Quesito A14 2/12/10
Una commissione di cinque persone viene formata scegliendone a caso i membri da un gruppo di cinque uomini e dieci donne. Si calcoli la probabilità che la commissione risulti formata da due uomini e tre donne.

5 UOMINI $\quad \mathcal{E} = \{2 \text{ UOMINI e } 3 \text{ DONNE}\}$

10 DONNE

$$P = \frac{\#\text{GRUPPI CON } 2\,U \cdot \#\text{GRUPPI CON } 3\,D}{\#\text{GRUPPI DA 5 PERSONE}} = \frac{10 \cdot 120}{3003} = 0,4$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 8}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 120$$

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5!\,10!} = \frac{\cancel{15}^{3} \cdot \cancel{14}^{7} \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot 11}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 3003$$

Quesito A83 24/1/14
Un gruppo è formato da dieci persone: quattro di Modena e sei di Parma. Una persona del gruppo, scelta a caso, scrive il nome della propria città. Si sceglie a caso una lettera della parola così scritta che risulta essere una vocale. Qual è la probabilità che la persona che ha scritto sia di Parma?

4 DI MODENA $\quad C\,\{\text{LETTERA È UNA VOCALE}\} \quad P\{P \mid C\}\,?$

6 " PARMA

$$P\{\text{RAGAZZO DI PARMA}\} = \frac{6}{10} \qquad M\{\text{RAGAZZO MODENA}\} = \frac{4}{10}$$

$$P(P \mid C) = \frac{P(C \mid P) \cdot P(P)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{\cancel{5}} \cdot \frac{6}{\cancel{10}}}{\frac{44}{\cancel{100}_{2}}} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11} = 0,545$$

$$P(C) = P(C \mid P) \cdot P(P) + P(C \mid M)\,P(M) = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{10} = \frac{44}{100}$$

Si hanno tre porte chiuse marcate A, B, C e una scatola con 5 chiavi apparentemente identiche, di cui due aprono la porta A, una apre la porta B e due aprono la porta C. Si vogliono aprire le porte A, B e C nell'ordine, scegliendo le chiavi a caso senza rimetterle nella scatola.
Si calcoli la probabilità di aprire le tre porte con un solo tentativo ciascuna (ossia con tre tentativi in totale).

2 APRONO A
1 " B
2 " C

$$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{60} = 0{,}033$$

Quesito A59 21/1/13
Dovete aprire una porta la cui unica chiave è in un gruppo di 60 chiavi suddivise in tre mazzi di 20 chiavi ciascuno, apparentemente identici.
Scegliete un mazzo a caso e iniziate a provare le chiavi in successione casuale escludendo via via quelle già provate.
Se le prime sei chiavi non aprono la porta qual è la probabilità che la chiave non sia nel mazzo scelto?

20
20 NE PRENDO UNO e PROVO 6 CHIAVI
20

$C = \{\text{CHIAVE NEL MAZZO}\}$

$\mathcal{E}_i = \{\text{CHIAVE } i \text{ NON APRE}\}$

$$P(\bar{C} \mid \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \dots \mathcal{E}_6) = ?$$

$E\{1^{\text{a}}\ 6\ X\}$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = \frac{2}{3} \qquad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(\bar{C} \mid E) = \frac{P(E \mid \bar{C}) \cdot P(\bar{C})}{P(E)} = \frac{2/3}{0{,}9} = 0{,}74$$

$$P(E) = P(E \mid C)\, P(C) + P(E \mid \bar{C})\, P(\bar{C}) = 0{,}7 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0{,}9$$

$$P(E \mid C) = \frac{\cancel{19}}{20} \cdot \frac{\cancel{18}}{\cancel{19}} \cdot \frac{\cancel{17}}{\cancel{18}} \cdot \frac{\cancel{16}}{\cancel{17}} \cdot \frac{\cancel{15}}{\cancel{16}} \cdot \frac{14}{\cancel{15}} = \frac{14}{20} = 0{,}7$$

Quesito A81 16/11/13
Marco e un gruppo di sette amici, in tutto quattro ragazze e quattro ragazzi, si incontrano per una cena. Il tavolo per la cena è tondo e i posti sono numerati. Il gruppo decide di assegnare i posti a caso estraendo ciascuno il numero del proprio posto. Si calcolino le seguenti probabilità:
a) PA: che Marco abbia ai lati due ragazzi;
b) PB: che Marco abbia ai lati un ragazzo e una ragazza;
c) PC: che Marco abbia ai lati due ragazze.

4M 4F

-1 $P(A) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \dfrac{\frac{3!}{2!}}{\frac{7!}{2!\,5!}} = \dfrac{\cancel{3}}{\frac{7 \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}}} = \dfrac{1}{7} = 0,143$

$P(B) = P(M\ SX, F\ DX) \cup P(M\ DX, F\ SX) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{24}{42} = 0,571$

Quesito A15 2/12/10
In un certo lotto di personal computer (PC) l'1% è difettoso. I PC vengono sottoposti ad un test che rivela i difetti nel 98% dei casi in cui difetti sono presenti e indica presenza di difetti nel 3% dei casi in cui il PC non è difettoso. Quanto vale la probabilità che un PC sia: a) difettoso se non passa il test (ossia se il test rivela difetti); b) non difettoso se passa il test (ossia se il test non rivela difetti)?
Nello svolgimento si utilizzino i seguenti simboli per i corrispondenti eventi: R = {Il test rivela difetti} e D = {Il PC è difettoso}.

$P(D) = 0,01$ $\quad P(D|R)?$ $\quad P(\bar{D}|\bar{R}) = ?$ $\quad P(R|D) = 0,98$ $\quad P(R|\bar{D}) = 0,03$

$P(\bar{R}|\bar{D}) = 0,97$

$P(D|R) = \dfrac{P(R|D)\,P(D)}{P(R)} = \dfrac{0,98 \cdot 0,01}{0,0395} = 0,248$

$P(R) = P(R|D) \cdot P(D) + P(R|\bar{D})\,P(\bar{D}) =$ $\qquad P(\bar{R}) = 0,9605$

$= 0,98 \cdot 0,01 + 0,03 \cdot 0,99 = 0,0395$

$P(\bar{D}|\bar{R}) = \dfrac{P(\bar{R}|\bar{D}) \cdot P(\bar{D})}{P(\bar{R})} = \dfrac{0,97 \cdot 0,99}{0,9605} = 0,999$

Quesito A36 13/2/12
Un'agenzia di viaggi porta comitive di turisti in visita prima a Roma e poi a Firenze.
Una comitiva si dichiara sufficientemente soddisfatta se trova bel tempo in almeno una delle due città. Sapendo che la probabilità che a Firenze si trovi bel tempo se a Roma si è trovato brutto tempo è 0,4 e che il 90% delle comitive si dichiarano sufficientemente soddisfatte, qual è la probabilità che una comitiva trovi bel tempo a Roma?
Si usino le seguenti definizioni di eventi: R ={Bel tempo a Roma}; F ={Bel tempo a Firenze};
C ={Comitiva sufficientemente soddisfatta}.

$P(F|\bar{R}) = 0,4$ $\quad P(C) = 0,9$ $\quad P(R) = ?$ $\quad P(\bar{F}|\bar{R}) = 0,6$ $\quad P(\bar{C}) = 0,1$

$$P(\overline{C}) = P(\overline{F}\,\overline{R})$$

$$P(\overline{F}|\overline{R}) = \frac{P(\overline{F}\,\overline{R})}{P(\overline{R})}$$

$$P(\overline{F}\,\overline{R}) = P(\overline{C})$$

$$P(\overline{F}\,\overline{R}) = P(\overline{F}|\overline{R}) \cdot P(\overline{R})$$

$$\left.\right\} P(\overline{R}) = \frac{P(\overline{C})}{P(\overline{F}|\overline{R})} = 0{,}16$$

$$P(R) = 1 - P(\overline{R}) = 0{,}84$$

Quesito A103 16/02/15

Una casa discografica conferma il contratto ai giovani cantanti che ottengono un successo di vendite con almeno uno dei primi due dischi incisi.

Si considerino i seguenti eventi: A={Il primo disco ha successo}, B={Il secondo disco ha successo}, C={Il contratto vene confermato}.

Sapendo che se il primo disco ha successo la probabilità che anche il secondo abbia successo è 0,7 e che se il primo non ha successo la probabilità che il secondo abbia successo è uguale a quella di successo del primo, ossia P(A), sapendo inoltre che viene confermato solo il 30% dei contratti, si trovi la probabilità che il primo disco abbia successo (ossia il valore di P(A)).

$P(B|A) = 0{,}7$ $\quad P(C) = 0{,}3$ $\quad P(A) = ?$

$P(B|\overline{A}) = P(A)$ $\quad P(\overline{C}) = 0{,}7$ $\quad P(\overline{B}|A) = 0{,}3$ $\quad P(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - P(A)$

Quesito A119 19/11/16
Il sig. Rossi chiede a un amico di innaffiare una sua pianta mentre è in vacanza. Se la pianta non sarà innaffiata probabilità di trovarla morta è l'80%. Trattandosi di una pianta delicata, anche se sarà innaffiata la probabilità di trovarla morta è il 15%. La probabilità che l'amico ricordi di innaffiare la pianta è il 90%.
a) Qual è la probabilità che il sig. Rossi trovi la pianta viva al suo ritorno?
b) Se trova la pianta morta, qual è la probabilità che l'amico abbia dimenticato di innaffiarla?

