Quesito A36 *13/2/12*

Un'agenzia di viaggi porta comitive di turisti in visita prima a Roma e poi a Firenze.
Una comitiva si dichiara sufficientemente soddisfatta se trova bel tempo in almeno una delle due città.
Sapendo che la probabilità che a Firenze si trovi bel tempo se a Roma si è trovato brutto tempo è 0,4 e che il 90% delle comitive si dichiarano sufficientemente soddisfatte, qual è la probabilità che una comitiva trovi bel tempo a Roma?
Si usino le seguenti definizioni di eventi: *R* ={Bel tempo a Roma}; *F* ={Bel tempo a Firenze};
C ={Comitiva sufficientemente soddisfatta}.

$P(F|\bar{R}) = 0,4 \qquad P(R) = ?$

$P(C) = 90\% = 0,9$

$C = F \cup R$

$\hookrightarrow \bar{C} = \bar{F} \cap \bar{R}$

$P(\bar{F}|\bar{R}) = 1 - 0,4 = 0,6 \qquad P(A|M) = \dfrac{P(AM)}{P(M)}$

$P(\bar{C}) = 0,1$

$P(\bar{C}) = P(\bar{F}\bar{R}) = P(\bar{F}|\bar{R}) \cdot P(\bar{R}) = P(\bar{F}|\bar{R})[1 - P(R)]$

$P(R) = 1 - \dfrac{P(\bar{C})}{P(\bar{F}|\bar{R})} = 1 - \dfrac{0,1}{0,6} = 0,8\bar{3}$

Quesito A119 *19/11/16*

Il sig. Rossi chiede a un amico di innaffiare una sua pianta mentre è in vacanza. Se la pianta non sarà innaffiata probabilità di trovarla morta è l'80%. Trattandosi di una pianta delicata, anche se sarà innaffiata la probabilità di trovarla morta è il 15%. La probabilità che l'amico ricordi di innaffiare la pianta è il 90%.

a) Qual è la probabilità che il sig. Rossi trovi la pianta viva al suo ritorno?

b) Se trova la pianta morta, qual è la probabilità che l'amico abbia dimenticato di innaffiarla?

$P(\bar{V}|\bar{I}) = 0{,}8$ $P(I) = 0{,}9$ $P(V|\bar{I}) = 0{,}2$

$P(\bar{V}|I) = 0{,}15$ a) $P(V) = ?$ $P(V|I) = 0{,}5$

b) $P(\bar{I}|\bar{V}) = ?$ $P(\bar{I}) = 0{,}1$

Prob totale

$P(V) = P(V|I) \cdot P(I) + P(V|\bar{I}) \cdot P(\bar{I}) = 0{,}85 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}785$

$P(\bar{I}|\bar{V}) \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(\bar{V}|\bar{I}) \cdot P(\bar{I})}{P(\bar{V})} = \dfrac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{1-0{,}785} = 0{,}372$

N.B

Bayes

$P(H|A) = \dfrac{P(A|H)\, P(H)}{P(A)}$

Quesito A53 *23/11/12*

Il sig. Rossi teme di avere una certa malattia, pertanto si sottopone a un test diagnostico che ha le seguenti caratteristiche:

$P(R^c \mid M) = 10^{-2}$ (Prob. di falso negativo)
$P(R \mid M^c) = 6 \cdot 10^{-2}$ (Prob. di falso positivo)

dove R ed M sono i seguenti eventi:

R = {Il test rivela presenza di malattia} (ossia il test è positivo)
M = {La malattia è presente}.

Il test del sig. Rossi risulta positivo, ma il medico curante lo rassicura: "Sì, il test è positivo, ma nonostante ciò lei ha l'80% di probabilità di essere sano".
2a) Si calcoli la probabilità che un individuo scelto a caso fra la popolazione sia affetto dalla malattia (ovvero l'incidenza della malattia sulla popolazione).
[*Facoltativo*: alla luce del risultato si commenti l'affermazione del medico, apparentemente paradossale.]
2b) Per sicurezza il test viene ripetuto (in modo indipendente) e il risultato è nuovamente positivo. Qual è la probabilità che il sig. Rossi sia effettivamente malato dato il doppio test positivo?

Medico $P(\bar{M} \mid R) = 0{,}8 \qquad P(M \mid R) = 0{,}2$

$$P(R \mid M) = 1 - P(\bar{R} \mid M) = 0{,}99$$

$$P(R) = P(R \mid M) \cdot P(M) + P(R \mid \bar{M})\, \underbrace{P(\bar{M})}_{1-P(M)}$$

$$P(M \mid R) = \frac{P(R \mid M) \cdot P(M)}{P(R)} \Rightarrow P(R) \cdot P(M \mid R) = P(R \mid M) \cdot P(M)$$

$$= 0{,}2\left[0{,}99 \cdot P(M) + 0{,}06 \cdot [1 - P(M)]\right] = 0{,}99\, P(M)$$

$$= 0{,}198\, P(M) + 0{,}012 - 0{,}012\, P(M) = 0{,}99\, P(M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M) = \frac{1}{67} = 0{,}015$$

(b) $$P(R_1 R_2) = P(R_1 R_2 \mid M) \cdot P(M) + P(R_1 R_2 \mid \bar{M})\, P(\bar{M})$$

$$P(R_1 \mid M) \cdot P(R_2 \mid M) = [P(R \mid M)]^2$$

$$P(R_1 R_2) = 0{,}99^2 \cdot 0{,}015 + (0{,}06)^2 \cdot [1 - 0{,}015] = 0{,}0182$$

$$P(M \mid R_1 R_2) = \frac{0{,}99^2 \cdot 0{,}015}{0{,}0182} \simeq 0{,}807.$$

Quesito A22 *18/2/11*

Un tiratore dispone di due fucili apparentemente identici ma di diversa precisione: la probabilità di centrare un bersaglio col fucile A è $P_A = 0,8$ e col fucile B è $P_B = 0,6$.
Il tiratore sceglie a caso uno dei due fucili e spara 10 colpi ottenendo 7 centri.
Volendo continuare a sparare (cercando di fare più centri possibile) gli conviene cambiare fucile oppure no?

