Riassunto Segnali Analogici e Sistemi Lineari di A. Vannucci - Teoria dei Segnali

Teoria dei Segnali (Università degli Studi di Parma)

Riassunto Teoria dei Segnali

Riassunto del libro "Segnali Analogici e Sistemi Lineari"

Capitolo 1: Informazioni, messaggi, segnali

Classificazione dei segnali

Un **segnale** è la variazione di una grandezza fisica a cui è associata un'informazione. Il *modello matematico* che si utilizza è una **funzione reale di variabile reale**. La variabile indipendente secondo cui varia il segnale è il tempo, pertanto i segnali vengono indicati tramite funzioni *x(t)*, *y(t)*, etc.

Si riconoscono quattro tipologie di segnali:

- Segnali **analogici**: continui a tempo continuo,
- Segnali **quantizzati**: discreti a tempo continuo,
- Segnali **campionati**: continui a tempo discreto,
- Segnali **numerici**: discreti a tempo discreto.

Un'ulteriore classificazione è quella tra **segnali determinati** (o *deterministici*), dei quali si conosce a priori l'andamento nel tempo (o la sua espressione matematica) ed i **segnali aleatori**, dei quali si conoscono solo alcune proprietà statistiche.

Segnali periodici e simmetrici

Un segnale *x(t)* è **periodico** se esiste un intervallo di tempo T_0 per il quale vale
$x(t+T_0)=x(t) \; per \; \forall t$

Il **periodo** è il più piccolo intervallo T_0 per cui vale la formula qui sopra. Associata al periodo vi è la **frequenza di ripetizione** (o **frequenza fondamentale**) $f_0=\frac{1}{T_0}$ che si misura in Hertz [Hz].

Esistono segnali dotati di particolari simmetrie, deducibili dai loro grafici:

- Segnale **pari**: $x(-t)=x(t)$
- Segnali **dispari**: $x(-t)=-x(t)$ il grafico deve passare per l'origine degli assi coordinati
- **Simmetria Hermitiana**: $x(-t)=\bar{x}(t)$ dove $\bar{x}(t)$ è il complesso coniugato.

Per qualunque segnale privo di particolari simmetrie può essere descritto come somma di una *componente pari* e una *componente dispari* $x(t)=x_p(t)+x_d(t)$ dove $x_p(t)=\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}x(-t)$ e $x_d(t)=\frac{1}{2}x(t)-\frac{1}{2}x(-t)$

Segnali notevoli

- Segnale **costante**: $x(t)=A$
- Segnale a **gradino unitario**: $u(t)=0\; per\; t<0 \vee 1\; per\; t\geq 0$
- **Impulso rettangolare**: $\Pi(t)=0\; per\; |t|>\frac{1}{2} \vee 1\; per\; |t|\leq\frac{1}{2}$
- **Impulso triangolare**: $\Lambda(t)=0\; per\; |t|>1 \vee 1-|t|\; per\; |t|\leq 1$
- **Esponenziale negativo causale**: $x(t)=Ae^{-Bt}u(t)$ con $A>0, B>0$
- Segnale **sinusoidale**: $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\varphi)$ dove A è l'**ampiezza** della sinusoide, f_0 la **frequenza**, φ è la **fase iniziale**. Si tratta di un segnale periodico. È pari se la sua fase iniziale è nulla.
- **Fasore**: $x(t)=Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$
- **Sinc**: $sinc(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ viene utilizzato nel campionamento dei segnali. Si tratta di un segnale pari e attraversa l'asse dei tempi agli istanti $t=\pm 1, \pm 2, \pm 3, etc$ Viene considerato un segnale continuo in quanto il limite per $t\rightarrow 0$ vale 1.

Durata, area, valor medio, energia e potenza di un segnale

Un segnale si dice a **durata strettamente limitata** se esiste un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ all'interno del quale il segnale è nullo. La **durata** del segnale è $D=t_2-t_1$.

Un segnale si dice **a durata asintoticamente limitata** se esso tende a zero per $t\rightarrow\pm\infty$ altrimenti si dice **a durata illimitata**.

Si definisce l'**area di un segnale** come $A_x=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$.

Il **valore medio temporale** di un segnale è $\langle x(t)\rangle=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt$ oppure, nel caso di segnali periodici $\langle x(t)\rangle=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\,dt$. Il valore medio è detto anche **componente continua** di un segnale.

Ad un segnale qualunque *x(t)* può essere associata una **potenza istantanea** $P_x(t)=|x(t)|^2$ ed una **energia totale** $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$. I segnali per i quali l'energia totale è finita si dicono *segnali ad energia finita* o *segnali di energia*. Per quelli la cui energia è infinita, si valuta la **potenza media**

temporale come $P_x = \langle P_x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$. Nel caso di segnali periodici, la potenza media è esprimibile come $P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2$. Un'ulteriore grandezza utile nello studio dei segnali è il **valore efficace** o **valore rms** (*root mean square*): $x_{eff} = \sqrt{P_x}$.

Trasformazioni elementari sui segnali

- **Moltiplicazione per una costante**: $y(t) = A\,x(t)$ ha lo stesso grafico di *x(t)* ma l'ampiezza del segnale viene scalata di un coefficiente A. Se $|A| > 1$ si ha una **amplificazione** del segnale, se $|A| < 1$ si ha una **attenuazione**. Se A è negativo, si ha un ulteriore **ribaltamento** del segnale del grafico attorno all'asse *t*.
- **Traslazione temporale**: $y(t) = x(t - t_0)$ è una versione di *x(t)* ritardata della quantità t_0.
- **Inversione temporale**: $y(t) = x(-t)$ consiste nel ribaltamento del grafico attorno all'asse delle ordinate.
- **Cambiamento di scala**: $y(t) = x(\frac{t}{T})$ in questo caso, i valori assunti da *x(t)* in un intervallo $[t_{1,} t_2]$ vengono assunti da *y(t)* in un intervallo $[Tt_{1,} Tt_2]$ che è T volte maggiore. Corrisponde ad una **espansione** nel caso in cui $|T| > 1$ o una **compressione** per $|T| < 1$. Nel caso in cui $T < 0$ si aggiungerà anche una **inversione temporale** del segnale.

