Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A2 18/2/2011

Un componente in garanzia viene sostituito gratuitamente se si guasta entro un anno dall'acquisto. Se il tempo di guasto del componente è una variabile aleatoria esponenziale negativa con valore medio 5 anni, quant'è la probabilità che su un lotto di 20 componenti ne debbano essere sostituiti in un anno 2 o più?

N.B. - Espressa la densità di probabilità esponenziale negativa nella forma generale:

$f_X(x) = a \exp(-ax)\, u(x)$

il "valor medio" della v.a. è uguale a: $1/a$.

Quesito A2 - (Soluzione)

Detta X la v.a. {vita del componente (in anni)} la densità di probabilità di X è:

$$f_X(x) = \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} u(x) \quad .$$

Detta p la probabilità che un generico componente si guasti entro un anno (e quindi debba essere sostituito in garanzia) è:

$$p = \int_0^1 \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} dx = \frac{1}{5}\left[\frac{e^{-\frac{x}{5}}}{-\frac{1}{5}}\right]_0^1 = \frac{e^{-\frac{1}{5}}-1}{-1} = 1-e^{-\frac{1}{5}} \cong 0{,}181$$

Si deve calcolare la seguente probabilità:

$P_G \triangleq P\{2$ o più componenti guasti in un anno su 20 componenti$\}$ -

Assunta l'indipendenza dei guasti su componenti distinti, il problema è di prove ripetute e si ha:

$$P_G = \sum_{k=2}^{20} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}$$

che si calcola più facilmente passando dalla probabilità Q_G dell'evento complementare $Q_G = P\{(\text{zero guasti}) \cup (1 \text{ guasto})\} =$

$= P\{\text{zero guasti}\} + P\{1 \text{ guasto}\}$ essendo gli eventi mutuamente esclusivi - Quindi:

$$P_G = 1 - Q_G = 1 - P\{\text{zero guasti}\} - P\{1 \text{ guasto}\} =$$

$$= 1 - \binom{20}{0} p^0 (1-p)^{20} - \binom{20}{1} p \cdot (1-p)^{19} = 1 - (1-p)^{20} - 20p(1-p)^{19} =$$

$$= 1 - 0{,}819^{20} - 20 \cdot 0{,}181 \cdot 0{,}819^{19} = 1 - 0{,}0184 - 0{,}0815 \cong \boxed{0{,}90}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A20 N

La vita di un certo tipo di lampade è rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$. Due di tali lampade vengono accese contemporaneamente in una stanza. Si calcoli la probabilità che: a) all'istante generico t_0 le lampade siano entrambe accese; b) all'istante t_0 siano entrambe spente; c) le lampade siano entrambe accese osservando che all'istante t_0 nella stanza c'è luce.

Quesito A20 – (Soluzione)

Dette L_X e L_Y le due lampade, siano X e Y le v.a. rappresentative delle rispettive vite –

Si definiscano gli eventi:

$A \triangleq \{L_X \text{ è accesa a } t_0\} = \{X > t_0\}$

$B \triangleq \{L_Y \text{ è accesa a } t_0\} = \{Y > t_0\}$

I due eventi si possono assumere indipendenti essendo relativi a sistemi fisici distinti – Essendo inoltre le lampade dello stesso tipo si ha $f_X(x) = f_Y(x)$.

a) Si cerca:

indipendenza

$P\{\text{entrambe accese a } t_0\} = P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

dove:

$$P(A) = P(B) = P(X > t_0) = P(Y > t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 - \int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= 1 - \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{t_0} = 1 + (e^{-\lambda t_0} - 1) = e^{-\lambda t_0}$$

Quindi:

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B) = e^{-2\lambda t_0}}$$

b) L'indipendenza di A e B implica quella di $\overline{A}$ e $\overline{B}$ quindi la prob. che a t_0 le lampade siano entrambe spente è:

$$\boxed{P(\overline{A}\,\overline{B})} = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = (1 - e^{-\lambda t_0})^2 = \boxed{1 - 2e^{-\lambda t_0} + e^{-2\lambda t_0}}$$

- c) L'evento "nella stanza c'è luce" è espresso dall'evento: $A \cup B$. La probabilità cercata è quindi:

$$P\{\text{entrambe accese} \mid \text{nella stanza c'è luce}\} = P(AB \mid A\cup B) =$$

$$= \frac{P(AB(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(ABA \cup ABB)}{P(A\cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A\cup B)}$$

Ricordando che:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$
$$= e^{-\lambda t_0} + e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0} = 2e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0}$$

e che (vedi punto a): $P(AB) = e^{-2\lambda t_0}$

si ha:

$$\boxed{P(AB \mid A\cup B) = \frac{P(AB)}{P(A\cup B)} = \frac{e^{-2\lambda t_0}}{2e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0}} = \frac{e^{-\lambda t_0}}{2 - e^{-\lambda t_0}}}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito **A6**

Il sig. Rossi ha l'abitudine di entrare ogni giorno del bar B1 o nel bar B2 (scelto a caso) in un istante a caso fra le 10 e le 11 e di intrattenervisi esattamente 10 min per prendere un caffè. Un giorno il sig. Bianchi entra nel bar B1 alle 10:30 e osserva che il sig. Rossi non c'è.
- E' più probabile che il sig. Rossi sia già uscito o che non sia mai entrato? (Si assuma indipendenza fra gli eventi "scelta del bar" e "istante di entrata del sig. Rossi").

Quesito A6 (Soluzione)

Si definiscano i seguenti eventi:

U = {Alle 10:30 il sig. Rossi è già uscito dal bar B1}

M = {Prima delle 10:30 il sig. Rossi non è mai entrato nel bar B1}

NC = {Alle 10:30 il sig. Rossi non c'è, nel bar B1}

Si vogliono confrontare le probabilità condizionate:
$P\{U|NC\}$ e $P\{M|NC\}$ che si possono scrivere (dalla definizione):

Perchè {U} è un sottoinsieme di {NC} così come lo è {M} –

$$P\{U|NC\} = \frac{P\{U \cap NC\}}{P\{NC\}} = \frac{P\{U\}}{P\{NC\}}$$

$$P\{M|NC\} = \frac{P\{M \cap NC\}}{P\{NC\}} = \frac{P\{M\}}{P\{NC\}}$$

Data l'uguaglianza dei denominatori sarebbe sufficiente calcolare $P\{U\}$ e $P\{M\}$, ma calcoleremo anche $P\{NC\}$ per completezza –

Definiamo gli ulteriori eventi: {B1} = {Il sig. Rossi ha scelto il bar B1} e {B2} analogo per l'altro bar –

Si ha (teorema delle probabilità totali):

