

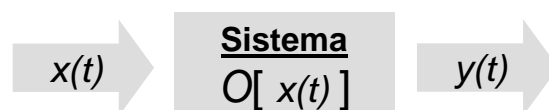
Definizione di Sistema

Sistema:

Da un punto di vista fisico e' un dispositivo che modifica un segnale $x(t)$, detto **ingresso**, generando il segnale $y(t)$, detto **uscita**.

Da un punto di vista formale il segnale d'ingresso $x(t)$ viene "manipolato" tramite un generico operatore matematico indicato con $O[.]$. Il risultato delle operazioni matematiche eseguite sull'ingresso e' il segnale d'uscita $y(t)$.

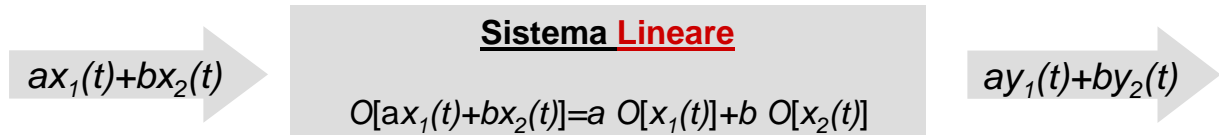
Schema a blocchi



Sistemi Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

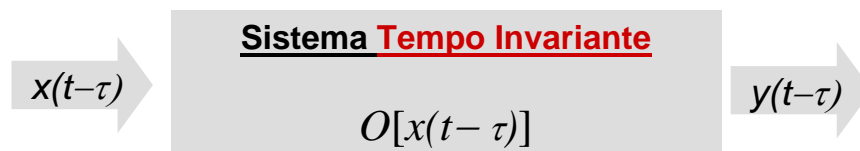
Lineare: l'uscita generata dalla combinazione lineare di due o più ingressi è uguale alla combinazione lineare delle uscite generate dai singoli ingressi

$$y_1(t) = O[x_1(t)]$$
$$y_2(t) = O[x_2(t)]$$



Tempo Invariante: l'uscita generata da un segnale ritardato è uguale all'uscita generata dal segnale originale ritardata.

$$y(t) = O[x(t)]$$



Risposta all'impulso

Risposta all'impulso: è l'uscita del sistema quando l'ingresso è l'impulso. Viene solitamente indicata con il simbolo $h(t)$



Se il sistema è tempo-invariante, la forma della risposta all'impulso non dipende dall'istante in cui si applica l'impulso. Quando l'ingresso è un impulso anticipato o ritardato l'uscita è uguale ad $h(t)$ anticipata o ritardata:

$$h(t - \tau) = O[\delta(t - \tau)]$$

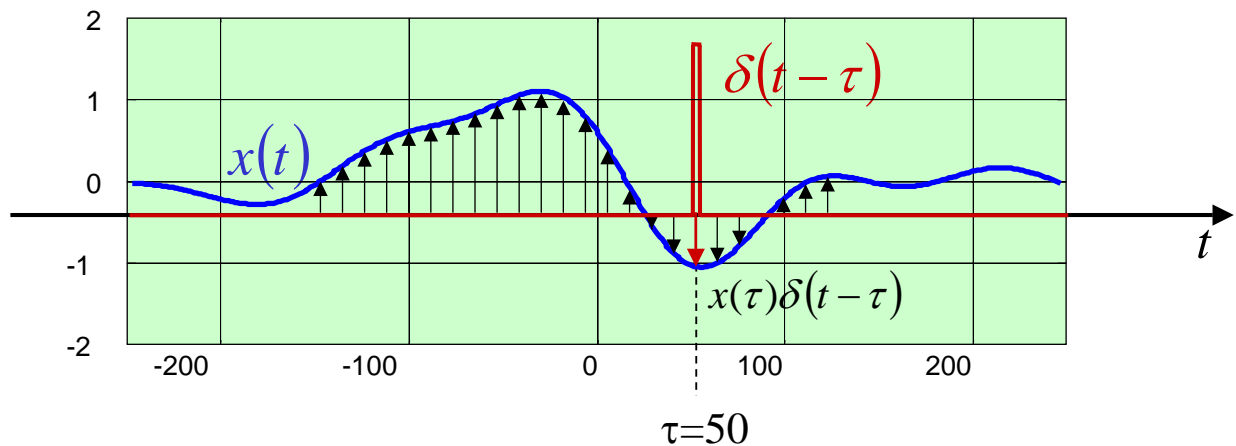
Se il sistema è anche lineare, nota la risposta all'impulso, è possibile calcolare l'uscita del sistema quando l'ingresso è una qualsiasi combinazione lineare d'impulsi:

$$O[a\delta(t) + b\delta(t - \tau_1) + c\delta(t - \tau_2)] = ah(t) + bh(t - \tau_1) + ch(t - \tau_2)$$

