Integrali

Primitive

Se f e g sono definite su un intervallo, diciamo che g è una **primitiva di f**, se $g' = f$, quindi se f è la derivata di g.

Esempio
Il coseno è la derivata del seno, quindi il seno è la primitiva del coseno.

Possono esistere un numero infinito di primitive di una funzione, dato che una qualunque funzione traslata sull'asse y mantiene sempre la stessa derivata, quindi le altre primitive differiscono per una costante. Si rappresenta con il simbolo di integrale indefinito:

$$\int f(x)dx = \{\phi : \phi'(x) = f(x)\}$$

È possibile trovare la scrittura abbreviata:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + k$$

Notando che si tratta di un insieme di funzioni, non una funzione parametrica, due funzioni possono avere la stessa identica derivata prima se hanno lo stesso andamento ma sono spostate sull'asse y.

Risoluzione di integrali indefiniti

Risolvere un integrale vuol dire trovare le primitive, quindi non si avrà come risultato una funzione, ma una serie di funzioni, indicate da una costante sommata alla fine, che rappresenta la stessa funzione traslata in qualunque punto dell'ordinata.

Per trovare una primitiva si può eseguire la operazione inversa della risoluzione di una derivata, per esempio se la derivata di x è 1, allora la primitiva di 1 è x.

Nota importante: ogni volta che si trova una primitiva bisogna aggiungere $+c$ per indicare che sono più funzioni (o $+k$ una vale l'altra).

$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{\cos x}$	$\boldsymbol{\sin x}$
$\boldsymbol{\sin x}$	$\boldsymbol{-\cos x}$
$\boldsymbol{\frac{1}{\cos^2 x}}$	$\boldsymbol{\tan x}$
$\boldsymbol{\frac{1}{1+x}}$	$\boldsymbol{\arctan x}$
$\boldsymbol{e^x}$	e^x
$x^{\alpha \neq -1}$	$\boldsymbol{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$
$\boldsymbol{x^{-1}}$	$\boldsymbol{\log \lvert x \rvert}$
$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{c}$

Essendo c una costante sconosciuta, si può ignorare qualunque costante sommata o moltiplicata ad essa, dato che è arbitraria, anche il segno non conta. Quindi se si trovano in due punti della stessa espressione $+c$, allora si può semplicemente scrivere una sola volta.

Operazioni su integrali indefiniti

Somma in un integrale

Sapendo che la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad F' = f$$

$$\int g(x)\,dx = G(x) + c, \qquad G' = g$$

La derivata di $f + g$ è $F + G$, quindi:

$$\int f + g\;\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$

$$D\big(\alpha \cdot f(x)\big) = \alpha \cdot D\big(f(x)\big) \Rightarrow \int \big(\alpha \cdot f(x)\big)dx = \alpha \cdot \int \big(f(x)\big)dx$$

Differenza in un integrale

$$A - B = A + (-1) \cdot B$$

$$\int A\,dx + \int (-1) \cdot B\,dx$$

$$\int A\,dx + (-1) \cdot \int B\,dx$$

$$\int A\,dx - \int B\,dx$$

Esempio

$$\int (3 \cdot \cos x - 2e^x)dx$$

$$3 \int (\cos x)dx - 2 \int e^x\,dx$$

$$3 \cdot \sin x - 2 \cdot e^x + c$$

Prodotto in un integrale (integrazione per parti)

Da fare particolare attenzione, la derivata del prodotto **non è il prodotto delle derivate**. Bisogna applicare la formula della **integrazione per parti**:

Dato un prodotto di funzioni all'interno di un integrale, in cui per una di esse è possibile riconoscere la derivata che la ha generata, è possibile cambiare l'integrale facendo in modo che si sostituisce la derivata con la primitiva e la primitiva con la derivata.

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx + c$$

Esempio

$$\int x \cdot \sin x\,dx$$

Intuitivamente non si sa quali siano le primitive, ma si può scomporre in qualcosa di meglio risolvibile con l'integrazione per parti. A questo punto si può prendere come F la prima parte (x) o la seconda $(\sin x)$:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \frac{x^2}{2}\sin x - \int \left(\frac{x^2}{2} \cdot \cos x\right)dx$$

Risulta più complicato, non va bene. Provando a procedere nell'altra maniera:
$F(x) = -\cos x \quad \Rightarrow (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x \cdot 1)\, dx$

