Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A7
Dati due eventi qualunque A e B di uno spazio campione S si scriva l'espressione della probabilità dell'evento congiunto P($A \cup B$) e si dimostri la validità di tale espressione.

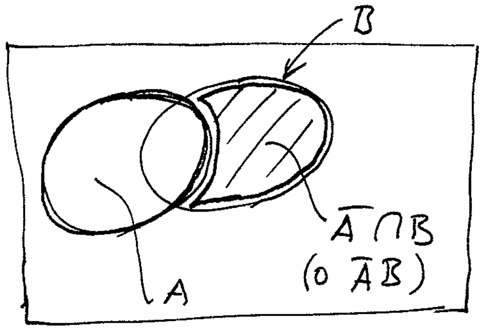
Quesito A7 (soluzione)

L'espressione richiesta è:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Dimostrazione -

Si scriva $A \cup B$ come unione di due eventi mutuamente esclusivi:



$$A \cup B = A \cup \bar{A}B$$

Lo stesso per B da solo:

$$B = AB \cup \bar{A}B -$$

Applicando il 3° assioma ai due casi:

$$P(A \cup B) = P(A \cup \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B)$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \longrightarrow P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$$

e dalla prima:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A \cup \bar{A}B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$ C.V.D.

Si veda anche: Bononi; Ferrari par. 1.5, p. 13 -

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A14 2/12/1010

Una commissione di cinque persone viene formata scegliendone a caso i membri da un gruppo di cinque uomini e dieci donne. Si calcoli la probabilità che la commissione risulti formata da due uomini e tre donne.

Quesito A14 - (Soluzione)

Lo spazio campione è formato da tutti i possibili gruppi di 5 persone estratti dal gruppo dei 15 dato - Il numero di tali gruppi è $\binom{15}{5}$. Lo spazio campione si può assumere uniforme, quindi la probabilità cercata è uguale al rapporto fra il numero di gruppi di 5 persone formati da 2 uomini e 3 donne e il numero totale sopra detto - Il numero di possibili gruppi di 2 uomini è $\binom{5}{2}$ e per ciascuno di questi il numero di gruppi di 3 donne è $\binom{10}{3}$. Quindi la probabilità cercata vale:

$$P = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{10 \cdot 120}{3003} = \frac{400}{1001} \simeq 0{,}4 .$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A83
Un gruppo è formato da dieci persone: quattro di Modena e sei di Parma. Una persona del gruppo scrive il nome della propria città. Si sceglie a caso una lettera della parola così scritta che risulta essere una vocale. Qual è la probabilità che la persona che ha scritto sia di Parma?

Quesito A83 (Soluzione)

Si definiscano i seguenti eventi:

$Mo = \{$Chi ha scritto è di Modena$\} \longrightarrow P(Mo) = \frac{4}{10}$

$PR = \{$" " " " " Parma$\} \longrightarrow P(PR) = \frac{6}{10}$

$V = \{$È stata scelta una vocale$\}$

Si cerca la probabilità: $P(PR|V)$.

Dal teorema di Bayes e da quello delle prob. totali si ha:

$$P(PR|V) = \frac{P(V|PR) . P(PR)}{P(V)}$$

Si può assumere uniformità nella scelta delle lettere quindi si ha:

$$P(V|PR) = \frac{2 \leftarrow \text{n. vocali in "Parma"}}{5 \leftarrow \text{n. lettere in "Parma"}} \qquad \text{e} \quad P(V|Mo) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Inoltre è:

$$P(V) = P(V|PR) \cdot P(PR) + P(V|Mo) \cdot P(Mo) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{44}{100}$$

Quindi la probabilità che chi ha scritto sia di Parma è:

$$\boxed{P(PR|V) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{44}{100}} = \frac{6}{11} \simeq 0,545}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A44 2/7/12

Si enunci e si dimostri la "regola della catena" (in generale) e la si utilizzi per risolvere il seguente problema.

Si hanno tre porte chiuse marcate A, B, C e una scatola con 5 chiavi apparentemente identiche, di cui due aprono la porta A, una apre la porta B e due aprono la porta C. Si vogliono aprire le porte A, B e C nell'ordine, scegliendo le chiavi a caso senza rimetterle nella scatola.

Si calcoli la probabilità di aprire le tre porte con un solo tentativo ciascuna (ossia con tre tentativi in totale).

