ESERCIZI DI "TEORIA DEI SEGNALI B"

[le note tra parentesi quadre si riferiscono ad esercizi del libro]

pag.

1) Durata, Area, Valore medio temporale, Energia totale, Potenza media [1]) [§1.4, pag. 19]

5) Trasformazioni Elementari (NON IN ELENCO)

7 Somme e sottrazioni di segnali es. 4) (b)
es. 4) (a)
es. 4) (c)
es. 4) (d)

11 Impulso di Dirac: campionamento e convoluzione [§1.6, pag. 26] [5])

12 Causalità di Integratore a finestra mobile e Amplificatore ideale es. 7) (a)
es. 7) (b)

13 stazionarietà di Integratore a finestra mobile es. 8) (a)
14 linearità " " es. 9) (b)
15 stazionarietà di Amplificatore ideale es. 8) (b)
15 linearità " " es. 9) (a)

16 Linearità e stazionarietà di sistemi [vedi anche §2.1, pag. 31] es. 11)

es. [12] (b)
19) Risposta Impulsiva di Integratore a finestra mobile e Amplificatore ideale [§2.3, pag. 34]
es. [12] (a)

21) Risposta impulsiva dei sistemi es. 13)

23) Risposta impulsiva del filtro RC (passa-alto) es. [15]) [§2.3, pag. 34]
24 " " " (passa-basso) es. [14] → MANCA SOL. MANCA p. 24

25) Sistemi in cascata e in parallelo es. 17) (a) [§2.3.1, pag. 36] es. [16] (a) (b)
" " " es. 17) (b)
" " " es. 17) (c)

31 Impulso rettangolare in RC passabasso [vedi anche §2.3.2, pag. 39] es. [19])

33 Risposte in ampiezza e fase del filtro RC (passa-basso) es. [21] [già svolta nel §2.5, pag 44]
34 " " (passa-alto) es. 22)

36 Serie di Fourier per onda quadra (duty-cycle 50%) [§3.1, pag. 50] es. [25])

37 Filtraggio di segnali sinusoidali (o somme di sinusoidi) es. 23)

ESERCIZIO [1])

Valutare DURATA, AREA, VALOR MEDIO TEMPORALE, ENERGIA TOTALE, POTENZA MEDIA per i segnali ~~standard~~ notevoli

① $x(t) = A$

- DURATA: è facile intuire che la durata è ∞
- AREA: se $A=0$ l'area è 0
  se $A<0$ l'area è $-\infty$
  se $A>0$ l'area è $+\infty$
- VALOR MEDIO: $\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{A}{\cancel{T}}\cancel{T} = A$
- ENERGIA TOTALE $E_{TOT} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\,dt = +\infty$
- POTENZA MEDIA $P_M = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A^2\,dt = \frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T}\cdot A^2 = A^2$

---

② $x(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t\geq 0 \end{cases}$

- DURATA: è facile intuire che la durata è ∞
- AREA: " " " l'area è $+\infty$
- VALOR MEDIO $\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\,dt$

  $= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} 1\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{2} = \frac{1}{2}$
- ENERGIA TOTALE: $E_{TOT} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{0}^{+\infty} 1\,dt = +\infty$
- POTENZA MEDIA $P_M = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} 1\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{2} = \frac{1}{2}$

ESERCIZI di Teoria dei Segnali B

svolti a cura di PELUSO SALVATORE

(3) $x(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

- <u>DURATA</u>: $t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
- <u>AREA</u>: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- <u>VALOR MEDIO</u> $\displaystyle\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} = 0$

Lo stesso si poteva dedurre guardando che l'area è un valore finito

- <u>ENERGIA TOTALE</u>: $\displaystyle E_{TOT} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1\,dt = 1$ [SEGNALE DI ENERGIA]
- <u>POTENZA MEDIA</u>: 0 (visto che è un segnale di energia)

(4) $x(t) = \Delta(t) = \begin{cases} +1 - |t| & \text{per } |t| \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

- <u>DURATA</u>: $t_2 - t_1 = +1 - (-1) = 2$
- <u>AREA</u>: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = \int_{-1}^{0} (t+1)\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- <u>VALOR MEDIO</u> $\displaystyle\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-1}^{0} t+1\,dt + \int_{0}^{1} -t+1\,dt$

$\displaystyle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} + \frac{1}{2T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} = 0$ [Area finita]

- <u>ENERGIA TOTALE</u>: $\displaystyle E_{TOT} = \int_{-1}^{0} (t+1)^2\,dt + \int_{0}^{1} (-t+1)^2\,dt = \frac{2}{3}$

[SEGNALE DI ENERGIA]

- <u>POTENZA MEDIA</u>: 0.

⑤ $x(t) = Ae^{-Bt}\mu(t)$ con $A>0$ e $B>0$

- DURATA: ∞
- AREA: $\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-Bt}\mu(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} A e^{-Bt}\,dt = A/B$
- VALOR MEDIO $\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^{+T} Ae^{-Bt}\,dt = 0$ [Area finita]
- ENERGIA TOTALE $E_{TOT} = \int_0^{+\infty} \left(Ae^{-Bt}\right)^2 dt = A^2/2B$

[SEGNALE DI ENERGIA]

- POTENZA MEDIA: 0 ⇐

⑥ $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

- DURATA: è facile intuire che la durata è ∞
- AREA: è facile intuire che la area essendo la somma algebrica delle aree sottese al grafico $= 0$
- VALOR MEDIO: $\langle x(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\,dt = 0$

[per segnali periodici]

- ENERGIA TOTALE: visto che il segnale è periodico $E_T = +\infty$
- POTENZA MEDIA: $\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \left[A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\right]^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} A^2\left(\frac{1+\cos(2\pi 2 f_0 t + 2\varphi)}{2}\right)dt$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \frac{A^2}{2}\,dt + \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \frac{A^2}{2}\cos(2\pi 2 f_0 t + 2\varphi)\,dt}_{=0} = \frac{1}{T_0} T_0 \frac{A^2}{2}$$

(sinusoide con periodo $\frac{1}{2f_0} = \frac{1}{2T_0}$ integrata su un intervallo ampio $T_0 \equiv 2$ periodi esatti)

⑦ $x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} =$ [segnale complesso]

$$= A\cos(2\pi f_0 t + \phi) + j A \sin(2\pi f_0 t + \phi) =$$

$$= \underbrace{A\cos(2\pi f_0 t + \phi)}_{\text{vedi punto ⑥}} + j \underbrace{A\cos\left(2\pi f_0 t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{idem, cambia la fase iniziale}}$$

- Durata ∞ (sia la parte Re, sia la parte Im: v. punto ⑥)
- Area $\emptyset$ (" " ")
- Valor Medio $\emptyset$ (" " ")
- Energia ∞ (segnale periodico: v. punto ⑥)
- Potenza media : $P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |A e^{j(2\pi f_0 t + \phi)}|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A^2 dt = A^2$

⑧ $x(t) = \mathrm{sinc}(t)$

- Durata: ∞ (osservando il grafico del segnale)
- Area : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)dt$ [è $=1$ ma è difficile da calcolare; teniamo il problema in sospeso ...]
- Valore medio : [Idem: una volta dimostrato che l'area è $=1$, il valore medio sarà necessariamente $=\emptyset$]
- Energia : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(t)dt$ [stesso problema: vedremo che anche questa è $=1$ ...]
- Potenza Media: [sarà $=\emptyset$, essendo il segnale di energia]

ESERCIZIO extra (non in elenco)

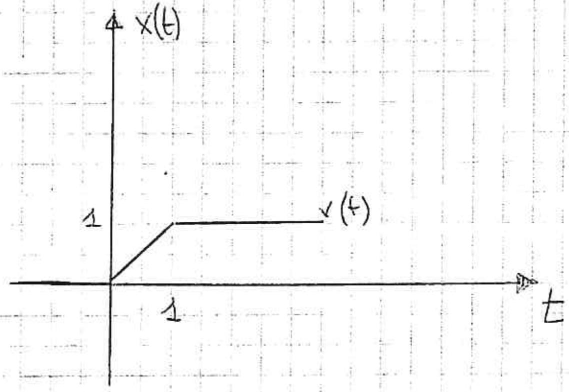
Dato il segnale $x(t)$: $\begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ t & \text{per } 0 \le t \le 1 \\ 1 & \text{per } t>1 \end{cases}$ tracciare i grafici

coi seguenti segnali:

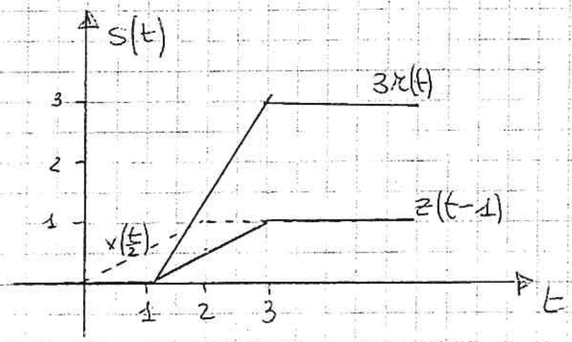
1) $s(t) = 3x\left(\frac{t-1}{2}\right)$

2) $r(t) = -x(-2t)$

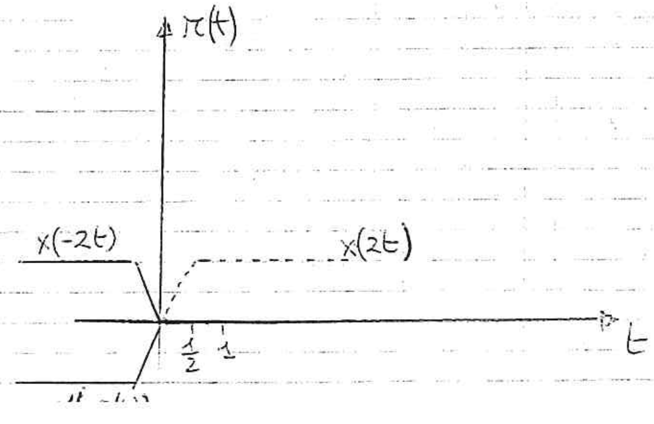
3) $z(t) = x(t+1) + x(-t+1)$



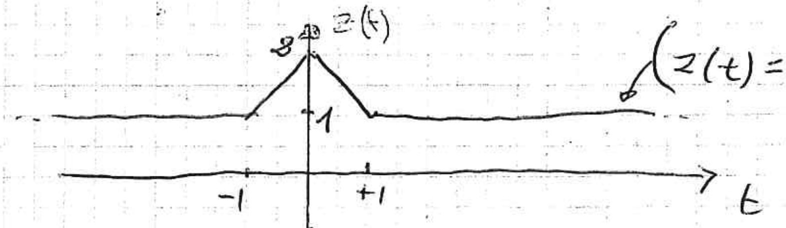
1) $s(t) = 3x\left(\frac{t-1}{2}\right)$ $\begin{cases} \text{a) } z(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) & \text{: cambiamento di scala} \\ \text{b) } r(t) = z(t-1) & \text{: traslazione temporale} \\ \text{c) } s(t) = 3r(t) & \text{: moltiplicatore per una costante} \end{cases}$



