6

Operazioni su segnali aleatori

LEZIONE 35

Dopo la parte dedicata ai sistemi lineari, vediamone il loro uso con i segnali aleatori.

6.1 Potenza di un segnale aleatorio

Dato un segnale aleatorio $\mathbf{x}(t)$, SSL almeno, abbiamo già definito, "di passaggio" nel paragrafo 3.4 a pag. 89, la potenza del processo come

$$E\{\mathbf{x}^2(t)\} \qquad \text{valor medio della potenza istantanea normalizzata}$$

Vediamo ora di approfondire questa definizione.

Consideriamo una generica funzione-campione $\mathbf{x}(t, s_i)$ e la sua potenza media su un intervallo temporale $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ finito.

$$P_T(s_i) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{x}^2(t, s_i)\, dt$$

Questa è una *variabile casuale*, in quanto dipende dall'uscita sperimentale s_i. Inoltre dipende dall'intervallo temporale T su cui è calcolata.

Prendendo il *valore medio statistico*

$$E\{P_T(s_i)\}$$

si definisce potenza media di $\mathbf{x}(t)$ la quantità

$$\boxed{\overline{P} \triangleq \lim_{T\to\infty} E\{P_T(s_i)\}} \qquad \text{potenza media di } \mathbf{x}(t)$$

se il limite esiste ed è finito.

Questa definizione corrisponde a quella già data in precedenza. Infatti

$$\overline{P} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{E\{\mathbf{x}^2(t)\}}_{\text{costante se } x(t) \text{ è stazionario}} dt = E\{\mathbf{x}^2(t)\} = P_{\mathbf{x}}$$

Si ha anche, come già detto al paragrafo 3.7

$$P_{\mathbf{x}} = \sigma_{\mathbf{x}}^2 + \eta_{\mathbf{x}}^2 = R_{\mathbf{x}}(0)$$

Se il numero $P_{\mathbf{x}}$ è finito $\neq 0$ diciamo che $\mathbf{x}(t)$ è un segnale aleatorio a potenza finita.

6.2 Densità spettrale di potenza

Per i processi almeno stazionari in senso lato, si definisce *densità spettrale di potenza* (o anche *spettro di potenza*) la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione $R_{\mathbf{x}}(\tau)$

$$\boxed{G_{\mathbf{x}}(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\mathbf{x}}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau} \qquad \text{densità spettrale di potenza}$$

Poiché $R_{\mathbf{x}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(-\tau)$ (infatti la distanza in un verso o nell'altro non conta nella scelta degli istanti), cioè è reale pari, ne segue per le proprietà delle traformate di Fourier che $G_{\mathbf{x}}(f)$ è reale e pari (funzione reale pari della variabile reale f).

Dall'inversione delle trasformata di Fourier si ricava

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mathbf{x}}(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

ponendo in quest'ultima formula $\tau = 0$ si trova

$$\boxed{R_{\mathbf{x}}(0) = P_{\mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mathbf{x}}(f)\, df} \qquad \begin{array}{c}\text{potenza media}\\ \text{come integrale di } G_{\mathbf{x}}(f)\end{array}$$

Poiché la potenza media totale $P_{\mathbf{x}}$ (costante perché si lavora con $\mathbf{x}(t)$ stazionari) può ricavarsi dall'integrale sulla variabile frequenza di una funzione $G_{\mathbf{x}}(f)$, è ragionevole interpretare tale $G_{\mathbf{x}}(f)$ come la densità frequenziale (cioè "spettrale") della potenza.

Vedremo tra breve come $G_{\mathbf{x}}(f)$ non possa mai essere negativa.

Uno spettro di potenza di un segnale aleatorio può essere *continuo*, *impulsivo* o *misto*.

Esempio (sinusoide a fase casuale):

Si consideri il segnale aleatorio

$$\mathbf{x}(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

in cui A e ω_0 sono costanti e ϕ è una variabile casuale uniformemente distribuita tra 0 e 2π rad.

L'autocorrelazione di $x(t)$ é:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) &= A^2 E\{\cos(\omega_0 t_1+\phi)\cos(\omega_0 t_2+\phi)\} \\ &= \frac{A^2}{2}E\{\cos\omega_0(t_1-t_2)\} + \frac{A^2}{2}E\{\cos\omega_0(t_1+t_2)+2\phi\} \\ &= \frac{A^2}{2}E\{\cos\omega_0(t_1-t_2)\} \end{aligned}$$

Si vede già che

$$R_{\mathbf{x}}(t,t) = R_{\mathbf{x}}(0) = \frac{A^2}{2} = P_{\mathbf{x}}$$

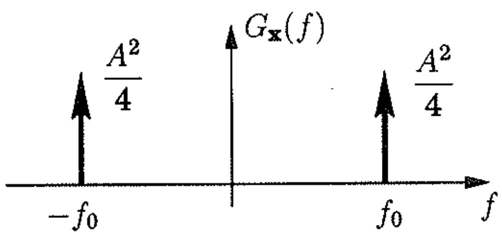
Se l'autocorrelazione è

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f_0\tau$$

la sua trasformata è

$$G_{\mathbf{x}}(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f-f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f+f_0)$$

SPETTRO
IMPULSIVO



La potenza è l'integrale, cioè l'area totale degli impulsi

$$P_{\mathbf{x}} = \frac{A^2}{2}$$

come già trovato.

