) \delta(t-mT_c) * \Pi\left(\frac{t-T_c}{T_c}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \prod \left(\frac{t - \frac{T_c}{2} - nT_c}{T_c} \right)$$

Non c'è altro che una serie di rettangoli che terminano in T_c secondi dopo che dura $T_{c/2}$.

Si mostra modello di S & H è così:

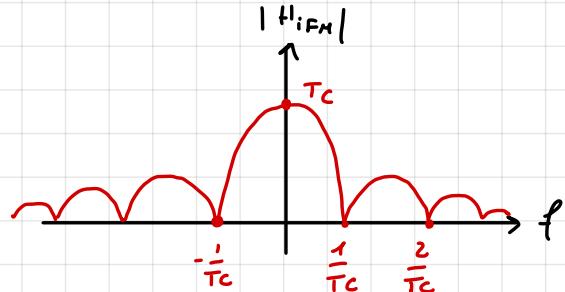


A seguire dobbiamo mettere un modello equivalente del filtre di ricognizione equalizzato. $H_{eq}(f) \cdot H_{IFM}(f) = 1$

No: sappiamo che:

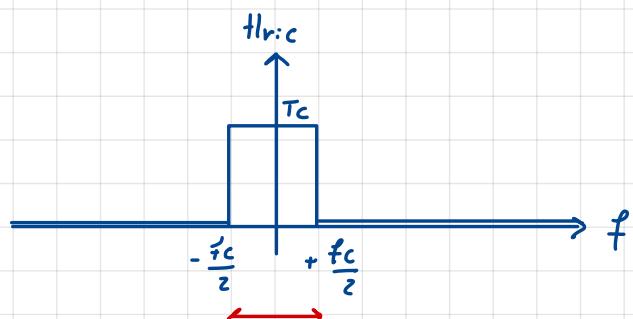
$$h_{IFM}(t) = \Gamma\left(\frac{t - T_{c/2}}{T_c}\right) \xleftrightarrow{f} H_{IFM}(f) = |T_c| \operatorname{sinc}(T_c f) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_c}{2}}$$

↳ integ. finestra mobile



$$H_{IFM}(f) \cdot H_{eq}(f) = 1 \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_c}{2}}$$

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{T_c \operatorname{sinc}(T_c f)} = \dots = 0 \quad \text{per } f = \frac{k}{T_c}, \forall k \text{ intero} \neq 0$$



$$H_{ric}(f) H_{eq}(f) = \frac{H_{ric}(f)}{T_c \operatorname{sinc}(T_c f)}$$

$$= \frac{\frac{1}{T_c} \Gamma\left(\frac{f}{f_c}\right)}{\frac{1}{T_c} \operatorname{sinc}(T_c f)} = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{sinc}(T_c f)} & \text{per } |f| \leq \frac{f_c}{2} \\ 0 & \text{per } |f| > \frac{f_c}{2} \end{cases} \leftarrow \text{banda d: Nyquist}\}$$

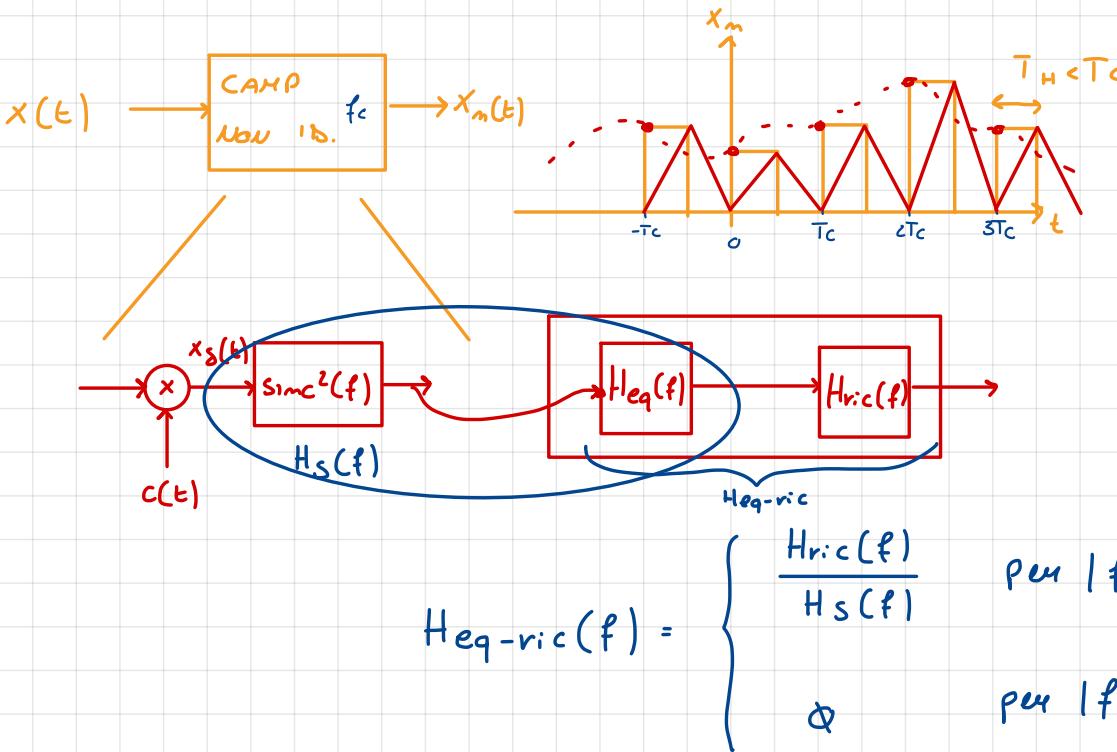
Mell'insieme questi 2 costituiscono un unico filtro:

Filtro equalizzatore

$$H_{eq-ric}(f) = \frac{\prod (f/c)}{Sinc(T_c f)} = \begin{cases} \frac{1}{Sinc(\pi c f)} & \text{per } |f| \leq \frac{fc}{2} \\ \propto & \text{per } |f| > \frac{fc}{2} \end{cases}$$

Vediamo un sottoinsieme del comp. S&H

CAMPIONAMENTO NON IDEALE

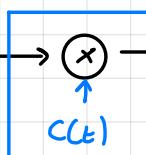


es: gg)

$$f_c = 3B$$

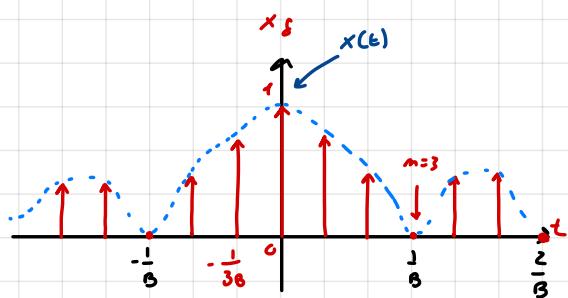
$$T_c = \frac{1}{3B}$$

$$x(t) = \sin c^2(Bt) \rightarrow x_s(t)$$



Comp.
ideale

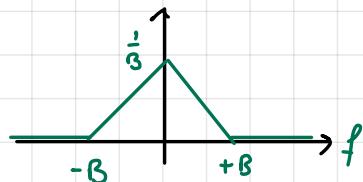
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin c^2(B_n T_c) \delta(t - n T_c)$$



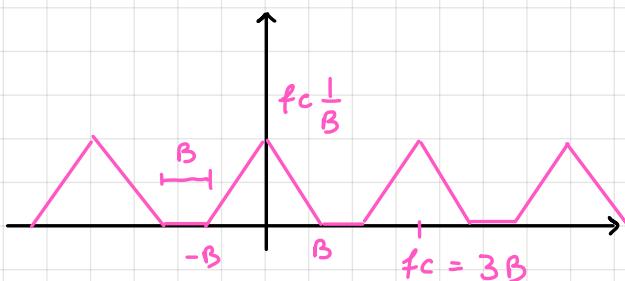
dobbiamo verificare la cond. d: Nyquist

c: occorre la trasformata

$$\mathcal{F}[x_s(t)] = X(f) = \frac{1}{|B|} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \Rightarrow \begin{cases} B = 2B \\ f_c = 3B \end{cases}$$



$$\mathcal{F}[x_s(t)] = X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_c X(f - n f_c)$$



non c' sono sovrapposizioni degl' spettri tra una componente e l'altra



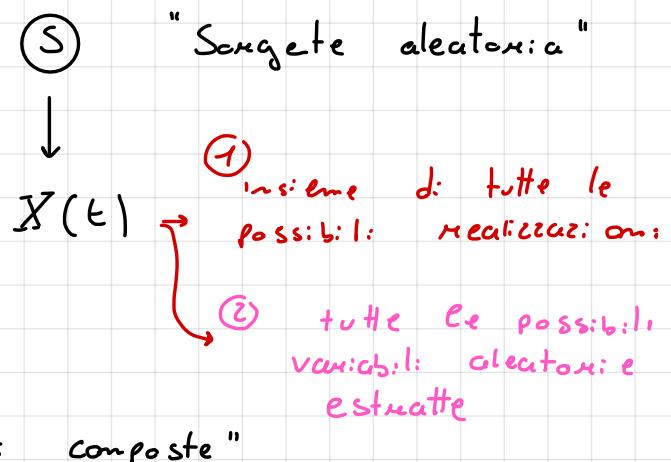
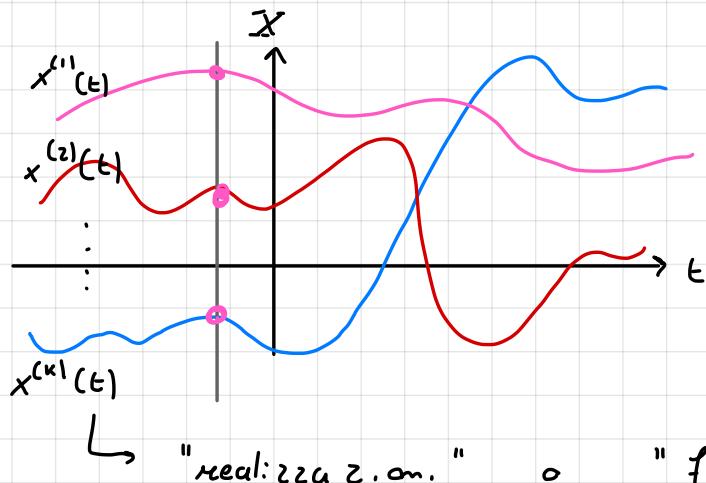
No Aliasing

Quindi: Nyquist sarà sicuramente rispettata

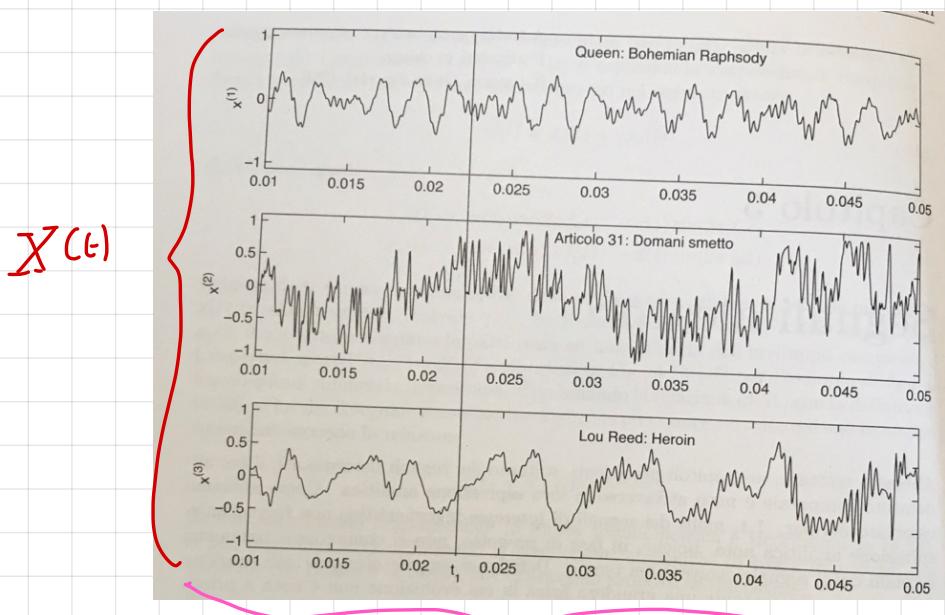
Combiamo augmento.

SEGNALI ALEATORI

È un segnale (grandezza fisica) di cui non abbiamo conoscenze dettagliate (nè espressione, né grafico).



Segnali deterministici:



$x^{(1)}(t_i)$ numero

.

.

.

$X(t_i)$ variabile aleatoria

Dovrò fare:

delle domande

① - Quante e quali sono?

- Con quale probabilità si manifestano?

② - Quante sono? → non numerabile!

- Quali sono? $X(t_m)$

- Con quale probabilità $X(t_n)$ manifesterà le sue "determinazioni"?

Dobbiamo suddividere due definizioni:

(S) Soggetto aleatorio e Fenomeno aleatorio

↓
determinazione variabile
aleatoria

↓
descrizione di un esperimento

↓
Realizzazioni:
(Segnale det.)

↓
Processo stocastico

PROCESSI ad ALEATORIETÀ PARAMETRICA

$$\text{es. } X(t) = \underbrace{A}_{\substack{\uparrow \\ \text{V.A.}}} \cdot \cos \left(2\pi \underbrace{f_0 t}_{\substack{\uparrow \\ \text{V.A.}}} + \underbrace{\phi}_{\substack{\uparrow \\ \text{V.A.}}} \right)$$

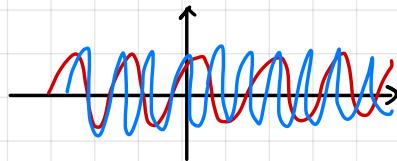
[A, f_0 , ϕ] \Leftarrow (Maiuscola)

Questo è un processo aleatorio che descrive un informa-

d: segnali:

~ . ~ . ~ . ~ .

"Processo Amonico"



$$Y(t) = a \cdot \cos (2\pi f_0 t + \phi)$$

\checkmark ϕ V.A "uniforme" \rightarrow o e $e^{j\phi}$

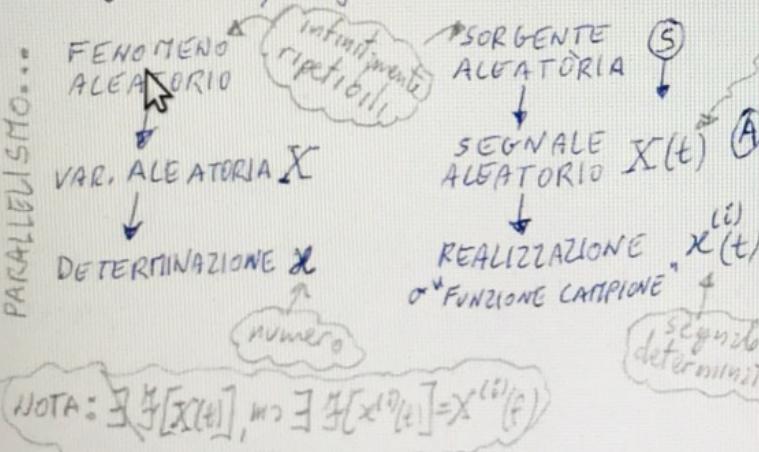
(ad aleatorietà param. ... 1 solo parametro)

10/11/20

SEGNALE ALEATORIO

► Definizione: funzione di t rappresentante una grandezza fisica la cui evoluzione non è nota a priori.
(Se lo è \Rightarrow Segnale Deterministico)

PARALLELISSIMO...



► Operazioni tra Processi: $Z(t) = X(t) + Y(t)$

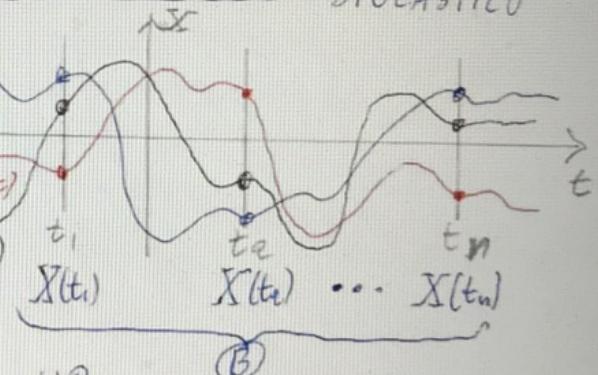
$$z^{(i)}(t) = x^{(i)}(t) + y^{(i)}(t)$$

Uguaglianza tra Processi:
 $X(t) = Y(t)$ se $x^{(k)}(t) = y^{(k)}(t) \dots$ per ogni k nella realizzazione

► Rilevanza:

- Segnali contenenti Informazione (\rightarrow Segnali di disturbo indesiderato (RUMORE))

► Modello Matematico: PROCESSO STOCASTICO



Q: cos'è?

A: L'insieme delle sue realizzazioni

B: L'insieme delle v.a. estratte dal processo

(o non numerabile)

Processi ad Aleatorietà Parametrica

(sono gli unici per cui le realizzazioni sono in CORRISPONDENZA BIUNIVOCÀ con un Vettore Aleatorio)

Esempio: $X(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$

$$[A; f_0; \Phi] \quad (3-D)$$

anche 00-Dim.
... ma numerabile

(23 b/15)

TEORIA DELLA PROBABILITÀ

- ESPERIMENTO ALEATORIO

↳ Lancio Moneta / Dado / Tiro al bersaglio

- USCITE SPERIMENTALI o EVENTI SPERIMENTALI (r_k)

↳ es. Testa / Croce ... / Distanza dal centro

- Appartengono a uno

SPAZIO CAMPIONE (Ω)

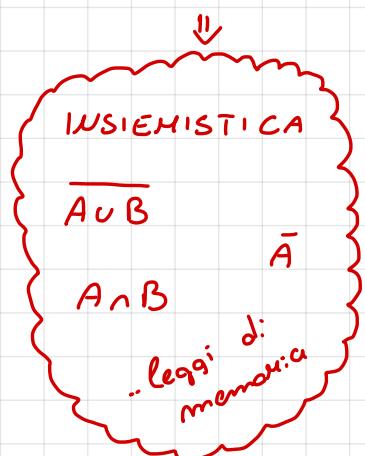
$$\Omega = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

"EVENTI"

$$\{r_i, r_j, \dots\} = E \subseteq \Omega$$

scelte "speciali": $E = \Omega \rightarrow$ evento certo

$E = \emptyset = \{\} \rightarrow$ evento impossibile



Posso eseguire N REPETIZIONI o "PROVE" dell'esperimento

aleatorio: e (lancio del dado tutte le volte che voglio)

.. questo ci permette di costruire un:

- ISTOGRAMMA

$$\frac{m(\mathcal{E})}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P(\mathcal{E})$$

$$1 = P(\emptyset \cup S) = \underbrace{P(\emptyset)}_S + P(S) = 1$$

Von Mises

RAPPORTO DI FREQUENZA

↪ Se faccio tante ipotesi, tendo alla probabilità dell'evento \mathcal{E}

Vediamo la teoria assiomatica di

A. Kolmogorov

$$P(\cdot) : \mathcal{FF} \rightarrow \mathbb{R}$$

classe degli eventi:

\mathcal{FF}

↪ collezione di qualsiasi evento

$$1) P(S) = 1$$

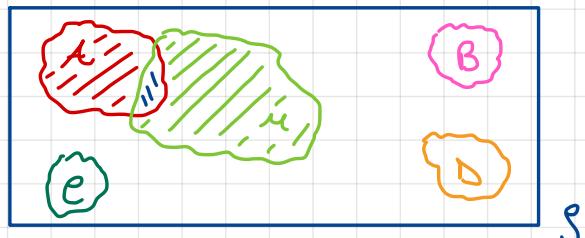
$$2) P(\mathcal{E}) \geq 0 \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{FF}$$

$$3) P(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}_i) = \sum_{i=1}^n P(\mathcal{E}_i) \text{ se } \mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Facciamo un dice grammatica di: Venn per capire meglio

③ $\Rightarrow P(B \cup D) = P(B) + P(D)$

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M)$$



$$P(A \cup M) = P(A \cap \bar{M}) + P(M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M)$$

$$(A \cap M) \cup (A \cap \bar{M}) = A \stackrel{\text{③}}{\Rightarrow} P(A \cap M) + P(A \cap \bar{M}) = P(A)$$

$$(A \cap M) \cup (M \cap \bar{A}) = M \stackrel{\text{③}}{\Rightarrow}$$

$$P(A \cap \bar{M}) = P(A) - P(A \cap M)$$

Notazione breve

$$A \cup B$$

$$\downarrow$$

$$A + B$$

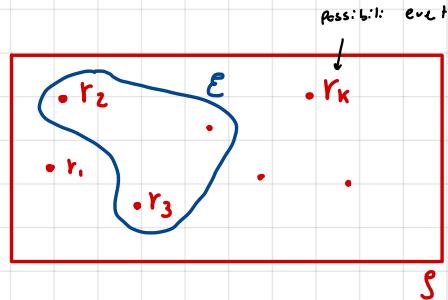
$$A \cap B$$

$$\downarrow$$

$$A \cdot B \quad \sigma \quad AB$$

SPAZI CAMPIONE DISCRETI E UNIFORMI

Uniforme : $P(r_1) = P(r_2) = \dots = P(r_k)$



Se $\mathcal{E} = \{r_i, r_j, \dots, r_e\}$

\Downarrow
K elementi:

$$P(\mathcal{E}) = P(r_i) + P(r_j) + \dots + P(r_e) = K \cdot \frac{1}{n} = \frac{|\mathcal{E}|}{|S|}$$

Cardinalità

$$P(S) = P(r_1) + \dots + P(r_n) = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} P(r_i) = \frac{1}{n} \quad \forall i$$

Spesso per un esercizio basta contare!

Disposizioni:
(senza ripetizioni)

$$D_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

tutti possibili modi di disporre oggetti

Disposizioni = m^n
(con ripetizione)

$$\text{Combinazioni } C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)! n!} = \frac{D_{m,n}}{P_n}$$

Permutazioni: $P_n = n!$

Per un esercizio: ...

