

Dominio delle frequenze

Mc128k

Contenuti

Indice

1	Trasformata di Fourier	3
1.1	Simmetria hermitiana	4
1.2	Sinusoidale	5
1.3	Diagrammi	5
2	Serie di Fourier	6
2.1	Proprietà di X_k	8
2.2	Spettri di Fourier	8
2.3	Forma trigonometrica	11
2.4	Differenze con convoluzione	12
2.5	Segnali alternativi	12
3	Teorema di Parseval	13
4	Studio di segnali non periodici	13
5	Proprietà	15
5.1	Linearità	15
5.2	Segnali pari e dispari	15
5.3	Traslazione del segnale	15
5.4	Traslazione dello spettro	16
5.5	Inversione temporale	16
5.6	Convoluzione e prodotto	16
5.7	Dualità e antitrasformata	16
5.8	Cambiamento di scala	17

5.9	Derivazione	17
5.10	Integrazione	17
5.11	Teorema del valore iniziale	18
6	Filtri	18
6.1	Passa Basso	18
6.2	Passa Banda	18
6.3	Passa Alto	19
6.4	Soppressore di Banda	19
6.5	Notch	19
7	Teorema della modulazione	20
8	Trasformate notevoli	22
8.1	Delta di Dirac	22
8.2	Impulso rettangolare	22
8.3	Coseno	22
8.4	Impulso triangolare	22
8.5	Doppio esponenziale	23
8.6	Funzione segno	23
8.7	Gradino unitario	23
8.8	Segnale periodico	23
8.9	Pettine di delta	24
9	Combinazione di sistemi	25
9.1	Derivate successive	25
9.2	Serie di LTI	25
9.3	Sistemi in retroazione	25
10	Sistemi descritti da eq. diff.	26
10.1	Zeri del polinomio	27
11	Trasformata di Laplace	28
12	Teorema del campionamento	31
12.1	Campionamento impulsivo	31
12.2	Sample & Hold	33

1 Trasformata di Fourier

Si applica la forma esponenziale (quindi una sinusoidale generica) ad un sistema LTI, con una risposta all'impulso $h(t)$ nota. Si ha quindi una uscita che è uguale alla convoluzione tra i due segnali; per la proprietà di simmetria si applica $(t - \tau)$ al secondo membro:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f_0(t-\tau)} d\tau \quad (1.1)$$

Spezzando l'esponenziale si portano fuori i termini che non dipendono da τ :

$$e^{j2\pi f_0 t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \quad (1.2)$$

Viene definita quindi una funzione $H(f)$ che sostituisce l'operazione compresa dall'integrale:

$$e^{j2\pi f_0 t} \cdot H(f_0) \quad (1.3)$$

Questa funzione viene definita come **Trasformata di Fourier** di $h(t)$.

$$H(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \mathcal{F}\{h(t)\} \quad (1.4)$$

Essa è univoca, $h(t)$ individua in un solo modo $H(f)$, quindi $H(f)$ è un altro modo di individuare il sistema LTI. In questo caso $H(f)$ si dice **risposta in frequenza del sistema**, essendo il valore in entrata una senoide con una certa frequenza (**nucleo di trasformazione**) rappresentata con l'esponenziale complesso (un fasore). Il sistema LTI può essere quindi trovato da una risposta all'impulso nel tempo, o la risposta alla frequenza.

Eseguendo la operazione, si ha che a seconda della frequenza f_0 del segnale in entrata, la uscita viene alterata, **pur mantenendo esattamente la stessa frequenza**.

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \cdot H(f_0) \quad (1.5)$$

Viene quindi eseguito il **prodotto complesso** tra la funzione in entrata, espressa in forma esponenziale, e la risposta alla frequenza (una costante), ottenendo una uscita amplificata o ridotta in ampiezza e con una fase diversa. La risposta può essere divisa in modulo e argomento per poi essere applicata alle singole parti interessate:

$$|H(f_0)| \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))} \quad (1.6)$$

Riassumendo, il segnale in uscita:

- Mantiene la stessa frequenza
- Può essere amplificato o ridotto
- Può avere una fase diversa

Dato che la frequenza rimane identica e la entrata viene modificata solo in ampiezza e fase, si dice che gli esponenziali complessi sono **autofunzioni** per i sistemi LTI. Questo è simile a come un autovalore porta un vettore in k volte sè stesso, qui entra un esponenziale complesso e ne esce uno identico moltiplicato per una costante *complessa*, che è $H(f_0)$.

Essendo il sistema LTI, vale la proprietà di linearità, quindi se un segnale in entrata è esprimibile come una somma, si può fare in modo di applicare la trasformazione alle singole parti per poi sommarle ed ottenere lo stesso risultato. Per esempio questo si nota nella sinusoidale, dove si sommano due vettori opposti per ottenere un punto sulla retta reale.

Quando si applica alla realtà la trasformata, bisogna notare che normalmente l'esponenziale complesso non esiste come segnale pratico, ma spesso si può esprimere un segnale pratico come somma di esponenziali complessi.

1.1 Simmetria hermitiana

Una proprietà di $H(f)$ è che **se $h(t)$ è un numero reale**, valgono alcune proprietà sui coniugati. L'integrale è una somma, il coniugato di una somma è sempre uguale alla somma dei coniugati, quindi la risposta in frequenza si ottiene:

$$H^*(f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t)e^{-j2\pi ft}]^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{+j2\pi ft} dt \quad (1.7)$$

Da cui derivano le proprietà (sempre ammesso che $h(t)$ sia reale):

$$H^*(f) = H(-f) \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} |H^*(f)| = |H(-f)| \\ \langle H(f) = -\langle H(-f) \end{cases} \quad (1.9)$$

Risulta inoltre che il modulo è una funzione dispari e l'argomento una funzione pari (mostra quindi la simmetria nel grafico).

1.2 Sinusoidale

Si vuole valutare la risposta di un sistema LTI ad una sinusoidale generica. Si ha quindi il segnale in entrata $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ e la uscita risulta essere il prodotto tra l'entrata espressa in forma esponenziale e la risposta alla frequenza $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$. $h(t)$ è reale, quindi $H(f)$ gode di simmetria hermitiana.