I {PIANTA INNAFFIATA} V {PIANTA VIVA}

$P(\overline{V} \mid \overline{I}) = 0{,}8 \quad P(\overline{V} \mid I) = 0{,}15 \quad P(I) = 0{,}9$ – $P(V) = ?$

$P(V \mid \overline{I}) = 0{,}2 \quad P(V \mid I) = 0{,}85 \quad P(\overline{I}) = 0{,}1$ – $P(\overline{I} \mid \overline{V}) = ?$

$$P(V) = P(V \mid I) \cdot P(I) + P(V \mid \overline{I}) \cdot P(\overline{I}) = 0{,}85 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}765 + 0{,}02 = 0{,}785$$

$P(\overline{V}) = 0{,}215$

$$P(\overline{I} \mid \overline{V}) = \frac{P(\overline{V} \mid \overline{I}) \cdot P(\overline{I})}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{0{,}215} = 0{,}372$$

FINE LOTTO 1
LOTTO 2

Quesito A98 22/11/2014
Certi pezzi meccanici subiscono due lavorazioni indipendenti da parte di due macchine distinte A e B. La macchia A introduce difetti nel 5% dei pezzi lavorati.
a) Sapendo che risulta difettoso il 7% dei pezzi finali (ossia che hanno subito entrambe le lavorazioni) si calcoli il valore della probabilità P(DB) che la macchina B introduca difetti.
b) Se un pezzo finale scelto a caso risulta difettoso, si calcoli la probabilità che esso abbia subito difetti da entrambe le macchine.
Per lo svolgimento si usino i seguenti eventi:
DA = { La macchina A ha introdotto un difetto }
DB = { La macchina B ha introdotto un difetto }
D = { Il pezzo finale è difettoso } $= 0{,}07$
{Suggerimento: per prima cosa si esprima D utilizzando DA e DB }

$P(A) = 0{,}05 \quad P(\overline{A}) = 0{,}95$

$P(\overline{D}) = 0{,}93$ – $P(B) = ?$

– $P(AB \mid D) = ?$

$$P(D) = P(D \mid A) \cdot P(A) + P(D \mid B) \cdot P(B) = 1 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = P(D) - 0{,}05 = 0{,}07 - 0{,}05 = 0{,}02$$

$$P(AB|D)=\frac{P(D|AB)\cdot P(AB)}{P(D)}=1\cdot\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(D)}=\frac{0{,}05\cdot 0{,}02}{0{,}07}=0{,}014$$

Quesito A53 23/11/12
Il sig. Rossi teme di avere una certa malattia, pertanto si sottopone a un test diagnostico che ha le seguenti caratteristiche:
P(R | M) = 10–2 (Prob. di falso negativo) P(R | M) = 6·10–2 (Prob. di falso positivo)
dove R ed M sono i seguenti eventi:
R = {Il test rivela presenza di malattia} (ossia il test è positivo)
M = {La malattia è presente}.
Il test del sig. Rossi risulta positivo, ma il medico curante lo rassicura: “Sì, il test è positivo, ma nonostante ciò lei ha l’80% di probabilità di essere sano”.
2a) Si calcoli la probabilità che un individuo scelto a caso fra la popolazione sia affetto dalla malattia (ovvero l’incidenza della malattia sulla popolazione).
[Facoltativo: alla luce del risultato si commenti l’affermazione del medico, apparentemente paradossale.]
2b) Per sicurezza il test viene ripetuto (in modo indipendente) e il risultato è nuovamente positivo. Qual è la probabilità che il sig. Rossi sia effettivamente malato dato il doppio test positivo?

R {TEST POSITIVO} $\quad P(\overline{M}|R)=0{,}8 \quad P(M)=?$

M {MALATTIA V} $\quad P(M|R)=0{,}2 \quad P(M|R_1R_2)=?$

$P(\overline{R}|M)=10^{-2} \quad P(R|M)=0{,}99$

$P(R|\overline{M})=6\cdot 10^{-2} \quad P(\overline{R}|\overline{M})=0{,}94$

$$P(M|R)=\frac{P(R|M)\cdot P(M)?}{P(R)} \implies$$

$$P(R)=P(R|M)P(M)+P(R|\overline{M})P(\overline{M})=P(R|M)\cdot P(M)+P(R|\overline{M})\cdot[1-P(M)]$$

$$\implies 0{,}2=\frac{0{,}99\cdot P(M)}{0{,}99\cdot P(M)+0{,}06\cdot[1-P(M)]} \implies 0{,}2[0{,}99P(M)+0{,}06-0{,}06P(M)]=0{,}99P(M)$$

$$\implies P(M)[0{,}99-0{,}198+0{,}012]=0{,}012 \implies P(M)=\frac{0{,}012}{0{,}804}=0{,}0149$$

$$P(M|R_1R_2)=\frac{P(R_1R_2|M)\cdot P(M)}{P(R_1R_2)}=\frac{0{,}99^2\cdot 0{,}0149}{0{,}0181}=0{,}806$$

$$P(R_1R_2)=P(R_1R_2|M)\cdot P(M)+P(R_1R_2|\bar{M})\cdot P(\bar{M})$$

$$=0{,}99^2\cdot 0{,}0149+0{,}06^2\cdot 0{,}9851=0{,}0181$$

LOTTO 3

Quesito A8 1/7/11

Si lanciano contemporaneamente e indipendentemente un dado e quattro monete.

Si calcoli la probabilità che il numero di "teste" ottenute con le monete sia uguale al punteggio ottenuto col dado.

$$P=\frac{1}{6}\cdot\begin{smallmatrix}1\text{ SUCCESSO}\\ \text{SU } 4\end{smallmatrix}+\frac{1}{6}\cdot\begin{smallmatrix}2\text{ SUCC}\\ \text{SU } 4\end{smallmatrix}+\frac{1}{6}\cdot\begin{smallmatrix}3\text{ SUCC}\\ \text{SU } 4\end{smallmatrix}+\frac{1}{6}\cdot\begin{smallmatrix}4\text{ SUCC}\\ \text{SU } 4\end{smallmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\binom{4}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{4}{2}\frac{1}{2}^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{4}{3}\frac{1}{2}^3\frac{1}{2}+\binom{4}{4}\frac{1}{2}^4\right]$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\left[\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2\cdot 2}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{4!}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left[4+\frac{4\cdot 3}{2}+4+1\right]=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 15=0{,}15$$

Quesito A22 18/2/11

Un tiratore dispone di due fucili apparentemente identici ma di diversa precisione: la probabilità di centrare un bersaglio col fucile A è PA = 0,8 e col fucile B è PB = 0,6.

Il tiratore sceglie a caso uno dei due fucili e spara 10 colpi ottenendo 7 centri.

Volendo continuare a sparare (cercando di fare più centri possibile) gli conviene cambiare fucile oppure no?

$P_A=0{,}8$ $\quad C\ \{7\text{ CENTRI SU } 10\}$ $\quad P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$

$P_B=0{,}6$ $\quad P(A|C)=?$ $\quad P(B|C)=?$

$$P(A|C)=\frac{P(C|A)\cdot P(A)}{P(C)}=\frac{0{,}201\cdot 0{,}5}{0{,}2075}=0{,}484$$

$$\wedge$$

$$P(B|C)=\frac{P(C|B)\cdot P(B)}{P(C)}=\frac{0{,}214\cdot 0{,}5}{0{,}2075}=0{,}515$$

È PIÙ PROBABILE CHE STIA SPARANDO COL FUCILE B

QUINDI $\Rightarrow$ MEGLIO CAMBIARE

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)\cdot P(B) = 0{,}201\cdot\frac{1}{2} + 0{,}214\cdot\frac{1}{2} = 0{,}2075$$

$$P(C|A) = \binom{10}{7} 0{,}8^7 (0{,}2)^3 = \frac{10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} \cdot 0{,}8^7 (0{,}2)^3 = 0{,}201$$

$$P(C|B) = \binom{10}{7} 0{,}6^7 (0{,}4)^3 = 120 \cdot 0{,}6^7 (0{,}4)^3 = 0{,}214$$

Quesito A25 18/2/03
Si supponga che in un'elezione con due candidati il 65% degli elettori sia favorevole al candidato A e il 35% al candidato B. Per eseguire un semplice sondaggio si chiede a 7 elettori scelti a caso di manifestare la loro preferenza.
Quanto vale la probabilità che la maggioranza degli intervistati sia favorevole a B (ossia che il sondaggio sia fallace)?

$$P = \binom{7}{4} 0{,}35^4 (0{,}65)^3 + \binom{7}{5} 0{,}35^5 (0{,}65)^2 + \binom{7}{6} 0{,}35^6 (0{,}65) +$$

$$+ \binom{7}{7} 0{,}35^7 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} 0{,}35^4 (0{,}65)^3 + \frac{7\cdot 6}{2} 0{,}35^5 (0{,}65)^2 +$$

$$+ 7\, 0{,}35^6 (0{,}65) + 0{,}35^7 =$$

Quesito A32 16/1/12
Le probabilità che un calciatore di serie A e un calciatore dilettante segnino un gol tirando un calcio di rigore contro un certo portiere siano rispettivamente pA = 0,8 e pD = 0,5.
Un calciatore scelto a caso da un gruppo formato da 2 calciatori di serie A e 8 dilettanti tira 8 calci di rigore e segna 6 gol.
Qual è la probabilità che il calciatore fosse di serie A e quale che fosse dilettante?

$P(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2$ $\quad P(D) = 0{,}8$ $\quad C\{6 \text{ GOL SU } 8\}$ $\quad P(A|C) = ?$

$P(D|C) = ?$

$\Downarrow$

$1 - P(A|C) = 0{,}599$

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)\cdot P(A)}{P(C)} = \frac{0{,}293\cdot 0{,}2}{0{,}1458} = 0{,}401$$

$$P(C|A) = \binom{8}{6} p_A^6 (1-p_A)^2 = \frac{8\cdot 7}{2} \cdots = 0{,}293$$

$$P(C|D) = \binom{8}{6} p_B^6 (1-p_B)^2 = 0{,}109$$

$$P(C) = P(C|A)\,P(A) + P(C|D)\cdot P(D) = 0{,}293\cdot 0{,}2 + 0{,}109\cdot 0{,}8 = 0{,}1458$$

Quesito A111 21/11/15

Un'azienda ha due impianti, detti A e B, con cui produce componenti di un certo tipo. Ciascun impianto produce la metà del numero totale di componenti, ma il 5% dei componenti prodotti dall'impianto A risulta difettoso mentre risulta difettoso l' 1% di quelli prodotti dall'impianto B. Si sceglie a caso un lotto di 60 componenti tutti prodotti da uno dei due impianti scelto a caso e si trova che 2 di essi sono difettosi.

