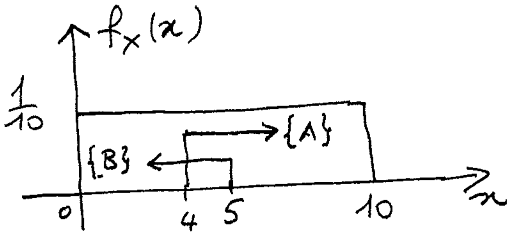
# Esame di TEORIA DEI SEGNALI

**Quesito** **A4**
Un bastoncino lungo 10 cm viene spezzato in due parti scegliendo a caso il punto di rottura.
- Quanto vale la probabilità che il pezzo di sinistra sia più lungo di 4 cm **e** quello di destra più lungo di 5 cm?
- I due eventi sono indipendenti?

## Quesito A4 – (Soluzione)

Detta $X$ l'ascissa del punto di rottura (Variabile aleatoria) misurata a partire dall'estremo sinistro, la densità di probabilità di $X$ si può assumere uniforme fra 0 e 10 cm:

La lunghezza del pezzo di sinistra è quindi uguale a $X$ e la lunghezza del pezzo di destra è uguale a $(10-X)$.




Quindi detti:

$A = \{$la lunghezza del pezzo di sinistra è maggiore di 4 cm$\} \equiv \{X > 4\}$

$B = \{$" " " " destra " " " 5 cm$\} \equiv \{10 - X > 5\}$

da cui le probabilità seguenti che si calcolano immediatamente [data l'uniformità:

$$P\{A\} = P\{X > 4\} = \frac{6}{10}$$

$$P\{B\} = P\{10 - X > 5\} = P\{X < 5\} = \frac{1}{2}$$

E infine la probabilità richiesta:

$$\boxed{P\{AB\} = P\{(X > 4) \cap (X < 5)\} = P\{4 < X < 5\} = \frac{1}{10}}$$

Poiché è: $\underbrace{P\{AB\}}_{\frac{1}{10}} \neq P\{A\} \cdot P\{B\} = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

i due eventi non sono indipendenti (si ricordi la definizione di indipendenza)

Esame di

## TEORIA DEI SEGNALI

**Quesito A11** 13/09/2011

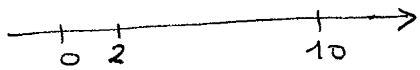
Si piazzano a caso e in modo indipendente cinque punti nell'intervallo [0, 10] dell'asse reale.
Si calcoli la probabilità che nell'intervallo [0,2] cadano:

a) due soli punti;
b) almeno due punti.

### Quesito A11 - (Soluzione)

Dalla descrizione del problema si può assumere che lo spazio campione dell'esperimento sia continuo e uniforme nell'intervallo [0, 10].

La probabilità $p$ che piazzando un solo punto esso cada in [0, 2] si può scrivere:




$$p = \frac{2-0}{10-0} = \frac{1}{5}.$$

a) Il problema è di prove ripetute in cui si cerca la probabilità di 2 successi (di probabilità $p$) su 5 prove. Quindi è (detta $P_a$ la probabilità cercata):

$$P_a = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^{5-2} = 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{64}{125} \simeq 0,20$$

b) In questo caso, detta $P_b$ la probabilità cercata, si ha:

$$P_b = \sum_{i=2}^{5} \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i} = 1 - P\{0 \text{ punti in } [0,2]\} - P\{1 \text{ punto in } [0,2]\} =$$

$$= 1 - (1-p)^5 - 5 \cdot p(1-p)^4 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 - 5 \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \simeq 0,26$$

Esame di

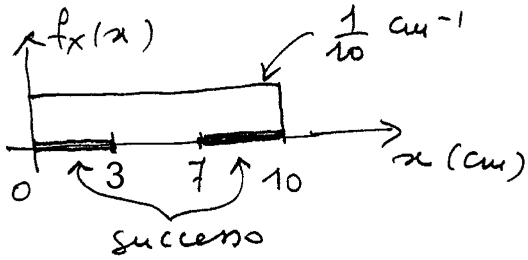
TEORIA DEI SEGNALI

**Quesito A24** N

Si hanno 5 bastoncini lunghi 10 cm. Su ciascuno di essi si sceglie (in modo indipendente) un punto a caso e si spezza il bastoncino in quel punto.
Si calcoli la probabilità che due soli dei 10 pezzi risultanti abbiano lunghezza minore di 3 cm.

## Quesito A24 – (Soluzione)

Si tratta di un problema di prove ripetute dove il singolo esperimento consiste nella scelta a caso di un punto su un bastoncino e della sua rottura –
Il successo è costituito dall'evento $A = \{$una delle due parti ottenute ha lunghezza minore di 3 cm$\}$ –
Detta $X$ la v.a. "ascissa del punto di rottura misurata a partire da un'estremità", si può assumere $f_X(x)$ uniforme fra 0 e 10 cm come in figura:




L'evento successo si può esprimere in questo modo:

$$A = \{(0 < X < 3) \cup (7 < X < 10)\}$$

da cui: $p \triangleq P(A) = 2 \cdot \frac{3}{10} = 0{,}6$ –

N.B.

La probabilità che dei 10 pezzi ottenuti dalle 5 ripetizioni dell'esperimento due soli siano di lunghezza minore di 3 cm equivale alla probabilità $P$ di avere 2 successi su 5 prove ossia:

$$\boxed{P = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^{5-2} = 10 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 \simeq 0{,}23}$$

{Si osservi che ogni rottura di bastoncino dà al massimo un pezzo di lunghezza minore di 3 cm}.

