Teoria dei Segnali

C. L. Ing. Informatica, Elettronica e delle Telecomunicazioni
(Dip. Ingegneria e Architettura - Università di Parma)

Prof. Armando Vannucci

December 14, 2021

Dipartimento di Ingegneria e Architettura (Pal. 2), viale delle Scienze181/A - 43124 Parma.

Raccolta di esercizi didattici da svolgere durante il corso

Nel numerare gli esercizi, si adotta la seguente convenzione: n) sono gli esercizi con soluzione svolta; (n) quelli con soluzioni numeriche; [n] quelli del libro, con sol. numerica; [n]) se svolti estensivamente. Un documento con le soluzioni svolte degli esercizi indicati con"n) " o "[n])" verrà reso disponibile online (su piattaforma E-learning) la settimana successiva a quella di assegnazione dell'esercizio; allo stesso modo, verranno pubblicate le soluzioni numeriche degli esercizi indicati con"(n) " o "[n]".

Parte II SEGNALI ALEATÒRI

In questa seconda parte, si analizzano i segnali aleatòri. I numeri degli esercizi [n] fanno riferimento al capiolo 5 del testo: *A. Vannucci, "Segnali Analogici e Sistemi Lineari", Pitagora Editrice, Bologna, 2003 (ISBN: 88-371-1416-8).* Per una raccolta di esercizi d'esame con soluzioni, si rimanda al testo: *A. Vannucci, "Esercizi d'esame di Teoria dei Segnali", Pitagora Editrice, Bologna, 2018 (ISBN: 88-371-1811-2).* Si veda la nota in Prefazione dell'ultimo testo citato, per una corretta metodica di approccio alla soluzione degli esercizi, che vale sia per esercizi didattici sia per esercizi d'esame.

II-A SEGNALI ALEATÒRI: testo degli esercizi

[105] Ricavare, attraverso gli strumenti noti della *Teoria della Probabilità*, la densità di probabilità (*pdf*) di primo ordine del *Processo Armonico*: $Y(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \Phi)$, $\quad \Phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$, verificando che $f_Y(y_1; t_1)$ è indipendente da t_1. Si disegnino alcune *realizzazioni* del processo.
(DIFFICILE)

Calcolare ora la pdf di secondo ordine $f_Y(y_1, y_2; t_1 t_2)$ e verificare che dipende da $t_2 - t_1$. Per agevolare il calcolo, si valuti dapprima la densità di probabilità condizionata $f_Y(y_2, ; t_2 \mid Y(t_1) = y_1)$, notando come, dato $Y(t_1) = y_1$, si possono avere solo due valori, equiprobabili, per la fase Φ. Viceversa, osservando il Processo Armonico in due distinti istanti di tempo, dove assume i valori $Y(t_1) = y_1$ e $Y(t_2) = y_2$, la fase Φ è (salvo casi particolari) univocamente determinabile da tali osservazioni.

(106) Sia dato il processo stocastico $X(t) = K$, dove K è una Variabile Aleatoria (V.A.) Gaussiana, a media nulla e varianza unitaria. Disegnare alcune realizzazioni; scrivere l'espressione della pdf di primo e secondo ordine del processo.

(107) Stabilire se il processo descritto nell'esercizio precedente è un processo Gaussiano oppure no. A tale scopo, data una n-pla di istanti di osservazione, si calcoli il vettore dei valori medi e la matrice di covarianza; si verifichi dunque se è possibile descrivere la n-pla di variabili aleatorie estratte dal processo $([X(t_1); X(t_2); \cdots ; X(t_n)])$ mediante una pdf Gaussiana multivariata di ordine n.

(108) (MOLTO DIFFICILE)
Dato il processo stocastico $X(t) = \Pi(t + T)$, con $T \sim \mathcal{U}[-1, +1]$, valutare la descrizione statistica in potenza completa per $X(t)$; calcolare cioè i momenti di primo grado e di secondo grado del processo: $\eta_X(t); P_X(t); \sigma^2(t); R_X(t_1, t_2); C_X(t_1, t_2)$.

(109) (DIFFICILE)
Un Processo Armonico $Y(t)$ viene moltiplicato per una V.A. di Rayleigh X (indipendente dalla fase Φ del processo armonico) con media unitaria, generando un processo $Z(t) = X \cdot Y(t)$. Determinare il *valore medio statistico* e l'*autocorrelazione* di $Z(t)$. Determinare poi la pdf di primo ordine di $Z(t)$, verificando che è Gaussiana per qualunque istante t_1 di osservazione.
NOTA: si ricordi che una variabile aleatoria di Rayleigh X con media unitaria $E[X] = 1$ è caratterizzata dalla pdf $f_X(x) = \frac{\pi}{2} x \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4} x^2} u(x)$.