Esempio (modulazione):

Si consideri il segnale aleatorio

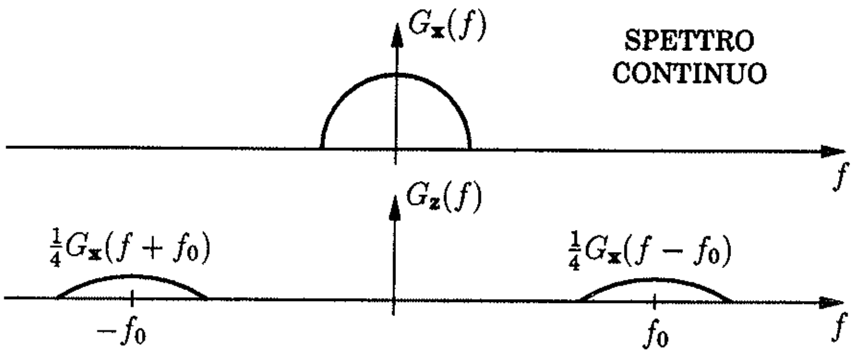
$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

in cui $x(t)$ ha densità spettrale $G_{\mathbf{x}}(f)$ e ϕ è v.c. come nell'esempio precedente, indipendente da $\mathbf{x}(t)$. Quant'è lo spettro di potenza di $\mathbf{z}(t)$?

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{z}}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{x}(t_1)\cos(2\pi f_0 t_1 + \phi)\,\mathbf{x}(t_2)\cos(2\pi f_0 t_2 + \phi)\} \\ &= E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\}\,E\{\cos(2\pi f_0 t_1 + \phi)\,\mathbf{x}(t_2)\cos(2\pi f_0 t_2 + \phi)\} \\ &= \frac{1}{2}\cos 2\pi f_0 \tau\, R_{\mathbf{x}}(\tau) \end{aligned}$$

e quindi (teorema della modulazione reale)

$$G_{\mathbf{z}}(f) = \frac{1}{4}G_{\mathbf{x}}(f - f_0) + \frac{1}{4}G_{\mathbf{x}}(f + f_0)$$



Se $P_{\mathbf{x}}$ è la potenza di $\mathbf{x}(t)$, si ha evidentemente

$$P_{\mathbf{z}} = \frac{1}{4}P_{\mathbf{x}} + \frac{1}{4}P_{\mathbf{x}} = \frac{P_{\mathbf{x}}}{2}$$

6.3 Somma di due segnali aleatori

LEZIONE 36

Come è lo spettro di potenza di un segnale che sia somma di due segnali aleatori $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$?

Assumiamo che $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ siano *incorrelati* e a *media nulla*, e stazionari.

Il segnale aleatorio

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$$

ha autocorrelazione

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{z}}(\tau) &= E\{[\mathbf{x}(t_1) + \mathbf{y}(t_1)][\mathbf{x}(t_2) + \mathbf{y}(t_2)]\} \\ &= E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} + E\{\mathbf{y}(t_1)\mathbf{y}(t_2)\} + E\{\xcancel{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{y}(t_2)}\} + E\{\xcancel{\mathbf{y}(t_1)\mathbf{x}(t_2)}\} \\ &= R_{\mathbf{x}}(\tau) + R_{\mathbf{y}}(\tau) \end{aligned}$$

$$\boxed{G_{\mathbf{z}}(f) = G_{\mathbf{x}}(f) + G_{\mathbf{y}}(f)}$$

$$E\{\mathbf{z}^2(t)\} = E\{\mathbf{x}^2(t)\} + E\{\mathbf{y}^2(t)\}$$

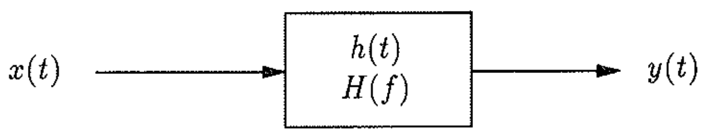
cioè

$$\boxed{P_{\mathbf{z}} = P_{\mathbf{x}} + P_{\mathbf{y}}}$$

Poiché i segnali sono incorrelati e a media nulla, si sommano autocorrelazioni, densità spettrali e potenze.

6.4 Sistemi lineari con ingresso aleatorio

Abbiamo già visto come un sistema lineare sia definito da una funzione *risposta all'impulso unitario* (o delta di Dirac) [ovvero dalla sua trasformata di Fourier, detta funzione di trasferimento del sistema] e operi su un segnale di ingresso $x(t)$ nel seguente modo



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t')x(t-t')\,dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')h(t-t')\,dt' = h(t) * x(t)$$

Se $\mathbf{x}(t)$ è un processo, si intende che l'uscita sperimentale si è fissata, di modo che l'ingresso è una singola funzione del tempo $\mathbf{x}(t, s_i)$.

Supponendo il processo $\mathbf{x}(t)$ in ingresso stazionario (almeno in senso lato), determiniamo l'autocorrelazione del processo di uscita $\mathbf{y}(t)$.

Procediamo per gradi allo scopo di trovare $E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t-\tau)\}$ (due v.c. che distano τ).

