

Teoria dei Segnali

C. L. Ing. Informatica, Elettronica e delle Telecomunicazioni
(Dip. Ingegneria e Architettura - Università di Parma)

Prof. Armando Vannucci

November 8, 2021

Dipartimento di Ingegneria e Architettura (Pal. 2), viale delle Scienze 181/A - 43124 Parma.

Raccolta di esercizi didattici da svolgere durante il corso

Nel numerare gli esercizi, si adotta la seguente convenzione: n) sono gli esercizi con soluzione svolta; (n) quelli con soluzioni numeriche; $[n]$ quelli del libro, con sol. numerica; $[n])$ se svolti estensivamente. Un documento con le soluzioni svolte degli esercizi indicati con (n) “ o $[n])$ ” verrà reso disponibile online (su piattaforma E-learning) la settimana successiva a quella di assegnazione dell’esercizio; allo stesso modo, verranno pubblicate le soluzioni numeriche degli esercizi indicati con (n) “ o $[n]$ ”.

Parte I Segnali Determinati

In questa prima parte, si analizzano i segnali determinati. I numeri degli esercizi $[n]$ fanno riferimento ai capioli 1 – 4 del testo: A. Vannucci, *"Segnali Analogici e Sistemi Lineari"*, Pitagora Editrice, Bologna, 2003 (ISBN: 88-371-1416-8). Per una raccolta di esercizi d’esame con soluzioni, si rimanda al testo: A. Vannucci, *"Esercizi d’esame di Teoria dei Segnali"*, Pitagora Editrice, Bologna, 2018 (ISBN: 88-371-1811-2). Si veda la nota in Prefazione dell’ultimo testo citato, per una corretta metodica di approccio alla soluzione degli esercizi, che vale sia per esercizi didattici sia per esercizi d’esame.

I-A SEGNALI DETERMINATI: testo degli esercizi

[1]) Valutare durata, area, valor medio temporale, energia totale e potenza media di tutti i segnali notevoli (segnale costante, gradino unitario, impulso rettangolare, impulso triangolare, esponenziale negativo causale, segnale sinusoidale, fasore, segnale $\text{sinc}(t)$).

(2) Calcolare durata, area, valore medio, energia e potenza media dei segnali:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t); & s(t) &= e^{-t}u(t) + e^t u(-t) \\ y(t) &= \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(t + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(2bis) Sfruttando le note relazioni tra la “forma cartesiana” $z = a + jb$ e la “forma esponenziale” (o “forma polare”) $z = Ae^{j\varphi}$ dei numeri complessi, esprimere in forma esponenziale i seguenti numeri:

$$z_1 = j; \quad z_2 = 1 + j; \quad z_3 = 1 - j; \quad z_4 = -\sqrt{3} + j; \quad z_5 = 1 + \sqrt{3}j$$

In seguito, sfruttando le regole di moltiplicazione e divisione in forma polare, calcolare il risultato delle seguenti operazioni:

$$z_6 = (1 + j) \cdot (1 - j); \quad z_7 = j \cdot (1 - j); \quad z_8 = \frac{-\sqrt{3} + j}{1 + \sqrt{3}j}; \quad z_9 = j \cdot (1 + \sqrt{3}j)$$

ripetere, solo in seguito, gli stessi calcoli usando le regole di moltiplicazione e divisione in forma cartesiana, verificando la coincidenza dei risultati con quelli già calcolati in forma polare.

[3] Dato

$$s(t) = \begin{cases} \frac{5}{4} + \frac{t}{2} & \text{per } -4 \leq t < -1 \\ \frac{3}{4} & \text{per } -1 \leq t \leq 2 \\ 1 - \frac{t^2}{16} & \text{per } 2 < t \leq 4 \\ 0 & \text{per } |t| > 4 \end{cases}$$

tracciare il grafico e poi tracciare il grafico di $z(t) = s(t - 1)$ e di $y(t) = s(-2t)$. Solo in seguito, ottenere le espressioni matematiche di $z(t)$ e $y(t)$, verificandone la coerenza coi grafici tracciati.

4) Tracciare i grafici e, solo in seguito, trovare le espressioni analitiche, per i seguenti segnali:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \Lambda(t); & y(t) &= \Pi(t) - \Lambda(2t) \\ s(t) &= e^{-t}u(t) + e^t u(-t); & z(t) &= e^{j\pi t} + e^{-j\pi t} \end{aligned}$$

4bis) Stabilire come cambiano la *durata* D_x , il *valore medio temporale* $\langle x(t) \rangle$ e l'*energia totale* (*normalizzata*) E_x del segnale $x(t)$ quando questo viene sottoposto a:

- a) moltiplicazione per una costante A ;
- b) traslazione temporale dell'intervallo t_0 (a destra);
- c) cambiamento di scala con fattore $T > 1$ (espansione);

[5]) Dati i segnali $w(t) = \delta(t + 1) + \delta(t) + \delta(t - 1)$ e $y(t) = \cos(\pi t)$, determinare il risultato del prodotto: $z(t) = w(t) \cdot y(t)$. Determinare poi il risultato della convoluzione $y(t) * w(t)$.

(6) Dimostrare le seguenti relazioni tra segnali, sulla base delle proprietà della $\delta(t)$:

$$\begin{aligned}x(t) * \delta(t - t_0) &= x(t - t_0) \\ \frac{d\Pi(t)}{dt} &= \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ \Lambda(t) \cdot \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

7) Verificare, in base alla definizione di *causalità*, che l'*Amplificatore Ideale* e l'*Integratore a Finestra Mobile* sono entrambi dei sistemi causali. Si ricordi che tali due sistemi sono caratterizzati, rispettivamente, dalle seguenti relazioni ingresso-uscita:

$$\begin{aligned}y(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau\end{aligned}$$

8) Verificare, in base alla definizione di *stazionarietà*, se l'*Amplificatore Ideale* e l'*Integratore a Finestra Mobile* siano o meno dei sistemi stazionari.

9) Verificare, in base alla definizione, se l'*Amplificatore Ideale* sia un sistema *lineare* oppure no. Ripetere la verifica per l'*Integratore a Finestra Mobile*.

[10] Discutere e dimostrare se le proprietà illustrate per i sistemi (*causalità*; *realizzabilità ideale e fisica*; *memoria*; *stabilità B.I.B.O.*; *stazionarietà*; *linearità*; *omogeneità*) valgono o meno per i sistemi specificati dalle seguenti relazioni ingresso-uscita:

$$\begin{aligned}y(t) &= A + Bx(t); & y(t) &= t \cdot x(t); \\ y(t) &= \log(x(t)); & y(t) &= x(t + t_0) \quad (\text{con } t_0 < 0); \\ y(t) &= |x(t)|; & y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ & & & (\text{con } h(\theta) = 0 \text{ per } \theta < 0); \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(\tau)h(t - \tau)d\tau; & y(t) &= x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t); \end{aligned}$$

dove tutti i simboli ($A, B, t_0, f_0 \dots$) rappresentano delle costanti assegnate.

11) Verificare la *linearità* e la *stazionarietà* dei seguenti sistemi:

$$\begin{aligned}y(t) &= k + x(t); & y(t) &= t^2 \cdot x(t); \\ y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau + t_0)d\tau; & y(t) &= \int_{-t}^t x(\tau)d\tau; \\ y(t) &= x(t) + x(t - t_0) - x(t - 2t_0); & & \end{aligned}$$

dove k, t_0 sono costanti assegnate.

[12]) Valutare la risposta impulsiva dell'*amplificatore ideale* e poi quella dell'*integratore a finestra mobile*, che sono entrambi sistemi LS. Esprimere poi il risultato attraverso i segnali notevoli noti ($\Pi(t)$, $\Lambda(t)$, $\delta(t)$, etc.).

(Suggerimento: nella relazione ingresso-uscita dei sistemi, si sostituisce $\delta(t)$ ad $x(t)$ e si ottiene, in base alla definizione di risposta impulsiva, $h(t) = y(t)$, valutando quanto vale l'uscita al variare del tempo t .)

13) Valutare la risposta impulsiva dei sistemi descritti dalle seguenti relazioni ingresso-uscita:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau + t_0) d\tau; & y(t) &= x(t) + x(t - t_0) - x(t - 2t_0); \\ y(t) &= \int_{+t}^{+\infty} Ax(\tau) d\tau; \end{aligned}$$

Nota: i sistemi si assumono essere L.S. (senza dimostrarlo)... altrimenti non avrebbe senso calcolare la risposta impulsiva.

[14] Ricavare la risposta al gradino (*risposta indiciale*) $g(t)$ del circuito RC di Fig. 1:

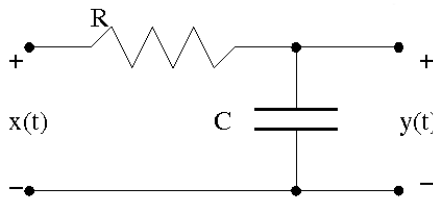


Figure 1: Filtro RC passa-basso dell'esercizio [14].

assumendo il condensatore inizialmente scarico.

Ricavare poi la risposta impulsiva $h(t) = g'(t)$ derivando $g(t)$; esprimere $h(t)$ attraverso i segnali noti. (Suggerimento: impostare l'equazione differenziale che governa il circuito e poi risolverla per $t < 0$, dove $x(t) = u(t) = 0$, e per $t \geq 0$, dove $x(t) = u(t) = 1$. Fare attenzione ad imporre la continuità, per le due soluzioni, in $t = 0$.)

[15]) (DIFFICILE)

Con lo stesso metodo del precedente esercizio, ricavare la risposta impulsiva del filtro di Fig. 2

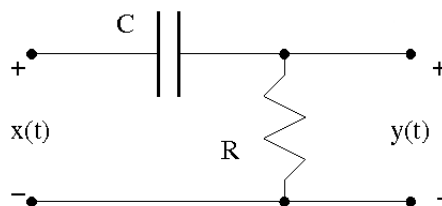


Figure 2: Filtro CR (passa-alto) dell'esercizio [15]).

assumendo C inizialmente scarico.

[16])

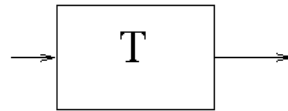


Figure 3: Elemento di ritardo dell'esercizio [16a]).

a) Si valuti la risposta impulsiva di un “elemento di ritardo”, la cui relazione ingresso-uscita è

$$y(t) = x(t - T)$$

e il cui schema a blocchi è riportato in Fig. 3.

b) Si valuti, di seguito, la risposta impulsiva del sistema descritto dallo schema a blocchi di Fig. 4

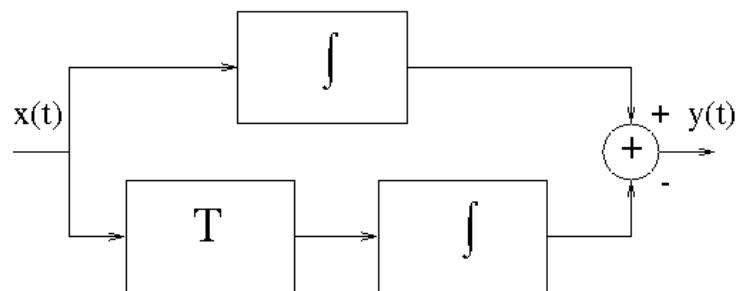


Figure 4: Schema a blocchi dell'esercizio [16b]).

in cui compaiono due “integratori”, con relazione ingresso-uscita

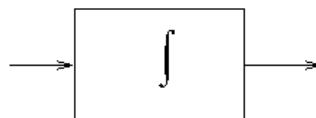


Figure 5: Schema a blocchi del filtro integratore dell'esercizio [16b]).

$y_1(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau$; ed un “sottrattore”. Lo schema a blocchi impiegato per l'integratore è quello di Fig. 5.

c) progettare un sistema (schema a blocchi) che realizzi la stessa risposta impulsiva trovata al punto b), impiegando: 1 elemento di ritardo, 1 sottrattore e 1 integratore.

17) Valutare la risposta impulsiva dei sistemi descritti dai seguenti schemi a blocchi:

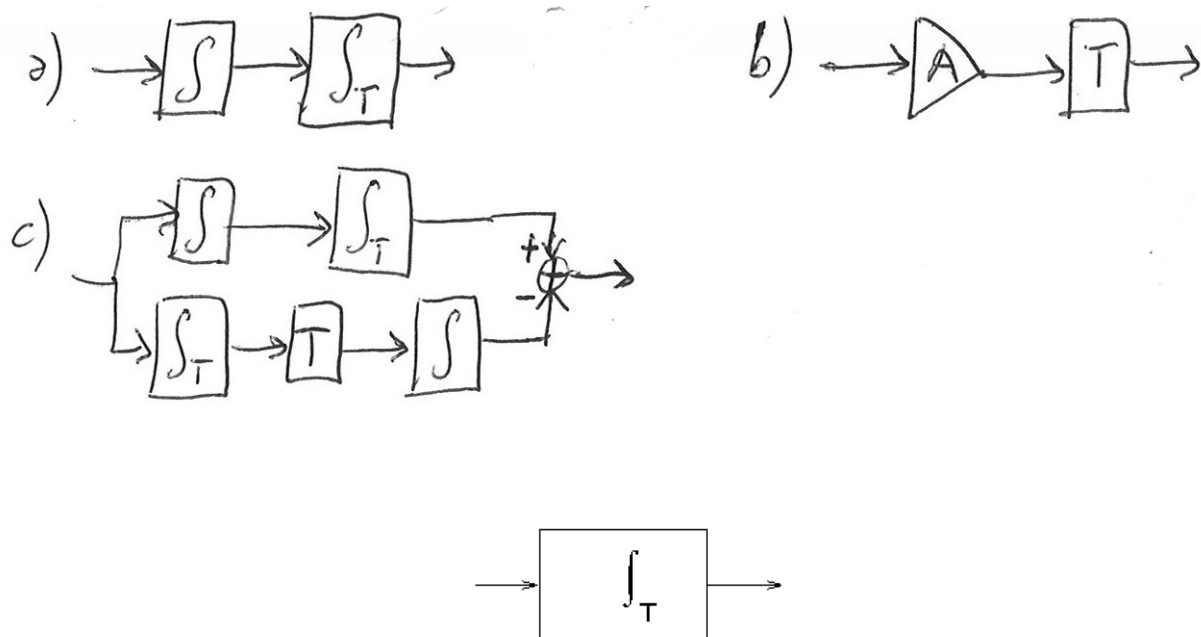


Figure 6: Schema a blocchi del filtro integratore a finestra mobile, dell'esercizio 17).

dove il blocco riportato in Fig. 6 indica un *integratore a finestra mobile*. Tracciare, per ciascun sistema, il grafico della risposta impulsiva ed esprimerla analiticamente attraverso i segnali notevoli già noti.

[18] Valutare graficamente il risultato della convoluzione $a(t)*b(t)$, dove $a(t) = \Pi(t)$ e $b(t) = \Pi(t)$.

(18bis) Valutare la risposta impulsiva del sistema di Fig. 7.



Figure 7: Schema a blocchi del sistema dell'esercizio (18bis).

