TEORIA DEI SEGNALI

Teoria della probabilità e variabili aleatorie

Testi di problemi concepiti e risolti dal Prof. Giorgio Picchi
(Lotto 7: Vettori Aleatori e loro trasformazioni e momenti)

Quesito A38
La densità di probabilità congiunta di due v.a. X e Y è la seguente:

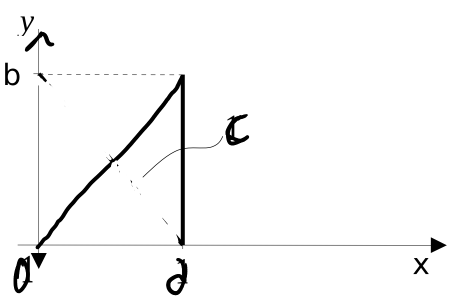
$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k\,xy & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Dove k è una costante.
- Si trovi il valore di k.
- Si determini se le v.a. X e Y sono indipendenti.

Quesito A42 *15/6/12*
Sia X un v.a. discreta che può assumere i valori $x_1 = 5$ e $x_2 = 13$ con le probabilità $p_1 = 2/5$ e $p_2 = 3/5$ rispettivamente.
Sia N una v.a. continua, indipendente da X, con densità di probabilità uniforme fra $-\Delta/2$ e $\Delta/2$, con $\Delta = 10$.
Sia Y la v.a. $Y = X + N$.
a) Si trovi da densità di probabilità di $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico.
b) Se in una realizzazione dell'esperimento si osserva che Y ha assunto un valore uguale al suo valor medio qual è la probabilità che X abbia assunto il valore x_1 in tal caso?

Quesito A47
Le coordinate di un punto P sul piano cartesiano sono due v.a. indipendenti X e Y uniformemente distribuite fra 0 e 1.
Si trovi la densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ delle due v.a. e si calcoli la probabilità che la distanza D del punto P dall'origine sia maggiore di 1.

Quesito A51
La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante c nel dominio indicato in figura ed è nulla altrove.
a) Si trovi il valore di c.
b) Si trovi la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X e se ne tracci un grafico.
c) Si trovi il valor medio della variabile X.



Quesito A55 *23/11/12 (TSA)*

Due persone decidono di incontrarsi in un certo luogo. Se ciascuno di essi arriva indipendentemente dall'altro ad un istante uniformemente distribuito fra le 12:00 e le 13:00, si trovi la probabilità che il primo che arriva debba attendere più di 10 minuti.
[Si indichino con le v.a. X e Y i rispettivi istanti di arrivo, espressi in minuti dopo le 12:00]

Quesito A57 *21/1/13*

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante c nel dominio indicato in figura (circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine) ed è nulla altrove.

a) Si trovi il valore della costante c.

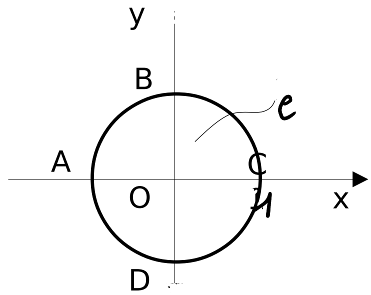
Sia $F_{XY}(x, y)$ la funzione di distribuzione congiunta delle due variabili.

b) Si individui sul piano cartesiano, mediante tratteggio, la regione per cui è $F_{XY}(x, y) = 0$. Sullo stesso piano si individui, mediante un diverso tratteggio, la regione per cui è $F_{XY}(x, y) = 1$. Si dica inoltre quanto vale la funzione $F_{XY}(x, y)$ nei punti:

$O(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $D(0,-1)$.

c) Si trovino le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico.

Si dica infine se X e Y sono indipendenti.



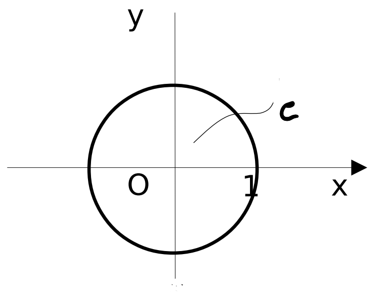
Quesito A62 *13/2/13*

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante $c = 1/\pi$ nel dominio indicato in figura (circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine) ed è nulla altrove.

