Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A13 2/12/1010

Si considerino due eventi mutuamente esclusivi di probabilità non nulla in un generico spazio campione S. Si dica quale delle seguenti affermazioni relativa ai due eventi è vera, giustificando la risposta: a) sono sempre indipendenti; b) non sono mai indipendenti; c) possono essere o non essere indipendenti a seconda dei casi.

Quesito A13 - (Soluzione)

Due eventi sono mutuamente esclusivi se è vera la seguente:

$$AB = \phi, \quad \text{da cui:} \quad P(AB) = 0. \qquad (1)$$

L'indipendenza richiede che sia:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \qquad (2)$$

Se le due probabilità $P(A)$ e $P(B)$ sono diverse da zero, come detto nel testo, la sussistenza della (1) esclude quella della (2), quindi è vera l'affermazione b).

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A98

Certi pezzi meccanici subiscono due lavorazioni indipendenti da parte di due macchine distinte A e B.
La macchia A introduce difetti nel 5% dei pezzi lavorati.

a) Sapendo che risulta difettoso il 7% dei pezzi finali (ossia che hanno subito entrambe le lavorazioni) si calcoli il valore della probabilità $P(D_B)$ che la macchina B introduca difetti.
b) Se un pezzo finale scelto a caso risulta difettoso, si calcoli la probabilità che esso abbia subito difetti da entrambe le macchine.

Per lo svolgimento si usino i seguenti eventi:
D_A = { La macchina A ha introdotto un difetto }
D_B = { La macchina B ha introdotto un difetto }
D = { Il pezzo finale è difettoso }
{Suggerimento: per prima cosa si esprima D utilizzando D_A e D_B }

Quesito A98 (Soluzione)

L'evento D = {Il pezzo finale è difettoso} si può scrivere così:

$$D = D_A \cup D_B \, .$$

a) Osservando che D_A e D_B non sono mutuamente esclusivi si ha:

$$P(D) = P(D_A) + P(D_B) - P(D_A D_B) \, .$$

Si può assumere indipendenza fra D_A e D_B essendo i difetti causati da macchine distinte – Pertanto:

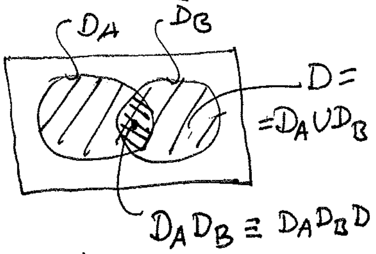
$$P(D) = P(D_A) + P(D_B) - P(D_A) \cdot P(D_B) = P(D_A) + P(D_B)\left[1 - P(D_A)\right]$$

da cui la probabilità cercata, $P(D_B)$, risulta essere:

$$\boxed{P(D_B) = \frac{P(D) - P(D_A)}{1 - P(D_A)} = \frac{0{,}07 - 0{,}05}{1 - 0{,}05} = 0{,}02105 \simeq 2{,}1\%}$$

b) Si cerca: $\boxed{P(D_A D_B | D)} = \dfrac{P(D_A D_B D)}{P(D)} = \dfrac{P(D_A D_B)}{P(D)} =$

$$= \frac{P(D_A) \cdot P(D_B)}{P(D)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}02105}{0{,}07} \simeq 0{,}015 = \boxed{1{,}5\%}$$



Si osservi che la probabilità trovata (condizionata a sapere che il pezzo è difettoso) è molto maggiore della prob. di trovare un pezzo doppiamente difettoso in assoluto, che è: $P(D_A D_B) = P(D_A) \cdot P(D_B) \simeq 0{,}001 = 0{,}1\%$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A53
Il sig. Rossi teme di avere una certa malattia, pertanto si sottopone a un test diagnostico che ha le seguenti caratteristiche:

$P(R^c \mid M) = 10^{-2}$ (Prob. di falso negativo)
$P(R \mid M^c) = 6 \cdot 10^{-2}$ (Prob. di falso positivo)

dove R ed M sono i seguenti eventi:

R = {Il test rivela presenza di malattia} (ossia il test è positivo)
M = {La malattia è presente}.

