Calcolo probabilistico

Mc128k

2015-11-02

Contenuti

Indice

1 Calcolo probabilistico

Si utilizza il calcolo probabilistico quando si conoscono i possibili risultati di un evento ma non si sa quale di essi succederà effettivamente, essendo l'esperimento casuale (detto anche aleatorio o stocastico, da non confondere con causale).

Definizione 1.1 (Spazio campione)**.** Viene definito spazio campione, o ambiente, l'insieme di tutte le uscite sperimentali, che comprende quindi tutte le possibili eventuali combinazioni delle singole uscite in un momento.

$$S = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \tag{1.1}$$

Quando si esegue l'esperimento si ha una unica uscita sperimentale, per esempio:

- Lancio di una monete: $S = \{T, C\}$
- Due monete: $S = \{TT, TC, CT, CC\}$
- Dado e moneta: $S = \{R1T, R1C, R2T, \dots, R6C\}$

Lo spazio campione si può esprimere in diversi modi e può comprendere elementi finiti o infinitamente numerabili, per esempio $S = \{100, 101, 102, \dots\}$ contiene infiniti elementi da 100 in poi.

La cosa importante è che lo spazio campione contenga sempre ogni possibile esito dell'esperimento.

Definizione 1.2 (Spazio campione discreto o continuo)**.** Uno spazio campione si dice **discreto** se è formato da elementi numerabili o infinitamente numerabili (per esempio un numero naturale), mentre uno spazio campione **continuo** può comprendere elementi infiniti (per esempio la posizione di un oggetto lasciato cadere può essere infinitamente precisa).

Definizione 1.3 (Evento)**.** Un evento è un sottoinsieme di S che può quindi comprendere uno o più elementi, per esempio un evento può essere descritto dai casi in cui escono numeri pari in un dado $A = \{r_2, r_4, r_6\}$. Da non confondere con la uscita sperimentale, esso può contenere una o più uscite, e di conseguenza può solo verificarsi o non verificarsi una volta che si esegue l'esperimento.

In particolare un evento può essere **certo** se si verifica sempre, **impossibile** se $A = \emptyset$.

Per avere una previsione degli eventi si usa il calcolo delle probabilità, che quindi impone un modello matematico per ottenere un risultato. Per studiare con precisione la probabilità di eventi complessi si passa da metodi fisici (per esempio lanciando un dado si sa che ogni faccia ha un sesto di possibilità di uscire) a metodi teorici, che sfruttano la applicazione di modelli matematici per ottenere un risultato. Passare dal modello fisico a quello teorico è un compito della **statistica**.

1.1 Probabilità e frequenza relativa

Una probabilità è un numero assegnato ad un evento in modo opportuno, che indica con quale frequenza lo stesso può accadere, se ripetuto infinite volte. Viene indicato come una "funzione" che prende un evento in entrata:

$$P(E) = N \in [0, 1] \tag{1.2}$$

Si parte da assiomi:

1. $P(S) = 1$, quindi l'evento dato dallo spazio campione si verifica sempre
2. $P(A) \geq 0$, non esiste una probabilità negativa
3. Se $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, la somma delle probabilità di due insiemi disgiunti

La **frequenza relativa** si definisce come il rapporto fra i casi favorevoli (in cui si verifica l'evento) e i casi possibili:

$$fn(A) = \frac{n_A}{n} \geq 0 \tag{1.3}$$

Proprietà della frequenza relativa:

1. $fn(S) = \frac{n}{n} = 1$
2. $fn(A \cup B) = \dfrac{n_{A \cup B}}{n} = \dfrac{n_A + n_B}{n} = fn(A) + fn(b)$

Per descrivere un esperimento casuale, l'insieme S deve essere chiaramente e **univocamente descritto**, gli **eventi** devono far parte di un **sottoinsieme** di S e ogni evento deve avere una **probabilità assegnata**.