Si trovino la funzione di distribuzione $F_Z(z)$ e la densità di probabilità $f_Z(z)$ della v.a.

Z = {Distanza dall'origine del punto di coordinate (X,Y)}

e si traccino anche i grafici delle funzioni trovate.



Quesito A64 *12/06/13*

In figura è schematizzato un canale di trasmissione binario (ovvero: a due simboli).

Il simbolo trasmesso è una v.a. discreta X che può assumere i valori {0,1}. Anche il simbolo ricevuto è una v.a. discreta Y che può assumere i valori {0,1} ma a causa di disturbi di trasmissione può verificarsi un errore ossia l'evento: $E = \{X \neq Y\}$.

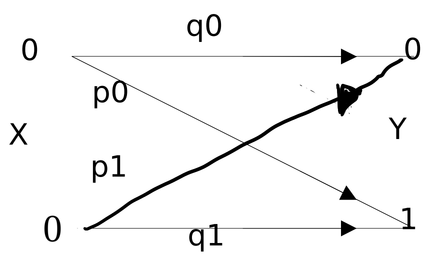
Il canale è caratterizzato dalle seguenti probabilità (dette *di transizione*):

$p_0 = P\{Y = 1 \mid X = 0\}$, $p_1 = P\{Y = 0 \mid X = 1\}$,

$q_0 = P\{Y = 0 \mid X = 0\}$, $q_1 = P\{Y = 1 \mid X = 1\}$.

Si assumano i seguenti valori:

$P\{X = 0\} = 0{,}5$; $p_0 = 0{,}1$; $p_1 = 0{,}2$.



a) Si trovino le probabilità $P\{Y = 0\}$ e $P\{Y = 1\}$.

b) Se all'uscita si osserva uno 0 (ossia si osserva che Y ha assunto valore 0) quant'è la probabilità che il valore di X trasmesso fosse 0 ?

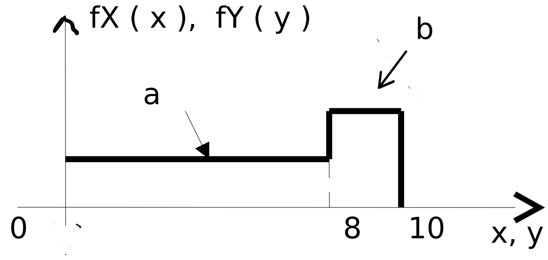
c) Si calcoli la probabilità di errore sul canale, ossia la probabilità $P(E)$.

d) Si dica se le v.a. X e Y sono indipendenti giustificando la risposta.

Quesito A65 *12/06/13*

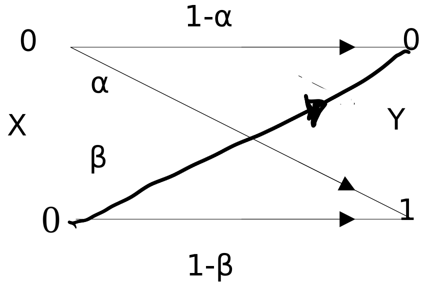
Due v.a. indipendenti X e Y hanno identica densità di probabilità, come in figura.

a) Si calcoli la probabilità $P\{X > 2Y\}$ in funzione di a e b.
b) Sapendo che $\eta = E\{X\} = E\{Y\} = 8$, si trovino i valori di a e b e si dica quanto vale la probabilità trovata al punto precedente in tal caso.



Quesito A84 *24/1/14*

In figura è schematizzato un canale di trasmissione binario (ovvero: a due simboli).
Il simbolo trasmesso è una v.a. discreta X che può assumere i valori {0,1}. Anche il simbolo ricevuto è una v.a. discreta Y che può assumere i valori {0,1} ma a causa di disturbi di trasmissione può verificarsi un errore ossia l'evento: $E = \{X \neq Y\}$.
Il canale è caratterizzato dalle seguenti probabilità (dette *di transizione*):



$\alpha = P\{Y = 1 \mid X = 0\}$, $\beta = P\{Y = 0 \mid X = 1\}$,
$(1 - \alpha) = P\{Y = 0 \mid X = 0\}$, $(1 - \beta) = P\{Y = 1 \mid X = 1\}$.