$P(A) = P(B) = 0,5$

$A \{$fucile scelto $A\}$

$B \{$fucile scelto $B\}$

$$P(A|C) < P(B|C) \Rightarrow \frac{P(A|C)}{P(B|C)} < 1$$

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)\,P(A)}{P(C)} = \binom{10}{7} p_A^7 (1-p_B)^3 \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(C|A) = \binom{10}{7} p_A^7 (1-p_A)^{10-7} \Rightarrow 120 \cdot 0,8^7 \cdot 0,2^3 = 0,2013$$

$$P(C|B) = \binom{10}{7} p_B^7 (1-p_B)^3 = 120 \cdot 0,6^7 \cdot 0,4^3 = 0,215$$

$$\frac{P(A|C)}{P(B|C)} < 1 \Rightarrow \frac{\cancel{\binom{10}{7}} p_A^7 (1-p_A)^3 \cdot \frac{P(A)}{\cancel{P(C)}}}{\cancel{\binom{10}{7}} (p_B)^7 (1-p_B)^3 \cdot \frac{P(B)}{\cancel{P(C)}}} = \left(\frac{P(A)}{P(B)}\right)^7 \left(\frac{1-p_A}{1-p_B}\right)^3 < 1$$

$$= \left(\frac{0,8}{0,6}\right)^7 \cdot \left(\frac{0,2}{0,4}\right)^3 = 0,94 < 1$$ conviene cambiare fucile

$$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B)\,P(B) = 0,2081$$

$$P(A|C) = \frac{0,2013 \cdot 0,5}{0,2081} = 48\% \qquad P(B|C) = \frac{0,215 \cdot 0,5}{0,2081} = 52\%$$

Quesito A32 *16/1/12*

Le probabilità che un calciatore di serie A e un calciatore dilettante segnino un gol tirando un calcio di rigore contro un certo portiere siano rispettivamente $p_A = 0{,}8$ e $p_D = 0{,}5$.
Un calciatore scelto a caso da un gruppo formato da 2 calciatori di serie A e 8 dilettanti tira 8 calci di rigore e segna 6 gol.
Qual è la probabilità che il calciatore fosse di serie A e quale che fosse dilettante?

M = { 6 gol su 8 }

A = { calciatore di serie A }

B = { calciatore dilettante }

$P(A|M) = ?$ $P(B|M) = ?$

$$P(A|M) = \frac{P(M|A)\,P(A)}{P(M)}$$

$$P(M) = P(M|A)\underbrace{P(A)}_{\frac{2}{10}} + P(M|D)\cdot \underbrace{P(D)}_{\frac{8}{10}}$$

$$P(M|A) = \binom{8}{6} p_A^6 (1-p_A)^2 = 28 \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2936$$

$$P(M|D) = \binom{8}{6} p_D^6 (1-p_D)^2 = 28 \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}1093$$

$$P(M) = 0{,}2936 \cdot \frac{2}{10} + 0{,}1093 \cdot \frac{8}{10} = 0{,}1616$$

$$P(A|M) = 0{,}2936 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{0{,}1616} \simeq 0{,}4$$

$$P(D|M) \simeq 0{,}6$$

Quesito A98 *22/11/2014*

Certi pezzi meccanici subiscono due lavorazioni indipendenti da parte di due macchine distinte *A* e *B*. La macchia *A* introduce difetti nel 5% dei pezzi lavorati.

a) Sapendo che risulta difettoso il 7% dei pezzi finali (ossia che hanno subito entrambe le lavorazioni) si calcoli il valore della probabilità $P(D_B)$ che la macchina *B* introduca difetti.

b) Se un pezzo finale scelto a caso risulta difettoso, si calcoli la probabilità che esso abbia subito difetti da entrambe le macchine.

Per lo svolgimento si usino i seguenti eventi:

D_A = { La macchina *A* ha introdotto un difetto }

D_B = { La macchina *B* ha introdotto un difetto }

D = { Il pezzo finale è difettoso }

{Suggerimento: per prima cosa si esprima *D* utilizzando D_A e D_B }

$P(D_A) = 5\%$ $\qquad P(D) = 7\%$

$P(D_B) = ?$

$D = D_A \cup D_B$

a

$$P(D) = P(D_A) + P(D_B) - P(D_A D_B)$$

$$= P(D_A) + P(D_B) - \underbrace{P(D_A) \cdot P(D_B)}_{\text{indipendenti}}$$

$$= P(D_A) + P(D_B)\left[1 - P(D_A)\right] \Rightarrow P(D_B) = \frac{P(D) - P(D_A)}{1 - P(D_A)} = \frac{0,07 - 0,05}{0,95} = 0,021 = 2,1\%$$

b

$$P(D_A D_B | D) = \frac{P(D | D_A D_B) \cdot P(D_A \cdot P D_B)}{P(D)}$$

in questo indipendente perchè se ho D_A e D_B difettosi lo sarà pure D.

$$= \frac{P(\cancel{D}\, D_A D_B)}{P(D)} = \frac{P(D_A)\; P(D_B)}{P(D)} = \frac{0,05 \cdot 0,021}{0,07} = 0,015 \simeq 1,5\%$$

Quesito A20 N

La vita di un certo tipo di lampade è rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, u(x)$. Due di tali lampade vengono accese contemporaneamente in una stanza. Si calcoli la probabilità che: a) all'istante generico t_0 le lampade siano entrambe accese; b) all'istante t_0 siano entrambe spente; c) le lampade siano entrambe accese osservando che all'istante t_0 nella stanza c'è luce.

a) $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$ $\qquad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$

A e B Indipendenti $\qquad P(A) = P(B) = \{x > t_0\} = \{y > t_0\} = \int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$

$= 1 - \int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - \cancel{\lambda}\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\cancel{\lambda}}\right]_0^{t_0} = \cancel{1} + e^{-\lambda t_0} - \cancel{1} = e^{-\lambda t_0}$

$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = e^{-2\lambda t_0}$

b) $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) = \left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)^2 = 1 - 2e^{-\lambda t_0} + e^{-2\lambda t_0}$

c) $P(AB \mid A\cup B) = \dfrac{P(AB \mid A \cup B)}{P(A\cup B)}$

$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$= e^{-\lambda t_0} + e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0} = 2e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0}$

Numeratore scomposto $\quad P(AB\underbrace{A}_{\text{A acceso indipendente}} \cup \underbrace{A B B}_{\text{dipendente da B}}) = P(AB)$

$= \dfrac{e^{-2\lambda t_0}}{2e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0}} = \dfrac{e^{-2\lambda t_0}\, e^{\lambda t_0}}{2 - e^{-\lambda t_0}} = \dfrac{e^{-\lambda t_0}}{2 - e^{-\lambda t_0}}$

Quesito **A6**

Il sig. Rossi ha l'abitudine di entrare ogni giorno del bar B1 o nel bar B2 (scelto a caso) in un istante a caso fra le 10 e le 11 e di intrattenervisi esattamente 10 min per prendere un caffè. Un giorno il sig. Bianchi entra nel bar B1 alle 10:30 e osserva che il sig. Rossi non c'è.
- E' più probabile che il sig. Rossi sia già uscito o che non sia mai entrato? (Si assuma indipendenza fra gli eventi "scelta del bar" e "istante di entrata del sig. Rossi").