Quesito A44 (Soluzione)

Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il testo Bononi, Ferrari p. 41.

Si definisca l'evento:

$$\mathcal{E}_x \triangleq \{\text{La porta } x \text{ si apre al primo tentativo}\}$$

con $x \in \{A, B, C\}$.

Si cerca la probabilità dell'evento intersezione:

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_A \mathcal{E}_B \mathcal{E}_C) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_A) \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_B | \mathcal{E}_A) \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_C | \mathcal{E}_A \mathcal{E}_B)$$

Poiché le chiavi non vengono rimesse nella scatola le probabilità necessarie sono di volta in volta uguali al numero di chiavi che aprono la porta tentata diviso per il numero totale di chiavi presenti nella scatola all'esecuzione del tentativo quindi:

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_A) = \frac{2}{5} \quad ; \quad \mathbb{P}(\mathcal{E}_B | \mathcal{E}_A) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}(\mathcal{E}_C | \mathcal{E}_A \mathcal{E}_B) = \frac{2}{3}$$

Quindi infine:

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathcal{E}_A \mathcal{E}_B \mathcal{E}_C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{15} = 0{,}0\overline{6}}$$

Esame di TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A110
Un gruppo di N persone fra cui si trovano Marco e Laura viene fatto sedere in una fila di posti contigui assegnando i posti a caso.
Si calcoli la probabilità che Marco e Laura vengano a trovarsi uno vicino all'altra.

Quesito A110 (Soluzione)

A questo quesito si può rispondere in molti modi equivalenti corrispondenti a diversi esperimenti casuali – In tutti gli esperimenti proposti si cerca la probabilità $P(V)$ dell'evento $V = \{\text{Marco e Laura vicini}\}$ –

$\boxed{1° \text{ modo}}$

Si può pensare che Marco e Laura estraggano il numero del proprio posto da un insieme di numeri: $1, 2 \dots N$.
Lo spazio campione (che si può assumere uniforme) è in tal caso rappresentato da tutte le possibili coppie ordinate di N numeri il cui numero è (Disposizioni):

$$D_{N,2} = \frac{N!}{(N-2)!} = \frac{N\cdot(N-1)\cdot\cancel{(N-2)!}}{\cancel{(N-2)!}} = N\cdot(N-1) \leftarrow$$ (n° casi possibili)

L'evento di interesse, V, è rappresentato dall'insieme di coppie ordinate di numeri consecutivi, ossia:

$$V = \left\{ \underbrace{\begin{matrix} (1,2) & (2,3) & \dots & [(N-1),N] \\ (2,1) & (2,3) & \dots & [N,(N-1)] \end{matrix}}_{(N-1)} \right\}$$ che sono: $2\cdot(N-1)$

(n° casi favorevoli)

Quindi la probabilità cercata è:

$$\boxed{P(V) = \frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}} = \frac{2\cdot\cancel{(N-1)}}{N\cdot\cancel{(N-1)}} = \frac{2}{N}}$$

2° modo

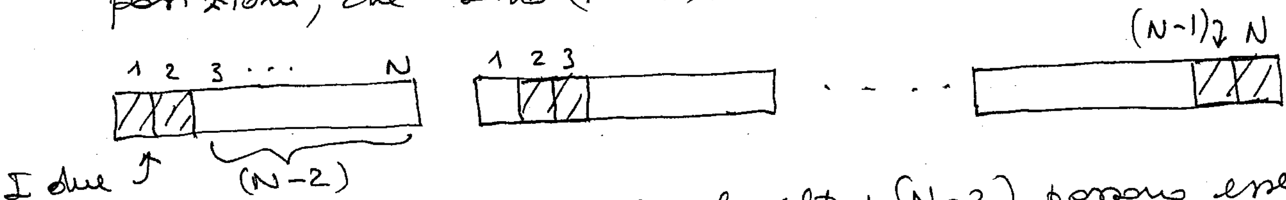
Si può pensare di escludere per il momento uno dei due (p. es. Marco), disporre gli altri $(N-1)$ a caso in una fila (p. es. in piedi) dopodiché inserire Marco in una posizione a caso fra gli altri –
Lo spazio campione (ancora una volta uniforme) è rappresentato da tutte le posizioni che Marco può assumere che sono N, ossia le $(N-2)$ posizioni fra due persone più le due posizioni estreme e ciò è vero qualunque sia l'ordine delle $(N-1)$ persone in fila –
L'evento $V = \{\text{Marco e Laura vicini}\}$ è formato dalle due sole posizioni ai lati di Laura, presente nel gruppo delle $(N-1)$ persone – Quindi la probabilità cercata è:

$$\boxed{P(V) = \frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}} = \frac{2}{N}}$$

Eseguito l'inserimento, tutti si possono sedere...

