

Costruzione di motori per aeromobili

Indice

1 Fatica	5
1.1 Introduzione	5
1.1.1 Carichi variabili nel tempo	5
1.1.2 Diagramma di Wohler	7
1.2 Curve di Wohler	7
1.2.1 Metodo Staircase per il limite a fatica	8
1.2.2 Calcolo degli altri punti sopra il limite a fatica	9
1.2.3 Altre considerazioni varie	9
1.2.4 Metodo per stimare una curva di Wohler	10
1.3 Normativa FKM	10
1.3.1 Relazione tra limite a fatica e carico ultimo di rottura	10
1.3.2 Correzione del carico ultimo di rottura	11
1.4 Effetto della tensione media (diagramma di Haigh)	13
1.4.1 Caso con tensione media positiva (trazione)	13
1.4.2 Caso con tensione media negativa (compressione)	14
1.5 Tensioni principali e criteri di Tresca e von Mises	14
1.5.1 Tensioni principali	15
1.5.2 Criteri di Tresca e von Mises in tensioni principali	15
1.6 Coefficiente di sicurezza a fatica	16
1.6.1 Cedimento statico su diagramma di Haigh	16
1.7 Fattori che influenzano la vita a fatica	17
1.7.1 Effetto della rugosità	17
1.8 Fattore di concentrazione delle tensioni	18
1.8.1 Legame con la fatica	19
1.8.2 Legame tra fattore di concentrazione delle tensioni statico e a fatica	20
1.9 Fatica biassiale	21
1.9.1 Effetto delle tensioni medie	22
1.9.2 Modifica per effetto di intaglio	24
1.10 Regola di Miner per il conteggio della vita a fatica	24
1.10.1 Metodo Bathhub per spettri di carico	25
2 Dischi	27
2.1 Scrittura equazioni per tensioni e spostamenti	27
2.1.1 Equazioni di equilibrio	27
2.1.2 Equazioni di congruenza	28
2.1.3 Equazioni del materiale	28
2.1.4 Risultati	29
2.2 Diagramma dello stato di tensione in casi notevoli	31
2.2.1 Pressione esterna	31
2.2.2 Pressione interna	32
2.2.3 Disco pieno	32
2.2.4 Anello sottile	32
2.3 Distinzione disco - tubo	33
2.4 Calettamento albero - mozzo per interferenza	34

2.4.1	Equazioni	34
2.4.2	Tolleranze e interferenza	37
2.5	Dischi rotanti	38
2.5.1	Disco a uniforme resistenza	40
2.6	Dischi plasticizzati	41
2.6.1	Scrittura equazioni delle tensioni	42
2.6.2	Calcolo delle pressioni notevoli	43
2.6.3	Perché plasticizzare?	45
2.7	Metodo di Grammel	48
2.7.1	Scrittura equazioni	48
2.7.2	Risoluzione equazioni	51
2.7.3	Calcolo velocità angolare di burst	51
2.8	Analisi incidenti aerei per rottura dischi a fatica	52
2.8.1	Incidente Chicago O'Hare, 2016, B767-300	53
2.8.2	Incidente LAX, 2006, B767 con GE CF6	53
2.8.3	Incidente Pensacola, 1996, MD-88	53
3	Collegamenti filettati	54
3.1	Introduzione	54
3.1.1	Tipologie di collegamenti filettati	54
3.1.2	Tecnologie produttive	55
3.1.3	Nomenclatura	55
3.2	Relazione forza - coppia di serraggio	56
3.2.1	Scrittura delle forze elementari sul filetto	57
3.2.2	Calcolo della coppia	58
3.3	Diagramma forzamento vite - pezzo	60
3.3.1	Ripartizione del carico esterno	60
3.4	Dimensionamento e verifica della vite	62
3.4.1	Statica	62
3.4.2	Fatica	63
3.4.3	Verifica a carico minimo	64
3.5	Cedevolezza vite e pezzo	65
3.5.1	Vite	65
3.5.2	Pezzo	66
3.6	Applicazione carico esterno non al sottotesta	69
3.7	Ripartizione del carico sul filetto	70
4	Contatti Hertziani	74
4.1	Definizioni ed ipotesi	74
4.1.1	Ipotesi	74
4.1.2	Definizione geometria	75
4.2	Curvature relative principali e variabile ausiliaria	77
4.2.1	Definizione delle curvature relative principali	77
4.2.2	Definizione della variabile ausiliaria	78
4.2.3	Calcolo delle curvature relative principali	78
4.2.4	Calcolo della variabile ausiliaria	80
4.3	Problema di contatto	81
4.3.1	Formulazione ed equazioni	81
4.3.2	Risoluzione	83
4.4	Cedimento	85
4.5	Cuscinetti	86
4.5.1	Tipologie di cuscinetti	87
4.5.2	Angolo di contatto (cuscinetti a sfere). Perché sopportano anche carichi assiali?	88
4.5.3	Distribuzione del carico radiale (cuscinetti a rulli)	90
4.5.4	Carico massimo sopportabile dal corpo volvente	94
4.5.5	Verifica cuscinetti	95

4.5.6 Montaggio cuscinetti	97
5 Ruote dentate	99
5.1 Introduzione	99
5.2 Verifica delle ruote dentate	100
5.2.1 Verifica a contatto Hertziano	100
5.2.2 Verifica a fatica	104
5.2.3 Strisciamento specifico	104
5.3 Nomenclatura	106
5.3.1 Progettazione modulare	106
5.3.2 Dimensioni dei denti	106

Capitolo 1

Fatica

1.1 Introduzione

Una delle prime persone a studiare la fatica e le rotture per fatica fu Rankine, il quale scoprì che le rotture per fatica avvenivano nelle variazioni di geometria degli alberi su cui venivano calettate le ruote (gli assili ferroviari). Fu poi Wohler a investigare sulla fatica a livello fenomenologico, simulando un assile mediante un asse ai quali estremi vi erano delle molle e delle boccole (come supporti). Si ottiene quindi una trave in cui vi sono due forze di taglio F agli estremi e il diagramma di momento flettente presenta due rette, una crescente e l'altra decrescente, separate da un tratto centrale costante.

Un concetto molto legato alla fatica è quello della *cricca*, la quale è una *discontinuità* del materiale che, quando raggiunge una determinata dimensione (in lunghezza), provoca la rottura dello stesso. Un qualcosa di analogo è rappresentato dal *fretting*, ossia quando non si ha il continuo tra due componenti e vi è un microscorrimento tra loro, il quale porta comunque a problemi di fatica. La rottura a fatica ha un aspetto *frastagliato*. Una rottura equivale ovviamente ad una discontinuità. Comunque le cricche possono innescarsi sia per "vie terze", sia perché presenti discontinuità nel materiale stesso.¹

Bisogna ricordare sempre che la *temperatura* infragilisce i materiali, quindi entra in gioco anche lei in questo discorso, così come il *processo metallurgico*, che può anch'esso influire sulla duttilità del materiale.

Dal diagramma $\sigma - \varepsilon$ si vede un primo tratto lineare, fino al limite di snervamento (lo 0.2% del valore lineare), oltre cui si ha deformazione permanente. Si giunge poi al carico ultimo di rottura, corrispondente al 15% (penso del valore lineare?).

In ogni caso, possiamo sfruttare due diversi *approcci* di analisi:

- Approccio microscopico, ossia un'analisi a livello del *materiale*
- Approccio macroscopico, ossia un'analisi a livello di *progettazione* del componente

Facciamo infine un po' di nomenclatura, ponendo che quando c'è solo un pedice alla tensione σ allora vuol dire che vi è solo tensione normale (non c'è taglio). Definiamo inoltre l'asse neutro come l'asse in cui $\sigma = 0$; di solito esso coincide con l'asse di simmetria. Definiamo infine il reversal come un'inversione del carico, per cui ogni ciclo ha 2 reversal (ritorno al punto di partenza).

1.1.1 Carichi variabili nel tempo

Immaginiamo che vi sia un albero incastrato che ruoti e che sia soggetto, al tempo $t = 0$, ad una forza di taglio F , per esempio diretta verso il basso nel piano del foglio; tale forza è applicata in un punto A dell'albero (ipotizziamo che sia a sezione circolare). Se prendiamo la sezione d'incastro e valutiamo la σ dovuta a sola flessione, vediamo che ha il solito andamento a farfalla e che il valore massimo (in valore assoluto) c'è a $y = \pm \frac{D}{2}$. Tale valore sappiamo essere

$$\sigma = \frac{F D}{I} \frac{2}{2}$$

per cui dipende, oltre che dal diametro e dal momento di inerzia, dalla forza di taglio F .

¹ Ad esempio, nel Comet i finestrini erano quadrati, per cui vi era una notevole variazione di sezione e, per quanto detto da Rankine, è lì che si possono generare delle cricche. Questa è una ragione per cui ora i finestrini dei velivoli sono molto più stondati.

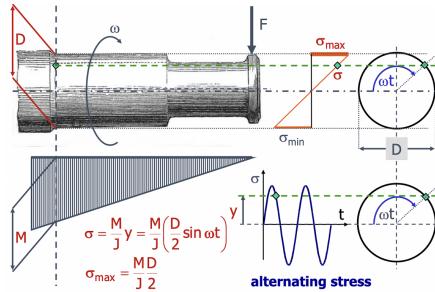


Figura 1.1

Consideriamo poi che questa forza rimanga sempre la stessa, ma che l'albero inizi a ruotare con una certa velocità angolare. Dopo un certo tempo, per esempio quello necessario a fargli compiere un quarto di giro, vediamo che nonostante la forza sia rimasta quella, essa ha cambiato posizione, per cui il taglio non è più pari a F ma è ora nullo, perché la forza è perpendicolare ora al piano del foglio. Questo vuol dire che la tensione (massima) è nulla².

