Fondamenti

Mc128k

2015-09-01

Contenuti

Elementi di base su Teoria dei Segnali, trasformazioni fondamentali, segnali canonici, simmetrie, segnali periodici, energia e potenza

Indice

1 Introduzione

Definizione 1.1. Un **segnale** è una grandezza fisica variabile nel tempo a cui è associata una informazione.

Una informazione esiste se è utile, quindi se va a colmare una "ignoranza" esistente. Una grandezza fisica che trasporta informazioni che non verranno mai lette o che non sono utili non è un segnale.

1.1 Trasduttori

Un trasduttore è un elemento che cambia uno o più segnali dal punto di vista fisico. Per fare un esempio un microfono è in grado di trasformare un segnale sotto forma di onde sonore in un segnale sotto forma di cariche elettriche in un conduttore.

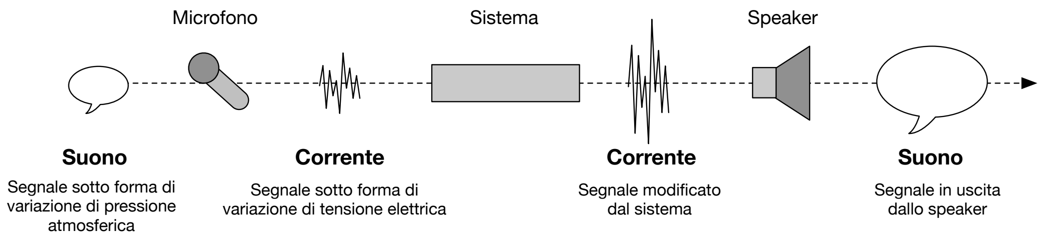

Figura 1: Esempio di segnali

1.2 Modello matematico

Un segnale si può rappresentare come una funzione che varia nel tempo $x(t)$. Molti segnali sono rappresentabili in questo modo (segnali deterministici), mentre quelli che contengono informazioni non hanno una rappresentazione univoca tramite strumenti matematici.

2 Tipi di segnali

Definizione 2.1. I **segnali determinati**, detti anche deterministici, sono segnali per i quali si conosce con precisione il progresso attraverso una formula matematica.

Non danno nessuna informazione nuova, dato che sono perfettamente prevedibili (da cui deterministici).

In questi segnali verranno successivamente introdotti elementi di incertezza, per esempio nel caso di un microfono non si sa quali saranno tutti i possibili segnali in entrata, ma si conoscono ampiezza frequenza minimi e massimi, quindi viene previsto un raggruppamento di tutte le possibilità in entrata.

Esempi:

- $x(t) = 1$
- $x(t) = at + b$
- $x(t) = V \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

Definizione 2.2. Un **Processo stocastico** è una collezione di segnali determinati con incertezze. Nei punti in cui sono presenti, le stesse si possono colmare con **calcoli di probabilità** e **variabili aleatorie**.

3 Segnali determinati

Sono prevedibili tramite una o più funzioni matematiche e possono essere di durata finita (detti **impulsi**) o infinita; nel primo caso quindi la funzione assume valori significativi solo entro un determinato intervallo:

$$t_1 : x(t) = 0 \quad t < t_1 \tag{3.1}$$
$$t_2 : x(t) = 0 \quad t > t_2 \tag{3.2}$$

Quindi se t_1 e t_2 sono finiti, il segnale ha una durata finita.

Definizione 3.1. Un segnale che non ha un inizio è detto **anticausale generalizzato**, mentre uno che non ha fine (quindi si fa conto che $t_2 = +\infty$) si dice **causale generalizzato**.

