Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A1
Si dimostri che se A e B sono eventi indipendenti, lo sono anche gli eventi A e B^c.

Quesito A1 - (Soluzione)

Sia S lo spazio campione e siano A e B due eventi.
Si deve dimostrare che se A e B sono indipendenti, ossia se vale la seguente:

$$P(AB) = P(A) P(B)$$

allora sono indipendenti anche A e B^c, ossia vale la seguente:

$$P(AB^c) = P(A) P(B^c) \quad .$$

E' noto che: $AS = A$ e che: $B + B^c = S$. Quindi si può scrivere:

$$A = AS = A(B + B^c) = AB + AB^c$$

E quindi passando alle probabilità e osservando che AB e AB^c sono disgiunti:

$$P(A) = P(AB) + P(AB^c)$$

e per l'indipendenza di A e B:

$$P(A) = P(A) P(B) + P(AB^c)$$

da cui:

$$P(A) [1 - P(B)] = P(AB^c)$$

E osservando che $[1 - P(B)] = P(B^c)$, segue:

$$P(A) P(B^c) = P(AB^c)$$

che è ciò che si voleva dimostrare.

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito **A5**
Si vuole riservare l'acesso a un certo servizio a $M = 100$ utenti a ciascuno dei quali viene assegnata una diversa password formata da n cifre decimali.
- Si trovi il valore minimo di n (lunghezza della password) che garantisca una probabilità P minore di 10^{-2} che una persona non autorizzata riesca ad accedere al servizio eseguendo $k = 10$ tentativi casuali.

Quesito A5 (Soluzione)

Sia $N = 10^n$ il numero totale di stringhe - Se solo M di queste sono password la probabilità di trovare una password scegliendo una stringa a caso (un tentativo) è : $p = \frac{M}{N}$, infatti lo spazio si può assumere uniforme date le condizioni del problema - Naturalmente la probabilità di non trovare una password facendo un tentativo è il complemento ossia : $q = 1 - p = 1 - \frac{M}{N}$.

La probabilità che si vuole mantenere minore di 10^{-2} è la probabilità di trovare almeno una password facendo k tentativi (supposti indipendenti) che si può esprimere così:

$$P = 1 - \Pr\{\text{non trovare } \underline{\text{alcuna}} \text{ password in } k \text{ tentativi}\} =$$
$$= 1 - q^k$$

Si cerca quindi il minimo valore di N (e quindi di n) che soddisfi la seguente:

$$P = 1 - q^k < 10^{-2}$$

ossia:

$$1 - \left(1 - \frac{M}{N}\right)^k < 10^{-2} \longrightarrow N > \frac{M}{1 - (1 - 10^{-2})^{1/k}} =$$
$$= \frac{100}{1 - 0{,}99^{1/10}} = 0{,}99 \cdot 10^5 \simeq 10^5 \rightarrow \boxed{n \geq 5}$$

Le password devono essere di almeno $n = 5$ cifre decimali -

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A8
Si lanciano contemporaneamente e indipendentemente un dado e quattro monete.
Si calcoli la probabilità che il numero di "teste" ottenute con le monete sia uguale al punteggio ottenuto col dado.

Quesito A8 (soluzione)

Sia D il punteggio ottenuto col dado e sia T il n° di teste ottenuto con le quattro monete - si chiede di calcolare la probabilità:

$$P(D=T) = P(D=1, T=1) + P(D=2, T=2) + P(D=3, T=3) + P(D=4, D=4)$$

Le probabilità si sommano perché gli eventi sono disgiunti - L'indipendenza fra i lanci permette di scrivere:

$$P(D=T) = \overbrace{P(D=1)}^{1/6} \cdot P(T=1) + \dots \cdot \overbrace{P(D=4)}^{1/6} P(T=4) =$$

dove $P(T=k)$ è la probabilità di avere k teste (successi) su $n=4$ monete (prove), dove inoltre la probabilità di successo (testa in un lancio di una moneta) è $p = \frac{1}{2}$ -

Quindi si ha:

$$\boxed{P(D=T) = \frac{1}{6}}\left[\binom{4}{1} \overbrace{p^1 (1-p)^{4-1}}^{\left(\frac{1}{2}\right)^4} + \binom{4}{2} \overbrace{p^2 (1-p)^{4-2}}^{\left(\frac{1}{2}\right)^4} \dots \binom{4}{4} \overbrace{p^4 (1-p)^{4-4}}^{\left(\frac{1}{2}\right)^4} \right] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left[\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{16} \left[4 + 6 + 4 + 1 \right] = \boxed{\frac{1}{6} \cdot \frac{15}{16} \simeq \simeq 0,16}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A22 - (Soluzione)

Conviene cambiare fucile se, dato il risultato dei 10 tiri, è più probabile che il fucile usato sia il B (peggiore) piuttosto che l'A (migliore).