Rappresentazione dei segnali come combinazione lineare di impulsi

Un qualsiasi segnale $x(t)$ può essere rappresentato come somma integrale di impulsi ritardati e pesati

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



5

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

La convoluzione

$x(t)$ come somma integrale di impulsi pesati e ritardati

Sistema **Lineare**: uscita a una combinaz. lineare di ingressi e' la comb. lineare delle singole uscite

$$y(t) = O[x(t)] = O\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) O[\delta(t - \tau)] d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

Sistema **TI**:
 $O[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau)$

Cambio variabili

Integrale di convoluzione
(o semplicemente
convoluzione)

uscita = **convoluzione** tra **ingresso** e **risposta all'impulso** del sistema LTI

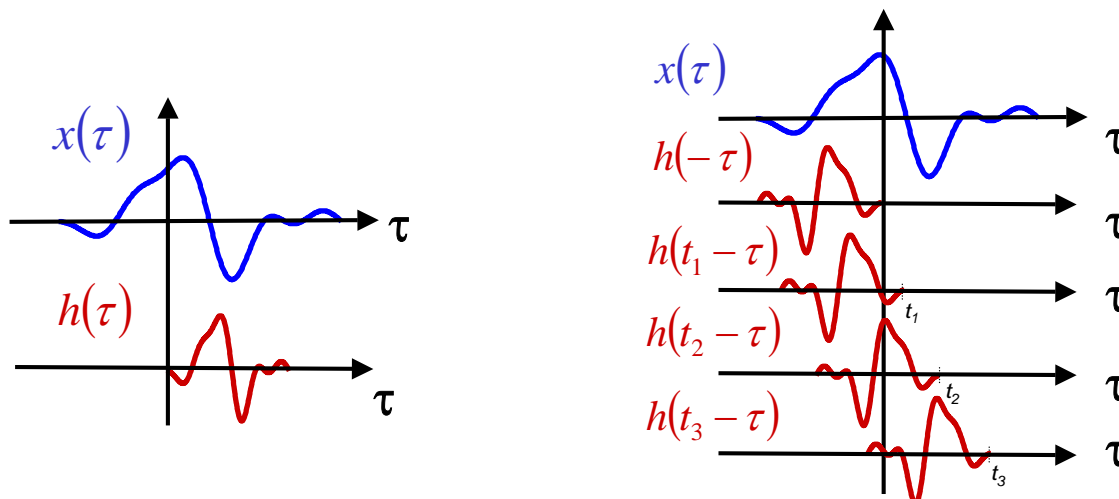
6

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

Calcolo dell'integrale di convoluzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

L'integrando $x(\tau) h(t - \tau)$ e' il prodotto tra il segnale $x(\tau)$ e la risposta all'impulso $h(\tau)$ ribaltata in τ traslata di t (verso destra se $t > 0$, verso sinistra se $t < 0$)

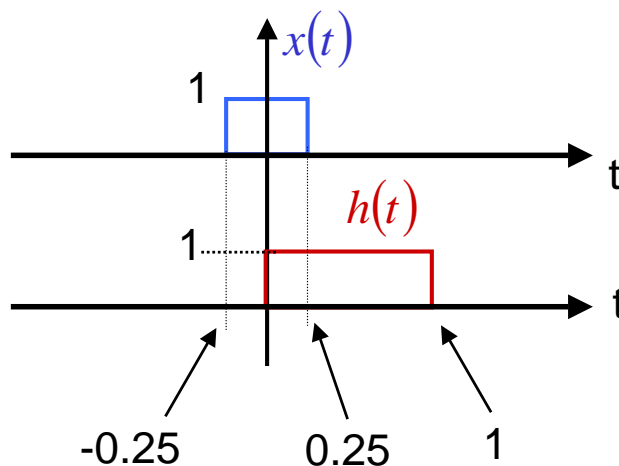


Esempi di calcolo della convoluzione (1)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$x(t) = \text{rect}(2t)$$

$$h(t) = \text{rect}(t - 1/2)$$



Esempi di calcolo della convoluzione (2)

