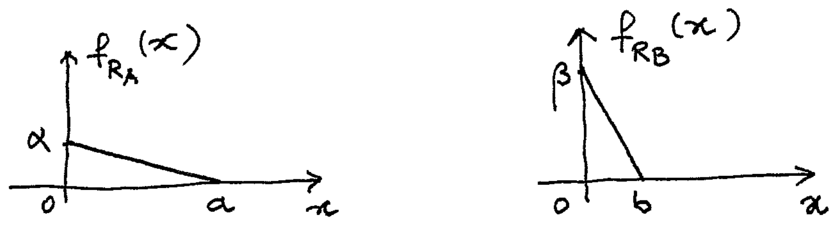
Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A31
Una ditta di spedizioni recapita quotidianamente un plico alla vostra ditta. Gli addetti alla consegna sono il sig. A e il sig. B che si alternano casualmente e indipendentemente ma con probabilità diverse p_A=P(A) e p_B=P(B). La consegna dovrebbe avvenire alle ore 10.00 ma gli addetti si presentano con un ritardo che per ciascuno è una v.a. R_A e R_B, rispettivamente, con densità di probabilità come in figura.



- Si trovi il valor medio delle v.a. R_A, R_B (ritardi dei rispettivi addetti) e della v.a. R = {ritardo di consegna in un giorno qualunque}.
- Un certo giorno vi avvertono che il corriere è appena arrivato e voi valutate che in quel momento le probabilità che l'addetto arrivato sia A e quella che l'addetto sia B sono uguali: che ore sono? (Si esprima tale ora trovando il ritardo r e sommandolo alle ore 10.00).
- *Successivamente* allo svolgimento del punto precedente si trovi il valore numerico di r (in minuti e decimali) sostituendo i seguenti valori nell'espressione trovata: a = 25 min, b = 15 min e i valori di p_A e p_B ottenuti sapendo che p_B è il doppio di p_A (ossia che l'addetto B si presenti con probabilità doppia rispetto ad A);
- Si trovi la densità di probabilità $f_R(x)$ della v.a. R. e se ne tracci un grafico accurato di con i dati numerici sopra trovati (si ricavino anche i necessari valori di α e β (vedi figura sopra).

Quesito A31 – (Soluzione)

Il valor medio di R_A è (dalla definizione):

$$E\{R_A\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{R_A}(x)\,dx$$

dove l'espressione da sostituire a $f_{R_A}(x)$ si ricava dalla figura, da cui:

$$f_{R_A}(x) = -\frac{\alpha}{a}x + \alpha \qquad \text{per } 0<x<a \text{ (e zero altrove).}$$

La normalizzazione richiede: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{R_A}(x)dx = \frac{a \cdot \alpha}{2} = 1$, da cui $\alpha = \frac{2}{a}$, da cui ancora:

$$f_{R_A}(x) = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) \qquad \text{per } 0<x<a \quad \text{(e zero altrove)}$$

e analogamente, essendo $f_{R_B}(x)$ dello stesso tipo di $f_{R_A}(x)$:

$f_{R_B}(x) = \frac{2}{b}\left(1 - \frac{x}{b}\right)$ per $0 < x < b$ (e zero altrove).

Quindi il valor medio di R_A si ricava da:

$$\boxed{E\{R_A\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{R_A}(x)\, dx = \int_0^a x \cdot \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{2}{a}\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a - \left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\right]_0^a\right\} = \frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3a}a^3\right) = \frac{a}{3}}$$

e analogamente: $\boxed{E\{R_B\} = \frac{b}{3}}$

Il valor medio di R si può ricavare dalla versione del teorema della probabilità totale per i valori medi [Vedi testo Bononi, Ferrari, p. 248, Eq. (8.5)]:

$$\boxed{E\{R\} = E\{R|A\}P(A) + E\{R|B\} \cdot P(B) = E\{R_A\}P(A) + E\{R_B\} \cdot P(B) = \frac{1}{3}(a p_A + b p_B)}$$

- La probabilità che l'addetto arrivato alle ore 10.00 + r sia A oppure B si scrive, nei due casi, per mezzo della formula di Bayes mista:

$$P\{A | R = r\} = \frac{f_R(r|A) \cdot P(A)}{f_R(r)}$$

$$P\{B | R = r\} = \frac{f_R(r|B) \cdot P(B)}{f_R(r)}$$

Il quesito richiede di ricavare il valore di r dall'uguaglianza: $P\{A | R = r\} = P\{B | R = r\}$ ossia da:

$$\frac{f_R(r|A) \cdot P(A)}{f_R(r)} = \frac{f_R(r|B) \cdot P(B)}{f_R(r)}$$

da cui:

$$f_{R_A}(r)\cdot p_A = f_{R_B}(r)\cdot p_B$$

essendo $f_R(r|A) = f_{R_A}(r)$ e $f_R(r|B) = f_{R_B}(r)$.

Quindi:

$$\frac{2}{a}\left(1-\frac{r}{a}\right)\cdot p_A = \frac{2}{b}\left(1-\frac{r}{b}\right)\cdot p_B$$

da cui si ricava:

$$\left[\, r = \frac{a^2 b\, p_B - a b^2 p_A}{a^2 p_B - b^2 p_A} = ab\cdot\frac{a p_B - b p_A}{a^2 p_B - b^2 p_A} \,\right] \qquad (1)$$

- I valori di p_A e p_B da usare nella parte numerica si ricavano dall'indicazione: $p_B = 2\cdot p_A$. Dovendo essere: $p_A + p_B = 1 = p_A + 2p_A$ si ottiene: $p_A = \frac{1}{3}$ e $p_B = \frac{2}{3}$.

Sostituendo in (1) i valori numerici indicati si ha:

$$\left[\, r = 25\cdot 15\,\frac{25\cdot\frac{2}{3} - 15\cdot\frac{1}{3}}{625\cdot\frac{2}{3} - 225\cdot\frac{1}{3}} = 12{,}8 \text{ min} \,\right]$$

Quindi l'ora di arrivo è $\simeq$ 10:13.

- Ancora per il teorema della probabilità totale si ha:

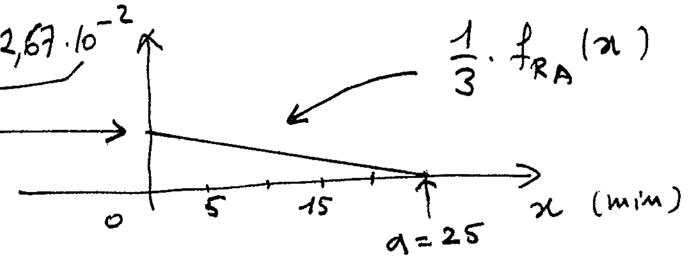
$$f_R(x) = f_R(x|A)\,p_A + f_R(x|B)\,p_B = f_{R_A}(x)\cdot p_A + f_{R_B}(x)\cdot p_B =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot p_A + \frac{2}{b}\left(1-\frac{x}{b}\right)p_B & \text{per } 0<x<b \\ \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot p_A & \text{per } b<x<a \end{cases} =$$

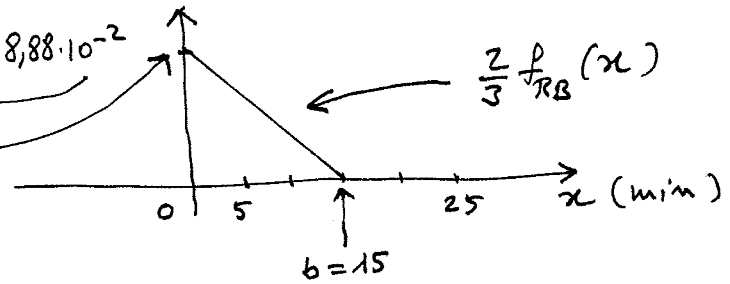
$$= \begin{cases} \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{25}\left(1-\frac{x}{25}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{15}\left(1-\frac{x}{15}\right) & \text{per } 0<x<15 \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{25}\left(1-\frac{x}{25}\right) & \text{per } 15<x<25 \end{cases} \qquad (2)$$