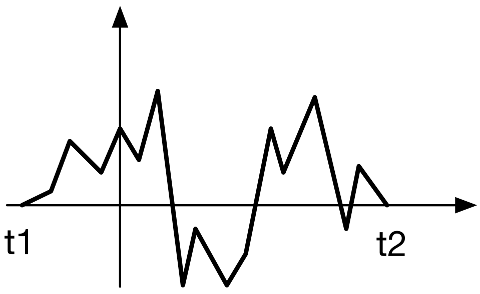

Figura 2: Segnale finito

4 Trasformazioni elementari

4.1 Moltiplicazione per costante

Questa operazione fa in modo di "amplificare" o "ridurre" il segnale, senza far perdere la forma originale. La costante moltiplicativa può fare in modo di amplificare il segnale ($A > 1$), ridurlo ($0 < A < 1$) o invertirlo ed effettuare le precedenti operazioni ($A < 0$).

$$x(t) \tag{4.1}$$
$$y(t) = A \cdot x(t) \tag{4.2}$$

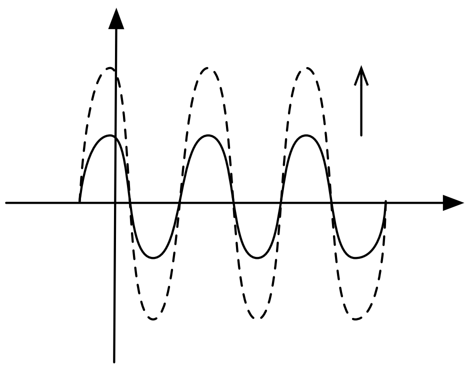

Figura 3: Segnale moltiplicato per una costante

4.2 Traslazione temporale

Traslando il segnale si fa in modo di "spostarlo" orizzontalmente sugli assi. Se la costante $t_0 > 0$ allora il segnale verrà **spostato verso destra**, quindi sarà in ritardo, altrimenti se $t_0 < 0$ vale il contrario, quindi risulta in anticipo.

$$x(t) \tag{4.3}$$
$$y(t) = x(t - t_0) \tag{4.4}$$

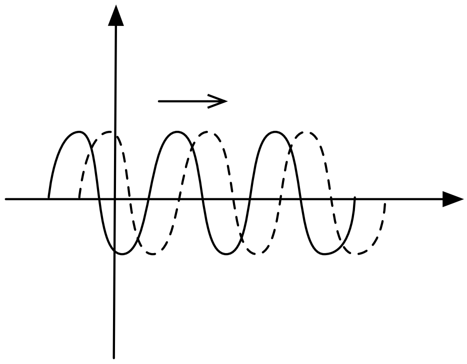

Figura 4: Segnale traslato di una costante

4.3 Cambiamento di scala

Una trasformazione nel tempo che permette di "allargare" o restringere un segnale lungo l'ascissa. Se la costante $a > 1$ il tempo accelera, quindi il segnale verrà ristretto, mentre se $0 < a < 1$ il segnale si allarga. Nel caso in cui $a < 0$ il segnale viene invertito rispetto all'ordinata, si ha quindi una **inversione temporale**, oltre al cambiamento di scala, nullo se $a = -1$.

$$x(t) \tag{4.5}$$
$$y(t) = x(at) \tag{4.6}$$

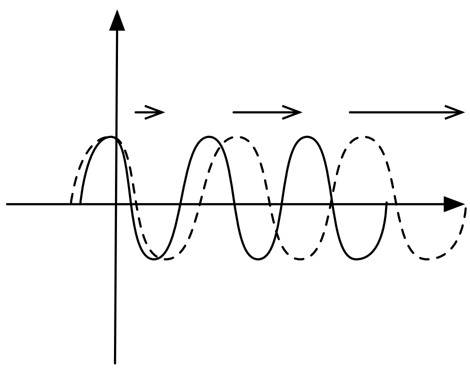

Figura 5: Segnale scalato di una costante

4.4 Moltiplicazione di segnali pari e dispari

$$P \cdot D = D \tag{4.7}$$
$$D \cdot D = P \tag{4.8}$$
$$P \cdot P = P \tag{4.9}$$