La probabilità della unione e intersezione di insiemi si scrive:

- $P(A \cup B) = P(A + B)$
- $P(A \cap B) = P(A, B)$

1.2 Algebra degli insiemi

Un elemento può appartenere o non appartenere ad un insieme. Se tutti gli elementi di un insieme B sono anche elementi di A allora $B \subset A$ e $A \supset B$. Un insieme è sempre sottoinsieme di sé stesso $A \subset A$.

Si indica la unione di insiemi con $\cup$ e la intersezione con $\cap$. Se due insiemi sono disgiunti allora $A \cap B = \emptyset$. Entrambe le operazioni godono di proprietà commutativa, associativa, distributiva.

Se ogni insieme indica un esempio, allora se sono disgiunti vuol dire che gli eventi sono mutualmente esclusivi, quindi non si possono verificare assieme.

Una **partizione** di S è una classe di sottoinsiemi (anche infinitamente numerabili) tali che nessuno abbia elementi in comune con gli altri, pur comprendendo tutti gli elementi dello spazio campione:

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \end{cases} \tag{1.4}$$

Intuitivamente si può concepire una partizione come un insieme di tessere di un puzzle, oppure una tassellatura, dove l'unione di tutti gli elementi produce l'insieme di origine.

Si ha che la probabilità della unione dei singoli insiemi è quindi uguale alla somma delle probabilità degli stessi:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \tag{1.5}$$

Come conseguenza degli assiomi (la barra indica l'insieme complementare):

$$P(\emptyset) = 0 P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{1.6}$$

1.3 Sottoinsiemi

Dato uno spazio campione S, e un insieme A contenuto in un insieme B, quindi $A \subset B$, si può affermare che $P(A) \leq P(B)$.

Per dimostrarlo basta notare che $B = AB \cup \bar{A}B$ (la **moltiplicazione** indica la **intersezione**), i due insiemi ottenuti sono disgiunti, quindi:

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) \tag{1.7}$$

Per il secondo assioma $P(\bar{A}B) \geq 0$, quindi $P(B) \geq P(A)$.

1.4 Spazi campione uniformi

In uno spazio si dicono eventi elementari quegli eventi che sono sempre disgiunti. La probabilità di un evento discreto si può esprimere come la somma di probabilità di eventi elementari.

Uno spazio campione S si dice uniforme se è finito, ha N elementi e gli eventi elementari sono equiprobabili.

$$S = \{1, 2, 3, \dots N\} \tag{1.8}$$

$$P\{1\} = P\{2\} = \dots = P\{N\} := \hat{P} = \frac{1}{N} \tag{1.9}$$

Se A è formato da k uscite elementari:

$$A = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \implies P(A) = k \cdot \hat{P} = \frac{k}{N} \tag{1.10}$$

dove k rappresenta i casi favorevoli e N i casi possibili.

Esempio 1.1.
Si lancia un dado da 6 facce diverse volte finché non esce il 6. Bisogna determinare lo spazio campione in caso di:

1. Tutte le possibili sequenze con il primo 6 in fondo
2. Il numero di lanci necessario per ottenere il primo 6

Per il primo caso si ottiene un insieme infinitamente numerabile:

$$\begin{aligned} S_1 = \{&6, \\ &16, 26, \dots, 56, \\ &116, \dots, \\ &\dots, 26, \dots\} \end{aligned}$$

E per il secondo insieme si può solo dire che potrebbero volerci da zero a infiniti lanci per ottenere il primo 6:

$$S_2 = \{i : i \geq 1\}$$

2 Calcolo combinatorio

Una serie di metodi per calcolare i casi favorevoli e possibili.