3° modo

Si può pensare lo spazio campione (ancora uniforme) formato da tutti i possibili ordinamenti di N persone (permutazioni), che sono $N!$ – L'evento di interesse, V, è formato da tutti gli ordinamenti che hanno Marco e Laura vicini – Quanti sono? La coppia può essere in una di queste posizioni, che sono $(N-1)$:



Per ciascuna di esse gli altri $(N-2)$ possono essere in un ordine qualunque ossia in $(N-2)!$ ordinamenti.

(segue)

Inoltre per ogni posizione della coppia i due possono essere in posizioni scambiate e va bene lo stesso.

Quindi si ha:

$$\boxed{P(V) = \frac{n^\circ \text{ casi fav.}}{n^\circ \text{ casi poss.}} = \frac{\overset{\text{scambio}}{2} \cdot \overset{\text{Posiz. coppia}}{(N-1)} \cdot \overset{\text{ordinamenti degli altri}}{(N-2)!}}{N!} =}$$

$$= \frac{2 \cdot \cancel{(N-1)} \cdot \cancel{(N-2)!}}{N \cdot \cancel{(N-1)} \cdot \cancel{(N-2)!}} = \frac{2}{N}$$

4° modo

Immaginiamo di fare sedere per primo Marco assegnandogli un posto a caso fra gli N, fare poi sedere Laura assegnandole un posto a caso fra gli (N−1) rimanenti, poi tutti gli altri. Le possibili posizioni di Marco costituiscono una partizione dello spazio campione (anche uniforme) infatti gli eventi: {A Marco è assegnato il posto i} o, più brevemente, $\{M=i\}$ sono mutuamente esclusivi ed esauriscono tutte le possibilità per Marco. Quindi si può applicare il teorema delle probabilità totali:

$P(M=i) = \frac{1}{N}$ per $\forall i$

$$P(V) = P(V|M=1) \cdot P(M=1) + P(V|M=2) \cdot P(M=2) + \dots P(V|M=N) \cdot P(M=N)$$

La generica probabilità $P(V|M=i)$ è la probabilità che a Laura capiti un posto vicino a Marco una volta che questi è seduto al posto i. Se $M=1$ e $M=N$ il posto possibile per Laura favorevole all'evento V è uno solo sugli (N−1) possibili.

Quindi si ha: $P(V|M=1) = P(V|M=N) = \frac{1}{N-1}$

Mentre se $M = 2, 3, \dots (N-1)$ Laura ha due possibilità di capitare vicino a Marco, quindi $\underbrace{P(V|M=2) = P(V|M=3) = \dots P(V|M=N-1)}_{(N-2)} = \frac{2}{N-1}$

Quindi infine:

$$\boxed{P(V) = \left(2 \cdot \frac{1}{N-1} + (N-2) \cdot \frac{2}{N-1}\right) \cdot \frac{1}{N} = \frac{2}{N}}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Esercizio n. 1 (A59)
Dovete aprire una porta la cui unica chiave è in un gruppo di 60 chiavi suddivise in tre mazzi di 20 chiavi ciascuno, apparentemente identici.
Scegliete un mazzo a caso e iniziate a provare le chiavi in successione casuale escludendo via via quelle già provate.
Se le prime sei chiavi non aprono la porta quant'è la probabilità che la chiave non sia nel mazzo scelto?

Quesito A59 (Soluzione)

Si definiscano gli eventi:

$C = \{$Il mazzo scelto contiene la chiave$\}$

$F_i = \{$Fallimento alla i-esima prova$\}$

$E = \{$Le prime 6 prove falliscono$\} = \{F_1 F_2 \cdots F_6\}$

Si cerca:

$$P(\bar{C}|E) = \frac{P(E|\bar{C}) \cdot P(\bar{C})}{P(E)} \leftarrow \text{Formula di Bayes}$$

Si ha chiaramente: $P(E|\bar{C}) = 1$ e $P(\bar{C}) = \frac{2}{3}$.