(110) Verificare, calcolando $\eta_X(t)$ e $R_X(t_1, t_2)$, se il processo stocastico $X(t)$ dell'esercizio (106) è SSL o meno. Si discuta se $X(t)$ è anche SSS, motivando la risposta.

[111] Dato un segnale determinato $x(t)$, periodico di periodo T_0, dimostrare che il processo stocastico $Y(t) = x(t - T)$, dove $T \sim \mathcal{U}[0, T_0]$ è SSL.

[112] Se verifichi se il processo $X(t)$ dato nell'esercizio (106) è ergodico o meno.
SUGGERIMENTO: per dimostrare che non è ergodico, è sufficiente verificare che il valore medio temporale di una sua realizzazione $< x^{(k)}(t) >$ è diverso dal valor medio statistico η_X.

(113) Un processo stocastico SSL ha media $\eta_X = 1$ e autocorrelazione $R_X(\tau) = \mathrm{sinc}(B\tau) + 1$. Esso transita in un filtro con risposta impulsiva $h(t) = B\mathrm{sinc}(Bt)$. Verificare se il processo di uscita $Y(t)$ è SSL e, in caso positivo, calcolare η_Y e $R_Y(\tau)$. Calcolare quanto vale la potenza media di $Y(t)$ e quanto quella di $X(t)$.

(114) Dati i due processo SSL $X(t)$ e $Y(t)$ *indipendenti*, con $\eta_X = 1$, $R_X(\tau) = \Pi(\tau) + 1$, $\eta_Y = 2$, $R_Y(\tau) = 2\Pi(\tau) + 4$, calcolare media, autocorrelazione e potenza media di $Z(t) = X(t) + Y(t)$.
NOTA: se due processi stocastici sono statisticamente indipendenti, allora qualunque variabile aleatoria (o n-pla di V.A.) estratta dal primo è statisticamente indipendente da qualunque V.A. (o n-pla di V.A.) estratta dal secondo.

[115] Calcolare la *banda equivalente di rumore* di un filtro RC passa-basso con costante di tempo $RC = 1\ \mu s$.

[116] Qual è la funzione di autocorrelazione del processo $Y(t)$ ottenuto filtrando un processo di *tensione di rumore termico bianco* con un filtro passa-basso RC?
NOTA: si assuma che il rumore sia generato da una resistenza di R_T $[\Omega]$ a temperatura T $[°K]$, in generale diversa dalla resistenza del filtro RC, che qui si assume essere "non rumorosa". Nell'esercizio (118), viceversa, la resistenza svolge il doppio ruolo di generazione del rumore termico e di filtraggio dello stesso (insieme al consensatore).

[117] Ad un segnale aleatorio $Y(t)$, con densità spettrale di potenza $P_Y(f)$, viene sommato un rumore bianco $X(t)$ (indipendente da $Y(t)$) generato da un resistore R a temperatura T $[°K]$: determinare la densità spettrale di potenza del processo somma $Z(t) = Y(t) + X(t)$.

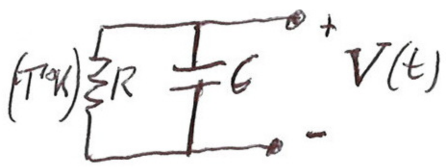
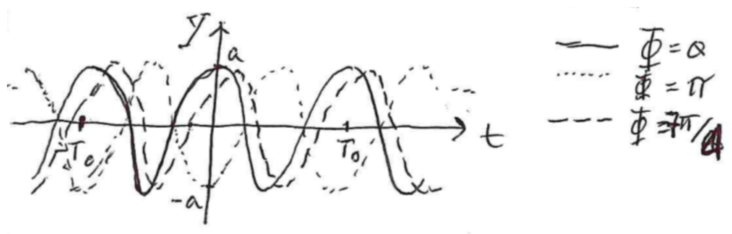


Figure 1: Resistenza rumorosa, connessa in parallelo ad una capacità, dell'esercizio (118).