Ora vediamo cosa succede quando l'albero ha fatto mezzo giro: la forza di taglio è di nuovo nel piano, solo che ha segno opposto, quindi la tensione massima ha sempre lo stesso valore ma segno diverso (si scambiano tra massima e minima).

Tutto questo ci fa capire che, nonostante la forza F non vari nel tempo, il fatto che l'albero ruoti, fa sì che la tensione σ sia *variabile nel tempo*. È proprio questo che innesca la fatica: uno **stato di tensione variabile nel tempo**.

L'fatica porta poi alla rottura perché il carico variabile causa un movimento anch'esso variabile dei piani atomici, per cui si ha uno sfregamento che porta all'enucleazione di difetti da cui origina la cricca in un principio di intrusione-estruzione.

Quando sottponiamo a un carico di trazione (statico) un provino duttile, vediamo che la rottura avviene a 45 gradi, in quanto sappiamo che le τ massime sono proprio a 45 gradi. In ogni caso, una volta che abbiamo la cricca, vediamo che questa avanza a 45 gradi (perché comandata dalla σ) e poi avanza perpendicolarmente alla direzione del carico, finché non avviene la rottura del materiale che cede a fatica.

Ricordiamo infine, molto a caso, che la torsione genera tensioni tangenziali e normali sfasate di 45 gradi, per cui la cricca è a 45 gradi. La flessione mista alla torsione sbilancia la propagazione della cricca.

Tensione alternata, media e stress ratio

Nell'ambito dei carichi ciclici, si ragiona in termini di tensione alternata

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (1.1)$$

ossia la massima "escursione"³, e in termini di tensione media

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (1.2)$$

Nonché in termini di stress ratio

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (1.3)$$

Per cui possiamo anche dire che

$$\sigma_a = \frac{1 - R}{2}, \quad \sigma_m = \frac{1 + R}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2}$$

e quindi se $R=1$ si ha $\sigma_a = 0$ e $\sigma_m = 1$, mentre se $R=-1$ si ha $\sigma_a = 1$ e $\sigma_m = 0$. Quando $R=0$ si dice che si ha tensione all'origine, in quanto è una sinusoida col minimo a 0. Per i carichi alternati abbiamo $R=-1$, come visto nell'esempio dell'albero soggetto a taglio costante che ruota. C'è da dire che il $\Delta\sigma$ che può potenzialmente portare alla rottura per fatica è ampiamente all'interno del limite di proporzionalità elastica, per cui abbiamo che un oggetto si può rompere (a fatica) anche se sollecitato con tensioni piccole, però alternate.

²Stiamo ragionando solo nel piano, infatti ora ci sarebbe momento flettente intorno all'altro asse, per cui la tensione massima lì ora non è più nulla.

³Il cedimento è principalmente descritto proprio da questa variazione massima, per cui si usa questo parametro per tenere sinteticamente conto della tensione per cui si ha rottura a fatica.

Si definisce poi un certo coefficiente, detto *coefficiente di sicurezza statico*, che è il rapporto tra quanto mi può dare il materiale e quanto richiedo (in termini di tensione equivalente). Tale valore deve essere ovviamente maggiore di 1 ed è tipicamente compreso tra 1.5 e 3 nelle nostre applicazioni.

$$C_S = \frac{R_e}{\sigma_{eq}} > 1 \quad (1.4)$$

Se prendiamo un provino soggetto a torsione e flessione, si può valutare il coefficiente di sicurezza considerando il momento d'inerzia di una sezione circolare

$$I_x = \frac{\pi D^4}{64}$$

(??)

1.1.2 Diagramma di Wohler

La fondamentale cosa che dobbiamo considerare qua è che le curve di Wohler sono fatte a σ_m costante. Tale diagramma mette in ascissa (in scala logaritmica) il numero di cicli a fatica e in ordinata la σ_a , intesa come *limite a fatica*, ossia il valore oltre cui si ha una rottura. Ciò che si riscontra è la presenza di 3 diverse zone:

1. Una zona a basso numero di cicli e alta tensione alternata (LCF). $1 - 10^4$ cicli..
2. Una zona ad alto numero di cicli e tensione alternata decrescente (HCF). $10^4 - 2 \cdot 10^6$ cicli
3. Una zona in cui la tensione alternata è costante (pari a un valore molto basso) col numero di cicli, che quindi non influenza più la σ_a . Oltre $2 \cdot 10^6$ cicli.⁴

Ciò che si vede quindi è che, dopo un certo numero di cicli, la tensione alternata raggiunge il suo valore minimo, che poi non cambia più. Nella zona HCF c'è una retta perché la scala è logaritmica, altrimenti sarebbe un esponenziale.

Appare chiaro quindi che l'aumentare del numero di cicli riduce il limite a fatica, ossia accade che la rottura per fatica avviene in corrispondenza di un valore di tensione alternata minore. Se progettiamo quindi qualcosa per un elevato numero di cicli dobbiamo considerare che si romperà con una tensione inferiore. Se invece ciò che progettiamo ha un basso numero di cicli allora siamo più tranquilli che si romperà per una tensione maggiore.

1.2 Curve di Wohler

Analizziamo più a fondo questo tipo di diagramma, per vedere cosa c'è in dettaglio e come si costruisce. Abbiamo già parlato dei cicli che dividono le tre zone (in realtà quei numeri sono indicativi come ordini di grandezza). Ricordiamo anzitutto che la curva di Wohler è un diagramma in cui in ascissa c'è il numero di cicli e in ordinata la tensione alternata, il tutto considerando una tensione media costante σ_m (nel nostro caso ragioneremo a $\sigma_m = 0$, quindi $R = -1$) durante tutte le prove. Tale diagramma è, appunto, sperimentalmente determinato, per cui dobbiamo andare a fare varie prove sui provini per poterlo costruire.

Prima di vedere come si costruisce in dettaglio, vediamo subito che ci sono dei punti notevoli:

- Per un numero di cicli pari a 1 (ovvero l'inizio⁵ dell'asse delle ascisse) abbiamo che il materiale si rompe sicuramente in corrispondenza del suo carico ultimo di rottura R_m
- Per un numero di cicli intorno ai 10,000 vediamo che la tensione alternata per cui c'è rottura è chiaramente inferiore a R_m
- Per un numero di cicli intorno ai 2,000,000 vediamo che la tensione alternata per cui c'è rottura è pari ad un certo valore che chiamiamo **limite a fatica** e indichiamo con σ_{D-1} (il "-1" c'è perché siamo a $R = -1$)
- Per un numero di cicli superiore ai 2,000,000 vediamo che il materiale si rompe sempre per una tensione pari al limite a fatica

⁴In realtà questo comportamento, come vedremo, c'è solo in alcune tipologie di materiali (quelli ferrosi ad esempio), mentre in altre (alluminio) la curva va sempre giù.

⁵Potrei fare anche mezzo ciclo, ossia un reversal, ma quello non sarebbe fatica, bensì qualcosa di statico, quindi non ci interessa

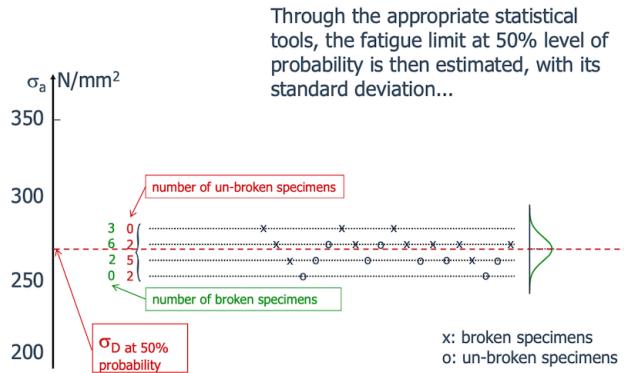


Figura 1.2

Ciò che abbiamo capito quindi è che noi possiamo, avendo questo diagramma, dire qual è la tensione alternata a cui verrà sottoposto in opera il nostro componente e trovare di conseguenza il numero di cicli per cui esso si romperà. Se staremo sotto il limite a fatica allora il componente in teoria non si romperà mai a fatica. L'idea è che più è alta la tensione alternata e minore sarà il numero di cicli a cui il materiale potrà resistere. Per questo motivo indichiamo la **vita a fatica** del materiale con il numero di cicli per cui esso si romperà, soggetto alla tensione alternata prima definita.

Dobbiamo ora pensare però a un modo per costruire questo diagramma, e in particolare dobbiamo capire come trovare anzitutto il limite a fatica, e poi tutti gli altri punti.

1.2.1 Metodo Staircase per il limite a fatica

Vogliamo ora determinare il limite a fatica del materiale in esame. Per farlo prendiamo un numero variabile (da normativa) tra 15 e 20 provini e, uno alla volta, li sottponiamo ad un certo stress alternato per un numero di cicli convenzionalmente di 10,000,000. Partiamo da un valore più o meno ragionevole e vediamo se il primo provino si rompe.

- Se il provino si rompe allora scendiamo di un certo *gradino* in termini di σ_a , per esempio di 10MPa ed eseguiamo una prova sul secondo provino
- Se il provino non si rompe allora saliamo del medesimo *gradino* ed eseguiamo una prova sempre sul secondo provino

L'idea quindi è creare un grafico in cui in ascissa c'è il numero del provino (da 1 a 15-20) e in ordinata c'è la tensione alternata σ_a per cui tale provino è stato testato a 10^7 cicli. Per ciascun provino segniamo, in corrispondenza della tensione alternata a cui è stato provato, un cerchio se il provino non si è rotto, mentre mettiamo una croce se il provino invece si è rotto.