[19] Dato lo schema elettrico del circuito RC passa-basso dell'esercizio 14, di cui è nota la risposta impulsiva $h(t)$, calcolare il segnale di uscita $y(t)$ quando in ingresso si presenta $x(t) = A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$. Impiegare il metodo grafico per stimare l'andamento di $y(t)$ e poi per facilitare il calcolo analitico di $x(t) * h(t)$. Cosa cambia in $y(t)$ se $T = RC$ oppure $T = RC/100$?

(20) Valutare, attraverso l'analisi della loro risposta impulsiva (NOTA: già calcolata nell'esercizio 13)), se i seguenti sistemi sono: causali; idealmente e/o fisicamente realizzabili; con o senza memoria;

stabili (B.I.B.O.).

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau + t_0) d\tau & (t_0 < 0) \\y(t) &= x(t) + x(t - t_0) - x(t - 2t_0) & (t_0 > 0) \\y(t) &= \int_{+t}^{+\infty} Ax(\tau) d\tau\end{aligned}$$

[21]) Ricavare e tracciare il grafico della risposta in ampiezza e della risposta in fase del filtro RC presentato nell'esercizio [14], a partire dalla conoscenza della risposta impulsiva che è stata lì calcolata.

22) Partendo dal risultato dell'esercizio [15]) (risposta impulsiva del filtro CR), valutare le risposte in ampiezza e in fase di tale filtro, tracciandone il grafico.

23) Sia dato il filtro RC passa-basso di Fig.1, in cui la resistenza $R = 4 \text{ k}\Omega$ e la capacità $C = 40 \text{ nF}$. valutare l'espressione analitica del segnale di uscita, tracciandone almeno schematicamente il grafico, quando il segnale d'ingresso è:

- a) $x(t) = A \cos\left(\frac{t}{RC}\right)$;
- b) $x(t) = 2 \cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{2}\right) + 20 \sin(2\pi 20000t)$;
- c) $x(t) = A \cos(20000\pi t + \pi)$;

(23bis) In un sistema L.S. idealmente realizzabile, con funzione di trasferimento $H(f)$, entra il segnale complesso

$$x(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi) + jA \cos\left(2\pi ft + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Calcolare l'uscita $y(t)$.

(24) Risolvere di nuovo l'esercizio 23), considerando gli stessi segnali d'ingresso, ma scambiando, nel circuito, la posizione di R e di C, ottenendo così il filtro CR passa-alto di Fig. 2 (NOTA: R e C conservano i valori dell'esercizio 23)).

[25]) Calcolare i coefficienti di Fourier X_k dell' "onda quadra con *duty-cycle* del 50%", data dalla seguente espressione:

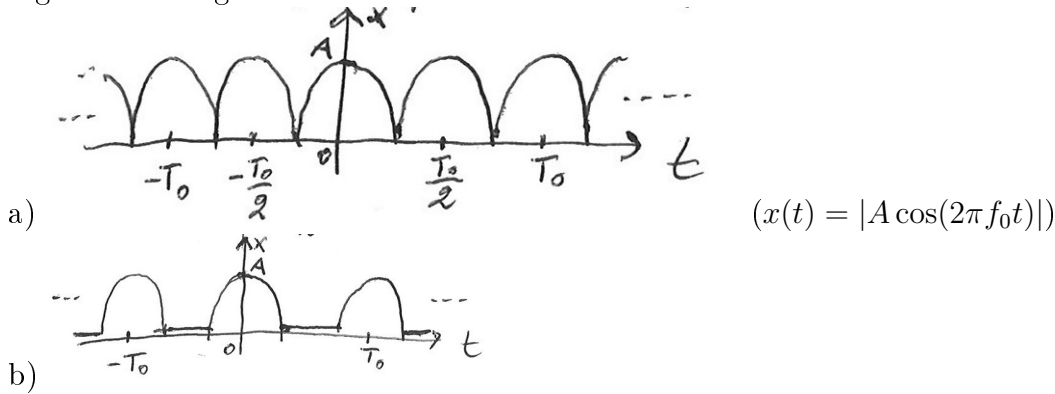
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{T_0/2}\right)$$

Tracciare, in seguito, gli spettri a righe di ampiezza e di fase.

(26) Calcolare i coefficienti di Fourier dei segnali:

- a) $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$;
 - b) $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$;
 - c) $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) + A_3 \cos(6\pi f_0 t + \varphi_3)$;
- (SUGGERIMENTO: si sfruttino le formule di Eulero)

(27) Determinare il periodo, calcolare i coefficienti di Fourier e tracciare gli spettri a righe per i seguenti due segnali:



NOTA: il primo segnale rappresenta l'uscita di un circuito nonlineare detto “raddrizzatore a doppia semionda”, la cui relazione ingresso-uscita è $y(t) = |x(t)|$, quando l'ingresso è una sinusoide di frequenza f_0 . Il secondo è l'uscita di un “raddrizzatore a singola semionda”: $y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{se } x(t) < 0 \end{cases}$.

(28) Valutare i coefficienti di Fourier X_k del segnale $x(t)$ riportato nel seguente grafico, individuando la frequenza fondamentale. Riportare poi ampiezza e fase degli $X_k = A_k e^{j\varphi_k}$ in due grafici

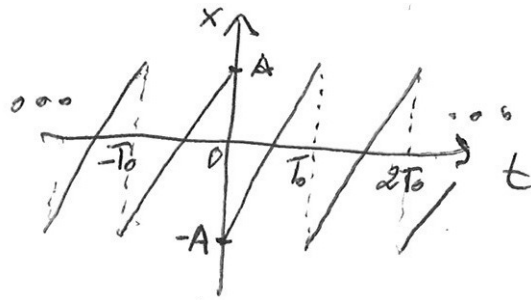


Figure 8: Il segnale dell'es. (28), detto “a dente di sega” a causa del suo profilo.

(spettri a righe) che mostrino A_k e φ_k in funzione della frequenza armonica kf_0 .

(29) Tracciare il grafico del segnale periodico

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t - nT_0}{T_0/2}\right)$$

individuandone, sul grafico, il periodo. Calcolare poi ampiezza e fase dei coefficienti di Fourier X_k , riportandoli negli spettri a righe.

NOTA: il segnale si chiama “onda triangolare” a causa del profilo del suo grafico.

(30) Tracciare il grafico e, da questo, determinare il periodo di

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{T_0/2}\right)\right)$$

Calcolare poi gli X_k , tracciandone gli spettri a righe.

(31) Calcolare i coefficienti di Fourier Y_0, Y_1, Y_{-1} del segnale $y(t)$ in uscita da un filtro RC passa-basso (vedi es. 14), quando in ingresso si presenta l'onda quadra con duty-cycle del 50% dell'es. 25. I valori dei parametri sono: $R = 10\Omega$; $C = 10nF$; $f_0 = \frac{1}{T_0} = 1GHz$; l'ampiezza massima di $x(t)$ è di 1V.

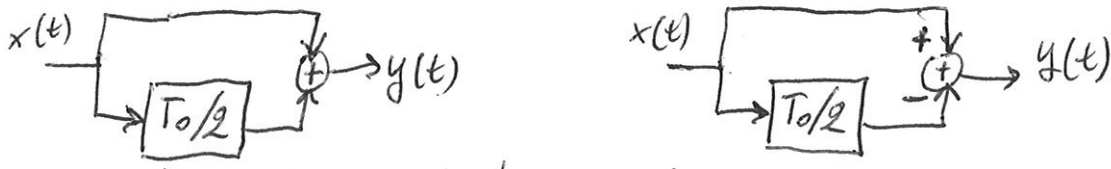


Figure 9: I due sistemi dell'es. (32).

(32) Si supponga che il segnale $x(t)$ dell'esercizio 30 si presenti in ingresso ai due sistemi lineari e stazionari in Fig. 9. Si valuti la risposta impulsiva dei due sistemi e poi i rispettivi segnali di uscita, tracciandone il grafico. Si traccino gli spettri a righe dei segnali di uscita.

(Suggerimento: per il calcolo dell'uscita, si operi nel dominio del tempo, con la convoluzione.)

(32bis) Si calcoli la Trasformata di Fourier del segnale esponenziale negativo causale $x(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}u(t)$.

[33] Stabilire se la trasformata $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ e l'antitrasformata $x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)]$ convergono *quasi ovunque* oppure convergono *in media*, nel caso in cui $x(t) = \Pi(t)$. In quali intervalli (o punti) dell'asse t l'antitrasformata non coincide con $x(t)$?

[34] Si supponga che un segnale $x(t) = \Pi(t)$ venga filtrato da un sistema LS con risposta impulsiva $h(t) = \Pi(t)$. Qual è lo spettro $Y(f)$ del segnale di uscita? Senza fare il calcolo esplicito, si sa determinare l'antitrasformata di $Y(f)$?

(SUGGERIMENTO: si tenga conto del risultato dell'esercizio 18)

[35] Si determini l'energia totale del segnale $x(t) = \alpha e^{-\alpha t}u(t)$ con $\alpha > 0$, ricorrendo alla definizione di E_x . Calcolare poi E_x , applicando il Teorema di Rayleigh, dopo aver calcolato $X(f)$. Verificare che i due risultati coincidono.

(36) Calcolare lo spettro di Ampiezza, Fase ed Energia del segnale impulsivo $x(t) = \Pi(t)$.

[37] Calcolare, in base alla definizione di \mathcal{A}_x , l'area del segnale $x(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}u(t)$. Verificare in seguito che \mathcal{A}_x coincide con $X(f)|_{f=0}$ valutata nell'origine.

[38] Supponendo che il segnale $s(t)$ sia puramente immaginario, quali simmetrie si possono dedurre per il suo spettro $S(f)$? Quali altre simmetrie valgono se $s(t)$, oltre a essere immaginario, è anche dispari?

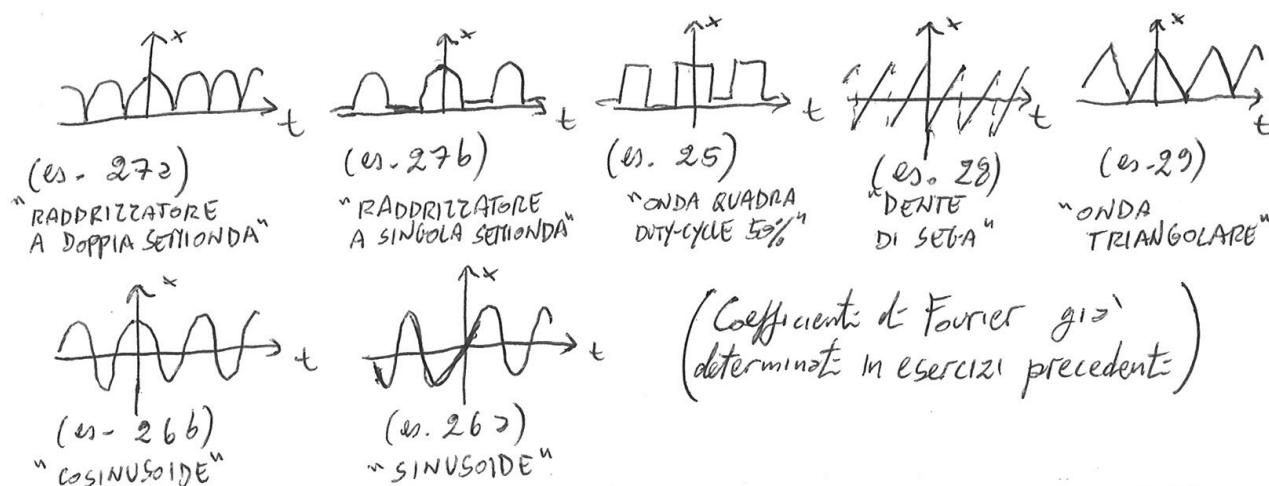


Figure 10: Grafici dei segnali dell'es. (39).

(39) Controllare quali simmetrie valgono per i coefficienti di Fourier dei segnali aventi i grafici riportati in Fig. 10, legando le simmetrie degli X_k alle simmetrie dei segnali $x(t)$ nel dominio del tempo. Si noti che i coefficienti di Fourier di tutti i segnali in oggetto sono stati già determinati in esercizi precedenti.

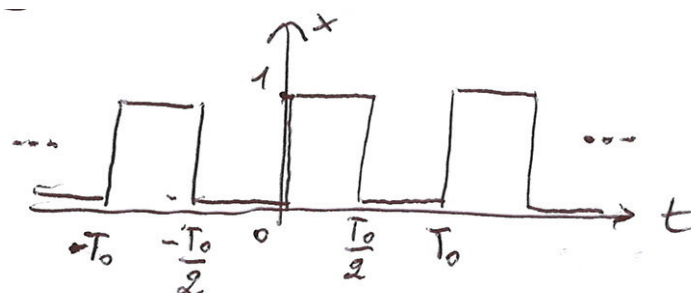


Figure 11: Grafico del segnale dell'es. (40): si noti che è un'onda quadra traslata di $T_0/4$.

(40) Dato il segnale periodico descritto dal grafico in Fig. 11,

- Determinare il grafico della parte pari $x_p(t)$ e della parte dispari $x_d(t)$ di $x(t)$.
- Calcolare i coefficienti di Fourier X_{pk} e X_{dk} relativi ai segnali periodici $x_p(t)$ e $x_d(t)$, tracciandone gli spettri a righe.
- spiegare come sono legati i coefficienti X_{pk} e X_{dk} ai coefficienti di Fourier X_k di $x(t)$. Tracciare gli spettri a righe degli X_k .

(41) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale complesso $x(t) = \frac{1}{1+jt}$. Quali simmetrie presenta $x(t)$ nel dominio del tempo? E di quali proprietà gode lo spettro?

(42) Si verifichi se $x(t) = \frac{1}{1+jt}$ è, in base alla definizione, un segnale di energia, calcolando quanto vale E_x . Si applichi poi il Teorema di Rayleigh calcolando E_x a partire dallo spettro $X(f)$ determinato nell'esercizio precedente.

[43] Calcolare la funzione di trasferimento di un sistema LS con risposta impulsiva $h(t) = B\text{sinc}(Bt)$, con $B > 0$. Evidenziare le simmetrie e valutare la banda di $H(f)$. Qual è l'area \mathcal{A}_x del segnale, se $B = 100\text{Hz}$?

[44] Si calcoli $\mathcal{F}[x(t)]$, con $x(t) = e^{-|t|}$, tracciandone il grafico e verificando le simmetrie. SUGGERIMENTO: definito il segnale $s(t) = e^{-t}u(t)$, si verifichi che si può esprimere $x(t) = s(t) + s(-t)$.

(45) Calcolare e tracciare il grafico dello spettro di energia di $x(t) = \text{sinc}(t)$. Valutare l'energia totale E_x .

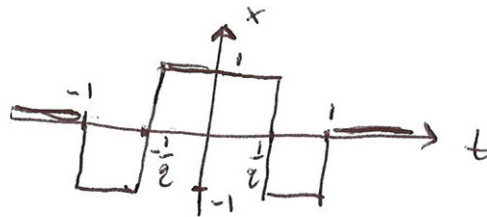


Figure 12: Grafico del segnale dell'es. (45bis).

