Numeri complessi

Mc128k

Contenuti

Richiami su numeri complessi, forma esponenziale, sinusoidale

Indice

1 Numeri complessi

Alcune note sull'uso specifico dei numeri complessi.

Gli angoli ϑ vengono compresi tra $-\pi$ e $+\pi$. Per rimanere in questo intervallo anche le operazioni vengono lievemente modificate:

$$\begin{cases} Re(z) = R \cdot \cos\vartheta \\ Im(z) = R \cdot \sin\vartheta \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \vartheta = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & a > 0 \\ \pi + \arctan\frac{b}{a} & a < 0, b > 0 \\ -\pi + \arctan\frac{b}{a} & a < 0, b < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{1.2}$$

Inoltre la unità immaginaria $i = (0, 1)$ viene chiamata j, quindi un numero viene indicato come $z = a + jb$ invece che $z = a + ib$. Questo risulta utile in elettrotecnica quando si studiano i fenomeni magnetici, dato che altrimenti si potrebbe confondere con la indicazione della corrente variabile nel tempo.

1.1 Forma esponenziale

La forma esponenziale viene espressa come $e^{j\vartheta}$, dove ϑ rappresenta l'angolo che il vettore forma nel piano di Gauss. Si definisce quindi come:

$$e^{j\vartheta} := \cos\vartheta + j\sin\vartheta \tag{1.3}$$

Aggiungendo la distanza dall'origine si ottiene la forma completa:

$$r \cdot e^{j\vartheta} := r \cdot \cos\vartheta + j \cdot r \cdot \sin\vartheta \tag{1.4}$$

Altro aspetto da notare è che applicando π si ottiene -1:

$$e^{j\pi} = -1 \tag{1.5}$$

1.1.1 Prodotto

Quando si esegue il prodotto bisogna sommare gli angoli e moltiplicare le distanze (questo permette anche di visualizzare in modo rapido un prodotto sul piano di Gauss):

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\vartheta_1} \cdot r_2 e^{j\vartheta_2} = (r_1 r_2) e^{j(\vartheta_1+\vartheta_2)} \tag{1.6}$$

1.1.2 Coniugato

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = (r \cdot e^{j\vartheta})^{-1} = r^{-1} \cdot e^{-j\vartheta} \tag{1.7}$$

Con il caso particolare in cui l'opposto di j (che ha coordinate $(0,1)$) è $-j$:

$$\frac{1}{j} = (j^{-1}) = e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}} = -j \tag{1.8}$$

Il coniugato è formato dalla stessa parte reale e la parte immaginaria opposta:

$$z = a + jb \quad z^* = a - jb \tag{1.9}$$

E valgono le proprietà seguenti:

$$z + z^* = 2a = 2\Re\{z\} \tag{1.10}$$

$$z - z^* = j2b = j2\Im\{z\} \tag{1.11}$$

$$z \cdot z^* = (r \cdot e^{j\vartheta})(r \cdot e^{-j\vartheta}) = r^2 e^{j(\vartheta-\vartheta)} = r^2 \tag{1.12}$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \tag{1.13}$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} \\ z_1 - z_1^* = j2\Im\{z_1\} \end{cases} \tag{1.15}$$

1.1.3 Modulo e argomento

Un numero complesso si può esprimere anche come una combinazione di un **modulo** $|z|$ e un **argomento** $\langle z$, nella forma seguente:

$$z = |z|\, e^{j\langle z} \tag{1.16}$$

Il modulo è determinato dalla distanza dall'origine, che quindi non può **mai essere un valore negativo**:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.17}$$

Quindi l'argomento di un numero reale è sempre 0 (se il numero è positivo) oppure $\pm\pi$. Un numero immaginario puro invece ha sempre argomento $\pm\frac{\pi}{2}$.

Si notano le proprietà:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \tag{1.18}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{1.19}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1 e^{j\vartheta_1}}{r_2 e^{j\vartheta_2}}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)}\right| = \frac{r_1}{r_2} \tag{1.20}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \tag{1.21}$$

1.2 Formule di Eulero

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta \tag{1.22}$$

$$e^{-j\vartheta} = \cos\vartheta - j\sin\vartheta \tag{1.23}$$

Combinando le due proposizioni si ottiene:

$$\cos\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2} \tag{1.24}$$

$$\sin\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j} \tag{1.25}$$

2 Funzioni complesse

Una funzione normalmente prende come parametro un numero reale e produce sempre un numero reale. Nel caso di una funzione complessa sia il parametro che il risultato sono numeri immaginari.

$$w = g(z) \tag{2.1}$$

Essendo una funzione con due dimensioni in entrata e due in uscita, risulta difficile visualizzare la uscita con un grafico (che risulterebbe quadridimensionale), si può

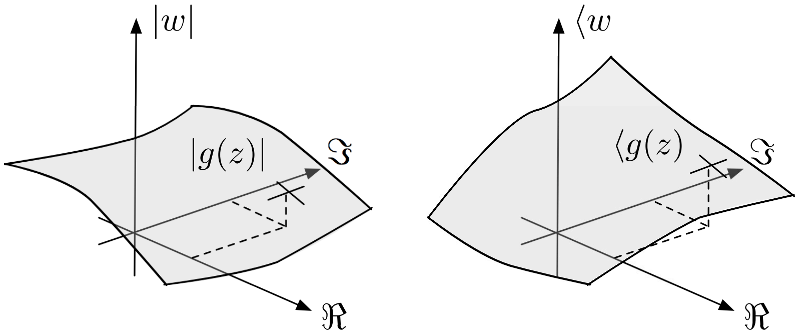

Figura 1: Grafico di funzione complessa

fare in modo di utilizzare due grafici tridimensionali, il primo per il modulo e il secondo per l'argomento, come in fig.1.

