Esercizio preso da un esame

Un filtro avente risposta impulsiva h(t) = $-2B\ sinc^2(Bt)\ \sin(2\pi Bt)$ è connesso in cascata ad un filtro passa-basso ideale di banda monolatera B.

Valutare la risposta impulsiva al gradino unitario dell'intero sistema, ovvero, trovare y(t) quando x(t) = u(t).

LO SCHEMA A BLOCCHI È IL SEGUENTE

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{X(t)} \boxed{\text{P. BASSO}}_{h_{LP}} \longrightarrow Y(t)$$

IL PRIMO PASSAGGIO CHE DOBBIAMO FARE È TROVARE

$$h(t) * h_{LP}(t) \equiv H(f) \cdot H_{LP}(F)$$

CIOÈ IL SISTEMA TOTALE

$$H_{LP}(f) = \Pi\left(f/2B\right)$$

↳ PERCHÉ B È LA BANDA MONOLATERA

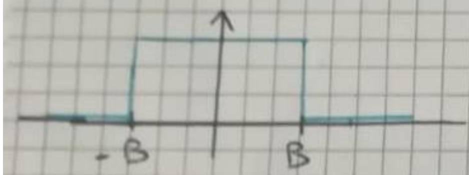
$$H(f) = F\left[-2B\,\text{sinc}^2(Bt) \cdot \sin(2\pi Bt)\right]$$

$$H(f) = -2B \cdot \frac{1}{B} \Lambda(f/B) \cdot \left[\frac{j}{2}\delta(f+B) - \frac{j}{2}\delta(f-B)\right]$$

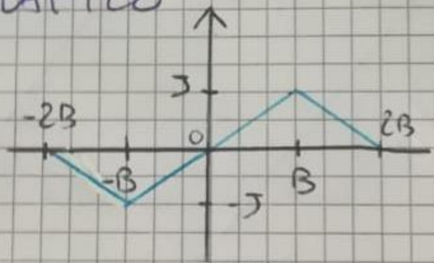
$$= -2 \cdot \frac{j}{2} \Lambda(f/B) \cdot \left[\delta(f+B) - \delta(f-B)\right]$$ PROPRIETÀ $\delta(f)$

$$H(f) = -j\,\Lambda\left(\frac{f+B}{B}\right) + j\,\Lambda\left(\frac{f-B}{B}\right)$$

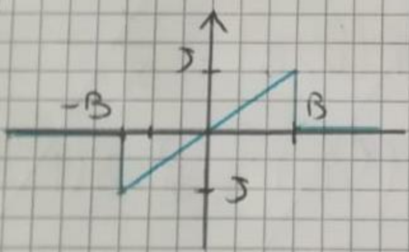
DISEGNAMO IL GRAFICO



$H_{LP}(f)$



$H(f)$



$$H_{LP}(f) \cdot H(f) = -j\,\Lambda\left(\frac{f+B}{B}\right) + j\,\Lambda\left(\frac{f-B}{B}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$X(f) = F[u(t)] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

$$Y(f) = \left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right] \underbrace{H_{LP} \cdot H(f)}$$

ESSENDO NULLA IN $f=0$ (DAL GRAFICO

VUOL DIRE CHE IN $f=0$ AVRÒ

$$\frac{1}{2}\delta(f) \cdot 0 = 0$$

DUNQUE $\frac{1}{2}\delta(f)$ SI PUÒ ELIDERE

$$= \frac{1}{j2\pi f} \quad H_1(f) \cdot H(f)$$

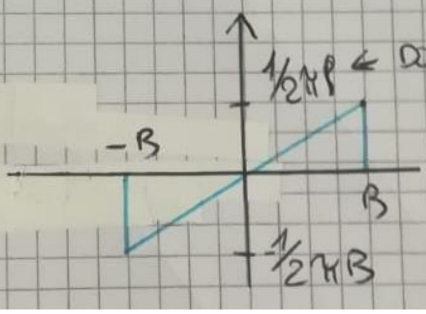
$$V(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot j \cdot \left[-\Lambda\left(\frac{f+B}{B}\right) + \Lambda\left(\frac{f-B}{B}\right) \right] \cdot \Pi\left(f/2B\right)$$

$$V(f) = \frac{1}{2\pi f} \left[-\Lambda\left(\frac{f+B}{B}\right) + \Lambda\left(\frac{f-B}{B}\right) \right] \Pi\left(f/2B\right)$$

$$V(f) = \begin{cases} 0 & \text{per } |f| > B \\ \frac{1}{2\pi B} & \text{per } |f| < B \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2\pi B} \; \Pi\left(f/2B\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi B} \cdot 2B \cdot \operatorname{sinc}(2Bt) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sinc}(2Bt)$$

→ PERCIÒ $\frac{1}{2\pi B}$



Esercizio preso da un esame

ES1, ESAME (SEGNALE PERIODICO)

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[2\Pi\left(\frac{2t - m2T}{T}\right) - \Pi\left(\frac{t - mT}{T}\right) \right]$$