Il grafico di $f_R(x)$ si può ottenere dalla (2) o direttamente per via grafica sommando $\frac{1}{3}\cdot f_{R_A}(x)$ e $\frac{2}{3}\cdot f_{R_B}(x)$:

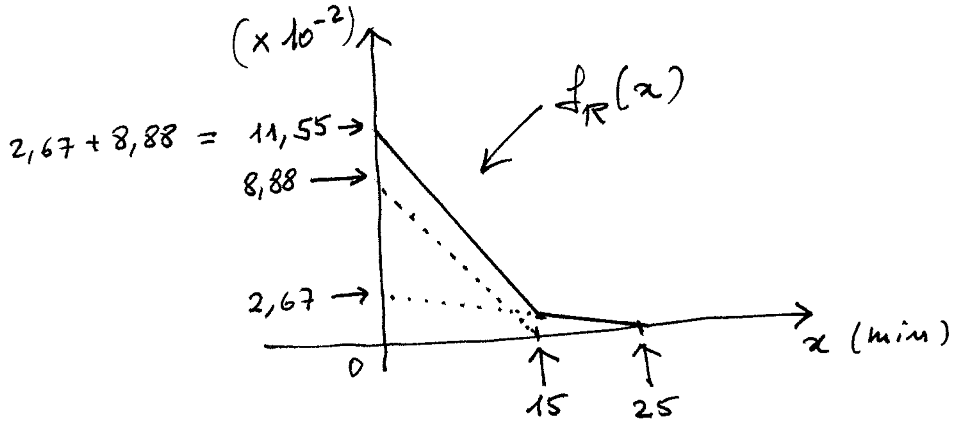
$$\underbrace{\alpha\, p_A = \frac{2}{a}\, p_A = \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{3} = 2{,}67\cdot 10^{-2}}$$



$$\underbrace{\beta\cdot p_B = \frac{2}{b}\cdot p_B = \frac{2}{15}\cdot\frac{2}{3} = 8{,}88\cdot 10^{-2}}$$



e sommando:



Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A16 2/12/1010

Una variabile aleatoria X ha densità di probabilità uniforme con valor medio η_X e varianza σ_X^2.
Si individuino gli estremi a e b dell'intervallo di valori che la variabile può assumere.
Si calcoli la probabilità $P\{\eta_X - \sigma_X < X < \eta_X + \sigma_X\}$ ossia la probabilità che la v.a. assuma valori che si discostano dal valor medio meno di una deviazione standard.
{A scanso di equivoci: la disuguaglianza di Chebychev non c'entra}.

Quesito A16 - (Soluzione)

È noto che per una v.a. X con densità di probabilità uniforme fra i valori a e b (con $a<b$) valgono le seguenti:

$$\eta_x = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{da cui: } \sigma_x = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$$

Quindi dal sistema:

$$\begin{cases} a+b = 2\eta_x \\ -a+b = 2\sqrt{3}\cdot\sigma_x \end{cases} \quad \text{si ricava:} \quad \begin{cases} a = \eta_x - \sqrt{3}\cdot\sigma_x \\ b = \eta_x + \sqrt{3}\cdot\sigma_x \end{cases}$$

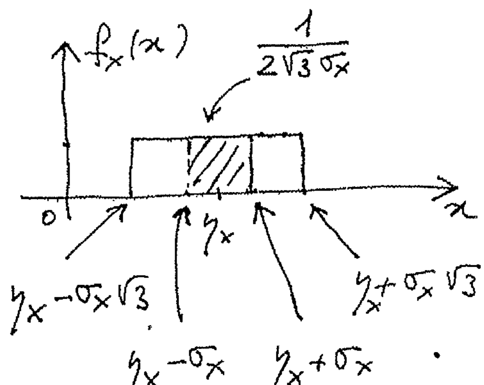
E il valore (costante) della densità fra a e b vale (per la normalizzazione):

$$f_x(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sigma_x} \quad \text{per } \eta_x - \sqrt{3}\sigma_x < x < \eta_x + \sqrt{3}\sigma_x$$

Quindi la probabilità cercata vale:

$$P\{\eta_x - \sigma_x < X < \eta_x + \sigma_x\} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}58$$

essendo uguale all'area tratteggiata in figura.



(segue)

{Non ricordando il legame fra η_x, σ_x^2 e a, b si poteva applicare la definizione di valor medio, e le proprietà della varianza:

$$\eta_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \eta_X^2 = \frac{1}{3}(b^2+ab+b^2) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

essendo:

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_b^a = \frac{1}{3}(b^2+ab+b^2)$$ }

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A9

Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione $Y = g(X)$.

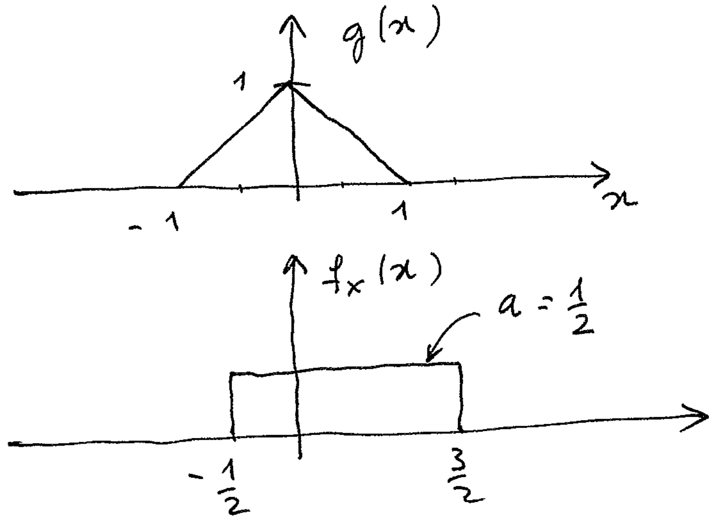
Siano:

$$f_X(x) = \begin{cases} a & \text{per} \quad -1/2 < x < 3/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \Lambda(x) = (1 - |x|)\cdot\Pi(x/2)\ .$$

- Si dica quale deve essere il valore di a.
- Si tracci un grafico di $g(x)$
- Si trovi l'espressione della densità $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico.

Quesito A9 (Soluzione)

In figura vediamo il grafico di $y = g(x) = \Lambda(x)$ e la densità $f_X(x)$ di X che, per la proprietà di normalizzazione vale $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ per $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



Applicando il teorema fondamentale:

1) Fuori del codominio: per $y < 0$ (ma $y \neq 0$) e $y > 1$ si ha $f_Y(y) = 0$

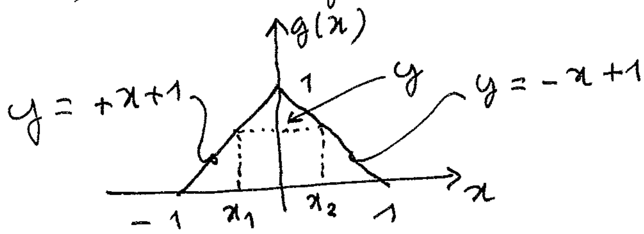
$\downarrow$

2) Zone piatte: ce n'è una, per $y=0$, dove avremo una delta di area pari a $P\{Y=0\} =$

$= P\{X>1\} = P\{1 < X < \frac{3}{2}\} = \frac{1}{4}$

3) Per ogni $0<y<1$: esistono due soluzioni dell'equazione $y = g(x)$ e valgono:

$$\begin{cases} x_1 = y-1 \\ x_2 = 1-y \end{cases}$$



La derivata vale:

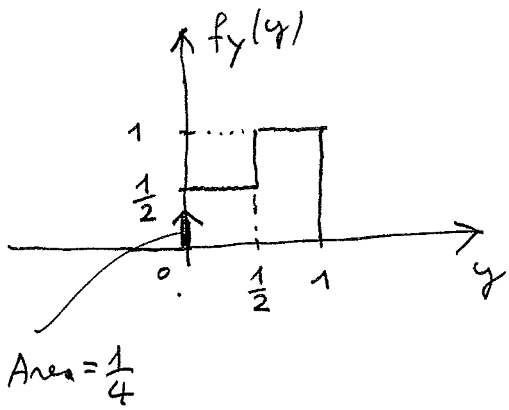
$$g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } 0 < x < 1 \\ +1 & \text{per } -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x_1) = +1 \\ g'(x_2) = -1 \end{cases}$$

e quindi, per $0<y<1$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g(x_2)|} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}}{|1|} + \frac{\frac{1}{2}}{|-1|} = 1, & \frac{1}{2} < y < 1 \\ \frac{0}{|1|} + \frac{\frac{1}{2}}{|-1|} = \frac{1}{2}, & 0 < y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

E quindi:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\delta(y) & \text{per } y=0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } 0<y<\frac{1}{2} \\ 1 & \text{per } \frac{1}{2}<y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

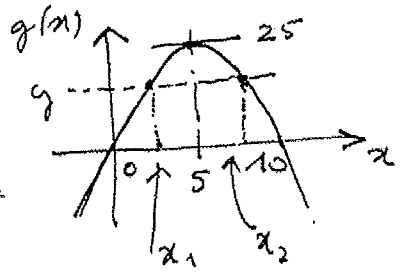
Quesito A17 2/12/1010
Su un segmento lungo 10 cm si sceglie un punto a caso. Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y = {area del rettangolo avente per lati le due parti del segmento}.

Quesito A17 - (Soluzione)

Detta X la v.a. X = {lunghezza di una delle due parti del segmento} si può assumere che essa abbia densità di probabilità uniforme fra 0 e 10 cm, ossia:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ciò che si richiede è quindi la densità di probabilità della v.a. $Y = X \cdot (10 - X)$ che è funzione della X secondo la seguente: $g(x) = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$ il cui grafico è come in figura.



Si può applicare il teorema fondamentale che richiede la soluzione dell'equazione $y = x(10-x)$ ossia:

$x^2 - 10x + y = 0$ che non ha soluzioni per $y > 25$ (vedi figura) e che ha le due soluzioni seguenti per $y \leq 25$:

$$x_{1,2} = \frac{10 \mp \sqrt{100 - 4y}}{2} = 5 \pm \sqrt{25 - y}$$

Serve anche la derivata di $g(x)$ che vale: $g'(x) = 10 - 2x$.

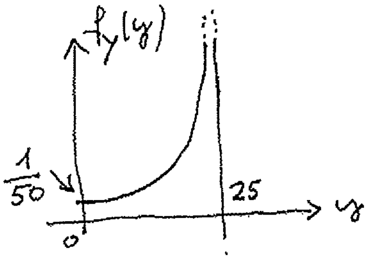
Quindi:

(segue)

Quindi:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y > 25 \\ \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dfrac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = \dfrac{\frac{1}{10}}{|10 - 2(5 - \sqrt{25-y})|} + \dfrac{\frac{1}{10}}{|10 - 2(5 + \sqrt{25-y})|} & \text{per } 0 < y < 25 \\ 0 & \text{per } y < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } y > 25 \\ \dfrac{1}{10\sqrt{25-y}} & \text{per } 0 < y < 25 \\ 0 & \text{per } y < 0 \end{cases}$$



4

Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A49 11/9/12

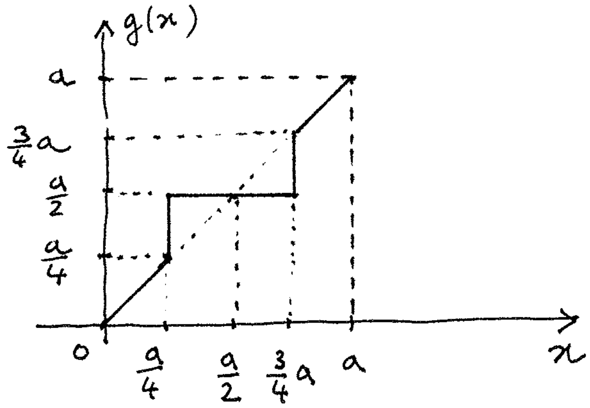
La v.a. X è uniforme nell'intervallo $(0, a)$. La v.a. Y è ottenuta dalla X mediante la trasformazione $Y = g(X)$ dove:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad 0 \le x \le a/4 \quad \text{e per} \quad 3a/4 \le x \le a \\ a/2 & \text{per} \quad a/4 < x < 3a/4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si tracci un grafico di $g(x)$.
Si determinino la funzione di distribuzione $F_y(y)$ (CDF) e la densità di probabilità $f_y(y)$ (PDF) di Y.

Quesito A49 (Soluzione)

Il grafico di $g(x)$ è riportato in figura.



A causa della zona piatta (al livello costante $y = \frac{a}{2}$) e dei salti in $x = \frac{a}{4}$ e $x = \frac{3}{4}a$ dobbiamo attenderci che la densità di probabilità cercata abbia un impulso in $y = \frac{a}{2}$ e sia nulla negli intervalli $\frac{a}{4} < y < \frac{a}{2}$ e $\frac{a}{2} < y < \frac{3}{4}a$.

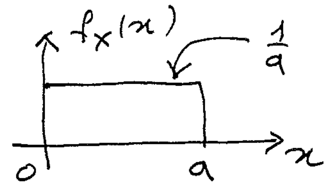
Cerchiamo la funzione di distribuzione $F_y(y) = P\{Y \le y\}$.
È chiaro che per $y \ge a$ è $F_y(y) = 1$ e per $y < 0$ è $F_y(y) = 0$.

Per i valori di y corrispondenti ai tratti rettilinei obliqui dove $y = g(x) = x$ si ha:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \leq x\} = \frac{\text{Lunghezza del segmento } (0, x=y)}{\text{Lunghezza del segmento } (0,a)} = \frac{y}{a}$$

Inoltre per ogni valore di y nell'intervallo $\frac{a}{2} \leq y < \frac{3}{4}a$ (salto verticale) si ha:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\left\{X \leq \frac{3}{4}a\right\} = \frac{3}{4}$$

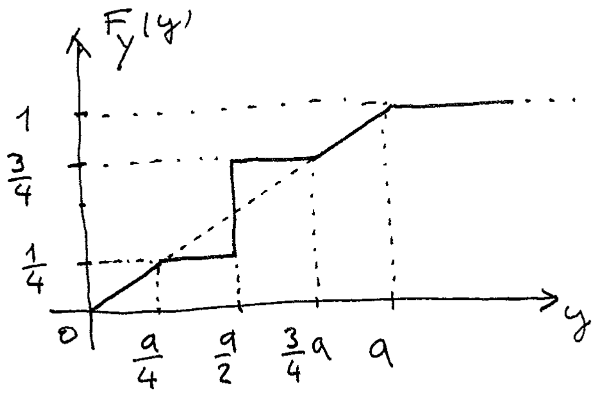


e per ogni valore nell'intervallo $\frac{a}{4} \leq y < \frac{a}{2}$ è:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\left\{X \leq \frac{a}{4}\right\} = \frac{1}{4}$$