Integrando

$$x(\tau) h(t - \tau)$$

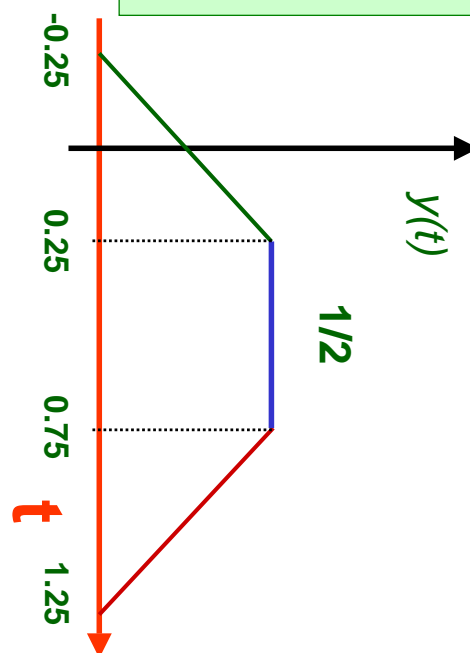
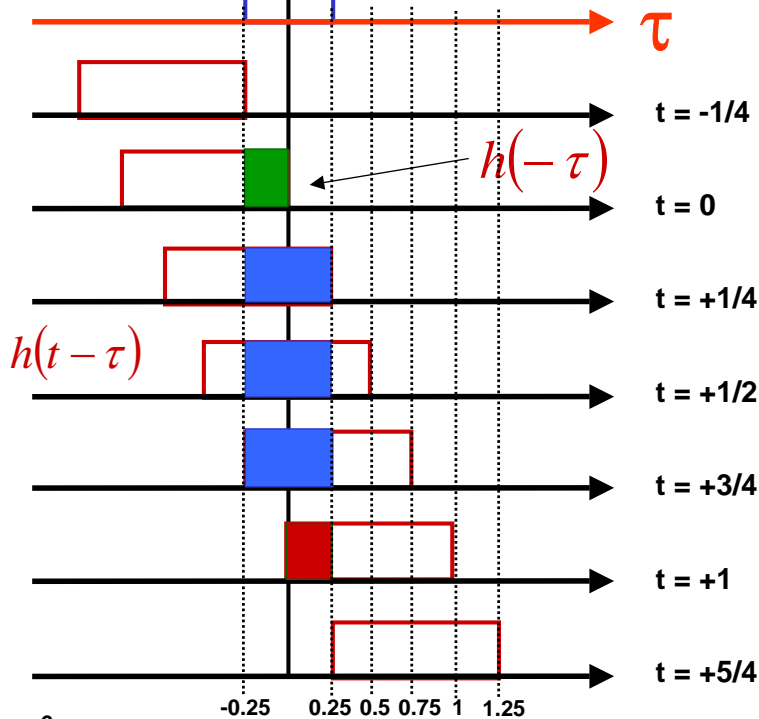
$x(\tau)$

$$x(t) = \text{rect}(2t)$$

$$h(t) = \text{rect}(t - 1/2)$$

Integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$



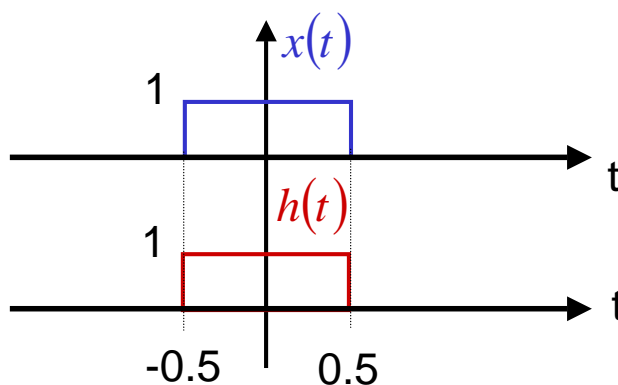
9

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

Esempi di calcolo della convoluzione (3)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