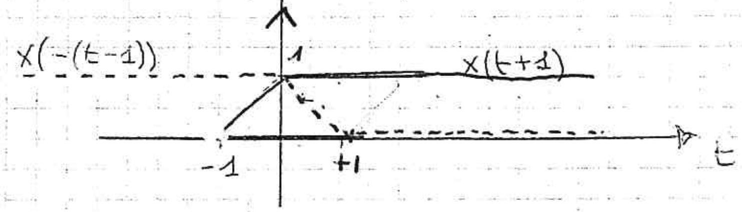
2) $r(t) = -x(-2t)$ $\begin{cases} \text{a) } s(t) = x(2t) \\ \text{b) } z(t) = -x(-2t) \end{cases}$



$$z(t) = x(t+1) + x(1-t) = \begin{cases} s(t) = x(t+1) \\ r(t) = x(-(t-1)) \\ z(t) = s(t) + r(t) \end{cases}$$

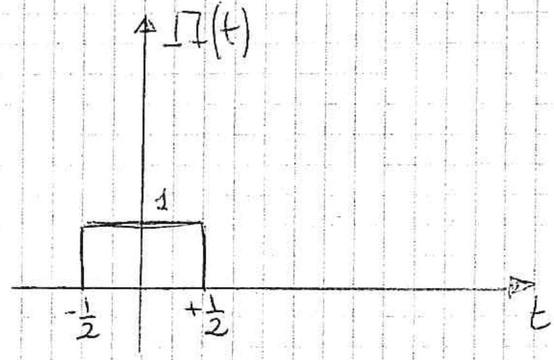


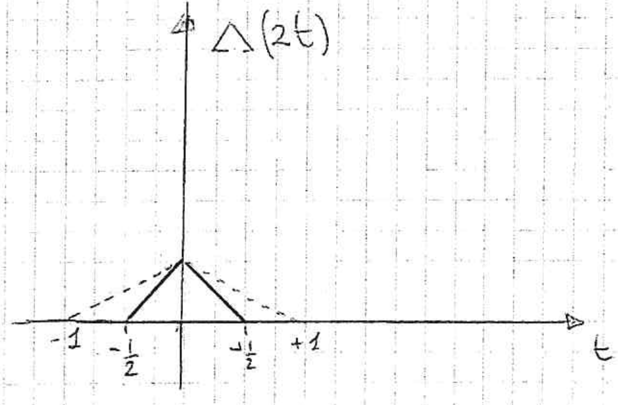
$\left(z(t) = 1 + \Lambda(t)\right)$



ESERCIZIO 4) (b)

Dopo aver disegnato i segnali $\Pi(t)$ e $\Delta(2t)$, valutare il segnale $y(t) = \Pi(t) + \Delta(2t)$



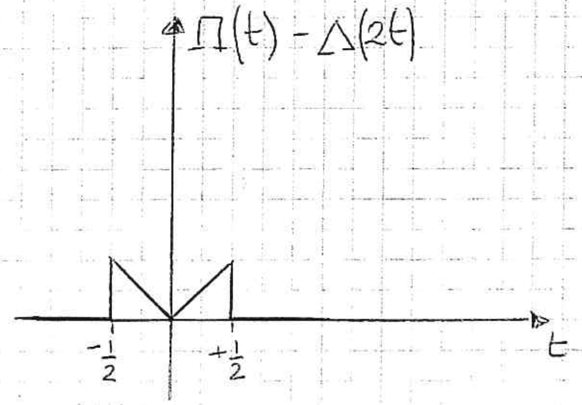


* $\Pi(t)$: segnale rettangolare standard

* $\Delta(2t)$: segnale triangolare con cambiamento di scala. La durata si è dimezzata

$$t_1^f = t_1^i/2$$

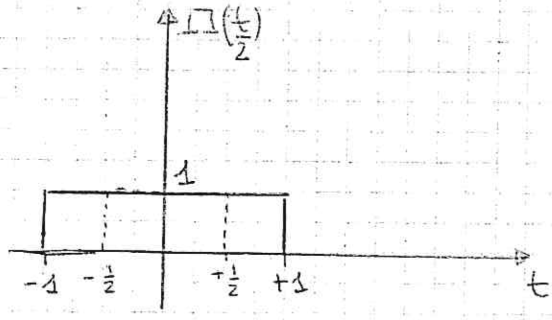
$$t_2^f = t_2^i/2$$

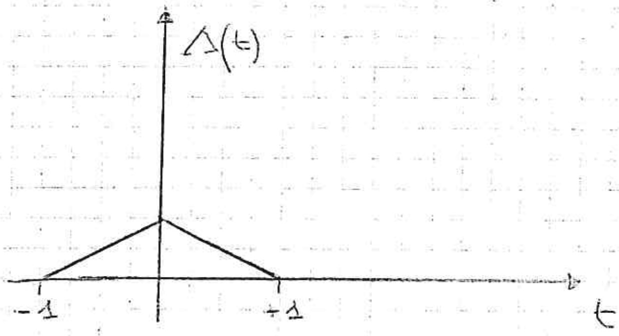


* $\Pi(t) - \Delta(2t)$ è dato dalla sottrazione punto a punto dei segnali

ESERCIZIO 4) (a)

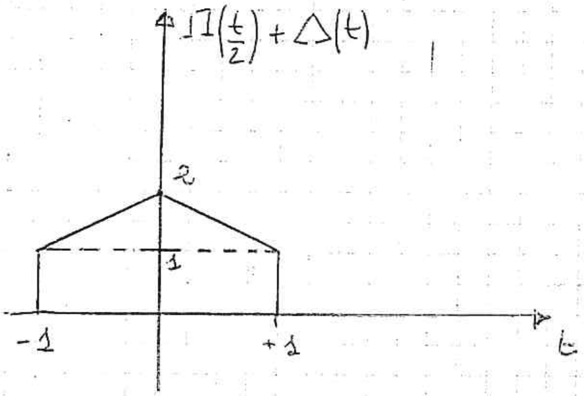
Dopo aver disegnato i segnali $\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$ e $\Lambda(t)$, trovare l'uscita $y(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \Lambda(t)$





* $\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$: segnale rettangolare con cambiamento di scala. La durata viene raddoppiata
  $t_1^f = t_1^i \cdot 2$
  $t_2^f = t_1^i \cdot 2$

* $\Lambda(t)$: segnale standard

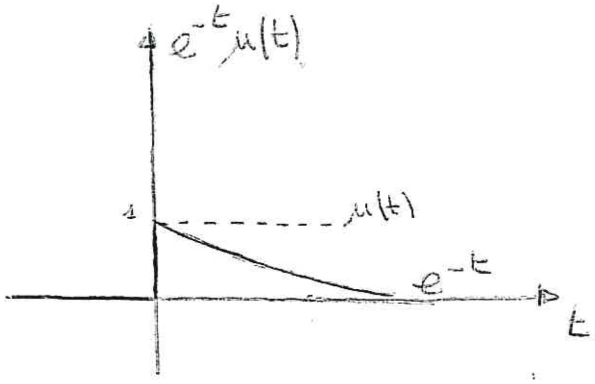


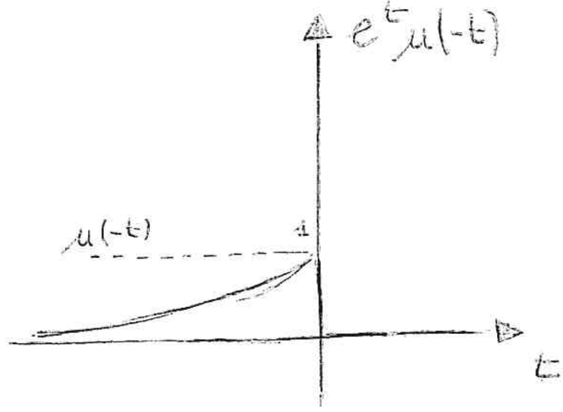
* $\Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \Lambda(t)$: è dato dalla somma punto a punto dei due segnali

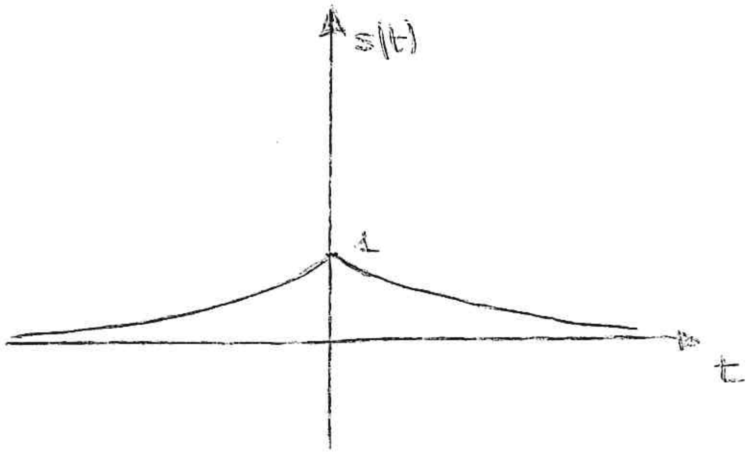
ESERCIZIO 4) (c)

Tracciare il grafico del seguente segnale:

$s(t) = e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)$







ESERCIZIO 4) (d)

Tracciare il grafico del seguente segnale.

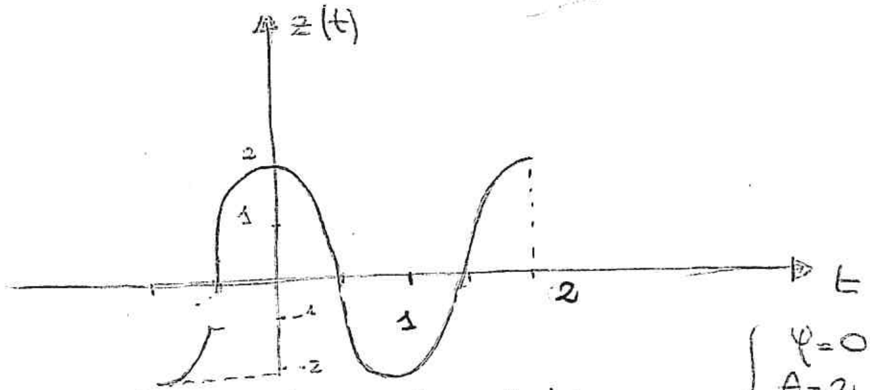
$$z(t) = e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}$$

Dalla formula di Eulero: $\cos(x) = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

quindi $\quad 2\cos(x) = e^{jx} + e^{-jx}$

$$\Downarrow$$

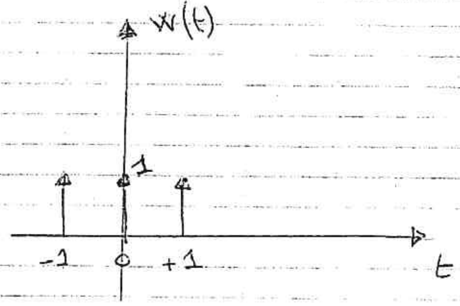
$$2\cos(\pi t) = e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}$$

