Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito **A38**
La densità di probabilità congiunta di due v.a. *X* e *Y* è la seguente:

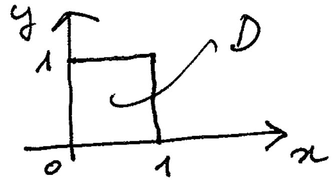
$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} kxy & 0<x<1,\quad 0<y<1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Dove k è una costante.
- Si trovi il valore di k.
- Si determini se le v.a. X e Y sono indipendenti

Quesito A38 (Soluzione)

La densità di probabilità congiunta è diversa da zero solo nel quadrato D in figura, ma non è costante.

Il valore di k si trova dalla condizione di normalizzazione:



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 kxy\,dx\,dy =$$

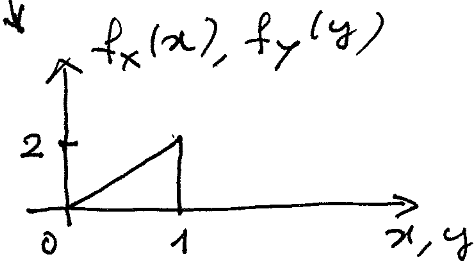
$$= k\int_0^1 y\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)}_{\frac{1}{2}}dy = k\int_0^1 \frac{y}{2}\,dy = \frac{k}{4} = 1 \rightarrow \boxed{k=4}$$

Per trovare se X e Y sono indipendenti occorre trovare le densità di probabilità marginali:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^1 4\cdot xy\,dy = 2x & \text{per } 0<x<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e simmetricamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{per } 0<y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \longrightarrow$$



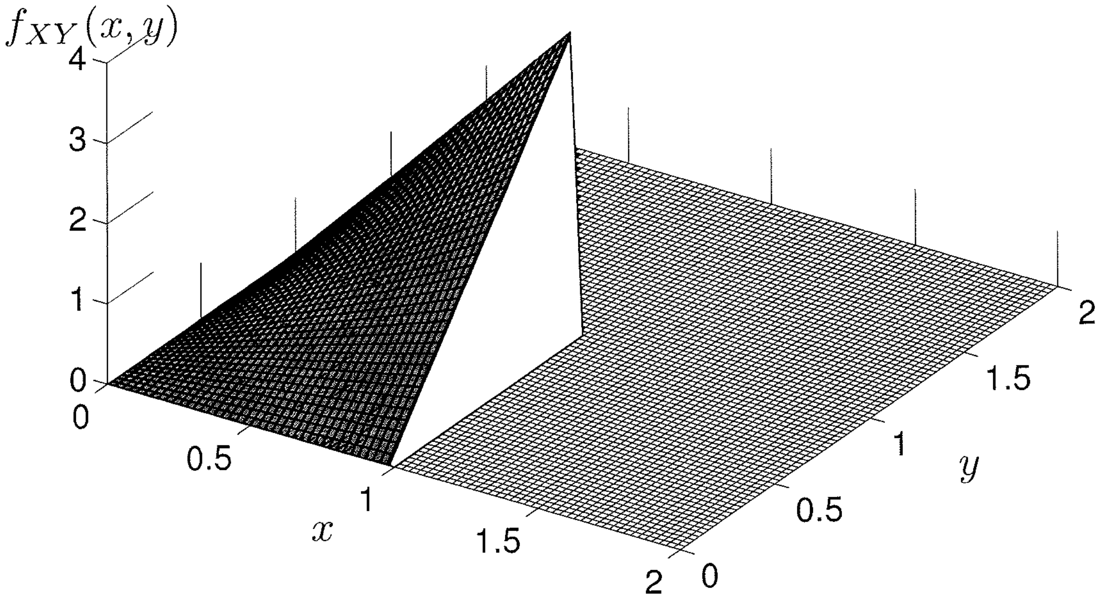
Poiché risulta:

$$\underbrace{f_{XY}(x,y)}_{4xy} = \underbrace{f_X(x)}_{2x}\cdot f_Y(y) \leftarrow 2y \text{ in } D,\ 0 \text{ altrove}$$

le v.a. sono indipendenti

(segue)

{ Per maggiore comprensione si riporta qui sotto il grafico di $f_{XY}(x,y)$ }



Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A42 15/6/12

Sia X un v.a. discreta che può assumere i valori $x_1 = 5$ e $x_2 = 13$ con le probabilità $p_1 = 2/5$ e $p_2 = 3/5$ rispettivamente.

Sia N una v.a. continua, indipendente da X, con densità di probabilità uniforme fra $-\Delta/2$ e $\Delta/2$, con $\Delta = 10$.

Sia Y la v.a. $Y = X + N$.

Si trovi da densità di probabilità di $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico.

Se in una realizzazione dell'esperimento si osserva che Y ha assunto un valore uguale al suo valor medio qual è la probabilità che X abbia assunto il valore x_1 in tal caso?

Quesito A42 (Soluzione)

1° metodo

Essendo X una v.a. discreta si può ricorrere all'apposita versione del teorema delle probabilità totali (vedi Bononi, Ferrari par. 11.2 p. 361 e in particolare l'eq. (11.12) e l'Esempio 11.1):

$$f_Y(y) = f_Y(y \mid X = x_1) \cdot P\{X = x_1\} + f_Y(y \mid X = x_2) \cdot P\{X = x_2\}$$

Definendo le v.a.

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &\triangleq x_1 + N = 5 + N \\ Y_2 &\triangleq x_2 + N = 13 + N \end{aligned}\right\} \leftarrow$$

Trasformazioni della v.a. N del tipo: $g(N) = aN + b$, con $a = 1$

si ha (vedi B., F. Esempio 6.5 p. 154):

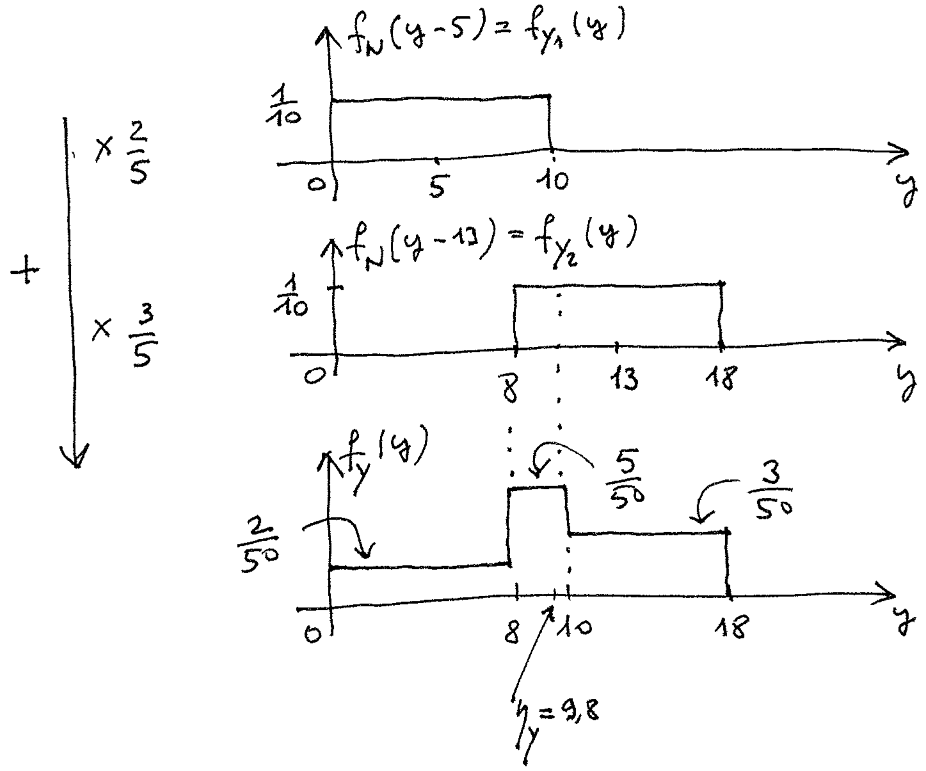
$$f_Y(y \mid X = x_1) = f_{Y_1}(y) = f_N(y - x_1) = f_N(y - 5)$$

$$f_Y(y \mid X = x_2) = f_{Y_2}(y) = f_N(y - x_2) = f_N(y - 13)$$

Ed infine, essendo $\mathbb{P}\{X=x_1\}=p_1$ e $\mathbb{P}\{X=x_2\}=p_2$:

$$\boxed{f_Y(y)= p_1\cdot f_N(y-x_1)+p_2 f_N(y-x_2)= \frac{2}{5} f_N(y-5)+\frac{3}{5} f_N(y-13)= = \frac{2}{50}\Pi\left(\frac{y-5}{10}\right)+\frac{3}{50}\Pi\left(\frac{y-13}{10}\right)}$$

Si vedano anche le figure:



Il valor medio di Y è:

$$\boxed{\eta_Y=E\{Y\}=E\{X+N\}=E\{X\}+E\{N\}} = \underbrace{x_1 p_1+x_2 p_2}_{E\{X\}} + \underbrace{0}_{E\{N\}=0 \text{ per la simmetria pari di } f_N(x)} =$$

$$=5\cdot\frac{2}{5}+13\cdot\frac{3}{5}=\boxed{\frac{49}{5}=9,8}$$

Si cerca: $\mathbb{P}\{X=x_1 \mid Y=\eta_Y\}$.

Applicando l'appropriata versione della formula di Bayes (B.F. eq.(11.9) p. 364) e ricavando i valori numerici necessari osservando la posizione del valor medio $\eta_Y=9,8$ nelle figure precedenti si ha:

$$\boxed{P\{X=x_1 \mid Y=y_Y\}} = \frac{f_Y(y_Y \mid X=x_1)\cdot P\{X=x_1\}}{f_Y(y_Y)} = \frac{f_{Y_1}(y_Y)\cdot P\{X=x_1\}}{f_Y(y_Y)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{5}{50}} = \boxed{\frac{2}{5} = 0{,}4}$$

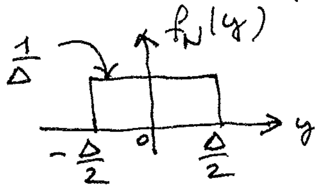
2° metodo

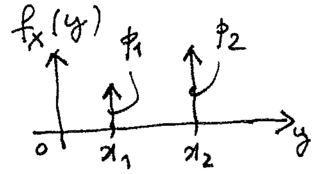
Essendo X e N v.a. indipendenti la densità di probabilità della v.a. Y, somma delle due, è uguale alla convoluzione delle rispettive densità, ossia:

$$f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y)$$

Le due densità si ricavano dal testo osservando che essendo la X discreta la sua densità è la somma di opportune delta di Dirac:

$$f_N(y) = \frac{1}{\Delta}\Pi\left(\frac{y}{\Delta}\right) = \frac{1}{10}\Pi\left(\frac{y}{10}\right)$$





$$f_X(y) = p_1\,\delta(y-x_1) + p_2\,\delta(y-x_2) = \frac{2}{5}\delta(y-5) + \frac{3}{5}\delta(y-13)$$

Ricordando quindi le proprietà della convoluzione e della delta si ha infine:

$$\boxed{f_Y(y)} = f_X(y) * f_N(y) = \left[\frac{2}{5}\delta(y-5) + \frac{3}{5}\delta(y-13)\right] * f_N(y) =$$

$$= \frac{2}{5} f_N(y-5) + \frac{3}{5} f_N(y-13) = \boxed{\frac{2}{50}\Pi\left(\frac{y-5}{10}\right) + \frac{3}{50}\Pi\left(\frac{y-13}{10}\right)}$$

come già ottenuto col primo metodo.

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

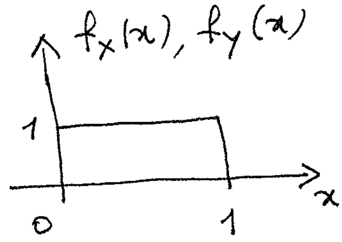
Quesito A47
Le coordinate di un punto P sul piano cartesiano sono due v.a. indipendenti X e Y uniformemente distribuite fra 0 e 1.
Si trovi la densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ delle due v.a. e si calcoli la probabilità che la distanza D del punto P dall'origine sia maggiore di 1.

Quesito A 47 (Soluzione)

Dal testo si ricava:

$$f_X(x) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$f_Y(y) = \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right).$$



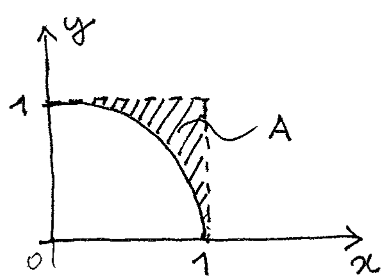
Quindi, per l'indipendenza:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{per} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Detta P_1 la probabilità che la distanza D del punto P dall'origine sia maggiore di 1 si ha:

$$P_1 = \iint_A f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$



dove A è la regione del piano tratteggiata in figura. Data la costanza di $f_{XY}(x,y) = 1$ sul quadrato la probabilità cercata è uguale al rapporto fra l'area della regione A e quella dell'intero quadrato quindi (detto r il raggio della circonferenza):

$$\boxed{P_1 = \frac{r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2}{r^2} = 1 - \frac{\pi}{4} = 0{,}215}$$

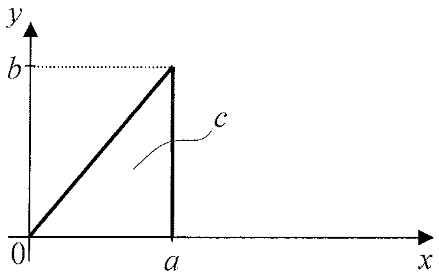
(Si noti l'indipendenza di P_1 dal raggio r.)