Possono esistere anche funzioni complesse a variabile reale, che quindi prendono in entrata un numero $\in \mathbb{R}$ e producono un numero immaginario. Spesso la variabile reale viene indicata come il tempo t che varia a seconda di due segnali $a(t)$ e $b(t)$:

$$z(t) = a(t) + jb(t) = r(t) \cdot e^{j\vartheta(t)} \tag{2.2}$$

Un altro metodo per rappresentare una funzione complessa è utilizzando una curva nel piano di Gauss, quindi una funzione del tempo che determina argomento $\vartheta(t)$ e modulo $r(t)$.

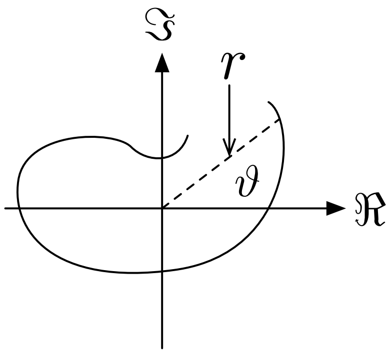

Figura 2: Curva nel piano di Gauss

2.1 Funzioni in forma esponenziale

Si esprime nella forma:

$$z(t) = e^{jwt} = e^{j2\pi f_0 t} \tag{2.3}$$

Dove $w = 2\pi f$ indica la velocità angolare in rad/s, e quindi la funzione evolve linearmente con il tempo (viene moltiplicato per w). La frequenza f è espressa in hertz, quindi il tempo deve essere espresso in secondi.

Nella sua forma più semplice, se fatto evolvere nel tempo, risulta essere un punto che si muove costantemente sulla circonferenza unitaria nel piano di Gauss (fig.3), essendo il modulo uguale a 1 e l'argomento continua a crescere costantemente.

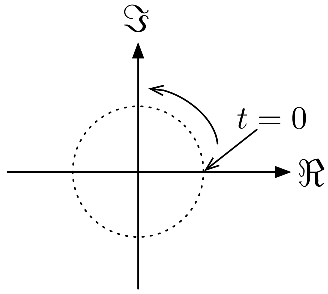

Figura 3: Esponenziale complesso

L'angolo ϑ formato con l'asse dei reali, varia linearmente con il tempo, si può esprimere come funzione di esso:

$$\vartheta(t) = wt \tag{2.4}$$

$$w = \frac{d}{dt}\vartheta(t) \tag{2.5}$$

Essendo una funzione periodica, il periodo si determina dall'inverso della frequenza:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{w} \tag{2.6}$$

Una funzione $z(t)$ di questo tipo si può generalizzare aggiungendo due coefficienti, r che determina il **modulo** e φ per la **fase iniziale**:

$$z(t) = r \cdot e^{j(wt+\varphi)} \quad r > 0 \tag{2.7}$$

Esempio 2.1.
Viene data la funzione $z = -5e^{j\frac{\pi}{4}}$, bisogna calcolare modulo e argomento.

Intuitivamente si potrebbe pensare che il modulo è -5, ma questo risultato è errato, in quanto esso può essere solo un valore positivo. In realtà questa forma indica che esiste un termine -1 viene moltiplicato, facendo risultare il vettore opposto. Bisogna quindi cercare nel piano di Gauss il vettore opposto rispetto a quello rappresentato da $\frac{\pi}{4}$, che è quindi $= -\frac{3}{4}\pi$ (dato che gli angoli vanno da $-\pi$ a π) I valori cercati saranno quindi:

$$\begin{cases} |z| = 5 \\ \langle z = -\frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

2.2 Sinusoidale generica

Una sinusoidale viene rappresentata dalla funzione:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \tag{2.8}$$

Applicando la formula di Eulero per il coseno (1.24), dove $\vartheta = 2\pi f_0 t + \varphi$:

$$x(t) = A \left[\frac{e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t+\varphi)}}{2} \right] \tag{2.9}$$

$$x(t) = \left(\frac{A}{2} e^{j\varphi} \right) e^{j2\pi f_0 t} + \left(\frac{A}{2} e^{-j\varphi} \right) e^{-j2\pi f_0 t} \tag{2.10}$$

$$x(t) = \Re\{A e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{2.11}$$

Viene prodotta la somma di due punti che istante per istante sono coniugati e con modulo $\frac{A}{2}$, sommati formano una curva sull'asse reale (quindi un punto) che ha un andamento sinusoidale oscillante da destra a sinistra, come in fig.4.

I termini $\left(\frac{A}{2}e^{j\varphi}\right)$ e $\left(\frac{A}{2}e^{-j\varphi}\right)$ vengono detti **fasori controrotanti**, dato che φ determina la fase iniziale del circuito, quindi l'angolo da cui inizia il vettore quando il tempo è uguale a zero.

Ogni sinusoide è quindi esprimibile come somma di esponenziali complessi controrotanti, oppure come la parte reale di un vettore che ruota con un moto circolare di raggio A.

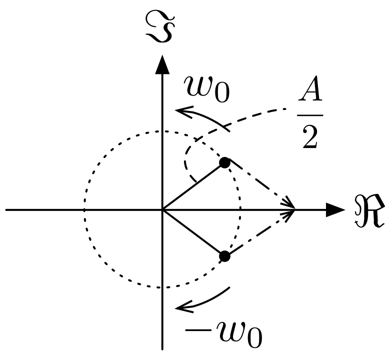

Figura 4: Coseno