2.1 Permutazioni

Indicate con l'operazione di fattoriale, indicano il modo di mettere in fila n elementi:

$$P_n = n! \tag{2.1}$$

2.2 Disposizioni semplici

Le disposizioni semplici di n oggetti in gruppi di k elementi (per esempio presi tre a tre) dove $k \leq n$ si calcolano:

$$\begin{cases} n = 4 & (\text{es. } A, B, C, D) \\ k = 2 & (\text{es. } AB, AC, AD, BA, \dots) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)] = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.3}$$

Il numeratore trova le permutazioni degli elementi, e il denominatore fa in modo di "rimuovere la coda", quindi le parti di permutazioni che non interessano (per esempio $n-k$ rimuove da $ABDC$ la parte DC lasciando solo i primi due elementi.

In altre parole rappresenta il numero di sequenze ordinate estratte da un insieme n. **Un elemento non può essere preso assieme a sè stesso**.

2.3 Disposizioni con ripetizione

A differenza del caso precedente include anche i casi in cui si prende un elemento con sé stesso, quindi si calcola:

$$D^*_{n,k} = n^k \quad (\text{es. } AA, AB, AC, \dots, BA, BB, \dots) \tag{2.4}$$

2.4 Combinazioni (Binomiale)

Si ottiene il numero di sottoinsiemi di k elementi **non ordinati** estratti da n elementi. Si ottiene togliendo le permutazioni degli stessi elementi dalle disposizioni di tutti quelli possibili, per esempio quindi ACB, ABC, CAB rappresentano lo stesso elemento perché non conta l'ordine.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.5}$$

2.5 Multinomiale

Si hanno n oggetti da distribuire in r gruppi, rispettivamente di $n_1, n_2, \ldots, n_r$ elementi.

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-(n_r-1)}{n_r} = \frac{n}{n_1!n_2!\ldots n_r!} = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} \tag{2.6}$$

Per esempio una applicazione può essere: "in quanti modi è possibile distribuire n oggetti totali in r scatole?"

Esempio 2.1.
Vengono estratte 2 palline da un contenitore contenente 6 di colore blu e 5 rosse. Qual è la probabilità di avere una blu e una rossa?

La probabilità si ottiene sempre con lo stesso metodo:

$$P = \frac{\text{coppie probabili}}{\text{coppie possibili}}$$

Le coppie possibili si possono pensare come ordinate:

$$S_1 = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2, B_1, \ldots, R_5R_4\}$$

In base a questo si può costruire una matrice di possibili uscite dove si "scontrano" tutte le palline con tutte le altre in fig.1 (escludendo i casi in cui si estrae una pallina con sé stessa, rappresentati dalla diagonale principale).

La diagonale principale non si considera, e dato che non interessa l'ordine si esclude la matrice triangolare inferiore (o superiore); a questo punto si selezionano i casi in cui una pallina viene presa con un'altra di colore diverso. Si ottiene che i casi favorevoli sono:

$$n_{A2} = 5 \cdot 6 = 30$$

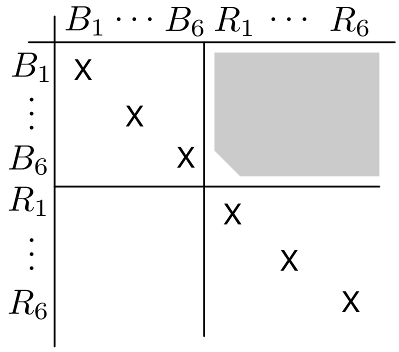

Figura 1: Calcolo delle possibili combinazioni

E i casi totali:

$$n_2 = \frac{11^2 - 11}{2} = 55$$

La probabilità risulta quindi:

$$P(A) = \frac{n_{A2}}{n_2} \simeq 0.545$$

Esempio 2.2.
Da un mazzo di 52 carte se ne estrae una alla volta finché non compare un asso. Ci si chiede se è più probabile che compaia subito dopo un asso di picche o un due di fiori. La differenza è che il secondo asso estratto non può essere prima del primo, mentre il due di fiori si.