Ricaviamo prima

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}(t+\tau)\,\mathbf{y}(t)\} &= E\{\mathbf{x}(t+\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,\mathbf{x}(t-\alpha)\,d\alpha\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E\{\mathbf{x}(t+\tau)\,\mathbf{x}(t-\alpha)\}}_{R_{\mathbf{x}}(\tau+\alpha)}\,h(\alpha)\,d\alpha \end{aligned}$$

Quindi

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\mathbf{x}}(\tau+\alpha)\,h(\alpha)\,d\alpha$$

In modo simile troviamo

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{y}(t)\,\mathbf{y}(t-\tau)\} &= E\{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t-\alpha)\,h(\alpha)\,d\alpha\;\mathbf{y}(t-\tau)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E\{\mathbf{x}(t-\alpha)\,\mathbf{y}(t-\tau)\}}_{R_{\mathbf{xy}}(-\alpha+\tau)}\,h(\alpha)\,d\alpha \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{y}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\mathbf{xy}}(\tau-\alpha)\,h(\alpha)\,d\alpha &= [R_{\mathbf{xy}}(\tau) * h(-\tau)] * h(\tau) \\ &= R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \end{aligned}$$

Per ottenere $R_{\mathbf{y}}(\tau)$ si convolve $R_{\mathbf{x}}(\tau)$ con $h(\tau)$ e con $h(-\tau)$.

Trasformando 1º e 2º membro si trova :

$$G_{\mathbf{y}}(f) = G_{\mathbf{x}}(f)\,[H(f)H^*(f)]$$

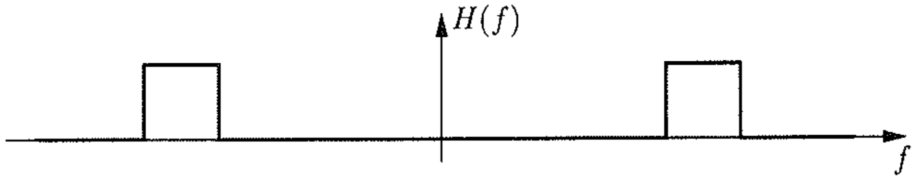
ovvero

$$\boxed{G_{\mathbf{y}}(f) = |H(f)|^2\,G_{\mathbf{x}}(f)}$$

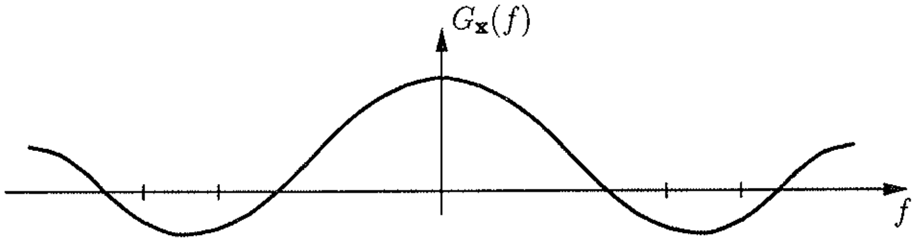
La densità spettrale del processo di uscita è la densità spettrale dell'ingresso moltiplicata per il modulo quadro della funzione di trasferimento del filtro.

Da qui si vede che la $G(f)$ di qualunque segnale aleatorio non può mai essere negativa, per nessun f.

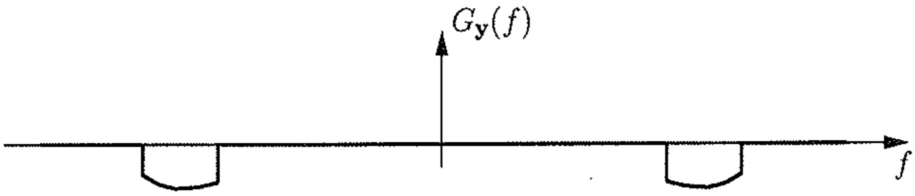
Infatti un filtro con $H(f)$ del tipo seguente:



applicato a una $G_{\mathbf{x}}(f)$ del tipo seguente



produrrebbe questa densità spettrale dell'uscita



e la potenza $P_{\mathbf{y}}$ di $\mathbf{y}(t)$ sarebbe negativa!

$$P_{\mathbf{y}} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mathbf{y}}(f)\, df < 0 \qquad \text{IMPOSSIBILE}$$

Per quanto riguarda il valore medio del segnale aleatorio filtrato esso è

$$\begin{aligned}
\eta_y &= E\{\mathbf{y}(t)\} \\
&= E\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, \mathbf{x}(t-\lambda)\, d\lambda\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, \underbrace{E\{\mathbf{x}(t-\lambda)\}}_{\eta_{\mathbf{x}}}\, d\lambda \\
&= \eta_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, d\lambda = \eta_{\mathbf{x}}\, H(0)
\end{aligned}$$

L'importante relazione trovata

$$G_{\mathbf{y}}(f) = |H(f)|^2\, G_{\mathbf{x}}(f)$$

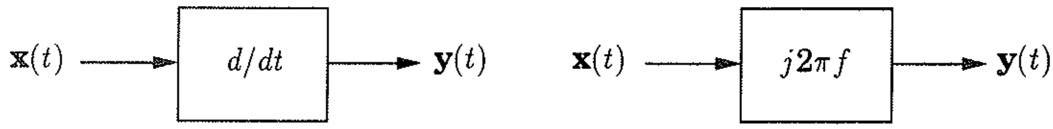
è utile anche per l'analisi di operazioni su segnali aleatori (anche se un vero filtro non c'è).