È stata trovata la primitiva del seno ($(-\cos x)' = \sin x$), quindi è stato derivato l'altro termine ($(x)' = 1$). Funziona meglio, e si può ottenere il risultato:
$= -x \cdot \cos x + \sin x + c$

Prodotti fondamentali

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2} + c$$
$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{2} + c$$

Integrazione di composizioni

Derivata di composizione di funzioni tramite variabile t:
$$\frac{d}{dt}\left[F\big(\varphi(t)\big)\right] = F'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$$

Facendo la operazione inversa, ci si chiede chi è la primitiva di:
$$\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt = F\big(\varphi(t)\big) + c$$

Esempio
$$\int e^{\sin t} \cdot \cos t\, dt$$

La prima parte è la composizione delle funzioni e^x e $\sin x$, dato che la primitiva di e^x è e^x e la derivata di $\sin x$ è $\cos x$:
$= e^{\sin t} + c$

Integrazione per sostituzione

$$\int f(x)\, dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, dt$$
$x = \varphi(t), \qquad dx = \varphi'(t)\, dt$

Sostituzioni con funzioni iperboliche

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Risultano particolarmente utili per calcolare integrali del tipo $\int \sqrt{1 + x^2}$ o $\int \sqrt{x^2 - 1}$.

Esempio
$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right), \qquad x = \sinh t\,, \qquad dx = \cosh t\;\, dt$$

$= \int \frac{1}{\cosh t} \cdot \cosh t \, dt = t + c$

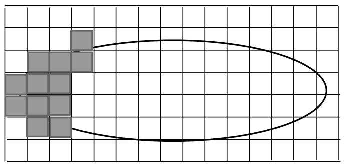
$t = \text{settsinh}\, x + c$

Casi particolari

Possono esistere funzioni che hanno una primitiva, ma non si sa come scriverla, per esempio e^{-x^2} ha una primitiva, ma non può essere scritta con un numero finito di funzioni elementari. Mentre fare una derivata può essere immediato e meccanico, trovare le primitive è meno intuitivo in questi casi.

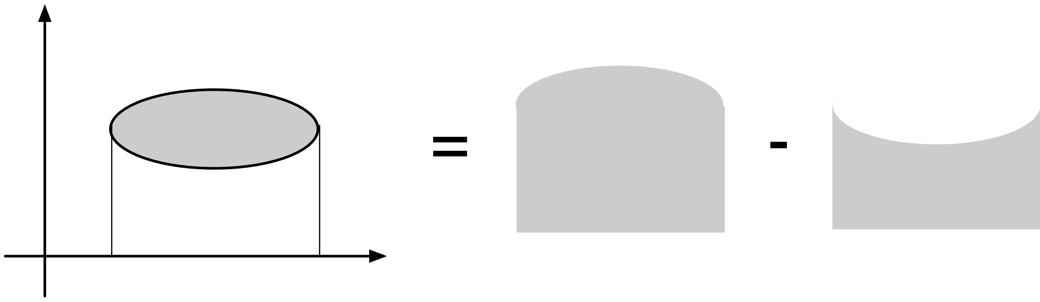
Calcolo di aree

Si può facilmente calcolare in modo preciso l'area di una figura piana poligonale, dividendola in triangoli e poi sommando le aree trovate. Diventa difficile calcolare l'area di figure che non si possono disegnare o che hanno lati curvi. Un modo possibile e approssimativo sarebbe quello di utilizzare una griglia di finezza arbitraria (più è fine più diventa preciso il calcolo) per quantificare le celle che intersecano con la figura, per poi sommarle.



Se si considera il numero di quadretti che contengono in parte la figura e il numero di quadretti che la contengono completamente, al diminuire della dimensione dei quadretti questi due valori dovrebbero tendere allo stesso valore.

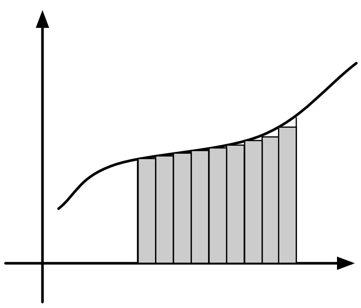
Riducendo il problema al piano cartesiano, si può sfruttare la additività dell'area:



Integrale di Riemann

(nota: si pronuncia "Riman")

Si divide un intervallo da a a b in parti uguali, che poi saranno le basi di rettangoli con altezza tale che contengano completamente la funzione. Se si valuta l'area di ciascun rettangolo e poi si sommano le aree, si ottiene una area minore o uguale all'area reale.