Lo spazio campione si costruisce con tutte le permutazioni di 52 carte:

$$n_S = 52!$$

L'evento A che ci interessa è quello che contiene un asso di picche immediatamente dopo il primo asso. Si contano quindi le sequenze senza asso di picche (viene estratto dal mazzo), $k = 51!$, quindi si inserisce lo stesso subito dopo il primo asso. Ogni volta che viene inserito si individua un elemento di S che ci interessa per la probabilità, quindi il numero di sequenze ottenute è esattamente uguale a quello che ci interessa, perché per ipotesi l'asso di picche si inserisce dopo il primo asso, e dato che ci sono in totale quattro assi c'è sempre una maniera di inserirlo. Si ha quindi:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{51!}{52!} = \frac{1}{52}$$

Per quello che riguarda la probabilità che la carta immediatamente successiva sia un due di fiori si fa la stessa cosa, quindi in quanti modi si può mettere il due di fiori subito dopo il primo asso?

Esempio 2.3.
Qual è la probabilità di vincere un terno al lotto, sapendo che ci estraggono cinquine da un insieme di 90 elementi numerati e ne bastano tre azzeccati per vincere?

Come sempre, casi probabili su casi possibili, i possibili modi di estrarre due numeri tolti i tre vincenti diviso tutti i possibili modi di estrarre 5 numeri:

$$P(A) = \frac{\binom{90-3}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{87 \cdot 86}{1 \cdot 2}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11748}$$

Esempio 2.4.
Qual è la possibilità di vincere al superenalotto, sapendo che si estraggono sestine da 90 numeri?

A questo punto, dato che i sei numeri devono essere tutti esatti, si ha una sola possibilità su tutti i modi di estrarre i numeri, senza contare l'ordine, quindi:

$$P(A) = \frac{1}{\binom{90}{6}} = \frac{1}{622614630}$$

L'equivalente di beccare un chicco di riso giusto in una stanza piena.

3 Probabilità condizionata

Si tratta di un modo di calcolare la probabilità sapendo che il risultato risulta in un insieme dato, per esempio quando si lancia un dado si ha un sesto di probabilità di avere 5, ma se si sa che l'uscita è maggiore o uguale di 4 allora la probabilità diventa di $\frac{1}{3}$.

Un altro esempio può essere che la probabilità di una persona di morire dopo 100 anni è bassa, ma è molto più alta se si condiziona la probabilità includendo solo le persone che sono arrivate a 90 anni.

La probabilità condizionata di A dato un evento condizionante M è quindi:

$$P(A|M) := \frac{P(AM)}{P(M)} \tag{3.1}$$

Da cui:
$$P(AM) = P(A|M) \cdot P(M) \tag{3.2}$$

Le probabilità condizionate rispettano gli assiomi:

- $P(S|M) = 1$
- $P(A|M) \geq 0$
- $P(A \cup B|M) = P(A|M) + P(B|M), \quad A \cap B = \emptyset$

Esempio 3.1.
Si lancia un dado e qualcosa indica che il numero uscito è dispari. Ci si chiede qual è la possibilità che sia uscito 3. Gli insiemi sono quindi:

$$A = \{3\} \tag{3.3}$$
$$M = \{\text{faccia dispari}\} \tag{3.4}$$
$$P(A|M) = \frac{P(\{3\} \cap \{\text{faccia dispari}\}}{P\{\text{faccia dispari}\}} \tag{3.5}$$
$$P(A|M) = \frac{P\{\{3\} \cap \{1,3,5\}\}}{P\{1,3,5\}} = \frac{1}{3} \tag{3.6}$$

Esempio 3.2.
Da un mazzo di 52 carte, se ne estraggono due. Qual è la possibilità di estrarre due assi?

