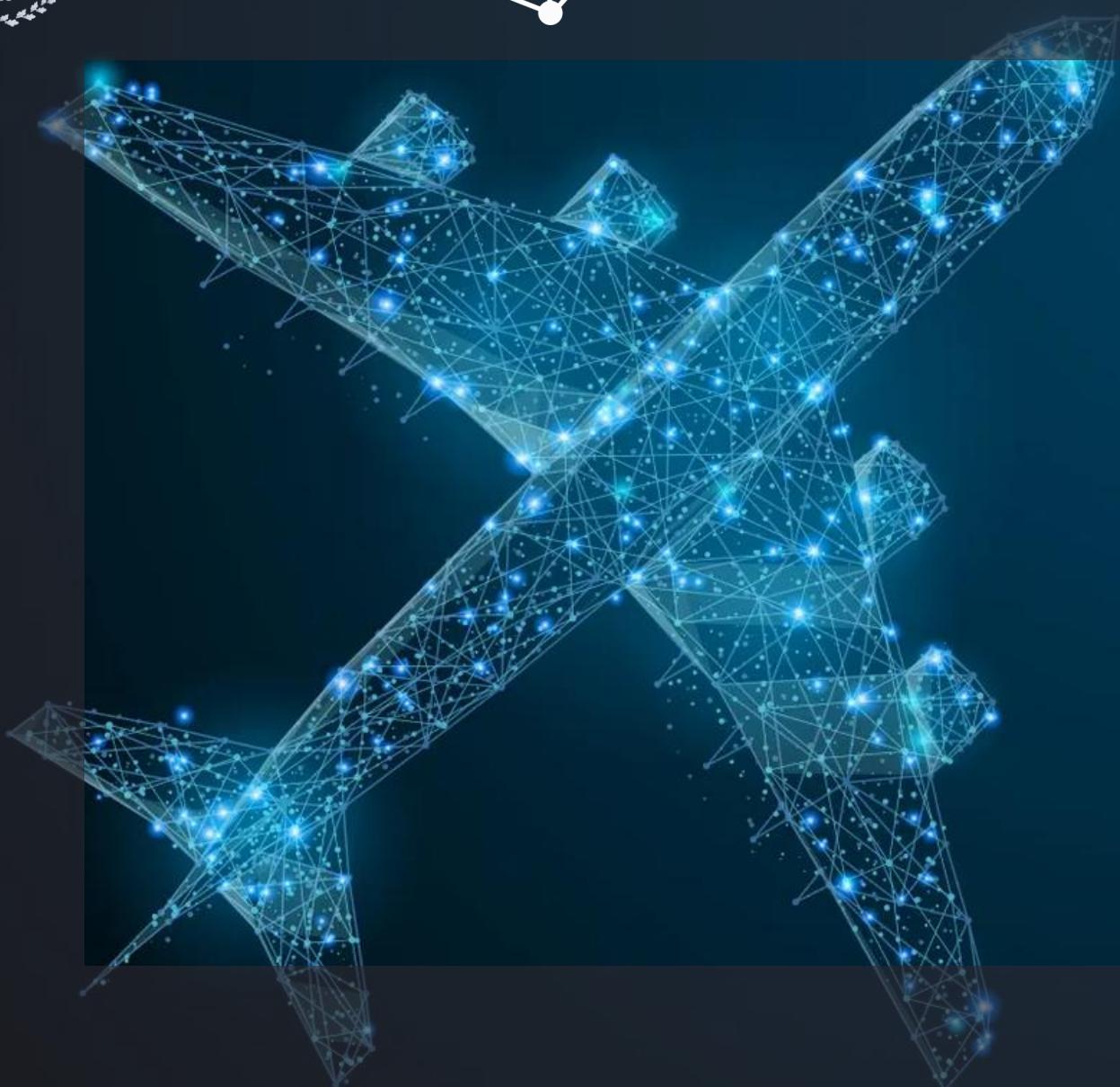




Politecnico  
di Torino



Progettazione di veicoli aerospaziali  
(AA-LZ)