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (1.10)$$

$$= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (1.11)$$

$$= \left(\frac{A}{2} e^{j\varphi}\right) e^{j2\pi f_0 t} + \left(\frac{A}{2} e^{-j\varphi}\right) e^{-j2\pi f_0 t} \quad (1.12)$$

Viene applicata la linearità:

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_1(t) = H(f_0) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

$$y_2(t) = H(-f_0) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = \frac{A}{2} |H(f_0)| e^{j(\varphi + \langle H(f_0) \rangle)} e^{j2\pi f_0 t} + \quad (1.13)$$

$$+ \frac{A}{2} |H(-f_0)| e^{j(-\varphi + \langle H(-f_0) \rangle)} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (1.14)$$

$$y(t) = A \cdot |H(f_0)| \cdot \cos[2\pi f_0 t + \varphi + \langle H(f_0) \rangle]$$

Quindi se si ha un sistema LTI con risposta alla frequenza $H(f)$, con all'ingresso una sinusoidale generica, la uscita è:

- Sinusoidale data sempre da due fasori controrotanti
- Con ampiezza $A \cdot |H(f_0)|$
- Con la stessa frequenza
- Con una fase iniziale diversa

1.3 Diagrammi

Si può rappresentare la risposta in frequenza tramite due diagrammi, il primo che indica come l'ampiezza $|H(f)|$ della funzione in ingresso viene alterata, il secondo per la fase $\langle H(f) \rangle$.

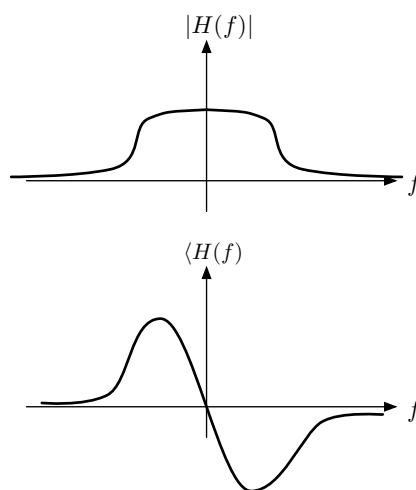


Figura 1: Diagrammi per ampiezza e fase

Il grafico in fig.1 rappresenta un esempio di risposta in frequenza, in questo caso un filtro passa basso. Osservando il grafico si nota che una frequenza alta viene attenuata (il grafico in alto mostra che per una frequenza lontana dallo zero il prodotto attenua l'uscita) mentre una bassa rimane tale (essendo vicina allo zero). L'altro grafico mostra la fase da aggiungere a seconda dell'entrata.

I sistemi LTI sono infatti detti anche **filtri**, dato che lasciano inalterata la frequenza e agiscono solo su ampiezza e fase.

2 Serie di Fourier

Un segnale periodico si ripete dopo un determinato intervallo temporale detto periodo T_0 .

$$x(t) = x(t + T_0) \forall t \quad (2.1)$$

La serie di Fourier permette di esprimere una funzione periodica **tramite la combinazione lineare di funzioni sinusoidali**. Quindi un qualunque segnale **periodico** si può esprimere come una somma di infiniti termini **armonici** che contribuiscono a definire la forma finale del segnale; in fig.2 si ha una onda quadra che viene approssimata da una somma di sinusoidali, sempre più vicine al risultato man mano che k cresce.

Le funzioni sinusoidali vengono indicate come esponenziali complessi, mentre i termini X_k (valore medio del segnale ad una certa frequenza) rappresentano il segnale vero e proprio (la frequenza f_0 si trova con l'inverso del periodo T_0).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (2.2)$$

La uscita del sistema si calcola applicando la risposta in frequenza:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k H(f_0) e^{j2\pi k f_0 t} \quad (2.3)$$

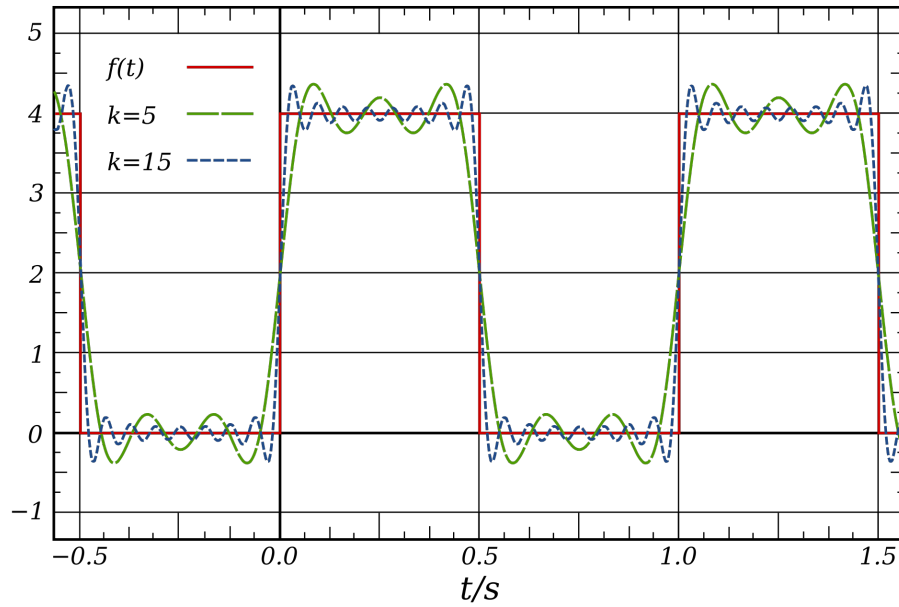


Figura 2: Approssimazione tramite serie di Fourier

La serie (la somma di tutti gli infiniti termini) descrive completamente il segnale. Rimuovendo la "ripetizione" ed estraendo il singolo termine X_k si può dire che esiste un legame biunivoco tra esso e il segnale di entrata:

$$x(t) \leftrightarrow X_k \quad (2.4)$$

Il termine X_k è dato dalla media integrale del segnale campionato ad una certa frequenza data da $2\pi k f_0$, dove f_0 è la fondamentale, e k definisce le armoniche:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (2.5)$$

2.1 Proprietà di X_k

Se $x(t)$ è reale, vale la simmetria hermitiana per X_k :

$$X_k^* = X_{-k} \quad X_k = X_{-k}^* \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| \\ \langle X_k = -\langle X_{-k} \end{cases} \quad (2.7)$$

Inoltre, dato che il sistema è lineare, vale la proprietà anche per i termini:

$$x_1(t) \xleftrightarrow{f} x_k^{(1)} \quad (2.8)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{f} x_k^{(2)} \quad (2.9)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{f} ax_k^{(1)} + bx_k^{(2)} \forall k \quad (2.10)$$

Osservazione 2.1. La serie produce numeri reali a causa di come funziona la sinusoidale. I termini negativi sono coniugati dei termini positivi, quindi sommandosi producono sempre un punto sull'ascissa del piano di Gauss.

$$x(t) = \sum \dots = X_0 + X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} + \dots \quad (2.11)$$

Due segnali periodici, se sommati, danno un segnale periodico se e solo se:

$$mT_1 = nT_2 \quad (2.12)$$

Dove m e n rappresentano due numeri interi. Per esempio un segnale che ha un periodo $T_2 = \frac{4}{3}T_1$ può essere sommato al primo e formare un segnale periodico, che risulterà con una periodo di $4T_1$. In questo periodo il segnale T_1 si ripete 4 volte, e T_2 si ripete 3 volte.