0) Spesso basta contare

1) Esistono modi di risolvere:

2) Dipende dalla modellistica del problema

3) Non è metodo standard

4) usare "albero delle scelte" \rightarrow modo di pensare (Cap. 2, p. 20-24)

5) A volte conviene calcolare $P(\bar{\mathcal{E}})$

Es: 110 (Libro Probabilità)

Quesito A110

21/11/15

Un gruppo di N persone fra cui si trovano Marco e Laura viene fatto sedere in una fila di posti contigui assegnando i posti a caso.

Si calcoli la probabilità che Marco e Laura vengano a trovarsi uno vicino all'altra.

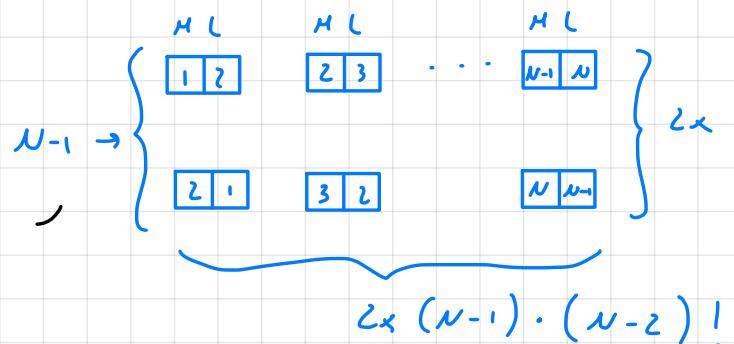
1° modo: Le N persone pescono a caso: primi: N numeri della tombola e poi si sedono.

ad es: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline r_i & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ \hline \text{Sedile} & \underbrace{\hspace{1cm}}_N & \end{array}$ Seq. di primi N numeri:

$$|\mathcal{S}| = N! (= P_N)$$

$$|\mathcal{U}| = 2(N-1) \cdot (N-2)!$$

$$P(U) = \frac{|\mathcal{U}|}{|\mathcal{S}|} = \frac{2(N-1)(N-2)!}{N!} = \frac{2}{N}$$



2° Modello: Solo Marco e Laura, per primi, pescano i loro numeri dal sacchetto (con ①, ②, ..., ⑩)

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} \text{ PT } i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$$

$$|\mathcal{S}| = D_{N,2} = \frac{N!}{(N-2)!}$$

$$|\mathcal{U}| = (N-1) \cdot 2$$

$$P(U) = \frac{|\mathcal{U}|}{|\mathcal{S}|} = \frac{2(N-1)}{N(N-1)} = \frac{2}{N}$$

continua

Personne che compiono gli anni lo stesso giorno

N persone

$$N=1 \quad P(\bar{E}) = \frac{365}{365}$$

$$N=2 \quad P(\bar{E}) = \frac{364}{365}$$

$$N=3 \quad P(\bar{E}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3}$$

$$P(\bar{E}) = \frac{365 \cdot (365-1) \cdots (365-N+1)}{365^N}$$

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

2° modello b:s : Considerando le coppie

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline j & i \\ \hline \end{array} \text{ non-ordinate}$$

$$|\mathcal{U}| = (n-1) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{|c|c|} \hline n-1 & n \\ \hline \end{array}$$

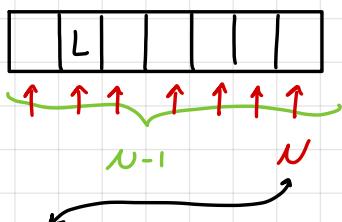
$$|\mathcal{S}| = C_{n,2} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \frac{n!}{(n-2)! 2!}$$

$$P(U) = \frac{|\mathcal{U}|}{|\mathcal{S}|} = \frac{(n-1)}{\frac{n!}{(n-2)! 2!}} = \frac{(n-1) 2}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

spazio uniforme

3° Modello : Tutti tranne Marco si dispongono in fila casualmente

Po: per ultimo, Marco si inserisce casualmente



M

$$|\mathcal{U}| = 2$$

Il spazio campione ha una cardinalità = n
perché manca si inserisce in una posizione
qualsiasi casuale

13/11/20

.. Continuiamo il discorso della probabilità elementare

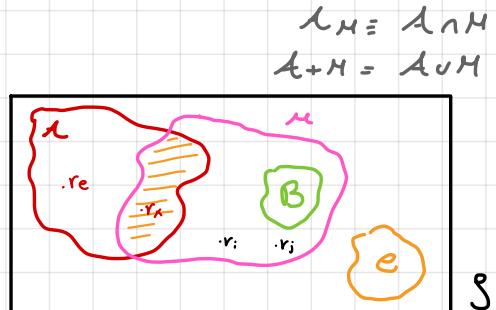
Per affrontare nuove metodologie definiamo:

PROBABILITÀ COMBINATORIE

"So che H , con $P(H) > 0$, si è verificato"



"So che \bar{H} non si è verificato"



Von Mises, RAPPORTI DI FREQUENZA

$$P(A \cap H) \cdots \frac{n_{AH}}{n_H} = \frac{n_{AH}/n}{n_H/n} = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

Prob. "congiunta"
di A e H

"Prob. di A condizionata ad H " o "Prob. di A dato H "

DEFINIZIONE (Teo. Assiomat:ca)

$$P(A|H) \triangleq \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

$$P(e|H) = 0$$

molla per event:
"esterni" a H

$$P(B|H) = \frac{P(B)}{P(H)}$$

event: "interni"
.. comb.a

$$P(A|\bar{H}) = 0 = \frac{P(A \cap \bar{H})}{P(\bar{H})}$$

$$P(D|H) = \frac{P(D)}{P(H)}$$

...
Ma mantenere
il rapporto tra PC
al. eventi interni

$$\underbrace{P(A|H)}_{\substack{\text{Prob. di } A \\ \text{"a-posteriori" }}} \geq \underbrace{P(A)}_{\substack{\text{Prob. di } A \\ \text{"a-priori" }}}$$

$$\frac{P(B|H)}{P(B|H)} = \frac{P(B)}{P(D)}$$

$$P(A|H) \geq P(A)$$

Esempio 3.4 Un'urna contiene 10 palline rosse (R), 15 bianche (B) e 5 nere (N). Si estraggono 3 palline in successione, ogni volta senza rimettere la pallina estratta nell'urna. Si calcoli la probabilità dell' evento $\mathcal{E} = \{\text{prima pallina estratta R, seconda B, terza N}\}$.

Svolgimento: Dato l'urna iniziale con 30 palline, si calcola la probabilità di estrarre una pallina R, una pallina B e una pallina N.

$\mathcal{E} = \{\text{prima estratta } \textcolor{red}{(R)},$

Seconda $\textcolor{green}{(V)}$,

e terza $\textcolor{blue}{(N)}$ }

• • •	• • •	•
• • •	• • •	• • •
• • •	• • •	• • •
• • •	• • •	• • •
•	• • •	•
•	• • •	•
•	• • •	•

10
 (R)

15
 (V)

5
 (N)

ESPERIMENTO: estraggo 3 palline a caso secca nell'esempio

$R_1 = \{\text{prima estratta } \textcolor{red}{(R)}\} : P(R_1) = \frac{10}{30}$

$$\frac{15}{29} \cdot \frac{10}{30} = \frac{15 \cdot 10}{29 \cdot 30}$$

È più FACILE!

$\mathcal{E}_2 = \{\text{ " " " e seconda } \textcolor{green}{(V)}\} = R_1 \cup \mathcal{U}_2$

$\xrightarrow{\text{def}} \mathcal{U}_2 = \{\text{seconda } \textcolor{green}{(V)}\}$

$$P(\mathcal{E}_2) = \overline{P(\mathcal{U}_2 | R_1)} \cdot P(R_1)$$

"

$P(R_1, \mathcal{U}_2)$

$$P(\mathcal{U}_2 | \mathcal{E}_1) \stackrel{!}{=} \frac{P(\mathcal{E}_1, \mathcal{U}_2)}{P(\mathcal{E}_1)} ; \quad P(\mathcal{E}_1 | \mathcal{U}_2, R_1) \stackrel{!}{=} \frac{P(\mathcal{E} \cup \mathcal{U}_2, R_1)}{P(\mathcal{U}_2, R_1)} = \frac{P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{U}_2, R_1)}$$

R_1, \mathcal{U}_2, N_3

$$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E} | \mathcal{U}_2, R_1) \cdot P(\mathcal{U}_2, R_1) =$$

$$= P(\mathcal{E} | \mathcal{U}_2, R_1) \cdot P(\mathcal{U}_2 | R_1) P(R_1) = \frac{5}{28} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{10}{30}$$

Stiamo usando: $P(A|B) = P(A|H) P(H)$

"divide et impera"

3 Consequence importanti: (d: P(·|·))

$$P(E_1 \cdot E_2 \cdots E_N) = P(E_N | \underbrace{E_1 \cdots E_{N-1}}_{\text{"H"})}) \cdot P(E_{N-1} | E_1 \cdots E_{N-2}) \cdots$$

"Regola d: Concatenazione"
("Chain Rule")

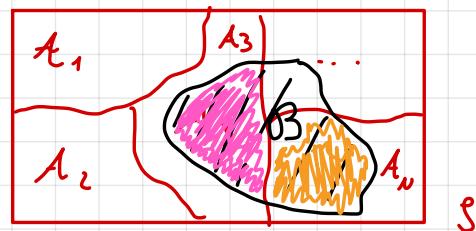
→ EXPERIMENTI
COMPOSTI

$$\cdots \underbrace{P(E_2 | E_1)}_{P(E_2 | E_1)} \cdot P(E_1)$$

② Teo. della probabilità Totale

$$\left. \begin{array}{l} A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \\ \bigcup_i A_i = S \end{array} \right\}$$

Partizione
di:
 S



$$P(B) = \sum_i P(B | A_i) P(A_i) = \sum_i P(B A_i)$$

$$\left. \begin{array}{l} (BA_i) \cap (BA_j) = \emptyset \\ \bigcup_i (BA_i) = B \end{array} \right\}$$

divide
et
impera

Riprendiamo l'esercizio di ieri:

4° Modello: Facciamo estrarre a Marco il suo posto

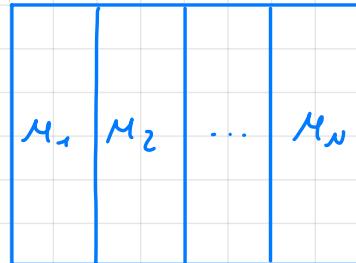
($\{1, 2, \dots, N\}$) e poi a Laura ($\{1, 2, \dots, N\}$)

e infine a tutti gli altri:

→ togliamo il posto estratto da Marco

↳ Ma non sappiamo qual'è

$$P(\cup) = \sum_i P(\cup | M_i) \cdot P(M_i) = \dots$$



Teo. Prob. Totale

$$\left(M_i = \{ \text{Marco ha pescato } i \} \quad i = 1, 2, \dots, N \right)$$

Partizione di tutto lo spazio ambiente (Ω)

$$\begin{aligned} \dots &= \underbrace{P(\cup | M_1)}_{1/N-1} \underbrace{P(M_1)}_{1/N} + \underbrace{P(\cup | M_2)}_{1/N} \underbrace{P(M_2)}_{1/N} + \dots \\ &\dots + \underbrace{P(\cup | M_{N-1})}_{1/N} \underbrace{P(M_{N-1})}_{1/N} + \underbrace{P(\cup | M_N)}_{1/N} \underbrace{P(M_N)}_{1/N} \\ &= \frac{1}{N-1} \cdot \frac{1}{N} \cdot 2 + \frac{2}{N-1} \cdot \frac{1}{N} \cdot (N-2) = \frac{2}{N} \end{aligned}$$

(3)

FORMULA DI BAYES

$$P(A|B) \stackrel{def}{=} \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(B|A) \stackrel{def}{=} \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

1a formula di Bayes

uso: Modelli: causa - effetto

es: A53

Quesito A53

23/11/12

Il sig. Rossi teme di avere una certa malattia, pertanto si sottopone a un test diagnostico che ha le seguenti caratteristiche:

$$P(R' | M) = 10^{-2} \quad (\text{Prob. di falso negativo})$$

$$P(R | M') = 6 \cdot 10^{-2} \quad (\text{Prob. di falso positivo})$$

dove R ed M sono i seguenti eventi:

$$R = \{\text{Il test rivela presenza di malattia}\} \quad (\text{ossia il test è positivo})$$

$$M = \{\text{La malattia è presente}\}.$$

Il test del sig. Rossi risulta positivo, ma il medico curante lo rassicura: "Sì, il test è positivo, ma nonostante ciò lei ha l'80% di probabilità di essere sano".

2a) Si calcoli la probabilità che un individuo scelto a caso fra la popolazione sia affetto dalla malattia (ovvero l'incidenza della malattia sulla popolazione).

[Facoltativo: alla luce del risultato si commenti l'affermazione del medico, apparentemente paradossale.]

2b) Per sicurezza il test viene ripetuto (in modo indipendente) e il risultato è nuovamente positivo. Qual è la probabilità che il sig. Rossi sia effettivamente malato dato il doppio test positivo?

$$R = \{\text{test positivo}\}$$

$$M = \{\text{Malattia c'è}\}$$

$$P(\bar{R}|M) = 0,01 \quad (\text{falso negativo})$$

$$P(R|\bar{M}) = 0,06 \quad (\text{falso positivo})$$

$$P(\bar{M}|R) = 0,80$$

$$P(R|M) = 0,99 = 1 - P(\bar{R}|M) \quad (\text{vero positivo})$$

$$P(\bar{R}|\bar{M}) = 0,94 \quad (\text{vero negativo})$$

$$P(M|R) = 0,20$$

$$P(A) \quad 1 - P(A) = P(\bar{A})$$

$$P(A|M) \quad 1 - P(A|M) = P(\bar{A}|M)$$



domanda 2A) \rightarrow Incidenza malattia sulla popolazione $P(M)$

$$P(M|R) = \frac{P(R|M) P(M)}{P(R)} =$$

non ce l'abbiamo

Teo. Prob. Tot.

$$P(R) = P(R|M) P(M) + P(R|\bar{M}) P(\bar{M})$$

\downarrow

R $\begin{matrix} G \\ \bar{G} \end{matrix}$ \bar{R} $\begin{matrix} Q \\ \bar{Q} \end{matrix}$

$$\left[1 - P(M) \right]$$

$$P(M|R) \cdot [P(R|M) P(M) + P(R|\bar{M}) (1 - P(M))] = P(R|M) P(M);$$

$$P(M) = \frac{P(M|R) \cdot P(R|\bar{M})}{P(R|M) + P(M|R) \cdot P(R|\bar{M}) - P(M|R) \cdot P(R|M)}$$

$0,2$ $0,06$

$0,99$ $0,2$ $0,06$ $0,2$ $0,99$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,06}{0,99 + 0,2 \cdot 0,06 - 0,2 \cdot 0,99} = 0,015 = 1,5\%$$

16/11/20

EVENTI INDEPENDENTI

$$P(A|B) = P(A)$$

"A è indipendente da B"

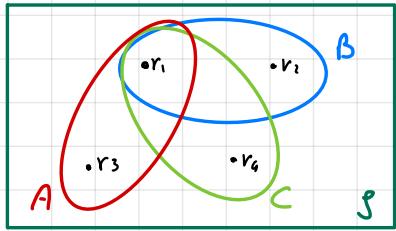
$$P(A|B) \cdot P(B) \stackrel{\Delta}{=} P(AB)$$

quindi: se indipendenti
tra loro

$$P(AB) = P(A)P(B) \longrightarrow P(B|A) \stackrel{\Delta}{=} \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

abbiamo dimostrato
che oltre ad essere
A indip. da B è
anche viceversa

Questa cosa può anche essere valida con più insiemi:



$$P(r_i) = \frac{1}{4} \text{ con } i = 1, 2, 3, 4$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(r_i) = P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

A e B indip.

A e C indip.

questo non ci garantisce che B e C indip. e A, B, C indip.

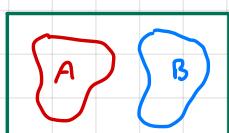
$$P(A)P(B)P(C) \neq P(r_i) = P(ABC) = \frac{1}{4}$$

Più eventi: siamo indipendenti se

$$P(E_1, E_2, \dots, E_m) = P(E_1)P(E_2) \dots P(E_m)$$

↑ prob. congiunta

↑ prob. marginale



S

\rightarrow A e B sono indipendenti?

Essere indipendenti vuol dire che $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, ma qua vede

che l'intersezione $P(AB) = \emptyset$

$P(A|B) \neq P(A)$ (non è detto che due eventi disgiunti siano ind.)

PROVE RIPETUTE

Un evento E si chiama "Successo" a cui associa

$$p = P(E) \quad \text{"Prob. d: successo"}$$

$$q = (1-p) = P(E^c) \quad \text{"Prob. d: insuccesso"}$$

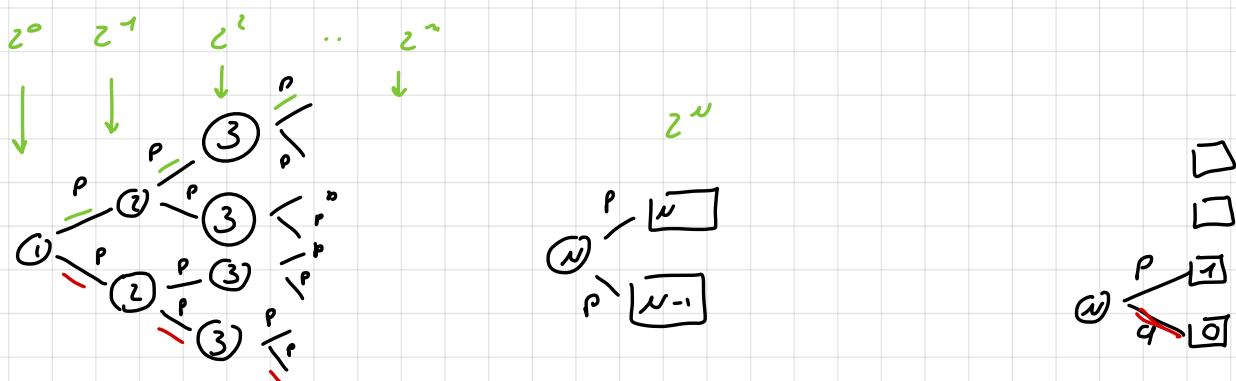
$$P(\{k \text{ successi su } m \text{ prove}\}) = \binom{m}{k} p^k q^{(m-k)}$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, m-1, m)$$

$$p^m \quad mp^{m-1}q \quad p^0$$

le prove sono indipendenti

ALBERO DELLE SCELTE



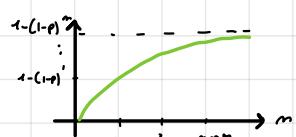
LEGGE DI MURPHY

"Se qualcosa può accadere, prima o poi accadrà"

$$P(\{\text{almeno 1 successo su ripetizione}\})$$

$$= P(\{\text{0 successi su ripetizione}\}) =$$

$$= 1 - (\binom{m}{0} p^0 q^{(m-0)}) = 1 - q^m$$



$$\lim_{m \rightarrow \infty} [1 - (1-p)^m] = 1$$

→ Riprocesso es. 53 della lezione del 13/11/2020

es. A53)

$$P(H) = 1,5\%$$

A53b)

$R_1 = \{ \text{positivo al primo test} \}$

$$P(M|R_1 R_2) =$$

$R_2 = \{ \text{positivo al secondo test} \}$

C MAIN RULE

$$P(R_1 R_2) = P(R_2|R_1) \circ P(R_1) - P(R_2) \circ P(R_1) = P^2(R)$$

test ripetuto su una generica persona ... non la stessa

$$= \frac{P(R_1 R_2 | M) P(M)}{P(R_1 R_2)} = \frac{P(R_2 | R_1) P(R_1) P(M)}{P(R_2 | R_1) P(M) + P(R_2 | \bar{M}) P(\bar{M})} = 0,998$$

Bayes + Teo. prob. TOT.

