PROCESSI STOCASTICI FORMULARIO

- Valor medio $\eta_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$
- Potenza statistica $P_x(t) = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(f)\,df = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,dx$
- Varianza $\sigma_x^2(t) = P_x(t) - \eta_x^2(t) = C_x(t_1, t_1)$
- Autocorrelazione $E[x(t_1)\,x(t_2)] = R_x(t_1, t_2)$
- Autocovarianza $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2)$

- PROCESSO ARMONICO
  $\eta_x(t) = 0$
  $R_x(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0(t_2 - t_1)) \to$ da $a\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

- GAUSSIANO BIANCO
  $\eta_x(t) = 0$
  $P_x(f) =$ COSTANTE

- RUMORE BIANCO $P_x(f) =$ COSTANTE

- SEGNALE CON SIMMETRIA PARI $\eta_x(t) = 0$

- STAZIONARIETÁ : Un sistema é SSL se $\eta_x(t) =$ COSTANTE
  $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1)$: dipende solo dalla loro differenza

- Densitá spettrale di potenza $P_x(f) = \mathfrak{F}[R_x(t)]$: TEOREMA DI WIENER E KINTCHINE

- GAUSSIANITÁ + INCORRELAZIONE $\to$ INDIPENDENZA

  INCORRELAZIONE : $R_x(t_1, t_2) = 0$

- Una variabile aleatoria Y, somma di due variabili aleatorie indipendenti é uguale per $f_Y(y)$ alla convoluzione delle rispettive densitá di probabilitá

- Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti, allora la densitá di probabilitá congiunta $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$ ← Non vale se X e Y non sono indipen

  $\to f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$ $\to f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$ ← valgono anche se X e Y sono dipendenti

PROBABILITÁ FORMULARIO

- Probabilità del verificarsi dell'evento B in seguito al verificarsi dell'evento A - probabilità condizionata : $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

- Teorema della probabilità totale : Enunciato : siano E_1 ed E_2 due eventi fra loro mutuamente incompatibili e sia B un evento che può accadere solamente associato a uno dei due eventi
  - $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$
  - $f_x(x) = f_x(x|A)P(A) + f_x(x|B)P(B)$

- Formula di Bayes : $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

- Teorema della probabilità composta : $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ $P(B|A)P(A)$

- Teorema della catena, o delle probabilità composte : $P(A_1 \cap .. \cap A_N) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_N|A_1 \cap .. \cap A_{N-1})$

- Formula di Bernulli : considerato un esperimento in cui un certo evento abbia una probabilità p di realizzarsi ; ripetendo l'esperimento N volte qual'è la probabilità che l'evento si verifichi esattamente K volte ? [PROVE RIPETUTE] $\binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$

- DISPOSIZIONI SEMPLICI : $D_{N,K} = \frac{N!}{(N-K)!}$ (conta l'ordine) ESEMPIO : formare tutte le parole che si possono formare utilizzando 4 lettere della parola YOUMATH : $D_{7,4}$

- COMBINAZIONI SEMPLICI : $C_{N,K} = \binom{N}{K} = \frac{N!}{(N-K)!\,K!}$ (non conta l'ordine) ESEMPIO : in una classe di 26 alunni si devono eleggere 2 rappresentanti di classe ; in quanti modi diversi si può fare la scelta : $\binom{26}{2}$

- PERMUTAZIONI : tutte le combinazioni di un determinato insieme ; $N!$; ESEMPIO : anagrammare la parola UNO, quante parole si possono formare : $3!$

- FUNZIONE DI DENSITÁ DI PROBABILITÁ DI UNA VARIABILE ALEATORIA (PDF) : $f_x(x)$: PER NORMALIZZAZIONE LA SUA AREA É 1

- FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA V.A. (CDF) : $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx = 1$
- $\int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\,dx = P(x_1 < X < x_2)$
- $\int_{x_1}^{+\infty} f_x(x)\,dx = P(X > x_1)$

- VARIANZA : $\sigma_x^2 = E[(X - \eta_x)^2] = E[X^2] - \eta_x^2$

- VALOR MEDIO : $E[X] = \eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\,dx$

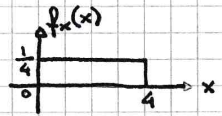
- VALOR QUADRATICO MEDIO $E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,dx$

- FORMULA DI BAYES MISTA : $P(A|x=t) = \frac{f_x(t|A)P(A)}{f_x(t)}$

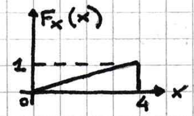
- Sia $F_x(x)$ LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÁ DI UNA V.A X ; ALLORA SE NOI CERCHIAMO LA $F_y(y)$ DELLA V.A X^n (EVENTI INDIPENDENTI) SARÁ UGUALE A $[F_x(x)]^n$