Se $x(t)$ è pari allora i termini X_k sono reali, se è dispari i termini sono immaginari puri.

2.2 Spettri di Fourier

Il grafico di una serie di Fourier è composto da diversi punti che rappresentano la frequenza fondamentale e i suoi multiple, quindi le armoniche (fig.3).

Applicando la trasformazione del sistema si trovano grafici alterati in altezza ma con lo stesso numero di "righe", dato che rappresentano la frequenza.

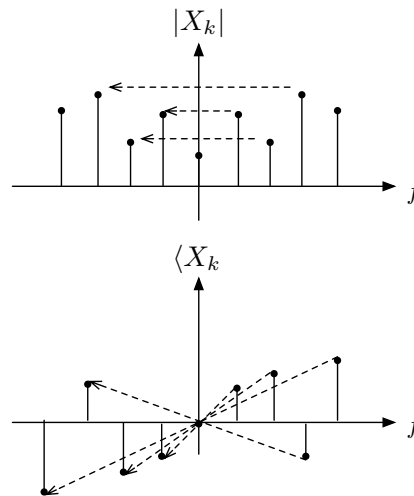


Figura 3: Spettro di Fourier

Quando $k = 0$ il modulo ha un valore (simmetria pari), mentre l'argomento è zero (simmetria dispari), il punto immediatamente vicino rappresenta il **valore medio alla frequenza fondamentale** f_0 , gli altri sono le armoniche.

Un altro modo per "visualizzare" come funziona la serie di Fourier è quello di osservare il piano di Gauss in fig.4, i vettori indicati indicano le varie frequenze, ognuna con il suo modulo e argomento che determinano lunghezza e fase. Quando il tempo inizia a progredire, ogni coppia di vettori (sono sinusoidali) comincia a ruotare con una certa velocità. La somma di tutti i vettori produce un numero reale, che rappresenta il segnale in uscita rispetto al tempo corrente, un punto sull'asse reale che oscilla e rappresenta il segnale periodico.

Osservazione 2.2. I termini X_k (quindi i vettori nel grafico) devono diventare infinitesimi man mano che k sale, altrimenti la serie non converge, in altre parole i contributi dati dagli armonici devono essere sempre più piccoli e definire la funzione nel dettaglio (salvo eccezioni in cui ci sono picchi ad alte frequenze per esempio).

Osservazione 2.3. Lo spettro è un buon indicatore di quanto "agitato" è il segnale, valori alti vicino allo zero vuol dire che sono prevalenti frequenza basse e quindi si muove più lentamente, al contrario, valori lontani dallo zero prevalenti indicano che le frequenze più alte dominano, e il segnale sarà più movimentato.

Esempio 2.1.

La senoide, espressa tramite la serie di Fourier, è composta da soli due termini

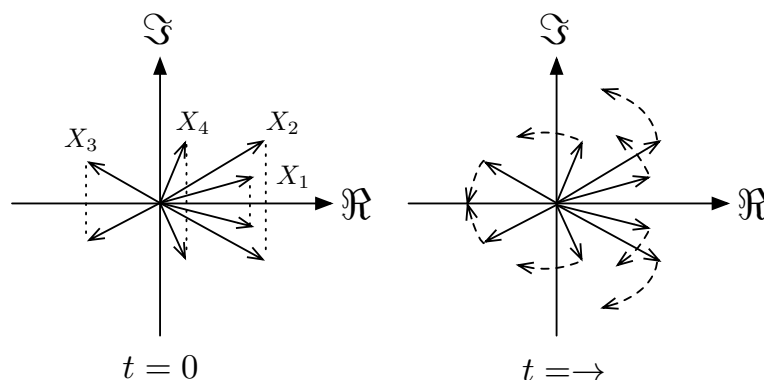


Figura 4: Serie di Fourier nel piano complesso

x_1 e x_{-1} :

$$\sin(t) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Lo spettro è formato da due righe, una f_0 , l'altra $-f_0$ (fig.5); lo spettro del coseno non comprende gli argomenti φ del seno (non avendo fase).

Esempio 2.2.

Una onda quadra (fig.6) è una successione di impulsi rettangolari di ampiezza A .

La periodizzazione si ottiene sommando repliche traslate:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{2}\right) \\ X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{A}{T_0} \left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\ &= \frac{A}{T_0} \left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 (-\frac{\tau}{2})}}{-j2\pi k f_0} \right] \end{aligned}$$

Utilizzando le formule di Eulero si può semplificare in:

$$x(t) = \frac{A}{T_0} \cdot \frac{\sin(\pi k f_0 \tau)}{\pi k f_0}$$

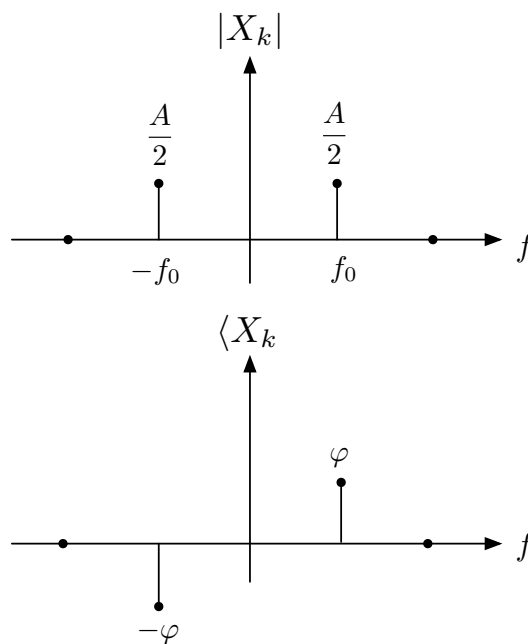


Figura 5: Spettro di una sinusoidale

La forma ottenuta sembra un sinc, se non fosse che manca τ al denominatore. Aggiungendolo si ottiene:

$$x(t) = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \text{sinc}(kf_0\tau)$$

2.3 Forma trigonometrica

Si può esprimere la serie in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + 2|x_1| \cos(2\pi f_0 t + \langle X_1 \rangle) + \\ &\quad + 2|x_2| \cos(2\pi f_0 t + \langle X_2 \rangle) + \dots = \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cdot \cos(2\pi(kf_0)t + \langle X_k \rangle) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Quindi risulta una somma infinita di sinusoidi con varie ampiezze e fasi iniziali. Si sommano le singole uscite per produrre il segnale grazie alla proprietà di linearità del sistema LTI.