Qual è la probabilità che il lotto scelto provenga dall'impianto A? E quale dall'impianto B?

$C\{2 \text{ difettosi su } 60\}$ $\qquad P(A|C)=?\qquad P(B|C)=?\qquad p_A=0{,}05$

$P(A)=P(B)=0{,}5 \qquad p_B=0{,}01$

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)\cdot P(A)}{P(C)} = \frac{0{,}225\cdot 0{,}5}{0{,}1615} = 0{,}696$$

$$P(C|A) = \binom{60}{2} p_A^2 (1-p_A)^{58} = \frac{60\cdot 59}{2}\cdot 0{,}05^2\cdot (0{,}95)^{58} = 0{,}225$$

$$P(C|B) = \binom{60}{2} p_B^2 (1-p_B)^{58} = \frac{60\cdot 59}{2}\cdot 0{,}01^2\cdot (0{,}99)^{58} = 0{,}098$$

$$P(C) = P(C|A)\cdot P(A) + P(C|B)\cdot P(B) = [0{,}225 + 0{,}098]\cdot 0{,}5 = 0{,}1615$$

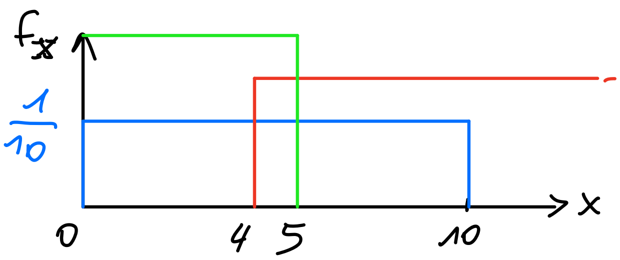
$$P(B|C) = 1 - P(A|C) = 0{,}303$$

LOTTO 4

Quesito A4 17/6/11

Un bastoncino lungo 10 cm viene spezzato in due parti scegliendo a caso il punto di rottura.

- Quanto vale la probabilità che il pezzo di sinistra sia più lungo di 4 cm e quello di destra più lungo di 5 cm?
- I due eventi sono indipendenti?



X punto in cui spezzo

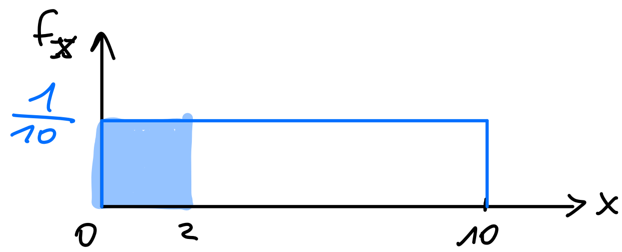
$$P\{\underline{X>4},\ \underline{X<5}\} = P\{4<X<5\}$$

$$P = \int_4^5 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10} \qquad P\{X>4\} = \frac{6}{10} \qquad P\{X<5\} = \frac{5}{10}$$

$$\text{INDIPENDENTI SE } P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{10} \neq \frac{1}{10}$$

I DUE EVENTI SONO DIPENDENTI

Quesito A11 13/9/11
Si piazzano a caso e in modo indipendente cinque punti nell'intervallo [0, 10] dell'asse reale. Si calcoli la probabilità che nell'intervallo [0,2] cadano:
a) due soli punti;
b) almeno due punti.



$$p = P\{0 < X < 2\} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$P_A\{2 \text{ PUNTI SU } 5\} = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048$$

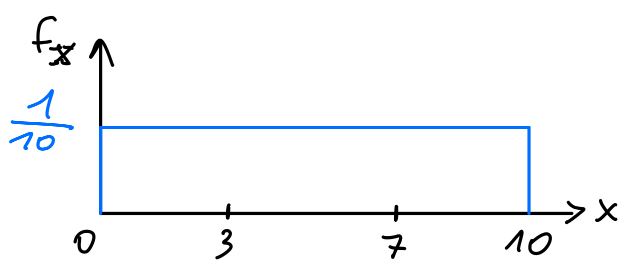
$$P_B = \{\text{ALMENO } 2 \text{ SU } 5\} = 1 - \binom{5}{0} 0{,}8^5 - \binom{5}{1} 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}26272$$

$$= 1 - 0{,}8^5 - 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 1 - 0{,}32768 - 0{,}4096 =$$

Quesito A24
Si hanno 5 bastoncini lunghi 10 cm. Su ciascuno di essi si sceglie (in modo indipendente) un punto a caso e si spezza il bastoncino in quel punto.
Si calcoli la probabilità che due soli dei 10 pezzi risultanti abbiano lunghezza minore di 3 cm.

$$P = \{X < 3 \cup X > 7\}$$

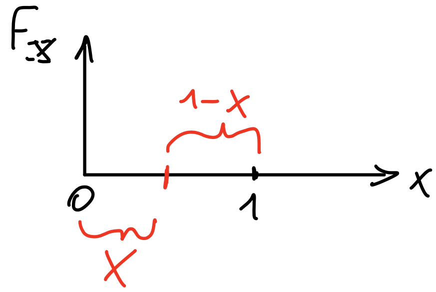
$$= \int_0^3 \frac{1}{10}\,dx + \int_7^{10} \frac{1}{10}\,dx = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = 0{,}6$$



$$P\{2 \text{ SUCCESSI SU } 5\} = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}2304$$

Quesito A90 21/07/14
Un'azienda ha due impianti, A e B, che producono motori dello stesso tipo. L'impianto A produce il 3% di motori difettosi e l'impianto B l' 1%. Si sceglie a caso un lotto di 100 motori tutti prodotti dallo stesso impianto e si trova che 3 di essi sono difettosi.
Qual è la probabilità che il lotto provenga dall'impianto A? E quale dall'impianto B?

Quesito A100 22/11/14
Sia X (variabile aleatoria) l'ascissa di un punto scelto a caso nell'intervallo [0,1].
Si calcoli la probabilità (in funzione di a) che entrambe le parti in cui risulta così suddiviso l'intervallo siano di lunghezza minore di a (con 0 < a < 1).
Si trovi, se esiste, un valore di a per cui gli eventi E1 = {X < a } e E2 = { X > (1 – a)} siano indipendenti.



PER $a < \frac{1}{2}$ $\quad P = 0$

PER $\frac{1}{2} < a < 1$ $\quad P = \int_{1-a}^{a} dx = a - 1 + a = 2a - 1$

$$P(E_1 E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) \qquad P(E_1) = \int_0^a dx = a$$

$$2a - 1 = a \cdot a \qquad P(E_2) = \int_{1-a}^{1} dx = 1 - 1 + a = a$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$$

$a = 1$ UNICO VALORE MA È AL DI FUORI DEGLI ESTREMI AMMESSI

Quesito A2 18/2/11 LOTTO 5
Un componente in garanzia viene sostituito gratuitamente se si guasta entro un anno dall'acquisto. Se il tempo di guasto del componente è una variabile aleatoria esponenziale negativa con valore medio 5 anni (ovvero di parametro λ = 1/5) , quant'è la probabilità che su un lotto di 20 componenti ne debbano essere sostituiti in un anno 2 o più?

$\lambda = \frac{1}{5}$ $\quad A\{\text{COMPONENTE SI GUASTA ENTRO UN ANNO}\}$ $\quad P\{\text{2 O PIÙ SU 20 SOSTITUITI}\}$

$$P(A) = -\int_0^1 -\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^1 = 1 - e^{-\lambda} = 0{,}181 \qquad P(\bar{A}) = 0{,}818$$

$$P = 1 - P\{0 \text{ GUASTI}\} - P\{1 \text{ GUASTO}\} = 1 - 0{,}818^{20} - 20 \cdot 0{,}181 \cdot 0{,}818^{19} =$$

$$= 1 - 0{,}017 - 0{,}079 = 0{,}9$$

Quesito A20
La vita di un certo tipo di lampade è rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità fX (x) = λe–λx u(x). Due di tali lampade vengono accese contemporaneamente in una stanza. Si calcoli la probabilità che: a) all'istante generico t0 le lampade siano entrambe accese; b) all'istante t0 siano entrambe spente; c) le lampade siano entrambe accese osservando che all'istante t0 nella stanza c'è luce.

$$P(t_0 \text{ ACCESA}) = P\{X > t_0\} = -\int_{t_0}^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{t_0}^{+\infty} = e^{-\lambda t_0}$$

$$P(A) = e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t_0} = e^{-2\lambda t_0}$$

$$P(t_0 \text{ SPENTA}) = P\{X \leq t_0\} = \int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{t_0} = 1 - e^{-\lambda t_0}$$

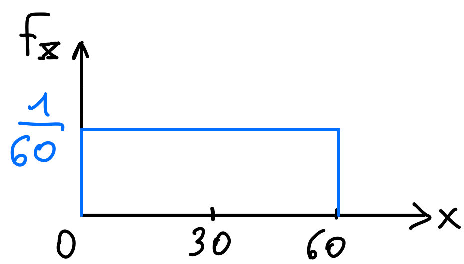
$$P(B) = \left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)^2 = 1 + e^{-2\lambda t_0} - 2e^{-\lambda t_0}$$

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} \qquad C\left\{\begin{matrix}\text{ALMENO 1 È} \\ \text{ACCESA}\end{matrix}\right\}$$

$$P(C) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)^2 = \cancel{1} - \left(\cancel{1} + e^{-2\lambda t_0} - 2e^{-\lambda t_0}\right) = 2e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0}$$

$$P(A|C) = \frac{e^{-2\lambda t_0}}{2e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0}} = \frac{\cancel{e^{-\lambda t_0}} \cdot e^{-\lambda t_0}}{\cancel{e^{-\lambda t_0}}\left(2 - e^{-\lambda t_0}\right)} = \frac{e^{-\lambda t_0}}{2 - e^{-\lambda t_0}}$$

Quesito A6 17/6/11
Il sig. Rossi ha l'abitudine di entrare ogni giorno nel bar B1 o nel bar B2 (scelto a caso) in un istante a caso fra le 10 e le 11 e di intrattenervisi esattamente 10 min per prendere un caffè. Un giorno il sig. Bianchi entra nel bar B1 alle 10:30 e osserva che il sig. Rossi non c'è.
- E' più probabile che il sig. Rossi sia già uscito o che non sia mai entrato? (Si assuma indipendenza fra gli eventi {Scelta del bar} e {Istante di entrata del sig. Rossi}).