Quindi, definiti gli eventi:

$A = \{\text{Il fucile scelto è } A\}$

$B = \{\text{" " " " } B\}$

$C = \{\text{7 centri su 10 colpi}\}$

Conviene cambiare fucile se:

$$P(A|C) < P(B|C) \quad \text{ovvero se} \quad \frac{P(A|C)}{P(B|C)} < 1$$

Poiché è:

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)\,P(A)}{P(C)} = \binom{10}{7} P_A^7 (1-P_A)^3 \cdot \frac{P(A)}{P(C)}$$

$$P(B|C) = \frac{P(C|B)\,P(B)}{P(C)} = \binom{10}{7} P_B^7 (1-P_B)^3 \cdot \frac{P(B)}{P(C)}$$

Assunto $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ (scelta a caso), si ha:

$$\frac{P(A|C)}{P(B|C)} = \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^7 \left(\frac{1-P_A}{1-P_B}\right)^3 = \left(\frac{0,8}{0,6}\right)^7 \cdot \left(\frac{0,2}{0,4}\right)^3 \simeq 0,94 < 1$$

Quindi nel caso proposto conviene cambiare fucile.

Volendo calcolare le due probabilità da confrontare si ha:

Dalle seguenti:

$$P(C|A) = \binom{10}{7} P_A^7 (1-P_A)^3 = 120 \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}2013$$

$$P(C|B) = \binom{10}{7} P_B^7 (1-P_B)^3 = 120 \cdot 0{,}6^7 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}215$$

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B) \cdot P(B) = 0{,}2013 \cdot 0{,}5 + 0{,}215 \cdot 0{,}5 = 0{,}2081$$

Si ricava:

$$\boxed{P(A|C)} = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} = \frac{0{,}2013 \cdot 0{,}5}{0{,}2081} \cong \boxed{0{,}48}$$

$$\boxed{P(B|C)} = \frac{P(C|B)\, P(B)}{P(C)} = \frac{0{,}215 \cdot 0{,}5}{0{,}2081} \cong \boxed{0{,}52}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A25 18/2/2003

Si supponga che in un'elezione con due candidati il 65% degli elettori sia favorevole al candidato A e il 35% al candidato B. Per eseguire un semplice sondaggio si chiede a 7 elettori scelti a caso di manifestare la loro preferenza.

Quanto vale la probabilità che la maggioranza degli intervistati sia favorevole a B (ossia che il sondaggio sia fallace)?

Quesito A25 - (Soluzione)

È un problema di prove ripetute in cui il "successo" è l'evento $B = \{$risposta favorevole al candidato B$\}$ -

Detti n_A e n_B i numeri delle risposte favorevoli ad A e a B rispettivamente si cerca:

$$P\{\text{esito fallace}\} = P\{n_B > n_A\} = P\{4 \le n_B \le 7\}$$

si cerca cioè la probabilità che il n° di successi sia compreso fra 4 e 7, estremi inclusi.

Osservando che la probabilità di successo può essere assunta, come si ricava dal testo: $p = P(B) = 0{,}35$ si ha:

$$\boxed{P\{n_B > n_A\} = \sum_{i=4}^{7} \binom{7}{i} p^i (1-p)^{7-i}} =$$

$$= \underbrace{\binom{7}{4}}_{35} 0{,}35^4 \cdot 0{,}65^3 + \underbrace{\binom{7}{5}}_{21} 0{,}35^5 \cdot 0{,}65^2 + \underbrace{\binom{7}{6}}_{7} 0{,}35^6 \cdot 0{,}65 + \underbrace{\binom{7}{7}}_{1} 0{,}35^7 =$$

$$\boxed{\simeq 0{,}197 \simeq 20\%}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A32

Le probabilità che un calciatore di serie A e un calciatore dilettante segnino un gol tirando un calcio di rigore siano rispettivamente $p_A = 0{,}8$ e $p_D = 0{,}5$.