L'impulso di Dirac

Si tratta di un segnale $\delta(t)$ il cui andamento è quello della distribuzione di Dirac, indicato nei grafici come una freccia di altezza unitaria. Trattandosi di una *funzione generalizzata*, viene definita di una sua proprietà integrale, detta **proprietà di campionamento** $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x(0)$ valida per qualunque segnale *x(t)* che sia continuo in *t=0*. Da questa proprietà, possono essere ricavate tutte le altre:

- **Area unitaria**: imponendo nella formula sopra $x(t) = 1$ si ottiene che $A_\delta = 1$
- **Quasi nullo ovunque**: scegliendo $x(t) = \Pi(\frac{t}{2\epsilon})$, l'integrale diventa $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(t) = 1$ dal momento che fuori da $[-\epsilon, +\epsilon]$ il segnale *x(t)* è nullo e *x(0)=1*. Poiché ε può essere piccolo a piacere, ne deriva che tutta l'area dell'impulso di Dirac è concentrata intorno ad un infinitesimo dell'origine.
- **Tende a $+\infty$ nell'origine**: segue da quanto detto prima.
- **Simmetria pari**: poiché se sostituiamo nell'integrale $\delta(-t)$ il risultato non cambia.

- **Generalizzazione della proprietà di campionamento**: $\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)\delta(\tau-t_0)\,d\tau=y(t_0)$
- **Elemento neutro della convoluzione**: $\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau=y(t)$. L'integrale viene detto *integrale di convoluzione*, indicata come $y(t)*\delta(t)$. Dal momento che $y(t)*\delta(t)=y(t)$, l'impulso di Dirac è l'elemento neutro della convoluzione.
- **Proprietà di campionamento in forma non integrale**: si ottiene sostituendo nella formula generalizzata la funzione *y(t)* con un valore costante $y(t_0)$: $y(t)\delta(t-t_0)=y(t_0)\delta(t-t_0)$
- **Derivata del gradino unitario**: l'impulso di Dirac è la derivata del gradino unitario *u(t)*: $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)\delta(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau=u(t)$

Capitolo 2: Sistemi

Si definisce **sistema** un apparto che trasforma uno o più segnali *di ingresso* in o uno o più segnali *di uscita*. Si adotta la descrizione *ingresso-uscita* che definisce il sistema rispetto alle trasformazioni che opera sui segnali. Il modello matematico sarà il *funzionale*, ovvero un operatore che trasforma funzioni in funzioni: $y(t)=T[x(\tau);t]$ dove $T[.]$ è il simbolo che caratterizza il funzionale, τ la variabile di tempo secondo cui varia l'ingresso e t quella secondo cui varia l'uscita y.

Classificazione dei sistemi

I sistemi **deterministici** sono sistemi per i quali l'uscita è univocamente determinata una volta assegnato il segnale di ingresso.

Un sistema si dice **causale** quando la risposta ad un certo istante di tempo t non dipende da valori futuri del segnale di ingresso: $y(t)=T[x(\tau);t]=T[x(\tau)u(t-\tau);t]$

Un sistema è **idealmente realizzabile** se la sua risposta ad un segnale di ingresso reale è anch'essa reale: $x(t)\in\mathbb{R}\Rightarrow y(t)=T[x(t)]\in\mathbb{R}$

Se è *idealmente realizzabile* e anche *causale*, il sistema si dice **fisicamente realizzabile**.

Un sistema si dice **senza memoria** quando l'uscita non dipende né da valori futuri né passati dell'ingresso ma solo dall'istante t attuale: $y(t)=T[x(\tau);\tau=t;t]$. Tutti i sistemi *senza memoria* sono anche *causali*.

Un sistema ha **stabilità B.I.B.O.** (*Bounded Input, Bounded Output*) se, dato un ingresso con ampiezza limitata. Risponde con un segnlae d'uscita limitato: $|x(t)|<M\Rightarrow|y(t)|<L$ con M e L due generiche costanti finite.

Si dice **stazionario** (o *tempo-invariante*) un sistema il cui comportamento non varia nel tempo: $y(t)=T[x(t)]\Rightarrow T[x(t-t_0)]=y(t-t_0)\,\forall\,t,t_0,x(t)$

Un sistema è **lineare** quando gode del principio di sovrapposizione degli effetti: $y_1(t)=T[x_1(t)],\,y_2(t)=T[x_2(t)]\Rightarrow y(t)=T[\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)]=\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)\,\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\,(o\,\mathbb{C})$

La linearità implica l'**omogeneità**: $T[\alpha x(t)]=\alpha T[x(t)]$

Sistemi lineari e stazionari

Sono sistemi che godono delle proprietà di *linearità* e di *stazionarietà* (o *tempo-invarianza*). Per questo motivo sono detti **LS** o **LTI**. Spesso vengono anche chiamati **filtri**.

La risposta impulsiva

Riprendendo la proprietà di campionamento dell'impulso di Dirac, pensiamo all'integrale di convoluzione come ad una *sommatoria generalizzata*:

$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \approx \lim_{\Delta T\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(\tau_k)\delta(t-\tau_k)\Delta T$ con $k\Delta T\leq\tau_k\leq(k+1)\Delta T$ il cui segnale di ingresso è una serie di impulsi di Dirac ciascuno traslato nel tempo di una quantità τ_k e scalato in ampiezza in modo che la sia area sia costante pari a $x(\tau_k)$.

In questo modo, definita $h(t)=T[\delta(t)]$ detta **risposta impulsiva**, si ottiene

$$T[x(t)]=\lim_{\Delta T\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(\tau_k)h(t-\tau_k)\Delta T\approx\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=y(t)$$

Una volta nota la *risposta impulsiva* è possibile esprimere l'uscita del sistema per qualsiasi segnale di ingresso: $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$

Un metodo pratico per identificare un sistema può essere quello di sfruttare la *risposta indiciale* $g(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t)dt$, ovvero il segnale di uscita che il sistema genera in risposta ad un *gradino unitario* in ingresso.