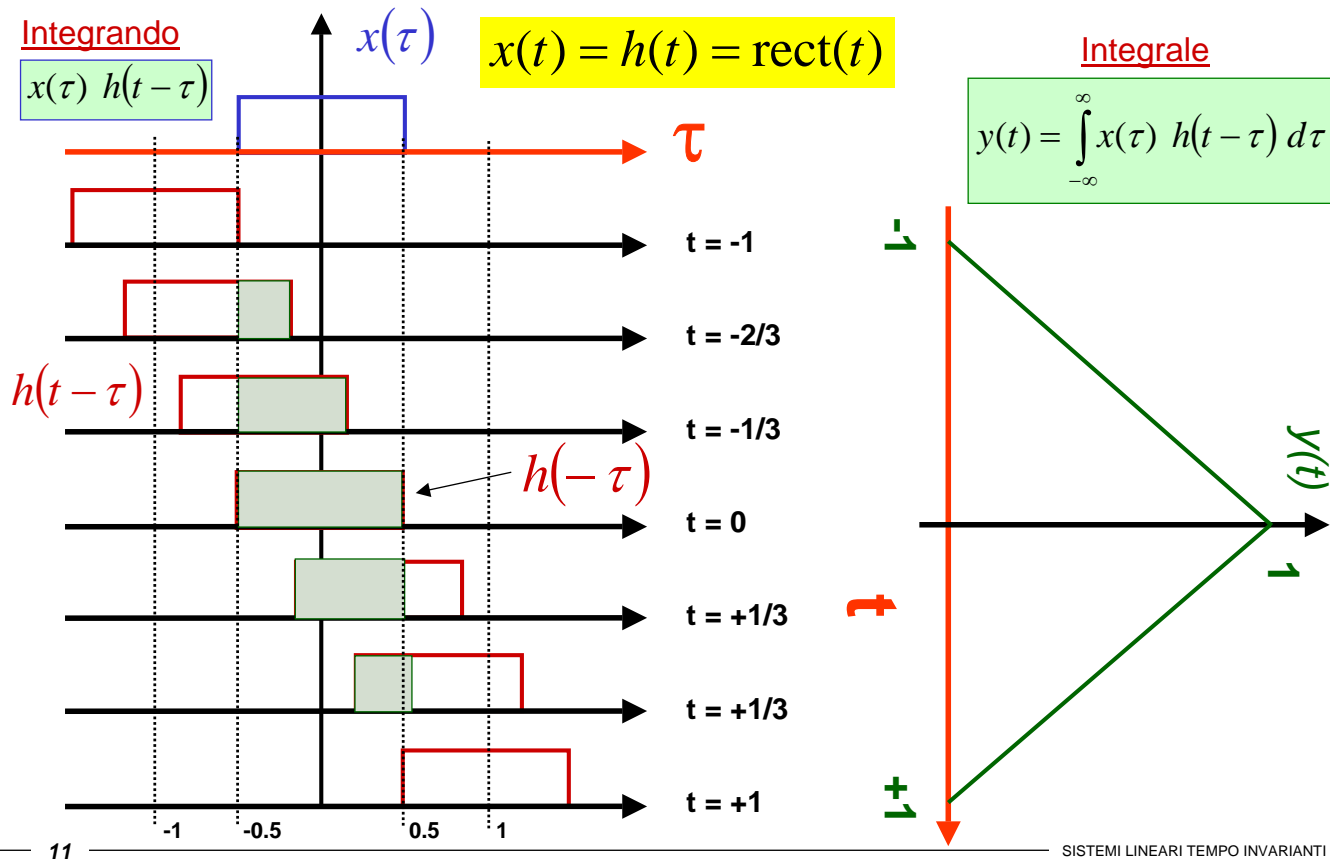
$$x(t) = h(t) = \text{rect}(t)$$



10

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

Esempi di calcolo della convoluzione (4)

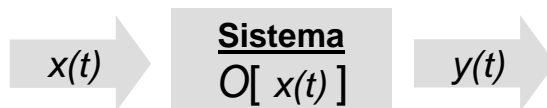


Causalità dei Sistemi L.T.I. (1)

Definizione:

Un Sistema L.T.I. è detto causale se l'uscita $y(t)$ per un $t=t_0$, dipende dai valori dell'ingresso $x(t)$ solo per valori della variabile $t \leq t_0$.