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A|B) P(B) + P(A|\bar{B}) P(\bar{B})}$$

B e \bar{B} sono "partizioni" di Ω

$$B + \bar{B}; \quad B\bar{B} = \emptyset$$

Test successivi: sulla stessa persona

$$\Rightarrow P(R_1 R_2 | M) = P(R_1 | M) \circ P(R_2 | M) = P^2(R | M) = 0,998^2 = 0,98$$

$$P(R_1 R_2 | \bar{M}) = P(R | \bar{M})^2 = 0,006^2 = 0,0036$$

Variabili Aleatorie

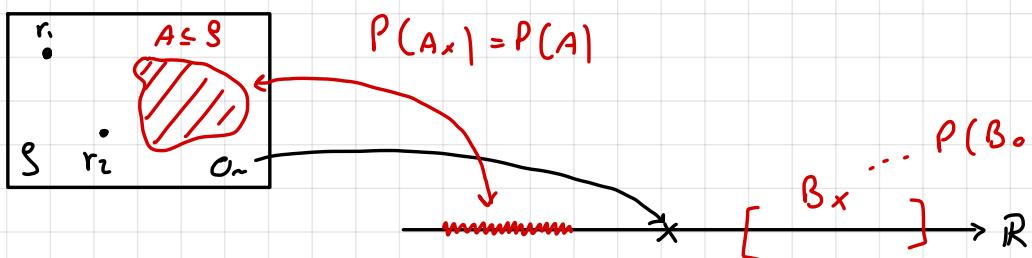
Fisicamente grandezza che misuriamo a "valle" d: un

esperimento aleatorio, che assume un valore $x \in \mathbb{R}$

 determinazione

Matematicamente funzione $X(r) : S \rightarrow \mathbb{R}$ che associa

cogn: uscita sperimentale r , ad un valore $x = X(r_i) \in \mathbb{R}$

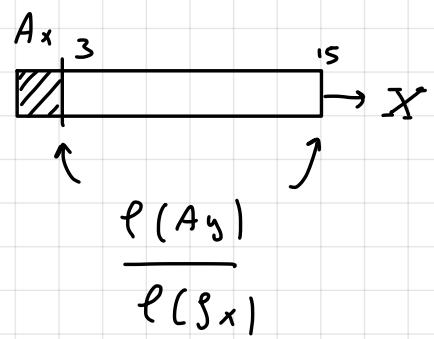


$$\begin{aligned} P(\cdot) &= F \in [0, 1] \\ &\downarrow \\ P(E) &\subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

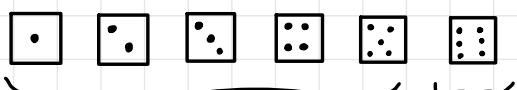
SPAZI CONTINUI (UNIFORMI)

	Uniformi:	Non-Uniformi:
Discritivi:	Contatore (o Somma) $ A $	"Somma pesata"
Continui:	Misure ("somme generalizzate")	"Somma pesata generalizzata" $\int_{\text{mon-cost}}$

$P(A_x) \propto \text{cont}$



Spazio discreto non-uniforme \longrightarrow La prob. che accade più una cosa che un'altra



$$P(r) = \frac{1/2}{S} = \frac{1}{10}$$

$$P(r) = 1/2$$

17/11/20

VARIABILI ALEATORIE : $X(r)$

f_Z d: distribuzione accumulativa (CDF)

$$F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\})$$

osserviamo che:

- F_Y non è mai decrescente

$$- F_X(+\infty) = 1 \text{ e } F_X(-\infty) = 0$$

$$- P(\{x_1 < X \leq x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

è il complementare

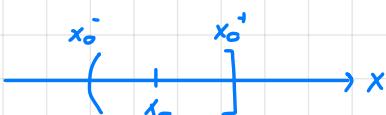
$$\text{d: } F_X(x)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{||||} \\ -\infty \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{||||} \\ +\infty \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{||||} \\ -\infty \end{array} \right) \bar{x}$$

$$- P(\{X = x_0\}) = F_X(x_0^+) - F_X(x_0^-)$$

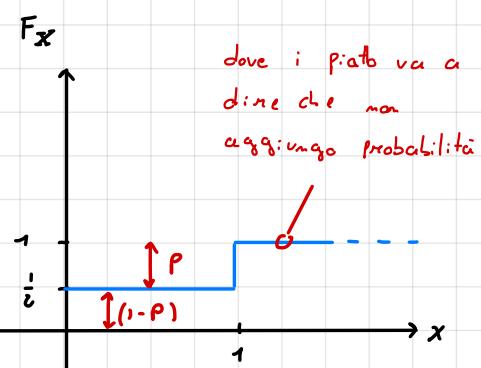


S. tratta d: prendere un intervallo i compreso fino a farlo diventare un intorno di x_0



vale in tutti i punti che precedono lo 0

$$F_X(0) = 0$$



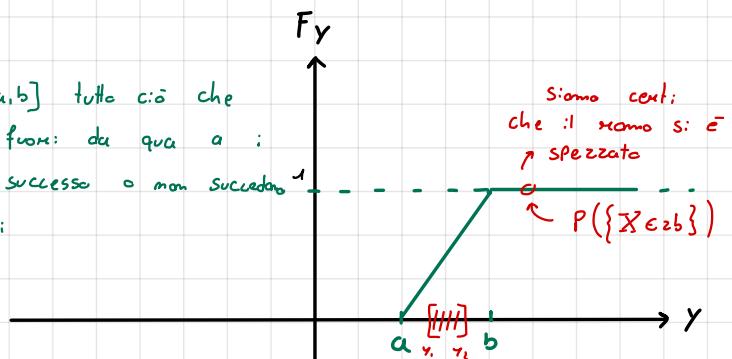
esempio: V.A.

d: Bernoulli: (testa/coda)

$$X \sim B(p)$$

↑
distribuite
come...

$\mathcal{E}_Y = [a, b]$ tutto ciò che sta fuori: da qua a:
già successo o non succederà
ma:



altro ES.: V.A. uniforme

$$Y \sim U([a, b])$$

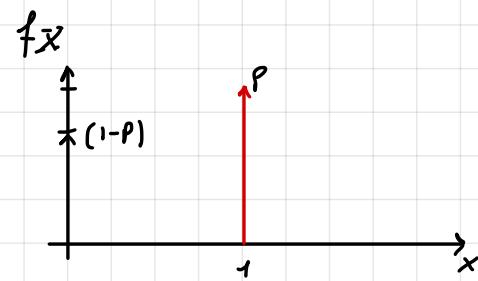
MEDIANA: più piccolo valore x_m t.c. $(x_m) = \frac{1}{2}$

F_i. DENSITÀ DI PROB. (PdF)

$$f_X \stackrel{d}{=} \frac{d F_X}{dx} \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

$$f_X(x) = (1-p) \delta(x) + p \delta(x-1)$$

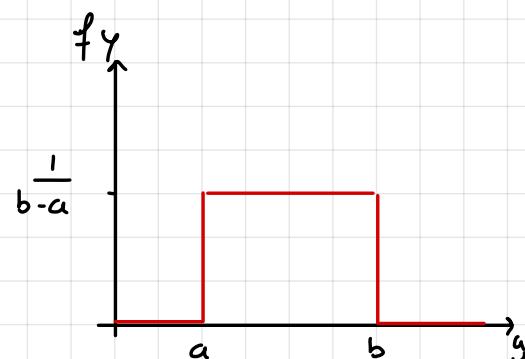
$$f_Y(y) = \frac{1}{b-a} \Omega \left(\frac{y-\bar{y}}{b-a} \right) \text{ con } \bar{y} = \frac{b+a}{2}$$



- $f_X(x) \geq 0$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) du = 1 \rightarrow$ prop. di normalizzazione

- $P(\{x_1 < X \leq x_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(u) du$



- $P(\{X \in \Delta\}) = \int_{\Delta} f_X(u) du \quad (\Delta = \text{dominio})$

- $P(\{x_0 < X \leq x_0 + dx_0\}) = \int_{x_0}^{x_0+dx} f_X(u) du \stackrel{f_X \text{ è continua}}{=} f_X(x_0) dx$

MODA: il valore x_m su cui $f_X(x_m)$ ha il suo max.

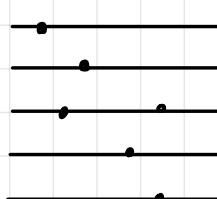
Nell'esempio disegnato, la moda è 1, dove abbiamo $f_X(1)=p$

esercizi:

A24 5 marmi lunghi: 10 cm

su ciascuno scegliamo un pezzo a caso e lo spezziamo

$$A = \{ 2 pezzi: m 10 \text{ cm } l < 3 \text{ cm} \}$$





$X = \text{p.t. d. materna del } 1^{\circ} \text{ mano (preso a caso)} \Rightarrow X \sim \mu([0, 10])$

$$f_X = \frac{1}{10} \mathbb{1} \left(\frac{x-5}{10} \right)$$

$B_1 = \{ 1 \text{ pezzo del } 1^{\circ} \text{ mano con } l < 3 \text{ cm} \}$

$$P(B_1) = P(\{0 < \bar{X} < 3\} \cup \{7 < \bar{X} < 10\}) =$$

$$= \int_0^3 f_{\bar{X}}(u) du + \int_7^{10} f_{\bar{X}}(u) du = \frac{1}{10} \cdot 3 + \frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{6}{10} \quad \text{oppure}$$

$$P(B_1) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\{3 < \bar{X} < 7\})$$

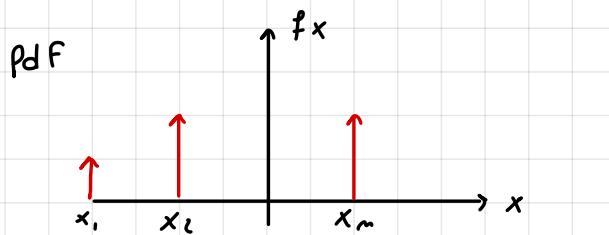
$B_i = \{ \text{mano } i\text{-esima s. norme con 1 pezzo } l < 3 \text{ cm} \}$ p.m.n.a
n.p.t.t.a

$$P(A) = P\{2 \text{ successi con 5 prove}\} = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^{5-2} \approx 0,23$$

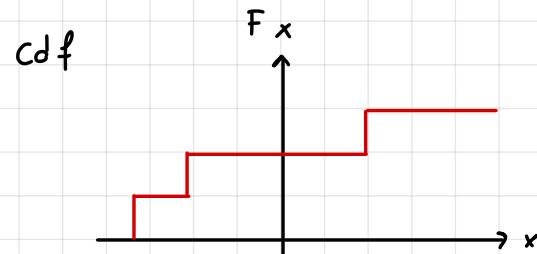
$$(\text{successo} \equiv B_i; P(B_i) = \frac{6}{10} \stackrel{!}{=} p)$$

V.A DISCRETE - CONTINUE - MISTE

- discrete: s.d. cont: $\{x_i\}$ sono possibili, con prob. $P_{\bar{X}}(x_i) = p_i$

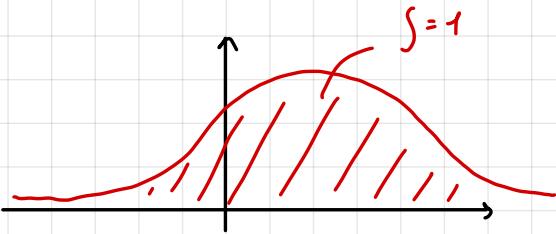


$$\begin{aligned} f_{\bar{X}}(x) &= \sum_i p_i \delta(x - x_i) \\ &\downarrow \text{normaliz.} \\ &= \sum_i p_i \cdot 1 (= P(E_x)) \end{aligned}$$

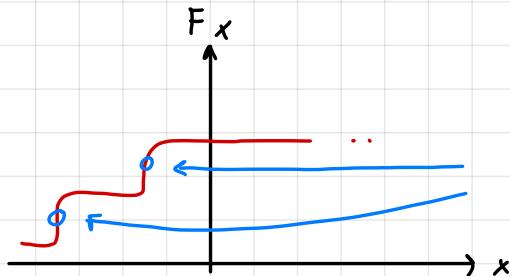


$$F_{\bar{X}}(x) = \sum_i p_i u(x - x_i)$$

• Continua



• miste



discontinuità
di 1^a specia

$$F_X(x) = F_X^{(c)}(x) + F_X^{(d)}(x)$$

↑ ↑
 Continue quadimi

(teo. di Lebesgue)

ALCUNE V.A. NOTEVOLI

DISCRETE

CONTINUE

Bernoulli: $X \sim \mathcal{B}(p)$ $\mathcal{S}_x = \{0, 1\}$

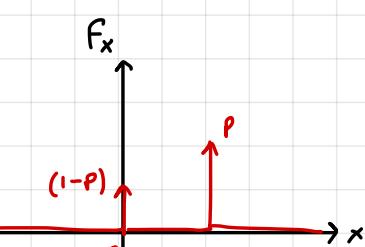
pmf: $P_X(0) = (1-p); P_X(1) = p$

Probability
mass function

$E[X] = p$

$\text{Var}[X] = p$

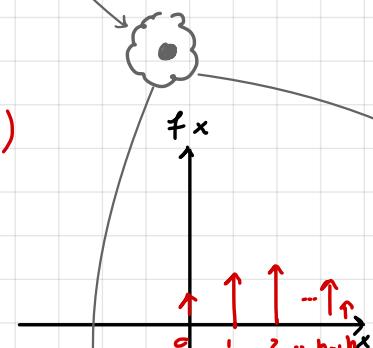
Sommatoria: $\sum p_i$ con parametri
Bernoulli: indipendente


BINOMIALE $X \sim \mathcal{B}_{\text{bin}}(n, p)$ $\mathcal{S}_x = \{0, 1, \dots, n\}$

pmf: $R(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$)

$E[X] = n \cdot p$

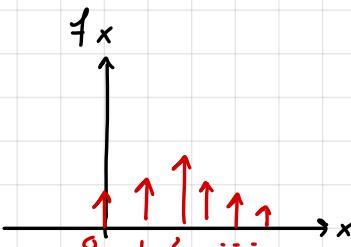
$\text{Var}[X] = n \cdot p \cdot (1-p)$

Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\mathcal{S}_x = \mathbb{N}$

pmf: $P_X(i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ $\lim p_i = \frac{1}{m} \rightarrow 0$
 Teo. event: Raro

$E[X] = \lambda$

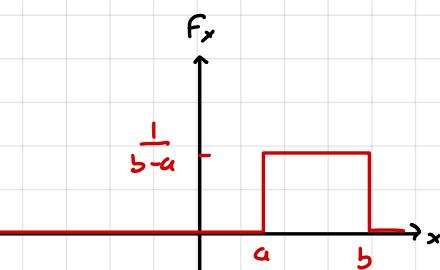
$\text{Var}[X] = \lambda$

Uniforme $X \sim U([a; b])$ $\mathcal{S}_x = [a; b]$

pdf: $F_X(x) = \frac{1}{b-a} \Pi \left(\frac{x - a}{b-a} \right)$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$

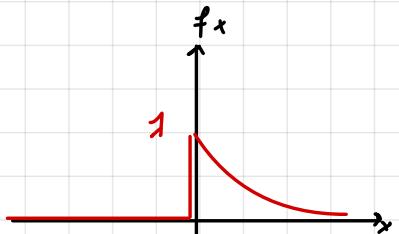
$\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

ESPOENZIALE $X \sim \mathcal{E}_{\text{xp}}(\lambda)$ $\mathcal{S}_x = \mathbb{R}$

pdf: $F_X(x) = 1 e^{-\lambda x} u(x)$

$E[X] = \frac{1}{\lambda}$

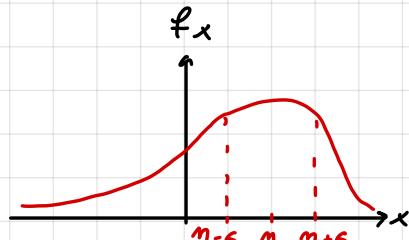
$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Fenomei se zero
memoria: aGAUSSIANA $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mathcal{S}_x = \mathbb{R}$

pdf: $F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$E[X] = \mu$

$\text{Var}[X] = \sigma^2$

Teo. Limite
Centrale

V.A. BINOMIALE

$$\left[\begin{array}{l} X_i \quad (i=1,2,\dots,m) \\ \sim B(p) \end{array} \right] \text{ AND } \left[\begin{array}{l} X_i \text{ indip. da } X_j \\ \forall i \neq j \end{array} \right]$$

$Z = \sum_i^n X_i$ "quante volte è accaduto che $X_i = 1$ "

↑

d: "successo" su m prove

(prove ripetute) $\mathcal{S}_Z = \{0, 1, \dots, n\}$

$$P(\{Z_i = j\}) = \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}$$

... con $m \rightarrow \infty$ prove ripetute e

$$P = \frac{1}{m} \rightarrow 0 \quad \text{prob. d: successo (Raro!)}$$

La V.A. Bin(m, 1/m) $\rightarrow P(1)$

(Teorema degl: event: raro:)

i	$P_X(i)$
0	$\binom{m}{0} p^0 (1-p)^m$
1	⋮
2	⋮
⋮	⋮
m	$\binom{m}{m} p^m (1-p)^0$

Teo. De Moivre - Laplace

... con $m \rightarrow \infty$ prove ripetute e $x\left(\frac{i}{m}\right)$ che tende ad assumere valori $\epsilon \mathbb{R}$

La $P(X=x) \rightarrow N(m, \sigma^2)$

$$\sigma^2 = m \cdot p \cdot m \cdot p (1-p)$$

V.A. GAUSSIANA

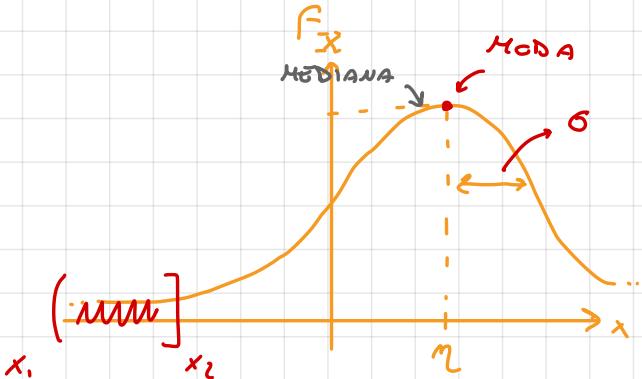
$$\sigma \text{ "Normal: " } - \frac{(x - \mu)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

↑ "Proprieta' di:
Normal. razionale"

$$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{"Seqm. Gaussiana"}$$

$$A \downarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \Big|_{F=0}$$



$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx = P(X_1 < X < X_2)$$

Una somma: e d: infinite Bernoulli (Binomiale), tende ad una variabile Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ [T. DeMoivre e Laplace]

Una \sum^n (V.A. Qualunque indipendenti) Tende $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ [Teo. del limite centrale]
Lindberg
Levy

Esercizio

quesito A18 (21/10)

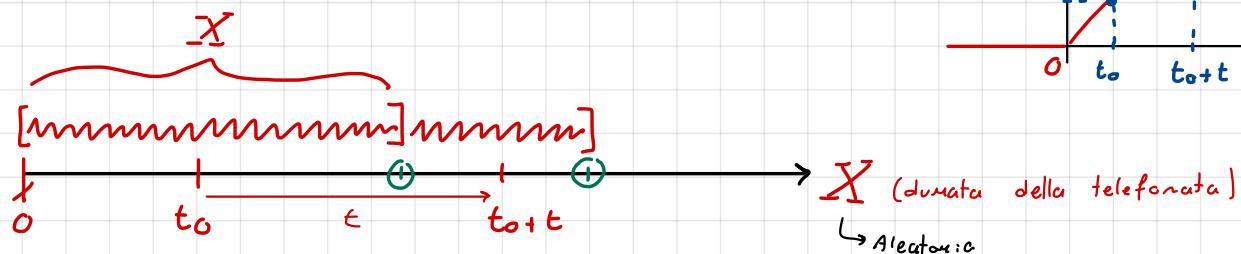
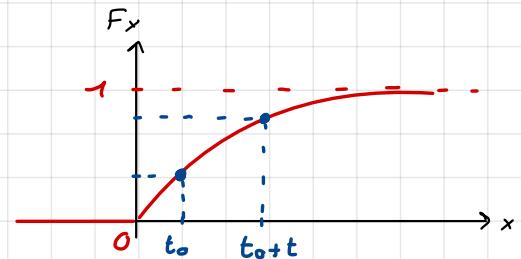
Quesito A18

2/12/10

La durata di una conversazione telefonica è una v.a. con funzione di distribuzione

$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) u(x)$. Quanto vale la probabilità che una telefonata in atto all'istante t_0 termini entro i successivi t secondi?

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) u(x)$$



$$P(\{X \leq t_0 + t\}) \quad \text{"termini entro ..."} \quad \text{cdf}$$

$$P(\{X \leq t_0 + t\} \mid \{X > t_0\}) = \quad \text{"in atto in } t_0\text{"}$$

$$= \frac{P(\{X \leq t_0 + t\} \cap \{X > t_0\})}{P(\{X > t_0\})}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(\{t_0 < X \leq t_0 + t\})}{P(\{X > t_0\})} \quad (*) \quad = \frac{e^{-\lambda t_0} (1 - e^{-\lambda t}) u(t)}{e^{-\lambda t_0}}$$

$$= (1 - e^{-\lambda t}) u(t) \quad \longrightarrow \text{facciamo un'osservazione nella p. successiva}$$

(*)

$$\text{denominatore } P(\{X > t_0\}) = 1 - F_X(t_0) = 1 - (1 - e^{-\lambda t_0}) u(t_0)$$

$$\begin{aligned} \text{numeratore } P(\{t_0 < X \leq t_0 + t\}) &= F_X(t_0 + t) - F_X(t_0) = \\ &= (1 - e^{-\lambda(t_0+t)}) u(t_0+t) - (1 - e^{-\lambda t_0}) u(t_0) = \\ &= e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda(t_0+t)} = e^{-\lambda t_0} (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t_0} \end{aligned}$$

OSS:

$$P\left(\underbrace{\{X \leq t_0 + t\}}_{\text{"Altro: } t[\text{s}]\text{"}} \mid \{X > t_0\}\right) = \frac{P\left(\{X \leq t\}\right)}{F_X(t)}$$

"dove: $t[\text{s}]$ "

FENOMENI SENZA MEMORIA

Esempio. "Tempo al Guasto"

Qual'è la probabilità che si rompa entro t tempo?

CDF e PDF condizionate

$$F_X(x|M) \triangleq P\{X \leq x|M\}$$

↓

$$f_X(x|M) \triangleq \frac{d F_X(x|M)}{dx}$$

► caso punt.
 $M = \{a < X \leq b\}$
 $(X \in (a; b])$

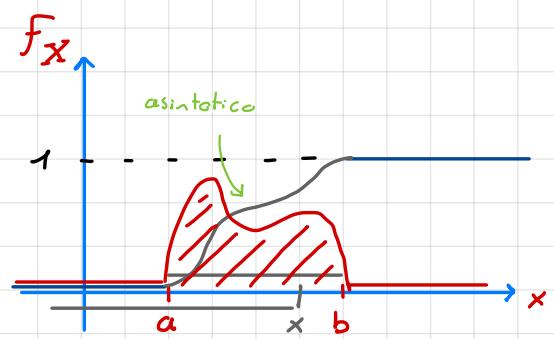
$$F_X(x | a < X \leq b) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(b) - F_X(a)} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

dobbiamo considerare la probabilità composta

$\{X \leq x\} \cap \{a < X \leq b\} = \{a < X \leq x\}$

$$f_X(x | a < X \leq b) = \begin{cases} \emptyset & x < a \\ \frac{f_X(x)}{F_X(b) - F_X(a)} & a \leq x \leq b \\ \emptyset & x > b \end{cases}$$

→ rappresenta l'area nel grafico tra a e b



$$\int_a^b dx = 1$$

 $P(x)$ CASO GENERALE

$$f_X(x) = \sum_i f_X(x | A_i) \cdot P(A_i)$$

Teo. Probabilità Tot

$\{A_i\}$ formano una partizione di Ω

$$P(M | X \leq x) = \frac{F_X(x|M) \cdot P(M)}{F_X(x)}$$

Formula di Bayes MISTA

$$P(M | x-\varepsilon < X \leq x) = \frac{[F_X(x|M) - F_X(x-\varepsilon|M)] \cdot P(M)}{\frac{1}{\varepsilon} \cdot [F_X(x) - F_X(x-\varepsilon)]}$$

(molto piccolo)

$$P\{M | X=x\} = \frac{f_X(x|M) \cdot P(M)}{f_X(x)}$$

" + IMPORTANTE "

Esercizio :

Quesito A26

22/5/00

Una fabbrica di elettrodomestici monta sui suoi frigoriferi termostati di tipo A o di tipo B indifferentemente.