5 Simmetrie

Se un segnale rimane uguale dopo che è stato ribaltato nel tempo, allora presenta una simmetria, ed è detto **pari**.

$$x(t) = x(-t) \tag{5.1}$$

Invece un segnale dispari presenta un tipo di simmetria differente, verificabile con la equazione seguente. Di fatto è simmetrico e "ribaltato" in due quadranti. Da notare che un segnale dispari passa sempre per lo zero se è una funzione continua.

$$x(t) = -x(-t) \tag{5.2}$$

5.1 Parte pari e dispari

Un segnale può essere scomposto in altri due segnali *univoci* detti parte pari (5.3) e parte dispari (5.4). Questi segnali, se sommati, restituiscono esattamente il

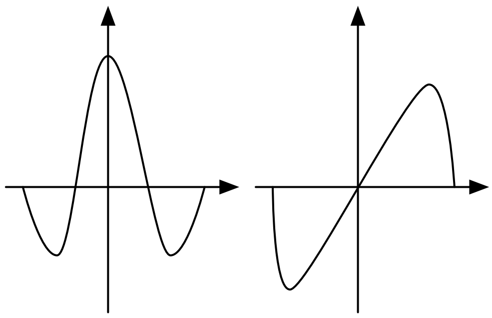

Figura 6: Segnali pari e dispari

segnale originale (5.5), e hanno la caratteristica di essere rispettivamente pari e dispari.

$$x_p(t) := \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \tag{5.3}$$

$$x_d(t) := \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \tag{5.4}$$

$$x_p(t) + x_d(t) = x(t) \tag{5.5}$$

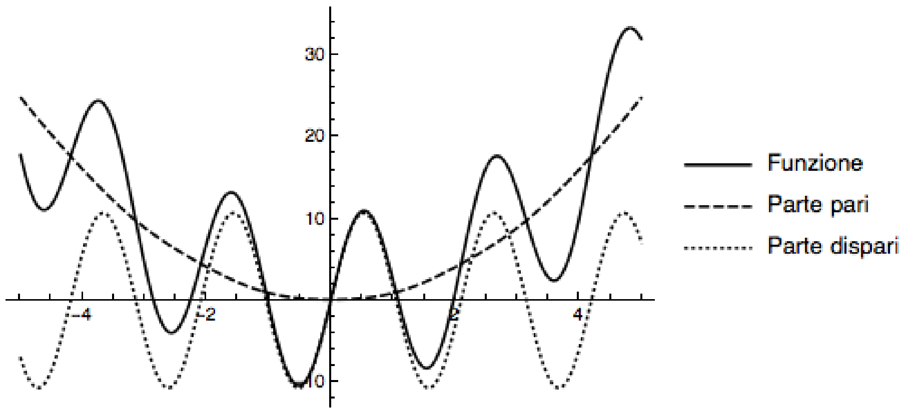

Figura 7: La somma restituisce il segnale originale

Esempio 5.1.
$x(t) = 2t + 1$

$x_p(t) = \frac{1}{2}[(2t + 1) + (2(-t) + 1)] = \frac{1}{2}[2] = 1$

$x_d(t) = 2t$

Esempio 5.2.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \quad x(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ -t & t \leq 0 \end{cases}$$

$$x_p(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2} & t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & t > 0 \end{cases} \quad x_d(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & t > 0 \end{cases}$$

6 Segnali periodici

Definizione 6.1. Un segnale si dice periodico se $\exists T_0$ tale che $x(t) = x(t + t_0)$ per $\forall t$.

Il valore T_0 è detto **periodo fondamentale**, ed è importante distinguerlo da altri periodi perchè è il più piccolo periodo presente nella funzione, mentre gli altri sono sempre suoi multipli. Per esempio sono validi periodi $2T_0$ o $6T_0$, quello fondamentale si distingue perchè non ha sottomultipli.