PROBABILITÁ

① SIA $f_x(x)$ UNIFORME FRA $[0,4]$

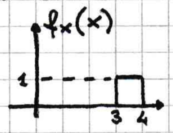


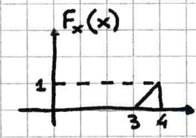
$$\rightarrow F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x<0 \\ \int_0^x \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}x & \text{per } 0<x<4 \\ 1 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$



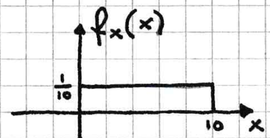
$$\rightarrow F_x(x \mid X > t) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{F_x(x) - F_x(t)}{1 - F_x(t)} \end{cases}$$

É COME SE $f_x(x)$ VENISSE RISTRETTA ;
SE $t = 3$

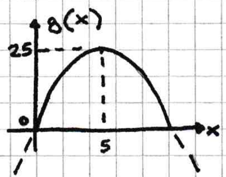




② Una variabile aleatoria Y é ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione $Y = g(X)$



$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$g(x) = 10x - x^2 \rightarrow$ ⓐ $g'(x) = 10 - 2x$

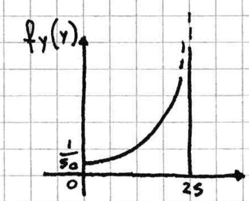
ⓑ $\rightarrow y = 10x - x^2 \rightarrow x^2 - 10x + y = 0$

$\rightarrow x_{1,2} = \dfrac{10 \mp \sqrt{100 - 4y}}{2} = 5 \mp \sqrt{25 - y}$

QUINDI

$$f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_x(x_1)}{|g'_1(x_1)|} + \dfrac{f_x(x_2)}{|g'(x_2)|} & \text{per } 0 < y < 25 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

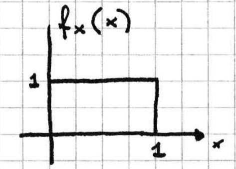
$$\begin{cases} \dfrac{1}{10\sqrt{25-y}} & \text{per } 0<y<25 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



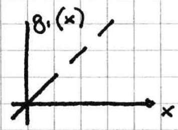
• V.A. di tipo esponenziale negativo $a e^{-ax} u(x) \rightarrow$ valore medio : $\eta_x = 1/a = E[x]$

valore quadratico medio : $E[x^2] = 2/a^2$

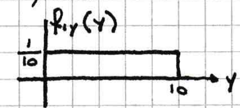
PROBABILITÁ



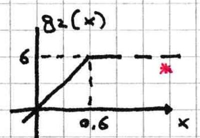
ⓐ



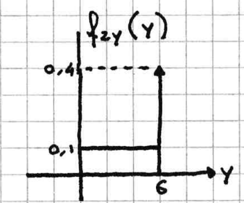
$g_1(x) = 10x \quad \rightarrow f_{1y}(y) = \begin{cases} \dfrac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} = \dfrac{1}{10} & \text{per } 0 < y < 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



ⓑ



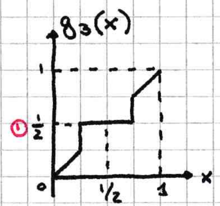
$g_2(x) = \begin{cases} 10x & \text{per } x < 0,6 \\ 6 & \text{per } x \geq 0,6 \end{cases}$



* Il tratto orizzont. genera la delta

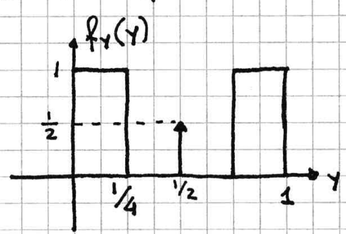
$\rightarrow f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} = \dfrac{1}{10} & \text{per } 0 < y < 6 \\ \delta(y-6) \cdot P\{x \geq 0.6\} = 0.4\,\delta(y-6) & \text{per } y = 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

ⓒ

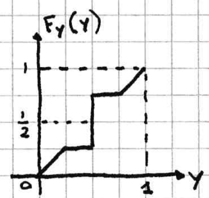


$\rightarrow$ ① a causa della zona piatta dobbiamo attenderci che la densitá di probabilitá abbia un impulso in $1/2$ e che sia nulla per $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} < y < \frac{3}{4}$

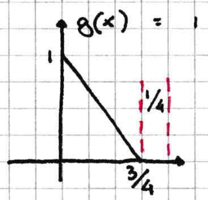
$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} = 1 & \text{per } 0 < y < \frac{1}{4} \text{ e } \frac{1}{2} < y < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}\delta\left(y - \frac{1}{2}\right) & \text{per } y = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



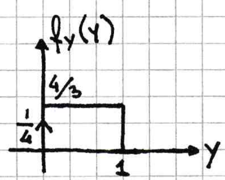
$\rightarrow F_Y(y) \begin{cases} 1 & \text{per } y > 1 \\ y & \text{per } 0 < y < \frac{1}{4} \text{ e } \frac{3}{4} < y < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{per } \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \text{per } \frac{1}{2} < y < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