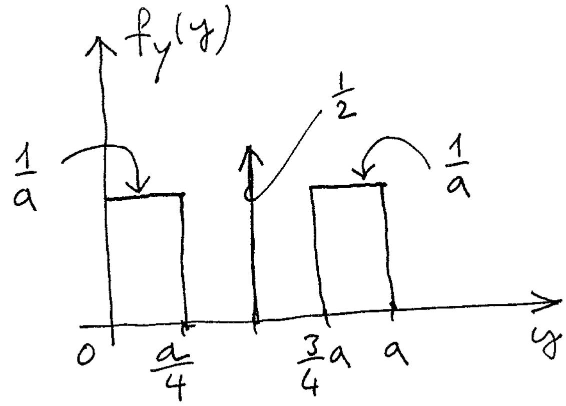
Quindi riassumendo (vedi anche la figura):

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{per } y \geq a \\ \frac{y}{a} & \text{"} \quad \frac{3}{4}a \leq y < a \\ \frac{3}{4} & \text{"} \quad \frac{a}{2} \leq y < \frac{3}{4}a \\ \frac{1}{4} & \text{"} \quad \frac{a}{4} \leq y < \frac{a}{2} \\ \frac{y}{a} & \text{"} \quad 0 \leq y < \frac{a}{4} \\ 0 & \text{"} \quad y < 0 \end{cases}$$



La $f_Y(y)$ si ricava derivando (vedi anche la figura):

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{per } \frac{3}{4}a < y < a \\ 0 & \text{"} \quad \frac{a}{2} < y < \frac{3}{4}a \\ \frac{1}{2}\,\delta\left(y - \frac{a}{2}\right) & \text{"} \quad y = \frac{a}{2} \\ 0 & \text{"} \quad \frac{a}{4} < y < \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a} & \text{"} \quad 0 < y < \frac{a}{4} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

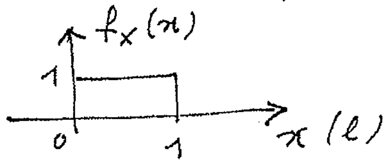


Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A3 18/2/2011
Sono disponibili sei contenitori cilindrici con superficie di base di 1 dm^2. Due di questi sono alti 6 cm e quattro sono alti 15 cm. Si sceglie a caso un contenitore e vi si versa una quantità di liquido che è una variabile aleatoria X uniformemente distribuita fra 0 e 1 litro.
Si trovi la densità di probabilità della variabile aleatoria Y = {livello raggiunto dal liquido nel contenitore}.

Quesito A3 - (Soluzione)

La densità di probabilità della v.a. X = {quantità di liquido versato (in litri)} è come in figura:



Per trovare la densità di probabilità della v.a. Y = {livello raggiunto dal liquido nel contenitore}
Conviene usare il teorema delle probabilità totali (Eq(8.3) p. 247): Bononi Ferrari

$$f_Y(y) = f_Y(y|A_1)P(A_1) + f_Y(y|A_2)P(A_2) \qquad (1)$$

dove: A_1 = {Il contenitore scelto è alto 15 cm} $\rightarrow P(A_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

A_2 = { " " " " " 6 cm} $\rightarrow P(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

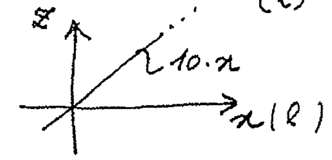
Dette Z e W le v.a.:

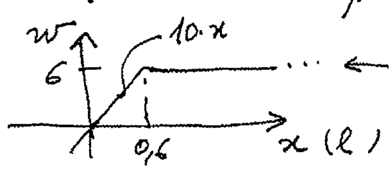
Z = {altezza (cm) raggiunta dal liquido in un cont. alto 15 cm}
W = { " " " " " " " " 6 cm}

si ha: $f_Y(y|A_1) = f_Z(y)$ e $f_Y(y|A_2) = f_W(y)$ (2)

Si noti che Z e W sono funzioni di X secondo le seguenti:

$\underset{(cm)}{z} = g(x) = 10 \cdot \underset{(l)}{x}$; $w = \begin{cases} 10 \cdot x = g(x) & \text{per } x < 0{,}6 \\ 6 & \text{per } x \geq 0{,}6 \end{cases}$ ← Trabocca

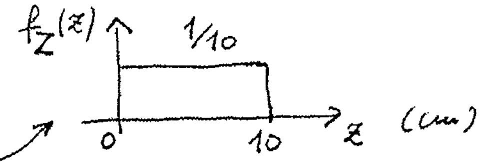




← Tratto costante: dà origine a una delta.

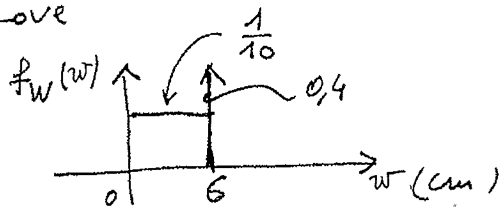
Applicando il teorema fondamentale si ha quindi:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \dfrac{1}{10} & \text{per } 0<z<10, \text{ essendo: } x_1 = \dfrac{z}{10} \text{ e } g'(x) = 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



e l'altra:

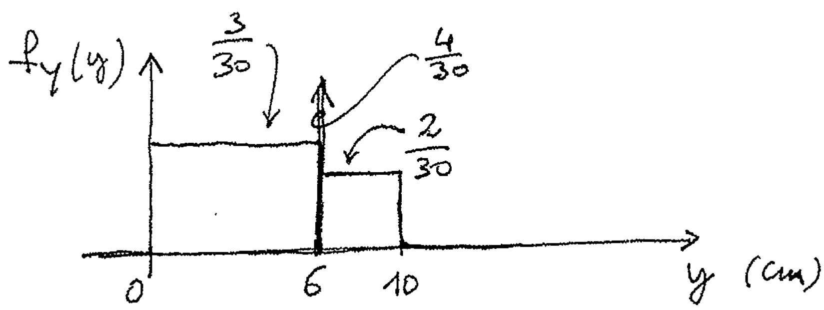
$$f_W(w) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \dfrac{1}{10} & \text{per } 0 < w < 6, \text{ essendo: } x_1 = \dfrac{w}{10} \text{ e } g'(x) = 10 \\ \delta(w-6) \cdot P\{X \geq 0{,}6\} = 0{,}4 \cdot \delta(w-6) & \text{per } w = 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



E infine dalla (1) e la (2), sostituendo y a z e w in $f_Z(z)$ e $f_W(w)$, si ha:

$$f_Y(y) = f_Z(y) \cdot \frac{2}{3} + f_W(y) \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{2}{3} + \left[\dfrac{1}{10} + 0{,}4 \cdot \delta(y-6) \right] \dfrac{1}{3} = \\ = \dfrac{3}{30} + \dfrac{4}{30} \delta(y-6) & \text{per } 0 < y \leq 6 \text{ cm} \\ \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{30} & \text{per } 6 < y < 10 \text{ cm} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

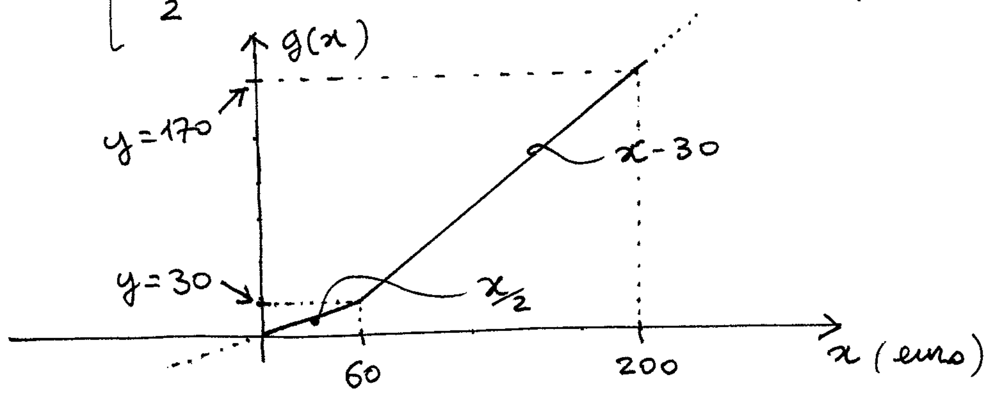
Quesito A12 13/09/2011
La quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca quando si ferma a rifornire di benzina la sua auto è una variabile aleatoria X (supposta continua) uniformemente distribuita fra 0 e 200 euro.
Il sig. Rossi ha l'abitudine di comportarsi così:
- se in tasca ha più di 60 euro mette 30 euro di benzina;
- se ha meno di 60 euro (o 60 euro) mette una quantità di benzina corrispondente alla metà dei soldi che ha in tasca.