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A51

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante c nel dominio indicato in figura ed è nulla altrove.
Si trovi il valore di c.
Si trovi la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X e se ne tracci un grafico.
Si trovi il valor medio della variabile X.



Quesito A51 (Soluzione)

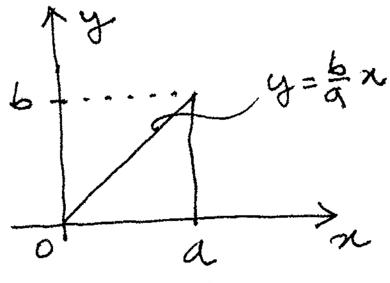
Detto D il dominio indicato, la normalizzazione richiede che:

$$\iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1 .$$

Essendo: $f_{XY}(x,y) = c$ per $(x,y) \in D$, ricorrendo alla geometria elementare si trova immediatamente che l'integrale doppio vale (volume del prisma di base D):

$$\frac{ab}{2} \cdot c = 1 \quad \text{da cui} \quad \boxed{c = \frac{2}{ab}}$$

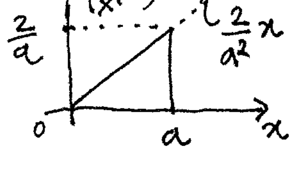
La densità di probabilità della v.a. X si può trovare come densità marginale, ossia:



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{b}{a}x} c\,dy =$$

per $0<x<a$

$$= c\left[y\right]_0^{\frac{b}{a}x} = c \cdot \frac{b}{a}x = \frac{2}{a\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}}{a}x = \begin{cases} \frac{2}{a^2}x & \text{per } 0<x<a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \longrightarrow$$



Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A55 23/11/12 (TSA)
Due persone decidono di incontrarsi in un certo luogo. Se ciascuno di essi arriva indipendentemente dall'altro ad un istante uniformemente distribuito fra le 12:00 e le 13:00, si trovi la probabilità che il primo che arriva debba attendere più di 10 minuti.
[Si indichino con le v.a. *X* e *Y* i rispettivi istanti di arrivo, espressi in minuti dopo le 12:00]

Quesito A55 (Soluzione)

Lo spazio ambiente è l'insieme dei punti del piano appartenenti al quadrato di lato 60 min, mostrato in figura.

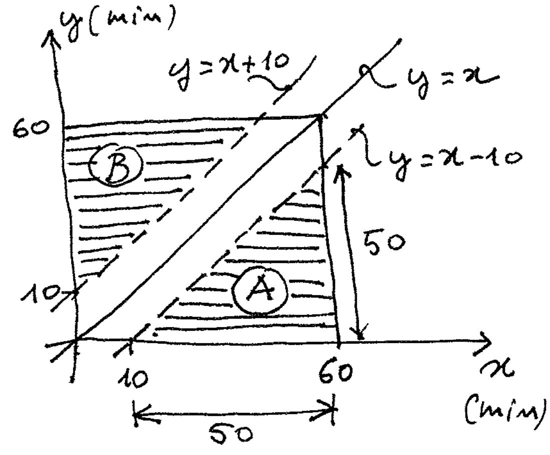
Si cerca la probabilità dell'evento:

La densità di probabilità congiunta delle due v.a. (indipendenti) è il prodotto delle due densità uniformi: vale quindi 1/3600 min^-1 sul quadrato e zero altrove.

$$\mathcal{E} = \{|X-Y|>10\} =$$

$$= \underbrace{\{X-Y>10,\ X>Y\}}_{A} \cup \underbrace{\{Y-X>10 \overset{\cap}{,}\ X<Y\}}_{B} = A \cup B$$

Gli eventi A e B sono individuati dalle regioni tratteggiate in figura e sono mutuamente esclusivi.
La probabilità cercata si può quindi trovare ricorrendo alla geometria elementare:



$$\boxed{\mathbb{P}\{|X-Y|>10\} = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) =}$$

$$= \frac{\text{Area } A + \text{Area } B}{\text{Area quadrato}} = \frac{\frac{50\cdot 50}{2}+\frac{50\cdot 50}{2}}{60\cdot 60} = \boxed{\frac{25}{36} = 0{,}694}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Esercizio n. 3 (A57)

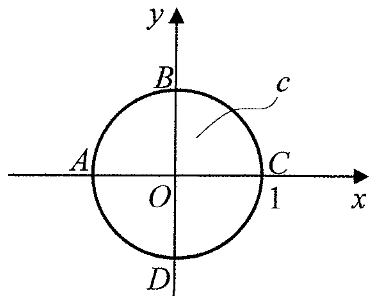
La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante c nel dominio indicato in figura (circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine) ed è nulla altrove.

a) Si trovi il valore della costante c.

Sia $F_{XY}(x, y)$ la funzione di distribuzione congiunta delle due variabili.

b) Si individui sul piano cartesiano, mediante tratteggio, la regione per cui è $F_{XY}(x, y) = 0$. Sullo stesso piano si individui, mediante un diverso tratteggio, la regione per cui è $F_{XY}(x, y) = 1$. Si dica inoltre quanto vale la funzione $F_{XY}(x, y)$ nei punti: $O(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $D(0,-1)$.

c) Si trovino le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico. Si dica infine se X e Y sono indipendenti.



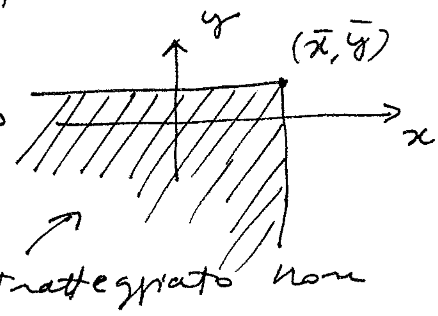
Quesito A57 (Soluzione)

a) La densità congiunta $f_{XY}(x,y)$ ha la forma di un cilindro di altezza c e base il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine. Per la normalizzazione il volume di tale cilindro deve essere unitario quindi:

$$\pi \cdot 1^2 \cdot c = 1 \longrightarrow \boxed{c = \frac{1}{\pi}}$$

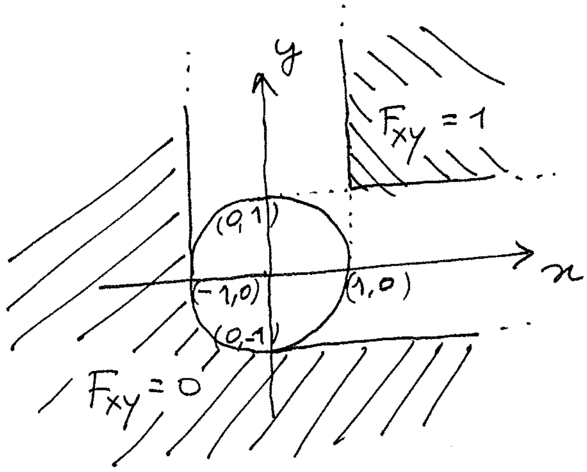
b) La funzione $F_{XY}(x,y)$ assume in ogni punto ~~del~~ $(\bar{x},\bar{y})$ del piano il valore pari alla massa di probabilità che si trova nel dominio $(x \leq \bar{x}, y \leq \bar{y})$, è infatti:

$$F_{XY}(\bar{x},\bar{y}) = P\{X \leq \bar{x}, Y \leq \bar{y}\}$$



La regione del piano in cui è $F_{XY}(x,y) = 0$ è quella in cui l'angolo tratteggiato non ha intersezione con la circonferenza data e la regione in cui è $F_{XY}(x,y) = 1$ è quella ~~...~~ per cui la circonferenza è tutta contenuta nell'angolo.

Quindi (vedi figura) →

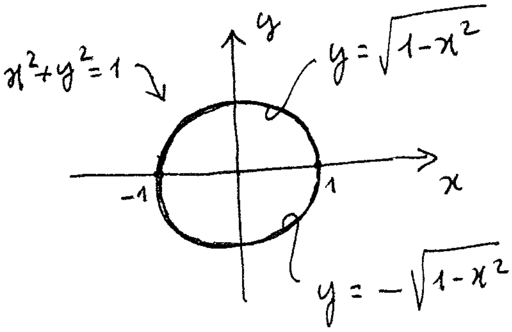


La massa di probabilità che si trova nell'angolo quando il vertice è nei punti A, B, C, D, O è uguale alla frazione di area del cerchio contenuta nell'angolo (perché $f_{XY}(x,y)=c$ è costante su tutto il cerchio) – Quindi facilmente:

A : $F_{XY}(-1,0) = 0$ C : $F_{XY}(1,0) = \frac{1}{2}$ O: $F_{XY}(0,0) = \frac{1}{4}$

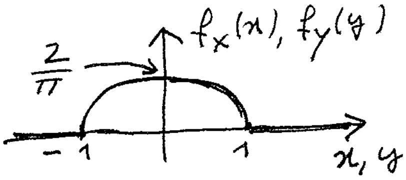
B : $F_{XY}(0,1) = \frac{1}{2}$ D : $F_{XY}(0,-1) = 0$

c) Le densità marginali sono:



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\cdot dy = \frac{1}{\pi}\Big[y\Big]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}} & \text{per } |x|<1 \\ 0 \quad \text{altrove} \quad (|x|>1) & \end{cases}$$



$$\boxed{f_Y(y)} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[x\Big]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} = \boxed{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}} & \text{per } |y|<1 \\ 0 \quad \text{altrove} \quad (|y|>1) & \end{cases}$$

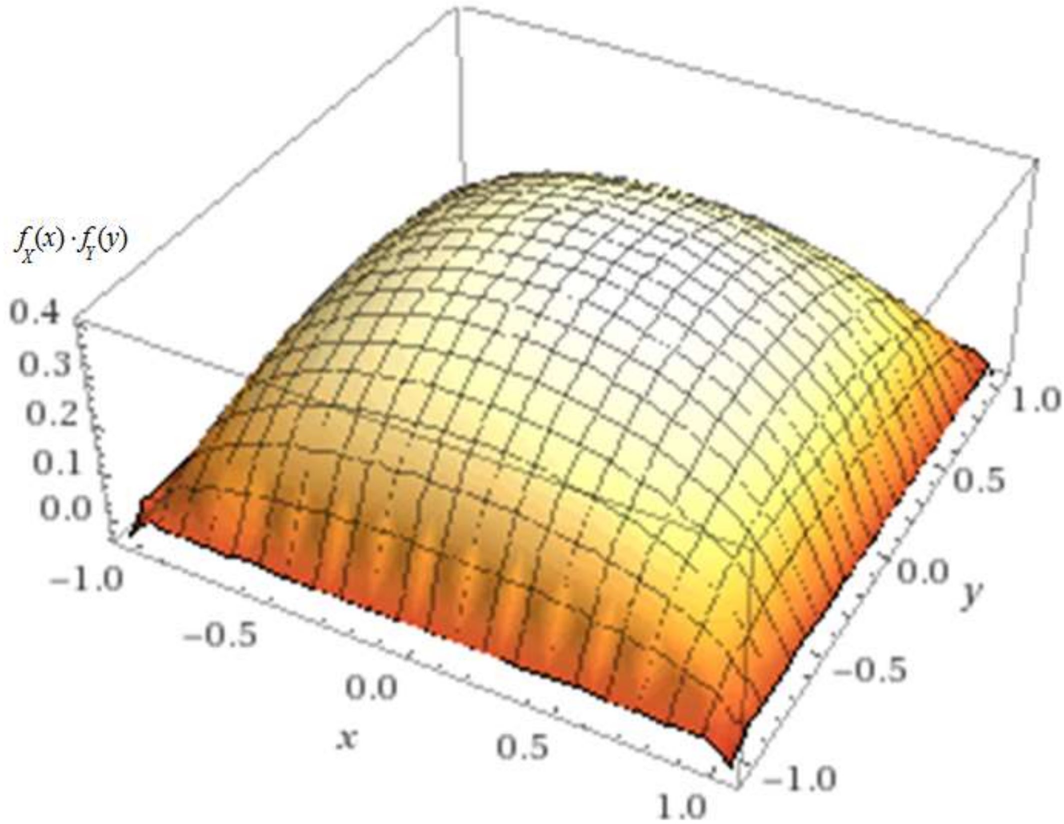
Le v.a. non sono indipendenti

E il prodotto:

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} & \text{per } |x|<1, |y|<1 \\ 0 \quad \text{altrove} \quad (|x|>1 \cup |y|>1) & \end{cases}$$

$\neq f_{XY}(x,y)$

Per una migliore comprensione, nella figura è riportato il grafico della funzione $f_x(x) \cdot f_y(y)$, prodotto delle due densità marginali.