(45bis) Calcolare la Trasformata di Fourier del segnale riportato nel grafico di Fig. 12.

(46) Calcolare, conoscendo lo spettro di $x(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}u(t)$ ($T > 0$), qual è la trasformata di $s(t) = e^{-t/T}u(t)$ (usando la linearità) e quella di $w(t) = e^{-t}u(t)$. Spiegare la relazione che intercorre tra i segnali $w(t)$ e $s(t)$ e quale relazione intercorre tra gli spettri $W(f)$ e $S(f)$.

(47) Tracciare lo spettro a righe (Serie di Fourier) del segnale $x(t) = \cos(2\pi f_0 \frac{t}{T})$, con $f_0 > 0$ e $T > 0$. Quale relazione intercorre tra lo spettro a righe di $x(t)$ e quello di $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$?

[48] Qual è la risposta in frequenza di un filtro caratterizzato dalla risposta impulsiva $h(t) = B\text{sinc}(B(t - \alpha))$ ($B > 0$)?

[49] Calcolare la funzione di trasferimento di un filtro Integratore a Finestra Mobile, la cui risposta impulsiva è $h_{ifm}(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$, tracciando i grafici delle risposte in ampiezza e in fase.

(50) valutare la trasformata di Fourier di $x(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{(t-T)}{T}}u(t-T)$. Valutare poi la T.F. di $s(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{(t-T)}{T}}u(t)$. Tracciare i grafici dei segnali e spiegare in cosa differiscono i loro spettri di ampiezza e di fase.

(51) Valutare la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ il cui grafico è riportato in Fig. 13. dare un'espressione matematica per $x(t)$ e valutare lo spettro di ampiezza $A_X(f)$ e di fase $\varphi_X(f)$ di $X(f)$.

(52) Conoscendo la trasformata di $x(t) = \text{sinc}(t)$, calcolarne l'area e l'energia totale, \mathcal{A}_x e E_x . Calcolare ora area ed energia totale del segnale $s(t) = x(t - T)$, tracciandone il grafico per $T = 1$.

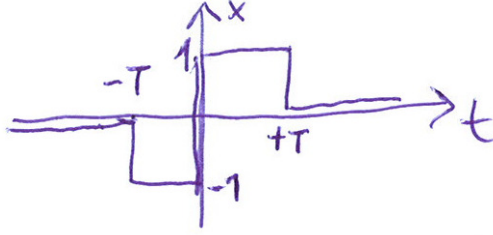


Figure 13: Segnale $x(t)$ dell'es. (51).

(53) Dimostrare, ricorrendo alla definizione della T.F., che la trasformata di $x(t)e^{+j2\pi f_0 t}$ è $X(f - f_0)$.

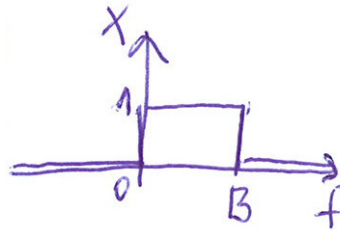


Figure 14: Spettro $X(f)$ dell'es. (54).

(54) Scrivere l'espressione analitica dello spettro $X(f)$ riportato nel grafico di Fig. 14. Ricavare dunque l'antitrasformata $x(t)$.

[55]) Si tracci il grafico della risposta in ampiezza e si calcoli la risposta impulsiva del *filtro passa-banda ideale* di banda monolaterale B centrata sulla frequenza f_0 , la cui funzione di trasferimento è $H_{BP}(f) = \Pi\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_0}{B}\right)$.

[56] Per trasmettere un impulso rettangolare $\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ su un canale radio, lo si modula in ampiezza ottenendo il segnale $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t)$, detto *impulso a radiofrequenza*. Assumendo $f_0 = \frac{20}{T}$, si tracci il grafico di $x(t)$ e si valuti lo spettro $X(f)$.

(57) Si valuti la T.F. e si traccino, almeno approssimativamente, gli spettri dei seguenti segnali:

$$x(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \cos(10t/T) u(t); \quad y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \sin(10t/T) u(t)$$

(58) Si valuti l'antitrasformata dello spettro in Fig. 15. Data la simmetria di $X(f)$, di quali proprietà deve godere $x(t)$?

SUGGERIMENTO: si scriva l'espressione analitica di $X(f)$; poi si moltiplichi e si divida per j , ricordando che $\pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$.

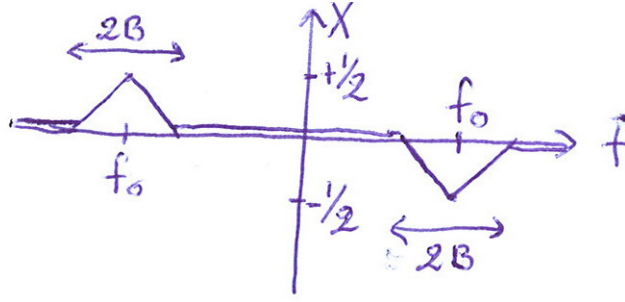


Figure 15: Spettro $X(f)$ dell'es. (58).

(59) Siano dati i filtri con risposta in frequenza:

$$H_1(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_0 + B}\right); \quad H_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_0 - B}\right)$$

calcolare $h_1(t)$ e $h_2(t)$. Si verifichi che $H_1(f) - H_2(f) = H_{BP}(f)$ coincide con la risposta del filtro passa-banda dell'esercizio [55]. Si dimostri dunque che, per il teorema di Lerch (unicità dell'antitrasformata), $h_1(t) - h_2(t) = h_{BP}(t)$.

[60]) Si ricavi nuovamente la risposta impulsiva del filtro CR dell'esercizio [15] attraverso il seguente procedimento:

- scrivere l'equazione differenziale che lega $x(t)$ a $y(t)$;
- trasformare ambo i membri di tale equazione, mediante il Teorema di derivazione;
- ricavare $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$;
- antitrasformare $H(f)$.

[61] Il segnale $x(t) = 2A + A \cos(2\pi f_0 t)$ transita in un filtro CR passa-alto con frequenza di taglio $f_t = \frac{1}{2\pi RC}$ pari a $f_0/100$. Si valuti il segnale di uscita $y(t)$, tracciando i grafici di $x(t)$ e $y(t)$.

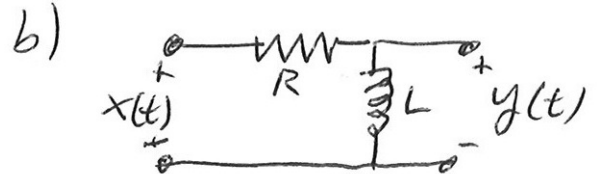
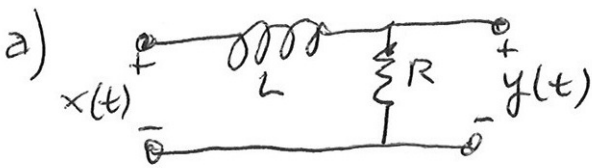


Figure 16: Schemi circuitali dei filtri LR dell'es. (62).

(62) Con lo stesso metodo dell'esercizio [60], ricavare la risposta impulsiva dei due filtri LR di Fig. 16. Preliminarmente, si stabilisca se tali sistemi sono Lineari e Stazionari.

[63]) Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $\Lambda(t)$, tenendo presente che la sua derivata è $x(t) = \Pi\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right)$ (usare il Teorema di Integrazione).

[64] Il segnale $x(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}u(t) - \frac{1}{T}e^{+t/T}u(-t)$ transita in un circuito integratore. Si valuti il segnale in uscita dal filtro e il relativo spettro, evidenziandone le simmetrie. Si proceda dapprima

nel dominio del tempo e, in seguito, nel dominio della frequenza, controllando che i due risultati coincidono.

[65]) (DIFFICILE)

Il segnale $x(t) = e^{-\pi t^2}$ è detto *segnale Gaussiano*. Se ne valuti lo spettro usando il Teorema di Derivazione in f .

[66] (DIFFICILE)

Si calcoli la *funzione caratteristica* di una Variabile Aleatoria Gaussiana Z con media η_Z e varianza σ_Z^2 , definita da $\Phi_Z(\omega) = E[e^{j\omega z}]$.

Suggerimento: la $\Phi_Z(\omega)$ coincide con la Trasformata di Fourier della funzione densità di probabilità (pdf), una volta che si operi la sostituzione $f = \frac{-\omega}{2\pi}$.

[67] Si calcoli l'espressione analitica dello spettro del segnale $x(t) = t\Pi(t - \frac{1}{2})$.

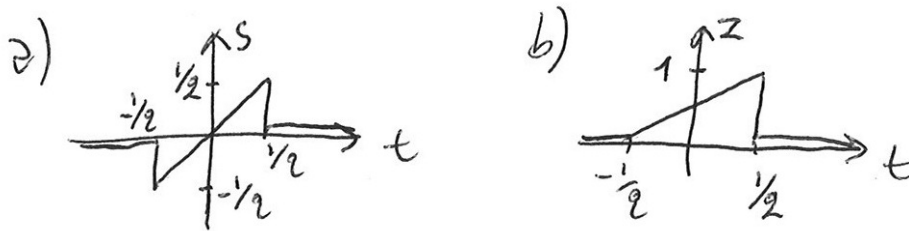


Figure 17: Segnali “a rampa” dell'es. (68).

(68) Come sono legati lo spettro calcolato nell'es. [67] e le Trasformate di Fourier dei segnali in Fig.17?

(68bis) Dato il segnale $s(t) = t \cdot \Pi(t)$, se ne calcoli la Trasformata di Fourier come nell'esercizio (68). Qual è lo spettro del segnale $w(t)$ in uscita da un filtro derivatore al cui ingresso è posto $s(t)$? Dopo aver calcolato $W(f)$, calcolare $w(t)$ come derivata del segnale $s(t)$.

[69]) Calcolare la trasformata di $\text{sinc}^2(t) = x(t) \cdot x(t)$, dove $x(t) = \text{sinc}(t)$, sfruttando il Teorema del Prodotto.

[70] Dato il segnale $x(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}u(t)$, di cui si conosce lo spettro $X(f)$, si valuti la convoluzione $z(t) = x(t) * x(t)$ e, in seguito, si calcoli $Z(f)$ usando il Teorema di Derivazione in Frequenza. Si verifichi che il risultato coincide con $X^2(f)$.

[71] (MOLTO DIFFICILE)

Valutare lo spettro di $s(t) = x(t) \cdot y(t)$, dove $x(t) = e^{-t/T_1}u(t)$ e $y(t) = e^{-t/T_2}u(t)$, con $(T_1 > 0, T_2 > 0)$. Si proceda dapprima valutando l'espressione $x(t) \cdot y(t)$ e poi, in alternativa, tramite il Teorema del Prodotto.

[72]) Utilizzando degli amplificatori ideali e dei filtri passa-basso e passa-banda ideali, si disegni lo schema a blocchi di un “equalizzatore a 3 bande”, cioè di un sistema in grado di amplificare selettivamente le componenti frequenziali del segnale di ingresso che cadono negli intervalli $\Delta B_L = [0, B_L]$, $\Delta B_I = [B_L, B_H]$ e $\Delta B_H = [B_H, +\infty]$ (considerando solo le frequenze positive: le frequenze negative vengono amplificate in modo simmetrico).

[73] Utilizzando filtri ideali, amplificatori ideali, sommatori e sottrattori, realizzare un “filtro passa-alto ideale”, tale che mantenga inalterate le componenti frequenziali dell’ingresso per $|f| > B_H$ e annulli invece le componenti di frequenza $|f| < B_H$. Come si può migliorare il sistema dell’esercizio precedente per fare in modo da agire separatamente sui guadagni relativi alle 3 bande?

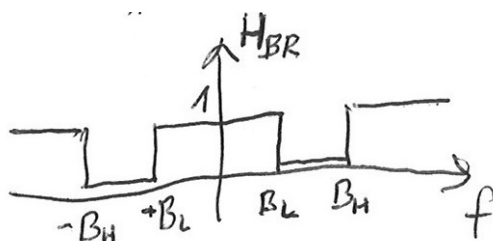


Figure 18: Filtro ideale a reiezione di banda, dell’es. (74).

(74) Utilizzando i componenti noti (filtri ideali, sommatori, sottrattori, amplificatori ideali...), come si può progettare uno schema a blocchi che realizzi il “filtro ideale a reiezione di banda”, la cui risposta in frequenza è riportata in Fig. 18?

(75) Realizzare lo stesso progetto, avendo a disposizione solo sommatori, sottrattori e filtri passa-basso ideali.

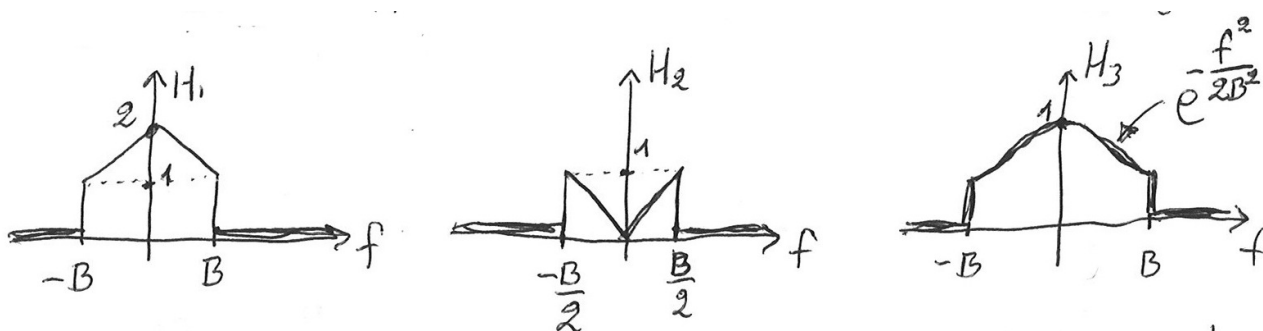


Figure 19: Risposte in frequenza dei sistemi di cui all’es. (76).

(76) Progettare gli schemi a blocchi dei sistemi che realizzano le risposte in frequenza riportate in Fig. 19. Si trovino le risposte impulsive dei singoli blocchi.

(77) Calcolare l’espressione $e_{xy}(t)$ della correlazione tra il segnale $x(t) = e^{-t}u(t)$ e il segnale $y(t)$ uscente da un *canale perfetto* (connessione in cascata di un amplificatore ideale di guadagno A e di

un elemento di ritardo con ritardo T : vedi es. 81). Calcolare dapprima $e_{xy}(t)$ in base alla definizione, nel dominio del tempo, e poi valutando $E_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$ e antitrasformando.

(78) Calcolare l'autocorrelazione $e_x(t)$ del segnale $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$, antitrasformando $E_x(f) = |X(f)|^2$. Controllare che $e_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f)df$ sia uguale all'energia E_x del segnale (valutata in base alla definizione).

(79) Calcolare l'autocorrelazione del segnale di potenza $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$.

NOTA: nel calcolo, si tenga presente che il valore medio temporale di una sinusoidale è nullo, ovvero che vale $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi f\tau + \varphi) d\tau = 0 \quad (\forall f)$.