Proprietà della convoluzione: sistemi in cascata e in parallelo

L'integrale di convoluzione tra due segnali è $x(t)* y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$. L'operazione di convoluzione gode delle proprietà:

- **commutativa**: $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$
- **associativa**: $(x(t)*g(t))*h(t)=x(t)*(g(t)*h(t))$
- **distributiva**: $x(t)*(h(t)+g(t))=x(t)*h(t)+x(t)*g(t)$

Per la proprietà *associativa* si ha che se un segnale attraversa due sistemi in *cascata*, la risposta complessiva è identica a quella prodotta da un sistema la cui risposta impulsiva sia la convoluzione delle risposte impulsive dei due sistemi.

Le proprietà dei sistemi espresse attraverso la risposta impulsiva

- **Causalità**: la risposta di un sistema al tempo *t* ad un ingresso $x(\tau)u(t-\tau)$ è espressa da $y(t)=T[x(\tau)u(t-\tau);t]=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*(h(t)u(t))$ che deve coincidere con la risposta all'ingresso $x(\tau)$ che vale $y(t)=x(t)*h(t)$. Il sistema risulta causale se e solo se $h(t)=h(t)u(t)$
- **Realizzabilità ideale**: la risposta $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$ è reale se e solo se $h(t)\in\mathbb{R}$
- **Realizzabilità fisica**: se e solo se $h(t)\in\mathbb{R}$ e $h(t)=0\ per\, t<0$
- **Memoria**: in generale, un sistema LS è sempre con memoria. Ciò non è valido solo nel caso di *amplificatore ideale* con guadagno *A* la cui risposta impulsiva è $h(t)=A\delta(t)$
- **B.I.B.O.**: se e solo se la sua risposta impulsiva è *assolutamente integrabile*, cioè $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<H$ dove *H* è un numero positivo finito.

La funzione di trasferimento

Consideriamo un segnale di ingresso *sinusoidale*:

$x(t)=A\cos(2\pi f t+\varphi)=\frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j2\pi ft}+\frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j2\pi ft}$ in cui la seconda rappresentazione sfrutta la combinazione lineare di due segnali fasoriali. Poiché il sistema è lineare, possiamo determinare il segnale di uscita come combinazione lineare $y(t)=\frac{A}{2}e^{j\varphi}y_1(t)+\frac{A}{2}e^{-j\varphi}y_2(t)$

dove $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono rispettivamente le uscite corrisponenti ai segnali fasoriali in ingresso $x_1(t)=e^{j2\pi ft}$ e $x_2(t)=e^{-j2\pi ft}$.

Per determinare $y_1(t)$ possiamo sfruttare l'integrale di convoluzione:

$$y_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}h(\tau)d\tau=e^{j2\pi ft}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right)$$

Questo significa che la risposta di un sistema LS ad un fasore di frequenza *f* è ancora un fasore con la medesima frequenza.

A questo punto possiamo definire la **funzione di trasferimento** del sistema come $H(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$ che caratterizza il comportamento di un sistema con risposta impulsiva *h(t)*. Può essere descritta attraverso il suo modulo e la sua fase: $H(f)=A_H(f)e^{j\varphi_H(f)}$

A questo punto, possiamo scrivere l'uscita $y_2(t)$ come: $y_2(t)=\bar{y}_1(t)=e^{-j2\pi ft}\bar{H}(f)=e^{-j2\pi ft}H(-f)$

Le funzioni $A_H(f)$ e $\varphi_H(f)$ sono biunivocamente associate alla funzione di trasferimento e sono dette, rispettivamente, *risposta in ampiezza* e *risposta in fase* del sistema.

Conoscere la funzione di trasferimento ci permette di determinare la risposta di un sistema a un qualsiasi ingresso sinusoidale o fasoriale. Un qualunque segnale periodico può essere rappresentato come una somma pesata di fasori o sinusoidi. Inoltre, un simile approccio è valido anche per i segnali non periodici.

Capitolo 3: La trasformata di Fourier

La serie di Fourier

Dato un segnale periodico *x(t)* con periodo T_0 e frequenza $f_0=\frac{1}{T_0}$ sappiamo che, se il segnale **converge**, allora può essere rappresentato con $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$ nota come *rappresentazione in serie di Fourier*.

I coefficienti X_k, generalmente complessi anche in caso di segnale reale, sono detti *coefficienti di Fourier*: $X_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$

Si ricava, quindi, che il segnale periodico *x(t)* può essere sintetizzato come una combinazione lineare di infiniti fasori, ciascuno con frequenza multipla di quella fondamentale: ciascuna frequenza kf_0 è detta k-esima **frequenza armonica**.

L'insieme dei coefficienti di Fourier fornisce una rappresentazione di *x(t)* nel *dominio della frequenza*, l'indice *k* scandisce le varie frequenze armoniche.

Per la linearità è possibile valutare l'effetto del filtro su ciascun termine fasoriale che compare nella serie di Fourier del segnale di ingresso:

$x_k(t)=X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Rightarrow y_k(t)=x_k(t)*h(t)=H(kf_0)X_k^{j2\pi k f_0 t}$ quindi

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0)X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

I coefficienti di Fourier del segnale di ingresso e di quello di uscita sono legati dalla relazione $Y_k=H(kf_0)X_k$

Condizione *sufficiente* affinché i coefficienti di Fourier esistano e siano finiti è che

$$\int_{T_0}|x(t)|^2 dt<\infty$$

Dunque, la serie di Fourier converge per tutti i segnali periodici di potenza.

Un altro criterio *sufficiente* a garantire la convergenza della serie di Fourier è espresso dalle *condizioni di Dirichelet*:

1. $\int_{T_0}|x(t)|dt<\infty$

2. x(t) ha, al più, un numero finito di discontinuità, soltanto di prima specie, all'interno di ogni periodo
3. x(t) ha, in ogni periodo, un numero finito di massimi e di minimi.

La trasformata di Fourier

Nel dominio della frequenza possono anche essere rappresentati i *segnali impulsivi*. Un segnale si dice **impulsivo** se è integrabile in modulo: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$

Questa condizione è soddisfatta dai segnali con valori finiti e a durata strettamente limitata ma anche segnali a durata asintoticamente limitata a patto che per $t \to \pm\infty$ tendano a zero più velocemente di $\frac{1}{|t|}$.