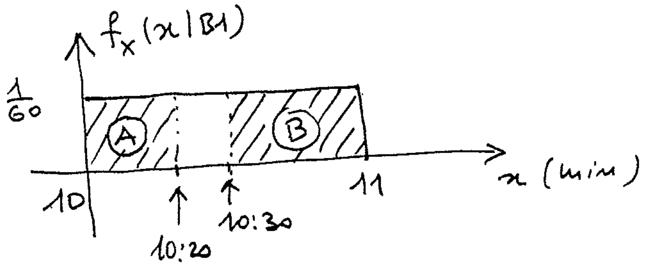
$$P\{U\} = P\{U|B1\}\underbrace{P\{B1\}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P\{U|B2\}}_{=0}\underbrace{P\{B2\}}_{\frac{1}{2}}$$

Sia X la v.a. {istante di ingresso nel bar B1 a partire dalle 10:00}.
La densità di probabilità $f_X(x/B1)$ si può assumere uniforme fra le 10 e le 11 –

Si ha quindi:

$$P\{U|B1\} = P\{10 < x < 10{:}20 | B1\} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \quad (\text{A in figura})$$

Infatti, data la sosta fissa di 10 min, il sig. Rossi alle 10:30 è già uscito se l'istante di ingresso è compreso fra le 10 e le 10:20 -



Per cui:

$$\boxed{P\{U\} = P\{U|B1\}P\{B1\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}}$$

Si ha inoltre:

$$P\{M\} = P\{M|B1\}P\{B1\} + \underbrace{P\{M|B2\}}_{=1}P\{B2\}$$

= 1; se sceglie B2 di certo non è entrato in B1 -

Si ha:

$$P\{M|B1\} = P\{10{:}30 < x < 11 | B1\} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \quad (\text{B in figura})$$

Ossia, se è stato scelto B1, la probabilità che non sia entrato prima delle 10:30 ($P\{M|B1\}$) è uguale a quella che l'istante di ingresso sia successivo alle 10:30 -

Per cui:

$$\boxed{P\{M\} = P\{M|B1\}P\{B1\} + P\{B2\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}}$$

Poichè $\frac{3}{4} > \frac{1}{6}$ è più probabile che il sig. Rossi non sia mai entrato -

Per completezza:

= 1; se sceglie B2, alle 10:30 in B1 non c'è di sicuro -

$$P\{NC\} = P\{NC|B1\}P\{B1\} + \overbrace{P\{NC|B2\}}\cdot P\{B2\}$$

$$P\{NC|B1\} = P\{(10 < x < 10{:}20) \cup (10{:}30 < x < 11) | B1\} =$$

Alle 10:30 non c'è

È già uscito

Non è ancora entrato

Mutuamente esclusivi!

$$= P\{U|B1\} + P\{M|B1\} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6} \leftarrow P\{NC|B1\}$$

↑ Perché mutuamente esclusivi

E quindi:

$$P\{NC\} = P\{NC|B1\} \cdot P\{B1\} + P\{B2\} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

E le due probabilità da confrontare:

$$\begin{cases} P\{U|NC\} = \dfrac{P\{U\}}{P\{NC\}} = \dfrac{1/6}{11/12} = \dfrac{2}{11} \\[2ex] P\{M|NC\} = \dfrac{P\{M\}}{P\{NC\}} = \dfrac{3/4}{11/12} = \dfrac{9}{11} \end{cases}$$

che confermano il risultato già trovato.

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A18 2/12/1010

La durata di una conversazione telefonica è una v.a. con funzione di distribuzione $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\, u(x)$. Quanto vale la probabilità che una telefonata in atto all'istante t_0 termini entro i successivi t secondi?

Quesito A18 - Soluzione

Detta X la v.a. $X = \{$durata della conversazione$\}$ si cerca la probabilità dell'evento: $\{$la conversazione termina entro l'istante $t_0+t\}$ ovvero: $\{$la durata è minore di (o uguale a) $t_0+t\}$ ovvero: $\{X \le t_0+t\}$, condizionata dall'evento: $\{$la conversazione è ancora in atto a $t_0\}$ ovvero: $\{$la durata è maggiore di $t_0\}$ ovvero: $\{X > t_0\}$ -

Quindi cerchiamo:

$$P\{X \le t_0+t \mid X > t_0\} = \frac{P\{X \le t_0+t, X > t_0\}}{P\{X > t_0\}} = \frac{P\{t_0 < X \le t_0+t\}}{1 - P\{X \le t_0\}} =$$

$$= \frac{F_X(t_0+t) - F_X(t_0)}{1 - F_X(t_0)} = \frac{(1 - e^{-\lambda(t_0+t)}) - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} =$$

$$= \frac{\cancel{1} - e^{-\lambda t_0} e^{-\lambda t} - \cancel{1} + e^{-\lambda t_0}}{\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\lambda t_0}} = \frac{e^{-\lambda t_0}(1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t_0}} = 1 - e^{-\lambda t}$$

che è la probabilità cercata -

{Si noti che tale probabilità non dipende da t_0 ossia: la prob. che la telefonata termini entro i successivi 30 secondi è la stessa sia che sia durata un minuto sia che sia durata 100 minuti - È una caratteristica della densità esponenziale negativa (che ha per funz. di distrib. la $F_X(x)$ data)}.

Esame di TEORIA DEI SEGNALI

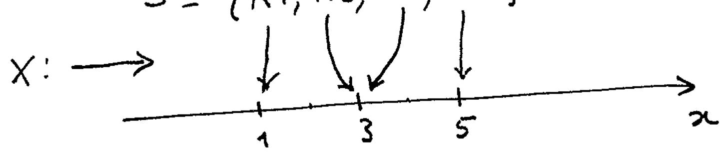
Quesito A27 15/5/2000

Sulle facce di un disco di colore rosso sono impressi i numeri 1 e 3. Sulle facce di un altro disco di colore bianco (ma per il resto identico al primo) sono impressi i numeri 3 e 5. Si sceglie un disco a caso e lo si lancia come una moneta. Sia X la v.a. "numero che si legge sul disco lanciato". Si consideri l'evento $A = \{$si è scelto il disco rosso$\}$.
Si trovino la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della v.a. X e le stesse condizionate dall'evento A (o dato l'evento A), ossia $F_X(x\,|\,A)$ e $f_X(x\,|\,A)$.