[80]) nelle Telecomunicazioni, si definisce “canale ideale” un sistema con relazione ingresso-uscita: $y(t) = x(t)$. Calcolare la funzione di trasferimento del canale ideale e dell'Elemento di Ritardo: $y(t) = x(t - t_0)$.

[81]) Si dice “canale perfetto” un sistema con relazione ingresso-uscita: $y(t) = Ax(t - t_0)$; esso è la cascata di un amplificatore ideale e di un elemento di ritardo. Calcolarne la risposta in frequenza $H_{perf}(f)$.

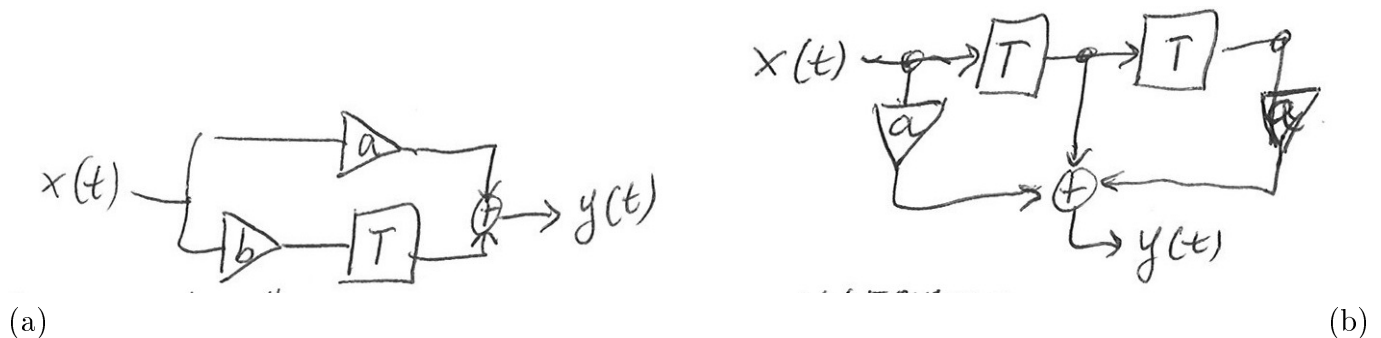


Figure 20: Schemi a blocchi dei sistemi degli esercizi (82) (schema (a)) e (83) (schema (b)).

[82] Calcolare risposta impulsiva e risposta in ampiezza del sistema il cui schema a blocchi è riportato in Fig. 20(a), in cui $0 \leq b \leq a \leq 1$. Cosa accade alla $|H(f)|$ variando i parametri a, b, T ? Cosa accade, ad esempio, al variare di T nel caso $a = b$? Cosa accade se $a = b$ e $T = 0$?

NOTA: tale sistema è detto “canale con fading” e modella il comportamento di un canale radio “con eco”, cioè tale per cui l’onda elettromagnetica raggiunge il ricevitore attraverso due percorsi: un *raggio diretto*, con guadagno $a \leq 1$ (attenuazione) e ritardo che si assume nullo, e un *raggio riflesso*, con guadagno $b \leq a$ (maggiore attenuazione) e *ritardo di eco* pari a T , valutato rispetto al ritardo del raggio diretto (assunto nullo). Una qualunque componente armonica del segnale che viaggia sul raggio diretto interferisce (vedi sommatore nello schema a blocchi) con la stessa componente armonica propagatasi sul raggio riflesso, la quale però ha accumulato maggiore ritardo e maggiore attenuazione, a causa della più lunga distanza percorsa. Le armoniche possono dunque sommarsi in maniera costruttiva o distruttiva a seconda di quale sfasamento è stato introdotto dal ritardo di eco rispetto alla frequenza dell’armonica stessa. Di qui, il profilo della risposta in ampiezza.

(83) Calcolare risposta impulsiva e risposta in frequenza $H(f)$ del sistema il cui schema a blocchi è riportato in Fig. 20(b).

SUGGERIMENTO: per ricavare risposta in ampiezza e in fase, mettere a fattor comune il termine $e^{-j2\pi fT}$ in $H(f)$.

NOTA: un sistema del tipo riportato è detto “linea di ritardo” o, in inglese, “tapped delay line” (TDL). *Tap*, che vuol dire rubinetto, indica che “una certa quantità di segnale viene spillata”, attraverso gli amplificatori, dal segnale di ingresso variamente ritardato dagli elementi di ritardo della linea. Tale architettura è ampiamente utilizzata per costruire, ad esempio, filtri equalizzatori di segnale (vedi esercizi successivi), che realizzino (in modo approssimato) l’inverso di una data funzione di trasferimento.

(84) Progettare un filtro che equalizzi il sistema dell’esercizio (83) all’interno della banda monolaterale $\frac{1}{2T}$, ovvero trovare la risposta in frequenza di un filtro equalizzatore $H_{eq}(f)$ tale che renda la risposta in frequenza totale pari a

$$H_{tot}(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi fT} & \text{per } |f| \leq \frac{1}{2T} \\ \text{non importa} & \text{per } |f| > \frac{1}{2T} \end{cases}$$

È possibile equalizzare la $H(f)$ dell’es. (83) nel caso $a = 1/2$?

(85) Qual è la Trasformata di Fourier di un generico fasore $x(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$? Quali sono i valori di φ che conferiscono al segnale delle proprietà di simmetria (Hermitiana o anti-Hermitiana) e cosa accade allo spettro?

(86) Valutare $\mathcal{F}[\cos^2(2\pi f_0 t)]$ usando il Teorema del Prodotto: $x(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$, con $s_1(t) = s_2(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. La $\frac{1}{2}\delta(f)$ che compare nello spettro è sintomo di una componente continua in $x(t)$, con valore medio temporale pari a $\langle x(t) \rangle = \frac{1}{2}$; come si giustifica la presenza di tale valore medio?

(87) Il segnale $x(t) = e^{-t/T}u(t)$ transita in un filtro integratore; valutare lo spettro $Y(f)$ del segnale di uscita e poi, antitrasformando, il segnale $y(t)$. Come si può dedurre il valor medio temporale $\langle y(t) \rangle$ dallo spettro?

NOTA: è opportuno espandere l’espressione di $Y(f)$ in *frazioni parziali*: $\frac{m(f)}{p(f) \cdot q(f)} = \frac{A(f)}{p(f)} + \frac{B(f)}{q(f)}$, con $A(f), B(f)$ tali che $A(f)q(f) + B(f)p(f) = m(f)$.

(88) Il *Treno di Impulsi di Dirac* $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ transita in un filtro con risposta in frequenza $H(f) = \frac{T}{2} \text{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right)$; valutare $h(t)$ e dunque $y(t) = h(t) * c(t)$. In seguito, dopo aver calcolato $y(t)$ nel dominio del tempo, si calcoli il suo spettro come $Y(f) = H(f) \cdot C(f)$.

(88bis) Il *pettine di δ* , $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$, transita in un filtro con risposta in frequenza $H(f) = \frac{3T_0}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{3T_0}{4}f\right)$; valutare $h(t)$ e dunque $y(t) = h(t) * c(t)$. In seguito, dopo aver calcolato $y(t)$ nel tempo, si calcoli il suo spettro come $Y(f) = H(f) \cdot C(f)$.

(89) Verificare che i campioni degli spettri dell'“impulso base” $x_0(t)$ e della “replica base” $s(t)$, estratti sulle frequenze armoniche, coincidono per l'esempio riportato in Fig.4.7 del libro. Verificare cioè che $f_0 X_0(kf_0) = f_0 S(kf_0)$, con $x_0(t) = \Lambda\left(\frac{t}{3T_0/4}\right)$ e $s(t) = \frac{2}{3}\Pi\left(\frac{t}{T_0}\right) + \frac{1}{3}\Lambda\left(\frac{t}{T_0/4}\right)$.

(90) Calcolare e tracciare il grafico dello spettro di

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\left|\frac{t-nT_0}{T_0}\right|}$$

[91] Conoscendo i coefficienti di Fourier X_k del segnale periodico $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0)$, valutare i coefficienti di Fourier Y_k del segnale periodico $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - T_0/2 - nT_0)$ e dimostrare che vale la relazione $Y_k = X_k \cdot (-1)^k$.

(92) Un segnale periodico esprimibile come $z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_0(t - nT_0) - x_0(t - T_0/2 - nT_0))$ si dice “segnale periodico alternante”. Scegliere un segnale $x_0(t)$ a piacere, di durata $\leq \frac{T_0}{2}$, e tracciare il grafico di $z(t)$ evidenziando le “alternanze”. Dimostrare che i coefficienti di Fourier Z_k sono nulli per k pari, cioè che $z(t)$ è privo di armoniche pari.

(93) Il segnale $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - nT_0)$ viene sottoposto a scalatura dell'asse t , ottenendo $z(t) = x\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{t}{T} - nT_0\right)$. Trovare il periodo del segnale scalato e i suoi coefficienti di Fourier Z_k . Che relazione sussiste tra X_k e Z_k ?

NOTA: si veda, al proposito, anche l'es.(47), che rappresenta un caso particolare del concetto sotteso dal presente esercizio.

[94] Dimostrare, sfruttando le nozioni sullo spettro dei segnali periodici, che i coefficienti di Fourier X_k di un segnale periodico reale e pari $x(t)$ sono anch'essi reali e vale $X_{-k} = X_k$.

[95] Si calcoli lo spettro dell'onda quadra con duty-cycle del 50%: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-nT_0}{T_0/2}\right)$ e si determini quale spettro continuo $f_0 X_0(f)$ costituisce l'involuppo delle $\delta(\cdot)$ presenti in $X(f)$. Si valuti poi una possibile espressione analitica del segnale $y(t)$ ottenuto filtrando $x(t)$ con un sistema avente risposta impulsiva $h(t) = \frac{2}{T_0}\Pi\left(\frac{2t}{T_0}\right)$ e, in seguito, lo spettro $Y(f)$.

NOTA: $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_0(t - nT_0)$, con $Y_0(f) = X_0(f) \cdot H(f)$.

(96) Calcolare lo spettro del segnale $y(t)$ uscente da un elemento di ritardo con ritardo T_0 , quando in ingresso vi è il segnale $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\left|\frac{t-nT_0}{T_0}\right|}$ (segnale analizzato nell'esercizio (90)).

[97] Continuando l'esercizio [95], calcolare e tracciare i grafici degli spettri di potenza $P_x(f)$ e $P_y(f)$ dei segnali di ingresso e di uscita. Determinare delle espressioni matematiche per la potenza media P_x e P_y di tali segnali, in base al Teorema di Parseval.

NOTA: si impieghi la relazione $X_k = f_0 X_0(kf_0)$ per determinare i coefficienti di Fourier.

NOTA 2: il testo specifica che è sufficiente “determinare delle espressioni matematiche” per P_x e P_y ; dunque anche espressioni aperte (es., serie numeriche) e non necessariamente i risultati numerici,

che sono certamente calcolabili ma la cui derivazione è difficilissima in questo caso (si vedano le soluzioni).

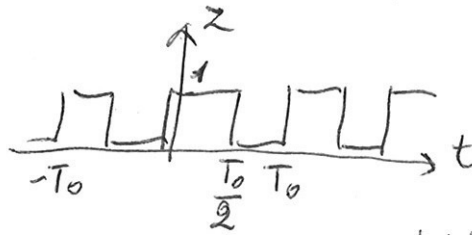


Figure 21: Onda quadra, traslata di un quarto di periodo, da impiegare nell'esercizio (98).

(98) Calcolare la densità spettrale di potenza $P_z(f)$ dell'onda quadra traslata, riportata in Fig. 21. Considerato che, a partire dal segnale dell'esercizio [95], possiamo stabilire $z(t) = x(t - \frac{T_0}{4})$, come cambia la potenza media, da P_x a P_z , in seguito alla traslazione? E come cambia la densità spettrale di potenza?

[99] Il segnale $x(t) = \text{sinc}^2(Bt)$ viene campionato idealmente con frequenza $f_c = 3B$: calcolare e tracciare il grafico dello spettro del segnale campionato, $X_\delta(f)$, verificando la *Condizione di Nyquist*. Quale può essere la massima banda di un *filtro di ricostruzione*, di tipo passa-basso ideale, che consenta di ricostruire correttamente il segnale $x(t)$ in uscita?

[100] Lo stesso segnale $x(t) = \text{sinc}^2(Bt)$ viene ora campionato con frequenza $f_c = B$: valutare lo spettro, tracciandone il grafico, e l'espressione analitica del segnale ricostruito a valle del filtro di ricostruzione: $H_{ric}(f) = T_c \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right)$. Come cambiano lo spettro e l'espressione analitica di $x_{ric}(t)$ se si decide di impiegare un *filtro anti-aliasing*?

[101] Il segnale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ viene campionato con periodo $T_c = \frac{1}{2f_0}$. Valutare l'espressione analitica del segnale campionato e poi del segnale ricostruito. Spiegare perché questo non coincide con il segnale originario $x(t)$.

(101bis) Lo stesso segnale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ viene ora campionato con periodo doppio: $T_c = \frac{1}{f_0}$, dunque con frequenza dimezzata. Valutare l'espressione analitica del segnale campionato e poi del segnale ricostruito. Spiegare, alla luce della Condizione di Nyquist, perché questo non coincide con il segnale originario $x(t)$ e come mai lo spettro risulta nullo.

[102]) (DIFFICILE)

Consideriamo il circuito di Fig. 22, in cui l'interruttore si chiude e si riapre istantaneamente negli *istanti di campionamento* nT_c , indicati in figura. Supponendo che $x(t)$ rispetti la condizione di Nyquist relativamente alla frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T_c}$, come si può ricostruire $x(t)$ a partire da $x_c(t)$? Fornire tutte le specifiche per il progetto di un sistema in grado di effettuare tale ricostruzione.

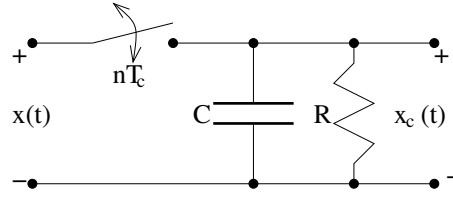


Figure 22: Semplice sistema di campionamento non-ideale dell'esercizio [102]). L'interruttore subisce un contatto *istantaneo* agli istanti di campionamento.

[103] Un segnale audio di banda bilatera $B = 10 \text{ kHz}$ (centrata intorno all'origine delle frequenze) viene campionato in maniera non ideale, con frequenza $f_c = 44100 \text{ Hz}$, impiegando un impulso di campionamento $s(t) = \Pi(100 \cdot f_c t - 1/2)$. Valutare la funzione di trasferimento di un filtro equalizzato di ricostruzione opportuno, calcolando i valori massimo e minimo della risposta in ampiezza di tale filtro.

(104) Il segnale $x(t) = \text{sinc}^2(Bt)$ viene campionato con frequenza $f_c = 3B$ (si veda anche l'esercizio [99]), ma in maniera non ideale, usando l'impulso di campionamento $s(t) = \Lambda\left(\frac{t - T_c/4}{T_c/4}\right)$. Schematizzare il grafico del segnale campionato $x_c(t)$, valutarne lo spettro, verificare la condizione di Nyquist e calcolare la risposta in frequenza del filtro equalizzato di ricostruzione.