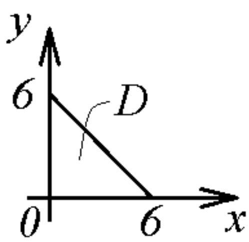
Sia inoltre $P\{X = 0\} = p_0$.

a) Si scriva la probabilità di errore sul canale, ossia la probabilità $p_e = P(E)$ in funzione di α, β, p_0.
b) Si scrivano le probabilità congiunte $P\{X = i, Y = j\}$ per ogni coppia i, j con valori in {0, 1}, in funzione di α, β, p_0
Essendo X e Y una coppia di v.a. discrete, è noto che la funzione di distribuzione congiunta $F_{XY}(x, y)$ assume solo valori costanti in determinate regioni del piano x, y.
c) Sul piano x, y si individuino tutte le regioni in cui $F_{XY}(x, y)$ assume i suoi possibili valori scrivendo per ciascuna regione il rispettivo valore di $F_{XY}(x, y)$ in funzione di α, β, p_0 .

Un "byte trasmesso" è una stinga di 8 bit i cui bit vengono trasmessi attraverso il canale ciascuno indipendentemente dagli altri. La stringa dei corrispondenti bit ricevuti è detta "byte ricevuto" e può contenere un certo numero k di bit errati (ossia diversi da quelli trasmessi) con k che può assumere naturalmente tutti i valori interi da zero (byte ricevuto corretto) a 8.
d) Assumendo $\alpha = \beta$ (canale cosiddetto *simmetrico*) ed anche $P\{X = 0\} = p_0 = ½$ (simboli equiprobabili), si trovi quale valore debba avere α affinché accada che:
$P\{k = 0\} = 10 \cdot P\{k = 1\}$ ossia che la probabilità che il byte ricevuto sia privo di errori (byte corretto) sia dieci volte maggiore della probabilità che tale byte contenga un solo errore (in una posizione qualunque).

Quesito A89 *19/06/14*

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y è costante nel dominio D in figura e nulla altrove.



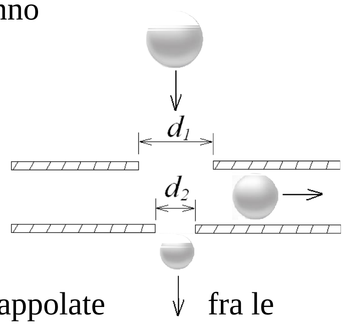
Si calcoli la probabilità dell'evento : $A = \{Y < X^2\}$
Si trovi la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X e se ne tracci un grafico.

Quesito A105 *16/02/15 (2 app. TSA) e 20/07/15 /TS)*

Il sig. Rossi e il sig. Bianchi decidono di incontrarsi in un certo luogo alle ore 12:00.
Il sig. Rossi, più puntuale, arriva in un istante uniformemente distribuito fra le 11:55 e le 12:05 e se alle 12:10 il sig. Bianchi non è arrivato se ne va.
Il sig. Bianchi arriva, indipendentemente dal sig. Rossi, in un istante uniformemente distribuito fra le 12:00 e le 12:20.
a) Definite le v.a. X ={Ritardo del sig. Rossi (in minuti)}, Y ={Ritardo del sig. Bianchi (in minuti)} si trovi la densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ e la si individui sul piano cartesiano.
(N.B.: Con “ritardo” si intende il ritardo rispetto alle ore 12:00. Inoltre: ritardo negativo = anticipo)
b) Si calcoli la probabilità che i due non si incontrino.
c) Si calcoli la probabilità che sia il sig. Bianchi ad aspettare il sig. Rossi.