Quesito A27 - (Soluzione)

Con evidente significato dei simboli lo spazio campione S (che si può assumere uniforme) e la v.a. X definita sull'esperimento si possono così rappresentare:

$$S = \{R1, R3, B3, B5\}$$

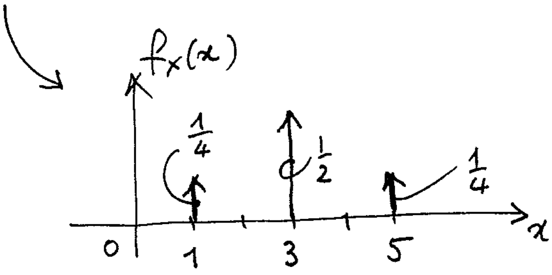


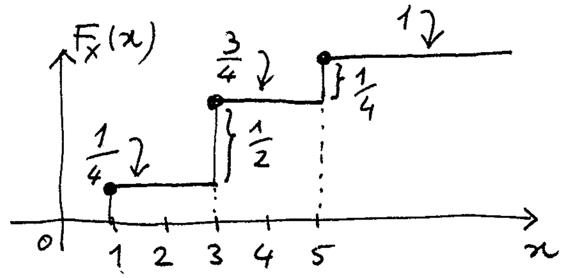
La funzione di distribuzione $F_X(x)$ si può quindi scrivere:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} P\{S\} = 1 & \text{per } x \ge 5 \\ P\{R1, R3, B3\} = \frac{3}{4} & \text{per } 3 \le x < 5 \\ P\{R1\} = \frac{1}{4} & \text{per } 1 \le x < 3 \\ 0 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

e la corrispondente densità:

$$f_X(x) = \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x-3) + \frac{1}{4}\delta(x-5).$$





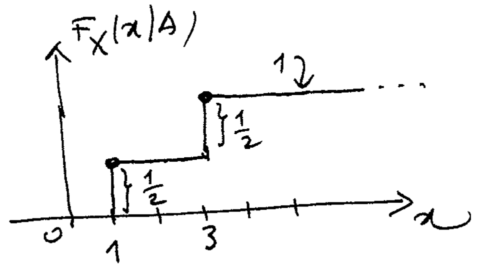
Ricaviamo le grandezze condizionate ricorrendo alla definizione -

Si osservi che : $A = \{\text{si è scelto il disco rosso}\} \equiv \{R1, R3\}$,

da cui : $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

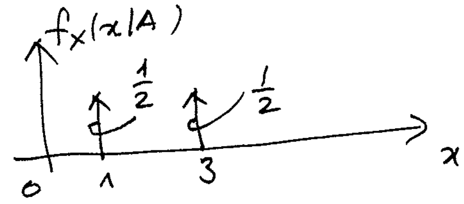
Quindi:

$$F_X(x|A) = \frac{P(\{X \le x\} \cap A)}{P(A)} = \begin{cases} \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1 & \text{per } x \geq 5 \\[2ex] \dfrac{P(\{R1,R3,B3\} \cap \{R1,R3\})}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1 & \text{"} \quad 3 \le x < 5 \\[2ex] \dfrac{P(\{R1\} \cap \{R1,R3\})}{P(A)} = \dfrac{P(\{R1\})}{P(A)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2} & \text{"} \quad 1 \le x < 3 \\[2ex] \dfrac{P(\phi)}{P(A)} = 0 & \text{"} \quad x < 1 \end{cases}$$



e la densità:

$$f_X(x|A) = \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x-3)$$



Naturalmente si poteva raggiungere lo stesso risultato più semplicemente osservando che le grandezze condizionate all'evento A coincidono con quelle non condizionate relative al solo disco rosso -

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A28 22/5/2000 VA

Una variabile casuale X ha densità di probabilità $f_X(x)$ come in Figura A28.
Si dica quanto vale a.
Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ tracciandone un grafico accurato.
Si dica quanto vale $F_X(12)$.

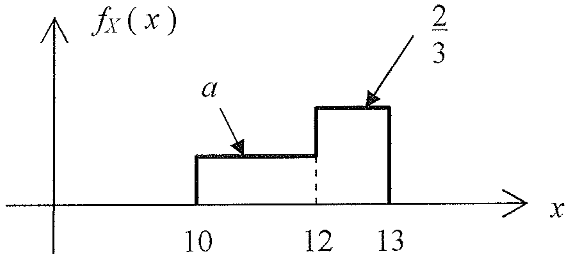


Figura A28

Quesito A28 - (Soluzione)

La normalizzazione richiede che l'area sottesa da $f_X(x)$ sia unitaria quindi deve essere:

$$(12-10)a + (13-12)\frac{2}{3} = 1 \qquad \text{da cui: } \boxed{a = \frac{1}{6}}$$

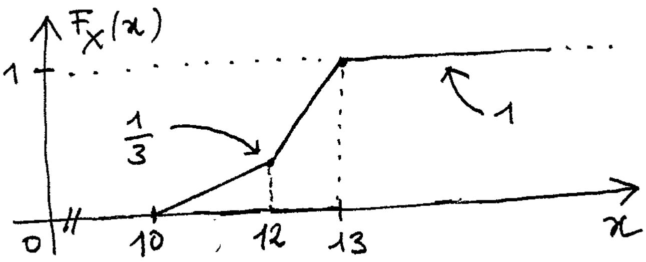
La funzione di distribuzione è:

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } x < 10 \\ \int_{10}^{x} \frac{1}{6}\,du = \frac{1}{6}(x-10) & \text{per } 10 \leq x < 12 \\ \int_{10}^{12} \frac{1}{6}\,du + \int_{12}^{x} \frac{2}{3}\,du = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x-12) & \text{per } 12 \leq x < 13 \\ 1 & \text{per } x \geq 13 \end{cases}$$

Da quanto trovato il valore richiesto è:

$$F_X(12) = P\{X \leq 12\} = \frac{1}{3}$$

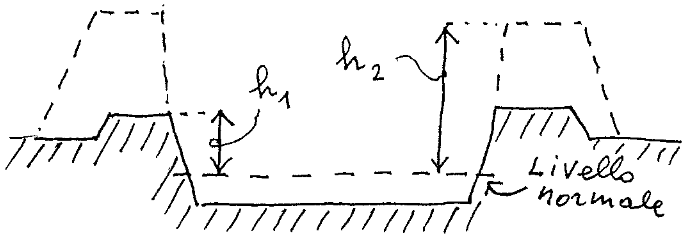


Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A37

Il livello massimo che un certo fiume raggiunge in un anno (misurato in metri oltre il livello normale del fiume) è una v.a. X con densità di probabilità:

$$f_X(x) = a\,(x-10)^4 \prod\left(\frac{x-5}{10}\right)$$



Esiste un argine alto h_1=2 m (rispetto al livello normale del fiume) quindi se X supera tale livello si verifica un'alluvione.

- Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ di X e si trovi il valore della costante a.
- Si calcoli la probabilità che si abbiano una o più alluvioni in 6 anni.
- Poiché il rischio di alluvioni è ritenuto troppo elevato si vuole innalzare l'argine in modo che la probabilità di non avere alluvioni in 50 anni sia 0,9. Quale deve essere la nuova altezza h_2 dell'argine?

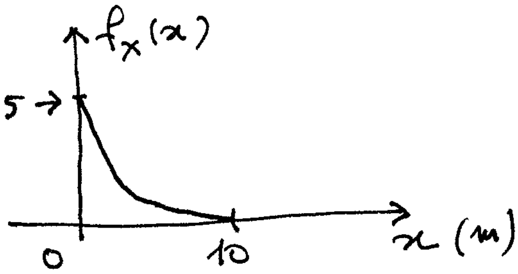
{Si assuma che si verifichi una sola piena all'anno e che il livello massimo raggiunto sia indipendente da un anno all'altro}.