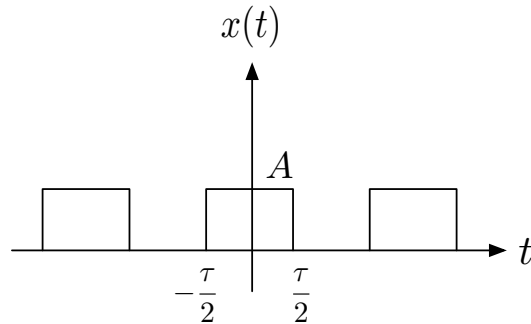


Figura 6: Onda quadra

2.4 Differenze con convoluzione

Il metodo affrontato permette di analizzare la risposta del sistema nel dominio della frequenza, a differenza della convoluzione che analizza nel dominio del tempo.

$$\left\{ \begin{array}{ll} * & \text{tempo} \\ \cdot & \text{frequenza} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum \dots \\ x(t) = \frac{1}{T_0} \dots \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Ovviamente, ai fini dei calcoli, risulta molto più semplice eseguire un prodotto rispetto ad una convoluzione, quindi si cerca di rimanere nel dominio della frequenza quando si lavora con i segnali.

2.5 Segnali alternativi

Sono segnali il cui andamento nella prima metà del periodo è opposto all'andamento nella seconda metà. Un esempio di segnale alternativo è la sinusoide.

$$x(t \pm \frac{T_0}{2}) = -x(t) \quad (2.15)$$

3 Teorema di Parseval

Si tratta di un metodo per calcolare la energia di un segnale data la trasformata di Fourier.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (3.1)$$

L'energia risulta quindi legata solo al modulo della trasformata, e non dall'argomento. Il termine $|X(f)|^2$ viene definito **densità spettrale di energia**.

Un segnale periodico ha potenza finita, dato che c'è corrispondenza biunivoca tra la risposta all'impulso e la risposta in frequenza. Se si conosce la successione dei termini X_k si può calcolare la potenza con la somma dei quadrati per ogni possibile termine:

$$P = \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (3.2)$$

Questo implica che, per avere una energia finita, i termini devono essere infinitesimi per $k \rightarrow \infty$.

Osservazione 3.1. Se il segnale $x(t)$ presenta un punto di discontinuità lo spettro ha infiniti valori, quindi contributi alla frequenza fino all'infinito. Questo implica che la potenza del segnale è infinita (infatti non è praticabile in realtà).

Al contrario, se lo spettro dopo un po' è nullo o infinitesimo, vuol dire che non ci sono discontinuità.

Osservazione 3.2. Calcolando il valore in $X(0)$, quindi alla frequenza nulla, si trova la parte "ferma" del segnale, quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$ denota l'area del "rettangolo" che sposta verticalmente il segnale.

4 Studio di segnali non periodici

Per lavorare con un segnale non periodico nel dominio della frequenza con la trasformata di Fourier si può fare in modo di considerare il segnale in un periodo infinito:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.1)$$

Essendoci una corrispondenza biunivoca tra $x(t)$ e $X(f)$, si può comporre la serie tale che:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \quad (4.2)$$

Volendo campionare ogni possibile frequenza nel segnale, si trasforma la sommatoria in un integrale in df , quindi se si considera l'incremento infinitesimo delle frequenze sicuramente si includono tutte quelle possibili.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (4.3)$$

Si è ottenuta quindi la operazione inversa della trasformata, detta **antitrasformata**. Essa è una equazione di sintesi, quindi dati i contributi si può costruire il segnale rispetto al tempo.

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} \quad (4.4)$$

Non tutti i segnali hanno una trasformata di Fourier, ma una condizione sufficiente per la sua esistenza è che sia integrabile in valore assoluto (**segnale impulsivo**):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty \implies \exists \mathcal{F} \quad (4.5)$$

Di conseguenza il segnale deve essere infinitesimo quando va a $\pm\infty$, in altre parole deve avere energia finita. Da notare che questa condizione è più debole della definizione di energia, dato che in quel caso c'è di mezzo un quadrato.

Osservazione 4.1. Un segnale a durata finita ha quasi sempre la trasformata di Fourier.

Esempio 4.1.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \\ X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j2\pi f t} dt = A \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\ &= A \frac{e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f (-\frac{\tau}{2})}}{-j2\pi f} = A \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = A\tau \operatorname{sinc}(f\tau) \end{aligned}$$

5 Proprietà

5.1 Linearità

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(f) \quad (5.1)$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(f) \quad (5.2)$$

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \leftrightarrow \alpha X_1(f) + \beta X_2(f) \quad (5.3)$$

5.2 Segnali pari e dispari

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \quad (5.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft] dt = \quad (5.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos 2\pi ft dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin 2\pi ft dt \quad (5.6)$$

Dalla risposta in frequenza si nota che se il segnale $x(t)$ è pari, allora il secondo integrale contiene una funzione dispari, che annulla quindi la parte immaginaria. Si ha quindi che $X(f)$ è reale.

Se invece $x(t)$ è dispari, allora si ottiene un immaginario puro con modulo pari e argomento dispari.

5.3 Traslazione del segnale

Dato il legame tra il segnale nel dominio del tempo e la sua trasformata:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad (5.7)$$

Si vuole sapere come si comporta la trasformata dello stesso segnale traslato di un tempo t_0 .

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt [\lambda = t - t_0] \quad (5.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) e^{-j2\pi f(\lambda + t_0)} d\lambda = \quad (5.9)$$

$$= X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0} \quad (5.10)$$

Viene quindi "dilatato" l'argomento, dato che il modulo rimane invariato e si moltiplica per un numero complesso. Intuitivamente il segnale aumenta o diminuisce le frequenze, quindi lo spettro si trasforma orizzontalmente, senza modificare le ampiezze.

5.4 Traslazione dello spettro

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0) \quad (5.11)$$

Il segnale ottenuto perderà la simmetria hermitiana, e quindi risulterà complesso.

5.5 Inversione temporale

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad (5.12)$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f) \quad (5.13)$$

Se $x(t)$ è reale vale che la trasformata di $x(-t)$ è $X^*(f)$.

5.6 Convoluzione e prodotto

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f) \quad (5.14)$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) * X_2(f) \quad (5.15)$$

Quindi vale anche per i segnali periodici:

$$Y_k = X_k \cdot H(kf_0) \quad (5.16)$$

5.7 Dualità e antitrasformata

$$\begin{cases} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2\pi ft} df \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} x(t) \leftrightarrow X(f) \\ X(t) \leftrightarrow x(-f) \end{cases} \quad (5.18)$$

5.8 Cambiamento di scala

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad (5.19)$$

Se si accelera o rallenta il segnale si ottiene che:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (5.20)$$

Intuitivamente se si "allarga" il segnale le frequenze verranno abbassate, quindi lo spettro si restringe, e viceversa.