I-B SEGNALI DETERMINATI: soluzione degli esercizi

(2)

$$D_x = \infty; \quad \mathcal{A}_x = 0; \quad \langle x(t) \rangle = 0; \quad E_x = +\infty; \quad P_x = 1;$$

$$D_y = 2; \quad \mathcal{A}_y = 0; \quad \langle y(t) \rangle = 0; \quad E_y = 2; \quad P_y = 0;$$

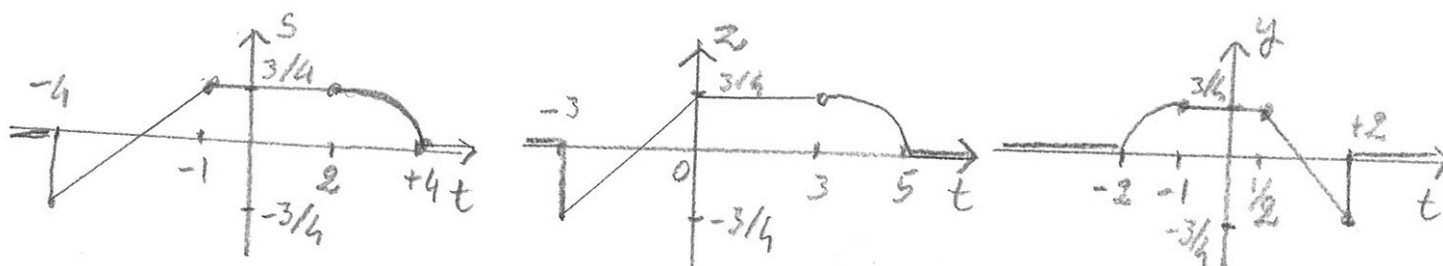
$$D_s = \infty; \quad \mathcal{A}_s = 2; \quad \langle s(t) \rangle = 0; \quad E_s = 1; \quad P_s = 0;$$

(2bis)

$$z_1 = 1 \cdot e^{+j\frac{\pi}{2}}; \quad z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{+j\frac{\pi}{4}}; \quad z_3 = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}; \quad z_4 = 2 \cdot e^{+j\frac{5\pi}{6}}; \quad z_5 = 2 \cdot e^{+j\frac{\pi}{3}}$$

$$z_6 = 2; \quad z_7 = \sqrt{2} \cdot e^{+j\frac{\pi}{4}} = z_2; \quad z_8 = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = z_1; \quad z_9 = 2 \cdot e^{+j\frac{5\pi}{6}} = z_4$$

[3]



$$z(t) = \begin{cases} \frac{3}{4} + \frac{t}{2} & \text{per } -3 \leq t \leq 0 \\ \frac{3}{4} & \text{per } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{15}{16} + \frac{t}{8} - \frac{t^2}{16} & \text{per } 3 \leq t \leq 5 \\ 0 & \text{per } 5 < t \text{ o } t \leq -3 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{5}{4} - t & \text{per } \frac{1}{2} \leq t \leq 2 \\ \frac{3}{4} & \text{per } -1 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{t^2}{4} & \text{per } -2 \leq t \leq -1 \\ 0 & \text{per } |t| > 2 \end{cases}$$

4bis)

	Durata	val. medio temp.	energia
a) $Ax(t)$	invariata	$A \cdot \langle x(t) \rangle$	$ A ^2 \cdot E_x$
b) $x(t - t_0)$	invariata	invariata	invariata
c) $x(\frac{t}{T})$	$T \cdot D_x$	invariata	$T \cdot E_x$

(6)

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\tau - (t - t_0)) d\tau = \dots$$

il secondo passaggio poiché la $\delta(\cdot)$ è pari; dalla proprietà di campionamento segue il risultato.

$$\Pi(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

...derivando, segue il risultato.

$$\Lambda(t) \cdot \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) = \Lambda\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

dalla proprietà di campionamento in forma non integrale.

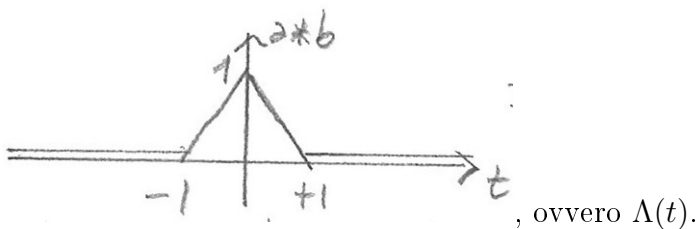
[10]

	causal.	real.ideale	real.fisica	memoria	stab.BIBO	staz.	lin.	omog.
$y(t) = A + Bx(t)$	si	si	si	no	si	si	no	no
$y(t) = \log(x(t))$	si	no	no	no	no	si	no	no
$y(t) = x(t) $	si	si	si	no	si	si	no	no
$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(\tau) h(t - \tau) d\tau$?	si	?	si	?	si	no	no
$y(t) = t \cdot x(t)$	si	si	si	no	no	no	si	si
$y(t) = x(t + t_0)$	si	si	si	si	si	si	si	si
$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$	si	si	si	si	?	si	si	si
$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$	si	si	si	no	si	no	si	si

[14]

$$g(t) = (1 - e^{-t/RC}) u(t); \quad h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

[18]



(18bis)

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = T \cdot \Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right).$$

(20)

	causale	I.R.	F.R.	memoria	stabile B.I.B.O.
$\int_{-\infty}^t x(\tau + t_0) d\tau$	sì	sì	sì	sì	no
$x(t) + x(t - t_0) - x(t - 2t_0)$	sì	sì	sì	sì	sì
$\int_t^{+\infty} Ax(\tau) d\tau$	no	sì	no	sì	no

(23bis)

$$\begin{aligned}
y(t) &= AA_H(f) \cos(2\pi ft + \varphi + \varphi_H(f)) + jAA_H(f) \cos\left(2\pi ft + \varphi - \frac{\pi}{2} + \varphi_H(f)\right) \\
&= AA_H(f) [\cos(2\pi ft + \varphi + \varphi_H(f)) + j \sin(2\pi ft + \varphi + \varphi_H(f))] \\
&= AA_H(f) e^{j(2\pi ft + \varphi + \varphi_H(f))}
\end{aligned}$$

...infatti l'ingresso si poteva anche esprimere come $x(t) = Ae^{j(2\pi ft + \varphi)}$, ovvero è un fasore a frequenza f .

(24)

- a) $y(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{t}{RC} + \frac{\pi}{4}\right);$
b) $y(t) \simeq 20 \sin(2\pi 20000t);$
c) $y(t) \simeq A \cos(20000\pi t + \pi);$

(26) Dai tre segnali, si ottengono i coefficienti di Fourier seguenti:

$$\begin{aligned}
\text{a) } X_k &= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{per } k = +1 \\ \frac{1}{2} e^{+j\frac{\pi}{2}} & \text{per } k = -1; \\ 0 & \text{per } |k| \neq 1 \end{cases} \\
\text{b) } X_k &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } k = \pm 1; \\ 0 & \text{per } |k| \neq 1 \end{cases} \\
\text{c) } X_k &= \begin{cases} \frac{A_1}{2} e^{\pm j\varphi_1} & \text{per } k = \pm 1 \\ \frac{A_3}{2} e^{\pm j\varphi_3} & \text{per } k = \pm 3; \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}$$

(27) Per i due segnali:

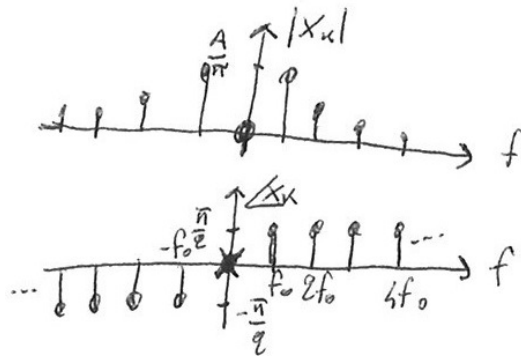
- a) Il segnale ha periodo $T = T_0/2$, dunque frequenza fondamentale $F = 2f_0$. I coefficienti sono

$$X_k = \frac{-2A}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$$

- b) Il segnale ha periodo T_0 , dunque frequenza fondamentale f_0 . I coefficienti sono

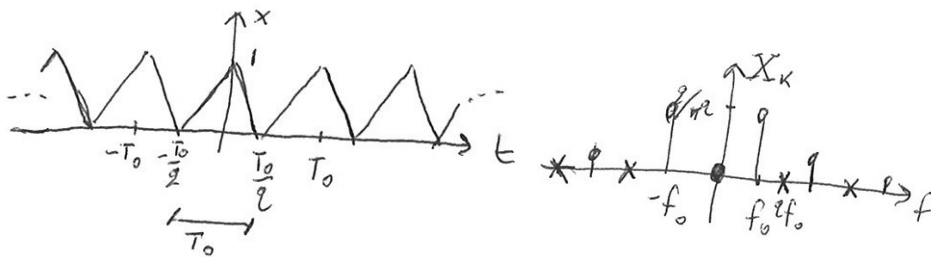
$$X_k = \begin{cases} \frac{A}{4} & \text{per } k = \pm 1 \\ 0 & \text{per } k \text{ dispari } \neq \pm 1 \\ -\frac{A}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k^2 - 1} & \text{per } k \text{ pari } \neq 0 \end{cases}$$

(28) Il segnale ha frequenza fondamentale $f_0 = \frac{1}{T_0}$



I suoi coefficienti di Fourier sono $X_k = \begin{cases} 0 & \text{per } k = 0 \\ \frac{jA}{k\pi} & \text{per } k \neq 0 \end{cases}$.

(29) Il segnale e il relativo spettro a righe sono riportati nei seguenti grafici

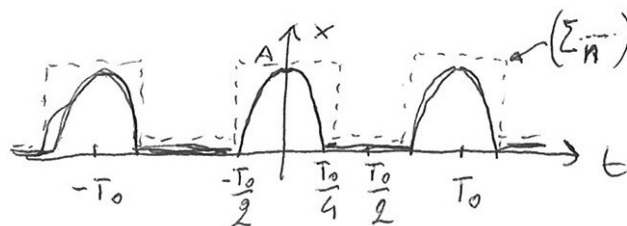


in cui il secondo si deduce dall'espressione calcolata per i coefficienti di Fourier

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \text{ pari} \\ \frac{2}{k^2\pi^2} & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

in questo caso tutti reali, per cui il relativo spettro di fase è nullo.

(30) Tracciando il grafico del segnale, si riconosce che questo è identico al segnale considerato nell'esercizio (27)b)

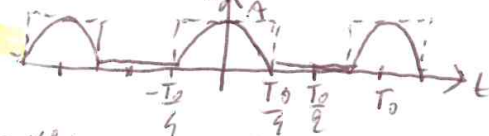


Dunque i coefficienti X_k sono quelli calcolati nell'esercizio (27)b).

Una traccia di svolgimento per il calcolo è riportata di seguito

Solo es. (30) : grafico, periodo e spettro a righe di $x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T_0/2}\right)$

≡ (27b)



per T_0 ; freq. fond. $f_0 = \frac{1}{T_0}$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \cdot \cos(2\pi k f_0 t) dt - j \dots$$

x(t) reale e pari $\Leftrightarrow X_k$ reale e pari

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} \frac{A}{2} \cos(2\pi(k+1)f_0 t) + \frac{A}{2} \cos(2\pi(k-1)f_0 t) dt = \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} \cos(2\pi(k+1)f_0 t) dt + \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} \cos(2\pi(k-1)f_0 t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{4\pi} \left[\frac{\sin(2\pi(k+1)f_0 t)}{2\pi(k+1)f_0} \right]_{-T_0/4}^{+T_0/4} + \frac{A}{4\pi} \left[\frac{\sin(2\pi(k-1)f_0 t)}{2\pi(k-1)f_0} \right]_{-T_0/4}^{+T_0/4} \\ &= \begin{cases} A/4 & \text{per } k = \pm 1 \\ 0 & \text{per } k \text{ dispari } \neq \pm 1 \\ \frac{A}{2\pi} \frac{\pm(k-1) \mp (k+1)}{(k^2-1)} & \text{per } k \text{ pari} \end{cases} \end{aligned}$$



(31) I coefficienti di Fourier Y_k , per $k = -1, 0, 1$ sono determinati a partire dai rispettivi coefficienti del segnale d'ingresso:

$$X_{-1} = \frac{1}{\pi}; \quad X_0 = \frac{1}{2}; \quad X_1 = \frac{1}{\pi};$$

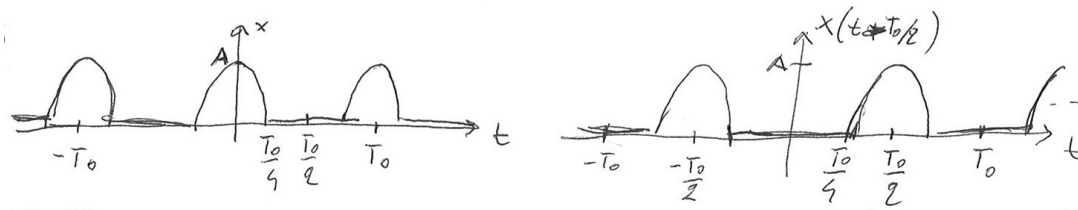
e dalla funzione di trasferimento del filtro che, per i valori dell'esercizio risulta

$$H(\pm f_0) = \frac{1}{1 \pm j2\pi \cdot 100}; \quad H(0) = 1$$

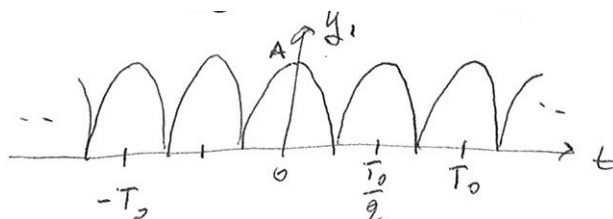
per cui, dalla relazione generale $Y_k = H(kf_0)X_k$ risulta

$$Y_{-1} \simeq 5 \cdot 10^{-4} e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 0.999}; \quad Y_0 = \frac{1}{2}; \quad Y_1 = Y_{-1}^* \simeq 5 \cdot 10^{-4} e^{+j\frac{\pi}{2} \cdot 0.999};$$

(32)

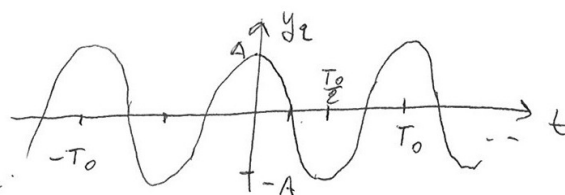


a) ingresso $\delta(t) \Rightarrow \delta(t) + \delta(t - \frac{T_0}{2}) = h_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x(t) * (\delta(t) + \delta(t - \frac{T_0}{2})) = x(t) + x(t - \frac{T_0}{2})$

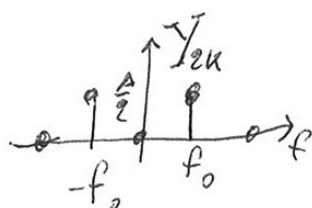


$y_1(t)$ come in esercizio 27a) e così lo spettro a righe

b) ingresso $\delta(t) \Rightarrow \delta(t) - \delta(t - \frac{T_0}{2}) = h_2(t) \Rightarrow y_2(t) = x(t) * (\delta(t) - \delta(t - \frac{T_0}{2})) = x(t) - x(t - \frac{T_0}{2})$



$$y_2(t) = A \cos(2\pi t/T_0)$$

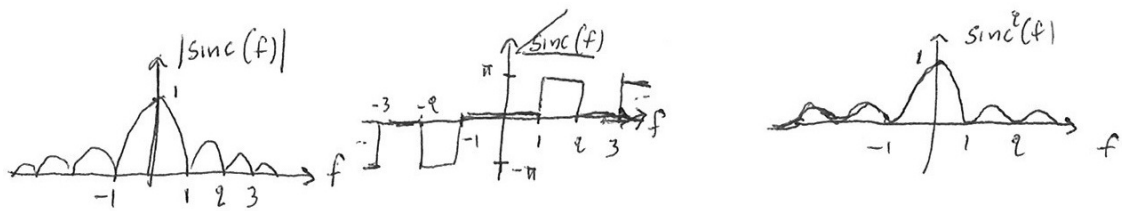


(32bis) Si veda l'esercizio [21], la cui soluzione è esplicitamente svolta sul libro di testo.