Quesito A37 (Soluzione)

Il valore di a si trova dalla condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \longrightarrow \int_0^{10} a\cdot(x-10)^4\,dx = a\cdot\frac{(x-10)^5}{5}\Bigg|_0^{10} = \frac{a}{5}\cdot\left[0-(-10)^5\right] = \frac{a}{5}\cdot 10^5 = 1$$

Da cui: $\boxed{a = 5\cdot 10^{-5}}\ m^{-1}$



La funzione di distribuzione è:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

Con la $f_X(x)$ data è $F_X(x) = 0$ per $x<0$ e $F_X(x) = 1$ per $x \geq 10$

e inoltre per $0 \leq x < 10$ si ha:

$$\boxed{F_X(x)} = \int_0^x a\cdot(u-10)^4\,du = a\cdot\frac{(u-10)^5}{5}\Bigg|_0^x = \frac{a}{5}\left[(x-10)^5 + 10^{+5}\right] = \boxed{10^{-5}(x-10)^5+1}$$

La probabilità di avere una o più alluvioni in 6 anni si può scrivere così:

$$P\{\text{una o più alluvioni in 6 anni (con } h_1)\} = 1 - P\{0 \text{ alluvioni in 6 anni}\} =$$

$$= 1 - \Big(P\{\underbrace{X \le h_1}_{\text{no alluvione in un anno}}\}\Big)^6 = 1 - \left[F_X(h_1)\right]^6 = 1 - \left[10^{-5}(\underset{h_1}{2} - 10)^5 + 1\right]^6 \simeq \boxed{0{,}91}$$

L'altezza del nuovo argine h_2 si trova scrivendo la probabilità di non avere alluvioni in 50 anni, ponendola uguale a 0,9 come richiesto e ricavando h_2, ossia:

$$P\{0 \text{ alluvioni in 50 anni (con } h_2)\} = \left(P\{X \le h_2\}\right)^{50} =$$

$$= \left[F_X(h_2)\right]^{50} = 0{,}9$$

ossia

$$\left[10^{-5}(h_2 - 10)^5 + 1\right]^{50} = 0{,}9$$

da cui:

$$\boxed{h_2 = \left[\left(0{,}9^{\frac{1}{50}} - 1\right) \cdot 10^5\right]^{\frac{1}{5}} + 10 = 7{,}08 \text{ m}}$$

Esame di TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A39

Dato un gruppo di $n = 100$ persone formato da italiani e stranieri si scelgono a caso due persone. Sapendo che la probabilità che una sola di esse sia straniera è $p \approx 0{,}18$ si individui una possibile composizione del gruppo (numero di italiani n_I e numero di stranieri n_S).

Quesito A39 (Soluzione)

Detta p la probabilità di scegliere una coppia con un solo straniero (e/o un solo italiano!), assunta l'equiprobabilità delle coppie, la probabilità p è uguale al rapporto fra il numero di coppie formate da uno straniero e un italiano e il numero di coppie possibili. Il numero di possibili stranieri è $\binom{n_S}{1} = n_S$ e per ciascuno di questi il numero di possibili italiani è $\binom{n_I}{1} = n_I$. Il numero totale di coppie è $\binom{n}{2}$, quindi si ha:

$$p = \frac{\binom{n_S}{1}\cdot\binom{n_I}{1}}{\binom{n}{2}} = \frac{n_S \cdot n_I}{\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}} = \frac{2\cdot n_S \cdot n_I}{n\cdot(n-1)}$$

Da questa occorre ricavare n_S (o $n_I = n - n_S$) noti $n=100$ e $p=0{,}18$, ossia si deve risolvere l'equazione in n_S:

$$2n_S^2 - 2\,n\cdot n_S + n\cdot(n-1)\cdot p = 0$$

che con i valori dati diventa:

$$n_S^2 - 100\cdot n_S + \overbrace{50\cdot 99\cdot 0{,}18}^{891} = 0$$

Da cui:

$$n_S = \frac{100 \mp \sqrt{100^2 - 4\cdot 891}}{2} = \begin{cases} 9{,}88 \rightarrow n_{S_1} = 10 \\ 90{,}11 \rightarrow n_{S_2} = 90 \end{cases}$$

si hanno quindi due soluzioni simmetriche:

$$\begin{cases} n_{S_1} = 10 \\ n_{I_1} = 90 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} n_{S_2} = 90 \\ n_{I_2} = 10 \end{cases}$$

[Si veda anche il Quesito A14]

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A77 rid

La riunione di un certo gruppo di persone è convocata per le ore 11:00. Il gruppo è composto da n persone che arrivano indipendentemente con un ritardo che è una v.a R avente densità $f_R(x)$ uniforme fra i valori $a = -5$ e $b = 15$ minuti, uguale per tutti (Nota: ritardo negativo = anticipo).

La riunione ha inizio non appena sono arrivati tutti i partecipanti.

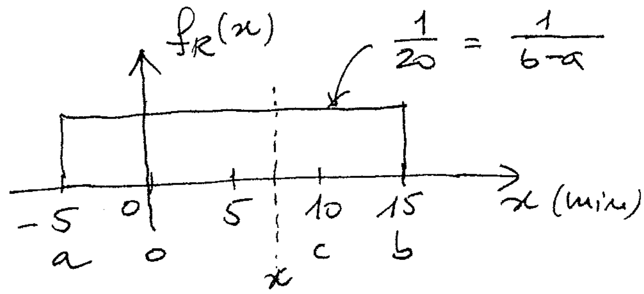
a) Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ e la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X = {Ritardo di inizio della riunione (rispetto alle ore 11:00)}

b) Si traccino i grafici di $F_X(x)$ e di $f_X(x)$ nel caso $n = 2$.

Quesito A82 (Soluzione)

La densità di probabilità $f_R(x)$ del ritardo R di un generico partecipante (densità uguale per tutti i partecipanti) è:

$$f_R(x) = \frac{1}{20}\Pi\left(\frac{x-5}{20}\right) \text{ min}^{-1}$$



e la funzione di distribuzione:

$$F_R(x) = P\{R \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{per } a \leq x < b \\ 1 & \text{per } x \geq b \end{cases}$$

L'istante di inizio della riunione è l'istante di arrivo dell'ultimo partecipante quindi il ritardo X di inizio della riunione è il ritardo dell'ultimo partecipante –

a) Si cerca: $F_X(x) = P\{X \le x\} =$

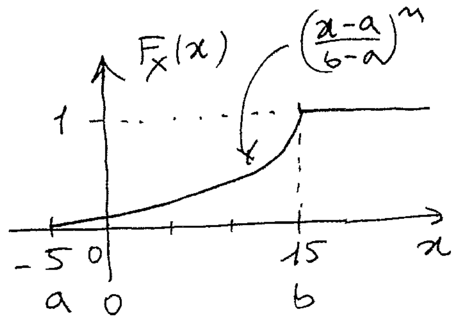
$= P\{\text{Ritardo dell'ultimo arrivato} \le x\} =$

