

Progettazione di veicoli aerospaziali

Indice

I Teoria	4
1 Introduzione	5
1.1 Fasi del progetto	5
1.1.1 Fase 1: Avamprogetto	5
1.1.2 Fase 2: Progetto di dettaglio	5
1.1.3 Fase 3: Certificazione	5
1.2 Sicurezza	7
1.2.1 Definizione secondo norma MIL-721d	7
1.3 Criteri di progetto a fatica	7
1.3.1 Problemi da considerare nel damage tolerance	7
2 Progetto a sicurezza	9
2.1 Progetto a sicurezza statico	9
2.2 Progetto a fatica	9
2.2.1 Regola di Wohler per la rottura a fatica	10
2.2.2 Caso con carico armonico combinato (regola di Miner)	11
2.3 Meccanica della frattura	11
2.3.1 Fattore di concentrazione delle tensioni	12
2.3.2 Teoria di Griffith (Strain Energy Relase Rate)	13
2.3.3 Modi di apertura della cricca	18
2.3.4 Legame tra K e G	20
2.3.5 Combinazione dei modi di frattura	21
2.3.6 Andamento del fattore di intensificazione degli sforzi critico con lo spessore	22
2.3.7 Effetto della plasticizzazione	22
2.3.8 Leggi di avanzamento della cricca	23
3 Carichi	26
3.1 Manovra, wind shear e formazione di ghiaccio	26
3.1.1 Carichi di manovra	26
3.1.2 Wind shear	26
3.1.3 Formazione di ghiaccio	26
3.2 Raffica continua	27
3.2.1 Analisi dell'input	28
3.2.2 Funzione di trasferimento	30
3.2.3 Numero di superamenti	30
3.2.4 Riassunto	31
4 Aeroelasticità	33
4.1 Aeroelasticità statica	33
4.1.1 Scrittura delle equazioni	34
4.1.2 Risoluzione dell'equazione aeroelastica	35
4.1.3 Divergenza	36
4.1.4 Distribuzione di portanza	37
4.1.5 Accoppiamenti e relativi effetti	38

4.2	Aeroelasticità dinamica	39
4.2.1	Scrittura equazioni	39
4.2.2	Risoluzione equazioni	41
4.2.3	Stabilità e flutter	42
4.2.4	Ala a freccia e/o in composito con FEM	44
4.2.5	Calcolo delle matrici aerodinamiche	45
5	Stabilità di cilindri compressi	49
5.1	Introduzione	49
5.2	Aste e cilindri in campo non lineare	50
5.2.1	Aste	50
5.2.2	Cilindri	51
5.3	Modelli semplici (1 DOF)	52
5.3.1	Modello I	52
5.3.2	Modello II	53
5.3.3	Considerazioni sui due modelli	53
5.3.4	Studio dei cilindri compressi secondo von Karman-Tsien e Cicala	54
II	Dinamica	55
6	Dinamica	56
6.1	Sistemi dinamici a parametri discreti	56
6.1.1	Definizione di grado di libertà	56
6.1.2	Passaggio alle equazioni del moto	57
6.1.3	Soluzione dell'equazione per un sistema 1 DOF libero	59
6.1.4	Risposta forzata per un sistema 1 DOF	61
6.1.5	Risposta forzata per un sistema N DOF	64
6.1.6	Risposta forzata con forzante non armonica	68
6.1.7	Vibrazioni random	70

Parte I

Teoria

Capitolo 1

Introduzione

Il progetto, in questo caso di un veicolo aerospaziale, ma in generale di qualsiasi cosa un minimo complessa, necessita di una conoscenza approfondita di *diverse discipline*, nonché di una (efficace) *interazione* tra le suddette.

La figura del progettista è quindi molto critica, in quanto egli deve possedere una sufficiente conoscenza (ed esperienza) tale per cui possa ragionevolmente caricarsi di notevoli responsabilità e assicurare la realizzazione di un prodotto che porti un vantaggio su molti fronti, non ultimo quello economico.

1.1 Fasi del progetto

Vi sono sostanzialmente tre diverse fasi di un progetto, tutte quante molto complesse e lunghe, che vanno affrontate con la massima attenzione e accuratezza, al fine di ottenere un prodotto valido.

1.1.1 Fase 1: Avamprogetto

Nella fase di avamprogetto, o progetto concettuale, si inizia a pensare e modellare un'**idea** di quale sarà il prodotto finale. Ciò viene fatto in termini di *dimensioni* e di *equazioni* necessarie per valutare le performance dell'oggetto.

1.1.2 Fase 2: Progetto di dettaglio

In questa fase invece si procede al dimensionamento dettagliato e ad una serie di considerazioni specifiche su ogni singolo componente, in questo caso, del veicolo (elementi primari, secondari, ecc).

Giacché tale fase richiede una mole di lavoro mastodontica, dimensionamento e considerazioni varie vengono fatte soltanto sulla configurazione finale che scaturisce dalla fase 1 di avamprogetto.

In questa fase, inoltre, si affrontano tutti quei problemi che non sono stati considerati in fase di avamprogetto, come può essere ad esempio il rumore (aeroacustica, vibroacustica, ecc).

1.1.3 Fase 3: Certificazione

Questa è una fase estremamente critica e complessa, perché determina di fatto se il prodotto finale può poi essere messo in opera o meno (in questo caso possiamo dire addio ad una notevole quantità di denaro, nonché probabilmente a parte della nostra calotta cranica). Ciò è vincolato al fatto che bisogna necessariamente, nel caso di un velivolo, assicurare la vita di chi vola.

Poiché questa fase è critica e determina l'esito finale del progetto, è spesso e volentieri considerata già nel progetto concettuale, nel senso che i *requisiti* di certificazione sono imposti come *vincoli* nella fase 1 di avamprogetto. In questo modo si è praticamente sicuri (o quasi) di sviluppare un prodotto che vada incontro ad un esito positivo di certificazione, riducendo il rischio di perdere denaro e tempo (entrambi in buone quantità).

Le attività di certificazione sono regolate da *enti*, quali ad esempio FAA e EASA, per cui ciò che si fa è prendere i loro documenti (FAR e EASA PART) e vedere che requisiti impongono per le certificazioni.

Dal punto di vista degli stessi enti, il progetto per essere certificato deve rispettare certi livelli di **sicurezza**. Un velivolo sicuro, ad esempio, significa che la probabilità che vi sia un incidente è così piccola da renderlo estremamente improbabile (circa 1 incidente su un miliardo, quindi probabilità di 10^{-9}).

Il progettista deve quindi far sì che l'aereo sia abbastanza sicuro da rispettare tale requisito, certificando uno ad uno tutti i componenti in uso nel velivolo. Tali attività di certificazione sono molto complicate e lunghe, giacché richiedono calcoli, prove, sperimentazioni pratiche, ecc.

Oltre alle certificazioni dei componenti, si hanno poi dei *criteri* da tenere in conto. Ad esempio, può essere richiesto che ogni tot voli venga cambiato un certo componente. Bisogna tenere quindi conto anche di questo nel progetto, soprattutto per quanto riguarda il costo.

Dati Per affrontare le 3 fasi di progetto appena discusse si fa riferimento a dei dati, ossia dei numeri che esprimono qualcosa e che ci aiutano, con calcoli ed equazioni, a districarci nel complicatissimo campo del progetto. Esempi di questi dati possono essere il modulo di Young, il carico all'atterraggio, la pressione massima di un condotto, ecc.

Questi dati, tuttavia, non sono sempre noti e fissati (a rigore non lo sono mai, perché nella realtà c'è sempre un certo errore che commettiamo quando tiriamo fuori dei numeri), ma si possono dividere in due categorie:

- Dati *deterministici*
- Dati *stocastici*

È chiaro che la presenza di dati stocastici aggiunge ulteriore complessità al progetto, in quanto non abbiamo a che fare con un solo numero, bensì con una serie molto grande di numeri. I dati possono comunque essere *classificati* in base alla loro affidabilità, oltre che in base ad altre cose.

Esempio di dati: i carichi Possiamo dividere i carichi in due **tipologie** principali:

- Carichi **statici**, ovvero non variabili nel tempo (non nel corto periodo almeno). Tali carichi possono essere:
 - Carichi a *contingenza*, dove quindi si considera il fattore di carico a contingenza $n = \frac{L}{W}$.
 - Carichi a *robustezza*, in cui si prende il carico a contingenza n e lo si moltiplica per un SF, in aeronautica tipicamente pari a 1,5.

Questi sono contestualmente anche due *criteri di progetto* per i carichi statici, ossia si può progettare e verificare qualcosa a contingenza (ad esempio con il diagramma di manovra, dove si mettono i vari valori di n in funzione della velocità V del velivolo, secondo le norme FAR per ogni tipo di aereo) oppure a robustezza, quindi far sì che la stima sia più conservativa.

- Carichi **dinamici**, in cui entra quindi in gioco il tempo. In questo campo ricade lo studio della **fatica**, ossia il fatto che l'applicazione ciclica di carichi nel tempo causi una riduzione di alcune proprietà e, in generale, una riduzione delle performance di tutto il velivolo. Il certificatore anche qua ha bisogno di una serie di dati per essere convinto del fatto che il progetto sia comunque sicuro, tenendo conto della fatica.

Possiamo individuare tre diversi *criteri di progettazione a fatica*:

- Criterio **safe life**. Si progetta cioè a vita sicura. Si ha una certa "scadenza" in cui il componente viene sostituito categoricamente. Questo è un processo sicuramente costoso e prevede una maggiore robustezza; è sostanzialmente analogo ad un criterio statico, perché semplicemente progetti qualcosa e gli do una data di scadenza senza tenere in conto di nulla dopo.
- Criterio **fail safe**. Si progetta cioè in modo che la potenziale failure sia sicura, quindi con delle "ridondanze"
- Criterio **damage tolerance**. In esso si ipotizza che il componente presenti un difetto, pari alla dimensione della risoluzione dello strumento con cui si sono effettuati i controlli, e si considera la propagazione di tale difetto secondo le teorie più opportune e soprattutto secondo un *costante monitoraggio* del componente. Questo rende molto sicure le macchine, in quanto la stessa sicurezza non dipende dal tempo di uso del velivolo. È bene ricordare qua però che se un componente presenta un difetto visibile allora viene buttato via, qua si immagina solo che ci sia un difetto appena non visibile, per stare conservativi, ma non è detto che sia così grande (di esserci c'è perché nessun componente è perfetto).

1.2 Sicurezza

Prima di dare una definizione (secondo una norma MIL) di sicurezza, diciamo che il progetto di un velivolo rappresenta sicuramente una sfida maggiore (rispetto ad esempio alle costruzioni civili di terra), in quanto è tutto un gioco tra la robustezza e la leggerezza. Non possiamo, cioè irrobustire ad libitum, tanto per stare sicuri, ma dobbiamo sempre considerare il minimo indispensabile affinché il velivolo sia certamente sicuro, ma anche il più leggero possibile.

È per questa ragione che in aeronautica il SF è fissato a 1,5. Tale valore è deciso, con una grande assunzione di responsabilità, da parte del progettista, che deve pertanto avere tutto sotto controllo. Anche solo una centesima parte di questo valore, se cambiata, può modificare notevolmente su scala globale tutta una serie di cose, per cui ci va di mezzo una notevole attenzione, cura ed esperienza.

1.2.1 Definizione secondo norma MIL-721d

La suddetta norma (militare) stabilisce che la sicurezza è intesa come

"Assenza di condizioni che possano causare morte, ferimenti, malattie professionali, danneggiamento oppure perdita di equipaggiamenti e beni."

Capiamo quindi che non c'è alcun numero, formula o equazione, bensì si tratta di una norma di *buonsenso*. L'ente regolatore deve quindi assicurarsi che tale norma sia comunque rispettata dal progetto, e lo fa richiedendo prove, discussioni e documenti, che il progettista porta per "convincere" l'ente che il suo progetto sia sicuro.

1.3 Criteri di progetto a fatica

Come abbiamo già visto, la *fatica* causa una riduzione di alcune proprietà del materiale (come ad esempio la tensione ultima di rottura); inoltre, il fatto che sia sempre presente nel materiale un *difetto* (che non riesco a vedere però, sennò butto via il componente), fa sì che ci sia un'altra possibile causa di rottura, dato che i difetti concentrano localmente le tensioni.

Per tenere quindi in conto di queste due cose nel progetto a fatica (carichi dinamici) occorre introdurre dei cosiddetti *criteri di progetto*; essi, abbiamo visto, sono 3: **safe life**, **fail safe** e **damage tolerance**.

Noi ci concentreremo principalmente sul **damage tolerance**, perché in sostanza gli altri due criteri sono degli usi particolari di questa filosofia. Ovviamente non esiste tutto un intero velivolo progettato secondo la filosofia damage tolerance, ma si fa un mix (se ad esempio in alcune zone le cricche crescono pochissimo non ha senso monitorarle sempre).

1.3.1 Problemi da considerare nel damage tolerance

Per applicare uno dei tre criteri di progetto a fatica (qua parliamo di DT ma è analogo anche per gli altri due) bisogna affrontare sostanzialmente 8 questioni diverse, che ora andiamo a presentare brevemente.

- **Fattore di sicurezza.** Esso non è il solito 1,5 che si usa nei casi statici, ma viene scelto di volta in volta, in quanto nessuna prova è perfettamente ripetitiva.
- **Fatica.**
- **Meccanica della frattura.** La cricca causa un nuovo stato di tensione nei suoi dintorni, dipendente dal componente, dal materiale e dalla *tipologia di carico*.
- **Legge di propagazione della cricca.** La cricca bisogna poi vedere come propaga, e soprattutto se propaga, dato che c'è un valore soglia dello stato di tensione (quindi del carico) per cui la cricca non propaga e che dipende dal materiale. Sulle leghe leggere si è cercato di rallentare la propagazione delle cricche
- **Analisi dei carichi.** Ora non sono più manovra e contingenza, bensì sono carichi ciclici, per cui riguardano la fatica. Essi possono essere:
 - **Raffica.**
 - **Aeroelasticità.** Ci si occupa qua di capire le caratteristiche di smorzamento e rigidezza dell'ala, visto che si va verso cose sempre più leggere (e quindi deformabili).

Sostanzialmente c'è sempre qualcosa che fa cambiare l'incidenza vista dal velivolo (nella raffica è la velocità verticale $w(t)$, nell'aeroelasticità è il fatto che l'ala ha uno spostamento verticale $v(t)$), la quale fa cambiare il fattore di carico n , che quindi ora è funzione del tempo. Questi carichi purtroppo sono turbolenti, quindi aleatori (vedi problema 8).

- **Prove non distruttive.** Per applicare la filosofia DT è necessario fare *ispezioni*, quindi rendere ispezionabile il velivolo. Se ci sono parti non ispezionabili allora esse dovranno essere invece progettate secondo FS o SF.
- **Caratterizzazione dei difetti.** Qua bisogna dare una forma e una tipologia, ad esempio, alla cricca. Ciò che si fa anche è l'assegnazione di *classi* ai materiali, a seconda di test e controlli al processo che vengono fatti. In pratica diciamo che le caratteristiche del materiale variano in un certo intorno e quantifichiamo quest'ultimo.
- **Aleatorietà di dati e carichi.** Come visto, ci sono dei carichi (e anche dei dati) che sono aleatori; per trattarli è necessario lo sviluppo di modelli che trattano la probabilità.

Questi problemi devono essere poi anche declinati, ad esempio, per il recente sviluppo dei *compositi*, che presentano tutta una serie di meccanismi di rottura peculiari (scollamento, delaminazione, sfibrazione della fibra, ecc). I compositi comunque non sono ancora progettati a DT ma si usa un fattore di sicurezza "statico" di 1,5.

Capitolo 2

Progetto a sicurezza

2.1 Progetto a sicurezza statico

Consideriamo un progetto estremamente semplice che vogliamo fare, ovvero un'asta appesa ad un soffitto (diciamo incastrata ma in realtà ci va una cerniera sferica, in quanto l'asta non sopporta flessione e quindi un incastro la romperebbe subito) e a cui è applicato un carico normale P di trazione verso il basso.

Sappiamo ovviamente che lo *stato di tensione* è

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Dove A è la sezione (costante) dell'asta e la σ è la tensione normale, ovvero in questo caso l'unica che non è nulla. L'asta ha, come sappiamo, tensione costante, quindi in una generica posizione lungo l'asse dell'asta si ha tale tensione.

A questo punto, per il nostro progetto noi vogliamo chiaramente che l'asta non si rompa (dobbiamo rispettare la definizione di *sicurezza*), e quindi dobbiamo imporre certamente che la tensione massima (in questo caso la tensione è basta) nell'asta non superi un certo valore di *riferimento* a cui noi associamo il "limite" oltre cui l'asta avrebbe delle problematiche che non la renderebbero più, per noi, sicura.

A tale scopo individuiamo quindi una *tensione di riferimento* e scegliamo che questa deve essere il limite di snervamento σ_s che leggiamo dalla curva $\sigma - \varepsilon$ del materiale (tra l'altro, la curva deve essere costruita in maniera *normata*, secondo quanto stabilito per esempio dall'ASME¹). Scriviamo pertanto che deve essere

$$\sigma \leq \sigma_s$$

Tuttavia, noi abbiamo sinora ragionato facendo una serie di ipotesi semplificative e *approssimazioni* (in realtà l'asta perfetta come l'abbiamo studiata non esiste, la tensione non è proprio perfettamente costante, e altre cose), quindi dobbiamo comunque tener conto che il progetto si applica alla vita reale. Per farlo allora diciamo che la tensione di riferimento "effettiva" non è il limite di proporzionalità ma qualcosa di più piccolo, che scaliamo mediante l'uso di un **fattore di sicurezza** statico.

$$\sigma \leq \frac{\sigma_s}{SF} \tag{2.1}$$

Il suo valore non è spesso fissato a priori, ma affidato al buonsenso del progettista. Nelle strutture civili si può anche prendere SF=10, mentre in aeronautica tipicamente si assume SF=1,5. Il perché di questa cosa è spiegato dal fatto che noi stiamo riducendo la tensione massima raggiungibile nel nostro materiale, e per farlo, a parità di carico, dobbiamo necessariamente aumentare la sezione (i.e aumentare il peso), cosa che a noi aerospaziali non piace troppo, quindi troviamo un compromesso tra leggerezza e sicurezza con 1,5.

2.2 Progetto a fatica

Prendiamo sempre l'asta di prima, con la differenza che ora il carico P dipende dal **tempo**; la sua dipendenza è intesa sia nel breve che nel lungo periodo (il carico può essere per esempio una sinusoida che ogni tot cambia ampiezza, periodo e media).

¹ American Society of Mechanical Engeneering

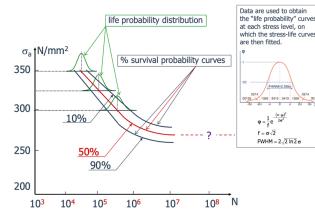


Figura 2.1: Curva di Wohler

Il caso più semplice da considerare è quello di un carico armonico che oscilla intorno allo 0, con periodo costante e ampiezza simmetrica. Si possono poi complicare le cose in più modi, ma il ragionamento di fondo è chiaramente sempre lo stesso, per quanto tutte queste complicazioni modifichino le cose.

Fino ad ora abbiamo parlato di carico, ma possiamo agevolmente passare alle tensioni, mediante l'*analisi strutturale*. Ragioniamo quindi in termini di tensioni, che è quello che ci serve per poter definire dei criteri di progetto, tanto la relazione col carico esterno è immediata.

Il problema che adesso si aggiunge è che non basta più il diagramma $\sigma - \varepsilon$ e il SF statico per progettare a fatica. Infatti, se facciamo l'esperimento di applicare un carico ciclico ad un provino vediamo che, man mano che aumenta il numero di cicli a cui si ha l'oscillazione, il materiale **riduce la sua resistenza**, nel senso che se con un mezzo ciclo ho rottura (statica) per $\sigma = \sigma_R$ vedo che per esempio con 1000 cicli ho rottura a $\sigma < \sigma_R$. Più è alto il carico e minore sarà il numero di cicli a rottura.

Quello che possiamo fare allora è fare queste prove con tanti numeri di cicli diversi (ovviamente abbassando la sollecitazione di volta in volta) e vedere ogni prova per che tensione e che numero di cicli il materiale si rompe. Un diagramma del genere si chiama *curva di Wohler*. Un tale grafico va fatto in maniera chiaramente normata e per ogni diversa condizione di carico, e dipenderà chiaramente anche dal periodo, dall'ampiezza del carico e dal suo valore medio.

Se prendiamo delle curve di Wohler per un *acciaio* vediamo in particolare che c'è una σ al di sotto della quale non c'è rottura, chiamato **limite di fatica**; per esso vediamo che c'è un asintoto orizzontale nella curva, e significa che se applichiamo una tensione inferiore al limite di fatica è come se il materiale, a livello cristallino, non risentisse di questa tensione e quindi non avesse alcuna perdita di resistenza.

Questa è una notizia fantastica, perché se facciamo in modo che $\sigma < \sigma_D$ (limite a fatica) vuol dire che ricadiamo di nuovo nel caso statico, dato che al materiale non importa minimamente come vari nel tempo la tensione, basta che non tocchi quel limite. Possiamo anche qua quindi usare un fattore di sicurezza e progettare nuovamente a livello statico.

L'adrenalina però passa subito, in quanto questa cosa non vale purtroppo per le *leghe leggere*, che non presentano alcun limite di fatica; vuol dire che esiste sempre un numero di cicli a cui il materiale si romperà, collegato ad una tensione che causerà quindi rottura dopo quel numero di cicli. In altre parole, l'applicazione ciclica di un carico (inferiore alla rottura ovviamente) causerà sempre affaticamento (i.e perdita di resistenza) e quindi rottura dopo un certo numero di cicli.

Dobbiamo necessariamente quindi fare un **progetto a fatica** per il nostro componente, andando a studiare nel dettaglio tutto ciò che causa la fatica e che ne è correlato. Tra l'altro, quando si scoprì che le leghe leggere con cui erano costruiti i velivoli non avevano un limite a fatica, si passò alla filosofia damage tolerance.

2.2.1 Regola di Wohler per la rottura a fatica

Consideriamo sempre il nostro carico armonico "fondamentale" (nel senso che c'è una sola armonica) e prendiamo la curva di Wohler del materiale sottoposto a tale carico. Immaginiamo che il componente sia sollecitato con una tensione σ per un numero di cicli n (sappiamo il carico che lo sollecita e sappiamo per quanti cicli lo fa); tale tensione, leggiamo dalla curva di Wohler, causerebbe rottura dopo N^* cicli.

La regola di Wohler ci dice che per non avere rottura con quella σ che applichiamo dobbiamo far sì che

$$n < N^* \quad (2.2)$$

Quando $n = N^*$ allora abbiamo la rottura.

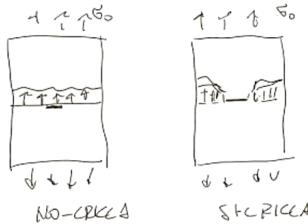


Figura 2.2

2.2.2 Caso con carico armonico combinato (regola di Miner)

Fino ad adesso abbiamo ragionato nel caso ideale (e non troppo realistico) di un carico ciclico "unico", nel senso che c'è una sinusoida che si ripete all'infinito, con la stessa ampiezza e lo stesso valore medio. Vogliamo però poter tenere conto del fatto che il carico possa essere variabile anche nel lungo periodo.

Consideriamo infatti che si abbia una certa tensione σ_1 per un numero n_1 di cicli (con suo periodo, valore medio, ecc), poi una tensione σ_2 per un numero n_2 di cicli e così in generale con σ_i per n_i cicli. Ovviamente deve essere sempre che $n_i < N_i^*$, ossia nessuno di questi carichi deve essere applicato per un numero di cicli pari al numero di cicli a rottura del materiale (che vedo dalla curva di Wohler).

Tuttavia, non sappiamo ancora altro, ma immaginiamo che l'effetto di questi carichi sia in un certo senso "cumulativo", ossia non possiamo sollecitare il materiale con un numero di cicli n_i ogni volta poco inferiore a N_i^* e sperare che non si rompa nulla.

La regola di Palmgreen-Miner infatti ci dice che deve essere rispettato, oltre alla regola di Wohler per il singolo carico, anche

$$\sum_i \frac{n_i}{N_i^*} < 1 \quad (2.3)$$

Ossia la somma dei vari $\frac{n_i}{N_i^*}$ deve essere inferiore a 1 (i.e la somma delle percentuali di cicli sui cicli a rottura del singolo carico deve essere inferiore al 100%); è quindi come se ogni carico apportasse un certo *danneggiamento* $D_i = \frac{n_i}{N_i^*}$ percentuale e quindi la percentuale totale, somma dei singoli danneggiamenti, debba essere inferiore al 100%. Si potrebbe, volendo, valutare la resistenza "residua" del materiale come

$$1 - \sum_i D_i$$

L'ipotesi fondamentale che abbiamo fatto qua però è che la fatica **non** dipenda dalla *sequenza* con cui applichiamo i vari carichi σ_i , e dobbiamo sicuramente pensare che potrebbe non essere così.

2.3 Meccanica della frattura

Finora abbiamo fatto finta di non considerare che all'interno del materiale *inevitabilmente* ci sono delle cricche, che sicuramente avranno una loro influenza nella resistenza del materiale (che è ciò che interessa a noi alla fine, dovendo progettare strutture sicure).

Quello che faremo in questa sezione allora sarà capire come *cambia* la resistenza a rottura del materiale per via della *presenza* dell'*evoluzione* delle cricche.

Consideriamo allora un certo componente (ad esempio un pannello caricato a trazione) che immaginiamo "perfetto" (ossia senza cricche) e poi consideriamo il medesimo pannello ma con al suo interno una cricca di semiapertura a (la sua apertura, dimensione caratteristica, sarà pari alla risoluzione dello strumento di ispezione che usiamo). Ad una generica sezione, abbastanza lontana dagli estremi, del pannello perfetto vediamo che lo *stato di tensione* è uniforme lungo la larghezza del pannello, come è lecito aspettarsi.

La cosa non succede invece nell'altro pannello, dove in prossimità della cricca lo stato di tensione è nettamente maggiore, in quanto c'è un vuoto e lì il carico non può "passarci". Come conseguenza quindi vedremo una tensione molto maggiore nei pressi della cricca, che va man mano diminuendo avvicinandosi ai bordi del pannello.

$$\sigma_{cricca} \gg \sigma_{carico}$$

Quello che faremo noi sarà affrontare i due principali **problemi** della meccanica della frattura, ossia:



Figura 2.3

- Determinare come gli *sforzi* si **ridistribuiscono** in prossimità della cricca, nonché da cosa ciò *dipenda*.
- Capire come la cricca **propaghi** nel materiale, ossia come cambia nel tempo la lunghezza $2a$. Questo ci serve in particolare per la filosofia damage tolerance, in quanto dobbiamo monitorare spesso le cricche.

Otterremo quindi delle nuove **proprietà** per il materiale (quanto patisce per via della cricca? come evolve la stessa?) e, di conseguenza, potremo sviluppare dei ragionamenti volti anche a capire come poter *migliorare* i suddetti materiali sotto questi nuovi due punti di vista.

2.3.1 Fattore di concentrazione delle tensioni

In questo paragrafo discutiamo brevemente del primo problema della meccanica della frattura, ossia come si modifica lo stato di tensione nei pressi della cricca (sappiamo già che si intensifica).

Consideriamo pertanto un pannello caricato a trazione costante e uniforme, il quale presenta una cricca al suo interno, di dimensione caratteristica pari a $2a$.

Facciamo prima un esempio tra i più facili: consideriamo che la cricca sia un **foro circolare** di diametro quindi pari a $\phi = 2a$. Se ci mettiamo in una zona abbastanza lontana dalla cricca vediamo che la tensione è pari ad un certo valore $\sigma = \sigma_0$ costante. Se invece ci mettiamo in una zona vicina alla cricca vediamo che la tensione non è più costante lungo la larghezza del pannello ma agli estremi è pari a σ_0 , mentre ai bordi del cerchio è pari a un certo valore $\sigma = \sigma_1$, chiaramente superiore a σ_0 . Resta pur vero che l'integrale della tensione sulla sezione (ora diversa perché manca un pezzo) deve essere sempre pari al carico esterno di trazione, ma ora proprio perché manca un pezzo vediamo che la tensione si ridistribuisce (in maniera non costante) in quel modo. Se definiamo come **fattore di intensificazione degli sforzi** il rapporto tra la massima tensione in prossimità della cricca e la tensione che si ha lontano dalla cricca

$$K_t = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$$

vediamo che nel caso specifico di cricca a foro circolare si ottiene $K_t = 3$.