Si può risolvere in due modi, nel primo i casi probabili sono tutti i modi di estrarre due assi:
$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{221}$$

Nel secondo caso si può vedere la probabilità come la intersezione di due, la prima identifica gli assi che escono per primi e la seconda gli assi che escono per secondi:

$$P(\text{due assi}) = P(\text{asso alla prima} \cap \text{asso alla seconda})$$

La probabilità che esca un asso alla seconda estrazione è condizionata dal fatto che sia prima uscito un asso alla prima.

$$P = P(\text{asso alla prima}) \cdot P(\text{asso alla seconda}|\text{asso alla prima}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

Esempio 3.3.
Si lancia una coppia di dadi, l'evento di cui si vuole calcolare la probabilità è:

$$A = \text{facce uguali}$$

Senza nessuna condizione risulta che $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Se si aggiunge la condizione M tale che la somma deve essere ≤ 3 e sapendo che essa si è verificata si ottiene:

$$M = \{i, j : i + j \leq 3\} = \{11, 21, 12\}$$

I casi verificati da M sono quindi $\frac{3}{36}$, di conseguenza la probabilità condizionata risulta:

$$P(A|M) = \frac{P(AM)}{P(M)} = \frac{P\{\text{facce uguali} \land \text{somma } \leq 3\}}{P(M)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$

3.1 Regola della catena

La probabilità di un evento dato dalla **intersezione** di diversi eventi è data da:

$$P\{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots E_n\} = P\{E_1\} \cdot P\{E_2|E_1\} \cdot P\{E_3|E_1E_2\} \ldots \tag{3.7}$$

3.2 Teoria delle probabilità totali

Si applica alle probabilità condizionate quando l'insieme è formato da partizioni. Di fatto si individuano tutti i casi possibili (non di sovrappongono) e per ognuno di essi si individua la probabilità, poi si sommano.

Siano A_i per $i = 1 \ldots n$ partizioni di S, quindi formalmente:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S \quad A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j \tag{3.8}$$

Ci interessa definire l'evento B come in fig.2 tramite **unione dei pezzi dati dalle intersezioni con le partizioni A_i**.

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \cdots + P(B|A_n) \cdot P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \tag{3.9}$$

L'insieme B viene quindi composto parte per parte, e funziona anche per un numero infinito di partizioni.

Esempio 3.4.
Due impianti A, B producono motori, il primo ha una possibilità di guasto $p_1 = 3\%$

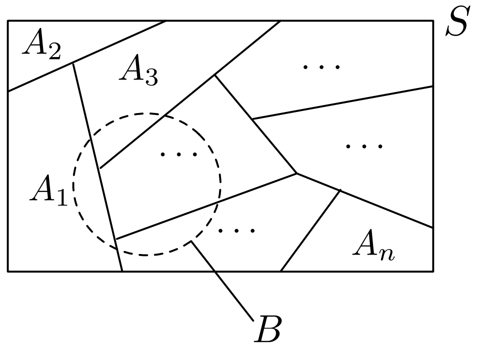

Figura 2: Insieme formato da partizioni (tassellatura)

il secondo $p_2 = 1\%$. Si vuole sapere quale sia la probabilità che preso un lotto da uno degli impianti il 4% siano difettosi.

Gli impianti hanno il 50% di probabilità di essere scelti, quindi lo spazio campione S viene diviso in due parti, un insieme A contiene i casi in cui i motori sono presi dal primo impianto, B quelli del secondo. Entrambi gli impianti hanno una probabilità di produrre il 4% di motori difettosi, ma è più probabile che vengano dal primo impianto, dato che il tasso di fallimento è più alto; nulla vieta però che anche l'impianto B possa produrre il 4% di motori difettosi.

Entrambi possono produrre il 4% di motori guasti, quindi l'insieme che si cerca (probabilità di avere 4% di motori difettosi preso un lotto) interseca con A e B, maggiormente col primo.

La probabilità totale si ha quindi unendo i due "contributi", quindi la probabilità che il 4% siano difettosi dato che sono presi da A più la stessa probabilità dato che sono presi da B:

$$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B)$$

3.3 Teorema di Bayes

Viene usato per calcolare la probabilità della causa che ha scatenato un evento. Si ricava direttamente con la formula della probabilità condizionata.