[34] Poiché, come noto, $X(f) = \text{sinc}(f)$ e, allo stesso modo, $H(f) = \text{sinc}(f)$, lo spettro dell'uscita sarà $Y(f) = X(f)H(f) = \text{sinc}^2(f)$. Nel dominio del tempo, $y(t) = x(t) * h(t) = \Pi(t) * \Pi(t) = \Lambda(t)$, come ricavato nell'esercizio 18. Dunque, per l'unicità della trasformata di Fourier, deve essere $\mathcal{F}^{-1}[\text{sinc}^2(f)] = \Lambda(t)$.

$$[35] E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 e^{-2\alpha t} u(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi f} \right|^2 df = \frac{\alpha}{2}$$

(36)



$$[37] \mathcal{A}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{-t/T} u(t) dt = 1 = \left. \frac{1}{1+j2\pi T f} \right|_{f=0}$$

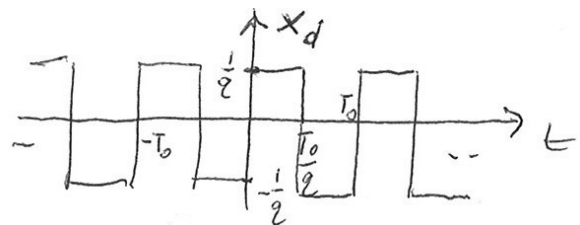
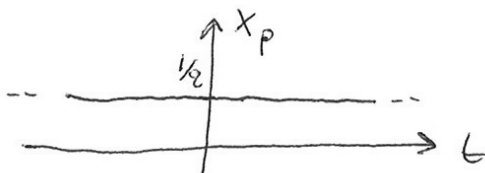
[38] Se $s(t) \in \Im$ (è immaginario), allora $S(f) = S_R(f) + jS_I(f)$ è tale che $\begin{cases} S_R(-f) = -S_R(f) \\ S_I(-f) = S_I(f) \end{cases} \iff S(-f) = -S^*(f)$, ovvero lo spettro ha “antisimmetria Hermitiana”. Se, inoltre, $s(-t) = -s(t)$, allora $S_I(f) = 0 \implies S(f)$ è reale e dispari.

(39) I coefficienti di Fourier sono, per le varie figure:

Reali e Pari Reali e Pari Reali e Pari Immaginari e Dispari Reali e Pari

Reali e Pari Immaginari e Dispari

(40) Le parti pari e dispari del segnale sono qui tracciate, da cui seguono i rispettivi coefficienti di Fourier:



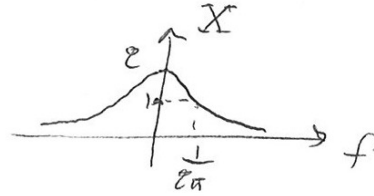
$$X_{pk} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \quad X_{dk} = \begin{cases} 0 & (k=0) \\ 0 & (k \text{ pari}) \\ \frac{-j}{k\pi} & (k \text{ dispari}) \end{cases}$$

Infine, i coefficienti di Fourier di $x(t)$ sono $X_k = X_{pk} + X_{dk}$.

(41) $x(t)$ è a simmetria hermitiana. $X(f) = 2\pi e^{+2\pi f} u(-f)$; $X(f)$ è reale.

$$(42) E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{1+jt} \right|^2 dt = \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \text{ (si veda l'es. [35])}.$$

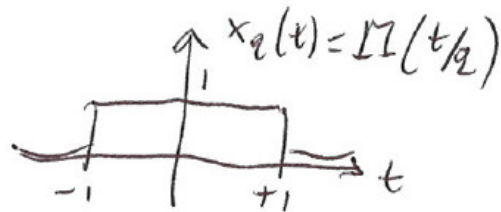
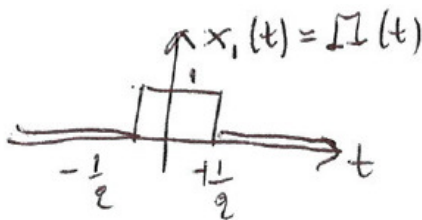
$$[44] x(t) = e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^{+t}u(-t), \text{ da cui: } X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f} = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}$$



(45) $|X(f)|^2 = E_x(f) = \Pi(f)$, con il noto grafico della funzione rettangolare, da cui $E_x = 1$.

(45bis) Il segnale si può vedere come combinazione lineare dei due segnali

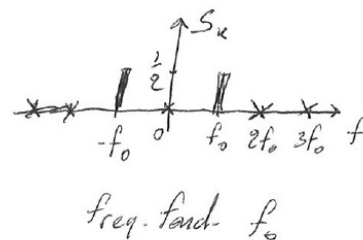
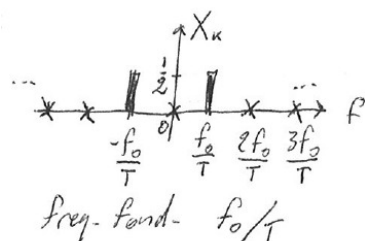
$$x_1(t) = \Pi(t) \qquad x_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$



Infatti, $x(t) = 2x_1(t) - x_2(t)$, da cui, per la proprietà di linearità, $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = 2X_1(f) - X_2(f) = 2\text{sinc}(f) - 2\text{sinc}(2f)$.

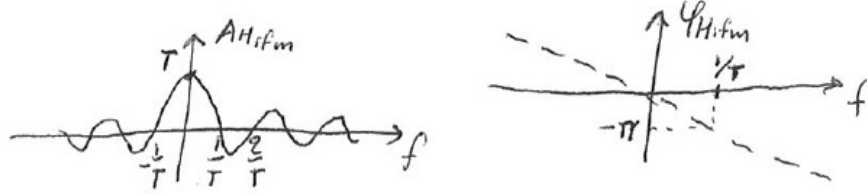
(46) $s(t) = T \cdot x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(f) = T \cdot X(f) = \frac{T}{1+j2\pi fT}$. Viceversa, $w(t)$ è legato a $s(t)$ da un cambiamento di scala: $w(t) = s(t \cdot T) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W(f) = \frac{1}{|T|} S\left(\frac{f}{T}\right) = \frac{1}{1+j2\pi f}$, poiché $u(T \cdot t) = u(t)$, se $T > 0$.

(47)

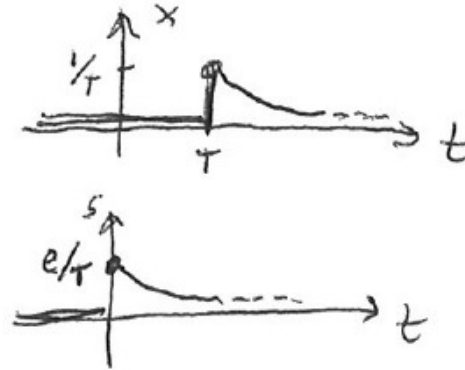


I coefficienti di Fourier $X_k = S_k \quad \forall k$, tuttavia, poiché la frequenza fondamentale di $x(t)$ è f_0/T mentre quella di $s(t)$ è f_0 , cambiano i valori delle frequenza (armoniche) a cui i coefficienti sono associati.

[49] $H_{ifm}(f) = T\text{sinc}(Tf)e^{-j\pi fT}$



$$(50) \quad X(f) = \frac{1}{1+j2\pi fT} e^{-j2\pi fT}; \quad S(f) = \frac{e}{1+j2\pi fT}$$



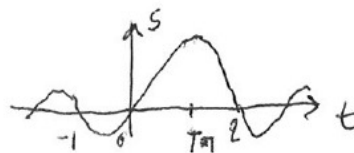
$$A_S(f) = A_X(f) \cdot e; \quad \varphi_X(f) = \varphi_S(f) - (2\pi fT).$$

$$(51) \quad x(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) - \Pi\left(\frac{t+T/2}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = -2jT \frac{\sin^2(\pi T f)}{(\pi T f)}.$$

Per gli spettri di ampiezza e fase,

$$\begin{cases} A_X(f) = \frac{2T \sin^2(\pi T f)}{|\pi T f|} \\ \varphi_X(f) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{per } f > 0 \\ +\pi/2 & \text{per } f < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$(52) \quad \text{Per il segnale } x(t), \mathcal{A}_x = 1 \text{ e } E_x = 1. \text{ Il segnale } s(t)$$

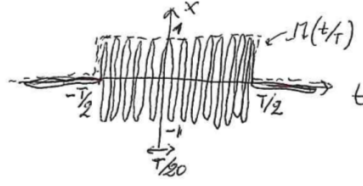


ha $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_x = 1$ e $E_s = E_x = 1$: come è intuitivo, la traslazione temporale non altera né l'area né l'energia del segnale.

$$(53) \quad \mathcal{F}[x(t)e^{+j2\pi f_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{+j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = X(f-f_0)$$

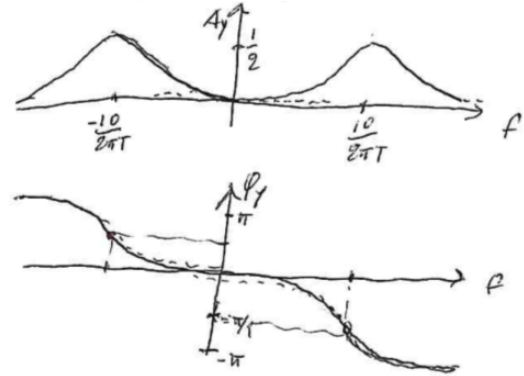
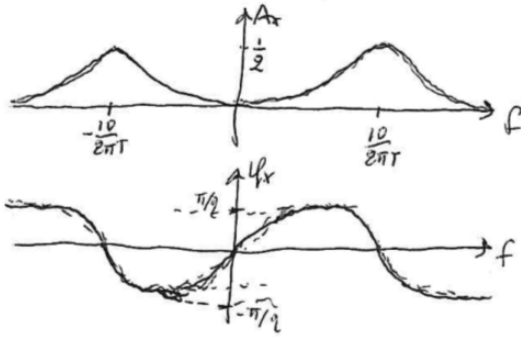
$$(54) \quad X(f) = \Pi\left(\frac{f-B/2}{B}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x(t) = B \text{sinc}(Bt) \cdot e^{+j\pi B t}$$

$$[56] \quad X(f) = \frac{T}{2} \text{sinc}(Tf - 20) + \frac{T}{2} \text{sinc}(Tf + 20)$$



$$(57) X(f) = \frac{1+j2\pi fT}{(101-(2\pi fT)^2)+j(4\pi fT)};$$

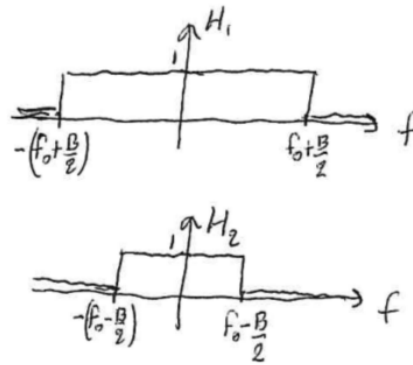
$$Y(f) = \frac{10}{(101-(2\pi fT)^2)+j(4\pi fT)}$$



(58) $X(f)$ reale e dispari $\iff x(t)$ immaginario e dispari

$$X(f) = \frac{-1}{2}\Lambda\left(\frac{f-f_0}{B}\right) - \frac{-1}{2}\Lambda\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \xleftrightarrow{F} x(t) = -jB\text{sinc}^2(Bt) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

(59)



$$h_1(t) = (2f_0 + B)\text{sinc}(2f_0 t + Bt)$$

$$h_2(t) = (2f_0 - B)\text{sinc}(2f_0 t - Bt)$$

$$\begin{aligned} h_1(t) - h_2(t) &= (2f_0 + B)\frac{\sin(2\pi f_0 t + \pi Bt)}{(2f_0 + B)\pi t} - (2f_0 - B)\frac{\sin(2\pi f_0 t - \pi Bt)}{(2f_0 - B)\pi t} \\ &= \frac{1}{\pi t} 2 \cos(2\pi f_0 t) \sin(\pi Bt) = 2B\text{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

$$[61] H_{CR}(f) = \frac{j2\pi RCf}{1+j2\pi RCf} = \frac{j \frac{f}{(f_0/100)}}{1+j \frac{f}{(f_0/100)}} \Rightarrow \begin{cases} |H_{CR}(f_0)| = \left| \frac{j100}{1+j100} \right| = \sqrt{\frac{10^4}{10001}} \simeq 1 \\ \angle H_{CR}(f_0) = -\arctan[100] + \frac{\pi}{2} \simeq 0 \end{cases}$$

Quando $x_1(t) = 2A$ (armonica di frequenza $f = 0$: componente continua) transita nel filtro CR, in uscita si ha: $y_1(t) = x_1(t) \cdot H_{CR}(0) = 0$. Quando $x_2(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ (armonica di frequenza $f = f_0$) transita nel filtro CR, in uscita si ha: $y_2(t) = |H_{CR}(f_0)| \cdot A \cos(2\pi f_0 t + \angle H_{CR}(f_0)) \simeq A \cos(2\pi f_0 t) = x_2(t)$. Dunque, l'uscita complessiva è $y(t) \simeq x_2(t)$.

(62) Le equazioni differenziali che governano i due circuiti sono:

$$a) x(t) - L \frac{d}{dt} \left[\frac{y(t)}{R} \right] = y(t); \quad b) y(t) = L \frac{d}{dt} \left[\frac{x(t) - y(t)}{R} \right]$$

Tutti i sistemi descritti da eq. diff. lineari omogenee a coefficienti costanti sono Lineari e Stazionari, a patto che gli elementi reattivi siano inizialmente scarichi (condizioni iniziali nulle, per le eq. diff.)