Inoltre (Teor. delle prob. totali):

$$P(E) = P(E|\bar{C}) \cdot P(\bar{C}) + P(E|C) \cdot \underbrace{P(C)}_{\frac{1}{3}}$$

Dove $P(E|C)$ si può calcolare p.es. con la regola della catena (col condizionamento a C ossia: la chiave c'è):

$$P(E|C) = P(F_1 F_2 \cdots F_6|C) = P(F_1|C) \cdot P(F_2|F_1 C) \cdots P(F_6|F_1 \cdots F_5 C)$$

$$= \frac{\cancel{19}}{20} \cdot \frac{\cancel{18}}{\cancel{19}} \cdot \frac{\cancel{17}}{\cancel{18}} \cdot \frac{\cancel{16}}{\cancel{17}} \cdot \frac{\cancel{15}}{\cancel{16}} \cdot \frac{14}{\cancel{15}} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

Quindi:

$$P(E) = 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10} \rightarrow \boxed{P(\bar{C}|E) = \frac{1 \cdot 2/3}{9/10} = \frac{20}{27} \simeq 0{,}74}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A10 13/09/2011
Si hanno a disposizione cinque monete truccate in modo tale che la probabilità che esca testa lanciando la *i*-esima moneta sia *i*/5.
Si sceglie a caso una moneta, la si lancia ed esce testa: qual è la probabilità che la moneta lanciata sia la numero 2 ?

Quesito A10 - (Soluzione)

Detto M_i l'evento {Scelta della moneta i-esima}
e T l'evento {Testa}, si cerca $P(M_2|T)$.
Applicando la formula di Bayes si può scrivere:

$$P(M_2|T) = \frac{P(T|M_2)\cdot P(M_2)}{P(T)}$$

Dove $P(T|M_2)$ è la probabilità di ottenere testa avendo scelto la moneta M_2, quindi è:

$$P(T|M_2) = \frac{2}{5} \quad \left(\text{ossia } \frac{i}{5} \text{ per } i=2\right)$$

Si può anche assumere equiprobabilità nella scelta delle monete, quindi: $P(M_2) = \frac{1}{5}$ $(= P(M_i)$ per $i = 1, \ldots 5)$.
Applicando il teorema delle probabilità totali si può scrivere (gli eventi M_i sono una partizione dello sp. campione):

$$P(T) = \sum_{i=1}^{5} P(T|M_i)\,P(M_i) = \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Quindi la probabilità cercata è:

$$P(M_2|T) = \frac{P(T|M_2)\cdot P(M_2)}{P(T)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{15}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A48 11/9/12

Una scatola contiene due dadi, di cui uno regolare ed uno truccato in modo che la probabilità di ottenere la faccia f_1 sia $P(f_1) = 3/8$ e la probabilità di ottenere una delle altre facce sia $P(f_i) = 1/8$ per $i = 2,3,4,5,6$.
Si estrae un dado a caso e lo si lancia una volta: se esce la faccia f_1 si dichiara che il dado è truccato, se esce una qualunque delle altre facce si dichiara che il dado non è truccato.
Si trovi la probabilità che la dichiarazione sia errata.

Quesito A48 (Soluzione)

Si definiscano i seguenti eventi:

$\mathcal{E} = \{$la dichiarazione è errata$\}$

$T = \{$Il dado scelto è truccato$\}$

Si cerca la probabilità $P(\mathcal{E})$ - Si può assumere $P(T) = P(\overline{T}) = \frac{1}{2}$.
Si può applicare il Teorema della probabilità totale osservando che gli eventi T e $\overline{T}$ formano una partizione dello spazio campione - Quindi:

$$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}|T)P(T) + P(\mathcal{E}|\overline{T})\,P(\overline{T})$$

Dalle modalità di dichiarazione si ricava subito:

$$P(\mathcal{E}|T) = P(\text{Si dichiara dado regolare} \,|\, \text{Il dado è truccato}) =$$

$$= P(\text{Esce } f \neq 1 \,|\, T) = \frac{5}{8}$$

$$P(\mathcal{E}|\overline{T}) = P(\text{Si dichiara dado truccato} \,|\, \text{Il dado è regolare}) =$$

$$= P(\text{Esce } f = 1 \,|\, \overline{T}) = \frac{1}{6}$$

Quindi infine:

$$\boxed{P(\mathcal{E}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{19}{48} \cong 0{,}396}$$