6.1 Periodicizzazione

Dato un segnale finito, lo si vuole rendere periodico ripetendo repliche traslate sull'ordinata. Si può pensare come una sommatoria di segnali, che come una serie

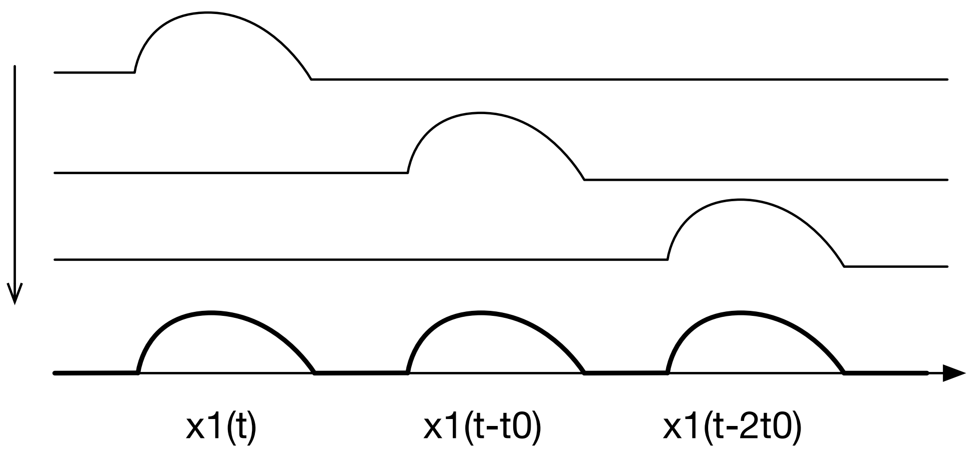

Figura 8: Segnale periodico creato da segnali finiti

numerica può inevitabilmente convergere o divergere.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t - nT_0) = ...x_1(t + T_0) + x_1(t) + x_1(t - T_0)... \tag{6.1}$$

Se il periodo T_0 è maggiore della durata del segnale, allora sicuramente non ci possono essere problemi di convergenza, dato che i segnali non si sovrappongono (quindi non si sommano). Al contrario si hanno problemi per funzioni come in fig. 9.

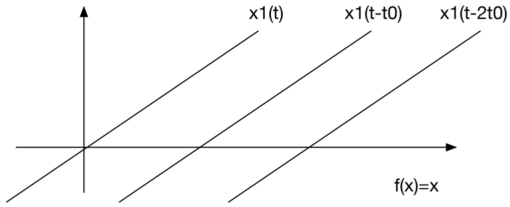

Figura 9: Segnale periodico divergente

In questo caso in ogni punto si avrebbe un valore non definito perchè continuano a sommarsi tutte le funzioni prima e dopo. Questo per esempio succede anche con esponenziali, dove si sommano le funzioni nei punti di limite infinitesimo.

Per verificare la periodicità di una funzione basta controllare che $x(t+T_0) = x(t) \forall t$.

Esempio 6.1.
Si vuole verificare la periodicità del segnale $x(t)$, quindi si prova a traslare di T_0 la funzione:

$$x(t + T_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[(t + T_0) - nT_0] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[t - (n - 1)T_0]$$

Scambiando $n - 1$ con m si ottiene una funzione come quella di origine:

$$\sum_{m=-\infty-1}^{+\infty+1} x_1[t - mT_0]$$

7 Segnali canonici

7.1 Costante

$$xt = a \tag{7.1}$$

7.2 Gradino unitario

$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

A seconda della applicazione in zero si fa valere quello che si vuole.