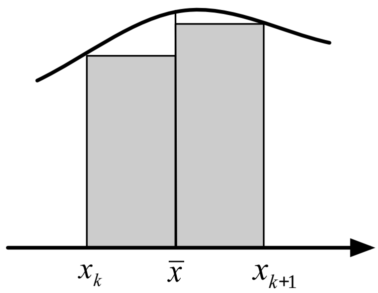


Partizione: $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$

Aree: $(x_1 - x_0) \cdot \inf_{[x_0, x_1]} f + \cdots \Rightarrow \sum_{i=1}^{h} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_i - x_{i-1}]} f$

Questa area viene detta **somma inferiore** relativa alla partizione $s(f, \mathcal{P})$.

Dimostrazione
Si vuole dimostrare che presa una partizione, se viene aggiunto un punto $\bar{x}$, la somma inferiore è maggiore di prima.
$\bar{\mathcal{P}} = \{a = x_0 < \cdots < x_k < \bar{x} < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$



$s(f, \bar{\mathcal{P}}) \geq s(f, \mathcal{P})$
L'area deve cambiare nell'intervallo centrale:
$(\bar{x} - x_k) \cdot \inf_{[x_k, \bar{x}]} f + (x_{k+1} - \bar{x}) \cdot \inf_{[\bar{x}, x_{k+1}]} f$

L'estremo inferiore di f su tutto l'intervallo è minorante sul primo e sul secondo intervallo, quindi $\bar{\mathcal{P}}$ è più fine di $\mathcal{P}$:
$\bar{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P} \Rightarrow s(f, \bar{\mathcal{P}}) \geq s(f, \mathcal{P})$ ■

Si può fare la stessa cosa (divisione in rettangoli) anche dall'alto, ma la funzione deve essere limitata superiormente. In questo caso il sottografico diventa contenuto dall'area calcolata:

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{h} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

Tutte le somme inferiori sono minori o uguali a tutte le somme superiori ($\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ è più fine):
$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{P})$

Se all'aumentare della finezza dell'intervallo le due aree diventano uguali, allora rappresenta l'area effettiva. Esistono casi in cui non funziona, per esempio la funzione di Dirichlet ha sempre 0 come estremo inferiore e l'area è composta da infiniti segmenti sottilissimi, ha poco senso.

Funzioni integrabili

Una funzione continua f si dice integrabile in $[a, b]$ se la somma inferiore è uguale alla somma superiore, in tal caso il valore comune si indica:

$$s(f) = S(f) = \int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{P}, \mathcal{Q} : S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{R}) < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{R} : S(f, \mathcal{R}) - s(f, \mathcal{R}) < \varepsilon$

Da fare particolare attenzione a non confondere questo simbolo di integrale con il simbolo che si usa per trovare le primitive della funzione.

Somma di Cauchy

Relativamente alla funzione f nella partizione $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{C}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i)$$

$$s(f,\mathcal{P}) \leq \mathcal{C}(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})$$

Se f è integrabile, l'integrale di f sull'intervallo $[a,b]$ è definito:

$$s(f,\mathcal{P}) \leq \int_{[a,b]} f(x)\,dx \leq S(f,\mathcal{P})$$

Se si prende la somma e si infittisce:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\,, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

La differenza Δx diventa sempre più piccola e diventa dx, mentre il "ricordo" della somma si indica con $\int$, il simbolo di integrale.

Dimostrazione

Si vuole dimostrare che tutte le funzioni continue sono integrabili.
Se f è continua su $[a,b]$, è integrabile, quindi:

$$\exists\delta : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$|x_i - x_{i-1}| < \delta \Rightarrow \left| \sup_{[\mathrm{x_i}, x_{i-1}]} f - \inf_{[\mathrm{x_i}, x_{i-1}]} f \right| = |f(x_i) - f(x_i'')| < \varepsilon$$

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon(b-a)$$

$$\left| \mathcal{C}(f,\mathcal{P}) - \int_{[a,b]} f(x)\,dx \right| \leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})$$

Con la somma di Cauchy è possibile eseguire un calcolo approssimativo dell'area, scegliendo l'errore ε, dividendo l'intervallo in partizioni uguali di dimensione δ e sommando le aree dei rettangoli.

Proprietà

Teorema di spezzamento

Se $a < c < b$ e f è una funzione integrabile su $[a,b]$, allora è integrabile su $[a,c]$ e $[c,b]$, quindi:

$$\int_{[a,b]} f\,dx = \int_{[a,c]} f\,dx + \int_{[c,b]} f\,dx$$

Che equivale alla somma delle aree del sottografico.