ⓓ $g(x) = 1 - \frac{4}{3}x$



$\rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\delta(y) & \text{per } y = 0 \\ \dfrac{1}{3/4} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



PROBABILITA' CONDIZIONATA

- $F_x(x|X>t) = P\{X \leq x \mid X>t\} = \dfrac{P\{(X\leq x) \cap (X>t)\}}{P(X>t)} = \dfrac{F_x(x) - F_x(t)}{1 - F_x(t)}$

- IL TEOREMA FONDAMENTALE : $P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = P(B)$

vale anche per i valori medi $E[B] = E[B|A]P[A] + E[B|\bar{A}]E[\bar{A}]$

- V.A. CON DENSITA' DI PROBABILITA' UNIFORME : $\eta_x = \dfrac{a+b}{2}$ con $a<b$

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

DENSITA' DI PROBABILITA' DI V.A GAUSSIANA : $f_x(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}$

TERMINOLOGIA : una V.A con valore medio η_x e varianza σ_x^2 si può scrivere come $N(\eta_x, \sigma_x^2)$

$$\eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\,dx$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,dx$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - \eta_x^2$$

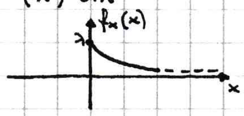
PROBABILITÁ

due amici fanno una gara di tiro con l' arco

la distanza fra il centro e il punto colpito é una variabile aleatoria

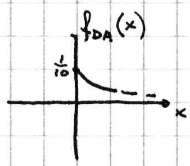
$$\begin{cases} D_A : f_{DA}(x) = \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} u(x) \ cm^{-1} \\ D_B : f_{DB}(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{x}{20}} u(x) \ cm^{-1} \end{cases}$$

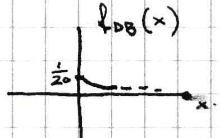
$$\left[f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x) \right]$$



$\left[E\{x\} = 1/\lambda \right]$ valor medio di variabili aleatorie gaussiane

$$\Rightarrow \begin{cases} E\{D_A\} = 1/\lambda = 10 \ cm \\ E\{D_B\} = 1/\lambda = 20 \ cm \end{cases}$$





($\to$ é più bravo A)

Si alternano nel tiro (A e B), ad un certo punto entra un terzo amico e vede una freccia conficcata a 15 cm dal centro

Probabilitá che l' abbia tirata A? che l' abbia tirata B?

evento $A = \{$ha tirato A$\}$

evento $B = \{$ha tirato B$\}$

Sia D variabile aleatoria distanza dal centro osservata da terza persona

$\to$ Si devono confrontare

$P\{A \mid D = 15 \ cm\} \overset{*}{=} 0,486$

$P\{B \mid D = 15 \ cm\} = 0,514$

BAYES MISTA

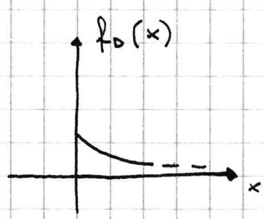
$$P\{A \mid X = x\} \overset{\downarrow}{=} \frac{f_x(x \mid A) P(A)}{f_x(x)}$$

$$\Rightarrow P\{A \mid 15 \ cm\} = \frac{f_{DA}(15 \mid A) P(A)}{f_D(15)} \qquad P\{B \mid 15 \ cm\} = \frac{f_{DB}(15 \mid B) P(B)}{f_D(15)}$$

$f_D(15 \mid A) = f_{DA}(15) = \frac{1}{10} e^{-\frac{15}{10}} = 0,0223$

$f_D(15 \mid B) = f_{DB}(15) = \frac{1}{20} e^{-\frac{15}{20}} = 0,0236$

$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$



$\Rightarrow$ é più probabile sia stato B a tirare

TEOREMA PROBABILITÁ TOTALI

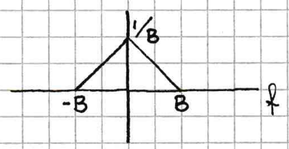
$$f_D(15) = f_D(15 \mid A) P(A) + f_D(15 \mid B) P(B) = \frac{1}{2}(0,0223 + 0,0236)$$

$\hookrightarrow$ Si usa anche per disegnare il grafico; $f_D(x)$ é la somma delle due funzioni, ciascuna moltiplicata per la probabilitá dell' evento che la riguarda

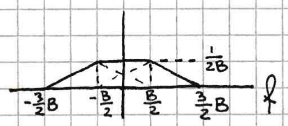
CAMPIONAMENTO

Sia dato un sistema di campionamento ideale, con relativo filtro di ricostruzione che lavora alla frequenza di 40 KHz. Valutare l'espressione del segnale in uscita dal sistema, quando in ingresso si presenta il segnale $x(t) = \text{sinc}^2(Bt)\cos(\pi Bt)$ con $B = 20$ KHz.