Esempi:

- Derivatore

$$\mathbf{y}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$$

Poiché la derivazione corrisponde in frequenza ad $H(f) = j2\pi f$

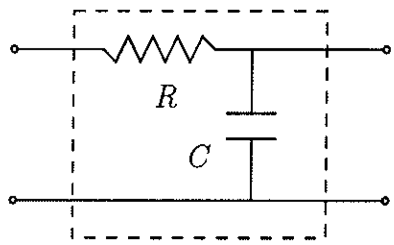


$$\boxed{G_{\mathbf{y}}(f) = (2\pi f)^2 G_{\mathbf{x}}(f)}$$

Analogamente per l'integratore $H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$

- Processo bianco filtrato

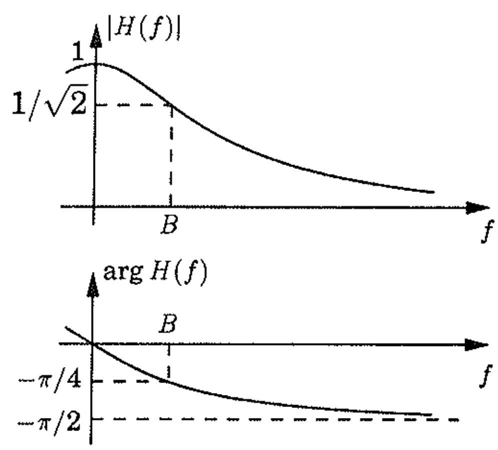
Si consideri il circuito seguente



$H(f)$

Questo sistema ha funzione di trasferimento, già vista nel paragrafo 5.5

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2} \qquad \text{con } B = \frac{1}{2\pi RC}$$



Se l'ingresso $\mathbf{x}(t)$ è un segnale aleatorio con densità spettrale di potenza costante (uniforme).

$$G_{\mathbf{x}}(f) = \text{cost}$$

l'uscita ha densità spettrale

$$G_{\mathbf{y}}(f) = G_{\mathbf{x}}(f)\,|H(f)|^2 = \frac{\text{cost}}{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

che non essendo più uniforme, è detta *colorata*.

6.5 Rumore come segnale aleatorio

LEZIONE 37

Nei sistemi elettronici vi sono numerosi segnali elettrici *indesiderati*, provenienti da una varietà di sorgenti.

Si potrebbe operare una prima classificazione distinguendo le *interferenze* di origine, diciamo così, "umana" dal rumore che interviene naturalmente.

Le interferenze "umane" vengono da altri sistemi elettronici o elettrici; il rumore è invece prodotto ad esempio da disturbi atmosferici, radiazioni cosmiche o dai circuiti stessi (rumore circuitale).

Con una accurata progettazione dei vari sistemi, l'effetto di molti segnali indesiderati può essere ridotto o anche eliminato completamente.

Tuttavia, alcuni segnali aleatori sono *ineliminabili* e determinano nei sistemi elettronici, in particolare di telecomunicazione, limiti fondamentali alle prestazioni dei vari sistemi.

Tra questi segnali aleatori ineliminabili vi è appunto il *rumore elettrico* prodotto dall'agitazione termica degli elettroni nei conduttori (cavi, resistori ecc.).

Ci occuperemo di quei segnali aleatori che prendono appunto il nome di *rumore termico*.

6.5.1 Rumore termico

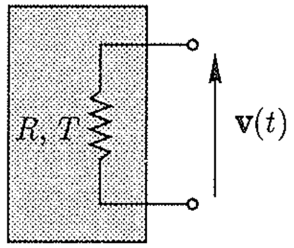
Per i nostri scopi, il rumore termico è il segnale aleatorio prodotto dal moto casuale di particelle cariche (solitamente elettroni) nei conduttori.

Dalla teoria cinetica, sappiamo che l'energia media di una particella a temperatura assoluta T °K è proporzionale a kT, con k costante di Boltzmann

$$\boxed{k = 1.37 \times 10^{-23} \text{ Joules/grado}}$$

È lecito pertanto attendersi che le quantità che descriveranno il rumore termico coinvolgano il prodotto kT. In effetti, sarà così.

Considerando il più semplice caso, quello di un resistore di resistenza R che si trovi a temperatura assoluta T, il moto casuale degli elettroni produce ai suoi capi, a circuito aperto, una tensione aleatoria $\mathbf{v}(t)$ di rumore.



Questo segnale aleatorio $\mathbf{v}(t)$ (processo stocastico) può essere descritto in termini di densità di probabilità, come tutti i processi.

Un modello molto utilizzato ci dice che $\mathbf{v}(t)$ è un processo *gaussiano* stazionario, con densità di probabilità di I ordine

$$f_{\mathbf{v}}(v;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\mathbf{v}}^2}}\, e^{-\frac{v^2}{2\sigma_{\mathbf{v}}^2}}$$

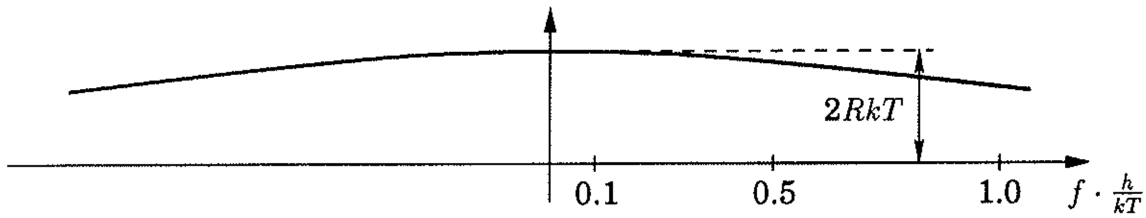
Quindi a media nulla ($\eta_{\mathbf{v}} = 0$), con varianza

$$\sigma_{\mathbf{v}}^2 = \frac{2(\pi kT)^2}{3h} \qquad [\mathrm{V}^2]$$

$$\boxed{h \text{ (costante di Planck)} = 6.62 \times 10^{-34}\,\text{Joule·secondo}}$$