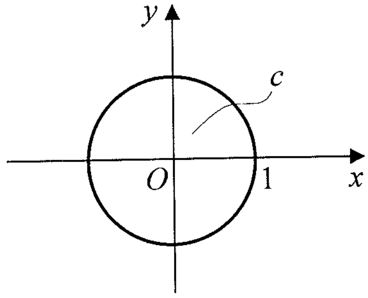


Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

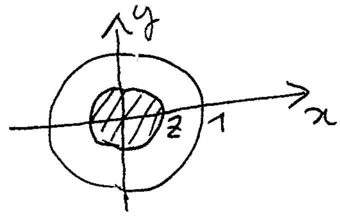
Quesito A62 13/2/13

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante $c = 1/\pi$ nel dominio indicato in figura (circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine) ed è nulla altrove.
Si trovino la funzione di distribuzione $F_Z(z)$ e la densità di probabilità $f_Z(z)$ della v.a. $Z =$ {Distanza dall'origine del punto di coordinate (X,Y)} e si traccino anche i grafici delle funzioni trovate.



Quesito A62 (Soluzione)

Si ha, per definizione: $F_Z(z) = P\{Z \le z\}$ - Quest'ultima è la probabilità che $Z = \{$distanza dall'origine del punto $(X,Y)\}$ sia minore (o uguale a) di z, che ovviamente è uguale alla probabilità che il punto (X,Y) si trovi entro il cerchio di raggio z centrato nell'origine (tratteggio in figura) -



Tale probabilità è data (per $0<z<1$) dal Volume del cilindro di raggio z e altezza $c = \frac{1}{\pi}$ quindi:

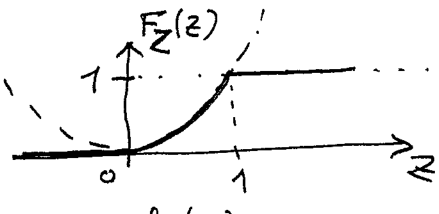
$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \pi \cdot z^2 \cdot \frac{1}{\pi} = z^2 \quad \text{per } 0 \le z < 1$$

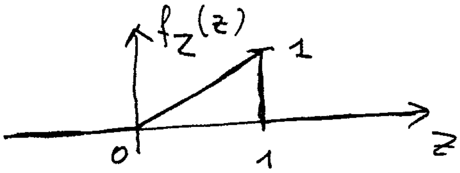
Per $z \ge 1$ si ha: $F_Z(z) = P\{Z \le 1\} = 1$

e per $z < 0$ si ha: $F_Z(z) = 0$ perchè Z è sempre ≥ 0.

Si ha quindi:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{per } z < 0 \\ z^2 & \text{per } 0 \le z < 1 \\ 1 & \text{per } z \ge 1 \end{cases}$$





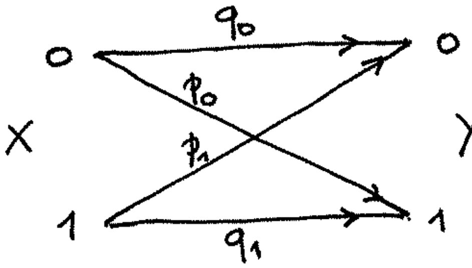
E la densità è:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 2z & \text{per } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A64

In figura è schematizzato un canale di trasmissione binario.
Il simbolo trasmesso è una v.a. discreta X che può assumere i valori $\{0,1\}$. Anche il simbolo ricevuto è una v.a. discreta Y che può assumere i valori $\{0,1\}$ ma a causa di disturbi di trasmissione può verificarsi un errore ossia l'evento: $\mathcal{E} = \{X \neq Y\}$.
Il canale è caratterizzato dalle seguenti probabilità (dette *di transizione*):



$p_0 = P\{Y=1 \mid X=0\}$, $\quad p_1 = P\{Y=0 \mid X=1\}$,
$q_0 = P\{Y=0 \mid X=0\}$, $\quad q_1 = P\{Y=1 \mid X=1\}$.

Si assumano i seguenti valori:
$P\{X=0\} = 0{,}5$; $\quad p_0 = 0{,}1$; $\quad p_1 = 0{,}2$.

a) Si trovino le probabilità $P\{Y=0\}$ e $P\{Y=1\}$.
b) Se all'uscita si osserva uno 0 (ossia si osserva che Y ha assunto valore 0) quant'è la probabilità che il valore di X trasmesso fosse 0 ?
c) Si calcoli la probabilità di errore sul canale, ossia la probabilità $P(\mathcal{E})$.
d) Si dica se le v.a. X e Y sono indipendenti giustificando la risposta.

Quesito A64 (Soluzione)

Preliminarmente si osservi che i valori q_0 e q_1 (probabilità di corretta trasmissione condizionate al simbolo trasmesso) si ricavano immediatamente dai dati p_1 e p_2 (prob. di errata trasmissione (condizionate)), infatti:

$$q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 \quad ; \quad q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

a) Gli eventi $\{X=0\}$ (viene trasmesso uno zero) e $\{X=1\}$ (viene trasmesso un uno) rappresentano una partizione dello spazio ambiente, per il calcolo di $P\{Y=0\}$ o $P\{Y=1\}$ si può quindi applicare il teorema delle prob. totali:

$$\boxed{P\{Y=0\}} = P\{Y=0 \mid X=0\} \cdot P\{X=0\} + P\{Y=0 \mid X=1\} \cdot P\{X=1\} =$$

$$= q_0 \cdot P\{X=0\} + p_1 \cdot P\{X=1\} = 0{,}9 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{0{,}55}$$

e:

$$\boxed{P\{Y=1\}} = 1 - P\{Y=0\} = 1 - 0{,}55 = \boxed{0{,}45}$$

b) La probabilità che, avendo ricevuto uno zero ($Y=0$ sia stato effettivamente trasmesso uno zero ($X=0$) si può calcolare usando la formula di Bayes e i dati forniti e ricavati:

$$\boxed{P\{X=0|Y=0\} = \frac{P\{Y=0|X=0\}\cdot P\{X=0\}}{P\{Y=0\}} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}5}{0{,}55} = \frac{9}{11} = 0{,}818}$$

c) La probabilità di errore sul canale (prob. dell'evento $\mathcal{E}=\{X\neq Y\}$ si può calcolare usando ancora il teorema delle probabilità totali:

$$\boxed{P\{\mathcal{E}\}} = P\{\mathcal{E}|X=0\}\cdot P\{X=0\} + P\{\mathcal{E}|X=1\}\cdot P\{X=1\} =$$

$$= P\{Y=1|X=0\}\cdot P\{X=0\} + P\{Y=0|X=1\}\cdot P\{X=1\} =$$

$$= p_0\cdot\frac{1}{2} + p_1\cdot\frac{1}{2} = (0{,}1+0{,}2)\cdot\frac{1}{2} = \boxed{0{,}15}$$

d) Le v.a. X e Y sono indipendenti se si verifica:

$$P\{X=i, Y=j\} = P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\} \quad \text{per ogni coppia } i,j\in\{0,1\}$$

Vediamo un caso:

$$P\{X=0, Y=1\} = P\{Y=1|X=0\}\cdot P\{X=0\} = p_0\cdot\frac{1}{2} = 0{,}1\cdot 0{,}5 = 0{,}05$$

da confrontare con:

$$P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\} = 0{,}5\cdot 0{,}45 = 0{,}225$$

Dal punto a)

Diversi, quindi le v.a. non sono indipendenti

<u>Nota</u> – Trattandosi di un canale di trasmissione si desidera che il simbolo ricevuto (v.a. Y) sia fortemente dipendente da quello trasmesso (v.a. X), anzi idealmente si vorrebbe che $Y=X$ (massima dipendenza) – La situazione di indipendenza, che si verifica p. es. con $p_1=q_1=p_0=q_0=\frac{1}{2}$, fa sì che i simboli ricevuti non abbiano alcuna attinenza con quelli trasmessi e il canale sia quindi inutilizzabile per trasmettere informazione.

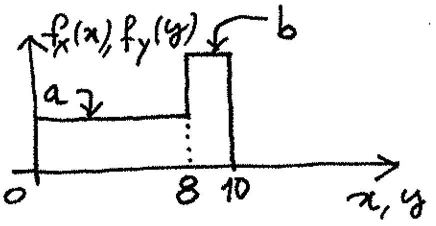
Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A65

Due v.a. indipendenti X e Y hanno identica densità di probabilità, come in figura.

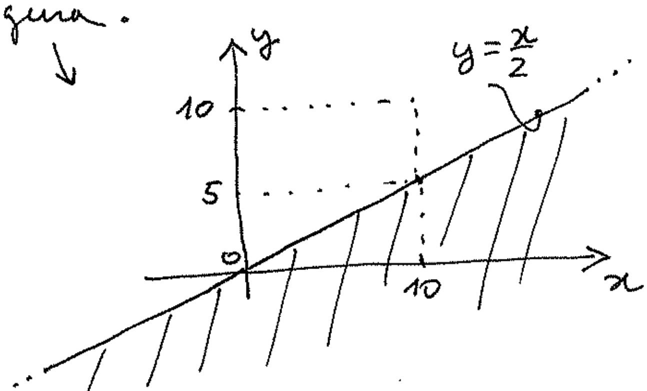
a) Si calcoli la probabilità $P\{X > 2Y\}$ in funzione di a e b.
b) Sapendo che $\eta = E\{X\} = E\{Y\} = 8$, si trovino i valori di a e b e si dica quanto vale la probabilità trovata al punto precedente in tal caso.



Quesito A65 (Soluzione)

a) Si ha: $P\{X > 2Y\} = P\{(X,Y) \in D\} = \int_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

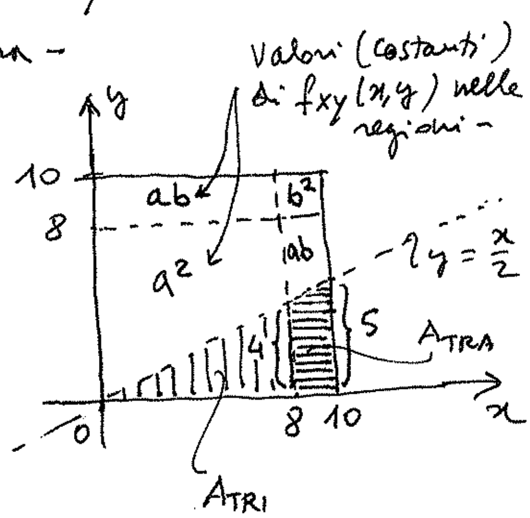
dove D è il dominio del piano cartesiano in cui è verificata la disuguaglianza: $x > 2y$ ovvero $y < \frac{x}{2}$: si tratta della regione tratteggiata in figura.



Data l'indipendenza di X e Y la densità di probabilità congiunta è:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

che vale zero per (x,y) al di fuori del quadrato: $0 < x < 10$, $0 < y < 10$, e all'interno ha quattro regioni di valore costante come indicato in figura.



Il valore dell'integrale è un volume che si può calcolare, in questo caso, con la geometria elementare sommando i volumi dei prismi triangolare e trapezoidale che si trovano moltiplicando le aree di base A_{TRI}, A_{TRA} per le rispettive altezze: a^2 e ab. Quindi:

$$\int_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = a^2 \cdot A_{TRI} + ab \cdot A_{TRA}$$

dove : A_{TRI} è l'area del triangolo : $A_{TRI} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$

A_{TRA} è l'area del trapezio : $A_{TRA} = \frac{(5+4)\cdot 2}{2} = 9$

Quindi la probabilità cercata (in funzione di a e b) è:

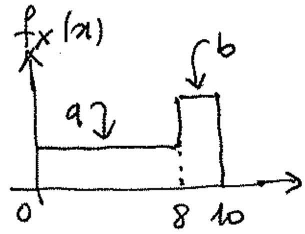
$$P\{X > 2Y\} = a^2 \cdot 16 + ab \cdot 9$$

b) Il valor medio di X (uguale a quello di Y) si ricava dalla definizione:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^8 x \cdot a\,dx + \int_8^{10} x \cdot b\,dx = a \cdot \frac{1}{2}x^2\Big|_0^8 + b\,\frac{1}{2}x^2\Big|_8^{10} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[a(64-0) + b(\underbrace{100-64}_{36})\Big] = 32 \cdot a + 18 \cdot b \qquad (1)$$

Detto η il v.m. $E\{X\}$, i valori di a e b si possono ricavare dalla relazione (1), noto η, e ricordando che per la normalizzazione deve essere:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \longrightarrow 8 \cdot a + 2 \cdot b = 1$$

Si ha quindi il sistema:

$$\begin{cases} 32 \cdot a + 18 \cdot b = \eta \\ 8 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{9-\eta}{40} \\ b = \frac{\eta - 4}{10} \end{cases}$$

che nel caso proposto: $E\{X\} = \eta = 8$ dà $\nearrow$ $\begin{cases} a = \frac{1}{40} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$

Con i valori trovati si ha quindi:

$$\boxed{P\{X > 2Y\} = 16 \cdot a^2 + 9 \cdot ab = 16 \cdot \left(\frac{1}{40}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{100} + \frac{9}{100} = \boxed{\frac{1}{10}}}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A84

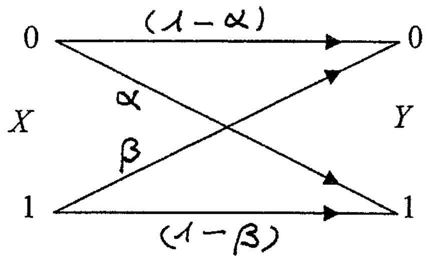
In figura è schematizzato un canale di trasmissione binario.