U = { alle 10,30 il Sig Rossi è già uscito

M = { Prima delle 10:30 non è mai entrato }

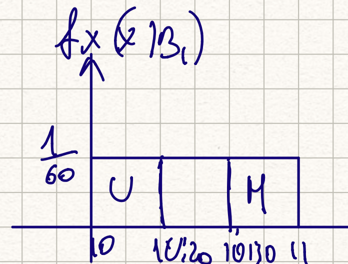
NC { il sig Rossi non c'è }

$P\{U|NC\}$?

$P\{M|NC\}$?

$B_1 = \{$ scelta Bar 1 $\}$

$B_2 = \{$ scelta Bar 2 $\}$



è sostanzialmente di B

$$\frac{P(U|NC)}{P(NC)} = P(U)$$

$$P(U) = P(U|B_1) \cdot \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\parallel}{P(B_1)}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{P(U|B_2)}} \cdot \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\parallel}{P(B_2)}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(U|B_1) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

Allora è più probabile che non sia mai entrato.

$$P(M) = P(M|B_1) \cdot \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\parallel}{P(B_1)}} + \underset{1}{\underset{\parallel}{P(M|B_2)}} \cdot \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\parallel}{P(B_2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$P(M|B_1) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

in quanto non è entrato in B_1 se sceglie B_2

Quesito A34

Un satellite artificiale deve svolgere una missione di osservazione della Terra di durata $T = 6$ mesi. Se l'apparecchiatura di osservazione ha una vita rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, u(x)$, quale deve essere il valore di λ (espresso con l'appropriata unità di misura) necessario affinché la probabilità che l'apparecchiatura funzioni almeno per tutta la durata della missione sia $P = 0{,}9$? Qual è il corrispondente valor medio della vita dell'apparecchiatura, $E\{X\}$? La missione viene effettuata con un'apparecchiatura avente proprio il valore di λ trovato sopra, ma purtroppo al termine della missione l'apparecchiatura risulta non funzionante: qual è la probabilità che abbia funzionato per almeno $T_1 = 5$ mesi ?

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

a) $P_S = 0{,}9$ $\quad A = \{\text{apparecchiature funziona per tutto il tempo}\} = \{X > T\} = 0{,}9$

b) $E[X] = ?$

$$P\{X>6\} = \int_6^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \cancel{\lambda}\left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\cancel{\lambda}}\right]_6^{\infty} = e^{-6\lambda} = 0{,}9$$

$$e^{-6\lambda} = 0{,}9 \Rightarrow -6\lambda = \log 0{,}6 \Rightarrow \lambda = 1{,}75\cdot 10^{-2} \text{ mesi}^{-1}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}75\cdot 10^{-2}\text{ mesi}^{-1}} \simeq 57{,}14 \text{ mesi} \simeq 4 \text{ anni e } 9 \text{ mesi}$$

c) $\lambda = 1{,}75\cdot 10^{-2}$

$$P\{X>5 \mid X<6\} = \frac{P\{5<x<6\}}{P\{x<6\}} = \frac{\cancel{\lambda}\int_5^6 e^{-\lambda x}\,dx}{\cancel{\lambda}\int_0^6 e^{-\lambda x}\,dx} = \frac{\left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_5^6}{\left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_6^6} =$$

$$\frac{e^{-6\lambda} - e^{-5\lambda}}{e^{-6\lambda} - 1} = \frac{0{,}9 - e^{-5\cdot 1{,}75\cdot 10^{-2}}}{0{,}9 - 1} = 0{,}1621$$

Quesito A12 *13/09/11*

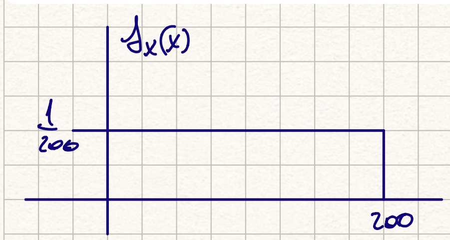
La quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca quando si ferma a rifornire di benzina la sua auto è una variabile aleatoria X (supposta continua) uniformemente distribuita fra 0 e 200 euro.

Il sig. Rossi ha l'abitudine di comportarsi così:

- se in tasca ha più di 60 euro mette 30 euro di benzina;
- se ha meno di 60 euro (o 60 euro) mette una quantità di benzina corrispondente alla metà dei soldi che ha in tasca.

Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y = {Quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca dopo un generico rifornimento}.

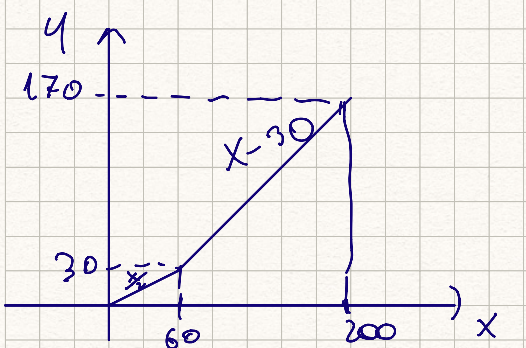
(N.B. – Si ipotizza che occorrano sempre più di 30 euro per raggiungere il pieno).



