Sistemi

Mc128k

2015-10-06

Contenuti

Sistemi, tipi, proprietà, connessioni, sistemi LTI e caratteristiche notevoli, sistemi FIR

Indice

1 Sistemi

Un sistema è una legge che associa ad un segnale determinato in ingresso un segnale in uscita. È a livello pratico una "funzione" che prende in ingresso una funzione e restituisce un'altra funzione, si applica quindi a segnali monodimensionali.

Come una comune funzione ha un dominio e un codominio e si enuncia con una sintassi simile. La lettera T sta per "transformation".

$$y(t) = T\{x(t)\} \tag{1.1}$$

Dove $y(t)$ è la funzione in uscita, $x(t)$ quella in entrata e T il sistema che agisce tra le due.

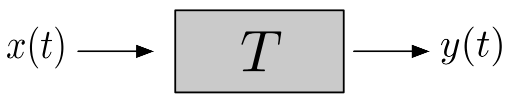

Figura 1: Sistema

Il sistema è una relazione tra i segnali su cui agisce, per capire meglio il concetto si prenda come esempio un circuito elettrico; la corrente passante per un filo è direttamente dipendente dallo stato di un altro componente, si può quindi affermare che i due siano legati da un sistema, che dato lo stato del primo può determinare quello del secondo (non sempre questo è valido, è solo un esempio). Se si prendesse un altro componente come riferimento, non si avrebbe più lo stesso sistema, ma un altro. Ogni coppia di segnali legati da una serie di relazioni ha associato un sistema diverso.

2 Proprietà

2.1 Tempo invariante

Un sistema si dice stazionario o tempo invariante se è insensibile alle traslazioni orizzontali del segnale in ingresso. In altre parole, se il segnale in ingresso viene anticipato o ritardato, anche il segnale in uscita viene anticipato o ritardato, senza subire altre modifiche.

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t) \tag{2.1}$$
$$x_R(t) := x(t - t_0) \tag{2.2}$$
$$y_{RIT} := y(t - t_0) \tag{2.3}$$
$$\tag{2.4}$$

Se $y_R(t) = y_{RIT}(t) \forall x(t), t, t_0$ allora il sistema è tempo invariante. Bisogna notare che la regola deve valere per qualunque funzione in ingresso $x(t)$, qualunque punto nella funzione t e qualunque traslazione t_0.

Esempio 2.1.
$y(t) = t \cdot x(t)$ Il sistema in questo caso è dato dal fattore t che si moltiplica alla funzione in entrata. Essendo la uscita direttamente dipendente dal valore del tempo, il sistema non è tempo invariante.

Esempio 2.2.
$y(t) = x(6 - t)$

$x_R(t) := x(t - t_0) \rightarrow y_R(t) = x_R(6 - t) = x((6 - t) - t_0)$

$y_{RIT}(t) = y(t - t_0)$

$y(t) = x(6 - t)$

$y(t - t_0) = x(6 - (t - t_0)) = x(6 - t + t_0)$

Essendo $y(t - t_0) \neq y_R(t)$ il sistema non è tempo invariante.

2.2 Sistemi causali

Definizione 2.1 (Sistema causale)**.** Un sistema è detto causale (da non confondere con casuale) se $y(t)$ dipende solamente da $x(t)$ per $t \leq \bar{t}, \forall x(t), t, \bar{t}$, quindi se il segnale in uscita in ogni istante dipende solo dal segnale in ingresso nell'istante corrente e in tutti i precedenti.

Esempio 2.3.
$y(t) = x(6 - t)$ Il segnale è causale? Per verificarlo si osserva che se $6 - \bar{t} \leq \bar{t}, \forall \bar{t}$, evidentemente $\bar{t} \geq 3$, quindi per tutti gli istanti maggiori o uguali a 3 l'uscita dipende dal passato (presente incluso), altrimenti dipende dal futuro del segnale. Il sistema è quindi non causale.

2.3 Sistemi senza memoria

In un sistema senza memoria la uscita dipende istante per istante dalla sola entrata, quindi non si "ricorda" di uno stato precedente. Il funzionamento è riconducibile ad una rete combinatoria.

Definizione 2.2 (Sistema senza memoria)**.** Un sistema si dice senza memoria se $y(\bar{t})$ dipende solo da $x(\bar{t}), \forall x(t), \bar{t}$.

Tipicamente il sistema è dato da un'altra funzione $g(x)$, applicata nel seguente modo:

$$y_{(}t) = g[x(t)]$$

Osservazione 2.1. Un sistema senza memoria è sempre causale, dato che $y(\bar{t}) = T\{x(t), t = \bar{t}\}$ rispetta la condizione che $t \leq \bar{t}$.