E2. Conceptual design of regional  
hybrid-electric aircraft

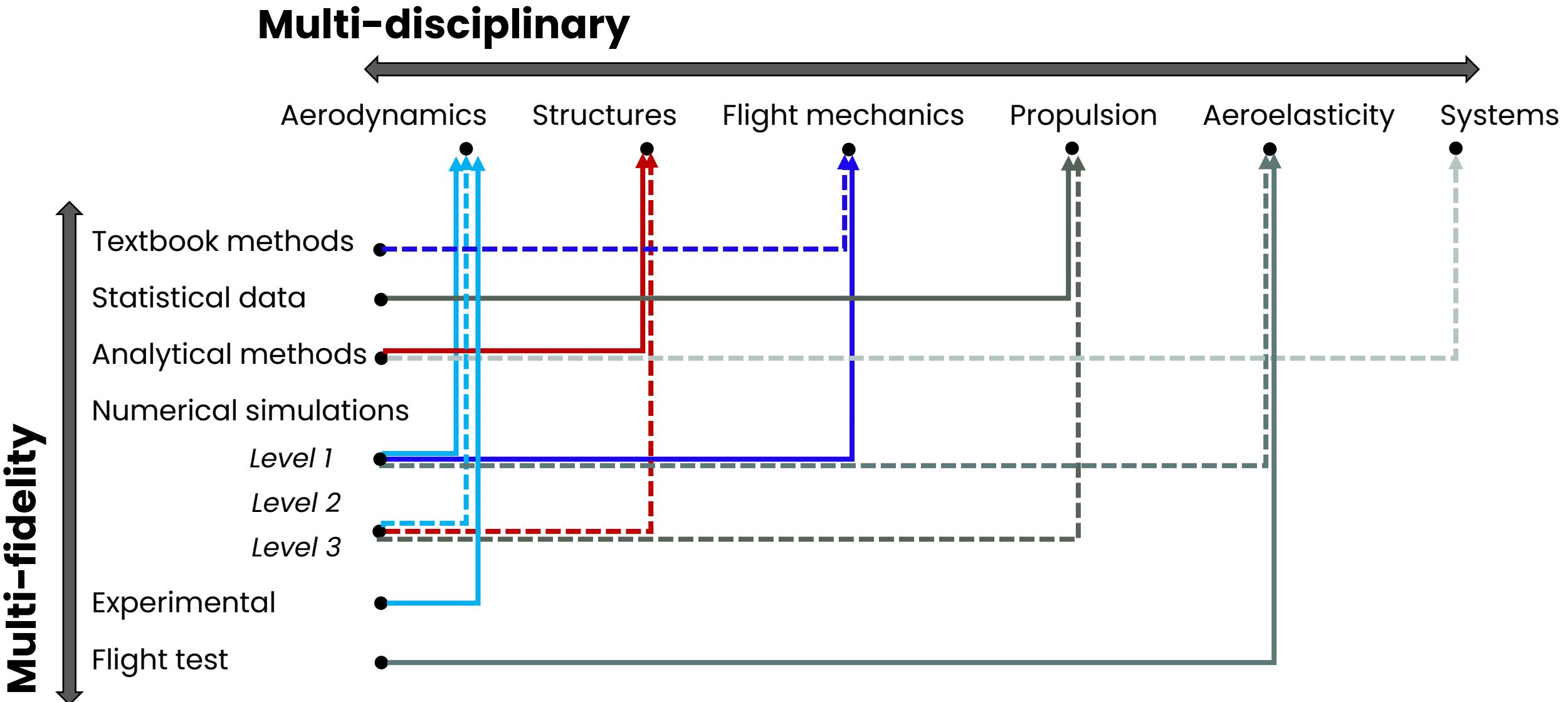
## 12. HEA Performance

**Karim Abu Salem**  
[karim.abusalem@polito.it](mailto:karim.abusalem@polito.it)

**Giuseppe Palaia**  
[giuseppe.palaia@polito.it](mailto:giuseppe.palaia@polito.it)

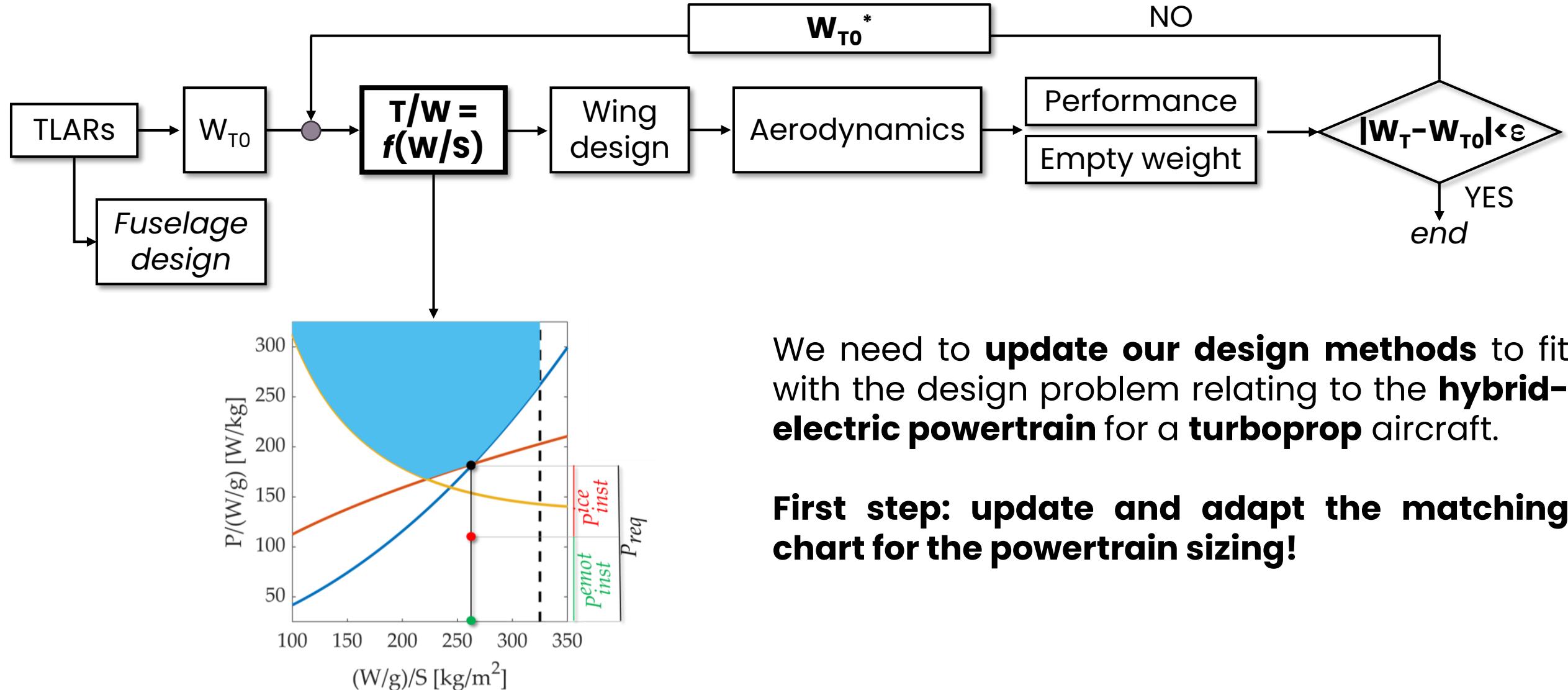


# Recap: The Aircraft Design Process





# Recap: The Aircraft Design Process





# Recap: Matching Chart

TLARs and Mission

Matching chart

Landing  
Equation

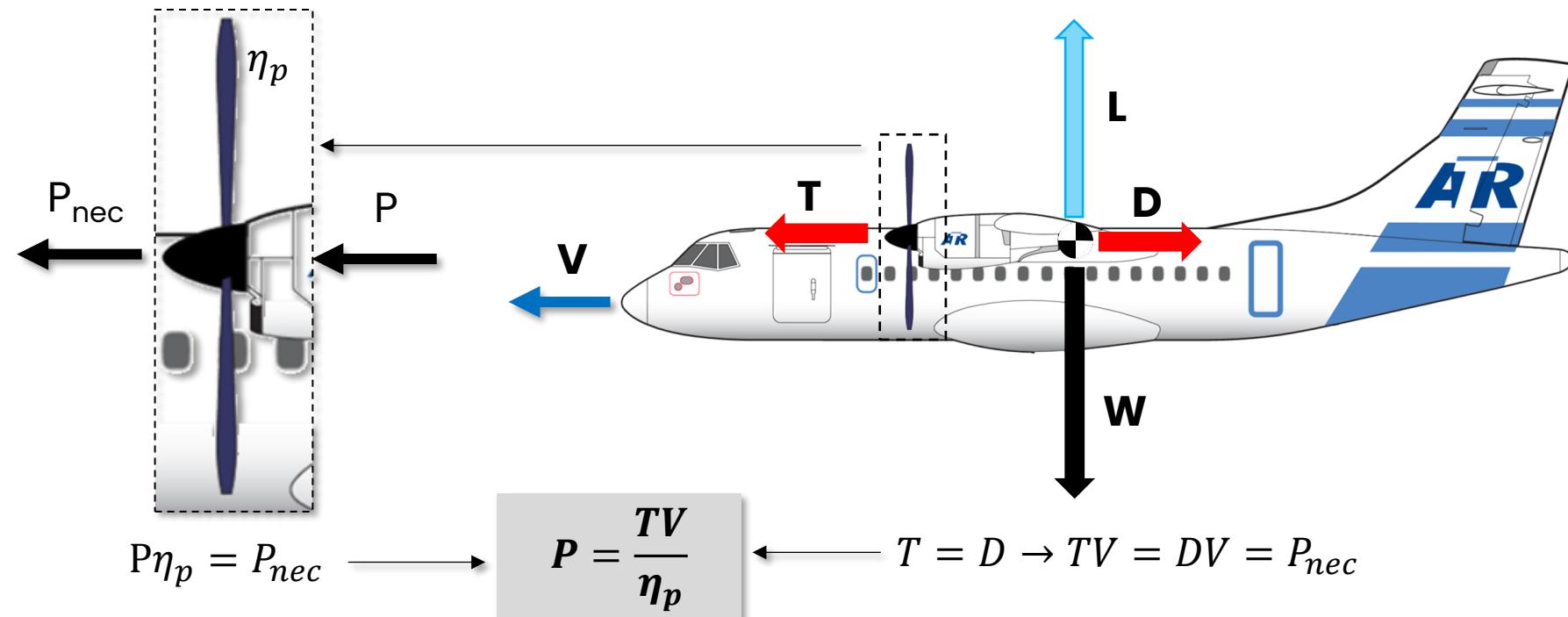
Take-off  
Equation

Climb  
1<sup>st</sup>, 2<sup>nd</sup> and final segment  
Approach climb

Cruise  
Equation

Powertrain architecture  
Serial  
Parallel

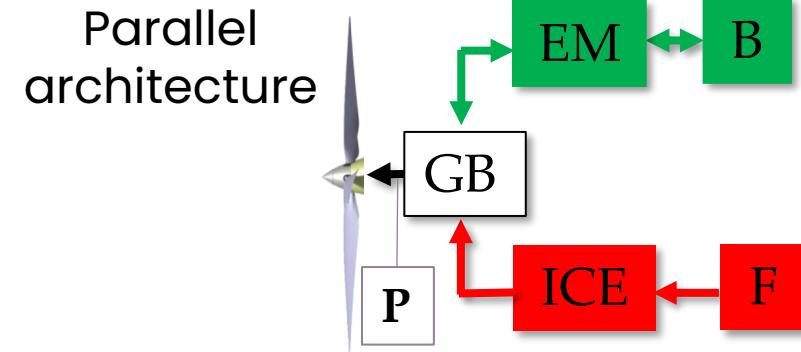
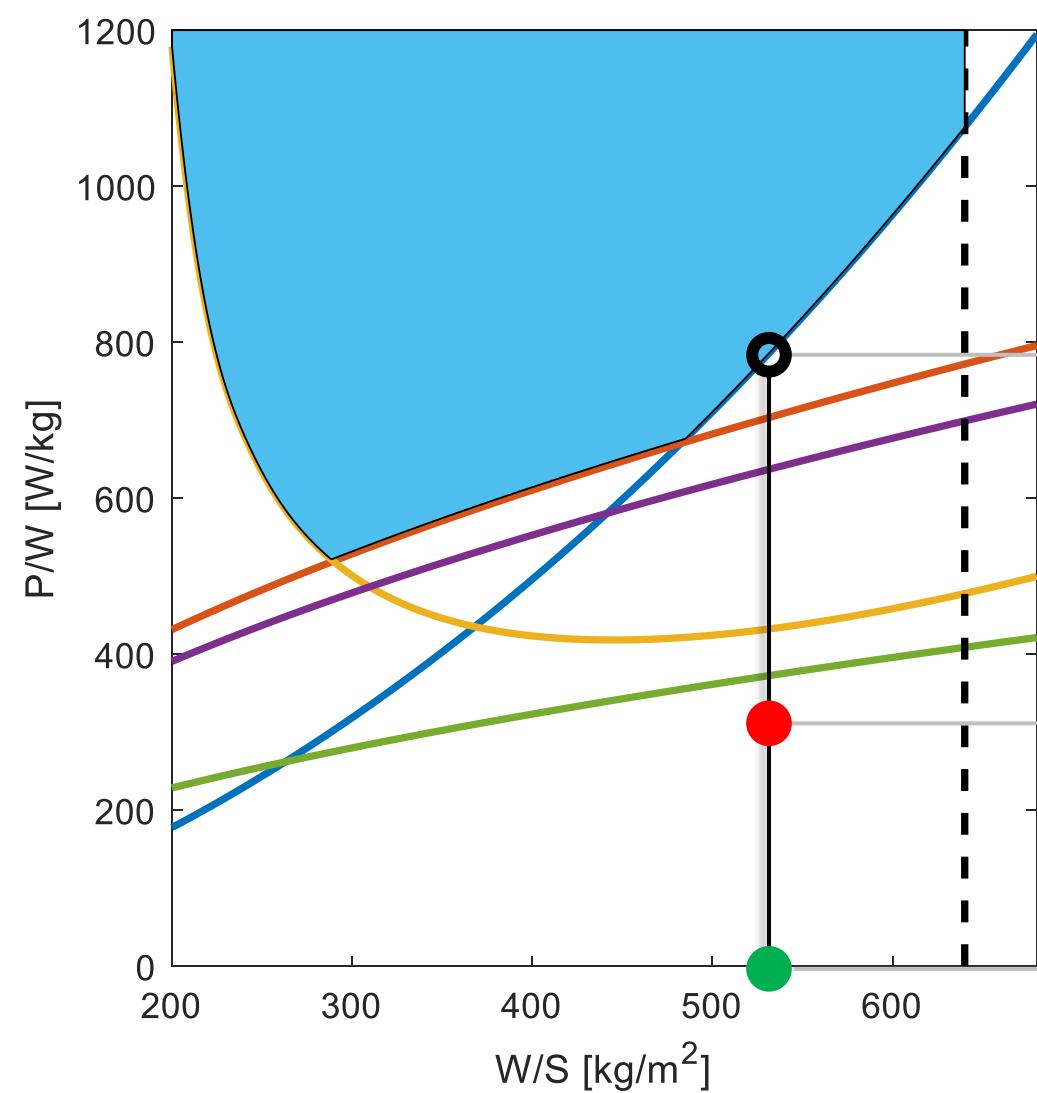
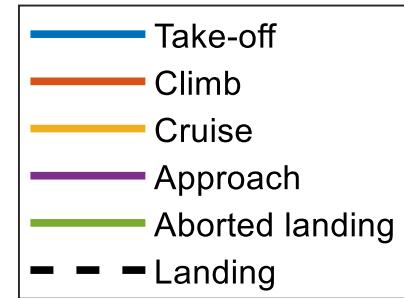
We need to **update the matching chart equations** by assessing the **power request** to accomplish a specific flight phase



$P$  = power supplied to the propeller shaft by the propulsion system  
 $P_{nec}$  = power requested to fly  
 $\eta_p$  = propeller efficiency



# Recap: HEA – Powertrain sizing: Parallel



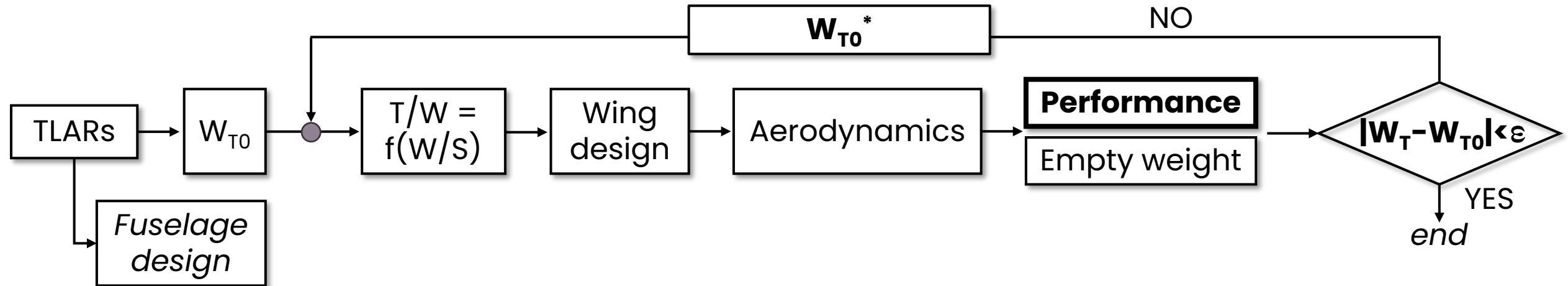
$P_{\text{electrical}}$        $P_{\text{thermal}}$

$P$

$$P_{\text{inst}} = P$$



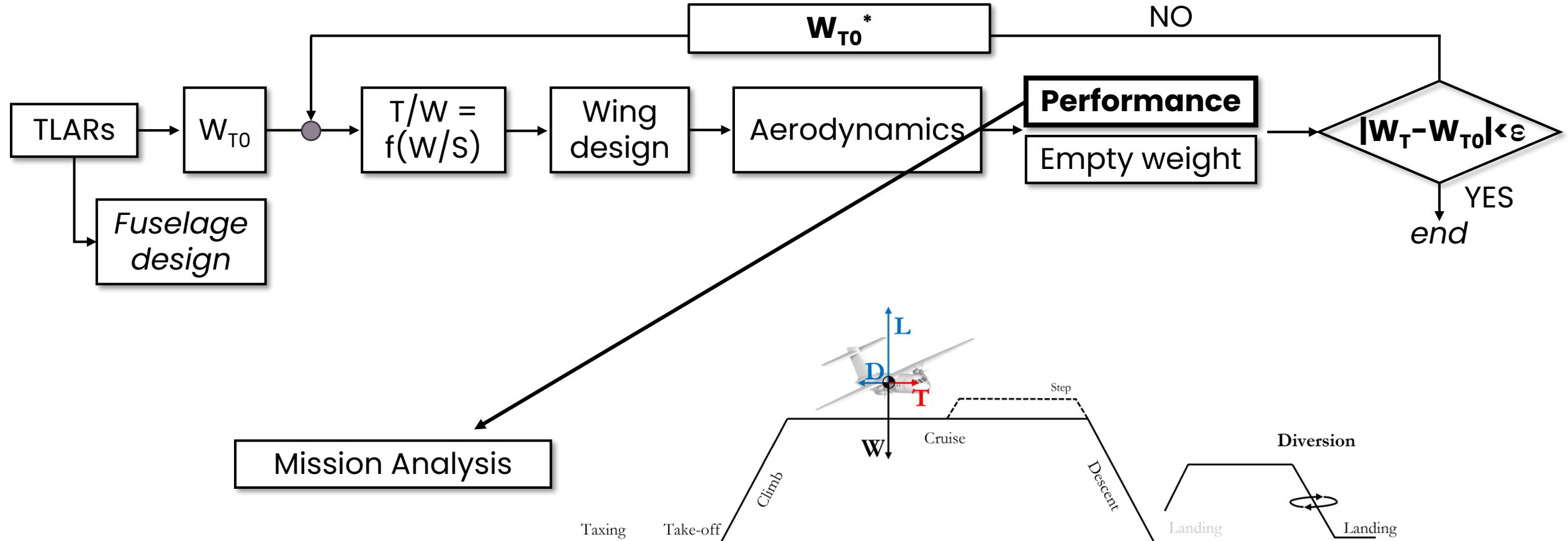
# Recap: The Aircraft Design Process



Riferimento per approfondimenti: Palaia G., Abu Salem K., "**Mission performance analysis of hybrid-electric regional aircraft**," Aerospace, vol. 10(3), 246, 2023, <https://doi.org/10.3390/aerospace10030246>



# Recap: The Aircraft Design Process



Riferimento per approfondimenti: Palaia G., Abu Salem K., **"Mission performance analysis of hybrid-electric regional aircraft,"** Aerospace, vol. 10(3), 246, 2023, <https://doi.org/10.3390/aerospace10030246>



# Analisi di missione: overview

**Obiettivo principale:** caratterizzazione delle prestazioni di un velivolo regionale ibrido-elettrico in riferimento alla sua missione

Esistono diversi approcci allo studio delle prestazioni dei velivoli:

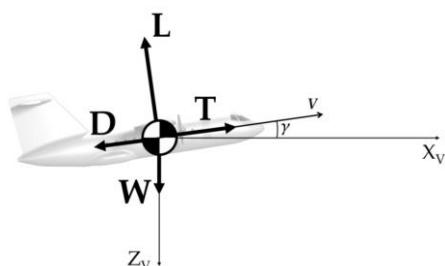
## Modelli semplificati/analitici

Formula di Breguet

$$\frac{W_{i+1}}{W_i} = e^{-\frac{c \cdot \Delta x_i}{V \cdot E}}$$

## Modelli dinamici/simulativi

Equazioni del moto + integrazione numerica



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{g} \dot{V} = T - D - W \sin \gamma \\ \frac{W}{g} V \dot{\gamma} = L - W \cos \gamma \\ V_x = V \cos \gamma \\ V_z = -V \sin \gamma \\ \dot{W} = -k_c P_e \end{array} \right.$$

# Analisi di missione: overview



**Obiettivo principale:** caratterizzazione delle prestazioni di un velivolo regionale ibrido-elettrico in riferimento alla sua missione

Esistono diversi approcci allo studio delle prestazioni dei velivoli:

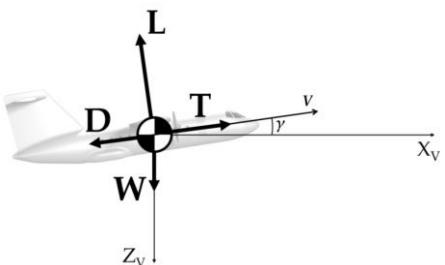
## Modelli semplificati/analitici

Formula di Breguet

$$\frac{W_{i+1}}{W_i} = e^{-\frac{c \cdot \Delta x_i}{V \cdot E}}$$

## Modelli dinamici/simulativi

Equazioni del moto + integrazione numerica



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{g} \dot{V} = T - D - W \sin \gamma \\ \frac{W}{g} V \dot{\gamma} = L - W \cos \gamma \\ V_x = V \cos \gamma \\ V_z = -V \sin \gamma \\ \dot{W} = -k_c P_e \end{array} \right.$$

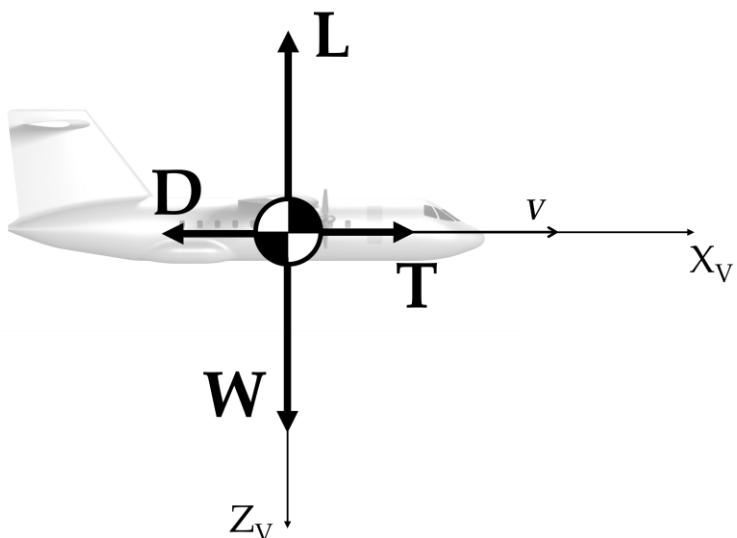


# Analisi di missione: programmi di volo

$$L = W$$

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S C_L = W$$

$$\frac{1}{2} \rho(t) V^2(t) S C_L(t) = W(t)$$



**Weight changes** (decreases) during flight. Lift must follow accordingly!

Different possible 'actions', that here we call **flight programs**, are possible to satisfy this condition. Some simplified flight programs are:

- constant **altitude** and **speed** (**attitude** varies)
- constant **altitude** and **attitude** (**speed** varies)
- constant **speed** and **attitude** (**altitude** varies)



# Breguet range equation

$$X = \frac{V_E}{C} \ln \left( \frac{W_{in}}{W_{fin}} \right)$$

**Main assumptions (detailed in the following):**

- 1. Point-mass aircraft
  - 2. Flight in the vertical plane
  - 3. Quasi-steady motion
- +
- 4. Quasi-level flight



# Breguet range equation

$$X = \frac{V_E}{C} \ln \left( \frac{W_{in}}{W_{fin}} \right)$$

Diagram illustrating the Breguet range equation:

- Speed (flight program) points to  $V_E$
- Aerodynamics (L/D ratio) points to  $C$
- Fuel quantity points to  $\frac{W_{in}}{W_{fin}}$
- Propulsion (specific consumption) points to  $C$

**Main assumptions (detailed in the following):**

1. Point-mass aircraft
  2. Flight in the vertical plane
  3. Quasi-steady motion
- +
4. Quasi-level flight



# Analisi di missione: overview

**Obiettivo principale:** caratterizzazione delle prestazioni di un velivolo regionale ibrido-elettrico in riferimento alla sua missione

Esistono diversi approcci allo studio delle prestazioni dei velivoli:

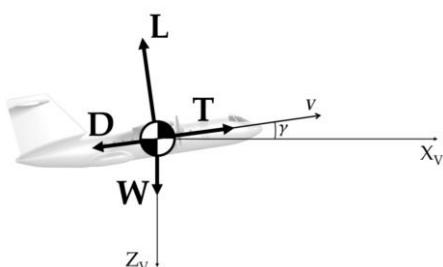
## Modelli semplificati/analitici

Formula di Breguet

$$\frac{W_{i+1}}{W_i} = e^{-\frac{c \cdot \Delta x_i}{V \cdot E}}$$

## Modelli dinamici/simulativi

Equazioni del moto + integrazione numerica

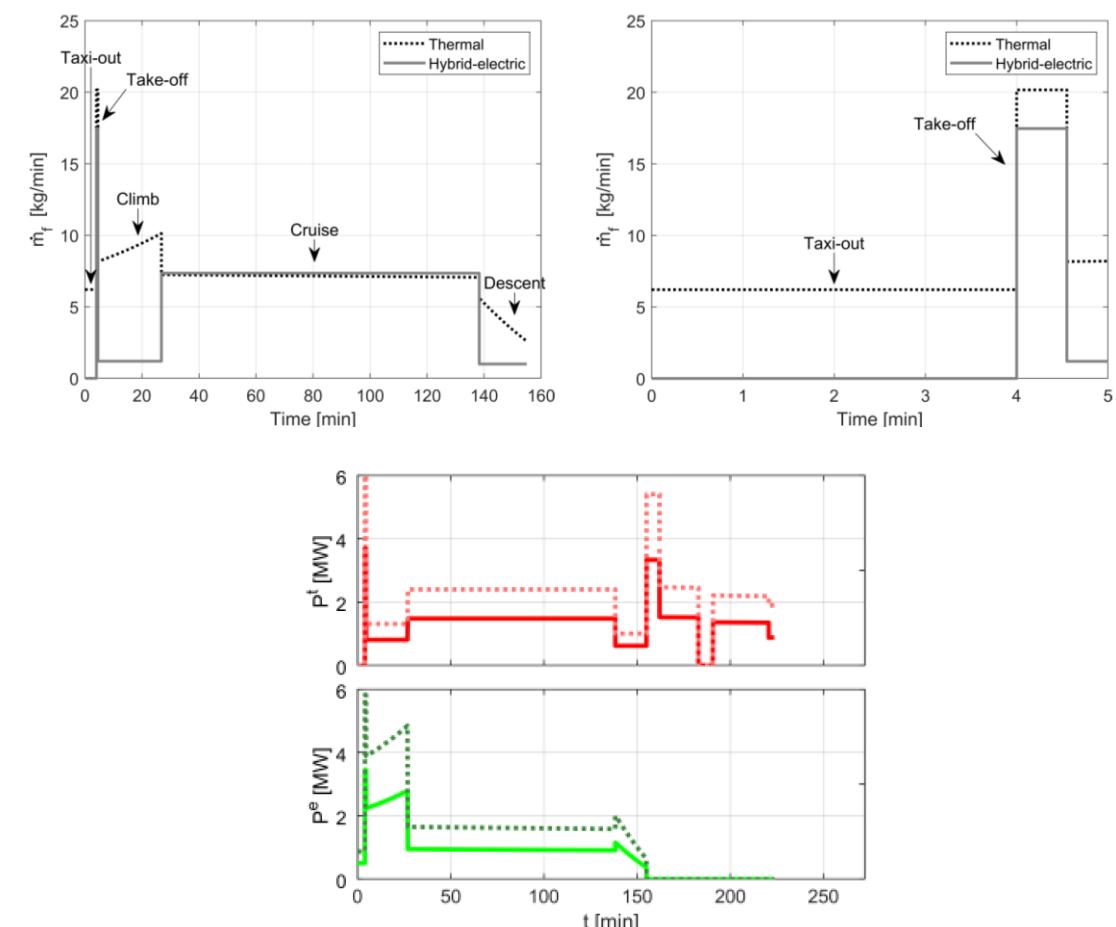
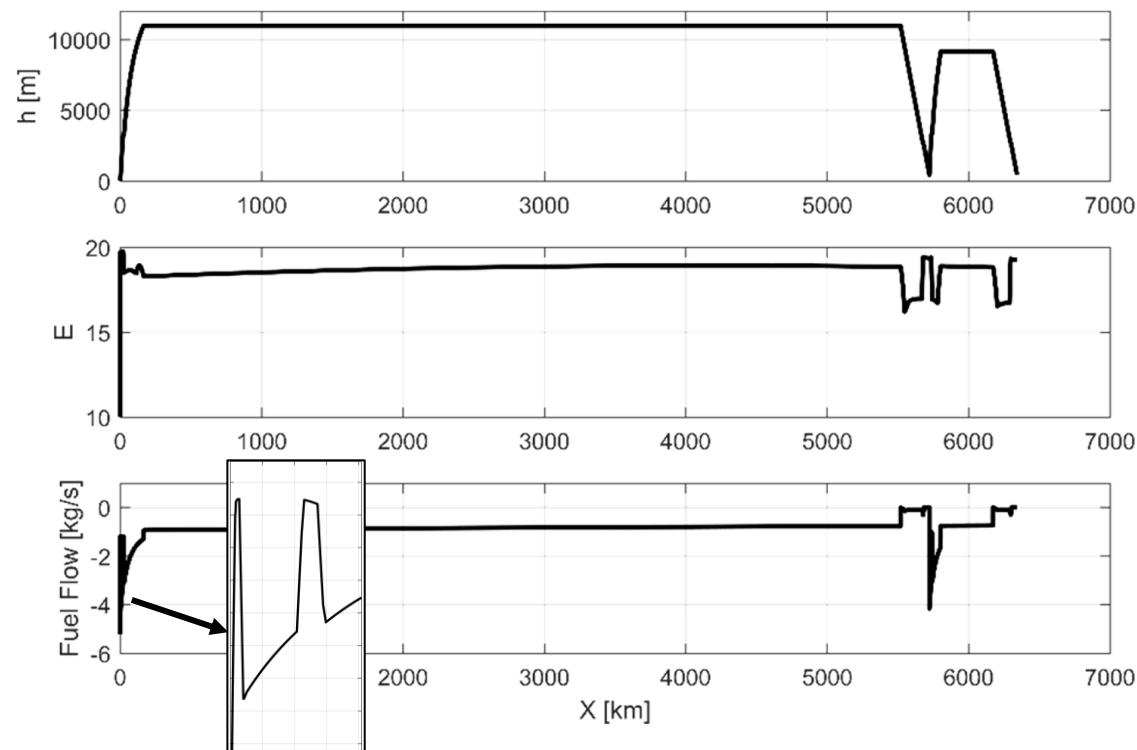


$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{g} \dot{V} = T - D - W \sin \gamma \\ \frac{W}{g} V \dot{\gamma} = L - W \cos \gamma \\ V_x = V \cos \gamma \\ V_z = -V \sin \gamma \\ \dot{W} = -k_c P_e \end{array} \right.$$



# Analisi di missione: approccio simulativo

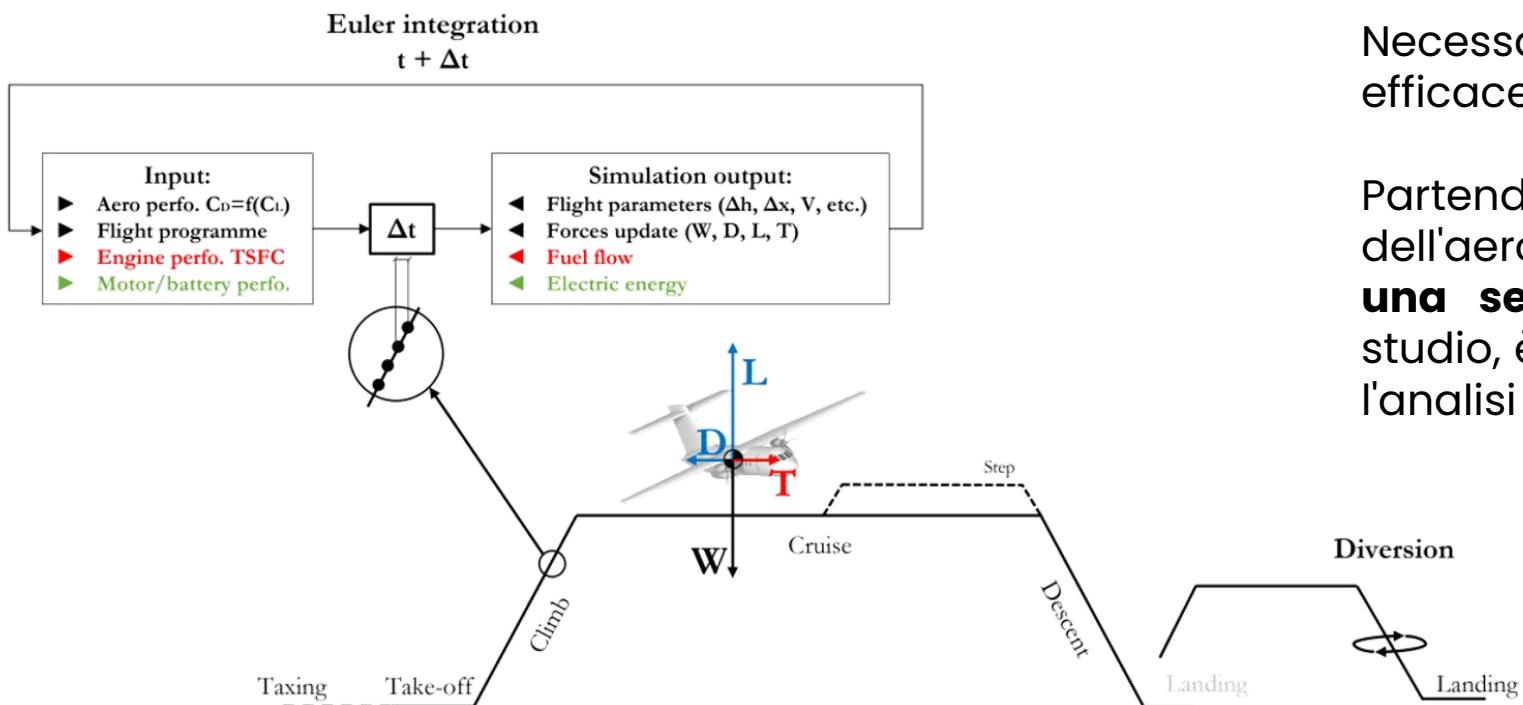
Tale approccio all'analisi della missione consente di **simulare la traiettoria di volo** dell'aereo e ottenere in output **l'andamento di tutte le variabili dipendenti dal tempo**, utili per effettuare analisi dettagliate delle prestazioni.





# Analisi di missione: approccio simulativo

L'analisi delle prestazioni viene condotta adottando tecniche di simulazione della missione; nello specifico, le equazioni del moto del velivolo, trattato come una punto materiale, vengono integrate numericamente nel tempo per valutare le caratteristiche aerodinamiche, aeromeccaniche e ponderali a ogni istante del volo, al fine di caratterizzare le prestazioni della missione.



Necessario costruire un **modello matematico** efficace e coerente del moto dell'aeromobile.

Partendo dalle equazioni complete del moto dell'aeromobile e **introducendo progressivamente una serie di semplificazioni** adeguate al caso studio, è possibile derivare un modello dedicato per l'analisi delle prestazioni.

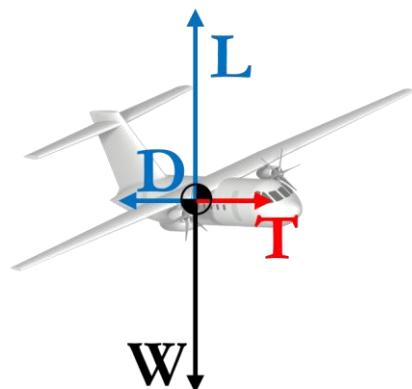


# Analisi di missione: ipotesi

**1. La prima semplificazione** principale introdotta nel modello dinamico dell'aeromobile specializzato allo studio delle prestazioni, è quella di considerare **l'aeromobile come un punto materiale**.

In questo modo, lo studio si limita **al moto del centro di gravità dell'aeromobile**, mentre i movimenti attorno ad esso (ad esempio, in caso di risposta a disturbi o cambiamenti nelle condizioni di equilibrio) sono considerati trascurabili per le prestazioni complessive.