$x > 60 \to 30$ euro

$x \leq 60 \to \frac{x}{2}$

$$y = g(x) = \begin{cases} x - 30 & x > 60 \\ \frac{x}{2} & x \leq 60 \end{cases}$$



$$g'(x) = \begin{cases} 1 & x > 60 \\ \frac{1}{2} & x \leq 60 \end{cases}$$

$y > 30 \to y = x - 30 \Rightarrow x_1 = y + 30$

$y < 30 \to y = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{200}}{1} & 30 < y < 170 \ (60 < x < 200) \\ \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{2}} & 0 < y < 30 \ (0 < x < 60) \\ \emptyset & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{200} \\ \frac{1}{100} \\ \emptyset \end{cases}$$

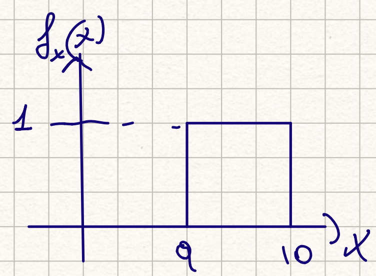
Quesito A45 *2/7/12*

La velocità con cui gli atleti di un certo gruppo corrono i cento metri (velocità supposta costante durante tutta la gara) è una v.a. X uniformemente distribuita fra 9 e 10 m/s.
Si trovi la densità di probabilità $f_Y(y)$ della v.a. Y = {Tempo impiegato a correre i cento metri da un atleta di tale gruppo}.
Si organizza una gara (di cento metri) con 6 di tali atleti scelti a caso dal gruppo. Qual è la probabilità che il 1° e il 2° classificato arrivino al traguardo in meno di $t_0 = 10{,}4$ s e tutti gli altri arrivino in un tempo maggiore di t_0?

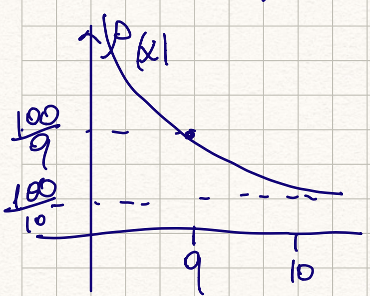
$f_Y(y) = ? \leftarrow Y = \{$ tempo impiegato $\}$

$X \rightarrow f_X(x)$ uniforme $\quad 9-10 \left[\frac{m}{s}\right] \quad s = 100m$

$y = s(x) = \frac{100}{x}$

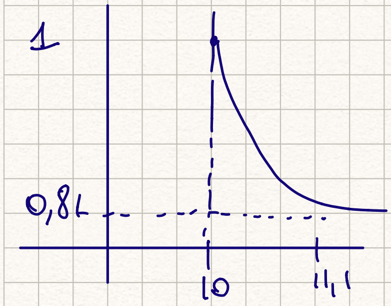


$s'(x) = -\frac{100}{x^2}$



$y = \frac{100}{x} \Rightarrow x_1 = \frac{100}{y}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\Pi\left(\frac{100}{y} - 9{,}5\right)}{\frac{100}{x^2}} \Rightarrow \dfrac{1}{\frac{100}{\frac{(100)^2}{y^2}}} \\ \emptyset \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{100}{y^2} & \frac{100}{10} < y < \frac{100}{9} \\ \emptyset \end{cases}$$



2° Parte

$$t = \frac{s}{v} = \frac{100}{x} \qquad t_0 = 10{,}4\ s$$

$$p = \{t < 10{,}4\}$$

$$\binom{6}{2} p^2 (1-p)^2$$

$$p = P\left\{x > \frac{100}{10{,}4} = 9{,}615\right\} \qquad f_x(x) = \Pi(x - 9{,}5)$$

$$p = \frac{10 - 9{,}615}{10 - 9} = 0{,}385$$

$$p = 15\,(0{,}385)^2\,(1 - 0{,}385)^2 = 0{,}318$$

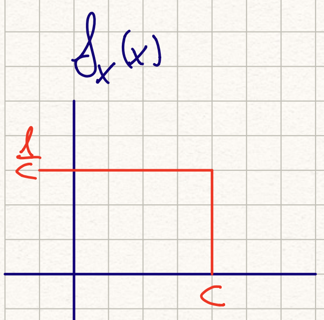
Quesito A114 *19/1/16* (Compito A)

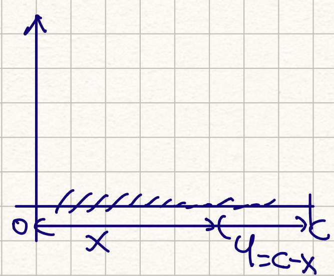
In un semaforo stradale la luce verde e quella rossa (si ignori il giallo) si susseguono con regolarità in modo che il periodo del ciclo totale è di $c = 90$ s. La durata del verde sia v e quella del rosso sia r risultando naturalmente : $v + r = c$. Se l'istante di arrivo di un'auto, misurato a partire dall'inizio del verde, è una variabile aleatoria X uniformemente distribuita fra 0 e c si consideri la v.a. Y = "tempo di attesa dell'auto prima di poter passare", assumendo che non vi siano altre auto.

a) Si individui la funzione $y = g(x)$ che lega X a Y e se ne tracci un grafico.

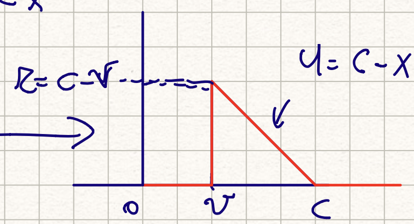
b) Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y.

c) Si trovi il tempo medio di attesa (valor medio della v.a. Y) calcolandone poi il valore numerico assumendo $v = 60$ s.





$$y = g(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < v \\ c - x & v < x < c \end{cases} \longrightarrow$$



$$y = c - x \rightarrow x_1 = c - y$$

$$\hookrightarrow g'(x_1) = -1$$

(b) $$f_Y(y) = \begin{cases} 1/c & 0 < y < c - v \\ \frac{v}{c}\,\delta(y) & y = 0 \\ \emptyset & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_X(c-y)}{(-1)} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{v}{c}\,\delta(y) + \frac{1}{c}\,\Pi\left(\frac{y - \frac{r}{2}}{r}\right)$$

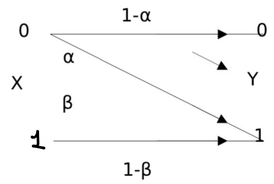
$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x) f_x(x) \qquad \int y \, f_y(y) \, dy = \int_v^c \frac{1}{c}(c-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{c}\left[\frac{(c-x^2)}{2(-1)}\right]_v^c \Rightarrow E[y] = \frac{c-v^2}{2c}$$

Quesito A84 *24/1/14*

In figura è schematizzato un canale di trasmissione binario (ovvero: a due simboli).
Il simbolo trasmesso è una v.a. discreta X che può assumere i valori {0,1}. Anche il simbolo ricevuto è una v.a. discreta Y che può assumere i valori {0,1} ma a causa di disturbi di trasmissione può verificarsi un errore ossia l'evento: $\mathcal{E} = \{X \neq Y\}$.