(118) Scrivere l'espressione della densità di probabilità della Variabile Aleatoria $V(t_1)$ ottenuta osservando, all'istante $t_1 = 0$, il valore di tensione che si presenta ai capi del circuito riportato in Fig. 1. I valori di resistenza, capacità e temperatura sono: $R = 125\ M\Omega$; $C = 0,004\ pF$; $T = 18,8\ °C$.
NOTA: il valore della costante di Boltzmann è $k = 1,37 \cdot 10^{-23}$ $[J/°K]$.

II-B SEGNALI ALEATÒRI: soluzione degli esercizi

[105] La V.A. $Y_1 = Y(t_1) = a \cdot \cos(2\pi f_0 t_1 + \Phi) = g(\Phi)$ rappresenta una *trasformazione di V.A.*, da $\Phi \sim \mathcal{U}[0; 2\pi]$ a Y_1.



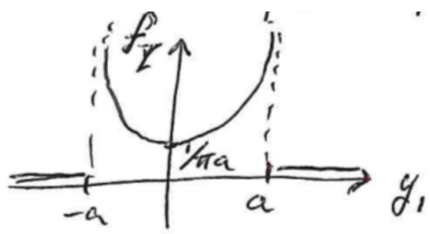
Dal *Teorema Fondamentale*, considerando $f_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\Pi\left(\frac{\varphi-\pi}{2\pi}\right)$, si ha

$$f_{Y_1}(y_1) = f_Y(y_1; t_1) = \sum_i \frac{f_\Phi(\varphi_i(y_1))}{|g'(\varphi_i(y_1)|}$$

con φ_i soluzioni di $y_1 = g(\varphi)$. Dunque, NESSUNA soluzione per $|y_1| > a$; per $|y_1| \leq a$, 2 soluzioni: $\varphi_{1,2} = \pm \arccos\left({}^{y_1}/_a\right) - 2\pi f_0 t_1$ [modulo 2π]. La derivata è $g'(\varphi) = -a\sin(2\pi f_0 t_1 + \varphi)$, dunque $g'(\varphi_{1,2}) = -a\sin\left(\pm \arccos\left({}^{y_1}/_a\right)\right) = \pm a\sqrt{1 - \left({}^{y_1}/_a\right)^2}$. Ne segue,

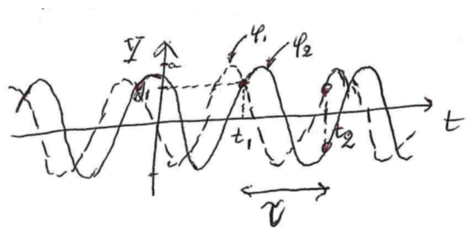
$$f_Y(y_1; t_1) = \frac{f_\Phi(\varphi_1(y_1))}{\left|+\sqrt{a^2 - y_1^2}\right|} + \frac{f_\Phi(\varphi_2(y_1))}{\left|-\sqrt{a^2 - y_1^2}\right|} = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y_1^2}} & \textit{per } |y_1| \leq a \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

La pdf risultante è indipendente dall'istante di osservazione t_1 ed è riportata in figura



2a parte [DIFFICILE]

Posto, come sopra, $Y(t_1) = y_1$, solo due valori di $\Phi \in [0; 2\pi]$ sono possibili, dunque due soli valori per $Y_2 = Y(t_2)$, indicati nella figura seguente



Posto $t_2 = t_! + \tau$, si ha

$$\begin{aligned}
Y_2 &= Y(t_2) = a \cdot \cos(2\pi f_0 (t_1 + \tau) + \Phi) \\
&= a \cdot \cos(2\pi f_0 t_1 + \Phi) \cos(2\pi f_0 \tau) - a \cdot \sin(2\pi f_0 t_1 + \Phi) \sin(2\pi f_0 \tau) \\
&= Y_1 \cos(2\pi f_0 \tau) - \left(\pm\sqrt{a^2 - Y_1^2} \right) \sin(2\pi f_0 \tau)
\end{aligned}$$

dove si è riconosciuto $Y_1 = a \cdot \cos(2\pi f_0 t_1 + \Phi)$ e analoga espressione, derivata da questa, per il termine con il seno.

