

## Teoria della probabilità e variabili aleatorie

Testi di problemi concepiti e risolti dal Prof. Giorgio Picchi  
(Lotto 5: V.A. e loro Valori Attesi)

**Quesito A2** 18/2/11

Un componente in garanzia viene sostituito gratuitamente se si guasta entro un anno dall'acquisto. Se il tempo di guasto del componente è una variabile aleatoria esponenziale negativa con valore medio 5 anni (ovvero di parametro  $\lambda = 1/5$ ), quant'è la probabilità che su un lotto di 20 componenti ne debbano essere sostituiti in un anno 2 o più?

**Quesito A20**

La vita di un certo tipo di lampade è rappresentata da una v.a.  $X$  con densità di probabilità  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$ . Due di tali lampade vengono accese contemporaneamente in una stanza. Si calcoli la probabilità che: a) all'istante generico  $t_0$  le lampade siano entrambe accese; b) all'istante  $t_0$  siano entrambe spente; c) le lampade siano entrambe accese osservando che all'istante  $t_0$  nella stanza c'è luce.

**Quesito A6** 17/6/11

Il sig. Rossi ha l'abitudine di entrare ogni giorno nel bar B1 o nel bar B2 (scelto a caso) in un istante a caso fra le 10 e le 11 e di intrattenervisi esattamente 10 min per prendere un caffè. Un giorno il sig. Bianchi entra nel bar B1 alle 10:30 e osserva che il sig. Rossi non c'è.

- E' più probabile che il sig. Rossi sia già uscito o che non sia mai entrato? (Si assuma indipendenza fra gli eventi {Scelta del bar} e {Istante di entrata del sig. Rossi}).

**Quesito A18** 2/12/10

La durata di una conversazione telefonica è una v.a. con funzione di distribuzione  $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) u(x)$ . Quanto vale la probabilità che una telefonata in atto all'istante  $t_0$  termini entro i successivi  $t$  secondi?

**Quesito A27** 15/5/00

Sulle facce di un disco di colore rosso sono impressi i numeri 1 e 3. Sulle facce di un altro disco di colore bianco (ma per il resto identico al primo) sono impressi i numeri 3 e 5. Si sceglie un disco a caso e lo si lancia come una moneta. Sia  $X$  la v.a. {Numero che si legge sul disco lanciato}. Si consideri l'evento  $A = \{\text{Si è scelto il disco rosso}\}$ .

Si trovino la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della v.a.  $X$  e le stesse condizionate dall'evento  $A$  (o dato l'evento  $A$ ), ossia  $F_X(x|A)$  e  $f_X(x|A)$ .

**Quesito A28** 22/5/00

Una variabile casuale  $X$  ha densità di probabilità  $f_X(x)$  come in Figura A28.

Si dica quanto vale  $a$ .

Si trovi la funzione di distribuzione  $F_X(x)$  tracciandone un grafico accurato.

Si dica quanto vale  $F_X(12)$ .

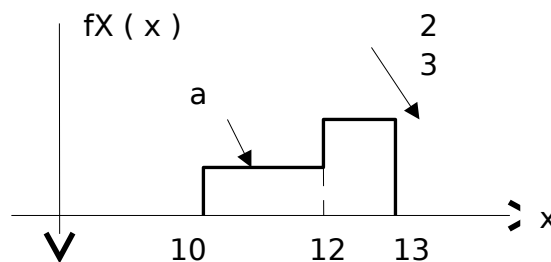


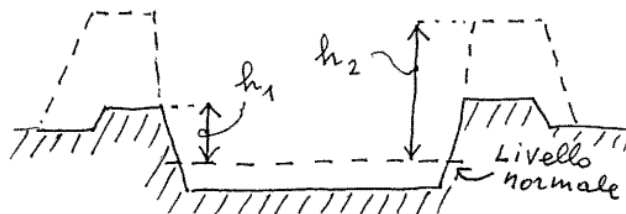
Figura A28

**Quesito A37** 13/02/12

Il livello massimo che un certo fiume raggiunge in un anno (misurato in metri oltre il livello normale del fiume) è una v.a.  $X$  con densità di probabilità:

$$f_X(x) = a(x-10)^4 \prod \left( \frac{x-5}{10} \right)$$

Esiste un argine alto  $h_1 = 2$  m (rispetto al livello normale del fiume) quindi se  $X$  supera tale livello si verifica un'alluvione.



- Si trovi la funzione di distribuzione  $F_X(x)$  di  $X$  e si trovi il valore della costante  $a$ .
  - Si calcoli la probabilità che si abbiano una o più alluvioni in 6 anni.
  - Poiché il rischio di alluvioni è ritenuto troppo elevato si vuole innalzare l'argine in modo che la probabilità di non avere alluvioni in 50 anni sia 0,9. Quale deve essere la nuova altezza  $h_2$  dell'argine?
- {Si assuma che si verifichi una sola piena all'anno e che il livello massimo raggiunto sia indipendente da un anno all'altro}.

**Quesito A39** 13/02/12

Dato un gruppo di  $n = 100$  persone formato da italiani e stranieri si scelgono a caso due persone. Sapendo che la probabilità che una sola di esse sia straniera è  $p \approx 0,18$  si individui una possibile composizione del gruppo (numero di italiani  $n_I$  e numero di stranieri  $n_S$ ).

**Quesito A77 rid** 16/11/13

Una commissione di  $n$  membri è convocata per le ore 10:00.

I partecipanti arrivano indipendentemente con un ritardo che è una v.a.  $R$  avente densità  $f_R(x)$  uniforme fra i valori  $a = -5$  e  $b = 15$  minuti, uguale per tutti (Nota: ritardo negativo = anticipo).