Il canale è caratterizzato dalle seguenti probabilità (dette *di transizione*):



$\alpha = P\{Y = 1 \mid X = 0\}$, $\beta = P\{Y = 0 \mid X = 1\}$,
$(1 - \alpha) = P\{Y = 0 \mid X = 0\}$, $(1 - \beta) = P\{Y = 1 \mid X = 1\}$.

Sia inoltre $P\{X = 0\} = p_0$.

a) Si scriva la probabilità di errore sul canale, ossia la probabilità $p_e = P(\mathcal{E})$ in funzione di α, β, p_0.
b) Si scrivano le probabilità congiunte $P\{X = i , Y = j\}$ per ogni coppia i, j con valori in {0, 1}, in funzione di α, β, p_0
Essendo X e Y una coppia di v.a. discrete, è noto che la funzione di distribuzione congiunta $F_{XY}(x, y)$ assume solo valori costanti in determinate regioni del piano x, y.
c) Sul piano x, y si individuino tutte le regioni in cui $F_{XY}(x, y)$ assume i suoi possibili valori scrivendo per ciascuna regione il rispettivo valore di $F_{XY}(x, y)$ in funzione di α, β, p_0.

Un "byte trasmesso" è una stinga di 8 bit i cui bit vengono trasmessi attraverso il canale ciascuno indipendentemente dagli altri. La stringa dei corrispondenti bit ricevuti è detta "byte ricevuto" e può contenere un certo numero k di bit errati (ossia diversi da quelli trasmessi) con k che può assumere naturalmente tutti i valori interi da zero (byte ricevuto corretto) a 8.
d) Assumendo $\alpha = \beta$ (canale cosiddetto *simmetrico*) ed anche $P\{X = 0\} = p_0 = ½$ (simboli equiprobabili), si trovi quale valore debba avere α affinché accada che:
$P\{k = 0\} = 10 \cdot P\{k = 1\}$ ossia che la probabilità che il byte ricevuto sia privo di errori (byte corretto) sia dieci volte maggiore della probabilità che tale byte contenga un solo errore (in una posizione qualunque).

a

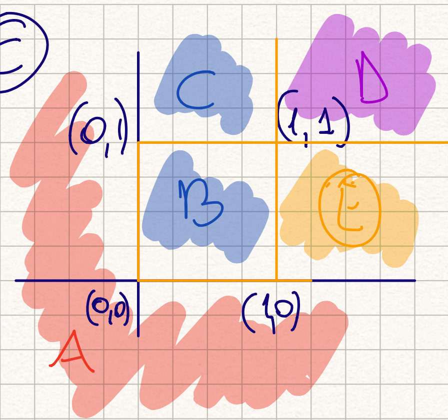
$$P(\mathcal{E}) = P(X \neq Y) = \underbrace{P(\mathcal{E} \mid X=0)}_{P[Y=1 \mid X=0]}\ \underbrace{P(X=0)}_{p_0} + \underbrace{P(\mathcal{E} \mid X=1)}_{P\{Y=0 \mid X=1\}}\ \underbrace{P\{X=1\}}_{1-p_0}$$

$$= \alpha p_0 + \beta(1 - p_0)$$

b) $P\{Y=j \mid X=i\}\ P\{X=i\}$

1) $P\{Y=0 \mid X=0\}\ P\{X=0\} = (1-\alpha)\,p_0$
2) $P\{Y=1 \mid X=0\}\ P\{X=0\} = \alpha \cdot p_0$
3) $P\{Y=0 \mid X=1\}\ P\{X=1\} = \beta\,(1-\beta)$
4) $P\{Y=1 \mid X=1\}\ P\{X=1\} = (1-\beta)(1-p_0)$

C



- Regione A $= \{X \leq 0\} \cup \{Y \leq 0\} = \emptyset$

- Regione B $= \{0 \leq X < 1\} \cap \{0 \leq Y < 1\} \Rightarrow P\{Y=0 | X=0\} P\{X=0\} = (1-\alpha)p_0$

- Regione C $= \{0 \leq X \leq 1\} \cap \{Y \geq 1\} \Rightarrow P\{X=0, Y=1\} + P\{X=0, Y=0\}$

$$= \alpha p_0 + (1-\alpha) p_0 = p_0$$

- Regione D: $\{X \geq 1\} \cap \{Y \geq 1\} \Rightarrow P\{X=0, Y=0) + P\{X=1, Y=0\}$

$$+ P\{X=0, Y=1\} + P(X=1, Y=1) = 1$$

prob totale

Regione E: $\{X \geq 1\} \cap \{0 \leq Y < 1\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=0\}$

$$= (1-\alpha) p_0 + \beta(1-p_0)$$

D $K = \#$ bit errati $\Rightarrow$ solo 0 o 8

↳ $\alpha = \beta$ e $\beta = \frac{1}{2}$ $\quad P\{K=0\} = 10 \cdot P\{K=1\}$

Prove ripetute $\qquad\qquad P_e = \alpha \frac{1}{2} + \alpha \frac{1}{2} = \alpha$

$$P\{K=0\} = \binom{8}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^8$$

$$P\{K=1\} = \binom{8}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^7$$

$$\underbrace{\binom{8}{0}}_{=1} \overset{=1}{\alpha^0} (1-\alpha)^{\cancel{8}} = 10 \overset{=8}{\binom{8}{1}} \alpha^1 (1-\alpha)^{\cancel{7}}$$

$$= 1(1-\alpha) = 80\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{81} = 0{,}012$$

Quesito A60 *13/2/13*

I cioccolatini di un certo tipo sono venduti singolarmente ed una frazione p di essi $(0 < p < 1)$ contiene un biglietto che dà diritto a sceglierne subito un altro gratis dello stesso tipo.