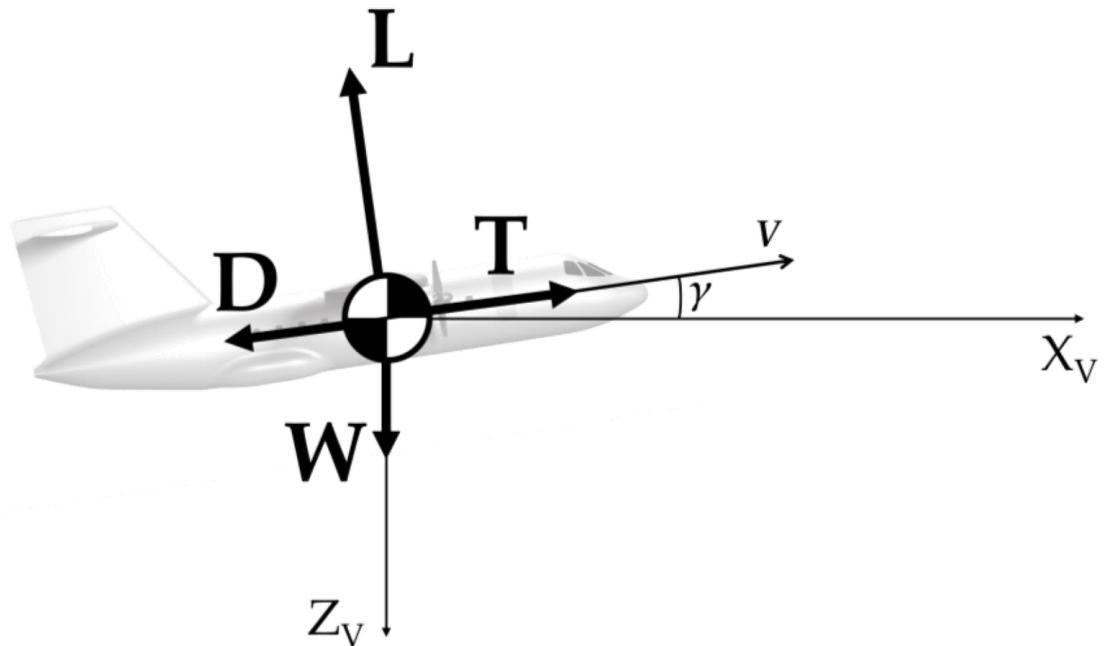
Con questa semplificazione, le equazioni del moto dell'aeromobile punto materiale si riducono alle sole equazioni delle forze, mentre le equazioni dei momenti possono essere trascurate. Le forze agenti sul centro di gravità sono le azioni aerodinamiche di **portanza L e resistenza D**, il **peso W** e la **spinta T**. Si considera la forza di spinta sempre allineata con la velocità dell'aeromobile.





# Analisi di missione: ipotesi

**2. La seconda semplificazione** introdotta nel modello dinamico dell'aeromobile è quella di considerare le prestazioni di volo per un velivolo **la cui traiettoria di missione si sviluppa solo sul piano verticale**. Pertanto, si considerano le fasi di volo di decollo, salita, crociera, discesa e avvicinamento, mentre le virate sono trascurate.



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{g} \dot{V} = T - D - W \sin \gamma \\ \frac{W}{g} V \dot{\gamma} = L - W \cos \gamma \\ V_x = V \cos \gamma \\ V_z = -V \sin \gamma \\ \dot{W} = -k_c P_e \end{array} \right.$$

La traiettoria e le prestazioni associate di un aeromobile possono quindi essere calcolate integrando nel tempo le equazioni del moto; l'integrazione può essere eseguita utilizzando diverse tecniche numeriche. L'accoppiamento di un set appropriato di equazioni per la dinamica di un sistema (in questo caso, un aeromobile) con i relativi metodi di integrazione temporale consente di definire ciò che comunemente viene inteso come un simulatore.

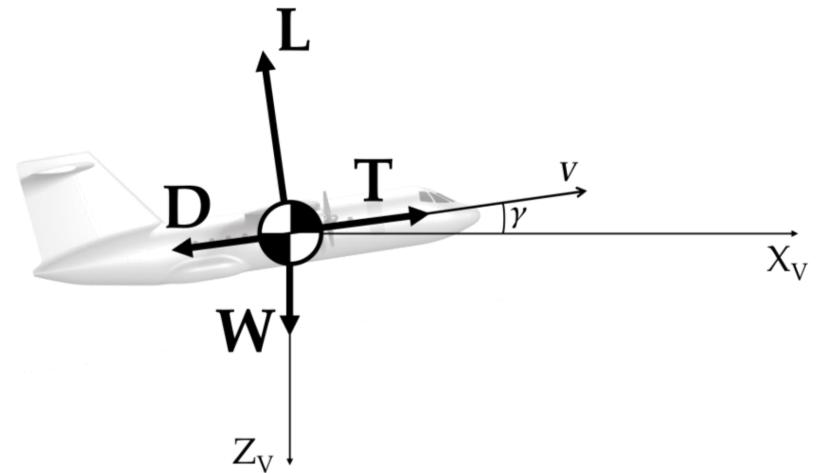


# Analisi di missione: ipotesi

Le equazioni sono scritte considerando il sistema di riferimento **assi-vento**, mentre la traiettoria è calcolata nel sistema di riferimento verticale locale.

$W$  è il peso del velivolo,  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $V$  è la velocità,  $T$  è la spinta,  $L$  è la portanza,  $D$  è la resistenza,  $\gamma$  è la pendenza della traiettoria,  $k_c$  è il power-specific fuel consumption e  $P_e$  è la potenza erogata. Tutte le grandezze sono funzioni temporali, tranne  $g$  e  $k_c$ , che sono considerati costanti. Le variabili puntate indicano la **derivata temporale** della grandezza considerata.

La traiettoria del velivolo e le relative prestazioni, come il consumo di carburante, il tempo di volo, la distanza percorsa, ecc. possono essere ottenute integrando nel tempo le equazioni del moto, fornite le **condizioni iniziali** e gli opportuni **programmi di volo** selezionati per ogni fase della missione.



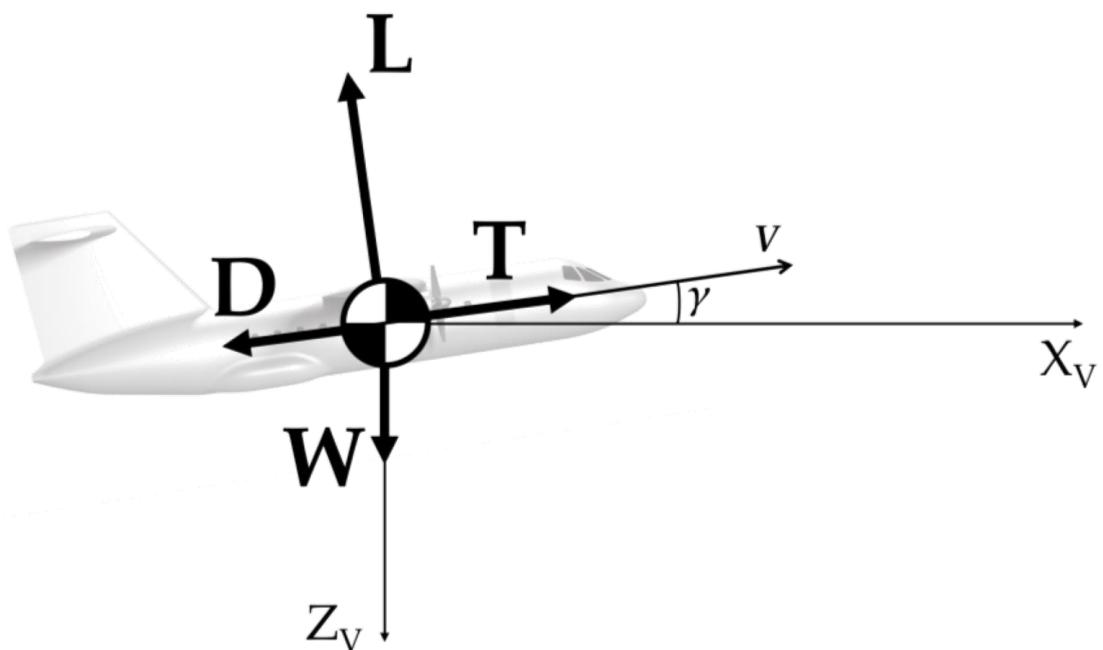
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{g} \dot{V} = T - D - W \sin \gamma \\ \frac{W}{g} V \dot{\gamma} = L - W \cos \gamma \\ V_x = V \cos \gamma \\ V_z = -V \sin \gamma \\ \dot{W} = -k_c P_e \end{array} \right.$$



# Analisi di missione: ipotesi

**3. La terza semplificazione** è quella di considerare il **moto quasi-stazionario**. Le variazioni di velocità, quota, ed assetto sono lente e graduali, e pertanto le accelerazioni traslazionali e rotazionali possono essere trascurate.

L'aeromobile si trova in equilibrio istantaneo in ogni momento, poiché le forze in gioco bilanciano ogni accelerazione. Questa condizione risulta valida per fasi quali salita, discesa e crociera (ove le variazioni di velocità o assetto risultano lente).

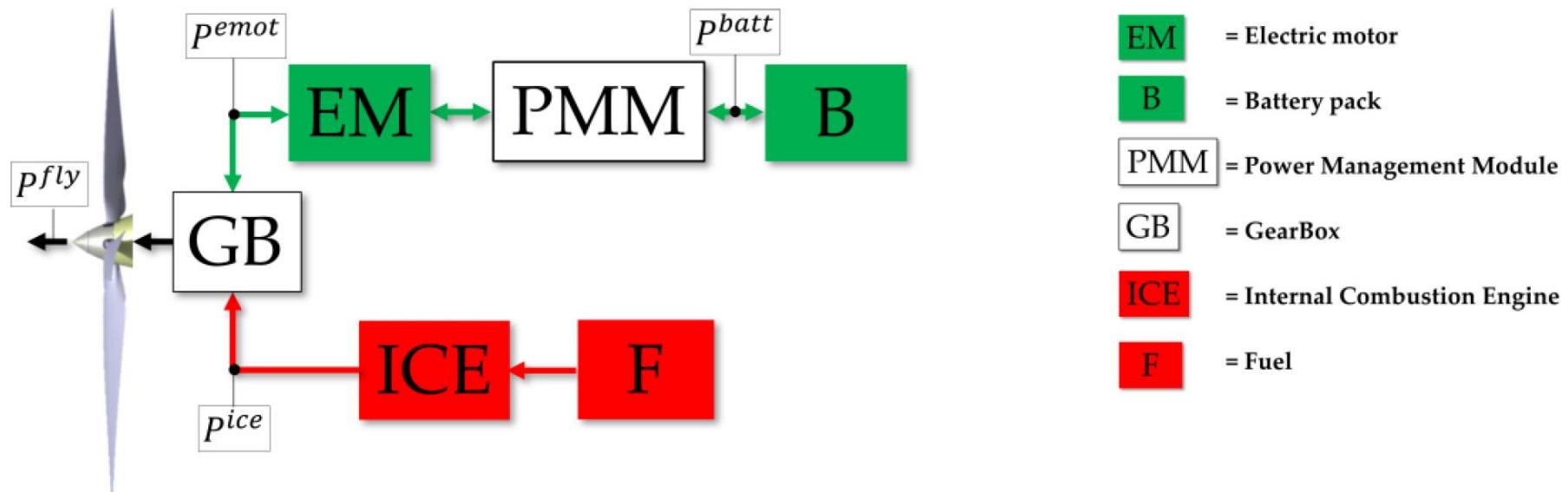


$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{g} \dot{V} = T - D - W \sin \gamma \\ \frac{W}{g} V \dot{\gamma} = L - W \cos \gamma \\ V_x = V \cos \gamma \\ V_z = -V \sin \gamma \\ \dot{W} = -k_c P_e \end{array} \right.$$



# Analisi di missione: power management

In questo lavoro è stato selezionato un **powertrain ibrido-elettrico con architettura parallela**; con questa configurazione, le fonti termiche ed elettriche possono fornire energia all'elica in modo indipendente. Il motore elettrico e il motore termico sono collegati all'elica da una gearbox.



Rispetto ai velivoli alimentati da un'unica fonte di potenza ed energia, come i velivoli turboelica convenzionali, **i velivoli ibridi richiedono una caratterizzazione dell'alimentazione durante la missione**. In particolare, è necessario determinare quale fonte di potenza ed energia, ed in quale proporzione, deve essere fornita in un determinato momento o fase della missione.



# Analisi di missione: power management

**Un aspetto chiave per stimare le prestazioni dell'aeromobile è la strategia di erogazione della potenza.** Questa introduce variabili fondamentali per valutare correttamente il bilancio di potenza dell'aeromobile ibrido-elettrico, ovvero come la potenza viene fornita dalle catene termica ed elettrica per soddisfare la potenza richiesta per il volo. Il power management di questo tipo di velivoli è descritto dalla seguente equazione.

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{\text{fly}} = DV + VW \sin \gamma \\ P^{\text{ice}} + P^{\text{emot}} = \frac{P^{\text{fly}}}{(\eta_{\text{gear}} \eta_{\text{prop}})} = P^{\text{nec}} \end{array} \right.$$

Nello specifico, **la potenza richiesta per il volo  $P^{\text{fly}}$  deve essere bilanciata a ogni istante della missione dalla somma della potenza erogata dalla catena termica  $P^{\text{ice}}$  e dalla quella elettrica  $P^{\text{emot}}$ , al netto delle perdite meccaniche**, espresse dalle efficienze della gearbox  $\eta_{\text{gear}}$  e dell'elica  $\eta_{\text{prop}}$ ; si identifica in questo modo la **potenza necessaria  $P^{\text{nec}}$**  in ogni istante della missione.

Le grandezze sono variabili dipendenti dal tempo, ad eccezione delle efficienze considerate costanti.