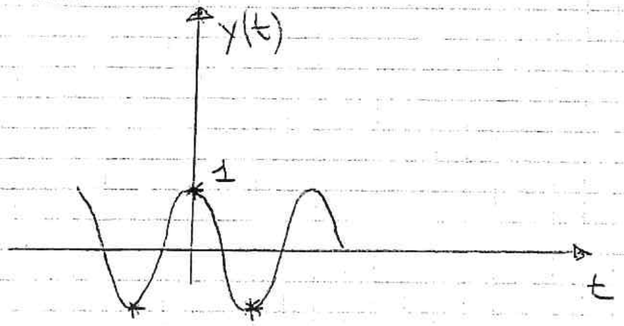


$$A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = 2\cos(\pi t) = \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = 2 \\ T_0 = \dfrac{1}{f_0} = 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO [5])

Dati i segnali $w(t) = \delta(t+1) + \delta(t) + \delta(t-1)$ e $y(t) = \cos(\pi t)$
trovare $w(t) \cdot y(t)$ e $w(t) * y(t)$





① $$z(t) = w(t) \cdot y(t) = \cos(\pi t) \cdot \delta(t+1) + \cos(\pi t) \cdot \delta(t) + \cos(\pi t) \cdot \delta(t-1) =$$

Applicando la proprietà di campionamento in forma non integrat

$$y(t) \cdot \delta(t-t_0) = y(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$$

$$= -1\delta(t+1) + 1\delta(t) - 1\delta(t-1) = -\delta(t+1) + \delta(t) - \delta(t-1)$$

② $$r(t) = w(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\delta(\tau+1) + \delta(\tau) + \delta(\tau-1)\right] \cos\left(\pi(t-\tau)\right) d\tau$$

Applicando la proprietà di campionamento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$$

$$= \cos\left(\pi\left(t-(-1)\right)\right) + \cos\left(\pi(t-0)\right) + \cos\left(\pi(t-1)\right)$$

$$= \underbrace{\cos\left(\pi(t+1)\right)}_{=-\cos(\pi t)} + \cos(\pi t) + \underbrace{\cos\left(\pi(t-1)\right)}_{=-\cos(\pi t)} = -\cos(\pi t)$$

ESERCIZIO 7) (a)

Valutare la CAUSALITÀ di un INTEGRATORE A FINESTRA MOBILE

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau \qquad \Leftarrow \quad y(t) = \mathcal{T}[x(\tau); t]$$

1) Valuto l'uscita $y_u(t)$ che rappresenta l'uscita che si ha quando il ~~funzione~~ segnale viene moltiplicato per un gradino unitario traslato

$$y_u(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,\underbrace{u(t-\tau)}\,d\tau \qquad \Leftarrow \quad y_u(t) = \mathcal{T}[x(\tau)u(t-\tau); t]$$

$$u(t-\tau) \begin{cases} 1 & \text{per } t-\tau \geq 0 \Rightarrow t \geq \tau \\ 0 & \text{per } t-\tau < 0 \Rightarrow t < \tau \end{cases}$$

$$y_u(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau \qquad \text{visto che}$$

$$y(t) = y_u(t) \implies \boxed{\text{IL SISTEMA È CAUSALE}}$$

ESERCIZIO 7) (b)

Valutare la CAUSALITÀ di un AMPLIFICATORE IDEALE

$$y(t) = A\,x(\tau)\Big|_{\tau=t} = A\,x(t)$$

1) Valuto l'uscita $y_u(t)$

$$y_u(t) = A\,x(\tau)\,u(t-\tau)\Big|_{\tau=t}$$

$$u(t-\tau) \begin{cases} 1 & \text{per } t-\tau \geq 0 \Rightarrow t \geq \tau \\ 0 & \text{per } t-\tau < 0 \Rightarrow t < \tau \end{cases}$$

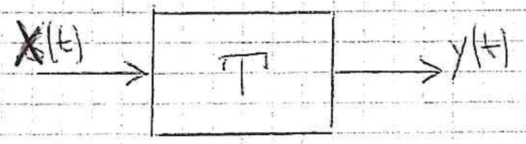
$$y_u(t) = A\,x(t) \qquad \text{visto che} \quad u(0) = 1$$

$$y(t) = y_u(t) \implies \boxed{\text{IL SISTEMA È CAUSALE}}$$

ESERCIZIO 8) (b)

Valutare la STAZIONARIETÀ dell'INTEGRATORE A FINESTRA MOBILE

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$$



1) Ipotizzo che entri un segnale $x(t)$

$$\bullet\ x(t) \Longrightarrow y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

2) Ipotizzo che entri il segnale $x_R(t)$, cioè $x(t)$ ritardato, e valuto l'uscita relativa:

$$\bullet\ x_R(t) = x(t-t_0) \Longrightarrow y_R(t) = \int_{t-T}^{t} x_R(\tau)\,d\tau = \int_{t-T}^{t} x(\tau-t_0)\,d\tau \qquad (1)$$

3) Valuto l'uscita $y(t-t_0)$ e confronto che il risultato sia uguale al risultato ottenuto ipotizzando l'entrata nel sistema di un segnale ritardato (2)

N.B: Alcune volte è necessario manipolare le espressioni ottenute prima di rendersi conto dell'uguaglianza delle espressioni.

$$y(t-t_0) = \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau\,;$$ sostituendo $(\tau-t_0)$ con θ nella (1)

$$y_R(t) = \int_{t-T}^{t} x_R(\tau)\,d\tau = \int_{t-T}^{t} x(\tau-t_0)\,d\tau \xrightarrow[\tau-t_0=\theta]{} \int_{t-T-t_0}^{t-t_0} x(\theta)\,d\theta$$ SISTEMA STAZIONARIO

4) Se $y(t-t_0) = y_R(t)$ IL SISTEMA È STAZIONARIO

Se $y(t-t_0) \neq y_R(t)$ IL SISTEMA NON È STAZIONARIO

ESERCIZIO 9) (b)

Valutare la LINEARITÀ dell' INTEGRATORE A FINESTRA MOBILE

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

1) Ipotizzo l'entrata di due segnali distinti $x_1(t)$ e $x_2(t)$

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{t-T}^{t} x_1(\tau)\,d\tau$$

$$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = \int_{t-T}^{t} x_2(\tau)\,d\tau$$

2) Il sistema si dice LINEARE se vale la seguente espressione:

$$T\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \Longrightarrow y(t) = \int_{t-T}^{t} a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{t-T}^{t} a_1 x_1(\tau)\,d\tau + \int_{t-T}^{t} a_2 x_2(\tau)\,d\tau$$

$$= a_1 \int_{t-T}^{t} x_1(\tau)\,d\tau + a_2 \int_{t-T}^{t} x_2(\tau)\,d\tau$$

$$= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

$\boxed{\text{SISTEMA LINEARE}}$

ESERCIZIO 8) (a)

Valutare la STAZIONARIETÀ di un AMPLIFICATORE IDEALE

$y(t) = A\,x(t)$

1) Ipotizzo l'entrata del segnale $x(t)$

$x(t) \Rightarrow y(t) = A\,x(t)$

2) Ipotizzo l'entrata del segnale $x_R(t)$, cioè $x(t)$ ritardato

$x_R(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y_R(t) = A\,x(t-t_0)$

3) Valuto $y(t-t_0)$ e confronto con $y_R(t)$

$y(t-t_0) = A\,x(t-t_0)$

Visto che $y(t-t_0) = y_R(t) \Longrightarrow$ **SISTEMA STAZIONARIO**

ESERCIZIO 9) (a)

Valutare la LINEARITÀ di un AMPLIFICATORE IDEALE

$y(t) = A\,x(t)$

1) $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = A\,x_1(t)$

$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = A\,x_2(t)$

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Rightarrow y(t) = A a_1 x_1(t) + A a_2 x_2(t) \overset{!}{=} a_1 A x_1(t) + a_2 A x_2(t) \overset{!}{=} a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

SISTEMA LINEARE

ESERCIZIO 11)

Valutare la LINEARITÀ e la STAZIONARIETÀ dei seguenti sistemi:

1) $y(t) = K + x(t)$

- LINEARITÀ: $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = K + x_1(t)$
$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = K + x_2(t)$

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Rightarrow y(t) = K + a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$$
$$\overset{!}{=} K + a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \neq a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

SISTEMA NON LINEARE

- STAZIONARIETÀ: • $x(t) \Rightarrow y(t) = K + x(t)$ (1)
• $x_R(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y_R(t) = K + x_R(t) = K + x(t-t_0)$
• $y(t-t_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sostituendo} \\ \text{nella (1)}}}{=} K + x(t-t_0)$ $=$

SISTEMA STAZIONARIO

---

2) $y(t) = t^2 \cdot x(t)$

- LINEARITÀ: $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = t^2 \cdot x_1(t)$
$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = t^2 \cdot x_2(t)$

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Rightarrow y(t) = t^2 \cdot a_1x_1(t) + t^2 a_2x_2(t)$$
$$\overset{!}{=} a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

SISTEMA LINEARE

- STAZIONARIETÀ: • $x(t) \Rightarrow y(t) = t^2 \cdot x(t)$
• $x_R(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y_R(t) = t^2 \cdot x_R(t) = t^2 \cdot x(t-t_0)$
• $y(t-t_0) = (t-t_0)^2 \cdot x(t-t_0)$ $\neq$

SISTEMA NON STAZIONARIO

---

3) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau + t_0)\, d\tau$

- LINEARITÀ: $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau+t_0)\, d\tau$

$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau+t_0)\, d\tau$

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} a_1x_1(\tau+t_0) + a_2x_2(\tau+t_0)\, d\tau$$
$$\overset{!}{=} \int_{-\infty}^{t} a_1x_1(\tau+t_0)\,d\tau + \int_{-\infty}^{t} a_2x_2(\tau+t_0)\, d\tau$$

SISTEMA LINEARE $\overset{!}{=} a_1 \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau+t_0)\,d\tau + a_2 \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau+t_0)\, d\tau$

- STAZIONARIETÀ • $x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau + t_0)\,d\tau$ (1)

• $x_R(t) = x(t - T_0) \Rightarrow y_R(t) = \cancel{\int_{-\infty}^{t} x_R(\tau + t_0)\,d\tau} = \int_{-\infty}^{t - T_0 + t_0} x(\alpha)\,d\alpha$ (2)

sostituendo $\alpha = \tau - T_0 + t_0$

ATTENZIONE: il ritardo T_0 (arbitrario) non ha nulla a che vedere col parametro t_0 del sistema, presente nella (1)

• $y(t - T_0) = \int_{-\infty}^{t - T_0} x(\tau + t_0)\,d\tau \xrightarrow[\tau + t_0 = \theta]{} \int_{-\infty}^{t + t_0 - T_0} x(\theta)\,d\theta$ =

sostituendo nella (1)

SISTEMA STAZIONARIO

---

4) $y(t) = x(t) + x(t - t_0) - x(t - 2t_0)$

- LINEARITÀ $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(t) + x_1(t - t_0) - x_1(t - 2t_0)$

$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = x_2(t) + x_2(t - t_0) - x_2(t - 2t_0)$

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \Rightarrow y(t) = a_1 x_1(t) + a_1 x_1(t - t_0) - a_1 x_1(t - 2t_0) + a_2 x_2(t) + a_2 x_2(t - t_0) - a_2 x_2(t - 2t_0) =$$
$$a_1 (x_1(t) + x_1(t - t_0) - x_1(t - 2t_0)) + a_2 (x_2(t) + x_2(t - t_0) - x_2(t - 2t_0)) =$$
$$a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