X ISTANTE IN CUI ENTRA

$$P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5$$

$$P(U) = \{\text{GIÀ USCITO DA } B_1\}$$

$P(M) = \{\text{MAI ENTRATO PRIMA 10:30 OR } B_1\}$ $\quad P(U \mid NC) = ?$

$P(NC) = \{\text{10:30 NON C'È IN } B_1\}$ $\quad P(M \mid NC) = ?$

$$P(U \mid NC) = \frac{P(NC \mid U) \cdot P(U)}{P(NC)} \qquad P(M \mid NC) = \frac{P(NC \mid M) \cdot P(M)}{P(NC)}$$

$$P(U) = P(U \mid B_1)\, P(B_1) + P(U \mid B_2) \cdot P(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 0{,}2$$

$$P(U \mid B_1) = P\{X \le 20\} = \int_0^{20} \frac{1}{60}\, dx = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

$$P(M) = P(M \mid B_1)\, P(B_1) + P(M \mid B_2)\, P(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$P(M \mid B_1) = P\{X > 30\} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

$$P(NC) = P(NC \mid B_1)\, P(B_1) + P(NC \mid B_2)\, P(B_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{12} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

$$P(NC \mid B_1) = P\{X \le 20 \cup X > 30\} = \frac{20}{60} + \frac{30}{60} = \frac{5}{6}$$

$$P(U \mid NC) = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{11} = \frac{2}{11}$$

$$P(M \mid NC) = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{11} = \frac{9}{11}$$

È PIÙ PROBABILE CHE NON SIA MAI ENTRATO

Quesito A18 2/12/10
La durata di una conversazione telefonica è una v.a. con funzione di distribuzione
FX (x) = (1– e–λx) u(x). Quanto vale la probabilità che una telefonata in atto all'istante t0 termini entro i successivi t secondi?

$$P\{X \le t\} = F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$ SICCOME NON HA MEMORIA

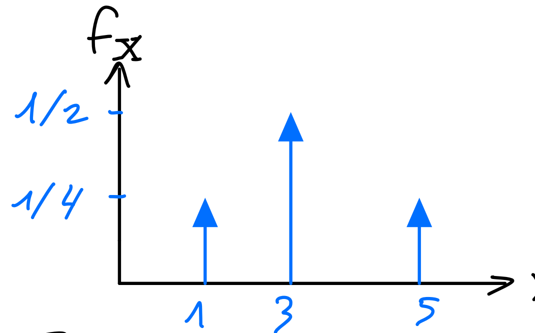
OPPURE

$$P\{X \le t_0+t \mid X > t_0\} = \frac{P\{t_0 < X \le t_0+t\}}{P\{X > t_0\}} = \frac{F_X(t_0+t) - F_X(t_0)}{1 - F_X(t_0)} =$$

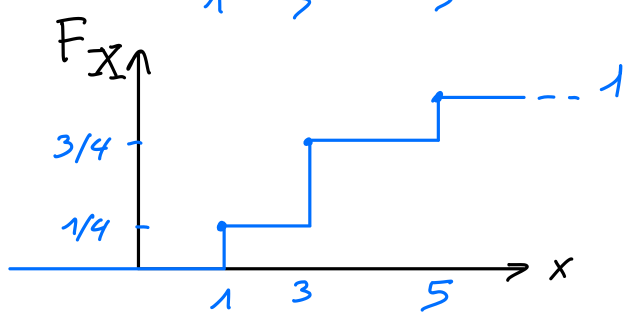
$$= \frac{\cancel{1} - e^{-\lambda(t_0+t)} \cancel{- 1} + e^{-\lambda t_0}}{\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\lambda t_0}} = \frac{\cancel{e^{-\lambda t_0}}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{\cancel{e^{-\lambda t_0}}} = 1 - e^{-\lambda t} = F_X(t)$$

Quesito A27 15/5/00
Sulle facce di un disco di colore rosso sono impressi i numeri 1 e 3. Sulle facce di un altro disco di colore bianco (ma per il resto identico al primo) sono impressi i numeri 3 e 5. Si sceglie un disco a caso e lo si lancia come una moneta. Sia X la v.a. {Numero che si legge sul disco lanciato}. Si consideri l'evento A = {Si è scelto il disco rosso}.
Si trovino la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della v.a. X e le stesse condizionate dall'evento A (o dato l'evento A), ossia FX (x | A) e fX (x | A).

$$f_X(x) = \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x-3) + \frac{1}{4}\delta(x-5)$$

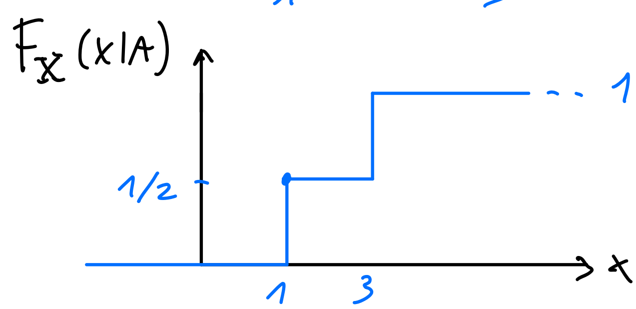


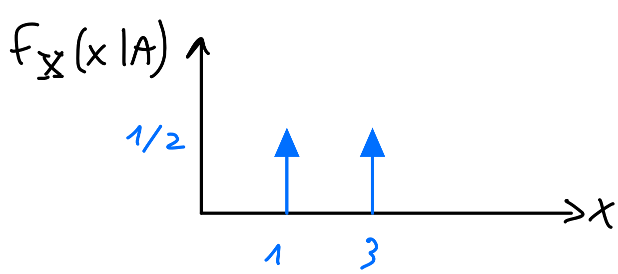
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 1/4 & 1 \le x < 3 \\ 3/4 & 3 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$$



$$f_X(x \mid A) = \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x-3)$$

$$F_X(x \mid A) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 1/2 & 1 \le x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$





Quesito A28 *22/5/00*

Una variabile casuale X ha densità di probabilità $f_X(x)$ come in Figura A28.
Si dica quanto vale a.
Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ tracciandone un grafico accurato.
Si dica quanto vale $F_X(12)$.

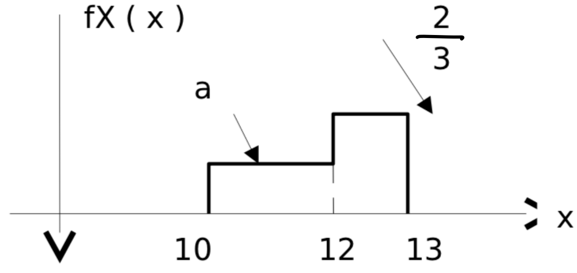


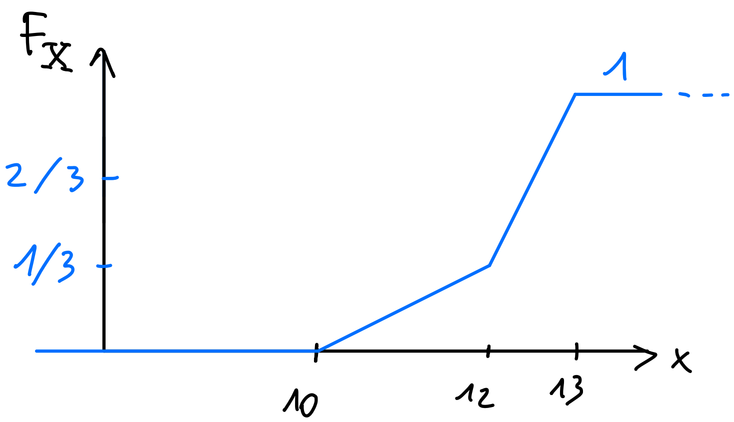
Figura A28

$$\int_{10}^{12} a\,dx + \int_{12}^{13} \frac{2}{3}\,dx = 1 \Rightarrow 2a + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow 2a = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ \int_{10}^{x} \frac{1}{6}dx = \frac{1}{6}(x-10) & 10 \le X < 12 \\ \int_{10}^{12} \frac{1}{6}dx + \int_{12}^{x} \frac{2}{3}dx = \frac{2}{6} + \frac{2}{3}(x-12) & 12 \le X < 13 \\ 1 & X \ge 13 \end{cases}$$



Quesito A39 13/02/12
Dato un gruppo di n = 100 persone formato da italiani e stranieri si scelgono a caso due persone. Sapendo che la probabilità che una sola di esse sia straniera è p ≈ 0,18 si individui una possibile composizione del gruppo (numero di italiani nI e numero di stranieri nS).