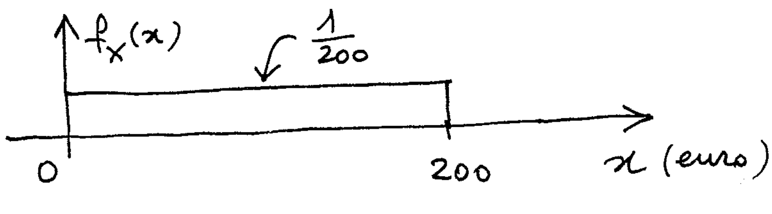
Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y = {Quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca dopo un generico rifornimento}. (N.B. – Si ipotizza che occorrano sempre più di 30 euro per raggiungere il pieno).

Quesito A12 – (Soluzione)

La v.a. Y si può pensare ottenuta dalla X con la trasformazione seguente:

$$y = g(x) = \begin{cases} x - 30 & \text{per } x > 60 \\ \frac{x}{2} & \text{per } x \leq 60 \end{cases} \Longrightarrow g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 60 \\ \frac{1}{2} & \text{per } x < 60 \end{cases}$$





Per ogni valore di y esiste una sola soluzione di $y = g(x)$ che nei vari tratti vale (si veda il grafico):

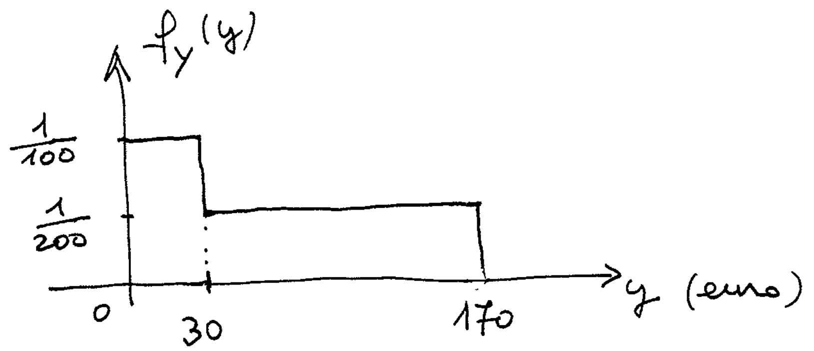
per $y > 30 \longrightarrow y = x - 30 \longrightarrow x_1 = y + 30$, $g'(x_1) = 1$

per $y < 30 \longrightarrow y = \frac{x}{2} \longrightarrow x_1 = 2y$, $g'(x_1) = \frac{1}{2}$

Si può applicare il teorema fondamentale ottenendosi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{200}}{1} = \dfrac{1}{200} & \text{per } 30<y<170 \quad (60<x_1<200) \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{100} & \text{per } 0<y<30 \quad (0<x_1<60) \\[2ex] 0 & \text{per } y<0,\ y>170 \quad (x_1<0,\ x_1>200) \end{cases}$$

Da cui il grafico:



Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A23 - (Soluzione)

1) È noto che la densità di probabilità di una v.a. gaussiana $\mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2)$ è:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\cdot\sigma_x^2}}$$

La densità di probabilità della v.a. Y, funzione della X secondo la seguente: $Y = g(X) = c(X+d)$ si ottiene applicando il teorema fondamentale a detta trasformazione -

Risolvendo la seguente: $y = c(x+d)$ rispetto a x si ha l'unica soluzione:

$$x_1 = \frac{y - cd}{c} = \frac{y}{c} - d \quad , \text{ si ha inoltre: } g'(x) = c$$

Quindi risulta:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_X\left(\frac{y-cd}{c}\right)}{|c|} = \frac{1}{|c|}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{\left[\frac{y-cd}{c}-\eta_x\right]^2}{2\sigma_x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\, c^2\sigma_x^2}} e^{-\frac{[y-(cd+c\eta_x)]^2}{2\cdot(c^2\sigma_x^2)}}$$

In cui si riconosce una gaussiana con parametri:

$$\begin{cases} \sigma_y^2 = c^2\sigma_x^2 \\ \eta_y = c\eta_x + cd \end{cases}$$

2) Per ottenere una v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ occorre imporre $\eta_y = 0$ e $\sigma_y^2 = 1$

ossia:

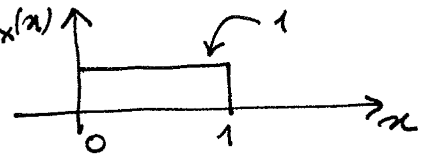
$$\begin{cases} \sigma_y^2 = c^2\sigma_x^2 = 1 \\ \eta_y = c\eta_x + cd = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{\sigma_x} \\ d = -\eta_x \end{cases}$$

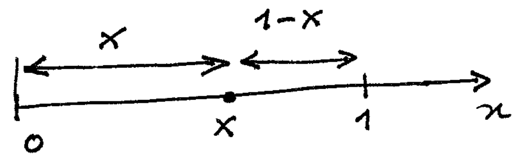
Esame di TEORIA DEI SEGNALI

Quesito **A33**
Si sceglie a caso un punto di ascissa X nell'intervallo (0,1). Le lunghezze dei due segmenti in cui risulta suddiviso l'intervallo siano rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di un numero complesso Z.
Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y = {modulo quadro di Z} = $|Z|^2$ e se ne tracci un grafico.

Quesito A33 (Soluzione)

Detta X la v.a. "ascissa del punto scelto a caso in (0,1)" si può assumere $f_X(x)$ uniforme fra 0 e 1, quindi (vedi figura)



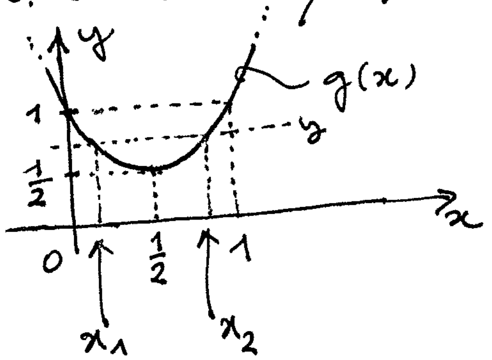


Si ha:

$$Z = X + j(1-X) \Rightarrow Y = |Z|^2 = X^2 + (1-X)^2 = 2X^2 - 2X + 1$$

Si cerca quindi la densità di prob. della v.a. $Y = g(X)$ dove:

$$y = g(x) = 2x^2 - 2x + 1 \longrightarrow$$



Si applica il Teorema fondamentale.

l'equazione:

$y = 2x^2 - 2x + 1$ ovvero: $2x^2 - 2x + 1 - y = 0$

non ha radici per $y < \frac{1}{2}$ (come si vede dal grafico o da: $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot (1-y) \geq 0$) quindi in tale intervallo $f_Y(y) = 0$.