SISTEMA LINEARE

- STAZIONARIETÀ $x(t) \Rightarrow y(t) = x(t) + x(t - t_0) - x(t - 2t_0)$

$x_R(t) = x(t - T_0) \Rightarrow y_R(t) = x_R(t) + x_R(t - t_0) - x_R(t - 2t_0)$

$= x(t - T_0) + x(t - T_0 - t_0) - x(t - 2t_0 - T_0)$

vedi esercizio precedente

$y(t - T_0) = x(t - T_0) + x(t - T_0 - t_0) - x(t - T_0 - 2t_0)$ =

SISTEMA STAZIONARIO

(*) $y_R(t) = \int_{-\infty}^{t} x_R(\tau + t_0)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau - T_0 + t_0)\,d\tau =$

=

$\alpha = \tau - T_0 + t_0$
$d\alpha = d\tau$
$\alpha| = -\infty$
$\alpha| = t - T_0 + t_0$

5) $y(t) = \int_{-t}^{t} x(\tau)\, d\tau$

- <u>LINEARITÀ</u>: $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{-t}^{t} x_1(\tau)\, d\tau$

$$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-t}^{t} x_2(\tau)\, d\tau$$

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-t}^{t} a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau)\, d\tau$$

$$\overset{!}{=} \int_{-t}^{t} a_1 x_1(\tau)\, d\tau + \int_{-t}^{t} a_2 x_2(\tau)\, d\tau$$

$$\overset{!}{=} a_1 \int_{-t}^{t} x_1(\tau)\, d\tau + a_2 \int_{-t}^{t} x_2(\tau)\, d\tau$$

$$\overset{!}{=} a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

SISTEMA LINEARE

- <u>STAZIONARIETÀ</u>: • $x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-t}^{t} x(\tau)\, d\tau \qquad (1)$

• $x_R(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y_R(t) = \int_{-t}^{t} x_R(\tau)\, d\tau = \int_{-t}^{t} x(\tau - t_0)\, d\tau$

• $y(t-t_0) = \int_{-t+t_0}^{t-t_0} x(\tau)\, d\tau$ $\neq$

sostituisco nella (1)

<u>N.B</u>: $\int_{-t}^{+t} x(\tau - t_0)\, d\tau \xrightarrow[\tau - t_0 = \theta]{} \int_{-t-t_0}^{t-t_0} x(\theta)\, d\theta$

SISTEMA NON STAZIONARIO

ESERCIZIO [12]) (b)

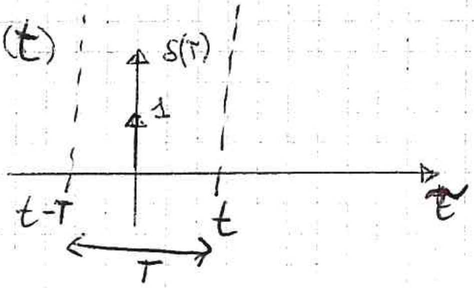
Valutare la RISPOSTA IMPULSIVA dell' INTEGRATORE A FINESTRA MOBI

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\int_T} \longrightarrow h(t)$$

- Sostituisco $\delta(t)$ al posto di $x(t)$

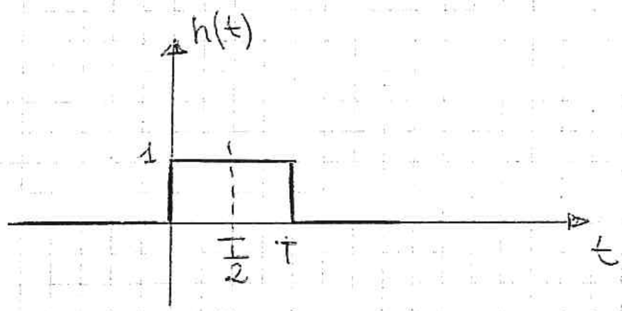
$$h(t) = \int_{t-T}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$



$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t>0 \text{ e } t-T<0 \\ 0 & \text{per } t-T>0 \end{cases}$$

[l'integrale raccoglie la δ() nell'origine

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } \cancel{0<}\, t<T \\ 0 & \text{per } t>T \end{cases}$$



$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

ESERCIZIO [12]) (a)

Valutare la RISPOSTA IMPULSIVA dell' AMPLIFICATORE IDEALE

$y(t) = A\,x(t)$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow h(t)$$

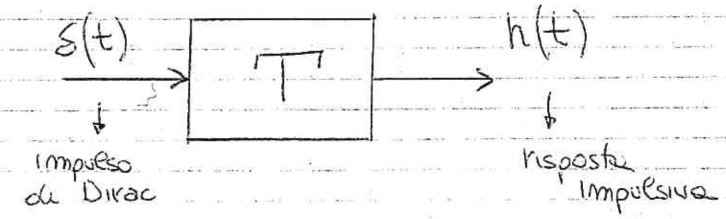
- Sostituisco $\delta(t)$ a $x(t)$

$h(t) = A\,\delta(t)$

ESERCIZIO 13)

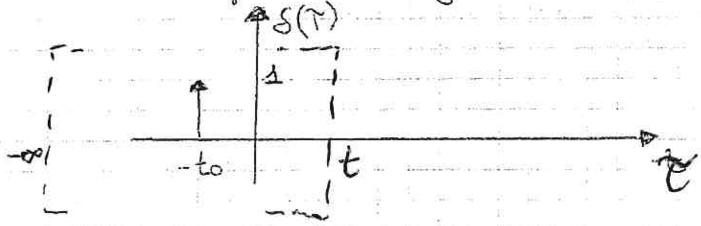
Valutare la RISPOSTA IMPULSIVA dei seguenti sistemi:

1) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau + t_0)\, d\tau$



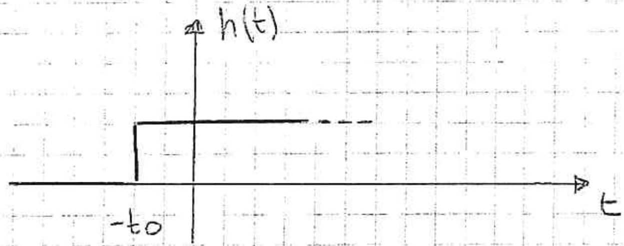
- Sostituisco una $\delta(t)$ al posto del segnale d'ingresso $x(t)$:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau + t_0)\, d\tau$$



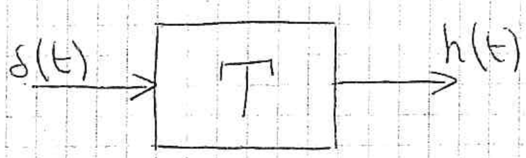
$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < -t_0 \\ 1 & \text{per } t > -t_0 \end{cases}$$

$= u(t + t_0)$

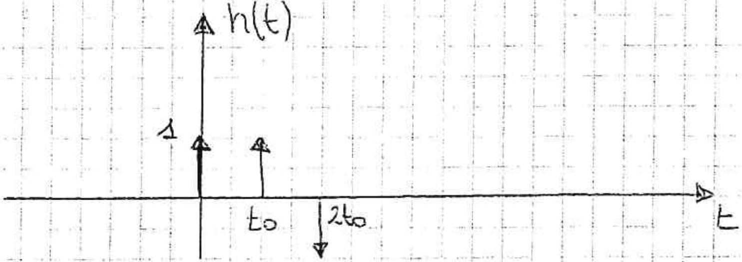


---

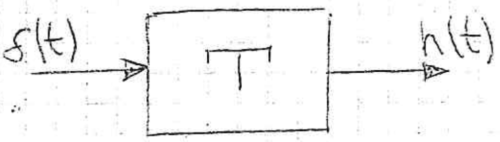
2) $y(t) = x(t) + x(t - t_0) - x(t - 2t_0)$



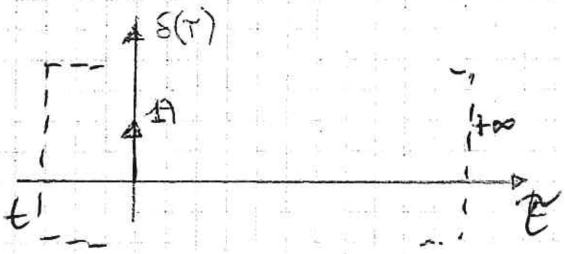
$$h(t) = \delta(t) + \delta(t - t_0) - \delta(t - 2t_0)$$



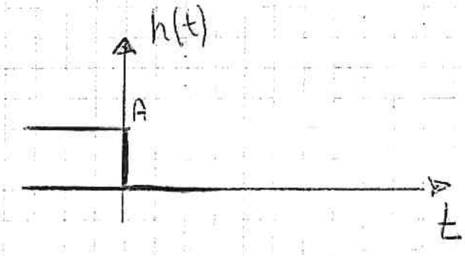
3) $y(t) = \int_{+t} A\, x(\tau)\, d\tau$



$$h(t) = \int_{+t}^{+\infty} A\, \delta(\tau)\, d\tau = A \int_{+t}^{+\infty} \delta(\tau)\, d\tau$$



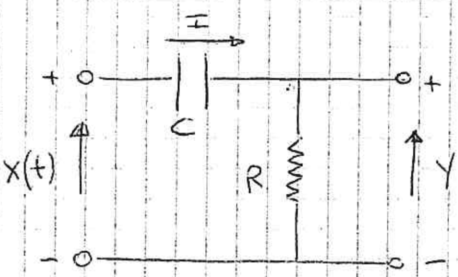
$$h(t) = \begin{cases} A & \text{per } t<0 \\ 0 & \text{per } t>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & \text{per } t<0 \\ 0 & \text{per } t>0 \end{cases}$$

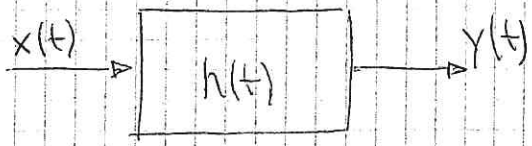


$h(t) = A\, u(-t)$

ESERCIZIO [15])

Valutare la RISPOSTA IMPULSIVA del seguente circuito:





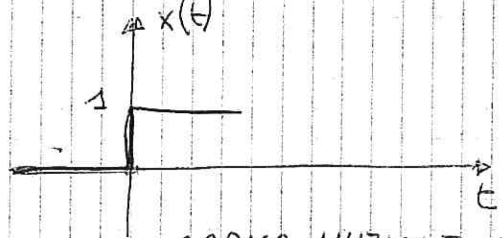
Premessa: Mi conviene ricavare la risposta impulsiva tramite la risposta indiciale.