In termini di probabilità condizionata all'evento $Y(t_1) = y_1$, ne segue che si hanno due possibili valori equiprobabili per

$$y_2 = \begin{cases} y_1 \cos(2\pi f_0 \tau) - \sqrt{a^2 - y_1^2} \sin(2\pi f_0 \tau) & \textit{con Probabilità } 1/2 \\ y_1 \cos(2\pi f_0 \tau) + \sqrt{a^2 - y_1^2} \sin(2\pi f_0 \tau) & \textit{con Probabilità } 1/2 \end{cases}$$

distinti dal segno $\pm$ che dipende da $\varphi_{1,2}$ (equiprobabili); si riconosce che entrambi i valori di $|y_2| \leq a$. La pdf condizionata è

$$\begin{aligned}
f_Y(y_2 \mid y_1; t_2, t_1) &= \frac{1}{2}\delta\left(y_2 - \left(y_1 \cos(2\pi f_0 \tau) - \sqrt{a^2 - y_1^2} \sin(2\pi f_0 \tau) \right) \right) \\
&+ \frac{1}{2}\delta\left(y_2 - \left(y_1 \cos(2\pi f_0 \tau) + \sqrt{a^2 - y_1^2} \sin(2\pi f_0 \tau) \right) \right)
\end{aligned}$$

e infine, per la pdf congiunta

$$f_Y(y_1, y_2; t_2, t_1) = f_Y(y_2 \mid y_1; t_2, t_1) f_Y(y_1; t_1)$$

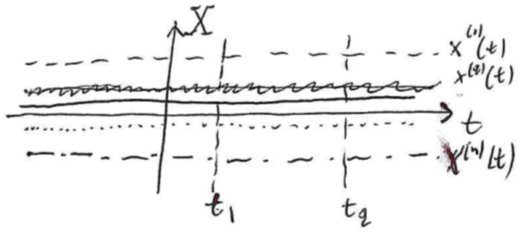
che combina i due risultati precedenti e che è nulla per $|y_1| > a$ o per $|y_2| > a$.

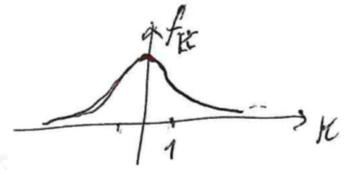
Il risultato più importante è che la pdf congiunta dipende solo da τ e non da t_1 né da t_2 singolarmente (si veda, in seguito: Stazionarietà).

(106) Le realizzazioni sono costanti. Per qualunque istante di osservazione t_1, la V.A. estratta dal processo è $X_1 = X(t_1) = K$; che rappresenta una "trasformazione identica" di V.A., ovvero la pdf delle due variabili

$$f_{X_1}(x_1) = f_X(x_1; t_1) = f_K(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2}{2}}$$

è indipendente da t_1 e coincide con la Gaussiana descritta nel testo, riportata in figura seguente insieme ad alcune realizzazioni





Posto $X(t_1) = x_1$, evidentemente si è avuto $K = x_1$, dunque sarà necessariamente $X(t_2) = K = x_1$, da cui

$$
\begin{aligned}
f_X(x_2 \mid x_1; t_2, t_1) =& \delta(x_2 - x_!) \\
f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) =& f_X(x_2 \mid x_1; t_2, t_1) f_X(x_1; t_1) = \delta(x_2 - x_!) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2}{2}}
\end{aligned}
$$

dove la pdf di 2^o ordine è indipendente da $t_!, t_2$.

(107) Osservando $X(t)$ dell'esercizio precedente negli istanti $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$, si ha un vettore aleatorio

$$
\boldsymbol{X} = [X_1; X_2; \cdots; X_n] = [X(t_1); X(t_2); \cdots; X(t_n)] = [K; K; \cdots; K]
$$

con elementi identici, poiché si osserva lo stesso valore (aleatorio) K in tutti gli istanti.

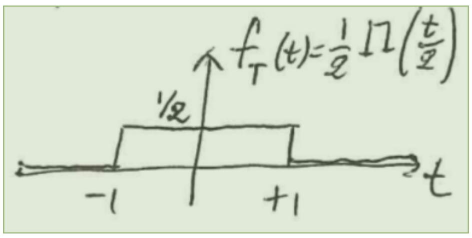
Per il vettore delle medie e la matrice di covarianza, poiché $K \sim \mathcal{N}(0, 1)$, avremo

$$
\begin{aligned}
\eta_i =& E[X(t_i)] = E[K] = 0 \\
C_{ij} =& E[X(t_i) X(t_j)] = E[K^2] = 1 \\
\mathbf{C}_X =& \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

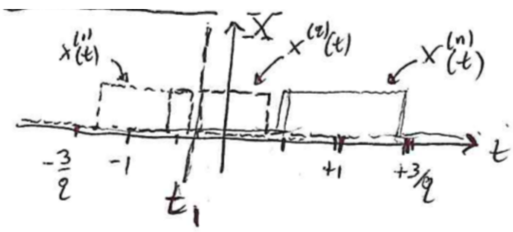
ovvero una matrice di covarianza fatta di elementi identici, dunque singolare (non invertibile) e con $\det[\mathbf{C}_X] = 0$.