La condizione di causalità è molto importante se la variabile indipendente è il tempo: in questo caso un sistema fisico deve essere causale. Se ciò non fosse infatti il sistema sarebbe in grado di predire il futuro.

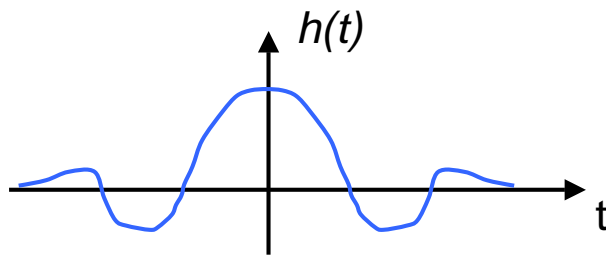


Condizione da rispettare per garantire la causalità:

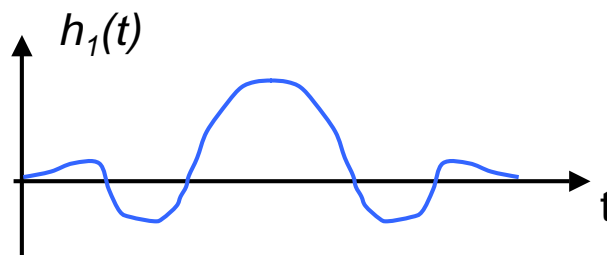
$$h(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

Causalità dei Sistemi L.T.I. (2)

Spesso utilizzeremo risposte all'impulso del tipo:

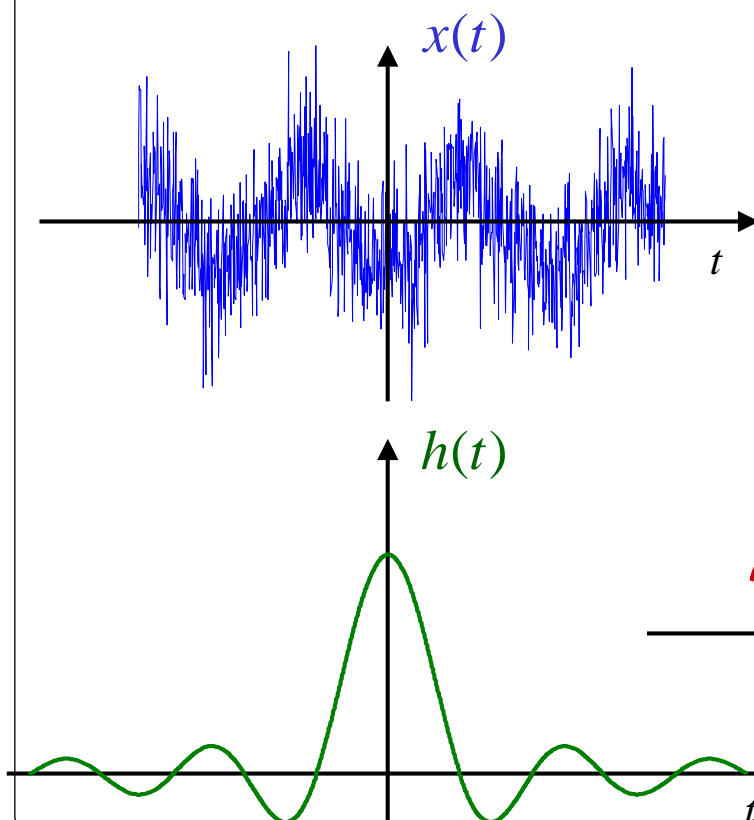


Questa risposta all'impulso non è causale: può essere resa causale attraverso opportuni troncamenti (nel tempo, se $h(t)$ si estende da $-\infty$ a ∞) e ritardi.



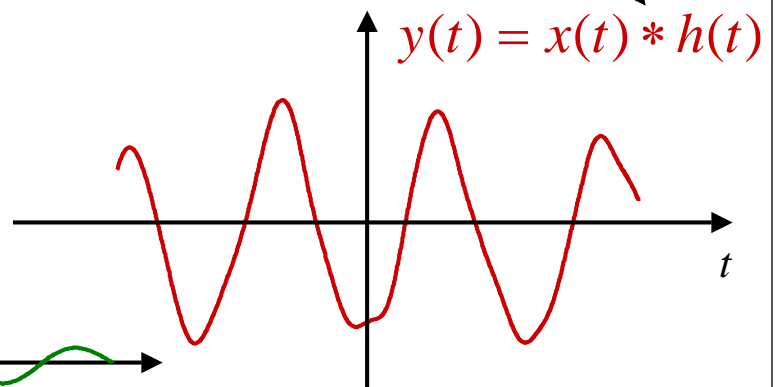
Utilizzare $h(t)$ invece che $h_1(t)$ significa trascurare i ritardi necessari a rendere causale la risposta all'impulso.