Naturalmente, quello appena presentato è un caso molto irrealistico, per cui proviamo a generalizzarlo assumendo che la cricca abbia forma **ellittica** di dimensioni $2b$ e $2a$ (semiasse minore e maggiore). Sotto l'ipotesi di *stato piano di tensione* (ed è sensato in questo caso) vediamo che sul bordo dell'ellisse si ha

$$\sigma_{xx} = 0$$

Dal momento che in tale direzione non c'è materiale, per cui non può esserci una tensione (non verrebbe equilibrata con nulla), mentre si vede invece che

$$\sigma_{yy} \rightarrow \infty$$

Se si vede l'andamento delle tensioni lungo l'asse x si nota che la σ_{xx} prima cresce e poi torna a zero, mentre la σ_{yy} tende direttamente a zero in maniera asintotica (partendo dalla singolarità per $x = a$). La tensione massima dunque la

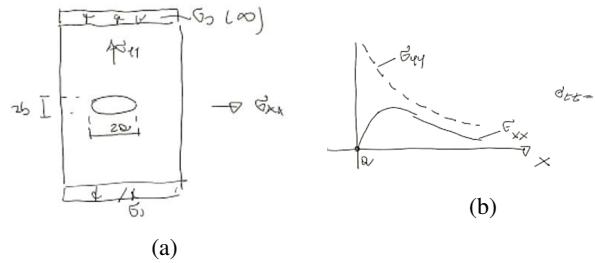


Figura 2.4

si ha per $x = a$ (bordo cricca) e si dimostra² che nell'ipotesi di stato piano di tensione vale

$$\sigma_{yy}^{max} = \sigma_0 \left(1 + \frac{2a}{b}\right)$$

Pertanto si ottiene che nel caso di cricca ellittica il **fattore di intensificazione degli sforzi** vale

$$K_t = 1 + \frac{2a}{b} \quad (2.4)$$

Ovviamente questa formula comprende anche il caso particolare di foro circolare ($a = b$), per cui si ottiene $K_t = 3$, come detto in precedenza.

È interessante notare che il K_t tenda all'infinito per b che tende a zero, ossia più la cricca è "schiacciata" e più sono elevate le tensioni in sua prossimità. Una ipotetica cricca con $b = 0$ (una linea) ha tensione infinita nei suoi pressi.

2.3.2 Teoria di Griffith (Strain Energy Relase Rate)

Abbiamo bene o male capito cosa succede nei pressi della cricca (primo problema), ma ora vogliamo studiare qualcosa che ci permetta di capire come evolve la cricca e sotto quali condizioni lo fa o meno. L'approccio che ha utilizzato Griffith nella sua teoria è un approccio di tipo *energetico*.

In particolare, misuriamo in un certo senso l'energia *necessaria* a far accrescere la cricca da una dimensione a ad una dimensione $a + da$. È infatti necessaria una spesa di energia per fare ciò, e come vedremo tale spesa sarà affrontata dal carico che, quando raggiungerà il valore di energia necessaria ad accrescere la cricca, la farà accrescere.

Per chiarire meglio i concetti facciamo un primo esempio, da cui generalizzare il tutto. Consideriamo un pannello rettangolare b, h, t con un *intaglio* di dimensione a , caricato a trazione P . Per effetto del carico di trazione vedremo che il pannello è soggetto ad uno spostamento δ in maniera concorde con P .

Possiamo pensare di rappresentare su un grafico $P - \delta$ un eventuale percorso di carico e scarico che compiamo.

- Partiamo ovviamente dall'origine (A) e carichiamo il pannello con un carico via via crescente, sino a raggiungere un valore P_1 tale per cui $\delta = \delta_1$ (B). In tale preciso punto (i.e per tale preciso carico) abbiamo, in qualche modo, che la cricca inizia *da quel momento* ad accrescere la sua dimensione.
- Tenendo infatti *costante* il carico P vediamo che lo spostamento δ aumenta da δ_1 a δ_2 (la cricca si apre e quindi c'è uno spostamento maggiore perché la sua apertura aumenta la lunghezza del pannello in sostanza). Questa fase si chiama fase di *release* (C) in quanto è come se si permettesse alla cricca di accrescere le sue dimensioni ($a \rightarrow a + da$).
- Una volta arrivati in C si scarica il pannello, per cui si porta P a zero e, sebbene la cricca sia cresciuta, lo spostamento δ ritorna (circa) a zero perché esso è dovuto prevalentemente all'applicazione di P (l'ordine di grandezza di da è inferiore a quello di δ_1 per esempio), per cui si ritorna di nuovo in A.

Questo processo di carico-release-scarico ha ovviamente consumato dell'energia e tale energia è proprio l'area del triangolo ABC, per cui il lavoro compiuto dal carico P per avere gli spostamenti δ_1 e δ_2 (A-B, C-A) è

$$dW = \frac{1}{2}P(\delta_2 - \delta_1) \quad (2.5)$$

²Questo vale per un materiale reale, nonché duttile, ossia plasticizzabile. Infatti, quello che si è detto riguardo la σ_{yy} che va a infinito per $x = a$ è qualcosa di teorico (ricavato con la teoria dell'elasticità). La realtà ci dice che il materiale non è lineare elastico all'infinito, ma c'è un certo punto in cui va in campo plastico, e quindi è come se ci fosse una "barriera" per le tensioni, che è proprio ciò che da un valore finito alla σ_{yy} nella formula sotto. Se il materiale criccato fosse fragile si avrebbe rotura immediata (es. un pannello di vetro criccato si rompe all'istante).

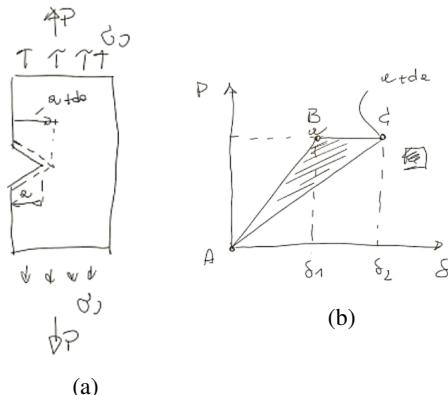


Figura 2.5

Se ora invece scriviamo l'energia interna del materiale nei punti B e C abbiamo che in B (quando la cricca ha dimensione a ma inizia il suo accrescimento)

$$U_1 = \frac{1}{2}P\delta_1$$

Mentre in C (quando la cricca ha raggiunto la dimensione $a + da$, ossia è accresciuta di da) si ha

$$U_2 = \frac{1}{2}P\delta_2$$

La differenza di energia interna tra 2 e 1 è

$$dU = \frac{1}{2}P(\delta_2 - \delta_1)$$

e si vede chiaramente che

$$dW = dU$$

ossia che il lavoro delle forze esterne sul pannello è pari alla variazione di energia interna al sistema, che è stata quindi spesa per accrescere la cricca. Come annunciato, l'energia per accrescere la cricca la prendiamo dal carico esterno che compie lavoro sul pannello.

Griffith quindi ha definito un certo numero, chiamato proprio Strain Energy Relase Rate e definito come

$$G = \frac{1}{t} \frac{dW}{da} = \frac{1}{t} \frac{dU}{da} \quad (2.6)$$

che mette quindi in relazione l'energia interna necessaria ad accrescere la cricca di da con la stessa da e con lo spessore del pannello t .

Prima di passare a degli esempi, è bene fare alcune considerazioni sparse sull'argomento.

- Il valore di P_1 per cui la cricca inizia a crescere non è un valore casuale, ma è un ben definito P . Se si applica al pannello un carico $P < P_1$ si ha che la cricca non inizia mai ad accrescere (i.e. resta sempre di dimensione a). Tale valore lo si trova abbastanza sperimentalmente, ma immaginiamo di averlo e quindi di sapere che se il carico è inferiore la cricca non si innesca, se invece è pari o superiore allora sì.
- Se prendiamo una generica condizione di carico e scarico, in cui possiamo calcolare la variazione di energia interna/il lavoro delle forze esterne compiuto sul sistema, e calcoliamo il G , otteniamo un certo valore. Se invece calcoliamo il G con quei valori *critici* per cui si inizia ad accrescere la cricca allora otteniamo $G = G_{cr}$, che è un parametro chiamato **tenacità a frattura**, il quale tiene dunque in conto per quali condizioni di carico e dimensione iniziale della cricca si ha un suo accrescimento (per un ben determinato oggetto e materiale). Se si mantiene G sotto la tenacità a frattura allora la cricca non innesca.

Sul secondo punto ci torneremo più avanti, ma la cosa fondamentale da capire qua è che noi possiamo misurare in generale l'energia interna con opportune formule (le vedremo negli esempi) e vedremo che questa energia, nel caso di componente con cricca, sarà anche funzione della dimensione di questa (a). Derivando tale energia rispetto ad a e dividendo per lo spessore otterremo il valore di G per quel carico e quella dimensione iniziale della cricca. Con delle

prove sperimentali poi otterremo un certo valore G_{cr} di tenacità a frattura, con cui potremmo calcolare per esempio i valori critici di P e a , che essendo due parametri potranno essere infiniti (posso avere carico doppio e dimensione dimezzata e viceversa) per produrre un valore critico di G . In ogni caso, tale valore critico sarà la soglia che non dovremo eccedere per non innescare la cricca.

Adesso però vediamo prima di tutto come calcolare l'energia interna U per vari casi (asta e trave a flessione retta), e poi facciamo un esempio per un componente intagliato con incastro.

Calcolo energia interna in un'asta

Consideriamo un'asta lunga L , di sezione costante A e soggetta a carico di trazione P . Come è noto, il suo stato di tensione è piano e, in particolare, l'unica tensione non nulla è quella normale.

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A}$$

Come è anche questo noto, la densità di energia si calcola in generale come

$$U = \int_V W dV \quad (2.7)$$

dove W , nell'ipotesi di *stato piano* di tensione è pari a

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{xx}^2}{E} \quad (2.8)$$

In questo caso abbiamo quindi che

$$W = \frac{P^2}{2EA^2}$$

Per cui, considerato che nell'asta $dV = Adx$, abbiamo che

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2EA^2} Adx \rightarrow U = \frac{P^2 L}{2EA} \quad (2.9)$$

Calcolo energia interna in una trave con flessione retta

Consideriamo una trave soggetta a flessione M . Secondo Navier la tensione è pari a

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{I} z$$

Per cui si ha che

$$W = \frac{M^2 z^2}{2EI^2}$$

E quindi, potendo sempre scrivere che $dV = dAdx$, si ha

$$U = \int_z (\frac{M^2}{2EI^2} \int_A z^2 dA) dz$$

Ma siccome $I = \int_A z^2 dA$, abbiamo che

$$U = \int_z \frac{M^2}{2EI} dz \quad (2.10)$$

ESEMPIO

Consideriamo un pannello di spessore t , incastrato ad un estremo e intagliato (intaglio con dimensione a) all'estremo libero, soggetto ad un carico di taglio P che è positivo per un lembo dell'intaglio e negativo per l'altro lembo. Ogni lembo ha altezza h .

Possiamo approssimare il tutto come tre travi, due travi uguali che sono i due lembi della cricca, caricate entrambe a taglio P , di lunghezza a e altezza h (e spessore sempre t), incastrate in una terza trave, che invece è "il resto" del pannello, incastrato a sua volta ad un basamento fisso.

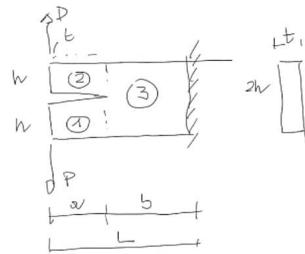


Figura 2.6

Quello che vogliamo fare in questo caso è calcolare proprio G , applicando la formula di Griffith. Per farlo basterà calcolare l'energia U e derivarla rispetto ad a , dividendo tutto poi per t .

Per calcolare l'energia possiamo tranquillamente sommare le energie delle tre travi in cui abbiamo scomposto il pannello, che calcoliamo come abbiamo appena visto con la formula.

Le travi 1 e 2 sono analoghe e sono soggette ad una flessione $M = Px$ lungo il loro asse, pertanto avremo che

$$U_{1,2} = \int_0^a \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 a^3}{6EI}$$

La trave 3 invece è soggetta globalmente a taglio nullo ($P - P = 0$), per cui ha $M = 0$ e dunque $U_3 = 0$. L'energia complessiva sarà quindi

$$U = \frac{P^2 a^3}{3EI}$$

In questo modo possiamo calcolare G come

$$G = \frac{1}{t} \frac{dU}{da}$$

e quindi

$$G = \frac{P^2 a^2}{EI t}$$

Questo è quindi lo S.E.R.R per il caso in esame, e vedremo che quando $G = G_{cr}$ allora la cricca inizierà ad accrescere le sue dimensioni. Se immaginiamo che ciò avvenga per $P = P_1$ e con dimensione iniziale della cricca $a = a_1$, avremo che

$$G_{cr} = \frac{P_1^2 a_1^2}{EI t}$$

Questa cosa è interessante perché possiamo giocare su P o su a per cercare sempre di stare sotto questo limite. Se infatti pensiamo di avere una cricca con dimensione doppia rispetto a quella critica, allora il carico "critico" di innescio lo si ha per un valore che è la metà di P_1 .

Considerazioni in merito Tutto questo ci ha fatto sostanzialmente capire che la tenacità a frattura è un parametro *nuovo*, ossia non possiamo derivarlo da cose già note (dimensioni del pezzo, materiale), ma ci serve sapere anche il carico che applichiamo e la dimensione iniziale della cricca (quella che nel DT si prende pari alla risoluzione della macchina ispettrice).

Questo apre allora le porte ad un nuovo possibile campo di studio, perché dovremo far sì che quello stesso materiale, su quello stesso componente geometrico, abbia valori di a e P tali per cui l'*innescio* della cricca non si abbia $G \leq G_{cr}$.

La tenacità a frattura è un calcolo che si fa in maniera sperimentale, per cui possiamo sempre assumere che qualcuno ci dia il valore di G_{cr} ; quello che dobbiamo essere bravi a fare è invece il calcolo del G che si ha in quel componente, di quel materiale, con quel carico e quella dimensione iniziale della cricca, perché dovremo poi compararlo con il G_{cr} fornитoci. Questo calcolo, come abbiamo visto, lo possiamo fare andando a derivare di volta in volta una relazione per l'energia interna U , che si lega a sua volta con W secondo $U = \int_V W dV$. Se poi lo stato di tensione è piano allora sappiamo anche quanto vale W e possiamo calcolarlo a partire dallo stato di tensione, a sua volta calcolato a partire dal carico e dalle opportune teorie per i vari corpi (asta, trave, ecc).

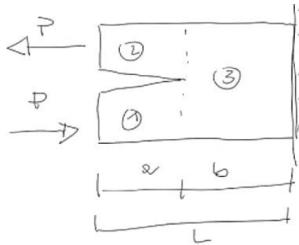


Figura 2.7

ESEMPIO

Consideriamo adesso un pannello come il precedente esempio, ma stavolta diciamo che è caricato a trazione su un lembo della cricca e a compressione sull'altro lembo della cricca (come se volesse indurre le due facce a scorrere una sull'altra).

Possiamo approssimare anche qua i tratti 1 e 2 come delle aste caricate a trazione/compressione e il tratto 3 come una trave, ora caricata a pura flessione $M = Ph$.

Calcoliamo come nel precedente caso i contributi energetici dei tre tratti con le opportune formule; vediamo che per i tratti 1 e 2 si ha

$$U_1 = U_2 = \frac{P^2 a}{2EA_1}$$

Mentre per il tratto 3 si ha

$$U_3 = \int_a^L \frac{(Ph)^2}{2EI_3} dx = \frac{P^2 h^2 (L-a)}{2EI_3}$$

Abbiamo che $A_1 = th$ e $I_3 = \frac{b(2h)^3}{12}$. Calcoliamo l'energia complessiva sommando $U_1 + U_2 + U_3$ e otteniamo così

$$U = \frac{P^2 a}{EA_1} + \frac{P^2 h^2 (L-a)}{2EI_3}$$

Da cui possiamo ricavare G con la sua formula.

$$G = \frac{1}{t} \frac{d}{da} \left(\frac{P^2 a}{EA_1} + \frac{P^2 h^2 (L-a)}{2EI_3} \right) = \frac{1}{t} \left(\frac{P^2}{EA_1} - \frac{P^2 h^2}{2EI_3} \right)$$

Anche qua possiamo andare a confrontare questo valore con il G_{cr} e quindi giocare sui vari parametri di questa formula per non far propagare la cricca. Come possiamo notare, il valore di G è qui *indipendente* da a .

ESEMPIO

Consideriamo ora il medesimo pannello di prima, solo che adesso i carichi normali sono dello stesso segno (entrambi trazione o entrambi compressione). Se facciamo analoghe considerazioni sui tre tratti, vediamo che ora sono tutti e 3 delle barre, per cui la formula di U è quella relativa alla barra. Abbiamo che i tratti 1 e 2 sono uguali e hanno energia come nell'esempio precedente

$$U_1 = U_2 = \frac{P^2 a}{2EA_1}$$

Il tratto 3 ora è una barra caricata con un carico normale in valore assoluto pari a $2P$, per cui

$$U_3 = \frac{4P^2(L-a)}{2EA_3}$$

Con $A_3 = 2A_1 = 2th$. Calcolando l'energia complessiva abbiamo che

$$U = \frac{P^2 a}{EA_1} + \frac{4P^2(L-a)}{2E2A_1} = \frac{P^2 a}{EA_1} + \frac{P^2(L-a)}{EA_1}$$

Per cui, se calcoliamo G vediamo che

$$G = \frac{1}{t} \frac{d}{da} \left(\frac{P^2 a}{EA_1} + \frac{P^2(L-a)}{EA_1} \right) = 0$$

Ossia la cricca *non propaga mai*, in quanto $G = 0$ è sicuramente inferiore ad un certo possibile valore critico.

2.3.3 Modi di apertura della cricca

Adesso che abbiamo capito come calcolare, di fondo, il fattore G , possiamo tornare a ragionare sul fattore di intensificazione degli sforzi per fare una considerazione parallela. Abbiamo detto che questo è un fattore che ci dice sostanzialmente come si modifica lo stato di tensione nei pressi della cricca, per cui possiamo sicuramente convenire che esisterà un suo valore **critico** per cui la cricca inizierà a propagare.

Per la nostra trattazione allora possiamo pensare di valutare le cose considerando due modi diversi di sollecitare il componente (e quindi indurre propagazione della cricca potenzialmente). A seconda del modo di apertura quindi della cricca avremo dei diversi stati di tensione nei suoi pressi, e quindi avremo diversi fattori di intensificazione degli sforzi, e quindi in ultima analisi avremo dei loro diversi valori critici.

Modo I

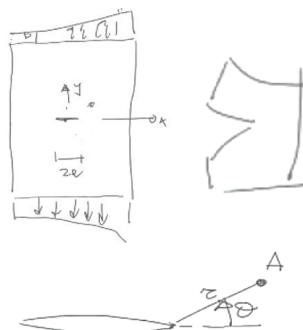


Figura 2.8

Consideriamo il nostro pannello criccato, sollecitato a *trazione*, così che la cricca si apra potenzialmente in maniera "simmetrica" rispetto al carico (analogo all'esempio di prima con taglio simmetrico sui due lembi). Fissiamo un sistema di coordinate *polar* (ρ, θ) centrato sul centro della cricca. Si dimostra che, nell'*ipotesi di stato piano di tensione*³ le tensioni nei pressi della cricca, espresse in coordinate polari, sono le seguenti.

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\frac{\theta}{2}) [1 - \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{3}{2}\theta)] \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\frac{\theta}{2}) [1 + \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{3}{2}\theta)] \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{3}{2}\theta) \end{cases} \quad (2.11)$$

Dove K_I è proprio il fattore di intensificazione degli sforzi per il modo I e vale

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (2.12)$$

sempre nell'ipotesi di stato piano di tensione ovviamente. Se invece *cade* l'ipotesi di stato piano di tensione abbiamo che

$$K_I = Y \sigma_0 \sqrt{\pi a}$$

Dove

$$Y = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{2a}{w})^2}} > 1 \quad (2.13)$$

Dove w è lo spessore del pannello(?). Possiamo *specializzare* queste relazioni per $\theta = 0$, ossia quando siamo sulla cricca, e troviamo che

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \tau_{xy} = 0$$

Possiamo poi calcolare lo *spostamento* in direzione y su una superficie della cricca⁴ (tanto è speculare tra sopra e sotto), semplicemente passando con la legge di Hooke alle deformazioni e usando un'opportuna legge di congruenza degli spostamenti per scrivere

$$v = \frac{(k^* + 1)(1 + \nu)}{2E} \sigma_0 \sqrt{a^2 - x^2} \quad (2.14)$$

³Tanto più valida quanto più il pannello è *sottile*

⁴Quanto la faccia della cricca si sposta in direzione y rispetto al caso di cricca chiusa (pannello non criccato).

Dove x è la coordinata cartesiana di un analogo riferimento xy centrato sempre sulla cricca. Abbiamo che k^* dipende da ν e si calcola in due modi diversi, a seconda se vale l'ipotesi di *stato piano di tensione* (piastra sottile) o di *stato piano di deformazione* (trave allungata).

$$k^* = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{plain STRESS} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{plain STRAIN} \end{cases} \quad (2.15)$$

Modo II



Figura 2.9

Consideriamo ora il solito pannello criccato e immaginiamo che la cricca si apra facendo scorrere l'una sull'altra le sue facce. Per fare ciò è quindi necessario che il pannello sia caricato a *taglio* lungo i bordi.

Analogamente a prima possiamo calcolare lo stato di tensione nell'ipotesi di *stato piano* esprimendola in coordinate *polarie*.

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right)] \\ \sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)[1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3}{2}\theta\right)] \end{cases} \quad (2.16)$$

Con

$$K_{II} = \tau_0 \sqrt{\pi a} \quad (2.17)$$

Se calcoliamo i valori delle tensioni a $\theta = 0$ vediamo che ora

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}$$

Ossia sulle pareti della cricca c'è *taglio puro*.

Calcoliamo infine gli spostamenti u e v come prima e troviamo anzitutto che

$$v = 0$$

Nonché che

$$u = \frac{(k^* + 1)(1 + \nu)}{2E} \tau_0 \sqrt{a^2 - x^2} \quad (2.18)$$

Con queste relazioni trovate per i vari modi di apertura della cricca possiamo fare sostanzialmente due cose:

1. Conoscere lo stato di tensione e lo spostamento nei pressi della cricca.
2. Fare un discorso sui valori *critici* del fattore K .

Concentriamoci quindi sul secondo punto; noi sappiamo che quando questi valori di K sono critici ($K_{I,cr}$ se modo I, $K_{II,cr}$ se modo II ovviamente) la cricca inizia a propagare, ma se la cricca inizia a propagare vuol dire necessariamente che anche $G = G_{cr}$. Capiamo quindi che sarà possibile trovare un *legame* tra K e G ; infatti, possiamo dire che K (dipendente dal modo di apertura) e G sono semplicemente due diversi modi di *monitorare* la cricca.⁵

⁵Se prendiamo dei materiali e vediamo i valori di K_c e, ad esempio, tensione di snervamento, vediamo che il K_c è anch'esso, come G , un parametro *nuovo*, ossia è una proprietà nuova che non dipende dalle altre. Infatti, possiamo trovare materiali con stessa tenacità a frattura (ormai parliamo di quella perché capiamo che K_c e G_c sono legati tra loro) ma con carichi di snervamento ben diversi.

2.3.4 Legame tra K e G

Per capire il legame tra questi due parametri possiamo usare un metodo molto carino, chiamato metodo di *chiusura della cricca*. Immaginiamo di avere un pannello cricco e chiediamoci *quanta energia ci serve per "richiudere" la cricca*, ossia per "ricucire" la cricca.

L'energia possiamo legarla, come ben sappiamo, al *lavoro* necessario a fare ciò, per cui scriviamo che il lavoro (che deve compiere la tensione "esterna" σ_0) per richiudere la cricca è in pratica il lavoro che deve compiere tale carico per portare lo spostamento in direzione y di una faccia della cricca dal suo valore non nullo v ad un valore nullo.

$$W_s(a) = 2 \int_{-a}^a \frac{1}{2} \sigma_0 v dx \quad (2.19)$$

C'è il 2 perché v è lo spostamento di una faccia della cricca, e per richiuderla devo fare lo stesso anche sull'altra faccia. La funzione integranda è così perché è il modo di scrivere il lavoro di una tensione per indurre uno spostamento (deformazione), ossia $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$; è tutto integrato lungo dx perché ci muoviamo lungo l'asse della cricca, l'asse x (è come se prendessimo un tratto infinitesimo dx e facessimo il lavoro $\frac{1}{2}\sigma_0 v$, per cui integriamo su tutta l'apertura della cricca $[-a, a]$).

Possiamo a questo punto calcolare il G derivando in a questa espressione, sostituendo sostanzialmente il valore di v e integrando in x . Siccome v dipende da k^* , che dipende dallo stato piano (tensione o deformazione), otterremo due valori diversi a seconda dei casi. Per il modo I abbiamo

$$G_I = \begin{cases} \frac{K_I^2}{E} & \text{STRESS} \\ \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 & \text{STRAIN} \end{cases} \quad (2.20)$$

Mentre per il modo II abbiamo invece analogamente

$$G_{II} = \begin{cases} \frac{K_{II}^2}{E} & \text{STRESS} \\ \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 & \text{STRAIN} \end{cases} \quad (2.21)$$

Non avendo fatto fino ad ora ipotesi sul modo di apertura della cricca. Abbiamo ottenuto quindi delle espressioni che legano G a K , quindi anche G_c a K_c , e quindi abbiamo avuto di fatto la conferma che si tratta di due modi diversi ma sostanzialmente analoghi di monitorare la cricca.

ESEMPIO

Consideriamo la solita trave con cricca che abbiamo usato nei vari esempi per il calcolo dello strain energy release rate, sollecitata ad ogni lembo da un carico di taglio P in modo che la cricca si apra con modo I (lacerazione). Per una tale struttura avevamo trovato che

$$G_I = \frac{P^2 a^2}{tEI}, \quad I = \frac{th^3}{12}$$

Dal momento che trattiamo una trave, dobbiamo usare la relazione di G_I per il *plain strain*, in modo da poterlo legare a K_I , per cui avevamo trovato che

$$G_I = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2$$

Sostituendo la relazione del G_I scritta prima possiamo facilmente ricavare che

$$K_I = \frac{Pa}{\sqrt{(1-\nu^2)tI}}$$

Questa relazione è molto importante perché ci permette sostanzialmente di legare il fattore di intensificazione degli sforzi al carico applicato (e a materiale, geometria e cricca), proprio come avevamo legato il G invece a tali parametri. Talvolta è infatti più facile misurare il K_c e altre è più facile misurare il G_c , per cui a seconda di ciò che abbiamo possiamo risalire con una o l'altra formula ad esempio al carico critico per apertura della cricca.

Sarà infatti immediato scrivere che

$$P_c = \frac{K_{Ic}}{a} \sqrt{(1-\nu^2)tI}$$

Conoscendo sperimentalmente il K_c quindi possiamo risalire al carico critico che instaura la propagazione della cricca di apertura iniziale a per quel materiale e quella geometria (nell'ipotesi di modo I e trave come quella precedentemente menzionata).

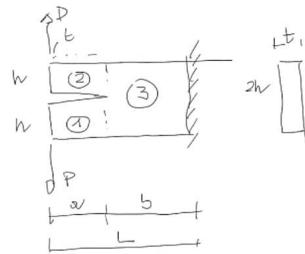


Figura 2.10

Volendo provare a inserire dei numeri consideriamo che si abbiano i seguenti dati sulla trave:

$$h = 1\text{cm}, \quad t = 2\text{cm}, \quad a = 5\text{cm}$$

E che il materiale sia una lega di alluminio Al 2024 T651, per cui si abbia $\nu = 0.33$ e si sia misurato per tale lega che $K_{Ic} = 24\text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Inserendo i valori numerici nel calcolo del carico critico si trova che $P_c = 2640\text{ N}$. Questo vuol dire che qualsiasi carico $P \geq P_c$ (i.e. qualsiasi $K_I \geq K_{Ic}$) provoca la propagazione della cricca, se questa ha apertura iniziale a , ovviamente nel caso specifico in esame. Casi diversi avranno naturalmente formule diverse per il G , sia in funzione di carico, cricca, geometria e materiale, sia nel suo legame con il K .

- La cosa fondamentale che possiamo imparare da questo esempio è che il carico critico varia linearmente con il K_c , che è una proprietà del materiale nuova e indipendente dalle altre; questo vuol dire che se prevediamo di applicare un carico maggiore al carico critico calcolato, allora potremmo pensare di migliorare il materiale scelto prendendone una "versione" con analoghe caratteristiche meccaniche ma con K_c maggiore, di modo che il nuovo carico critico sia maggiore, possibilmente maggiore del carico che intendiamo applicare.
- Un'altra cosa che possiamo imparare è che, conoscendo come si lega il K (fattore di intensificazione degli sforzi) al carico esterno che applichiamo, possiamo conoscere di fatto lo stato di tensione nei pressi della cricca (quanto è amplificato rispetto allo stato di tensione "infinitamente" lontano dalla cricca) e quindi, nel caso di *carichi ciclici*, possiamo valutare lo stato di tensione (variabile nel tempo ciclicamente) nei pressi della cricca. Questo è uno degli scopi, ad esempio, del damage tolerance.

2.3.5 Combinazione dei modi di frattura

Consideriamo un tipico pannello aeronautico montato su un'ala; quest'ala è soggetta ovviamente ai suoi carichi che (in teoria) conosciamo. Il pannello pertanto sarà caricato sia assialmente che a taglio, ossia sarà soggetto ad una *combinazione* di forze che non porterebbero eventualmente la cricca ad aprirsi con un modo I o un modo II "puri", ma l'apertura sarebbe anch'essa chiaramente una combinazione dei due modi.

Noi tuttavia possiamo agevolmente misurare i valori di K_c nel caso in cui il modo di apertura sia uno o l'altro, non entrambi, e siamo inoltre in grado di calcolare il fattore di intensificazione degli sforzi sempre nel caso in cui agisca solo un tipo di tensione, e non le due tensioni combinate. Capiamo quindi che siamo alla ricerca di una relazione che sfrutta questi valori di K e K_c calcolati nei casi "puri" e li combini per darci un criterio di non propagazione della cricca nel caso in cui invece il pannello sia caricato in maniera combinata.