a) Definita la v.a. N = {Numero di cioccolatini che si ottengono acquistandone uno}, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N, ossia la probabilità: $p_n = P\{N = n\}$, per ogni n intero positivo. *{Facoltativo ma utile: verificare la condizione di normalizzazione}*

b) Si calcoli il valore medio della v.a. N sopra definita, in funzione di p. Si dica poi quanto dovrebbe valere p per avere un valor medio uguale a 2. {Può essere utile ricordare che $n \cdot x^{n-1} = D[x^n]$}.

c) Se cinque amici acquistano un cioccolatino ciascuno, si trovi la probabilità P_A che due (soli) di essi ottengano più di un cioccolatino, assumendo $p = 0{,}2$.

p {successo di avere un altro cioccolatino}

$N = n$ (a)

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot p \ldots p}_{n-1} \cdot (1-p) = p^{n-1}(1-p)$$

(b)

$$E[N] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{n\, p_n}_{\frac{d}{dp} p^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, p^{n-1}(1-p) = (1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial n} p^n \qquad \frac{1}{1-p}$$

$$\to (1-p) \frac{d}{dp}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} p^n\right] = (1-p)\frac{d}{dp}\left[-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n\right]$$

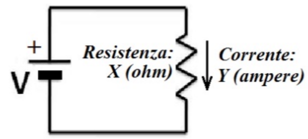
$$= (1-p) \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p}$$

(c)

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 \Rightarrow 0{,}205$$

Quesito A121 *17/01/17*

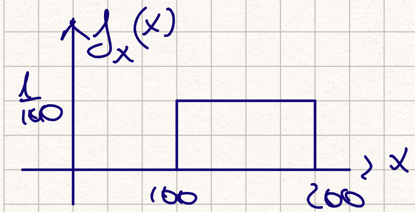
La resistenza di un certo tipo di resistori è una variabile aleatoria X uniformemente distribuita fra 100 e 200 ohm. Si sceglie a caso uno di tali resistori e lo si inserisce nel circuito in figura dove la batteria ha una tensione costante di V volt.



a) Si trovi la densità di probabilità $f_Y(y)$ della v.a.:
Y ={Corrente che circola nel resistore}.

b) Si esegue il seguente esperimento casuale: scelto a caso uno dei resistori sopra descritti lo si inserisce nel circuito precedente dove però la batteria è stata scelta a caso fra due possibili, una con tensione $V_1 = 20$ volt e l'altra con tensione $V_2 = 25$ volt. Si misura quindi la corrente Y che risulta essere di 150 mA.
Si dica, giustificando la risposta, se sia più probabile che la batteria sia da 20 o da 25 volt.

c) *Facoltativo:* si calcolino le due probabilità da confrontare.



a) $f_Y(y) = ?$

b) $V_1 = 20V$
$V_2 = 25V$ $\Rightarrow$ $Y = 150\ mA$

$$y = g(x) = \frac{V}{x}$$

$$y = \frac{V}{x} \Rightarrow x_1 = \frac{V}{y}$$

$$y'(x) = -\frac{V}{x^2}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{100}\Pi\left(\frac{x-150}{100}\right)$$

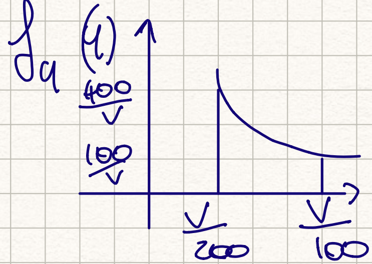
$$f_{xy}(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{1/100}{\frac{V}{\left(\frac{V}{y}\right)^2}}$$

$$100 < x < 200$$

$$\frac{V}{200} < y < \frac{V}{100}$$

$$= \frac{1}{100}\frac{V}{\frac{V^{\cancel{2}}}{y^2}} = \frac{V}{100y^2}$$

$$= \begin{cases} \frac{V}{100y^2} & \frac{V}{200} < y < \frac{V}{100} \\ \emptyset & \text{altrove} \end{cases}$$



(b) $V_1 = \{V = V_1 = 20V\}$

$V_2 = \{V = V_2 = 25V\}$

$y_0 = 0{,}15A$

$P(V_1 | Y = y_0) = ?$

$P(V_2 | Y = y_0) = ?$

Uso Formula di Bayes Misto

$$P(V_1 | Y = y_0) = \frac{P(Y = y_0 | V_1) P(V_1)}{f_Y(y_0)}$$

Confrontare le probabilità

In definitiva capisco che è più probabile di avere una batteria di 25V

$$P(V_2 | Y = y_0) = \frac{P(Y = y_0 | V_2) P(V_2)}{f_Y(y_0)}$$

$$f_Y(y_0)\Big|_{V=V_1} = \frac{V_1}{100} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{20}{100} \cdot \frac{1}{(0{,}15)^2}$$

$$f_Y(y_0)\Big|_{V=V_2} = \frac{V_2}{100} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{(0{,}15)^2}$$

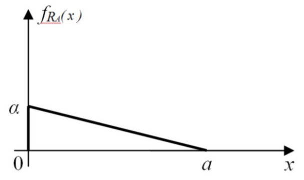
$$\underbrace{f_Y(y_0|V_2)}_{=\frac{25}{100}\cdot\frac{1}{(0{,}15)^2}} \underbrace{P(V_2)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y_0|V_1)}_{=\frac{20}{100}\cdot\frac{1}{(0{,}15)^2}} \underbrace{P(V_1)}_{=\frac{1}{2}}$$

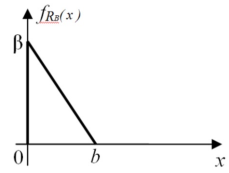
$$P(V_1 \mid Y = y_0) = \frac{\frac{20}{\cancel{100}} \cdot \cancel{\frac{1}{(0,15)^2}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\frac{45}{\cancel{100}} \cdot \cancel{\frac{1}{(0,15)^2}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

$$P(V_2 \mid Y = y_0) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Quesito A31 *11/11/11*

Una ditta di spedizioni recapita quotidianamente un plico alla vostra ditta. Gli addetti alla consegna sono il sig. *A* e il sig. *B* che si alternano casualmente e indipendentemente ma con probabilità diverse $p_A = P(A)$ e $p_B = P(B)$. La consegna dovrebbe avvenire alle ore 10.00 ma gli addetti si presentano con un ritardo che per ciascuno è una v.a. R_A e R_B, rispettivamente, con densità di probabilità come in figura.