Quesito A117

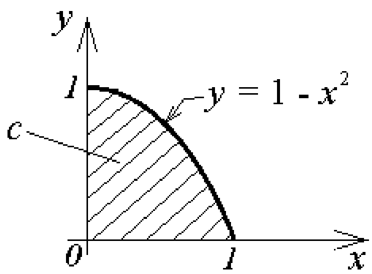
Un certo tipo di sfere ha il diametro che è una variabile aleatoria X uniforme fra d_m e d_M.
Le sfere vengono presentate a una griglia forata con i fori di diametro d_1. Le sfere che passano attraverso tale griglia vengono presentate a una seconda griglia i cui fori hanno diametro d_2. Si assumano valide le relazioni: $0 < d_m < d_2 < d_1 < d_M$
Si trovino le espressioni delle seguenti quantità:



a) Probabilità P_a che una sfera passi attraverso entrambe le griglie.
b) Probabilità P_b che una sfera che ha passato la prima griglia passi la seconda.
c) Scelte n sfere a caso: probabilità P_c che solo m di esse passino entrambe le griglie (con $m \le n$).
d) Densità di probabilità della v.a. “Diametro delle sfere che rimangono intrappolate fra le due griglie” .
e) Dopo avere trovato le espressioni sopra richieste si trovino i valori delle tre probabilità e l’espressione della densità di probabilità richieste assumendo i seguenti valori numerici: d_m = 5 mm, d_M = 15 mm, d_1= 10 mm, d_2 = 8 mm, n = 5, m = 2.

Quesito A112 TSA 2pp 19/1/16

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante c nel dominio indicato in figura delimitato nel primo quadrante dalla curva $y = 1 - x^2$, ed è nulla altrove.
a) Si trovi il valore di c.
b) Si trovi la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X e se ne tracci un grafico.
c) Si calcoli probabilità dell’evento $\{X + Y < 1\}$



Quesito A114 *19/1/16* (Compito A)

In un semaforo stradale la luce verde e quella rossa (si ignori il giallo) si susseguono con regolarità in modo che il periodo del ciclo totale è di c = 90 s. La durata del verde sia v e quella del rosso sia r risultando naturalmente : $v + r = c$. Se l’istante di arrivo di un’auto, misurato a partire dall’inizio del verde, è una variabile aleatoria X uniformemente distribuita fra 0 e c si consideri la v.a. Y = “tempo di attesa dell’auto prima di poter passare”, assumendo che non vi siano altre auto.
a) Si individui la funzione $y = g(x)$ che lega X a Y e se ne tracci un grafico.

b) Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y.
c) Si trovi il tempo medio di attesa (valor medio della v.a. Y) calcolandone poi il valore numerico assumendo v = 60 s.

Quesito A50 *11/9/12*
Un satellite per telecomunicazioni ha due trasmettitori i cui tempi di vita sono variabili aleatorie indipendenti con identica densità di probabilità:

$$f_{X1}(x) = f_{X2}(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, u(x) \qquad \text{con} \quad \lambda > 0 \;.$$

La trasmissione è continua e per essa si utilizza un solo trasmettitore alla volta: il secondo entra in funzione istantaneamente solo quando il primo si guasta.
Si trovi la densità di probabilità della v.a. Z = {Tempo di trasmissione del satellite}.

Quesito A61 *13/2/13*
Le v.a. X e Y sono indipendenti con densità di probabilità, rispettivamente:

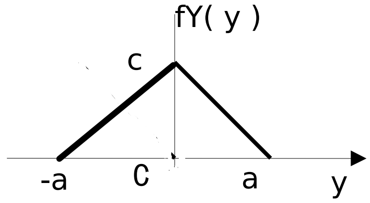
$$f_X(x) = \prod\left(x - \frac{1}{2}\right) \; ; \qquad f_Y(y) = 2e^{-2y}\, u(y) \; .$$

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Z = X + Y$

Quesito A86
Una macchina produce resistori le cui resistenze sono variabili aleatorie indipendenti aventi tutte identica distribuzione uniforme fra $r_0 - \Delta/2$ e $r_0 + \Delta/2$. Per realizzare un circuito si prelevano a caso due di tali resistori e si collegano in serie. Si misura la resistenza della serie e se questa si discosta dal valore $2r_0$ per più di a ohm (in più o in meno) il circuito viene scartato.
Detta p_S la probabilità che il circuito venga scartato, si trovi quale valore debba avere Δ (espresso in funzione degli altri parametri) affinché la probabilità di scarto uguale al 4 % (ossia: $p_S = 4{\cdot}10^{-2}$).

