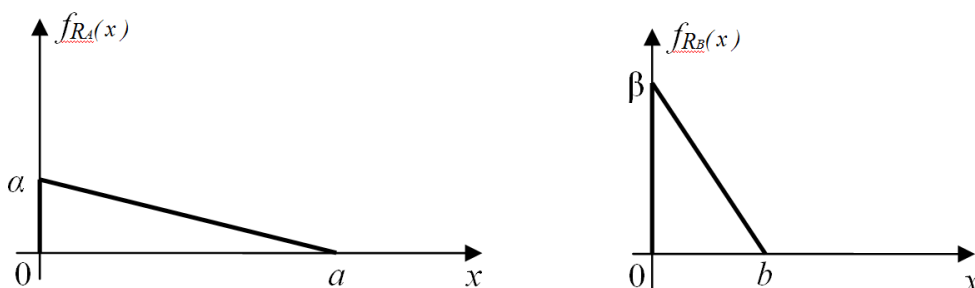


## Teoria della probabilità e variabili aleatorie

Testi di problemi concepiti e risolti dal Prof. Giorgio Picchi  
(Lotto 6: Valori Attesi e Trasformazioni di V.A.)

### Quesito A31 11/11/11

Una ditta di spedizioni recapita quotidianamente un plico alla vostra ditta. Gli addetti alla consegna sono il sig. A e il sig. B che si alternano casualmente e indipendentemente ma con probabilità diverse  $p_A = P(A)$  e  $p_B = P(B)$ . La consegna dovrebbe avvenire alle ore 10.00 ma gli addetti si presentano con un ritardo che per ciascuno è una v.a.  $R_A$  e  $R_B$ , rispettivamente, con densità di probabilità come in figura.



- Si trovi il valor medio delle v.a.  $R_A$ ,  $R_B$  (ritardi dei rispettivi addetti) e della v.a.  $R = \{\text{Ritardo di consegna in un giorno qualunque}\}$ .
- Un certo giorno vi avvertono che il corriere è appena arrivato e voi valutate che in quel momento le probabilità che l'addetto arrivato sia A e quella che l'addetto sia B sono uguali: che ore sono? (Si esprima tale ora trovando il ritardo  $r$  e sommandolo alle ore 10.00).
- Successivamente allo svolgimento del punto precedente si trovi il valore numerico di  $r$  (in minuti e decimali) sostituendo i seguenti valori nell'espressione trovata:  
 $a = 25$  min,  $b = 15$  min e i valori di  $p_A$  e  $p_B$  ottenuti sapendo che  $p_B$  è il doppio di  $p_A$  (ossia assumendo che l'addetto B si presenti con probabilità doppia rispetto ad A);
- Si trovi la densità di probabilità  $f_R(x)$  della v.a.  $R$ . e se ne tracci un grafico accurato di con i dati numerici sopra trovati (si ricavino anche i necessari valori di  $\alpha$  e  $\beta$  (vedi figura sopra).

### Quesito A16 2/12/10

Una variabile aleatoria  $X$  ha densità di probabilità uniforme con valor medio  $\eta_x$  e varianza  $\sigma_x^2$ .

Si individuino gli estremi  $a$  e  $b$  dell'intervallo di valori che la variabile può assumere.

Si calcoli la probabilità  $P\{\eta_x - \sigma_x < X < \eta_x + \sigma_x\}$  ossia la probabilità che la v.a. assuma valori che si discostano dal valor medio meno di una deviazione standard.

Una volta trovata la probabilità richiesta si verifichi che con i dati del problema risulta verificata la disuguaglianza di Chebychev.

### Quesito A9 1/7/11

Una variabile aleatoria  $Y$  è ottenuta da una variabile aleatoria  $X$  mediante la trasformazione  $Y = g(X)$ . La densità di probabilità  $f_X(x)$  e la funzione  $y = g(x)$  siano le seguenti:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{per } -1/2 < x < 3/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \Lambda(x) = (1 - |x|) \cdot \Pi(x/2) .$$

- Si dica quale deve essere il valore di  $a$ .

- Si tracci un grafico di  $g(x)$
- Si trovi l'espressione della densità  $f_Y(y)$  e se ne tracci un grafico.

**Quesito A17** 2/12/10

Su un segmento lungo 10 cm si sceglie un punto a caso. Si trovi la densità di probabilità della v.a.  $Y = \{\text{Area del rettangolo avente per lati le due parti del segmento}\}$ .

**Quesito A49** 11/9/12

La v.a.  $X$  è uniforme nell'intervallo  $(0, a)$ . La v.a.  $Y$  è ottenuta dalla  $X$  mediante la trasformazione  $Y = g(X)$  dove:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \leq x \leq a/4 \text{ e per } 3a/4 \leq x \leq a \\ a/2 & \text{per } a/4 < x < 3a/4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si tracci un grafico di  $g(x)$ .