1. $$X(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B}\Lambda\left(\frac{1}{B}\left(f - \frac{B}{2}\right)\right) + \frac{1}{B}\Lambda\left(\frac{1}{B}\left(f + \frac{B}{2}\right)\right)\right)$$

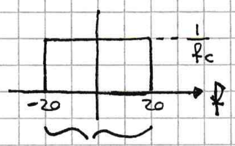


$\mathfrak{F}[\text{sinc}^2(Bt)]$



$\mathfrak{F}[\text{sinc}^2(Bt)\cos(\pi Bt)]$

FILTRO DI CAMPIONAMENTO



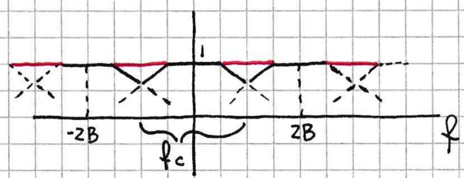
$$H_{RIC}(f) = \frac{1}{f_c}\Pi\left(f/f_c\right)$$

f_c → Condizione di Nyquist: $f_c > 2 \cdot \frac{3}{2}B$ → non è rispettata

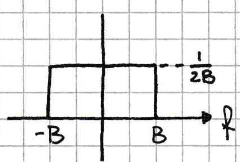
$f_c = 2B$

SEGNALE CAMPIONATO CON $\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_c)$

$$X_\delta(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_c\left(X\left(f - kf_c\right)\right)$$



SEGNALE FILTRATO



$X_{RIC}(f)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathfrak{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\,\delta(t - nT_c)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c X(f - kf_c) \\ \to \text{FILTRO DI RICOSTRUZIONE}: \frac{1}{f_c}\Pi\left(f/f_c\right)\end{array}}$$

CAMPIONAMENTO IDEALE

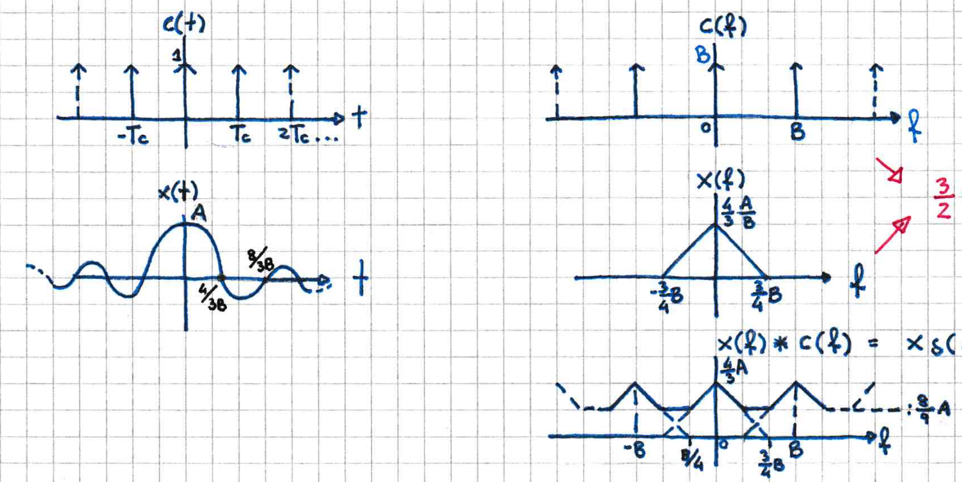
- $x_\delta(t) = c(t)\,x(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\,\delta(t-nT_c)$

- $X_\delta(f) = \mathfrak{F}[x(t)c(t)] = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c\,\delta(f-kf_c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c\,X(f-kf_c)$

Lo spettro di un segnale campionato è dato dalla periodicizzazione, con periodo pari alla frequenza di campionamento f_c, dello spettro $X(f)$ del segnale $x(t)$ soggetto al campionamento ideale, moltiplicato per f_c.

è possibile riottenere lo spettro di $X(f)$ del segnale di partenza, filtrando lo spettro del segnale campionato con un filtro passa basso ideale che isoli la replica centrata sull'origine delle frequenze

$H(f) = T_c\,\Pi(f/f_c)$



$T_c = \frac{1}{B}$

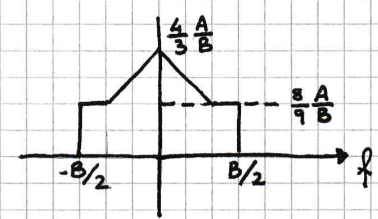
$\frac{3}{2}B > B$: la condizione di Nyquist non è rispettata

$x(t) = A\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3}{4}Bt\right) \leftrightarrow X(f) = \frac{4}{3}\frac{A}{B}\Lambda\left(\frac{f\cdot 4}{3B}\right)$