Una volta ottenuto questo grafico, andiamo a prendere il range in cui si è verificata sia rottura che non rottura dei provini (un provino può rompersi o non rompersi per lo stesso valore di σ_a in teoria) e facciamo anzitutto una media tra le tensioni a cui è avvenuta o non è avvenuta rottura; per scegliere quale "popolazione" usare basta vedere quella inferiore, ossia faccio la media sulla popolazione inferiore⁶ (se in quel range si sono rotti meno provini di quanti non se ne sono rotti allora faccio la media delle tensioni a cui si sono rotti, viceversa se non se ne sono rotti di meno allora prendo solo le tensioni a cui i provini non si sono rotti, il tutto ovviamente tenendoci sempre nel range dove c'è sia rottura che non rottura). Tale media poi la correggo ulteriormente andando a sommare o a sottrarre ad essa la metà del Δ (il range) in cui c'è sia rottura che non rottura. Se la media è stata fatta sui provini non rotti allora aggiungo il Δ , se invece è stata fatta sui provini rotti allora sottraggo il Δ . In questo modo si ottiene un valore di σ_{D-1} .

Un'ultima cosa da precisare è che bisogna specificare **come** sollecitiamo il provino nel fare il calcolo sperimentale del limite a fatica, in quanto si ottengono risultati diversi a seconda che esso sia sollecitato a *trazione-compressione* oppure a *flessione*. Si nota, in particolare, che il limite a fatica è **maggiore** nel caso di sollecitazione a **flessione**, questo perché la flessione provoca uno stato di tensione a farfalla che, produce una tensione media inferiore al caso trazione-compressione (dove invece la tensione è costante sulla sezione), per cui siccome la cricca si sviluppa all'interno del

⁶Questo, a detta del professore, è perché all'inizio è come se ci fosse un "transitorio", per cui i provini con cui si va "a regime" sono quelli successivi. È quindi necessario vedere le popolazioni inferiori per "depurare" questo transitorio che potrebbe sballare i conti.

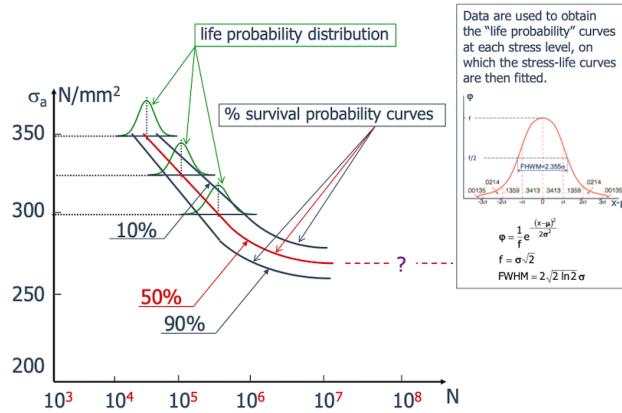


Figura 1.3

volume, si vede che uno stato di tensione medio inferiore la fa sviluppare di meno, quindi possiamo sollecitare con una tensione soglia più alta per avere vita a fatica infinita.

1.2.2 Calcolo degli altri punti sopra il limite a fatica

Ora abbiamo trovato il limite a fatica (e assumendo ovviamente di aver fatto delle prove statiche per trovare il carico ultimo di rottura R_m) ci serve soltanto trovare altri punti corrispondenti a σ_a compresa tra carico ultimo e limite a fatica, così da interpolare tali punti e costruire una curva completa. Vediamo quindi come si fa a trovare tali punti e con che prove.

Ciò che si fa in pratica è prendere vari valori di σ_a e svolgere delle prove in cui si carica il provino con tale tensione alternata per vedere in corrispondenza di che numero di cicli esso si rompe. Ovviamente non si fa solo una prova per tensione alternata, ma si fanno almeno tre prove (comunque si fanno più prove alla stessa σ_a). Si ottiene quindi, per ogni tensione alternata a cui sono state fatte delle prove, una *distribuzione statistica* (gaussiana) che indica in sostanza la probabilità che ha il materiale di rompersi a quel numero di cicli e a quella tensione alternata (la tensione alternata è sempre quella, il numero di cicli spazia in un certo range).

Quindi si fanno tot prove per varie tensioni alternate e si ottiene sostanzialmente una serie di punti (una serie di gaussiane) che possono essere interpolati per trovare una curva. In realtà si possono ottenere più curve, perché possiamo interpolare tutti i punti per i quali il numero di cicli è tale da causare rottura con probabilità in una certa percentuale. Ad esempio possiamo interpolare tutti i punti per cui la rottura è al 50%, al 90% o al 10% (in realtà si parla di probabilità di sopravvivenza, quindi la percentuale è all'opposto). Tipicamente la curva di Wohler è al 50% di sopravvivenza, poi la si può cambiare con 10% o 90% applicando delle correzioni come da normativa.

1.2.3 Altre considerazioni varie

- Ciò che abbiamo ora quindi è una possibile curva di Wohler vera e propria, perché sappiamo il carico ultimo di rottura, abbiamo dei punti intermedi da interpolare e abbiamo anche un limite a fatica (se il materiale lo ammette). Possiamo fare sia una curva con assi S-N, sia una curva con assi logaritmici (anche solo l'asse N volendo), la quale diventa quindi una retta poco decrescente (LCF), una retta molto decrescente (HCF) ed una costante. Le rette sono tali in assi logaritmici, mentre in assi S-N vediamo che la HCF è un'esponenziale. Oltre il limite a fatica c'è sempre e comunque un ginocchio e poi una costante perché il materiale lì non si rompe e basta.
- Una raffinatezza che si potrebbe fare, volendo, è usare una distribuzione log-normale, anziché la più classica distribuzione normale (gaussiana), in quanto la gaussiana va da $-\infty$ a $+\infty$, ma io devo partire sempre da $N=1$, perché non ha senso definire un numero negativo di cicli, per cui faccio la distribuzione con logaritmo, così che N possa andare da 0 a $+\infty$ (all'infinito può potenzialmente andare) e si abbia una curva a campana intera anziché solo metà.⁷

⁷La gaussiana che ne esce e che si usa anche per interpolare dice effettivamente come è distribuita la tensione alternata per cui si ha rottura col numero di cicli, è poi effettivamente l'area della gaussiana che rappresenta la probabilità che la rottura avvenga.

- Come già detto, non tutti i materiali hanno un limite a fatica, ossia possono esserci dei materiali (molti tra metalli e leghe non ferrose, come le leghe di alluminio, magnesio o rame) che non presentano una tensione alternata al di sotto della quale la vita a fatica è infinita. Per tali materiali si può comunque individuare un limite a fatica convenzionale andando a vedere la tensione alternata in corrispondenza di un numero di cicli convenzionalmente posto a 10^8 oppure anche $5 \cdot 10^8$ cicli.

Per quei materiali che hanno un limite a fatica ma non presentano un ginocchio ben definito nella curva si pone convenzionalmente il suddetto in corrispondenza di 10^6 , $2 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^6$ o anche 10^7 cicli.

1.2.4 Metodo per stimare una curva di Wohler

Potrebbe verificarsi che non sia possibile svolgere le prove sperimentali per costruire una curva di Wohler, per cui si cerca un modo di crearne una in maniera "casalinga". Ciò è possibile conoscendo semplicemente il carico ultimo di rottura R_m del materiale (e opzionalmente anche il limite a fatica).

Si parte anzitutto dalla zona LCF, in cui partiamo da R_m e andiamo giù con una retta (immaginiamo assi logaritmici) fino a $N = 10^4$ e $\sigma_a = 0.9R_m$, ossia diciamo che la LCF va giù fino al 90% del carico ultimo di rottura convenzionalmente.

Per quanto riguarda la HCF invece è ancora più semplice, perché abbiamo una retta che passa per due punti noti, ovvero il punto LCF-HCF e il punto HCF-limite a fatica, che sappiamo per che N si verificano. Per trovarne un'espressione analitica (analogo per la LCF) basta impostare un sistema considerando che

$$\log(\sigma_a^k) \log(N) = \log(c) \rightarrow k[\log(\sigma_a) \log(N)] = \log(c)$$

dove c è una costante e k è l'esponente. In questo modo impostiamo un sistema lineare 2 x 2 e troviamo k e $\log(c)$, che portiamo poi in c , considerando che per $N = 10^4$ si ha $\sigma_a = 0.9R_m$ e che per $N = 2 \cdot 10^6$ si ha $\sigma_a = \sigma_D$ (ometto il pedice "-1" fino a nuova disposizione), per cui

$$\begin{cases} k[\log(0.9R_m) \log(10^4)] = \log(c) \\ k[\log(\sigma_D) \log(2 \cdot 10^6)] = \log(c) \end{cases}$$

R_m lo conosciamo da normativa o da prove statiche, mentre il limite a fatica possiamo misurarlo con la prova staircase oppure può essere stimato con una relazione empirica a partire da R_m , che discuteremo meglio nella sezione successiva.

Ciò che capiamo quindi è che la curva di Wohler può essere costruita empiricamente con delle prove oppure, in mancanza di questa possibilità, può essere ricavata in maniera matematica (alla bene e meglio) conoscendo, volendo, solo il carico di rottura ultimo, che posso a sua volta trovare anche sulla normativa, quindi con zero prove sperimentali si può fare una curva di Wohler. Ovviamente dei dati sperimentali sono sicuramente più precisi (anche se non assoluti).