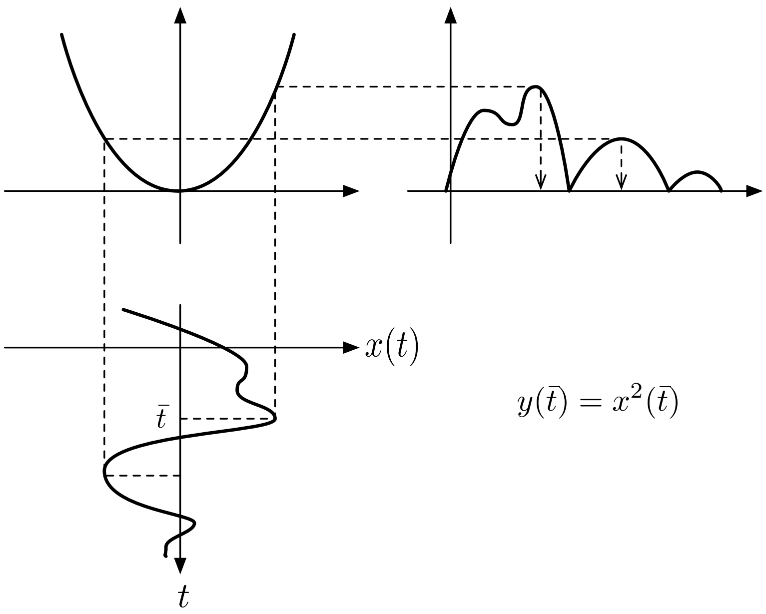

Figura 2: Composizione di funzioni in un sistema senza memoria

Per capire come funzione il grafico in fig.2 basta notare che è solo la composizione di due funzioni $x(t)$ e x^2, quindi la funzione in uscita dal sistema è $y(t) = x(t)^2$. Il grafico in basso a sinistra è la funzione in entrata (dove il tempo è la variabile indipendente), ruotata per poterla allineare, il grafico sopra è la funzione da comporre, e quello a destra rappresenta il risultato.

La composizione viene fatta come $[x(t)]^2$, nel seguente modo:

- Un valore $\bar{t}$ viene applicato alla funzione $x(t)$, ottenendo $x(\bar{t})$, nel grafico in basso a sinistra.
- Questo valore viene proiettato (composto) sulla funzione sopra, dove in questo caso viene elevato al quadrato
- Il valore risultante dalla intersezione viene riportato a destra, ad una distanza uguale a $\bar{t}$

In poche parole, si tratta solo di un metodo per visualizzare la composizione di un segnale con un sistema (una funzione). Rappresenta il risultato $y(t)$ che si ottiene facendo entrare il segnale $x(t)$ nel sistema.

2.3.1 Amplificatore (o attenuatore)

$$y(t) = A \cdot x(t) \tag{2.5}$$

2.3.2 Raddrizzatore

Per il tipo **a doppia semionda**:

$$y(t) = |x(t)| \tag{2.6}$$

Se invece è **a singola semionda**:

$$y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = x \cdot u(x) \tag{2.7}$$

2.3.3 Bang-Bang

$$y = \operatorname{sgn}(x) \tag{2.8}$$

2.3.4 Amplificatore con saturazione

Dal punto di vista pratico un amplificatore non può amplificare qualunque tipo di segnale, ma ha dei limiti dati dai componenti fisici usati. Si introduce quindi il modello di un amplificatore in cui i segnali in uscita arrivano fino ad un punto di saturazione, sopra il quale non possono andare.

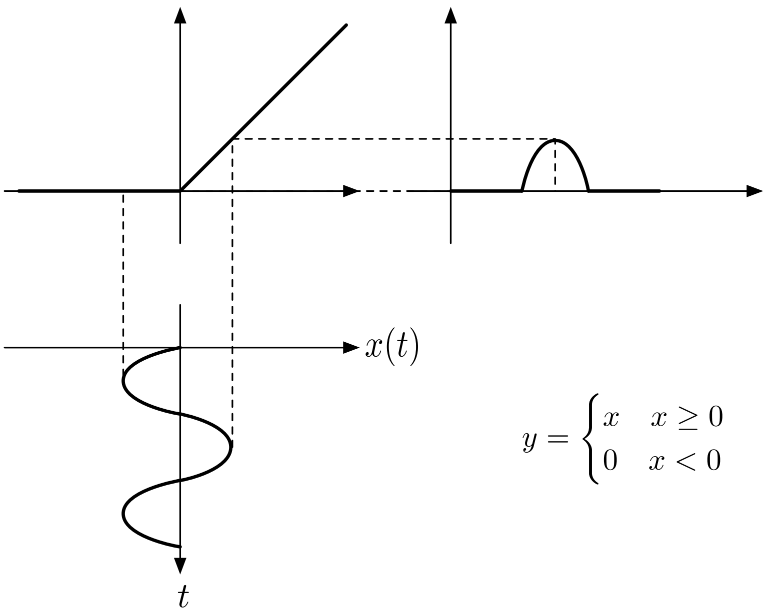

Figura 3: Raddrizzatore di segnale a singola semionda

3 Sistema con memoria

In un sistema con memoria, il segnale in un punto può dipendere anche da tutto il segnale, sia passato che futuro.