Si deve concludere che le variabili $\boldsymbol{X}$ non sono caratterizzate da una densità Gaussiana multivariata (che non si può esprimere, poiché $\mathbf{C}_X^{-1}$ non esiste) e, di conseguenza, $X(t)$ non è un processo Gaussiano.

(108) (MOLTO DIFFICILE)
Le realizzazioni del processo sono impulsi rettangolari, di durata unitaria, traslati di un ritardo aleatorio uniforme $T \sim \mathcal{U}([-1; 1])$, la cui pdf $f_T(t) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$, è riportata di seguito



Occorre provare a visualizzare alcune delle realizzazioni possibili del processo $X(t)$, riportate in figura:



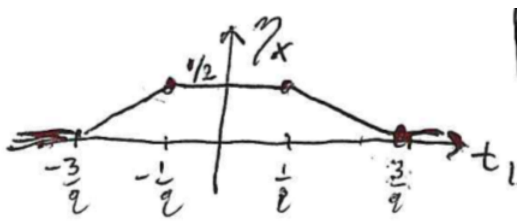
Osservando il processo ad un generico istante $t_!$, si avrà

$$X(t_!) = \Pi(t_1 + T) = \begin{cases} 1 & se \quad -1/2 - t_1 \leq T \leq 1/2 - t_1 \\ 0 & se \qquad |T + t_1| > 1/2 \end{cases}$$

cosicché il calcolo del valore medio statistico risulta

$$\begin{aligned} \eta_X(t_1) &= E[X(t_1)] = E[\Pi(t_1 + T)] \\ &= 1 \cdot P\{-1/2 - t_1 \leq T \leq 1/2 - t_1\} + 0 \cdot p\{|T + t_1| > 1/2\} \\ &= \int_{-1/2-t_1}^{1/2-t_1} f_T(t)dt = \begin{cases} 0 & per \quad |t_1| > 3/2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - |t_1|\right) & per \quad 1/2 \leq |t_1| \leq 3/2 \\ \frac{1}{2} & per \quad |t_1| \leq 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

conl'andamento riportato in figura



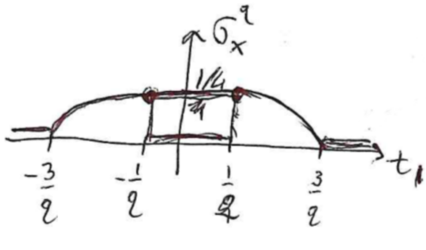
Per la potenza statistica si ottiene facilmente

$$P_X(t_1) = E[X^2(t_1)] = E[\Pi^2(t_1 + T)] = E[\Pi(t_1 + T)] = \eta_X(t_1)$$

e dunque la varianza del processo risulta

$$\sigma_X^2(t_1) = P_X(t_1) - \eta_X^2(t_1) = \begin{cases} 0 & per \quad |t_1| > 3/2 \\ -\frac{1}{4}t_1^2 + \frac{1}{4}|t_1| + \frac{3}{16} & per \quad 1/2 \leq |t_1| \leq 3/2 \\ \frac{1}{4} & per \quad |t_1| \leq 1/2 \end{cases}$$

conl'andamento riportato in figura



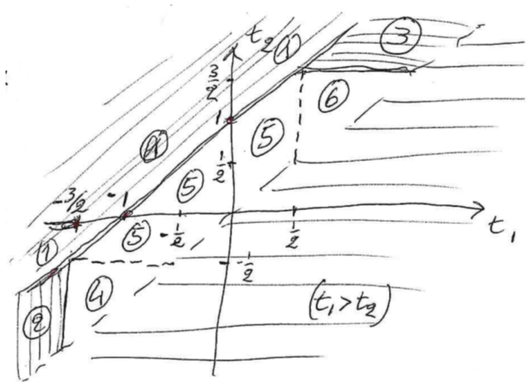
La funzione di autocorrelazione è:

$$\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) = &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[\Pi(t_1+T)\Pi(t_2+T)] \\
&=1\cdot P\left\{(-{}^1\!/\!_2 - t_1 \leq T \leq {}^1\!/\!_2 - t_1) \cap (-{}^1\!/\!_2 - t_2 \leq T \leq {}^1\!/\!_2 - t_2)\right\} \\
&\quad + 0\cdot P\left\{(|T+t_1| > {}^1\!/\!_2) \cup |T+t_2| > {}^1\!/\!_2\right\} \\
&=P\left\{(-{}^1\!/\!_2 - \min\{t_1,t_2\} \leq T \leq {}^1\!/\!_2 - \max\{t_1,t_2\})\right\}
\end{aligned}$$