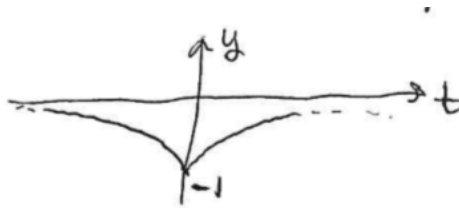
$$H_{LR}(f) = \frac{1}{1 + j2\pi \frac{L}{R} f}; \quad H_{RL}(f) = \frac{j2\pi \frac{L}{R} f}{1 + j2\pi \frac{L}{R} f}$$

[64] $x(t)$ è reale e dispari, dunque ha area nulla $\mathcal{A}_x = 0$. Ne segue che $X(f)$ è puramente immaginario e dispari.

Il segnale $y(t)$ si ottiene come

$$\begin{aligned} y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &= -e^{-t/T} u(t) - -e^{+t/T} u(-t) \\ &= -e^{-|t|/T} \end{aligned}$$

risulta reale e pari.



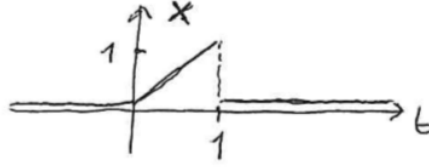
[66] Usando la trasformata (notevole) di una funzione gaussiana e le proprietà di linearità, traslazione e cambio di scala, si ottiene

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}} e^{-\frac{(z-\eta_Z)^2}{2\sigma_Z^2}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_Z(f) = e^{-2\pi^2\sigma_Z^2 f^2} \cdot e^{-j2\pi f\eta_Z}$$

dunque si ha

$$\Phi_Z(\omega) = E_Z [e^{j\omega}] = e^{-\sigma_Z^2 \omega^2 / 2} \cdot e^{+j\omega\eta_Z}$$

[67] Per il segnale riportato nel grafico,



si ha lo spettro

$$X(f) = \left[\frac{1}{2} \text{sinc}(f) + \frac{1}{j2\pi f} (\text{sinc}(f) - \cos(\pi f)) \right] e^{-j\pi f}$$

(68)

$$\begin{aligned} z(t) = x\left(t + \frac{1}{2}\right) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(f) = X(f)e^{+j\pi f} = \left[\frac{1}{2} \text{sinc}(f) + \frac{1}{j2\pi f} (\text{sinc}(f) - \cos(\pi f)) \right] \\ s(t) = z(t) - \frac{1}{2}\Pi(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(f) = Z(f) - \frac{1}{2} \text{sinc}(f) = \\ &= t\Pi(t) = \left[\frac{1}{j2\pi f} (\text{sinc}(f) - \cos(\pi f)) \right] \end{aligned}$$

(68bis) Dall'espressione ottenuta nell'es. (68) per $S(f)$, in uscita dal filtro derivatore, per cui $H_{der}(f) = j2\pi f$, si avrà

$$W(f) = j2\pi f \cdot S(f) = \text{sinc}(f) - \cos(\pi f)$$

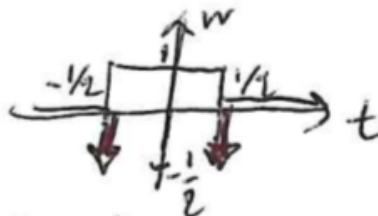
Anche se non si sa antitrasformare $W(f)$, $w(t)$ è comunque la derivata di $s(t)$ (con discontinuità di 1a specie in $t = \pm 1/2$). Ricordando che

$$\frac{d}{dt}\Pi(t) = \frac{d}{dt} \left(u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) \right) = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

si ha

$$w(t) = \frac{d}{dt}s(t) = 1 \cdot \Pi(t) + t \cdot \left[\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \right] = \Pi(t) - \frac{1}{2}\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

il cui andamento è riportato in Figura.



[70]

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) * x(t) = \frac{t}{T^2} e^{-t/T} u(t) = \left(\frac{j}{2\pi T} \right) (-j2\pi t) \left(\frac{1}{T} e^{-t/T} u(t) \right) \\ &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \\ Z(f) &= \left(\frac{j}{2\pi T} \right) \frac{d}{df} \left[\frac{1}{1 + j2\pi f T} \right] = \frac{1}{(1 + j2\pi f T)^2} = X^2(f) \end{aligned}$$

[71]

$$s(t) = e^{-t(T_1^{-1} + T_2^{-1})} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(f) = \frac{1}{(T_1^{-1} + T_2^{-1}) + j2\pi f}$$

I singoli spettri

$$X(f) = \frac{1}{T_1^{-1} + j2\pi f} \quad ; \quad Y(f) = \frac{1}{T_2^{-1} + j2\pi f}$$

danno luogo alla convoluzione

$$X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_1^{-1} + j2\pi\theta} \cdot \frac{1}{T_2^{-1} + j2\pi(f - \theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{T_1^{-1} + j2\pi\theta} + \frac{B}{T_2^{-1} + j2\pi(f - \theta)} d\theta$$

dove si è sfruttata la tecnica di “espansione in frazioni parziali”, che rende il prodotto delle due frazioni pari alla combinazione lineare con coefficienti A, B tali che $A (T_2^{-1} + j2\pi(f - \theta)) + B (T_1^{-1} + j2\pi\theta) = 1$, da cui si ricava algebricamente che $A = B = [(T_1^{-1} + T_2^{-1}) + j2\pi f]^{-1}$. Si ottiene quindi

$$X(f) * Y(f) = \frac{1}{(T_1^{-1} + T_2^{-1}) + j2\pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_1^{-1} + j2\pi\theta} + \frac{1}{T_2^{-1} + j2\pi(f - \theta)} d\theta = \frac{1}{(T_1^{-1} + T_2^{-1}) + j2\pi f}$$

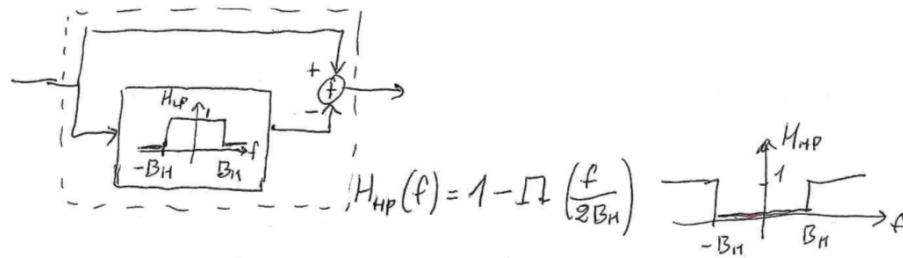
coincidente col risultato già trovato sopra per $S(f)$, in quanto entrambi gli integrali da calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_1^{-1} + j2\pi\theta} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_2^{-1} + j2\pi(f - \theta)} d\theta = \frac{1}{2}$$

risultano pari a $1/2$.

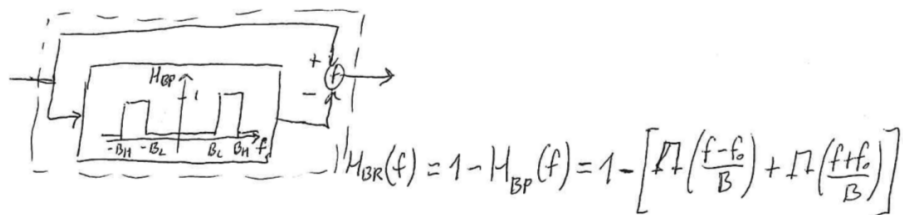
Per convincersi di quest’ultimo risultato, si pensi che, in generale, $[\alpha + j2\pi(f - f_0)]^{-1}$ è - come noto - lo spettro del segnale $e^{\mp\alpha t} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot u(t)$ (esponenziale causale soggetto a modulazione complessa); l’area di uno spettro è - come noto - pari al valore del segnale in $t = 0$, che vale $\frac{1}{2}$ (e non 1!) poiché il segnale esponenziale causale è discontinuo nell’origine, cosicché (si vedano le *condizioni di Dirichlet* per la convergenza *puntuale* della Trasformata di Fourier) “l’antitrasformata converge alla semisomma dei limiti destro e sinistro”, che in questo caso valgono 1 e 0, rispettivamente.

[73]



Nella soluzione dell'Esempio [72] (il cui svolgimento è riportato sul libro), si può dunque inserire il filtro passa-alto ideale $H_{HP}(f)$ nel ramo delle alte frequenze, in cascata all'amplificatore ideale di guadagno A_{HP} .

(74)

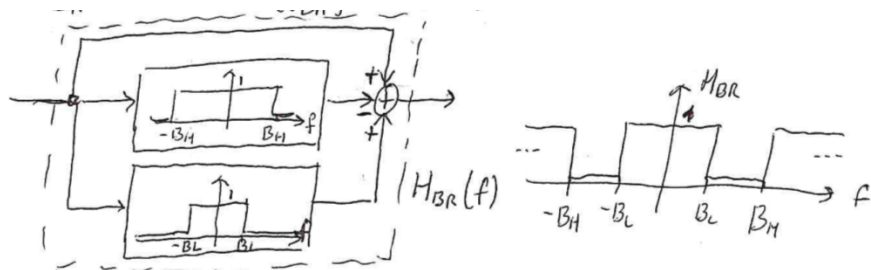


dove la frequenza centrale del filtro a reiezione di banda è la stessa del filtro passa-banda, pari alla semisomma delle frequenze di taglio, $f_0 = (B_L + B_H)/2$, mentre la banda monolaterale è pari alla loro differenza, $B = B_H - B_L$.

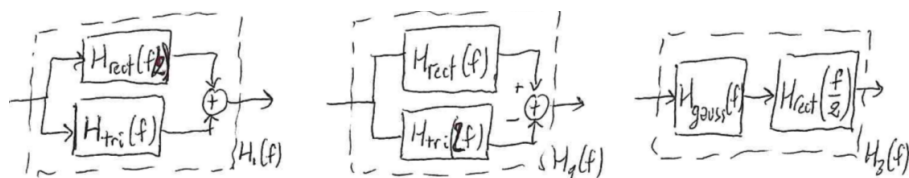
(75) La funzione di trasferimento del filtro a reiezione di banda può essere scritta, ad esempio, come

$$H_{BR}(f) = 1 - \Pi\left(\frac{f}{2B_H}\right) + \Pi\left(\frac{f}{2B_L}\right)$$

e lo schema a blocchi che ne risulta è il seguente



(76) Le tre funzioni di trasferimento possono essere realizzate attraverso gli schemi a blocchi tracciati di seguito



a condizione che le funzioni di trasferimento dei tre filtri presenti siano le seguenti:

$$\begin{aligned} H_{rect}(f) &= \Pi\left(\frac{f}{B}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} h_{rect}(t) = |B| \text{sinc}(Bt) \\ H_{tri}(f) &= \Lambda\left(\frac{f}{B}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} h_{tri}(t) = |B| \text{sinc}^2(Bt) \\ H_{gauss}(f) &= e^{-\frac{f^2}{2B^2}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} h_{gauss}(t) = \sqrt{2\pi}B e^{-2\pi^2 B^2 t^2} \end{aligned}$$

(77) Il sistema descritto fornisce l'uscita $y(t) = Ax(t - T) = Ae^{-(t-T)}u(t - T)$, per cui la correlazione tra ingresso e uscita è

$$\begin{aligned} e_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\tau}u(\tau))^* (Ae^{-(t+\tau)-T}u((t+\tau)-T)) d\tau = \frac{A}{2}e^{-|t-T|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \\ \xleftrightarrow{\mathcal{F}} E_{xy}(f) &= \left(\frac{1}{1+j2\pi f}\right)^* \left(\frac{A}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi fT}\right) = \frac{A}{1+(2\pi f)^2}e^{-j2\pi fT} \end{aligned}$$

(78) L'autocorrelazione di $x(t)$ risulta in questo caso

$$\begin{aligned} e_x(t) &= A^2T\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \mathcal{F}^{-1}[A^2T^2\text{sinc}^2(Tf)] \\ E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2T^2\text{sinc}^2(Tf)df = A^2T = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\Pi^2\left(\frac{t}{T}\right)dt \end{aligned}$$

(79)

$$\begin{aligned} P_x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A^2 \cos(2\pi f_0 \tau) \cos(2\pi f_0(t + \tau)) d\tau = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2/2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi 2f_0 \tau + 2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_0 t) d\tau = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

[82] La risposta impulsiva e la risposta in frequenza sono, rispettivamente

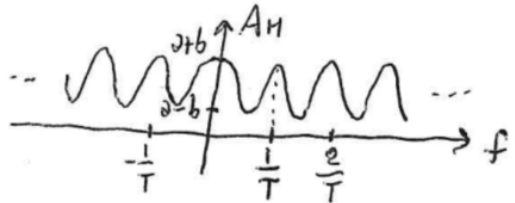
$$\begin{aligned} h(t) &= a\delta(t) + b\delta(t - T) \\ \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \\ H(f) &= a + be^{-j2\pi fT} = (a + b \cos(2\pi fT)) - jb \sin(2\pi fT) \end{aligned}$$

da cui le risposte in ampiezza e fase

$$A_H(f) = \sqrt{(a^2 + b^2) + 2ab \cos(2\pi fT)}$$

$$\varphi_H(f) = -\arctan\left(\frac{b/a \sin(2\pi fT)}{1 + b/a \cos(2\pi fT)}\right)$$

Riportiamo di seguito solo il grafico della risposta in ampiezza



da cui si evince che:

- $f_m = \frac{1}{2T}$ è la frequenza più bassa in cui si ha la massima attenuazione (minimo guadagno): essa viene detta *frequenza di fading*.
- Se $T = 0$, l'eco coincide col segnale e $A_H(f) = (a + b)$ per qualunque frequenza, ovvero non c'è *fading*.
- Se $b = a$, il canale sopprime del tutto la frequenza f_m ($A_H(f_m) = 0$), anziché soltanto attenuarla.
- Oltre a f_m , anche le frequenze $f_m + \frac{k}{T}$ (per k intero) hanno attenuazione massima.
- La *banda efficace* del canale (ad esempio, valutata tra i primi due minimi intorno all'origine) è inversamente proporzionale al ritardo di eco T .

(83) La risposta impulsiva e la risposta in frequenza sono, rispettivamente

$$h(t) = a\delta(t) + \delta(t - T) + a\delta(t - 2T)$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$

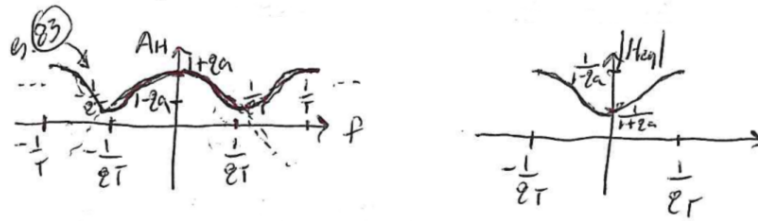
$$H(f) = a + e^{-j2\pi fT} + ae^{-j2\pi f2T} = (1 + 2a \cos(2\pi fT)) e^{-j2\pi fT}$$

ottenuta sfruttando il suggerimento nel testo. Le risposte in ampiezza e fase sono chiaramente: $A_H(f) = (1 + 2a \cos(2\pi fT))$ e $\varphi_H(f) = -2\pi fT$. La risposta in fase linearmente decrescente evidenzia che il sistema introduce soltanto *distorsioni lineari di ampiezza*, ma non *distorsioni di fase* (vedi i relativi concetti).