Quesito A91 *21/07/14*
La v.a. X è discreta e può assumere i valori +1 e −1 ciascuno con probabilità 1/2. La v.a. Y, è indipendente da X , è continua e ha densità di probabilità come in figura (con $a > 0$).
Si consideri la v.a. :

$$Z = X + Y$$



a) Si calcoli la probabilità che il segno di Z sia opposto al segno di X, assumendo a = 3.
b) Si dica per quali valori di a (se esistono) la probabilità cercata è nulla.

{Per il calcolo richiesto non si trovino densità di probabilità congiunte né la densità di probabilità di Z. Si ricordi che la v.a. X è discreta e si usi il teorema delle probabilità totali.}

Quesito A60 *13/2/13*
I cioccolatini di un certo tipo sono venduti singolarmente ed una frazione p di essi ($0 < p < 1$) contiene un biglietto che dà diritto a sceglierne subito un altro gratis dello stesso tipo.

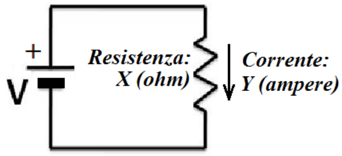
a) Definita la v.a. N = {Numero di cioccolatini che si ottengono acquistandone uno}, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N, ossia la probabilità: $p_n = P\{N = n\}$, per ogni n intero positivo. *{Facoltativo ma utile: verificare la condizione di normalizzazione}*

b) Si calcoli il valore medio della v.a. N sopra definita, in funzione di p. Si dica poi quanto dovrebbe valere p per avere un valor medio uguale a 2. {Può essere utile ricordare che $n \cdot x^{n-1} = D[x^n]$}.
c) Se cinque amici acquistano un cioccolatino ciascuno, si trovi la probabilità P_A che due (soli) di essi ottengano più di un cioccolatino, assumendo $p = 0{,}2$.

Quesito A120 *19/11/16*
La trasmissione di un simbolo binario (bit) attraverso un sistema di comunicazione digitale ("canale") può essere schematizzata come un esperimento casuale consistente nella scelta casuale dall'alfabeto binario {0,1} di un "bit trasmesso X", la sua trasmissione attraverso il canale e l'osservazione del corrispondente "bit ricevuto Y". A causa di disturbi di trasmissione può accadere che il bit ricevuto risulti diverso da quello trasmesso: in tal caso si è verificato l'evento E = {Errore di trasmissione sul bit}={$X \neq Y$}, la cui probabilità $P_1 = P(E)$ è detta "probabilità di errore sul bit".

Un "byte trasmesso" è una stinga di 8 bit i cui bit vengono trasmessi attraverso il canale ciascuno indipendentemente dagli altri. La stringa dei corrispondenti bit ricevuti è detta "byte ricevuto" e può contenere un certo numero k di bit errati (ossia diversi da quelli trasmessi) con k che può assumere naturalmente tutti i valori interi da $k = 0$ (byte ricevuto corretto) a $k = 8$.
a) Si trovi quale valore debba avere la probabilità di errore sul bit, P_1, affinché accada che:
$P\{k = 0\} = 10 \cdot P\{k = 1\}$ ossia che la probabilità che il byte ricevuto sia privo di errori (byte corretto) sia dieci volte maggiore della probabilità che tale byte contenga un solo errore (in una posizione qualunque).
b) Col valore di P_1 trovato si calcoli la probabilità P_B di errore sul byte, ossia la probabilità che il byte ricevuto contenga almeno un errore.

Quesito A121 *17/01/17*
La resistenza di un certo tipo di resistori è una variabile aleatoria X uniformemente distribuita fra 100 e 200 ohm. Si sceglie a caso uno di tali resistori e lo si inserisce nel circuito in figura dove la batteria ha una tensione costante di V volt.



a) Si trovi la densità di probabilità $f_Y(y)$ della v.a.:
Y ={Corrente che circola nel resistore}.
b) Si esegue il seguente esperimento casuale: scelto a caso uno dei resistori sopra descritti lo si inserisce nel circuito precedente dove però la batteria è stata scelta a caso fra due possibili, una con tensione $V_1 = 20$ volt e l'altra con tensione $V_2 = 25$ volt. Si misura quindi la corrente Y che risulta essere di 150 mA.
Si dica, giustificando la risposta, se sia più probabile che la batteria sia da 20 o da 25 volt.
c) *Facoltativo:* si calcolino le due probabilità da confrontare.