Costanti moltiplicative

Le costanti moltiplicative in un integrale possono uscire senza cambiamenti, dato che si possono estrarre dalla sommatoria:

$$\int_{[a,b]} \alpha \cdot f\,dx = \alpha \cdot \int_{[a,b]} f\,dx$$

Opposto

$$-\int_{[a,b]} f\,dx = \int_{[b,a]} f\,dx$$

Integrale di una somma

Sarebbe come “impilare due funzioni” e calcolare l’area totale, vale che l’area totale è la somma delle singole aree:

$$\int_{[a,b]} f + g\,dx = \int_{[a,b]} f\,dx + \int_{[a,b]} g\,dx$$

Teorema del confronto

Se $f \leq g$ su un intervallo $[a,b]$, allora $\inf f \leq \inf g$, quindi $somma \inf f \leq somma \sup g$, quindi:

$$\int_{[a,b]} f\,dx \leq \int_{[a,b]} g\,dx$$

Integrali definiti

Sono integrali definiti in un intervallo di *estremi* a, b, non si sa quale sia il maggiore dei due, quindi vale:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,dx, & a < b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f(x)\,dx, & a > b \end{cases}$$

Valgono tutte le proprietà descritte prima, riassumendo:

$$\int_a^b \alpha \cdot f\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f\,dx, \qquad \int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$$

Se $f \leq g$:

$$a > b \Rightarrow \int_a^b f\,dx \geq \int_a^b g\,dx$$

$$a < b \Rightarrow \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$$

Dati $a < b < c$:

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$$

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx - \int_b^c f\,dx$$

Teorema della media integrale

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_{[a,b]} f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f$$

Si può vedere così: preso un bicchiere d'acqua mossa e sapendo la forma dell'onda in un istante, si vuole sapere qual è il livello di acqua da ferma.

Essendo una media, deve essere sempre compresa tra l'estremo superiore e quello inferiore. Se inoltre la funzione f è continua in I:

$$\exists z : f(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione f continua su un intervallo I e scelto un punto $a \in I$, una primitiva di f è la funzione definita per tutti i punti $t \in I$ tali che:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Quindi la funzione F è una primitiva di f, la funzione f è la derivata di F:

$\exists f : F' = f$

In altre parole, la derivata della funzione integrale è uguale alla funzione integranda.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Se capita di dover calcolare la funzione integrale con un elemento diverso da x, per esempio $G(x) = \int_2^{h(x)} f(t)\,dt$, allora bisogna derivare la funzione $G(x) = F\big(h(x)\big)$ dove $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ (come se non ci fosse $h(x)$), quindi $G'(x) = F'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$ sostituendo effettivamente t con $h(t)$, e dt con $h'(t)$.

Potrebbe fare confusione il fatto che, dato questo teorema, quando si calcola un integrale indefinito non si usino estremi, infatti in quel caso il simbolo di integrale vuol solo dire "trova una primitiva", non "trova un'area".

Funzioni diverse in un punto

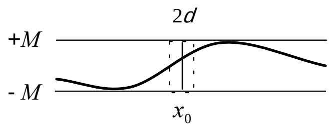
Se f è integrabile in un intervallo $[a,b]$ e $g = f\ \forall x \neq x_0$ (quindi le due funzioni sono identiche tranne che in un punto x_0), allora le due aree sono uguali. Una linea non ha area, quindi non conta.

Dimostrazione

Bisogna trovare s e S che differiscono di poco, facendo notare che anche gli integrali differiscono di poco.

Si può trovare una partizione per cui $S - s < \varepsilon$, se ci si aggiunge un punto intermedio la diseguaglianza è lo stesso soddisfatta.

Prendendo due punti sull'asse y M e $-M$ tali che possano contenere il grafico, si ha che nel punto x_0 l'area è $2\delta \cdot 2M$, quindi se δ è piccolo allora anche l'area è piccola.



Facciamo vedere che la differenza è 0:

$$\int f - g = \int f - \int g$$

Si prende una distanza δ sempre più piccola, quindi l'integrale della differenza vale qualcosa solo in x_0.

Una funzione che ha integrale 0 non ha area, quindi le due funzioni hanno la stessa area.

Funzioni generalmente continue

Una funzione generalmente continua è:

- Integrabile
- Limitata (tutto si svolge tra due linee orizzontali)
- A parte un numero finito di punti, è continua

Teorema di Torricelli

Sia f una funzione continua su un intervallo I, e sia G una sua primitiva:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Quindi dato un integrale, per calcolarlo basta calcolare la primitiva.

