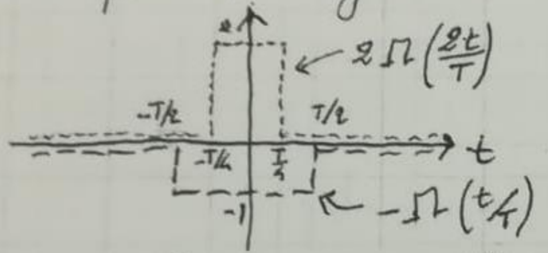
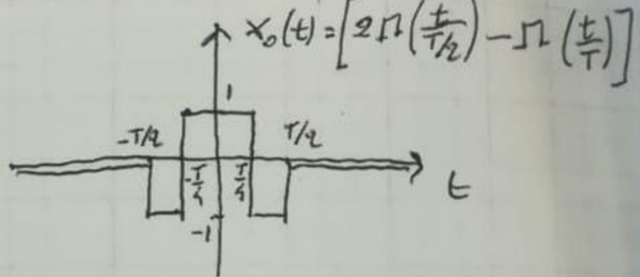
1) Valutare l'espressione in serie di Fourier per il segnale periodico

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[2\Pi\left(\frac{2t - n2T}{T}\right) - \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \right]$$

Si tracci preliminarmente il grafico del segnale $x(t)$ e se ne individui il periodo. Si calcolino i coefficienti di Fourier e si tracci il grafico della trasformata di Fourier $X(f)$ del segnale.

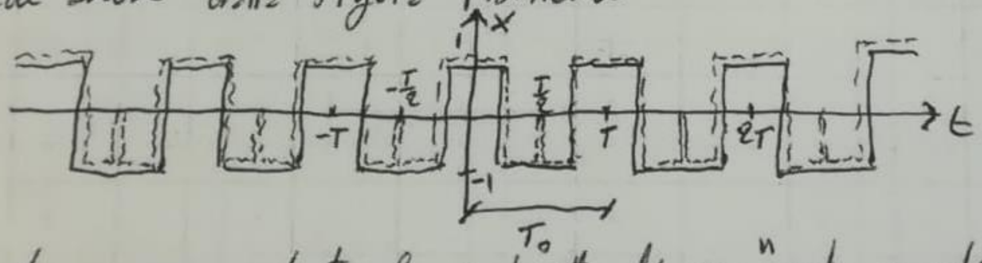
1) L'impulso-base che, replicato, costituisce $x(t)$ è quello racchiuso tra parentesi quadre, il cui grafico è la sottrazione tra due impulsi rettangolari:





$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[2\Pi\left(\frac{t-nT}{T/2}\right) - \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right)\right]$$

si costruisce per giustapposizione degli impulsi $x_0(t-nT)$ (ciascuno dei quali ha durata T), con cadenza T che risulta pari al periodo $T_0 = T$, come si vede anche dalla figura risultante



dal quale appare evidente che si tratta di una "onda quadra con duty-cycle del 50%" di valore medio nullo e ampiezza ± 1, che potrebbe essere scritta anche come $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\Pi\left(\frac{t-nT}{T/2}\right) - 1$

(difatti, il secondo addendo che compare nell'espressione originaria di $x(t)$ porta a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) = 1$, che è una "componente continua").

Per la Trasformata di Fourier del segnale $x(t)$, è noto che lo spettro di un segnale periodico di freq. fondamentale f_0 è dato da:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, \delta(f - kf_0)$$

dove nel nostro caso $f_0 = 1/T$ e X_k sono i coefficienti di Fourier

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \, e^{-j2\pi k f_0 t} \, dt = f_0 X_0(kf_0)$$

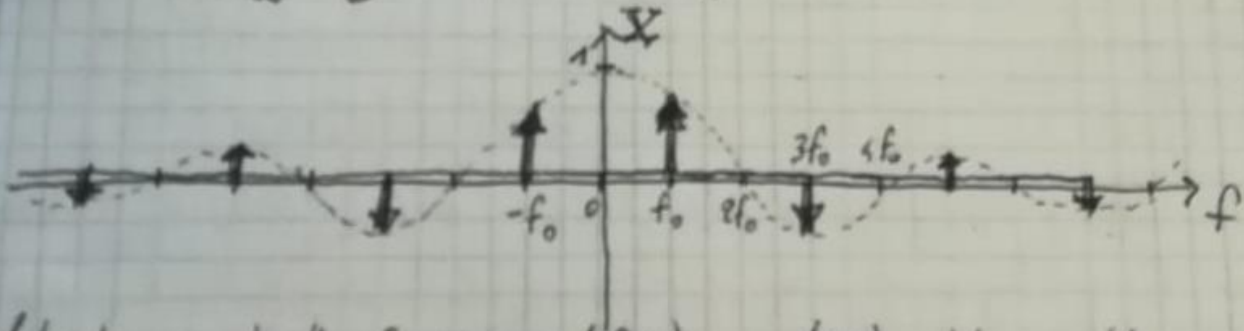
e la seconda espressione è utile quando, come nel nostro caso, è noto l'impulso base $x_0(t)$, di cui $X_0(f)$ è la Trasformata. Dunque, in base alle proprietà di Linearità e Cambiamento di scala della $\mathcal{F}$,

$$x_0(t) = 2\,\Pi\left(\frac{t}{T/2}\right) - \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_0(f) = \cancel{2}\,\frac{T}{\cancel{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2} f\right) - T \operatorname{sinc}(Tf)$$

$$X_k = \frac{1}{T} X_0\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\cancel{T}}{2}\frac{k}{\cancel{T}}\right) - \frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T} \sin\left(\cancel{T}\frac{k}{\cancel{T}}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) - \operatorname{sinc}(k) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } k = 0 \\ \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) & \text{per } k \neq 0 \end{cases} \qquad \left(\text{poiché } \operatorname{sinc}(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\right)$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) - \operatorname{sinc}(k)\right] \delta(f - kf_0)$$



(La linea a tratteggio è $\operatorname{sinc}\left(\frac{f}{2f_0}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2} f\right)$, utile per determinare le aree degli impulsi di Dirac, di cui ne costituisce l'inviluppo poiché in kf_0 vale $\operatorname{sinc}(k/2)$).

Si noti che $X(0) = 0$, dunque $x(t)$ ha area nulla e non ha "componente continua"; allo stesso modo, mancano anche tutte le "armoniche pari", ovvero sono nulle le aree X_k delle "Delta di Dirac" $\delta(f - kf_0)$ con k pari, presenti nello spettro.