$= P\{\text{Arrivano } \underline{\text{tutti}} \text{ con ritardo} \le x\} =$

$= P\{n \text{ punti in } (a,x)\} = p^n$

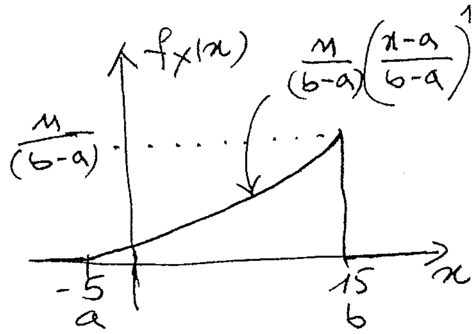
dove $p = P\{\text{Un generico partecipante arriva con ritardo in } (a,x)\} =$

$= F_R(x)$



Quindi:

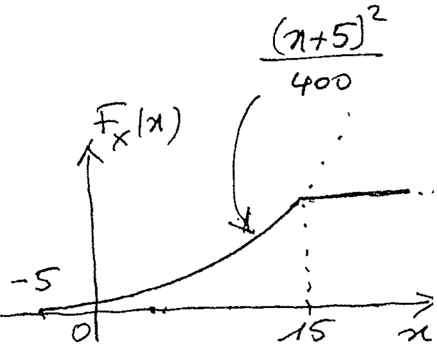
$$F_X(x) = [F_R(x)]^n = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n & \text{per } a \le x < b \\ 1 & \text{per } x > b \end{cases}$$



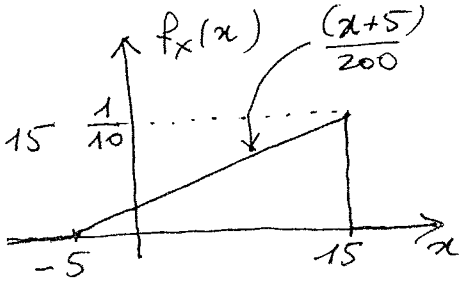
e la densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} n \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

b) Siano $a = -5$, $b = 15$, $n = 2$, si ha



$$F_X(x) = \left(\frac{x+5}{15+5}\right)^2 = \frac{1}{400}(x+5)^2 \quad \text{per } -5 \le x \le 15$$



$$f_X(x) = 2 \cdot \left(\frac{x+5}{15+5}\right) \cdot \frac{1}{15+5} = \frac{(x+5)}{200} \quad \text{per } -5 < x < 15$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A26 22/5/2000

Una fabbrica di elettrodomestici monta sui suoi frigoriferi termostati di tipo A o di tipo B indifferentemente.

Un termostato mantiene nel frigorifero una temperatura a regime il cui valore è rappresentato da una variabile casuale uniformemente distribuita fra $(T - \Delta)$ e $(T + \Delta)$, essendo T la temperatura impostata dall'utente.

Nel caso in esame, per i termostati di tipo A si ha $\Delta = 1$ °C e per i termostati di tipo B si ha $\Delta = 2$ °C.

Si sceglie a caso un frigorifero e si imposta la temperatura $T = 2$ °C.

Si trovi in tal caso la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della variabile casuale X = "temperatura a regime nel frigorifero".

Osservato che in tale frigorifero la a temperatura a regime è di 2,5 °C, si calcoli la probabilità che il termostato sia di tipo A.

Quesito A26 - (Soluzione)

La densità di probabilità della v.a. $X = \{$temperatura [che si ottiene] a regime nel frigorifero [scelto a caso]$\}$ si può scrivere ricorrendo al teorema delle probabilità totali:

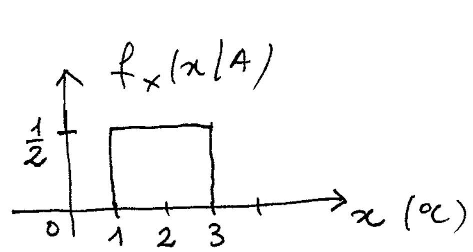
$$f_X(x) = f_X(x|A)\cdot P(A) + f_X(x|B)\cdot P(B) \qquad (1)$$

essendo A l'evento: $\{$il frigorifero scelto monta un termostato di tipo A$\}$ e B l'evento simmetrico.

Scelto a caso un frigorifero e impostata la temperatura $T = 2$°C le densità condizionate che compaiono in (1) si possono scrivere entrambe nel modo seguente:

$$f_X(x|\text{Tipo del termostato}) = \frac{1}{2\Delta}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-T}{2\Delta}\right)$$

che nei due casi assume la forma:

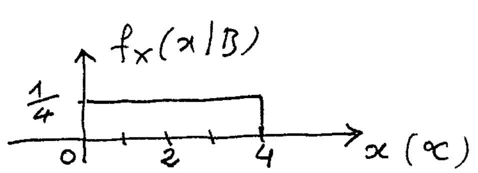


Tipo A : $\Delta = 1$°C , $T = 2$°C

$$f_X(x|A) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

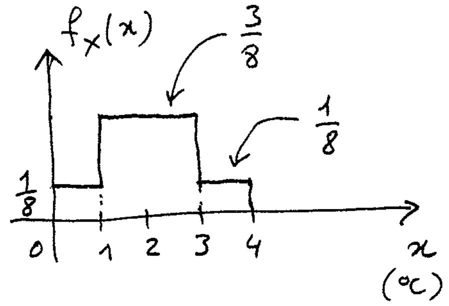
Tipo B : $\Delta = 2$°C, $T = 2$°C

$$f_X(x|B) = \frac{1}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-2}{4}\right)$$



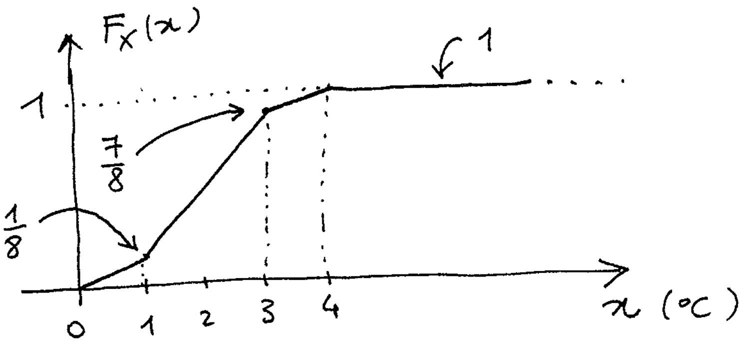
Si può senz'altro assumere $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, quindi la densità cercata è:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \, \mathrm{rect}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \, \mathrm{rect}\left(\frac{x-2}{4}\right)}$$



La funzione di distribuzione si può ottenere integrando la $f_X(x)$, anche con l'aiuto del grafico e si ha:

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du} = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \frac{1}{8}x & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{8}(x-1) + \frac{1}{8} & \text{per } 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{8}(x-3) + \frac{7}{8} & \text{per } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$