Il simbolo trasmesso è una v.a. discreta X che può assumere i valori $\{0,1\}$. Anche il simbolo ricevuto è una v.a. discreta Y che può assumere i valori $\{0,1\}$ ma a causa di disturbi di trasmissione può verificarsi un errore ossia l'evento: $\mathcal{E} = \{X \neq Y\}$.

Il canale è caratterizzato dalle seguenti probabilità (dette *di transizione*):

$\alpha = P\{Y=1 \mid X=0\}$, $\beta = P\{Y=0 \mid X=1\}$,
$(1-\alpha) = P\{Y=0 \mid X=0\}$, $(1-\beta) = P\{Y=1 \mid X=1\}$.

Sia inoltre $P\{X=0\} = p_0$.



a) Si scriva la probabilità di errore sul canale, ossia la probabilità $p_e = P(\mathcal{E})$ in funzione di α, β, p_0 .

b) Si scrivano le probabilità congiunte $P\{X=i, Y=j\}$ per ogni coppia $i,j \in \{0, 1\}$, in funzione di α, β, p_0 .

Essendo X e Y una coppia di v.a. discrete, è noto che la funzione di distribuzione congiunta $F_{XY}(x, y)$ assume solo valori costanti in determinate regioni del piano x, y.

c) Sul piano x, y si individuino tutte le regioni in cui $F_{XY}(x, y)$ assume i suoi possibili valori scrivendo per ciascuna regione il rispettivo valore di $F_{XY}(x, y)$ in funzione di α, β, p_0.

Un *"byte trasmesso"* è una stinga di 8 bit i cui bit vengono trasmessi attraverso il canale ciascuno indipendentemente dagli altri. La stringa dei corrispondenti bit ricevuti è detta *"byte ricevuto"* e può contenere un certo numero k di bit errati (ossia diversi da quelli trasmessi) con k che può assumere naturalmente tutti i valori interi da zero (byte ricevuto corretto) a 8.

d) Assumendo $\alpha = \beta$ (canale cosiddetto *simmetrico*) ed anche $P\{X=0\} = p_0 = ½$, si trovi quale valore debba avere α affinché accada che:
$P\{k=0\} = 10 \cdot P\{k=1\}$ ossia che la probabilità che il byte ricevuto sia privo di errori (byte corretto) sia dieci volte maggiore della probabilità che tale byte contenga un solo errore (in una posizione qualunque).

Quesito A 84 (Soluzione)

a) Gli eventi $\{X=0\}$ (viene trasmesso uno zero) e $\{X=1\}$ (viene trasmesso un uno) rappresentano una partizione dello spazio campione quindi la probabilità di errore $P(\varepsilon)$ si può calcolare applicando il teorema delle probabilità totali:

$$p_e = P\{\varepsilon\} = P\{X \neq Y\} = P\{\varepsilon / X=0\} \cdot P\{X=0\} + P\{\varepsilon / X=1\} P\{X=1\} =$$

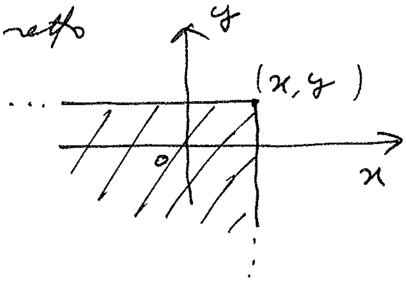
$$= P\{Y=1 / X=0\} \cdot P\{X=0\} + P\{Y=0 / X=1\} \cdot P\{X=1\} =$$

$$= \boxed{\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot (1-p_0)}$$

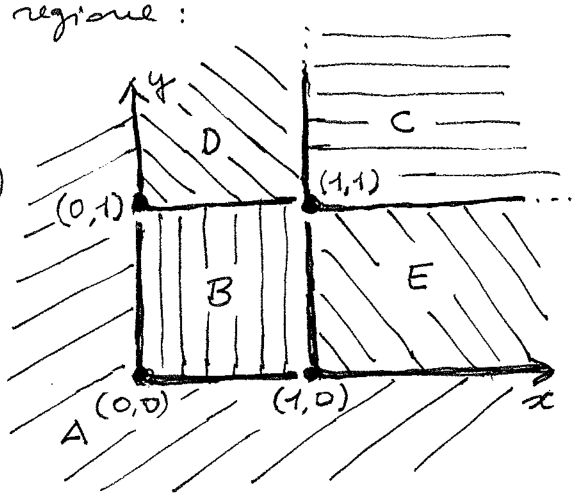
b) le quattro probabilità congiunte richieste $P\{X=i, Y=j\}$ per $i,j \in \{0,1\}$ si possono scrivere (ricordando la definizione di prob. condizionata):

$$\left[\begin{aligned}
&P\{X=0, Y=0\} = P\{Y=0 / X=0\} \cdot P\{X=0\} = (1-\alpha)\cdot p_0 \\
&P\{X=0, Y=1\} = P\{Y=1 / X=0\} \cdot P\{X=0\} = \alpha p_0 \\
&P\{X=1, Y=0\} = P\{Y=0 / X=1\} \cdot P\{X=1\} = \beta \cdot (1-p_0) \\
&P\{X=1, Y=1\} = P\{Y=1 / X=1\} = P\{X=1\} = (1-\beta)(1-p_0)
\end{aligned}\right]$$

c) È noto che è $F_{XY}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$. Questa funzione assume, in ogni punto (x,y) del piano cartesiano, un valore uguale alla massa totale di probabilità che si trova nella regione del piano $\{X \leq x, Y \leq y\}$ che è un angolo retto come in figura $\longrightarrow$



si hanno quindi le seguenti regioni e i corrispondenti valori (costanti) che $F_{XY}(x,y)$ assume in ogni punto della regione:



N.B.!

— Regione A: $(X \leq 0) \cup (Y \leq 0)$

$F_{XY}(x,y) = \boxed{0}$ (nessuna massa di prob.)

— Regione B: $(0 \leq X < 1) \cap (0 \leq Y < 1)$

$F_{XY}(x,y) = P\{X=0, Y=0\} = \boxed{(1-\alpha)\cdot p_0}$

— Regione C: $(X \geq 1) \cap (Y \geq 1)$

$F_{XY}(x,y) = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=1\} = \boxed{1}$

— Regione D: $(0 \leq X < 1) \cap (Y \geq 1)$

$F_{XY}(x,y) = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = (1-\alpha)\cdot p_0 + \alpha p_0 = p_0$

— Regione E: $(X \geq 1) \cap (0 \leq Y < 1)$

$F_{XY}(x,y) = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=0\} = \boxed{(1-\alpha)\cdot p_0 + \beta\cdot(1-p_0)}$

4) Assumendo $\alpha = \beta$ e $p_0 = \frac{1}{2}$ la probabilità di errore diventa:

$$\boxed{p_e = \alpha \cdot p_0 + \beta \cdot (1-p_0) = \alpha \cdot \frac{1}{2} + \alpha\left(1-\frac{1}{2}\right) = \alpha}$$

Le probabilità che il byte ricevuto abbia zero errori $(k=0)$ oppure un errore $(k=1)$ si calcolano rispettivamente come probabilità di avere zero oppure un errore su otto trasmissioni (prove ripetute) – Quindi il valore di α richiesto si trova con i seguenti passaggi:

$$P\{k=0\} = 10 \cdot P\{k=1\}$$

$$\binom{8}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^8 = 10 \cdot \binom{8}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^7$$

$$1 \cdot 1 \cdot (1-\alpha)^{\cancel{8}\,1} = 10 \cdot 8 \cdot \alpha \cancel{(1-\alpha)^7}$$

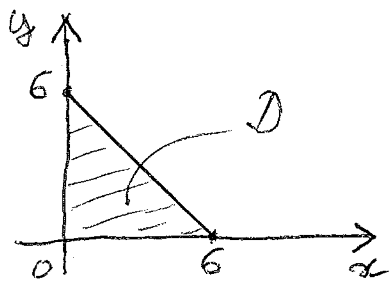
$$(1-\alpha) = 80 \cdot \alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{81} \simeq 0{,}012}$$

Esame di TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A89

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y è costante nel dominio D in figura.
Si calcoli la probabilità dell'evento : $A = \{Y < X^2\}$
Si trovi la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X e se ne tracci un grafico.



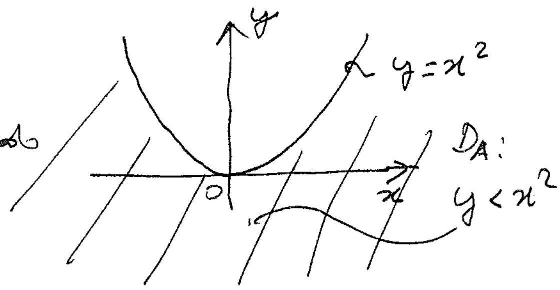
Quesito A89 (Soluzione)

Il valore costante $f_{xy}(x,y) = c$ della densità di probabilità nel dominio D ponendo uguale a 1 il volume sopra l'area D (normalizzazione) ossia:

$$\frac{6^2}{2} \cdot c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{18}$$

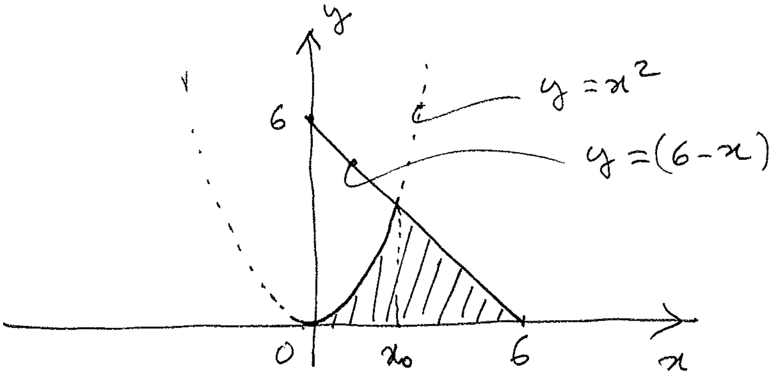
Area triangolo

La regione del piano, D_A, corrispondente all'evento $A = \{Y < X^2\}$ è quella esterna alla parabola $y = x^2$.
La probabilità di A si trova integrando la densità congiunta su D_A ossia:



$$P\{A\} = \iint_{D_A} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

ma data la forma particolarmente semplice di $f_{xy}(x,y)$ nel caso dato la probabilità data dall'integrale doppio (volume) si può calcolare trovando l'area della regione tratteggiata nella figura nella pagina seguente e moltiplicandola per $c = \frac{1}{18}$.