Assunto quindi di avere a disposizione o di saper calcolare i valori di K_I , K_{II} , K_{Ic} e K_{IIc} , si dimostra⁶ che la relazione che stabilisce l'insorgere della propagazione della cricca è la seguente.

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1 \quad (2.22)$$

Se il primo membro dell'equazione è inferiore a 1 allora non c'è propagazione della cricca, se è invece superiore a 1 la cricca propaga. Il valore limite è rappresentato dall'uguaglianza. In termini geometrici è banale (almeno al quinto anno di ingegneria) capire che questa relazione non è altro che un'*ellisse* di semiasse maggiore K_{Ic} e semiasse minore K_{IIc} , per cui se abbiamo calcolato la coppia K_I e K_{II} (considerando solo il relativo carico applicato) e andiamo a individuare il punto associato a tale coppia nel piano $K_I - K_{II}$, se tale punto è all'interno dell'ellisse descritta dalla 2.22, allora la cricca non propaga; se invece ne è fuori allora la cricca propaga. Se il punto è proprio sull'ellisse allora si è arrivati al valore critico.

⁶Questa legge è dimostrata sperimentalmente.

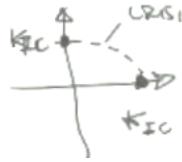


Figura 2.11

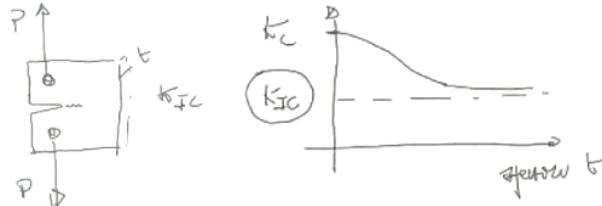


Figura 2.12

2.3.6 Andamento del fattore di intensificazione degli sforzi critico con lo spessore

Abbiamo detto in passato che è possibile misurare in maniera abbastanza semplice e sperimentale il K_c ; per farlo occorre utilizzare un provino lacerato (ovviamente tutto normato e standardizzato, con buona pace dell'ASME), caricato ad un carico P che, quando esso induce propagazione della cricca, viene identificato come critico (P_c) e da lì si ricava il K_c , avendo note dalla normativa geometria e tipologia di provino, nonché conoscendo le caratteristiche del materiale (E, ν).

Quello che si può vedere e che ci interessa molto è che il K_c dipende, tra le varie cose, dallo *spessore* del materiale. Si vede infatti che il K_c diminuisce con lo spessore, per stabilizzarsi poi ad un certo valore limite. Questo è dovuto al fatto che se abbiamo uno spessore molto piccolo siamo nell'ipotesi di *plain stress* (piastra), mentre se lo spessore è più elevato passiamo al *plain strain* (trave). Abbiamo visto che chiaramente i valori di K_c cambiano tra l'una e l'altra ipotesi, e si vede quindi che $K_{c,stress} > K_{c,strain}$. Tipicamente abbiamo associato le travi al modo I di apertura della cricca e le piastre al modo II, per cui possiamo dire conseguentemente che il valore asintotico a cui si porta il K_c aumentando lo spessore è il K_{Ic} , che risulta quindi essere $K_{Ic} < K_{IIc}$.

Ovviamente queste considerazioni sul K_c le facciamo quando ci interessa lo stato di tensione nei pressi della cricca, ossia quando abbiamo a che fare con *carichi ciclici*. Infatti, se progettiamo staticamente siamo a posto nel momento in cui abbiamo verificato che $P < P_c$, mentre può essere più importante andare a ragionare sulla tensione limite di *snervamento* del materiale, assicurandosi che lo stato di tensione non ecceda mai, con opportuno fattore di sicurezza, il limite di snervamento.

Se invece abbiamo a che fare con carichi ciclici sappiamo bene che c'è un'intensificazione della tensione nei pressi della cricca, e questo si riversa poi sul fatto che lì il materiale sperimenta una tensione alternata maggiore di quella prevista "esternamente", e questo chiaramente significa minor vita a fatica.

2.3.7 Effetto della plasticizzazione

Riprendiamo ora un problema che avevamo nascosto sotto al tappeto quando si era presentato in precedenza, ossia il fatto che all'apice della cricca la tensione tende a un valore infinito (singolarità). In realtà questo problema si risolve in maniera abbastanza intuitiva: non possiamo considerare un materiale *infinitamente* elastico, bensì dobbiamo fare pace col fatto che quando la tensione supera il limite di snervamento (dando per scontato che parliamo di un materiale duttile, dato che io almeno non ho mai visto aerei con ala in vetro) σ_y , si verifica che il materiale passa in *campo plastico* e lì, ipotizzando un comportamento *idealmente* plastico, si ha che la tensione rimane costante e pari proprio a σ_y .

Questo significa che lungo l'asse x della cricca si ha una zona che va da $x = 0$ a $x = x_p$ in cui la tensione è costante e pari a σ_y . Possiamo immaginare che vi sia quindi una *zona di plasticizzazione* nei pressi dell'apice cricca, la quale si immagina essere una *sfera* di raggio r_p ; pertanto avremo che $x_p = 2r_p$. Si dimostra che una relazione per

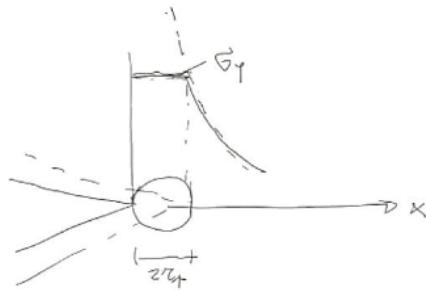


Figura 2.13

legare r_p al K , nel modo I di apertura della cricca, è per esempio la seguente.

$$r_p = \begin{cases} \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_y} & \text{plane stress} \\ (1-\nu^2) \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_y} & \text{plane strain} \end{cases} \quad (2.23)$$

Dal punto di vista pratico questo ci serve perché noi ora assumiamo convenzionalmente che la cricca non abbia più una semiapertura iniziale pari ad a , bensì che ne abbia una *effettiva* pari a

$$a_{eff} = a + r_p$$

Ossia diciamo che la cricca ha una dimensione effettiva che tiene conto anche del fatto che una certa zona nei pressi del suo apice è plasticizzata.

2.3.8 Leggi di avanzamento della cricca

Ora che abbiamo trovato tutta una serie di metodologie per legare G , K (che abbiamo definito in questo ambito) con il carico, la geometria, il materiale e soprattutto il carico a cui è soggetto il pannello, ci preoccupiamo di trovare una relazione che ci dica come evolve nel tempo la cricca (la sua dimensione caratteristica a). Sappiamo sicuramente che questa legge ci dirà che la cricca dipende dal *carico* applicato, e possiamo ragionevolmente supporre che il carico applicato compaia nelle vesti del fattore di intensificazione degli sforzi.

Andiamo comunque con ordine; è possibile notare anzitutto che la cricca (di dimensione iniziale a_0 pari alla risoluzione dello strumento per le ispezioni) per un certo periodo di tempo (i.e numero di cicli) *non* aumenta la sua dimensione. Quando si raggiunge un certo tempo (i.e numero di cicli) detto tempo di *incubazione*, allora si vede che la cricca inizia a crescere, ossia la sua dimensione a aumenta nel tempo, e lo fa fino a che non raggiunge un valore critico per cui diverge e aumenta all'infinito la sua dimensione (i.e c'è rottura del componente). In realtà possiamo anche individuare un certo valore di a (e conseguente numero di cicli N) per cui la cricca è diventata visibile e allora decidiamo in quel caso di sostituire il componente criccato.

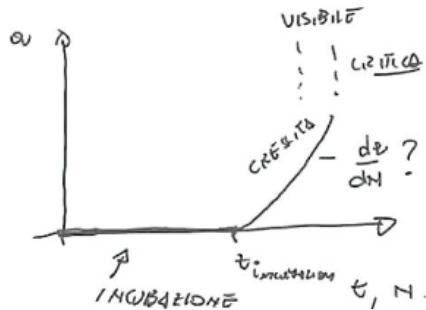


Figura 2.14

Come prima cosa ci farebbe comodo sapere il numero di cicli di incubazione, ma assumiamo di conoscerlo, magari perché l'abbiamo misurato sperimentalmente in qualche modo. Noi sappiamo allora che finché $N \leq N_{inc}$ la cricca

non aumenta mai la sua dimensione e siamo tranquilli. Quello che facciamo allora è introdurre un certo solito *fattore di sicurezza*, per cui ci sentiamo tranquilli in realtà finché

$$N \leq \frac{N_{inc}}{SF}$$

Tipicamente in aeronautica si prende $SF = 4$, ossia non ci preoccupiamo finché il numero di cicli previsto per quel componente è un quarto del numero di cicli di incubazione della cricca.

Archiviato questo tratto della curva, e posto che il tratto in cui il materiale si rompe non ci interessa perché si spera di non doverci arrivare (non ci sarebbe molto da fare), ci rimane da indagare il tratto in cui invece la cricca accresce nel tempo, e siamo dunque alla ricerca di una *legge* che ci esprima l'andamento di $\frac{da}{dN}$ in funzione del carico e di altri parametri eventuali. Prima di introdurre brutalmente un paio di queste leggi (ce ne sono varie, ognuna va bene per determinati materiali), è necessario precisare nuovamente che questo discorso di avanzamento della cricca ci interessa quando abbiamo a che fare con *carichi ciclici*, per cui sappiamo sicuramente che il nostro carico (i.e. la nostra tensione) varia tra un massimo e un minimo, a cavallo di un valor medio, e di ciò ne teniamo conto con i due parametri tipici della fatica, ossia

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}, \quad R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

Di conseguenza, variando il carico, varierà anche il fattore di intensificazione degli sforzi, per cui a un $\Delta P = P_{max} - P_{min}$ è associato un $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ ⁷. Si riversa quindi tutto sul trovare una legge di $\frac{da}{dN}$ che sia una funzione di questo ΔK . Una prima semplice legge che possiamo introdurre è la legge di **Paris**:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \quad (2.24)$$

Dove C e m sono delle *costanti* caratteristiche del *materiale*. Un'altra legge, presentata in due varianti, è poi la legge di **Forman**:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (2.25)$$

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_c - \Delta K} (K_{max}^2 - K_0^2) \quad (2.26)$$

Le leggi di Forman non introducono nuovi parametri ma semplicemente sono delle variazioni sul tema che si adattano

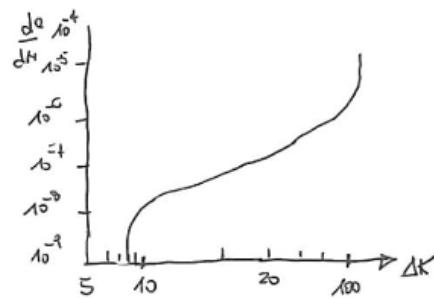


Figura 2.15: Legge di Paris.

bene a rappresentare alcuni materiali. In ogni caso, quello che abbiamo ottenuto e che deve interessarci è il fatto che possiamo legare il rateo di accrescimento della cricca al carico (ciclico) che applichiamo e al materiale. Possiamo quindi, integrando la legge di Paris o Forman, sapere per ogni numero di cicli quanto vale la dimensione della cricca, così quindi da poterla sempre (in teoria) **monitorare**.

ESEMPIO

Consideriamo un pannello infinito (così K non contiene gli effetti reali del fattore Y) sollecitato con una $\sigma_{max} = \sigma_0$ e una $\sigma_{min} = 0$ e caratterizzato da una cricca di semiapertura iniziale a_0 . Siamo interessati a valutare la dimensione

⁷Di base è bene ricordarsi anche che $K = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ per un pannello infinito.

della cricca a ad un generico numero di cicli N , per cui scriviamo la legge di Paris esplicitando $\Delta K = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ ($\Delta\sigma = \sigma_0 - 0 = \sigma_0$).

$$\frac{da}{dN} = C(\sigma_0 \sqrt{\pi a})^m$$

Separiamo le variabili e scriviamo quindi che

$$\frac{da}{a^{\frac{m}{2}}} = C(\sigma_0^2 \pi)^{\frac{m}{2}} dN$$

Integriamo tra 0 e N e conseguentemente tra a_0 e a , per cui otteniamo che

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a^{\frac{m}{2}}} = \int_0^N C(\sigma_0^2 \pi)^{\frac{m}{2}} dN$$

Risolvendo questi integrali otteniamo conseguentemente che

$$\frac{1}{-\frac{m}{2} + 1} (a^{-\frac{m}{2} + 1} - a_0^{-\frac{m}{2} + 1}) = C(\sigma_0^2 \pi)^{\frac{m}{2}} N$$

Ricavando quindi a in funzione del resto otteniamo

$$a = \left[\left(-\frac{m}{2} + 1 \right) C(\sigma_0^2 \pi)^{\frac{m}{2}} N + a_0^{-\frac{m}{2} + 1} \right]^{-\frac{1}{-\frac{m}{2} + 1}}$$

Nota quindi l'ampiezza iniziale della cricca, il materiale e il carico con cui sollecitiamo il pannello, possiamo calcolare a per ogni numero di cicli e, conoscendo ora a , possiamo calcolare conseguentemente il ΔK per vedere se per caso (si spera di no) abbiamo superato il valore critico K_c .

Capitolo 3

Carichi

È molto importante che un progettista conosca bene i carichi a cui può essere soggetto il velivolo, in quanto sono proprio loro i suoi "nemici". Se questi carichi sono, come accade nel nostro caso, variabili nel tempo, allora è ancora peggio, perché il progetto deve prevedere non solo che (e ci mancherebbe) la struttura regga staticamente, ma che sia progettata anche per resistere decentemente a fatica.

Vi sono varie tipologie di carichi, come quelli di manovra, il wind shear, la formazione di ghiaccio o i carichi dati dal carrello di atterraggio o la raffica. Noi parleremo brevemente dei primi carichi, per poi specializzare la trattazione sulla raffica continua.

3.1 Manovra, wind shear e formazione di ghiaccio

Vediamo molto brevemente cosa sono e cosa comportano, nonché come ci fa intervenire la normativa in merito.

3.1.1 Carichi di manovra

Esistono, da normativa, dei diagrammi che mettono in relazione il carico a contingenza n con la velocità del velivolo V ; ogni curva su tale diagramma determina una certa distribuzione di carico, dal momento che il fattore n è collegato direttamente alla portanza sul velivolo.

Oltre a dover naturalmente stare all'interno del diagramma di manovra, osserveremo che il fattore n dipende in generale dal tempo, per cui anche il carico agente sulla struttura del velivolo dipende dal tempo, e questo farà sì che potrebbero esserci problemi di fatica, se non tenuti in conto e agito di conseguenza.

3.1.2 Wind shear

Il wind shear, che non ha a che vedere con la raffica, è un fenomeno che si verifica a terra a causa di masse d'aria che ricadono sul terreno e poi, una volta "sbattute" su di esso, risalgono in alto. Tipicamente questo avviene per lo più in aeroporti vicino al mare, come Palermo e Genova.

Ciò che succede comunque è che il velivolo in avvicinamento vede prima una velocità verticale verso l'alto w , e quindi il pilota istintivamente picchia l'aereo per controbilanciare questo aumento di incidenza "esterno". Tuttavia, quando però entra nella zona dove la velocità verticale è negativa $-w$, succede che lui sta già picchiando, ma ora l'incidenza "esterna" tende a picchiare ulteriormente il velivolo, che di fatto compie un bel giro della morte che, se non fosse un pochino pericoloso, sarebbe sicuramente un modo molto utile di risparmiare sul cibo servito a bordo.

Siccome ci sono stati vari incidenti a causa del wind shear, la normativa stabilisce che se il fenomeno è molto accentuato il pilota atterra aiutato dagli operatori di terra, se invece non è così forte, il pilota atterra in autonomia, e viene pertanto addestrato a farlo.

3.1.3 Formazione di ghiaccio

Si tratta di un fenomeno che si verifica prevalentemente sui velivoli turboelica, i quali volano di per sé a basse velocità. Formandosi del ghiaccio sulle ali, si ha che il C_L si riduce e il C_D aumenta, per cui è necessaria una maggiore spinta al motore per sostentare il velivolo e, inoltre, abbassare il C_L non è il massimo, perché potrebbe stallare l'aereo.

La normativa stabilisce allora che se c'è un forte rischio di formazione critica di ghiaccio ce ne torniamo tutti a casa a bere un tè caldo, mentre se le condizioni non sono così critiche, il velivolo deve ricorrere a dei sistemi *anti-ghiaccio*, come ad esempio delle resistenze elettriche nell'ala.

3.2 Raffica continua

La raffica significa che abbiamo una velocità verticale w in volo (tipicamente in crociera), la quale si combina con la velocità di volo e determina una variazione di incidenza. La variazione di incidenza determina una variazione di portanza che, a sua volta, determina una variazione di fattore di carico ($\Delta n \propto \frac{w}{V}$), quindi del carico agente sul velivolo.

Se la raffica fosse costante ($w = \text{cost.}$) avremmo semplicemente un incremento del carico per un certo periodo di tempo, mentre se come nel nostro caso la raffica è continua e, soprattutto, *aleatoria*, allora vediamo che $w = w(t)$ e quindi di conseguenza $P = P(t)$. Questo ci preoccupa abbastanza per il discorso fatica, ancor più perché i velivoli sono fatti in leghe leggere, le quali non hanno limite di fatica (anche la minima raffica affatica un po' il velivolo).

Quello che dovremo fare noi allora sarà anzitutto trovare il modo di legare w con n e quindi automaticamente n con P , ma ancor prima di tutto ciò dobbiamo trovare un modo per determinare questa maledetta $w(t)$, dato che abbiamo a che fare con fenomeni turbolenti e instazionari, quindi molto difficili da trattare.

Di base, useremo una distribuzione probabilistica *gaussiana* (la fisica del problema fa sì che questa distribuzione vada molto bene) per caratterizzare la w in qualche modo, per poi passare a capire come legare w con n ; per poter fare tutto quanto occorre disporre di 3 sostanziali conoscenze approfondite nei seguenti ambiti:

1. Informazioni **meteorologiche**, ossia avere dei dati circa l'andamento di $w = w(t)$. Un simile grafico, dipendente dalla *rotta*, viene creato strumentando alcuni aerei e facendo misurare loro i fattori di carico a cui sono soggetti (con accelerometri), per risalire in modo "inverso" a come vorremmo fare noi alla w . Per le rotte atlantiche un lavoro eccelso, frutto di decenni di studio, fu fatto da von Karman.
2. Modello **dinamico** del velivolo, ossia sapere come risponde il sistema alla forzante esterna data dalla variazione di carico a causa della raffica. Nel costruire questo modello ci sono due possibili strade da seguire:

- Considerare l'aereo come un *corpo rigido*, per cui di fatto eliminare il contributo delle forze elastiche nel generico autoproblema $[M]\{\ddot{s}\} + [C]\{\dot{s}\} + [K]\{s\} = \{P(t)\}$. In questo modo si ipotizza che l'ala e tutte le superfici mobili non si deformino sotto l'effetto del carico aleatorio.

Questa non è sempre un'ipotesi valida, in quanto a volte i risultati prodotti da questo modello si discostano in maniera non accettabile dalla realtà (l'aereo non è mai rigido). Questo per esempio può portare ad avere una discrepanza in termini di C_L , causando quindi magari un ΔC_L rispetto al valore che si dovrebbe avere (do un input sbagliato alle superfici di governo). Siccome il C_L entra nel calcolo della *resistenza* come resistenza indotta in termini di C_D^2 , abbiamo che un ΔC_L causa un $\Delta C_D \propto \Delta C_L^2$, quindi un notevole aumento dei *consumi*.

Per questa motivazione, l'Airbus A320 è stato il primo velivolo dotato di sistemi di controllo attivo del flutter (ossia tiene conto della deformabilità del velivolo), attestando comunque un risparmio di combustibile intorno al 7-10% (loro avevano urinato fuori dal vaso parlando di un 15%)

- Considerare, più accuratamente, l'aereo come un corpo *elastico*. Questo si fa per esempio in presenza di materiali non eccessivamente rigidi, o quando gli allungamenti alari sono talmente elevati da introdurre una deformabilità non trascurabile. In questo caso è presente anche il contributo delle forze elastiche nell'autoproblema, ed è richiesta altresì la conoscenza e lo studio dell'*aerodinamica instazionaria*, per capire come il velivolo e il flusso d'aria (turbolenta, perché c'è la raffica) interagiscano.

3. Conoscenza di **aerodinamica instazionaria**. Possiamo brevemente dire qui che sul dorso del profilo è presente una vorticità Γ_1 , mentre sulla scia ne è presente un'altra Γ_2 . La vorticità totale si dimostra che deve essere nulla ($\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$).

Succede però che queste vorticità ovviamente causano delle velocità verticali w_1 e w_2 su dorso alare e scia, che però non sono stanziali uguali e contrarie ma sono purtroppo *sfasate*, per cui si crea una variazione di w nel tempo, nonché l'instaurarsi di un fenomeno aeroelastico chiamato *flutter*.

Ottenute in qualche modo queste conoscenze ed informazioni, ciò che potremo fare sarà legare il w che prendiamo dalle informazioni meteorologiche, attraverso una cosiddetta **funzione di trasferimento**¹ H , al Δn conseguente. La

¹Quella che in dinamica abbiamo chiamato FRF.

funzione di trasferimento la dobbiamo costruire noi, e adotteremo diverse ipotesi a seconda delle varie condizioni di volo e di carico.

Per compiere tutti i passaggi è utile passare dal *dominio* del tempo a quello delle *frequenze*, dal momento che è più facile caratterizzare l'input w in questo caso. Se infatti facciamo l'ipotesi che il la porzione di raffica $w(t)$ che studiamo si ripeta identicamente nel tempo (ne studiamo un macroperiodo in pratica) allora abbiamo un numero finito di frequenze.

Possiamo infatti prendere la $w(t)$ che stiamo considerando e farne un'*analisi di Fourier*, andando a scomporla in una somma (potenzialmente e a rigore infinita) di *armoniche* caratterizzate da una certa frequenza; dovremo poi capire anche quanto ogni armonica "pesa" sul contributo finale, e per farlo introdurremo il concetto di *spettro di potenza*.

3.2.1 Analisi dell'input

Consideriamo adesso di aver ricevuto l'andamento temporale di $w(t)$, ottenuto con la caratterizzazione fatta da von Karman ad esempio; dobbiamo trovare il modo di caratterizzare in qualche modo questa funzione, perché ci serve una qualche formula che possiamo dare in pasto alla nostra scatola H , così che la trasformi in Δn .

Utilizziamo, come già detto, una distribuzione probabilistica gaussiana, per cui scriviamo che la probabilità che si abbia il valore $w(t)$ è

$$p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-\bar{w}}{\sigma_w}\right)^2}$$

Dove σ_w è il *valor medio* di w , calcolato come

$$\sigma_w = \sqrt{\bar{w}^2} = \sqrt{\frac{1}{2T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T [w(t)]^2 dt}$$

Dove T è il periodo (macroscopico) in cui si verifica la raffica. Se si hanno più macro periodi di diverse raffiche, ad esempio N periodi, allora abbiamo che

$$\sigma_w = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\bar{w}(t)]^2}$$

Ossia è il valor medio dei valori medi.

Fin qua tutto bellissimo, ma ancora ci manca una formula analitica per la distribuzione di $w(t)$. Possiamo finalmente scriverla facendo, come anticipato prima, un'*analisi di Fourier* e scrivendo pertanto la funzione come una sommatoria infinita² di armoniche.

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\Phi_n(\omega_n)\Delta\omega} \cos(\omega_n t + \psi_n) \quad (3.1)$$

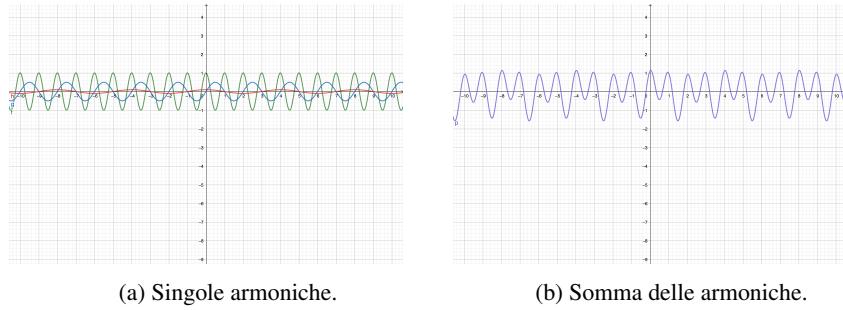
Dove Φ_n è proprio lo *spettro di potenza* (quello che ci ha dato von Karman nel caratterizzare le raffiche in rotte atlantiche) e ci dice quanto è rilevante ogni frequenza di ogni armonica nella sommatoria totale.

Come possiamo ben notare, la funzione $\Phi(\omega)$ spettro di potenza è qualcosa di *continuo*, mentre l'*analisi di Fourier* ci dà un numero *discreto* di armoniche. Diciamo pertanto che, a differenza dell'*analisi di Fourier*, lo spettro di potenza ci dà delle frequenze continue.

Quindi noi conosciamo i valori di Φ_n per le relative ω_n , assumiamo di conoscere gli sfasamenti, e quindi abbiamo una relazione matematica che ci permette di avere un input corretto da dare alla funzione di trasferimento H . Sommando infatti le varie armoniche con la loro ampiezza (data dallo spettro di potenza) otterremo la funzione completa.

Il prossimo passo quindi sarà proprio capire cosa mettere in questa scatola, per ora chiusa, in modo tale che ad un input $w(t)$ corrisponda un output $\Delta n(t)$.

²In realtà quello che si vede poi è che la prima armonica becca già il 70% della funzione, mentre le prime 10 armoniche beccano il 99% dell'andamento della funzione.

Figura 3.1: Armoniche $\cos(2\pi x)$, $\frac{1}{2} \sin(\pi x)$, $\frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}x)$.

Spettro di potenza

Andiamo a discutere più nel dettaglio questo spettro di potenza già citato sopra. Abbiamo detto che si tratta di una funzione che ci dice, in base alla frequenza dell'armonica che consideriamo, quanto vale l'ampiezza di quell'armonica, ossia quanto quell'armonica è *importante* nel segnale totale.

Quello che ha fatto von Karman nella caratterizzazione delle raffiche per rotte atlantiche è stato proprio fornirci il grafico $\Phi - \omega$, da cui possiamo capire qual è l'armonica più importante (ω di Φ_{max}) e qual è la massima frequenza per cui si ha un'armonica influente (ω_{max}).

Si può dimostrare che

$$\sigma_w = \sqrt{\int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega}$$

Nonché che

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{T} \left| \int_{-T}^T w(t) e^{i\omega t} dt \right|^2$$

Questa è sostanzialmente una trasformata di Fourier, e ci permette di passare dal dominio del tempo ($w(t)$) al dominio delle frequenze ($\Phi(\omega)$).

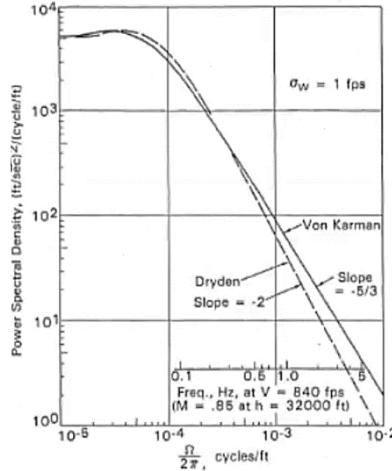


Figura 3.2

Grazie al lavoro di von Karman si è ottenuta un'espressione, basata su interpolazione di dati sperimentali, per la $\Phi(\omega)$.

$$\Phi(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{L}{\pi} \frac{1 + \frac{8}{3}(1.339L\Omega)^2}{[1 + (1.339L\Omega)^2]^{\frac{11}{6}}}$$

Dove L è la *scala* della raffica (i.e della turbolenza) e Ω è legata alla ω . Un'altra relazione usata è quella di Dryden.

$$\Phi(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{1 + 3(L\Omega)^2}{\pi[1 + (L\Omega)^2]^2}$$

Gli andamenti di queste due funzioni sono rappresentati in figura 3.2.

Funzione di autocorrelazione

È molto importante introdurre una funzione, detta di *autocorrelazione* e definita come

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T w(t)w(t + \tau)dt \quad (3.2)$$

Essa definisce la variazione del segnale aleatorio $w(t)$ dal tempo t al tempo $t + \tau$. Giacché quando varia il tempo varia anche la frequenza, possiamo mettere in relazione la funzione di autocorrelazione con lo spettro di potenza; si dimostra infatti che

$$\Phi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\tau) \cos(\omega\tau)d\tau \quad (3.3)$$

E, conseguentemente

$$R(\tau) = \int_0^\infty \Phi(\omega) \cos(\omega\tau)d\omega$$

Possiamo graficare un andamento di $R(\tau)$ e vedere come per le basse frequenze dominanti nello spettro di potenza la funzione sia più "distesa", con una piccola zona a τ elevati in cui è negativa, mentre per le alte frequenze dominanti abbiamo qualcosa di più pronunciato all'inizio³. Avremo infatti che per alte frequenze dominanti si ha τ più piccolo.

3.2.2 Funzione di trasferimento

Abbiamo detto che passiamo dall'input (raffica) all'output (carico) mediante una funzione di trasferimento, che dipenderà dalle caratteristiche dinamiche del velivolo e dall'aerodinamica instazionaria che andremo a modellare, e che lega quindi l'input all'output mediante una certa *relazione*.