Il test del sig. Rossi risulta positivo, ma il medico curante lo rassicura: "Sì, il test è positivo, ma nonostante ciò lei ha l'80% di probabilità di essere sano".
2a) Si calcoli la probabilità che un individuo scelto a caso fra la popolazione sia affetto dalla malattia (ovvero l'incidenza della malattia sulla popolazione).
[*Facoltativo*: alla luce del risultato si commenti l'affermazione del medico, apparentemente paradossale.]
2b) Per sicurezza il test viene ripetuto (in modo indipendente) e il risultato è nuovamente positivo. Qual è la probabilità che il sig. Rossi sia effettivamente malato dato il doppio test positivo?

Quesito A53 (Soluzione)

Dal testo si ricavano direttamente le seguenti probabilità:

$$P(\bar{R}|M) = 10^{-2} \quad \text{da cui:} \quad P(R|M) = 1 - P(\bar{R}|M) = 0{,}99$$

$$P(R|\bar{M}) = 6 \cdot 10^{-2} \quad \text{da cui:} \quad P(\bar{R}|\bar{M}) = 1 - P(R|\bar{M}) = 0{,}94 \quad .$$

Dalle parole del medico si ricava la probabilità che una persona qualsiasi (il sig. Rossi) non abbia la malattia (sia sano) nel caso in cui il test sia risultato positivo, ossia la seguente probabilità condizionata:

$$P(\bar{M}|R) = 0{,}8 \quad \text{da cui} \quad P(M|R) = 1 - P(\bar{M}|R) = 0{,}2 \qquad (1)$$

2a) Con questi dati si chiede di calcolare la probabilità che la malattia sia presente in una persona qualsiasi ossia di calcolare $P(M)$.

Come sempre i modi di risolvere il problema possono essere più di uno - Un modo è il seguente:

Applicando la formula di Bayes alla (1) si ha:

$$P(M/R) = \frac{P(R|M)\cdot P(M)}{P(R)} = 0{,}2 \qquad (2)$$

Poiché $P(R|M) = 0{,}99$ è data, si tratta di esprimere $P(R)$ in funzione di $P(M)$ e di ricavare quest'ultima dalla (2). Dal teorema delle probabilità totali si ha:

$$P(R) = P(R|M)\cdot P(M) + P(R/\bar{M})\,[1 - P(M)] =$$

$$= 0{,}99 \cdot P(M) + 6\cdot 10^{-2}\cdot[1 - P(M)]$$

Quindi dalla (2):

$$\frac{0{,}99\cdot P(M)}{0{,}99\cdot P(M) + 6\cdot 10^{-2}\,[1 - P(M)]} = 0{,}2$$

$$0{,}99\cdot P(M) = 0{,}2\cdot 0{,}99\cdot P(M) + 0{,}2\cdot 6\cdot 10^{-2} - 0{,}2\cdot 6\cdot 10^{-2}\cdot P(M)$$

$$\boxed{P(M) = \frac{\overbrace{0{,}2\cdot 6\cdot 10^{-2}}^{0{,}012}}{\underbrace{0{,}99 - 0{,}2\cdot 0{,}99 + 0{,}2\cdot 6\cdot 10^{-2}}_{0{,}804}}} \simeq 0{,}015 = \boxed{1{,}5\cdot 10^{-2}} = \frac{1}{67} \qquad (3)$$

Un altro modo è il seguente - Si calcoli $P(M)$ applicando il teorema delle probabilità totali riconoscendo via via i dati ricavabili dal testo - Osservando inoltre che tali dati sono quasi tutti probabilità condizionate aventi M o $\bar{M}$ a destra del condizionamento, conviene usare la formula di Bayes per fare comparire probabilità condizionate di quel tipo.