Data la probabilità condizionata di un evento A data una causa M, la probabilità condizionata della causa M dato l'evento A è:

$$P(M|A) = \frac{P(MA)}{P(A)} = \frac{P(A|M) \cdot P(M)}{P(A)} \tag{3.10}$$

Esempio 3.5.
Una ditta produce motori e ha 3 diversi impianti:

- L'impianto A_1 produce il 50% dei motori, e quelli difettosi sono $P_{d1} = 0.02$
- L'impianto A_2 produce il 30% dei motori, e quelli difettosi sono $P_{d1} = 0.05$
- L'impianto A_3 produce il 20% dei motori, e quelli difettosi sono $P_{d1} = 0.01$

Si vuole sapere la probabilità totale che un motore sia difettoso.

Lo spazio campione è quindi dato da tutti i motori che escono dagli impianti. Se prendendo un motore a caso esso risulta uscito dalla prima industria, allora si verifica l'evento A_1. Quindi le probabilità valgono:

- $P(A_1) = 50\% = \frac{5}{10}$
- $P(A_2) = 30\% = \frac{3}{10}$
- $P(A_3) = 20\% = \frac{2}{10}$

Con l'insieme B si indicano i motori difettosi. La probabilità di B condizionata da A_1 è banalmente 0.02, quindi mettendo tutto insieme:

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) = 0.027$$

Sfruttando Bayes si può calcolare la probabilità che un motore difettoso sia uscito da A_2:

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.05 \cdot 0.3}{0.027} = 0.556$$

Esempio 3.6.
Un test a risposta multipla contiene domande con m risposta ciascuna. Concentrandosi su una di essa si sa che una certa percentuale p di studenti conosce la risposta, e si ipotizza che chi conosce la risposta la indichi giusta.

$$K = (\text{studente sa risposta}) = p$$
$$C = (\text{risposta corretta})$$

Se lo studente non conosce la risposta, essa viene indicata a caso (anche se normalmente non avviene in questo modo). Si vuole sapere **qual è la probabilità**

che lo studente conosca effettivamente la risposta osservando una risposta corretta. Bisogna cercare quindi:

$$P(K|C) = \frac{P(C|K) \cdot P(K)}{P(C)}$$

Si sa che la probabilità che la risposta sia corretta, condizionata dallo studente che sa la risposta, $(P(C|K))$ è sempre 1; $P(K)$ è un dato (la percentuale di studenti che sa la risposta), e $P(C)$ è la probabilità che sia corretta. Si può quindi ottenere:

$$P(C) = P(C|K) \cdot P(K) + P(C|\bar{K}) \cdot P(\bar{K}) = 1 \cdot p + \frac{1}{m} \cdot (1-p)$$

Si ottiene quindi che la probabilità che lo studente conosca la risposta, condizionata dal fatto che essa sia giusta, è data da:

$$P(K|C) = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{n}(1-p)}$$

Un insegnante vuole che tale probabilità sia elevata, per fare ciò si può cambiare p o aumentare il numero di caselle.

Se $P(K|C) > 0.7$ allora $m > \frac{0.7(1-p)}{0.3 \cdot p}$. Per esempio:

- per $p = 0.5$ vale che $m > 2.33 \to m = 3$
- per $p = 0.3$ vale che $m > 5.44 \to m = 6$

3.4 Indipendenza fra eventi

Si ha questa condizione quando il verificarsi di un evento non influenza la probabilità di un altro evento dato. Dati due eventi A e B si dice che sono indipendenti se:

$$P(A|B) = P(A) \implies \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \tag{3.11}$$

$$P(AB) := P(A) \cdot P(B) \tag{3.12}$$

A livello insiemistico accade che l'insieme B contiene l'insieme A.