1.3 Normativa FKM

In questa sezione andiamo ora a parlare dei principali fattori che influenzano la fatica, dal punto di vista anche dei provini usati per caratterizzare i materiali. Vedremo anzitutto la relazione tra carico ultimo e limite fatica precedentemente menzionata e poi vedremo anche che dovremo introdurre alcuni coefficienti correttivi a R_m per componenti che non sono esattamente il provino prescritto da normativa.

La normativa a cui facciamo riferimento qua è la FKM (tedesca) del 2003. Per essa si usa il pedice "N" quando si deve fare riferimento a un valore dato dalla stessa normativa oppure ottenuto seguendo esattamente quanto prescritto da essa nella prova (provini di una certa forma e sezione, e altre cose).

1.3.1 Relazione tra limite a fatica e carico ultimo di rottura

È ben noto come una prova per determinare il carico ultimo di rottura (statica) sia molto più semplice ed economica di una per ottenere il limite di fatica. Se quindi non è possibile stimare tale valore con una prova, si può ricorrere ad una correlazione *empirica* tra carico di rottura e limite a fatica facilmente consultabile da qualche parte.

Esistono infatti dei diagrammi $\sigma_D - R_m$ in cui sono indicati, per esempio, dei vari valori del coefficiente angolare di queste rette (sono rette), per cui si può determinare il limite a fatica semplicemente moltiplicando il carico di rottura per il valore letto. Tali rette sono state fatte, ad esempio, per varie famiglie di acciai, per cui uno prende il grafico e

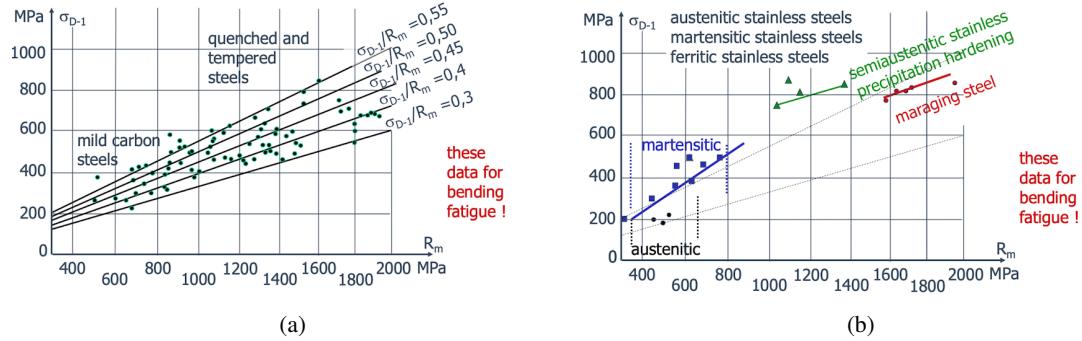


Figura 1.4

trova bene o male la retta interpolando i punti (se non è già stato fatto) e trova un valore ragionevole di limite a fatica, conoscendo il carico di rottura (prova statica o normativa anche qua).

Tipicamente ciò che si può trovare è qualcosa del tipo

$$\frac{\sigma_D}{R_m} = 0.3 - 0.55 \quad (1.5)$$

1.3.2 Correzione del carico ultimo di rottura

Come abbiamo già detto, la normativa impone che le prove per trovare, ad esempio, il carico di rottura siano fatte con dei provini standard (o fornisce dati di prove effettuate in tal modo). I provini standard hanno un loro valore di diametro *effettivo* che indichiamo con $d_{eff,N}$; parliamo di diametro effettivo perché i provini possono non essere circolari, quindi occorre determinare tale valore, che dipende sia dalla **geometria** del provino, ma anche dalla **tecnologia** con cui è prodotto. Se d_{eff} del provino è diverso da quello prescritto da normativa allora bisogna introdurre una correzione per il carico di rottura con due fattori di *scala*, secondo

$$R_m = K_{d,m} K_A R_{m,N} \quad (1.6)$$

Il coefficiente K_A è detto coefficiente di **anisotropia** e tiene conto del fatto che il componente non sia perfettamente isotropo, per via del fatto che, deformando plasticamente il pezzo nelle lavorazioni meccaniche, esso produca una certa anisotropia. Tale fattore è tabellato e si vede che è **peggiorativo** con l'*incrementare* del carico ultimo di rottura R_m (materiali più resistenti hanno un più importante peggioramento del carico ultimo per anisotropia). Tale correzione si applica chiaramente per le tensioni in direzioni trasverse alla direzione di lavorazione. Per l'altro coefficiente (fattore di scala per le **dimensioni**, effettive, del provino) invece esiste una formula empirica, ma si ha che tale coefficiente è unitario se il diametro effettivo del componente è inferiore (o uguale) al diametro effettivo del provino da normativa. Se invece esso è maggiore allora avremo che $K_{d,m}$ si calcola (nel caso di acciai, tranne gli inox e le ghise) come

$$K_{d,m} = \frac{1 - 0.7686 a_{d,m} [\log(\frac{d_{eff}}{7.5})]}{1 - 0.7686 a_{d,m} [\log(\frac{d_{eff,N,m}}{7.5})]} < 1 \quad (1.7)$$

Vediamo anzitutto che tale valore è minore di 1, quindi se il diametro effettivo è maggiore di quello da normativa si ha un effetto **peggiorativo**, quindi il limite di rottura è *minore*. Il numero 0.7686 viene fuori dal fatto che esso è l'inverso di $\log(20)$, mentre il 7.5 è un certo $d_0 = 7.5\text{mm}$. Il valore di $a_{d,m}$ è invece fornito, assieme chiaramente a $d_{eff,N,m}$, in base al materiale sempre dalla normativa. Quanto appena detto con pedice "m" (limite di rottura) vale anche per il pedice "p" (limite di elasticità o proporzionalità, altrove indicato con "e").

Per quanto concerne il diametro effettivo, vediamo che la normativa, come detto, da alcune indicazioni, ma se il componente non rientra in esse allora si ha

$$d_{eff} = 4 \frac{V}{O} \quad (1.8)$$

dove V è il volume del provino e O la superficie laterale.

Quello che si vede quindi è che per componenti con diametro effettivo maggiore si ha un effetto peggiorativo sul carico limite di rottura dovuto a questo fattore di scala che dovremo ovviamente tenere in conto nel dare un valore a R_m , eventualmente per trovare anche il limite a fatica, o anche solo per costruire manualmente la curva di Wohler.

Cross section	Heat treatable steel (also forgings), case hardening steel, heat treatable cast steel, GGG, GT or GS	Non-alloyed struct. steel (also forgings), fine grained struct. steel, norm., quench, and tempered steel, Aluminum
	d	d
	b	b
	2s	s
	2s	s
	$\frac{2bs}{b+s}$	s

Figura 1.5

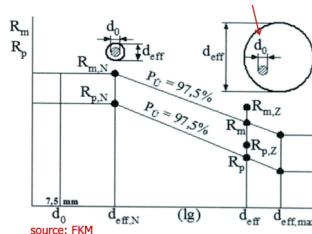


Figura 1.6

Non-alloy structural steels DIN EN 10025 (1994), grades S185, S235, S275, S355	$d_{eff,N,m}=40 \text{ mm}$ $d_{eff,N,p}=40 \text{ mm}$	$a_{d,m}=0,15$ $a_{d,p}=0,3$
Weldable fine grain structural steels in normalised condition DIN 17102 (1983) grades StE255 → StE500	$d_{eff,N,m}=70 \text{ mm}$ $d_{eff,N,p}=40 \text{ mm}$	$a_{d,m}=0,2$ $a_{d,p}=0,3$
Heat treatable steel in quenched and tempered condition DIN EN 10083-1 (1996) grades C22 → C60, 28Mn6 → 51CrV4	$d_{eff,N,m}=16 \text{ mm}$ $d_{eff,N,p}=16 \text{ mm}$	$a_{d,m}=0,3$ $a_{d,p}=0,4$
Case hardening steels in the blank hardened cond. DIN EN 10084 (1998) grades C10E → 14NiCrMo13-4	$d_{eff,N,m}=16 \text{ mm}$ $d_{eff,N,p}=16 \text{ mm}$	$a_{d,m}=0,5$ $a_{d,p}=0,5$
Spheroidal graphite cast irons DIN EN 1563 (1997) grades GJS 350-22-LT → GJS 900-2	$d_{eff,N,m}=60 \text{ mm}$ $d_{eff,N,p}=60 \text{ mm}$	$a_{d,m}=0,15$ $a_{d,p}=0,15$

Figura 1.7

(R_m in MPa) Steel	up to 600 $K_A=0,90$	from 600 to 900 $K_A=0,86$	from 900 to 1200 $K_A=0,83$	above 1200 $K_A=0,80$
(R_m in MPa) Alum. Alloys	up to 200 $K_A=1,00$	from 200 to 400 $K_A=0,95$	from 400 to 600 $K_A=0,90$	source: FKM

Figura 1.8

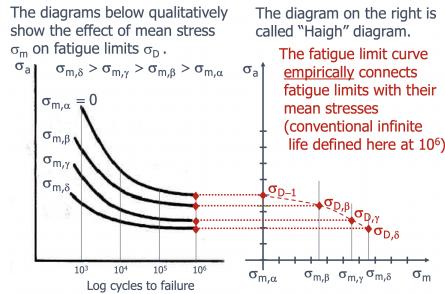


Figura 1.9

1.4 Effetto della tensione media (diagramma di Haigh)

Fino ad adesso abbiamo lavorato sulle curve di Wohler considerando la tensione media nulla (problema assili ferroviari), ma questo potrebbe non essere sempre il nostro caso, per cui dobbiamo investigare su cosa succede alle curve di Wohler quando $\sigma_m \neq 0$, ossia quando in media si ha una trazione (positiva) o una compressione (negativa).