3.1 Integratore

Il sistema integratore a finestra mobile indica che in un punto definito il valore è dato dall'integrale definito in un intervallo T, che può essere precedente rispetto al punto stesso (quindi è causale) oppure futuro (con memoria).

Un integratore normale (non a finestra mobile) esegue l'integrale da $+\infty$ a $-\infty$, quindi affinché la uscita sia finita il segnale deve essere infinitesimo ai limiti.

4 Sistemi stabili

Definizione 4.1. Un sistema si dice stabile in senso BiBo (bounded inputs, bounded outputs) se $\forall x(t)$ tale che $|x(t)| \leq M$ l'evoluzione del segnale in ingresso è limitata, quindi soddisfa $|y(t)| \leq k$.

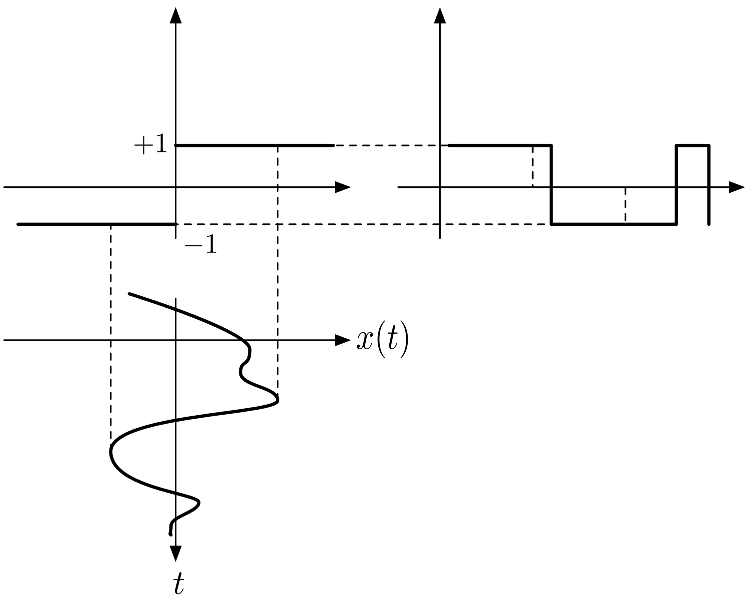

Figura 4: Bang-Bang

In altri termini, se un qualunque ingresso è di ampiezza limitata M e produce un segnale in uscita limitato k allora il sistema è stabile in senso BiBo.

Esempio 4.1.
$y(t) = A \cdot x(t)$

$|y(t)| = |A \cdot x(t)| = |A| \cdot |x(t)| \leq |A| \cdot M$

Essendo la funzione $x(t)$ limitata per ipotesi, si può scambiare con una costante M, che rappresenta il massimo valore che può raggiungere.

$|A| \cdot M = k$, il sistema è verificato stabile.

Esempio 4.2.
$y(t) = x(6 - t)$

$|y(t)| = |x(6 - t)|$

Sia $|x(6 - t)| \leq M$, se questa condizione implica la limitatezza del segnale in uscita, allora è stabile. Si può notare che la operazione $x(6 - t)$ è una traslazione orizzontale, quindi il segnale non viene alterato verticalmente. La condizione è verificata.

Esempio 4.3.
Un integratore per alcuni segnali in ingresso produce una uscita stabile, per altri