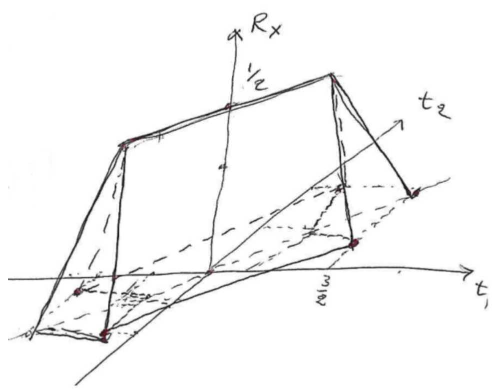
Tale probabilità risulta nulla se $\min\{t_1,t_2\} \leq \max\{t_1,t_2\} - 1$. Viceversa, ipotizzando $t_2 \geq t_1$ (un analogo calcolo si può condurre nel caso opposto, scambiando il ruolo di t_1 e t_2), il risultato si può articolare nelle seguenti sei casistiche:

$$\int_{-1/2-t_1}^{1/2-t_2} f_T(t)dt = \begin{cases}
0 & se \quad t_2 - t_1 \geq 1 \\
0 & se \quad t_1 \leq -3/2\ (t_2 \leq 1/2) \\
0 & se \quad t_2 \geq 3/2\ (t_1 \geq 1/2) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+t_1\right) & se \quad t_1 \geq -3/2\ e\ t_2 \leq -1/2 \\
\frac{1}{2}\left(1-(t_2-t_1)\right) & se \quad -3/2 \leq t_1 \leq 1/2\ e\ -1/2 \leq t_2 \leq 3/2 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-t_2\right) & se \quad t_1 \geq 1/2\ e\ t_2 \leq 3/2
\end{cases}$$

Le sei zone relative alle rispettive casistiche sono identificate nel semipiano $(t_2 \geq t_1)$ nella figura che segue



dove gli stessi valori si applicano nel semipiano simmetrico. Il profilo risultante per l'autocorrelazione è simile a quello di una "tenda canadese", qui riportato in prospettiva



L'autocovarianza del processo si ottiene da questa come $C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2)$, di cui non disegnamo il complicato grafico. Notiamo comunque che lungo la bisettrice del piano, $t_1 = t_2$, il profilo di $C_X(t_1,t_1) = \sigma_X^2(t_1)$ coincide con quello della varianza del processo, riportato sopra. Si noti anche che, al contrario della varianza, l'autocovarianza può assumere anche valori negativi: nel nostro caso, questo accade, ad esempio, nella parte esterna della porzione quadrata di piano $(t_1,t_2) \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$, laddove $R_X(t_1,t_2)$ è nulla.
NOTA: questo esercizio mostra come spesso sia laborioso, nella pratica, calcolare anche soltanto i momenti di 1^o e 2^o grado di un processo non stazionario, sebbene la descrizione del processo sia semplice e semplice sia anche l'approccio concettuale al calcolo.

(109) (DIFFICILE)
Nel calcolo del valore medio,

$$\begin{aligned}\eta_Z(t_1) &= E[Z(t_1)] = E[X \cdot Y(t_1)] = E[X \cdot a\cos(2\pi f_0 t_1 + \Phi)] \\ &= E[X] \cdot E[Y(t_1)] = \eta_X \cdot \eta_Y(t_1) = 1 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

si impiega dapprima il Teorema del Valore atteso, che richiederebbe la conoscenza della pdf congiunta di X e di Φ, la quale si fattorizza nel prodotto delle rispettive marginali, grazie all'indipendenza di X dal processo armonico (dunque da Φ). Quest'ultimo ha, come noto, valor medio nullo per qualunque istante di osservazione.