Un'analisi della meccanica quantistica ci mostra che la densità spettrale della tensione di questo rumore termico è approssimabile con:

$$G_{\mathbf{v}}(f) \simeq 2RkT\left(1 - \frac{h|f|}{2kT}\right) \qquad [\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}] \qquad |f| \ll \frac{kT}{h}$$



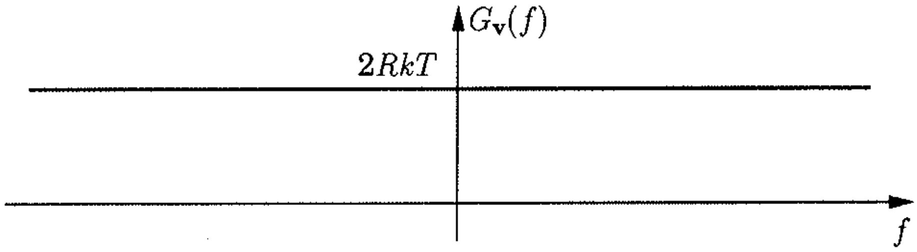
A temperatura ambiente [$T_0 = 290°k$] per la resistenza, si ha

$$G_v(f) \simeq \text{costante per } |f| < 0.1\,\frac{kT_0}{h} \approx 10^{12}\,\mathrm{Hz}$$

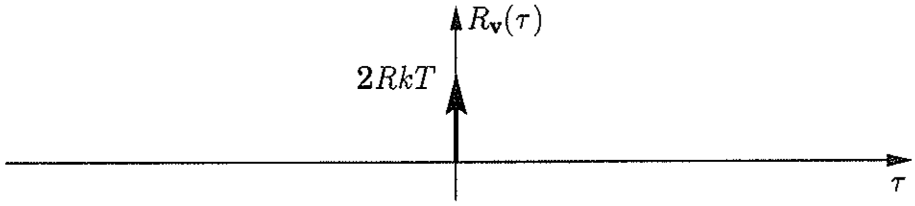
Questa regione comprende in pratica tutte le frequenze usate, e per i nostri scopi consideriamo

$$G_{\mathbf{v}}(f) = 2RkT \qquad [\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}]$$

IL RUMORE TERMICO
È UN PROCESSO BIANCO



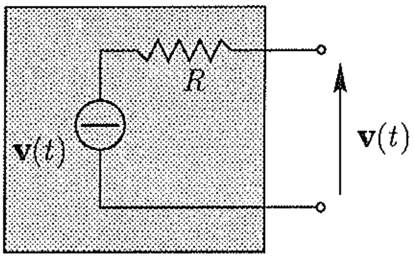
Questo modello è molto semplice. L'autocorrelazione corrispondente è



e la varianza $\sigma_{\mathbf{v}}^2 = R_{\mathbf{v}}(0) = +\infty$.

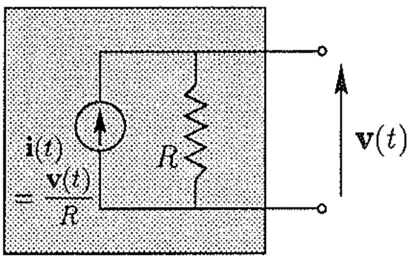
Si commette quindi un grave errore? Noi sapevamo che $\sigma_{\mathbf{v}}^2$ è finita! L'errore ci sarebbe solo se $\mathbf{v}(t)$ venisse usato così senza alcuna manipolazione. Poiché tuttavia, il processo di rumore è sempre filtrato, il modello funziona benissimo.

Del resistore rumoroso si dà un "equivalente" di Thevenin come segue, in cui R non è più rumorosa, ma ideale:



dove $G_{\mathbf{v}}(f) = 2RkT$ $[\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}]$

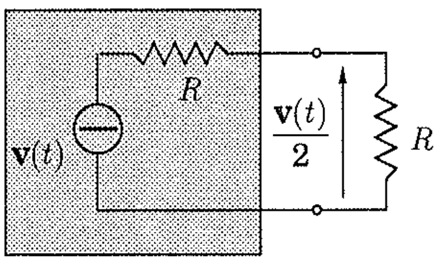
e di Norton:



$$G_{\mathbf{i}}(f) = \frac{G_{\mathbf{v}}(f)}{R^2} = \frac{2kT}{R} \quad [\mathrm{A}^2/\mathrm{Hz}]$$

Anziché parlare di densità spettrale di potenza del processo $\mathbf{v}(t)$ e di $\mathbf{i}(t)$, si usa anche descrivere il rumore termico tramite la sua *potenza disponibile* e *densità spettrale di potenza disponibile* come segue.