Esame di

# TEORIA DEI SEGNALI

**Quesito A90**
Un'azienda ha due impianti, A e B, che producono motori dello stesso tipo. L'impianto A produce il 3% di motori difettosi e l'impianto B l' 1%. Si sceglie a caso un lotto di 100 motori tutti prodotti dallo stesso impianto e si trova che 3 di essi sono difettosi.
Qual è la probabilità che il lotto provenga dall'impianto A? E quale dall'impianto B?

## Quesito A90 (Soluzione)

Si definiscano i seguenti eventi:

$A = \{$Il lotto scelto proviene dall'impianto A$\}$

$B = \{$ " " " " " " B$\}$

$C = \{$Tre motori del lotto scelto sono difettosi$\}$.

Si cercano le probabilità $P(A|C)$ e $P(B|C) = 1 - P(A|C)$

Si ha (Teorema di Bayes):

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)}$$

In mancanza di altre indicazioni si può assumere che il lotto scelto possa provenire da A o da B con uguale probabilità ossia: $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

Siano inoltre $p_A = 0{,}03$ e $p_B = 0{,}01$ le probabilità (date) che un motore esca difettoso dai due impianti, rispettivamente.

Si può quindi scrivere (prove ripetute):

$$P(C|A) = \binom{100}{3} p_A^3 \cdot (1-p_A)^{97} = 161700 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}052 \cong 0{,}227$$

e anche (probabilità totali):

$$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B) = 0{,}227 \cdot \tfrac{1}{2} + 0{,}061 \cdot \tfrac{1}{2} \simeq 0{,}144$$

dove si è fatto uso del seguente risultato:

$$P(C|B) = \binom{100}{3} p_B^3 \cdot (1-p_B)^{97} = 161700 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}377 \cong 0{,}061$$

Si hanno infine le due probabilità cercate:

$$\boxed{P(A|C) = \frac{0{,}227 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}144} \cong 0{,}788 \quad ; \quad P(B|C) = 1 - P(A|C) \cong 0{,}212}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

**Quesito A100**

Sia $X$ (variabile aleatoria) l'ascissa di un punto scelto a caso nell'intervallo [0,1].
Si calcoli la probabilità (in funzione di $a$ )che entrambe le parti in cui risulta così suddiviso l'intervallo siano di lunghezza minore di $a$ (con $0 < a < 1$).
Si trovi, se esiste, un valore di $a$ per cui gli eventi $E_1 = \{X < a\}$ e $E_2 = \{X > (1 - a)\}$ siano indipendenti.

## Quesito A100 (Soluzione)

a) Si chiede di calcolare la probabilità dell'evento congiunto: (vedi fig. 1):

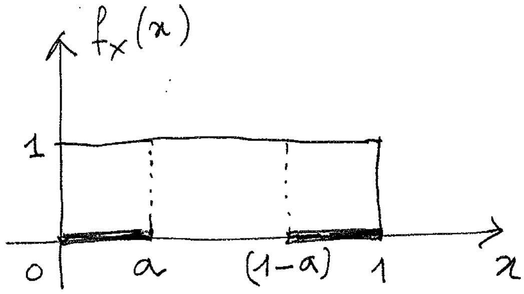



Fig. 1

$$\{(X<a)\cap(1-X)<a\}=$$

$$=\{(X<a)\cap(X>(1-a))\}$$

I singoli eventi sono rappresentati dai segmenti a tratto spesso in fig. 1 – È evidente che per $0<a<\frac{1}{2}$ i due eventi sono disgiunti e la probabilità cercata è nulla – Nel caso $\frac{1}{2}<a<1$ l'evento intersezione è $\{(1-a)<X<a\}$ rappresentato dal segmento a tratto spesso in fig. 2 – In questo caso la probabilità cercata è uguale all'area tratteggiata quindi in definitiva:

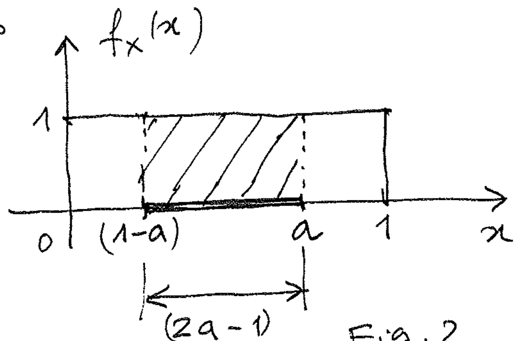
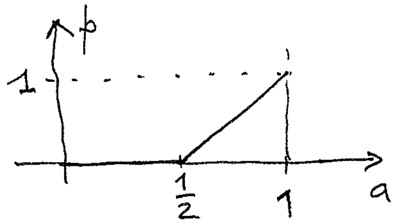



Fig. 2

$$p = P\{(X<a)\cap(X>(1-a))\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } 0<a<\frac{1}{2} \\ P\{(1-a)<X<a\}=(2a-1) & \text{per } \frac{1}{2}<a<1 \end{cases}$$




Tale probabilità è rappresentata in fig. 3 in funzione di a.

./.

b) Gli eventi $\{X<a\}$ e $\{X>(1-a)\}$ sono indipendenti se la probabilità della loro intersezione, trovata al punto precedente, risulta uguale al prodotto delle singole probabilità che sono (vedi fig. 1):

$$P\{X<a\} = P\{X>1-a\} = a.$$

Si chiede quindi se esista un valore di $0<a<1$ tale che:

$$a \cdot a = (2a-1) \quad \text{ossia} \quad a^2 - 2a + 1 = 0$$

ossia ancora $(a-1)^2 = 0$.

Questa è verificata solo per $a=1$, quindi <u>non esiste alcun valore di a</u> nell'intervallo $(0,1)$ che renda indipendenti gli eventi indicati.