Per $y \geq \frac{1}{2}$ si hanno due radici:

$$x_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{4 - 4 \cdot 2(1-y)}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{2y-1}\right)$$

Si ha inoltre:

$$g'(x) = 4x - 2 \quad \begin{cases} \nearrow \; |g'(x_1)| = \Big| 4 \cdot \frac{1}{2}\overbrace{\left(1 - \sqrt{2y-1}\right)}^{x_1} - 2 \Big| = 2 \cdot \sqrt{2y-1} \\ \searrow \; |g'(x_2)| = \Big| 4 \cdot \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \sqrt{2y-1}\right)}_{x_2} - 2 \Big| = 2 \cdot \sqrt{2y-1} \end{cases}$$

Quindi:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dfrac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} & \text{per } y \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{per } y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

ma $f_X(x_{1,2}) = 1$ per $0 < x_{1,2} < 1$ ossia per $\frac{1}{2} < y < 1$

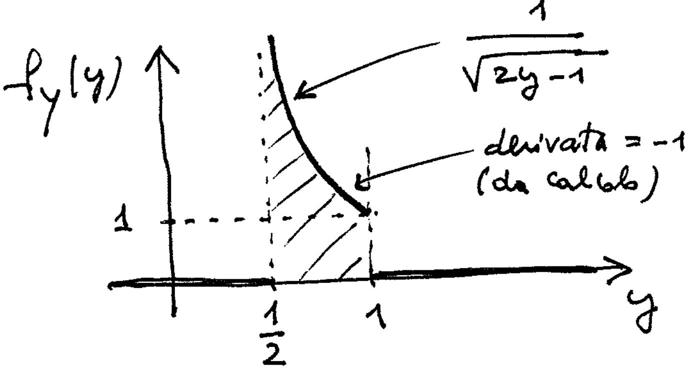
e $f_X(x_{1,2}) = 0$ per $x_{1,2} < 0$ e $x_{1,2} > 1$ " " $\underbrace{y > 1}$

(Immediatamente dal grafico di $g(x)$)

quindi:

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2y-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2y-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2y-1}} & \text{per } \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

Grafico di $f_Y(y)$: →



{Verifica di normalizzazione:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2y-1}}\, dy = \int_{0}^{1} \frac{1}{\cancel{\lambda}} \cdot \cancel{\lambda}\, d\lambda = 1$$

Cambio di variabile:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2y-1} = \lambda \;\rightarrow\; y &= \frac{1}{2}(\lambda^2 + 1) \\ dy &= \frac{1}{2} 2\lambda \cdot d\lambda = \lambda\, d\lambda \end{aligned}\right\}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A45 2/7/12

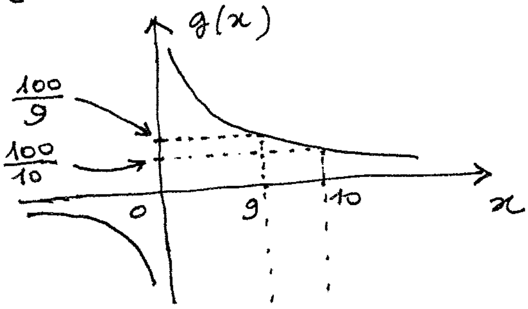
La velocità con cui gli atleti di un certo gruppo corrono i cento metri (velocità supposta costante durante tutta la gara) è una v.a. X uniformemente distribuita fra 9 e 10 m/s.
Si trovi la densità di probabilità $f_Y(y)$ della v.a. Y = "tempo impiegato a correre i cento metri da un atleta di tale gruppo".
Si organizza una gara (di cento metri) con 6 di tali atleti scelti a caso dal gruppo. Qual è la probabilità che il 1° e il 2° classificato arrivino al traguardo in meno di t_0 = 10,4 s e tutti gli altri arrivino in un tempo maggiore di t_0?

Quesito A45 (Soluzione)

La v.a. Y è funzione della v.a. X ossia: $Y = g(X)$ essendo:

$$y = g(x) = \frac{100}{x} \text{ s} \quad (x \text{ in m/s})$$

Per trovare $f_Y(y)$ si può usare il teorema fondamentale osservando che la funzione $g(x) = \frac{100}{x}$ ha grafico come in figura:

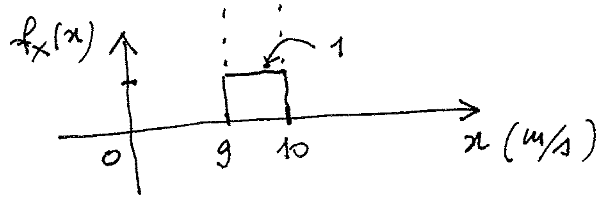


La sua derivata è:

$$g'(x) = -\frac{100}{x^2}$$

e la densità di prob. della X è:

$$f_X(x) = \Pi(x - 9{,}5) \longrightarrow$$

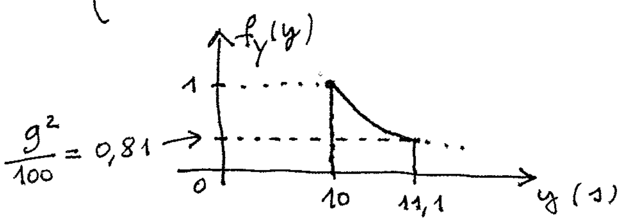


L'equazione $y = \frac{100}{x}$ ha la seguente unica soluzione per ogni y:

$x_1 = \frac{100}{y}$ quindi applicando il teorema fondamentale si ha:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{\Pi\left(\frac{100}{y} - 9{,}5\right)}{\left|-\frac{100}{(100/y)^2}\right|} = \begin{cases} \frac{100}{y^2} & \text{per } \underbrace{\frac{100}{10}}_{10} < y < \underbrace{\frac{100}{9}}_{11,1} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

N.B.: figure non in scala



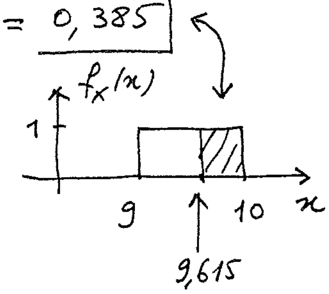
La seconda domanda è assimilabile a un problema di prove ripetute infatti, detta p la probabilità che un atleta scelto a caso percorra i cento metri in meno di 10,4 s (successo) si cerca la probabilità di ottenere 2 successi su 6 prove (6 atleti) ossia:

$$P = \binom{6}{2} = p^2(1-p)^4$$

Poiché il tempo di percorrenza è $Y = g(X)$ dove $g(x) = \frac{100}{x}$ è funzione monotona decrescente di x si ha:

$$\boxed{p} = \text{Prob}\{\text{Un atleta scelto a caso percorra 100 m in meno di } 10{,}4\ s\} =$$

$$= P\left\{X > \frac{100}{10{,}4} \simeq 9{,}615\ m/s\right\} = \frac{10-9{,}615}{10-9} = \boxed{0{,}385}$$



e quindi:

$$\boxed{P = \binom{6}{2}\, 0{,}385^2 \cdot (1-0{,}385)^4 = 15 \cdot 0{,}148 \cdot 0{,}143 = 0{,}318}$$

Il valore di p si poteva naturalmente trovare anche utilizzando la $f_Y(y)$:

$$p = P\{10 < Y < 10{,}4\} =$$

$$= \int_{10}^{10{,}4} \frac{100}{y^2}\,dy = 100\left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_{10}^{10{,}4} = 100\left[\frac{(10{,}4)^{-1} - 10^{-1}}{-1}\right] = 0{,}385$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

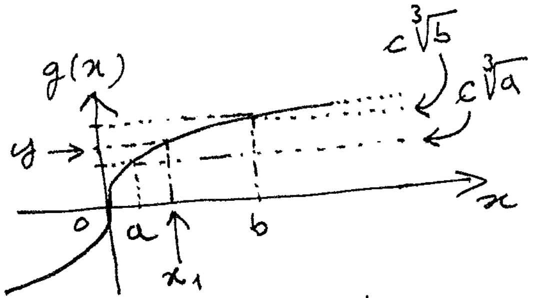
Esercizio n. 2 (A56)

Sia X una v.a. uniformemente distribuita fra a e b, con $0 < a < b$.

a) Si trovi la densità di probabilità della variabile $Y = c \cdot \sqrt[3]{X}$, con $c > 0$, e se ne tracci un grafico.