7.3 Impulso rettangolare

Ha durata finita, si rappresenta con il simbolo Π per ricordarsi la forma, non c'entra con la operazione di produttoria.

$$x(t) = \Pi(t) = \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & t > \frac{1}{2} \cup t < -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{7.3}$$

L'impulso rettangolare si può generalizzare per adattarlo a qualunque durata. Il coefficiente A fa in modo di alterarlo verticalmente, mentre D modifica la durata, quindi lo altera orizzontalmente. Infine per traslare orizzontalmente il segnale si sostituisce a t il valore $t - T_0$.

$$x(t) = A \cdot \Pi\Big(\frac{t - T_0}{D}\Big) \tag{7.4}$$

Se si ha un impulso definito in un intervallo da a a b si può generalizzare ulteriormente.

$$x(t) = A \cdot \Pi\Big(\frac{t - (\frac{b-a}{2})}{|b-a|}\Big) \tag{7.5}$$

7.4 Impulso triangolare

$$x(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 0 & |t| > 1 \\ -|t| & 1 < t < 1 \end{cases} \tag{7.6}$$

Si può anche vedere come una funzione isolata da un impulso rettangolare:

$$(1 - |t|) \cdot \Pi\Big(\frac{t}{2}\Big) \tag{7.7}$$

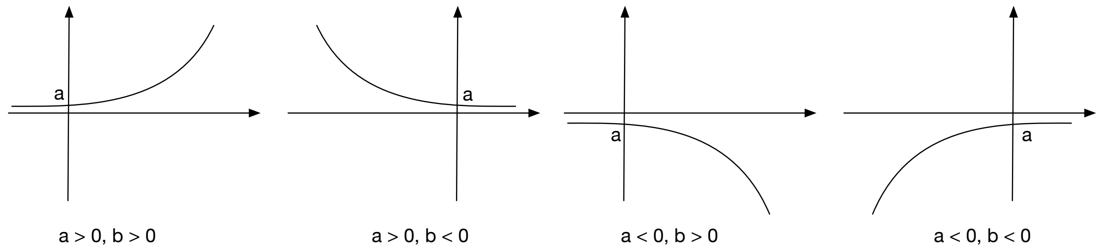

Figura 10: Casi di funzioni esponenziali

7.5 Esponenziale

$$x(t) = ae^{bt} \tag{7.8}$$

7.6 Segno

Vale $+1$ se l'argomento è positivo e -1 altrimenti.

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} = 2u(t) - 1 \tag{7.9}$$

7.7 Sinusoidi

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \tag{7.10}$$

Dove A rappresenta l'ampiezza, f_0 la frequenza e φ la fase iniziale. Una sinusoide è sempre limitata superiormente da A e inferiormente da $-A$.

Questa è una funzione periodica con periodo $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Può essere pari o dispari a seconda della fase iniziale.

L'argomento delle funzioni trigonometriche deve essere sempre **espresso in radianti**.

Esempio 7.1.
$x(t) = \cos(t)$

Con t si intende il tempo, che ha i secondi come unità di misura. Potrebbero venire dubbi sull'argomento del coseno, dato che dovrebbe essere adimensionale, tuttavia basta notare che è presente un ulteriore termine nascosto per risolvere il problema.

$x(t) = \cos(2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot t)$

Essendo l'altro argomento espresso in $[s^{-1}]$, si annulla con il tempo, producendo il numero adimensionale necessario.

7.8 Seno cardinale

Il seno cardinale generalizzato (si aggiunge pi greco) risulta comodo perchè si annulla per valori interi di t (vedi fig.11).

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \tag{7.11}$$

È necessario osservare che nel punto $t = 0$ la funzione non è definita, per praticità