Ossia:

$$P\{A\} = c \cdot \left[\int_0^{x_0} x^2\,dx + \int_{x_0}^{6} (6-x)\,dx \right]$$

Dove il valore di x_0 da usare si ricava come soluzione dell'equazione: $x^2 = 6 - x \longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

ossia:

$$x_0 = \frac{-1 \mp \sqrt{1+4\cdot 6}}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{matrix} \longrightarrow \underline{x_0 = 2} \text{ perché deve essere } 0<x_0<6$$

Quindi la probabilità cercata è:

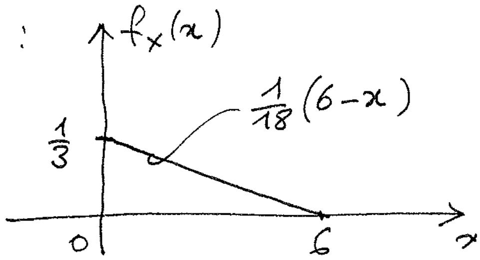
$$\boxed{P\{Y < X^2\} = P\{A\} = \frac{1}{18}\left[\int_0^2 x^2\,dx + \int_2^6 (6-x)\,dx\right] =}$$

$$= \frac{1}{18}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_2^6\right\} = \frac{1}{18}\cdot\left[\frac{8}{3}+8\right] = \frac{1}{18}\cdot\frac{32}{3} = \frac{16}{27} = 0{,}592$$

La densità di probabilità marginale $f_X(x)$ si trova così:

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy} = \begin{cases} \int_0^{6-x} c\cdot dy = \frac{1}{18}\left[y\right]_0^{6-x} = \frac{1}{18}(6-x) & \text{per } 0<x<6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il grafico di $f_X(x)$ è il seguente:



Quesito A105 (Traccia di soluzione)

Data l'indipendenza delle v.a. la loro densità di probabilità congiunta è il prodotto delle densità che risulta essere costante sul rettangolo che ha per vertici i punti (valori in minuti): $(-5,0)$, $(+5,0)$, $(-5,20)$, $(+5,20)$ e nulla altrove. Per la normalizzazione il valore della densità su tale rettangolo è $1/200\ \text{min}^{-2}$

a) L'evento: {non si incontrano} equivale a: {Bianchi arriva dopo le 12:10} ossia: $\{Y > 10\}$, la cui probabilità è chiaramente 1/2 perché la regione (con densità non nulla) corrispondente a tale evento è la metà del rettangolo totale.

b) L'evento: {Bianchi aspetta Rossi} equivale a: {Bianchi arriva prima di Rossi} ossia $\{Y<X\}$ corrispondente al semipiano alla destra della retta $y = x$. In tale semipiano la regione con densità di probabilità non nulla corrisponde al triangolo rettangolo che ha per vertici i punti (0,0), (5,0), (5,5) che ha chiaramente area uguale a 1/16 del rettangolo totale: tale quindi è la probabilità cercata. La probabilità è calcolabile anche come: (area del triangolo)x(1/200), ossia: (5x5/2)x(1/200)=0,0625=1/16.

Esame di TEORIA DEI SEGNALI

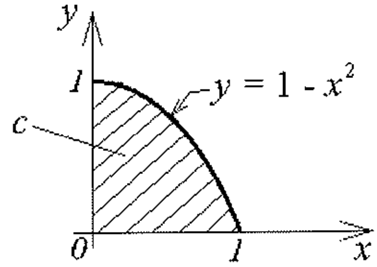
Quesito A112

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante c nel dominio indicato in figura delimitato nel primo quadrante dalla curva $y = 1 - x^2$, ed è nulla altrove.

a) Si trovi il valore di c.

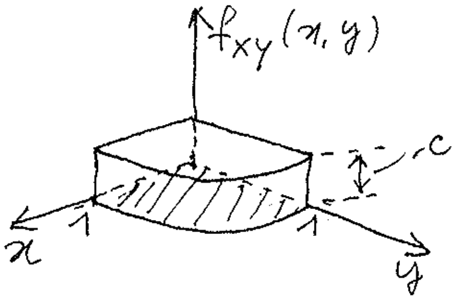
b) Si trovi la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X e se ne tracci un grafico.

c) Si calcoli probabilità dell'evento $\{X + Y < 1\}$



Quesito A112 (Soluzione)

a) Per la normalizzazione, il volume totale contenuto fra la superficie rappresentata da $f_{XY}(x,y)$ e il piano (x,y) deve essere unitario, quindi:



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x^2} c\,dy\,dx = c\int_0^1 \left[y\right]_0^{1-x^2} dx =$$

$$= c\cdot\int_0^1 (1-x^2)\,dx = c\cdot\left\{\left[x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right\} = c\cdot\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}\cdot c = 1$$

da cui: $\boxed{c = \frac{3}{2}}$.

Nel caso in esame (funzione costante su un dominio limitato) tale volume poteva scriversi subito come:

$$c\cdot \text{Area del dominio} = c\cdot\int_0^1 (1-x^2)\,dx = c\cdot\frac{2}{3}.$$

b) La densità $f_X(x)$ (marginale) si trova con l'integrale:

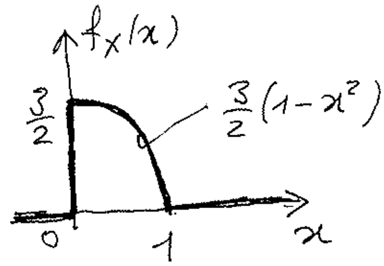
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^1 c\cdot(1-x^2)\,dy =$$

$$= c\cdot[y]_0^{1-x^2} = c\cdot(1-x^2).$$

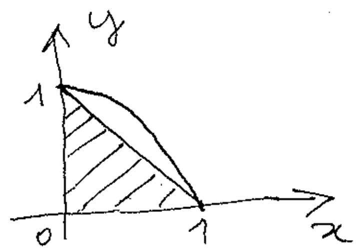
L'espressione trovata è valida per $0<x<1$ perché al di fuori di tale intervallo l'integrale è nullo –

Quindi, ricordando il valore di c trovato:

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & \text{per } 0<x<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$



c) L'evento $\{X+Y<1\}$ è rappresentato dalla zona tratteggiata in figura e la sua probabilità è data dal volume sopra tale zona (prisma):



ossia:

$$\boxed{P\{X+Y<1\} = c\cdot\text{Area triangolo} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}}$$

Data l'uniformità nel dominio totale, la probabilità dell'evento dato poteva calcolarsi ~~co~~ anche come rapporto fra l'area del triangolo (1/2) e l'area totale del dominio delimitato dalla parabola ($\frac{2}{3}$, vedi sopra), quindi:

$$P\{X+Y<1\} = \frac{\text{Area triangolo}}{\text{Area totale}} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}.$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A114

In un semaforo stradale la luce verde e quella rossa si susseguono con regolarità in modo che il periodo del ciclo totale è di $c = 90$ s (si ignori il giallo). La durata del verde sia v e quella del rosso sia r risultando naturalmente: $v + r = c$. Se l'istante di arrivo di un'auto, misurato a partire dall'inizio del verde, è una variabile aleatoria X uniformemente distribuita fra 0 e c si consideri la v.a. Y = "tempo di attesa dell'auto prima di poter passare", assumendo che non vi siano altre auto.

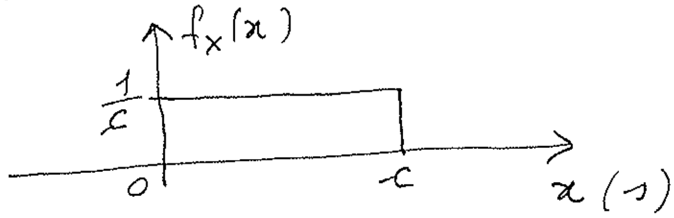
a) Si individui la funzione $y = g(x)$ che lega X a Y e se ne tracci un grafico.

b) Si trovi la densità di probabilità della v.a. Y.

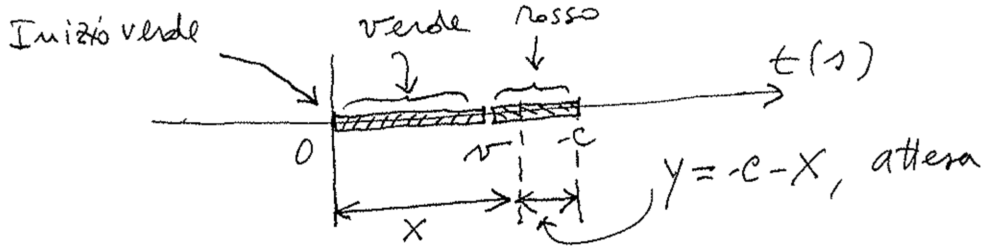
c) Si trovi il tempo medio di attesa (valor medio della v.a. Y) calcolandone poi il valore numerico assumendo $v = 60$ s.

Quesito A114 (Soluzione)

a) Come detto nel testo la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X è uniforme fra 0 e c (istante di fine del ciclo) quindi:

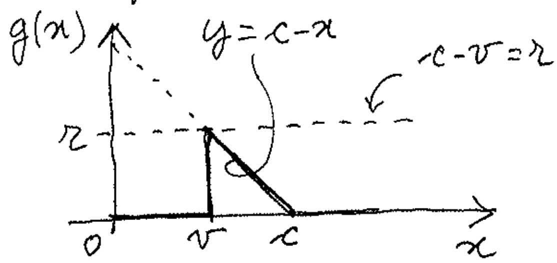


Lo "schema temporale" di un ciclo è:



Il tempo di attesa è nullo se l'auto arriva nell'intervallo in cui la luce è verde, ossia per $0 < X < v$, mentre vale $Y = (c - X)$ se l'auto arriva nell'intervallo in cui la luce è rossa, ossia per $v < X < c$ — Quindi la funzione $y = g(x)$ che lega le due v.a. è la seguente:

$$y = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < v \\ c - x & \text{per } v < x < c \end{cases}$$



Poichè x è sicuramente compresa fra 0 e c, fuori di tale intervallo la $g(x)$ si può lasciare non definita.

b) Per trovare la densità $f_Y(y)$ si può applicare il teorema fondamentale osservando che:

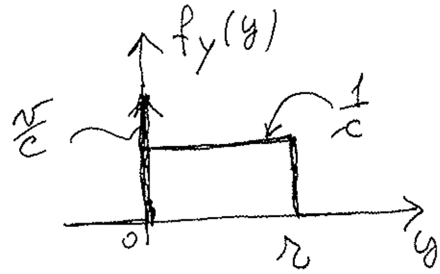
- per i valori di y tali che $y > c - v = r$ e $y < 0$ ogni retta orizzontale di ordinata y non interseca la curva $g(x)$ (si veda il grafico alla pag. precedente) quindi l'equazione $y = g(x)$ non ha soluzioni, quindi in tali intervalli sarà: $f_Y(y) = 0$;
- nell'intervallo $0 < x < v$ la funzione $g(x)$ è costante e vale $g(x) = 0$: si tratta di una "zona piatta" quindi $f_Y(y)$ avrà un impulso per $y = 0$ di area uguale alla probabilità dell'evento: {L'auto arriva quando la luce è verde} $= \{0 < X < v\}$ la cui probabilità, data l'uniformità, è $P\{0 < X < v\} = \frac{c}{v}$;
- nell'intervallo: $0 < y < c - v = r$ l'equazione $y = g(x)$ assume la forma: $y = c - x$ che ha una sola radice: $x_1 = (c - y)$. In quell'intervallo si ha anche: $g'(x) = \frac{d}{dx}(c - x) = -1$, costante, quindi: $|g(x_1)| = |-1| = 1$

Nello stesso intervallo si ha quindi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g(x_1)|} = \frac{f_X(c-y)}{|-1|} = \frac{1/c}{1} = \frac{1}{c} \quad \text{per } 0 < y < r$$

Riassumendo si ha quindi:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{c} & \text{per } 0<y<c-v=r\\ \frac{v}{c}\,\delta(y) & \text{per } y=0\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$



o, più sinteticamente:

$$f_Y(y)=\frac{v}{c}\,\delta(y)+\frac{1}{c}\,\Pi\left(\frac{y-\frac{r}{2}}{r}\right)$$

Verifica di normalizzazione!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy=\underbrace{r\cdot\frac{1}{c}}_{\text{Area rettangolo}}+\underbrace{\frac{v}{c}}_{\text{Area delta}}=\frac{r+v}{c}=\frac{c}{c}=1 \leftarrow \text{o.k.}$$

Con i valori dati $v=60$, $c=90$ si ha: $E\{Y\}=\frac{60-90}{2\cdot 90}=5\,s$

c) Il valor medio di Y si può trovare in vari modi -

- Definizione -

$$\boxed{E\{Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_Y(y)\,dy}=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\left[\frac{v}{c}\,\delta(y)+\Pi\left(\frac{y-\frac{r}{2}}{r}\right)\right]dy=$$

$$=\frac{v}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\delta(y)\,dy+\int_0^r y\cdot\frac{1}{c}\,dy=0+\frac{1}{c}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^r=\frac{r^2}{2c}=\boxed{\frac{(c-v)^2}{2c}}$$

- Teorema dell'aspettazione -

$$E\{Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx=\int_v^c (c-x)\,\frac{1}{c}\,dx=\frac{1}{c}\left[\frac{(c-x)^2}{2(-1)}\right]_v^c=\frac{(c-v)^2}{2c}$$

- Probabilità totali -

Definiti gli eventi (partizione):

$V=\{$L'auto arriva col verde$\}$ e $R=\{$L'auto arriva col rosso$\}$

Si ha $P\{V\}=\frac{v}{c}$ e $P\{R\}=\frac{c-v}{c}$, per l'uniformità -

Si ha quindi:

$$E\{Y\}=E\{Y|V\}\cdot P\{V\}+E\{Y|R\}\cdot P\{R\}=0\cdot\frac{v}{c}+\left(\frac{c-v}{2}\right)\cdot\frac{c-v}{c}=\frac{(c-v)^2}{2c}$$

Dove si è osservato che se l'auto arriva col verde $Y=0$ e quindi $E\{Y|V\}=0$ - Se si arriva col rosso il tempo di attesa risulta uniformemente distribuito fra 0 e $c-v=r$ quindi il v.m. condizionato $E\{Y|R\}$ è a metà dell'intervallo, ossia $E\{Y|R\}=\frac{c-v}{2}$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A50 11/9/12

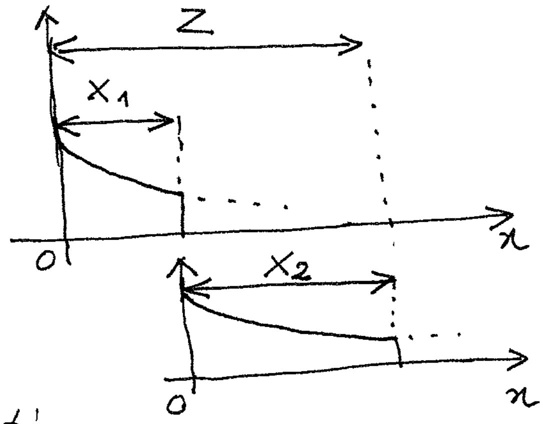
Un satellite per telecomunicazioni ha due trasmettitori i cui tempi di vita sono variabili aleatorie indipendenti con identica densità di probabilità:

$$f_{X1}(x) = f_{X2}(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, u(x) \qquad \text{con } \lambda > 0 .$$

La trasmissione è continua e per essa si utilizza un solo trasmettitore alla volta: il secondo entra in funzione istantaneamente solo quando il primo si guasta.