Per tutti questi segnali vale $x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau] e^{j2\pi ft} df$ dove la quantità tra parentesi quadre può essere definita come una funzione della frequenza: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ dalla quale si nota una somiglianza alla formula relativa ai coefficienti di Fourier vista in precedenza.

Infatti: $X_k = \lim_{T_0 \to \infty} df \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{+T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f) df$ da cui si ricava che un segnale con un periodo tendente all'infinito presenta dei *coefficienti di Fourier* infinitamente piccoli, che tendono a coprire l'intero asse delle frequenze con continuità ed i cui valori sono tra di loro nel rapporto espresso dalla funzione *X(f)*.

La **trasformata inversa di Fourier** (o *antitrasformata*) è $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$.

Non tutti i segnali di energia, però, sono impulsivi e, viceversa, non tutti i segnali impulsivi sono di energia. Con il **teorema di Plancherel** è possibile estendere la validità della trasformata di Fourier anche ai segnali di energia: se un segnale *x(t)* è integrabile in modulo quadrato (ovvero, è di energia), la sua trasformata di Fourier *X(f)* esiste per qualsiasi f eccetto, al più, per un insieme di misura nulla, anch'essa integrabile in modulo quadato. $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df < +\infty$

Filtraggio di segnali impulsivi

È possibile osservare che la *funzione di trasferimento* di un sistema non è altro che la *trasformata di Fourier* della *risposta impulsiva* del sistema.

Considerando l'uscita *y(t)* di un filtro con risposta *h(t)* relativa ad un ingresso *x(t)*, è possibile calcolare la trasformata di Fourier *Y(f)* come:

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau]e^{-j2\pi ft}dt=¿$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)(\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt)d\tau=¿$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)(\int_{-\infty}^{+\infty}h(\theta)e^{-j2\pi f(\theta+\tau)}d\theta)d\tau=(\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau)(\int_{-\infty}^{+\infty}h(\theta)e^{-j2\pi f\theta}dt)=X(f)H(f)$$

Questo risultato è noto come *teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier* e stabilisce che la trasformata di Fourier dell'uscita di un sistema LS è pari al prodotto della trasformata dell'ingresso per la funzione di trasferimento del sistema.

A questo punto, l'uscita *y(t)* si può calcolare come antitrasformata del suo spettro:
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)H(f)e^{-j2\pi ft}df$$

Spettri di ampiezza, fase ed energia

Come per la funzione di trasferimento, anche la trasformata di Fourier di un qualunque segnale può essere descritta tramite modulo e fase: $X(f)=A_X(f)e^{j\varphi_X(f)}=|X(f)|e^{j\arg X(f)}=X_R(f)+jX_I(f)$

Quindi, per il segnale di uscita si avrà: $A_Y(f)=A_X(f)A_H(f)$ e $\varphi_Y(f)=\varphi_X(f)+\varphi_H(f)$.

Il **teorema di Rayleigh** afferma che l'integrale $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2df$, che sappiamo convergere per il *teorema di Plancherel*, converge all'*energia totale* del segnale.

Definiamo la **densità spettrale di energia** come $E_x(f)=|X(f)|^2$.

Lo *spettro di energia* di un segnale *y(t)* in uscita da un filtro vale:
$$E_y(f)=|Y(f)^2|=|X(f)H(f)^2|=|X(f)^2||H(f)^2|=E_x(f)|H(f)^2|$$

La densità spettrale di energia di un segnale rappresenta il modo in cui l'energia totale del sistema è distribuita sulle varie frequenze che compongono il segnale.

Simmetrie nella trasformata di Fourier

Definiamo l'espressione dello spettro di *X(f)* come:
$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cos(2\pi ft)dt-j\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\sin(2\pi ft)dt$$

Se, e solo se, *x(t)* è reale, i due integrali rappresentano la parte reale $X_R(f)$ e la parte immaginaria $X_I(f)$. Poiché la variabile f si trova solo nell'argomento del seno e del coseno, si ricava che $X_R(f)$ è una funzione pari della frequenza e $X_R(f)$ è dispari. Questo può essere riassunto affermando che *un segnale reale ha uno spettro che gode di simmetria Hermitiana*: $x(t)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow X(-f)=\bar{X}(f)$.

La relazione può anche essere scritta come:
$$x(t)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow X_R(-f)=X_R(f)\wedge X_I(-f)=-X_I(f)\Leftrightarrow A_X(-f)=A_X(f)\wedge\varphi_X(-f)=-\varphi_X(f)$$

Un *segnale pari ha spettro pari*: $x(t)\,pari\Leftrightarrow X(-f)=X(f)$

Un *segnale dispari ha spettro dispari*: $x(t)\,dispari\Leftrightarrow X(-f)=-X(f)$

Lo spettro di un segnale reale e pari è reale e pari: $x(t)\, reale\, e\, pari \Leftrightarrow X(f)\, reale\, e\, pari$

Lo spettro di un segnale reale e dispari è puramente immaginario e dispari:
$x(t)\, reale\, e\, dispari \Leftrightarrow X(f)\, puramente\, immaginario\, e\, dispari$

Da questo, è possibile concludere che, *per un segnale reale, alla parte pari del segnale corrisponde la parte reale della trasformata, mentre alla parte dispari corrisponde la parte immaginaria*:
$x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x_p(t) \Leftrightarrow X_R(f) \wedge x_d(t) \Leftrightarrow jX_I(f)$

Proprietà della trasformata di Fourier

Dualità

È basata sulla similitudine degli integrali di trasformazione e antitrasformazione: se abbiamo un segnale *x(t)* di cui conosciamo la sua trasformata *X(f)*, possiamo calcolare la traformata del segnale *X(t)*, ovvero un segnale che ha l'andamento di *X()* ma è un segnale nel tempo, come $F[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) e^{j2\pi(-f)\alpha} d\alpha = x(-f)$. La funzione *x(-f)* è uno spettro, il cui andamento è ottenuto invertendo l'asse orizzontale del grafico di *x()*.