Un termostato mantiene nel frigorifero una temperatura a regime il cui valore è rappresentato da una variabile casuale uniformemente distribuita fra $(T - \Delta)$ e $(T + \Delta)$, essendo T la temperatura impostata dall'utente.

Nel caso in esame, per i termostati di tipo A si ha $\Delta = 1^\circ C$ e per i termostati di tipo B si ha $\Delta = 2^\circ C$.

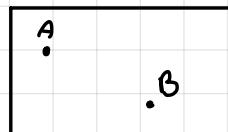
Si sceglie a caso un frigorifero e si imposta la temperatura $T = 2^\circ C$.

Si trovi in tal caso la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della variabile casuale $X = \{\text{Temperatura a regime nel frigorifero}\}$.

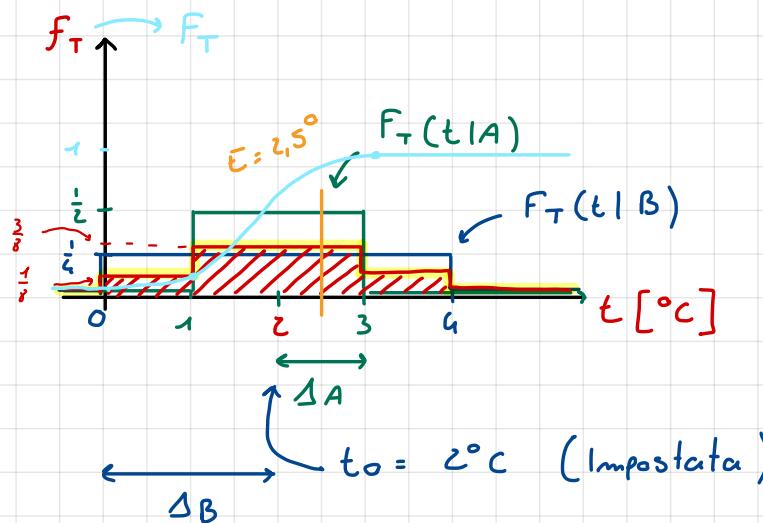
Osservato che in tale frigorifero la temperatura a regime è di $2,5^\circ C$, si calcoli la probabilità che il termostato sia di tipo A

Lo spazio ambiente è tra le possibili scelte

$$\{A, B\}$$



$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \rightarrow$ siccome scegliamo la temperatura casuale



$$f_T(t) = f_T(t|A)P(A) + f_T(t|B)P(B) \rightarrow \text{pdf}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{t-1}{2} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{t-2}{4} \right) \frac{1}{2}$$

$$P(A|\tilde{T}=E) = \frac{f_T(E|A) \cdot P(A)}{f_T(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

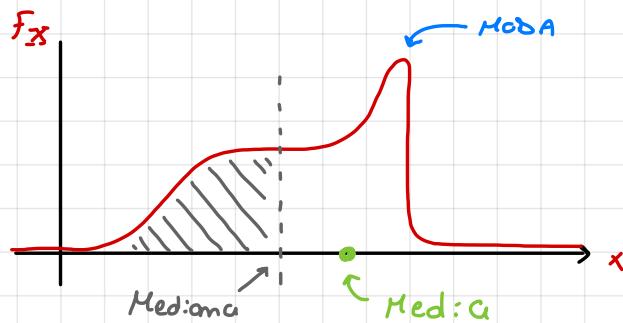
$$P(B|T=E) = \frac{f_T(E|B) P(B)}{f_T(E)} = \frac{\frac{1}{4} \circ \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|T=E) > P(B|T=E)$$

Questo es è famoso nelle prove d'esame

Nuovo argomento molto importante

VALORE MEDIO e VARIANZA d: V.A



Se avessimo solo un pixel per rappresentazione in modo digitale questo segnale, il dato più importante è la **MEDIA**

$$m_x = E[X] \stackrel{\text{Funzionale}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx =$$

"Valore atteso"
 o "Valore medio"
 "Expectation"

"Somma pesata
 dei valori x "
 V.A discreta

$$= x_i p_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum p_i \delta(x - x_i) dx$$

PMF $\{p_i\}$
 → cdf d: δ
 o V.A discreta

Nella statistica, si usa la "MEDIA CAMPIONE"

Date le determinazioni $x^{(j)}$ di una V.A X , si definisce

$$\bar{x} = \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)}}{n} = \sum_j \frac{x^{(j)}}{n} = \sum_{\{ \text{uscite possibili} \}} \frac{n}{n} x_i$$

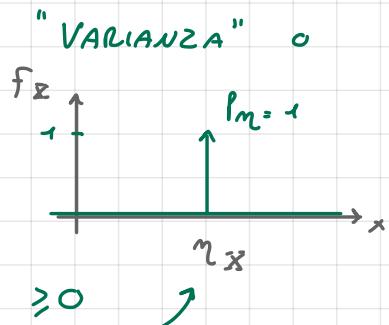
"Rapporto di Frequenza"

$\ell_m \rightarrow p_i$
 $n \rightarrow n$

La media non è altro che il **baricentro** della funzione

l'insieme al valore medio μ : dai anche la "VARIANZA" o

"SCARTO QUADRATICO MEDIO"



$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \geq 0$$

$\sigma_X (> 0)$ si chiama "deviazione standard" (\rightarrow Matlab: "stddev")

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{E[(X - \mu_X)^2]} = \sqrt{E[X^2] - \mu_X^2}$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 \geq 0$$

Operatore "Valore Medio" o "Expectation"

$$E[g(X)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Teorema della Media
o

del Valore atteso

(solo lettura)

"MOMENTI" di una V.A.

$$m_m \stackrel{!}{=} E[X^m] \quad \text{"Momento di ordine } m \text{"} \quad m_1 = \mu_X$$

$$\mu_m \stackrel{!}{=} E[(X - \mu_X)^m] \quad \text{"Momento centrale di ordine } m \text{"}$$

$$\mu_2 = \sigma_X^2$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^1 f_X(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx}_{\mu_X} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_X F_X(x) dx}_{\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(x) dx = 1} = \mu_X - \mu_X = 0$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu_X f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_X^2 f_X(x) dx = \mu_{X^2} - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

$$= E[x^2] - 2\bar{m}_x + \bar{m}_x^2$$

"Val. quadratico med: σ "

LOTTO esercizi 6 → A16

CDF / pdf CONDIZIONATE

$$P(M | X = x) = \frac{f_X(x|M) P(M)}{f_X(x)} ; \quad \text{FORMULA DI BAYES MISTA}$$

$$P(M) \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x|M) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(M | X = x) f_X(x) dx$$

$\underbrace{\phantom{\int_{-\infty}^{+\infty}}}_{=1}$

$$P(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(M | \underline{X=x}) f_X(x) dx$$

Teo.
Prob.
Totale

In forma continua

MEDIA e VARIANZA di V.A.

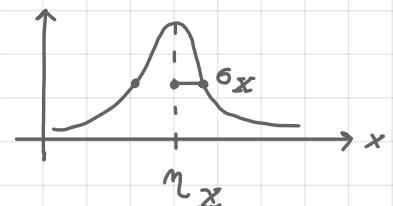
se $f_X(a+x) = f_X(a-x)$ $\left(\begin{array}{l} \text{pdf simmetrica} \\ \text{rispetto ad } a \end{array} \right)$

\Downarrow

$$E[X-a] = \gamma_x - a = 0 = E[X] - E[a]$$

$\underbrace{\dots}_{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots f_X(x) dx}$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



ESERCIZIO A104 "lotto 5"

Quesito A104

16/02/15

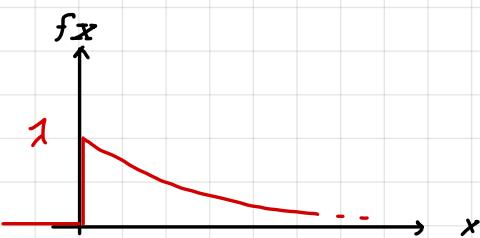
- a) Si definisca la varianza σ_x^2 di una variabile aleatoria X .
- b) Si scriva la relazione che esiste fra la varianza, il valore quadratico medio e il valore medio di una variabile aleatoria e si dimostri tale relazione.
- c) Si trovino il valor medio e la varianza di una variabile aleatoria esponenziale negativa con densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$, con $\lambda > 0$.

a)

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - \gamma_x^2$$

Procediamo ricordando da c:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x) \quad (\lambda > 0)$$



$$\gamma_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} u(x) dx =$$

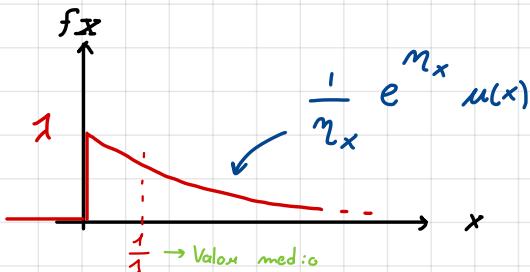
Per punti:

$$= \left[x \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Procediamo al calcolo del valore quadratico medio:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

Per punti:



$$= \left[x^2 \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \cdot \gamma_x = \frac{2}{\lambda^2}$$

Che è la varianza?

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - \gamma_x^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Introduciamo un nuovo argomento

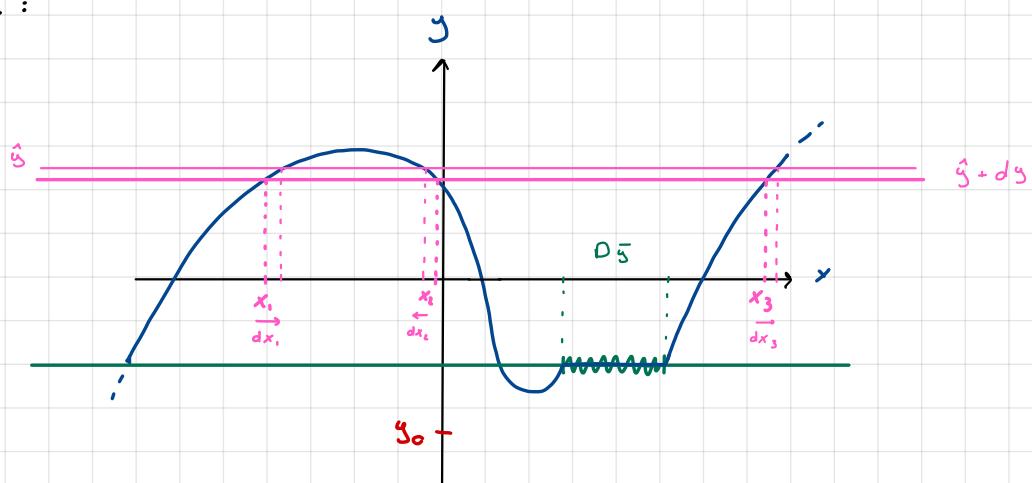
TRASFORMAZIONI DI V.A

$$X : S \rightarrow \mathbb{R} \quad Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$r_i \dots \rightarrow x \quad x \dots \rightarrow y \quad f_Y(y)$$

$y = g(x)$ questo designa una trasf. d: V.A

graficamente:



a) se X è V.A. discarta, può assumere solo certi valori: x :

$$y_i = g(x_i)$$

↓

Y sarà discarta

$$P_j(y_j) = \sum_{\{i : g(x_i) = y_j\}} P_i(x_i)$$

b) se X è continua $\Rightarrow Y$ è continua o mista

$$1) y_0 = g(x) \text{ senza soluz.} \Rightarrow f_Y(y_0) = 0$$

$$2) \hat{y} = g(x) \text{ con } n \text{ soluz. } \{x_i\}$$

$$f_Y(\hat{y}) dy = \sum_i^m f_X(x_i) |dx_i|$$

$$f_Y(\hat{y}) = \sum_i^m f_X(x_i) \frac{1}{|\frac{dy}{dx_i}|}$$

3) $\bar{y} = g(x)$ con ∞ sol: Tratti orizzontali d: $g(x)$

$$P(\bar{y}) = P\{X \in D_{\bar{y}}\} = \int_{D_{\bar{y}}} f_X dx \Rightarrow Y \text{ è M. sta!}$$
$$f_{\bar{y}}(\bar{y}) = P(\bar{y}) \delta(y - \bar{y})$$

TEOREMA FONDAMENTALE : $f_{\bar{y}}(y) = \sum_{\{g(x_i) = y\}} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$

Esercizio A33

Lotto 5

Quesito A33

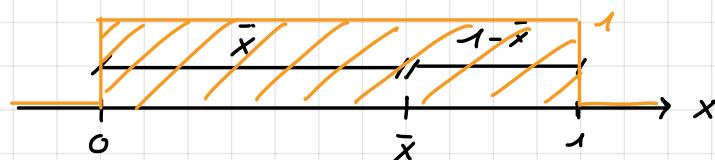
16/01/12

Si sceglie a caso un punto di ascissa X nell'intervallo $(0,1)$. Le lunghezze dei due segmenti in cui risulta suddiviso l'intervallo siano rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di un numero complesso Z .

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Y = \{\text{Modulo quadro di } Z\} = |Z|^2$ e se ne tracci un grafico.

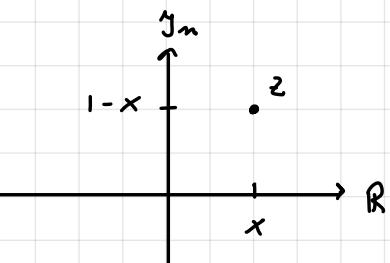
2

$$X \sim \mathcal{U}([0; 1])$$



$$Y = |Z|^2 = |X|^2 + |1-X|^2$$

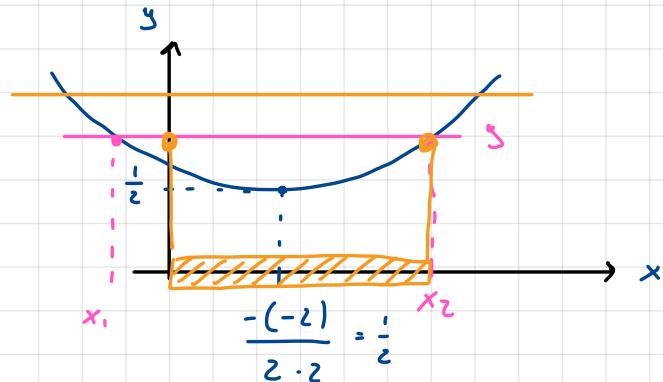
$$Z = X + j(1-X)$$



$$y = g(x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

$$g'(x) = 2x - 2$$

$$1) \text{ Per } y < \frac{1}{2} \Rightarrow f_Y(y) = 0$$



$$\begin{cases} y > 1 & f_X(x) = \\ y < 1 & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

$$2) \text{ Per } \frac{1}{2} \leq y$$

$$\begin{cases} 'a' & 'b' & 'c' \\ 2x^2 - 2x + (1-y) = 0 \end{cases}$$

ha 2 soluzioni:

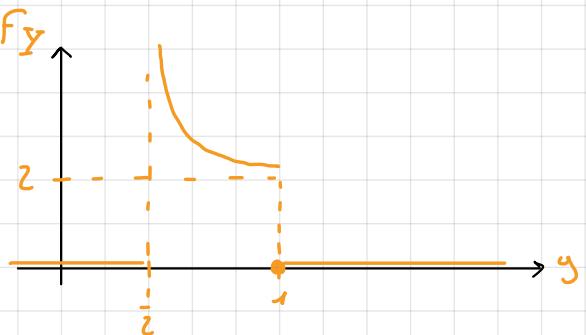
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(1-y)}}{2 \cdot 2} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{2y-1} \right)}_{\text{g'(x_{1,2})}}$$

$$F_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$$\left| \begin{array}{l} = \frac{F_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{F_X(x_2)}{|g'(x_2)|} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} g'(x_{1,2}) &= 2 \left(1 \pm \sqrt{2y-1} \right) - 2 \\ &= \pm \sqrt{2y-1} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2y-1}} + \frac{1}{\sqrt{2y-1}} & \text{per } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ \emptyset & \text{per } y > 1 \\ \emptyset & \text{per } y < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{per } y < \frac{1}{2} \text{ or } y > 1 \\ \frac{2}{\sqrt{2y-1}} & \text{per } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$



Esercizio A23

Lotto 6

Quesito A23

18/2/11

- 1) Si scriva l'espressione analitica della densità di probabilità di una variabile aleatoria gaussiana X con valor medio η_x e varianza σ_x^2 , ossia una v.a. $N(\eta_x, \sigma_x^2)$.
- 2) Si consideri la v.a. Y ottenuta dalla precedente mediante la trasformazione $Y = c(X + d)$ con c e d costanti reali. Si dimostri che Y è ancora gaussiana e se ne trovino il valor medio e la varianza η_y , σ_y^2 espressi in termini di η_x , σ_x^2 , c e d .
- 3) Si trovino i valori di c e d , se esistono, che rendano la v.a. Y una v.a. $N(0, 1)$.

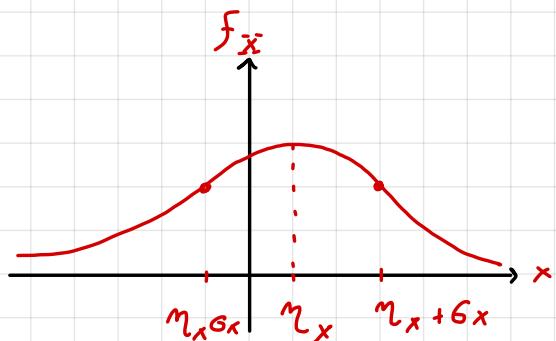
$$X \sim N(\eta_x, \sigma_x^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$Y = c(X + d)$$

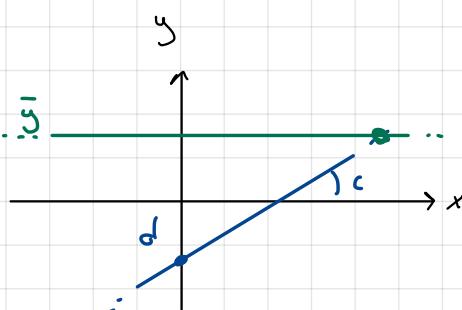
$$\eta_y = ?$$

$$\sigma_y^2 = ?$$



$$c, d : Y \sim N(0, 1) ?$$

$$g(x) = cx + cd = y$$



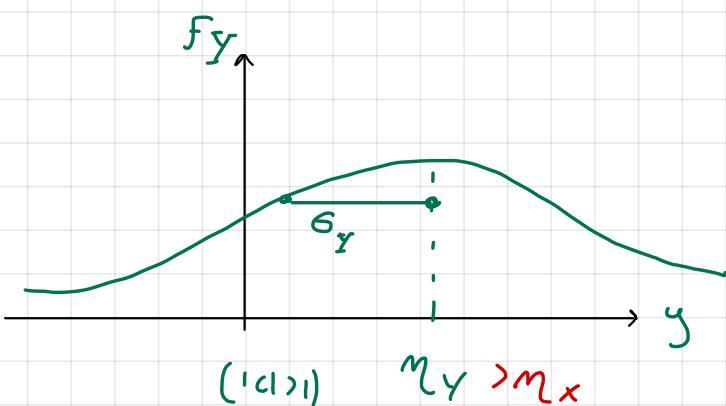
$$f_Y(y)$$

$$\begin{aligned} & \cancel{x_i} \quad \{x_i\} : g(x_i) = \bar{y} \\ & \cancel{y} \quad y = cx + cd : \\ & \quad x_i = \frac{y}{c} - d \quad (m=c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot e^{-\frac{(\frac{y}{c} - d - \eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{|c|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|c|^2\sigma_x^2} e^{-\frac{(y - cd - \eta_x)^2}{2c^2\sigma_x^2}} \end{aligned}$$

$$Y \sim N(\eta_y, \sigma_y^2)$$

$$\begin{cases} \eta_y = c(\eta_x + d) = 0 & \text{se } d = -\eta_x \\ \sigma_y^2 = c^2 \sigma_x^2 & \\ = 1 & \text{se } |c| = 1/\sigma_x \end{cases}$$