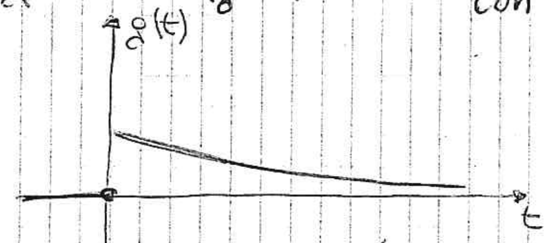
$$y(t) = R \cdot C\frac{d}{dt}(x(t)-y(t))$$

$$RC\,y'(t) + y(t) = RC\,x'(t)$$ Ricavo la risposta indiciale

$$RC\,g'(t) + g(t) = RC\,\mu'(t)$$

Eq. omogenea associata $\Rightarrow RC\,g'(t) + g(t) = 0 \Longrightarrow g(t) = K_0 + K_1 e^{-t/RC}$ con $K_0 = 0$





CARICA INIZIALE SUL CONDENSATORE NULLA (altrimenti non è stazionario

$\boxed{t<0}$

- $g(t) = \cancel{K_0} + K_1 e^{-t/RC}\,\cancel{\mu(t)} = 0$ il circuito risponde con un segnale nullo per $K_0 = 0$ e $K_1 = 0$

$\boxed{t=0}$

- $g(t) = K_0 + K_1 e^{-t/RC} = 0$ Se $t=0 \Longrightarrow K_0 + K_1$ che devono essere opposti per rendere il segnale nullo (per continuità fisica)

$\boxed{t>0}$

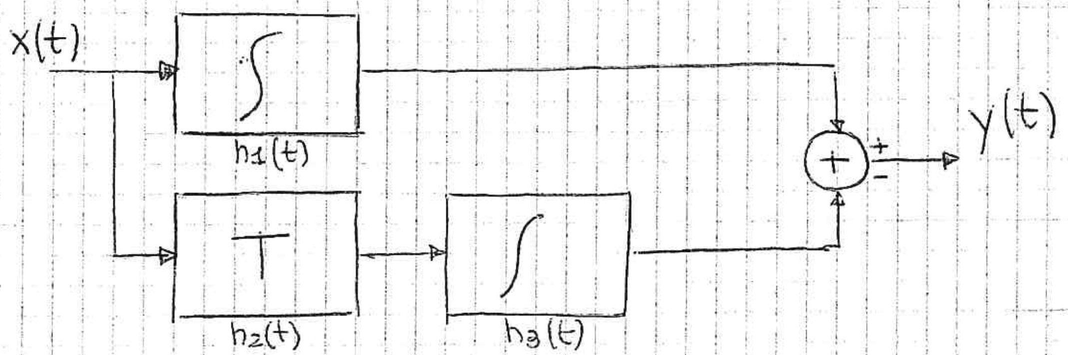
- $g(t) = K_0 + K_1 e^{-t/RC} = 0$

$$\overset{!}{=} e^{-t/RC} - 1 + \mu(t)$$

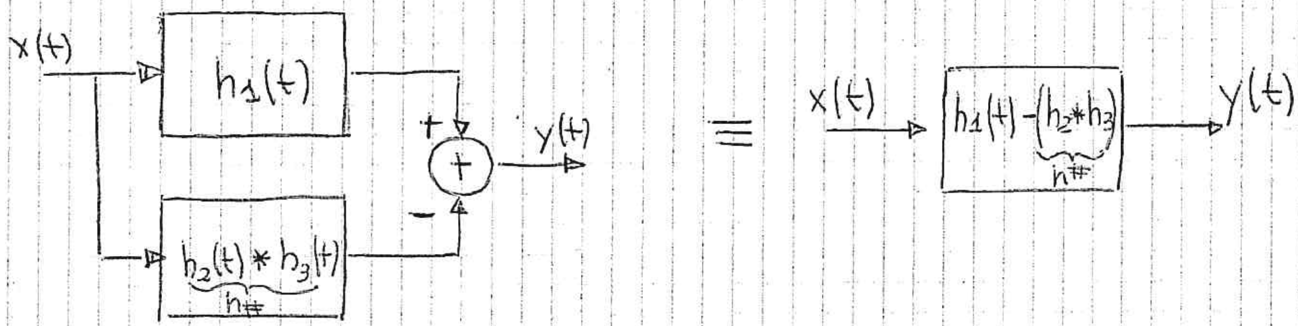
RISPOSTA INDICIALE $g(t)$ $\begin{cases} \mu(t) + e^{-t/RC} - 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t<0 \end{cases}$ $\xrightarrow{h(t) = \frac{dg(t)}{dt}}$ $\delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-t/RC}\mu(t)$

ESERCIZIO [16]) (a),(b)

Valutare la RISPOSTA IMPULSIVA TOTALE del sistema

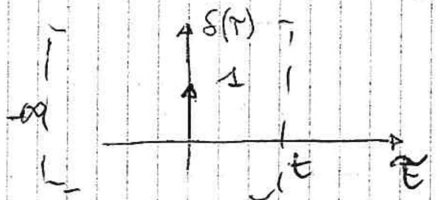


$\equiv$

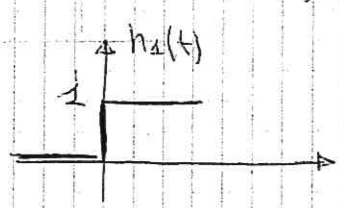


1) Calcolo $h_1(t)$

INTEGRATORE $\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longrightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \longrightarrow h(t) = \mu(t)$



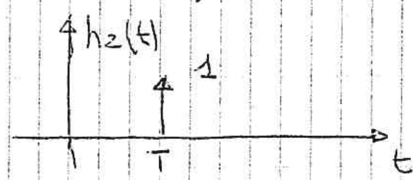
$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$



2) Calcolo $h_2(t)$

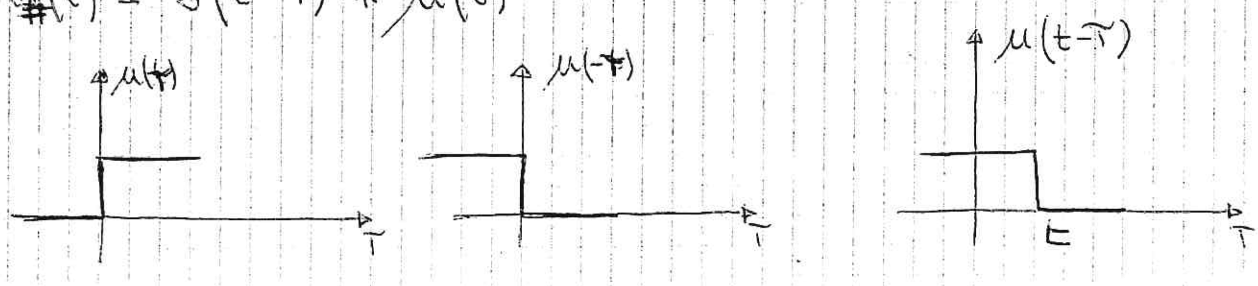
ELEMENTO DI RITARDO $\Rightarrow y(t) = x(t-T)$

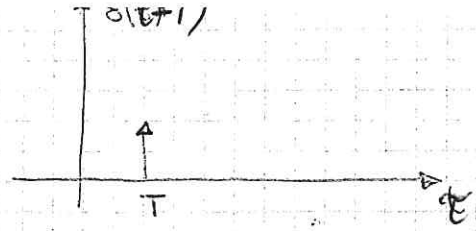
$$h(t) = \delta(t-T)$$



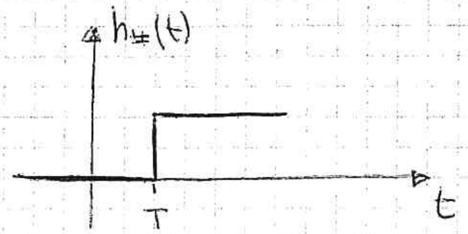
3) Calcolo $h_2(t) * h_3(t)$ $\quad$ [N.B. $h_3(t) = h_1(t)$]

$$h_{\#}(t) = \delta(t-T) * \mu(t)$$



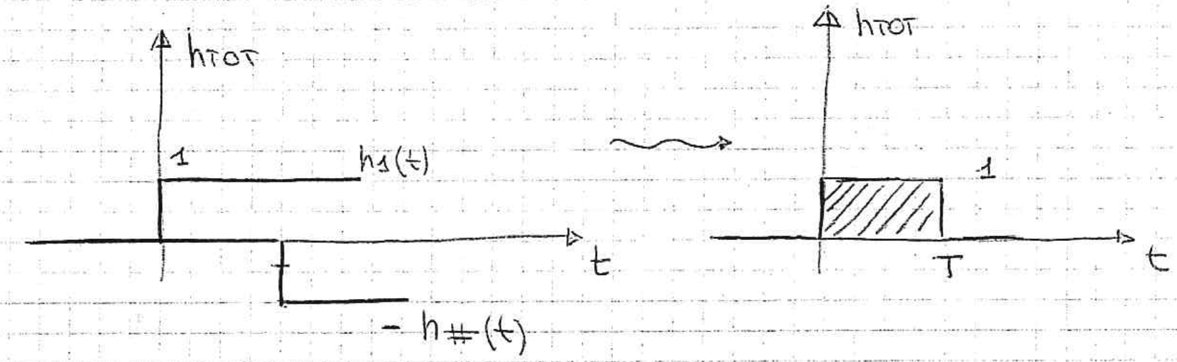


$$h_{\#}(t) = \delta(t-T) * \mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ per } t<T \\ 1 \text{ per } t>T \end{cases} = \mu(t-T)$$



4) $h_1(t) - h_{\#}(t) = h_{TOT}$

$$h_{TOT} = \mu(t) - \mu(t-T)$$
$$= \mu(t) + (-\mu(t-T))$$

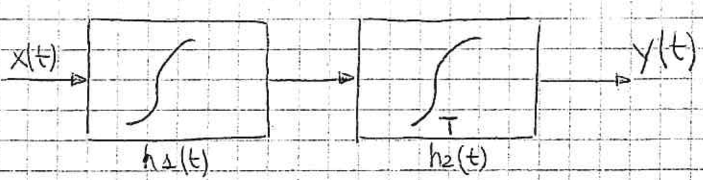


$$h_{TOT} = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

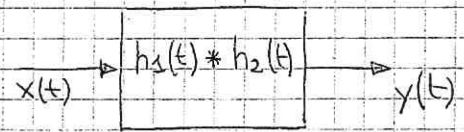
risposta impulsiva dell'integratore a finestra mobile

ESERCIZIO [17]) (a)

Valutare la RISPOSTA IMPULSIVA TOTALE del seguente sistema



$\equiv$

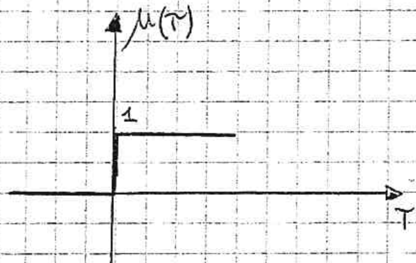


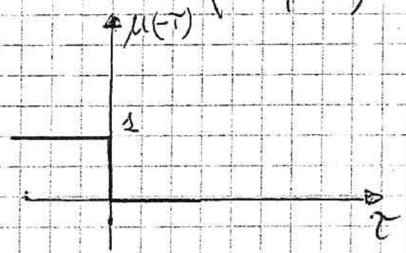
Sappiamo dallo studio della Teoria che

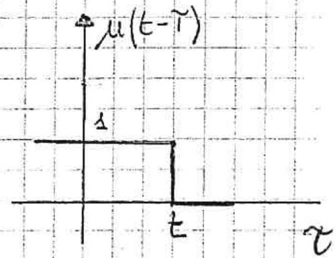
$h_1(t) = u(t)$ (calcolato nell'esercizio 21)