$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_c) \leftrightarrow C(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_c\,\delta(f-kf_c)$

Per ricostruire $x(t)$ serve $H(f) = T_c\,\Pi(f/f_c) = \frac{1}{B}\Pi(f/B)$

$\rightarrow Y(f) = X_\delta(f)\cdot H(f) =$



$$\mathfrak{F}$$

$$x\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow |T|\,X(Tf)$$

$$A\,\mathrm{sinc}^2(Bt) \leftrightarrow \frac{1}{B}\cdot A\cdot\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_0}\left(\delta\left(f-k\cdot\frac{1}{T_0}\right)\right)$$

FORMULE DI EULERO

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \qquad e^{jx} = \cos(x) + j\,\mathrm{sen}(x)$$

$$\mathrm{sen}(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \rightarrow \quad e^{-jx} = \cos(x) - j\,\mathrm{sen}(x)$$

MISURE DEI SEGNALI

Valor medio temporale $$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,dt$$

Energia totale $$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$$

Potenza media temporale $$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$$

area infinita $\longleftrightarrow$ valor medio finito

area finita $\longleftrightarrow$ valor medio nullo

E_x infinita $\longleftrightarrow$ P_x finita

E_x finita $\longleftrightarrow$ P_x nulla

TEOREMA DI RAILEIGH

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df$$

TRASFORMATA DI FOURIER

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\,df$$

COEFFICIENTI DI FOURIER

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

TIPOLOGIE DI BLOCCHI

			RISPOSTA IMPULSIVA
$\rightarrow \boxed{T} \rightarrow$	RITARDO	$y(t) = x(t - T)$	$H(f) = e^{-j2\pi f T}$
$\rightarrow \boxed{K} \rightarrow$	AMPLIFICATORE	$y(t) = A\,x(t)$	$H(f) = A$
$\rightarrow \boxed{\int} \rightarrow$	INTEGRATORE	$y(t) = \int_{-\infty}^{T} x(\tau)\,d\tau$	$H(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f) + \frac{1}{j\pi f}\right)$
$\rightarrow \boxed{\int_T} \rightarrow$	INTEGRATORE A FINESTRA MOBILE	$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$H(f) = T\,\mathrm{sinc}(Tf)\, e^{-j\pi f T}$
$\rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow$	FILTRO	$y(t) = x(t) * h(t)$	

- $$\mathfrak{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t - kT_0)\right] = \mathfrak{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t) * \delta(t - kT_0)\right] = X_0(f) \cdot \mathfrak{F}\left[\sum_{-\infty = k}^{+\infty} \delta(t - kT_0)\right] =$$
$$= X_0(f) \cdot f_0 \cdot \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \delta(f - Nf_0) = f_0 \cdot \sum_{N=-\infty}^{+\infty} X_0(Nf_0)\, \delta(f - Nf_0)$$

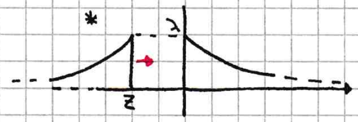
- IL MOLTIPLICATORE NON È UN FILTRO, i.e LS

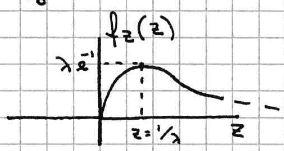
$$x_1(t),\ x_2(t) \rightarrow \otimes \rightarrow y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

CONVOLUZIONE (Per somma di variabili indipendenti)

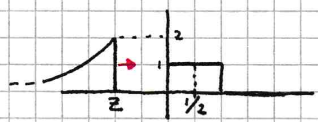
$$Z = X_1 + X_2 \rightarrow f_Z(z) = f_{X_1}(z) * f_{X_2}(z)$$

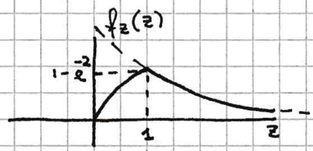
① $\left(\lambda e^{-\lambda x} u(x)\right) * \left(\lambda e^{-\lambda x} u(x)\right) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-(\lambda(z-x))} dx = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda z} \cdot z\, u(z)$



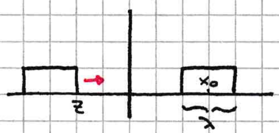


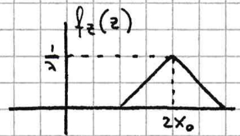
② $\Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) * 2e^{-2y} u(y) = \begin{cases} \int_0^z 2e^{-2(z-t)} dt = 1 - e^{-2z} & \text{con } 0 < z < 1 \\ \int_0^1 2e^{-2(z-t)} dt = e^{-2z}(e^2 - 1) & \text{con } z > 1 \end{cases}$





③ $\frac{1}{\lambda}\Pi\left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right) * \frac{1}{\lambda}\Pi\left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\int 1 = x \rightarrow f_z(z) = \frac{1}{\lambda}\Lambda\left(\frac{z - 2x_0}{\lambda}\right)$