Detta t la temperatura osservata a regime, la probabilità che il termostato montato sia di tipo A si può scrivere nel modo seguente ricordando la formula di Bayes in forma mista:

$$\mathbb{P}(A \mid X = t) = \frac{f_X(t \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{f_X(t)}$$

che nel caso in esame ($t = 2{,}5$; $T = 2°C$; densità trovate sopra) dà:

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid X = 2{,}5) = \frac{f_X(2{,}5 \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{f_X(2{,}5)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}}$$

Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A34

Un satellite artificiale deve svolgere una missione di osservazione della Terra di durata $T = 6$ mesi. Se l'apparecchiatura di osservazione ha una vita rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, u(x)$, quale deve essere il valore di λ (espresso con l'appropriata unità di misura) necessario affinché la probabilità che l'apparecchiatura funzioni almeno per tutta la durata della missione sia $P = 0{,}9$? Qual è il corrispondente valor medio della vita dell'apparecchiatura, $E\{X\}$? La missione viene effettuata con un'apparecchiatura avente proprio il valore di λ trovato sopra, ma purtroppo al termine della missione l'apparecchiatura risulta non funzionante: qual è la probabilità che abbia funzionato per almeno $T_1 = 5$ mesi ?

Quesito A34 (Soluzione)

L'evento: {l'apparecchiatura funziona per almeno tutta la durata della missione} equivale all'evento $\{X > T\}$ con $T = 6$ mesi –

Si vuole quindi che sia: $P\{X>6\} = 0{,}9$ ossia:

$$P\{X>6\} = \int_6^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_6^{+\infty} = e^{-6\lambda} = 0{,}9$$

da cui:

$$-6\lambda = \ln 0{,}9 \rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{6}\ln 0{,}9 = 1{,}75 \cdot 10^{-2}\ \text{mesi}^{-1}}$$

È noto che il v.m. di una v.a. esponenziale negativa è $E\{X\} = \frac{1}{\lambda}$

quindi nel nostro caso: $E\{X\} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}75\cdot 10^{-2}} = 57{,}14$ mesi $\simeq$ 4 anni e 9 mesi

Se per $T = 6$ mesi l'apparecchiatura non funziona significa che si è verificato l'evento $\{X < 6\}$ – Il funzionamento per almeno $T_1 = 5$ mesi equivale all'evento $\{X > 5\}$ – si chiede quindi di calcolare la probabilità condizionata:

$$\boxed{P\{X>5 \mid X<6\}} = \frac{P\{5<X<6\}}{P\{X<6\}} = \frac{\int_5^6 \lambda e^{-\lambda x}\, dx}{\int_0^6 \lambda e^{-\lambda x}\, dx} = \frac{\lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_5^6}{\lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^6} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda 6} - e^{-\lambda 5}}{e^{-\lambda 6} - 1} = \frac{0{,}9 - e^{-1{,}75\cdot 10^{-2}\cdot 5}}{0{,}9 - 1} \approx \boxed{0{,}16}$$

con il valore di $\lambda = 1{,}75\cdot 10^{-2}$ che assicura $e^{-\lambda 6} = 0{,}9$

Esame di

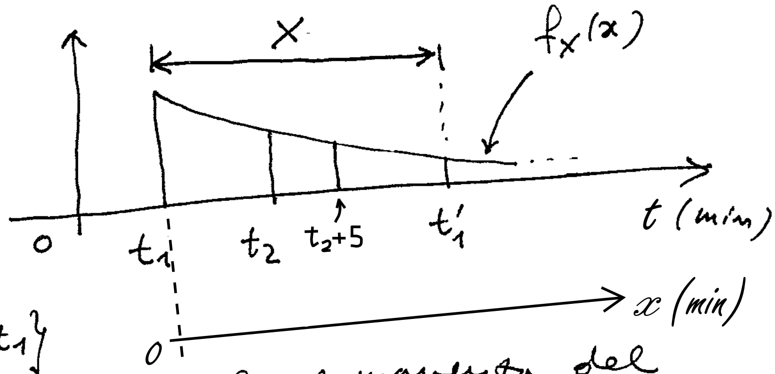
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A54 23/11/12

Un certo giorno voi entrate nella vostra banca all'istante t_2 e trovate che allo sportello c'è già un cliente entrato ad un istante incognito $t_1 < t_2$. Sapendo che la v.a. X = {Tempo di permanenza allo sportello di un generico cliente} è di tipo esponenziale negativo con valor medio $\eta_X = 5$ minuti, qual è la probabilità che dobbiate attendere più di 5 minuti prima che sia il vostro turno?
{Si troverà che tale probabilità non dipende dai valori di t_1 e t_2}.

Quesito A54 (soluzione)

Il tempo di permanenza allo sportello del primo cliente (v.a. X) è uguale alla differenza fra l'istante di termine della sua permanenza (sia p.es. t_1') e l'istante di inizio t_1 (vedi figura).



Si cerca quindi la probabilità dell'evento

$\{t_1' > t_2 + 5\} \equiv \{X > t_2 - t_1 + 5\}$

condizionata dall'evento: $\{t_1' > t_2\} \equiv \{X > t_2 - t_1\}$ che esprime il fatto che a t_2 la permanenza del primo cliente non è ancora terminata. (Si osservi che t_1' è una variabile aleatoria). Quindi in termini di tempo di permanenza si cerca la probabilità:

$$\boxed{P\{X > t_2 - t_1 + 5 \mid X > t_2 - t_1\}} = \frac{P\{(X > t_2 - t_1 + 5) \cap (X > t_2 - t_1)\}}{P\{X > t_2 - t_1\}} =$$

$$= \frac{P\{X > t_2 - t_1 + 5\}}{P\{X > t_2 - t_1\}} =$$

$$= \frac{\int_{t_2-t_1+5}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx}{\int_{t_2-t_1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx} = \frac{\cancel{\lambda} \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{(-\cancel{\lambda})}\Big|_{t_2-t_1+5}^{+\infty}}{\cancel{\lambda}\, \frac{e^{-\lambda x}}{(-\cancel{\lambda})}\Big|_{t_2-t_1}^{+\infty}} =$$

$$= \frac{0 - e^{-\lambda(t_2-t_1+5)}}{0 - e^{-\lambda(t_2-t_1)}} = e^{-\lambda 5} = \boxed{e^{-1} \simeq 0,37}$$

Dove, nell'ultimo passaggio si è applicato il noto risultato relativo alla densità di prob. esponenziale negativa:

$$E\{X\} = \frac{1}{\lambda} = 5 \text{ min} \qquad \text{da cui:} \quad \lambda = \frac{1}{5} \text{ min}^{-1}$$

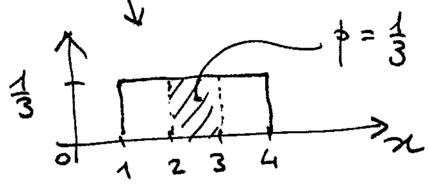
Il fatto che il risultato non dipenda da t_1 e t_2 è dovuto ad una proprietà della densità esponenziale negativa e non si sarebbe verificato con altre.

Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A30
Un certo tipo di sfere ha diametro che è una variabile aleatoria D uniforme fra 1 e 4 cm.
Avete bisogno di tre sfere di diametro compreso fra 2 e 3 cm.
- Qual è la probabilità che dobbiate misurare almeno 10 sfere per trovare le tre desiderate?
- Definita la v.a. N = {numero di sfere da misurare per ottenere le tre desiderate}, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N, ossia la probabilità $P\{N = n\}$ per ogni n, e se ne tracci un grafico accurato per $n \leq 5$. (Alternativamente si tracci un grafico della funzione di distribuzione (CDF) o della densità di probabilità (PDF) della variabile N vista come continua).

Quesito A30 – (Soluzione)

Si tratta di un esperimento di prove ripetute in cui il "successo" è l'evento $\{2 < D < 3\}$ la cui probabilità è $p \triangleq P\{2 < D < 3\} = \frac{1}{3}$ come si ricava facilmente data l'uniformità della densità di probabilità: $f_D(x) = \frac{1}{3}\Pi\left(\frac{x-2,5}{3}\right)$.



- La probabilità di dover misurare almeno 10 sfere è uguale alla probabilità di ottenere un numero di successi minore di 3 nelle prime 9 prove (ossia 0, 1, 2 successi), che si può scrivere:

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{2}\binom{9}{i}p^i(1-p)^{9-i} = \overset{1}{\binom{9}{0}}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^9 + \overset{9}{\binom{9}{1}}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \overset{36}{\binom{9}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^7 \simeq 0{,}377}$$

[Vedi anche il testo Bononi; Ferrari, Prob. 3.19, n. 4]

- La probabilità che il numero di misure da eseguire per ottenere le 3 desiderate sia n è uguale alla probabilità che <u>la terza sfera</u> si presenti proprio all'n-esima misura: è quindi uguale alla prob. di avere 2 successi in $(n-1)$ prove e un successo nell'ultima, ossia (data l'indipendenza delle prove):

$$\boxed{P\{N=n\}} = \left[\binom{n-1}{2}p^2(1-p)^{n-1-2}\right]\cdot p = \binom{n-1}{2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^3(1-p)^n =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{16}(n-1)(n-2)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

[Vedi anche BF, prob 3.19, n. 3]

È evidente che sono necessarie almeno 3 misure per ottenere il risultato cercato, quindi $P\{N=1\}=P\{N=2\}=0$.

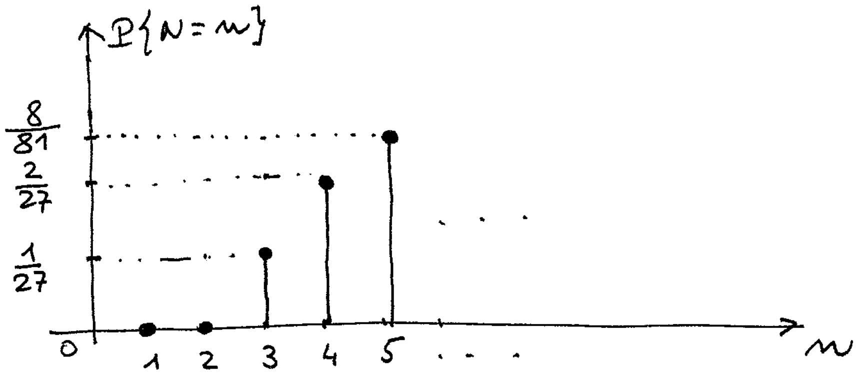
Usando la formula trovata si ha poi:

$$n=3 \longrightarrow P\{N=3\} = \frac{1}{16}\cdot 2\cdot 1\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \simeq 3{,}7\cdot 10^{-2}$$

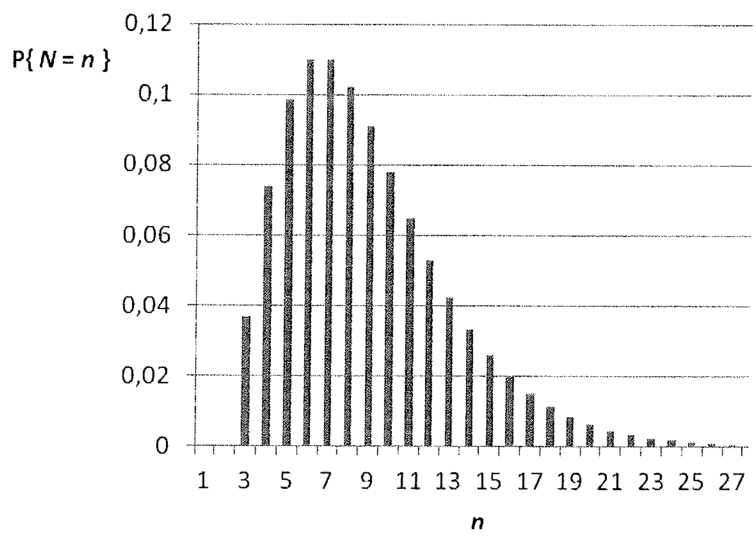
$$n=4 \longrightarrow P\{N=4\} = \frac{1}{16}\cdot 3\cdot 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{27} \simeq 7{,}4\cdot 10^{-2}$$

$$n=5 \longrightarrow P\{N=5\} = \frac{1}{16}\cdot 4\cdot 3\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{8}{81} \simeq 9{,}9\cdot 10^{-2}$$

...

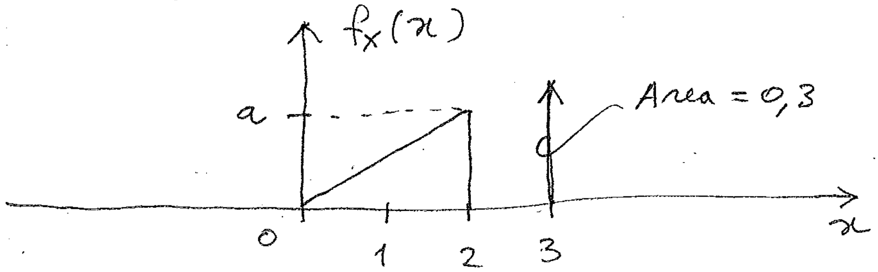


{Per completezza e per dare un'idea dell'andamento totale della distribuzione si riportano circa 30 valori calcolati con un foglio Excel:



Esame di
TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A112 bis
Una variabile aleatoria X ha densità di probabilità come in figura.



a) Si trovi il valore di a.
b) Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ e se ne tracci in grafico
c) Si trovi il valor medio di X.