In esperimenti fisici, come il lancio di dadi o monete, si può trovare la indipendenza delle probabilità quando non sussiste una relazione fisica tra essi. Essendo indipendenti vale quindi che un evento non condiziona l'altro:

$$P(A|B) = P(A) \tag{3.13}$$

Se A e B sono indipendenti, lo sono anche A e $\bar{B}$ (complementare), infatti:

$$A = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B} \text{ (sono disgiunti)} \tag{3.14}$$

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \tag{3.15}$$

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = \tag{3.16}$$

$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B}) \tag{3.17}$$

Si dice che n eventi $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sono indipendenti se per qualunque sottogruppo accade che la probabilità del prodotto è uguale al prodotto delle probabilità singole:

$$P(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = P(\varepsilon_1) \cdot P(\varepsilon_2) \ldots P(\varepsilon_n) \tag{3.18}$$

Due o più eventi si dicono invece **condizionalmente indipendenti** se le proprietà di indipendenza valgono nell'ambito di un certo condizionamento, quindi dato un evento M tale che $P(M) \neq 0$ vale che:

$$P(AB|M) = P(A|M) \cdot P(B|M) \tag{3.19}$$

4 Prove ripetute

Si applica questo teorema quando si esegue tante volte la stessa prova, per esempio si lanciano diverse volte un dado. Permette di trovare la probabilità di avere un certo risultato dato dalla ripetizione di esperimenti.

Bisogna fare attenzione a non confondere i casi in cui non si può applicare il teorema; le prove ripetute sono tali se **ad ogni esecuzione si ripristina esattamente lo stato precedente**, quindi per esempio valgono diversi tiri dello stesso dado, ma non la estrazione di palline da un numero limitato, ad ogni estrazione il numero presente cambia, quindi non vale la formula.

Per avere la probabilità che ci siano un numero di successi compresi fra k_1 e k_2, data la probabilità di un singolo successo p e l'inverso $q = 1 - p$, eseguite n prove:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{4.1}$$

Esempio 4.1.
Viene lanciato un dado quattro volte, le uscite sperimentali sono delle sequenze di punteggi. La ripetizione di n volte dell'esperimento porta ad avvicinarsi ad avere

6^4 possibili combinazioni. Ci si chiede quale sia la probabilità che esca la sequenza $f_3 f_2 f_3 f_1$.

Cercando una faccia specifica in un certo posto si ha che:

$$\{f_i \text{ al primo lancio}\} = \{f_i f_1 f_1 f_1, f_i f_2 f_1 f_1 ...\}$$
$$\{f_j \text{ al secondo lancio}\} = \{f_1 f_j f_1 f_1, f_2 f_j f_1 f_1 ...\}$$

Quindi la probabilità di avere la sequenza $f_3 f_2 f_3 f_1$ si ottiene con la intersezione dei vari eventi considerati:

$$\begin{aligned} P\{f_3 f_2 f_3 f_1\} &= P\{(f_3 \text{ al primo lancio}) \cap (f_2 \text{ al secondo lancio}) \cap \dots\} \\ &= P\{f_3 \text{ al primo lancio}\} \cdot P\{f_2 \text{ al secondo lancio}\} \end{aligned}$$

Ogni probabilità individua un evento che ha successo in ogni esecuzione dell'esperimento. L'insuccesso è dato dal contrario del successo:

$$p = P\{successo\}$$
$$q = P\{insuccesso\} = 1 - p$$

Si ha che per la probabilità di eventi del tipo s, s, i, s, s, i, i, dove si hanno n prove in qualunque ordine con s che indica il successo e i l'insuccesso si può calcolare:

$$P\{s, s, i, s, s, i, i\} = p^k \cdot q^{n-k}$$

La probabilità di ciascuna sequenza è sempre la stessa, ed ogni sequenza è mutualmente inclusiva ad ogni altra, la probabilità si ottiene quindi:

$$P\{k \text{ successi su } n \text{ prove}\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Dove il binomiale indica il numero di sequenze di k successi estratti da n posizioni.

Esempio 4.2.
Si lancia un dado 5 volte ($n = 5$), si vuole calcolare la probabilità di ottenere due volte la faccia 5.