Linearità

$a_1 x_1(t) + \ldots + a_n x_n(t) \xrightarrow{F} a_1 X_1(f) + \ldots a_n X_n(f)$

Cambiamento di scala

La trasformata di Fourier di un segnale a cui è stato applicato un *cambiamento di scala* sull'asse dei tempi è $F[x(\frac{t}{T})] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\frac{t}{T}) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-j2\pi fT\theta} |T| d\theta = |T| X(Tf)$ dove $dt = |T| d\theta\, per\, T > 0 \vee dt = -|T| d\theta\, per\, T < 0$. Per T<0 si ha una *inversione temporale*, insieme al cambio di scala.

Interessante è il rapporto che intercorre tra la durata di un segnale *x(t)* e la durata del suo spettro, detta **banda** B_X del segnale *x(t)*: a segnali di durata minore corrispondono spettri con banda maggiore e viceversa.

Traslazione temporale

$F[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f(\theta+t_0)} d\theta = X(f) e^{-j2\pi f t_0}$ che mette in evidenza come allo spettro X(f) si aggiunga un *termine di fase* tale che la quantità $-2\pi f t_0$ si somma allo *spettro di fase* $\varphi_X(f)$ mentre lo *spettro di ampiezza* $A_X(f)$ resta invariato.

Traslazione in frequenza (modulazione complessa)

Utilizzando la proprietà di traslazione temporale e di dualità della trasformata di Fourier, possiamo pervenire alla proprietà di traslazione in frequenza (o di modulazione complessa) per un segnale x(t): $x(t) e^{-j2\pi f_0 t} \xrightarrow{F} X(f+f_0)$

Cenni sulla modulazione in ampiezza

La proprietà di modulazione complessa ci permette di calcolare lo spettro di un segnale detto *modulato in ampiezza*: $x(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi)$. Questo segnale è ottenuto attraverso un circuito detto *mixer* costituito da un *moltiplicatore* ai cui ingressi si applica il segnale x(t), detto segnale *modulante*, e un segnale *sinusoidale* ad ampiezza unitaria $\cos(2\pi f_0 t+\phi)$ detto *portante*.

Attraverso le *formule di Eulero*, il segnale modulato può essere scritto come

$x(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi)=\frac{1}{2}x(t)e^{j2\pi f_0 t}e^{j\phi}+\frac{1}{2}x(t)e^{-j2\pi f_0 t}e^{-j\phi}$ di cui si può ricavare lo spettro ricorrendo alla proprietà di modulazione complessa: $\frac{1}{2}X(f-f_0)e^{j\phi}+\frac{1}{2}X(f+f_0)e^{-j\phi}$

Derivazione e integrazione

Derivazione

Considerando un segnale *x(t)* derivabile e con spettro *X(f)*, assumendo che la derivata sia trasformabile, si ha

$$F[\frac{dx(t)}{dt}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-j2\pi f t}dt=[x(t)e^{-j2\pi f t}]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,j2\pi f\,e^{-j2\pi f t}dt\Rightarrow\frac{dx(t)}{dt}\overset{F}{\rightarrow}j2\pi f\,X(f)$$

Ovvero, lo spettro di della derivata di un segnale è pari allo spettro del segnale originario, moltiplicato per una funzione lineare puramente immaginaria della frequenza.

Integrazione

Volendo calcolare la trasformata del segnale $z(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$, che rappresenta l'uscita di un *integratore* al cui ingresso è posto *x(t)*, si avrà

$$F[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau]=\int_{-\infty}^{+\infty}z(t)e^{-j2\pi f t}dt=[z(t)\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f t}]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\frac{e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f t}dt$$

Se e solo se $A_x=0$ si ha che $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{F}{\rightarrow}\frac{X(f)}{j2\pi f}$ (*proprietà di integrazione*).

Sistemi descritti da equazioni integro-differenziali

Le operazioni di derivazione e integrazione di un segnale vengono tradotte in frequenza in operazioni algebriche di moltiplicazione e divisione, questo perché un segnale x(t) viene rappresentato da una somma generalizzata di fasori $X(f)e^{j2\pi f t}df$; la derivata e l'integrale di questi fasori sono pari a $j2\pi f\,X(f)e^{j2\pi f t}df$ e $\frac{X(f)}{j2\pi f}e^{j2\pi f t}df$ e, dal momento che derivata e integrale sono operatori lineari, il segnale risultate è ancora dato dalla sovrapposizione dei vari fasori, il cui peso $X(f)df$ viene moltiplicato o diviso per $j2\pi f$.

Questo risultato diventa molto utile nella risoluzione di equazioni integro-differenziali lineari, che possono essere espresse nel dominio della frequenza, risolte come equazioni algebriche e poi antitrasformate. Un esempio è dato dalla risolzione di circuiti elettronici costituiti da resistori, condensatori e induttori. Essi sono sistemi LS che possono essere descritti attraverso un'equazione differenziale del tipo $a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$.

Entrambi i membri dell'equazione possono essere *trasformati*: $a_n (j 2\pi f)^n Y(f) + \ldots + a_1 j 2\pi f Y(f) + a_o Y(f) = b_m (j 2\pi f)^m X(f) + \ldots + b_1 j 2\pi f X(f) + b_o X(f)$ e la funzione di trasferimento può essere calcolata come semplice rapporto degli spettri di uscita e ingresso $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{b_m (j 2\pi f)^m + \ldots + b_1 j 2\pi f + b_0}{a_n (j 2\pi f)^n + \ldots + a_1 j 2\pi f + a_0}$ che conferma che *la funzione di trasferimento di un qualunque filtro composto di elementi resistivi e reattivi è sempre espressa da un rapporto di polinomi nella variabile f.*

Derivazione nel dominio della frequenza

Dalla proprietà di dualità, si può ricavare $F[j 2\pi t W(t)] = w'(-f)$.

Considerando il segnale $x(t) = W(t)$, il suo spettro è $X(f) = w(-f)$ e da questo si deduce, derivando rispetto ad *f*, che $X'(f) = -w'(-f)$. Il tutto può essere espresso come $-j 2\pi t x(t) \overset{F}{\rightarrow} \frac{dX(f)}{df}$ che costituisce, per l'operatore di trasformata, la *proprietà di derivazione nel dominio della frequenza*.