Le uniche probabilità ricavabili dal testo aventi R o $\bar{R}$ a destra del condizionamento sono $P(\bar{M}|R) = 0{,}8$ e quindi $P(M|R) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ ricavate dal commento del medico –

Quindi:

$$P(M) = P(M|R) \cdot P(R) + P(M|\bar{R}) \cdot P(\bar{R}) =$$

$$= 0{,}2 \cdot P(R) + \frac{P(\bar{R}|M) \cdot P(M)}{\cancel{P(\bar{R})}} \cdot \cancel{P(\bar{R})} = 0{,}2 \cdot P(R) + 10^{-2} P(M)$$

Come nel primo modo, esprimendo $P(R)$ in funzione di $P(M)$ si ottiene un'equazione in tale incognita facilmente risolubile – Essendo quindi:

$$P(R) = 0{,}99 \cdot P(M) + 6 \cdot 10^{-2} [1 - P(M)]$$

si ha:

$$P(M) = 0{,}2 [0{,}99 \cdot P(M) + 6 \cdot 10^{-2} - 6 \cdot 10^{-2} P(M)] + 10^{-2} P(M)$$

da cui si arriva nuovamente alla (3).

Commento

Il risultato paradossale (ossia anti-intuitivo, apparentemente strano) è che pur essendo il test molto affidabile (prob. di falso positivo e falso negativo molto basse) quando esso rivela malattia (test positivo), nella grande maggioranza dei casi (80%) sbaglia.

Alla luce del risultato trovato si scopre che ciò è dovuto alla bassa incidenza della malattia sulla popolazione ($P(M) = 1{,}5 \cdot 10^{-2} = 1{,}5\%$) molto più bassa della probabilità di falso positivo ($P(R|\bar{M}) = 6 \cdot 10^{-2} = 6\%$) –

Al limite se la malattia non esistesse ($P(M)=0$) l'80% di errori diventerebbe il 100% infatti tutti i test positivi (che sarebbero il 6% dei test eseguiti) sarebbero dovuti a falsi positivi -

2b) Si cerca ora la probabilità $P(M|R_1R_2)$ essendo

$R_1R_2 = \{$Risultato positivo in due esecuzioni indipendenti del test **sulla stessa persona**$\}$.

Quindi (da Bayes):

$$P(M|R_1R_2) = \frac{P(R_1R_2|M)\cdot P(M)}{P(R_1R_2)}$$

dove (Prob. totali):

$$P(R_1R_2) = P(R_1R_2|M)\cdot P(M) + P(R_1R_2|\overline{M})\cdot P(\overline{M})$$

Per l'indipendenza dei test (nel condizionamento ad M):

$$P(R_1R_2|M) = P(R_1|M)\cdot P(R_2|M) = [P(R|M)]^2 = 0{,}99^2$$

e analogamente:

$$P(R_1R_2|\overline{M}) = [P(R|\overline{M})]^2 = (6\cdot 10^{-2})^2$$

Quindi:

$$P(R_1R_2) = (0{,}99)^2\cdot 0{,}015 + (6\cdot 10^{-2})^2[1-0{,}015] \simeq 0{,}0182$$

ed infine

$$\boxed{P(M|R_1R_2) = \frac{(0{,}99)^2\cdot 0{,}015}{0{,}0182} \simeq 0{,}801 \simeq 80\%}$$

Con il secondo test positivo la probabilità di essere malato dello sfortunato sig. Rossi passa dal 20% all'80% -

Di fatto il test ripetuto equivale ad un unico test con probabilità di falso positivo:

$\mathbb{P}(R_1 R_2 | \bar{M}) = [\mathbb{P}(R | \bar{M})]^2 = (6 \cdot 10^{-2})^2 = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$

molto minore di $\mathbb{P}(M) = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$, quindi affidabile anche con incidenza così bassa -