[Si veda anche il Prob. 3.5 a p. 53 del testo Bononi, Ferrari]

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A81
Marco e un gruppo di sette amici, in tutto quattro ragazze e quattro ragazzi, si incontrano per una cena. Il tavolo per la cena è tondo e i posti sono numerati. Il gruppo decide di assegnare i posti a caso estraendo ciascuno il numero del proprio posto. Si calcolino le seguenti probabilità:
a) P_A: che Marco abbia ai lati due ragazzi; b) P_B: che Marco abbia ai lati un ragazzo e una ragazza; c) P_C: che Marco abbia ai lati due ragazze.

Quesito A81 (Soluzione)

Nel seguito si indicherà con M (maschio) un ragazzo generico, con F (femmina) una ragazza generica e con S_x e D_x i posti a sinistra e a destra di Marco, rispettivamente.

1° metodo (coppie non ordinate)

a) Data la casualità dell'assegnazione dei posti, la probabilità che Marco abbia ai lati due ragazzi è uguale alla probabilità di estrarre una coppia non ordinata di ragazzi da uno spazio campione uniforme formato da 3 ragazzi (3 M) e 4 ragazze (4F). Utilizzando le coppie non ordinate si ha:

$$\boxed{P_A} = P\{\text{Estrazione di una coppia (non ordinata) di M da un insieme di 3 M e 4F}\} =$$

$$= \frac{\text{n° coppie (non ord.) di M}}{\text{n° coppie (non ord.) totali}} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}}{\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}} = \boxed{\frac{1}{7} \simeq 0{,}143}$$

b) La probabilità che Marco abbia ai lati un ragazzo e una ragazza si può scrivere così:

$$\boxed{P_B = P\{(M \text{ a } Sx,\ F \text{ a } Dx) \cup (F \text{ a } Sx,\ M \text{ a } Dx)\}} =$$

Mutuamente esclusivi

$$= P\{M \text{ a } Sx,\ F \text{ a } Dx\} + P\{F \text{ a } Sx,\ M \text{ a } Dx\} =$$

$$= P\{M \text{ a } Sx\} \cdot P\{F \text{ a } Dx \mid M \text{ a } Sx\} + P\{F \text{ a } Sx\} \cdot P\{M \text{ a } Dx \mid F \text{ a } Sx\} =$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{4}{7} \simeq 0,571}$$

Dalla definizione di prob. condizionata o dalla regola della catena

N.B. – Poichè il calcolo di P_C (vedi oltre) è analogo a quello di P_A, si potevano calcolare per prime queste due probabilità e ricavare P_B da: $P_B = 1 - P_A - P_C$, dovendo comunque essere: $P_A + P_B + P_C = 1$

c) Si procede analogamente al caso a):

$$\boxed{P_C = \frac{\text{n° coppie (non ord.) di F}}{\text{n° coppie (non ord.) totali}}} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}{\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}} = \boxed{\frac{2}{7} \simeq 0,286}$$

2° metodo (Coppie ordinate)

Si può procedere anche considerando le coppie ordinate di vicini di Marco – Si osservi che:

– n° coppie ordinate totali $= D_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = 6 \cdot 7 = 42$

(Si veda anche lo schema nella pagina seguente: tutte le caselle meno la diagonale: $7 \times 7 - 7 = 42$)

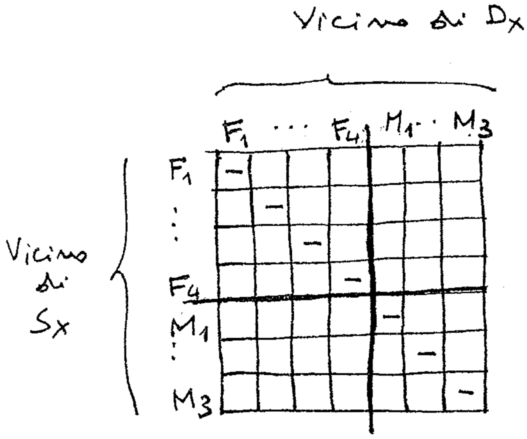
– n° coppie ordinate di ragazze (F) $= D_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$

(Nello schema: le caselle nel quadrato in alto a sinistra meno la diagonale: $4 \times 4 - 4 = 12$)