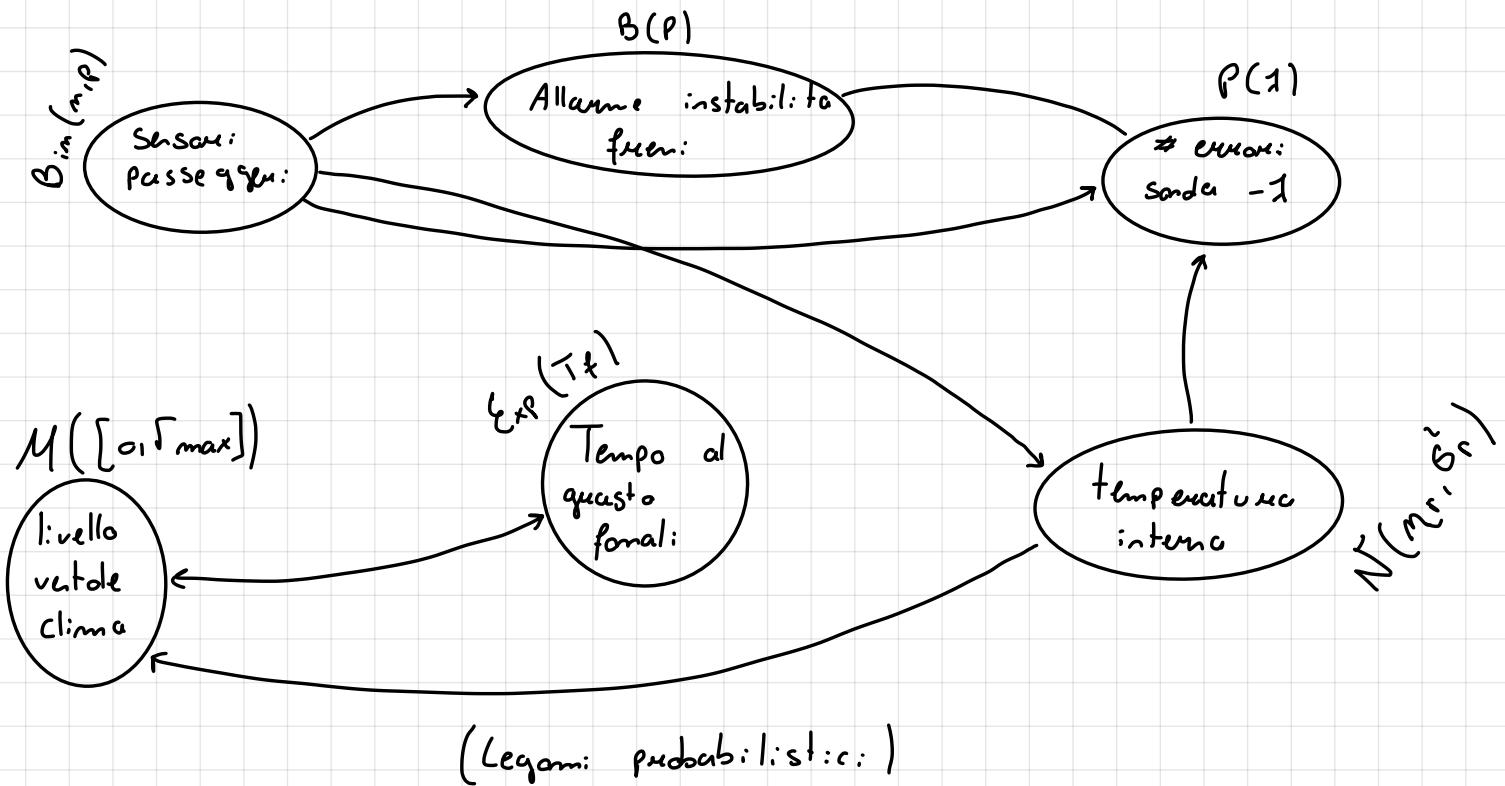
27/11/2020

VETTORI ALEATORI

MOTIVAZIONE

Esempio "Automotive"

Centralina di controllo Pullman



FISICAMENTE : n grandezze

$[x_1, x_2, \dots, x_n] = \underline{x}$ misurate in uno stesso esperimento Aleatorio

MATEMATICAMENTE : una funzione

$X(r) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ f.e. che associa all'uscita sperimentale r , uno n-plo
di valori misurati: $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

L'idea è quella di estendere la teoria delle funzioni cumulative

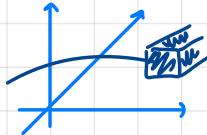
IDEA

\rightarrow pdf ($\propto P\{\text{intorno d: un punto}\}$) $P(A_x)$



CDF ($P\{\text{Intervallo}\}$)

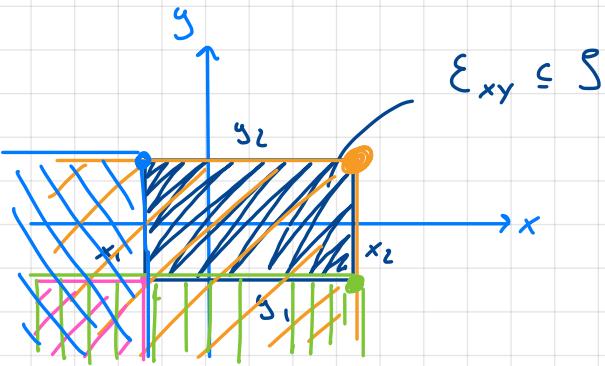
$$P(E) = P(A_x)$$



DOMINIO
"RETTOANGOLARE"

Proviamo ad essere + precisi:

EVENTI "INTERVALLO"



$$E_{xy} = \{x_1 < X \leq x_2; y_1 < Y \leq y_2\}$$

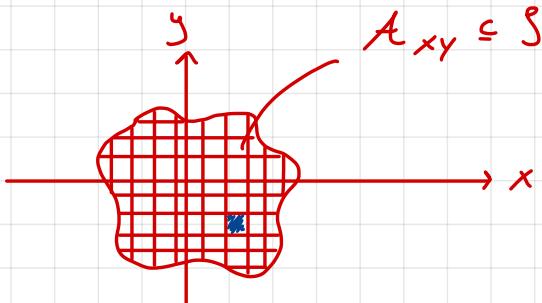
↳ calcoliamo questa prob. avendo la sequente fz. cumulativa d: distribuzione CDF (congiunta)

Prob. Congiunta

$$F_{xy}(x, y) \triangleq P\{X \leq x; Y \leq y\}$$

↓

CONGIUNTA

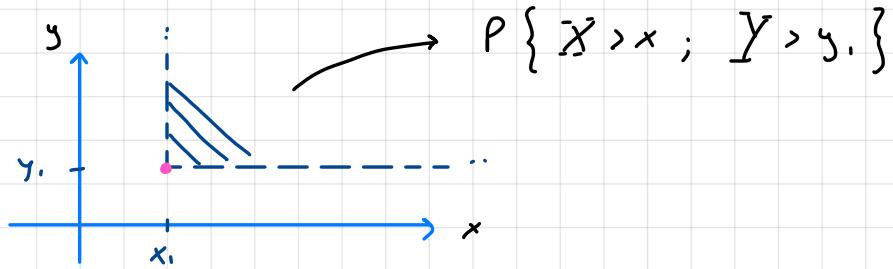


$$P(E_{xy}) = F_{xy}(x_2, y_2) - F_{xy}(x_1, y_1) - F_{xy}(x_1, y_2) - F_{xy}(x_2, y_1)$$

Notiamo che la parte viola viene tolta dal blu e dal verde allora gli cambiiamo d: segno

$$P(E_{xy}) = F_{xy}(x_2, y_2) + F_{xy}(x_1, y_1) - F_{xy}(x_1, y_2) - F_{xy}(x_2, y_1)$$

Prodotto di due altre



1 -

PROPRIETÀ

$$\bullet F_{xy}(+\infty, +\infty) = 1 ; \quad F_{xy}(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F_{xy}(x, +\infty) = F_x(x); \quad F_{xy}(+\infty, y) = F_y(y)$$



$$F_{xy}(x_i, y_k) = F_{xy}(x_i, y_{k-}) + F_{xy}(x_{i-}, y_k)$$

Se $\lim [] \neq 0 \Rightarrow [X, Y] \text{ è una V.A. z-d } \underline{\text{DISCRETA}}$
 $(x_i, y_k) \rightarrow (x_i, y_k)$

Se invece $\lim [] = 0 \Rightarrow [X, Y] \text{ è una V.A. z-d } \underline{\text{CONTINUA}}$

PDF congiunta

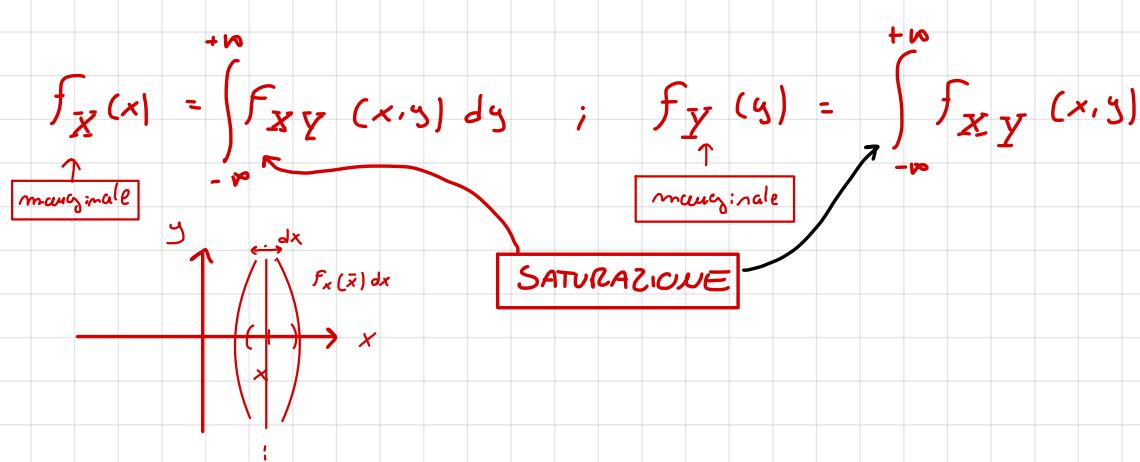
$$f_{xy}(x, y) \triangleq \frac{\partial^2 F_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow F_{xy}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{xy}(u, v) du dv$$

PROPRIETÀ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y) dx dy = 1$$

$$f_{xy}(x, y) \geq 0$$

normalizzazione



$$P\left\{ x_i - dx < X \leq x_i ; y_k - dy < Y \leq y_k \right\} = f_{XY}(x_i, y_k) dx dy$$

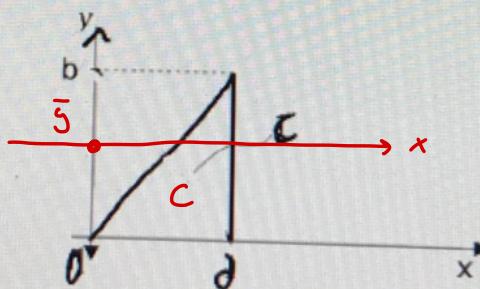
Esercizio Lotto 7

A51

Quesito A51

La densità di probabilità congiunta $f_{xy}(x,y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante c nel dominio indicato in figura ed è nulla altrove.

- Si trovi il valore di c .
- Si trovi la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X e se ne tracci un grafico.
- Si trovi il valor medio della variabile X .



- $c = ?$
- $f_X(x) ?$
- $E[X] ?$

Per trovare c usiamo la normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{y=a}^b c dx \right] dy$$

$= c$ per $\frac{5}{3} \leq x \leq a$
 c: da la c iniziale

① volume del Prismma

$$\frac{a \cdot b}{2} \cdot c = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{ab}$$

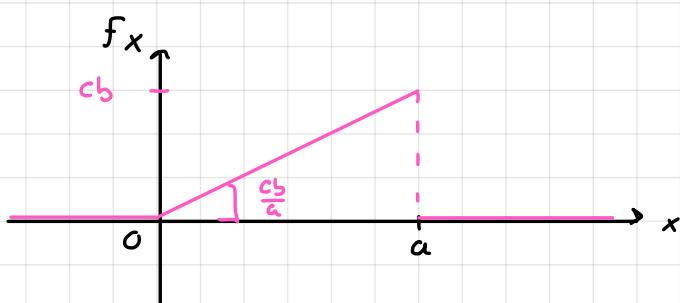
$$\int_{-\infty}^{+\infty} c \left(a - \frac{ya}{b} \right) dy = \left[cay - \frac{ca}{b} \frac{1}{2} y^2 \right]_0^b =$$

$$= cab - \cancel{\frac{c}{2} \frac{a}{b} b^2} = \frac{abc}{2}$$

2) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{XY}(x,y) dy = \int_0^{\frac{b}{a}x} c dy + 0$

$$= \left[cy \right]_0^{\frac{b}{a}x} = \begin{cases} \frac{cb}{a}x & \text{per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{per } x < 0 \text{ or } x > a \end{cases}$$

Diseq: omome i/ queaf: co



$$3) E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^a x \cdot \left(\frac{2}{a^2} x \right) dx = \left[\frac{2}{a^2} \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a =$$

$$= \cancel{\frac{2}{a^2}} \cdot \frac{1}{3} a^3 - 0 = \frac{2}{3} a$$

Aggiung:omo um quesito:

4) Le v.a. X e Y sono INDEPENDENTI?

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Se indip.

$$F_{X|Y}(x|M) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap M)}{P(M)}$$

$$P(A | X=x) = \frac{f_X(x|A) P(A)}{f_X(x)}$$

Introduzione:

- CDF
condizionata

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$F_{X|Y}(x|y) \stackrel{\text{(notazione breve)}}{=} F_{X|Y=y}(x) = \frac{P(X \leq x | Y=y)}{F_Y(y)} \stackrel{\text{(not. estesa)}}{=} \frac{F_Y(y | X \leq x) F_X(x)}{F_Y(y)}$$

- pdf
condizionata

Pdf condizionale

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} F_Y(y | X \leq x) F_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} [F_{XY}(x,y)]}{f_Y(y)} = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

$$= f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

pdf congiunta

pdf marginale

30/11/2020

V.A. "Z-D"

PDF

V.A. "m-D"

$$f_{xy}(x,y)$$

condizionata

$$f_x(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$f_x(x) \quad f_y(y)$$

marginali

$$f_{x_1}(x_1), \dots, f_{x_m}(x_m)$$

$$f_x(x|y) = , \quad f_y(y|x)$$

condizionate

$$f_x(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_m)$$

e simili

$$= \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}$$

$$f_y(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}$$

$$= \boxed{\frac{F_x(x|y) F_y(y)}{F_x(x)}}$$

3^a formula di Bayes

$$\begin{aligned} f_x(x_1, \dots, x_m) &= f_x(x_1 | x_2, \dots, x_m) \cdot \\ &\cdot f_x(x_2 | x_3, \dots, x_m) \cdots f_x(x_m | x_1, \dots, x_{m-1}) \end{aligned}$$

REGOLA DI CONCATENAZIONE

Teorema
Probabilità
Totale

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y(y|x) f_x(x) dx$$

↑ ↑ ↑
 $\{y=y\}$ $| \{X=x\}$ "peso"

NON si usano le PDF (Troppo complicate); le CDF sì:

NOTA: se le V.A. X, Y ($\sigma X_1, \dots, X_m$) sono DISCRETE, allora tutto è più facile

sono tutte $P\{\cdot\}$

~~pmf~~ $\Rightarrow P_{xy}(x_i, y_n), P_x(x_i | y_n), P_x(x_i, x_j, x_e | x_k, x_m, \dots)$ d: eventi elementari!

es: 9.3, p. 279] Prove n:petute $[X] = \{\# \text{ successi su } m \text{ prove}\}$
 $[Y] = \{\# \text{ insuccessi su } m \text{ prove}\}$

$$P_X(x_i) = \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \quad (i=0, \dots, m)$$

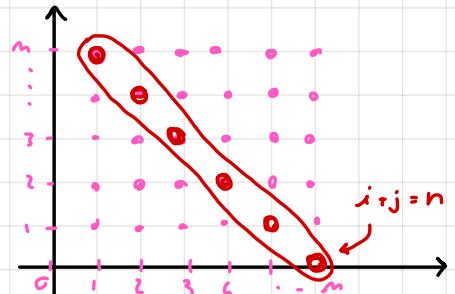
$$P_Y(y_j) = \binom{m}{j} (1-p)^j p^{m-j} \quad (j=0, \dots, m)$$

V.A. congiunte binomiali:

$$P_{XY}(x_i, y_j) = \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} = \\ = \binom{m}{j} (1-p)^j p^{m-j}$$

$\uparrow m-i$ $\uparrow j$

$j = m-i$



INDIPENDENZA TRA V.A.

DEF: X e Y si dicono "indipendenti", se

$$P\{X \in A_x, Y \in B_y\} = P\{X \in A_x\} \cdot P\{Y \in B_y\}$$

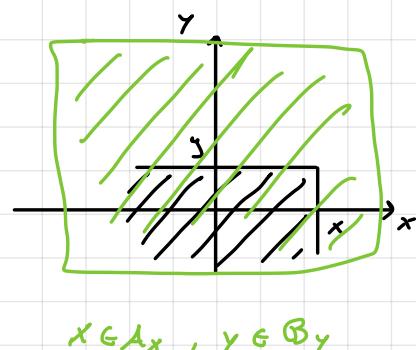
↑
fattoriizzazione $\forall A_x, B_y$

Se $A_x = \{X \leq x\}$ e $B_y = \{Y \leq y\}$, allora

$$F_{XY}(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y) \quad (\text{def. equivalente?})$$

ch: è la desit. di prob. congiunta tra le 2 var.

$$f_{XY}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \quad (\text{def. equivalente!})$$



$$\iint_{A_x B_y} f_{XY}(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{A_x} f_x(x) dx \cdot \int_{B_y} f_y(y) dy$$

$$= P(X \in A_x) \cdot P(Y \in B_y)$$

INDIPENDENZA TRA n V.A.

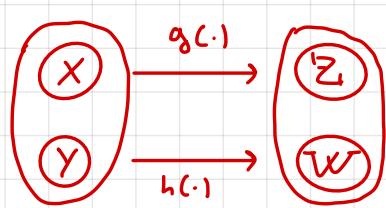
$f_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$

↑
"Fully Factorized Distribution"

$$= \int_{A_x} f_{X_1}(x_1) dx_1 \cdot \int_{B_y} f_{X_2}(x_2) dx_2 \cdot \dots \cdot \int_{C_z} f_{X_n}(x_n) dx_n$$

TEOREMA : Se X e Y sono indipendenti,

allora anche $Z = g(X)$ e $W = h(Y)$ lo sono.



$$f_{ZW}(z,w) = f_Z(z) \cdot f_W(w)$$

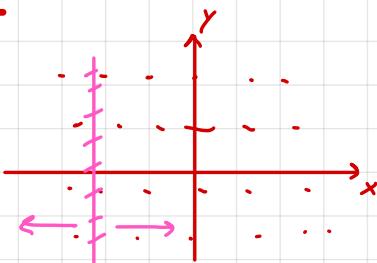
(T. fondamentale)

VALORI MEDI e MEDIE CONDIZIONATE

$$E[X] \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} x f_{xy}(x,y) dy dx$$

$$E_x[x] = E_{xy}[x]$$



I due risultati: non hanno differenze.

Questo non vale se:

$$E_x[X|Y=y] \stackrel{\Delta}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x|y) dx}_{g(y)} \left(= M_{X|Y} \right)$$

\rightarrow funzione del valore y

La media condizionata quindi: è una funzione di y , allora mi chiedo:

$$E_y[g(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x|y) f_y(y) dy dx = E_x[X]$$

$f_{xy}(x,y)$

Teo. della media condizionata:

$$E_y[E_x[x|y]] = E[X]$$

Teorema della Media m-Dim

$$E_x[g(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \int \dots \int g(x_1, x_2, \dots, x_n) f_x(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

↓ "w"

MOMENTI MISTI

$$E[X^m \cdot Y^n] = m_{m,n}$$

$$; M_{m,n} \stackrel{!}{=} E[(X - \mu_x)^m \cdot (Y - \mu_y)^n]$$

"momento mom-retturato d: ordine (m,n)"

"momenti centrati ..."

Dicesi: "CORRELAZIONE tra X e Y " le seguenti quantità

$$R_{xy} = E[X \cdot Y] \neq E[X] \cdot E[Y]$$

Mentre il "Momento misto d: ordine 1,1" viene chiamato

"COVARIANZA d: X e Y "

$$C_{xy} = Cov[X, Y] = E[(X - \mu_x) \cdot (Y - \mu_y)]$$

$$= E[X \cdot Y - \mu_x Y - \mu_y X + \mu_x \mu_y] =$$

$$= E[XY] - \mu_x \mu_y$$

$$= R_{xy} - \mu_x \mu_y$$

es: A57)

Quesito A57

21/1/13

La densità di probabilità congiunta $f_{xy}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante c nel dominio indicato in figura (circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine) ed è nulla altrove.

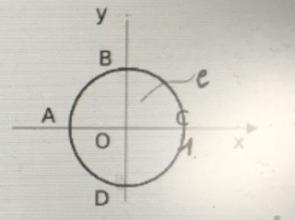
a) Si trovi il valore della costante c .

Sia $F_{xy}(x, y)$ la funzione di distribuzione congiunta delle due variabili.

b) Si individui sul piano cartesiano, mediante tratteggio, la regione per cui è $F_{xy}(x, y) = 0$. Sullo stesso piano si individui, mediante un diverso tratteggio, la regione per cui è $F_{xy}(x, y) = 1$. Si dica inoltre quanto vale la funzione $F_{xy}(x, y)$ nei punti:

$O(0,0), A(-1,0), B(0,1), C(1,0), D(0,-1)$.

c) Si trovino le densità marginali $f_x(x)$ e $f_y(y)$ e se ne tracci un grafico. Si dica infine se X e Y sono indipendenti.



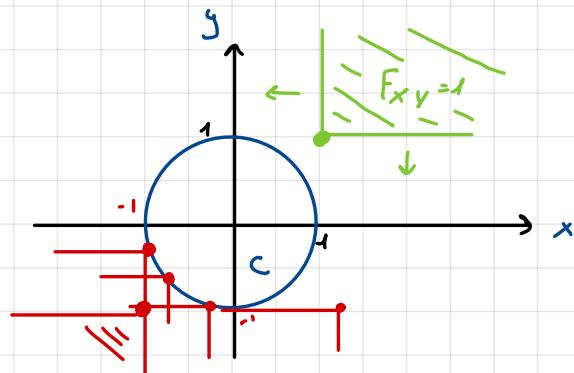
b) dove $F_{xy}(x, y) = 0$?