Convoluzione e prodotto

Si vuole calcolare la trasformata del prodotto di due segnali nel tempo, $w(t), z(t) \overset{F}{\rightarrow} W(f), Z(f)$, ai quali applichiamo la proprietà di convoluzione: $F[w(t) * z(t)] = W(f) Z(f)$.

Sfruttando la proprietà di dualità, si ottiene che $F[W(t) Z(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) z(-f-\tau) d\tau$ e, ponendo $\theta = f + \tau$ si ha $F[W(t) Z(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} w(-(f-\theta)) z(-\theta) d\theta = w(-f) * z(-f)$. La *proprietà del prodotto* per le trasformate di Fourier può essere riassunta come $x(t) h(t) \overset{F}{\rightarrow} X(f) * H(f)$.

Questa proprietà stabilisce che un segnale con durata strettamente limitata non può avere una banda strettamene limitata.

Capitolo 4: Lo spettro dei segnali periodici e il teorema di campionamento

Trasformata dell'impulso di Dirac e di una costante

$$\delta(t) \overset{F}{\rightarrow} 1$$

Ovvero, a tutte le frequenze compete la medesima densità spettrale, costante e pari ad 1. Antitrasformando lo spettro, si ottiene un'espressione alternativa per l'impulso di Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}dt=\delta(t) \quad .$$

L'impulso di Dirac può essere interpretato come il limite di una famiglia di impulsi rettangolari, trasformando ciascuno dei quali si ottiene $F[\frac{1}{\epsilon}\Pi(\frac{t}{\epsilon})]=sinc(\epsilon f)$. Al tendere di ε a zero, il valore massimo dello spettro rimane costante a 1.

Lo *spettro di energia* dell'impulso di Dirac è anch'esso costante e pari a 1. Dal teorema di Rayleigh, quindi, si ha che $E_{\delta}=\infty$.

La *trasformata di un segnale costante* si può ricavare per *dualità* da quanto affermato sopra: $F[1]=\delta(-f)=\delta(f)$.

Grazie alla proprietà di *linearità* possiamo calcolare lo *spettro di un generico segnale costante* $x(t)=A$ come $F[A]=AF[1]=A\delta(f)$.

Considerando un segnale *x(t)* con valor medio temporale $\langle x(t)\rangle=\bar{x}\neq 0$, questo deve avere area necessariamente infinita e non può essere un segnale impulsivo: esso non tenderà a 0 per $t\rightarrow\pm\infty$. Introducendo un nuovo segnale $y(t)=x(t)-\bar{x}$ che avrà, necessariamente, valor temporale nullo, lo spettro del segnale *x(t)* potrà essere scritto come $X(f)=Y(f)+\bar{x}\delta(f)$. La presenza, nell'origine delle frequenze, di un impulso di Dirac di area pari al valor medio temporale, è una caratteristica è tipica di tutti i segnali con valor medio temporale non nullo: il segnale è dotato di una *componente continua*.

Trasformata di un fasore e di una sinusoide

A partire da quanto appreso per la trasformata di un segnale costante, sfruttando la *proprietà di traslazione in frequenza*, è possibile calcolare la *trasformata di Fourier di un fasore*:

$$e^{j2\pi f_0 t}\xrightarrow{F}\delta(f-f_0)$$

Questo risultato può essere usato per ottenere lo *spettro di una sinusoide*, ricorrendo alle formule di Eulero: $Acos(2\pi f_0 t+\phi)=\frac{A}{2}e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}+\frac{A}{2}e^{-j(2\pi f_0 t+\phi)}\xrightarrow{F}\frac{A}{2}e^{j\phi}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}e^{-j\phi}\delta(f+f_0)$

Alcuni casi particolari riguardano segnali cosinuisoidali o sinusoidali di ampiezza unitaria e fase iniziale nulla: $\cos(2\pi f_0 t)\xrightarrow{F}\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$ e $\sin(2\pi f_0 t)\xrightarrow{F}\frac{1}{2}\delta(f+f_0)-\frac{1}{2}\delta(f-f_0)$.

Sappiamo che la risposta di un filtro ad un ingresso fasoriale è un fasore con la stessa frequenza. Infatti, dato $x(t)=e^{j2\pi f_0 t}$, il cui spettro è $X(f)=\delta(f-f_0)$, lo spettro dell'uscita sarà $Y(f)=X(f)H(f)=\delta(f-f_0)H(f_0)$ da cui si ottiene $y(t)=e^{j2pif_0 t}H(f_0)$, ovvero l'uscita è data dallo stesso faosre d'ingresso moltiplicato per la costante complessa $H(f_0)$.

Grazie a quanto detto fino ad ora, è possibile reinterpretare quanto detto per la modulazione di ampiezza: considerando il caso semplice di un segnale portante cosinusoidale con fase iniziale nulla, si ottiene

$F[x(t)\cos(2\pi f_0 t)]=X(f)*[\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)]=\frac{1}{2}X(f)*\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}X(f)*\delta(f+f_0)$ che può anche essere scritto come semisomma di due repliche di X(f) traslate sulle frequenze di portante: $\frac{1}{2}X(f-f_0)+\frac{1}{2}X(f+f_0)$.

Spettro dei segnali periodici

Applicando le formule della trasformazione a $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$ si ottiene

$$X(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f-kf_0)$$.

Filtraggio dei segnali periodici

Utilizzando la relazione generale $Y(f)=H(f)X(f)$, considerando in ingresso un segnale *x(t)* periodico di periodo T_0 il cui spettro è definito dalla formula precedente, lo spettro del segnale di uscita sarà $Y(f)=H(f)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f-kf_0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k \delta(f-kf_0)$.

Il Teorema di Parseval

La *potenza media complessiva* di un segnale periodico x(t) è la somma delle potenze medie che competono ai singoli fasori che compongono il segnale attraverso lo sviluppo in serie di Fourier:

$$P_x=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_0^2 |X_0(kf_0)|^2=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$.

Capitolo 5: Segnali aleatori

Si definisce **segnale aleatorio** una *funzione del tempo che rappresenta una grandezza fisica la cui evoluzione non è nota a priori*.