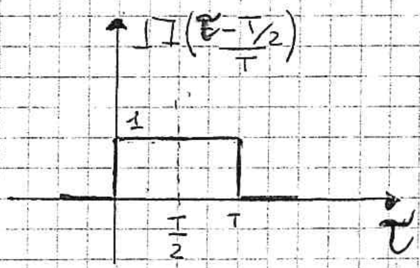
$h_2(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$ (calcolato nell'esercizio 15)

$$h_{TOT} = h_1(t) * h_2(t) = u(t) * \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$



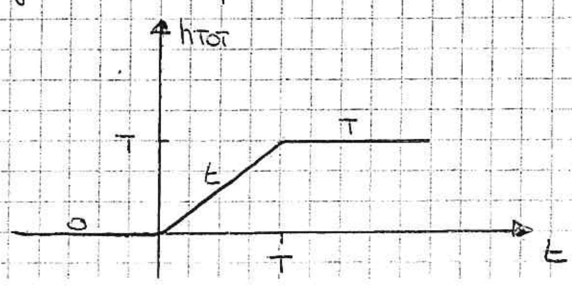






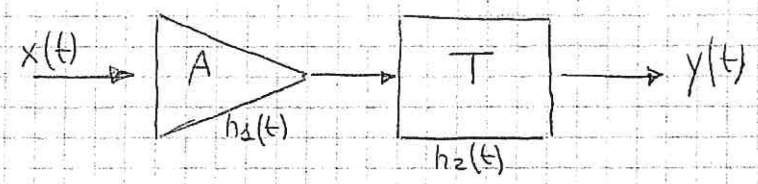
$$h_{TOT} = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ \int_0^t 1\, d\tau = t & \text{per } 0<t<T \\ \int_0^T 1\, d\tau = T & \text{per } t>T \end{cases}$$

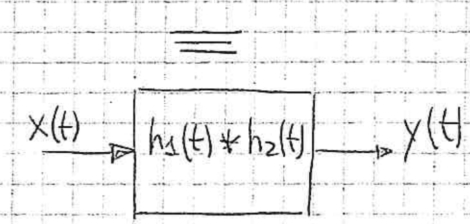
Facendo muovere $u(t-\tau)$ partendo da $t \ll 0$ fino ai $t>0$ si trova la seguente risposta:



ESERCIZIO [17]) (b)

Valutare la RISPOSTA IMPULSIVA TOTALE del seguente sistema





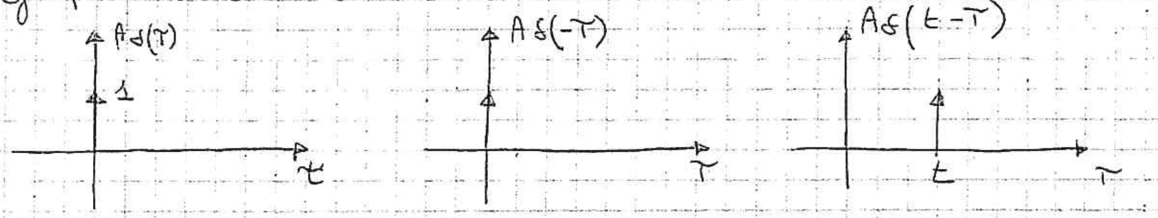
* Abbiamo già calcolato le risposte impulsive dei singoli blocchi:

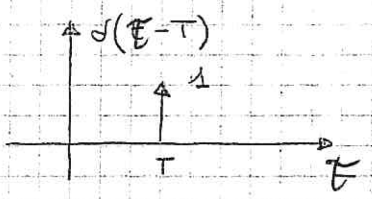
$h_1(t) = A\delta(t)$ (calcolata nell' esercizio 16)

$h_2(t) = \delta(t-T)$ (calcolata nell' esercizio 20)

$$h_{TOT} = h_1(t) * h_2(t) = A\delta(t) * \delta(t-T)$$

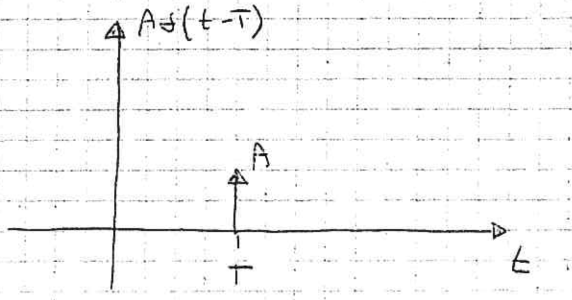
* Graficamente:





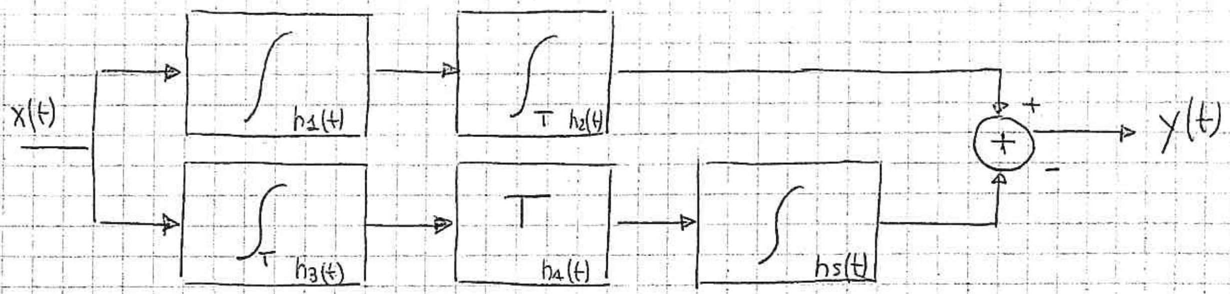
Facendo muovere $A\delta(t-T)$ per $t \ll 0$ verso $t \gg 0$ si possono considerare i seguenti casi:

$$h_{TOT}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < T \\ A & \text{per } t = T \\ 0 & \text{per } t > T \end{cases} = A\delta(t-T)$$

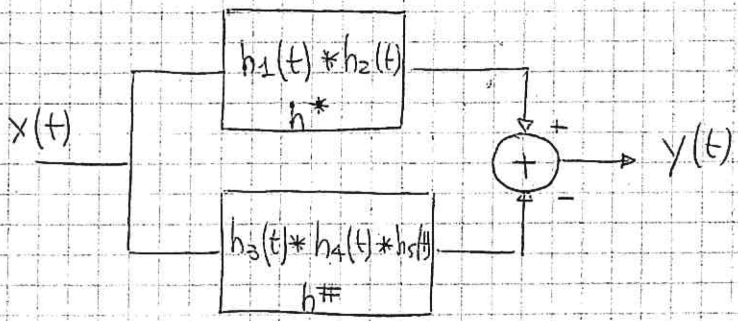


ESERCIZIO [17]) (c)

Valutare la RISPOSTA IMPULSIVA TOTALE del seguente sistema:



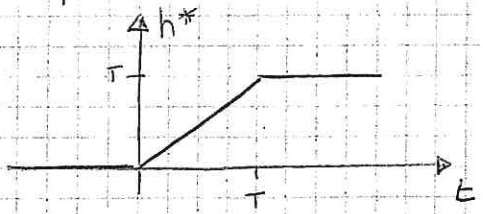
$\equiv$



$\equiv$

* Il primo passo consiste nel calcolare la risposta impulsiva (parziale) del ramo superiore formato da un integratore e da un integratore a finestra mobile. La risposta impulsiva di tale sottosistema è stata già calcolata nell'esercizio 22 quindi:

$$h^* = h_1(t) * h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ t & \text{per } 0<t<T \\ T & \text{per } t>T \end{cases}$$

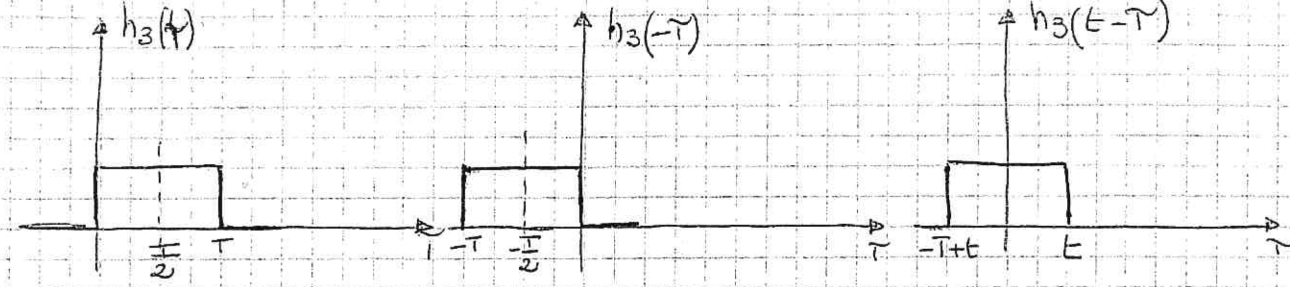


* Il secondo passo consiste nel calcolo della risposta impulsiva del ramo inferiore del sistema $(h^{\#})$.

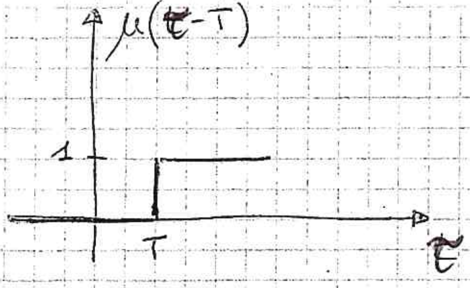
$$h^{\#} = h_3(t) * \left(h_4(t) * h_5(t)\right) \quad \text{(proprietà associativa della convoluzione)}$$

$$h_4(t) * h_5(t) = \delta(t-T) * u(t) \stackrel{1}{=} u(t-T) \quad \text{(calcolata nell'esercizio 20)}$$

$$h^{\#} = h_3(t) * \mu(t-T) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) * \mu(t-T)$$

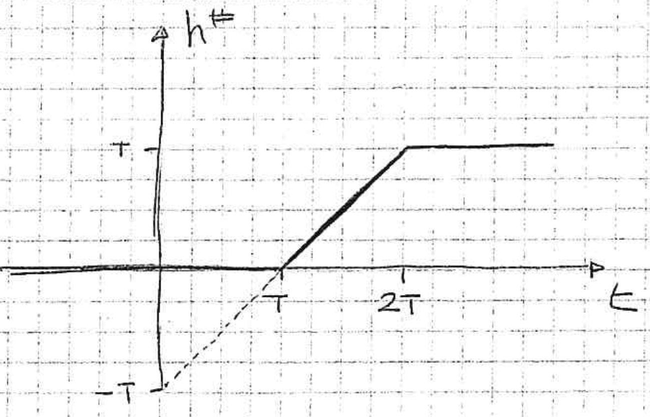


La risposta $h_3(t)$ è la risposta impulsiva di un INTEGRATORE A FINESTRA MOBILE



Facendo muovere il segnale $h_3(t-\tau) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ da $t \ll 0$, si individuano i seguenti istanti:

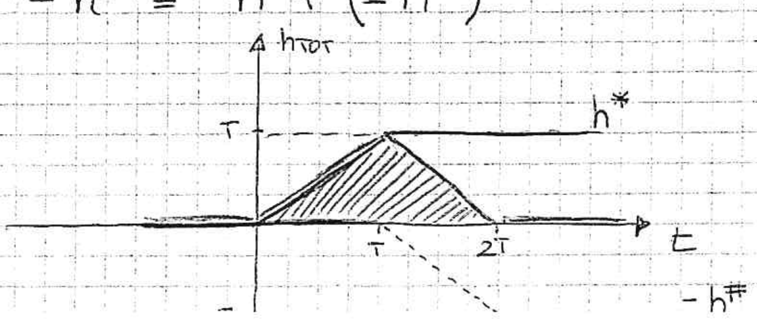
$$\begin{cases} 0 & \text{per } t < T \\ \int_T^t 1\, d\tau = t - T & \text{per } t < 2T \text{ e } t > T \\ T & \text{per } t > 2T \end{cases}$$



La risposta impulsiva totale sarà la differenza delle RISPOSTE IMPULSIVE dei due rami.