$F_{xy}(x, y) = 1$?

c) $f_x(x)$ e $f_y(y)$

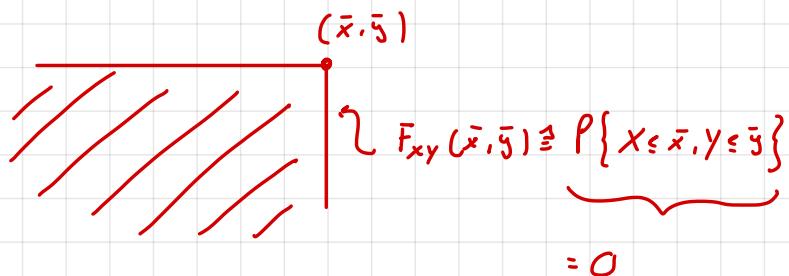
c₂) X e Y indipendenti?

$$F_{xy}(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y) ?$$



$$\iint f_{xy}(x, y) dx dy = 1$$

$$= \iint_C c dx dy = c \cdot \pi r^2$$

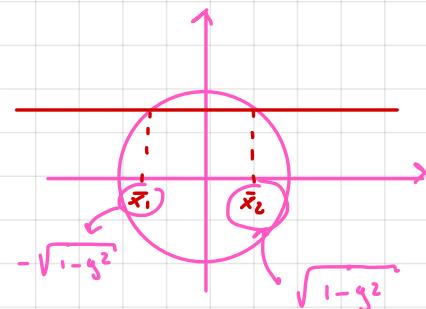


$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\pi} dy = \frac{y_2 - y_1}{\pi}$$

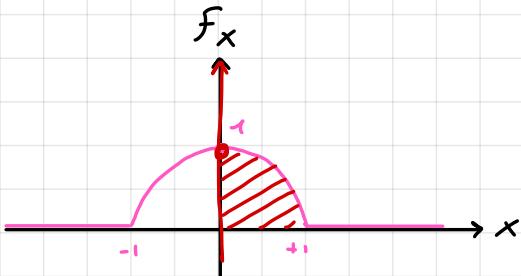
$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1 ; \quad \bar{y}_{1,2} = \pm \sqrt{1 - \bar{x}^2}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y) dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & \text{per } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{per } |y| > 1 \end{cases}$$



$$c_2) f_{xy}(x, y) \stackrel{?}{=} f_x(x) \cdot f_y(y) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sqrt{1-x^2} \circ \sqrt{1-y^2} & \text{per } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{per } |x| > 1 \end{cases}$$

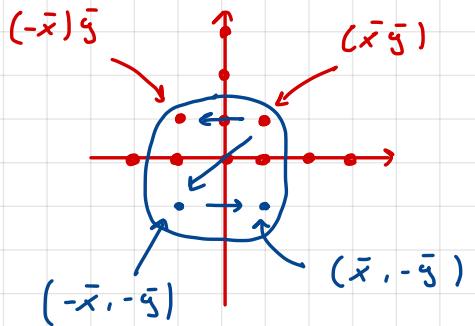
$|y| > 1$



c3) X e Y sono "INCORRELATE"?

$$E[XY] \stackrel{?}{=} E[X] \cdot E[Y]$$

\emptyset \emptyset \emptyset



CORRELAZIONE e COVARIANZA

$$R_{xy} = E[X \cdot Y]$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} (x \cdot y) F_{xy}(x, y) dx dy$$

$$C_{xy} = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] =$$

$$= R_{xy} - \mu_x \cdot \mu_y$$

X e Y si dicono INCORRELATE se $R_{xy} = \mu_x \cdot \mu_y$

$$C_{xy} = 0$$

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

- Se X e Y sono INDEPENDENTI \Rightarrow sono INCORRELATE

$$H_0: F_{xy}(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$$

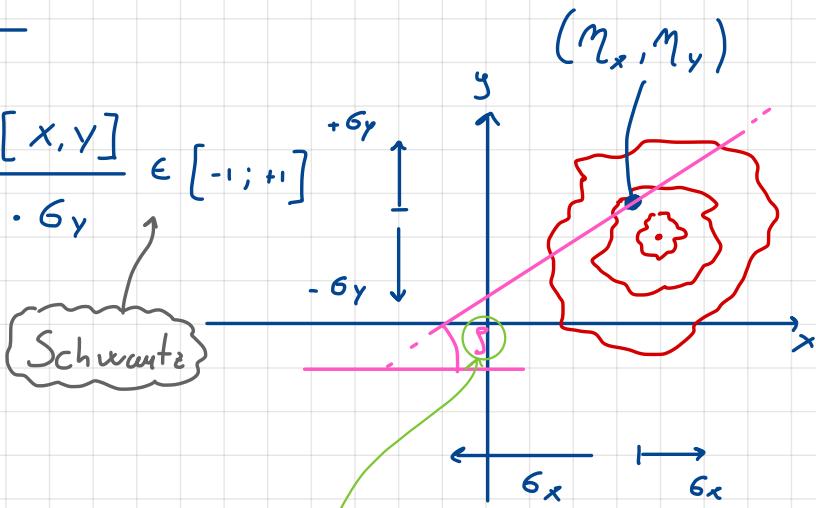
$$R_{xy} = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x \cdot y) f_y(y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_y(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx = \mu_y \cdot \mu_x$$

► "Coeficiente di Correlazione"

$$\rho \stackrel{\Delta}{=} \frac{C_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \in [-1; +1]$$

$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2]$
Varianza



quest'angolo non è
proprio ρ , ma ρ ci aiuta
a calcolarlo
(il come e il perché non lo sappiamo)

V.A. CONGIUNTAMENTE GAUSSIANE

$$f_{\underline{x}}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det[\Sigma]}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\begin{matrix} x - \boldsymbol{\mu}_x \\ \vdots \\ x - \boldsymbol{\mu}_x \end{matrix} \right)^T \Sigma^{-1} \left(\begin{matrix} x - \boldsymbol{\mu}_x \\ \vdots \\ x - \boldsymbol{\mu}_x \end{matrix} \right) \right\}$$

vettore
matrice

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\begin{matrix} (x - \mu_x) \\ (y - \mu_y) \end{matrix} \right]^T \left[\begin{matrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} (x - \mu_x) \\ (y - \mu_y) \end{matrix} \right] \right\}$$

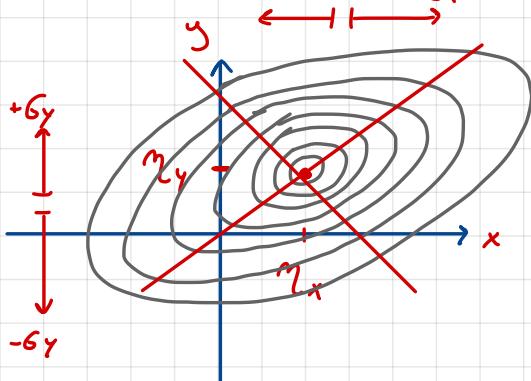
$$\Sigma = \Sigma_{xy} = E \left[\begin{matrix} (x - \mu_x)^2 & (x - \mu_x)(y - \mu_y) \\ (y - \mu_y)(x - \mu_x) & (y - \mu_y)^2 \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho \sigma_x \sigma_y \\ \rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix};$$

$$\det[\Sigma_{xy}] = \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho^2)$$

$$\Sigma_{xy}^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\rho \sigma_x \sigma_y \\ -\rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2 (1 - \rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_x \sigma_y (1 - \rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_x \sigma_y (1 - \rho^2)} & \frac{1}{\sigma_y^2 (1 - \rho^2)} \end{bmatrix}$$

P. 286 e P. 421 1: bmo

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\begin{matrix} (x - \mu_x)^2 \\ \frac{(x - \mu_x)(y - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \end{matrix} \right] \right\}$$

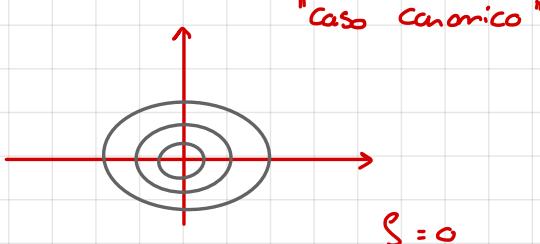


$$[\quad] = \text{cost.} \quad \Rightarrow \text{conica}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac =$$

$$= \frac{4\rho^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} - \frac{4}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{4}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} (\rho^2 - 1) < 0$$

(ellisse!)



$$\rho = 0$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} \right\}$$

↑
muito círculo para Y)

(muito dipede da S
(muito da μ_y e σ_y)

 Teorema Se X e Y sono congiuntamente gaussiane e incomamate, allora sono INDEPENDENTI

$$E[xy] = \gamma_x \gamma_y ; \quad C_{xy} = \text{Cov}[x,y] = 0$$

\downarrow
 $\beta = 0$

TRASFORMAZIONI Δ V.A. $Z - \Delta$ $(m - \Delta)$

$$\begin{cases} Z = g(X, Y) \\ W = h(X, Y) \end{cases}$$

\exists sistema

$$\begin{cases} z = g(x, y) \\ w = h(x, y) \end{cases}$$

Casi: st: che:

1) Non ha soluz: on: $\Rightarrow f_{zw}(z, w) = 0$

2) Ha m soluz: on: (x_i, y_i) (funzion: di (z, w))

$$f_{zw}(z, w) = \sum_i \frac{f_{xy}(x_i, y_i)}{|J(x_i, y_i)|}$$

\nwarrow det Jacobiano \rightarrow mappanto di superf: ci:
 è un

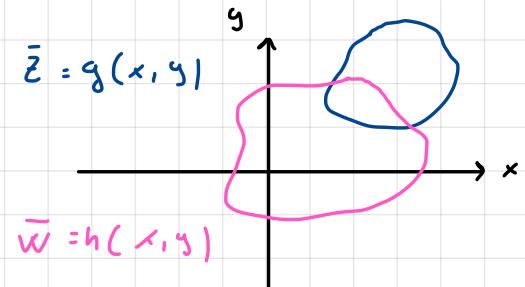
Determinante Jacobiano

$$dx dy / |J| = dz dw$$

$$J(x_i, y_i) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

3) ha n soluz: on: $\Omega_{xy}: \begin{cases} g(x_i, y_i) = z_j \\ h(x_i, y_i) = w_j \end{cases}, \forall (x_i, y_i) \in \Omega$

$$P_{zw}(z_j, w_j) = \iint_{\Omega_{xy}} f_{xy}(x, y) dx dy$$



TRASFORMAZIONI LINEARI DI VETTORI GAUSSIANI

"Teoria dei Segnali" - Uni PR

Prof. Armando
Vannucci

- Sia dato il vettore di V.A. congiuntamente gaussiano $\underline{X} \sim N(\underline{\eta}_x, \underline{\underline{C}}_x)$, con vettore delle medie e matrice di covarianza specificati.

Per definizione di vettore gaussiano è: $f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\underline{\underline{C}}_x|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\eta}_x)^T \underline{\underline{C}}_x^{-1} (\underline{x} - \underline{\eta}_x)\right\}$
con \underline{X} ($n \times 1$) e $| \cdot | \equiv \det[\cdot]$ di matrice.

- Consideriamo la trasformazione, con \underline{A} ($n \times n$) e \underline{b} ($n \times 1$) costanti assegnate, $\underline{Y} = \underline{A}\underline{X} + \underline{b}$ la cui unica soluzione, per $\underline{Y} = \underline{y}$ dato, è $\underline{x}_1 = \underline{A}^{-1}(\underline{y} - \underline{b})$

Applichiamo dunque il "Teorema Fondamentale" per ricavare $f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{f_{\underline{X}}(\underline{x}_1(\underline{y}))}{|\underline{J}(\underline{x}_1(\underline{y}))|}$, dove il Determinante Jacobiano della trasformazione è

$$\underline{J}(\underline{x}) = \det([\underline{J}_{ij}]) = \det(\underline{A}) \equiv |\underline{A}|, \text{ poiché } \underline{J}_{ij}(\underline{x}) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = A_{ij}$$

- Sostituendo dunque $\frac{1}{|\underline{J}|} = \frac{1}{|\underline{A}|}$ (costante) e $\underline{x}_1(\underline{y})$, ottieniamo

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{1}{|\underline{A}|} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\underline{\underline{C}}_x|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{y} - \underline{b} - \underline{A}\underline{\eta}_x)^T (\underline{A}^{-1})^T \underline{\underline{C}}_x^{-1} (\underline{A}^{-1})(\underline{y} - \underline{b} - \underline{A}\underline{\eta}_x)\right\}$$

la quale è identificabile con una pdf Gaussiana n -dimensionale, con vettore delle medie $\underline{\eta}_Y = \underline{A}\underline{\eta}_x + \underline{b}$ e matrice di covarianza $\underline{\underline{C}}_Y = \underline{A}\underline{\underline{C}}_x\underline{A}^T$ ($\Rightarrow |\underline{\underline{C}}_Y| = |\underline{\underline{C}}_x| \cdot |\underline{A}|^2$)

ovvero è $\underline{Y} \sim N(\underline{A}\underline{\eta}_x + \underline{b}, \underline{A}\underline{\underline{C}}_x\underline{A}^T)$ o.v.d. 

ES: A50

Quesito A50

11/9/12

Un satellite per telecomunicazioni ha due trasmettitori i cui tempi di vita sono variabili aleatorie indipendenti con identica densità di probabilità:

$$f_{x_1}(x) = f_{x_2}(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x) \quad \text{con } \lambda > 0.$$

La trasmissione è continua e per essa si utilizza un solo trasmettitore alla volta: il secondo entra in funzione istantaneamente solo quando il primo si guasta.

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Z = \{\text{Tempo di trasmissione del satellite}\}$.

$$f_{X_1}(x) = 1 e^{-\lambda x} u(x) \quad (\lambda > 0)$$

$$f_{X_2}(x) = 1 e^{-\lambda x} u(x)$$

$X_i = \{\text{Tempo al guasto}$
 $i\text{-mo componente}\}$

$Z = \{\text{tempo di trasmissione del satellite}\}$

$$Z = g(X_1, X_2) =$$

$$\begin{cases} Z = g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ w = x_1 \end{cases}$$

$$\uparrow h(x_1, x_2)$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (z, w)$$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \rightarrow F_{Z, W}(z, w)$$

(marginalizzazione)
"Saturazione"

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{Z, W}(z, w) dw$$

$$f_{X_1}(x_1 | x_2) = f_{X_1}(x_1)$$

\Leftarrow INDEPENDENZA

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \underbrace{f_{X_1}(x_1)}_{\text{independence}} \cdot \underbrace{f_{X_2}(x_2)}_{\text{independence}}$$

TEO. FONDAMENTALE

$$\begin{cases} Z = x_1 + x_2 \\ w = x_1 \end{cases}$$

; Soluzione

$$\begin{cases} x_1 = w \\ x_2 = z - w \end{cases}$$

Sempre 1 soluzione

$$f_{Z, W}(z, w) = \cancel{\frac{f_{X_1, X_2}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})}{|J(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})|}} = F_{Z, X_2}(w, z-w)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \end{vmatrix}$$

$$f_{z,w}(z,w) = 1 e^{-1w} u(w) \cdot 1 e^{-1(z-w)} u(z-w)$$

Somma d: z v.a. indipendenti: $z = x_1 + x_2$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x_1}(w) \cdot F_{x_2}(z-w) dw = F_{x_1}(z) * f_{x_2}(z)$$

DA QUI SHETTO DI PRENDERE APPUNTI.

Salto le ultime 5 lez. per prepararmi meglio all'esame del 21 dicembre.

9/12/2020

Continuando es A50

TEO FONDAMENTALE

$$\begin{cases} z = x_1 + x_2 \leftarrow g \\ w = x_1 \leftarrow h \end{cases} \quad \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \quad \frac{x_1 = w}{x_2 = z - w}$$

Sempre 1
Soluzione

$$f_{z,w}(z,w) = \cancel{\frac{f_{x_1, x_2}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})}{|J(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})|}} =$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = |-1| = \boxed{1}$$

non b segno
a denom.

sostituzione

$$= f_{x,x} = \underbrace{(w, z-w)}$$

$$f_{zw}(z,w) = 1 e^{-1w} u(w) \cdot 1 e^{-1(z-w)}$$

Somma di due variabili indipendenti: $z = x_1 + x_2$

$$f_{x_1}(w) \cdot f_{x_2}(z-w)$$

Pd f è convoluzione della Pd f

ma dato che mi interessa z:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x_1} f_{x_2}(z-w) dw = f_{x_1}(z) * f_{x_2}(z)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{zw}(z-w) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{-1w} u(w) \cdot 1 e^{-1(z-w)} u(z-w) dw =$$

$$= \int_0^z 1^2 e^{-1w} e^{-1z} \cdot e^{+1w} dw = \begin{cases} 1^2 e^{-1z} \cdot z & \text{per } z \geq 0 \\ 0 & \text{per } z < 0 \end{cases}$$



PROCESSO ARMONICO

(ad aleatori: età parametrica)

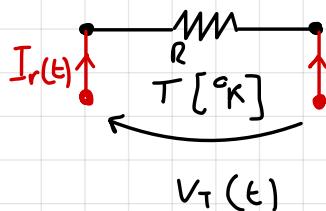
$$Y(t) = a \cdot \cos(\omega t + \Phi)$$

definisco : parametri: con V.A PdP :

ad esempio :

$$\Phi \sim U([0; 2\pi])$$

RUMORE TERMICO



generato dai conduttori: non allo zero assoluto.

Tutte le particelle sono in agitazione termica, anche senza tensione applicata.



ele in movimento = corrente $i_e(t)$ aleatoria:

$$I_e(t)$$

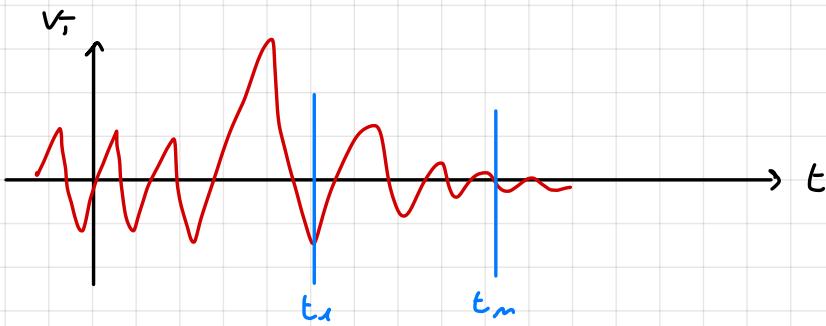
ovviamente considerando tutt'gl: ele: $I_r(t)$ detto anche corrente d: rumore termico.

corrente + $R \Rightarrow$ \exists una tensione $V_r(t)$ aleatoria

TENSORE DI RUMORE TERMICO

"Rumore di Johnson"

graficamente può essere visto così:



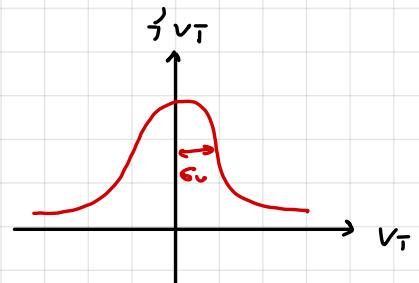
dal T. sul limite centrale

$$\sim N(0, \sigma_v)$$

$$[V_T(t_1) \dots V_T(t_z)] \rightarrow$$

vettore
congiuntamente
Gaussiano

$$\begin{matrix} \uparrow & \curvearrowleft \Delta T [^{\circ}\text{K}] \\ \sim N(0, \sigma_v^2) & \rightarrow \text{Gaussiano a} \\ & \text{media nulla} \\ \downarrow & \\ \text{Simmetrico} & \\ \text{fisico} & \end{matrix}$$



DESCRIZIONE STATISTICA DI UN PROCESSO

Sigifica: bisogna trovare la pdf di tutte le V.A.

Se ho un processo ad Aleatorietà Parametrica:

\Rightarrow Trovare pdf congiunta su parametri: $f_{\Phi_A}(\rho, \alpha, \dots)$

Se non ad Aleatorietà parametrica:

\Rightarrow uso V.A. estratte

$$1) X(t_1) \stackrel{\text{pdf}}{\equiv} X \rightarrow f_X(x_1; t_1)$$

estrazione della
V.A.
aumento f.e.

istante di
estrazione
della V.A.