Si può pensare ad un segnale aleatorio come generato da una sorgente aleatoria: ciò è analogo a quanto visto per un fenomeno aleatorio per le variabili aleatorie. Per un segnale aleatorio si hanno, quindi, delle *realizzazioni*, o *funzioni campione*, $x^{(i)}(t)$ che sono dei segnali determinati.

Un modello utilizzato è il *processo stocastico* $X(t)$ definito come l'insieme di tutte le possibili realizzazioni che una sorgente aleatoria può produrre.

Esempi di processi stocastici

Il processo armonico

$Y(t)=a\cos(2\pi f_0 t+\Phi)$ con a, f_0 determinate e Φ una *variabile aleatoria uniforme* in $[0,2\pi]$.

Questo processo viene usato come modello matematico del fenomeno fisico che corrisponde all'osservazone dell'uscita di un oscillatore elettronico di cui è nota la frequenza e l'ampiezza ma è stato acceso in un istante di tempo casuale.

Il rumore termico

Un resistore è composto di particelle che sono in costante agitazione termica.

Il moto degli elettrocni di conduzione corrisponde, per ciascuno di essi, ad una *microcorrente* che, cumulativamente, genera una corrente $I_T(t)$ che evolve in maniera aleatoria nel tempo e viene quindi chiamata *corrente di rumore termico*.

Questa provoca ai capi del resistore una *tensione di rumore termico* definita secondo la legge di Ohm come: $V_T(t)=R I_T(t)$.

Si tratta di processi stocastici che si presentano in tutti i circuiti elettronici.

Statistiche di un processo

Per una variabile aleatoria $X(t_1)$ estratta dal processo, si definisce la densità di probabilità del primo ordine $f_X(x;t_1)$ che dipende dall'istante di osservazione t_1.

Per valutare la probabilità che un processo subisca un incremento tra t_1 e t_2, ovvero $P\{X(t_2)>X(t_1)\}$, è necessario conoscere la *densità congiunta di secondo ordine* $f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$.

In generale, osservando il processo in una n-pla di istanti $t_1,\ldots,t_n$, si individua il *vettore di variabili aleatorie* $[X(t_1),\ldots,X(t_n)]$ caratterizzate dalla *densità di probabilità congiunta* $f_X(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)$ detta *densità di ordine n del processo*.

Processi Gaussiani

Un processo si dice **Gaussiano** se una qualunque *n-pla* di osservazioni del processo costituisce una vettore di variabili aleatorie $[X(t_1),\ldots,X(t_n)]$ *congiuntamente Gaussiane*.

$$f_X(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(C)}}e^{-\frac{1}{2}\{(X-\eta)^T C^{-1}(X-\eta)\}} \quad \text{dove} \quad \eta=[\eta_1;\ldots;\eta_n] con\, \eta_i=E[X(t_i)]$$

è il *vettore dei valori medi* e $C=[C_{ij}]$ è la *matrice di covarianza*.

Valori attesi di un processo: media e potenza statistica, autocorrelazione e autocovarianza

Per la descrizione di un processo, di solito è sufficiente conoscere alcuni *valori attesi*, o *momenti*, delle variabili aleatorie estratte da esso.

Tra i *momenti di primo ordine* troviamo:

- **Valore medio statistico**: $\eta_X(t)=E[X(t)]$
- **Potenza statistica**: $P_X(t)=E[X^2(t)]$
- **Varianza**: $\sigma^2(t)=Var[X(t)]=E[(X(t)-\eta_{(t)})^2]$

I *momenti di secondo ordine* vengono calcolati sulla coppia di variabili aleatorie estratte $X(t_1)$ e

$X(t_2)$. Tra questi si ricordano:

- **Autocorrelazione statistica**: $R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$
- **Autocovarianza**: $C_X(t_1,t_2)=Cov[X(t_1)X(t_2)]=E[(X(t_1)-\eta_X(t_1))(X(t_2)-\eta_X(t_2))]$

Processo armonico

Per un processo armonico *Y(t)*, il *valore medio* è

$$\eta_Y(t_1)=E[a\cos(2\pi f_0 t_1+\Phi)]=\int_o^{2\pi} a\cos(2\pi f_0 t_1+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi=0$$

L'*autocorrelazione* vale

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=\int_0^{2\pi} a^2\cos(2\pi f_0 t_1+\phi)\cos(2\pi f_0 t_2+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi=\frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0(t_2-t_1))$$

Rumore termico

Dal *teorema del limite centrale*, si ha che la somma delle microcorrenti generate da ogni elettrone produce una corrente totale di rumore termico con *densità di probabilità di primo ordine Gaussiana*, con media nulla per ciascun istante *t*. Generalizzando, si conclude che $V_T(t)$ è un *processo Gaussiano a media nulla* con *varianza* pari a $\sigma^2_{V_T}=\frac{2(\pi k T)^2}{3h}$ con *h* costante di Plank che vale $h=6{,}62\cdot 10^{-34}[J\cdot s]$.

Stazionarietà

In alcuni casi, le caratteristiche statistiche delle grandezze misurate sono indipendenti dal tempo in cui viene effettuata la misurazione. In tale situazione, si dice che il processo è **stazionario**.

X(t) si dice **stazionario in senso stretto** (*SSS*) se il suo *comportamento statistico è indipendente dall'origine che si fissa per l'asse dei tempi*: *X(t)* e *X(t-t₀)* avranno le stesse densità e $f_X(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=f_X(x_1,\dots,x_n;t_1-t_0,\dots,t_n-t_0)$.

Intuitivamente, *un processo è SSS se, per una qualsiasi realizzazione* $x^{(i)}(t)$ *, anche una sua versione traslata* $x^{(i)}(t-t_0)$ *è una possibile realizzazione del processo e risulta ugualmente probabile.*

In generale, la densità di ordine n di un processo SSS dipende solo dalle differenze tra gli istanti di osservazione $\tau_i=t_{i+1}-t_i con\, i=1,\dots,n-1$.