La stessa indipendenza si sfrutta nel calcolo dell'autocorrelazione

$$\begin{aligned}R_Z(t_1,t_2) &= E\left[(X \cdot Y(t_1)) \cdot (X \cdot Y(t_2))\right] = doveE[X^2] \cdot E[Y(t_1)Y(t_2)] \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a^2}{2}\cos\left(2\pi f_0\left(t_2 - t_1\right)\right)\end{aligned}$$

si è sfruttata la nota funzione di autocorrelazione del processo armonico e il valore quadratico medio della V.A. di Rayleigh a media unitaria, che può essere esplicitamente valutato come segue:

$$\begin{aligned}E[X^2] &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} x^3 \mathrm{e}^{-\frac{x^2\pi}{4}} dx = \left(\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \theta^3 \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\theta^2\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \theta \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta\right\} = \frac{2}{\pi}2\end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale è uguale a 1 poiché coincide con la condizione di normalizzazione di una densità di probabilità di Rayleigh standard (con media $\sqrt{\pi/2}$).

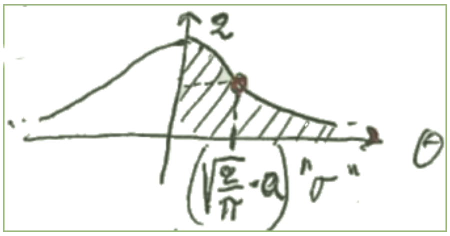
Per determinare la densità di 1^o ordine del processo, si consideri la V.A. estratta $Z = Z(t_1) = X \cdot Y(t_1)$ come il prodotto di 2 V.A. indipendenti di cui conosciamo le pdf: $f_x(x)$è data nel testo, mentre $f_Y(y_1;t_1) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}\Pi\left(\frac{y}{2a}\right)$ (si veda l'esercizio [105]). Poiché queste due pdf non dipendono da t_1, ne segue che neppure $f_Z(\cdot)$ dipenderà dall'istante di osservazione, ovvero il processo $Z(t)$ è stazionario (almeno) al 1^o ordine. Nella fattispecie, la trasformazione da 2 V.A. X, Y ad una nuova V.A. "prodotto" $Z = X \cdot Y$ è un esercizio classico di Teoria della Probabilità, che può essere risolto (ad esempio col “Metodo della CDF”), ottenendo

$$
\begin{aligned}
f_Z(z;t_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_{XY}\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} \left(\frac{\pi}{2} x \mathrm{e}^{-\frac{x^2\pi}{4}} u(x)\right) \left(\frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - (z/x)^2}} \Pi\left(\frac{z}{2ax}\right)\right) dx \\
&= \int_{|z/a|}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} x \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}x^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2x^2 - z^2}}\right) dx
\end{aligned}
$$

essendo $\Pi\left(\frac{z}{2ax}\right) = 1$ per $x \geq |z/a|$. Applicando poi un cambio di variabile $\theta = \sqrt{a^2x^2 - z^2}$, da cui gli estremi di integrazione diventano $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = +\infty$, mentre $x = \frac{1}{a}\sqrt{\theta^2 + z^2}$ genera l'elemento differenziale $dx = \frac{1}{a}\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+z^2}} d\theta$. Dunque,

$$
\begin{aligned}
f_Z(z;t_1) &= \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2a}\sqrt{\theta^2 + z^2} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4a^2}\left(z^2+\theta^2\right)}\right) \left(\frac{1}{\theta}\right) \frac{\theta}{a\sqrt{\theta^2 + z^2}} d\theta \\
&= \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-\frac{\pi z^2}{4a^2}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{\pi\theta^2}{4a^2}} d\theta = \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-\frac{\pi z^2}{4a^2}}
\end{aligned}
$$

dove l'ultimo integrale è uguale a 1 per normalizzazione, essendo il doppio dell'area sottesa da una gaussiana con media nulla e varianza $2a^2/\pi$, come rappresentato nella seguente figura



Infine, la pdf di primo ordine del processo è anch'essa una Gaussiana a media nulla e varianza $2a^2/\pi$, che si può esprimere come

$$
f_Z(z;t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(2a^2/\pi\right)}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\left(2a^2/\pi\right)}}
$$

(110) Il Processo Stocastico $X(t) = K$, con $K \sim \mathcal{N}(0,1)$, ha realizzazioni costanti, come visto nell'esercizio (106), caratterizzate dalle seguenti media e varianza

$$
\begin{aligned}
\eta_X(t_1) =& E[X(t_1)] = E[K] = 0 \\
R_X(t_1,t_2) =& E[X(t_1)X(t_2)] = E[K^2] = 1
\end{aligned}
$$

che sono costanti (indipendenti sia da t_1 che da t_2) e dunque identificano, in base alla definizione, un processo Stazionario in Senso Lato (SSL).

