COME RISOLVERE GLI ESERCIZI

Il PDF contiene la spiegazione per risolvere 3 tipologie di esercizi solitamente presenti nel secondo parziale

Esercizi trattati:

- Probabilità con V. aleatorie
- Trasformazioni di variabili aleatorie
- Studio delle caratteristiche dei segnali aleatori

Manca la risoluzione di un esercizio su come calcolare la stazionarietà dei processi, anche esso un esercizio molto probabile.

Per altri esercizi e materiale: https://appuntiunipriiet.altervista.org

PROB. V.A. ESERCIZIO A11; ESERCITAZIONE 4

1 - SCRIVI TUTTI I DATI E DISEGNA I GRAFICI DI TUTTE LE V.A.

$X \sim U[0,10]$

$Y = \frac{1}{b-a}$

2- CALCOLARE LA PROBABILITÀ DEL SINGOLO EVENTO, IN QUESTO CASO CHE 1 PUNTO CADA TRA [0,2]

$$P\{X \le 2\} \triangleq F_X(x < 2) = \underbrace{\int_0^2 \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \cdot [x]_0^2 = \frac{1}{5}}$$

PIÙ SEMPLICEMENTE È L'AREA DEL RETTANGOLO DI LATI $\frac{1}{10}$ E $2 = \frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{1}{5}$

3- TROVARE QUESTA PROB. RISOLVERE I QUESITI DEL PROBLEMA CON LE FORMULE DEL CALCOLO COMBINATORIO.

a) 2 PUNTI IN $[0,2]$, $P = \frac{1}{5}$

COINCIDE CON 2 SUCCESSI SU 5 TENTATIVI

$$P(S) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10 \cdot \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \simeq 0.20$$

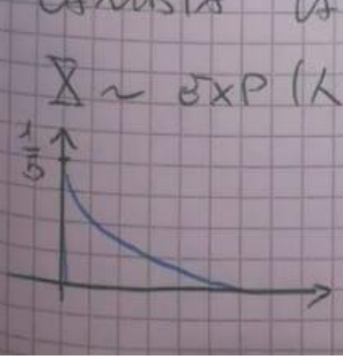
b) ALMENO DUE SUCCESSI, COINCIDE CON L'OPPOSTO DI AVERE 0 O 1 SOLO SUCCESSO.

$$P(S) = 1 - \left[\binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 + \binom{5}{1} p^1 (1-p)^4 \right] \simeq 0.26$$

ESERCIZIO A2

UN ALTRO ESEMPIO CON GLI STESSI PROCEDIMENTI MA IN CUI CAMBIA LA DISTRIBUZIONE DI X:

$X \sim EXP(\lambda)$, $\lambda = \frac{1}{5}$ $\quad p_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$



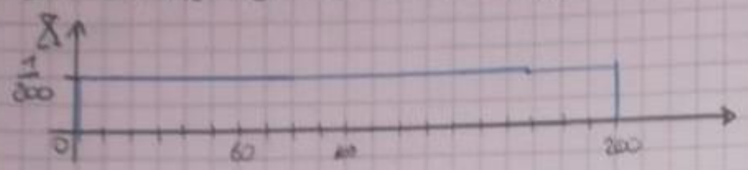
IN QUESTO CASO LA PROBABILITÀ DI X MINORE DI UN CERTO VALORE È

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{xt}$$

TRASFORMAZIONE DI VARIABILI ALEATORIE

QUESITO A12 ESERCITAZIONE 6

1- SCRIVERE E DISEGNARE TUTTI I DATI E I GRAFICI



LA PDF È NULLA ALL'INFUORI DEGLI ESTREMI, LA CDF VALE 0 PRIMA ED 1 DOPO.

2- SE NON È DATA TROVARE LA FUNZIONE $g(X)$ PER CUI $Y = g(X)$

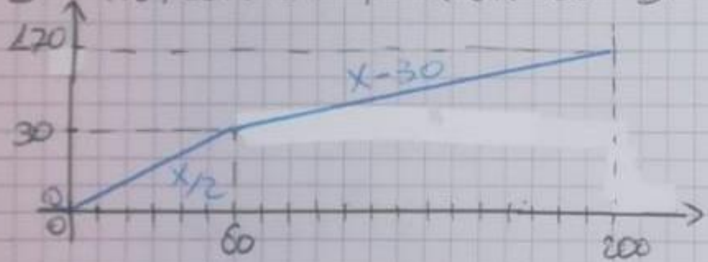
NEL NOSTRO CASO ABBIAMO 2 DIVERSE $g(X)$.