1.4.1 Caso con tensione media positiva (trazione)

Quello che si nota in generale è che vi è una **diminuzione** del limite a fatica con l'aumentare della tensione media. È infatti possibile realizzare (sperimentalmente) un grafico, detto **diagramma di Haigh**, in cui mettiamo in ordinata la σ_a e in ascissa la σ_m . Quello che facciamo è quindi andare a misurare il limite a fatica (convenzionalmente $N = 10^6 - 10^7$) a varie tensioni medie, per poi mettere nel grafico tali punti.

Ovviamente noi conosciamo già due punti notevoli, ossia il limite a fatica per tensione media nulla ($\sigma_a = \sigma_{D,-1}$) ed il limite a fatica nullo ($\sigma_a = 0$), in corrispondenza di una tensione media pari al carico di rottura ultimo ($\sigma_m = R_m$), in quanto vediamo che basta mezzo ciclo a carico di rottura per rompere il componente.

I punti intermedi invece li dobbiamo sempre calcolare sperimentalmente, andando di volta in volta a misurare il limite a fatica per varie tensioni medie nel range tra 0 e R_m . Ciò che si ottiene è una parabola rovesciata, che può però essere approssimata (in maniera tra l'altro conservativa) con una retta, detta **retta di Goodman**⁸.

Esiste ovviamente un *legame* tra rette di Goodman e curve di Wohler, in quanto possiamo costruire le curve di Wohler al variare della tensione media utilizzando proprio la retta di Goodman per il limite a fatica. Basta infatti scegliere la tensione media per cui si vuole fare la curva di Wohler, entrare nella retta di Goodman e leggere il corrispondente limite a fatica σ_D , e andare quindi a posizionare tale valore nella curva di Wohler (in corrispondenza del milione di cicli circa). Per calcolare gli altri punti basta considerare che il componente sperimenta rottura statica quando $\sigma_a = R_m - \sigma_m$, questo perché sappiamo che $\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_m$ e quindi siccome in questo caso $\sigma_{max} = R_m$ abbiamo che la tensione alternata con cui si ha rottura statica è il carico ultimo depurato della tensione media. La zona di LCF ovviamente c'è per 10,000 cicli e la tensione alternata è sempre pari al 90% di quella di rottura statica, ossia $\sigma_a = 0.9(R_m - \sigma_m)$ in questo caso. In questo modo abbiamo ottenuto una curva di Wohler a tensione media non nulla.

Si dimostra tra l'altro che la pendenza della retta nella zona HCF è sempre la stessa al variare della tensione media, per cui l'esponente k della relazione $\sigma_a^k \cdot N = c$ è sempre lo stesso; la costante cambia, ma quella posso sempre ricavarla perché conosco il limite a fatica (ed il numero di cicli a cui avviene), per cui metto di volta in volta il σ_D che trovo (dalla retta di Goodman, al variare della tensione media) e calcolo la costante.

Per trovare in generale il limite a fatica (o una generica tensione alternata) per tensione media non nulla è sufficiente ragionare sulla retta di Goodman ricavando che la sua equazione analitica è

$$\sigma_D = \sigma_{D,-1} \frac{R_m - \sigma_m}{R_m} \quad (1.9)$$

⁸Questa cosa può essere fatta anche per altri valori di tensione alternata rispetto al limite a fatica, basta che si ragioni a N fissato e si vada a calcolare il valore della tensione alternata tale per cui si ha rottura a fatica in corrispondenza del valore fissato di N per una serie di diverse tensioni medie.

Caso particolare: $R=0$

Se abbiamo il caso particolare in cui $R = 0$, ossia $\sigma_{min} = 0$ (detto anche *tensione all'origine*), notiamo che $\sigma_a = \sigma_m$ sempre, per cui abbiamo l'equazione della retta bisettrice del primo quadrante. Se consideriamo la retta di Goodman per il limite a fatica, vediamo che dove tale retta incrocia la bisettrice del primo quadrante, si ha il limite a fatica nel caso di tensione all'origine (σ_{D_0}).

1.4.2 Caso con tensione media negativa (compressione)

Per questa casistica si è visto sperimentalmente che il limite a fatica *aumenta* leggermente; volendo approssimare (in maniera comunque conservativa) possiamo dire che il limite a fatica **non cambia** se la tensione media è negativa, ossia mediamente si ha una compressione.

Questo avviene perché la compressione *migliora* la fatica, dal momento che tende a "richiudere" le cricche, cosa che invece non fa la trazione, in quanto essa tende a lacerare i piani atomici, facendo crescere la cricca.

È quindi sufficiente prolungare con una costante (pari al limite a fatica con tensione media nulla) il diagramma della retta di Goodman per tensioni medie negative.

1.5 Tensioni principali e criteri di Tresca e von Mises

Prima di parlare di coefficiente di sicurezza è necessario approfondire la questione della tensione equivalente (o tensione ideale) che si è vista a denominatore nel caso di coefficiente di sicurezza statico e che indica quanto tale materiale può operativamente darmi (il limite di proporzionalità elastica o snervamento, dato che oltre lo snervamento non è conveniente andare in opera), rispetto a quanto chiedo al materiale (in una maniera "sintetica" che tenga conto del massimo "globale" di quanto chiedo).

$$C_S = \frac{R_e}{\sigma_{id}}$$

In altre parole, è necessario fare prima un discorso che ci porti a capire cosa è questa tensione ideale e come calcolarla. Nella trattazione esamineremo il suo calcolo mediante due diversi (ma simili) criteri, ossia quello di Tresca e quello di von Mises.

Prendiamo allora un albero soggetto a torsione M_z e flessione M_x intorno all'asse x . Esso avrà uno *stato di tensione* dovuto sia alla flessione che alla torsione; in particolare, la flessione causerà una tensione normale lungo l'asse z secondo Navier

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y$$

Mentre la torsione causerà una tensione tangenziale lungo x sulla faccia di normale lungo z che si calcola analogamente come

$$\tau_{zx} = \frac{M_z}{I_p} r$$

Isoliamo quindi un cubetto infinitesimo sulla superficie dell'albero (ci interessa quella perché è lì che ci sono le massime tensioni, avendo andamento a farfalla, sia in caso statico che a fatica) e vediamo che, ad esempio, sulla faccia di normale lungo z agisce la tensione σ_{zz} in direzione z e la tensione τ_{zx} in direzione x .

Per questo particolare caso avremo quindi che la tensione ideale si calcola, secondo **Tresca**, come

$$\sigma_{id,T} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau_{zx}^2} \quad (1.10)$$

Mentre si calcola secondo **von Mises** come

$$\sigma_{id,VM} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau_{zx}^2} \quad (1.11)$$

Quanto appena presentato però è un procedimento per il caso specifico in esame, ossia quello dell'albero soggetto a torsione e flessione. Noi vogliamo un procedimento generale che ci dia le tensioni ideali in funzione di qualcosa che è possibile definire in maniera generale.

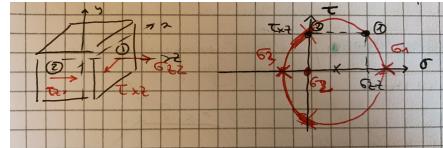


Figura 1.10

1.5.1 Tensioni principali

Per poter fare quanto appena detto, dobbiamo definire (e capire come calcolare) le cosiddette tensioni principali. Esse sono definite come

"Le tensioni calcolate negli assi lungo cui le tensioni tangenziali sono nulle (assi principali)."}

In altre parole, dobbiamo ruotare il cubetto elementare (entità generica del componente) finché le tensioni calcolate lungo tali assi ruotati sono caratterizzate da tensioni tangenziali nulle.

Uno strumento molto utile che ci viene in soccorso è rappresentato dai cosiddetti **cerchi di Mohr**. Se prendiamo infatti un grafico $\tau - \sigma$, ossia tensioni tangenziali in ordinata e tensioni normali in ascissa, possiamo rappresentare lo stato di tensione di ogni faccia del cubetto elementare semplicemente andando a posizionare dei punti nel suddetto grafico.

Possiamo ad esempio rappresentare lo stato di tensione della faccia con normale lungo l'asse z positivo, caratterizzata nell'esempio di prima da tensione normale e tangenziale (quindi un punto nel primo quadrante), nonché la faccia con normale lungo l'asse x , quindi caratterizzata da sola tensione tangenziale (punto sull'asse τ perché $\sigma = 0$).

Per trovare allora i valori delle tensioni tangenziali basta posizionarsi sull'asse σ (così che $\tau = 0$, per definizione), ma ancora non sappiamo quali punti dell'asse siano le tensioni tangenziali. Per conoscere questo anziutto consideriamo che una tensione tangenziale in un problema 2D (come il caso in esempio di sopra) è sicuramente nulla (le tensioni tangenziali sono 3, nel 2D una è nulla), per cui si trova nell'origine del grafico).