DENSITÀ DI
PROBABILITÀ

ESEMPIO:

$$\begin{aligned} & P\{X(t_1) > 0\} \text{ prob.} \\ & E[X(t_1)] \text{ val. medio} \end{aligned}$$

$$2) X(t_1) \triangleq X, \xrightarrow[\text{cong. unta}]{\text{pdf}} f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \xrightarrow{} P\{X(t_2) > X(t_1)\}$$

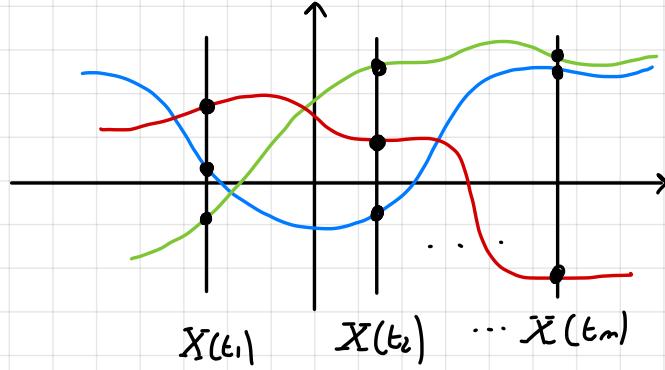
$$X(t_2) \triangleq \bar{X}_2$$

$$\xrightarrow{} E[(X(t_1) - \mu_x(t_1)) - (X(t_2) - \mu_x(t_2))]$$

Densità d: 2° ordine

DESCRIZIONE STATISTICA COMPLETA: se conosco la "densità" d: ordine m"

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m)$$



→ esempio
d: determinazione
e istante

$$[X(t_1), \bar{X}(t_2), \dots, \bar{X}(t_m)] \quad \underline{\text{troppo difficile!}}$$

pdf congiunta del vettore aleatorio

11/12/20

DESCRIZIONE STATISTICA

d: un processo aleatorio

Se ad Aleatorio: età parametrica $[\Phi, A, \dots] \Rightarrow$ Trovare $F_{\tilde{g}_A}(t, a, \dots)$
Se " non parametrica \Rightarrow uso V.A. estratte

1) $X(t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{X}_1 \xrightarrow{\text{pdf}} f_{\bar{X}_1}(x_1, t_1)$ "distribuzione di ordine 1"

2) $\bar{X}(t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{X}_1$ $\xrightarrow[\text{congiunta}]{\text{pdf}}$ $f_{\bar{X}_1}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ "distribuzione di ordine 2"

PROCESSI GAUSSIANI

È m-plo di v.a. estratte dal processo $\bar{X}(t)$,

$$[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)] =$$

$$= [X_1, X_2, \dots, X_m]$$

è descritto da una pdp gaussiana

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det[\Sigma]}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\gamma})^T \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\gamma})\right\}$$

$$\underline{\gamma} = E[\underline{X}] = [E[X(t_1)], E[X(t_2)], \dots, E[X(t_m)]]$$

γ_1

γ_2

γ_m

$$\underline{\Sigma} = [C_{ij}] ; C_{ij} = \text{Cov}[X(t_i), X(t_j)] = E[(X_i - \gamma_i)(X_j - \gamma_j)]$$

(Legg: P. 134 S.2.1 Processi d: Markov e Processi Gaussiani)

↳ ... fino a S.2 mo esame
S.2 in poi ... esame

$$\boxed{C_{ij} = R_{ij} = \gamma_i \gamma_j} \quad \zeta_{ij} = t_i - t_j$$

DESCRIZIONE STATISTICA

"in POTENZA"

(Momenti)

$$\gamma_X(t_1) \triangleq E[X(t_1)]$$

"valore medio statistico"

1° e 2° Grado

$$\triangleq E[X^2(t_1)]$$

"potenza statistica"

$f_{\bar{X}}(x_1; t_1)$

$$\sigma_X^2(t_1) \triangleq E[(X(t_1) - \gamma_X(t_1))^2]$$

"varianza del processo"

$f_{\bar{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E[X(t_1) \cdot X(t_2)] \quad \text{"Auto correlazione"}$$

$$= E[(X(t_1) - \gamma_X(t_1))(X(t_2) - \gamma_X(t_2))] \quad \text{"AUTOCOVARIANZA"}$$

$$\sigma_X^2(t_1) = P_X(t_1) - \gamma_X^2(t_1)$$

Per qualunque coppia di variabili aleatorie, vale la relazione:

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \gamma_X(t_1) \gamma_X(t_2)$$

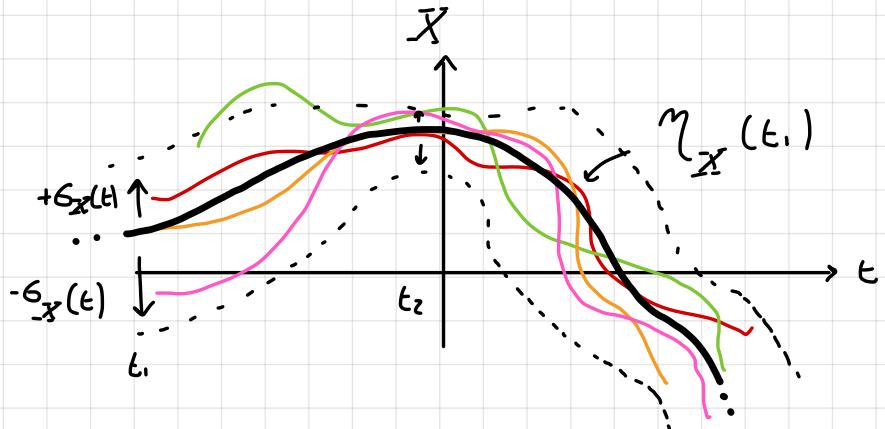
In realtà è la quarta relazione che lega le quantità introdotte

$$R_X(t_1, t_1) = P_X(t_1)$$

$$C_X(t_1, t_1) = \sigma_X^2(t_1)$$

In fondo, la descriz. stat. in potenza è completa se ha:

$$\gamma_X(t_1) \text{ e } R_X(t_1, t_2)$$



RUMORE TERMICO

$$\gamma_{v_T}(t_1) = 0$$

cost. di Boltzmann $1,37 \cdot 10^{-23}$ [J/K]

$$\sigma_{v_T}^2(t_1) = P_X(t_1) = \frac{2}{3h} (\pi k T)^2 [W]$$

cost. di Planck $6,62 \cdot 10^{-34}$ [J·s]

Un processo si dice stazionario se il carattere probabilistico è costante nel tempo

STAZIONARIETÀ DI UN PROCESSO

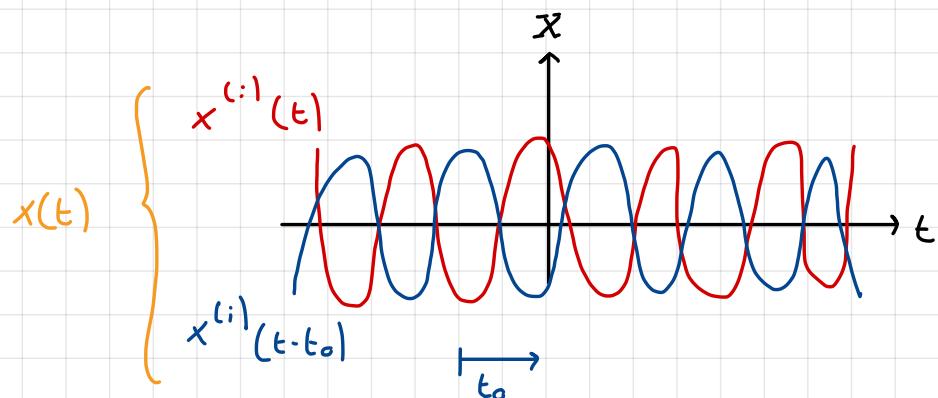
► Intuitivo : se faccio delle "misure statistiche" ($\gamma_X(t_i)$; $f_X(x_i; t_i), \dots$) il risultato non cambia se cambio l'istante t_i , in cui inizio la misura

► Formale : un processo $X(t)$ si dice stazionario in senso stretto (sss) se $X(t)$ e $X(t-t_0)$ hanno le stesse pdf di ordine n qualunque

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_m) = f_X(\underbrace{x_1, \dots, x_m}_{\text{in } X(t)}, \underbrace{t_1-t_0, \dots, t_m-t_0}_{\text{in } X(t-t_0)})$$

ATT!! NON POSSO DIRE $\bar{X}(t) = X(t-t_0)$

► Pratico : un processo $X(t)$ è sss se, per ogni sua realizzazione $x^{(i)}(t)$, anche $x^{(i)}(t-t_0)$ è una possibile realizzazione di $X(t)$ ed è ugualmente probabile



DESCRIZIONE IN POTENZA DEL PROCESSO ARMONICO

$$R_y(t_1, t_2)$$

$$y(t) = a \cdot \cos(z\pi f_0 t + \Phi)$$

$$\Phi \sim \mathcal{U}([0; z\pi])$$

$$\begin{aligned} \gamma_y(t_1) &\stackrel{\text{def}}{=} E[Y(t_1)] = E[a \cdot \cos(z\pi f_0 t + \Phi)] = \\ &= \int_0^{z\pi} (a \cdot \cos(z\pi f_0 t + \varphi)) \cdot f_\Phi(\varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^{z\pi} \left[a \cdot \cos(z\pi f_0 t + \varphi) \cdot \frac{1}{z\pi} \right] d\varphi = 0 \end{aligned}$$

T. della media

$$R_y(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E[Y(t_1) \cdot Y(t_2)] = E[a^2 \cdot \cos(z\pi f_0 t_1 + \Phi) \cdot \cos(z\pi f_0 t_2 + \Phi)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \cos(z\pi f_0 t_1 + \varphi) \cos(z\pi f_0 t_2 + \varphi) f_\Phi(\varphi) d\varphi =$$

Teo.
aspettazione

$$= a^2 \int_0^{z\pi} \left[\frac{1}{2} \cos(z\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\varphi) + \frac{1}{2} \cos(z\pi f_0(t_2 - t_1)) \right] \frac{1}{z\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \frac{1}{z\pi} \int_0^{z\pi} \cos(z\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\varphi) d\varphi + \frac{a^2}{2} \cos(z\pi f_0(t_2 - t_1)) \frac{1}{z\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \frac{1}{z\pi} \int_0^{z\pi} \cos(z\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\varphi) d\varphi + \frac{a^2}{2} \cos(z\pi f_0(t_2 - t_1))$$

STAZIONARITÀ IN SENSO LATO

Un processo $X(t)$ si dice SSL se :

$\gamma_{X-}(\tau)$ non dipende da t_1

\in

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) \quad (\tau \triangleq t_2 - t_1) \quad \text{dipende solo dalla differenza}$$

- Supponendo $X(t)$ SSS, allora sicuramente

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_2; t_2) \Rightarrow \text{pdf 1° ordine}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 = t_1 + \tau \\ \end{array} \right.$$

$$f_X(x)$$

non dipende da t_1

↓

$$\gamma_{X-}(t_1) = E[X(t_1)]$$

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1)$$

↓

$$(t_1 - t_0) \quad (t_2 - t_0), \text{ con } t_0 = t_1$$

La pdf d'ordine 2

dipende solo da $t_2 - t_1 \triangleq \tau$

↓

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) X(t_2)] = R_X(\tau)$$

Teorema : se $X(t)$ è SSS $\Rightarrow X(t)$ è SSL

~~✓~~

cento volte può capitare il viceversa

16/12/20

S'attua volta abb: amo parlato degl: attu: but: d: Staz:one: etici
de: segral: Aleatorie: .

Qest: dtue a f:c:l:tanc: : l problema d: filtraagg: o, hemo
de: valori definiti: .

Andiamo a p. 149 libro Team: a

ERGODICITÀ

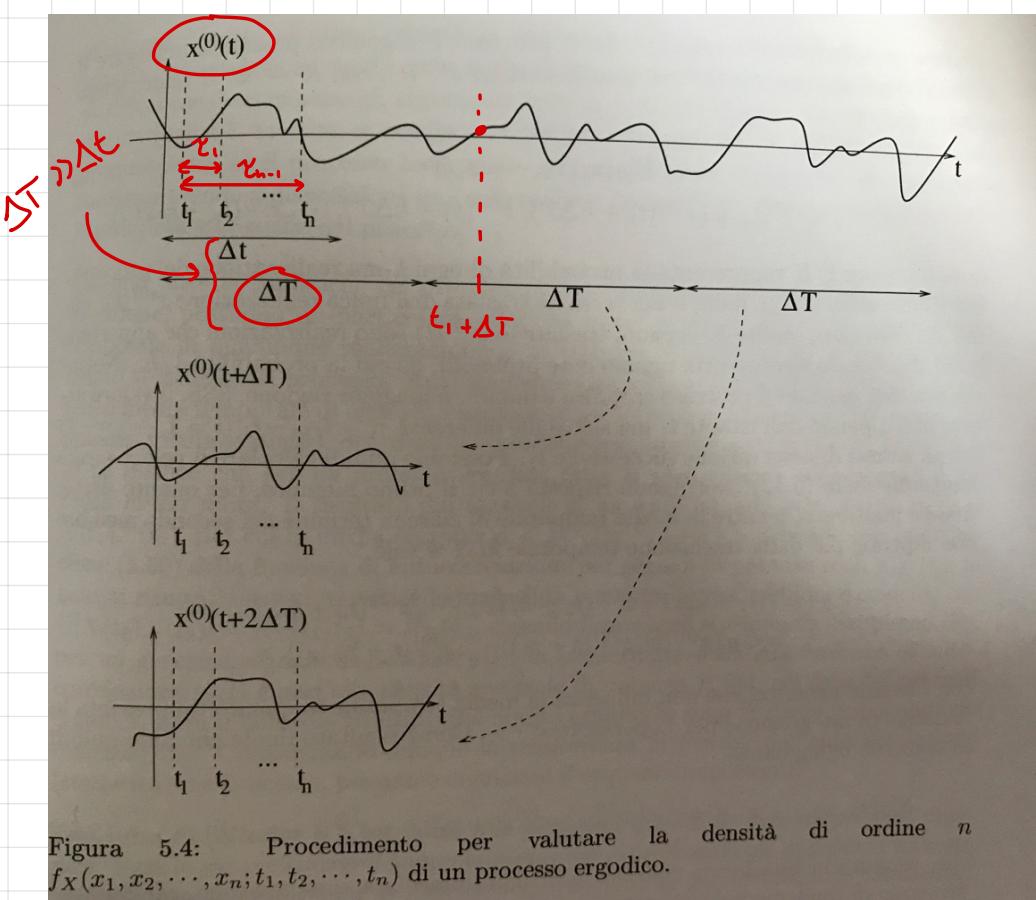


Figura 5.4: Procedimento per valutare la densità di ordine n $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ di un processo ergodico.

Sul piano pratico quello che accade, è medice statistica (Expectation)

$$E[g(X_1, \dots, X_m)] = \langle g(x^{(0)}(t_1), \dots, x^{(0)}(t_1 + \tau_{m-1})) \rangle$$

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} "g(\dots)" dt$$

Coincide (=) con una cosi: spettiva media temporale

Es. $g(\bar{X}_i) = \bar{X}_i$, $\gamma_{\bar{X}}(t_1) = E[\bar{X}(t_1)] = <\bar{x}^{(i)}(t)> \rightarrow$ valore medio temporale

$$g(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2,$$

$$R_X(\tau) = E[\bar{X}(t_1) \cdot \bar{X}(t_2)] = <\bar{x}^{(i)}(t) \cdot \bar{x}^{(i)}(t+\tau)> = P_X(f)$$

$$\tau = t_2 - t_1$$

$$= \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} x(t) x(t+\tau) dt$$

T. Wiener - Kintchine per Processi Ergodici:

Se un processo è Ergodico, allora tutte le sue realizzazioni hanno la stessa (autocorrelazione e) Densità spettrale di potenza, la quale è la $\hat{f}[\cdot]$ della Autocorrelazione statistica:

$$P_X(f) = \hat{f}[R_X(\tau)]$$

Al prof interessa che sappiamo ... (P. successiva)

STAZIONARIETÀ dei Segnali Aleatori

► "In Senso Stretto" (SSS)

- Formalmente: $f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_X(x_1, \dots, x_n; t_1 - t_0, \dots, t_n - t_0)$, $\forall t_0$
- Intuitivamente: Se $x^{(i)}(t)$ è una realizzazione di $X(t)$, allora anche $x^{(i)}(t-t_0)$ è una realizzazione di $X(t)$ ed è **UQALMENTE PROBABILE**
- Praticamente: qualunque misura statistica (medie campione,istogramma, etc.) non dipende dell'istante iniziale di misura (origine dell'asse t)

► "In Senso Lato" (SSL o WSS)

Se R_x è costante e $R_{xx}(v)$ dipende solo da $v = t_2 - t_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_x(0) > 0 \\ R_x(\tau) = R_x(-\tau) \\ R_x(0) \geq |R_x(v)| \end{cases}$$

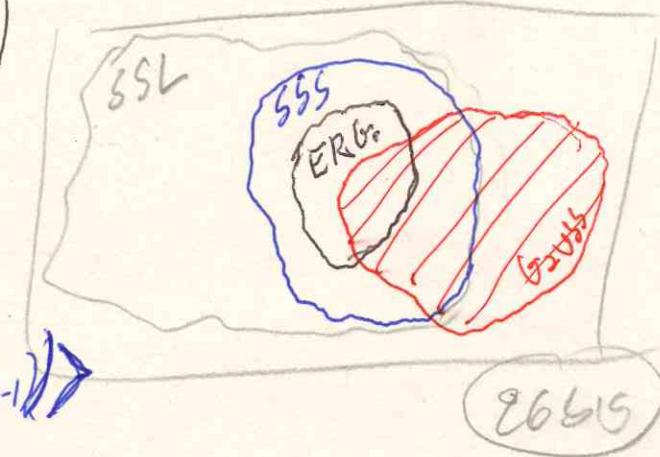
ERGODICITÀ (dei Processi SSS)

- Formalmente: (vedi metodo di ~~stima~~ pdf di ordine n di singola $x^{(0)}(t)$)
- Intuitivamente: ogni realizzazione è **TIPICA** del Processo e ne riassume in sé tutte le proprietà statistiche

- Praticamente: Medie Statistiche = Medie Temporali

$$E[g(x_1, \dots, x_n)] = \langle g(x^{(0)}(t), x^{(0)}(t+\tau), \dots, x^{(0)}(t+n\tau)) \rangle$$

TEO. WIENER + INTRODUZIONE
PER PROCESSI ERGODICI



SSL \Rightarrow SSS
SSL + Gaussiano \Rightarrow SSS

... ECCEZIONE, per processi GAUSSIANI

non vicino

Per processi SSL, $R_X(\tau)$ rispetta 3 proprietà:

$$1) R_X(0) > 0$$

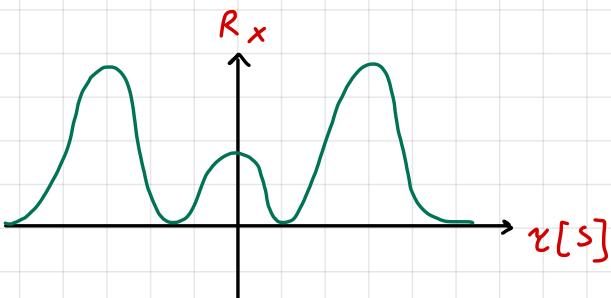
$$(R_X(\tau) = E[X(t) \cdot X(t+\tau)])$$

$$2) R_X(-\tau) = R_X(\tau)$$



$$3) R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$$

$$R_X(0) = E[X^2(t)] (\forall t)$$



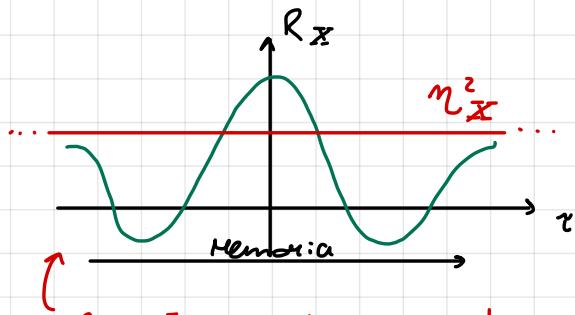
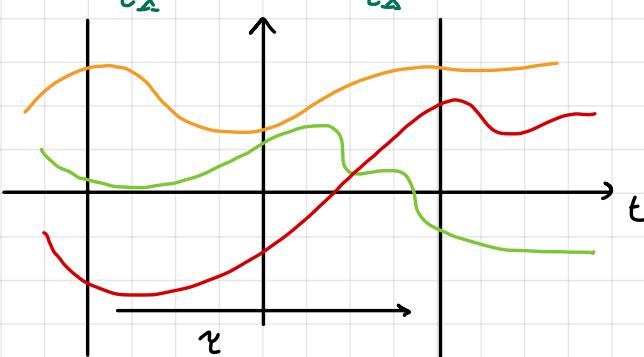
$$E[X(t_1) X(t_2 - \tau)]$$

$$E[X(t_1) \circ X(t_1 + \tau)],$$

$$E[(X(t) \pm X(t+\tau))^2] \geq 0$$

$$E[X(t_1)] \cdot E[X(t_1 + \tau)]$$

$$\pm 2 E[X(t) X(t+\tau)]$$



Se è così, si dice

"Processo a Memoria Breve"

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - n_X^2$$

durata $C_X(\tau)$ = Memoria del processo

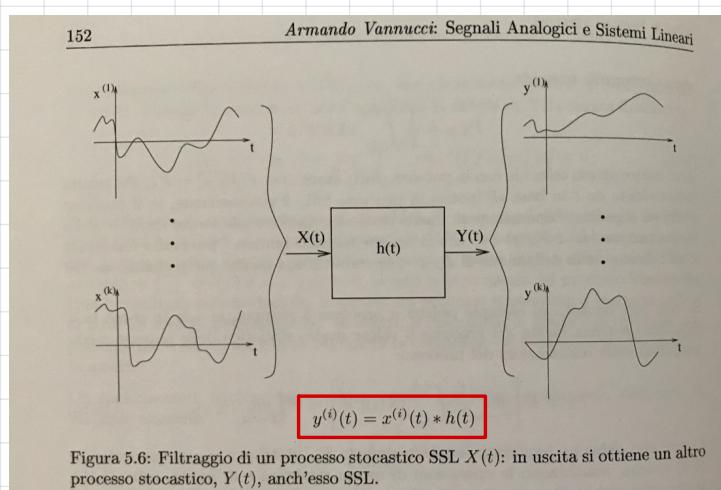


Figura 5.6: Filtraggio di un processo stocastico SSL $X(t)$: in uscita si ottiene un altro processo stocastico, $Y(t)$, anch'esso SSL.