Si trovi la densità di probabilità della v.a. Z = {tempo di trasmissione del satellite}.

Quesito A50 (Soluzione)



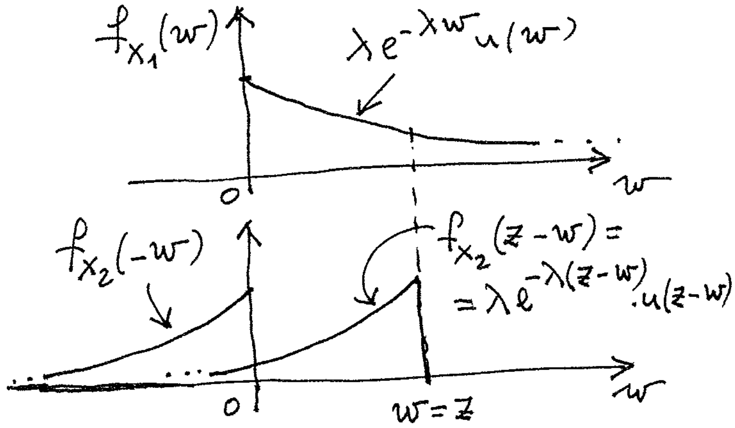
Dalla descrizione si ricava immediatamente (vedi anche le figure):

$$Z = X_1 + X_2$$

per cui, essendo X_1 e X_2 indipendenti:

$$f_Z(z) = f_{X_1}(z) * f_{X_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(w)\cdot f_{X_2}(z-w)\, dw$$

Con l'aiuto delle figure si ricava che, per $z>0$, si può scrivere:



$$f_{X_1}(z) * f_{X_2}(z) =$$

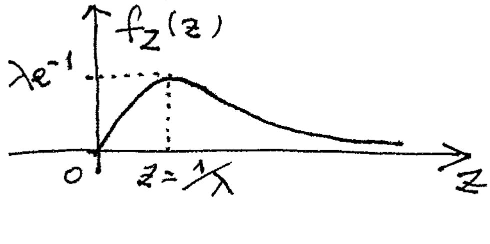
$$= \int_0^z \lambda e^{-\lambda w}\cdot \lambda e^{-\lambda(z-w)}\, dw =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z \cancel{e^{-\lambda w}}\cdot \cancel{e^{\lambda w}}\, dw =$$

$$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda z}\cdot z$$

Poiché la convoluzione è nulla per $z<0$ si può scrivere:

$$\boxed{f_Z(z) = \lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda z}\, u(z)} \rightarrow$$



Esame di TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A61 13/2/13

Le v.a. X e Y sono indipendenti con densità di probabilità, rispettivamente:

$$f_X(x) = \prod\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad ; \qquad f_Y(y) = 2e^{-2y}u(y) \quad .$$

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Z = X + Y$

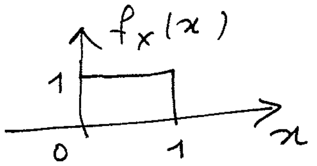
Quesito A61 (Soluzione)

Essendo le v.a. X e Y indipendenti la densità di probabilità della somma è uguale alla convoluzione delle due densità, si ha cioè:

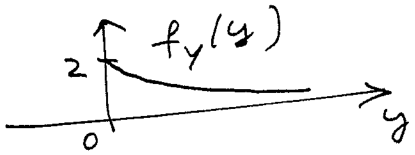
$$f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\tau) f_Y(z-\tau)\, d\tau$$

Le densità nel caso proposto sono:

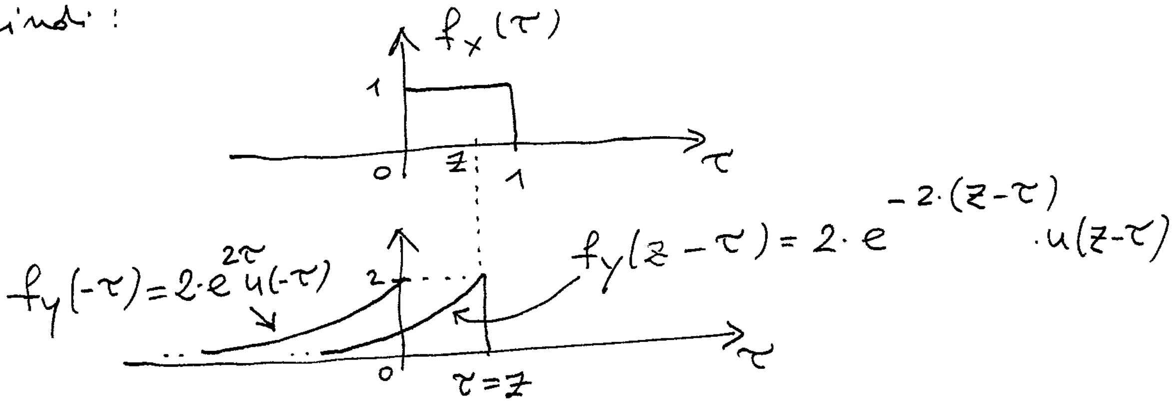
$$f_X(x) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow$$



$$f_Y(y) = 2 \cdot e^{-2y} u(y) \rightarrow$$



E quindi:



Dai grafici si ricava che la convoluzione è nulla per $z<0$, mentre per $z>0$ si hanno due casi:

Caso $\boxed{0 < z < 1}$

$$f_Z(z) = \int_0^z \underset{\substack{\uparrow \\ f_X(\tau)}}{1} \cdot \underbrace{2 \cdot e^{-2(z-\tau)}}_{\substack{\uparrow \\ f_Y(z-\tau)}} d\tau = 2 \cdot e^{-2z} \int_0^z e^{2\tau} d\tau =$$

$$= \cancel{2} \cdot e^{-2z} \left[\frac{e^{2\tau}}{\cancel{2}} \right]_0^z = e^{-2z}\left(e^{2z} - 1\right) = 1 - e^{-2z}, \quad \text{per } 0<z<1$$

Caso $\boxed{z > 1}$

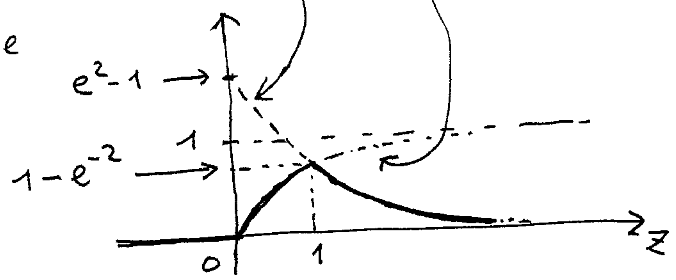
$$f_Z(z) = \int_0^1 1 \cdot 2 \cdot e^{-2\cdot(z-\tau)} d\tau = \cancel{2} \cdot e^{-2z} \left[\frac{e^{2\tau}}{\cancel{2}} \right]_0^1 = e^{-2z}(e^2 - 1)$$

per $z > 1$

Riassumendo:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-2z} & \text{per } 0 < z < 1 \\ e^{-2z}(e^2 - 1) & \text{per } z > 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il grafico è:



{ Verifica di normalizzazione (non richiesto)

$$\int_0^1 (1 - e^{-2z})\, dz = \left[z - \frac{e^{-2z}}{-2} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{e^{-2}}{-2}\right) - \left(0 - \frac{1}{-2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2} \quad (A)$$

$$(e^2 - 1) \cdot \int_1^{+\infty} e^{-2z} dz = (e^2-1) \cdot \left[\frac{e^{-2z}}{-2} \right]_1^{+\infty} = (e^2 - 1) \cdot \frac{0 - e^{-2}}{-2} = \frac{(e^2-1)\cdot e^{-2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2} \quad (B)$$

Sommando (A) e (B): $\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2} e^{-2}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2} e^{-2}} = 1$ }

come atteso

Esame di

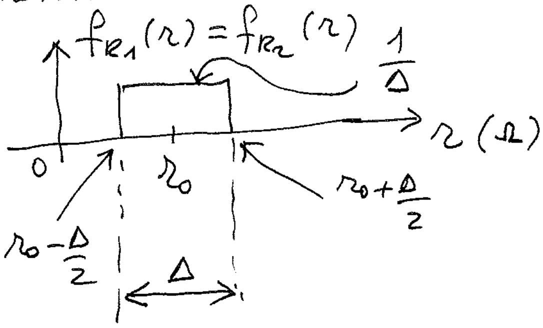
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A86
Una macchina produce resistori le cui resistenze sono variabili aleatorie indipendenti aventi tutte identica distribuzione uniforme fra $r_0 - \Delta/2$ e $r_0 + \Delta/2$. Per realizzare un circuito si prelevano a caso due di tali resistori e si collegano in serie. Si misura la resistenza della serie e se questa si discosta dal valore $2r_0$ per più di a ohm (in più o in meno) il circuito viene scartato.
Detta ps la probabilità che il circuito venga scartato, si trovi il valore di Δ (espresso in funzione degli altri parametri) che renda la probabilità di scarto uguale al 4 % (ossia: $ps = 4 \cdot 10^{-2}$).

Quesito A86 (Soluzione)

Siano R_1 e R_2 le resistenze (variabili aleatorie) dei due resistori collegati in serie. La resistenza totale della serie è quindi la v.a. $R_{TOT} = R_1 + R_2$ la cui densità di probabilità è data dalla convoluzione delle densità di probabilità di R_1 e R_2 perché sono indipendenti. Le due densità sono uguali ed hanno espressione:

$$f_{R_1}(r) = f_{R_2}(r) = \Pi\left(\frac{r - r_0}{\Delta}\right) \cdot \frac{1}{\Delta}$$

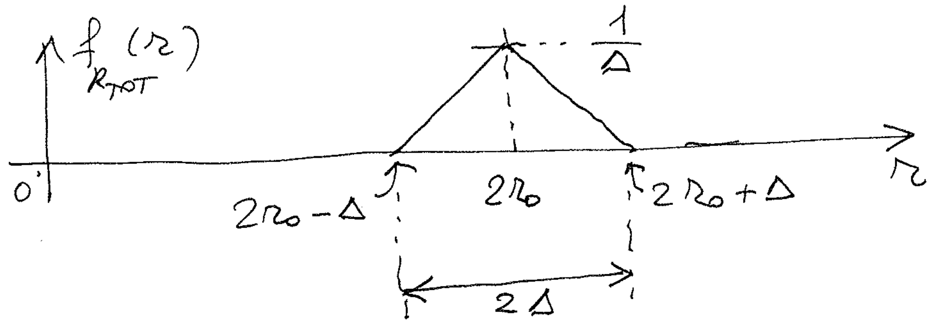


La densità di probabilità di R_{TOT} è quindi

$$f_{R_{TOT}}(r) = f_{R_1}(r) * f_{R_2}(r) = \frac{1}{\Delta^2} \Pi\left(\frac{r - r_0}{\Delta}\right) * \Pi\left(\frac{r - r_0}{\Delta}\right)$$

È noto che la convoluzione di una funzione $\Pi(\cdot)$ con se stessa dà luogo a una funzione $\Lambda(\cdot)$. Si osservi inoltre che il valor medio di R_1 e R_2 è r_0 (per la simmetria di $f_{R_1}(r)$) quindi il valor medio di R_{TOT} deve essere: $E\{R_{TOT}\} = E\{R_1\} + E\{R_2\} = 2r_0$, per la linearità del valor medio. Dalla convoluzione ci si deve quindi attendere una funzione triangolare centrata in $2r_0$. Eseguendo la convoluzione si ottiene infatti:

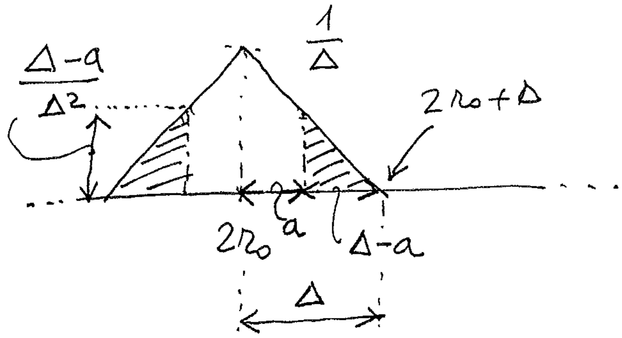
$f_{R_{TOT}}(r) = \frac{1}{\Delta}\Lambda\left(\frac{r-2r_0}{\Delta}\right)$ il cui grafico è:



La probabilità di scarto del circuito si può scrivere

$$p_s = P\{(R_{TOT} < 2r_0 - a) \cup (R_{TOT} > 2r_0 + a)\} =$$

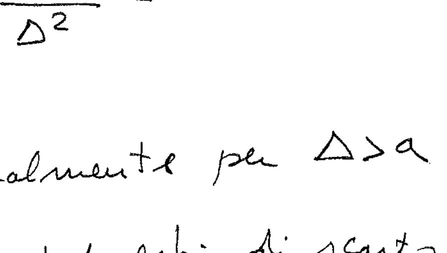
$$= P\{|R_{TOT} - 2r_0| > a\}$$



ed è data dalla somma delle due aree tratteggiate (uguali) in figura.
Dalla geometria elementare (similitudine fra triangoli) si ricava facilmente l'altezza del triangolo tratteggiato: $\left(\frac{\Delta-a}{\Delta^2}\right)$ e quindi la sua area: Area $=\frac{1}{2}(\Delta-a)\frac{(\Delta-a)}{\Delta^2}$.
Quindi infine:

$$p_s = 2\cdot \text{Area} = \frac{(\Delta-a)^2}{\Delta^2}$$ valida naturalmente per $\Delta > a$

perché se $\Delta < a$ (ovvero $a > \Delta$) la probabilità di scarto è nulla (perché $(R_{TOT}-2r_0)$ è sempre minore di a) ↙



Il problema chiede di trovare Δ ("incertezza" che devono avere le resistenze singole) avendo fissato il valore di a (tolleranza massima sul valore di R_{TOT}) e volendo ottenere una data probabilità di scarto ($p_s = 4\cdot 10^{-2} = 4\%$).

Si tratta di ricavare Δ dalla relazione trovata $\left(p_s = \frac{(\Delta - a)^2}{\Delta^2} \right)$ in funzione di a e p_s ossia risolvere l'equazione di secondo grado:

$$\Delta^2 \cdot p_s = (\Delta - a)^2 \longrightarrow \Delta^2 (1 - p_s) - 2a \cdot \Delta + a^2 = 0$$

da cui:

$$\Delta = \frac{2a \mp \sqrt{4a^2 - 4(1-p_s)a^2}}{2 \cdot (1 - p_s)} = a \cdot \frac{1 \mp \sqrt{p_s}}{(1 - p_s)} = \begin{cases} \xrightarrow{-} a \cdot \frac{1}{1+\sqrt{p_s}} < a \\ \xrightarrow{+} a \cdot \frac{1}{1-\sqrt{p_s}} > a \end{cases}$$

Come detto cerchiamo un valore di Δ maggiore di a (altrimenti $p_s = 0$) quindi l'unica radice accettabile è

$$\boxed{\Delta = a \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{p_s}} = a \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{0{,}04}} = a \cdot \frac{1}{1 - 0{,}2} = \frac{5}{4} a = 1{,}25 \cdot a}$$

P. es. se si volesse ottenere $2r_0 = 2000\ \Omega$ con una tolleranza massima $a = 10\ \Omega$ e probabilità di scarto $p_s = 4\%$

Si dovrebbe partire da resistenze con $r_0 = 1000\ \Omega$

e $\Delta = 1{,}25 \cdot a = 1{,}25 \cdot 10 = 12{,}5\ \Omega$ ossia: $r_0 \pm \underbrace{6{,}25\ \Omega}_{\frac{\Delta}{2}}$

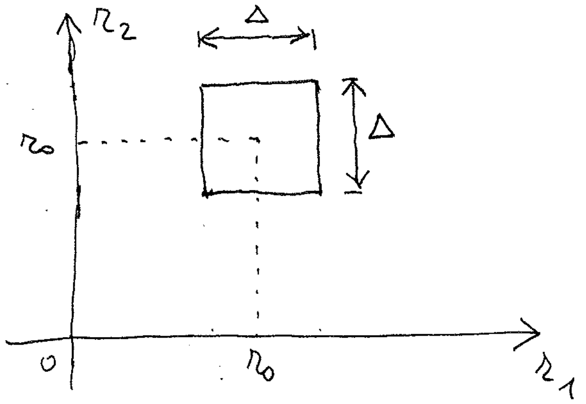
Altro metodo

Avendo a che fare con due v.a. si può risolvere il problema usando la densità di probabilità congiunta di R_1 e R_2 che, essendo indipendenti è:

$$f_{R_1 R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r) \cdot f_{R_2}(r) = \frac{1}{\Delta^2} \Pi\left(\frac{r_1 - r_0}{\Delta}\right) \cdot \Pi\left(\frac{r_2 - r_0}{\Delta}\right)$$

(segue)

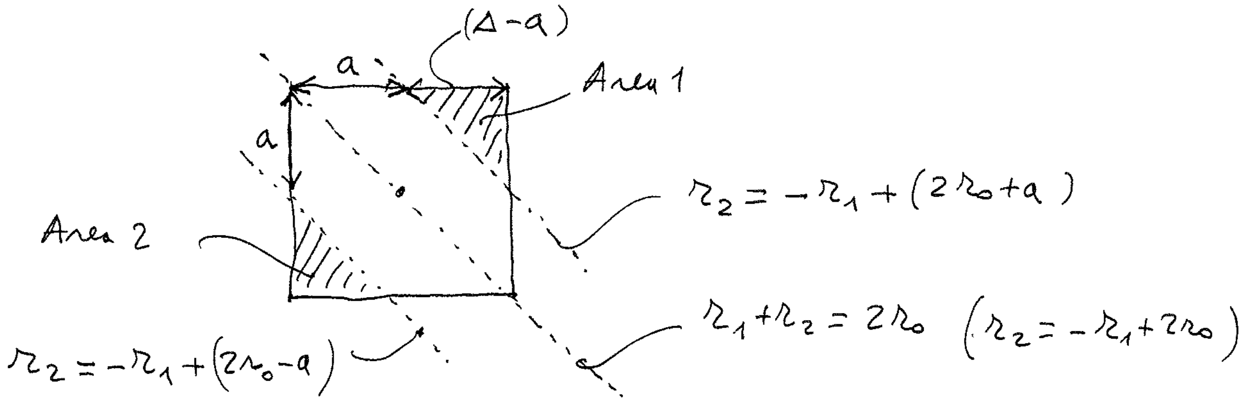
che è costante e di valore $\frac{1}{\Delta^2}$ nel quadrato in figura e nulla altrove



La probabilità che la somma R_1+R_2 si discosti da $2r_0$ per più di a è uguale alla probabilità che la coppia di realizzazioni r_1 e r_2 di R_1 e R_2 appartenga all'unione delle due regioni:

$$\begin{cases} r_1+r_2 > 2r_0+a \longrightarrow r_2 > -r_1+(2r_0+a) \\ r_1+r_2 < 2r_0-a \longrightarrow r_2 < -r_1+(2r_0-a) \end{cases}$$

rette



Le due aree si trovano con la geometria elementare e valgono:

$$\text{Area}_1 = \text{Area}_2 = \frac{1}{2}(\Delta-a)^2$$

Valore della densità congiunta costante nel quadrato.

e la probabilità cercata è:

$$p_S = P\{|R_{TOT}-2r_0|>a\} = 2\cdot\frac{1}{\Delta^2}\,\frac{1}{2}(\Delta-a)^2 = \frac{(\Delta-a)^2}{\Delta^2}$$

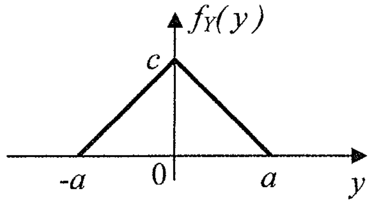
come trovato col metodo precedente.

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A91 *21/07/14*

La v.a. X è discreta e può assumere i valori $+1$ e -1 ciascuno con probabilità 1/2. La v.a. Y, è indipendente da X, è continua e ha densità di probabilità come in figura (con $a > 0$).



Si consideri la v.a. :

$$Z = X + Y$$

a) Si calcoli la probabilità che il segno di Z sia opposto al segno di X, assumendo $a = 3$.

b) Si dica per quali valori di a (se esistono) la probabilità cercata è nulla.

{Per il calcolo richiesto non si trovino densità di probabilità congiunte né la densità di probabilità di Z. Si ricordi che la v.a. è discreta e si usi il teorema delle probabilità totali.}

Quesito A91 (Soluzione)

a) Si cerca la probabilità $P\{(X+Y) \text{ e } X \text{ discordi}\}$.
Sapendo che X è discreta, applicando il teorema delle probabilità totali si può scrivere:

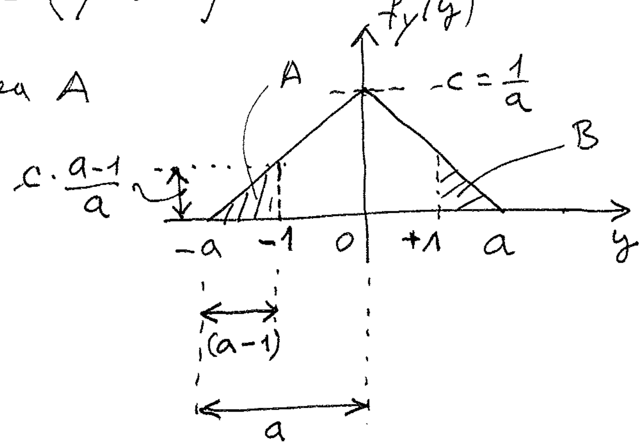
$$P\{(X+Y) \text{ e } X \text{ discordi}\} = P\{(X+Y) \text{ e } X \text{ discordi} \mid X = +1\} \cdot P\{X = +1\} +$$
$$+ P\{(X+Y) \text{ e } X \text{ discordi} \mid X = -1\} \cdot P\{X = -1\} =$$

$$= P\{1+Y<0 \mid X=+1\} \cdot \frac{1}{2} + P\{-1+Y>0 \mid X=-1\} \cdot \frac{1}{2}$$

Essendo X e Y indipendenti si ha:

$$P\{1+Y<0 \mid X=1\} = P\{1+Y<0\} = P\{Y<-1\}$$

Tale probabilità è uguale all'area A tratteggiata in figura che dalla geometria elementare risulta essere:



$$A = \frac{1}{2}(a-1) \cdot c\,\frac{(a-1)}{a} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \quad \text{per } a>1$$

mentre risulta $A = 0$ per $a<1$ – Nel calcolo si è posto $c = \frac{1}{a}$ come necessario per la normalizzazione –

Analogamente è:

$$P\{-1+Y>0 \mid X=+1\} = P\{Y>1\}$$

che è uguale all'area B in figura, a sua volta uguale all'area A già trovata. Quindi in definitiva

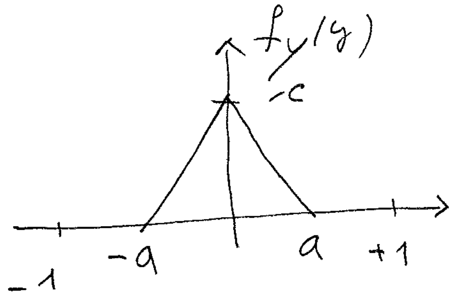
$$\boxed{P\{\overset{Z}{(X+Y)} \text{ e } X \text{ discordi}\} =}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2}_{\text{Area A}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{P\{X=+1\}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2}_{\text{Area B}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{P\{X=-1\}} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2}$$

Nel caso proposto $(a=3)$ la probabilità trovata vale:

$$\boxed{p = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \cong 0{,}22}$$

b) La probabilità cercata è nulla per i valori di a per cui le aree A e B sono nulle ossia $\boxed{\text{per } 0<a<1}$



ESAME DI TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A120

La trasmissione di un simbolo binario (bit) attraverso un sistema di comunicazione digitale ("canale") può essere schematizzata come un esperimento casuale consistente nella scelta casuale dall'alfabeto binario {0,1} di un "bit trasmesso X", la sua trasmissione attraverso il canale e l'osservazione del corrispondente "bit ricevuto Y". A causa di disturbi di trasmissione può accadere che il bit ricevuto risulti diverso da quello trasmesso: in tal caso si è verificato l'evento $\mathcal{E} = \{$Errore di trasmissione sul bit$\} = \{X \neq Y\}$, la cui probabilità $P_1 = P(\mathcal{E})$ è detta "probabilità di errore sul bit".