Non è oggetto di questo corso andare a capire come costruire questa funzione di trasferimento, ma quello che ci serve sapere è soltanto che essa prende in input lo spettro di potenza della *raffica* e, mediante i suoi calcoli, restituisce in output lo spettro di potenza della *velocità verticale del velivolo*, la quale si combina con la velocità orizzontale e causa un $\Delta\alpha$ che causa un Δn che causa un ΔP che causa la fatica (che al mercato mio padre comprò).

$$\Phi_o(\omega) = \Phi_i(\omega)|H(\omega)|^2$$

Capiamo inoltre che questa funzione di trasferimento, oltre a dipendere di base dalla dinamica del velivolo e dall'aerodinamica del flusso, dipenderà naturalmente dalla *frequenza* ω delle armoniche. Infatti, ciò che avviene è che la funzione di trasferimento, prendendo in input $\Phi_i(\omega)$, restituisce una $\Phi_o(\omega)$, per cui è sensibile alla ω che ha ogni armonica.

Riassumendo: L'input è il dato sulla raffica, l'output è il dato sul velivolo, da cui poi calcolo l'andamento del carico.

Una volta ottenuto quindi questo benedetto dato di output e ricavato l'andamento del carico possiamo andare a fare tutta una serie di considerazioni utili per il progetto a fatica secondo la filosofia damage tolerance, potendo infatti ricavare da tale output delle informazioni molto rilevanti per la fatica, come ad esempio il numero di *volte* in cui viene superato un certo livello di carico; in questo modo potremo quindi capire come si sta modificando lo stato di tensione e se eventualmente sta in qualche modo crescendo la cricca.

3.2.3 Numero di superamenti

Abbiamo finalmente ottenuto il dato di output, grazie alla conoscenza del dato di input e della FRF (le due cose davvero onerose da ottenere), quindi siamo in grado di calcolare l'andamento temporale del *carico* dovuto alla raffica (passare da output a carico è banale, basta trovare l'andamento di $n(t)$ dovuto a $U(t) = \bar{H}w(t)$); siamo quindi interessati a proseguire il discorso nell'ottica del progetto a *fatica*, quindi dobbiamo cercare adesso di unire tutto il discorso sulla meccanica della frattura fatto nel precedente capitolo con quello fatto ora per la raffica.

Consideriamo quindi l'andamento temporale del carico $Y(t)$ dovuto alla raffica⁴; esso, per la natura aleatoria della raffica, sarà analogamente aleatorio. Possiamo andare a individuare comunque su tale grafico dei *picchi*, ossia dei

³Vedi disegno sul quaderno.

⁴Andamento in un **punto** del velivolo e in una certa **direzione**.

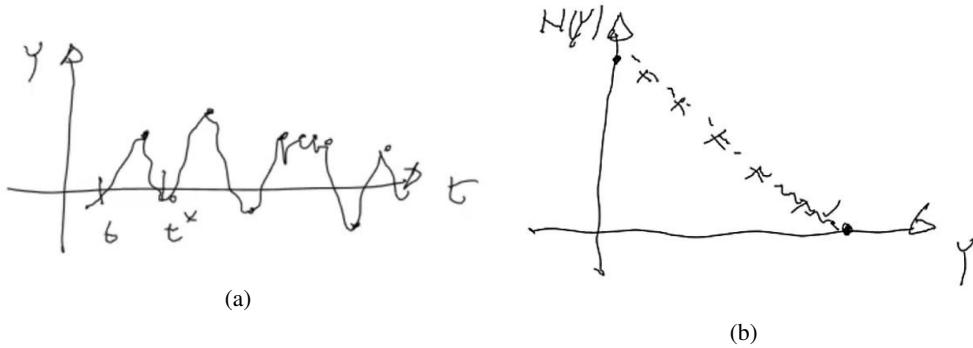


Figura 3.3

punti di *massimo* o di *minimo relativi*; definiamo allora come **numero di superamenti** $N(Y)$ il numero di volte in cui viene superato un dato livello di carico Y .

Non conosciamo un andamento preciso di tale funzione, ma sappiamo sicuramente che sarà qualcosa di *decrecente*, essendo che valori più alti di carico è molto meno probabile che siano superati rispetto a valori bassi.

Data la natura aleatoria del carico, dobbiamo utilizzare una formulazione probabilistica; un'equazione che ci mette in relazione $N(Y)$ con Y è la cosiddetta equazione di *Rice*:

$$N(Y) = N_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Y}{\sigma_Y} \right)^2} \quad (3.4)$$

Con N_0 numero di volte in cui si ha un *attraversamento* dello 0 e σ_Y il valor medio di Y . Quest'ultimo può essere legato a σ_w , valor medio di w , mediante una sua funzione di trasferimento

$$\bar{A} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_w}$$

Pertanto potremo dire che

$$N(Y) = N_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Y}{\bar{A} \sigma_w} \right)^2}$$

La normativa FAR-25 (EASA PART-25) da una relazione analoga, in funzione di 4 coefficienti forniti, che è la seguente.

$$N(Y) = N_0 \left[P_1 e^{-\frac{Y}{A b_1}} + P_2 e^{-\frac{Y}{A b_2}} \right]$$

In ogni caso, avendo una funzione $N(Y)$ che ci dice quante volte è superato il carico Y lungo la raffica abbiamo di fatto il *numero di cicli* a cui sollecitiamo la struttura del velivolo con il carico Y , e tale numero di cicli è proprio $N(Y)$!

Capiamo quindi che, utilizzando questi valori di carico e numero di cicli, possiamo servirci della legge di *Paris* per valutare la eventuale crescita della *cricca*, potendo calcolare il relativo K (fattore di intensificazione degli sforzi), che è un'altra informazione molto utile che ci serve per il progetto a fatica.

3.2.4 Riassunto

Vogliamo fare un progetto **damage tolerance**, quindi abbiamo la necessità di sapere come evolve la *cricca* (che ipotizziamo presente e pari alla risoluzione dello strumento ispettivo) a causa dei *carichi* variabili nel tempo agenti sul velivolo.

Un carico notevole che abbiamo analizzato dettagliatamente, e che è uno dei più importanti da tenere in considerazione, è quello dovuto alla presenza di una *raffica* aleatoria (continua). Per una tale condizione abbiamo visto come, a seguito di una raffica $w(t)$, si verifichi una velocità verticale del velivolo $U(t)$, che a sua volta causerà una variazione di carico $Y(t)$ sulla struttura del velivolo.

Per capire come sono legate $w(t)$ e $U(t)$ abbiamo introdotto lo *spettro di potenza*, che lega, mediante *funzione di trasferimento*, queste due variabili nello spazio delle frequenze (possiamo passare tra tempo e frequenze con la trasformata di Fourier).

Una volta passati quindi a $U(t)$ e, successivamente, a $Y(t)$, abbiamo definito il **numero di superamenti** $N(Y)$, ossia il numero di volte in cui il carico Y è superato mediante un'equazione (di Rice), per cui abbiamo di fatto ottenuto un valore di numero di cicli N ed un corrispondente valore di carico Y che sollecita la struttura per quel valore di N .

Ottenuta questa coppia di valori, abbiamo sfruttato le conoscenze di *meccanica della frattura* apprese nel capitolo precedente per anzitutto capire di quanto è amplificata la tensione nei pressi della cricca (valutazione dei K), nonché, per quel numero di cicli N , di quanto è eventualmente cresciuta la cricca (legge di Paris).

In questo modo allora vediamo come abbiamo ottenuto informazioni sull'evoluzione della cricca, per cui abbiamo di fatto eseguito correttamente un progetto sicuro, secondo la filosofia damage tolerance.

Materiali compositi

Tutto questo discorso è ben applicabile al caso di leghe metalliche, come ad esempio le nostre amatissime leghe leggere (Al, Ti, ecc), ma non si applica molto bene al caso dei materiali compositi.

Non perché ci siano impedimenti dal punto di vista concettuale, bensì perché vedere *come evolve la cricca* in un composito è estremamente **complicato**. Infatti, se consideriamo che un generico laminato può contenere anche 300-400 lamine singole, ciascuna fatta da un certo numero di fibre, a loro volta fatte da almeno 200-300 micro-fibre, capiamo che diventiamo scemi se andiamo a valutare ogni singola e possibile evoluzione di cricche.

In più, le cricche qua sono causate dalla delaminazione, che è di fatto una nuova e diversa modalità di failure tipica dei compositi.

Per fare allora un progetto sicuro di una struttura in materiale composito è necessario l'utilizzo di fattori di sicurezza più alti, nonché l'effettuazione di una notevole sperimentazione. Sarà di volta in volta l'azienda produttrice che deciderà se e quanto il gioco varrà la candela, dato che i compositi permettono sì un risparmio in peso, ma comportano un aumento non trascurabile certamente del costo, oltre che produttivo, anche progettuale per la sicurezza.

Capitolo 4

Aeroelasticità

L'aeroelasticità è una disciplina che mette insieme diverse conoscenze approfondite e ne studia anche la reciproca interazione. In particolare, l'aeroelasticità dinamica si occupa di condensare l'aerodinamica, la teoria dell'elasticità delle strutture e la dinamica (inerzia del corpo), unendo quindi all'aeroelasticità statica (aerodinamica e strutture) la meccanica del volo (aerodinamica e inerzia) e la dinamica strutturale (elasticità e inerzia).

Tutto questo può essere riassunto graficamente dal cosiddetto "triangolo di Collar", che può essere trasformato in una piramide aggiungendo l'effetto termico (aerotermoelasticità) o dei comandi di volo (aeroservoelasticità) all'aeroelasticità dinamica.

4.1 Aeroelasticità statica

Per iniziare a padroneggiare un minimo la disciplina possiamo cominciare studiando l'aeroelasticità statica, ossia un connubio tra l'aerodinamica e la teoria dell'elasticità delle strutture.

La prima cosa da fare allora è pensare e scrivere un *modello* dell'ala, sia dal punto di vista aerodinamico che da quello strutturale.

Per poter fare dei conti relativamente semplici e risolvibili analiticamente consideriamo il seguente modello:

- *Ala* dritta di allungamento finito e quindi semi-apertura pari a l e corda c .
- *Aerodinamicamente* modellata secondo la teoria di striscia e investita da un flusso indisturbato di velocità U .
- *Strutturalmente* modellata come una trave (di Eulero-Bernoulli) incastrata e soggetta a sola torsione (vogliamo valutare solo il suo effetto).

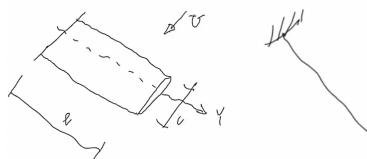


Figura 4.1

Lato aerodinamico

Prendiamo un profilo di riferimento lungo l'apertura alare e consideriamo le forze che agiscono su di esso. Avremo anzitutto che sul *centro aerodinamico* agisce la portanza L' , che indichiamo così in quanto definita per unità di lunghezza (per avere i valori in N basterà integrare lungo y tra $-l$ e l), il momento aerodinamico M' , anch'esso per unità di lunghezza, e infine il peso moltiplicato per il fattore di carico (immaginiamo che questo non sia necessariamente pari a 1), quest'ultimo agente in corrispondenza del *centro di gravità* dell'ala. Chiamiamo e la distanza tra il fuoco e l'asse z e d la distanza tra il centro di gravità e il medesimo asse z .

Tipicamente l'asse z è indietro rispetto a fuoco e baricentro¹, e il baricentro è a sua volta indietro rispetto al fuoco.²

Lato strutturale

Dal punto di vista strutturale abbiamo invece che la nostra trave (di E-B) incastrata è soggetta ad un certo momento torcente intorno all'asse elastico y^3 e dotata di una sua rigidezza torsionale GJ , con cui essa reagirà alla torsione, producendo un momento opposto pari alla rigidezza per l'angolo di cui è torta (purtroppo non quella che si mangia).

4.1.1 Scrittura delle equazioni

Passiamo ora a scrivere il momento torcente che agisce sull'ala, nonché l'equilibrio torsionale su una striscia di trave.

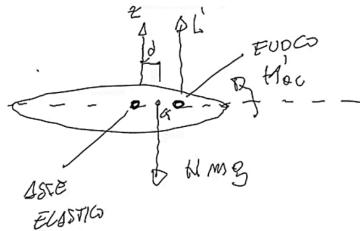


Figura 4.2

Sappiamo che sull'ala agiscono le forze generalizzate enunciate poco sopra, per cui avremo che il momento torcente (per unità di lunghezza) sarà pari a

$$M' = M'_{ac} + eL' - dNm g$$

Dove il fattore di carico N lo possiamo scrivere come

$$N = 1 + \frac{A_z}{g}$$

Dove A_z è l'accelerazione lungo l'asse z ; questo è un tipico modo di scriverlo per mettere in evidenza la sua variazione rispetto al volo livellato ($N = 1$) dovuta all'accelerazione lungo z .

La portanza per unità di lunghezza la possiamo esprimere con la ben nota formula, ponendo $q = \frac{1}{2}\rho U^2$, per cui

$$L' = qcC_l$$

Il C_l possiamo esprimere con la relazione lineare in funzione dell'incidenza.

$$C_l = a\alpha(y)$$

Scriviamo $\alpha(y)$ perché vedremo come questo valore cambia lungo l'asse elastico, essendo che l'ala è soggetta a torsione e ciò fa variare la sua incidenza. Per ora comunque accontentiamoci di scrivere così.

Avremo poi che il momento aerodinamico è dato da

$$M'_{ac} = qc^2 C_m$$

A questo punto facciamo l'equilibrio torsionale di un concio elementare della trave, considerando che per effetto della torsione essa ruoti intorno a y di un angolo θ ; troviamo quindi che l'equilibrio lungo l'asse z porta a scrivere che

$$T = GJ \frac{d\theta}{dy}$$

¹Questo dovuto al posizionamento dei due longheroni nell'ala

²Il fuoco è convenzionalmente al quarto anteriore di corda, mentre il baricentro dipende dalla distribuzione delle masse; si verifica comunque che il fuoco è anteriore al baricentro.

³L'asse elastico è l'asse tale per cui un taglio applicato lungo di esso non produce torsione. Sull'ala vera non esiste in realtà, ma è qualcosa che immaginiamo noi, nell'ipotesi tra l'altro che non cambi forma la sezione della trave, ipotesi verificata se assumiamo che la trave sia una trave di E-B.

Da cui si ha che l'equilibrio intorno all'asse y è tale che

$$\frac{dT}{dy} = -M'$$

Quanto appena scritto deriva dalla teoria della trave di E-B. Sostituiamo a questo punto l'espressione di M' , esplicitando tutti i termini al suo interno.

$$GJ \frac{d^2\theta}{dy^2} = dNmg - eqcae\alpha(y) - qc^2C_m$$

Adesso facciamo la seguente considerazione: per effetto della torsione abbiamo detto che la sezione (profilo) della trave ruota di θ intorno a y ; questo però significa che, rispetto alla condizione non torta, l'ala ha subito *incremento di incidenza* pari proprio a θ . Ovviamente, variando θ lungo y , avremo che anche α varierà lungo y . Scriviamo quindi che l'incidenza è pari a un valore α_r (indicante l'incidenza dell'ala senza considerare l'effetto della torsione, ossia della sua elasticità; infatti, il pedice "r" sta per "rigido"), più il contributo della torsione elastica $\theta(y)$.

$$\alpha(y) = \alpha_r + \theta(y)$$

In questo modo possiamo ottenere che l'equazione di equilibrio della trave è data da

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{qcae}{GJ}\theta = -\frac{1}{GJ}(qcae\alpha_r + qc^2C_m - dNmg)$$

Se poniamo

$$\lambda^2 = \frac{qcae}{GJ}, \quad \bar{\alpha}_r = \frac{cC_m}{ae} - \frac{dNmg}{qcae}$$

Abbiamo che l'equazione diventa

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = -\lambda^2(\alpha_r - \bar{\alpha}_r) \quad (4.1)$$

Questa è fondamentalmente l'**equazione aeroelastica** (statica) dell'ala dritta modellata con teoria della striscia e trave di E-B.

Se osserviamo bene questa equazione possiamo notare come a primo membro vi sia un primo termine (derivata seconda di θ in y) indicante il contributo della *rigidezza strutturale* (esso è infatti derivante dall'equilibrio del concio elementare di trave) ed un secondo termine indicante invece il contributo della *rigidezza aerodinamica* (lui si ottiene sostanzialmente dall'equazione della portanza L'). Il termine noto invece è qualcosa che deriva praticamente dalla *meccanica del volo*, essendo comprensivo di aerodinamica e forza peso moltiplicata per il fattore di carico (che ha al suo interno l'accelerazione, quindi l'inerzia).

4.1.2 Risoluzione dell'equazione aeroelastica

Ora che abbiamo scritto l'equazione 4.1, la quale è un'equazione differenziale del secondo ordine alle derivate ordinarie, possiamo risolverla analiticamente. Per farlo occorre imporre le due *condizioni al contorno*; esse sono esplicitabili se consideriamo che l'ala è stata modellata come una trave incastrata soggetta a torsione e scarica all'estremo libero (non c'è ragione per cui alla sezione libera agisca un momento torcente, non essendoci forze esterne).

Imporremo pertanto che all'incastro, per la definizione stessa di incastro, la rotazione è nulla e poi che all'estremo libero è nulla la torsione, che sappiamo essere proporzionale a $\frac{d^2\theta}{dy^2}$.

$$\begin{cases} \theta(y=0) = 0 \\ \frac{d^2\theta}{dy^2}(y=l) = 0 \end{cases}$$

Essendo di fronte ad un'equazione non omogenea (con termine noto costante) di secondo ordine alle derivate ordinarie sappiamo sicuramente che la soluzione è armonica e data dalla somma dell'integrale generale (omogenea associata) e integrale particolare.

$$\theta(y) = A \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y) - (\alpha_r + \bar{\alpha}_r)$$

Le costanti A e B le determiniamo proprio imponendo le condizioni al contorno; si dimostra che esse sono pari a

$$\begin{cases} B = \alpha_r + \bar{\alpha}_r \\ A = B \tan(\lambda l) \end{cases}$$

Per cui otterremo che la **risposta aerolastica** (statica) per l'ala modellata come discusso in precedenza sarà

$$\theta(y) = (\alpha_r + \bar{\alpha}_r)[\tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1] \quad (4.2)$$

Ecco quindi che il nostro problema è stato risolto, peraltro analiticamente, perché sappiamo come varia la rotazione della sezione lungo l'asse elastico y , e conosciamo di conseguenza come varia l'incidenza dell'ala lungo l'asse elastico (i.e come varia la portanza lungo l'asse elastico).

$$L'(y) = qca[\alpha_r + \theta(y)]$$

Per la nostra ala dritta avremo che $\theta(y) > 0$, per cui osserveremo di fatto un incremento di incidenza (i.e di portanza) quando consideriamo l'elasticità del corpo.

Un tale incremento di portanza causa di fatto un'accelerazione verso l'alto, quindi un aumento del fattore di carico, oltre che naturalmente un aumento della distribuzione di portanza lungo y .

Questo può causare svariati problemi, sia dal punto di vista strutturale, in quanto l'ala è **più sollecitata** rispetto al caso rigido, ma anche dal punto di vista della meccanica del volo.

Infatti, siccome tipicamente non si vuole che il velivolo acceleri verso l'alto come abbiamo visto che farebbe, bisogna che la portanza complessiva rimanga invariata (rispetto al caso rigido o al caso in cui $\theta = 0$). Per fare una simile cosa dobbiamo far sì sostanzialmente che, a parità di geometria e pressione dinamica, non vari il C_l rispetto al caso rigido (i.e l'incidenza); avendo detto che l'incidenza è somma dell'incidenza "rigida" e di θ , allora capiamo che sarà necessario modificare l'**assetto** per mantenere la stessa portanza del caso rigido, agendo quindi sui comandi di volo. Se invece volessimo mantenere costante l'assetto, dovremmo accettare una variazione di N , i.e un'accelerazione verso l'alto.

Riassunto fino a ora

- Abbiamo preso l'ala e l'abbiamo modellata strutturalmente come una trave incastrata di E-B e soggetta a sola torsione, nonché aerodinamicamente con la teoria di striscia.
- Abbiamo scritto le forze/momenti che agiscono sull'ala (portanza, peso e momento aerodinamico) e quindi il momento intorno all'asse y che generano queste forze/momenti.
- Abbiamo scritto l'equilibrio torsionale della trave sul concio elementare, ossia sul profilo di riferimento su cui abbiamo considerato forze/momenti.
- Abbiamo esplicitato il momento con la formula aerodinamica e trovato quindi un'equazione in θ , avendo considerato che l'incidenza varia rispetto al caso rigido proprio per il contributo di θ .
- Abbiamo risolto l'equazione imponendo le condizioni al contorno di trave incastrata ad un estremo e libera all'altro estremo, trovando l'espressione di $\theta(y)$, da cui possiamo calcolarci la portanza nel caso elastico, che vediamo essere aumentata rispetto al caso rigido.
- Ciò comporta che per tenere la portanza pari al valore del caso rigido è necessario variare l'assetto, altrimenti si avrebbe un aumento di fattore di carico dovuto all'accelerazione verso l'alto del velivolo.

4.1.3 Divergenza

Abbiamo visto che considerare l'ala come un corpo deformabile e non più rigido comporta che vi sia un incremento di incidenza, che causa a sua volta un incremento di portanza.

Un incremento di portanza però dobbiamo ora considerare che causa un incremento nel momento torcente M' rispetto all'istante precedente, quindi si ha un ulteriore aumento di incidenza e quindi di portanza, e così via in loop.

La cosa di per sé può anche andarci bene, fintanto che questo incremento di incidenza (i.e di θ) che c'è ogni volta non sia tale da annullare la rigidezza torsionale dell'ala. Essa infatti si annulla quando, ad esempio, θ è infinito; tale valore è ottenuto in corrispondenza di un certo valore di λ , che è legato a varie quantità che non possono variare una

volta definito il profilo e il materiale, ma è legato anche alla pressione dinamica (i.e alla velocità), che invece può variare.

Vedremo allora come vi sarà un certo valore di velocità, noto come *velocità di divergenza torsionale*, tale per cui la rigidezza torsionale si annulla ($\theta \rightarrow \infty$)⁴, e che sarà quindi una *condizione* che dovremo rispettare durante il volo.

$$U < U_{div}$$

Se ciò non sarà possibile allora dovremo *irrobustire* torsionalmente l'ala, così che la corrispondente velocità di divergenza sia maggiore.

Un altro modo di agire su questa divergenza può essere quello di modificare l'aerodinamica, introducendo un *angolo di freccia*. La freccia positiva diminuisce infatti il θ , mentre la freccia negativa lo aumenta, ma fa subentrare altre considerazioni (tipicamente sui materiali compositi e l'orientamento delle fibre) che portano globalmente il θ ad essere negativo.

Il fatto che la freccia modifichi il θ è dovuto al fatto che vi è un *accoppiamento* tra flessione e torsione che mitiga l'effetto visto in precedenza (accoppiamento geometrico), mentre il discorso sulla freccia negativa ed i compositi è noto come accoppiamento meccanico (tailoring aeroelastico per avere orientamento tale da rendere negativo θ).

Noi comunque continueremo a considerare l'ala dritta come fatto fino ad ora.

Calcolo velocità divergenza torsionale

Abbiamo detto che tale velocità è in corrispondenza di un θ infinito, che si ha quando $\lambda l \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Essendo

$$\lambda^2 = \frac{qcae}{GJ}$$

Si ha che

$$q_D = \frac{GJ}{cae} \frac{\pi^2}{2l}$$

E quindi

$$U_D = \pi \sqrt{\frac{GJ}{cae \rho}}$$

Se introduciamo il parametro $\bar{q} = \frac{q}{q_D}$ vediamo che θ , calcolata ad esempio al tip alare ($y = l$) ha un andamento fortemente non lineare. Questo vuol dire che se siamo a basse q (velocità) allora un incremento di q comporta un piccolo incremento di θ , mentre se siamo a q prossime alla q_D abbiamo un enorme incremento di θ .

Questo vuol dire che se si devono fare delle manovre è bene farle a *bassa velocità*, dato che si sollecita meno l'ala (discorso sulla distribuzione di portanza fatto prima), ma si ha anche una minore *resistenza indotta*, essendo che un θ più grande produce un ΔL più grande, e siccome $D_{ind} \propto (\Delta L)^2$, si ha un notevole risparmio.

4.1.4 Distribuzione di portanza

Abbiamo visto in precedenza che, tenendo in conto degli effetti aeroelastici, si modifica la distribuzione di portanza, in quanto varia l'incidenza lungo y per colpa di θ .

La distribuzione di portanza per un'ala rigida è quella che si trova in accordo con la teoria di striscia, ossia qualcosa di sostanzialmente costante, che crolla bruscamente al tip. Se teniamo conto del $\theta(y)$ ora vediamo che la funzione $L'(y)$ è aumentata di un certo contributo aeroelastico, dipendente da θ ; esso è nullo all'hub (incastro), mentre aumenta via via sull'apertura, ritornando a zero oltre il tip (lì la portanza è sempre nulla, non c'è santo aeroelastico che tenga).



Figura 4.3

⁴Se la rigidezza è nulla, lo spostamento è infinito.

Volendo scrivere l'equazione di $L'(y)$ in caso aeroelastico⁵ avremmo che

$$L'(y) = qca[\alpha_r + \theta(y)]$$

Che vediamo aumentare come θ , a sua volta andante con seno e coseno di λy .

Uno potrebbe pensare che, anche se varia la distribuzione di portanza, la portanza (integrale della distribuzione su y) è uguale, ma purtroppo per noi non è così.

Se infatti integriamo abbiamo che

$$L = 2 \int_0^l L'(y) dy = 2qcal \left\{ (\alpha_r + \bar{\alpha}_r) \left[\frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} - \bar{\alpha}_r \right] \right\}$$

Vediamo che infatti $L > L_r$, dove $L_r = 2qcal\alpha_r$. Questo comporta dunque un aumento di fattore di carico (i.e accelerazione), ma anche una variazione della distribuzione di carico ($L'(y)$), che cambia in generale lo stato di *tensione* e di *deformazione* della struttura; ciò può comportare che non sia più rispettato il criterio di sicurezza.

Esiste comunque una soluzione ad uno di questi problemi, ossia quello sul fattore di carico; esso è infatti definito come $N = \frac{L}{W}$, e noi possiamo fare in modo che sia $L = L_r$, cambiando ancora la distribuzione $L'(y)$ in modo che l'integrale sia lo stesso. Ciò lo possiamo fare *modificando l'assetto*, in modo che le due aree che si discostano dalla distribuzione rigida siano uguali e contrarie.

Questo purtroppo però fa permanere il fatto che il carico distribuito è sempre diverso dal caso rigido, e quindi anche gli stati di tensione e deformazione. Per questo fatto non si può fare molto nell'ambito delle nostre ipotesi e bisogna semplicemente andare a indagare come questo si modifica, per valutare se si può *tollerare* o meno l'effetto aeroelastico (irrobustisco o no?).

Per sapere a quale assetto devo portarmi per mantenere lo stesso N del caso rigido posso ricavare α_r dalla definizione di N , esplicitando L . Ovviamente il valore di α_r dovrà essere sempre tale da non indurre lo stallo.

Altro effetto aeroelastico: inversione di comando

C'è una particolare pressione dinamica che, se raggiunta, causa un effetto aeroelastico per il quale vi è sostanzialmente una inversione del comando rispetto al nominale.

Questo può avvenire sia sugli alettoni che sul rollio (cambia capacità di rollare perché cambia la torsione).

4.1.5 Accoppiamenti e relativi effetti

Come è stato precedentemente anticipato, è possibile ricondurre il θ (in segno) al fatto che siano presenti degli accoppiamenti tali che modificano questo valore. Possiamo riconoscere tre tipi di accoppiamento:

- Accoppiamento **aeroelastico**. È quello che abbiamo visto fin'ora, ossia il fatto che la portanza (flessione) sull'ala produce torsione (i.e aumento di θ in ala convenzionale). Il parametro che tiene conto di questo è la distanza tra centro di pressione e asse elastico, indicata con e .

- Accoppiamento **geometrico**. Si genera quando è presente un *angolo di freccia*, indicato con Λ . Un simile angolo fa sì che la flessione produca una torsione, esattamente come nel caso aeroelastico, solo che qua è dovuta al fatto che c'è un'inclinazione dell'ala in pianta, quindi aggiunge un ulteriore contributo.

Se la freccia è positiva (come nella maggior parte dei velivoli) si ha che questa torsione produce un θ *negativo*, quindi avere un'ala a freccia aiuta a mitigare gli effetti aeroelastici, che invece tendono ad aumentare θ .

- Accoppiamento **meccanico**. Questo si genera in presenza di materiali *compositi*, per i quali si ha un accoppiamento tra flessione e torsione dovuto all'orientamento delle *fibre*, indicato con β .

Se infatti prendiamo l'equazione costitutiva di un materiale metallico, per un componente senza angolo di freccia, abbiamo che

$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GJ & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta' \\ w'' \end{Bmatrix}$$

Se invece introduciamo sia angolo di freccia che materiale composito si ha

$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GJ & f_1(\Lambda) + f_2(\beta_i) \\ f_1(\Lambda) + f_2(\beta_i) & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta' \\ w'' \end{Bmatrix}$$

⁵In caso rigido si ha $L'(y) = qca\alpha_r = cost.$

Ossia si ottiene un accoppiamento tra flessione e torsione, dovuto sia alla freccia (accoppiamento geometrico) che all'orientamento delle fibre (accoppiamento meccanico).