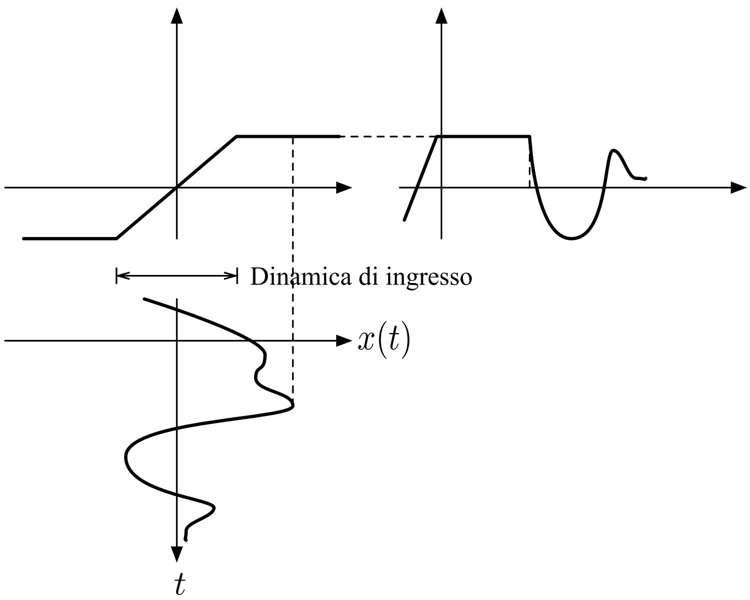

Figura 5: Amplificatore con saturazione

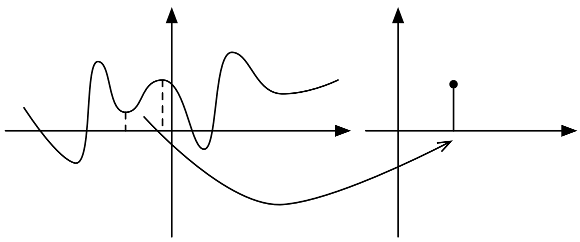

Figura 6: Integratore a finestra mobile

no. Invece un integratore a finestra mobile è sempre stabile.

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau) d\tau$$
$$|y(t)| = \left| \int_{t-T}^{t} x(\tau) d\tau \right|$$

Sfruttando la disuguaglianza triangolare generalizzata ($|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$) applicata all'integrale (che alla fine dei conti è una somma) si ottiene che il sistema è stabile.

$$\left|\int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau\right| \leq \int_{t-T}^{t} |x(\tau)|\, d\tau \leq \int_{t-T}^{t} M d\tau = MT = k$$

5 Proprietà dei sistemi

5.1 Linearità

Un sistema si dice lineare se, data una entrata che risulta la combinazione lineare di due segnali, la sua uscita risulta essere la combinazione lineare delle uscite dei segnali di entrata presi singolarmente.

I sistemi lineari soddisfano il principio di sovrapposizione degli effetti. Dati i sistemi:

$$x_1(t) \to y_1(t) \tag{5.1}$$

$$x_2(t) \to y_2(t) \tag{5.2}$$

Un sistema $x_3 \to y_3$ è lineare se, data la entrata $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ la sua uscita è:

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad \forall x_1(t), x_2(t), \alpha, beta, t \tag{5.3}$$

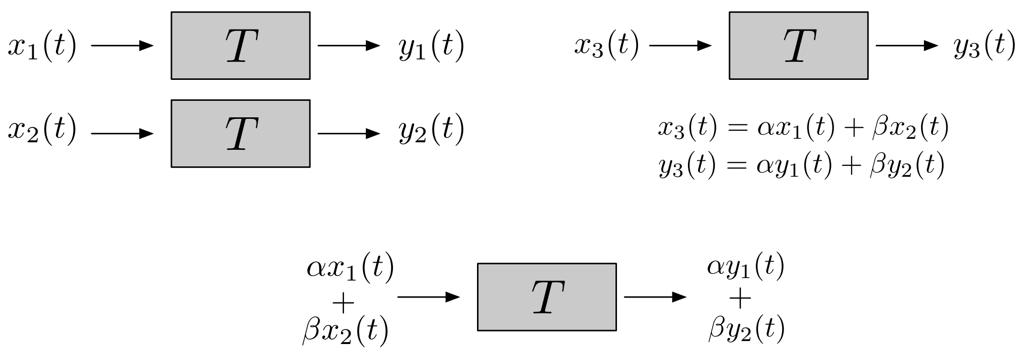

Figura 7: Linearità di un sistema

Esempio 5.1.
Sia $y(t) = a \cdot x(t) + b$, dove a e b sono costanti.

- Il sistema è **senza memoria**, dato che la uscita dipende solamente dall'ingresso istantaneo
- Il sistema è **causale** perché il segnale si può prevedere in modo deterministico

- È inoltre **stabile**, se si limita l'ingresso anche l'uscita viene limitata:

$$|y(t)| = |ax(t) + b| \leq |a| \cdot |x(t)| + |b|$$
$$|x(t)| \leq M \implies |y(t)| \leq |a| \cdot M + |b| = k$$

- Infine è **tempo invariante**, dato che i parametri non dipendono dal tempo, solo il segnale. Quindi se si trasla il segnale in entrata viene traslato anche in uscita.

$$x(t) \to y(t) = ax(t) + b$$
$$x_R(t) := x(t - t_0) \to y_R(t) = ax(t - t_0) + b$$
$$y_{RIT}(t) := y(t - t_0) = ax(t - t_0) + b$$
$$y_{RIT}(t) = y_R(t)$$

- Per quello che riguarda la linearità si verifica con il metodo illustrato.

$$x_1(t) \to y_1(t) = ax_1(t) + b$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = ax_2(t) + b$$
$$x_3(t) := \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \to y_3(t)$$
$$\begin{aligned} y_3(t) &= ax_3(t) + b \\ &= a\left[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right] + b \\ &= a\alpha x_1(t) + a\beta x_2(t) + b \end{aligned}$$

  Ora si prendono le altre due uscite, si fa la combinazione lineare e si confronta con il risultato ottenuto.

$$\begin{aligned} y_c(t) :&= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \\ &= \alpha a x_1(t) + \alpha b + \beta a x_2(t) + \beta b \end{aligned}$$
$$y_3(t) \neq y_c(t)$$

Osservazione 5.1. L'unico sistema senza memoria lineare è l'amplificatore puro.