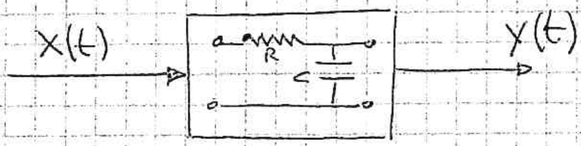
$$h_{TOT} = h^* - h^{\#} = h^* + (-h^{\#})$$

$$h_{TOT}(t) = T\Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right)$$



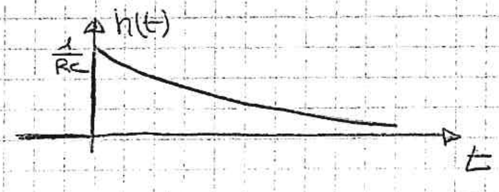
ESERCIZIO [19])

Trovare l'uscita del seguente sistema ponendo un ingresso $x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$



Abbiamo calcolato la risposta impulsiva di tale sistema:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

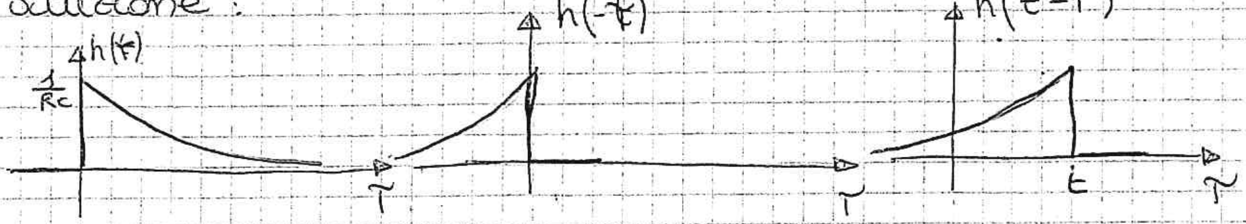


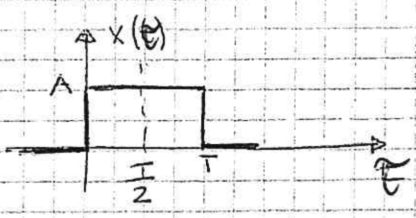
Sappiamo dalla teoria che conoscendo $h(t)$ possiamo calcolare la risposta del sistema a qualsiasi segnale d'ingresso:

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad \text{quindi:}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,\Pi\left(\frac{\tau - T/2}{T}\right) \cdot \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} u(t-\tau)\, d\tau$$

Il calcolo di convoluzione, difficile calcolo analitico, diventa abbastanza facile e intuitivo trovare la soluzione:



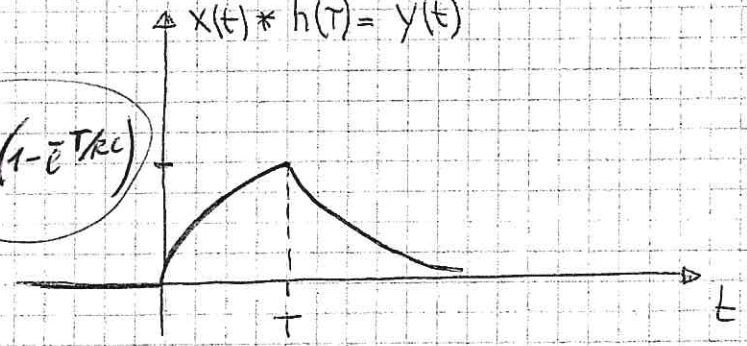


Facendo muovere il segnale $h(t-\tau)$ da $t \ll 0$ verso i $t > 0$ possiamo distinguere i seguenti casi:

$$
\begin{cases}
0 \quad \text{per } t<0 \\
\displaystyle\int_0^t A/RC\, e^{-(t-\tau)/RC}\, d\tau = \frac{A}{\cancel{RC}} \cdot \cancel{RC} \left[e^{-(t-\tau)/RC} \right]_0^t = A\left(1-e^{-t/RC}\right) \quad 0\le t\le T \\
\displaystyle\int_0^T A/RC\, e^{-(t-\tau)/RC}\, d\tau = \frac{A}{\cancel{RC}} \cancel{RC} \left[e^{-(t-\tau)/RC} \right]_0^T =
\end{cases}
$$

$$
= A\left(e^{-(t-T)/RC} - e^{-t/RC}\right)
$$

$$
= A e^{-t/RC}\left(e^{T/RC} - 1\right) \quad \text{per } t > T
$$



$y_{max} = A(1-e^{-T/RC})$

Se $T \ll RC$ (impulso di durata breve rispetto alla costante di tempo del filtro

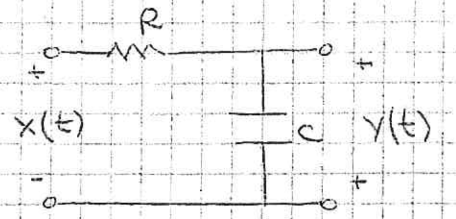
allora $y_{max} \simeq 0$

Se $T \gg RC$ (impulso di durata lungo)

allora $y_{max} \simeq A$ (ampiezza dell'impulso in ingresso)

ESERCIZIO [21]

Ricavare la RISPOSTA IN AMPIEZZA e la RISPOSTA IN FASE del seguente circuito (R-C).



$$\boxed{h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \mu(t)}$$

$$H(f) = f.d.t = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/R} \mu(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

↑ vale 1 per $\tau > 0$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)\tau} d\tau = \left[\frac{1}{RC} e^{-\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)\tau} \cdot \frac{1}{-\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)} \right]_0^{+\infty}$$

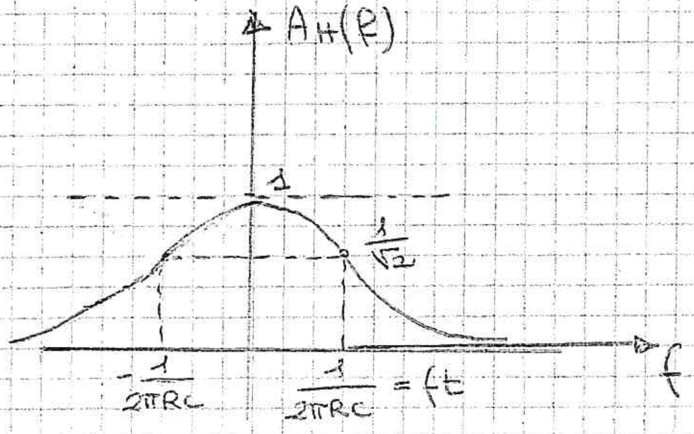
$$= \frac{1}{RC\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)} = \boxed{\frac{1}{1 + j2\pi f RC}}$$

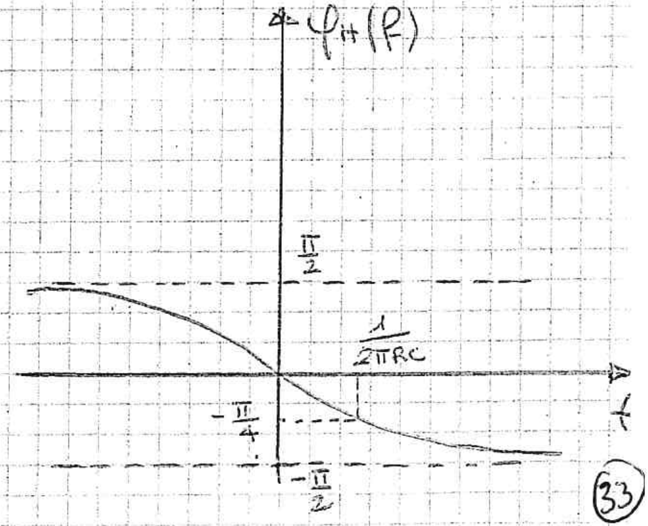
$$A_H(f) = |H(f)| = \frac{|1|}{|1 + j2\pi f RC|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC f)^2}}$$ RISPOSTA IN AMPIEZZA

$$\varphi_H(f) = [\arg[\text{NUM}]] - [\arg[\text{DEN}]] = \arg[1] - \arg[1 + j2\pi rc f]$$

$$= \operatorname{arctg}(\cancel{0}) - \operatorname{arctg}\left[\frac{\text{IMM}}{\text{RE}}\right] = 0 - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi RC f}{1}\right)$$

$$= -\operatorname{arctg}(2\pi RC f)$$ RISPOSTA IN FASE

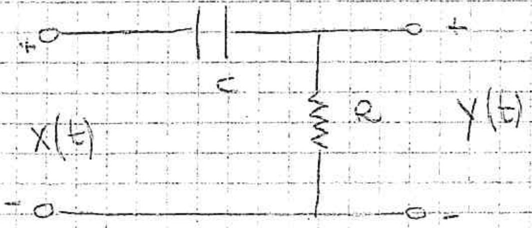




FILTRO PASSA-BASSO Lascia passare segnali a bassa f.