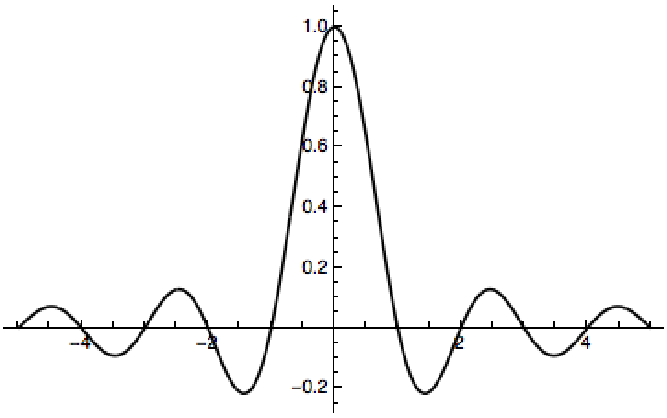

Figura 11: Seno cardinale

si pensa come se non esistesse il punto di discontinuità e valesse 1, ottenendo quindi:

$$\begin{cases} \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & x \neq 0 \\ 1 \quad x = 0 \end{cases} \tag{7.12}$$

7.9 Delta di Dirac

Viene detto anche **funzione impulsiva** oppure **impulso unitario**. È un impulso rettangolare di area unitaria "infinitamente sottile". Il valore ε diventa sempre più piccolo fino a diventare infinitesimo, producendo un rettangolo di altezza infinita, **pur restando con una area unitaria**. In altre parole è fatta per avere un integrale che risulti unitario.

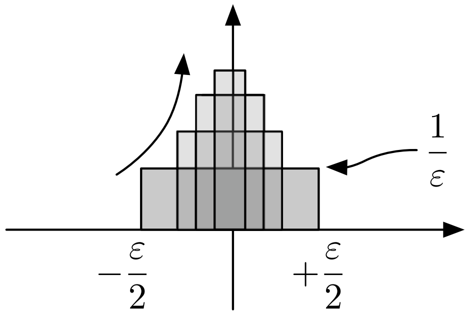

Figura 12: Delta di Dirac

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) \tag{7.13}$$

$$\delta(t) := \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Pi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) \tag{7.14}$$

Si disegna convenzionalmente come una freccia rivolta verso l'alto nel grafico. Per avere un'area arbitraria (e quindi non uguale a 1) basta fare $A \cdot \delta(t)$, mentre per spostarlo lungo l'ascissa si applica la operazione di traslazione.

Un altro modo per crearlo è derivando il gradino unitario, come da figura 13, dove si nota che la rampa a sinistra tende al gradino unitario e la derivata tende al Delta. Passando al limite si ottiene esattamente il risultato cercato:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dt}x_\varepsilon(t) = \delta(t) \tag{7.15}$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) \tag{7.16}$$

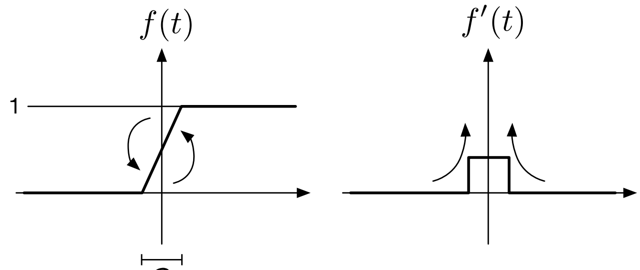

Figura 13: Da gradino unitario a Delta di Dirac

Il Delta di Dirac possiede proprietà campionatrici utili per quando si lavora con altri segnali. Preso un segnale $x(t)$, si applica il Delta in un punto t_0:

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0)$$

Man mano che ε si riduce, il rettangolo si restringe e assume una area sempre più vicina al valore della funzione in quel punto:

$$A \approx x(t)$$

Eseguendo l'integrale lungo tutta l'ascissa del Delta si ottiene comunque l'area unitaria del rettangolo definito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt$$

Che quindi vale per lo stesso rettangolo in qualunque punto nel grafico:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt$$

Applicandolo alla funzione considerata, si può fare in modo di *campionare* il segnale, quindi ottenere con precisione il valore in un punto determinato:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0)dt$$

Dal segnale $x(t)$ viene "selezionata" una fetta infinitesima nel punto t_0 dalla funzione Delta (che annulla la funzione ovunque tranne in x_0), e l'integrale fa in modo di calcolare esattamente il valore in quel punto.