Formalizzando il problema si ha che:

$$k = 2$$
$$s = \{\text{faccia 5 al singolo lancio}\}$$

Applicando la formula il risultato si ottiene:

$$P = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2}$$

Esempio 4.3.
Una coppia di dadi viene lanciata 4 volte. Ci si chiede quale sia la probabilità che si presenti una somma uguale a 7.

$$s = \{\text{somma uguale a 7}\}$$
$$P\{\text{non si presentino mai numeri con somma 7}\} = P\{\text{0 successi su 4 prove}\} =$$
$$= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Ci sono 6 coppie che sommate fanno 7. La probabilità di avere la somma che sia 7 è quindi:

$$P\{s\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = p$$

La probabilità di avere almeno un successo in n prove è:

$$1 - P\{\text{0 successi su n prove}\}$$

La probabilità di avere almeno una somma uguale a 7 su 4 lanci è quindi data da:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Generalizzando, la probabilità di avere un numero di successi compreso fra k_1 e k_2 è:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

5 Spazi campione uniformi

Si ha uno spazio campione uniforme quando sono presenti una infinità non numerabile di uscite sperimentali. Lo spazio campione S è equipollente all'insieme dei numeri reali.

Ogni evento è un sottoinsieme di S, quindi la unione e/o intersezione di intervalli di $\mathbb{R}$. Un evento elementare è rappresentato da un singolo punto, che come si vedrà ha probabilità zero.

Esempi di eventi:

$$A = \{a \leq x \leq B\} \tag{5.1}$$
$$B = \{x \leq 0\} \tag{5.2}$$
$$C = \{x = x_0\} \tag{5.3}$$
$$D = \{a < x \leq b\} \tag{5.4}$$

Per misurare la probabilità a tutti gli eventi rispettando gli assiomi si ricorre ad una funzione $f(x) \geq 0$ integrabile su tutto l'intervallo che assegna una probabilità a tutti gli eventi del tipo $\{x \leq x_i\}$, dove x_i è la variabile elementare. Serve usare una funzione di questo tipo dato che sarebbe più difficile (impossibile?) misurare e sommare probabilità infinitesime. Ogni punto infinitesimo ha un suo "peso" che influisce sulla probabilità totale dell'evento, e il calcolo si esprime con un integrale:

$$P\{x \leq x_i\} := \int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx \tag{5.5}$$

Si fa in modo di fare rispettare il primo assioma ponendo che la probabilità di un evento esteso a tutto lo spazio campione è 1:

$$P\{x < +\infty\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{5.6}$$

Di conseguenza la probabilità di un evento che non comprende tutto lo spazio può essere solo compresa tra 0 e 1:

$$P\{x \leq x_i\} \leq 1 \tag{5.7}$$

Gli eventi elementari hanno probabilità zero (infinitesima), ma non nulla. Questo non significa che sono impossibili, ma che è infinitamente difficile che capiti esattamente un punto dato.

Ciò nonostante non si può vedere l'intervallo come una sommatoria di singoli eventi, cadrebbe il terzo assioma. Ogni intervallo comprende una infinità non numerabile di punti, e l'assioma vale solo per un numero di eventi finito o finitamente numerabile.

Per misurare la probabilità si fa uso dell'integrazione (come già visto), quindi si ha che:

$$P\{x_1 \leq x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \tag{5.8}$$

Essendo la probabilità infinitesima per dx si ha che la probabilità totale rimane invariata anche se si rimuove un evento elementare dall'insieme.

5.1 Spazi campione uniformi continui

Si ha uno spazio campione uniforme quando la probabilità che un evento ricada in intervallo è la stessa per qualunque intervallo della stessa dimensione. La probabilità che un evento sia compreso fra x_1 e x_2 è quindi:

$$P\{x_1 \leq x \leq x_2\} = \frac{x_2 - x_1}{b - a} \tag{5.9}$$

Per esempio una telefonata che può arrivare a caso è concettualizzabile da uno spazio campione uniforme (stessa probabilità che arrivi in qualunque momento) continuo (può arrivare in qualunque istante).