Questo ci permette quindi di variare il θ complessivo (se aggiungo anche effetto aeroelastico) e, facendo il cosiddetto "*tailoring aeroelastico*", si può andare a controllare l'incremento eventuale di incidenza rispetto al caso rigido.

Riassunto

- Abbiamo modellato l'ala come una trave incastrata di E-B soggetta a sola torsione, trattata aerodinamicamente con la teoria di striscia. Abbiamo poi scritto le forze generalizzate che agiscono sull'ala, riuscendo a ricavare un'equazione ODE in θ che, risolta imponendo le BC, ci ha permesso di trovare una formula analitica per $\theta(y)$.
- In questo modo siamo stati in grado di calcolare la $L'(y)$, distribuzione di portanza, diversa dal caso rigido perché $\theta(y)$ aumenta l'incidenza, essendo $\alpha(y) = \alpha_r + \theta(y)$.
- Con questa informazione abbiamo fatto delle considerazioni riguardo anzitutto la velocità (pressione dinamica, unico parametro che posso variare una volta fatta l'ala) per la quale $\theta \rightarrow \infty$, ossia per la quale l'ala si rompe, annullando di fatto la sua rigidezza torsionale⁶, nota come velocità di divergenza torsionale. Abbiamo poi fatto considerazioni sulla distribuzione di portanza stessa, vedendo come un incremento di L' comporta un incremento di $L = 2 \int_0^l L'(y) dy$ e quindi di $N = \frac{L}{W}$; per non avere questo incremento di carico (accelerazione verso l'alto, possibile uscita dal diagramma di inviluppo) abbiamo dovuto modificare l'assetto, in modo che la portanza fosse la stessa.
- Purtroppo avere la stessa portanza non vuol dire in generale avere la stessa distribuzione di carico, per cui permane sempre (anche se $L = L_r$) un differente stato di tensione e deformazione, che può invalidare il soddisfacimento del criterio di sicurezza.
- Abbiamo infine parlato degli accoppiamenti, vedendo che quello aeroelastico è solo una parte di ciò che può variare θ ; infatti, se dotiamo l'ala di angolo di freccia si ha un contributo (diminuisce θ se freccia positiva) e se poi usiamo un materiale composito con una certa orientazione delle fibre si ha un altro contributo ancora.

4.2 Aeroelasticità dinamica

Fino ad ora abbiamo ragionato considerando che fosse tutto statico, ossia niente velocità e niente accelerazioni nel tempo per quanto concerne la forza aerodinamica (L), e quindi la θ , peraltro ragionando con un modello continuo analitico.

Questo però non è sempre verificato, e siamo quindi interessati ora a considerare che le forze aerodinamiche che interagiscono con l'ala possano in generale essere funzione non solo di θ , ma anche delle sue derivate temporali prima e seconda.

Purtroppo non esistono formulazioni analitiche risolvibili per l'aeroelasticità dinamica, quindi faremo uso del FEM (formulazione a parametri discreti con milioni di DOF).

Come prima cosa ci è utile andare a vedere come si scrivono le equazioni in questa formulazione, per poi successivamente risolverle e farci sopra delle considerazioni.

4.2.1 Scrittura equazioni

Abbiamo che la nostra ala è modellata con un modello a parametri discreti⁷ (non essendoci formulazione analitica non ha senso usare un modello continuo, se tanto poi lo risolvo discretizzando), pertanto le equazioni del moto sono in generale

$$[M]\{\ddot{x}\} + [D]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

In $\{x\}$ c'è lo spostamento di ciascun nodo; la forzante è data dalle forze aerodinamiche, più un contributo di altre forze (peso, motore, manovre, ecc), per cui scriviamo

$$\{F(t)\} = \{F_a(t)\} + \{P(t)\}$$

⁶La rigidezza dell'ala aeroelastica è somma di rigidezza "rigida" e rigidezza aeroelastica; quando questa somma si annulla si ha rotazione infinita, i.e rottura, e questa somma si annulla quando $q = q_D$, particolare valore che rende le due rigidezze uguali e opposte.

⁷In particolare, modelliamo l'ala con degli elementi *piastra* di tipo CQUAD (4 nodi per elemento). Questo è abbastanza accurato se fatto bene e permette di trattare anche aerodinamicamente bene le cose perché avremmo a che fare con una *lamina piana* da quel punto di vista.

Aerodinamica instazionaria

L'aerodinamica instazionaria ci interessa (e ci ha già interessato in realtà) perché in generale noi possiamo avere delle variazioni di incidenza sul profilo dovute a variazioni del flusso o a variazioni del profilo stesso, se consideriamo il corpo deformabile, che cambiano nel tempo.

Se scriviamo in generale l'incidenza sul profilo come un contributo rigido e indisturbato (stazionario) più una variazione di incidenza abbiamo

$$\alpha(t) = \alpha_{r,st} + \theta(t)$$

In θ ci sono tutte le variazioni; fondamentalmente ne possiamo considerare due:

- Variazioni di incidenza per deformazione del profilo (quello che abbiamo studiato in campo statico poco sopra).
- Variazioni di incidenza per raffica.

A causa di questi contributi vediamo quindi che le forze aerodinamiche si modificano nel tempo, diventando instazionarie. Il gioco, in teoria, starebbe nel determinare precisamente queste variazioni di incidenza o direttamente di forze aerodinamiche nel tempo (facile a dirsi, un po' meno a farsi). Per quanto riguarda la raffica in effetti l'abbiamo già fatto in qualche modo, perché abbiamo ottenuto come varia la velocità verticale del velivolo con spettro di potenza e funzione di trasferimento.

L'aerodinamica instazionaria relativa all'aeroelasticità è anch'essa molto complicata da studiare⁸. In generale possiamo dire che le forze aerodinamiche dipendono dalla *configurazione* nel tempo (spostamenti e sue derivate⁹) $\{x\}$ (che poi nel caso statico era la nostra θ , solo che ora $\{x\}$ è un vettore, mentre θ era una funzione.), per cui possiamo scrivere che le forze aerodinamiche sono funzione di spostamento, velocità e accelerazione come segue.

$$\{F_a(t)\} = [M_e]\{\ddot{x}\} + [D_e]\{\dot{x}\} + [K_e]\{x\}$$

Avremo allora che

$$([M] - [M_e])\{\ddot{x}\} + ([D] - [D_e])\{\dot{x}\} + ([K] - [K_e])\{x\} = \{P(t)\} \quad (4.3)$$

Questo vuol dire che in generale noi abbiamo una *variazione* di massa, smorzamento e rigidezza dovute all'aeroelasticità.

Questo però non deve stupirci; infatti, nel caso statico noi avevamo visto come le equazioni di equilibrio aeroelastico modificavano le equazioni di equilibrio "rigido" andando a introdurre una ulteriore rigidezza aeroelastica, descritta da λ .

Se infatti noi consideriamo il problema statico associato a quello appena scritto otteniamo

$$([K] - [K_e])\{x\} = \{P\}$$

Nel caso considerato prima avevamo che la rigidezza $[K]$ era descritta dall'operatore $\frac{d^2}{dy^2}$, mentre la rigidezza $[K_e]$ da λ^2 (era un modello continuo quello).¹⁰

Ciò che conta, in ogni caso, è che per effetto aeroelastico ora l'ala vede modificate la sua matrice di rigidezza dinamica, per cui varia effettivamente le sue caratteristiche dinamiche. Altro paio di maniche poi è capire come effettivamente valutare quelle matrici $[M_e, D_e, K_e]$;¹¹ noi immaginiamo di averle già calcolate.

⁸La cosa è dovuta al fatto che in generale siccome il profilo cambia forma per via della sua deformabilità, si ha un continuo cambio del campo di moto, che quindi diventa instazionario; anzitutto è difficile simulare una cosa in galleria del vento, ma per farlo si può pensare di sparare un flusso stazionario e far muovere in qualche modo il profilo.

La vera e propria complicazione la si ha comunque perché tutta questa cosa genera una vorticità sul profilo, a cui si somma quella data dalla scia; la vorticità totale deve essere nulla, solo che queste due vorticità sono sfasate nel tempo (per via dello smorzamento aerodinamico), per cui hanno anche tra loro una mutua azione.

Per farla breve, l'avere questo sfasamento ci complica un sacco di cose e rende molto difficile determinare le matrici aerodinamiche.

⁹Questo fa sì che le forze siano *non conservative*, quindi siamo impossibilitati peraltro ad usare qualsiasi approccio energetico per risolvere il problema.

¹⁰Questo tra l'altro ci permette anche di vedere che la rigidezza complessiva si annulla quando $[K] = [K_e]$, e siccome nel caso statico $[K_e]$ era sostanzialmente λ^2 , dipendente dalla pressione dinamica, abbiamo visto che c'è una pressione dinamica per cui la rigidezza si annulla, ovvero si ha divergenza torsionale.

¹¹Per farlo si usano (almeno NASTRAN lo fa) metodi come il vortex lattice (statica) e double lattice (dinamica), che usano delle reti di vortici/doppiette per fare questi calcoli.

4.2.2 Risoluzione equazioni

Quello che abbiamo scritto nell'equazione 4.3 è un problema aeroelastico dinamico; per risolverlo usiamo la seguente metodologia:

- Immaginiamo di trovarci in una condizione di *equilibrio*, per cui le forze aerodinamiche instazionarie non agiscono sul velivolo. In tali condizioni avremo quindi che $\{F_a(t)\} = \{0\}$ e che gli spostamenti dei nodi sono pari ai loro valori di equilibrio $\{x_e\}$; in questa condizione allora abbiamo che le equazioni del moto sono

$$[M]\{\ddot{x}_e\} + [D]\{\dot{x}_e\} + [K]\{x_e\} = \{P(t)\}$$

Se fossero presenti delle forze aerodinamiche anche all'equilibrio basterebbe inglobarle in $\{P(t)\}$; noi per semplicità immaginiamo che non ce ne siano.

- Immaginiamo poi di *perturbare* questo equilibrio con un $\{\Delta x\}$ (e derivate nel tempo), per cui ora gli spostamenti dei nodi saranno pari a $\{x\} = \{x_e\} + \{\Delta x\}$; immaginiamo infine che a seguito di questa perturbazione si generino le forze aerodinamiche instazionarie, per cui scriviamo che

$$[M](\{\ddot{x}_e\} + \{\Delta \ddot{x}\}) + [D](\{\dot{x}_e\} + \{\Delta \dot{x}\}) + [K](\{x_e\} + \{\Delta x\}) = \{P(t)\} + \{F_a(t)\}$$

- Ricordiamo che in equilibrio vale la prima equazione, per cui possiamo semplificare quei termini e scrivere che

$$[M]\{\Delta \ddot{x}\} + [D]\{\Delta \dot{x}\} + [K]\{\Delta x\} = \{F_a(t)\}$$

- Consideriamo a questo punto come abbiano espresso le forze aerodinamiche instazionarie, facendo attenzione al fatto che esse dipendono soltanto dalla perturbazione, dato che in condizioni di equilibrio abbiamo assunto che non ci fossero forze aerodinamiche instazionarie.

$$([M] - [M_a])\{\Delta \ddot{x}\} + ([D] - [D_a])\{\Delta \dot{x}\} + ([K] - [K_a])\{\Delta x\} = \{0\}$$

Per semplicità poniamo $[A_T] = [A] + [A_a]$; in ogni caso, quello che abbiamo appena scritto è un sistema dinamico del secondo ordine *libero* (omogeneo) e smorzato, quindi abbiamo ricondotto il problema aeroelastico dinamico ad un problema di analisi dell'*equilibrio* della configurazione in condizione perturbata.

$$[M_T]\{\Delta \ddot{x}\} + [D_T]\{\Delta \dot{x}\} + [K_T]\{\Delta x\} = \{0\} \quad (4.4)$$

Una simile equazione sappiamo trattarla ormai benissimo; per risolverla anzitutto dobbiamo fare l'*ipotesi di linearità*, ossia dire che per noi il sistema è lineare, e la cosa ha senso perché di fatto stiamo *linearizzando intorno all'equilibrio* e la perturbazione che facciamo è comunque piccola.

Sotto la valenza di questa importante ipotesi possiamo scrivere allora che la soluzione sarà sicuramente di tipo *esponenziale*.

$$\{\Delta x\} = \{\Delta \bar{x}\} e^{pt}$$

In generale $p \in \mathbb{C}$. Sostituendo questa soluzione di tentativo nell'equazione 4.4 e troviamo quindi che

$$(p^2[M_T] + p[D_T] + [K_T])\{\Delta \bar{x}\} = \{0\}$$

Questo è un sistema lineare omogeneo, che ha soluzione non banale soltanto se è sottodeterminato, ossia se non ha rango massimo; per imporre questa condizione (non vogliamo mica la soluzione banale al quinto anno di ingegneria, vero?) dobbiamo imporre che sia nullo il determinante della matrice dei coefficienti.

$$\det(p^2[M_T] + p[D_T] + [K_T]) = 0$$

Risolvendo in p l'equazione che consegue a questa impostazione, troveremo tanti valori di p quanti sono i DOF del sistema; questi p sono proprio gli *autovalori* del sistema. In generale si ha, essendo questi dei numeri complessi, che

$$p_i = \gamma_i + j\omega_i$$

Per cui la generica componente i -esima della soluzione (somma di tutte queste componenti i -esime, nell'ipotesi di linearità) è

$$\{\Delta x_i\} = \{\Delta \bar{x}_i\} e^{\gamma_i t} e^{j\omega_i t}$$

Dove l'ampiezza i -esima si determina sostituendo l'autovalore i -esimo nel sistema sottodeterminato e risolvendolo in $\{\Delta x\}$, di fatto calcolando l' i -esimo *autovettore*.

Una soluzione siffatta comunque ci dice che abbiamo un contributo di *ampiezza* (che varia nel tempo) e un contributo *oscillatorio*. Il primo è tenuto in conto dal parametro di *smorzamento* $\gamma_i = \operatorname{Re}(p_i)$, il secondo dal parametro di *frequenza* $\omega_i = \operatorname{Im}(p_i)$, essendo l'esponenziale complesso di fatto un coseno.

Abbiamo effettivamente risolto il problema, che poi era un banalissimo (mica tanto) problema agli autovalori, computando la risposta alla perturbazione nella forma di un'ampiezza che varia nel tempo controllata dallo smorzamento e dagli autovettori e da un'oscillazione controllata invece dalla frequenza. Smorzamento e frequenza sono le componenti complesse degli autovalori.

Tra l'altro, aver scritto le forze aerodinamiche in funzione del tempo fa sì che questo si chiami "metodo p"; se avessimo lavorato con le frequenze si sarebbe chiamato "metodo k".

4.2.3 Stabilità e flutter

Ci chiediamo ora quando la soluzione che abbiamo trovato sia *stabile*¹². Anzitutto cosa intendiamo per stabilità? Stabilità vuol dire che la soluzione globale

$$\{x\} = \{x_e\} + \{\Delta x\}$$

Tende di nuovo al valore di equilibrio dopo la perturbazione, ossia vuol dire che $\{\Delta x\}$ tende nel tempo ad *annullarsi*. Per far avvenire una simile cosa non può che essere

$$\gamma_i \leq 0$$

Questo perché l'ampiezza dell'oscillazione è controllata da γ_i e dagli autovettori, ma gli autovettori non dipendono dal tempo; se γ_i è negativa abbiamo di fatto un esponenziale che diminuisce nel tempo, annullandosi all'infinito, il che ci va bene.

Ancor più interessante è vedere cosa succede nella condizione *limite* per la stabilità, chiamata condizione di *flutter*, per la quale le oscillazioni si autosostengono, ossia non si annullano ma non crescono nemmeno, quindi non c'è né stabilità, né instabilità. Questa condizione è rappresentata da

$$\gamma_i = 0$$

In questo modo abbiamo che la risposta ha ampiezza costante (data dagli autovettori) e oscilla con frequenza ω_i .

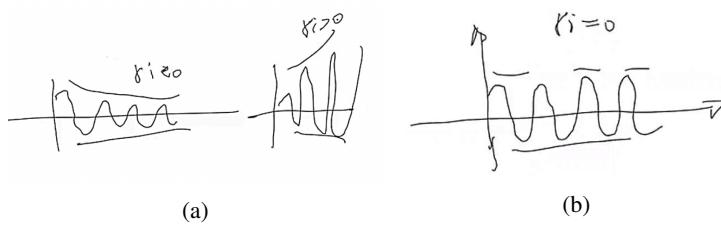


Figura 4.4

Ora però consideriamo una cosa molto importante che non abbiamo ancora esplicitato:

"Gli autovalori e gli autovettori dipendono dalla velocità del velivolo".

Infatti sappiamo bene che gli autovettori dipendono dagli autovalori e dalle matrici di massa, rigidezza e smorzamento, e che gli autovalori a loro volta dipendono anch'essi dalle suddette matrici; le nostre matrici di massa, smorzamento e rigidezza del sistema dinamico che abbiamo risolto sono formate da un contributo "*strutturale*" (che è sempre quello una volta fatta l'ala col suo materiale) e un contributo "*aerodinamico*", che dipende invece dall'aerodinamica instazionaria, quindi dalla pressione dinamica, i.e. dalla velocità del flusso U_∞ , una volta fissata la geometria e l'aerodinamica dell'ala. Questo comporta quindi che gli autovalori $p_i = \gamma_i + j\omega_i$ varino al variare di U_∞ .

È dunque molto importante capire *come* questi autovalori varino con la U_∞ , dal momento che potrebbe verificarsi che ci sia una certa velocità oltre la quale si ha instabilità $\gamma_i > 0$.

¹²Capiamo che il problema che stiamo risolvendo non è un problema di risposta (come risponde la struttura ad una sollecitazione), bensì un problema di *equilibrio*, ossia come il sistema evolve quando si perturba l'equilibrio in un suo intorno.

Per studiare questo effetto iniziamo considerando il velivolo fermo, quindi di fatto le forze aerodinamiche sono nulle; in tali condizioni se calcoliamo gli autovalori del sistema abbiamo di fatto le frequenze e gli smorzamenti *naturali* del sistema libero, perché il sistema avrebbe come matrici solo quelle strutturali.

Immaginiamo allora di fare un diagramma¹³ $\gamma_i, \omega_i - U_\infty$ e di posizionare per esempio su di esso i primi due¹⁴ autovalori. Per $U_\infty = 0$ avremo ω_1 e ω_2 ad una certa quota (sono le prime due frequenze proprie dell'ala, tipicamente prima flessionale e prima torsionale), mentre, se facciamo l'ipotesi che lo smorzamento strutturale sia trascurabile rispetto a quello aerodinamico possiamo dire che $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ¹⁵ per $U_\infty = 0$.

A questo punto immaginiamo di aumentare la velocità U_∞ e quindi di introdurre nel sistema anche l'aerodinamica instazionaria; ora le matrici comprendono sia quelle strutturali che quelle aerodinamiche. Se calcoliamo di nuovo gli autovalori di questo, a tutti gli effetti, nuovo sistema dinamico possiamo notare come le frequenze naturali si siano tra di loro *avvicinate*, e come gli smorzamenti tendano ad essere *negativi*, ma *aumentano* con U_∞ .

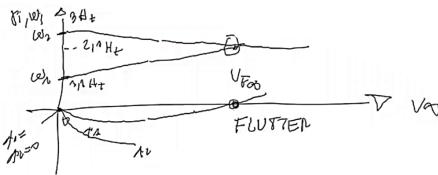


Figura 4.5

Finché $\gamma_1, \gamma_2 < 0$ l'ala è stabile, perché qualsiasi perturbazione (non troppo elevata, rimaniamo nella linearizzazione) viene smorzata nel tempo e il sistema ritorna quindi in equilibrio.

Quando però $\gamma_1 = 0$ o $\gamma_2 = 0$ abbiamo la condizione di *flutter*, per cui le oscillazioni non sono più smorzate (ma nemmeno amplificate) e quando questi valori diventano positivi le oscillazioni sono addirittura amplificate. Un piccolo incremento di velocità quindi porta le oscillazioni ad amplificarsi, finché non si rompe l'ala. Dopo il flutter si vede che i valori di γ_1, γ_2 si biforciano.

Si vede tra l'altro che quando $\gamma_i = 0$ (basta una), le frequenze naturali tendono a *coincidere*, di fatto determinando una sorta di *dipendenza reciproca* tra flessione e torsione. Questo significa che se prima avevamo delle frequenze ben distinte alle quali l'ala si fletteva o si torceva, ora succede che l'ala si torce e si flette con la stessa frequenza.

In ogni caso, ciò che conta ai fini della stabilità è il valore di γ_i , che deve essere negativo; l'indagine sulle frequenze si può fare ma non è "rigorosa", in quanto si vede che per aerei leggeri o civili bene o male esse tendono a coincidere (non proprio), ma comunque non lo fanno neanche precisamente alla velocità di flutter.

Poiché non vogliamo che ci sia flutter, né tanto meno instabilità dell'ala, dobbiamo imporre che sia sempre $\gamma_i < 0$, e per farlo dobbiamo imporre di conseguenza che

$$U_\infty < U_{\infty, fl}$$

Dal momento che abbiamo correlato gli autovalori alla velocità del velivolo. Di questo dobbiamo tenerne conto chiaramente nel progetto, ma dobbiamo tenere conto anche in generale del fatto che le frequenze variano con la velocità, e quindi che i vari componenti dell'ala sono sollecitati a frequenze diverse al variare della velocità. Lo smorzamento agisce poi, ad esempio, sulla risposta ai comandi di volo, quindi in sostanza è fondamentale sapere come variano ω e γ con la velocità del velivolo per il progetto.

Un parametro molto significativo per esempio è il $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, che ci dice in maniera piuttosto veloce quanto bene è fatto il progetto a flutter; se infatti questo valore è elevato vuol dire che ragionevolmente prima che le frequenze coincidano ce ne vuole, mentre se è molto piccolo vuol dire che il flutter avverrà a breve.

Divergenza e flutter

Possiamo a questo punto vedere la divergenza (stabilità *statica*) come un *caso particolare* della stabilità *dinamica*. Se infatti prendiamo il diagramma $\gamma, \omega - U$ e indaghiamo il comportamento della ω_2 (divergenza è fenomeno torsionale), possiamo riconoscere la divergenza come la velocità per la quale $\omega_2 = 0$, in quanto in tal caso si ha che la matrice di

¹³È un diagramma molto facile da ottenere perché basta fare delle prove di volo in cui si misurano le frequenze e gli spostamenti, e non prescrive alcuna rottura dell'ala.

¹⁴Si mettono questi perché sono i più importanti, essendo relativi alla prima frequenza flessionale e torsionale dell'ala.

¹⁵Se volessimo considerare lo smorzamento strutturale avremmo sicuramente che questo porta a $\gamma_i < 0$, in quanto la struttura tende sempre e comunque a smorzare le oscillazioni per effetti dissipativi interni.

rigidezza totale è nulla ($[K_T] = [K] - [K_a] = [0]$). Possiamo infine tracciare l'andamento di γ_i per vedere anche la velocità di flutter.

Se l'ala è fatta male può capitare che la velocità di divergenza sopraggiunga prima di quella di flutter; questo sarebbe un bel problema, dato che la divergenza significa instabilità statica, e siccome il flutter (instabilità dinamica) l'abbiamo valutato perturbando l'equilibrio statico, se c'è divergenza non c'è equilibrio statico, e se non c'è equilibrio statico non può essercene neanche di dinamico, dato che non ci sarebbe nessun equilibrio effettivo da perturbare. Da questo capiamo che deve essere

$$U < U_{fl} < U_{div}$$

Riassunto

- Abbiamo scritto le equazioni del moto in forma FEM come un sistema dinamico del secondo ordine forzato.
- Abbiamo ipotizzato che la forzante fosse la somma di forze aerodinamiche e altre forze.
- Abbiamo visto che, essendo queste forze dipendenti dalla configurazione nel tempo, le possiamo scrivere come la somma di queste per le rispettive matrici di massa, smorzamento e rigidezza aerodinamiche.
- Abbiamo ottenuto quindi un problema aeroelastico dinamico (sistema forzato, ora le matrici sono dipendenti anche dall'aerodinamica, quindi dalla velocità del velivolo).
- Abbiamo poi usato un approccio di linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio e perturbato questo equilibrio, giungendo ad un sistema dinamico del secondo ordine libero, dato che il contributo delle altre forze si elide con l'equazione in condizioni di equilibrio (dove non ci sono le forze aerodinamiche) e risolvendolo calcolando autovalori e autovettori.
- Abbiamo analizzato la stabilità della soluzione imponendo che lo smorzamento γ_i negli autovalori sia minore di zero, trovando la condizione limite (flutter) di $\gamma_i = 0$, per cui le oscillazioni (frequenza ω_i negli autovalori) si autosostengono all'infinito.
- Abbiamo diagrammato le componenti complesse degli autovalori (per semplicità le prime due) in funzione della velocità del velivolo U_∞ , dal momento che gli autovalori dipendono dalle matrici strutturali (sempre quelle) e da quelle aerodinamiche (variano col flusso), notando come vi sia una velocità limite (di flutter) prima della quale l'ala è stabile, e oltre la quale invece diventa instabile. Abbiamo quindi imposto che $U_\infty < U_{\infty, fl}$.

4.2.4 Ala a freccia e/o in composito con FEM

Abbiamo visto come sia possibile, grazie all'utilizzo del FEM, trovare soluzioni (numeriche) in caso di accoppiamento geometrico e/o meccanico, in aggiunta a quello aeroelastico sull'ala. Una tale soluzione non è trovabile in forma analitica (non lo è neanche nel caso solo aeroelastico se consideriamo il problema dinamico), quindi abbiamo subito introdotto il FEM.

Consideriamo ora due casi di ala in composito, dritta e a freccia, e vediamo come l'orientazione delle fibre e l'eventuale angolo di freccia possono modificare il comportamento aeroelastico dell'ala.

Ala dritta in composito

Consideriamo un'ala dritta in materiale composito. Con il FEM possiamo suddividere tale ala in tante piastre multi-strato in materiale composito e farne un modello che simuliamo con un codice commerciale agli elementi finiti.

Il fatto che l'ala sia in composito e non in lega leggera fa sì che vi sia un *accoppiamento* tra torsione e flessione, dovuto appunto alla presenza di materiale composito, che tende a *contrastare* l'accoppiamento dovuto all'aeroelasticità (se fatto bene¹⁶); in questo modo si riduce o si annulla la variazione di incidenza dovuta all'accoppiamento aeroelastico.

Se prendiamo ad esempio tre diversi laminati simmetrici (tabella 4.1), possiamo notare come si riesca ad incrementare notevolmente la velocità di flutter, quasi raddoppiandola; questo è un risultato straordinario, che ci permette di giocare su queste proprietà, altrimenti difficilissime da variare, in maniera piuttosto considerevole.

¹⁶Tailoring aeroelastico.

Laminato	$U_{fl} \left[\frac{m}{s} \right]$
$(0_2/90_2)_5$	22.2
$(\pm 45_2/0_2)_5$	39.1
$(\pm 45_2/90_2)_5$	27.8

Tabella 4.1

Ala a freccia in composito

Consideriamo ora di dotare l'ala di un certo angolo di freccia. La freccia positiva (presente sulla maggior parte dei velivoli) causa un accoppiamento geometrico concorde a quello aeroelastico, quindi lo aiuta. Combinando l'accoppiamento geometrico con quello meccanico dato dal materiale composito si può allora contrastare questo doppio effetto, migliorando il comportamento aeroelastico dell'ala di fatto.

Possiamo rappresentare la velocità di divergenza torsionale dell'ala in funzione della freccia, al variare dell'orientazione delle fibre, e viceversa in funzione dell'orientazione, al variare della freccia (dipende cosa devo fissare e cosa posso far variare).

In questo modo possiamo variare il parametro libero, fissando l'altro, e vedere cosa di fatto dobbiamo fare per ottenere una velocità di divergenza che ci soddisfa.

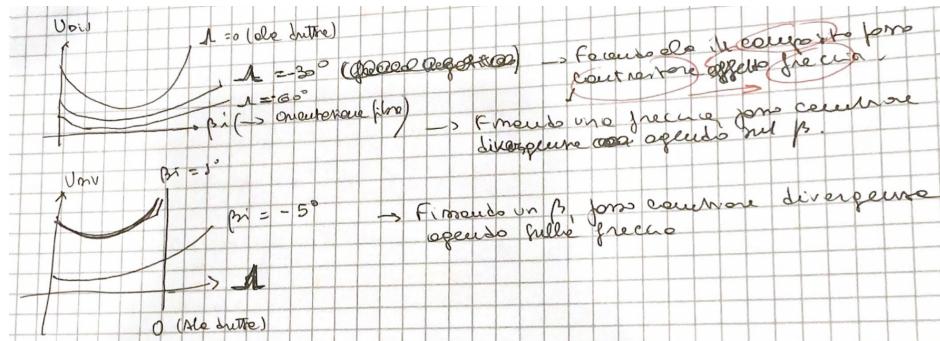


Figura 4.6

4.2.5 Calcolo delle matrici aerodinamiche

Vediamo ora brevemente come si possono calcolare le matrici aerodinamiche, così che possa essere univocamente definito il problema di equilibrio per la stabilità (flutter) precedentemente definito.

Chiaramente il loro calcolo dipenderà dal *modello aerodinamico* che si sceglie di usare; possiamo ad esempio usare la *teoria di striscia*, stazionaria o instazionaria, che vede la portanza L scritta in funzione dell'incidenza, a sua volta formata da un contributo stazionario ed, eventualmente, uno instazionario, dovuto al fatto che può esserci qualcosa che la fa variare, come ad esempio una velocità verticale (che si compone con quella di volo orizzontale e determina una variazione di incidenza).