- n° coppie M a Sx, F a Dx e viceversa $= 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$
(Nello schema: le caselle nei rettangoli in alto a destra e in basso a sinistra)

- n° coppie ordinate di ragazzi (M) $= D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \cdot 2 = 6$
(Nello schema: le caselle nel quadrato in basso a destra meno la diagonale : $3 \times 3 - 3 = 6$)

E quindi le probabilità:



a) $P_A = \frac{D_{3,2}}{D_{7,2}} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$

b) $P_B = \frac{24}{D_{7,2}} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$

c) $P_C = \frac{D_{4,2}}{D_{7,2}} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

$\boxed{\text{3° metodo}}$ Permutazioni

Si possono considerare anche le permutazioni degli otto partecipanti intorno al tavolo –
Le permutazioni totali sono $P_8 = D_{8,8} = 8!$

a) Il n° di permutazioni che hanno due ragazzi ai lati di Marco si ottiene moltiplicando il n° di possibili posizioni di Marco (8) per il numero di disposizioni (coppie ordinate di due ragazzi) possibili con i tre presenti ($D_{3,2}$) per il n° di possibili permutazioni dei cinque partecipanti rimanenti ($P_5 = D_{5,5} = 5!$)
e quindi:

$$\boxed{P_A = \frac{8 \cdot D_{3,2} \cdot D_{5,5}}{D_{8,8}} = \frac{8 \cdot \frac{3!}{(3-2)!} \cdot 5!}{8!} = \frac{8 \cdot \frac{3!}{1!} \, 5!}{8!} = \frac{\cancel{8} \cdot (3 \cdot 2) \cdot \cancel{5!}}{\cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}}$$

b) Il n° di permutazioni che hanno un ragazzo e una ragazza ai lati di Marco si ricava dalla precedente sostituendo a $D_{3,2}$ il n° di coppie M a S_x, F a D_x e viceversa: $(4 \times 3 + 3 \times 4)$ – Quindi:

$$\boxed{P_B = \frac{8\,(4 \cdot 3 + 3 \cdot 4) \cdot D_{5,5}}{D_{8,8}} = \frac{8 \cdot (24)\, 5!}{8!} = \frac{\cancel{8} \cdot 24 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}}$$

c) Il n° di permutazioni che hanno due ragazze ai lati di Marco si ricava come in a) sostituendo a $D_{3,2}$ il n° di coppie ordinate di ragazze (disposizioni) possibili con le quattro ragazze presenti $\longrightarrow$: $D_{4,2}$ – Quindi:

$$\boxed{P_c = \frac{8 \cdot D_{4,2} \cdot D_{5,5}}{D_{8,8}} = \frac{8 \cdot \frac{4!}{(4-2)!}\, 5!}{8!} = \frac{\cancel{8} (4 \cdot 3) \cdot \cancel{5!}}{\cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A15 2/12/1010

In un certo lotto di personal computer (PC) l'1% è difettoso. I PC vengono sottoposti ad un test che rivela i difetti nel 98% dei casi in cui difetti sono presenti e indica presenza di difetti nel 3% dei casi in cui il PC non è difettoso. Quanto vale la probabilità che un PC sia: a) difettoso se non passa il test (ossia se il test rivela difetti); b) non difettoso se passa il test (ossia se il test non rivela difetti)?

Quesito A15 - (Soluzione)

Si definiscano i seguenti eventi:

$D = \{$Il PC sottoposto al test è difettoso$\}$

$R = \{$Il test rivela presenza di difetti$\}$. (*)

Dal testo si ricavano le seguenti probabilità:

$P(D) = 0{,}01$ e quindi la complementare $P(\bar{D}) = 0{,}99$

$P(R|D) = 0{,}98$ " " " " $P(\bar{R}|D) = 0{,}02$ (**)

(***) $P(R|\bar{D}) = 0{,}03$ " " " " $P(\bar{R}|\bar{D}) = 0{,}97$.