5.9 Derivazione

Si vuole ottenere la trasformata della derivata di $x(t)$ rispetto al tempo. La trasformazione ha caratteristiche passa-alto. Viene prodotto un numero immaginario puro.

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f X(f) \quad (5.21)$$

$$|j2\pi f| = 2\pi|f| \quad (5.22)$$

$$\angle j2\pi f = \frac{\pi}{2} \text{sgn} f \quad (5.23)$$

Inoltre il sistema che fa la derivata è LTI, quindi data $H(f) = j2\pi f$ si ha che:

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad (5.24)$$

$$Y(f) = j2\pi f \cdot X(f) \quad (5.25)$$

Per la derivazione in frequenza risulta:

$$-j2\pi t x(t) \leftrightarrow \frac{dx(f)}{df} \quad (5.26)$$

5.10 Integrazione

$$w(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) \quad (5.27)$$

Se $\int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)| dt < +\infty$ allora $W(f)$ esiste.

5.11 Teorema del valore iniziale

Determina il valore del segnale quando la frequenza è zero, quindi la altezza del segnale costante equivalente quando si campiona la frequenza zero.

$$X(f)|_{f=0} = X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt \quad (5.28)$$

$$x(t)|_{t=0} = x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df \quad (5.29)$$

6 Filtri

La banda di un segnale indica un intervallo di frequenza che viene generato dal segnale. Una banda ha quindi una frequenza minima f_m e una massima f_M tra le quali è definito il segnale.

I filtri servono per eliminare determinate frequenze da un segnale, dal punto di vista ideale possono eliminare completamente le frequenze, mentre in casi reali le riescono solo ad attenuare.

Osservazione 6.1. Un segnale a durata finita ha una banda infinita, mentre un segnale con la banda limitata implica che la durata è infinita.

Osservazione 6.2. Se si prende un filtro che lascia passare una banda infinita, quindi rappresentato da un impulso rettangolare di larghezza infinita nel campo delle frequenze, questo nel dominio del tempo diventa un delta di Dirac, e come è noto la convoluzione con il delta produce il segnale stesso.

6.1 Passa Basso

Denominato anche LP (Low Pass), serve per far passare solo frequenze fino ad un massimo definito.

6.2 Passa Banda

Fa passare frequenze solo entro un determinato intervallo (Band Pass).

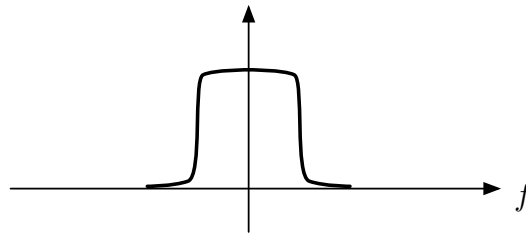


Figura 7: Filtro LP

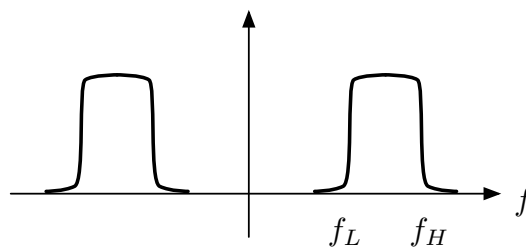


Figura 8: Filtro BP

6.3 Passa Alto

Passano frequenze sopra un certo limite (High Pass).

6.4 Soppressore di Banda

Elimina un intervallo di frequenze lasciando inalterate le altre (Stop Band).

6.5 Notch

Elimina una particolare frequenza lasciando inalterate le altre. Un uso possibile può essere quello di sopprimere il rumore a 50hz dato dalla linea elettrica.

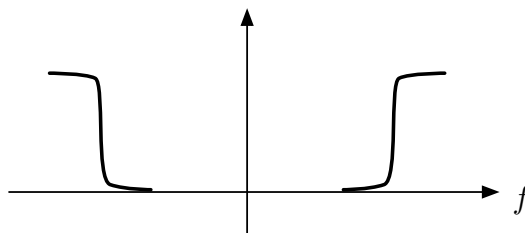


Figura 9: Filtro HP

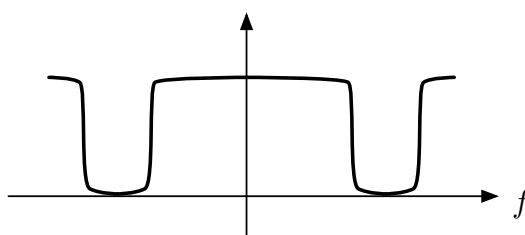


Figura 10: Filtro SB

7 Teorema della modulazione

Dato un segnale, si può calcolare la sua trasformata:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad (7.1)$$

Si moltiplica una funzione sinusoidale al segnale nel dominio del tempo e si utilizzano le formule di Eulero:

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (7.2)$$

$$x(t) \left[\frac{e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right] \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(f - f_0) e^{j\varphi} + X(f + f_0) e^{-j\varphi}] \quad (7.3)$$

In fig.12a viene rappresentato un segnale detto **modulante**, una sinusoidale detta **portante** e il segnale ottenuto modulato in ampiezza.

La modulazione viene utilizzata nelle trasmissioni radiofoniche per trasmettere segnali in bassa frequenza utilizzando alte frequenze. Osservando lo spettro del