$Y = g(X)$ CON $g(x) = \frac{x}{2}$ PER $x \leq 60$

$Y = g(X)$ CON $g(x) = x-30$ PER $x > 60 \cup x < 200$

$$\rightarrow g(X) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{PER } 0 < x \leq 60 \\ 30 & \text{PER } 60 < x < 200 \end{cases}$$

3- TRACCIARE IL GRAFICO DI $g(X)$



4- IL CODOMINIO DI $g(X)$ È IL DOMINIO DI $Y(x)$, DUNQUE "I VALORI SULL'ASSE Y DI $g(X)$ VANNO SULL'ASSE X DI $Y(x)$"

DUNQUE:
$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{PER } x < 0 \cup x > 170 \\ \text{QUALCOSA} & 0 \leq x \leq 170 \end{cases}$$

5- IDENTIFICARE COME PROCEDE IN QUELL'INTERVALLO

2 POSSIBILI CASI:

1) TRATTI COSTANTI DI $g(x)$ CHE PRODUCONO δ IN $f_Y(x)$

2) TRATTI NON COSTANTI; DEVO USARE IL TEOREMA FONDAMENTALE

IN QUESTO CASO ABBIAMO 2 TRATTI NON COSTANTI, UNO PER

0 < X < 60 ED UNO PER 60 < X < 170

FORMULA DEL T. FONDAMENTALE $\quad p_Y(y) = \sum \frac{p_X(x_i(y))}{|g'(x_i(y))|}$

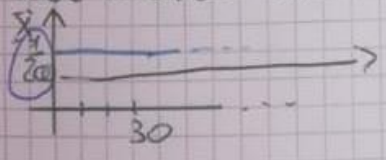
SICCOME ABBIAMO UNA SOMMATORIA DOBBIAMO IDENTIFICARE IL NUMERO DI SOLUZUZIONI IN OGNI TRATTO; SIA PER 0<X<60 CHE PER 60<X<170 ABBIAMO UNA SOLA SOLUZIONE (X È DI PRIMO GRADO, SE AVESSIMO AVUTO UN X^2 AVREMMO AVUTO 2 SOLUZIONI, PER X^3 3 SOL. ECC...) (QUESTO ABB. ES. 6 PER ESEMPIO CON PIÙ SOL.)

$$\rightarrow p_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{PER } x<0 \cup x>170 \\ \frac{p_X(x_1(y))}{|g'(x_i(y))|} & 0 \le x \le 30 \\ \frac{p_X(x_2(y))}{|g'(x_i(y))|} & 30 < x \le 170 \end{cases}$$

COSA SIGNIFICANO LE SCRITTURE:

- $p_X(x_i(y))$ È IL VALORE DELLA p_X NELL TRATTO $x_i(y)$

NEL NOSTRO CASO QUANTO VALE p_X (VALORE SULL'ASSE Y) TRA 0 E 30



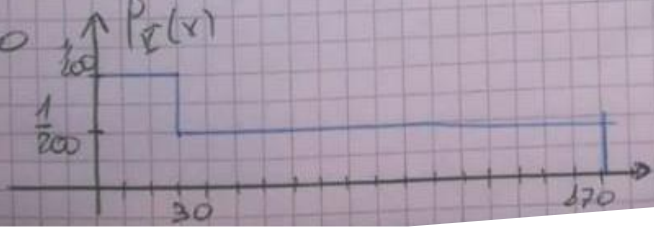
$\rightarrow \frac{1}{200}$ QUINDI $p_X(x_i(y)) = \frac{1}{200}$

- $g'(x_i(y))$ È LA DERIVATA DI $g(x)$ NEL TRATTO IN QUESTIONE,

TRA 0 E 30 $\quad g(x) = \frac{x}{2} \rightarrow g' = \frac{1}{2}$

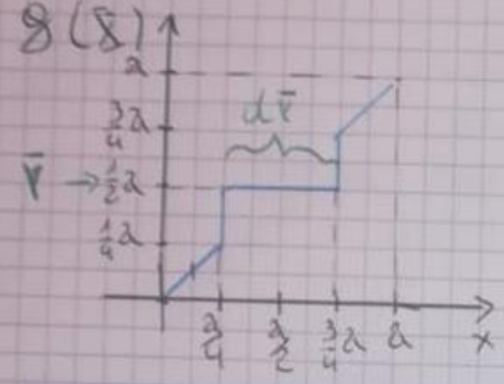
$$\rightarrow p_Y(y) = \begin{cases} 0 & \ldots\ldots \\ \frac{1/200}{1/2} & \text{PER } 0 \le x \le 30 \\ \frac{\frac{1}{200}}{1} & \text{PER } 30 \le x \le 170 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 & 0 < x \cup x > 170 \\ \frac{1}{100} & 0 \le x \le 30 \\ 1/200 & 30 < x < 170 \end{cases}$$