$p = 0{,}18 = \{1\ S \text{ e } 1\ i \text{ PRENDENDO 2 SU 100}\}$

OVVERO $P\{1 \text{ SU 2 STRANIERO}\} = 0{,}18$

$$\binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 = 2 \cdot p(1-p) = 0{,}18 \Rightarrow 2p - 2p^2 = 0{,}18$$

$$\Rightarrow 2p^2 - 2p + 0{,}18 = 0 \qquad p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-0{,}36}}{2} = \begin{cases} 0{,}9 \\ 0{,}1 \end{cases}$$

SICCOME P{1 SU 2 STRANIERO} = P{1 SU 2 ITALIANO}

POSSO AVERE 2 SOLUZIONI

$$\left.\begin{aligned} NS &= 0{,}9 \cdot 100 = 90 \\ NI &= 0{,}1 \cdot 100 = 10 \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} NS &= 0{,}1 \cdot 100 = 10 \\ NI &= 0{,}9 \cdot 100 = 90 \end{aligned}\right.$$

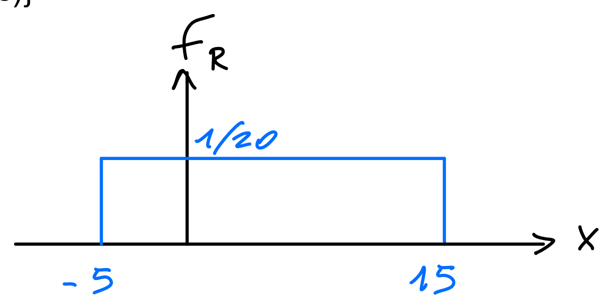
Quesito A77 rid 16/11/13

Una commissione di n membri è convocata per le ore 10:00.

I partecipanti arrivano indipendentemente con un ritardo che è una v.a R avente densità fR(x) uniforme fra i valori a = –5 e b = 15 minuti, uguale per tutti (Nota: ritardo negativo = anticipo). La riunione ha inizio non appena arriva l'ultimo membro.

a) Si trovi la funzione di distribuzione FX(x) e la densità di probabilità fX(x) della v.a. X = {Ritardo di inizio della riunione (rispetto alle ore 10:00)}

b) Si traccino i grafici di FX(x) e di fX(x) nel caso n = 2.



Quesito A34 16/1/12
Un satellite artificiale deve svolgere una missione di osservazione della Terra di durata T = 6 mesi. Se l'apparecchiatura di osservazione ha una vita rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità fX (x) = λe−λx u(x), quale deve essere il valore di λ (espresso con l'appropriata unità di misura) necessario affinché la probabilità che l'apparecchiatura funzioni almeno per tutta la durata della missione sia P = 0,9 ? Qual è il corrispondente valor medio della vita dell'apparecchiatura, E{X}? La missione viene effettuata con un'apparecchiatura avente proprio il valore di λ trovato sopra, ma purtroppo al termine della missione l'apparecchiatura risulta non funzionante: qual è la probabilità che abbia funzionato per almeno T1 = 5 mesi ?

$$P = \{X > 6 \text{ mesi}\} = \int_6^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_6^{+\infty} = e^{-6\lambda} = 0,9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\lambda = \ln 0,9 \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,9}{6} = 0,017 \, [\text{mesi}^{-1}]$$

$$\eta_X = \frac{1}{\lambda} = 58,82 \, [\text{mesi}]$$

$$P(X > 5 \mid X < 6) = ?$$

$$P(5 < X < 6) = \int_5^6 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_5^6 = e^{-\lambda 5} - e^{-\lambda 6} = 0,918 - 0,903 = 0,014$$

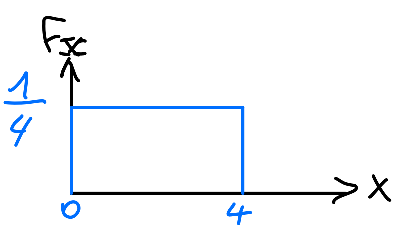
$$P(X > 5 \mid X < 6) = \frac{P(5 < X < 6)}{P(X < 6)} = \frac{0,014}{1 - 0,9} = 0,14$$

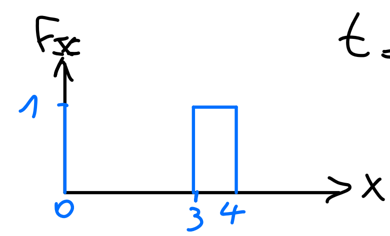
Quesito A63 13/02/13
a) Sia X una generica v.a con funzione di distribuzione FX (x). Fissato un generico numero reale t si trovi l'espressione analitica della funzione di distribuzione condizionata FX (x | X > t) esprimendola utilizzando la funzione FX (x).
b) Successivamente si applichi quanto trovato al caso in cui la v.a. X sia uniformemente distribuita nell'intervallo 0 < x < 4, e sia: t = 3. Si traccino anche i grafici di FX (x) e di FX (x | X > t).

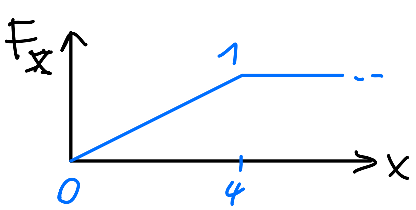
$$F_X(x \mid X > t) = \frac{F_X(x) - F_X(t)}{1 - F_X(t)}$$

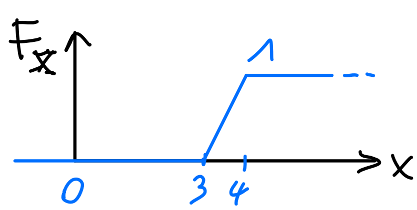
$$X \sim \mathcal{U}[(0,4)]$$

$$t = 3$$









Quesito A54 23/11/12

Un certo giorno voi entrate nella vostra banca all'istante t2 e trovate che allo sportello c'è già un cliente entrato ad un istante incognito t1 < t2. Sapendo che la v.a. X = {Tempo di permanenza allo sportello di un generico cliente} è di tipo esponenziale negativo con valor medio ηX = 5 minuti, qual è la probabilità che dobbiate attendere più di 5 minuti prima che sia il vostro turno?
{Si troverà che tale probabilità non dipende dai valori di t1 e t2}.

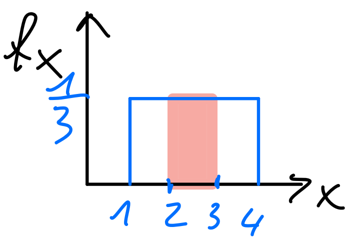
$$\eta_X = 5 \,[\text{minuti}]$$

$$P(X > 5) = \int_5^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_5^{+\infty} = e^{-\lambda 5} = 0,367$$

$$\eta_X = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\eta_X} = 0,2$$

Quesito A30 11/11/11

Un certo tipo di sfere ha diametro che è una variabile aleatoria D uniforme fra 1 e 4 cm.
Avete bisogno di tre sfere di diametro compreso fra 2 e 3 cm.
- Qual è la probabilità che dobbiate misurare almeno 10 sfere per trovare le tre desiderate?
- Definita la v.a. N = {Numero di sfere da misurare per ottenere le tre desiderate}, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N, ossia la probabilità P{N = n} per ogni n, e se ne tracci un grafico accurato per n < 5. (Alternativamente si tracci un grafico della funzione di distribuzione (CDF) o della densità di probabilità (PDF) della variabile N vista come continua).



$$P\{2 < X < 3\} = \int_2^3 \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}$$

$$P\{0 \text{ su } 9\} \cup P\{1 \text{ su } 9\} \cup P\{2 \text{ su } 9\}$$

$$\binom{9}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{9}{1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{9}{2}\frac{1}{3}^2\left(\frac{2}{3}\right)^7 =$$

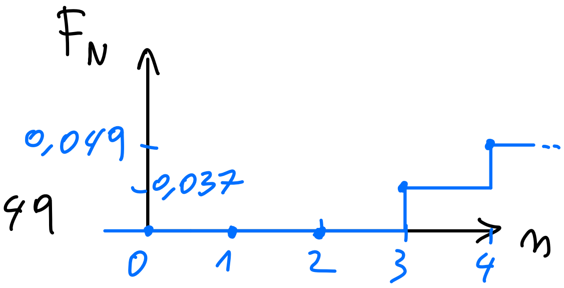
$$= \frac{2^9}{3} + 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 + \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{1}{3}^2 \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0,026 + 0,117 + 0,234$$

$$= 0,377$$

$$P\{N=0\} = P\{N=1\} = P\{N=2\} = 0$$

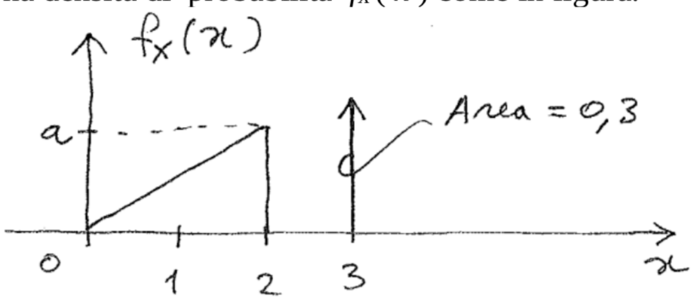
$$P\{N=3\} = \binom{3}{3}\frac{1}{3}^3 = \frac{1}{27} = 0{,}037$$

$$P\{N=4\} = \binom{4}{3}\frac{1}{3}^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{3}^3 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}049$$



Quesito A112bis

Una variabile casuale X ha densità di probabilità $f_X(x)$ come in figura.



a) Si trovi il valore di a.
b) Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ e se ne tracci un grafico.
c) Si trovi il valor medio di X.