Flutter di pannelli

Si tratta di un fenomeno che si verifica tipicamente in campo *supersonico*, ed è sostanzialmente un caso in cui il flutter lo si ha non sull'ala intera, bensì su un singolo pannello della struttura (*flutter locale*).

Questo fenomeno locale porta il pannello potenzialmente ad essere instabile (se si supera la velocità di flutter locale) e, siccome i rivetti sono dimensionati per quando questo non avviene, può succedere che essi si rompano e quindi che il pannello si stacchi e voli via.

Elemento piastra

Fondamentalmente, per calcolare queste famigerate matrici aerodinamiche, è necessario andare a studiare l'elemento che usiamo nel modello FEM, ossia l'elemento piastra.

Nel corso di Strutture Aeronautiche avevamo visto che la piastra, modellata secondo la teoria di *Reissner - Mindlin*¹⁷, presentava la seguente legge di spostamenti¹⁸:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\Phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) + z\Phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases}$$

Attraverso la definizione delle *funzioni di forma* e conoscendo gli spostamenti generalizzati nei 4 nodi avevamo potuto scrivere il generico spostamento generalizzato a nel piano xy come

$$a = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) A_i = [N]\{A\}$$

Per trovare la matrice di rigidezza¹⁹ di questa piastra avevamo usato il **PLV**, scrivendo che

$$\delta L_e = \delta L_i \rightarrow \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta x\}^T [K] \{x\}$$

L'eventuale calcolo tenendo conto della dinamica comprendeva anche un contributo $\{\delta x\}^T [M] \{\ddot{x}\}$.

Quello che faremo noi dunque sarà usare il medesimo PLV, considerando le forze aerodinamiche secondo il modello della teoria di striscia (o della piston theory se parliamo di panel flutter), per arrivare a calcolare queste matrici grazie alla comparsa dei contributi $\{\delta x\}^T [M] \{\ddot{x}\}$, $\{\delta x\}^T [D] \{\dot{x}\}$, $\{\delta x\}^T [K] \{x\}$ nel PLV.

Applicazione PLV

Siamo interessati a scrivere il lavoro esterno (uguale a quello interno) in modo da far comparire il prodotto $\{\delta x\}^T [K] \{x\}$ (idem con matrice di smorzamento, quella di massa la possiamo trascurare tipicamente). Per farlo dobbiamo considerare che questo lavoro esterno è il lavoro delle forze esterne, i.e la pressione aerodinamica, che agisce in direzione z , quindi l'unico spostamento che produce lavoro con tale forza è il δw .

$$\delta L_e = \int_{\Omega} \delta w p d\Omega$$

Ora rimane da capire come esprimere la pressione aerodinamica; se usiamo una teoria di striscia stazionaria si dimostra che²⁰

$$p = 2\rho_{\infty} V_{\infty}^2 \sqrt{\frac{c-x}{x}} \alpha$$

Dove α è l'incidenza, ma in questo caso è anche la rotazione intorno ad uno dei due assi, per esempio quello x (a seconda di come definiamo il sistema di riferimento), quindi $\alpha = \Phi_x$. Otterremo pertanto che

$$\delta L_e = 2\rho_{\infty} V_{\infty}^2 \sqrt{\frac{c-x}{x}} \Phi_x \delta w d\Omega$$

Poiché possiamo esprimere Φ_x e w con le funzioni di forma, possiamo scrivere che

$$\Phi_x = N_i F_{x_i}, \quad w = N_j W_i$$

Se ora consideriamo che δL_e deve essere pari a un prodotto vettore-matrice-vettore, possiamo scrivere che per ogni nodo deve essere

$$\delta L_{e_i} = \begin{Bmatrix} \delta U_i \\ \delta V_i \\ \delta W_i \\ \delta F_{x_i} \\ \delta F_{y_i} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ F_{x_i} \\ F_{y_i} \end{Bmatrix}$$

¹⁷Usiamo questa perché la teoria di Kirchhoff va bene solo per le piastre sottili, mentre questa va bene anche per le più spesse o le più deformabili a taglio.

¹⁸Ipotesi che la sezione rimane piana quando si deforma la piastra.

¹⁹Composta da 4 matrici che esprimevano ciascuna la combinazione DOF-nodi; nel caso 4 nodi con piastra R-M (5 DOF a nodo) si ha una matrice di rigidezza di dimensione 20 x 20.

²⁰Nella teoria di striscia la pressione aerodinamica, agente lungo z , è costante in y e varia solo lungo x .

Dove

$$K = \int_{\Omega} 2\rho_{\infty} V_{\infty}^2 \sqrt{\frac{c-x}{x}} N_i N_j d\Omega$$

La matrice che compare in δL_e è proprio la matrice di rigidezza aerodinamica. La sua particolarità, rispetto a quella strutturale, è che *non è simmetrica*, essendo relativa ad un problema non conservativo (gli spostamenti si adattano alle forze applicate). Di questo bisogna tenerne conto all'interno del codice FEM.

$$[K_{a_{ij}}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow K = \int_{\Omega} 2\rho_{\infty} V_{\infty}^2 \sqrt{\frac{c-x}{x}} N_i N_j d\Omega \quad (4.5)$$

Le funzioni di forma sono le stesse del calcolo strutturale di $[K]$, quindi le abbiamo già.

Caso instazionario (calcolo smorzamento aerodinamico)

Quello che sostanzialmente varia rispetto al caso stazionario è che qua l'incidenza aerodinamica ha un ulteriore contributo dovuto al fatto che la w è anche variabile nel tempo ora, per cui si ha che

$$\alpha = \alpha_s - \frac{\dot{w}}{V_{\infty}}$$

Dove $\alpha_s = \Phi_x$ e il segno è negativo solo perché consideriamo che l'incidenza diminuisca (analogo se aumenta). A questo punto possiamo riapplicare la teoria di striscia per scrivere

$$p = 2\rho_{\infty} V_{\infty}^2 \sqrt{\frac{c-x}{x}} \left(\Phi_x - \frac{\dot{w}}{V} \right)$$

Il primo termine è quello che, nel PLV, produce la matrice di rigidezza aerodinamica, mentre il secondo è quello che produrrà la matrice di smorzamento aerodinamico.

Applicando il PLV in maniera analoga a quanto fatto nel caso stazionario possiamo trovare un'espressione del tipo

$$\delta L_{e_i} = \left\{ \begin{array}{l} \delta U_i \\ \delta V_i \\ \delta W_i \\ \delta F_{x_i} \\ \delta F_{y_i} \end{array} \right\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_i \\ \dot{V}_i \\ \dot{W}_i \\ \dot{F}_{x_i} \\ \dot{F}_{y_i} \end{array} \right\}$$

Dove

$$D = - \int_{\Omega} 2\rho_{\infty} V_{\infty} \sqrt{\frac{c-x}{x}} N_i N_j d\Omega$$

Per cui

$$[D_{a_{ij}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow D = - \int_{\Omega} 2\rho_{\infty} V_{\infty} \sqrt{\frac{c-x}{x}} N_i N_j d\Omega \quad (4.6)$$

Ora la matrice vediamo invece essere *simmetrica*.

NOTA: Le matrici che abbiamo scritto non sono le matrici complete, bensì solo uno dei 4 blocchi (5 x 5) che si hanno.

$$[K, D_a] = \begin{bmatrix} K, D_{11} & K, D_{14} \\ K, D_{14} & K, D_{44} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Chiaramente sostituendo ij con 11, 14, 41, 44 si ottengono i 4 blocchi con cui comporre la matrice intera

Caso panel flutter

Come anticipato in precedenza, è un caso che si verifica in campo principalmente supersonico, e ovviamente instazionario. Per questo particolare problema non si usa più la teoria di striscia ma la cosiddetta "piston theory", chiamata così perché calcola la pressione (il Δ , in questo caso rispetto all'ambiente) in analogia a quella che si ha nel caso in cui un gas spinga un pistone (relazioni di Rankine-Hugoniot).

$$p^{PT} = \frac{2\lambda_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[w_x + \frac{1}{V_\infty} \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \dot{w} \right]$$

Dove λ_∞ è un parametro aeroelastico. In pratica abbiamo scritto questa pressione come $p^{PT} = aw_x + bw$, a differenza di prima, dove era $p = a'\Phi_x + b'\dot{w}$. Applicando sempre il PLV possiamo calcolare le matrici di rigidezza e smorzamento aerodinamiche (i loro blocchi singoli).

$$K^{PT} = \int_{\Omega} a N_i N_j d\Omega, \quad D^{PT} = - \int_{\Omega} b N_i N_j d\Omega \quad (4.8)$$

Entrambe le matrici sono ora simmetriche, in quanto la p è funzione di w_x e \dot{w} , e il lavoro esterno è prodotto solo sullo spostamento δw , quindi anche la matrice di rigidezza è simmetrica.

Andamento delle frequenze con la velocità nel panel flutter

Immaginiamo di aver trovato le matrici di rigidezza e smorzamento aerodinamiche (quella di massa si trascura), per cui siamo in grado di risolvere il problema agli autovalori per trovare frequenze ω e smorzamenti γ . Facciamo quindi un grafico di queste in funzione del M_∞ (supersonico è sicuramente compressibile).

Quello che si vede, rappresentando tale andamento, è che anche qui alla velocità di flutter si ha biforcazione degli smorzamenti (si può immaginare lo smorzamento strutturale nullo) e mescolamento delle frequenze (tra l'altro i modi dei pannelli non sono i classici modi sull'ala ma si hanno cose diverse, per cui si esprime il tutto con il numero di semionde lungo x e y , come fatto per la soluzione di Navier nella piastra compressa).

In particolare, questo accade almeno per le prime 4 frequenze, dove le prime due e le altre due si mescolano producendo un unico modo combinato e lo smorzamento si biforca prima in γ_1 e γ_2 e poi in γ_3 e γ_4 .

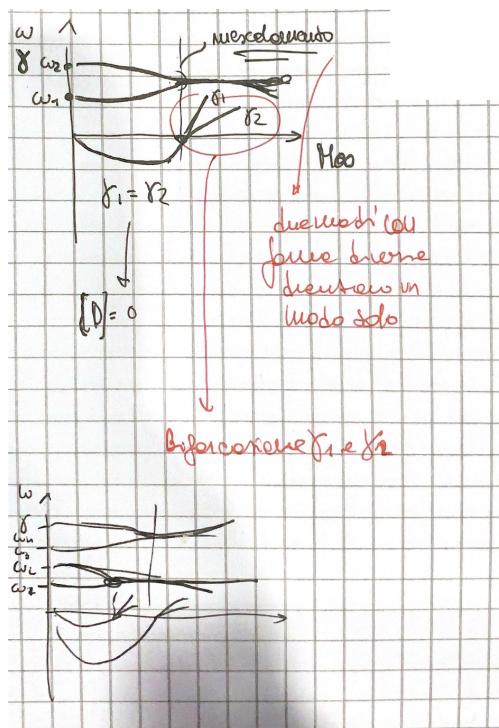


Figura 4.7

Capitolo 5

Stabilità di cilindri compressi

In questo capitolo ci occupiamo di studiare la stabilità dei cilindri soggetti a compressione, problema che riguarda prevalentemente il campo aerospaziale, precisamente quello spaziale (razzi soggetti ad una spinta verso l'alto), dal momento che è necessario far sì che il componente non solo sia sotto la tensione di snervamento, bensì che sia anche sotto la *tensione critica di instabilità*.

Nel dettaglio, andremo a studiare il fenomeno di instabilità noto anche come "*snap buckling*", tipico dei cilindri compressi (e di tutti gli elementi sottili dotati di curvatura in realtà), aventi campo *postcritico instabile* (sensibili alle imperfezioni).

5.1 Introduzione

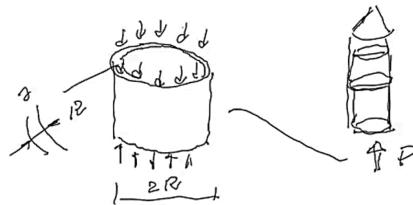


Figura 5.1

Immaginiamo di avere un cilindro di raggio medio R e spessore s soggetto da un carico P normale di compressione; la tensione che si sviluppa su di esso sarà

$$\sigma \simeq \frac{P}{2\pi R s}$$

Una prima e banale idea per modellare ad instabilità questo problema può essere quella di considerare il cilindro come un'**asta compressa**, la cui stabilità è stata studiata da Eulero in campo non lineare.

È infatti verificato che, al contrario di un'asta trazionata (sempre stabile), l'equilibrio a cui è soggetta l'asta compressa può potenzialmente diventare *instabile*; infatti, la stabilità dell'equilibrio è garantita fintanto che una sua perturbazione genera nel componente una reazione (elastica) tale per cui si ritorni in una configurazione di equilibrio. Si dimostra quindi come esista una tensione al di sopra della quale ciò non avviene, e tale tensione dipende dalla rigidità flessionale EI dell'asta e dall'inverso del quadrato della sua lunghezza.

$$\sigma_{cr} \propto \frac{EI}{L^2}$$

Questa instabilità è peraltro **globale**, giacché coinvolge una proprietà globale dell'asta, quale la sua lunghezza. Per un'asta compressa dovremo quindi impostare due condizioni sulla tensione:

$$\begin{cases} \sigma \leq R_{p_{02}} \\ \sigma \leq \sigma_{cr} \end{cases}$$

Se quindi consideriamo il nostro cilindro compresso come un'asta compressa ci aspetteremmo che per

$$P = P_{cr} = \sigma_{cr} 2\pi R s$$

Si abbia instabilità; tuttavia, ciò che si riscontra è che per $P = \frac{1}{5}P_{cr}$ il cilindro va già in instabilità.

Tra l'altro, l'instabilità del cilindro si vede essere una cosiddetta instabilità *a scatto*, caratterizzata da un accorciamento della lunghezza e da una geometria non più liscia, bensì diamantata (o a scacchiera); le deformazioni in gioco sono *elastiche*.



Figura 5.2

Un simile fenomeno è quindi *locale*, rendendo di fatto l'instabilità non più globale ma, per l'appunto, locale.

Abbiamo notato quindi come sussistano delle sostanziali differenze tra il comportamento previsto dall'instabilità delle aste compresse e quello osservato nei cilindri compressi, pertanto vediamo di indagare anzitutto cosa succede nelle aste e nei cilindri, sia in campo linearizzato che in campo non lineare, per poi presentare due semplici modelli 1 DOF per studiare la stabilità.

5.2 Aste e cilindri in campo non lineare

5.2.1 Aste

L'instabilità di aste compresse fu studiata, come precedentemente accennato, da Eulero, che risolse il problema in campo non lineare.

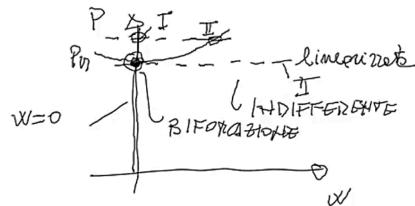


Figura 5.3

Ciò che si può riscontrare in un diagramma $P - w$ è che per $P \leq P_{cr}$ si ha un'unica soluzione (stabile) tale che $w = 0$ ¹, invece per $P > P_{cr}$ si ha sempre una soluzione con $w = 0$ (instabile), ma si ha anche una seconda soluzione che, a seconda se si utilizza una teoria linearizzata o meno cambia:

- Se si utilizza una teoria *linearizzata* si vede che la seconda soluzione di equilibrio è tale che qualsiasi valore di w va bene (equilibrio *indifferente*). Essa non è consistente comunque con la realtà fisica.
- Se si utilizza una teoria *non lineare* si vede invece come il postcritico sia caratterizzato da un *aumento di P con w*², per cui l'equilibrio non è più indifferente.

Si dice, impropriamente, che l'equilibrio è stabile, nel senso che per aumentare w bisogna aumentare P , ma dal punto di vista della stabilità non si tratta di un equilibrio stabile.

¹Questo indifferentemente dalla teoria usata.

²Gran parte dei pannelli di impiego aerospaziale sono per questo fatti lavorare in campo postcritico.

Peraltro, il fatto che per $P > P_{cr}$ esistano due configurazioni di equilibrio (w) per lo stesso P fa sì che si possa "saltare" da un ramo all'altro; questo ci può preoccupare dal momento che se w diventa abbastanza grande si ottengono conseguenti elevate deformazioni e quindi tensioni, portando potenzialmente a rottura non prevista altrimenti.

5.2.2 Cilindri

Per i cilindri succede invece che per $\sigma \leq \sigma_{cr}$ si ha un andamento lineare di σ con w , mentre per $\sigma > \sigma_{cr}$ si ha una *biforcazione*, che in campo linearizzato ha una delle due soluzioni di equilibrio indifferente, mentre in campo non lineare è caratterizzata da un secondo modo piuttosto arcuato, con un tratto discendente per w che aumenta. Questo rende il *postcritico instabile* in ogni senso, giacché il carico diminuisce con w che aumenta.

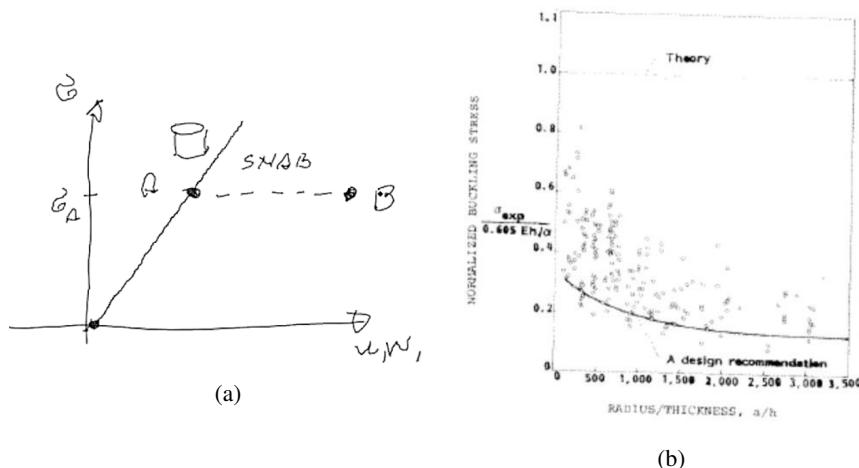


Figura 5.4

Dal punto di vista matematico, si dimostra che la tensione critica nel cilindro compresso vale

$$\sigma_{cr} = 0.6 \frac{Es}{R}$$

Tuttavia, sperimentalmente si è visto come il campo postcritico inizi per $\sigma_{snap} = \frac{1}{5}\sigma_{cr}$. Questo è dovuto al fatto che il cilindro reale è comunque dotato di *imperfezioni*, le quali modificano leggermente il diagramma $\sigma - w$, rendendo la biforcazione³ un punto di massimo che si abbassa man mano che aumenta l'imperfezione (considerata come un w_0 iniziale maggiore di 0) fino ad arrivare tipicamente a un quinto della biforcazione (carico critico) del cilindro "ideale". Si vede quindi che

$$\sigma_{snap} = 0.12 \frac{Es}{R}$$

L'instabilità si chiama a scatto perché per $\sigma > \sigma_{snap}$ si passa da una configurazione a $w = w_1$ ad una con $w = w_2$ istantaneamente (di scatto).

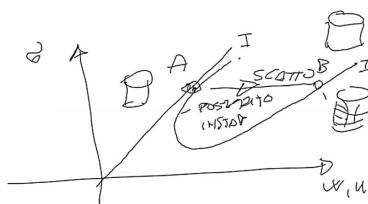


Figura 5.5

C'è comunque da dire che in campo aeronautico si fa largo uso di componenti che lavorano in *postcritico*; ovviamente il carico accettato non supera circa il 40% di quello critico ($P = 1.4P_{cr}$), ma comunque vi è una certa

³Di fatto la biforcazione sparisce, in quanto frutto di una idealizzazione. È comunque utile per studiare le strutture imperfette.

deformazione *elastica*. Questi componenti non sono comunque i cilindri, ma più che altro i pannelli; questo perché il fattore di carico minimo è in quel caso ridotto di $\frac{1}{5}$, passando da 0.6 a 0.12.

5.3 Modelli semplici (1 DOF)

Vediamo ora di presentare due diversi modelli 1 DOF per studiare l'instabilità; uno sarà più rappresentativo del comportamento di un'asta, invece l'altro di un cilindro, sebbene non sia comunque troppo valido per esso.

Vogliamo studiare, mediante essi, l'*equilibrio* nonché la sua *stabilità*.

5.3.1 Modello I

Consideriamo un modello costituito da un'asta di lunghezza l alle cui estremità vi sono due guide lineari (carrelli), in cui su una delle due cerniere è applicato un carico orizzontale P e sull'altra una molla torsionale k_T . Chiamiamo α l'angolo tra la configurazione a riposo ($P = 0$) e quella con $P \neq 0$.

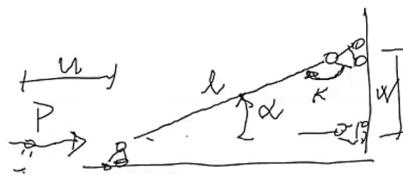


Figura 5.6: $u = l[1 - \cos(\alpha)]$, $w = l \sin(\alpha)$.

Per studiare l'equilibrio scriviamo che la derivata dell'energia meccanica rispetto all'unico grado di libertà è costante.

$$\Pi = Pu - \frac{1}{2}k_T\alpha^2 \rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha} = Pl \sin(\alpha) - k_T\alpha = 0$$

Si ottiene quindi

$$Pl \sin(\alpha) = k_T\alpha \rightarrow \frac{Pl}{k_T} = \frac{\alpha}{\sin(\alpha)}$$

Essa rappresenta le configurazioni di equilibrio al variare di α ed è analoga all'equazione ricavata da Eulero per la stabilità di aste compresse. Una prima soluzione di questa equazione (α tale che si abbia uguaglianza dei due membri) è sicuramente $\alpha = 0$, mentre una seconda soluzione è quella già scritta, ossia

$$\frac{Pl}{k_T} = \frac{\alpha}{\sin(\alpha)}$$

Se immaginiamo che sia α piccolo, possiamo confondere il seno con l'angolo, quindi scrivere che

$$\frac{Pl}{k_T} = 1$$

Altrimenti si avrebbe un andamento crescente (angolo cresce più velocemente del suo seno).

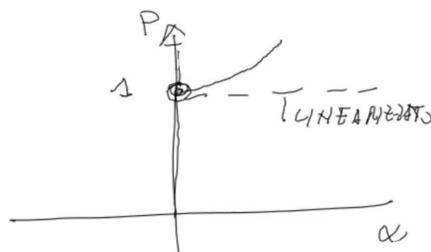


Figura 5.7

Per $\frac{Pl}{k_T} < 1$ l'unica soluzione possibile è $\alpha = 0$, perché se $\frac{Pl}{k_T} < 1$ non c'è altro modo per soddisfare l'uguaglianza scritta poco sopra; per $\frac{Pl}{k_T} > 1$ invece possiamo sempre scrivere $\alpha = 0$, ma vale anche $\frac{Pl}{k_T} = \frac{\alpha}{\sin(\alpha)}$ oppure $\frac{Pl}{k_T} = 1$ se usiamo la teoria linearizzata. La biforcazione è proprio per $\frac{Pl}{k_T} = 1$, come già visto.

5.3.2 Modello II

Consideriamo ora un modello analogo al primo, ma con una molla estensionale anziché torsionale al carrello a cui non è applicato il carico P .

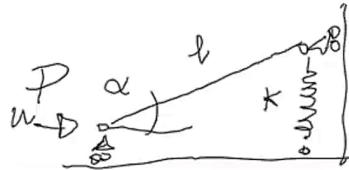


Figura 5.8: $u = l(1 - \cos(\alpha))$, $w = l \sin(\alpha)$.

La scrittura delle equazioni in maniera analoga a sopra porta a dire che

$$\Pi = Pu - \frac{1}{2}kw^2 = Pl[1 - \cos(\alpha)] - \frac{1}{2}kl^2 \sin^2(\alpha)$$

Da cui

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = Pl \sin(\alpha) - kl^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0 \rightarrow P \sin(\alpha) = kl \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

Questa relazione ha una prima soluzione banale e sempre valida tale $\sin(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = 0$, come prima; ha poi una seconda soluzione, tale

$$\frac{P}{kl} = \cos(\alpha)$$

Che vale chiaramente quando $\frac{P}{kl} \leq 1$; se confondiamo $\cos(\alpha) \simeq 1$ abbiamo allora che la suddetta soluzione diventa $\frac{P}{kl} = 1$.

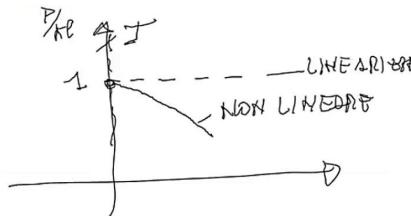


Figura 5.9

Vediamo quindi che il *postcritico* qua è *instabile*, a differenza di prima, e questo rende tale modello più rappresentativo dello snap buckling in un certo senso, sebbene il comportamento sia diverso rispetto a quello visto nel cilindro compresso (quantomeno è un postcritico instabile questo).

5.3.3 Considerazioni sui due modelli

Possiamo vedere anzitutto come il primo modello abbia un postcritico "stabile", mentre il secondo lo ha instabile; inoltre, possiamo vedere come per $P < P_{cr}$ entrambi i modelli linearizzati prevedono, in maniera esatta, l'equilibrio e la stabilità. È purtroppo *dopo* il carico critico che la teoria linearizzata inizia a cadere (man mano che aumenta α), in quanto il post critico non è rappresentato adeguatamente; questo è più evidente nel secondo modello rispetto al primo, e lo è ancora di più se si prende la stabilità del cilindro.

Per studiare la stabilità delle soluzioni è sufficiente derivare una seconda volta l'energia Π e valutare se la soluzione di cui si vuole studiare la stabilità ha tale derivata seconda positiva o negativa. Nel punto di biforcazione l'energia ha anche la derivata seconda nulla.

5.3.4 Studio dei cilindri compressi secondo von Karman-Tsien e Cicala

Andiamo ora a vedere come hanno studiato questo problema (non lineare) von Karman e Tsien ed il prof. Cicala; i lavori sono sicuramente indipendenti, in quanto molto diversi tra loro. Infatti, von Karman e Tsien hanno ragionato sull'energia, mentre Cicala ha ragionato sui lavori virtuali.

Di base, l'*equilibrio* lo hanno imposto annullando la variazione di energia/lavoro, mentre la *stabilità* l'hanno imposta annullando la variazione seconda di energia/lavoro.

Equazioni di Kirchhoff per piastra piana

Scriviamo allora le equazioni di Kirchhoff valide per una piastra piana (teoria di piastra e guscio sottile vista a Strutture Aeronautiche).

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) - zw_x \\ v(x, y, z) = v^0 - zw_y \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases}$$

La variazione di lavoro interno è

$$\delta L_i = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dV$$

Le leggi di spostamenti sono sempre quelle, solo che ora per quanto riguarda le *deformazioni* non possiamo più dire che

$$\varepsilon_x = u_x$$

Bensì dobbiamo tenere in conto della *non linearità* mediante quello che viene chiamato termine di non linearità di von Karman, scrivendo quindi che

$$\varepsilon_x = u_x + \frac{1}{2} w_x^2$$

Ossia come la parte lineare più un contributo non lineare. Idem per le deformazioni lungo le altre componenti. In realtà, a rigore, si dovrebbero considerare altri due termini non lineari per deformazione ($\frac{1}{2} u_x^2, \frac{1}{2} v_x^2$, nel caso di ε_x).

Fu proprio il lavoro di von Karman, Tsien e Cicala a stabilire che questi due contributi ulteriori non erano importanti, almeno finché

$$\frac{w}{a} < 10$$

Riducendo di fatto le incognite non lineari da 9 a 3.

Equazioni di compatibilità

Tramite la scrittura di tali equazioni di compatibilità si è potuta definire la *funzione di tensione* $F(x, y)$ e lo *spostamento trasverso* $W(x, y)$ (Airy).

Area del cerchio

Non so perché ma si parla dell'approssimare l'area del cerchio con triangoli inscritti e/o circoscritti; metodo misto garantisce meno errore perché compenso errori per eccesso e difetto.

Parte II

Dinamica

Capitolo 6

Dinamica

6.1 Sistemi dinamici a parametri discreti

Come introduzione a questa parte, vediamo come prima cosa un richiamo (l'ennesimo in 5 anni di ingegneria) ai concetti fondamentali della dinamica. Prima di fare ciò, spendiamo due brevi parole per capire a cosa ci serve tutto ciò nella progettazione dei veicoli aerospaziali.

Come è intuibile, andremo a studiare l'effetto di *carichi dinamici* sul velivolo (ad esempio sull'ala), e ciò è importante per valutare poi la *vita a fatica* dello stesso. Un classico e notevole esempio di carico dinamico che incontra il velivolo è la *raffica*, per cui cercheremo di studiare l'effetto di questo carico dinamico sulla vita a fatica del velivolo, cercando magari di trovare un certo legame tra questi due argomenti.

6.1.1 Definizione di grado di libertà

La definizione che diamo al concetto di grado di libertà (DOF) è la seguente:

"*Coordinata indipendente necessaria a definire univocamente la configurazione di un sistema.*"

È bene specificare che il concetto di coordinata può essere *generalizzato*, nel senso che la stessa può anche non avere un riscontro fisico, bensì solo matematico. Risulta comunque spesso vantaggioso usare una coordinata fisica perché permette un immediato riscontro con la realtà.