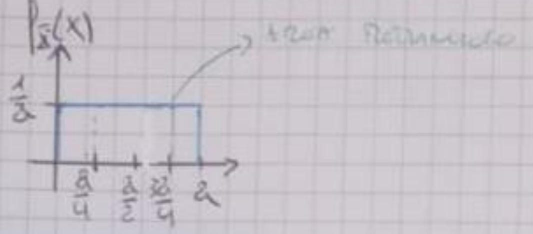
GRAFICO



QUESITO A49 ESERCITAZIONE 6

"SALTO ALCUNI PASSI, È PIÙ PER VEDERE COME SI CALCOLANO I TRATTI CONTINUI DI $g(x)$





4. IL CODOMINIO DI $g(x)$ È $[0, a]$

5- CI SONO 2 TRATTI NON COSTANTI PER $0<x<\frac{a}{4}$ e $\frac{3}{4}<x<a$ e 1 TRATTO CONTINUO PER $\frac{a}{4}<x<\frac{3}{4}a$

$$p_{\bar{Y}}(y)=\begin{cases} 0 \text{ per } x<0 \cup x>a \\ \dfrac{p_x(x_1(y))}{|g'(x_1(y))|} = \dfrac{\frac{1}{a}}{1} = \dfrac{1}{a} & \text{per } 0<x<\frac{a}{4} \\ \dfrac{p_x(x_2(y))}{|g'(x_2(y))|} = \dfrac{\frac{1}{a}}{1} = \dfrac{1}{a} & \text{per } \frac{3}{4}a<x<a \\ P\{x\in d\bar{y}\}\cdot\delta(y-\bar{y}) & \text{per } \frac{a}{4}<x<\frac{3a}{4} \end{cases}$$

COSA SIGNIFICANO LE SCRITTURE

LA $P\{x \in d\bar{y}\}\cdot\delta(y-\bar{y})$ INDICA CHE AVRÒ UNA δ DI ALTEZZA UGUALE ALLA PROBABILITÀ CHE X STIA NELLA FASCIA $d\bar{y}$ E CON UN SPOSTAMENTO DI $\bar{y}$

NEL NOSTRO CASO QUAL È LA PROB. CHE $\frac{a}{4}<x<\frac{3}{4}a$ ($d\bar{y}$ VA DA $\frac{a}{4}$ A $\frac{3}{4}a$)

$$\rightarrow P\left\{\frac{a}{4}<x<\frac{3}{4}\right\} = \int_{\frac{a}{4}}^{3/4} \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\left[x\right]_{a/4}^{3/4 a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

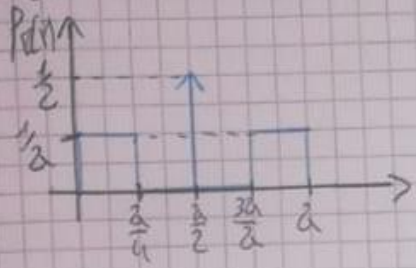
→ O PIÙ SEMPLICEMENTE L'AREA DEL RETTANGOLO DI LATI $\left(\frac{3}{4}a-\frac{a}{4}\right)\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

$\bar{V}$ è il valore che ha il tratto costante sull'asse delle V di g(x)

in questo caso $\frac{1}{2}a$

$$\rightarrow \quad P\{x \in d\bar{v}\} \cdot \delta(v-\bar{v}) = \frac{1}{2} \cdot \delta(v-\bar{v})$$

Disegnamo il grafico



PROCESSI STOCASTICI (CARATTERISTICHE)

Dà uno o più segnali stocastici da cui estrarre i valori con le formule

ES. 113 ESERCITAZIONE 8

DATO $X(t)$ SSL, $\eta_x = 1$, $R_x(\tau) = \mathrm{sinc}(B\tau) + 1$

$$h(t) = B\,\mathrm{sinc}(Bt) \leftrightarrow H(f) = \Pi(f/B)$$

Dire se il segnale uscente dal filtro $V(t)$ è SSL, η_V, $R_V(\tau)$

P_X? P_V?

$V(t)$ è SSL perché il filtro non altera la stazionarietà

$$\eta_V = \eta_X \cdot H(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$R_V(\tau) = F^{-1}[P_V(f)] = \mathrm{sinc}(B\tau) + 1$$

$$P_V(f) = P_X(f) \cdot |H(f)|^2 = \left[\frac{1}{B}\,\Pi(f/B) + \delta(f)\right] \qquad \Pi(f/B) = \frac{1}{B}\Pi(f/B) + \delta(f)$$

$$P_X(f) = F[R_X(\tau)] = \frac{1}{B}\,\Pi(f/B) + \delta(f)$$

$$P_X = R_X(0) = 1 + 1 = 2$$

$$P_V = R_V(0) = 1 + 1 = 2$$