(84) La risposta in frequenza dell'equalizzatore è

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{A_H(f)} \Pi(fT) = \begin{cases} \frac{1}{1+2a \cos(2\pi fT)} & \text{per } |f| \leq 1/2T \\ \text{non importa} & \text{per } |f| > 1/2T \end{cases}$$

che dunque si può ottenere invertendo la risposta in ampiezza dell'esercizio precedente. I rispettivi grafici risultano



Se $a = 1/2$, $|H_{eq}(1/2T)| = \frac{1}{1-2a} \rightarrow \infty$ e dunque $H_{eq}(f)$ non esiste. Parimenti, se $a > 1/2$, la risposta in ampiezza $A_H(f)$ del precedente esercizio ha uno zero nella banda $|f| \leq 1/2T$ e l'equalizzazione risulta impossibile.

(85) La trasformata è $X(f) = e^{j\phi} \delta(f - f_0)$.

Il segnale $x(t)$ ha simmetria Hermitiana se $\phi = k\pi$, che risultano essere gli unici valori che rendono $X(f)$ reale, come è implicato dalla simmetria.

Il segnale $x(t)$ ha anti-simmetria Hermitiana se $\phi = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$, che risultano essere gli unici valori che rendono $X(f)$ puramente immaginario, come è implicato dalla anti-simmetria Hermitiana di $x(t)$.

(86) La trasformata è

$$X(f) = \frac{1}{4} \delta(f + 2f_0) + \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{4} \delta(f - 2f_0)$$

La componente continua $\langle x(t) \rangle = 1/2$ che emerge dall'impulsi di Dirac presente in $f = 0$ si evidenzia nel dominio del tempo poiché

$$x(t) = \cos^2(2\pi f_0 t) = 1/2 + 1/2 \cos(2\pi 2f_0 t)$$

(87) All'uscita del filtro integratore si avrà

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{T}{1 + j2\pi fT} \cdot \frac{1}{j2\pi f} + \frac{T}{2} \delta(f) \\ \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \\ y(t) &= T(1 - e^{-t/T}) u(t) \end{aligned}$$

il che giustifica la componente continua $\langle y(t) \rangle = T/2$ che emerge dallo spettro.

(88) La risposta impulsiva del filtro è $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T/2}\right)$, per cui il segnale di uscita

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - nT}{T/2}\right)$$

risulta essere un'onda quadra con duty-cycle del 50%. Lo spettro, ricavato dal filtraggio è

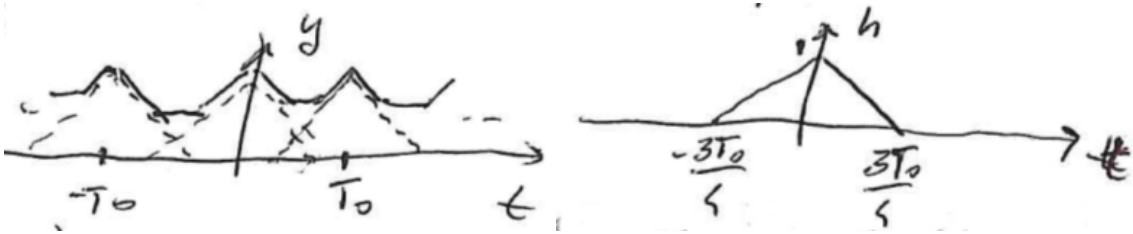
$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{sinc} \left(\frac{k}{2} \right) \delta \left(f - \frac{k}{T} \right)$$

in cui le armoniche pari ($k/2$ intero) risultano annullate.

(88bis) Per il filtro, si ottiene immediatamente $h(t) = \Lambda \left(\frac{t}{3T_0/4} \right)$, da cui si ricava

$$y(t) = \Lambda \left(\frac{t}{3T_0/4} \right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda \left(\frac{t - nT_0}{3T_0/4} \right)$$

...che è il segnale della figura 4.7 del Libro di testo, tracciato di seguito insieme al suo *impulso base*:



Per lo spettro, si ha

$$Y(f) = \frac{3T_0}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{3T_0}{4} f \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \delta \left(f - \frac{k}{T_0} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{3}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{3}{4} k \right) \delta \left(f - \frac{k}{T_0} \right)$$

in cui le armoniche multiple di 4 ($3k/4$ intero) risultano annullate.

(89) L'impulso base e il suo spettro sono

$$x_0(t) = \Lambda \left(\frac{t}{3T_0/4} \right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_0(f) = \frac{3T_0}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{3T_0}{4} f \right)$$

mentre la *replica base* e il rispettivo spettro risultano essere

$$s(t) = \frac{2}{3} \Pi \left(\frac{t}{T_0} \right) + \frac{1}{3} \Lambda \left(\frac{t}{T_0/4} \right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(f) = \frac{2T_0}{3} \text{sinc}^2(T_0 f) + \frac{T_0}{12} \text{sinc}^2 \left(\frac{T_0}{4} f \right)$$

Sulle frequenze armoniche si ottiene dunque,

$$f_0 S(k f_0) = \frac{2}{3} \text{sinc}^2(k) + \frac{1}{12} \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{4} \right) = \begin{cases} 3/4 & \text{per } k = 0 \\ \frac{1}{12} \frac{\sin^2(k\pi/4)}{(k\pi/4)^2} & \text{per } k \neq 0 \end{cases}$$

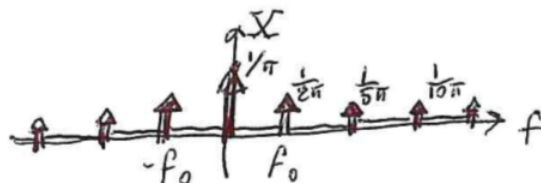
e dallo spettro dell'impulso base,

$$f_0 X_0(k f_0) = \frac{3}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{3}{4} k \right) = \begin{cases} 3/4 & \text{per } k = 0 \\ \frac{3}{4} \frac{\sin^2(k(\pi-\pi/4))}{(3k\pi/4)^2} & \text{per } k \neq 0 \end{cases}$$

i quali, ovviamente, coincidono, al netto delle semplificazioni e dell'invarianza del $\sin^2(\cdot)$ per aggiunta di multipli dell'angolo piatto.

(90) Lo spettro del segnale e il relativo grafico risultano essere

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+k^2} \delta(f - kf_0)$$



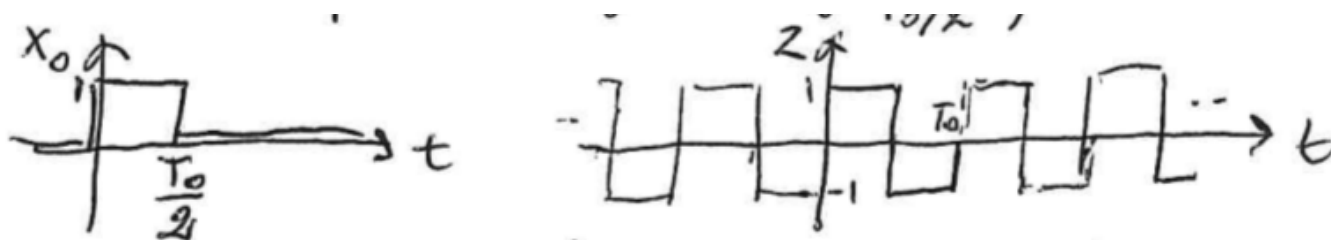
[91] Poiché l'impulso base del segnale $y(t)$ è legato a quello di $x(t)$ dalla relazione

$$y_0(t) = x_0(t - T_0/2)$$

la relazione tra le rispettive trasformate è tale che

$$Y_k = f_0 Y(kf_0) = f_0 X(kf_0) e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} = X_k e^{-j\pi k} = X_k \cdot (-1)^k$$

(92) Scegliendo, ad esempio, $x_0(t) = \Pi\left(\frac{t-T_0/4}{T_0/2}\right)$, si hanno i seguenti grafici



rispettivamente, per $x_0(t)$, segnale periodico e *replica base*. Quest'ultima è uguale a $z_0(t) = x_0(t) - x_0(t - T_0/2)$, per cui il legame tra i rispettivi spettri è (vedi esercizio precedente)

$$Z_k = X_k \cdot (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 2X_k & \text{per } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } k \text{ pari} \end{cases}$$

(93) $z(t)$ ha periodo $T'_0 = T_0 \cdot T$ e frequenza fondamentale $f'_0 = f_0/T$. I coefficienti $Z_k = X_k$ coincidono con quelli di $x(t)$ (non scalato) ma ovviamente competono ad armoniche $kf'_0 = kf_0/T$ "scalate".

[94] Dalla definizione di segnale pari e dall'espressione generale di un segnale periodico segue

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0) = x(-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(-t - nT_0)$$

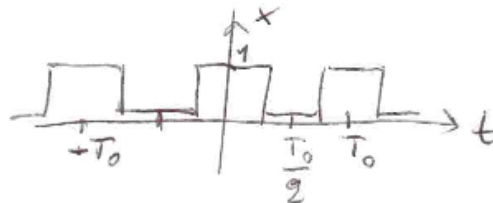
in cui, cambiando l'indice di somma in $m = -n$, si ottiene

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0(-(t - mT_0))$$

che vale per qualunque t se e solo se l'impulso base soddisfa $x_0(t) = x_0(-t)$, ovvero se è anch'esso reale e pari. Da quest'ultima proprietà si deduce che il suo spettro è reale e pari e dunque

$$X_k = f_0 X(kf_0) = f_0 X(-kf_0) = X_{-k} \in \Re$$

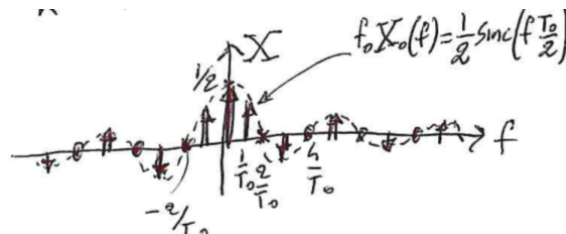
[95] Il segnale, riportato in figura, è lo stesso dell'esercizio (88)



Dunque lo spettro è

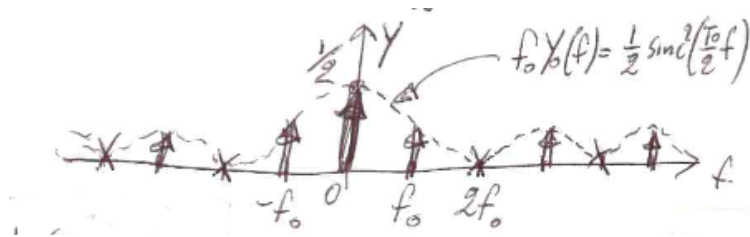
$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(f - kf_0)$$

il cui grafico viene qui riportato.



La risposta in frequenza del filtro è $H(f) = \text{sinc}(fT_0/2)$, dunque dal filtraggio si ha:

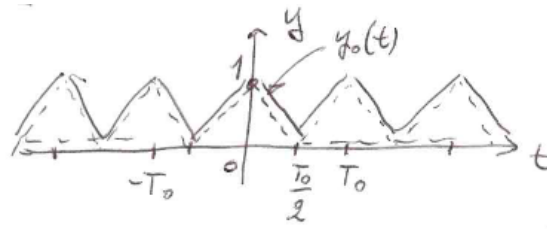
$$Y(f) = H(f)X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \delta(f - kf_0)$$



Una possibile espressione (non univoca) per il segnale di uscita è

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t - nT_0}{T_0/2}\right)$$

ottenuta dall'impulso base filtrato $y_0(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$. L'andamento del segnale periodico $y(t)$, viceversa, è univoco ed è riportato nel grafico seguente

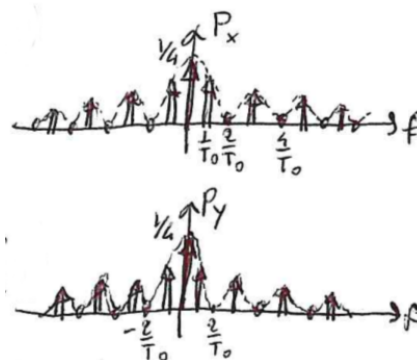


(96) Si ha $Y(f) = X(f)$ poiché $H(kf_0) = 1$ per qualunque k . la ragione è che il ritardo coincide col periodo del segnale di ingresso.

[97] Le espressioni delle densità spettrali di potenza e i relativi grafici sono:

$$P_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \delta(f - kf_0)$$

$$P_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |Y_k|^2 \delta(f - kf_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \text{sinc}^4\left(\frac{k}{2}\right) \delta(f - kf_0)$$



In base al Teorema di Parseval, le potenze medie normalizzate dei rispettivi segnali sono

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \frac{\sin^2(k\pi/2)}{(k\pi/2)^2} = \frac{1}{4} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} \right)$$

$$P_y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \frac{\sin^4(k\pi/2)}{(k\pi/2)^4} = \frac{1}{4} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^4} = \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^4} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4} \right)$$

La somma della serie dei termini $1/k^2$ è un problema difficile, noto come *Problema di Basilea*, che fu risolto nel 1735 da Eulero, il quale stabilì che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

il che porta a concludere che la potenza media dell'onda quadra è

$$P_x = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

come risulta peraltro immediato calcolare nel dominio del tempo, dalla definizione di Potenza media normalizzata.

Per determinare P_y occorre invece conoscere il risultato della serie con termini $1/k^4$... In generale, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \zeta(\alpha)$$

è nota come *Funzione Zeta di Riemann* e i suoi valori sono noti almeno per tutti gli α interi. Per $\alpha = 4$, si ha $\zeta(4) = \pi^4/90$ (per $\alpha = 2$ si ha, ovviamente, il risultato di Eulero, di molti anni precedente quello di Riemann); per cui

$$P_Y = \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{16} \frac{\pi^4}{90} \right) = \frac{1}{3}$$

risultato a cui si poteva pervenire, anche in questo caso, col calcolo diretto nel dominio del tempo e con minore sforzo.

(98) Poiché $z(t) = x(t - T_0/4)$, ne segue che $Z(f) = X(f)e^{-j2\pi f T_0/4}$ e dunque anche $Z_k = X_k e^{-jk\frac{\pi}{2}}$. Il modulo quadrato dei coefficienti di Fourier $|Z_k|^2 = |X_k|^2$ è uguale, per i due segnali periodici, e così anche per i loro spettri di potenza

$$P_z(f) = P_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2} \right) \delta(f - kf_0)$$

e per la potenza media $P_z = P_x = \frac{1}{2}$.