# Analisi di missione: power management

Questo aspetto introduce nuove variabili, legate alla strategia di erogazione della potenza elettrica e termica durante il volo. Queste variabili sono definite come la frazione di potenza termica  $\Phi^{\text{ice}}$  e la frazione di potenza elettrica  $\Phi^{\text{el}}$ , definite come segue:

$$\Phi^{\text{ice}}(t) = \frac{P^{\text{ice}}(t)}{P_{\text{inst}}^{\text{ice}}}$$

$$\Phi^{\text{el}}(t) = \frac{P^{\text{emot}}(t)}{P_{\text{inst}}^{\text{emot}}}$$

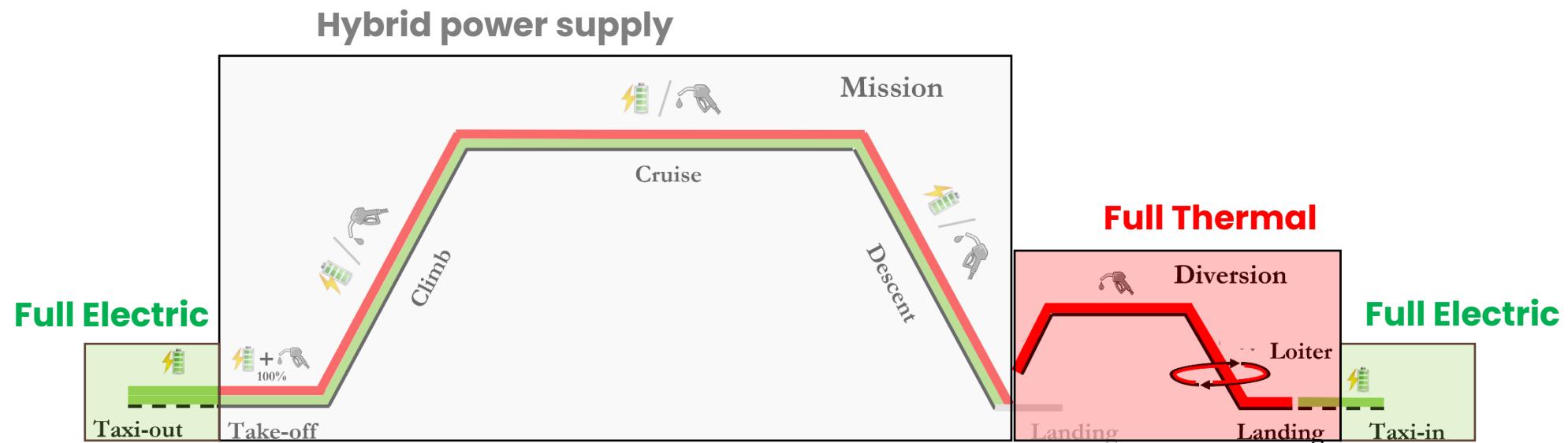
**Data la potenza necessaria  $P^{\text{nec}}$  e assegnato un  $\Phi^{\text{ice}}$ , è possibile identificare in modo univoco l'andamento temporale dell'erogazione della potenza termica ed elettrica lungo tutta la missione.**



# Analisi di missione: power management

Agendo su queste variabili, un dato velivolo può presentare diverse prestazioni in termini di consumo di carburante e massa delle batterie necessaria per una certa missione. **Per questo motivo, è necessario definire preliminarmente alcune ipotesi relative alle variabili di power management.**

Nella figura viene proposto uno schema semplificato a questo proposito. Innanzitutto, è opportuno iniziare con una chiara distinzione nella strategia di gestione della potenza tra missione standard e diversione. A tal riguardo è stato posto un assunto di base: le batterie possono essere utilizzate solo durante le fasi della missione standard, mentre la diversione è effettuata solo con l'utilizzo di potenza ed energia termica.



# Analisi di missione: power management



## Missione standard

Taxiing: *Full electric*

Take-off: *Max available power*

Climb: *Thermal/Electric*

Cruise: *Thermal/Electric*

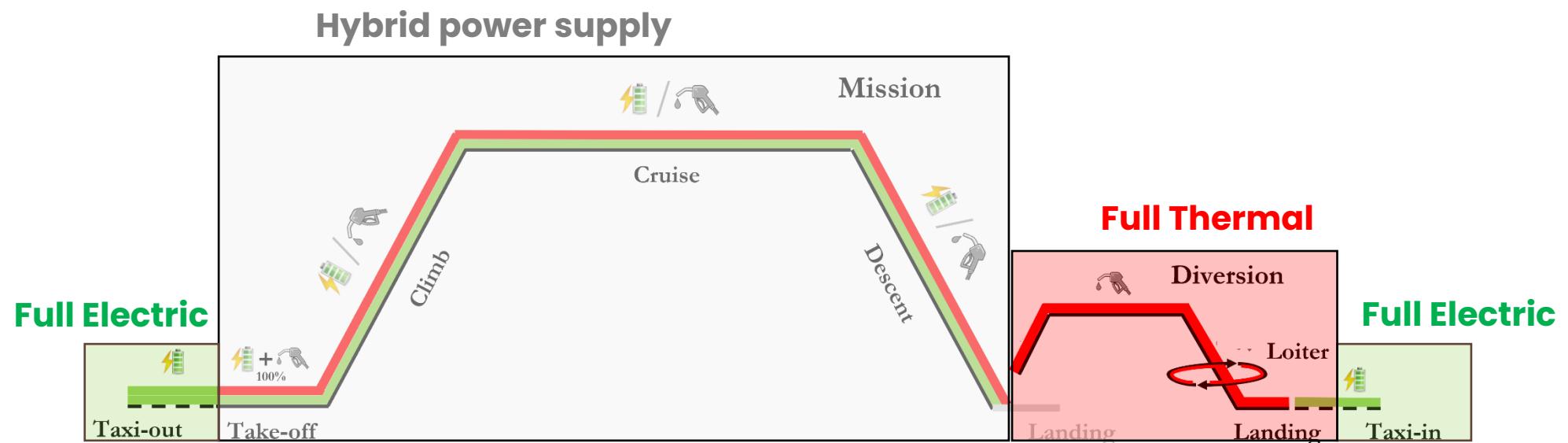
Descent: *Thermal/Electric*

## Diversione

Climb: *Thermal*

Cruise: *Thermal*

Descent: *Thermal*

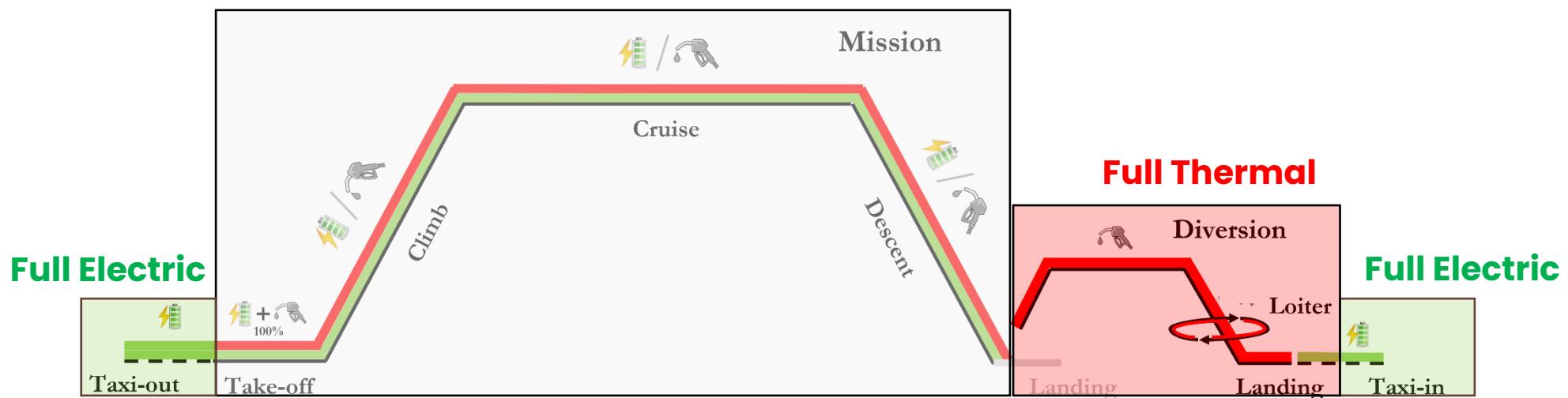




# Analisi di missione: power management

		Thermal Power Fraction	Electric Power Fraction
Mission	Taxi-out/in	$\Phi^{\text{ice}}(t) = 0$	$\Phi^{\text{el}}(t) = 0.07 P_{\text{inst}}^{\text{tot}}$
	Take-off	$\Phi^{\text{ice}}(t) = 1$	$\Phi^{\text{el}}(t) = 1$
	Climb	$\Phi^{\text{ice}}(t) = \text{const.}$	$\Phi^{\text{el}}(t) = f(\Phi(t), \Phi_{\text{climb opt}}^{\text{ice}})$
	Cruise	$\Phi^{\text{ice}}(t) = \text{const.}$	$\Phi^{\text{el}}(t) = f(\Phi(t), \Phi_{\text{cruise opt}}^{\text{ice}})$
	Descent	$\Phi^{\text{ice}}(t) = \text{const.}$	$\Phi^{\text{el}}(t) = f(\Phi(t), \Phi_{\text{desc opt}}^{\text{ice}})$
Diversion	Climb <sub>div</sub>	$\Phi^{\text{ice}}(t) = \Phi(t)$	$\Phi^{\text{el}}(t) = 0$
	Cruise <sub>div</sub>	$\Phi^{\text{ice}}(t) = \Phi(t)$	$\Phi^{\text{el}}(t) = 0$
	Descent <sub>div</sub>	$\Phi^{\text{ice}}(t) = \Phi(t)$	$\Phi^{\text{el}}(t) = 0$

## Hybrid power supply

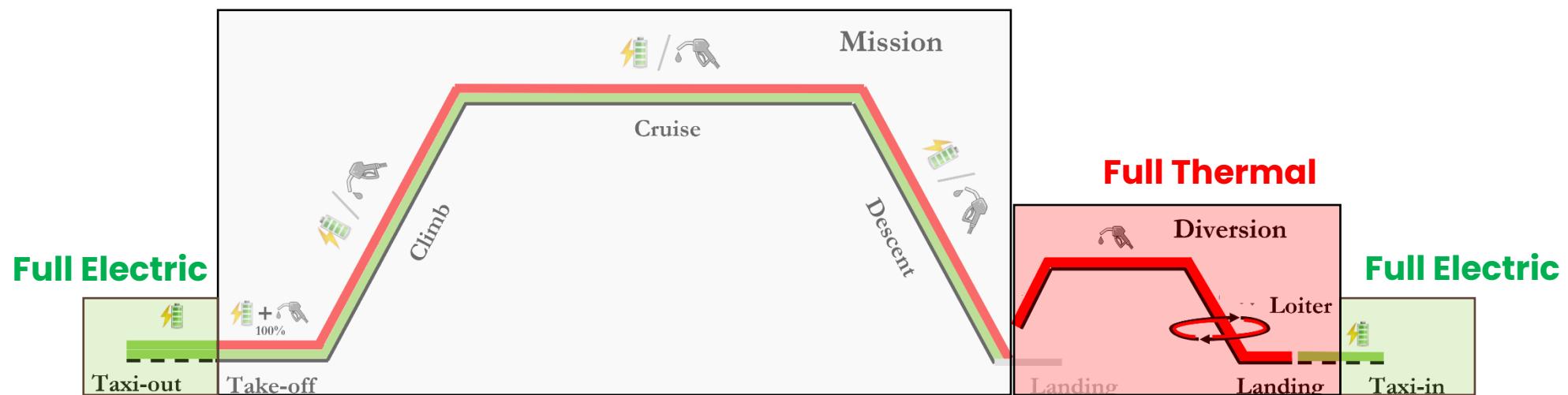




# Analisi di missione: power management

		Thermal Power Fraction	Electric Power Fraction
Mission	Taxi-out/in	$\Phi^{ice}(t) = 0$	$\Phi^{el}(t) = 0.07 P_{inst}^{tot}$
	Take-off	$\Phi^{ice}(t) = 1$	$\Phi^{el}(t) = 1$
	Climb	$\Phi^{ice}(t) = \text{const.}$	$\Phi^{el}(t) = f(\Phi(t), \Phi_{climb\ opt}^{ice})$
	Cruise	$\Phi^{ice}(t) = \text{const.}$	$\Phi^{el}(t) = f(\Phi(t), \Phi_{cruise\ opt}^{ice})$
Diversion	Descent	$\Phi^{ice}(t) = \text{const.}$	$\Phi^{el}(t) = f(\Phi(t), \Phi_{desc\ opt}^{ice})$
	Climb <sub>div</sub>	$\Phi^{ice}(t) = \Phi(t)$	$\Phi^{el}(t) = 0$
	Cruise <sub>div</sub>	$\Phi^{ice}(t) = \Phi(t)$	$\Phi^{el}(t) = 0$
Descent <sub>div</sub>	Descent <sub>div</sub>	$\Phi^{ice}(t) = \Phi(t)$	$\Phi^{el}(t) = 0$

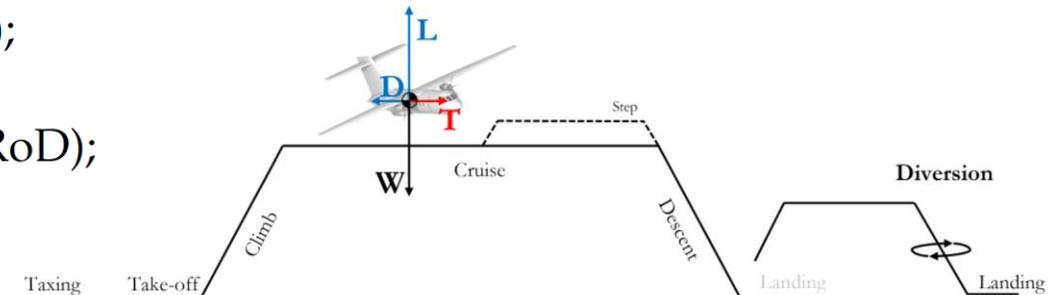
## Hybrid power supply





# Analisi di missione: programmi di volo

- Taxi-out: ground manoeuvring with constant power supply for 240 s;
- Take-off: full-power supply for 45 s;
- Climb: constant indicated air speed (IAS) and rate of climb (RoC);
- Cruise: constant speed and altitude;
- Descent: constant indicated air speed (IAS) and rate of descent (RoD);
- Loiter: 30 min of level flight at maximum L/D;
- Approach: constant RoD;
- Landing: neglected;
- Taxi-in: ground manoeuvring with constant power supply for 240 s.



Mission			Diversion	
<b>Climb</b>	IAS = 170 kt	RoC = 900 ft/min	IAS = 150 kt	RoC = 600 ft/min
<b>Cruise</b>	Mach = 0.4	h = 6100 m	Mach = 0.27	h = 3050 m
<b>Descent</b>	IAS = 220 kt	RoD = -1100 ft/min	IAS = 150 kt	RoD = -1100 ft/min

# Analisi di missione: programmi di volo



Semplificazioni introdotte dalla selezione dei programmi di volo

...  
...  
...  
...  
...  
...