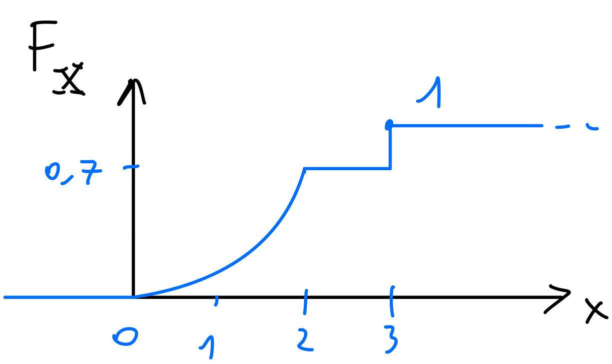
$$X_2 = 2 \Rightarrow Y_2 = a$$
$$x_1 = 0 \Rightarrow Y_1 = 0$$

$$\Delta = 2 \cdot \frac{a}{2} = 0{,}7 \Rightarrow a = 0{,}7$$

$$\frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow \frac{Y}{a - Y} = \frac{x}{2 - x} \Rightarrow 2Y - xY = ax - xY \Rightarrow Y(2 - \cancel{x} + \cancel{x}) = ax$$

$$\Rightarrow Y = \frac{a}{2}x$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \begin{cases} \int_0^x \frac{a}{2} u\,du = \frac{a}{2}\frac{x^2}{2} & x \in [0,2] \\ 0{,}7 & x \in [2,3) \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

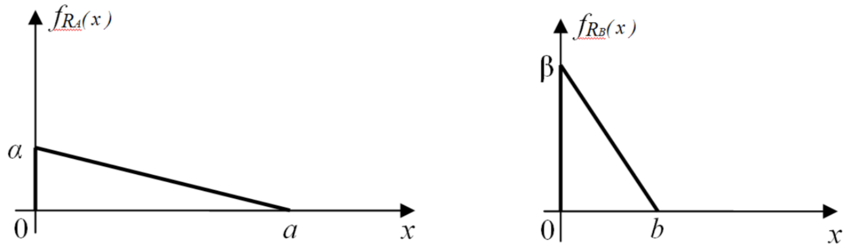


$$\eta_X = \int_0^2 \frac{a}{2} x^2\,dx + 3 \cdot 0{,}3 = \frac{a}{2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + 0{,}9 =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{8}{3} + 0{,}9 = 1{,}83$$

Quesito A31 *11/11/11*

Una ditta di spedizioni recapita quotidianamente un plico alla vostra ditta. Gli addetti alla consegna sono il sig. *A* e il sig. *B* che si alternano casualmente e indipendentemente ma con probabilità diverse $p_A = P(A)$ e $p_B = P(B)$. La consegna dovrebbe avvenire alle ore 10.00 ma gli addetti si presentano con un ritardo che per ciascuno è una v.a. R_A e R_B, rispettivamente, con densità di probabilità come in figura.



- Si trovi il valor medio delle v.a. R_A, R_B (ritardi dei rispettivi addetti) e della v.a. R = {Ritardo di consegna in un giorno qualunque}.
- Un certo giorno vi avvertono che il corriere è appena arrivato e voi valutate che in quel momento le probabilità che l'addetto arrivato sia *A* e quella che l'addetto sia *B* sono uguali: che ore sono? (Si esprima tale ora trovando il ritardo *r* e sommandolo alle ore 10.00).
- *Successivamente* allo svolgimento del punto precedente si trovi il valore numerico di *r* (in minuti e decimali) sostituendo i seguenti valori nell'espressione trovata: $a = 25$ min, $b = 15$ min e i valori di p_A e p_B ottenuti sapendo che p_B è il doppio di p_A (ossia assumendo che l'addetto B si presenti con probabilità doppia rispetto ad A);
- Si trovi la densità di probabilità $f_R(x)$ della v.a. *R*. e se ne tracci un grafico accurato di con i dati numerici sopra trovati (si ricavino anche i necessari valori di α e β (vedi figura sopra).

$$a \cdot \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{a} \qquad b \cdot \frac{\beta}{2} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{2}{b}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow \frac{y - \alpha}{-y} = \frac{x}{a - x} \Rightarrow ay - xy - a\alpha + \alpha x = -xy$$

$$\Rightarrow y(a - x + x) = a\frac{2}{a} - \frac{2}{a}x \Rightarrow y = \frac{2}{a}(a - x)\frac{1}{a} = \frac{2}{a^2}(a - x)$$

$$\eta_{RA} = \int_0^a \frac{2}{a^2}(a - x)\, x\, dx = \frac{2}{a^2}\left[a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\left[\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{2}{a^2}\left[\frac{3a^3 - 2a^3}{6}\right] = \frac{1}{3}a$$

$$\eta_{RB} = \int_0^b \frac{2}{b^2}(b - x)\, x\, dx = \frac{1}{3}b$$

$$\eta_R = \eta_{RA} \cdot p_A + \eta_{RB} \cdot p_B =$$

$$= \frac{1}{3}a\, p_A + \frac{1}{3}b\, p_B =$$

$$= \frac{1}{3}(a p_A + b p_B)$$

Quesito A16 2/12/10
Una variabile aleatoria X ha densità di probabilità uniforme con valor medio ηX e varianza σX 2.
Si individuino gli estremi a e b dell'intervallo di valori che la variabile può assumere.
Si calcoli la probabilità P{ ηX – σX < X < ηX + σX } ossia la probabilità che la v.a. assuma valori che si discostano dal valor medio meno di una deviazione standard.

$$\eta_X = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_X^2 = E[X^2] - \eta_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E[X^2] = \int_a^b \frac{1}{b-a} x^2 dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3-a^3}{3}\right] \ldots$$

$$\begin{cases} \eta_X = \frac{a+b}{2} \\ \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} 2\eta_X = a+b \\ \Downarrow \\ a = 2\eta_X - b \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_X^2 = \frac{(b-2\eta+b)^2}{12} \\ \Downarrow \\ \sigma_X^2 = \frac{(2b-2\eta_X)^2}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_X = \frac{2b-2\eta_X}{\sqrt{12}} \\ \Downarrow \\ \sqrt{12}\,\sigma_X = 2b - 2\eta_X \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2b = \sqrt{12}\,\sigma_X + 2\eta_X \\ \Downarrow \\ b = \frac{\sqrt{12}\,\sigma_X + 2\eta_X}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2\eta_X - \frac{\sqrt{12}\,\sigma_X - 2\eta_X}{2} \\ \Downarrow \\ a = \frac{2\eta_X - \sqrt{12}\,\sigma_X}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \eta_X - \sqrt{3}\,\sigma_X \\ b = \sqrt{3}\,\sigma_X + \eta_X \end{cases}$$

$$P = \int_{\eta_X-\sigma_X}^{\eta_X+\sigma_X} \frac{1}{\sqrt{3}\,\sigma_X + \cancel{\eta_X} - \cancel{\eta_X} + \sqrt{3}\,\sigma_X} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}\,\sigma_X}\left[\cancel{\eta_X} + \sigma_X - \cancel{\eta_X} + \sigma_X\right] =$$

$$= \frac{\cancel{2}\,\cancel{\sigma_X}}{\cancel{2}\sqrt{3}\,\cancel{\sigma_X}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

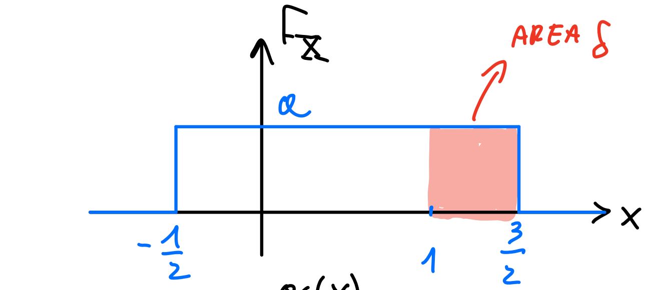
ES. A9

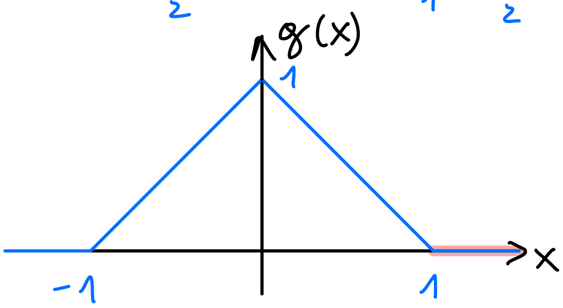
$$Y = g(X) \qquad f_X(x) = \begin{cases} a & -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

$$g(x) = \Lambda(x)$$

$a = ?$ $\quad g(x)$ GRAFICO

e $\quad f_Y(y)$ "





$\alpha = \frac{1}{2}$

th. FONDAMENTALE

1) $F_Y(y) = 0$ PER $y \notin [0,1]$

2) ZONE PIATTE $y = 0$

$$F_Y(y) = P\left\{1 < X \leq \frac{3}{2}\right\} \delta(0) = \frac{1}{4}\delta(0)$$

$$P = \int_1^{3/2} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

3) $g(x)$ CONTINUA

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

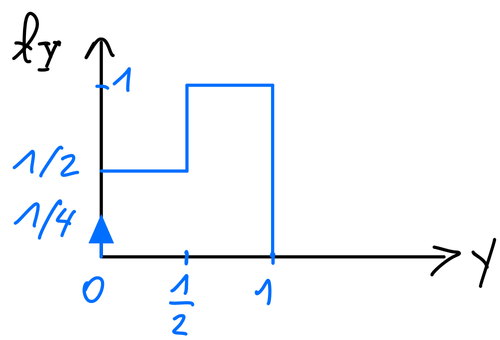
$$g(x) = 1 - |x| \begin{cases} 1 - x & 0 < x < 1 \quad (x_1) \\ 1 + x & -1 < x < 0 \quad (x_2) \end{cases}$$

$x_1 \Rightarrow y = 1 - x_1 \Rightarrow x_1 = 1 - y \qquad g'(x_1) = -1$

$x_2 \Rightarrow y = 1 + x_2 \Rightarrow x_2 = y - 1 \qquad g'(x_2) = 1$

$y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ x_2 \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \end{array}$

$y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{array}$

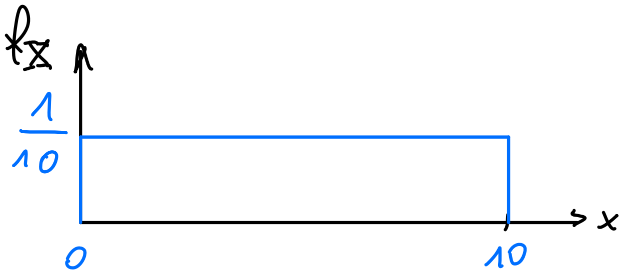


$$f_Y(y) \begin{cases} \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} & y\left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 & y\left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & & y = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{PER} & 0 < y < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{"} & \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0 & & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

Quesito A17 2/12/10

Su un segmento lungo 10 cm si sceglie un punto a caso. Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y = {Area del rettangolo avente per lati le due parti del segmento}.