La riunione ha inizio non appena arriva l'ultimo membro.

- a) Si trovi la funzione di distribuzione  $F_X(x)$  e la densità di probabilità  $f_X(x)$  della v.a.  $X = \{\text{Ritardo di inizio della riunione (rispetto alle ore 10:00)}\}$
- b) Si traccino i grafici di  $F_X(x)$  e di  $f_X(x)$  nel caso  $n = 2$ .

**Quesito A26** 22/5/00

Una fabbrica di elettrodomestici monta sui suoi frigoriferi termostati di tipo A o di tipo B indifferentemente.

Un termostato mantiene nel frigorifero una temperatura a regime il cui valore è rappresentato da una variabile casuale uniformemente distribuita fra  $(T - \Delta)$  e  $(T + \Delta)$ , essendo  $T$  la temperatura impostata dall'utente.

Nel caso in esame, per i termostati di tipo A si ha  $\Delta = 1^\circ\text{C}$  e per i termostati di tipo B si ha  $\Delta = 2^\circ\text{C}$ .

Si sceglie a caso un frigorifero e si imposta la temperatura  $T = 2^\circ\text{C}$ .

Si trovi in tal caso la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della variabile casuale  $X = \{\text{Temperatura a regime nel frigorifero}\}$ .

Osservato che in tale frigorifero la temperatura a regime è di  $2,5^\circ\text{C}$ , si calcoli la probabilità che il termostato sia di tipo A

**Quesito A34** 16/1/12

Un satellite artificiale deve svolgere una missione di osservazione della Terra di durata  $T = 6$  mesi. Se l'apparecchiatura di osservazione ha una vita rappresentata da una v.a.  $X$  con densità di probabilità

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$ , quale deve essere il valore di  $\lambda$  (espresso con l'appropriata unità di misura) necessario affinché la probabilità che l'apparecchiatura funzioni almeno per tutta la durata della missione sia  $P = 0,9$ ? Qual è il corrispondente valor medio della vita dell'apparecchiatura,  $E\{X\}$ ? La missione viene effettuata con un'apparecchiatura avente proprio il valore di  $\lambda$  trovato sopra, ma purtroppo al termine della missione l'apparecchiatura risulta non funzionante: qual è la probabilità che abbia funzionato per almeno  $T_1 = 5$  mesi?

### Quesito A63

13/02/13

- a) Sia  $X$  una generica v.a. con funzione di distribuzione  $F_X(x)$ . Fissato un generico numero reale  $t$  si trovi l'espressione analitica della funzione di distribuzione condizionata  $F_X(x | X > t)$  esprimendola utilizzando la funzione  $F_X(x)$ .
- b) Successivamente si applichi quanto trovato al caso in cui la v.a.  $X$  sia uniformemente distribuita nell'intervallo  $0 < x < 4$ , e sia:  $t = 3$ . Si traccino anche i grafici di  $F_X(x)$  e di  $F_X(x | X > t)$ .

### Quesito A54

23/11/12

Un certo giorno voi entrate nella vostra banca all'istante  $t_2$  e trovate che allo sportello c'è già un cliente entrato ad un istante incognito  $t_1 < t_2$ . Sapendo che la v.a.  $X = \{\text{Tempo di permanenza allo sportello di un generico cliente}\}$  è di tipo esponenziale negativo con valor medio  $\eta_X = 5$  minuti, qual è la probabilità che dobbiate attendere più di 5 minuti prima che sia il vostro turno? {Si troverà che tale probabilità non dipende dai valori di  $t_1$  e  $t_2$ }.

### Quesito A30

11/11/11

Un certo tipo di sfere ha diametro che è una variabile aleatoria  $D$  uniforme fra 1 e 4 cm. Avete bisogno di tre sfere di diametro compreso fra 2 e 3 cm.

- Qual è la probabilità che dobbiate misurare almeno 10 sfere per trovare le tre desiderate?
- Definita la v.a.  $N = \{\text{Numero di sfere da misurare per ottenere le tre desiderate}\}$ , si trovi la distribuzione di probabilità della variabile  $N$ , ossia la probabilità  $P\{N = n\}$  per ogni  $n$ , e se ne tracci un grafico accurato per  $n \leq 5$ . (Alternativamente si tracci un grafico della funzione di distribuzione (CDF) o della densità di probabilità (PDF) della variabile  $N$  vista come continua).

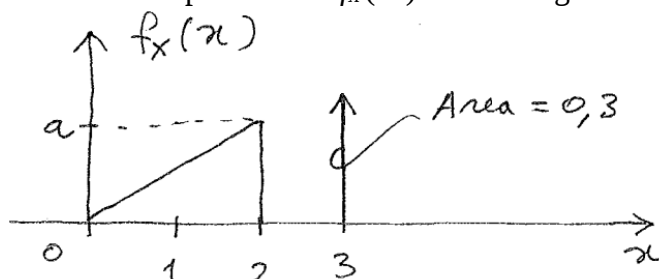
### Quesito A104

16/02/15

- a) Si definisca la varianza  $\sigma_X^2$  di una variabile aleatoria  $X$ .
- b) Si scriva la relazione che esiste fra la varianza, il valore quadratico medio e il valore medio di una variabile aleatoria e si dimostri tale relazione.
- c) Si trovino il valor medio e la varianza di una variabile aleatoria esponenziale negativa con densità di probabilità  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$ , con  $\lambda > 0$ .

### Quesito A112bis

Una variabile casuale  $X$  ha densità di probabilità  $f_X(x)$  come in figura.



- a) Si trovi il valore di  $a$ .
- b) Si trovi la funzione di distribuzione  $F_X(x)$  e se ne tracci un grafico.
- c) Si trovi il valor medio di  $X$ .