Possiamo fare subito degli esempi per capire meglio quanto appena spiegato. Prendiamo ad esempio una sfera su un piano bidimensionale e consideriamo che possa soltanto ruotare (non può alzarsi da terra), quindi può semplicemente andare avanti e indietro. Potendo fare solo tale movimento capiamo che si tratta di un sistema ad un grado di libertà (1 DOF), e pertanto se definiamo una coordinata generalizzata essa è sufficiente a descrivere univocamente la sua configurazione.

Tuttavia, la scelta delle coordinate generalizzate non è univoca, ma ne possiamo prendere varie. Ovviamente per un sistema N DOF avremo soltanto N coordinate tra loro *indipendenti*, come detto prima. Rimanendo nell'esempio fatto poco sopra, possiamo decidere di adottare come coordinata lo spostamento del centro di massa della sfera lungo la sua unica direzione di movimento (x), oppure possiamo prendere come coordinata l'angolo che il segmento collegante un certo punto prefissato della superficie della sfera e il centro di massa forma con il piano orizzontale (θ). Entrambe le scelte sono valide, anche se la più semplice e immediata è chiaramente quella della x , ma nulla vieta di usare θ per descrivere (univocamente) il moto della sfera.

Prendiamo ora un altro sistema, stavolta definito come un'asta rigida che è incernierata nel suo centro di massa ad una molla torsionale e, nel medesimo punto, è anche collegata ad un basamento orizzontale mediante una molla lineare. Tale sistema può dunque sia ruotare intorno al suo centro di massa, sia traslare nel piano (alzarsi e abbassarsi). Capiamo dunque che si tratta ora di un sistema a due gradi di libertà (2 DOF), per cui ci serviranno due coordinate generalizzate indipendenti per descriverne univocamente la configurazione.

Possiamo adottare, ad esempio, una prima coordinata data dalla distanza del centro di massa dal basamento orizzontale (x) ed una seconda coordinata data dall'angolo tra l'asta e il piano orizzontale (θ). Possiamo però anche adottare un sistema in cui una coordinata è sempre la x definita prima, mentre la seconda coordinata è l'area l'asta spazza ruotando intorno al suo centro di massa (A).

Noi vedremo, in generale, sistemi a N gradi di libertà (iniziamo con 1 e 2 DOF, poi passiamo a N). È di fondamentale interesse *limitare* il più possibile il numero di gradi di libertà N in quanto a ciascun DOF corrisponde

un'equazione (indipendente dalle altre) che bisogna risolvere. Un sistema N DOF pertanto sarà caratterizzato da un sistema di N equazioni (in N incognite), quindi dovremo lavorare con una matrice N x N.

Nel caso, per esempio, degli *elementi finiti* si hanno moltissimi DOF (ad esempio N=10,000), per cui i codici risolutivi trattano matrici 10,000 x 10,000 per risolvere il sistema. In esso infatti andiamo sostanzialmente a prendere il modello continuo e lo discretizziamo in tantissimi punti (gradi di libertà), per risolvere così un problema algebrico anziché differenziale.

6.1.2 Passaggio alle equazioni del moto

Ora che abbiamo definito e capito al meglio il concetto di grado di libertà, vediamo di illustrare una possibile strada per passare dalla definizione *fisica* del problema (lo vedo, capisco il numero di DOF e definisco le coordinate) ad una definizione *matematica* del medesimo, mediante la scrittura di un sistema di N equazioni differenziali (per un problema N DOF).

L'approccio che descriveremo sarà quello basato sulle *equazioni di Lagrange*, che permettono di derivare l'equazione del moto di ciascun grado di libertà. L'equazione di Lagrange per il generico grado di libertà i-esimo è la seguente.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (6.1)$$

Vediamo ora cosa significano i vari termini:

- La " i " è il parametro che stabilisce il numero del grado di libertà considerato, pertanto $i = 1, \dots, N$.
- La " q_i " indica l'i-esimo grado di libertà.
- La " L " è la funzione *lagrangiana*, definita come

$$L = K - P \quad (6.2)$$

dove

- La " K " è l'energia cinetica dell'intero sistema.
- La " P " è l'energia potenziale dell'intero sistema.
- La " Q_i " è la i-esima forza generalizzata. Come per le coordinate, l'aggettivo "generalizzata" indica che non è necessariamente fisicamente una forza; essa dipende da come sceglieremo le coordinate generalizzate. In generale può essere calcolata come

$$Q_i = \frac{\partial \delta L_e}{\partial \delta q_i} \quad (6.3)$$

ossia come la derivata del lavoro virtuale esterno compiuto dalle forze applicate al sistema rispetto allo spostamento virtuale compiuto dall'i-esimo grado di libertà. Vedremo meglio cosa significa tutto ciò quando faremo un esempio pratico.

Dunque, ciò che si deve fare ogni volta che si vuole scrivere l'equazione del moto di un sistema N DOF è, anzitutto, computare la funzione L (dell'intero sistema), per poi applicare le derivate come illustrato, nonché computare la forza generalizzata, il tutto per ciascuno dei gradi di libertà del sistema, per ottenere così l'equazione del moto di ciascuno dei gradi di libertà, e quindi ottenere il sistema differenziale da risolvere per trovare l'evoluzione temporale del sistema in esame.

Esempio: ala 2 DOF

Per capire meglio come funziona ciò che abbiamo appena descritto, facciamo un esempio pratico, andando a considerare il più semplice modello per studiare la dinamica di un'ala. Esso consiste in un profilo alare per cui sia nota la posizione dell'asse elastico (O), il quale è incernierato nel medesimo punto con una molla torsionale di rigidezza k_θ e, sempre in tale punto, connesso a un basamento orizzontale mediante una molla lineare di rigidezza k_h ¹. A tale profilo è applicata poi una forza concentrata F in un punto che dista L dall'asse elastico O . Il profilo ha massa m e momento d'inerzia intorno al polo O pari a I .

¹Le rigidezze appena menzionate possono essere calcolate studiando i modi di vibrare (flessionale e torsionale) del sistema.

Decidiamo ora di prendere come gradi di libertà (saranno 2, come intuitibile) lo spostamento verticale dell'asse elastico (positivo verso il basso), che chiamiamo x , e la rotazione del profilo rispetto all'orizzontale, che chiamiamo θ . Si tratta quindi di un DOF traslazionale (x) e un DOF rotazionale (θ).

Facciamo ora i seguenti passaggi per riuscire a scrivere le due equazioni del moto che ci servono per trovare univocamente gli andamenti delle due coordinate.

- Calcoliamo i due termini che servono per la lagrangiana, ossia energia cinetica e potenziale. Per farlo dobbiamo considerare la somma algebrica dei contributi dati da ciascun DOF.

– L'energia cinetica beneficia del contributo dovuto al DOF traslazionale (energia cinetica di traslazione, solita formula) e del contributo dovuto al DOF rotazionale (energia cinetica di rotazione, formula con momento di inerzia e velocità angolare), per cui

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

– L'energia potenziale beneficia del contributo dovuto alla molla lineare, di quello dovuto alla molla torsionale e del contributo dato dall'energia potenziale gravitazionale. I primi due sono calcolati con la solita formula delle molle, mentre il terzo contributo è calcolato come $-mgx$, con segno negativo perché la x è positiva verso il basso e l'energia gravitazionale diminuisce se si va verso il basso.

$$P = \frac{1}{2}k_hx^2 + \frac{1}{2}k_\theta\theta^2 - mgx$$

Otteniamo quindi che la funzione L è

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_hx^2 - \frac{1}{2}k_\theta\theta^2 + mgx$$

- Ora possiamo benissimo ottenere il primo membro dell'equazione del moto andando a svolgere le derivate richieste (vedremo successivamente come calcolare le forze generalizzate). In particolare, dobbiamo far variare l'indice i tra tutti i DOF, in questo caso $i = 1, 2$, e calcolare per ciascuna i le varie derivate, per avere quindi il primo membro dell'equazione del moto.

1. Per il grado di libertà x (poniamo convenzionalmente $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$) abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -k_hx + mg\end{aligned}$$

Pertanto possiamo scrivere il primo membro dell'equazione del moto relativamente al grado di libertà x .

$$m\ddot{x} + k_hx - mg = Q_1$$

2. Per il grado di libertà θ invece abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= I\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = I\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -k_\theta\theta\end{aligned}$$

Pertanto possiamo scrivere il primo membro dell'equazione del moto relativamente al grado di libertà θ .

$$I\ddot{\theta} + k_\theta\theta = Q_2$$

- Ora possiamo invece concentrarci sul calcolo dei secondi membri, ossia sulle forze generalizzate. Per fare ciò ci serviamo del **PLV**, in quanto esso è molto utile anche nel caso in cui siano presenti forze non conservative (es. sistemi dissipativi) nel sistema. L'equazione 6.3 è infatti scritta proprio utilizzando questa formulazione.

Ciò considerato, dobbiamo allora scrivere il lavoro virtuale esterno che la forza F compie. Per farlo consideriamo uno spostamento virtuale δu in direzione e verso della forza F , per cui avremo che

$$\delta L_e = F \delta u$$

Tecnicamente ora potremo scrivere semplicemente la derivata di $F \delta u$ rispetto a δx per avere Q_1 (rispetto a $\delta \theta$ per avere Q_2), ma prima di farlo è conveniente esplicitare δu in funzione delle coordinate generalizzate, ossia scrivere δu come somma algebrica dei contributi dati dai singoli gradi di libertà.

- Il grado di libertà x , quando si ha uno spostamento δu in direzione della forza F , sperimenta un certo spostamento verticale pari a $-\delta x$ (segno negativo perché x positivo verso il basso e δu va invece verso l'alto).
- Il grado di libertà θ invece sperimenta una certa rotazione $\delta \theta$ (positiva perché θ positivo in verso orario e δu fa sì che il corpo ruoti in senso orario). Tale rotazione produce uno spostamento lineare verso l'alto che è, per piccoli valori di $\delta \theta$ (e lo sono, dato che è una quantità virtuale, quindi posso considerarla infinitesima), pari a $\delta \theta L$.

Possiamo quindi vedere δu come

$$\delta u = -\delta x + \delta \theta L$$

In questo modo abbiamo esplicitato lo spostamento virtuale concorde alla forza in funzione degli spostamenti (virtuali) "visti" dai singoli gradi di libertà; questo permette agevolmente di scrivere che

$$Q_1 = \frac{\partial \delta L_e}{\partial \delta x} = F \frac{\partial}{\partial \delta x} (-\delta x + \delta \theta L) = -F$$

$$Q_2 = \frac{\partial \delta L_e}{\partial \delta \theta} = FL \frac{\partial}{\partial \delta \theta} (\delta \theta) = FL$$

Abbiamo quindi calcolato l'ultima cosa che ci mancava e possiamo scrivere completamente le due equazioni del moto.

Ora che abbiamo calcolato tutto possiamo finalmente scrivere le equazioni del moto del sistema, che andranno a comporre il sistema di equazioni differenziali da risolvere per calcolare l'andamento temporale delle due coordinate.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_h x - mg = -F \\ I\ddot{\theta} + k_\theta \theta = FL \end{cases}$$

Possiamo notare nelle equazioni del moto un *termine notevole*, rappresentato dalla somma $a\ddot{q} + b\dot{q}$, che rappresenta il primo membro dell'equazione differenziale per le vibrazioni libere non smorzate di un sistema massa-molla ($a = m$, $b = k$); tale somma va posta uguale a 0 per avere la suddetta equazione per vibrazioni libere non smorzate.

6.1.3 Soluzione dell'equazione per un sistema 1 DOF libero

Vediamo ora come si può risolvere un sistema dinamico come quello che abbiamo appena derivato. Per fare ciò iniziamo considerando un ben più semplice sistema 1 DOF di tipo MCK (massa-molla-smorzatore) senza forzante, il quale ha equazione del moto

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (6.4)$$

Tale equazione differenziale (del secondo ordine) ci permette di studiarne le vibrazioni libere (assenza di forzante) ed è noto che ha soluzione generica

$$x = \bar{x}e^{\lambda t} \quad (6.5)$$

In questo caso \bar{x} è l'*ampiezza* del moto, mentre λ è un parametro che rappresenta gli *autovalori* del sistema. L'ampiezza si ottiene imponendo le condizioni iniziali al sistema (velocità e posizione che esso ha al tempo iniziale $t = 0$).

Per calcolare invece λ è necessario imporre tale soluzione al sistema, quindi sostituire nella prima equazione la x trovata con la seconda equazione, per cui

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)\bar{x}e^{\lambda t} = 0$$

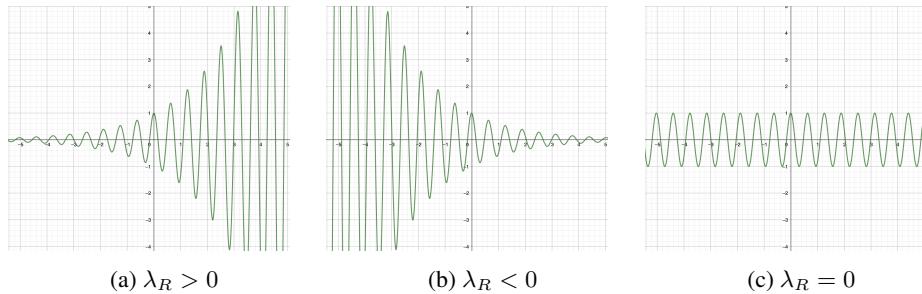


Figura 6.1: Varie casistiche. Si è considerato $\lambda_R = \pm 0.5$ quando non nullo e $\lambda_I = 10$.

Ricordando che l'esponenziale non è mai nullo, abbiamo che tale uguaglianza è verificata quando $\bar{x} = 0$, ossia ampiezza nulla del moto, ma questa è una soluzione *banale* perché ci dice sostanzialmente che il sistema sta fermo e basta, quindi interessa poco a noi aspiranti ingegneri che dobbiamo soffrire ogni minuto della nostra esistenza.

Ciò che rimane quindi è che

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Ossia dobbiamo trovare i valori di λ affinché questo polinomio (detto *polinomio caratteristico*) sia nullo. Per farlo risolviamo l'equazione di secondo grado rispetto a λ e troviamo

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

A seconda dei valori di m , c e k (che sono comunque noti in quanto caratteristiche proprie del sistema) avremo che λ può essere una coppia di numeri reali (distinti o coincidenti) o complessi coniugati.

Autovalori complessi coniugati Analizziamo ora il caso particolare in cui si abbia che $\lambda_{1,2}$ sono due numeri complessi e coniugati, ossia

$$\lambda_{1,2} = \lambda_R \pm i\lambda_I$$

Questo lo si ha, per esempio, quando $c = 0$ e, in generale, quando $c^2 < 4mk$. Sotto tale ipotesi si verifica quindi che la soluzione è

$$x = \bar{x}e^{\lambda_R t}e^{\pm i\lambda_I t}$$

Se però consideriamo che l'esponenziale di un numero immaginario puro è un coseno di argomento pari all'argomento dell'esponenziale, allora abbiamo che

$$x = \bar{x}e^{\lambda_R t} \cos(\lambda_I t) \quad (6.6)$$

Analizziamo attentamente quest'ultima equazione, ossia la soluzione di un generico sistema MCK tale per cui gli autovalori sono complessi coniugati (il sistema si dice che è sottosmorzato, ossia che lo smorzamento è inferiore ad un parametro critico). Essa è comunque un prodotto di un esponenziale (con l'ampiezza data da \bar{x}) per una funzione coseno, per cui si tratta sostanzialmente di una funzione che ha un andamento armonico crescente/decrescente, in funzione del segno di λ_R .

Infatti si ha che se $\lambda_R > 0$ allora si ha un'amplificazione del coseno che cresce esponenzialmente nel tempo, invece se $\lambda_R < 0$ allora si ha uno smorzamento del coseno che diventa sempre maggiore nel tempo. In altre parole, possiamo vedere il tutto come una funzione che nel tempo va come un coseno, che ha però un'ampiezza che varia anch'essa nel tempo, e lo fa come un'esponenziale (crescente se $\lambda_R > 0$ e decrescente se $\lambda_R < 0$).

Se rappresentiamo tale funzione nel piano $x - t$ possiamo individuare su di essa sia il contributo di λ_R che quello di λ_I (argomento del coseno, in altre parole la pulsazione della funzione armonica). Infatti se prendiamo l'involucro di tutti i picchi della funzione otteniamo un andamento che ricalca quello di $e^{\lambda_R t}$, mentre se prendiamo la distanza lungo t tra un picco e l'altro otteniamo il periodo T , ma $T = f^{-1}$ e $f = 2\pi\omega^{-1}$, dove qua $\omega = \lambda_I$, per cui $T = \frac{\lambda_I}{2\pi}$.

Se prendiamo invece $\lambda_R < 0$ vediamo una cosa analoga, ma con esponenziale decadente. Se infine prendiamo il caso particolare $\lambda_R = 0$ vediamo che l'andamento è quello di un coseno, senza che ci sia amplificazione o smorzamento, dato che l'esponenziale $e^{\lambda_R t}$ è ora unitario, dato che eleviamo e per un numero che in questo caso è 0. Questo conferma quindi che un sistema per cui gli autovalori sono immaginari puri (parte reale λ_R nulla) è caratterizzato da un andamento armonico "puro".

Caso 2 DOF

Consideriamo un generico sistema 2 DOF libero e senza smorzamento. Le equazioni del moto si dimostra che sono

$$m_1\ddot{x} + m_2\ddot{y} + k_1x = 0 \quad m_3\ddot{x} + m_4\ddot{y} + k_2y = 0 \quad (6.7)$$

Ponendo $X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ si ottiene, in forma *matriciale*

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Ossia, in forma compatta, $M\ddot{X} + KY = 0$. La matrice M si chiama matrice delle masse, mentre la matrice K si chiama matrice di rigidezza. Per risolvere questo sistema differenziale imponiamo anche qua una soluzione esponenziale (in termini del vettore degli spostamenti X), ossia

$$X = \bar{X}e^{\lambda t}$$

Sostituendo nel sistema di equazioni del moto si ha

$$[\lambda^2 M + K]\bar{X}e^{\lambda t} = 0 \rightarrow [\lambda^2 M + K]\bar{X} = 0$$

Escludendo la soluzione banale $\bar{X} = 0$ abbiamo che il sistema si può risolvere *univocamente* se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti $[\lambda^2 M + K]$ è nullo (altrimenti è un sistema omogeneo che ha infinite soluzioni), per cui imponiamo

$$\det[\lambda^2 M + K] = 0$$

Ossia

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 m_1 + k_1 & m_2 \\ m_3 & \lambda^2 m_4 + k_2 \end{bmatrix} = 0$$

Sviluppando questo conto otteniamo il *polinomio caratteristico*

$$\lambda^4(m_1m_4 - m_2m_3) + \lambda^2(m_1k_2 + m_4k_1) + k_1k_2 = 0$$

Trovando le *radici* di questo polinomio infine otteniamo i valori di λ per cui il determinante è nullo e quindi il sistema è risolvibile (i.e troviamo gli *autovalori* del sistema).

La *risposta* nel tempo che troviamo avrà quindi una componente $x(t)$ e una componente $y(t)$. In generale, gli andamenti dipendono dagli autovalori del sistema e possono essere ad esempio armonici, con smorzamento, con amplificazione o senza nessuno dei due. Per i casi che trattiamo noi otterremo sempre 4 autovalori che danno vita a *due coppie complesse coniugate*.

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \lambda_{R,I} \pm i\lambda_{i,I} \\ \lambda_{3,4} = \lambda_{R,II} \pm i\lambda_{i,II} \end{cases}$$

Avremo pertanto delle risposte armoniche smorzate, amplificate o costanti.

6.1.4 Risposta forzata per un sistema 1 DOF

Consideriamo un sistema 1 DOF come il classico sistema MCK, soggetto ora ad una forzante esterna variabile nel tempo. Tale forzante ipotizziamo che sia armonica², il che non è comunque troppo distante da quanto accade in alcuni casi reali, per i quali quindi riducendo il sistema a un sistema 1 DOF se ne può studiare la risposta forzata in maniera, come vedremo, piuttosto semplice.

L'equazione del moto sappiamo bene essere

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Dividendo tutto per la massa otteniamo

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{f(t)}{m}$$

²Somma di sinusoidi.

Dove ω_n è la frequenza naturale del sistema libero non smorzato. Giacché la forzante abbiamo detto essere armonica (per semplicità supponiamo sia un semplice coseno), possiamo scrivere che

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(f_0 e^{i\omega t})$$

Dove f_0 è l'ampiezza e ω la pulsazione della suddetta forzante.

La *risposta* a questa forzante dovrà essere anch'essa *armonica*, per cui scriviamo che

$$x(t) = \operatorname{Re}(\alpha(\omega)f_0 e^{i\omega t}) = f_0 A_s \cos(\omega t) + B_s \sin(\omega t)$$

Se a questo punto sostituiamo nell'equazione del moto otteniamo che

$$\operatorname{Re}(-\omega^2 \alpha(\omega) f_0 e^{i\omega t}) + 2\zeta \omega_n \operatorname{Re}(i\omega \alpha(\omega) f_0 e^{i\omega t}) + \omega_n^2 \operatorname{Re}(\alpha(\omega) f_0 e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\frac{f_0}{m} e^{i\omega t}\right)$$

Raccogliendo a primo membro i termini notevoli otteniamo

$$\operatorname{Re}(\alpha(\omega) f_0 e^{i\omega t} (-\omega^2 + 2i\zeta \omega_n \omega + \omega_n^2)) = \operatorname{Re}\left(\frac{f_0}{m} e^{i\omega t}\right)$$

Semplificando ambo i membri $f_0 e^{i\omega t}$ otteniamo che

$$\operatorname{Re}(\alpha(\omega) (-\omega^2 + 2i\zeta \omega_n \omega + \omega_n^2)) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{m}\right)$$

Ossia

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{(-\omega^2 + 2i\zeta \omega_n \omega + \omega_n^2)} \quad (6.9)$$

Questa è chiamata **funzione di risposta in frequenza** (FRF) o anche *cedevolezza dinamica* oppure *recettanza*. Essa ci dice come il sistema risponde sotto una forzante armonica (nello specifico ci dice come è amplificata la risposta rispetto alla forzante, dato che $x = \alpha(\omega)f(t)$) e dipende sia dalle caratteristiche di rigidezza, inerzia e smorzamento proprie del sistema (m, ω_n, ζ) ma anche dalla *pulsazione della forzante* ω .

Variazione della FRF con la pulsazione della forzante Andiamo ora a vedere come $\alpha(\omega)$ si modifica al variare di ω (in questo modo, se immaginiamo di fissare una f_0 , ampiezza della forzante, possiamo valutare come cambia l'amplificazione o smorzamento della risposta rispetto alla forzante, oltre che il suo sfasamento).

Consideriamo allora un sistema MCK per cui siano note e fissate le costanti m, c e k , quindi sono noti anche ω_n e ζ . Poniamo $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, ossia riferiamo la pulsazione della forzante alla pulsazione naturale. Introducendo questa scrittura abbiamo che

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{(1 - r^2 + 2i\zeta r)}$$

Essendo che $m\omega_n^2 = k$. A questo punto ricordiamo che abbiamo scritto che

$$x = \operatorname{Re}(\alpha(\omega) f_0 e^{i\omega t})$$

E passiamo alla notazione polare, per cui $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$.

$$x = \operatorname{Re}(\alpha(\omega) f_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)))$$

Sostituiamo $\alpha(\omega)$ e troviamo che

$$x = \operatorname{Re}\left(f_0 \left(\frac{\cos(\omega t)}{k(1 - r^2 + 2i\zeta r)} + \frac{i \sin(\omega t)}{k(1 - r^2 + 2i\zeta r)} \right)\right)$$

A questo punto, per mandare via la parte immaginaria a denominatore moltiplichiamo e dividiamo tutto per $1 - r^2 - 2i\zeta r$, ottenendo quindi

$$x = \frac{f_0}{k} \left(\frac{1 - r^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \cos(\omega t) + \frac{2\zeta r}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \sin(\omega t) \right)$$

Ci ricordiamo a questo punto che noi abbiamo anche detto che $x = f_0(A_s \cos(\omega t) + B_s \sin(\omega t))$, per cui troviamo chiaramente che

$$A_s = \frac{1 - r^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}$$

$$B_s = \frac{2\zeta r}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}$$

Facendo ora delle banali considerazioni geometriche, possiamo scrivere che

$$A_s \cos(\omega t) + B_s \sin(\omega t) = c_s \cos(\omega t - \phi_s)$$

Dove si dimostra che

$$c_s = \sqrt{A_s^2 + B_s^2} = \frac{1}{k\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$\phi_s = \arctan\left(\frac{B_s}{A_s}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right)$$

In sostanza abbiamo che c_s modula l'*ampiezza* della risposta, mentre ϕ_s è responsabile del suo *sfasamento* (rispetto alla forzante, ovviamente sempre in ritardo o al più in fase).

Analizziamo adesso vari casi notevoli di r , per vedere cosa succede ad ampiezza e sfasamento della risposta.

- Per $r = 0$ vediamo che

$$c_s = \frac{1}{k}$$

Per cui si ha

$$x(t) = \frac{f_0}{k} = \delta_s$$

In altre parole, quando la forzante ha pulsazione nulla vi è solo uno spostamento *statico* dato dallo spostamento che subisce la molla per effetto della forza (costante) f_0 ; non essendoci né velocità, né accelerazione non possono esserci inerzia e smorzamento. Si ha quindi quella che viene chiamata *risposta statica*.

- Per $r \rightarrow \infty$ si vede che $c_s \rightarrow 0$, ossia $x \rightarrow 0$, quindi per pulsazione della forzante che tende a infinito si ha una risposta sostanzialmente nulla.
- Quando infine r è pari al valore che massimizza c_s vediamo che c_s è per l'appunto massimo, e tale massimo possiamo calcolarlo anzitutto minimizzando il denominatore di c_s rispetto a r , per cui imponiamo che sia

$$\frac{d}{dr}(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2 = 0$$

Svolgendo i conti si trova che $r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, per cui

$$c_{s_{max}} = \frac{1}{k} \frac{1}{(2\zeta\sqrt{1 - 2\zeta^2})}$$

In particolare è interessante notare che quando $\zeta = 0$ (smorzamento nullo) si ha $c_{s_{max}} \rightarrow \infty$, ossia una risposta infinitamente amplificata, e la si ha per $r = 1$ tra l'altro, ossia pulsazione della forzante pari alla pulsazione naturale del sistema libero non smorzato. All'aumentare di ζ si vede che il punto di r per c_s massimo diminuisce sempre di più e inoltre il $c_{s_{max}}$ è anch'esso sempre minore (ed è anche un valore finito).

Per quanto riguarda lo sfasamento si ha che per $r = 0$ esso è pari a -180° , per $r \rightarrow \infty$ è invece nullo, mentre nei valori intermedi dipende da ζ ; si ha in particolare che se $\zeta = 0$ esso è pari a -180° per $r < 1$ e pari a 0 per $r > 1$, con una discontinuità in corrispondenza di $r = 1$. Man mano che ζ invece aumenta, si vede come le curve si appiattiscano man mano "smussando" l'andamento a gradino del caso senza smorzamento.

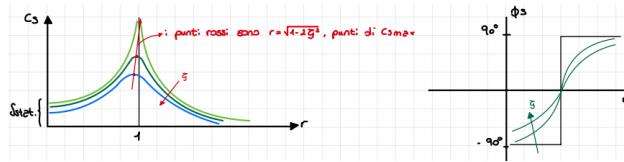


Figura 6.2

Soluzione completa Quanto abbiamo visto fino ad ora vale per la risposta *stazionaria* del sistema alla forzante, ossia una risposta che si ripete nel tempo finché la forzante agisce sul sistema; prima di arrivare a tale risposta però vi è una risposta *transitoria*, data dalla soluzione dell'equazione omogenea associata che, nel nostro caso, è la soluzione del sistema libero (non forzato).

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

La sua risposta la conosciamo e possiamo scriverla nella forma

$$x_t = c_t e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_t)$$

Con $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ la pulsazione naturale del sistema libero smorzato. Le costanti c_t e ϕ_t le possiamo trovare imponendo le *condizioni iniziali* al sistema *complessivo*

$$x(t) = f_0 c_s \cos(\omega t - \phi_s) + c_t e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_t)$$

Ad esempio $x(0) = u$ e $\dot{x}(0) = \dot{u}$ (valori noti), per cui si trova che

$$\begin{aligned} \phi_t &= \arctan \left(\frac{i + f_0 c_s \omega \sin(-\phi_s) + \zeta(u - f_0 c_s \cos(-\phi_s)) \omega_n}{(f_0 c_s \cos(-\phi_s) - u) \omega_d} \right) \\ c_t &= \frac{u - f_0 \cos(-\phi_s)}{\cos(-\phi_t)} \end{aligned}$$

Come vediamo, queste costanti dipendono sia dalle condizioni iniziali che dalla risposta stazionaria (ampiezza e pulsazione della forzante) oltre che dai parametri propri del sistema (contenuti in c_s , ϕ_s e ω_d).

Abbiamo quindi che, conoscendo le condizioni iniziali possiamo calcolare tutto ciò che ci serve per la risposta e, conoscendo anche la pulsazione della forzante, possiamo calcolare la risposta completa, somma di soluzione transitoria e stazionaria.