Imposteremo l'esercizio durante la prossima lezione!



# Solve ODEs: the Euler method

**Numerical methods** for solving ordinary differential equations (ODEs) **approximate the solution** at discrete points rather than attempting to find an exact, continuous solution. **Euler method** is one the possible methods to be used in this regard.

In this context we consider only a simple 1<sup>st</sup> order non-linear differential equation

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

If you want to solve it, you can calculate the **exact solution**, or you can use numerical integration.

Exact solution

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(t) dt$$

The integral is generally not easy to be computed in closed form (or does not exist at all !); therefore, numerical integration is a common approach to calculate it.



# Solve ODEs: the Euler method

**Numerical methods** for solving ordinary differential equations (ODEs) **approximate the solution** at discrete points rather than attempting to find an exact, continuous solution. **Euler method** is one the possible methods to be used in this regard.

In this context we consider only a simple 1<sup>st</sup> order non-linear differential equation

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

If you want to solve it, you can calculate the exact solution, or you can use **numerical integration**

Numerical integration: Euler method

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \dot{y}(t) \Big|_{t=t_k} dt + O(dt^2)$$



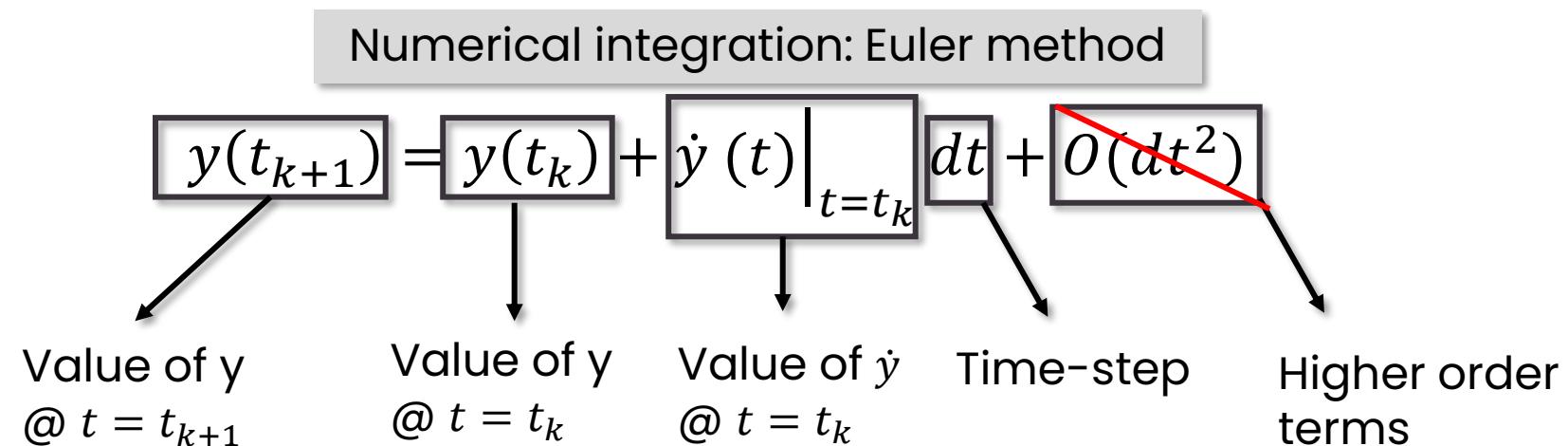
# Solve ODEs: the Euler method

**Numerical methods** for solving ordinary differential equations (ODEs) **approximate the solution** at discrete points rather than attempting to find an exact, continuous solution. **Euler method** is one the possible methods to be used in this regard.

In this context we consider only a simple 1<sup>st</sup> order non-linear differential equation

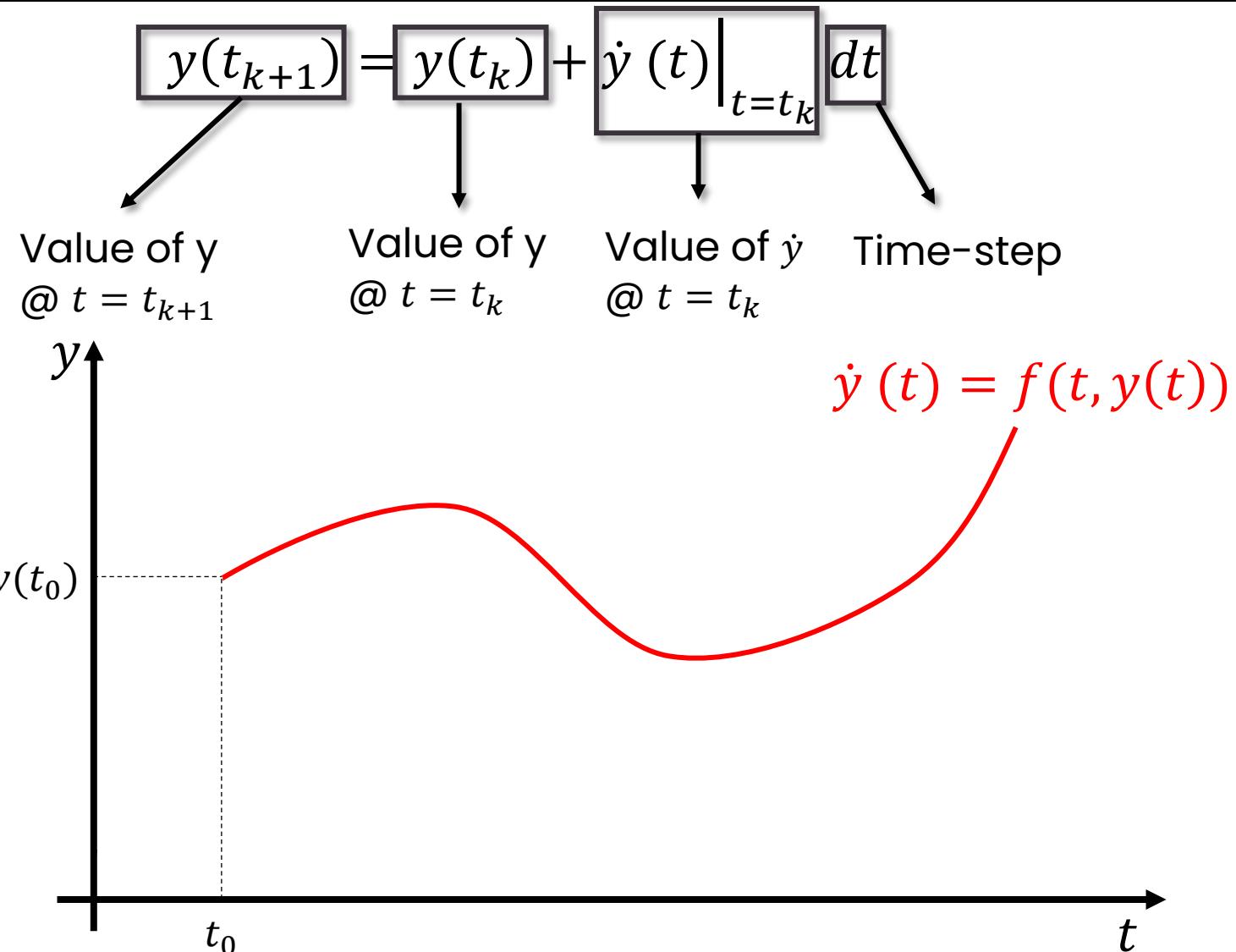
$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

If you want to solve it, you can calculate the exact solution, or you can use **numerical integration**



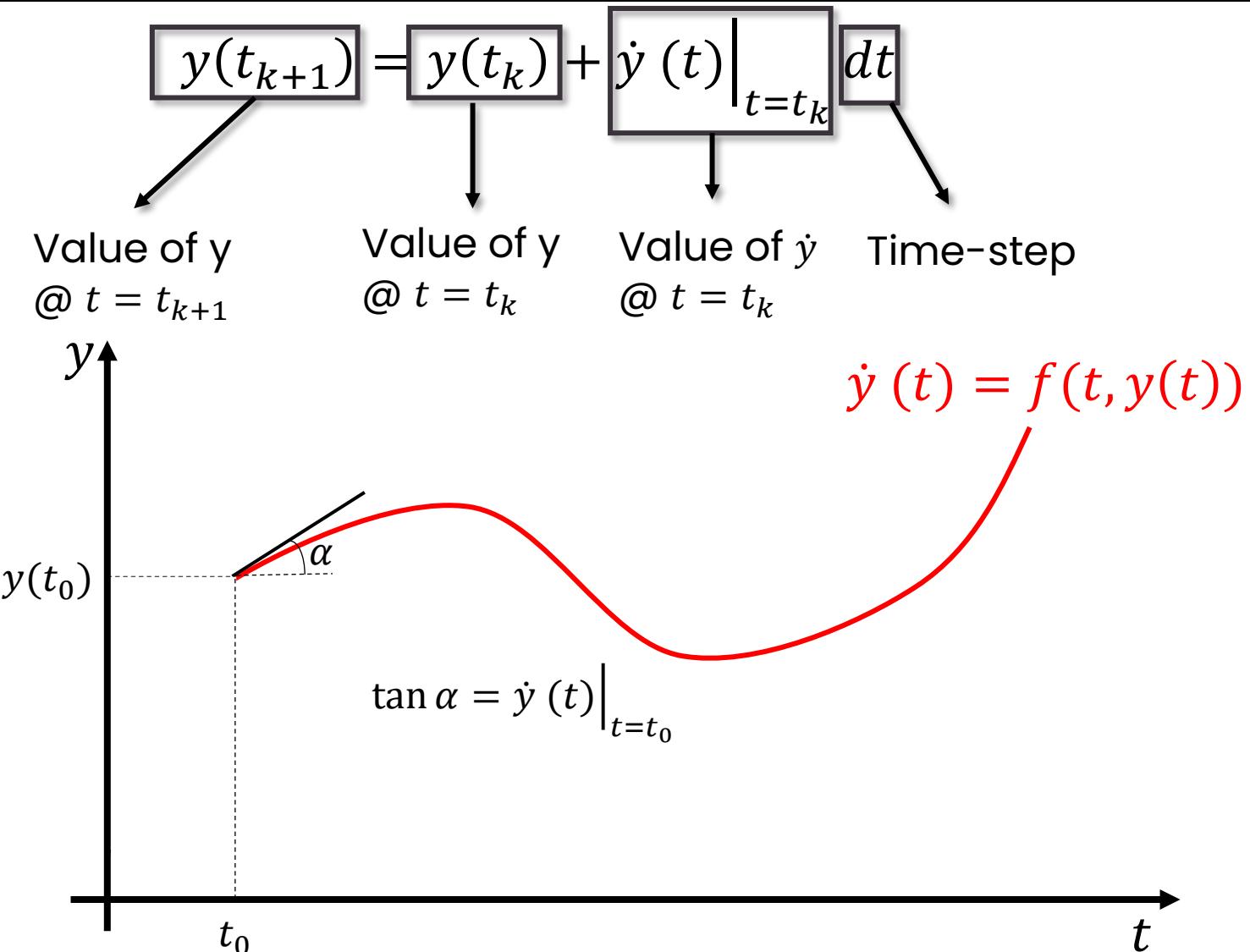


# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)





# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)

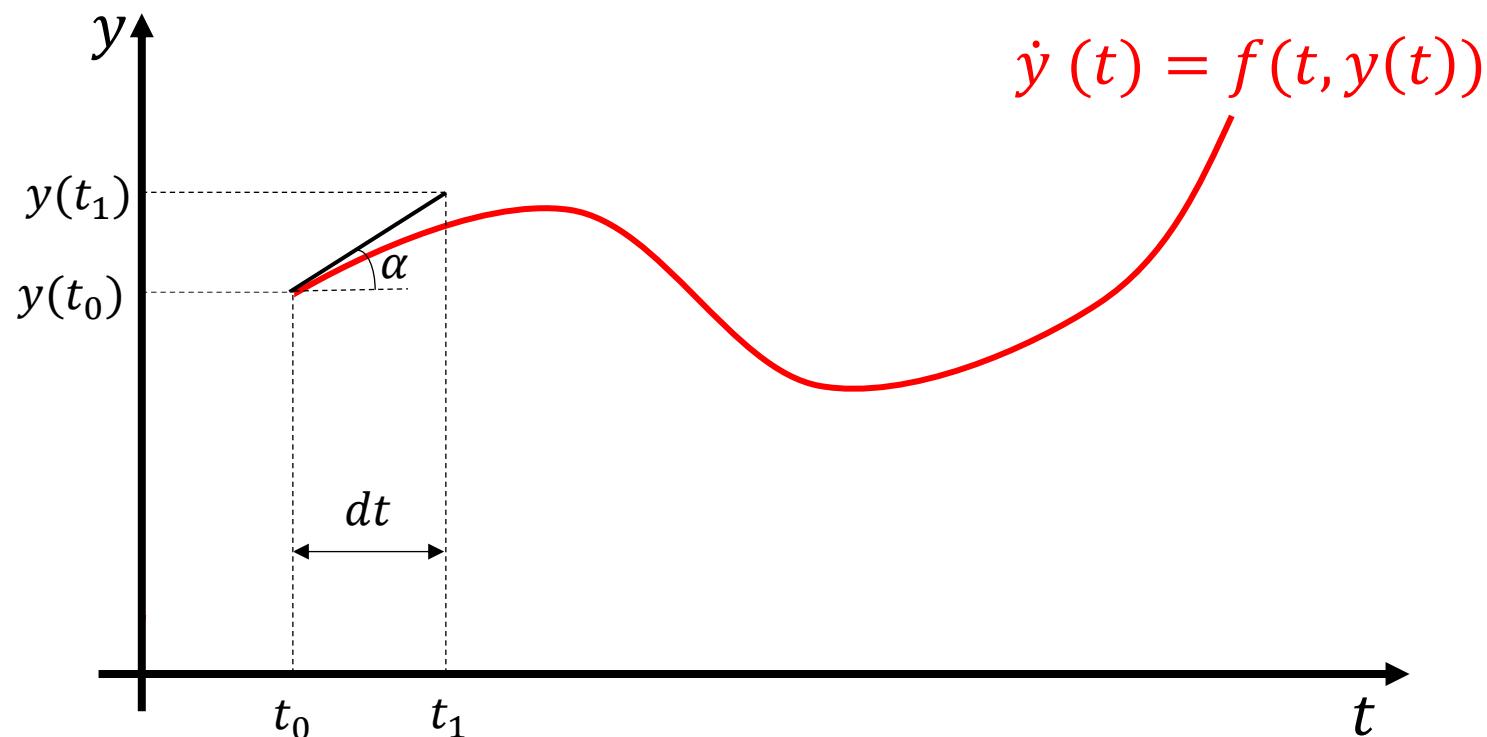




# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)