(TRASFORMATE)

- Valore medio di $\Pi(x - x_0) = x_0 \rightsquigarrow$ Valor medio di $f_z(z) = 2x_0$

$$E[f_z(z)] = E[f_{x_1}(x)] + E[f_{x_2}(x)]$$

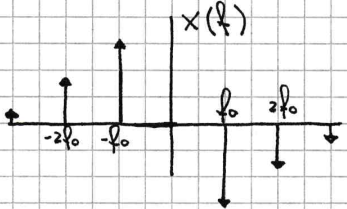
- $\mathfrak{F}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} x_0(t - kT_0)\right] = \mathfrak{F}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} x_0(t) * \delta(t - kT_0)\right] = f_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} X_0(kf_0)\,\delta(f - kf_0)$

⇒ ESEMPIO

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A\Pi\left(\frac{t - T/2 - 2nT}{T}\right) - A\Pi\left(\frac{t + T/2 - 2nT}{T}\right) \rightarrow f_0 = 1/2T$$

$$X_0(f) = -2jAT\,\mathrm{sinc}(Tf)\,\mathrm{sinc}(Tf) = -2jA \cdot \frac{\sin^2(\pi T f)}{\pi f}$$

→ SOSTITUENDO AD f kf_0 : $f_0 X_0(kf_0) = -2jA\,\frac{\left(\sin^2(k\pi/2)\right)}{k\pi} = \begin{cases} -2jA/k\pi & \text{per } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } k \text{ pari} \end{cases}$



TdS

- Sistema $\xrightarrow{x(t)} \boxed{T} \xrightarrow{y(t)}$: $y(t) = T[x(\bar{t}) ; t]$

- Classificazione delle tipologie di sistema

Causale : la risposta del sistema ad un generico istante di tempo $\bar{t}$ non deve dipendere da valori futuri del segnale di ingresso

Idealmente realizzabile : la risposta al sistema di un segnale reale in ingresso è anch' essa un segnale reale

Fisicamente realizzabile : Idealmente realizzabile e causale

Con memoria : $y(\bar{t})$ dipende da $x(\bar{t})$ e da altri valori passati e/o futuri di $x(t)$

Stabilità BIBO : $|x(t)| < M \Rightarrow |y(t)| < L$

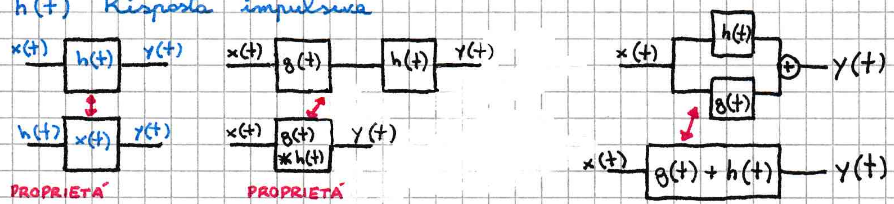
Stazionarietà : Il comportamento del sistema non varia nel tempo
$y(t) = T[x(t)] \Rightarrow T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$

Linearità : se gode del principio di sovrapposizione degli effetti
$y(t) = T[\alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)] = \alpha y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t)$

LTI : sistemi lineari e stazionari

I Sistemi LTI vengono anche chiamati FILTRI

$h(t)$ Risposta impulsiva



PROPRIETÁ COMMUTATIVA

PROPRIETÁ ASSOCIATIVA

PROPRIETÁ DISTRIBUTIVA

$\delta(t)$ Elemento neutro

BASE... trasformate

$A \leftrightarrow A\delta(f)$

$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f-f_0)$

$\sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{j}{2}(\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0))$

$\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0))$

$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow 1/j\pi f$

$A\Pi(t/T) \leftrightarrow A|T|\,\mathrm{sinc}(Tf)$

$A\Lambda(t/T) \leftrightarrow AT\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$

$\int_{-\infty}^{t} x(t) \leftrightarrow X(f)/j2\pi f$

$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$

$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$

MODULAZIONE

$x(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(X(f-f_0)e^{j\phi} + X(f+f_0)e^{-j\phi}\right)$

RAILEIGH

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)\,Y(f)$

$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$

$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$

$x(t)\,e^{-j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f+f_0)$

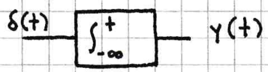
$x(t/T) \leftrightarrow |T|\,X(Tf)$

1 

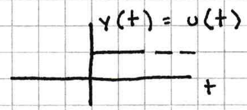
Se il sistema é L.S valgono le seguenti proprietá