6.1.5 Risposta forzata per un sistema N DOF

Vediamo di generalizzare quanto visto nel caso 1 DOF ad un sistema N DOF. Stando sempre nell'ipotesi di forzante armonica, possiamo scrivere le equazioni del moto (sistema di equazioni) in forma matriciale come

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q_0\}e^{i\omega t}$$

Poiché la forzante è armonica, sarà armonica anche la risposta, ossia

$$\{q\} = \{q_0\}e^{i\omega t}$$

Sostituendo nelle equazioni del moto troviamo

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{q_0\} = \{Q_0\}$$

La matrice $[D(\omega)] = (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])$ si chiama matrice di **rigidezza dinamica**. Siccome la nostra incognita qua è l'ampiezza della risposta, isoliamo questa invertendo la matrice di rigidezza dinamica, per cui

$$\{q_0\} = [D(\omega)]^{-1}\{Q_0\}$$

Poniamo quindi che $[D(\omega)]^{-1} = [\alpha(\omega)]$, che è proprio la nostra **FRF** (o matrice delle recettanze, volendo). Questa matrice potremmo calcolarla invertendo la matrice di rigidezza dinamica, che conosciamo una volta note le proprietà

dinamiche del sistema e la pulsazione della forzante, ma computazionalmente non è efficiente invertire brutalmente una matrice, per cui cerchiamo una strada meno dispendiosa.

Come vedremo, questa sarà rappresentata dall'applicazione di cosiddette *proprietà modali*. In ogni caso, esplichiamo il calcolo dell'ampiezza di risposta indicando gli elementi della matrice delle recettanze con generici $\alpha_{ij}(\omega)$.

$$\{q_0\} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(\omega) & \dots & \alpha_{1N}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1}(\omega) & \dots & \alpha_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{Bmatrix}$$

Esplicitiamo ulteriormente la prima componente di $\{q_0\}$, scrivendo che

$$q_1 = \alpha_{11}(\omega)Q_1 + \dots + \alpha_{1N}(\omega)Q_N$$

Immaginiamo ora che il vettore delle forzanti sia composto da una sola componente, rappresentante la forzante (l'unica nel sistema) agente sul generico DOF j-esimo; avremo allora che q_1 , ossia lo spostamento del DOF 1 è

$$q_1 = \alpha_{1j}(\omega)Q_j$$

Questo vuol dire che il termine generico α_{nj} indica lo spostamento (in modulo e fase) che la forzante agente sul DOF j-esimo provoca sul DOF n-esimo. E quindi vuol dire che la matrice $[\alpha(\omega)]$ ci dà informazioni sullo spostamento in ogni DOF per effetto delle forzanti in ogni DOF. In altre parole, si tratta di una *funzione di trasferimento*.

Quello che andremo a fare adesso sarà cercare una procedura analitica per il calcolo dei coefficienti della matrice di risposta in frequenza, sfruttando le già citate proprietà modali. Lo vedremo sia per sistemi non smorzati che per sistemi smorzati.

Sistemi non smorzati

Le equazioni del moto di un sistema non smorzato si riducono a

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\}$$

A questo punto però operiamo una *trasformazione di coordinate*, passando dalle coordinate "fisiche" alle coordinate *modali*³, per cui scriviamo gli spostamenti $\{q\}$ come il prodotto di una matrice di cambiamento delle coordinate per le nuove coordinate. Per quanto riguarda le coordinate modali, si dimostra che tale matrice di cambio base è la matrice degli *autovettori* $[U_n]$. Tale matrice si ottiene, colonna per colonna, risolvendo il sistema sottodimensionato

$$(-\omega_j^2[M] + [K])\{U_j\} = \{0\}, \quad j = 1, \dots, n \quad n \leq N$$

Dove le ω_j sono le frequenze naturali del sistema calcolate risolvendo il polinomio caratteristico annullando il determinante di $[D(\omega)]$. La cosa bella di questo cambiamento di base è che noi possiamo prendere anche non tutte le frequenze naturali ma le prime n , con potenzialmente anche $n \ll N$. In ogni caso, scriviamo che

$$\{q\} = [U_n]\{p\}$$

Andiamo a sostituire tutto nell'equazione del moto e troviamo che

$$[M][U_n]\{\ddot{p}\} + [K][U_n]\{p\} = \{Q\}$$

Premoltiplichiamo per $[U_n]^T$ e troviamo che

$$[U_n]^T[M][U_n]\{\ddot{p}\} + [U_n]^T[K][U_n]\{p\} = [U_n]^T\{Q\}$$

Chiamiamo ora $[M_m] = [U_n]^T[M][U_n]$ e $[K_m] = [U_n]^T[K][U_n]$ le matrici *modali* di massa e rigidezza; si dimostra che queste matrici sono *diagonali*, per cui diciamo che la matrice degli autovettori **diagonalizza** le matrici di massa e rigidezza. Se gli autovettori sono m-normalizzati⁴ si ha che la matrice modale di massa è la matrice identità e la matrice

³Sono un indice di quanto un modo partecipi alla risposta del sistema inoltre.

⁴Siccome il sistema omogeneo da risolvere per il calcolo degli autovettori è sottodimensionato, gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa (troviamo tutto in funzione di una componente), per cui se noi calcoliamo gli autovettori e li normalizziamo in modo che la matrice di massa sia identitaria abbiamo trovato la normalizzazione speciale che si chiama proprio m-normalizzazione.

modale di rigidezza è una matrice (diagonale) che ha sulla diagonale le frequenze naturali al quadrato; poniamo questa matrice pari a $[K_m] = [\Lambda]$. Scriviamo allora che le equazioni del moto diventano, nell'ipotesi di modi m-normalizzati

$$[I]\{\ddot{p}\} + [\Lambda]\{p\} = \{P\}$$

Avendo definito il vettore di forze modali $\{P\} = [U_n]\{Q\}$. Tutto questo lavoro appena fatto ha due vantaggi:

1. Il sistema di equazioni del moto da risolvere ha ridotto le sue dimensioni, dal momento che la matrice di modi con cui lo diagonalizziamo ha dimensioni in generale $N \times n$, e $n \leq N$. Se prendiamo i primi $n << N$ modi possiamo quindi ottenere un sistema di dimensioni sensibilmente inferiori a quello di partenza (con lo svantaggio però che si perde in accuratezza, ma non sempre così tanta).
2. Siccome le matrici modali di massa e rigidezza sono diagonali, abbiamo che le equazioni nel sistema sono *disaccoppiate*, per cui possono essere risolte separatamente.

Sfruttando il secondo punto, possiamo scrivere che l'equazione relativa al generico DOF j-esimo è

$$\ddot{p}_j + \omega_j^2 p_j = P_j$$

Questa è una banalissima equazione di un sistema 1 DOF non smorzato soggetto a forzante P_j , che sappiamo avere soluzione

$$p_j = [-\omega + \omega_j^2]^{-1} P_j$$

Per cui possiamo calcolare in generale $\{p_0\}$ come⁵

$$\{p_0\} = (-[I]\omega^2 + [\Lambda])^{-1} \{P_0\}$$

Abbiamo quindi trovato una funzione di trasferimento in coordinate modali che è molto semplice da calcolare, dal momento che vanno invertite matrici diagonali, il che è molto meno computazionalmente oneroso.

Siamo tuttavia ancora in coordinate modali, invece noi vogliamo le coordinate fisiche, ma possiamo facilmente riottenerle ricordando la trasformazione che abbiamo fatto, scrivendo per cui che

$$\{q_0\} = [U_n]\{p_0\}$$

ossia

$$\{q_0\} = [U_n](-[I]\omega^2 + [\Lambda])^{-1} [U_n]^T \{Q_0\}$$

Ma avevamo scritto all'inizio la definizione di $[\alpha(\omega)]$ proprio come la matrice che moltiplicata a $\{Q_0\}$ ci permette di avere $\{q_0\}$, per cui concludiamo che

$$[\alpha(\omega)] = [U_n](-[I]\omega^2 + [\Lambda])^{-1} [U_n]^T \quad (6.10)$$

Ecco quindi che, grazie alle proprietà modali, abbiamo calcolato analiticamente (e senza invertire matrici che non fossero diagonali) la matrice delle recettanze, per cui possiamo computare in ultima analisi l'ampiezza (modulo e fase) della risposta alla forzante di pulsazione (nota) ω .

Possiamo esplicitare il generico elemento della matrice di risposta in frequenza svolgendo sostanzialmente i prodotti matriciali e considerando che $(-[I]\omega^2 + [\Lambda])^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2})$, per cui otteniamo che

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{U_{n_{ki}} U_{n_{kj}}}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

Come possiamo ben notare, la recettanza aumenta al tendere della pulsazione della forzante alla pulsazione naturale del sistema (i.e alle condizioni di risonanza).

⁵Scriviamo le ampiezze perché tanto la risposta nel tempo è armonica con pulsazione pari a quella della forzante, che conosciamo.

Sistemi smorzati

Consideriamo ora che ci sia smorzamento, per cui il sistema torna ad avere equazioni

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\}$$

Sostanzialmente non cambia molto dal caso non smorzato a livello di risultati, solo che otteniamo equazioni un po' diverse. Di base, non possiamo sfruttare le proprietà modali in quanto la matrice $[C]$ degli smorzamenti *non* è diagonalizzabile dai modi del sistema, se non in particolari condizioni, come lo smorzamento *proporzionale*, ossia quando la matrice degli smorzamenti è una combinazione lineare della matrice di massa e di rigidezza.

$$[C] = a[M] + b[K]$$

Non è neanche troppo banale calcolare i coefficienti a e b tra le altre cose. Per risolvere il problema quindi ci dobbiamo ricondurre a un tipico problema agli autovalori, e per fare ciò possiamo risolvere il problema in *stato spazio*.

Come si fa tutto ciò? Semplice (più o meno): definiamo il vettore $\{X\}$ tale

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix}$$

Questo è un vettore di dimensioni $2N \times 1$, a differenza di $\{q\}$ e le sue derivate che sono di dimensioni chiaramente $N \times 1$. Adesso scriviamo sempre le nostre equazioni del moto e mettiamo queste a sistema con un altro sistema. Siccome non possiamo imporre altre condizioni che non siano le equazioni del moto possiamo usare un sistema identitario (qualcosa=sé stessa), come ad esempio

$$[I]\{\dot{q}\} = [I]\{\ddot{q}\}$$

Mettiamo quindi tutto a sistema e scriviamo che

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \\ [I]\{\dot{q}\} - [I]\{\ddot{q}\} = \{0\} \end{cases}$$

Possiamo scrivere tutto in forma matriciale, per cui si ha

$$\begin{bmatrix} C & M \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

Dove ovviamente gli elementi delle matrici sono a loro volta matrici. Poniamo la prima matrice pari a $[A]$ e la seconda pari a $[B]$, nonché ci accorgiamo che

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} = \{\dot{X}\}$$

per cui abbiamo che

$$[A]\{\dot{X}\} + [B]\{X\} = \{Q \quad 0\}^T$$

Ora abbiamo quindi un sistema del primo ordine (le matrici ed il termine noto sono noti), per cui possiamo pensare di risolverlo. Risolviamo quindi prima l'omogenea associata per trovare gli autovalori, imponendo che la soluzione sia esponenziale.

$$\{X\} = \{V_0\}e^{st}$$

Sostituendo troviamo

$$(s[A] + [B])\{V_0\} = \{0\}$$

Perché questo sistema sia risolvibile e non abbia soluzione banale bisogna imporre

$$\det(s[A] + [B]) = 0$$

Da cui si ricava un polinomio caratteristico che, risolto, da i valori di s (autovalori). Sostituendo di volta in volta gli autovalori nel sistema sottodimensionato, possiamo calcolare gli autovettori del sistema. Si dimostra che gli autovalori e gli autovettori sono coppie N complesse coniugate.

Se ora studiamo l'integrale particolare, imponendo soluzione armonica, possiamo trovare che la matrice delle recettanze (relativa ai soli spostamenti e non alle velocità) è

$$[\alpha(\omega)] = [I \quad 0] \sum_{j=1}^{2N} \frac{\{V_j\}\{V_j\}^T}{i\omega - s_j} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Ci sono quelle matrici con idendità e zero perché appunto vogliamo solo la parte relativa agli spostamenti, e noi la matrice delle recettanze la calcoliamo in origine per il vettore $\{X\}$ intero, per cui dobbiamo togliere il secondo blocco (relativo alle velocità).

6.1.6 Risposta forzata con forzante non armonica

Consideriamo un generico sistema dinamico del tipo MCK soggetto ad una forzante ora non più armonica. Dal momento che la forzante non è armonica, non possiamo più dire che la risposta è armonica, per cui dobbiamo trovare un altro modo per risolvere l'equazione del moto (i.e trovare l'espressione della risposta $x(t)$).

Un primo metodo potrebbe essere, ad esempio, quello di integrare nel tempo l'equazione del moto e ricavare in questa maniera la risposta; una simile cosa può essere fatta con per esempio col metodo di Newmark, che è un metodo implicito che permette di risolvere l'equazione differenziale del moto in sostanza.

Una simile strada di "forza bruta" però ha un elevato *costo* computazionale, dovendo di fatto risolvere equazioni differenziali con matrici talvolta molto grandi, per cui avrebbe un tempo di calcolo esageratamente lungo per problemi un minimo complicati.

Cerchiamo allora una strada alternativa per risolvere l'equazione del moto, che permetta possibilmente di abbattere il costo computazionale.

Forzante periodica: serie di Fourier

Se la forzante è una funzione non armonica ma *periodica* possiamo esprimere la sommatoria infinita di funzioni armoniche, applicando sostanzialmente una serie di Fourier.

Questo è possibile sotto due fondamentali *ipotesi*:

1. Come detto, se la forzante è *periodica*, di periodo T .
2. Se vale il principio di *sovraposizione* degli effetti.

Sotto queste due ipotesi fondamentali allora possiamo esprimere la forzante $f(t)$ come

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_0 nt) + b_n \sin(\omega_0 nt)]$$

Possiamo anche condensare il tutto in una notazione complessa simil euleriana e scrivere

$$f(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 nt} \right), \quad c_n = a_n - ib_n \quad (6.12)$$

I coefficienti a_0, a_n, b_n si calcolano come segue.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_0 nt) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_0 nt) dt$$

In questo modo, se conosciamo l'espressione di $f(t)$ ed il suo periodo T (qualsiasi esso sia), possiamo esprimere questa funzione come una sommatoria di armoniche.

Se ora consideriamo che valga il principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo calcolare la risposta ad ogni componente armonica della serie, come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, e poi andare a sommare le risposte alle singole componenti, per ottenere così la risposta complessiva.

Abbiamo detto che la risposta alla forzante armonica $g(t) = \operatorname{Re}(\bar{g}e^{i\omega_g t})$ è del tipo

$$x(t) = \operatorname{Re} (\alpha(\omega_g) \bar{g} e^{i\omega_g t})$$

Per cui sarà banale dedurre che la risposta alla forzante scritta come sommatoria di armoniche sarà

$$x(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\omega_0 n) c_n e^{i\omega_0 n t} \right) \quad (6.13)$$

Sebbene questo approccio sembrerebbe complicare le cose, è possibile vedere come gli integrali per il calcolo di a_0, a_n, b_n in realtà si semplifichino molto in vari casi particolari (come ad esempio quello dell'onda quadra).

Dal punto di vista pratico, dobbiamo comunque considerare che non potremo fare delle sommatorie infinite (non nei programmi di calcolo numerico almeno), per cui ci fermeremo ad un certo numero di termini (i.e armoniche), che pensiamo possano essere sufficienti ad approssimare la forzante con buona precisione.

Ciò che si nota quando si calcola la risposta utilizzando questo metodo della serie di Fourier per una funzione che presenta una discontinuità di prima specie è che, se il numero di termini della sommatoria non è sufficientemente alto, si crea un *overshooting* nella risposta, in corrispondenza delle discontinuità; questo è noto come "fenomeno di Gibbs" e può essere mitigato (considerabilmente), ma purtroppo non eliminato, andando ad aumentare i termini della sommatoria.

Esso è riscontrabile ad esempio nella ricostruzione mediante Fourier di un'onda quadra, dove gli overshooting si trovano in corrispondenza dei tratti verticali.

Forzante generica: trasformata di Laplace

Adesso consideriamo che la forzante $f(t)$ non sia né armonica, né periodica; una simile cosa ci porta a dover escludere anche le serie di Fourier, per cui è necessario trovare nuovamente il modo di risolvere l'equazione del moto senza ritrovare un costo computazionale eccessivamente elevato.

Partiamo da qualcosa di estremamente generale; abbiamo un sistema MCK forzato da una forzante generica, per cui l'equazione del moto sappiamo bene essere

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{1}{m}f(t)$$

Abbiamo scritto l'equazione per il sistema 1DOF, ma il ragionamento che andremo a fare è del tutto analogo per i sistemi NDOF.

Per una forzante generica, si dimostra che la risposta $x(t)$ è del tipo

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Dove

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n t)$$

L'integrale presente nella risposta è chiamato integrale di *convoluzione*, mentre la funzione $h(t)$ è detta *risposta all'impulso*.

Il significato *fisico* dell'espressione $x(t)$ è che la risposta al tempo t è una *somma* di infinite risposte ad *impulsi* applicati a differenti tempi.

Questa formulazione non prescrive alcun vincolo sulla forzante, per cui in teoria basterebbe calcolare l'integrale di convoluzione, avendo nota la forzante, e saremmo a posto.

Purtroppo però il calcolo di questo integrale è molto *dispendioso* computazionalmente, almeno finché si rimane nel dominio del tempo.

La soluzione a questo problema è infatti passare al *dominio di Laplace*, applicando sostanzialmente la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione del moto.

Facciamo dunque questa cosa e scriviamo allora che

$$L(\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x) = \frac{1}{m}L(f(t))$$

La trasformata di Laplace è un operatore definito come

$$L(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Dove $s = \sigma + i\gamma$. Applicando la suddetta definizione alla funzione $x(t)$ si ottiene che

$$L(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

Se poniamo allora che $L(x(t)) = \tilde{X}$, si può dimostrare (provare per credere) che

$$L(\dot{x}(t)) = s\tilde{X} - \tilde{X}(0)$$

Dove $\tilde{X}(0) = L(x(0))$, ossia la trasformata della condizione iniziale sullo spostamento. Allo stesso modo si dimostra che

$$L(\ddot{x}(t)) = s^2 \tilde{X} - \dot{\tilde{X}}(0) - s\tilde{X}(0)$$

Vediamo che qua c'è in gioco anche la trasformata della condizione iniziale sulla velocità.

Con questo ragionamento possiamo allora scrivere che

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)\tilde{X} - \dot{\tilde{X}}(0) - s\tilde{X}(0) - 2\zeta\omega_n\tilde{X}(0) = \frac{1}{m}L(f(t)) \quad (6.14)$$

Se osserviamo bene questa equazione possiamo accorgerci di come sia diventata un'equazione *algebrica lineare* in \tilde{X} , che possiamo molto facilmente risolvere.

Questo perché le proprietà dinamiche del sistema le conosciamo, le condizioni iniziali le conosciamo e la forzante anche. Per trasformare condizioni iniziali e forzante possiamo applicare banalmente la definizione (o usare qualche tool di calcolo numerico e/o simbolico, Matlab lo fa) e quindi possiamo facilmente risolvere questa equazione algebrica.

Ottenuta una \tilde{X} , l'ultimo passo da compiere sarà quello di ritornare nel dominio del tempo applicando ad essa l'*antitrasformata* di Laplace. Questo calcolo è abbastanza complicato, per cui solitamente si possono usare metodi approssimati oppure Matlab.

Con questo metodo abbastanza algoritmico quindi abbiamo trovato il modo di calcolare la risposta del sistema forzato per una forzante qualsiasi, per cui il vantaggio dell'usare questo metodo è sostanzialmente quello di non porre alcun limite alla forzante. È chiaro comunque che dovremo sempre vedere quanto il gioco valga la candela, nel caso di sistemi che possiamo risolvere in altri modi (forzanti armoniche o soltanto periodiche).

6.1.7 Vibrazioni random

In questo paragrafo andiamo infine a vedere come dobbiamo comportarci quando vogliamo calcolare la risposta di un sistema dinamico, che supponiamo *lineare*, quando la forzante non è deterministica, bensì è **random**.

Le vibrazioni random di un sistema possono essere descritte solo in termini *statistici*, ossia possiamo conoscere soltanto la *probabilità* che l'ampiezza della vibrazione (o qualsiasi altra grandezza) superi un certo valore di riferimento. Nella parte teorica abbiamo avuto a che fare con vibrazioni random quando abbiamo parlato di raffica continua; nel settore aerospaziale si hanno vibrazioni random anche trattando le eccitazioni acustiche dovute a propulsori a getto oppure dovute all'accelerazione della base.

Definizioni statistiche

Definiamo anzitutto la *media d'insieme* come

$$E\{x(t_i)\} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Invece la *media temporale* è definita come

$$\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Prendiamo ora un generico segnale random $x(t)$; diciamo che tale segnale è **stazionario** se le sue proprietà statistiche (media e correlazione) non variano nel tempo. Il medesimo segnale invece si dice **ergodico** se ogni segnale che lo caratterizza ha le stesse proprietà statistiche degli altri, ossia se

$$E\{x(t)\} = \langle x \rangle = \mu$$

Funzioni di correlazione

Definiamo ora due funzioni di correlazione (autocorrelazione e cross-correlazione), le quali di base forniscono informazioni sui possibili legami tra diversi segnali random $x(t)$, $y(t)$ in un dato istante di tempo. La funzione di *autocorrelazione* è

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) dt = E\{x(t), x(t + \tau)\}$$

Vediamo che se $\tau = 0$ ⁶ allora si ha che

$$R_{xx}(0) = E\{x^2(t)\}$$

Ma $E\{x^2(t)\}$ non è altro che la *potenza media attesa* di $x(t)$ al tempo (t).

La funzione di *cross-correlazione* è invece

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot y(t + \tau) dt = E\{x(t), y(t + \tau)\}$$

N.B: Le funzioni di correlazione dipendono *solo* da $\tau = t_2 - t_1$ e non dai singoli t_1 e t_2 . Questa è una proprietà dei processi *stazionari*.

Proprietà della funzione di autocorrelazione

- $R_{xx}(0) \geq 0$.
- $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$ (funzione pari).
- $R_{xx}(\tau) \leq R_{xx}(0)$.
- Per funzioni causali, $R_{xx}(\tau) \rightarrow 0$ per $\tau \neq 0$.

Power Spectral Density (PSD)

La PSD quantifica la *distribuzione di potenza* di un segnale random nel dominio delle *frequenze*, ossia ci dice, in maniera "continua", qual è il contributo al segnale $x(t)$ di ogni ω , che varia in maniera continua.

Si chiama *power* perché definisce quanto contribuisce la frequenza, si chiama *spectral* perché lavoriamo nel dominio delle frequenze e, infine, si chiama *density* perché le frequenze sono continue e non discrete; parliamo infatti di contributi in un certo range di frequenze, e non di una singola frequenza.

La PSD è inoltre la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Analogamente, la funzione di autocorrelazione è l'antitrasformata di Fourier della PSD

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

Queste sono dette relazioni di Wiener - Chintschin.

Misura della PSD Consideriamo di avere sempre il nostro segnale random $x(t)$; operiamo una trasformata di Fourier e passiamo quindi al segnale nel dominio delle frequenze $X(\omega)$. Concentriamoci ora in un certo range di frequenze $\Delta\omega$, applicando di fatto un filtro passa banda al segnale $X(\omega)$. Calcoliamo infine la media del quadrato del segnale (\bar{X}^2). La PSD è definita quindi come il rapporto tra la media del quadrato del segnale nel dominio delle frequenze e il range di frequenze.

$$PSD = \frac{\bar{X}^2}{\Delta\omega}$$

⁶ τ è un intervallo di tempo $\tau = t_2 - t_1$; $\tau = 0$ significa $t_2 = t_1$.

Altre grandezze di interesse

Consideriamo un segnale *ergodico e stazionario* $x(t)$, che abbia valor medio μ_x . La **varianza** di questo segnale è definita come

$$\sigma_x^2 = E\{[x(t) - \mu_x]^2\} = E\{x^2(t)\} - 2\mu_x E\{x(t)\} + \mu_x^2$$

In quanto μ_x è una costante e $E\{\text{cost.}\} = 1$, oltre che poter uscire dall'operatore $E\{\cdot\}$. Ricordando infine che per un segnale ergodico $E\{x\} = \langle x \rangle = \mu$, abbiamo che

$$\sigma_x^2 = E\{x^2(t)\} - \mu_x^2$$

Se infine il segnale ha valor medio nullo ($\mu_x = 0$) allora si ha che

$$\sigma_x^2 = E\{x^2(t)\}$$

La radice quadrata della varianza è chiamata **deviazione standard** (RMS - Root Mean Square), per cui $RMS = \sigma_x$.

Relazione RMS - PSD

Con il teorema di Parsival possiamo trovare una relazione tra la potenza del segnale nel tempo e nel dominio delle frequenze. Scriviamo allora che la funzione di autocorrelazione per $\tau = 0$ di un segnale stazionario è

$$R_{xx}(0) = E\{x^2\}$$

Ma la funzione di autocorrelazione è anche data da

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega$$

Essendo $\tau = 0$ va via il contributo dell'esponenziale complesso. Il teorema di Parsival stabilisce quindi che

$$R_{xx}(0) = \sigma_x^2$$

Per cui possiamo dire che la RMS, pari alla radice della varianza, è data da

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega}$$

La RMS misura l'*ampiezza media* del segnale.

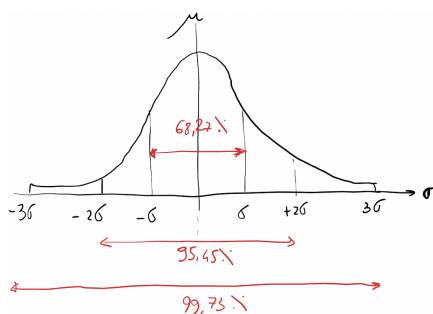


Figura 6.3

Applicazione a sistemi lineari a parametri costanti

Consideriamo un sistema lineare a parametri costanti soggetto ad una forzante random $f(t)$; la risposta (anch'essa random) $x(t)$ si calcola come abbiamo visto per le forzanti generiche.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Ossia con l'integrale di convoluzione; se immaginiamo ora di trasformare tutto con Fourier otteniamo

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (6.15)$$

Dove $H(\omega)$ è la cosiddetta *funzione di trasferimento*. Se calcoliamo allora la PSD otteniamo

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X^2(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega)$$

Dove $S_{FF}(\omega)$ è la PSD dei carichi. Abbiamo infine che la cross-PSD è

$$S_{xF} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X(\omega)F^*(\omega) = H(\omega)F(\omega)F^*(\omega) = H(\omega)S_{FF}(\omega)$$

Ricordando la potenza media attesa (= funzione di autocorrelazione per $\tau = 0$) si ottiene che allora

$$R_{xx}(0) = E\{x^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega) d\omega$$

La FRF ($H(\omega)$) per esempio nel sistema classico MCK è

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_n\omega} \rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}$$

Nel caso particolare in cui la forzante sia *rumore bianco*, ossia si abbia

$$S_{FF}(\omega) = \text{cost.} = S_f$$

Si ha che

$$R_{xx}(0) = E\{x^2(t)\} = \frac{S_f}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

Per il caso di sistema MCK, la cui FRF è stata esplicitata poco sopra, si ha quindi una soluzione analitica data da

$$E\{x^2(t)\} = \frac{S_f}{4\xi\omega_n^3} = \frac{S_F}{4\xi\omega_n^3 m^2}$$

Dove $S_F = S_f m^2$.

Caso sistemi a più gradi di libertà

Immaginiamo di avere un sistema N DOF che scriviamo in coordinate modali diagonalizzando il sistema e ottenendo quindi delle equazioni disaccoppiate del tipo

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = \frac{q_i(t)}{m}$$

La PSD per le forze esterne vale

$$S_{q_i q_j} = [\Phi]^T [S_{FF}] [\Phi]$$

Dove

$$S_{F_i F_j}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{F_1 F_1} & \dots & S_{F_1 F_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{F_n F_1} & \dots & S_{F_n F_n} \end{bmatrix}$$

Per carichi *non correlati* si ha $S_{F_i F_j} = 0 \quad \forall i \neq j$.

Assumendo quindi che

$$\eta(t) = \Pi(\omega)e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad q(t) = Q(\omega)e^{i\omega t}$$

Con

$$\Pi_i(\omega) = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_i\omega} \frac{Q_i(\omega)}{m} = H(\omega) \frac{Q_i(\omega)}{m}$$

Possiamo scrivere in forma matriciale che

$$S_{\eta_i \eta_j} = \left[\frac{H_i(\omega)}{m_i} \right] [\Phi]^T [S_{F_i F_j}] [\Phi] \left[\frac{H_j(\omega)}{m_j} \right]$$

Ricordando infine che $\{\eta\} = [\Phi]\{x\}$, possiamo ottenere che

$$[S_{x_i x_j}] = [\Phi] \left[\frac{H_i(\omega)}{m_i} \right] [\Phi]^T [S_{F_i F_j}] [\Phi] \left[\frac{H_j(\omega)}{m_j} \right] [\Phi]^T$$

Dalla PSD dello spostamento possiamo ottenere poi la PSD delle forze interne (stress) e della velocità (forze viscose).

$$[S_{\dot{x}_i \dot{x}_j}] = \omega^2 [S_{x_i x_j}]$$

$$[S_{\sigma_i \sigma_j}] = [D_\sigma] [\Phi] [S_{\eta_i \eta_j}] [\Phi]^T [D_\sigma]^T$$

Dove $[D_\sigma]$ è la stress (force) matrix.