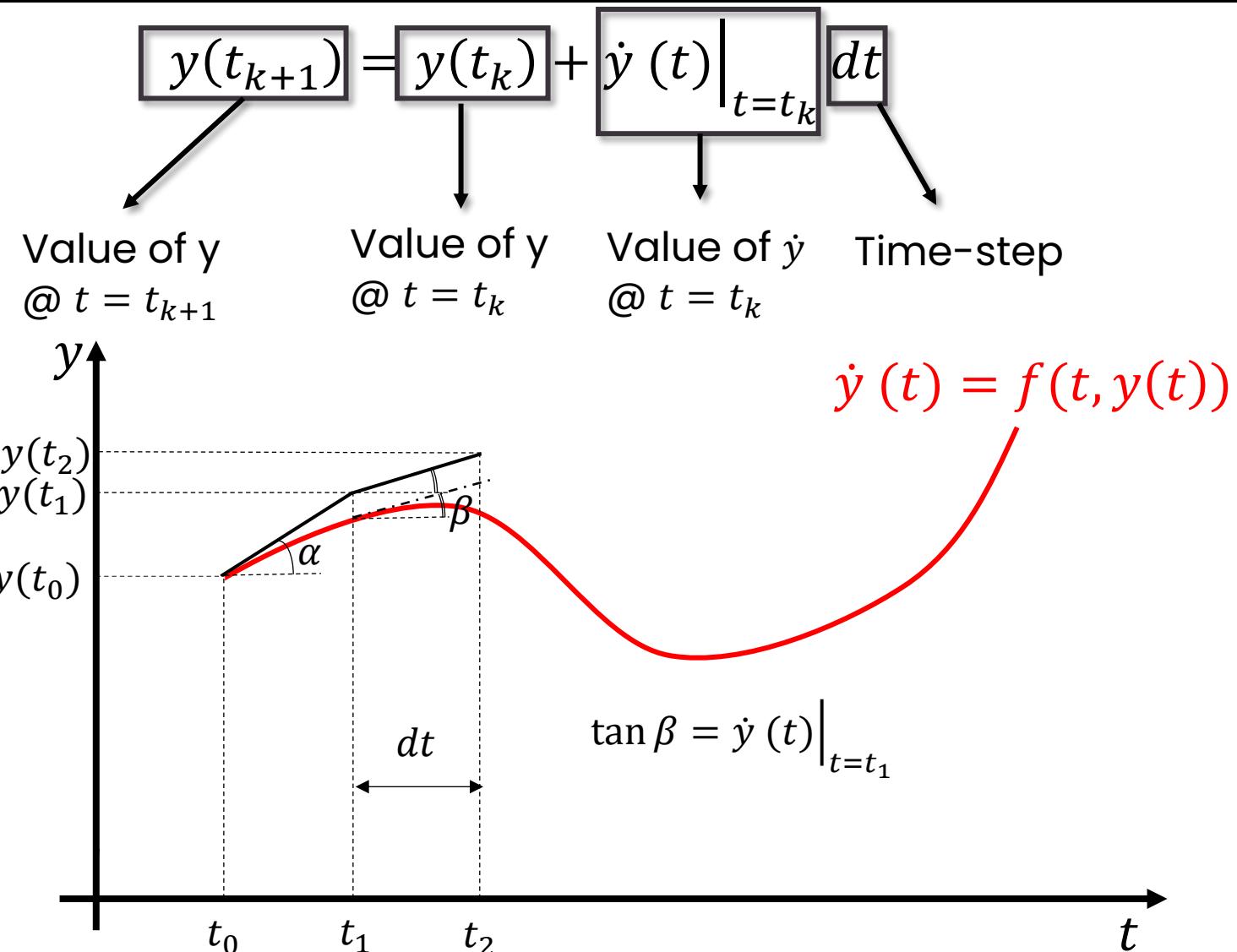
$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \dot{y}(t)|_{t=t_k} dt$$

Value of  $y$  @  $t = t_{k+1}$       Value of  $y$  @  $t = t_k$       Value of  $\dot{y}$  @  $t = t_k$       Time-step





# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)





# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)

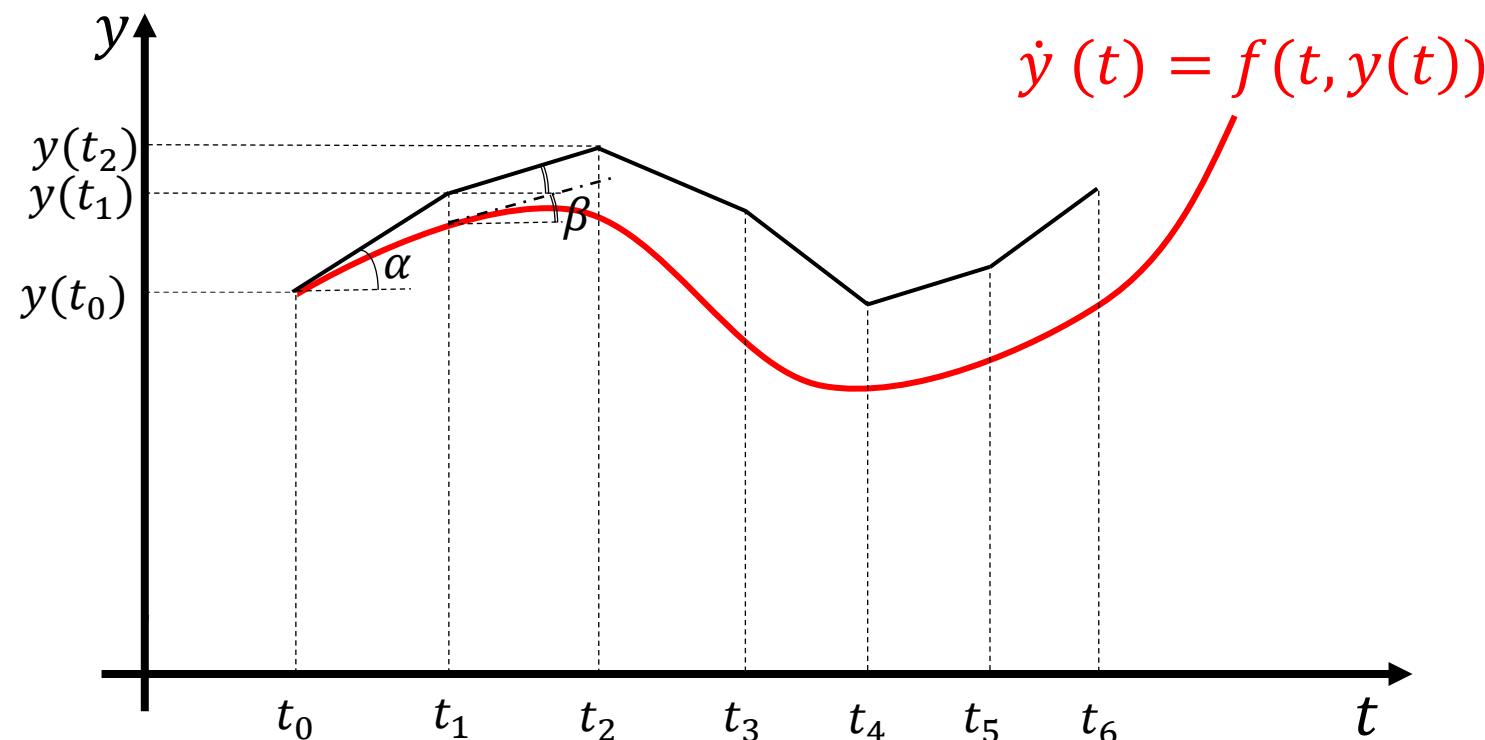
$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \dot{y}(t) \Big|_{t=t_k} dt$$

Value of  $y$  @  $t = t_{k+1}$

Value of  $y$  @  $t = t_k$

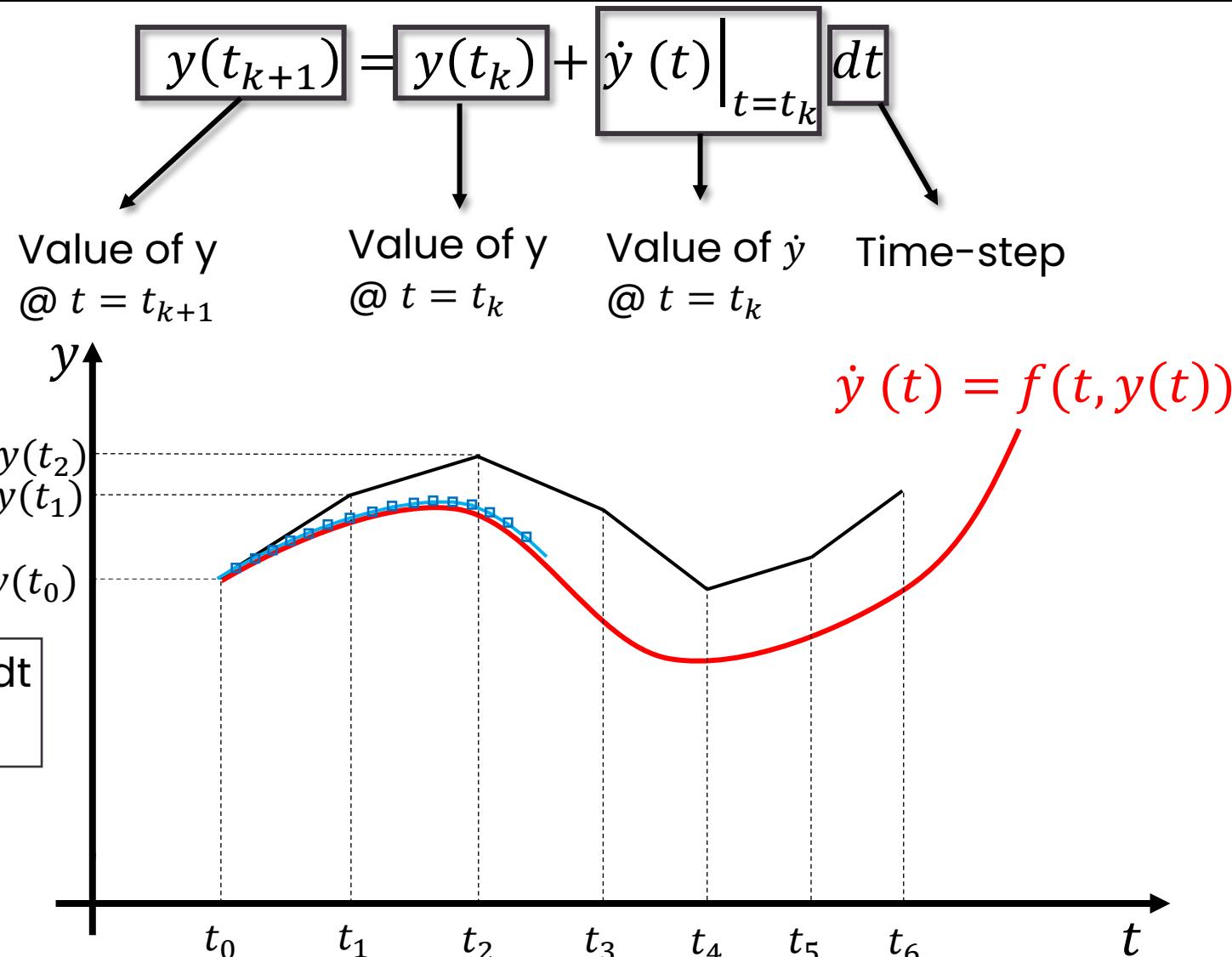
Value of  $\dot{y}$  @  $t = t_k$

Time-step





# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)



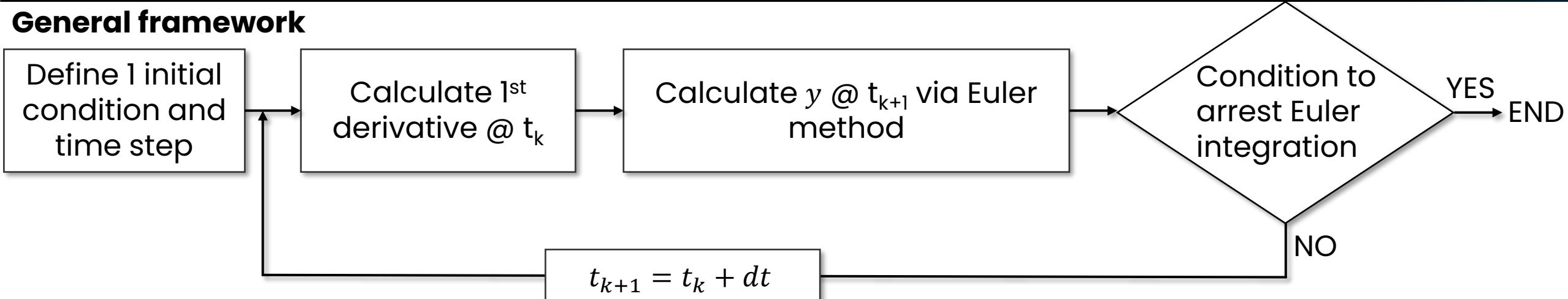
The approximate solution is a **Polygonal chain**

The difference between the exact solution and the approximated solution is related to the linear approximation and the choice of the **time step**



# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)