$x(t)$ é SSL $\rightarrow$ $y(t)$ é SSL

Se il segnale d' ingresso é SSL
- $\eta_Y = \eta_x H(0)$
- $R_Y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$
- $P_Y(f) = P_x(f)\,|H(f)|^2$
- η_x non dipende da t
- $R_x(t_1, t_2) \triangleq E[x(t_1)\cdot x(t_2)]$ dipende solo da $t_2 - t_1$

2 

: FILTRO INTEGRATORE :



3 Il filtraggio di un processo SSL produce in uscita un processo SSL.
La gaussianitá di un processo in ingresso si preserva attraverso un sistema LS ; dunque il processo d' uscita resta gaussiano

4 $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$ processo stocastico dove A e B sono due variabili aleatorie entrambe gaussiane, a media nulla e con varianza σ^2. Valutare se $x(t)$ é SSL.

a) $\eta_x(t_1) = E[x(t_1)] = E\left[A\cos(2\pi f_0 t_1) + B\sin(2\pi f_0 t_1)\right] =$

$= E[A]\cos(2\pi f_0 t_1) + E[B]\sin(2\pi f_0 t_1) = 0 \quad \forall t$

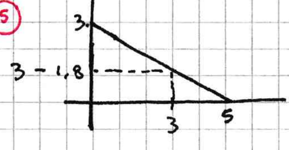
b) $R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)\cdot x(t_2)] =$

$E\left[A^2\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2) + B^2\sin(2\pi f_0 t_1)\sin(2\pi f_0 t_2) + AB\cos(2\pi f_0 t_1)\sin(2\pi f_0 t_2) + AB\cos(2\pi f_0 t_2)\sin(2\pi f_0 t_1)\right] =$

$E[A^2]\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2) + E[B^2]\sin(2\pi f_0 t_1)\sin(2\pi f_0 t_2) + E[A]E[B]\cos(2\pi f_0 t_1)\sin(2\pi f_0 t_2)$
$+ E[A]E[B]\cos(2\pi f_0 t_2)\sin(2\pi f_0 t_1) =$

$\sigma^2\left(\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2) + \sin(2\pi f_0 t_1)\sin(2\pi f_0 t_2)\right) = \sigma^2\cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1))$

$\rightarrow x(t)$ é SSL

5 

$3 : 5 = x : 3$

$\frac{9}{5} = x = 1,8$

PROPRIETÀ TRASFORMATE

• LINEARITÀ	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$
• CAMBIAMENTO DI SCALA	$x(t/T)$	$\lvert T\rvert X(T \cdot f)$
• TRASLAZIONE NEL TEMPO	$x(t - t_0)$	$X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$
• TRASLAZIONE IN FREQUENZA	$x(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}$	$X(f + f_0)$
• CONVOLUZIONE IN FREQUENZA	$x_1(t) \cdot x_2(f)$	$X_1(f) * X_2(f)$
• CONVOLUZIONE NEL TEMPO	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f) \cdot X_2(f)$
• MODULAZIONE SENO	$x(t) \sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2j}\left(+X(f-f_0)\, e^{j\phi} - X(f+f_0)\, e^{-j\phi}\right)$ (da eulero)
• MODULAZIONE COSENO	$x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}\left(X(f-f_0)\, e^{j\phi} + X(f+f_0)\, e^{-j\phi}\right)$
• DERIVAZIONE NEL TEMPO	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f \cdot X(f)$
• DERIVAZIONE IN FREQUENZA	$-j2\pi t \cdot x(t)$	$\frac{dX(f)}{df}$
• INTEGRAZIONE NEL TEMPO	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}$
• INTEGRAZIONE IN FREQUENZA	$\frac{x(t)}{-j2\pi t}$	$\int_{-\infty}^{f} X(\lambda)\, d\lambda$
• ENERGIA	$E_{x(t)}$ =	$E_{X(f)}$
• SIMMETRIE	COMPLESSO REALE REALE PARI REALE DISPARI	COMPLESSO SIMMETRIA HERMITIANA REALE PARI IMMAGINARIO DISPARI

SISTEMI LTI : *lineari e tempo invarianti*

LINEARITÀ : $T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = T[\alpha x_1(t)] + T[\beta x_2(t)]$

TEMPO INVARIANZA : $y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]$

SISTEMI LTI

- INTEGRATORE A FINESTRA MOBILE
- AMPLIFICATORE IDEALE
- INTEGRATORE
- DERIVATORE

EULERO

$$\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$

$$\text{SEN}(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

$$z = a + ib \rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot z^*$$

MODULAZIONE SENO	$x(t) \sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{j}{2}\left(X(f+f_0) - X(f-f_0)\right)$ (dalla trasformata)