Un calciatore scelto a caso da un gruppo formato da 2 calciatori di serie A e 8 dilettanti tira 8 calci di rigore e segna 6 gol.

Qual è la probabilità che il calciatore fosse di serie A e quale che fosse dilettante?

Quesito A32 (Soluzione)

Si definiscano i seguenti eventi:

$A = \{$Il tiratore è di serie A$\}$

$D = \{$ " " " dilettante$\}$

$M = \{$6 gol su 8 tiri$\}$.

Si cerca $P(A|M)$ e $P(D|M)$ $(= 1 - P(A|M))$

Dal teorema di Bayes:

$$P(A|M) = \frac{P(M|A) \cdot P(A)}{P(M)}$$

dove $P(M)$ si ricava dal teorema delle prob. totali:

$$P(M) = P(M|A) \cdot P(A) + P(M|D) \cdot P(D)$$

dove ancora: $P(A) = 2/10$ e $P(D) = 8/10$ si ricavano dal testo e le prob. condizionate sono (prove ripetute):

$$P(M|A) = \binom{8}{6} p_A^6 (1-p_A)^{8-6} = 28 \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}294$$

$$P(M|D) = \binom{8}{6} p_D^6 (1-p_D)^{8-6} = 28 \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}109$$

Quindi:

$$P(M) = 0{,}294 \cdot 0{,}2 + 0{,}109 \cdot 0{,}8 = 0{,}146$$

e infine:

$$\boxed{P(A|M) = \frac{0{,}294 \cdot 0{,}2}{0{,}146} \simeq 0{,}4} \quad e \quad \boxed{P(D|M) \simeq 1 - 0{,}4 = 0{,}6}$$

Prob. Serie A   Prob. Dilettante

[Vedi anche Bononi, Ferrari Prob. 3.33, punto 2]

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A40 15/6/2012

Due giocatori lanciano una coppia di dadi a turno. Vince chi per primo ottiene la somma 7. Qual è la probabilità di vincere per ciascun giocatore?

Quesito A40 (Soluzione)

Si considerino i lanci come una serie di prove ripetute eseguite a turno dai due giocatori. Indichiamo con $i = 1, 2, \dots$ l'i-esimo lancio della serie (chiunque sia il giocatore). Si ha la seguente uguaglianza (di eventi):

$\{I\} \triangleq \{$Vince il giocatore che lancia per primo$\} =$

$= \{$Esce somma 7 al 1° lancio$\} \cup$

$\cup \{$Esce somma 7 al 3° lancio, esce somma $\neq 7$ nei due precedenti$\} \cup$

$\cap$

$\cup \{$Esce somma 7 al lancio i dispari, esce somma $\neq 7$ nei $(i-1)$ precedenti$\} \cup$

$\vdots \dots$

Si tratta dell'unione di infiniti eventi mutuamente esclusivi ciascuno dei quali (tranne il primo) è l'intersezione di eventi indipendenti (le uscite nelle singole prove ripetute).

Detta $p = 1 - q$ la probabilità di ottenere somma 7 nel generico lancio si può quindi scrivere:

$$P(I) = \sum_{i=1,3,5\dots}^{+\infty} p \cdot q^{(i-1)}$$

che col cambio di indice: $i = 2k+1$ con $k = 0, 1, 2 \dots$

si può scrivere:

$$\boxed{P(I)=\sum_{i=1,3,5\ldots}^{+\infty} p\cdot q^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} p\cdot q^{2k} = p\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(q^2)^k = p\cdot\frac{1}{1-q^2}}\ .$$

L'ultimo passaggio è stato eseguito ricordando la somma di una serie geometrica di ragione q^2 (<1) –

Essendo:

$$p \triangleq P\{\text{Esce somma 7 nel generico lancio}\} =$$

(16, 25, .. 61)

$$= \frac{(\text{n. coppie che danno somma 7})}{(\text{n. coppie totali})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\ (= 1-q)$$

si ha:

$$\boxed{P(I)= p\cdot\frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11} = 0,\overline{54}}\ .$$

La probabilità che vinca il giocatore che lancia per secondo (II) è naturalmente il complemento a 1:

$$\boxed{P(II)= 1-P(I) = 1-\frac{6}{11} = \frac{5}{11} = 0,\overline{45}}\ .$$

Quest'ultima poteva comunque essere calcolata in modo simile alla prima, con i che assume <u>solo valori pari</u>:

$$\boxed{P(II)=\sum_{i=2,4,6\ldots}^{+\infty} p\cdot q^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} p\cdot q^{(2k+1)} = pq\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(q^2)^k = pq\cdot\frac{1}{1-q^2}}$$

Dove si è usato il cambio di indice $i = 2k+2$, $k=0,1,2\ldots$

È facile verificare che l'espressione trovata per $P(II)$ è uguale a: $1-P(I)$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A41 15/6/12

E' più probabile che un evento di probabilità 1/3 si verifichi almeno una volta in 3 prove (indipendenti) oppure che un evento di probabilità un milionesimo si presenti almeno una volta in un milione di prove?