Si immagina che la resistenza sia chiusa su un *carico resistivo uguale*. In questo caso la potenza dissipata (=ceduta) al carico è massima

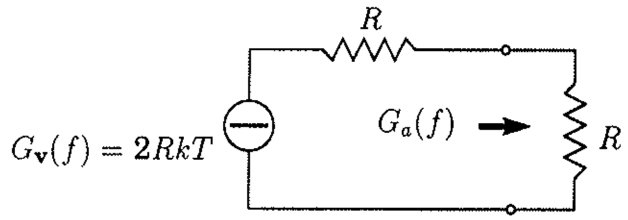


$$P_a = \frac{\langle[\mathbf{v}(t)/2]^2\rangle}{R} = \frac{\langle\mathbf{v}^2(t)\rangle}{4R}$$

A questa potenza disponibile P_a corrisponde una densità spettrale della potenza disponibile

$$G_a(f) = \frac{G_\mathbf{v}(f)}{4R} = \frac{1}{2}kT \qquad [W/\text{Hz}]$$

DIPENDE SOLO DALLA TEMPERATURA

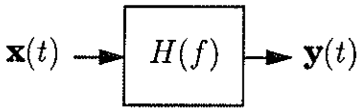


Sia che si parli di tensione di rumore che di corrente di rumore, che di potenza disponibile, le corrispondenti densità spettrali sono costanti in f

$$G_a(f) = \frac{\eta_a}{2} \qquad G_\mathbf{v}(f) = \frac{\eta_\mathbf{v}}{2} \qquad G_\mathbf{i}(f) = \frac{\eta_\mathbf{i}}{2}$$

6.5.2 Rumore filtrato

Consideriamo adesso rumore gaussiano bianco $\mathbf{x}(t)$ con densità spettrale $G_\mathbf{x}(f) = \eta/2$ applicato a un filtro LTI con funzione di trasferimento $H(f)$.



L'uscita $\mathbf{y}(t)$ è ancora un segnale aleatorio di "rumore filtrato", con densità di probabilità gaussiana.

[PROPRIETÁ GENERALE: Processi gaussiani filtrati restano gaussiani.]

Si ha

$$\boxed{G_\mathbf{y}(f) = \tfrac{\eta}{2}\,|H(f)|^2}$$

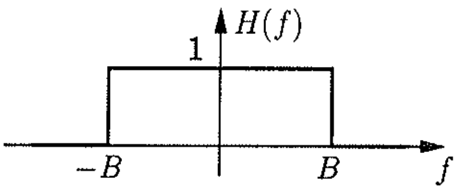
La densità spettrale di potenza dell'uscita ha la forma di $|H(f)|^2$.

Esempi:

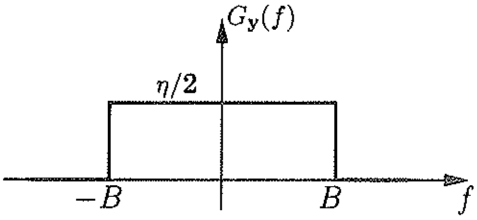
- (Passabasso ideale)

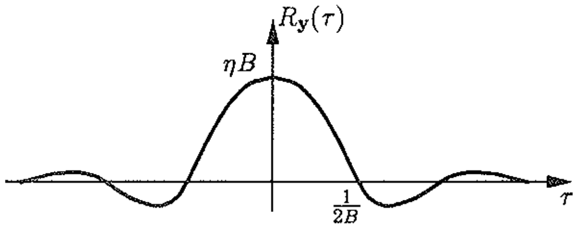
  Se il filtro è passabasso ideale

  $$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$



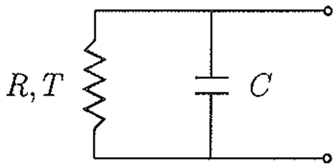
si ha per il rumore filtrato:





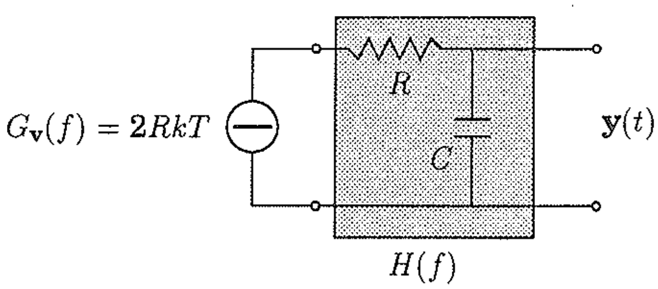
$$G_\mathbf{y}(f) = \frac{\eta}{2}\,\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \qquad R_\mathbf{y}(\tau) = \frac{\eta}{\cancel{2}}\cancel{2}B\,\mathrm{sinc}\,2B\tau$$

- (Rumore termico in un circuito RC)
  Si consideri il circuito RC



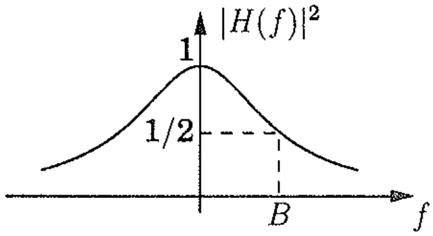
in cui R è un resistore rumoroso a temperatura T.

Usiamo l'equivalente di Thevenin:



$$G_\mathbf{y}(f) = G_\mathbf{v}(f)\,|H(f)|^2$$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2} \qquad \text{con } B = \frac{1}{2\pi RC}$$



Si ottiene

$$G_\mathbf{y}(f) = \frac{2RkT}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

$$R_\mathbf{y}(\tau) = 2Rkt\,\pi B e^{-2\pi B|\tau|} = \frac{kT}{C}\,e^{-|\tau|/RC}$$

$$P_\mathbf{y} = R_\mathbf{y}(0) = \frac{kT}{C}$$ non dipende da R
[variando R varia la $H(f)$ ma anche $G_\mathbf{v}(f)$!]