Da considerare cha data la seguente notazione:

$$[\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Si può riscrivere il teorema come:

$$[G(x)]_\alpha^\beta$$

Dimostrazione

$$F_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

Sia $F_\alpha(x)$ che $G_\alpha(x)$ sono primitive di f e differiscono per una costante.

$\exists s \in \mathbb{R} : \forall x, F_\alpha(x) = s + G(x)$

$F_\alpha(x) = 0 \Rightarrow s = -G(\alpha)$

$F_\alpha(x) = G(x) - G(\alpha)$

Applicazioni

Trovare il **numero** che rappresenta l'area del sottografico di x^2 tra 0 e 1:

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Si calcola prima l'integrale di x^2 e si trovano le primitive:

$$\frac{x^3}{3} + c$$

Si utilizza Torricelli (nota, $+c$ e $-c$ si annullano):

$$= \frac{1}{3}$$

Integrazione per parti

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

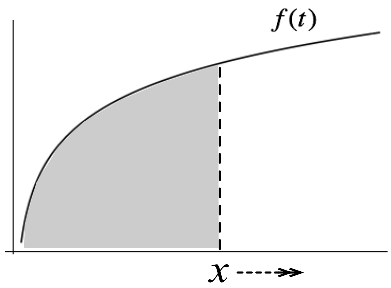
Integrazione per sostituzione

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left[F\big(\varphi(t)\big)\right]_a^b = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Il grafico da $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$ a $\int_a^b$ verrebbe alterato (schiacciato orizzontalmente), quindi va corretto con la derivata $\varphi'(t)$, "convertendo" la misura da t a x.

Funzioni integrali

Concettualmente si possono interpretare come funzioni che indicano l'andamento dell'area al variare della variabile x.



Sono funzioni del tipo:

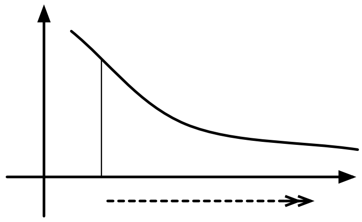
$$w(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$$

Si risolvono con la formula di Torricelli, quindi:

$$w'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x) - f[h(x)] \cdot h'(x)$$

Negli esercizi, data una funzione integrale, bisogna trovare la funzione vera e propria, riconducendola a una somma di integrali definiti (a patto che abbia senso) con uno riconducibile a $\int_0^x f(t)\,dt$, trovando quindi una funzione più immediata da studiare. La variabile rimane nell'integrale che poi sarà riconducibile alla primitiva grazie al teorema fondamentale del calcolo.

Integrali impropri (o generalizzati)



Quando un integrale è definito in un intervallo aperto, bisogna procedere con un approccio diverso; considerando come punto di inizio 1, si prende un intervallo $[1, M[$ sempre più grande:

$$\int_1^M f(x)\,dx$$

E si esegue il limite:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M f(x)\,dx$$

Che può essere:

- Divergente
- Convergente
- Non esistere

Il limite esiste sempre per funzioni monotone. Sono applicabili molte proprietà degli integrali definiti, tranne alcune eccezioni, per esempio non ha senso la somma di integrali che verrebbe $+\infty - \infty$.

Per determinare il valore a cui converge

Trova primitiva → Teorema Torricelli → Mantieni parametro → Esegui limite
- Converge
- Diverge

Per determinare se converge oppure no

Convergenza funzione (necessario, non suff.) → Criterio del confronto

Osservazione

Applicando la formula di spezzamento, si nota che l'integrale esiste o è infinito se e solo se il secondo membro esiste, dato che il primo integrale risulta essere di Riemann in un intervallo chiuso, mentre il secondo rimane in un intervallo aperto.

Osservazione

$$f \geq 0 \; in \; [a, b[\Rightarrow \int_a^b f \;\; esiste \; ed \; è \; finito \; o + \infty$$
$$f \leq 0 \; in \; [a, b[\Rightarrow \int_a^b f \;\; esiste \; ed \; è \; finito \; o - \infty$$

Casi importanti

Da un numero (compreso) a infinito $[a, b[$:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx \to \begin{cases} \alpha \neq 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{1-\alpha} \cdot x^{1-\alpha}\right]_1^M = \begin{cases} \alpha < 1 \Rightarrow +\infty \\ \alpha > 1 \Rightarrow \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \alpha = 1 \Rightarrow [\log x]_1^M = \log M \to +\infty \end{cases}$$

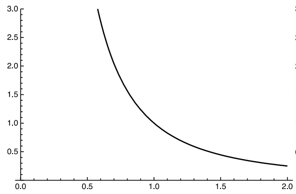
Osservazione

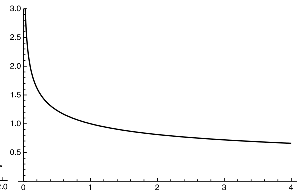
Se f ha segno costante in un intorno sinistro di b (per $[a, b[$), allora l'integrale esiste.