Si dimostra infine che è possibile disegnare un cerchio (detto cerchio di Mohr) i cui punti siano tutti e i soli stati di tensione del cubetto elementare al variare dell'orientazione dei suoi assi. Nel caso in esempio possiamo prendere il cerchio che passa per quei due punti e che ha centro, si dimostra anche questo, a $\sigma = \frac{\sigma_{zz}}{2}$. In questo modo otteniamo che le tensioni principali sono in corrispondenza dell'intersezione del cerchio con l'asse σ (la terza abbiamo detto essere nulla). Basterà allora prendere la coordinata del centro e aggiungere o togliere il raggio per avere le tensioni principali non nulle.⁹

Sempre nel caso in esame abbiamo che le due tensioni principali sono

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{zz}}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_{zz}^2}{4} + \tau_{xz}^2} \\ \sigma_3 = \frac{\sigma_{zz}}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_{zz}^2}{4} + \tau_{xz}^2} \end{cases}$$

1.5.2 Criteri di Tresca e von Mises in tensioni principali

Ora che abbiamo visto come si calcolano le tensioni principali (nel caso in esame, ma basta ripetere il procedimento con altre casistiche) possiamo scrivere le formule per la tensione ideale in funzione delle tensioni principali. Non le dimostriamo ma diciamo direttamente che

$$\sigma_{id,T} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (1.12)$$

$$\sigma_{id,VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.13)$$

Vediamo tra l'altro che la tensione ideale di Tresca è il diametro del cerchio di Mohr. Tutta questa formulazione è utile perché si possono visualizzare sul cerchio di Mohr i criteri di cedimento. Ad esempio, se abbiamo due cerchi di egual diametro, ma uno con tensioni basse e l'altro con tensioni alte (tensioni normali), abbiamo che gli stati di tensione sono uguali, in quanto conta la differenza tra le tensioni principali e non i valori assoluti (pressione isostatica che spinge da tutte le parti non rompe le cose, sennò saremmo già col cervello disintegrato).

⁹In pratica stiamo dicendo che ogni problema (2D) ha il suo cerchio di Mohr e, tramite esso, è possibile individuare facilmente le due tensioni principali.

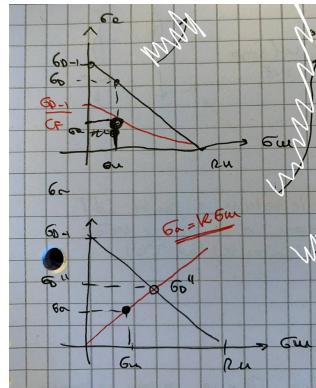


Figura 1.11

1.6 Coefficiente di sicurezza a fatica

Tutto quello che abbiamo detto nella precedente sezione però ora non serve a niente (serviva per capire il coefficiente di sicurezza statico), dato che ora studiamo dei modi per definire un coefficiente di sicurezza nella progettazione a fatica di un componente (ossia esprimere un rapporto tra quanto il materiale può darmi e quanto gli chiedo).

Per fare ciò possiamo ragionare nel seguente modo: sappiamo che la retta di Goodman per il limite a fatica ci dice, al variare della tensione media, qual è la massima tensione alternata per cui si ha vita infinita, per cui se noi prendiamo una tensione alternata inferiore al limite a fatica (per una fissata tensione media) siamo sicuri che non c'è mai rottura a fatica.

Definiamo allora il coefficiente di sicurezza a fatica come il rapporto tra il limite a fatica per quella tensione media (che immaginiamo quindi **costante**) e la tensione alternata a cui sollecitiamo il componente.

$$C_F = \frac{\sigma_D}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{D-1}}{\sigma_a} \frac{R_m - \sigma_m}{R_m} \quad (1.14)$$

In questo modo, se vogliamo un coefficiente di sicurezza, ad esempio, pari a 2 non ci resta che limitare la tensione alternata a metà del limite a fatica. Abbiamo tra l'altro esplicitato il limite a fatica in funzione di quello per tensione media nulla, così da necessitare solo della tensione media come parametro da variare in modo esplicito. Appare banale che sulla retta di Goodman si abbia $C_F = 1$.

Se ora vogliamo però considerare che la tensione media sia **non costante** necessariamente, possiamo ragionare in maniera alternativa: ipotizziamo che la tensione media sia variabile, ma che vari in maniera *proporzionale* alla tensione alternata, ossia che si abbia una retta $\sigma_a = k\sigma_m$. Dove tale retta interseca la retta di Goodman individuiamo il nostro limite a fatica, per cui definiamo il coefficiente di sicurezza a fatica come rapporto tra questo limite a fatica σ_D'' e la tensione alternata a cui sollecitiamo il componente.

$$C_F = \frac{\sigma_D''}{\sigma_a} \quad (1.15)$$

Tra le due strade vediamo che la **più conservativa** è quella con tensione media **costante**.

1.6.1 Cedimento statico su diagramma di Haigh

Possiamo pensare di sovrapporre al diagramma di Haigh (dove c'è la retta di Goodman in pratica) qualcosa che dia indicazioni sul cedimento statico del componente. Tale cedimento noi lo assumiamo in corrispondenza del limite di snervamento R_e e diciamo quindi che il materiale, sottoposto a un solo mezzo ciclo tale per cui $\sigma_{max} = R_e$, si rompe.

Avendo tale valore di tensione massima, possiamo sempre scrivere che

$$\sigma_m + \sigma_a = \sigma_{max} = R_e$$

Ossia abbiamo un'equazione di una retta a pendenza negativa nel diagramma di Haigh. Tale retta è speculare rispetto all'asse verticale ora perché nel cedimento statico non c'è differenza tra trazione e compressione (non c'entra la storia

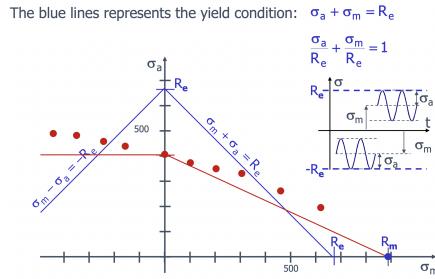


Figura 1.12

delle cricche), quindi abbiamo due rette che formano un triangolo con vertice superiore sull'asse verticale e vertici orizzontali in corrispondenza di $\pm R_e$.¹⁰

Questa visualizzazione "sovrapposta" è molto utile perché noi sappiamo che finché stiamo sotto la retta di Goodman non abbiamo cedimento a fatica ($C_F > 1$), e ora sappiamo anche che se stiamo sotto le due rette appena descritte non abbiamo cedimento statico ($C_S > 1$). In questo modo possiamo subito vedere, conoscendo la coppia $\sigma_a - \sigma_m$, se abbiamo o meno un cedimento statico e/o a fatica.

1.7 Fattori che influenzano la vita a fatica

Possiamo individuare 3 fattori che influenzano macroscopicamente la resistenza a fatica:

- L'effetto **scala**, tenuto come già visto in conto dal coefficiente $K_{d,m}$.
- L'**anisotropia**, tenuta in conto come già visto dal coefficiente K_A .
- La **rugosità** superficiale, tenuta in conto da un fattore b_0 definito come il rapporto tra il limite di fatica del componente lavorato a macchina ed il limite a fatica del provino testato in laboratorio (tipicamente lucidato).

$$b_0 = \frac{\sigma_{D,lav}}{\sigma_{D,prov}} \quad (1.16)$$

1.7.1 Effetto della rugosità

Come già visto, la rugosità è tenuta in conto dal coefficiente b_0 , il quale è tipicamente **minore** di 1, ossia la rugosità **peggiora** la resistenza a fatica, in quanto rappresenta una causa di possibile **innesco** per la cricca, nonché è causa di **tensioni residue** a trazione, le quali contribuiscono all'avanzamento della cricca.

Il fatto che la resistenza a fatica sia peggiore nel lavorato rispetto al lucidato è quindi dovuta al fatto che il lavorato ha una rugosità maggiore, che viene invece ridotta con il suddetto processo di lucidatura.

Si vede inoltre anche che il fattore b_0 , *a pari rugosità*, risulta essere **minore** per materiali con *carico di rottura ultimo* **maggiori**. In altre parole, i materiali più resistenti patiscono in maniera maggiore l'effetto della rugosità sul limite a fatica.

Quello che abbiamo appena visto quindi può essere riassunto dicendo che dobbiamo applicare al limite a fatica del nostro componente lavorato un fattore di correzione (peggiorativo), il quale dipende in sostanza dalla rugosità superficiale del componente lavorato e dal carico ultimo di rottura del materiale, rispetto al limite a fatica che abbiamo trovato sul provino. Vediamo quindi ancora una volta come i valori che troviamo sui provini debbano essere corretti nel passaggio a componenti finiti per tenere conto di una serie di effetti che sui provini (standardizzati e trattati) non ci sono ma che invece sono presenti sui componenti finiti.

Tensioni residue

Riprendiamo qua il discorso sulle tensioni residue, ossia le tensioni che rimangono all'interno del materiale una volta che esso subisce una certa lavorazione. Tali tensioni non è detto che siano di trazione (peggiorative per la fatica), ma possono essere anche di compressione (aumentano la vita a fatica), per cui potrebbe essere una mossa intelligente

¹⁰La retta è in quel modo nella parte di compressione perché l'equazione è sempre la stessa, solo che la tensione media è sicuramente negativa (e quella alternata sicuramente positiva).

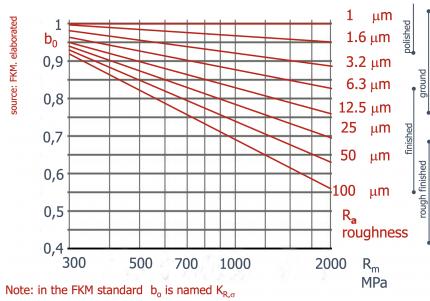


Figura 1.13

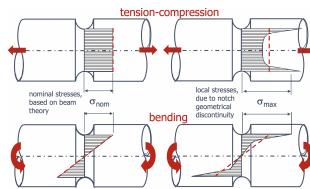


Figura 1.14

quella di eseguire tali lavorazioni sui pezzi, in modo tale da incrementare la loro vita a fatica. In ogni caso, le tensioni residue variano anche lungo la profondità del componente.