5.2 Invertibilità

Un sistema si dice invertibile se esiste un altro sistema che alimentato con l'uscita dello stesso produce la funzione in entrata.

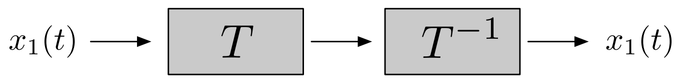

Figura 8: Sistema invertibile

Esempio 5.2.
Un ritardatore è un sistema invertibile, dato che può esistere un anticipatore che "riporta indietro" il segnale prodotto. Ovviamente l'anticipatore non è causale, non si riesce realmente a costruire, è ipotetico.

6 Connessione di sistemi

I sistemi, come i componenti elettronici possono essere configurati in serie, in parallelo o in combinazioni dei due.

6.1 Sistemi in serie (a cascata)

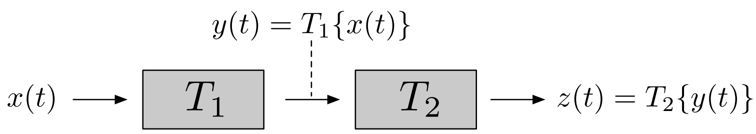

Figura 9: Sistemi in serie

6.2 Sistemi in parallelo

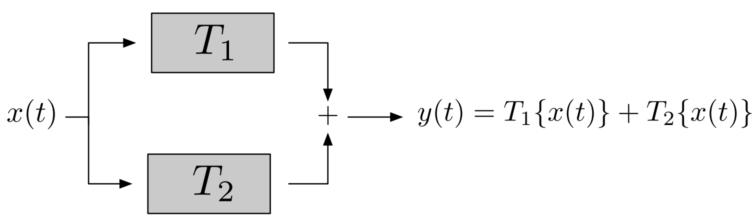

Figura 10: Sistemi in parallelo

7 Sistemi LTI e convoluzione

Un sistema LTI (linear time-invariant) rispetta la condizioni di linearità e tempo invarianza. La operazione di convoluzione che verrà definita permette di applicare la trasformazione di un sistema LTI ad un segnale conoscendo solamente la risposta di esso all'impulso unitario, semplificando i calcoli.

Si consideri un sistema T, $h(t)$ è il segnale in uscita del sistema quando l'ingresso è un impulso di Dirac.

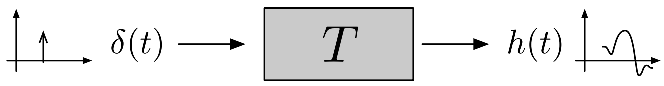

Figura 11: Risposta del sistema all'impulso unitario

Se il sistema è tempo invariante la trasformazione applicata all'impulso non dipende dal momento in cui si applica:

$$h(t-\tau) = T\{\delta(t-\tau)\} \tag{7.1}$$

Inoltre se il sistema è lineare si può calcolare l'uscita quando l'ingresso è una combinazione lineare (o *somma*, vedi integrale) di impulsi.

Un segnale $x(t)$ si può quindi rappresentare come una somma integrale di impulsi amplificati e spostati:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau \tag{7.2}$$

Applicando la trasformazione data dal sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot T\{\delta(t-\tau)\} d\tau \tag{7.3}$$

Si può riassumere la trasformazione che prende in ingresso un impulso con $h(t)$:

$$T\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau) \tag{7.4}$$

La operazione di **convoluzione** si indica quindi con il simbolo $*$:

$$x(t) \to y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \tag{7.5}$$

Riassumendo:

- Si parte con una funzione:
$$x(t)$$
- Si ottiene la funzione in uscita $y(t)$ applicando il sistema:
$$y(t) = T\{x(t)\}$$
- $x(t)$ si indica come somma integrale di impulsi:
$$y(t) = T\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)d\tau\right\}$$
- Essendo il sistema lineare, si ottiene la uscita come combinazione lineare dei singoli ingressi processati dal sistema:
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot T\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$
- Si scambia $T\{\delta(t-\tau)\}$ con $h(t-\tau)$:
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau$$
- La operazione si denota con l'asterisco:
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Con la operazione di convoluzione si può calcolare il segnale in uscita da un sistema, dato il segnale in entrata e *la risposta all'impulso in entrata del sistema*, e non altre possibili risposte, solo quella, per le proprietà di linearità e tempo invarianza. Basta quindi avere la risposta all'impulso $h(t)$ e si può già calcolare come un sistema LTI reagirà con un qualunque segnale $x(t)$ in entrata.