X PUNTO DI ROTTURA

$$Y = g(X) = X(10-x) = 10x - x^2$$

$$Y = 10x - x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + Y = 0 \quad x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-Y} = \begin{cases} 5+\sqrt{25-Y} \\ 5-\sqrt{25-Y} \end{cases}$$

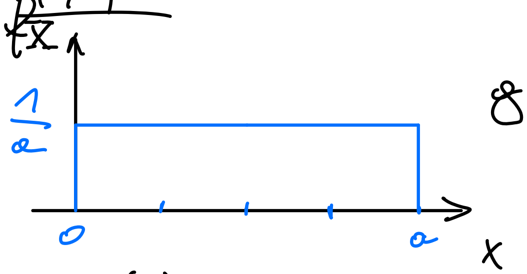
$$0 \leq Y \leq 25$$

$$g'(x) = 10 - 2x \qquad f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

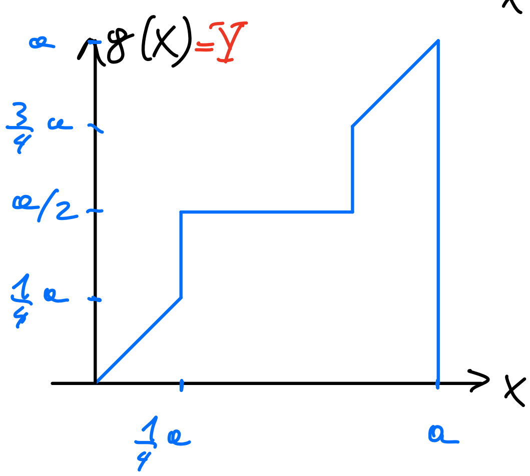
$$g'(x_1) = -2\sqrt{25-Y} \qquad g'(x_2) = 2\sqrt{25-Y}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & Y > 25 \text{ e } Y < 0 \\ \dfrac{1/10 + 1/10}{2\sqrt{25-Y}} = \dfrac{1}{10\sqrt{25-Y}} \end{cases}$$

A49



$$g(X) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{a}{4} \text{ e } \frac{3}{4}a < x < a \\ a/2 & \frac{1}{4}a < x < \frac{3}{4}a \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$



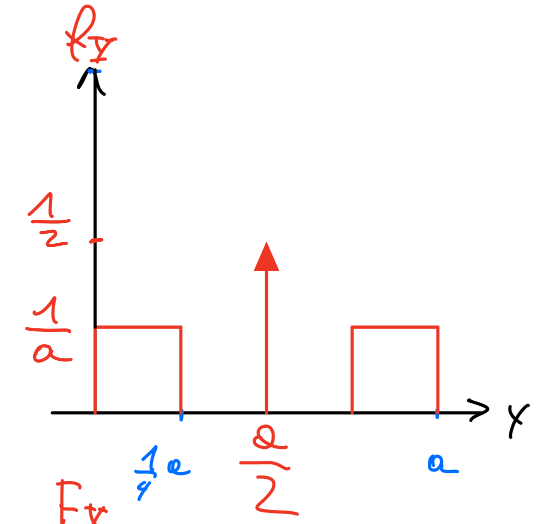
1) $f_Y(y) = 0$ PER $Y < 0$ e $Y > a$

2) $P\left\{\frac{1}{4}a < X < \frac{3}{4}a\right\} = \frac{1}{2}$ $\quad Y = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\delta\left(y - \frac{a}{2}\right)$

3) $f_Y(y) = \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}$ PER $0 < Y < \frac{1}{4}a$

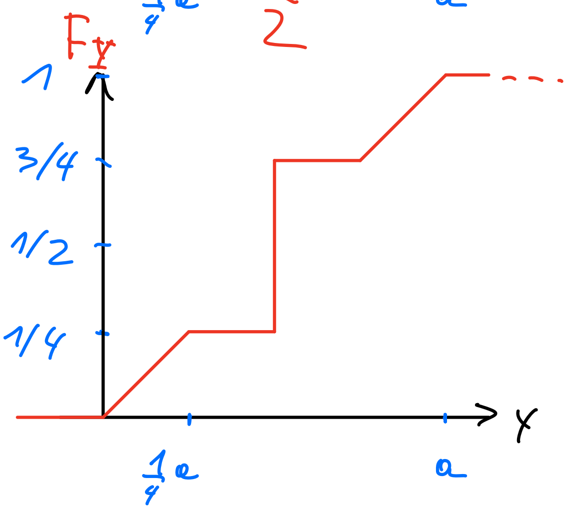
" $\frac{3}{4}a < Y < a$

$Y = X \Rightarrow x_1 = Y \qquad g'(X) = 1 \qquad f_X(x_1) = \frac{1}{a}$



$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 < Y < \frac{1}{4}a \\ \frac{1}{2} & Y = \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a} & \frac{3}{4}a < Y < a \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy$$



$$F_Y(Y) = \begin{cases} \frac{Y}{a} & 0 < Y \leq \frac{1}{4}a \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}a < Y \leq \frac{1}{2}a \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}a < Y \leq \frac{3}{4}a \\ \frac{Y}{a} & \frac{3}{4}a < Y \leq a \\ 1 & Y > a \\ 0 & Y < 0 \end{cases}$$

Quesito A12 13/09/11

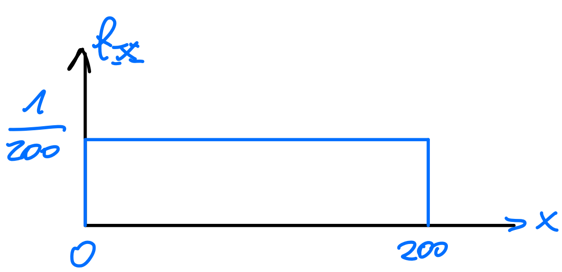
La quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca quando si ferma a rifornire di benzina la sua auto è una variabile aleatoria X (supposta continua) uniformemente distribuita fra 0 e 200 euro.

Il sig. Rossi ha l'abitudine di comportarsi così:

- se in tasca ha più di 60 euro mette 30 euro di benzina;
- se ha meno di 60 euro (o 60 euro) mette una quantità di benzina corrispondente alla metà dei soldi che ha in tasca.

Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y = {Quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca dopo un generico rifornimento}.

(N.B. – Si ipotizza che occorrano sempre più di 30 euro per raggiungere il pieno).

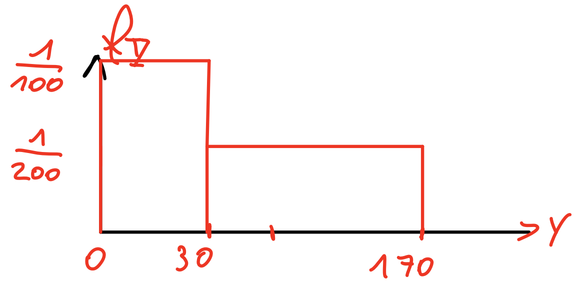


$$\left.\begin{array}{l} 60 < X < 200 \Rightarrow Y = X - 30 \\ 30 < X \leq 60 \Rightarrow Y = \frac{X}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} Y \in [30, 170] \\ Y \in [0, 30] \end{array}$$

$f_Y(y) = ? \qquad 30 < Y < 170$

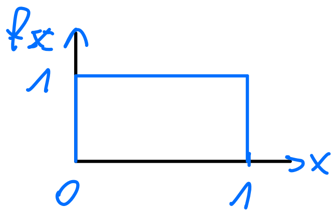
$$x_1 = y + 30 \qquad g'(x) = 1$$

$$x_2 = 2y \qquad g'(x) = \frac{1}{2}$$



$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1/200}{1} \\ \dfrac{1/200}{1/2} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{200} & 30 < y < 170 \\ \dfrac{1}{100} & 0 < y < 30 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

Quesito A33 16/01/12
Si sceglie a caso un punto di ascissa X nell'intervallo (0,1). Le lunghezze dei due segmenti in cui risulta suddiviso l'intervallo siano rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di un numero complesso Z.
Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y = {Modulo quadro di Z} = | Z |2 e se ne tracci un grafico.



$\mathbb{R} : x \qquad Z = x + j(1-x)$

$I_m : 1 - x \qquad Y = x^2 + (1-x)^2 \Rightarrow x^2 + 1 + x^2 - 2x$

$$\Rightarrow Y = 2x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 = y \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 - y = 0$$

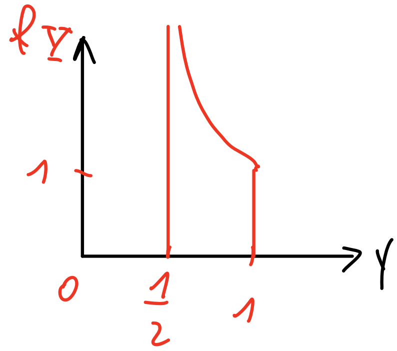
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2(1-y)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2 + 2y}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2y-1}}{2} \qquad 2y - 1 \geq 0$$

$$y \geq \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = 4x - 2 \Rightarrow g'(x_1) = \cancel{2} + 2\sqrt{2y-1} - \cancel{2} = 2\sqrt{2y-1}$$

$$g'(x_2) = \cancel{2} - 2\sqrt{2y-1} - \cancel{2} = -2\sqrt{2y-1}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2y-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2y-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2y-1}} & \dfrac{1}{2} < y < 1 \\ 0 \quad \text{ALTROVE} \end{cases}$$

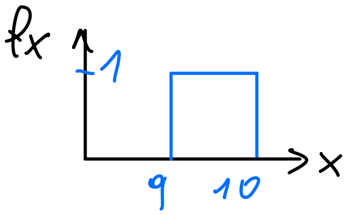


Quesito A45 2/7/12

La velocità con cui gli atleti di un certo gruppo corrono i cento metri (velocità supposta costante durante tutta la gara) è una v.a. X uniformemente distribuita fra 9 e 10 m/s.