Da un numero (non compreso) ad un altro numero $]a, b]$:

$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a' \to a^+} \int_{a'}^{b} f(x)\, dx$

$$\lim_{M \to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \to \begin{cases} +\infty, & \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \end{cases}$$





Teorema del confronto

Se due funzioni sono una sopra l'altra, e quella sotto ha integrale ∞, allora quella sopra ha integrale ∞.

f, g continue in $[a, b[$ e $f(x) \leq g(x)$, allora se $\int_a^b f(x)\, dx = +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\, dx = +\infty$.

Inoltre se le funzioni sono entrambe $f, g \geq 0$ allora l'integrale esiste sempre, e può essere solo $\mathbb{R}$ o ∞.

Confronto asintotico

Due integrali hanno lo stesso carattere se entrambi sono divergenti, o convergenti, o non esistono.

Siano $f, g > 0$ in un intorno sinistro di $[a, b[$, se esiste $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ e $0 < L < +\infty$, allora $\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ hanno lo stesso carattere (si indica con ~).

Esempio

Studiare la convergenza di:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$\lim_{M \to +\infty} \int_0^M e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \left\{\frac{x}{2} = t, dx = 2dt\right\} = \lim_{M \to +\infty} 2 \int_0^{\frac{M}{2}} e^{-t}\, dt = \lim_{\frac{M}{2} \to +\infty} \int_0^{\frac{M}{2}} e^{-t}\, dt$$

$$\left\{\frac{M}{2} = N\right\} = \lim_{N \to +\infty} 2 \int_0^N e^{-t}\, dt = 2$$

Convergenza assoluta

Data una funzione che non ha segno costante in un intervallo $[a, b[$, quindi avvicinandosi a b continua a cambiare segno, si può applicare il criterio di integrabilità assoluta:

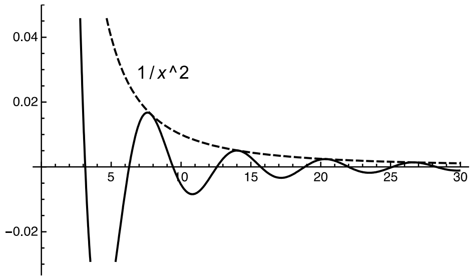
$$\int_a^b |f|\, dx \; converge \Rightarrow \int_a^b f\, dx \; converge$$

Esempio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{x^2}$ ha integrale convergente per $x \to +\infty$, per il criterio del confronto l'integrale converge. Se per ipotesi fosse stato $\frac{\sin x}{x}$ allora non si sarebbe potuto sapere.



Integrali non definiti in entrambi gli estremi

Se bisogna calcolare un integrale in un intervallo $]a, b[$ non si può utilizzare la formula di spezzamento.

Si prende un numero $c \in]a, b[$, definiamo $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ se la somma ha senso (niente $+\infty - \infty$).

Esempio

Per quali $\alpha > 0$ l'integrale converge:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + x^3}{1 + x^\alpha} dx$$

In 0 esiste e vale 0, diventa improprio solo per $+\infty$.

La funzione converge per $\alpha > 4$ e diverge per $\alpha \leq 4$.

$$f(x) \sim \frac{x^3}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-3}}$$

Per $\alpha < 0$:

$x \to 0,\ f(x) \sim \frac{x^2}{x^\alpha} = x^{2-\alpha}$ tende a 0, quindi non impropria.

$x \to +\infty,\ f(x) \sim x^3$ tende a $+\infty$

Tecniche di risoluzione

- Applicazione teoremi sostituzione, per parti
- Applicazione di elemento neutro $+k - k$, $\cdot \frac{k}{k}$, poi estrarre prodotti notevoli o dividere l'integrale
- Dividere in due integrali (somma)
- Riconoscere quadrati, prodotti notevoli
- Fare derivata denominatore, farla comparire al numeratore per estrarre logaritmo
- Cercare di ricondurre a derivata di una funzione