A questo punto si sostituisce $t \to \tau$ perché ci servirà riutilizzare il simbolo dopo. Inoltre il punto di campionamento diventa $t_0 \to \alpha$.

$$x(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - \alpha)d\tau$$

Volendo ottenere una funzione che, dato il punto nell'ascissa, calcoli il valore esatto campionato, si mette la incognita al posto di α, quindi $\alpha \to t$.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - t)d\tau$$

Essendo il Delta una funzione pari, $\delta(\tau - t) = \delta(t - \tau)$.

Ora da tutti i possibili valori di τ compresi tra $-\infty$ e $+\infty$, se ne estraggono alcuni:

$$\tau_1 \to x(\tau_1) \cdot \delta(t - \tau_1)$$

$$\tau_2 \to x(\tau_1) \cdot \delta(t - \tau_2)$$

Immaginiamo di sommare tutti i τ, somma di infiniti δ di area infinitesima. Ogni segnale $x(t)$ si interpreta come somma di δ e ognuno ha area uguale circa al valore della funzione in quel punto.

8 Caratteristiche di un segnale

8.1 Valore medio temporale

Il valore medio temporale su un intervallo si trova utilizzando la media integrale.

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt \tag{8.1}$$

Prendendo un intervallo sempre più grande si ottiene un valore che rappresenta la media rispetto a tutta la funzione.

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt \tag{8.2}$$

Di conseguenza tutte le funzioni dispari hanno valore medio nullo. Per fare un esempio anche un segnale come $x(t) = t$, nonostante cresca in modo infinito, ha valore medio nullo, poichè ogni valore positivo ha una controparte negativa.

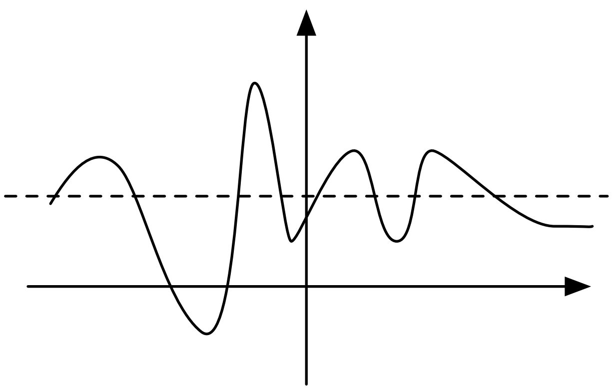

Figura 14: Valore medio di un segnale

8.2 Potenza ed energia

La potenza istantanea (normalizzata) di un segnale si ricava con la formula 8.3, e si misura in Watt [W].

$$p(t) = r \cdot i^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \tag{8.3}$$

La potenza media normalizzata (8.4) è il valore medio della potenza istantanea. Se tende ad un valore finito si dice che **il segnale è a potenza finita**, quindi per esempio funzioni che non vanno a ∞ o a 0 oppure che mantengono una oscillazione costante.

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2(t)dt \tag{8.4}$$

La potenza e l'energia del segnale sono legati dal tempo, la potenza quindi è il quadrato dell'energia nel tempo in cui viene calcolata, e l'energia è l'integrale della potenza nel tempo.

Intuitivamente si può pensare all'energia di un segnale come all'area sottesa dallo stesso. Un segnale periodico per esempio ha energia infinita, dato che si continuano a sommare le stesse aree (anche se va sotto zero, dato che l'energia è legata al quadrato del segnale), mentre un segnale limitato, qualunque esso sia, ha energia finita. La potenza indica la quantità di segnale per una unità di tempo, per esempio un segnale periodico ha potenza finita, dato che la tiene ad una quota costante, mentre un segnale limitato ha potenza infinitesima (la potenza viene sempre misurata da $+\infty$ a $-\infty$.