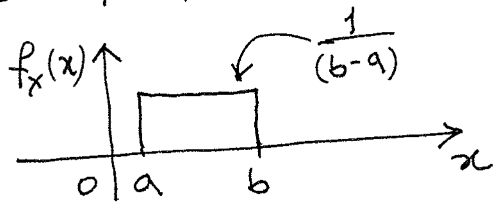
b) Si trovi il valor medio della variabile Y.

Quesito A56 (Soluzione)



a) È $Y = g(X)$ dove $g(x) = c \cdot \sqrt[3]{x}$.

Il grafico di $g(x)$ e la densità $f_X(x)$ sono in figura.



Si può applicare il teorema fondamentale osservando che l'equazione $y = c\sqrt[3]{x}$ ha come unica soluzione, per ogni y:

$$x_1 = \left(\frac{y}{c}\right)^3$$

e che

$$g'(x) = c\,\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{c}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

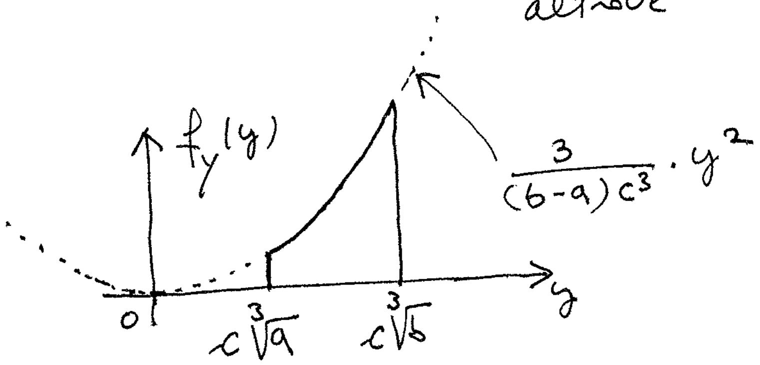
da cui:

$$g'(x_1) = c \cdot \frac{1}{3}\left(x_1^{-\frac{2}{3}}\right) = c \cdot \frac{1}{3}\left[\left(\frac{y}{c}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} = c \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{y}{c}\right)^{-2} = \frac{1}{3}\,\frac{c^3}{y^2}$$

Quindi:

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{(b-a)}}{\left|\frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{y^2}\right|} = \dfrac{1}{(b-a)}\cdot\dfrac{1}{c^3}\cdot 3y^2 & \text{per } c\sqrt[3]{a} < y < c\sqrt[3]{b} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Grafico $\longrightarrow$



b) Il valor medio $E\{Y\}$ si può calcolare col teorema dell'aspettazione:

$$\boxed{E\{Y\} = E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -c\sqrt[3]{x} \cdot f_X(x) = \int_a^b -c\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{(b-a)}\, dx = \frac{-c}{(b-a)} \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_a^b =$$

$$\boxed{= \frac{-c}{(b-a)} \cdot \frac{3}{4} \left(b^{4/3} - a^{4/3} \right)}$$

Ma anche, usando la $f_Y(y)$ trovata:

$$\boxed{E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy} = \int_{-c\sqrt[3]{a}}^{-c\sqrt[3]{b}} y \cdot \frac{1}{(b-a)} \frac{1}{-c^3} \cdot 3y^2\, dy =$$

$$= \frac{3}{(b-a)-c^3} \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_{-c\sqrt[3]{a}}^{-c\sqrt[3]{b}} = \frac{3}{(b-a)\cancel{-c^3}} \frac{1}{4} c^4 \left(b^{4/3} - a^{4/3} \right) =$$

$$\boxed{= \frac{3}{4} \frac{-c}{(b-a)} \left(b^{4/3} - a^{4/3} \right)}$$

{ Verifica di normalizzazione di $f_Y(y)$ (Non richiesta).

$$\int_{-c\sqrt[3]{a}}^{-c\sqrt[3]{b}} \frac{1}{(b-a)} \frac{1}{-c^3} \cdot 3y^2\, dy = \frac{3}{(b-a)-c^3} \left[\frac{1}{3} \cdot y^3 \right]_{-c\sqrt[3]{a}}^{-c\sqrt[3]{b}} =$$

$$= \frac{3}{(b-a)-c^3} \cdot \frac{1}{3} \left(-c^3 b - -c^3 a \right) = 1$$

}

Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A85
Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione

$$Y = e^{X}$$

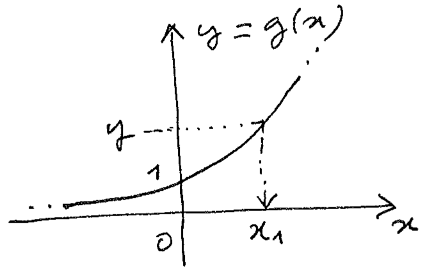
a) Si trovi la densità di probabilità $f_Y(y)$ della v.a. Y sapendo che la densità della X è la seguente:

$$f_X(x) = 2e^{-2x}\,\mathrm{u}(x)$$

b) Si trovi il valor medio della v.a. Y senza usare la densità $f_Y(y)$ trovata al punto precedente.

Quesito A85 (Soluzione)

a) Si può applicare il teorema fondamentale.
La funzione $y = g(x) = e^{x}$
è rappresentata in figura.



Si nota subito che l'equazione $y = e^{x}$ non ha soluzioni per $y \leq 0$ per cui sarà $f_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Si ha poi una soluzione x_1 per ogni $y > 0$ ed è:

$x_1 = \ln y$, per $y > 0$.

Si osservi anche che: $g'(x) = e^{x} \rightarrow g'(x_1) = e^{x_1} = e^{\ln y} = y$ per $y > 0$

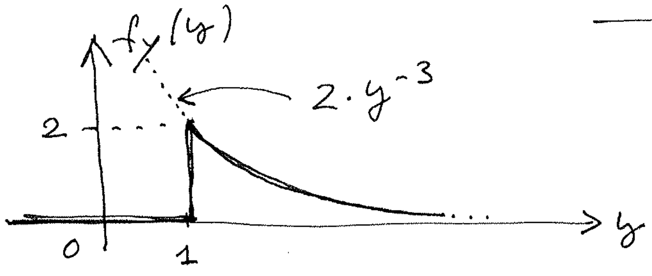
Essendo $f_X(x) = 2 \cdot e^{-2x}\, u(x)$, applicando il teorema fondamentale si ottiene:

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \dfrac{2 \cdot e^{-2x_1} \cdot u(x_1)}{|e^{x_1}|} & \text{per } y > 0 \\ 0 \text{ altrove} & \end{cases}}$$

$= 1$ per $\ln y > 0 \rightarrow \underline{y > 1}$

$$= \begin{cases} \dfrac{2 \cdot e^{-2 \cdot \ln y} \cdot u(\ln y)}{|y|} = \dfrac{2 \cdot e^{\ln(y^{-2})}}{|y|} = \dfrac{2 \cdot y^{-2}}{|y|} = 2 \cdot y^{-3} \text{ per } y > 1 \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$$

il cui grafico è in figura $\longrightarrow$



b) Per trovare il v.m. di y si può usare il teorema dell'aspettazione:

$$\boxed{\eta_y = E\{y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx} =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{x} \cdot 2\, e^{-2\cdot x}\, dx = \int_0^{+\infty} 2 \cdot e^{-x}\, dx =$$

$$= 2\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{+\infty} = 2 \cdot \left[\frac{\overset{0}{e^{-\infty}} - 1}{-1}\right] = 2$$