- Si trovi il valor medio delle v.a. R_A, R_B (ritardi dei rispettivi addetti) e della v.a. R = {Ritardo di consegna in un giorno qualunque}.
- Un certo giorno vi avvertono che il corriere è appena arrivato e voi valutate che in quel momento le probabilità che l'addetto arrivato sia *A* e quella che l'addetto sia *B* sono uguali: che ore sono? (Si esprima tale ora trovando il ritardo *r* e sommandolo alle ore 10.00).
- *Successivamente* allo svolgimento del punto precedente si trovi il valore numerico di *r* (in minuti e decimali) sostituendo i seguenti valori nell'espressione trovata: a = 25 min, b = 15 min e i valori di p_A e p_B ottenuti sapendo che p_B è il doppio di p_A (ossia assumendo che l'addetto B si presenti con probabilità doppia rispetto ad A);
- Si trovi la densità di probabilità $f_R(x)$ della v.a. *R*. e se ne tracci un grafico accurato di con i dati numerici sopra trovati (si ricavino anche i necessari valori di α e β (vedi figura sopra).

a) $E[R_A]$, $E[R_A]$ e $E[R]$

R = { ritardo di consegna in un giorno qualunque }

b) $P(A) = P(B)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x)\,dx \Rightarrow E[R_A] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(R_A) = \int_0^a$$

$$f_x(R_A) = -\frac{\alpha}{a}x + \alpha$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} f_{R_A}(x) = 1 = \frac{\alpha a}{2} = 1 \quad \alpha = \frac{2}{a}$$

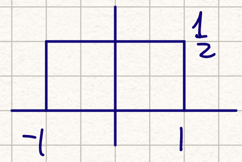
$$f_x(R_B) = -\frac{\beta}{b}x + \beta$$

Esercizio 3 22/1/04

processo ad aleatorie parametrica

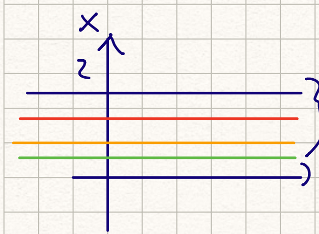
$X(t) = 1 + A$ A è v.a. $\in [-1; 1]$

$P_x(f) = ?$



$P = ?$

→ $x'(t) = 1 + a'$ ← non dipende da t



} può assumere qualunque linea retta tra 0 e 2

$P_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] \Rightarrow R_x(\tau) = E[x(t_1)\, x(t_1+\tau)]$

$= E[(1+A)(1+A)] = 1 + 2E[A] + E[A^2]$

↳ = 0 in quanto A è simmetrico rispetto all'asse

$$E[A^2] = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 \cdot f_a(a)\, da$$

$$= \int_{-1}^{1} a^2 \cdot \frac{1}{2}\, da = \frac{1}{2}\left[\frac{a^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$R_x(\tau) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow P_x(f) = \frac{4}{3}\delta(f)$

$P(x) = ? = R_x(0) = \frac{4}{3}$

3/2/09 (2)

$X(t)$ SSL ; $m_x = \emptyset$; $R_x(\tau) = A\,\Lambda\frac{t}{T}$ ← A e T costanti

(a) $Y(t)$ è SSL, SSS o non è stazionario?

(b) m_y =? $P_y(f)$ =?

(c) trovare valor medio e correlazione statistica $Y(t_1)$ e $Y(t_1+\frac{T}{2})$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{d/dt} \longrightarrow y(t) \qquad H(f) = j2\pi f$$

FILTRAGGIO

a) $Y(t)$ è SSL in quanto lo è $X(t)$

(b) $m_y = \underset{\uparrow\,\emptyset}{m_x} \cdot H(0) = 0$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(t) * h(-t) \longleftrightarrow P_y(f) = P_x(f)\,|H(f)|^2$$

↳ $TA\,\mathrm{sinc}^2(Tf)\cdot|j2\pi f|^2$

$$\Rightarrow \cancel{T}A\,\frac{\sin^2 \pi f T}{(\cancel{\pi} f \cancel{T})^2}\,(2\cancel{\pi} f)^2 = 4\,\frac{A}{T}\,\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

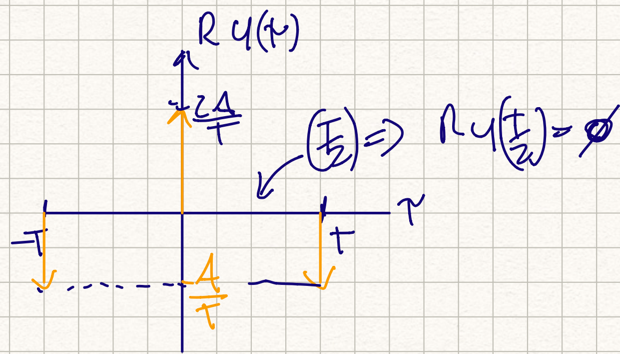
$$\Rightarrow P_y(f) = \frac{2A}{T} - \frac{2A}{T}\cos(2\pi f T)$$

c) $Y(t)$ è SSL $\rightarrow \tau = t_1 - t_2 = t_1 + \frac{T}{2} - t_1 \Rightarrow \tau = \frac{T}{2}$

$$E[Y(t)] = E\left[Y\left(t_1 \pm \frac{T}{2}\right)\right] = 0$$

$$R_Y(\tau) = \frac{2A}{T}\delta(\tau) - \frac{\cancel{2}A}{T}\left[\frac{1}{\cancel{2}}\left(\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)\right)\right]$$

$$\hookrightarrow \frac{2A}{T}\delta(\tau) - \frac{A}{T}\left[\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)\right]$$



24/2/09 Esercizio 3

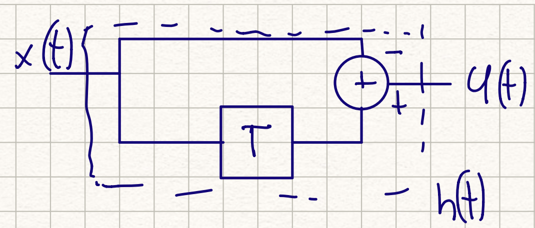
$X(t)$ stazionario, gaussiano e $\eta_x = 0$

$$R_X(\tau) = \frac{A}{T}\delta(\tau)$$

a) $Y(t)$ è SSL, SSS o non stazionario?