Quesito A41 (Soluzione)

Sia P_n la probabilità che un evento di probabilità p si verifichi almeno una volta in n prove. Si può scrivere:

$$P_n = P\{\text{almeno una volta in } n \text{ prove}\} = 1 - P\{0 \text{ volte in } n \text{ prove}\} =$$

$$= 1 - (1-p)^n$$

e se la probabilità è $p = \frac{1}{n}$ si ha:

$$P_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Il problema chiede di confrontare P_3 con P_{10^6} -

Nei due casi si ha:

$$P_3 = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \simeq 0{,}703$$

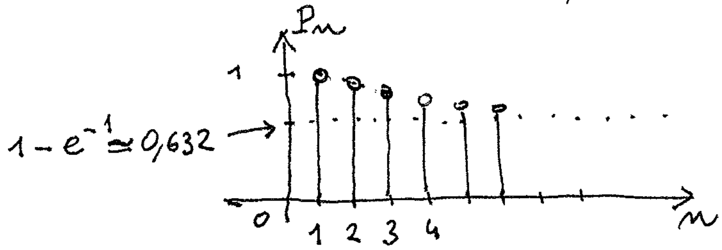
$$P_{10^6} = 1 - \left(1 - \frac{1}{10^6}\right)^{10^6} \simeq 0{,}632$$

Quindi $\boxed{P_3 > P_{10^6}}$

Limite notevole

Si osservi che: $P_\infty \triangleq \lim_{n \to +\infty} P_n = \lim_{n \to +\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right] = 1 - e^{-1} \simeq 0{,}632$

L'andamento di P_n è riportato in figura:



Si osservi che:

$P_{10^{-6}} - P_\infty < 10^{-6}$

Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A99
Due amici A e B si sfidano al tiro al bersaglio sparando tre colpi ciascuno.
La probabilità che i due centrino il bersaglio sparando un colpo siano rispettivamente p_A e p_B.
Si scriva l'espressione della probabilità che A vinca la gara, ossia la probabilità P_A dell'evento $\{ n_A > n_B \}$ essendo n_A e n_B il numero dei centri ottenuti rispettivamente dai due amici.

Successivamente e facoltativamente si sostituiscano nell'espressione trovata i valori $p_A = 0{,}6$ e $p_B = 0{,}5$ e si calcoli con tali valori la probabilità cercata.

Quesito A99 (Soluzione)

Per comodità indichiamo con $\{i, k\}$ l'evento congiunto:
$\{n_A = i, n_B = k\}$ ossia: $\{A$ fa i centri e B fa k centri$\}$
Gli eventi di questo tipo sono tutti mutuamente esclusivi
quindi la probabilità cercata si può scrivere così (3° assioma):

$$P\{n_A > n_B\} = P\{3,2\} + P\{3,1\} + P\{3,0\} + P\{2,1\} + P\{2,0\} + P\{1,0\}.$$

Essendo i tiratori distinti si può assumere indipendenza fra gli eventi del tipo $\{n_A = i\}$ e $\{n_B = k\}$, quindi ancora:

$$P\{n_A > n_B\} = P\{n_A = 3\} \cdot P\{n_B = 2\} + P\{n_A = 3\} \cdot P\{n_B = 1\} + \dots \text{ecc.}$$

Ogni probabilità del tipo $P\{n = i\}$ si può scrivere come: $P\{n = i\} = \binom{3}{i} p^i (1-p)^{3-i}$ essendo p la prob. di colpire il bersaglio con un colpo e $q = 1-p$ il suo complemento.