Un "byte trasmesso" è una stinga di 8 bit i cui bit vengono trasmessi attraverso il canale ciascuno indipendentemente dagli altri. La stringa dei corrispondenti bit ricevuti è detta "byte ricevuto" e può contenere un certo numero k di bit errati (ossia diversi da quelli trasmessi) con k che può assumere naturalmente tutti i valori interi da $k = 0$ (byte ricevuto corretto) a $k = 8$.
a) Si trovi quale valore debba avere la probabilità di errore sul bit, P_1, affinché accada che:
$P\{k = 0\} = 10 \cdot P\{k = 1\}$ ossia che la probabilità che il byte ricevuto sia privo di errori (byte corretto) sia dieci volte maggiore della probabilità che tale byte contenga un solo errore (in una posizione qualunque).
b) Col valore di P_1 trovato si calcoli la probabilità P_B di errore sul byte, ossia la probabilità che il byte ricevuto contenga almeno un errore.

Quesito A120 (Soluzione)

La trasmissione di un byte può essere schematizzata come la ripetizione per $n=8$ volte della trasmissione di un singolo bit. Il problema è quindi di prove ripetute dove il "successo" è il verificarsi di un errore nella trasmissione del singolo bit e la "probabilità di successo" è P_1 = "probabilità di errore sul bit".

a) La probabilità di avere $k=0$ errori su $n=8$ bit trasmessi è:

$$P\{k=0\} = \binom{8}{0} P_1^0 (1-P_1)^8$$

e la probabilità di avere un solo errore, ossia $k=1$, è:

$$P\{k=1\} = \binom{8}{1} P_1^1 (1-P_1)^7 .$$

Si cerca il valore di P_1 tale che $P\{k=0\} = 10 \cdot P\{k=1\}$, valore che si ricava dall'equazione:

$$\underbrace{\binom{8}{0}}_{=1} \underbrace{P_1^0}_{=1} (1-P_1)^{\cancel{8}\,1} = 10 \cdot \underbrace{\binom{8}{1}}_{=8} P_1^1 \cancel{(1-P_1)^7}$$

ossia: $(1-P_1) = 80 \cdot P_1$ da cui: $\left[P_1 = \frac{1}{81} \simeq 0,012 \right]$.

{Si osservi che per poter semplificare dividendo per $(1-P_1)^7$, come fatto, occorre che sia $(1-P_1) \neq 0$ escludendo in tal modo la soluzione $P_1 = 1$ che però non ha significato pratico perché corrisponde al caso di errore certo su tutti i bit trasmessi}.

b) La probabilità cercata:

$P_B = P\{\text{Byte errato}\} = P\{\text{Almeno un bit errato su } n=8 \text{ bit}\}$

si calcola facilmente così:

$$P_B = 1 - P\{\text{Byte corretto}\} = 1 - P\{k=0\} =$$

$$= 1 - \left[\binom{8}{0} P_1^0 (1-P_1)^8\right] = 1 - (1-P_1)^8 =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{81}\right)^8 \cong \boxed{0{,}0946}$$

Si osservi che la probabilità di errore sul byte, $P_B \simeq 0{,}0946$ è circa 7,9 volte maggiore della probabilità di errore sul singolo bit, $P_1 \simeq 0{,}012$.

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A60 13/2/13

I cioccolatini di un certo tipo sono venduti singolarmente ed una frazione p di essi $(0 < p < 1)$ contiene un biglietto che dà diritto a sceglierne un altro gratis dello stesso tipo.

a) Definita la v.a. N = {Numero di cioccolatini che si ottengono acquistandone uno}, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N, ossia la probabilità: $p_n = P\{N = n\}$, per ogni n intero positivo. *{Facoltativo ma utile: verificare la condizione di normalizzazione}*

b) Si calcoli il valore medio della v.a. N sopra definita, in funzione di p. Si dica poi quanto dovrebbe valere p per avere un valor medio uguale a 2. {Può essere utile ricordare che $n \cdot x^{n-1} = D[x^n]$}.

c) Se cinque amici acquistano un cioccolatino ciascuno, si trovi la probabilità P_A che due (soli) di essi ottengano più di un cioccolatino, assumendo $p = 0{,}2$.

Quesito A60 (Soluzione)

Si può assumere che la probabilità di scegliere un cioccolatino che dà diritto al premio sia uguale a p.

a) Il numero di cioccolatini ottenuti acquistandone uno è uguale a n se quello acquistato dà diritto al premio, se quello scelto come premio dà ancora diritto al premio e così via per $(n-1)$ cioccolatini seguiti da un n-esimo cioccolatino normale - Assumendo che le scelte siano indipendenti si ha quindi:

$$p_n = P\{N=n\} = \underbrace{p \cdot p \cdots p}_{(n-1)} \cdot (1-p) = \boxed{p^{n-1} \cdot (1-p) \quad \text{per } n=1,2\cdots}$$

b) Il valor medio di N è, dalla definizione:

$$\boxed{E\{N\}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot p^{n-1}(1-p) = (1-p) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dp}\left[p^n\right] =$$

$$= (1-p) \cdot \frac{d}{dp}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} p^n\right] = (1-p) \cdot \frac{d}{dp}\left[-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n\right] =$$

$$= (1-p)\frac{d}{dp}\left[-1 + \frac{1}{1-p}\right] = \boxed{(1-p)\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{q}}$$

Dove è stato posto $q \triangleq (1-p)$.

Il risultato doveva essere atteso trattandosi di una v.a. geometrica di parametro q. (Vedi il documento:

"V.a. discrete notevoli: medie, varianze, normalizzazione")

c) La probabilità che una persona ottenga più di un cioccolatino è uguale alla probabilità che il primo cioccolatino (quello acquistato) dia diritto al premio: tale probabilità è uguale a p — Siamo quindi in un caso di prove ripetute con probabilità di successo p -

Si ha allora:

$$\boxed{P_A = \text{Prob}\{2 \text{ successi in } 5 \text{ prove}\} = \binom{5}{2} p^2 \cdot (1-p)^{5-2}}$$

Assumendo poi $p = 0{,}2$ si ha:

$$\boxed{P_A = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 \cong 0{,}205}$$

Verifica di normalizzazione (Facoltativa) -

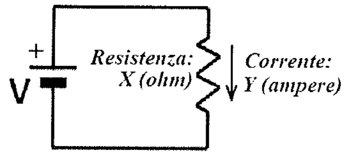
$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1}(1-p) = (1-p) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} = (1-p) \cdot \frac{1}{(1-p)} = 1} \text{ o.k.}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A121

La resistenza di un certo tipo di resistori è una variabile aleatoria X uniformemente distribuita fra 100 e 200 ohm. Si sceglie a caso uno di tali resistori e lo si inserisce nel circuito in figura dove la batteria ha una tensione costante di V volt.



a) Si trovi la densità di probabilità $f_Y(y)$ della v.a.:
Y={Corrente che circola nel resistore}.

b) Si esegue il seguente esperimento casuale: scelto a caso uno dei resistori sopra descritti lo si inserisce nel circuito precedente dove però la batteria è stata scelta a caso fra due possibili, una con tensione $V_1 = 20$ volt e l'altra con tensione $V_2 = 25$ volt. Si misura quindi la corrente Y che risulta essere di 150 mA.
Si dica, giustificando la risposta, se sia più probabile che la batteria sia da 20 o da 25 volt.

c) *Facoltativo:* si calcolino le due probabilità da confrontare.

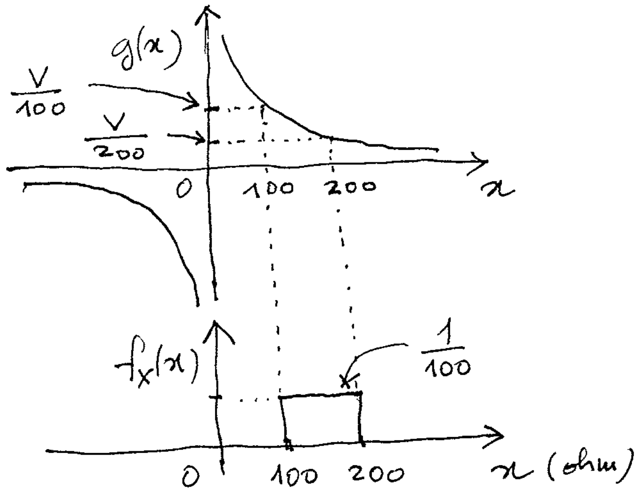
Quesito A121 (Soluzione)

[Si veda anche il Quesito A45]

a) La v.a. Y (corrente) è funzione della v.a. X (resistenza), si ha cioè: $Y = g(X)$ ed è: $y = g(x) = \frac{V}{x}$ A (con V in volt e x in ohm).

Per trovare $f_Y(y)$ si può usare il teorema fondamentale osservando che la funzione $g(x) = \frac{V}{x}$ ha grafico come in figura e che la sua derivata è:

$$g'(x) = -\frac{V}{x^2} .$$



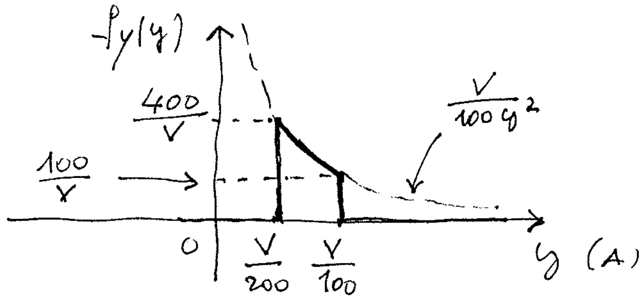
La densità di probabilità della X è:

$$f_X(x) = \frac{1}{100}\Pi\left(\frac{x-150}{100}\right) \text{ ohm}^{-1} \rightarrow$$

L'equazione $y = \frac{V}{x}$ ha un'unica soluzione per $y \neq 0$ (il valore $y=0$ si avrebbe solo per $V=0$, caso particolare che escludiamo) che è la seguente: $x_1 = \frac{V}{y}$, quindi applicando il teorema fondamentale, si ha:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{\frac{1}{100}\Pi\left(\frac{V/y - 150}{100}\right)}{\left|-\frac{V}{(V/y)^2}\right|} = \begin{cases} \frac{V}{100}\cdot\frac{1}{y^2} & \text{per } \frac{V}{200} < y < \frac{V}{100} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

da cui il grafico:



b) Definiti gli eventi:

$V_1 = \{V = V_1 = 20\,V\}$; $V_2 = \{V = V_2 = 25\,V\}$

e detto y_0 il valore di corrente misurato:

$y_0 = 150\,mA = 0{,}15\,A$, si devono confrontare le seguenti probabilità condizionate, ricordando la formula di Bayes mista:

$$P(V_1 \mid Y = y_0) = \frac{f_Y(y_0 \mid V_1) \cdot P(V_1)}{f_Y(y_0)}$$

e

$$P(V_2 \mid Y = y_0) = \frac{f_Y(y_0 \mid V_2) \cdot P(V_2)}{f_Y(y_0)}$$

Data l'uguaglianza: $P(V_1) = P(V_2) = \frac{1}{2}$, ricavabile dal testo, essendo uguali anche i denominatori, il confronto si può limitare alle quantità:

$$f_Y(y_0 \mid V_1) = f_Y(y_0)\Big|_{V=V_1} = \frac{V_1}{100}\,\frac{1}{y_0^2} = \frac{20}{100}\cdot\frac{1}{(0{,}15)^2} \qquad (1)$$

e

$$f_Y(y_0 \mid V_2) = f_Y(y_0)\Big|_{V=V_2} = \frac{V_2}{100}\cdot\frac{1}{y_0^2} = \frac{25}{100}\cdot\frac{1}{(0{,}15)^2}$$

da cui risulta immediato che la seconda quantità è maggiore della prima e di conseguenza <u>è più probabile che la ~~p.~~ batteria sia quella con $V = V_2 = 25\,V$</u>.

Si noti che l'uso delle espressioni in (1) è corretto perché le diseguaglianze $\frac{V}{200} < y_0 < \frac{V}{100}$ sono soddisfatte con $y = y_0 = 150\,mA$ sia per $V = V_1 = 20\,V$ sia per $V = V_2 = 25\,V$.

c) <u>Facoltativo</u> – Per calcolare le due probabilità da confrontare occorre calcolare il denominatore $f_Y(y_0)$ per mezzo, p.es. del teorema delle prob. totali:

$$f_Y(y_0) = f_Y(y_0 \mid V_1)\,P(V_1) + f_Y(y_0 \mid V_2)\cdot P(V_2) = \frac{\overset{20}{V_1}}{100}\cdot\frac{1}{y_0^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\overset{25}{V_2}}{100}\,\frac{1}{y_0^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{45}{100}\cdot\frac{1}{y_0^2}\cdot\frac{1}{2}$$

da cui:

$$\boxed{P(V_1 \mid Y = y_0) = \frac{\frac{20}{100}\cdot\frac{1}{y_0^2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{45}{100}\cdot\frac{1}{y_0^2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}}$$ e l'altra: $$\boxed{P(V_2 \mid Y = y_0) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}}.$$