FILTRAGGIO DI SEGNALI ALEATORI

$t \in \mathbb{R}$

$$\bar{Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(\tau) h(t-\tau) d\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} X(\tau_n) h(t-\tau_n) \Delta\tau$$

\uparrow

$[X(\tau_1), X(\tau_2), \dots, X(\tau_m)]$

Se $X(t)$ è Gaussiano

Allora

$$\begin{bmatrix} Y(t_1) \\ Y(t_2) \\ \vdots \\ Y(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}(\tau_1) \\ \vdots \\ \bar{X}(\tau_m) \end{bmatrix}$$

è Gaussiano
anche lì:

$\Rightarrow Y(t)$ è un processo Gaussiano

Se $X(t)$ è sss, $f_X(x_1, \dots, x_m; t_1-t_0, \dots, t_m-t_0)$

$$\begin{aligned} \bar{Y}(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(\theta) h(t-t_0-\theta) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(\tau-t_0) h(t-\tau) d\theta \end{aligned}$$

ossev.
in $[t_1, \dots, t_m]$

$\theta + t_0 = \tau$
 $\tau - t_0 = \tau - t_0$
 $d\theta = d\tau$

$$f_Y(y_1, \dots, y_m; t_1-t_0, \dots, t_m-t_0) = f_Y(y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_m)$$

$\Rightarrow Y(t)$ è sss

FILTRAGGIO DI PROCESSO SSL

$$\bar{Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(t+\sigma) h(-\sigma) d\sigma ; \quad Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(t-\sigma) h(\sigma) d\sigma$$

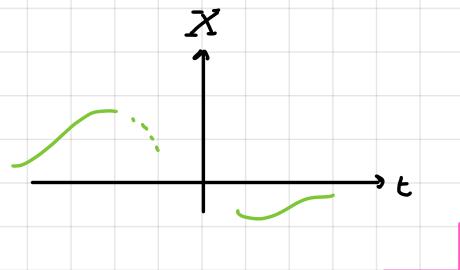
$$R_{\bar{X}}(z)$$

Tutte le realizzazioni d' un processo SSL sono segnali:

d' potenza $x^{(1)}(t)$.

$$\begin{matrix} m_X & \rho_X & \sigma_X^2 \\ \nearrow & \uparrow & \searrow \\ \bar{X}(t_1) \end{matrix}$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow \pm\infty} E[\bar{X}^2(t_1)] > 0$$



$$\begin{aligned} m_Y(t_1) &\stackrel{\text{T. della Media}}{=} E[\bar{Y}(t_1)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(t_1-\sigma) h(\sigma) d\sigma\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[\bar{X}(t_1-\sigma)] h(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} m_X h(\sigma) d\sigma = \\ &= m_X \cdot H(0) \end{aligned}$$

$$\rho_X = R_X(0)$$

Io punto fuori:
perché ha la funzione
di un coeff.

$$f_Y(y_1, y_2; t_1, t_2)$$

$$R_Y(t_1, t_2) = E[\bar{Y}(t_1) \bar{Y}(t_2)] =$$

$$\begin{aligned} &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(t_1-\sigma) h(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(t_2+\sigma) h(-\sigma) d\sigma\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma_2) \int_{-\infty}^{+\infty} h(-\sigma_1) E[\bar{X}(t_1-\sigma_1) \bar{X}(t_2+\sigma_1)] d\sigma_1 d\sigma_2 = \\ &= f_X(x_1, x_2; t_1 - \sigma_1, t_2 + \sigma_1) \end{aligned}$$

$$f_X(x_1, x_2; t_1 - \sigma_1, t_2 + \sigma_1)$$

essendo per:

$$R_X(\alpha) = R_X(-\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(-\theta_1) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_2) R_X(t_1 - \theta_2 - t_2 - \theta_1) d\theta_2 d\theta_1 \\
 &\quad \| \\
 &\quad R_X(x - \theta_2 - \theta_1) \\
 &= h(-x) h(x) * R_X(x)
 \end{aligned}$$

R: capitolando

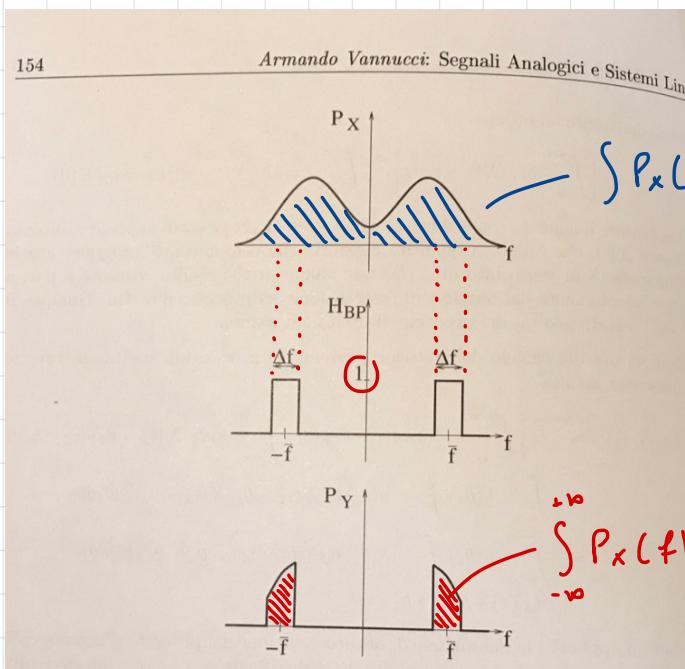
$$\begin{array}{c}
 X(t) \xrightarrow{h(t)} Y(t) \\
 \text{SSL} \Rightarrow \text{SSL}
 \end{array}
 \quad \left\{
 \begin{array}{l}
 \mathcal{M}_Y = \mathcal{M}_X \cdot H(0) \\
 R_Y(x) = R_X(x) * h(x) * h(-x) \\
 P_Y(f) = P_X(f) \cdot \underbrace{H(f) \cdot H(-f)}_{\substack{\text{F. d:} \\ \text{autocorrelaz.}}}
 \end{array}
 \right.$$

$P_X = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(f) df$ ← La potenza media è l'∫ della $R_X(x)$

$P_Y = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_Y(f) df$

$\textcircled{=} \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(f) \cdot |H(f)|^2 df$

$h(t) \in \mathbb{R}$
 \Downarrow
 $H(-f) = H^*(f)$



$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} P_X(f) \{ H_{BP}(f) \} \\
 &= P_Y > 0 \\
 &< P_X
 \end{aligned}$$

$$P_X(f) = \Im[R_X(\tau)] \quad \text{per processi SSL è la}$$

DENSITÀ SPECTRALE DI POTENZA

4° T. Di Wiener e Kintchine per processi SSL

P. 155

uguale al secondo

$$P_Y(f) = P_X(f) |H(f)|^2$$

esercizio esame

Filtraggio

es: 113

(113) Un processo stocastico SSL ha media $\eta_X = 1$ e autocorrelazione $R_X(\tau) = \text{sinc}(B\tau) + 1$. Esso transita in un filtro con risposta impulsiva $h(t) = B\text{sinc}(Bt)$. Verificare se il processo di uscita $Y(t)$ è SSL e, in caso positivo, calcolare η_Y e $R_Y(\tau)$. Calcolare quanto vale la potenza media di $Y(t)$ e quanto quella di $X(t)$.

2

$$\underline{X}(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \underline{Y}(t)$$

$$\eta_X = 1$$

$$R_X(\tau) = \text{sinc}(B\tau) + 1$$

$$h(t) = B \cdot \text{sinc}(Bt)$$

$$? = \eta_Y, R_Y(\tau), \text{SSL}, P_Y, P_X ?$$

E' SSL? sì

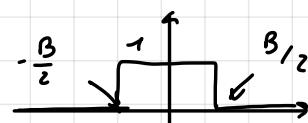
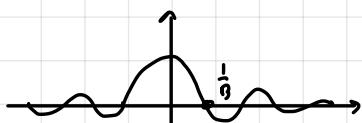
↳ da qui ricaviamo

$$\eta_Y = \eta_X \cdot H(0)$$

$$h(t) = B \cdot \text{sinc}(Bt)$$

Trasf. matriceale $\text{sinc}(t)$
+ Cambio di scala + ammagnetata

$$H(f) = B \frac{1}{B} \Pi\left(\frac{t}{B}\right) = \Pi\left(\frac{f}{B}\right)$$

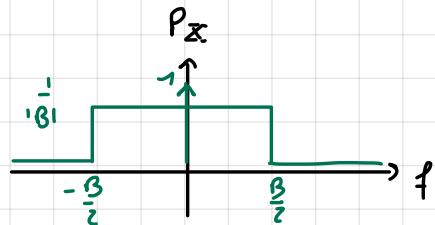


$$R_X(\tau) = \text{sinc}(\beta\tau) + 1$$



$$\downarrow \frac{1}{f}$$

$$P_X(f) = \frac{1}{|\beta|} \Pi\left(\frac{f}{\beta}\right) + S(f)$$



$$\gamma_Y = \gamma_X H(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(t) * h(-t)$$

$$\downarrow \frac{1}{f}$$

*met Herbe o no
no cambia*

$$P_Y(f) = P_X(f) \cdot |H(f)|^2 = \left[\frac{1}{|\beta|} \Pi\left(\frac{f}{\beta}\right) + S(f) \right] \left| \frac{\beta}{|\beta|} \Pi\left(\frac{f}{\beta}\right) \right|^2$$

$$= \frac{1}{|\beta|} \Pi\left(\frac{f}{\beta}\right) + S(f) = P_X(f) \xleftrightarrow{\frac{1}{f}} R_Y(\tau) = R_X(\tau)$$

$$P_Y = P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(f) df = \beta \frac{1}{\beta} + 1 = 2$$

//

$$E[X^2(t, \cdot)]$$

Proprietà Autocorrelazione

$$1) R_X(\tau) > 0$$

$$2) R_X(\tau) = R_X(-\tau) \quad \text{perciò} \Rightarrow P_X(f) \text{ è Reale e Par.}$$

$$3) R_X(\tau) \geq |R_X(\tau)| \quad \forall \tau \quad \epsilon \geq 0, \quad \forall f$$

$$R_X(\tau) \triangleq E[X(t_1)X(t_1 + \tau)]$$

D: norma, $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} R_X(\tau) \rightarrow \gamma_X^2$

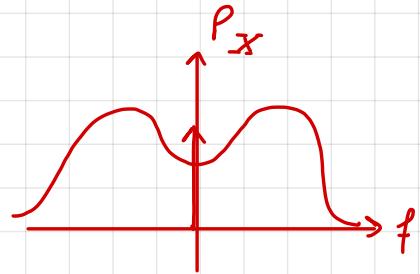
$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} C_X(\tau) \rightarrow 0$

$$\underbrace{C_X(\tau)}_{\uparrow} = R_X(\tau) - \gamma_X^2$$

Durata = "memoria del processo"

$$\downarrow \gamma$$

$$P_X(f) = \gamma_X^2 \delta(f)$$



$$P_X(f) = \underbrace{\gamma_X^2 [C_X(\tau)]}_{\text{Punte continue}} + \gamma_X^2 \delta(f)$$

FILTRAGGIO DI SEGNALI ALEATORI

$$X(t) \rightarrow h(t) \rightarrow Y(t) \quad (h(t) \in \mathbb{R})$$

Proprietà:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sss} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \text{sss} \\ \text{gaussiano} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \text{gaussiano} \\ \text{ssl} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \text{ssl} \end{array} \right\}$$

gaussiano + ssl = sss

$$\left. \begin{array}{l} \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \begin{cases} \mu_x \cdot H(0) &= \mu_y \\ R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) &= R_y(\tau) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = A_h$$

$$(T\text{o}. W-K \text{ ssc}) \quad \uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$P_X(f) \cdot |H(f)|^2 = P_Y(f)$$

$$P_Y = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_Y(f) df$$

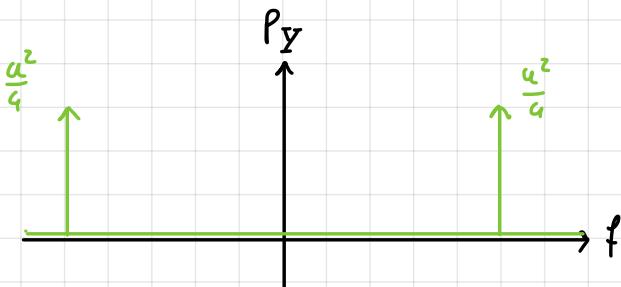
PROCESSO ARMONICO

$$Y(t) = a \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi) ; \quad \phi \sim U([0; 2\pi])$$

SSL

$$\begin{cases} \gamma_y = 0 \\ R_y(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (= C_y(\tau) \text{ autocorrelazione}) \end{cases}$$

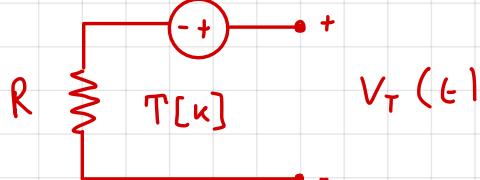
$$P_Y(f) = \frac{a^2}{4} S(f - f_0) + \frac{a^2}{4} S(f + f_0) = \frac{1}{2} [P_y^{(i)}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^{(i)}(t) g^{(i)}(t+\omega)]$$



$$P_Y = \frac{a^2}{2} = E[Y^2(t_1)] = \langle |y^{(i)}(t)|^2 \rangle$$

Segnale PAM

Rumore termico



Gaussiano

$$f_{V_T}(v_1, \dots, v_m; t_1, \dots, t_m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m} |C|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{v} - \underline{v}_0)^T \underline{C}^{-1} (\underline{v} - \underline{v}_0) \right\}$$

- SSL $\underline{\gamma} = [\gamma_1, \dots, \gamma_m] = [\gamma_1, \dots, \gamma]$

→ $\gamma_{v_T}(t_1) = \gamma = 0$ (costante)

→ $R_{V_T}(\tau)$

es: 112

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi G^2}} e^{-\frac{x_1^2}{2G^2}}$$

$$\langle x^{(z)}(t_1) \rangle = k_z$$



$$E[X(t_1)] = E[K] = m_{X=0} \quad (\neq)$$

↑
T. Med: z

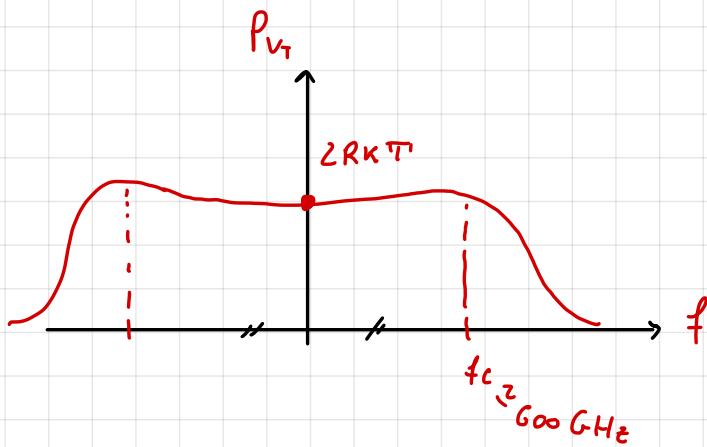
DENSITÀ SPECTRALE DI POTENZA (del rumore termico)

$$P_{V_T}(f) = 2RKT \left[\frac{h(f)}{e^{\frac{h(f)}{kT}} - 1} \right] = \left(\frac{h}{kT} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{kT} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{h}{kT} \right)^3 + \dots$$

$$P_{V_T} = \int P_{V_T}(f) df \quad [R \cdot W]$$

costante d: Planck: $h = 6,62 \cdot 10^{-34} [J \cdot s]$

cost. d: Boltzmann: $K \approx 1,37 \cdot 10^{-23} [J/K]$



$$\text{per } T = 290^\circ K$$

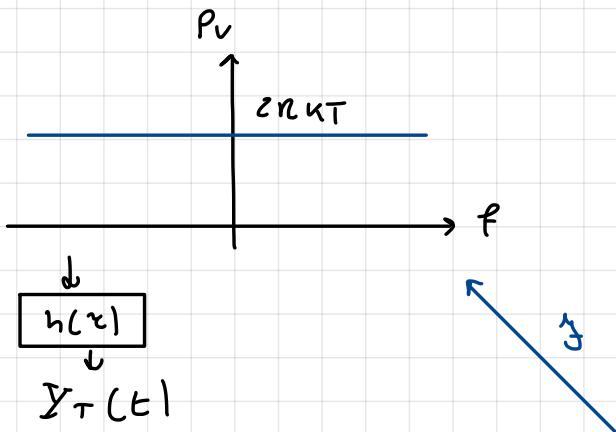
$$\text{s: } h \left(\frac{m(f)}{kT} \right) = 1$$

$$\text{e dunque } P_{V_T}(f_c) = 2RKT \frac{1}{e-1}$$

$$\text{per } f_c \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

Ai mostri: f.m. (ICT)

$$P_{V_T}(f) \approx 2RKT$$

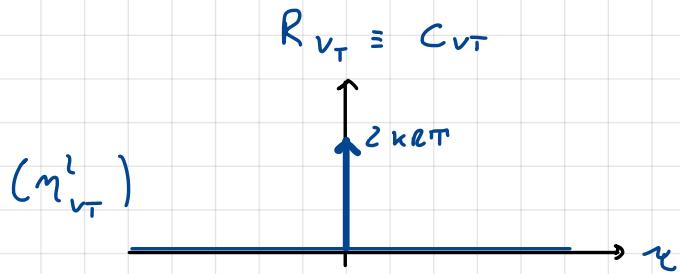


Approssimazione di

"RUMORE BIANCO"

$$\begin{cases} m_{V_T} = 0 \\ P_{V_T}(f) = \text{cost} \end{cases}$$

$$R_{V_T}(z) = 2RkT \cdot \delta(z)$$

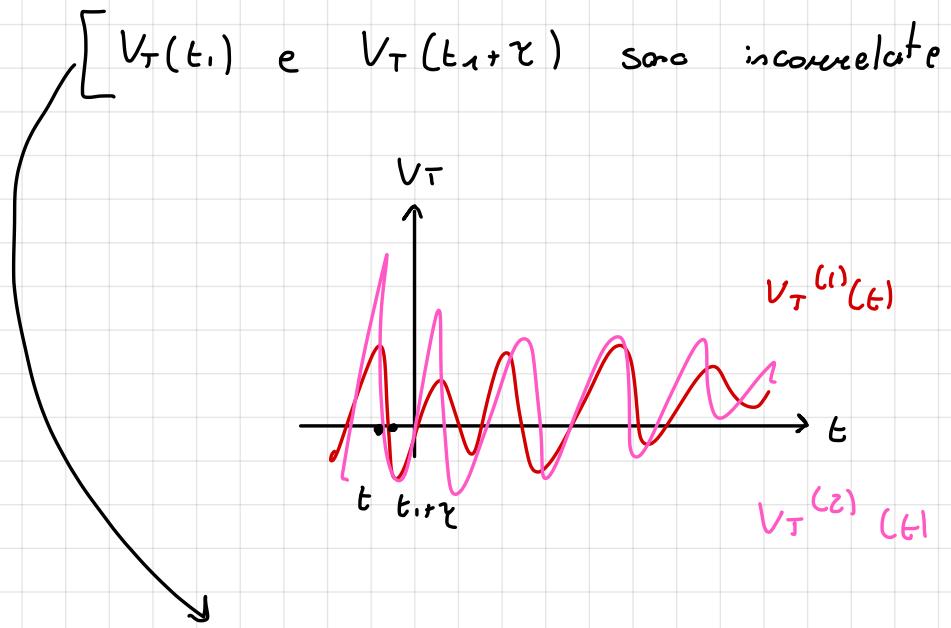


$$C_{V_T}(z) = 2RkT$$

ha durata nulla ...

\Rightarrow Memoria nulla

$$\langle 0 \rangle = E[V_T(t_1) \cdot V_T(t_1 + z)] = E[V_T(t_1)] \cdot \\ (\forall z \neq 0) \cdot E[V_T(t_1 + z)] = \gamma_{V_T} \cdot \gamma_{V_T} = 0$$



Sono anche congiuntamente Gaussiane



$V_T(t_1)$ e $V_T(t_1 + z)$, $\forall z \neq 0$ sono stati stocasticamente indip.

$$P_{Y_T} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{Y_T}(f) df = R_{Y_T}(c) =$$

$$= ZRKT \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df =$$

$$= ZRKT \cdot \boxed{B_N}$$

"BANDA EQUIVALENTE DI RUMORE"

$$B_N = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = E_h$$

$$B_N = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Pi \left(\frac{f}{B_N} \right)^2 df \right)$$

$\underline{Y}_T(t)$ è "RUMORE TERMICO COLORATO"

è ancora Gaussiano, ssc (\Rightarrow SSS), a media nulla,
ma non più bianco

[117] Ad un segnale aleatorio $Y(t)$, con densità spettrale di potenza $P_Y(f)$, viene sommato un rumore bianco $X(t)$ (indipendente da $Y(t)$) generato da un resistore R a temperatura $T [^{\circ}K]$: determinare la densità spettrale di potenza del processo somma $Z(t) = Y(t) + X(t)$.

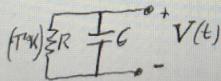
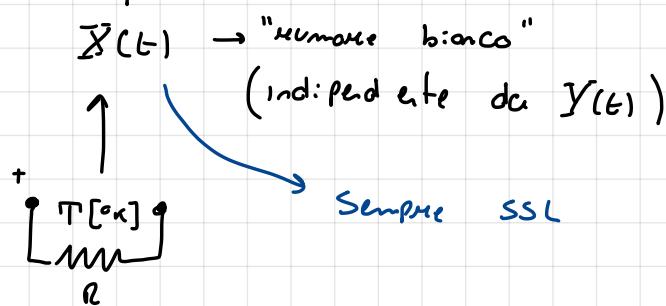


Figure 1: Resistenza rumorosa, connessa in parallelo ad una capacità, dell'esercizio (118).

$$Y(t) \xrightarrow{(+)} Z(t) = Y(t) + X(t)$$



$$P_Z(f) = \Im[R_Z(z)]$$

$$R_Z(z) = E[z(t_1) \cdot z(t_1 + z)] =$$

$$= E[(Y(t_1) + X(t_1)) \cdot (Y(t_1 + z) + X(t_1 + z))] = g(t) \text{ SSL}$$

$$= E[Y(t_1) \cdot Y(t_1 + z)] + E[Y(t_1)] \cdot E[X(t_1 + z)] +$$

→ poiché indipend.

$$+ E[X(t_1) \cdot X(t_1 + z)] + E[X(t_1)] \cdot E[Y(t_1 + z)] =$$

$$= R_Y(z) + R_X(z) + \gamma_Y \gamma_X \cdot z$$

$$\updownarrow \zeta$$

$$P_Z(f) = P_Y(f) + P_X(f) + \underbrace{2 \gamma_X \cdot \gamma_Y}_{\phi} z R K T$$