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} P\{n_A > n_B\} = {} & P\{n_A = 3\}\left[P\{n_B = 2\} + P\{n_B = 1\} + P\{n_B = 0\}\right] + \\ & + P\{n_A = 2\}\left[P\{n_B = 1\} + P\{n_B = 0\}\right] + \\ & + P\{n_A = 1\}\left[P\{n_B = 0\}\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & \binom{3}{3} p_A^3 q_A^0 \left[\binom{3}{2} p_B^2 q_B + \binom{3}{1} p_B q_B^2 + \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3\right] + \\ & + \binom{3}{2} p_A^2 q_A \left[\binom{3}{1} p_B q_B^2 + \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3\right] + \\ & + \binom{3}{1} p_A q_A^2 \left[\binom{3}{0} p_B^0 q_B^3\right] = \end{aligned}$$

$$= p_A^3\left[3p_B^2q_B + 3p_Bq_B^2 + q_B^3\right] + 3p_Aq_A^2\left[3p_B^2q_B + q_B^3\right] + 3p_Aq_A^2 q_B^3$$

La probabilità trovata può essere espressa in vari modi fra cui il seguente

$$P\{y_A > y_B\} = \sum_{i=1}^{3}\left[\binom{3}{i}p_A^{i}q_A^{3-i}\cdot\sum_{k=0}^{i-1}\binom{3}{k}p_B^{k}q_B^{3-k}\right]$$

Con i valori proposti: $p_A = 0{,}6$ e $p_B = 0{,}5$ si ha:

$$P\{y_A > y_B\} = (0{,}6)^3\left[3\cdot(0{,}5)^2(0{,}5) + 3(0{,}5)(0{,}5)^2 + (0{,}5)^3\right] +$$

$$+\, 3\cdot(0{,}6)^2(0{,}4)\cdot\left[\qquad \text{"} \qquad + \qquad \text{"} \qquad\right] +$$

$$+\, 3\cdot(0{,}6)(0{,}4)^2\cdot\left[\qquad\qquad\qquad \text{"} \qquad\right] =$$

$$= 0{,}216\cdot\underbrace{[0{,}875]}_{7\cdot(0{,}5)^3} + 0{,}432\cdot\underbrace{[0{,}5]}_{4\cdot(0{,}5)^3} + 0{,}288\cdot\underbrace{[0{,}125]}_{(0{,}5)^3} = \underline{\underline{0{,}441}}$$

La probabilità che A vinca la gara è quindi del 44,1% - Il complemento a 1 (55,9%) è la probabilità che vinca B <u>più</u> la probabilità di pareggio -

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A111

Un'azienda ha due impianti, detti A e B, con cui produce componenti di un certo tipo. Ciascun impianto produce la metà del numero totale di componenti, ma il 5% dei componenti prodotti dall'impianto A risulta difettoso mentre risulta difettoso l' 1% di quelli prodotti dall'impianto B.
Si sceglie a caso un lotto di 60 componenti tutti prodotti da uno dei due impianti scelto a caso e si trova che 2 di essi sono difettosi.
Qual è la probabilità che il lotto scelto provenga dall'impianto A? E quale dall'impianto B?

Quesito A111 (Soluzione)

Si definiscono i seguenti eventi:

A = {Il lotto scelto proviene dall'impianto A}

B = { " " " " " " B}

C = {Due componenti del lotto scelto sono difettosi}

Si cercano le probabilità: $P(A|C)$ e $P(B|C) = 1 - P(A|C)$

Si ha (Teorema di Bayes):

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)}$$

Dalla descrizione del problema si può assumere $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

Siano inoltre $p_A = 0{,}05$ e $p_B = 0{,}01$ le probabilità (date) che un componente esca difettoso dal corrispondente impianto -

Si può quindi scrivere (prove ripetute):

$$P(C|A) = \binom{60}{2} p_A^2 (1-p_A)^{58} = \frac{60 \cdot 59}{1 \cdot 2} (0{,}05)^2 (0{,}95)^{58} \cong 0{,}226$$

e

$$P(C|B) = \binom{60}{2} p_B^2 (1-p_B)^{58} = \frac{60 \cdot 59}{1 \cdot 2} (0{,}01)^2 (0{,}99)^{58} \simeq 0{,}0988$$

e infine (probabilità totali):

$$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B) = 0{,}226 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}0988 \cdot \frac{1}{2} \simeq 0{,}162$$

Si hanno infine le due probabilità cercate:

$$\boxed{P(A|C) = \frac{0{,}226 \cdot 1/2}{0{,}162} \simeq 0{,}696 \; ; \; P(B|C) = 1 - P(A|C) \cong 0{,}304}$$

{Si veda anche il Quesito A90, praticamente identico}