Un processo per cui si verifica che η_X è indipendente da *t* e $R_X(t_1,t_1+\tau)=R_X(\tau)$ dipende solo da $\tau=t_2-t_1$, viene detto **stazionario in senso lato** (*SSL*).

Proprietà dell'autocorrelazione per processo SSL

1. È una funzione *pari*: $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$

2. È *non negativa nell'origine*: $R_X(0) \geq 0$
3. Raggiunge il *massimo assoluto* nell'*origine*: $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$

Generalmente, le $X(t_1)$ e $X(t_1+\tau)$ estratte dal processo $X(t)$ tendono a divenire indipendenti e, quindi, incorrelate al crescere di τ. Questo significa che $X(t)$ è un processo a *memoria limitata*.

Processo armonico

Il processo armonico è *SSS*, poiché qualsiasi traslazione temporale di una realizzazione genera una nuova realizzazione del processo ugualmente probabile. La *stazionarietà in senso lato*, poi, *è implicata da quella in senso stretto*.

Rumore termico

L'autocorrelazione $R_{V_T}(t_1, t_1+\tau)$ non dipende dall'istante scelto per la prima osservazione. *Il rumore termico è*, quindi *SSL* e, poiché Gaussiano, anche *SSS*.

Filtraggio di segnali aleatori: la densità spettrale di potenza

Per un *processo SSL* possiamo definire una *variabile aleatoria* chiamata **potenza media temporale troncata**: $P_{X,T} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |X(t)|^2 dt$.

Il suo valore atteso coincide con la *potenza media statistica*: $E[P_{X,T}] = P_X$.

Si definisce poi la **potenza media del processo** come il *valore medio statistico delle potenze medie temporali*: $P_X = E\left[\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |X(t)^2| dt\right] = E\left[\lim_{T \to \infty} P_{X,T}\right]$

Può accadere di avere a che fare con sistemi lineari e stazionari la cui risposta impulsiva h(t) non è esattamente specificata: si tratta di un processo stocastico e, pertanto, il sistema LS si dice *sistema stocastico*. Tuttavia, per il momento supponiamo di avere a che fare con sistemi la cui risposta impulsiva sia univocamente specificata.

Rimane, quindi, valido quanto visto per i sistemi LS. Ogni possibile realizzazione $x^{(k)}(t)$ del processo di ingresso è un segnale determinato che produce in uscita un *segnale determinato* $y^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x^{(k)}(t-\tau) d\tau$. L'uscita, comunque, risulta essere un processo stocastico Y(t) a causa dell'aleatorietà dell'ingresso.

Nel caso in cui il processo di ingresso sia *Gaussiano*, l'operazione di *flitraggio* può essere vista come una *combinazione lineare in senso limite di osservazioni effettuate sul processo di ingresso*:

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau \simeq \lim_{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\tau_k)h(t-\tau_k)\Delta T \quad .$$

Per processi *non Gaussiani*, ricavare la densità di ordine n è complicato, pertanto *ci si limita a una descrizione in potenza*.

In particolare, per processi SSL in ingresso, si ha:

$\eta_Y(t)=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau=\eta_X H(0)$, mentre l'autocorrelazione risulta $R_Y(t_1,t_2)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$

Si ricava quindi che *il risultato del filtraggio di un processo SSL è ancora un processo SSL*. Lo stesso vale anche per i processi SSS.

In particolare, *ad un processo in ingresso Gaussiano e stazionario corrisponde un processo di uscita anch'esso Gaussiano e stazionario*.

Si può completare la descrizione del processo di uscita con i restanti *momenti di primo e secondo ordine*: l'*autocovarianza* vale $C_Y(\tau)=R_Y(\tau)-\eta_X^2$, la *varianza* è $\sigma_Y^2=C_Y(0)$ e la *potenza media* è $P_Y=R_Y(0)$.

Nel *dominio della frequenza*, la *potenza media* può essere calcolata come
$P_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} F[R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)]df=\int_{-\infty}^{+\infty} F[R_X(\tau)]|H(f)|^2 df$, pertanto si ha
$P_Y(f)=P_X(f)|H(f)|^2$.

Teorema di Weiner-Kintchine per processi SSL: la *densità spettrale di potenza* di un processo stocastico *SSL* è pari alla *trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione*:
$P_X(f)=F[R_X(\tau)]$.

Processo armonico

Dalla *funzione di autocorrelazione per un processo armonico*, si ricava immediatamente lo *spettro di potenza*: $P_Y(f)=F\left[\frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\right]=\frac{a^2}{4}\delta(f-f_0)+\frac{a^2}{4}\delta(f+f_0)$

Segnale PAM

Per un *segnale PAM stazionario in senso lato*, con *valore medio nullo* e *autocorrelazione*
$R_X(\tau)=\frac{\sigma_A^2}{T_s}e_p(\tau)$, sfruttando il *teorema di Weiner e Kintchine*, si ottiene:

$$P_X(f)=F\left[\frac{\sigma_A^2}{T_s}e_p(\tau)\right]=\frac{\sigma_A^2}{T_s}|P(f)|^2$$

Il rumore bianco

La *densità spettrale di potenza* di una *tensione di rumore termico* generata da una resistenza *R* vale:

$P_{V_T}(f)=2R\frac{h(f)}{e^{\frac{h|f|}{kT}}-1}$ con unità di misura V^2/Hz . Per temperature ambiente tipiche, lo spettro è piatto fino a frequenze di diverse centinaia di Ghz. Pertanto, una buona approssimazione è quella di ritenere $P_{V_T}\simeq 2RkT=cost$. Questo prende il nome di *rumore bianco*. La sua *autocorrelazione* vale $R_{V_T}=F^{-1}[P_{V_T}]=2RkT\delta(\tau)$ che implica una *varianza infinita* per i campioni $V_T(t_1)$ (questa è una conseguenza dell'approssimazione).

Il *rumore filtrato* $Y_T(t)$ non è più un processo bianco ma è ancora *Gaussiano* con *media nulla*. Pertanto, esso viene chiamato *rumore Gaussiano colorato* e ha potenza media pari a

$$P_{Y_T}=\sigma^2_{Y_T}=\int_{-\infty}^{+\infty}2RkT|H(f)|^2\,df \quad .$$