Calcolo Combinatorio

Consiste in una serie di metodi per raggruppare, ordinare o calcolare combinazioni di elementi appartenenti ad un insieme finito.

Casi

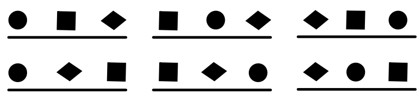
Esempio: in quanti modi si possono accendere e spegnere un numero n di interruttori? Sapendo che gli stati sono $a = 2,$ si ha che le possibilità sono:

$$a^n$$

Basta vedere il caso come l'estrazione di tutti i possibili numeri binari che si possono fare con n cifre.

Permutazioni P_n

Il numero di modi diversi di **mettere in fila n oggetti**.

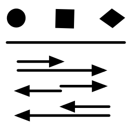


$$\forall n \in \mathbb{N}^+, P_n = n!$$

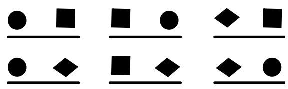
Esempio
Quanti modi ci sono per ordinare n libri in una mensola?

Disposizioni $D_{n,k}$

La **disposizione di n oggetti presi k per volta**, quindi in quanti modi si possono mettere in fila k oggetti presi da un numero n di elementi. Praticamente è la stessa cosa delle permutazioni, solo che qui non si fanno file con tutti gli elementi, ma solo quelli scelti (k).



3 elementi
2 per volta



$n \in \mathbb{N}^+, k \in \mathbb{N}^+ : 1 \le k \le n$

$$D_{n,k} = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Per il calcolo è utile sapere che basta prendere i primi k fattori ($n, n-1, n-2 \dots n-k$), gli altri si elidono con il denominatore.

Esempio
Si fa una gara tra 8 partecipanti, e solo 3 vanno al podio. Quanti sono tutti i possibili eventi di premiazione con vincitori diversi?
Partecipanti: $n = 8$
Vincitori: $k = 3$ in fila, quindi la disposizione è importante

$$D_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

Esempio
Al supermercato ci sono 3 persone e 4 casse, in quanti modi si possono **disporre**?

Combinazioni

I modi in cui posso **scegliere *n* oggetti, k per volta**, da non confondere con le disposizioni. Se si ha una lista di elementi, le combinazioni sono tutte le possibilità di evidenziare k elementi in un totale di n elementi.

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Praticamente si riduce il numero di risultati dividendo per il numero di permutazioni del numero di elementi scelti, dato che l'ordine non ci interessa.

Nota: si legge "n su k".

Esempio
Al lotto escono diversi numeri (combinazioni) ma non mi interessa la loro disposizione. L'ordine non conta, i numeri si.

Esempio
Quante coppie di compagni di classe si possono formare? (A in coppia con B è lo stesso che dire B in coppia con A, l'ordine non conta)

Probabilità

Quanto spesso può accadere un evento se ripetuto un certo numero di volte.

$$p = \frac{eventi\ favorevoli}{eventi\ possibili} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

Nota che una probabilità è sempre compresa tra [succede mai] e [succede sempre], quindi tra 0% e 100%, quindi tra 0 e 1. Anche perchè se gli eventi favorevoli fossero maggiori degli eventi possibili allora sarebbe incompleto il conto.

Esempio
Si ha un tavolo rotondo dove si devono sedere n persone. A e B devono stare vicini, e C deve essere lontano dai due.

$$p(n) = \frac{in\ quanti\ posti\ si\ siede, come\ si\ siedono\ gli\ altri}{tutti\ i\ possibili\ modi\ di\ disporre} = \frac{2(n-4)(n-3)!}{(n-1)!}$$

$$p(n) = \frac{2(n-4)}{(n-1)(n-2)}$$

Esempio
12 amici vanno al cinema e hanno 12 posti contigui. Qual è la probabilità che A e B si siedano entrambi in due posti dispari?

Si considerano eventi in modo in cui si siedano i due, ignorando gli altri.

$$p = \frac{ev.favor.}{ev.poss} = \frac{posti\ pari - dispari}{combinazioni} = \frac{C_{6,2}}{C_{12,2}}$$
$$p = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{5}{22}$$

Coefficiente Binomiale

Rappresenta la combinazione di n oggetti presi k per volta, quindi i modi di scegliere k oggetti per volta da un totale di oggetti n.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ C_{n,k}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k < 0 \vee k > n \end{cases}$$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Si dice “n su k”, e si chiamano così perchè vale la formula del binomio di Newton. Concretamente rappresenta il **numero di sottoinsiemi contenenti k elementi** che si possono trovare in un insieme che contiene n elementi.

Binomio di Newton

Un potente strumento in grado di calcolare in modo rapido la potenza intera di un qualsiasi binomio.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Proprietà:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\forall k \in \mathbb{Z}, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\forall k \in \mathbb{Z}, \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (alla base del triangolo di Tartaglia)

Dimostrazione

Si vuole dimostrare la proprietà (3), si scrive in modo esplicito:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,\big(n-(k-1)\big)!}$$

Si nota che (ricorda, prima si fa il fattoriale):

$(n-k+1)! = (n-k+1)(n-k)!$

perchè $k! = k \cdot (k-1)!$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right]$$
$$= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(n+1)!}{k(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$