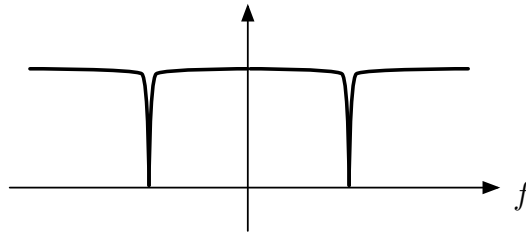


Figura 11: Filtro Notch

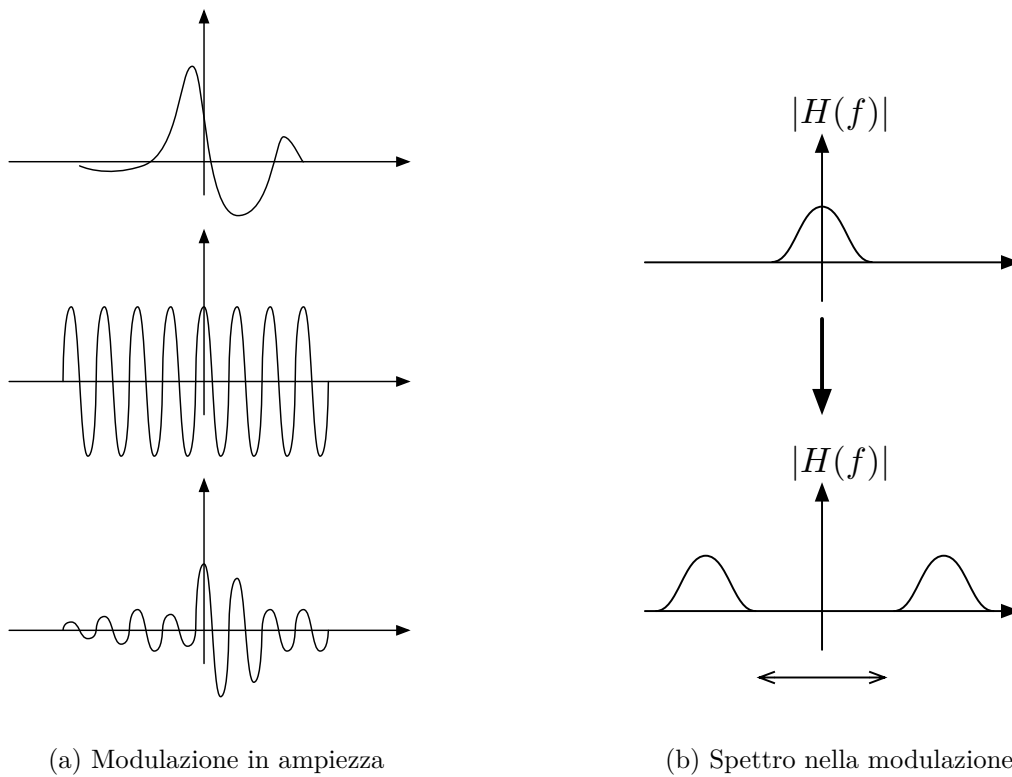


Figura 12: Modulazione

segnale si nota che la modulazione fa in modo di prendere una parte di esso e "allontanarlo" dall'origine come in fig.12b. La ricostruzione avviene traslando il segnale al contrario, ottenendo uno spettro nuovamente nell'origine.

8 Trasformate notevoli

8.1 Delta di Dirac

Il delta di Dirac contiene tutte le frequenze:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (8.1)$$

$$A\delta(t) \leftrightarrow A \quad (8.2)$$

$$A \leftrightarrow A\delta(f) \quad (8.3)$$

Inoltre vale che:

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0) \quad (8.4)$$

$$x(t) = 1 \leftrightarrow \delta(f) \quad (8.5)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0) \quad (8.6)$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} \quad (8.7)$$

8.2 Impulso rettangolare

$$A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow A\tau \operatorname{sinc}(f\tau) \quad (8.8)$$

8.3 Coseno

$$\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (8.9)$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \quad (8.10)$$

8.4 Impulso triangolare

Si ottiene dalla convoluzione di due impulsi rettangolari:

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \operatorname{sinc}^2(f\tau) \quad (8.11)$$

8.5 Doppio esponenziale

$$x(t) = e^{-a|t|}, a > 0 \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (8.12)$$

Per ottenerlo si scompone il segnale nel dominio del tempo nella somma di una parte di segnale e la stessa ribaltata nel tempo:

$$x_1(t) = e^{-at} \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (8.13)$$

$$x_1(-t) = e^{at} \cdot u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (8.14)$$

$$(8.15)$$

8.6 Funzione segno

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \quad (8.16)$$

Questo si ottiene facendo il limite della funzione esponenziale:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} \cdot u(t) - e^{at} \cdot u(-t) \leftrightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j2\pi f} - \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (8.17)$$

Modulo e argomento:

$$|F| = \frac{1}{\pi f} \quad (8.18)$$

$$\angle F = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}(f) \quad (8.19)$$

8.7 Gradino unitario

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (8.20)$$

8.8 Segnale periodico

Si sa che un segnale periodico si può trasformare in una serie di Fourier:

$$x(t) \leftrightarrow X_k \quad (8.21)$$

Quindi lo stesso segnale è dato dalla somma di tutti i termini della serie:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} \quad (8.22)$$

Applicando la trasformata alla serie di Fourier si ottengono una successione di delta di Dirac:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \mathcal{F}\{e^{j2\pi k f_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot \delta(f - k f_0) \quad (8.23)$$

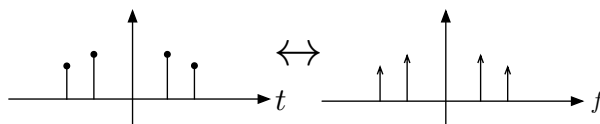


Figura 13: Trasformata della serie

8.9 Pettine di delta

Un segnale periodico formato da delta di Dirac.

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (8.24)$$

I coefficienti di Fourier si ottengono:

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (8.25)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (8.26)$$

$$= \frac{e^0}{T} = \frac{1}{T} \quad (8.27)$$

La trasformata di Fourier del pettine, sapendo che $f_0 = \frac{1}{T}$ è quindi un pettine di delta in frequenza:

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta(f - kf_0) \quad (8.28)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) \quad (8.29)$$

$$= f_0 \cdot \delta_{f_0}(f) \quad (8.30)$$

8.10 Integratore a finestra mobile

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (8.31)$$

$$H(f) = T \operatorname{sinc}(fT) e^{j\pi fT} \quad (8.32)$$

9 Combinazione di sistemi

9.1 Derivate successive

Se si alza il grado di derivazione, di conseguenza si alza la potenza di $j2\pi f$ nella trasformata:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \quad (9.1)$$

Questo succede perché fare una derivata n-esima equivale a mettere in cascata n sistemi che fanno la derivata prima.

$$H_2(f) = H_1(f) \cdot H_1(f) = (H_1(f))^2 \quad (9.2)$$

9.2 Serie di LTI

Due o più risposte in frequenza si possono combinare con il prodotto.

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \leftrightarrow H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f) \quad (9.3)$$

9.3 Sistemi in retroazione

Sono sistemi LTI che prendono in ingresso anche la loro stessa uscita, come per esempio in fig.14.

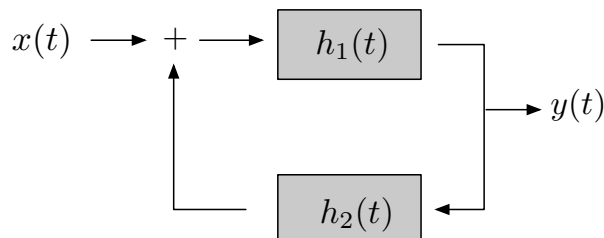


Figura 14: Sistemi in retroazione

Il sistema complessivo è sempre lineare e tempo-invariante, e la risposta si ottiene eseguendo i calcoli:

$$Y(f) = [X(f) + Y(f) \cdot H_2(f)] \cdot H_1(f) \quad (9.4)$$

La risposta in frequenza del tutto è quindi:

$$H(f) = \frac{H_1(f)}{1 - H_2(f) \cdot H_1(f)} \quad (9.5)$$

Da notare che un risultato simile è estremamente più difficile da trovare nel dominio del tempo, per questo risulta lavorare con il prodotto di risposte in frequenza piuttosto che con la convoluzione.