6.5.3 Banda equivalente di rumore

LEZIONE 38

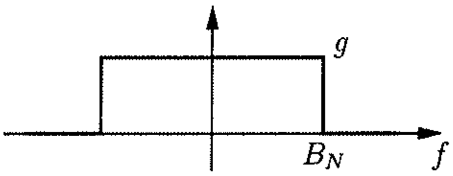
Il rumore bianco filtrato ha potenza finita:

$$N_{\mathbf{y}} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mathbf{y}}(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{2} |H(f)|^2\, df = \eta \int_0^{\infty} |H(f)|^2\, df$$

Questo integrale dipende solo dalla $H(f)$ del filtro.

Si definisce allora "banda equivalente di rumore" del filtro $H(f)$, la banda che un filtro ideale con lo stesso guadagno massimo di potenza g dovrebbe possedere per produrre in uscita la stessa potenza:

$$N_{\mathbf{y}} = \frac{\eta}{2} g\, B_N$$

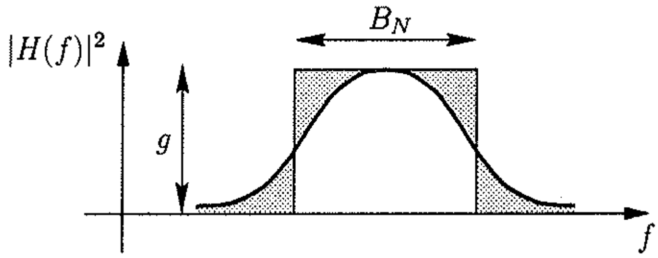


dove $g = |H(f)|^2_{\max}$.

Uguagliando si ha

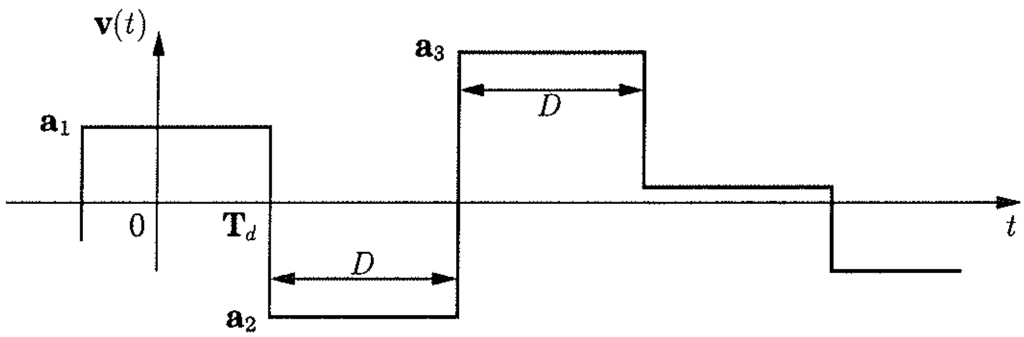
$$\frac{\eta}{2} g\, 2B_N = \eta \int_0^{\infty} |H(f)|^2\, df$$

$$\boxed{B_N = \frac{1}{g} \int_0^{\infty} |H(f)|^2\, df}$$



6.6 Segnale PAM (Pulse Amplitude Modulation) non sincronizzato

Questo segnale aleatorio è un insieme di impulsi rettangolari come indicato nella figura (funzione campione)



Tutti gli impulsi hanno durata D fissa. Il parametro $\mathbf{T}_d$ è una v.c. continua uniformemente distribuita tra 0 e D. L'insieme è quindi di funzioni-campione tra loro non sincronizzate.

La ampiezza $\mathbf{a}_k$ nell'intervallo k-esimo è una v.c. discreta a media nulla e varianza σ^2 nota. Le ampiezze in intervalli diversi sono tra loro indipendenti, per cui:

$$E\{\mathbf{a}_i\mathbf{a}_k\} = E\{\mathbf{a}_j\}E\{\mathbf{a}_k\} = 0 \qquad \text{se } i \neq k$$

Il segnale è pertanto aleatorio in virtù della v.c. $\mathbf{a}_k$ e della v.c. $\mathbf{T}_d$.

Analizziamo in dettaglio questo segnale, che prende il nome di PAM non sincronizzato.

Poiché $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}_k$ quando t cade nel k-esimo intervallo, si ha

$$E\{\mathbf{v}(t)\} = E\{\mathbf{a}_k\} = 0$$

$$E\{\mathbf{v}^2(t)\} = E\{\mathbf{a}_k^2\} = \sigma^2$$

Troviamo l'autocorrelazione di $\mathbf{v}(t)$

$$R_{\mathbf{v}}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{v}(t_1)\mathbf{v}(t_2)\}$$

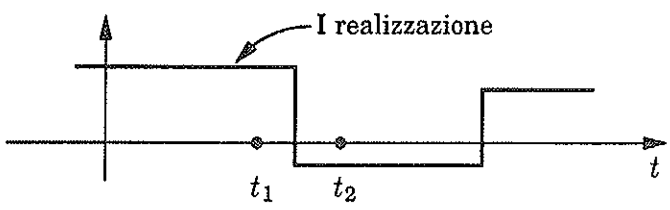
distinguendo vari casi per t_1 e t_2.