7.1 Proprietà

- Commutativa
$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$
- Associativa
$$(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$
- Distributiva rispetto alla somma
$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) + (x(t) * h_2(t))$$

7.2 LTI in cascata e in parallelo

Si può ottenere un sistema equivalente a più sistemi LTI in serie o in parallelo. Se si scambia l'ordine dei sistemi il risultato non cambia (vedi le proprietà).

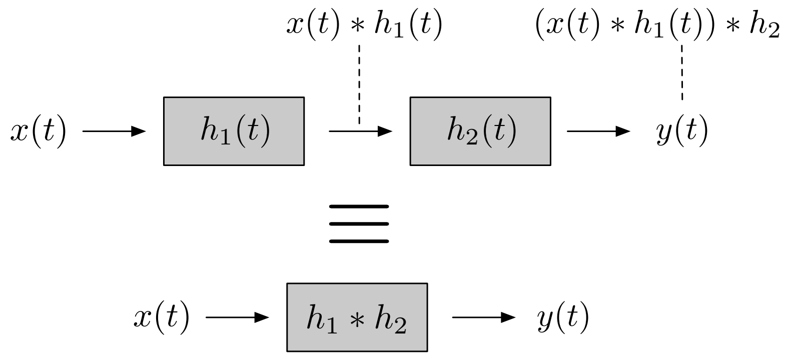

Figura 12: LTI in cascata

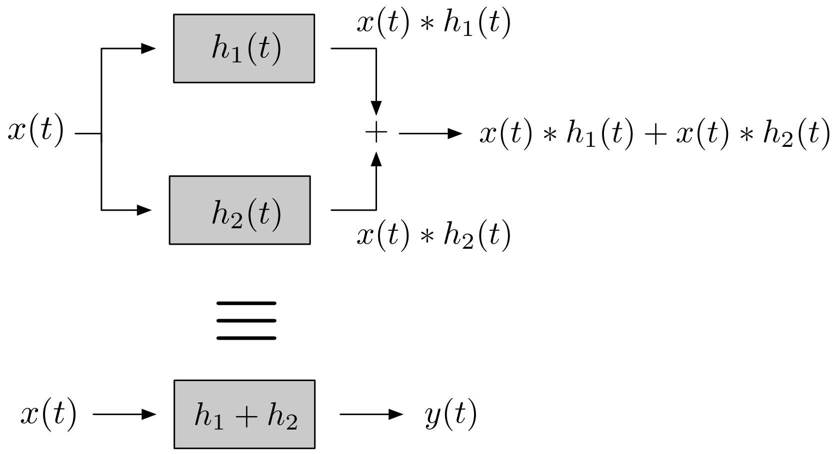

Figura 13: LTI in parallelo

7.3 Esempi

Esempio 7.1.
Si calcoli la convoluzione fra i segnali dati.

$$\begin{cases} x(t) = A \cdot e^{-at} \cdot u(t) \\ h(t) = u(t) \end{cases} \quad A, a > 0$$

La convoluzione è data dalla solita formula:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-a\tau} \cdot u(t-\tau) d\tau$$

La funzione u rappresenta il gradino unitario, e ha discontinuità in 0, dove $t = \tau$. Nel grafico in fig.14 viene rappresentata al contrario, dato che $-\tau$ la inverte e t la sposta orizzontalmente. Il gradino unitario funge da "finestra mobile", che a seconda della posizione "seleziona" l'area da considerare della funzione sovrastante.

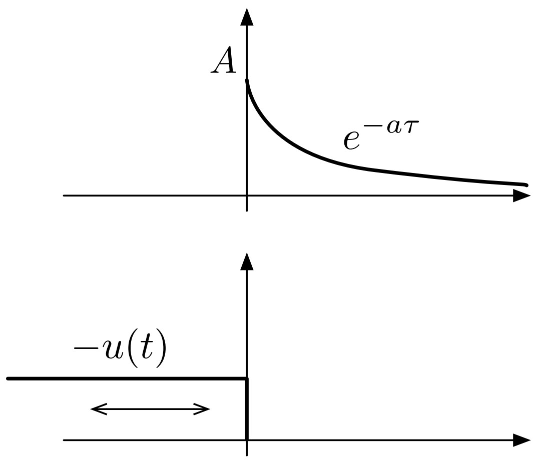

Figura 14: Gradino unitario come "finestra mobile"

Immaginandosi il gradino che, partendo negativo, si sposta orizzontalmente verso destra, si vede che moltiplicato per il segnale in quei punti risulta zero, ed è esattamente il risultato ottenuto dalla convoluzione. Non appena incontra il segnale inizia a crescere, in maniera dipendente all'area sottesa.