1) TROVARE IL GRAFICO DI $x(t)$ E IL SUO PERIODO
2) TROVARE I COEFFICIENTI DI FOURIER
3) GRAFICO DELLA TRASFORMATA

1) CHIAMIAMO PER SEMPLICITÀ

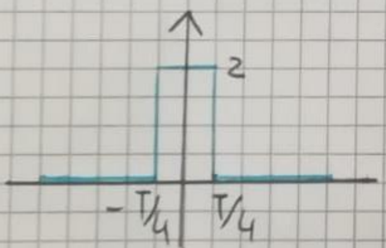
$$z(t) = 2\Pi\left(\frac{2t - m2T}{T}\right)$$

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t - mT}{T}\right)$$

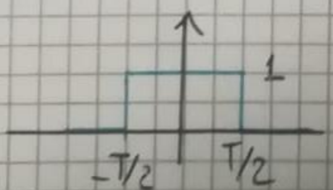
TRACCIAMO IL GRAFICO DELLA FORMA BASE DI $z(t)$ E DI $w(t)$

$$z_0(t) = 2\Pi\left(\frac{2t}{T}\right)$$ ← È IL SEGNALE SENZA LA REPLICAZIONE DATA DA $m2T$

DOVE SI NOTANO UN AMPLIFICAZIONE, UNA COMPRESSIONE ED UNA DILATAZIONE, DUNQUE IL GRAFICO VALE



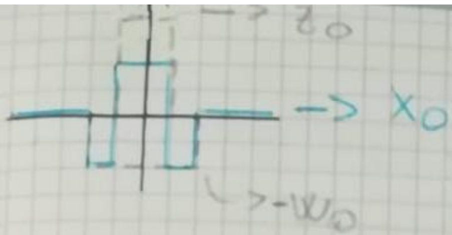
MENTRE PER $w_0 = \Pi(t/T)$, DOVE ABBIAMO UNA DILATAZIONE



LA FORMA BASE DEL SEGNALE $x(t)$ SARÀ QUINDI

$$x_0(t) = 2\Pi\left(\frac{2t}{T}\right) - \Pi(t/T)$$

GRAFICAMENTE



DALLA TEORIA SAPPIAMO CHE LA FORMULA DI UN GENERICO SEGNALE PERIODICO È SCRITTO NELLA FORMA

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} x_0(t-nT)$$

DUNQUE QUELLO CHE DOBBIAMO FARE ORA È RISCRIVERE $x_0(t)$ IN MODO CHE TUTTI I SUOI COMPONENTI ABBIANO UNO SPOSTAMENTO DI nT

DEVO ELIMINARE IL 2 — GIA ESPRESSO CON nT

$$x(t)=\sum 2\,\Pi\left(\frac{\overbrace{2t-n2T}}{T}\right)-\Pi\left(\frac{t-\overbrace{nT}}{T}\right)$$

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} 2\,\Pi\left(\frac{t-nT}{T/2}\right)-\Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

SI PUÒ NOTARE TRACCIANDO IL GRAFICO DI $\Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right)$ CHE IL SUO VALORE È 1 PER TUTTO t, DUNQUE VOLENDO SI PUÒ RISCRIVERE:

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} 2\,\Pi\left(\frac{t-nT}{T/2}\right)-1$$

IL PERIODO È T

2) DALLA TEORIA POSSIAMO TROVARE CHE

SOLO SE $x(t)$ È PERIODICO $X_k = F_0 \cdot X_0(kF_0)$, $F_0=\frac{1}{T}$

TROVIAMO $X_0(f)=F\left[2\,\Pi\left(\frac{2t}{T}\right)-\Pi(t/T)\right]$

$$X_0(f)=\frac{T}{2}\cdot 2\,\text{SINC}(f\,T/2)-T\,\text{SINC}(fT)$$

A NOI PERÒ SERVE $X_0(kf_0)$, DUNQUE

$$X_0(kf_0) = T\,\mathrm{sinc}\left(kf_0 \cdot \frac{T}{2}\right) - T\,\mathrm{sinc}(kf_0 \cdot T)$$

$$\rightarrow x_k = f_0\left[T\,\mathrm{sinc}(k/2) - T\,\mathrm{sinc}(k)\right]$$

$$x_k = \cancel{f_0} \cdot \cancel{T}\left[\mathrm{sinc}(k/2) - \mathrm{sinc}(k)\right]$$

$$X_k = \mathrm{sinc}(k/2) - \mathrm{sinc}(k)$$

Se $k = 0 \rightarrow X_k = 0$

Se k = DISPARI $\rightarrow X_k = \mathrm{sinc}(k/2)$ ($\leftarrow \mathrm{sinc}(k) = 0$)

Se k = PARI $\rightarrow X_k = 0$

3) DALLA TEORIA DICIAMO CHE

$$X(f) = \sum X_k \cdot \delta(f - f_0)$$

$$X(f) = \left[\mathrm{sinc}(k/2) - \mathrm{sinc}(k)\right] \delta(f - f_0)$$

IL GRAFICO È COMPOSTO DA UNA SERIE DI δ NULLE PER $K = 0$, K PARI, MENTRE PER K DISPARI L'AREA VALE $\mathrm{SINC}(K/2)$