Quesito A112 **bis** (Soluzione)

Conviene innanzitutto scrivere l'espressione analitica di $f_X(x)$ ricavabile dal grafico dato:

$$f_X(x) = \frac{a}{2} x \Pi\left(\frac{x-1}{2}\right) + 0{,}3 \cdot \delta(x-3)$$

a) La normalizzazione richiede:

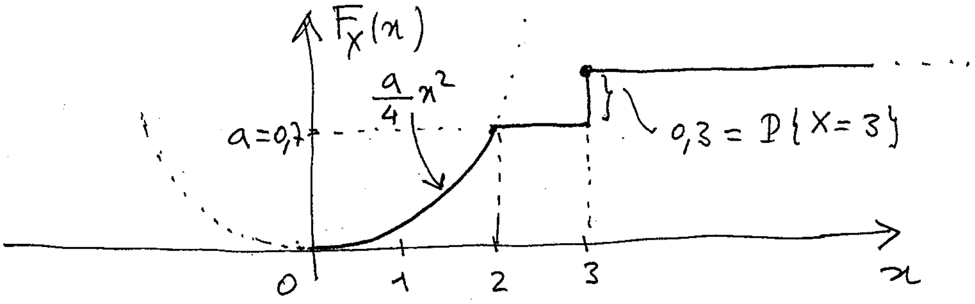
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \text{Area triangolo} + \text{Area delta} = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} + 0{,}3$$

da cui: $\boxed{a = 1 - 0{,}3 = 0{,}7}$

b) È noto che: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\lambda)\,d\lambda$ che nel caso in esame diventa:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{a}{2}\left[\lambda \cdot \Pi\left(\frac{\lambda-1}{2}\right) + 0{,}3\cdot\delta(\lambda-3)\right] d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 0 \\ \int_0^x \left[\frac{a}{2}\cdot\lambda\,d\lambda\right] = \frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^x = \frac{a}{4}x^2 & \text{per } 0 < x < 2 \\ \int_0^2 \frac{a}{2}\cdot\lambda\,d\lambda = \frac{a}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4} = a & \text{per } 2 \le x < 3 \\ a + \int_{-\infty}^{x} 0{,}3\cdot\delta(\lambda-3)\,d\lambda = a + 0{,}3 & \text{per } x \ge 3 \end{cases}$$

Tenendo conto del valore di $a = 0{,}7$ si ha il grafico:



c) Il valor medio $E\{X\}$ della v.a. è:

$$\boxed{E\{X\}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \left[\frac{a}{2} \cdot x \cdot \Pi\left(\frac{x-1}{2}\right) + 0{,}3 \cdot \delta(x-3) \right] dx =$$

$$= \frac{a}{2} \int_0^2 x^2\, dx + 0{,}3 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \delta(x-3)\, dx =$$

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + 0{,}3 \cdot 3 = \frac{a}{\cancel{2}} \frac{\cancel{8}^{\,4}}{3} + 0{,}9 = \frac{0{,}7}{3} 4 + 0{,}9 \boxed{\cong 1{,}83}$$

Teoria dei Segnali [Picchi, Bunucci]
UniPR

Quesito A63 *13/02/13*

a) Sia X una generica v.a con funzione di distribuzione $F_X(x)$. Fissato un generico numero reale t si trovi l'espressione analitica della funzione di distribuzione condizionata $F_X(x \mid X > t)$ esprimendola utilizzando la funzione $F_X(x)$.

b) *Successivamente* si applichi quanto trovato al caso in cui la v.a. X sia uniformemente distribuita nell'intervallo $0 < x < 4$, e sia: $t = 3$. Si traccino anche i grafici di $F_X(x)$ e di $F_X(x \mid X > t)$.

---

a) Secondo la definizione di CDF condizionata,

$$F_X(x \mid M) = P\{X \leq x \mid M\}$$

che, nel caso in esame si specializza con l'evento $M = \{X > t\}$

$$F_X(x \mid X > t) = P\{X \leq x \mid X > t\} = \frac{P\{(X \leq x) \cap (X > t)\}}{P\{X > t\}}$$

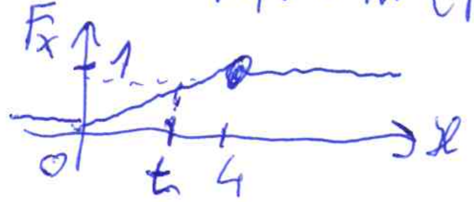
Per il numeratore, si presentano i casi:

$$x \leq t \Rightarrow F_X(x \mid X > t) = 0 \quad \text{(evento intersezione è vuoto)}$$

$$x > t \Rightarrow F_X(x \mid X > t) = \frac{P\{t < X \leq x\}}{P\{X > t\}} = \frac{F_X(x) - F_X(t)}{1 - F_X(t)}$$

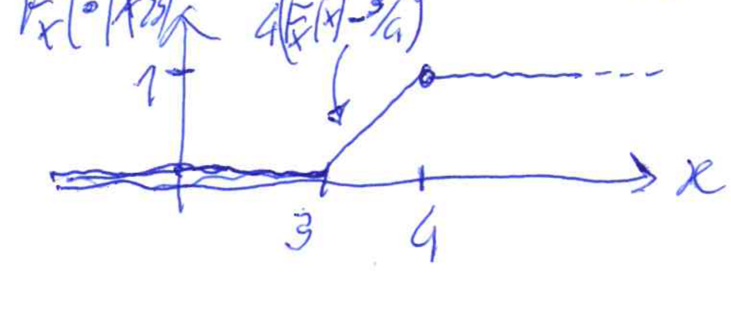
avendo espresso le $P(\cdot)$ di intervalli (aperti o chiusi) con la CDF.

b) $X \sim U[0; 4]$



$$F_X(x \mid X > t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq t \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(t)}{1 - F_X(t)} & \text{per } x > t \end{cases} \quad \text{(vedi punto a))}$$

Poiché $t = 3$ e $F_X(3) = 3/4$, si ha il grafico



Teoria dei Segnali [Picchi, Vannucci] Uni PR

Quesito A104 *16/02/15*

a) Si definisca la varianza σ^2_X di una variabile aleatoria *X*.

b) Si scriva la relazione che esiste fra la varianza, il valore quadratico medio e il valore medio di una variabile aleatoria e si dimostri tale relazione.

c) Si trovino il valor medio e la varianza di una variabile aleatoria esponenziale negativa con densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$, con $\lambda > 0$.

a) La varianza è definita come

$$\sigma_X^2 = E[(X-\eta_X)^2] \quad , \text{dove } \eta_X = E[X] \text{ è il val. medio}$$

b) Sviluppando il quadrato

$$\sigma_X^2 = E[X^2 + \eta_X^2 - 2\eta_X X] = \underbrace{E[X^2]}_{\text{v.q.m.}} + \eta_X^2 - 2\eta_X E[X]$$

(si è usata la linearità di $E[\cdot]$ e la media della costante η_X^2)

$$\dots = E[X^2] - \eta_X^2 \qquad (1)$$

c) Secondo la definizione, il val. medio è

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \underbrace{\left[x\lambda\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx =$$

per parti

$$= \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Mentre il val. quadratico medio (v.q.m.) è

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x} = \underbrace{\left[x^2\lambda\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \underbrace{\left[2x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty}\frac{2}{\lambda}e^{-\lambda x}\,dx = \left[\frac{2}{\lambda}\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Da cui infine, applicando la (1),

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$