TRASFORMATE NOTEVOLI

• COSTANTE	A	$A\delta(f)$
• FASORE	$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
• SENO	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{j}{2}\left(\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)\right)$
• COSENO	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right)$
• GRADINO	$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f)+\frac{1}{j\pi f}\right)$
• SEGNO	$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
• ESPONENZ. NEGATIVO	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
• PIGRECONE	$A\Pi(t/T)$	$A\lvert T\rvert\,\mathrm{sinc}(Tf)$
• LAMBDA	$A\Lambda(t/T)$	$A\lvert T\rvert\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$
• SINC	$A\,\mathrm{sinc}(t)$	$A\Pi(f)$
• TRENO DI $\delta(t)$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_0}\cdot\delta\left(f-k\cdot\frac{1}{T_0}\right)$
• SINC^2	$\mathrm{sinc}^2(Bt)$	$\left\lvert\frac{1}{B}\right\rvert\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$
• ESPONENZ. NEGATIVO CON MODULO	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$ → a: sarebbe un cambiamento di scala $e^{-\frac{\lvert t\rvert}{2T}} \leftrightarrow \frac{4T}{1+(2T\cdot 2\pi f)^2}$
• SEGNALE CAMPIONATO	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_c)\delta(t-nT_c)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_c X(f-kf_c)$
• SEGNALE PERIODICO	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_0(t-nT)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_0(kf_0)f_0\,\delta(f-kf_0)$
DUALITÁ SIGN.	$\frac{1}{2\pi t}$	$\frac{j}{2}\mathrm{sgn}(-f)$
COSENO	$\cos(2\pi f_0 t+\phi)$ ↳ $\frac{1}{2}\left(e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}+e^{-j(2\pi f_0 t+\phi)}\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{j\phi}\delta(f-f_0)+e^{-j\phi}\delta(f+f_0)\right)$

POTENZA MEDIA : $P_x = A^2/2$: di una sinusoide qualunque

SISTEMI LS : Se in ingresso vi é una sinusoide qualunque, l'uscita sará ancora una sinusoide alla stessa frequenza

ES $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t) \rightarrow y(t)=A\lvert H(f_0)\rvert\cos(2\pi f_0 t+\angle H(f_0))$

ES $x(t)=A\cos(\pi t) \rightarrow y(t)=A\lvert H(1/2)\rvert\cos(\pi t+\angle H(1/2))$

TdS

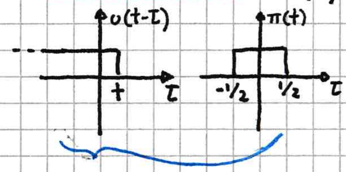
Eulero

$$\begin{cases} \cos(\phi) = \dfrac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \\ \text{sen}(\phi) = \dfrac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\,\text{sen}(\phi) \\ e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j\,\text{sen}(\phi) \end{cases}$$

- Valor Medio $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$
- Area $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$
- Potenza Media $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$
- Energia Totale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df$

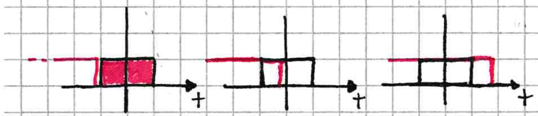
Convoluzione

$$u(t) * \pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\,\pi(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$



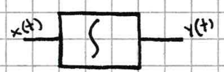
$$\begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2} \\ [\tau]_{-1/2}^{t} & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 1 & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(RISULTATO MASSIMO DELL' INTEGRALE)



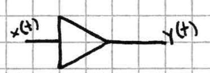
- $z = a + ib = |z|\,e^{\angle z} = |z|\left(\cos(\angle z) + i\,\text{sen}(\angle z)\right)$
- $\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt \qquad \mathcal{F}^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{j2\pi f t}\,dt$
- Potenza Istantanea $|x(t)|^2$
- Valor efficace $\sqrt{\text{POTENZA MEDIA}}$
- Coefficienti di Fourier $\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,e^{j2\pi k f_0 t}\,dt$

RITARDO

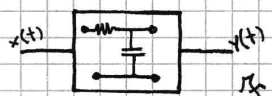


INTEGRATORE $\int_{-\infty}^{+\infty}$

INTEGRATORE $\simeq \int_{-T_0/2}^{T_0/2}$



AMPLIFICATORE IDEALE



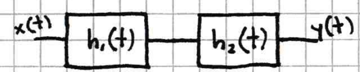
$$h(t) = \frac{1}{RC}\,e^{-t/RC}\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

SIMMETRIE

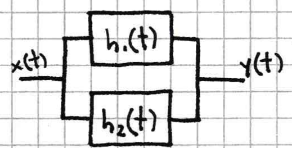
1. Simmetria Pari : $x(t) = x(-t)$
2. Simmetria Disparia : $x(-t) = -x(t)$
3. Simmetria hermitiana : $x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow X(f) : |X(f)| = |X(-f)|$

   $\angle X(f) = -\angle X(-f)$

CONVOLUZIONE SERIE / PARALLELO



: $h_1(t) * h_2(t) = h_{tot}(t)$



: $h_1(t) + h_2(t) = h_{tot}(t)$