Sempre riferendosi all'integrale, in ogni punto la convoluzione vale la somma delle aree infinitesime moltiplicate per il segnale $h(t)$, in questo semplice caso lo stesso agisce solo come finestra mobile e non altera il segnale in entrata.

Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$\int_0^t A \cdot e^{-a\tau} d\tau = \left[A \cdot \frac{e^{-a\tau}}{-a} \right]_0^t$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{A}{a} \cdot [1 - e^{-at}] & t > 0 \end{cases}$$

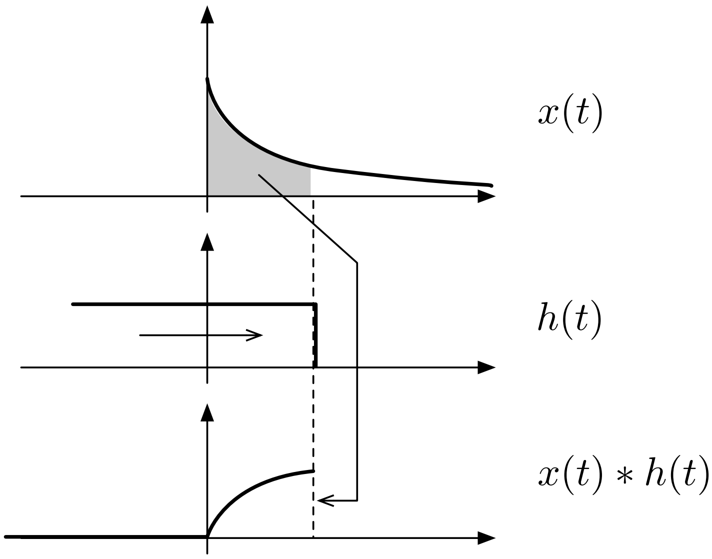

Figura 15: Gradino unitario come finestra di integrazione

Il sistema è notevole, ed è detto **integratore**, essendo la risposta all'impulso il gradino unitario (finestra di integrazione):

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

Esempio 7.2.

$$y(t) = \Pi(t) * \Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) \cdot \Pi(t - \tau) d\tau$$

Nell'integrale si notano due rettangoli, uno "fermo" (il primo) e uno che "si muove" (il secondo, essendo dipendente dalla variabile t), che agisce da finestra mobile.

Quando i due impulsi rettangolari non collimano chiaramente il prodotto è zero, e l'area è nulla. Si costruisce quindi la prima e l'ultima condizione:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \dots \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

Essendo i segnali delimitati da $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$, deve succedere che $t + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, quindi si incontrano in $t = -1$. Simile per l'ultimo risultato.

Quando invece i segnali si incontrano (fig.16), non serve fare tutto l'integrale per calcolare l'area sottesa, basta semplicemente osservare che la base del rettangolo ottenuto (di altezza unitaria) è uguale a $t + \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = t + 1$

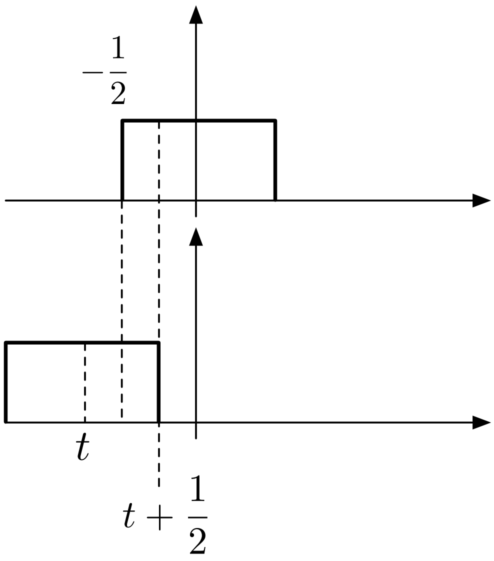

Figura 16: Impulso rettangolare come finestra mobile

Si ottiene quindi il risultato finale:

$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad t < -1 \\ t+1 \quad -1 < t < 0 \\ -t+1 \quad 0 < t < 1 \\ 0 \quad t > 1 \end{cases}$$

Che risulta esattamente uguale all'impulso triangolare $\Lambda(t)$.

7.4 Caratteristiche notevoli

7.4.1 Elemento neutro

L'elemento neutro della convoluzione è l'impulso di Dirac, esso infatti (campionando ogni istante tale e quale) produce in uscita un segnale identico a quello in entrata.