Il processo in questione risulta poi essere anche Stazionario in Senso Stretto (SSS) poiché “per qualsiasi sua realizzazione $x^{(i)}(t)$ ($= k^{(i)}$, derivante dalla corrispondente determinazione del suo unico parametro aleatorio K), anche una sua versione traslata, $x^{(i)}(t - t_0)$ (anch'essa $= k^{(i)} = x^{(i)}(t)$, per

$\forall t_0$) è una possibile realizzazione del Processo e risulta ugualmente probabile". Infatti, $x^{(i)}(t-t_0)$ si verifica con la stessa frequenza con cui si verifica $x^{(i)}(t)$, per il semplice fatto che le due realizzazioni coincidono, per qualunque valore di t_0.

[111] Dal testo del problema, sappiamo che $x(t+T_0) = x(t)$ per $\forall t$, poiché il segnale è periodico. Il processo aleatorio da caratterizzare è definito come $Y(t) = x(t-T)$, con $f_T(t) = \frac{1}{T_0}\Pi\left(\frac{t-T_0/2}{T_0}\right)$, ovvero è una versione ritardata del segnale $x(t)$, con un ritardo aleatorio uniforme all'interno del periodo del segnale. Come l'intuizione dovrebbe suggerire, è proprio l'uniformità del ritardo all'interno di un periodo che conferisce stazionarietà al processo.

Per dimostrarlo matematicamente, ne calcoliamo la media statistica

$$\eta_Y(t) = E[Y(t)] = E[x(t-T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\theta) f_T(\theta) d\theta$$

in cui abbiamo applicato il Teorema del Valore Atteso, mediando il processo con la pdf del suo unico parametro aleatorio. Poiché questa è uniform, il risultato (con cambio di variabile $(t-\theta) = \tau$)

$$\eta_Y(t) = \int_0^{T_0} x(t-\theta)\frac{1}{T_0}d\theta = \frac{1}{T_0}\int_{t-T_0}^{t} x(\tau)d\tau =< x(t) >$$

col *valor medio temporale* del segnale periodico $x(t)$ (in quanto l'integrazione avviene su un intero periodo).

Per l'autocorrelazione si ha

$$\begin{aligned} R_Y(t_1,t_2) =& E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[x(t_1-T)x(t_2-T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1-\theta)x(t_2-\theta)f_T(\theta)d\theta \\ =& \int_0^{T_0} x(t_1-\theta)x(t_2-\theta)\frac{1}{T_0}d\theta = \frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_1} x(\tau)x((t_2-t_1)+\tau)d\tau \end{aligned}$$

dove di nuovo si è usato il cambio di variabile $(t_1-\theta) = \tau$, nell'ultimo passaggio. Nell'ultima espressione occorre riconoscere la definizione di funzione di autocorrelazione per segnali determinati di potenza, che per i segnali periodici assume l'espressione semplificata

$$p_x(t) \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(\tau)x(t+\tau)d\tau = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)x(t+\tau)d\tau$$

dove l'integrale si svolge su un qualunque periodo. Ne segue che $R_Y(t_1,t_2) = p_x(t_2-t_1)$ e dunque, in base alla definizione, il processo è Stazionario in Senso Lato (SSL), essendo $\eta_Y(t)$ indipendente da t e $R_Y(t_1,t_2)$ dipendente solo da (t_2-t_1).

Si noti che, per questo tipo di processo, il valor medio *statistico* coincide col valor medio *temporale* e l'autocorrelazione *statistica* coincide con l'autocorrelazione *temporale*.

[112] Per un processo *Ergodico*, una qualunque *media statistica* operata sul processo coincide con la corrispondente *media temporale*, operata su una qualunque delle sue realizzazioni.

Se $X(t) = K$ con $K \sim \mathcal{N}(0,1)$, come nel caso in esame dell'esercizio (106), fosse un processo ergodico, allora dovrebbe essere

$$\eta_X = E[X(t)] =< x^{(i)}(t) >$$

per una qualunque, i-ma, realizzazione. Tuttavia, si è già trovato (nell'esercizio (107)) che $\eta_X = 0$ mentre se si ipotizza che la i-ma realizzazione sia $x^{(i)}(t) = k^{(i)}$, con $k^{(i)} \neq 0$, chiaramente si avrà un valor medio temporale coincidente con $k^{(i)}(\neq 0)$, dunque diverso da $\eta_X(= 0)$, il che contraddice lìipotesi di ergodicità.