b) $\eta_Y = ?$ $\quad P_Y(f) = ?$

c) Valor medio e correlazione tra $Y(t_1)$ e $Y\left(t_1 + \frac{T}{2}\right)$



$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-T) \Longleftrightarrow H(f) = 1 - e^{-j2\pi f T}$$

② $y(t)$ è SSS in quanto è gaussiano

$\Rightarrow X(t)$ è SSS

$$H(f) = e^{-j\pi f T}\, e^{+j\pi f T} - e^{-j2\pi f T}$$

$$\Rightarrow 2j\, e^{-j\pi f T} \left[\frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j}\right] \Rightarrow H(f) = 2j\, e^{-j\pi f T} \sin(\pi f T)$$

$$R_y(\tau) = ? \xrightarrow{\mathcal{F}} P_y(f) = P_x(f)\,|H(f)|^2$$

$$\hookrightarrow P_y(f) = \frac{A}{T}\left(4 \sin^2(\pi f T)\right) \Rightarrow 4\frac{A}{T} \sin^2(\pi f T)$$

$$\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

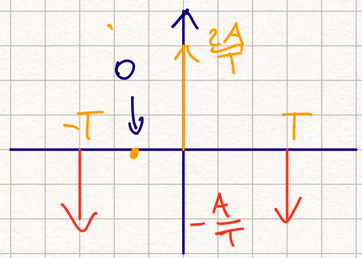
$$= \frac{2A}{T}\left[1 - \cos(2\pi f T)\right]$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(f)\, df = +\infty$$

$$\tau = t_1 - \tau_2 = \tau_1 - T_1 - \frac{T}{2} \Rightarrow \tau = -\frac{T}{2}$$

$$\hookrightarrow E[y(t_1)] = E\left[Y\left(t_1 + \tfrac{T}{2}\right)\right] = \eta_x = \emptyset$$

$$\hookrightarrow R_y(\tau) = \frac{2A}{T}\delta(\tau) - \frac{A}{T}\left[\delta(\tau + T) + \delta(\tau - T)\right]$$



$$R_y(t_1,t_2) = [y(t_1)\; y(t_1+\tfrac{T}{2})]$$

$$= E[\underbrace{y(t_1)}_{\phi}]\,E[\underbrace{y(t_1+\tfrac{T}{2})}_{\phi}] = \phi$$

GAUSSIANE ⇒ INDIPENDENTI

21/9/04 Esercizio 2

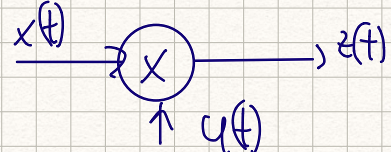
$X(t)$ SSL , $R_X(\tau) = \mathrm{sinc}(2 f_0 \tau)$

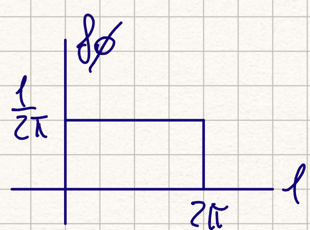
$Y(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ con ϕ v.a. $\in [0; 2\pi]$

indip da $x(t)$

(a) $\eta_Y = ?$ $R_Y(\tau) = ?$ $Y(t)$ SSL?

(b) $Z(t)$ è SSL? $P_Z(f) = ?$

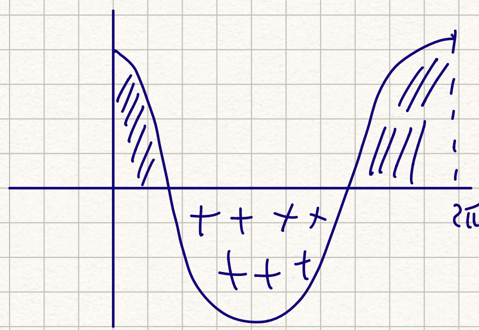




$$\left.\begin{array}{l} \eta_Y \text{ non dipende da } t \\ R_Y(\tau) \text{ non dipende da } t \end{array}\right\} Y(t) \text{ è SSL}$$

$$\eta_Y = E[Y(t)] = \int a \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, f_\phi(\varphi)\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} a \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, \frac{1}{2\pi}\, d\varphi = 0$$



$$R_y(t_1,t_2) = E[y(t_1)\,y(t_2)] = E[a\cos(2\pi f_0 t_1 + \phi) \cdot a\cos(2\pi f_0 t_2 + \phi)]$$

$$= E\left[a^2 \frac{1}{2}\{\cos(2\pi f_0(t_1+t_2) + 2\phi + \cos 2\pi f_0 \underbrace{(t_1 - t_2)}_{\tau}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\phi)\frac{1}{2\pi} + \cos(2\pi f_0 \tau)\, d\phi = 0$$

$$R_y(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

(b) $z(t) = x(t) \cdot y(t)$

$$E[z(t)] = E[x(t) \cdot y(t)] = E[x(t)]\,E[y(t)] = 0$$

$$E[z(t_1)\,z(t_2)] = E[x(t_1)\,y(t_1)\,x(t_2)\,y(t_2)] = E[x(t_1)\,x(t_2)]\,E[y(t_1)\,y(t_2)]$$

$$\Rightarrow R_x\underbrace{(t_1-t_2)}_{\tau} \cdot R_y\underbrace{(t_1-t_2)}_{\tau} \Rightarrow R_z(\tau) = R_x(\tau)\,R_y(\tau)$$

Conclusione non dipendente da t

$$P_z(f) = \mathcal{F}[R_z(\tau)] = \mathcal{F}\left[R_x(\tau)\frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\right]$$

$$P_z(f) = \frac{a^2}{4}\{P_x(f-f_0) + P_x(f+f_0)\}$$

$$R_x(\tau) = \mathrm{sinc}(2f_0\tau) \longleftrightarrow P_x(f) = \frac{1}{2f_0}\,\Pi\left(\frac{f}{2f_0}\right)$$

$$P_z(f) = \frac{a^2}{8f_0}\,\Pi\left(\frac{f-f_0}{2f_0}\right) + \frac{a^2}{8f_0}\,\Pi\left(\frac{f+f_0}{2f_0}\right)$$