Si determinino la funzione di distribuzione  $F_Y(y)$  (CDF) e la densità di probabilità  $f_Y(y)$  (PDF) di  $Y$ .

**Quesito A3** 18/2/11

Sono disponibili sei contenitori cilindrici con superficie di base di  $1 \text{ dm}^2$ . Due di questi sono alti 6 cm e quattro sono alti 15 cm. Si sceglie a caso un contenitore e vi si versa una quantità di liquido che è una variabile aleatoria  $X$  uniformemente distribuita fra 0 e 1 litro.

Si trovi la densità di probabilità della variabile aleatoria  $Y = \{\text{Livello raggiunto dal liquido nel contenitore}\}$ .

**Quesito A12** 13/09/11

La quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca quando si ferma a rifornire di benzina la sua auto è una variabile aleatoria  $X$  (supposta continua) uniformemente distribuita fra 0 e 200 euro.

Il sig. Rossi ha l'abitudine di comportarsi così:

- se in tasca ha più di 60 euro mette 30 euro di benzina;
- se ha meno di 60 euro (o 60 euro) mette una quantità di benzina corrispondente alla metà dei soldi che ha in tasca.

Si trovi la densità di probabilità della v.a.  $Y = \{\text{Quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca dopo un generico rifornimento}\}$ .

(N.B. – Si ipotizza che occorran sempre più di 30 euro per raggiungere il pieno).

**Quesito A23** 18/2/11

1) Si scriva l'espressione analitica della densità di probabilità di una variabile aleatoria gaussiana  $X$  con valor medio  $\eta_x$  e varianza  $\sigma_x^2$ , ossia una v.a.  $N(\eta_x, \sigma_x^2)$ .

2) Si consideri la v.a.  $Y$  ottenuta dalla precedente mediante la trasformazione  $Y = c(X + d)$  con  $c$  e  $d$  costanti reali. Si dimostri che  $Y$  è ancora gaussiana e se ne trovino il valor medio e la varianza  $\eta_Y, \sigma_Y^2$  espressi in termini di  $\eta_x, \sigma_x^2, c$  e  $d$ .

3) Si trovino i valori di  $c$  e  $d$ , se esistono, che rendano la v.a.  $Y$  una v.a.  $N(0, 1)$ .

**Quesito A33** 16/01/12

Si sceglie a caso un punto di ascissa  $X$  nell'intervallo  $(0,1)$ . Le lunghezze dei due segmenti in cui risulta suddiviso l'intervallo siano rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di un numero complesso  $Z$ .

Si trovi la densità di probabilità della v.a.  $Y = \{\text{Modulo quadro di } Z\} = |Z|^2$  e se ne tracci un grafico.

**Quesito A45** 2/7/12

La velocità con cui gli atleti di un certo gruppo corrono i cento metri (velocità supposta costante durante tutta la gara) è una v.a.  $X$  uniformemente distribuita fra 9 e 10 m/s.

Si trovi la densità di probabilità  $f_Y(y)$  della v.a.  $Y = \{\text{Tempo impiegato a correre i cento metri da un atleta di tale gruppo}\}$ .

Si organizza una gara (di cento metri) con 6 di tali atleti scelti a caso dal gruppo. Qual è la probabilità che il 1° e il 2° classificato arrivino al traguardo in meno di  $t_0 = 10,4$  s e tutti gli altri arrivino in un tempo maggiore di  $t_0$ ?

**Quesito A56** 21/1/13

Sia  $X$  una v.a. uniformemente distribuita fra  $a$  e  $b$ , con  $0 < a < b$ .

$$Y = c \cdot \sqrt[3]{X}$$

- a) Si trovi la densità di probabilità della variabile  $Y$ , con  $c > 0$ , e se ne tracci un grafico.  
 b) Si trovi il valor medio della variabile  $Y$ .

**Quesito A85**

Una variabile aleatoria  $Y$  è ottenuta da una variabile aleatoria  $X$  mediante la trasformazione

$$Y = e^X$$

- a) Si trovi la densità di probabilità  $f_Y(y)$  della v.a.  $Y$  sapendo che la densità della  $X$  è la seguente:

$$f_X(x) = 2e^{-2x} u(x)$$

- b) Si trovi il valor medio della v.a.  $Y$  senza usare la densità  $f_Y(y)$  trovata al punto precedente.

**Quesito A101** 20/01/15

Una variabile aleatoria  $Y$  è ottenuta da una variabile aleatoria  $X$  mediante la trasformazione  $Y = g(X)$ . La densità di probabilità  $f_X(x)$  sia uniforme fra  $-3$  e  $+1$  e la funzione  $g(x)$  sia:

$$g(x) = (1 - x^2/4) \cdot \Pi(x/4) .$$

- a) Si traccino i grafici di  $g(x)$  e di  $f_X(x)$ .  
 b) Si trovi l'espressione della densità  $f_Y(y)$  e se ne tracci un grafico.