Si trovi la densità di probabilità fY (y) della v.a. Y = {Tempo impiegato a correre i cento metri da un atleta di tale gruppo}.

Si organizza una gara (di cento metri) con 6 di tali atleti scelti a caso dal gruppo. Qual è la probabilità che il 1° e il 2° classificato arrivino al traguardo in meno di t0 = 10,4 s e tutti gli altri arrivino in un tempo maggiore di t0?



$$Y = g(X) = \frac{100}{X} \qquad v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$$

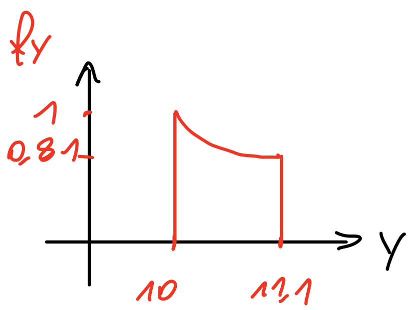
$f_Y(y) = ?$

$x \in [9, 10]$

$$Y = \frac{100}{X} \Rightarrow X = \frac{100}{Y} \qquad X = 9 \Rightarrow Y = \frac{100}{9} \qquad Y \in \left[10, \frac{100}{9}\right]$$

$$Y' = -\frac{100}{X^2} \qquad X = 10 \Rightarrow Y = 10$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|g'(x_1)|} = \dfrac{1}{\dfrac{100}{(100)^2} \cdot Y^2} = \dfrac{100}{Y^2} & Y \in [10; 11{,}11] \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$



$$\frac{\cancel{100}}{100^{\cancel{2}}} \cdot 9^2 = \frac{81}{100} = 0{,}81$$

$$\int_{10}^{\frac{100}{9}} \frac{100}{Y^2}\,dY = 100\left[-\frac{1}{Y}\right]_{10}^{\frac{100}{9}} = 100\left[\frac{1}{10} - \frac{9}{100}\right]$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{100} = 1$$

$P\{1^\circ \text{ e } 2^\circ \text{ ARRIVINO IN MENO DI } t_0 = 10{,}4\ s\}$

$$= P\left\{2 \text{ SUCCESSI SU } 6 \text{ CON } p = \int_{10}^{10{,}4} f_Y(y)\,dy = 100\left[-\frac{1}{10{,}4} + \frac{1}{10}\right] = 100 \cdot \frac{10{,}4 - 10}{104} = \right.$$

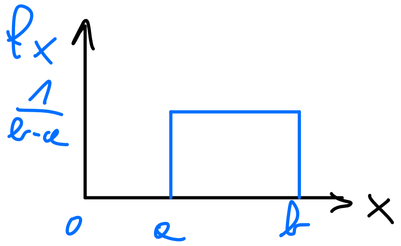
$$= \frac{0{,}4}{104} \cdot 100 = 0{,}384$$

$$P = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}384^2 \cdot 0{,}616^4 = 0{,}318$$

Quesito A56 21/1/13

Sia X una v.a. uniformemente distribuita fra a e b, con 0 < a < b. $Y = c \cdot \sqrt[3]{X}$

a) Si trovi la densità di probabilità della variabile Y. b) Si trovi il valor medio della variabile Y.



$X \in [a, b]$

$Y = c\sqrt[3]{X}$ $\qquad Y' = c\, X^{-2/3} \cdot \frac{1}{3}$ $\qquad X^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$\sqrt[3]{X} = \frac{Y}{c} \Rightarrow X = \left(\frac{Y}{c}\right)^3 \qquad Y'(x_1) = \frac{c}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{Y}{c}\right)^6}} = \frac{c}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{Y}{c}\right)^2} = \frac{c}{3} \cdot \left(\frac{c}{Y}\right)^2$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{\left|\frac{1}{3}\frac{c^3}{y^2}\right|} = \frac{1/b-a}{\frac{1}{3}\frac{c^3}{y^2}} = \frac{3}{b-a} \cdot \frac{y^2}{c^3} = \frac{3}{c^3(b-a)} y^2 \quad \Big\} \; y \in [c\sqrt[3]{a}, c\sqrt[3]{b}]$$

$$\eta_Y = \int_{c\sqrt[3]{a}}^{c\sqrt[3]{b}} \frac{3}{c^3(b-a)} y^2 \cdot y \, dy = \frac{3}{c^3(b-a)} \left[\frac{y^4}{4}\right]_{\dots}^{\dots} = \frac{3}{\cancel{c^3}(b-a)} \left[\frac{c^{\cancel{4}}}{4}\left(\sqrt[3]{b}^4 - \sqrt[3]{a}^4\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{c}{(b-a)} \cdot \left(\sqrt[3]{b^4} - \sqrt[3]{a^4}\right)$$

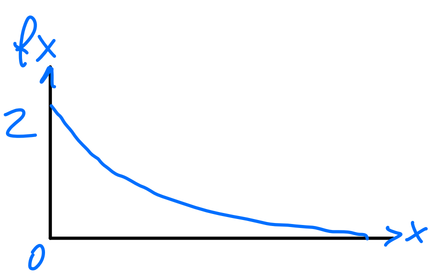
Quesito A85

Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione Y= eX

a) Si trovi la densità di probabilità fY (y) della v.a. Y sapendo che la densità della X è la seguente: fX (x) = 2 e – 2 x u (x)

b) Si trovi il valor medio della v.a. Y senza usare la densità fY (y) trovata al punto precedente.

$Y = e^X$ $\qquad f_Y(y) = ?$ $\qquad f_X(x) = 2e^{-2x} u(x)$ $\qquad \eta_Y$ da $f_X(x)$



$Y = e^x \Rightarrow x = \ln(y)$ $\qquad x \in [0, +\infty] \Rightarrow y \in [1, +\infty]$

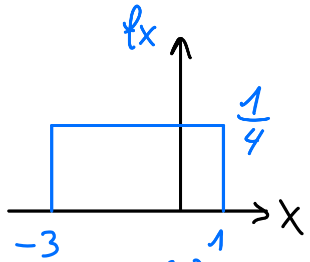
$Y' = e^x$

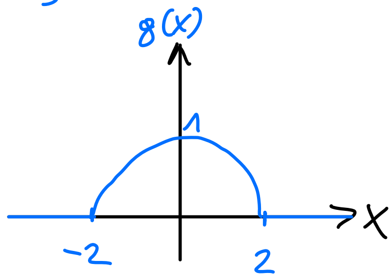
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \dfrac{2 \cdot e^{-2\ln y}}{e^{\ln y}} = \dfrac{2 \cdot e^{\ln y^{-2}}}{y} = 2 \cdot \dfrac{y^{-2}}{y} = \dfrac{2}{y^3} & 1 < Y < +\infty \\ 0 \quad \text{ALTROVE} & \end{cases}$$

$$\eta_Y = E\left[g(x)\right] = \int_0^{+\infty} e^{x} \cdot 2 e^{-2x}\, dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 2\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 2$$

Quesito A101 20/09/15

Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione Y = g(X). La densità di probabilità fX (x) sia uniforme fra –3 e +1 e la funzione g(x) sia:
g(x) = (1 – [(x^2) /4])·Π(x/4) .
a) Si traccino i grafici di g(x) e di fX (x) .
b) Si trovi l'espressione della densità fY (y) e se ne tracci un grafico.





th. FONDAMENTALE

1) $f_Y(y) = 0$ PER $Y > 1$ e $Y < 0$

3) $f_Y(y) = \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dfrac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$ PER $0 < Y < 1$

$$Y = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 - Y \Rightarrow \frac{x}{2} = \pm\sqrt{1-Y}$$

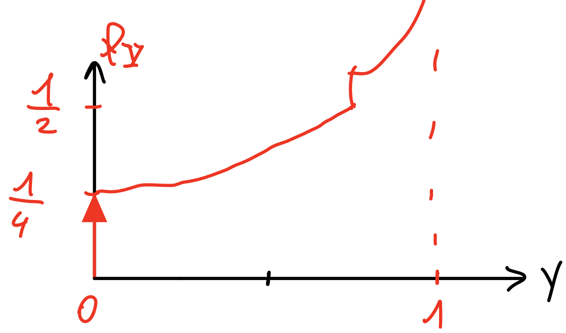
$$g'(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} 2\sqrt{1-Y} \\ -2\sqrt{1-Y} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1/4 + 1/4}{\left|-\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{1-y}\right|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y}} \qquad \frac{3}{4} < Y < 1$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y}} \qquad 0 < Y < \frac{3}{4}$$

2) $f_Y(y) = p\,\delta(y)$ DOVE $p = P\{-3 < X < -2\} = \dfrac{1}{4}$



$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,\delta(y) & y=0 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y}} & \frac{3}{4} < y \le 1 \\ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y}} & 0 \le y < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

LOTTO 7

Quesito A38

La densità di probabilità congiunta di due v.a. X e Y è la seguente:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

Dove k è una costante.

- Si trovi il valore di k.
- Si determini se le v.a. X e Y sono indipendenti.