Verifica di normalizzazione -

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_y(y)\, dy = \int_1^{+\infty} 2 \cdot y^{-3}\, dy = 2 \cdot \left[\frac{y^{-2}}{-2}\right]_1^{+\infty} = \cancel{2} \cdot \left[\frac{0-1}{\cancel{-2}}\right] = 1 \quad \underline{\text{ok.}}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A101

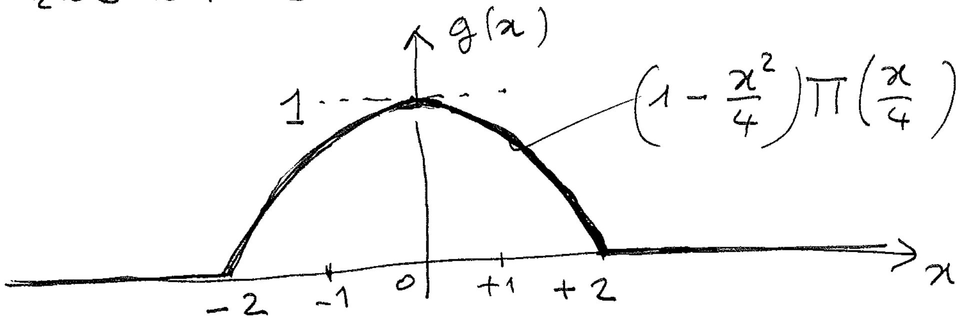
Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione $Y = g(X)$. La densità di probabilità $f_X(x)$ sia uniforme fra -3 e $+1$ e la funzione $g(x)$ sia:

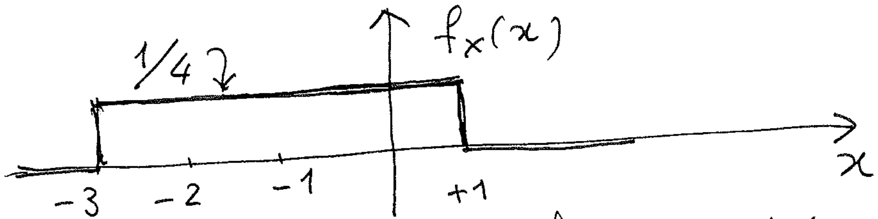
$$g(x) = (1 - x^2/4)\cdot\Pi(x/4) \ .$$

a) Si traccino i grafici di $g(x)$ e di $f_X(x)$.
b) Si trovi l'espressione della densità $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico.

Quesito A101 (Soluzione)

In figura sono riportati i grafici di $y = g(x) = \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\Pi\left(\frac{x}{4}\right)$ e la densità di probabilità $f_X(x)$ di X. Quest'ultima, per la proprietà di normalizzazione, vale $\frac{1}{4}$ nell'intervallo $(-3,1)$ e zero altrove





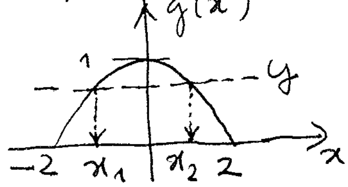
Si può applicare il teorema fondamentale per cui:

1) Fuori del codominio di $g(x)$ si ha $f_Y(y) = 0$: nel caso in esame ciò accade per:

$y<0$ e $y>1$.

2) Zone piatte di $g(x)$: ce n'è una per $y=0$, quindi in $f_Y(y)$ si avrà una delta in zero di area pari a: $P\{Y=0\} = P\{X<-2\} = P\{-3<X<-2\} = \frac{1}{4}$.

3) Per ogni y nell'intervallo $0<y<1$ l'equazione $y=g(x)$ ha due soluzioni ricavate così:



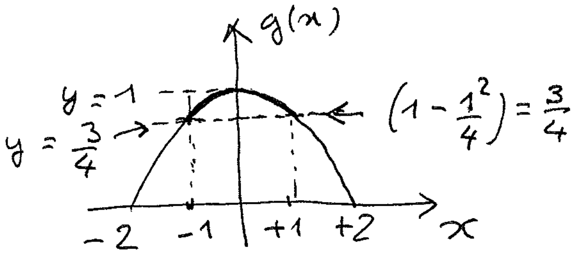
$y = \left(1-\frac{x^2}{4}\right) \rightarrow x^2 = 4(1-y) \longrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2\sqrt{1-y}}}, \quad \underline{\underline{x_2 = +2\sqrt{1-y}}}$

Nell'intervallo $0<y<1$, ossia $-2<x<2$, la derivata di $g(x)$ è: $g'(x)=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=-\frac{x}{2}$

e assume i valori:

$$\begin{cases} g'(x_1) = -\dfrac{(-2\sqrt{1-y})}{2} = +\sqrt{1-y} \\ g'(x_2) = -\dfrac{(2\sqrt{1-y})}{2} = -\sqrt{1-y} \end{cases}$$

I valori $f_X(x_1)$ e $f_X(x_2)$ sono diversi da zero <u>entrambi</u> solo se x_1 e x_2 cadono nell'intervallo $-1<x<1$ e ciò accade quando $\frac{3}{4}<y<1$ →

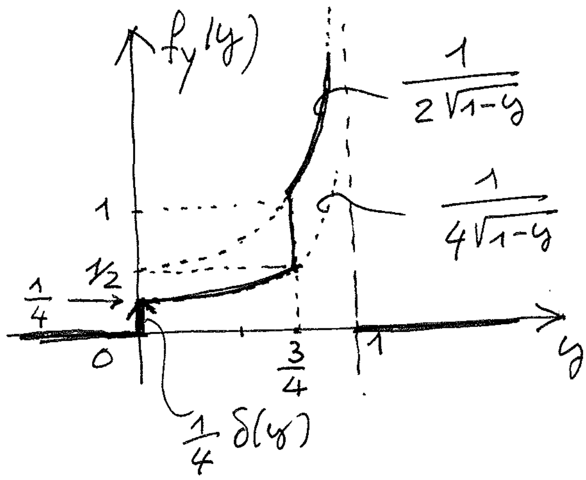


Quindi per ogni <u>$0<y<1$</u> è:

$$f_Y(y)=\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}+\frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}=\begin{cases} \dfrac{1/4}{|\sqrt{1-y}|}+\dfrac{1/4}{|-\sqrt{1-y}|}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}} & \text{per } \frac{3}{4}<y<1 \\[2ex] \dfrac{1/4}{|\sqrt{1-y}|}+\dfrac{0}{|-\sqrt{1-y}|}=\dfrac{1}{4\sqrt{1-y}} & \text{per } 0<y<\frac{3}{4} \end{cases}$$

e quindi:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{4}\delta(y) & \text{per } y=0 \\[1ex] \dfrac{1}{4\sqrt{1-y}} & \text{per } 0<y<\frac{3}{4} \\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{1-y}} & \text{per } \frac{3}{4}<y<1 \\[2ex] 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Verifica di normalizzazione:

$$\int_0^{3/4}\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,dy=-\frac{1}{4}\int_1^{1/4}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,d\lambda=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{\lambda}\right]_{1/4}^{1}=\frac{1}{4}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}; \quad \text{(A)}$$

$$\int_{3/4}^{1}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,dy=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\lambda}\right]_0^{1/4}=\frac{1}{2} \quad \text{(B)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Area delta}}+\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{(A)}}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{(B)}}=1 \quad \text{ok}$$