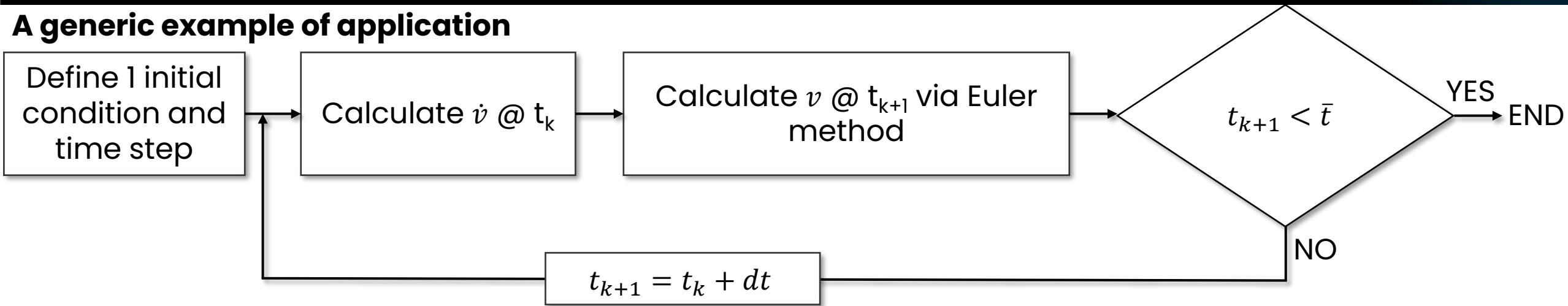
## General framework



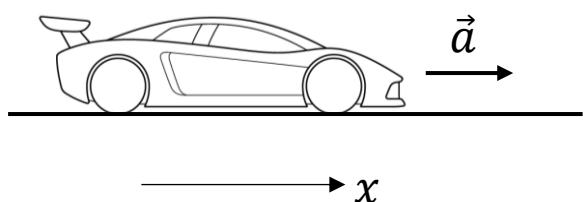


# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)

## A generic example of application



An example: a car with non-uniform acceleration



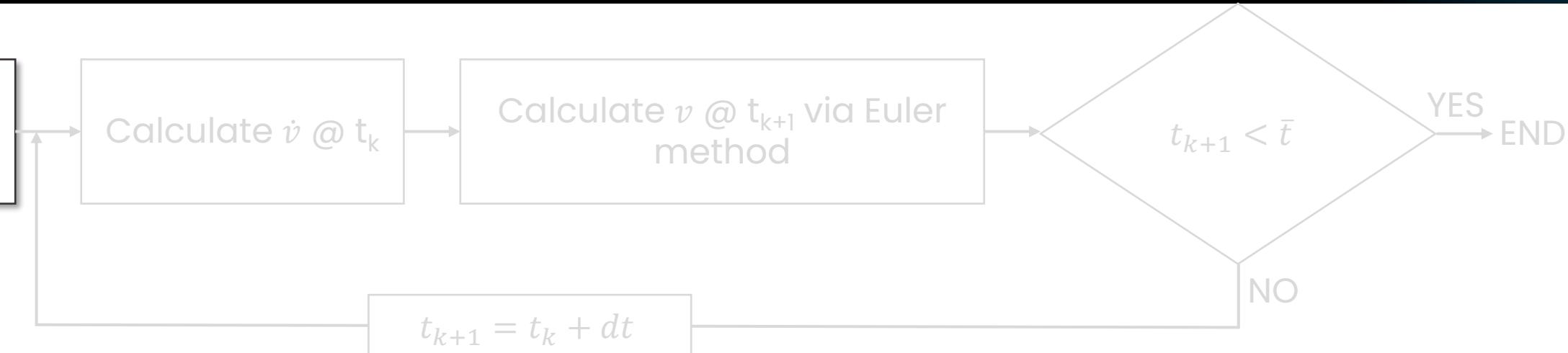
$$\dot{v}(t) = a(t) = \lambda t$$



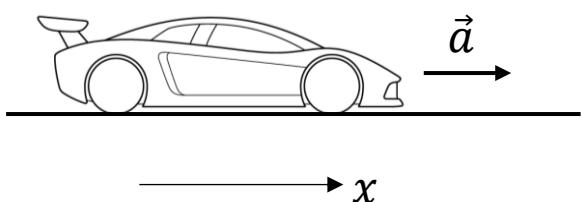
# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)

Define 1 initial conditions and time step

$$v(t_0) = v_0$$



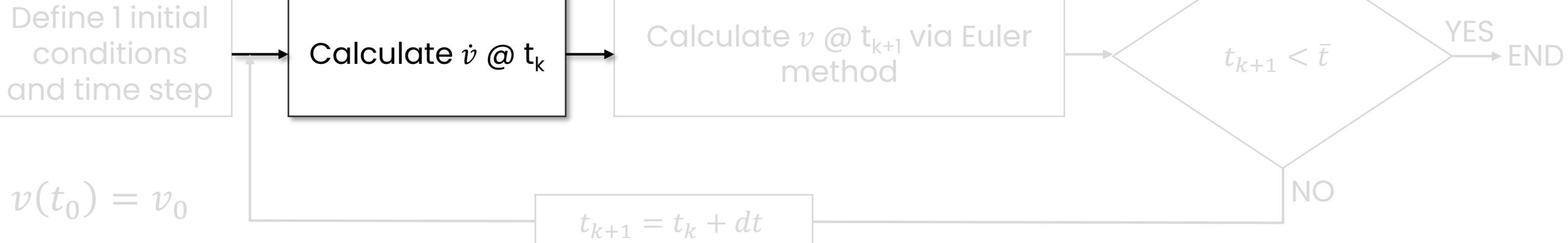
An example: a car with non-uniform acceleration



$$\dot{v}(t) = a(t) = \lambda t$$

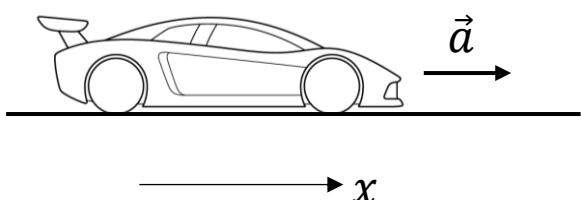


# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)



$$\dot{v}(t_k) = \lambda t_k$$

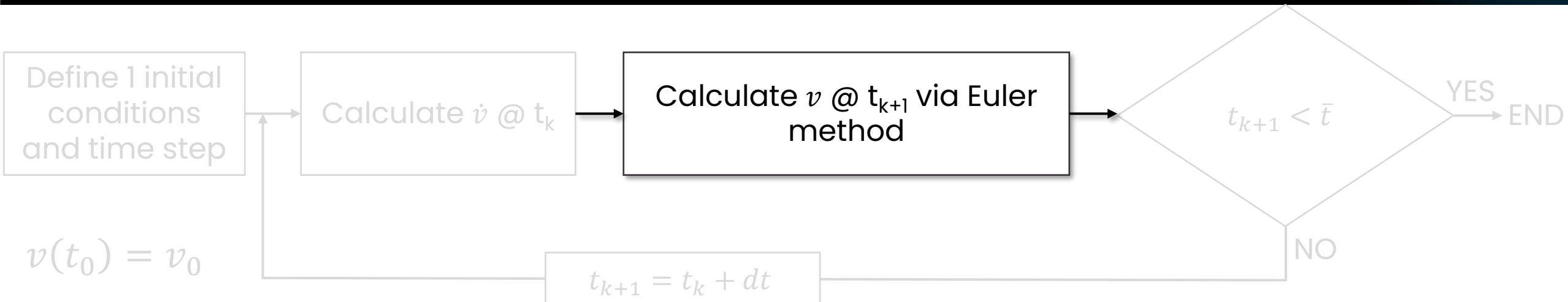
An example: a car with non-uniform acceleration



$$\dot{v}(t) = a(t) = \lambda t$$



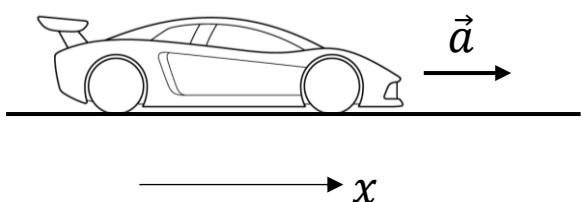
# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)



$$\dot{v}(t_k) = \lambda t_k$$

$$v(t_{k+1}) = v(t_k) + \dot{v}(t_k)dt$$

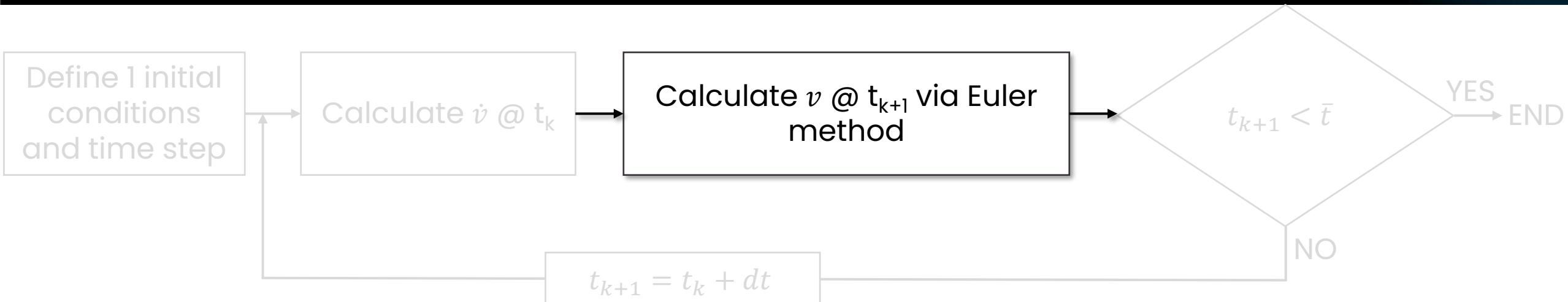
An example: a car with non-uniform acceleration



$$\dot{v}(t) = a(t) = \lambda t$$



# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)



$$v(t_0) = v_0$$

$$v(t_1) = v(t_0) + \dot{v}(t_0)dt$$

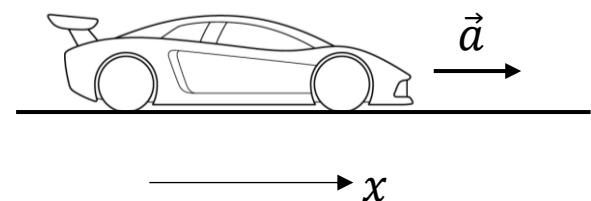
$$v(t_2) = v(t_1) + \dot{v}(t_1)dt$$

...

$$v(t_{k+1}) = v(t_k) + \dot{v}(t_k)dt$$

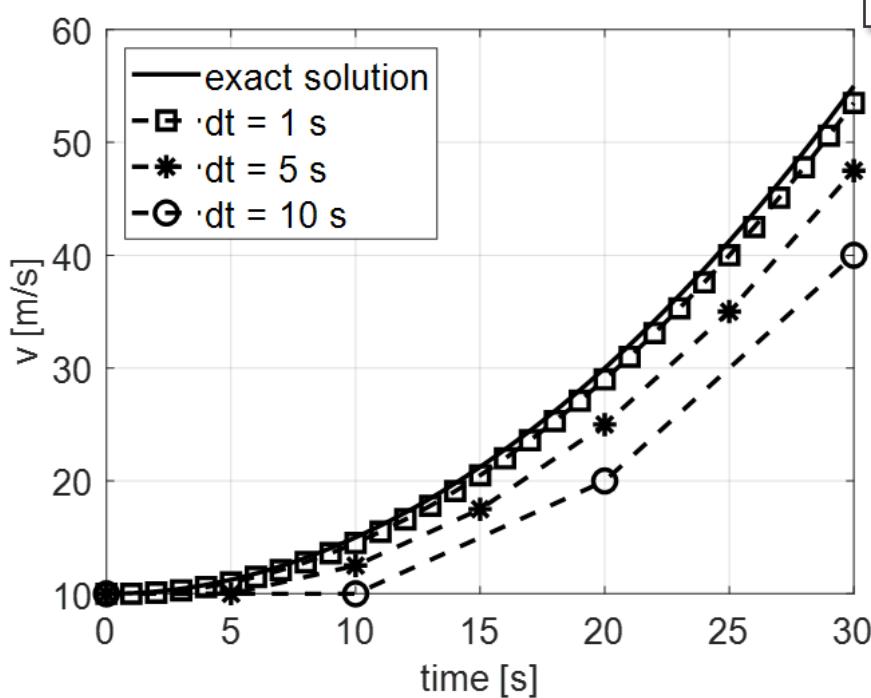
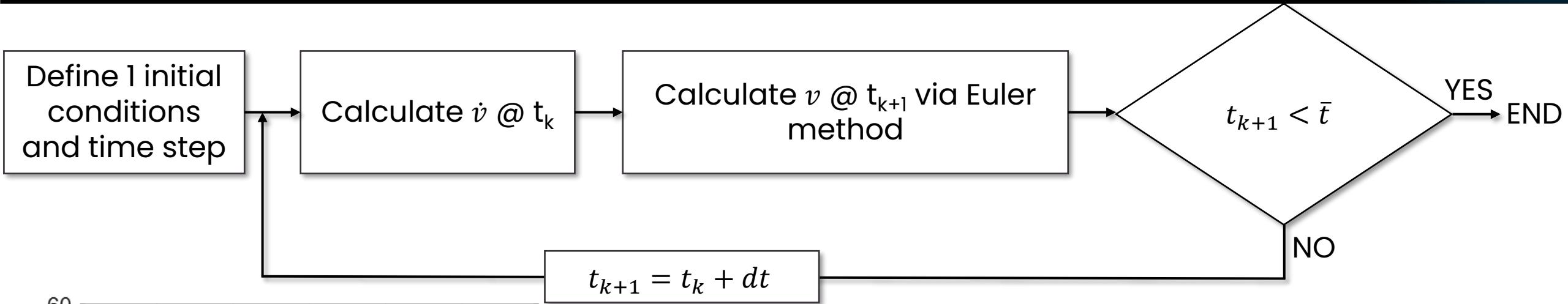
$$\dot{v}(t_k) = \lambda t_k \quad \lambda \text{ è noto e vale } 0,1 \text{ m/s}^3$$

An example: a car with non-uniform acceleration



$$\dot{v}(t) = a(t) = \lambda t$$

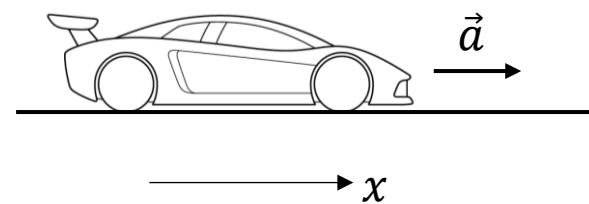
# Solve ODEs: the Euler method (1<sup>st</sup> order non-linear)



The approximate solution is a **Polygonal chain**

The difference between the exact solution and the approximated solution is related to the linear approximation and the choice of the **time step**

An example: a car with non-uniform acceleration



$$\dot{v}(t) = a(t) = \lambda t$$



**END**