Dei trattamenti meccanici per indurre tale stato di compressione sono la pallinatura e la pallinatura laser ad esempio. C'è inoltre da dire che anche la deformazione plastica induce tensioni residue a compressione, per cui dove si può fare è meglio preferirla all'asportazione di truciolo (sebbene sia più economica questa).

1.8 Fattore di concentrazione delle tensioni

Consideriamo due diversi provini del medesimo materiale; un provino è semplicemente un cilindro di diametro d , mentre l'altro provino è un oggetto caratterizzato da due cilindri, uno di diametro $D > d$ e l'altro di diametro d , raccordati da uno *spallamento* di raggio r . Applichiamo ad entrambi i provini il medesimo carico, ad esempio uno sforzo normale di trazione-compressione F .

Prendiamo il provino "liscio" e analizziamo il suo **stato di tensione**: come è ovvio aspettarsi dalla teoria dell'elasticità, avremo una tensione normale *uniforme* e pari a

$$\sigma = \frac{F}{A_d}$$

Dove A_d è l'area del provino cilindrico di diametro d . Prendiamo ora l'altro provino e facciamo il medesimo ragionamento; sicuramente nella zona di diametro d si avrà una tensione uniforme e pari a σ , mentre nella zona di diametro D vi sarà un tensione $\sigma' < \sigma$ e pari a

$$\sigma' = \frac{F}{A_D}$$

Tutto questo vale se siamo abbastanza lontani dallo spallamento; in corrispondenza del suddetto raccordo, tuttavia, non possiamo avere un cambiamento "istantaneo" di tensione, per cui conveniamo che deve esserci una "transizione" da σ' a σ . Questa transizione purtroppo **altera** molto lo stato di tensione in quella zona (ricorda ciò che diceva Rankine).

Se infatti andiamo a vedere qual è lo stato di tensione nel raccordo, notiamo anzitutto che lì non vale più tanto bene la nostra amata teoria di de Saint Venant (la variazione di geometria non è dolce), e poi vediamo che esso *non è uniforme*, bensì si presenta con dei **picchi** di tensione agli estremi, di valore pari a σ^{\max} . Rimane pur sempre vero che l'integrale della distribuzione di σ sull'area locale è sempre pari a F , dal momento che lo sforzo normale è costante lungo l'intero oggetto.

A questo punto possiamo quindi dire che in corrispondenza del raccordo vi è una tensione il cui massimo valore **spaziale** è pari al valore **nominaile** della tensione (ossia il valore che si avrebbe se non ci fosse il raccordo, convenzionalmente nella zona destra dell'oggetto, ossia quella di tensione σ), moltiplicato per un fattore $K_t > 1$ che è proprio

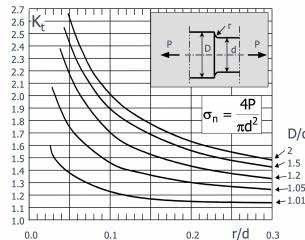


Figura 1.15

il fattore di **concentrazione** delle tensioni.

$$\sigma^{max} = K_t \sigma_{nom} \quad (1.17)$$

Il valore di questo coefficiente si può ottenere in vari modi; il primo modo fu quello di usare la teoria generale dell'elasticità (senza ipotesi di dSV), poi si è passati a prove sperimentali e ora si usano spesso gli elementi finiti.

In ogni caso, diciamo sinteticamente che la tensione in corrispondenza di una variazione di geometria subisce un'alterazione e tale alterazione provoca agli estremi (in superficie) una tensione massima che è pari a K_t per il valore che la tensione avrebbe se non ci fosse la variazione geometrica (valore nominale del provino liscio).

Ovviamente questo discorso vale anche se lo stato di tensione nominale non è costante, come ad esempio nel caso della flessione pura, che induce uno stato di tensione "a farfalla" già di suo. Ebbene, ciò che succede è semplicemente che il massimo (tensione agli estremi) viene amplificato dal suo K_t^b e si crea una distribuzione sempre a farfalla, ma gli estremi sono accresciuti. Il raccordo con l'asse neutro è sempre con una curva come in figura (concavità in quei modi) perché l'integrale sulla sezione deve sempre essere costante in ogni sezione.

Appurato ciò, possiamo quindi dire che il K_t **dipende** da:

- Geometria
- Zona di raccordo
- Tipo di carico

E invece **non** dipende dal materiale. Dovremo pertanto andarci a calcolare, nel caso di componenti con raccordi, il nuovo valore di tensione massima scalato di questo fattore di forma (non dipende da dimensioni assolute ma da rapporti di dimensioni). Questo sarà utile perché quando calcoliamo poi la tensione alternata noi lo facciamo riferendoci alla massima tensione che sperimenta il componente, quindi come valori da mettere nella formula di σ_a e σ_m dovremo mettere i valori massimo e minimo (*temporale*) che assume la tensione massima (*spaziale*) sull'oggetto. Questo tra l'altro conferma come la fatica sia un fenomeno *superficiale*, dal momento che abbiamo visto come la tensione massima in questi casi di raccordi si trovi in corrispondenza proprio della superficie. Ciò vuol dire quindi che il componente sperimenta rottura per fatica prima in superficie (è la prima zona che raggiunge il limite).

Possiamo diagrammare K_t in funzione del rapporto $\frac{r}{d}$, al variare del rapporto $\frac{D}{r}$ e vedere così che la tensione massima è amplificata sempre di più man mano che, a pari d , diminuisce il raggio di curvatura del raccordo (ho variazione più brusca di geometria) e, allo stesso modo, a pari rapporto $\frac{r}{d}$ si abbia una maggiore amplificazione della tensione massima al crescere di D (ho una variazione più brusca di geometria perché passo da qualcosa di molto grande a qualcosa di più piccolo, a parità di questa cosa più piccola).

1.8.1 Legame con la fatica

Adesso che abbiamo capito come la tensione massima (i.e quella che useremo per calcolare la tensione alternata) si modifica con la presenza di una variazione di geometria, ci chiediamo come tutto questo abbia effetto sulla *fatica*.

Facciamo quindi prima un ragionamento a priori, per vedere poi cosa ci dicono i dati sperimentali. Prendiamo un provino liscio e uno, per esempio, con una gola di scarico; facciamo prove/stime e troviamo quindi il limite a fatica del provino liscio e del provino lavorato (quello con la gola).

Dal momento che abbiamo messo in relazione la tensione massima del provino liscio e lavorato con il K_t e dal momento che la tensione alternata (per semplicità consideriamo $\sigma_m = 0$, ma sennò basta scalare come visto secondo la retta di Goodman) la troviamo con le tensioni max e min (temporali), possiamo dire che in linea teorica la tensione

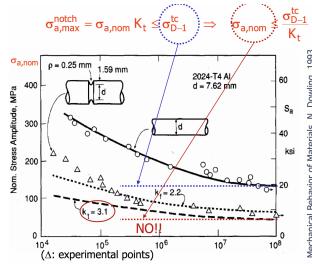


Figura 1.16

massima (spaziale), scalando con K_t , fa sì che anche la tensione alternata scali con K_t , quindi anche il limite a fatica (la particolare tensione alternata al di sotto della quale c'è vita infinita).

$$\sigma_D^{lav} = \frac{\sigma_D^{liscio}}{K_t}$$

Se però andiamo a fare prove sperimentali notiamo una cosa strana, ossia che il limite a fatica del provino lavorato risulta essere leggermente superiore al limite a fatica che abbiamo calcolato dividendo per K_t quello del provino liscio (ovviamente il limite a fatica del lavorato è sempre inferiore al liscio).

In altre parole, il fatto che vi sia il notch costituisce un parziale aiuto alla fatica rispetto a quanto previsto dalla teoria (è comunque peggiorata la vita a fatica, da questo non scappo). Per tenere conto di questa cosa allora possiamo scrivere che il limite a fatica del provino lavorato è pari al valore "liscio" diviso per un coefficiente K_f , sicuramente maggiore di 1, ma minore di K_t .

$$\sigma_D^{lav} = \frac{\sigma_D^{liscio}}{K_f} \quad (1.18)$$

Ancora in altre parole, il limite a fatica del lavorato non è K_t volte inferiore al limite del liscio, ma "soltanto" K_f volte. Possiamo vedere la cosa come se a *governare* la fatica non fosse la $\sigma^{max} = K_t \sigma_{nom}$, ma un valore "effettivo" minore, ossia

$$\sigma_{eff} = K_f \sigma_{nom}$$

In ogni caso, non ci dobbiamo troppo preoccupare di queste cose, anzitutto perché se stimiamo un limite a fatica più basso della realtà non si fa male nessuno (restiamo conservativi), e poi perché comunque tutto ciò è indicato in grafici e tabelle, per cui quello che dovremo fare sarà soltanto leggere i valori giusti di K_f (e K_t) e applicarli al limite a fatica che abbiamo calcolato sul provino liscio (senza variazioni di geometria) per ottenere quindi un limite a fatica "operativo" che tenga conto del fattore di concentrazione delle tensioni e del fatto che stiamo studiando la fatica.

Il tutto ovviamente unito alle altre correzioni che abbiamo visto nel corso di questo capitolo (correzione di R_m per anisotropia ed effetto scala, correzione di σ_D per tensione media non nulla e per effetto della rugosità, ecc).