10 Sistemi descritti da eq. diff.

Un sistema lineare tempo invariante può essere descritto da una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, quindi una combinazione lineare di segnali e derivate.

$$b_0 y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \dots + b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = a_0 x(t) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (10.1)$$

Per descrivere il sistema basta conoscere i coefficienti $a_0 \dots a_m$ e $b_0 \dots b_n$.

Con questi dati, se si volesse trovare una uscita dato un ingresso il problema risulterebbe indeterminato (le soluzioni di una equazione differenziale possono essere infinite), bisogna quindi assegnare in un istante il valore del segnale e delle sue derivate (integrale particolare). Per questo utilizzo ci si interessa di sistemi che hanno condizioni iniziali nulle, quindi partendo da condizioni di sistema a riposo, altrimenti verrebbero a meno le condizioni di sistema lineare tempo invariante.

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ \vdots \\ y^n = 0 \end{cases} \quad (10.2)$$

Un sistema è LTI se ad un ingresso nullo corrisponde una uscita nulla, altrimenti sarebbe incompatibile con la linearità. Inoltre il fatto di usare coefficienti costanti rende il sistema tempo invariante.

Dal punto di vista matematico, una equazione differenziale è composta da una soluzione generale che non dipende da $x(t)$ e una particolare:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \quad (10.3)$$

Si rimuove dalla somma la soluzione generale, dato che altrimenti distruggerebbe la linearità, ottenendo solo la soluzione particolare $y_p(t)$.

I circuiti possono essere descritti da sistemi rappresentati in questo modo, quindi per analogia l'istante zero corrisponde ad avere tutti i componenti reattivi (condensatori, induttanze) completamente scarichi.

10.1 Zeri del polinomio

Si prenda in considerazione la risposta di un sistema nel dominio del tempo:

$$y(t) + a_0 \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad (10.4)$$

Passando nel dominio delle frequenze (quindi eseguendo la trasformata) si può esprimere con i complessi:

$$Y(f) + a_0(j2\pi f)Y(f) = X(f) \quad (10.5)$$

Raccogliendo:

$$Y(f)[1 + a_0(j2\pi f)] = X(f) \quad (10.6)$$

La risposta in frequenza risulta quindi:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f a_0} \quad (10.7)$$

Generalizzando si può scrivere un sistema realizzabile con le derivate:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{a_0 + a_1(j2\pi f) + a_2(j2\pi f)^2 + \dots}{b_0 + b_1(j2\pi f) + \dots} \quad (10.8)$$

Sostituendo $j2\pi f$ con s per semplicità, si ottiene un rapporto di polinomi, che per il teorema fondamentale può essere individuato dalle sue radici:

$$H(f) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots}{b_0 + b_1 s + \dots} \quad (10.9)$$

Il sistema può essere quindi individuato solo dalle radici del polinomio, reali o complesse, invece che tutta la equazione differenziale.

Dato che i termini sono reali, le radici possono essere reali o complesse coniugate. Il tutto si può scrivere nella forma:

$$H(f) = k \cdot \frac{(s - s_{01})(s - s_{02}) \dots (s - s_{0m})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots} \quad (10.10)$$

Dove p indica i **poli**, 0 indica gli **zeri** e k è un coefficiente.

Per individuare il sistema bisogna quindi avere zeri e poli.

11 Trasformata di Laplace

Come la trasformata di Fourier, trasforma le convoluzioni in prodotti. Si applica sempre a sistemi LTI. Può essere vista come una generalizzazione della trasformata di Fourier oppure si può vedere la trasf. di F. come un caso specifico della trasf. di Laplace.

Dato un sistema LTI, esso prende in ingresso un segnale $x(t)$, e attraverso una funzione $H(f)$ produce un segnale $y(t)$. Se viene data una sinusoidale generica in

ingresso si può notare che il sistema è dato da una autofunzione, dato che viene moltiplicata una sola costante complessa all'ingresso. Il prodotto complesso fa in modo di alterare modulo e fase lasciando inalterata la frequenza.

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \cdot H(f_0) \quad (11.1)$$

Si definisce s come un numero complesso formato da un fasore e una fase aggiunta:

$$s = \sigma + j2\pi f = \sigma + j\omega \quad (11.2)$$

Se l'ingresso è dato da e^{st} la uscita diventa il prodotto dell'ingresso e la trasformata di Laplace della funzione di trasferimento, in modo simile a come succede per la trasformata di Fourier:

$$e^{st} \rightarrow e^{st} \cdot H^{(L)}(s) \quad (11.3)$$

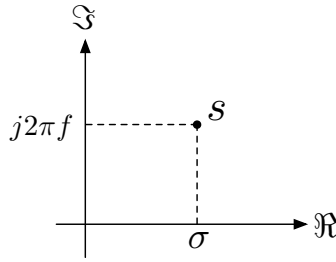


Figura 15: Parametro complesso s

Con Fourier si esegue la convoluzione fra il segnale e un fasore, con Laplace il fasore viene sostituito dalla variabile complessa s che contiene anche una parte reale sommata alla parte immaginaria:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \mathcal{F}\{h(t)\} \quad (11.4)$$

$$H^{(L)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{h(t)\} \quad (11.5)$$

La stessa trasformata si può vedere come la trasformata di Fourier della risposta all'impulso moltiplicata per un coefficiente:

$$H^{(L)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt = \mathcal{F}\{h(t) \cdot e^{-\sigma t}\} \quad (11.6)$$

A differenza della trasformata di Fourier, è definita sul piano complesso invece che sui reali. Una condizione sufficiente perché possa funzionare è data da:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t) \cdot e^{-\sigma t}| dt < +\infty \quad (11.7)$$

Può quindi funzionare con alcuni polinomiali che la trasformata di F. non è in grado di risolvere, dato che si può sempre trovare un valore σ elevato che grazie alla funzione esponenziale "schiaccia" la funzione di origine.