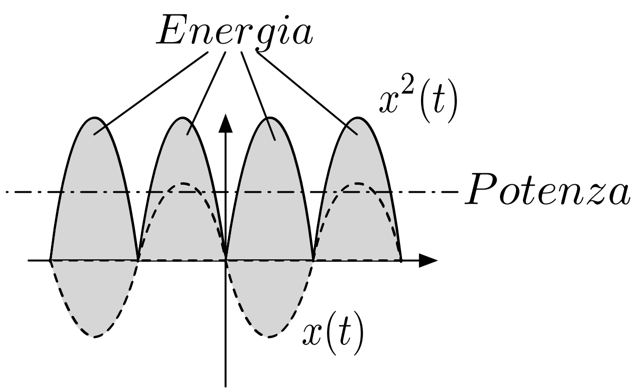

Figura 15: Energia e potenza di un segnale

Potenza istantanea normalizzata:

$$p(t) = x^2(t) \tag{8.5}$$

Potenza media normalizzata (su un intervallo):

$$p_{t_1,t_2} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt}{|t_2 - t_2|} \tag{8.6}$$

Potenza media normalizzata (su tutto il segnale):

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x^2(t)| dt \tag{8.7}$$

Se il limite esiste allora il segnale è a potenza finita, dato che la media integrale tende a "rimanere sempre allo stesso livello", non sale e non scende, il segnale non aumenta la potenza e non la riduce, ma rimane costante nel tempo.

Energia normalizzata (su un intervallo):

$$E_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt \tag{8.8}$$

Energia normalizzata (su tutto il segnale):

$$E = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \tag{8.9}$$

Come per la potenza, la energia può convergere (si parla quindi di un segnale a energia finita), tendere a zero (energia infinitesima) o divergere (energia infinita). Da notare che si prende il modulo nel caso il segnale fosse complesso.

Osservazione 8.1. Un segnale a potenza finita ha necessariamente energia infinita. Un segnale a energia finita ha potenza media infinitesima. Inoltre esistono anche casi con energia e potenza infiniti.

8.3 Segnali a energia finita

Un segnale a energia finita (o di energia) dovrà necessariamente tendere a zero, quindi deve essere infinitesimo. Ovviamente è l'unico modo per avere un valore finito da una somma infinita (il segnale non è limitato in un intervallo).

Intuitivamente si nota che nel grafico del **quadrato del segnale** l'area deve risultare finita, e l' unico modo perché questo avvenga è avere un segnale che tende a zero sia a destra che a sinistra.

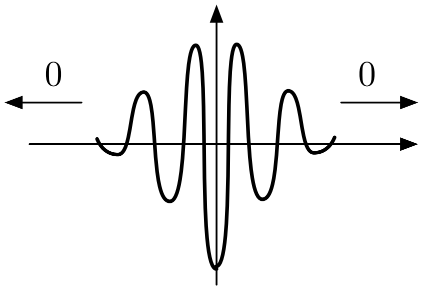

Figura 16: Segnale ad energia finita

8.4 Calcolo della potenza

8.4.1 Costante

$$x(t) = At$$

$$P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{T \cdot A^2}{T} = A^2 \tag{8.10}$$

8.4.2 Sinusoide

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt = ... = \frac{A^2}{2} \tag{8.11}$$

8.5 Valore efficace (RMS)

Il valore efficace di un segnale a potenza finita (Root Mean Square) è il valore che avrebbe un segnale costante con potenza media equivalente.

$$V_{eff}^2 = P \quad V_{eff} = \sqrt{P} \tag{8.12}$$

Serve per comparare la potenza di un segnale alternato o periodico con uno costante, per esempio in elettrotecnica viene in aiuto per confrontare la corrente alternata con la corrente continua.

La tensione ad uso abitativo di 220V in realtà non è la tensione di picco, ma viene indicata come valore efficace, in realtà raggiunge valori più alti in determinati momenti.