Il quesito a) richiede di calcolare la probabilità $P(D|R)$ che si può trovare per mezzo delle probabilità date, usando la formula di Bayes:

$$P(D|R) = \frac{P(R|D)\cdot P(D)}{P(R)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}01}{0{,}0395} \cong 0{,}25 = 25\%$$

dove si è fatto uso della seguente (teorema delle probabilità totali):

$$P(R) = P(R|D)\cdot P(D) + P(R|\bar{D})\cdot P(\bar{D}) = 0{,}98\cdot 0{,}01 + 0{,}03\cdot 0{,}99 = 0{,}0395$$

Per il quesito b) il calcolo, analogo al precedente, è il seguente:

$$P(\bar{D}|\bar{R}) = \frac{P(\bar{R}|\bar{D})\cdot P(\bar{D})}{P(\bar{R})} = \frac{0{,}97\cdot 0{,}99}{0{,}9605} \cong 0{,}995 = 99{,}5\%$$

dove:

$$P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}0395 = 0{,}9605$$

(segue)

{Si osservi che il test è molto affidabile quando non rivela difetti $(P(\bar{D}|\bar{R}) = 99{,}5\%)$ ma non lo è affatto quando li rivela, infatti se il test rivela difetti è molto più probabile che il PC sia non difettoso $(P(\bar{D}|R) = 75\%)$ piuttosto che sia effettivamente difettoso $(P(D|R) = 25\%)$} (****)

NOTE

(*) Quando un test diagnostico rivela difetti si dice che "il test è risultato positivo". Quindi $P(R)$ è la probabilità che il test risulti positivo quando eseguto su un oggetto scelto a caso (in questo caso un PC). Tale probabilità dipende sia dalla frequenza di difetti negli oggetti considerati, sia dall'affidabilità del test.

(**) Questa probabilità è detta anche "probabilità di falso negativo", ossia è la probabilità che il test risulti negativo (non riveli difetti) quando eseguito su un oggetto in realtà difettoso. E' grave soprattutto in caso di test sanitari (perché non viene rivelata una malattia presente).

(***) Questa probabilità è detta anche "probabilità di falso positivo", ossia è la probabilità che il test risulti positivo (riveli difetti) quando in realtà l'oggetto non è difettoso. E' meno grave del caso precedente. Si può migliorare ripetendo il test sullo stesso soggetto : ciò equivale ad eseguire un diverso test con probabilità di falso positivo più bassa (si veda anche il Quesito A53).

(****) Un test affidabile dovrebbe avere basse probabilità sia di falso negativo sia di falso positivo, ma "quanto basse" dipende dalla situazione. Per esempio, il test in esame ha una probabiltà di falso positivo che, per quanto possa sembrare bassa (3%), è troppo elevata per la situazione in cui è applicato. Infatti essendo difettoso solo 1% degli oggetti, quando il test risulta positivo (ossia nel condizionamento a R) è moto più probabile che abbia fallito il test (75%) piuttosto che l'oggetto sia effettivamente difettoso (25%). Al limite, in una situazione in cui nessun oggetto fosse difettoso, nessuna probabilità di falso positivo, comunque bassa (ma non nulla) renderebbe il test affidabile, infatti in tal caso TUTTI i difetti rivelati sarebbero sempre falsi (falsi positivi).

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A36 13/2/12

Un'agenzia di viaggi porta comitive di turisti in visita prima a Roma e poi a Firenze.
Una comitiva si dichiara sufficientemente soddisfatta se trova bel tempo in almeno una delle due città.
Sapendo che la probabilità che a Firenze si trovi bel tempo se a Roma si è trovato brutto tempo è 0,4 e che il 90% delle comitive si dichiarano sufficientemente soddisfatte, qual è la probabilità che una comitiva trovi bel tempo a Roma?
Si usino le seguenti definizioni di eventi: R ={Bel tempo a Roma}; F ={Bel tempo a Firenze}; C ={Comitiva sufficientemente soddisfatta}.

Quesito A36 (Soluzione)

Si osserva immediatamente che è:

$C = R \cup F$ equivalente a: $\overline{C} = \overline{R} \cap \overline{F} = \overline{R}\,\overline{F}$, ossia: la comitiva è insoddisfatta se trova tempo brutto a Roma ($\overline{R}$) e ($\cap$) a Firenze ($\overline{F}$). [Si ricordino anche le formule di De Morgan]-

Dal testo si hanno subito le seguenti probabilità:

$P(F|\overline{R}) = 0{,}4$ da cui $P(\overline{F}|\overline{R}) = 1 - P(F|\overline{R}) = 0{,}6$

$P(C) = 0{,}9$ da cui $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 0{,}1$

Ricordando la definizione di probabilità condizionata si ha:

$$P(\overline{C}) = P(\overline{R}\,\overline{F}) = P(\overline{F}|\overline{R}) \cdot P(\overline{R}) = P(\overline{F}|\overline{R}) \cdot (1 - P(R))$$