Se il segnale è causale vale che:

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X^{(L)}(s) \cdot H^{(L)}(s) \quad (11.8)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow s \cdot X^{(L)}(s) \quad (11.9)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n \cdot X^{(L)}(s) \quad (11.10)$$

Di conseguenza, un sistema retto da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, date le trasformate dell'entrata $X^{(L)}(s)$ e la funzione di trasferimento $H^{(L)}(s)$, si ha che:

$$Y^{(L)}(s) = X^{(L)}(s) \cdot H^{(L)}(s) \rightarrow H^{(L)}(s) = \frac{Y^{(L)}(s)}{X^{(L)}(s)} \quad (11.11)$$

La risposta in frequenza data dalla trasformata di F. si può vedere anche come un caso particolare della trasf. di Laplace in cui $\sigma = 0$:

$$H(f) = H^{(L)}(s)|_{s=0+j2\pi f} \quad (11.12)$$

Mentre la trasf. di Fourier "campiona" sinusoidi, la trasf. di Laplace considera segnali più complessi del tipo $e^{\sigma t} e^{j2\pi f t}$.

Riprendendo la equazione che definisce la risposta in frequenza con poli e zeri si nota subito che la variabile s non sia stata scelta a caso, ma ha un significato specifico:

$$H(f) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} \Big|_s = j2\pi f \quad (11.13)$$

Diviso in poli e zeri:

$$H(f) = k \frac{(s - s_{01})(s - s_{02}) \dots}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots} \quad (11.14)$$

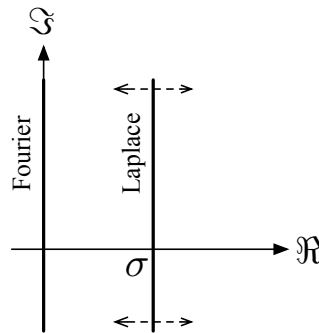


Figura 16: Frequenze trasformate da F. e L.

12 Teorema del campionamento

Permette di rappresentare un segnale analogico senza perdere informazioni attraverso una sequenza di campionamenti progressivi. Non è sempre possibile, ma bisogna porre determinate condizioni per poter riavere esattamente il segnale campionato dati i singoli campionamenti.

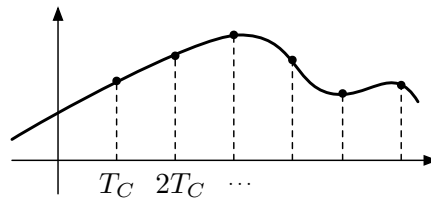


Figura 17: Campionamento di un segnale

Si indica con T_C l'intervallo (periodo) di campionamento, mentre $f_c = \frac{1}{T_C}$ è la frequenza di campionamento.

12.1 Campionamento impulsivo

Detto anche campionamento ideale, fa in modo di prendere il segnale in istanti regolari. Per campionare il segnale in determinati punti si moltiplica lo stesso per

un pettine di Delta dato dal segnale $c(t)$:

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_C) \quad (12.1)$$

Moltiplicando $x(t)$ per $c(t)$ si ottiene il segnale $x_\delta(t)$. La ampiezza del segnale campionato in uno specifico momento si trova nell'area del delta in quel punto.

Il segnale rappresentato nel dominio delle frequenze è dato da:

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}\{x_\delta(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \cdot c(t)\} \quad (12.2)$$

$$= X(f) * C(f) = X(f) * \sum_k \frac{1}{T_C} \delta(f - kf_C) = \quad (12.3)$$

$$= \frac{1}{T_C} \sum_k X(f) * \delta(f - kf_C) = \frac{1}{T_C} \sum_k X(f - kf_C) \quad (12.4)$$

Viene ottenuta una somma di repliche traslate di f_C , come in fig.18, da cui si può filtrare solo quella centrale (passa-basso) per ottenere nuovamente il segnale di origine.

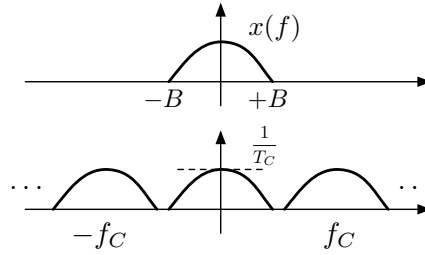


Figura 18: Repliche

Le condizioni per non perdere informazioni sono quindi le seguenti:

- Il segnale di origine deve essere a banda B limitata
- Non bisogna avere sovrapposizioni nelle repliche, quindi $f_C \geq 2B$

Ricapitolando, dato un segnale $x(t)$ a banda strettamente limitata, quindi tale che $X(f) = 0$ per $|f| > B$ (condizioni di Nyquist), se lo si campiona idealmente con una frequenza di campionamento $f_C \geq 2B$ ottenendo il segnale $x_\delta(t)$, esso si può ricostruire mediante filtraggio di ricostruzione:

$$H_R(f) = T_C \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_C}\right) \quad (12.5)$$

Se ci fosse una sovrapposizione delle repliche, si avrebbe il cosiddetto fenomeno di **aliasing** (da alias = ripetizione).

12.2 Sample & Hold

Nella pratica è difficile campionare un segnale in un istante infinitesimo, si utilizza piuttosto una tecnica differente che mantiene il valore del segnale preso in un istante per un certo periodo (di solito fino al campionamento successivo, quindi $\tau = T_C$).

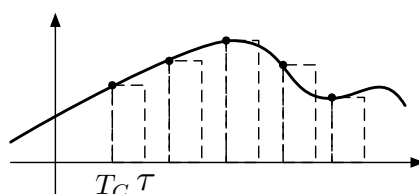


Figura 19: Sample & Hold

Si può concettualizzare come il segnale moltiplicato per il pettine di delta che passa attraverso un integratore causale. Nella pratica non funziona in questo modo, viene evitato il campionamento impulsivo.

Definito un impulso rettangolare $h_{ifm}(t)$ che funge da integratore che vale 1 solo da 0 a τ , il segnale in uscita risulta:

$$x_{sh}(t) = x_{\delta}(t) * h_{ifm}(t) \quad (12.6)$$

Passando alla trasformata:

$$X_{sh}(f) = X_{\delta}(f) \cdot H_{ifm}(f) \quad (12.7)$$

$$H_{ifm}(f) = 1 \cdot \tau \operatorname{sinc}(f\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} \quad (12.8)$$

$$|H_{ifm}(f)| = \tau |\operatorname{sinc}(f\tau)| \quad (12.9)$$

Viene applicata una leggera distorsione alla parte centrale dello spettro, come in fig.20, che non rimane inalterata dalla operazione.

La stessa distorsione non è un problema grave, dato che può essere rimossa con un filtro compensato.

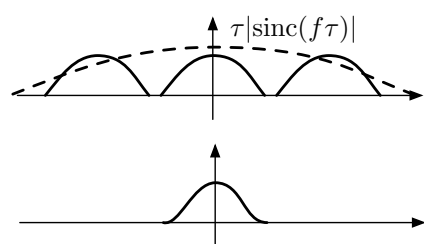


Figura 20: Distorsione applicata