1) Consideriamo t_1 e t_2 in intervalli sicuramente diversi, $|t_1 - t_2| > D$

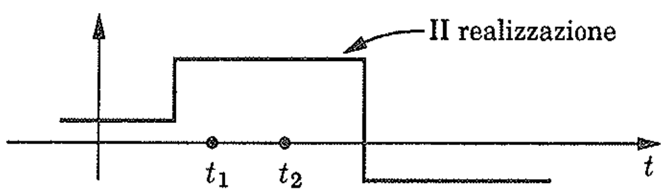
   Ne consegue

$$E\{\mathbf{v}(t_1)\mathbf{v}(t_2)\} = E\{\mathbf{a}_j\mathbf{a}_k\} = 0 \qquad \text{per} \quad |t_1 - t_2| > D$$

2) Se invece $|t_1 - t_2| \leq D$ possono esserci due casi: t_1 e t_2 appartengono a intervalli diversi, oppure allo stesso intervallo.



Intervalli diversi ma adiacenti



Stesso intervallo

Definiamo $\mathcal{A} = \{t_1 \text{e } t_2 \text{ sono in intervalli adiacenti}\}$.

Se risultano in intervalli diversi adiacenti si ha

$$E\{\mathbf{v}(t_1)\mathbf{v}(t_2)\,|\,\mathcal{A}\} = E\{\mathbf{a}_j\mathbf{a}_k\} = 0$$

mentre

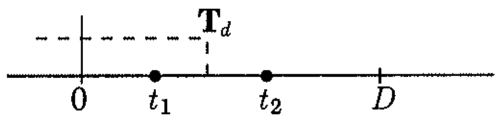
$$E\{\mathbf{v}(t_1)\mathbf{v}(t_2)\,|\,\overline{\mathcal{A}}\} = E\{\mathbf{a}_k^2\} = \sigma^2$$

da cui

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(t_1)\mathbf{v}(t_2)\} &= \cancel{E\{\mathbf{v}(t_1)\mathbf{v}(t_2)\,|\,\mathcal{A}\}}\,\mathrm{P}(\mathcal{A}) + E\{\mathbf{v}(t_1)\mathbf{v}(t_2)\,|\,\overline{\mathcal{A}}\}\,[1-\mathrm{P}(\mathcal{A})] \\ &= \sigma^2[1-\mathrm{P}(\mathcal{A})] \qquad\qquad \text{per} \quad |t_1-t_2| \le D \end{aligned}$$

Bisogna ancora trovare $\mathrm{P}(\mathcal{A})$!

Si consideri $0 < t < D$



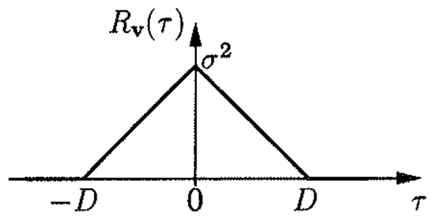
$$\mathrm{P}(\mathcal{A}) = \mathrm{P}\{\mathbf{T}_d \in (t_1, t_2)\} = \frac{t_2 - t_1}{D} \qquad \text{se } t_2 > t_1$$

In generale

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}) = \frac{|t_2 - t_1|}{D}$$

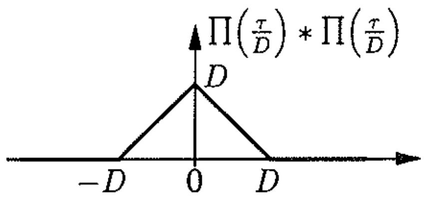
quindi

$$R_{\mathbf{v}}(\tau) = \sigma^2\,[1 - \frac{|\tau|}{D}]$$



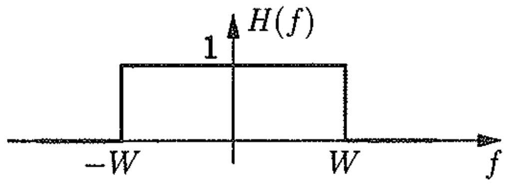
La densità spettrale di potenza di $\mathbf{v}(t)$ è

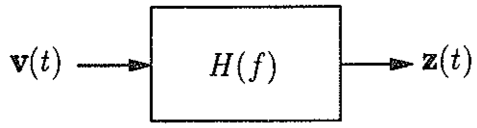
$$\begin{aligned} G_{\mathbf{v}}(f) &= \mathcal{F}\{R_{\mathbf{v}}(\tau)\} \\ &= \sigma^2\mathcal{F}\{\frac{1}{D}\Pi\Big(\frac{\tau}{D}\Big) * \Pi\Big(\frac{\tau}{D}\Big)\} \\ &= \sigma^2\frac{1}{D}\mathcal{F}\{\Pi\Big(\frac{\tau}{D}\Big)\}\cdot\mathcal{F}\{\Pi\Big(\frac{\tau}{D}\Big)\} \\ &= \sigma^2\frac{D^2}{D}\,\mathrm{sinc}^2\, fD \\ &= \sigma^2 D\,\mathrm{sinc}^2\, fD \end{aligned}$$



$$A\Pi\Big(\frac{\tau}{D}\Big) \rightarrow A\tau\,\mathrm{sinc}\, f\tau$$

Questo risultato conclude l'analisi che ci eravamo prefissi. Se immaginassimo poi di filtrare questo segnale aleatorio con un filtro passa-basso ideale con $W = 1/D$





si otterrebbe

$$G_{\mathbf{z}}(f) = G_{\mathbf{v}}(f)\,|H(f)|^2 = \sigma^2 D \operatorname{sinc}^2 fD\, \Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$$

Nel tempo ogni impulso rettangolare si trasforma in

$$\Pi\left(\frac{t}{D}\right) * 2W \operatorname{sinc}(2Wt)$$