Da cui si ricava $P(R)$:

$$\boxed{P(R) = 1 - \frac{P(\overline{C})}{P(\overline{F}|\overline{R})} = 1 - \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}}$$

Altro modo

Gli eventi R e F non sono mutuamente esclusivi infatti bel tempo a Roma (R) non esclude bel tempo a Firenze (F), quindi si può scrivere:

$$\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(R \cup F) = \mathcal{P}(R) + \mathcal{P}(F) - \mathcal{P}(RF) \qquad (1)$$

Da questa occorre esprimere $\mathcal{P}(F)$ e $\mathcal{P}(RF)$ in funzione di $\mathcal{P}(R)$ e ricavare quest'ultima – Quindi:

$\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(F|R)\cdot\mathcal{P}(R) + \mathcal{P}(F|\bar{R})\cdot\mathcal{P}(\bar{R})$ ← Prob. totali

$\mathcal{P}(RF) = \mathcal{P}(F|R)\cdot\mathcal{P}(R)$ ← Defin. di prob. condizionata

Sostituendo in (1):

$$\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(R) + \overbrace{\cancel{\mathcal{P}(F|R)\cdot\mathcal{P}(R)} + \mathcal{P}(F|\bar{R})\cdot\mathcal{P}(\bar{R})}^{\mathcal{P}(F)} - \overbrace{\cancel{\mathcal{P}(F|R)\cdot\mathcal{P}(R)}}^{\mathcal{P}(RF)} =$$

$$= \mathcal{P}(R) + \mathcal{P}(F|\bar{R})\left[1 - \mathcal{P}(R)\right] = \mathcal{P}(R)\left[1 - \mathcal{P}(F|\bar{R})\right] + \mathcal{P}(F|\bar{R})$$

Da cui:

$$\boxed{\mathcal{P}(R) = \frac{\mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(F|\bar{R})}{1 - \mathcal{P}(F|\bar{R})} = \frac{0{,}9 - 0{,}4}{1 - 0{,}4} = \frac{5}{6} = 0{,}8\bar{3}}$$

ESAME DI TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A119
Il sig. Rossi chiede a un amico di innaffiare una sua pianta mentre è in vacanza. Se la pianta non sarà innaffiata probabilità di trovarla morta è l'80%. Trattandosi di una pianta delicata, anche se sarà innaffiata la probabilità di trovarla morta è il 15%. La probabilità che l'amico ricordi di innaffiare la pianta è il 90%.
a) Qual è la probabilità che il sig. Rossi trovi la pianta viva al suo ritorno?
b) Se trova la pianta morta, qual è la probabilità che l'amico abbia dimenticato di innaffiarla?

Quesito A119 (Soluzione)

Si definiscano, p.es., gli eventi:

$V = \{$La pianta viene trovata viva$\}$

$I = \{$La pianta è stata annaffiata$\}$.

Dal testo si ricavano le seguenti probabilità

$P(\bar{V}|\bar{I}) = 0{,}8$ (da cui $P(V|\bar{I}) = 1 - P(\bar{V}|\bar{I}) = 0{,}2$)

$P(\bar{V}|I) = 0{,}15$ (" " $P(V|I) = 1 - P(\bar{V}|I) = 0{,}85$)

$P(I) = 0{,}9$ (" " $P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 0{,}1$)

a) Si cerca la probabilità $P(V)$ che si può calcolare mediante il teorema delle probabilità totali:

$$\boxed{P(V) = P(V|I)\cdot P(I) + P(V|\bar{I})P(\bar{I}) = 0{,}85\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}785}$$

che è la probabilità che la pianta sia trovata viva.

b) Si cerca la probabilità $P(\bar{I}|\bar{V})$ che si può calcolare applicando la formula di Bayes:

$$\boxed{P(\bar{I}|\bar{V}) = \frac{P(\bar{V}|\bar{I})\cdot P(\bar{I})}{P(\bar{V})} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}1}{0{,}215} = 0{,}372}$$

che è la probabilità che la pianta non sia stata innaffiata se è stata trovata morta — $\{$Si osservi che $P(\bar{V}) = 0{,}215$ è il complemento a 1 della probabilità trovata in a): $P(\bar{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0{,}785 = 0{,}215\}$.