ESERCIZIO - 22)

Ricavare la risposta in ampiezza e la risposta in fase del seguente circuito (C-R)



$$\boxed{h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \mu(t)}$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta(\tau) - \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} \mu(t) \right) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$\mu(t) \to 1$ per $\tau > 0$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta(\tau) - \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} \mu(\tau) \right) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau}_{1} - \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= 1 - \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)\tau} d\tau}_{\text{integrale risolto nell' esercizio 25}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + j2\pi f RC} = \frac{\cancel{1} + j2\pi f RC - \cancel{1}}{1 + j2\pi f RC} = \boxed{\frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC}}$$

$$A_H(f) = |H(f)| = \left| \frac{j2\pi f RC}{1 + (j2\pi f RC)^2} \right| = \frac{|2\pi f RC|}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

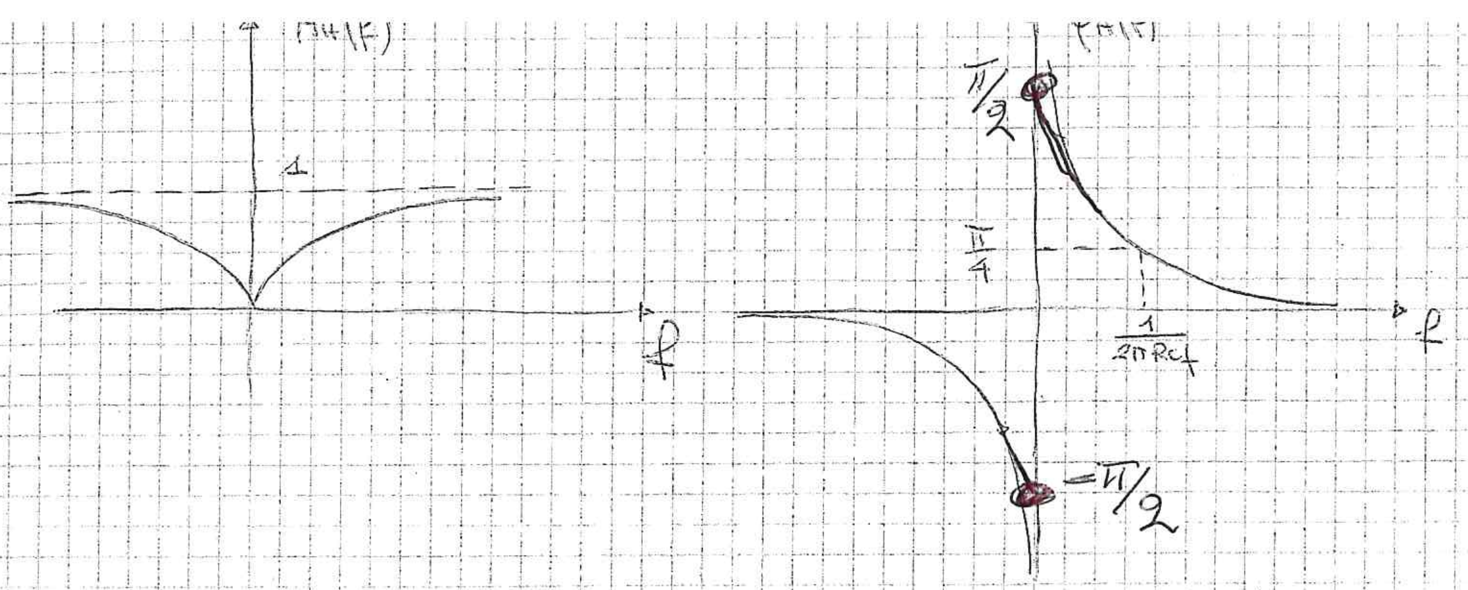
$$\varphi_H(f) = \arg[\text{NUM}] - \arg[\text{DEN}] = \underbrace{\text{arctg}\left(\frac{2\pi RC f}{0}\right)}_{\pm\infty} - \text{arctg}\left(\frac{2\pi RC f}{1}\right)$$

$\longrightarrow \varphi_H(0^+) = \text{arctg}(+\infty) = +\pi/2$

$\longrightarrow \varphi_H(0^-) = \text{arctg}(-\infty) = -\pi/2$

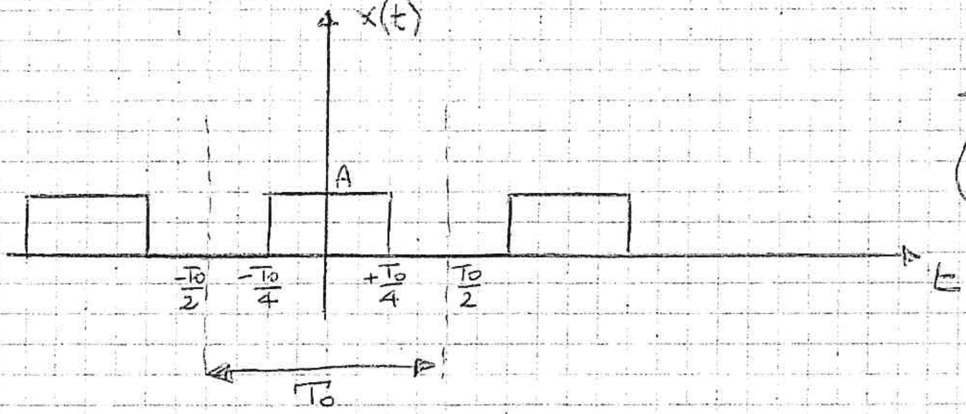
$\longrightarrow \varphi_H(+\infty) = 0$

$\longrightarrow \varphi_H = (-\infty) = 0$



|H(f)|
1
f
φH(f)
π/2
π/4
1/2πRC
f
-π/2

ESERCIZIO [25])



- Segnale pari
- D.C. 50%
- $f_0 = \frac{1}{T_0}$

Calcolare i coefficienti di Fourier e disegnare lo spettro di ampiezza e di fase

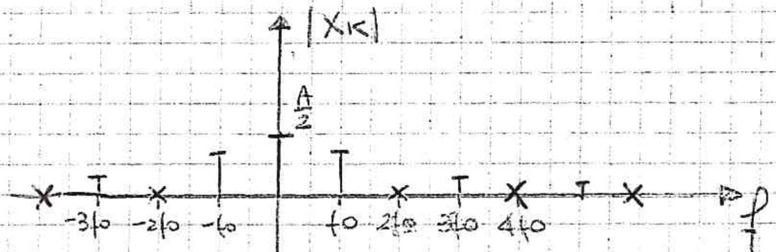
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{T_0/2}\right)$$

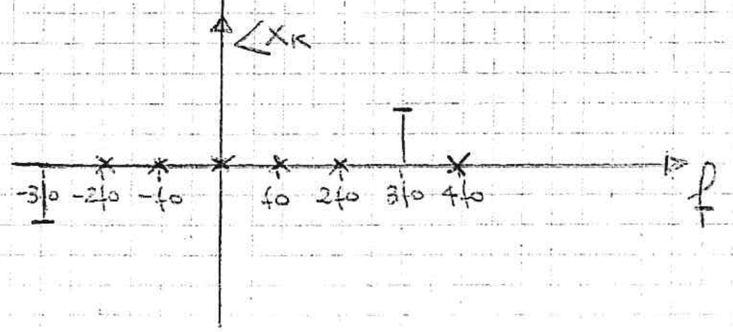
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} A\,\Pi\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{+\frac{T_0}{4}} A e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\right]_{-\frac{T_0}{4}}^{+\frac{T_0}{4}}$$

$$= \frac{A}{\cancel{T_0}} \frac{e^{j\pi k/2} - e^{-j\pi k/2}}{j2\pi k \cancel{f_0}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FORMULE} \\ \text{DI EULERO}}}{=} \frac{A}{\pi k}\,\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{A\,\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{\pi k}$$

$$= \frac{A}{2}\,\frac{\text{sen}\left(k\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{k\frac{\pi}{2}} = \frac{A}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$





$\lvert X_k \rvert$	$\angle X_k$
$X_0 = \frac{A}{2}$	$\angle X_0 = 0$
$X_1 = X_{-1} = \frac{A}{\pi}$	$\angle X_1 = 0$
$X_2 = X_{-2} = 0$	$\angle X_2 = 0$
$X_3 = X_{-3} = -\frac{A}{3\pi}$	$\angle X_3 = +\pi$ $\angle X_{-3} = -\pi$

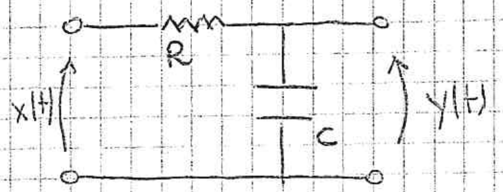
ESERCIZIO 23)

Calcolare, considerando il seguente circuito, y(t) quando in ingresso ho i seguenti segnali:

1) $A\cos(t/RC)$

2) $2\cos\left(2\pi 100t+\frac{\pi}{2}\right)+20\,\mathrm{sen}(2\pi\, 20000t)$

3) $A\cos(20000\pi t+\pi)$



$R = 4\,k\Omega$

$C = 4\,nF$

① $A\cos\left(\frac{t}{RC}\right) = A\cos(2\pi f_0 t+\varphi)$

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \frac{1}{RC} = 2\pi f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \end{cases}$$

$$A_H(f_0) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi RC f_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cancel{2\pi RC}\cdot\frac{1}{\cancel{2\pi RC}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi_H(f_0) = -\mathrm{arctg}(2\pi f RC) = -\mathrm{arctg}\left(\cancel{2\pi RC}\cdot\frac{1}{\cancel{2\pi RC}}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$y(t) = A A_H(f_0)\cos(2\pi f_0 t+\varphi+\varphi_H(f_0))$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}}\cos\left(\cancel{2\pi}\cdot\frac{1}{\cancel{2\pi} RC}t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}}\cos\left(62500t-\frac{\pi}{4}\right)$$

② $x(t) = 2\cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{2}\right) + 20\,\text{sen}\left(2\pi 20'000t\right)$

$\overset{!}{=} 2\cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{2}\right) + 20\cos\left(2\pi 20'000t - \frac{\pi}{2}\right)$

Posso vederlo come somma di due segnali e quindi posso risolverlo con SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ $\Rightarrow$ $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

ⓐ $x_1(t) = 2\cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

$$\begin{cases} A = 2 \\ \varphi = \pi/2 \\ f_0 = 100\,Hz \end{cases}$$

$$A_H(f_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC f_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC 100)^2}} \simeq 1$$

$$\varphi_H(f_0) = -\text{arctg}(2\pi f_0 RC) = -\text{arctg}(6{,}28 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-8}) \overset{!}{=} -5{,}7°$$

$$y_1(t) = A A_H(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \varphi + \varphi_H(f_0))$$

$$\overset{!}{=} 2\cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{2} - 5{,}7°\right)$$

// La sinusoide a 100Hz passa quasi inalterata

ⓑ $x_2(t) = 20\cos\left(2\pi \cdot 20'000t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{cases} A = 20 \\ \varphi = -\pi/2 \\ f_0 = 20'000\,Hz \end{cases}$$

$$A_H(f_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC f_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC \cdot 20000)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{401}} \simeq 0{,}05$$

$$\varphi_H(f_0) = -\text{arctg}(2\pi f_0 RC) = -\text{arctg}(6{,}28 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^4) \simeq -87°$$

$$y_2(t) = A A_H(f_0)\cos(2\pi f_0 t + \varphi + \varphi_H(f_0)) = \underbrace{\frac{20}{\sqrt{401}}}_{\simeq 1} \cos\left(2\pi 20'000t - \frac{\pi}{2} - 87°\right)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

// LA SINUSOIDE A 20 KHz PASSA FORTEMENTE ATTENUATA

③ $x(t) = A\cos(20000\pi t + \pi)$

$$\begin{cases} \varphi = \pi \\ f_0 = 10000\ \text{Hz} \end{cases}$$

$$A_H(f_0) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi RC f_0)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{101}} \simeq 0{,}1$$

$$\varphi_H(f_0) = -\operatorname{arctg}(2\pi f_0 RC) \simeq -84°$$

$$y(t) = A A_H(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \varphi + \varphi_H(f_0))$$

$$= \underbrace{\frac{A}{\sqrt{101}}}_{\simeq 0{,}1 A} \cos\Big(2\pi 10000 t + \pi - \underbrace{84°}_{\simeq \frac{\pi}{2}}\Big)$$

La sinusoide a 10 KHz, 10 volte maggiore della frequenza di taglio, viene attenuata di un fattore $\simeq \frac{1}{10}$