7.4.2 Causalità

Un sistema T è causale (in senso sistema) se e solo se $h(t)$ è causale (in senso segnale).

Da ricordarsi che un sistema è causale se la sua uscita in un determinato istante è data solo dall'istante corrente e quelli passati, un segnale è causale se è zero per $t < 0$, causale generalizzato se è zero per $t < \bar{t}$, dove $\bar{t}$ può essere un qualunque valore.

Per dimostrarlo, sia $h(t)$ causale (quindi $h(t) = h(t)u(t)$), andiamo a calcolare l'uscita $y(t)$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau \tag{7.6}$$

Essendo causale, la parte $u(t-\tau)$ cambia il limite di integrazione, dato che (una volta invertita la funzione $u(t)$) il segnale viene campionato solo per momenti precedenti a t (fig.17).

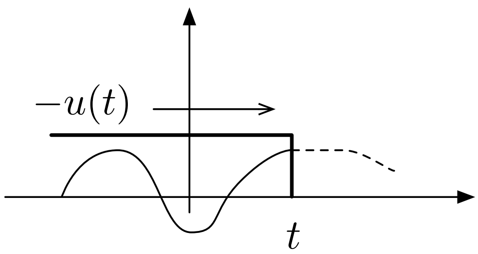

Figura 17: Sistema causale, dipende solo da $\bar{t} \leq t$

Quindi, date determinate ipotesi sulla risposta all'impulso $h(t)$, il sistema diventa causale. Questo perché si fa il prodotto del segnale con la funzione $u(t)$, in modo tale che vengano selezionate solo le parti precedenti al momento corrente t; dall'istante successivo in poi ogni valore del segnale viene azzerato, quindi di fatto non si conosce il futuro dello stesso.

7.4.3 Stabilità

Un sistema è stabile se la risposta all'impulso (positiva grazie al valore assoluto) ha energia finita:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 \, dt = H < +\infty \tag{7.7}$$

Per la dimostrazione, sia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = H \tag{7.8}$$

Si ha quindi l'uscita data dal solito integrale, e per la disuguaglianza triangolare si può costruire la seguente forma:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| \cdot |h(t-\tau)|\, d\tau \tag{7.9}$$

Scambiando i termini (proprietà della convoluzione) si ottiene:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot |x(t-\tau)|\, d\tau \tag{7.10}$$

Sia il segnale in ingresso limitato, quindi $|x(t)| < M$, avendo invertito i termini ora la funzione scorre orizzontalmente (vedi $x(t-\tau)$), mentre il resto rimane limitato per ipotesi. Nell'integrale si sostituisce al segnale il valore M trovato, quindi si ottiene un segnale in uscita finito.

8 Sistemi FIR

Un sistema FIR (Finite Impulse Response) ha una risposta all'impulso di Dirac finita, quindi è definita solo entro un determinato intervallo.

Sono solitamente stabili (a meno che non ci siano asintoti verticali, caso che non interessa).

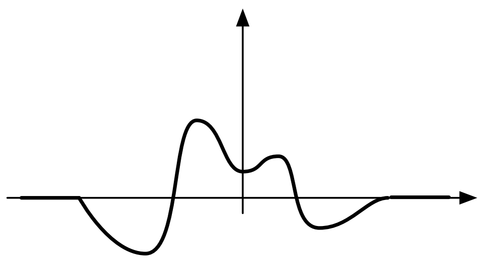

Figura 18: Risposta di un sistema FIR

Per fare un esempio, l'integratore a finestra mobile è stabile e FIR, dato che la risposta all'impulso di Dirac è un impulso rettangolare. Questo viene prodotto dall'integrazione, basti pensare alla finestra mobile che scorre fino ad incontrare l'impulso, quando ci passa attraverso la uscita è sempre 1, quando non lo attraversa è 0.

$$h(t) = \int_{t-T}^{t} \delta(\tau) d\tau = \Pi(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}) \tag{8.1}$$

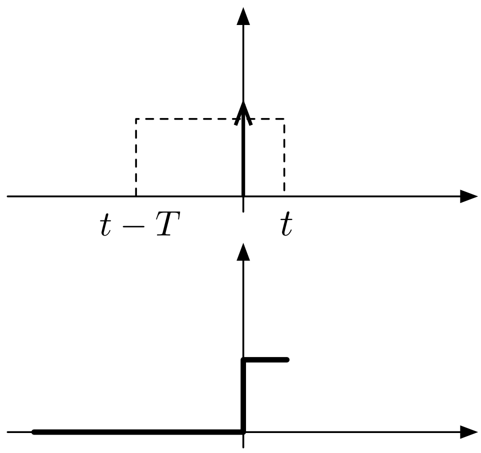

Figura 19: Risposta dell'integratore a finestra mobile