Effetti della convoluzione (filtro passa-basso)

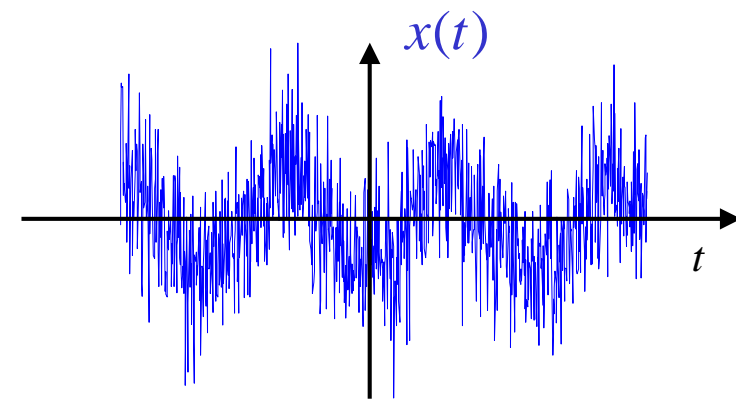


Le componenti del segnale **rapidamente varianti nel tempo** (ad alta frequenza) vengono eliminate dalla convoluzione con una risposta all'impulso **lentamente variante nel tempo** (filtro passa-basso)

Simbolo della convoluzione



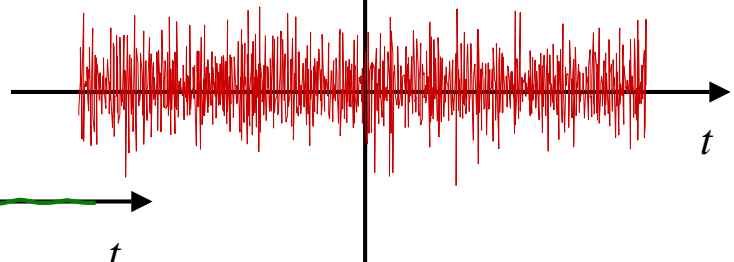
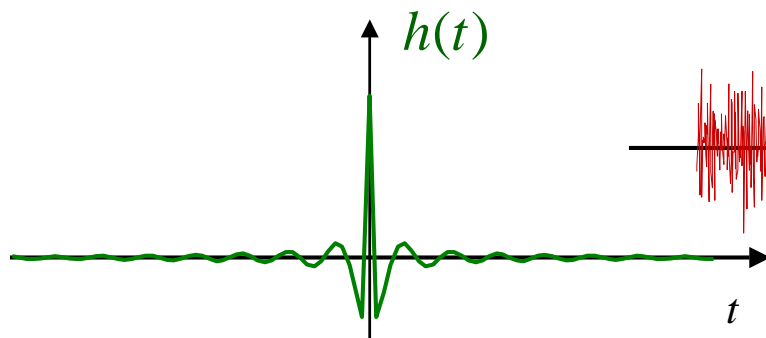
Effetti della convoluzione (filtro passa-alto)



Le componenti del segnale **lentamente varianti nel tempo** (a **bassa frequenza**) vengono eliminate dalla convoluzione con una risposta all'impulso **rapidamente variante nel tempo** (filtro **passa-alto**)

Simbolo della convoluzione

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



Esercizi

1 - Dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \exp(-t/T_0)u(t)$, trovare l'uscita $y(t)$ quando l'ingresso $x(t) = \delta(t) + 3\delta(t - T_0) - 2\delta(t - 2T_0)$. Quanto vale $y(T_0)$?

2 - Dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 3\delta(t - T_0)$, trovare l'uscita $y(t)$ quando l'ingresso $x(t) = 1 + \cos(2\pi t/T_0)$. Quanto vale $y(0)$?

3 - Dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$ e ingresso $x(t)$ di figura, disegnare l'uscita $y(t)$. Quanto vale $y(1)$?