Possibile fenomenologia dell'effetto intaglio a fatica

Spieghiamo brevemente perché a fatica si vede che il limite è poco superiore rispetto a quanto previsto. Come sappiamo, la fatica non è un fenomeno puntuale, in quanto si fa sempre riferimento a un volume elementare; su tale volume, per quanto infinitesimo, la tensione *varia* (abbiamo visto che con intaglio la tensione varia sempre), per cui siccome su tale volume elementare si prende comunque la tensione *media*, allora vediamo che la media è inferiore al massimo e quindi c'è un piccolo effetto migliorativo rispetto a quanto previsto dalla teoria statica (questo perché in statica abbiamo ragionato invece con valori puntuali).

Un'altra ragione possibile è che in corrispondenza dell'intaglio c'è un gradiente di tensione, quindi alla radice c'è una tensione di poco inferiore; se una cricca enuclea in quella zona lo fa verso zone a tensione minore, per cui lo fa più lentamente e si migliora di un po' il limite a fatica.

1.8.2 Legame tra fattore di concentrazione delle tensioni statico e a fatica

È possibile mettere in relazione K_t e K_f secondo una legge del tipo

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (1.19)$$

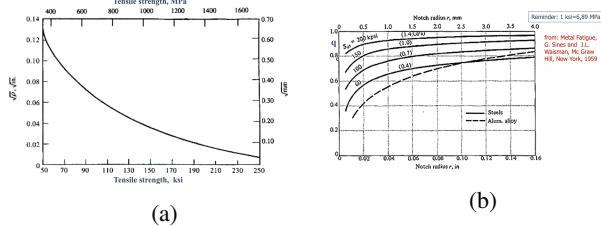


Figura 1.17

Dove

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\rho}} \quad (1.20)$$

Dove r è il raggio del raccordo, mentre ρ è dato in funzione di R_m in un grafico $\sqrt{\rho} - R_m$ apposito. Vediamo quindi che il q è funzione sia della *geometria* dell'intaglio (tengo conto del gradiente di tensione che abbassa il tutto da massima a media) che del *materiale*. Siccome $K_f < K_t$ si ha sicuramente che $0 < q < 1$.

Come si può immaginare, se cresce il raggio del raccordo allora diminuisce il gradiente di tensione, e quindi c'è una tensione più elevata (non riesce a diminuire troppo in una piccola zona), per cui il materiale risente di più di questo effetto di intaglio a fatica.

Se fosse $q = 1$ allora $K_f = K_t$, per cui vediamo che in questo caso il materiale patirebbe di più l'effetto di intaglio a fatica (viene meno l'effetto benefico rispetto alla teoria), mentre se fosse $q = 0$ vuol dire che $K_f = 1$, ossia che il materiale è insensibile all'effetto di intaglio a fatica, ossia è come se l'intaglio non ci fosse (provino liscio).

Esempio

Immaginiamo ora di conoscere K_t e q di un materiale e di fare quindi dei calcoli su un provino. Calcoliamo anzitutto la tensione nominale sul provino come

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{\frac{\pi}{4}d^2}$$

Poi calcoliamo il suo valore effettivo a fatica

$$\sigma_{a,eff} = K_f \sigma_{nom}$$

Dal diagramma di Haigh, entrando con questa, possiamo leggere il limite a fatica σ_D , con cui calcolare anche poi il coefficiente di sicurezza a fatica.

$$C_F = \frac{\sigma_D}{\sigma_{a,eff}}$$

L'unico dubbio qua sarebbe poi quale limite a fatica mettere, cioè per quale *tipologia* di carico (i.e quale σ_{D-1} usare nel diagramma di Haigh), ma possiamo usare quello del caso trazione-compressione per essere conservativi (o meglio, per prendere il caso con valore medio costante, dato che comunque teniamo conto dei gradienti di tensione e/o degli effetti di intaglio con il K_f).

1.9 Fatica biassiale

Fino ad ora abbiamo ragionato immaginando che il componente sia sollecitato da un solo tipo di carico alla volta, ossia che è presente uno stato di tensione monodimensionale. Ci possono però essere delle situazioni in cui ciò non si verifica, per cui dobbiamo andare ora a studiare come cambiano le cose che abbiamo visto in precedenza con la presenza di uno stato di tensione, per esempio, bidimensionale. Come vedremo, le cose potranno essere agevolmente estese anche ad un caso in cui lo stato sia tridimensionale.

Gough e Pollard hanno fatto delle prove sperimentali su dei provini (in tensione *alternata*, quindi media nulla) in cui era possibile avere delle sollecitazioni "pure" di trazione o torsione, oppure le si poteva "mixare", per ottenere quindi varie casistiche intermedie. Quello che hanno fatto quindi è stato andare di volta in volta a misurare il limite di fatica τ_{D-1} e σ_{D-1} e riportare tali punti su un diagramma $\tau_a - \sigma_a$. Quello che si è visto è che la curva che meglio li approssima è un'*ellisse*, ossia

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{D-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{D-1}}\right)^2 = 1$$

Questi sono i punti per cui c'è limite di fatica. Se un punto sta fuori l'ellisse (>1) allora c'è rottura a fatica (dopo tipo 10^7 cicli ovviamente), sennò se sta dentro (<1) si ha vita infinita.

Rielaborando l'equazione dell'ellisse possiamo dire che

$$\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{D-1}}{\tau_{D-1}}\right)^2 \tau_a^2 = \sigma_{D-1}^2$$

Un'altra cosa che è venuta fuori dalle prove sperimentali è che il rapporto tra limiti di fatica τ e σ è *costante* e vale circa 1.7, per cui si ha che

$$\sigma_a^2 + 3\tau_a^2 = \sigma_{D-1}^2$$

Riconosciamo però che il primo membro non è altro che il quadrato della tensione equivalente di von Mises, per cui possiamo dire che nel caso di fatica biassiale, per avere vita infinita, deve essere

$$\sigma_{a,eq} \leq \sigma_{D-1}, \quad \sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} \quad (1.21)$$

Abbiamo indicato la tensione equivalente in questo modo perché von Mises ha ottenuto il suo valore per altre cose (e con calcoli teorici tra l'altro), per cui è una sorta di tensione equivalente "von Mises-like".

Facciamo ora delle considerazioni su quanto appena ottenuto. Abbiamo detto di avere un componente sollecitato in modo da avere uno stato di tensione biassiale (i.e due tensioni, come nel caso torsione e trazione-compressione, dove abbiamo quella di taglio per torsione e quella normale di trazione-compressione), per individuare un valore di tensione che rappresenti il limite a fatica allora abbiamo potuto trovare una formula ricavata *empiricamente* che ci dice sostanzialmente di definire una tensione *equivalente*, funzione delle due tensioni che abbiamo, e di confrontare questa tensione equivalente con il limite a fatica misurato nel caso di trazione-compressione "pura".

Questa cosa in realtà non è vincolante, nel senso che noi potremmo definire un'altra tensione equivalente e far comparire a secondo membro il limite di fatica per torsione pura; ci fa comodo fare come abbiamo fatto perché la tensione equivalente, sempre per via empirica, si è dimostrata essere molto simile alla tensione equivalente (o ideale) di von Mises.

Se ci chiediamo come ricavare le tensioni σ_a e τ_a allora possiamo farlo semplicemente dalla teoria della trave, perché basta conoscere come si legano le tensioni σ e τ con i carichi e valutare i valori alternati (la media sappiamo che è nulla perché così sono state fatte le prove). I limiti a fatica invece ovviamente li conosciamo perché sappiamo come si trovano (metodo Staircase), quindi abbiamo tutto il necessario per studiare la vita a fatica (biassiale) del nostro componente.

A questo punto potremmo poi pensare di prendere il diagramma di Haigh e di valutare eventualmente il C_F , avendo l'accortezza di entrare nel diagramma con $\sigma_a = \sigma_{a,eq}$ calcolata con la formula von Mises-like.

Caso tridimensionale

Quello che stiamo per presentare è una sorta di "estensione" teorica dei risultati sperimentali ricavati da Gough e Pollard. Sines infatti nel 1953 presentò una teoria che confrontava le similarità tra quanto visto sperimentalmente da G-P e quanto invece trovato da von Mises nello scrivere la sua tensione equivalente, per cui estese il ragionamento al caso tridimensionale (ossia 3 tensioni principali non nulle).

In altre parole, disse che in campo triassiale era sufficiente usare la formula di von Mises con 3 tensioni principali (dopo averle ovviamente calcolate) per ottenere una $\sigma_{a,eq}$ da confrontare con σ_{D-1} . Si ha quindi che

$$\sigma_{a,eq,3D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{a,1} - \sigma_{a,2})^2 + (\sigma_{a,1} - \sigma_{a,3})^2 + (\sigma_{a,2} - \sigma_{a,3})^2} \quad (1.22)$$

In ogni caso, il buon Sines mise le mani avanti dichiarando che questa formula era stata sperimentalmente verificata solo in casi 1D e 2D (quello che abbiamo visto fino ad ora in pratica), per cui era, come già detto, una semplice estensione teorica dei risultati sperimentali di G-P.

1.9.1 Effetto delle tensioni medie

Fino ad adesso abbiamo presentato dei risultati validi soltanto in caso di tensione alternata, ossia con $\sigma_m = \tau_m = 0$, in quanto G-P fecero le loro prove proprio in questa condizione. Vogliamo però ora vedere cosa succede quando la tensione media non è costante (nessuna delle due), ragionando sempre nel caso biassiale ovviamente.

Furono fatte delle ulteriori prove sperimentali da Sines nel 1959, in cui egli diresse l'andamento del limite a fatica in funzione della tensione media. Poiché la sollecitazione qui è biassiale, otteniamo 4 grafici, 2 in cui vediamo

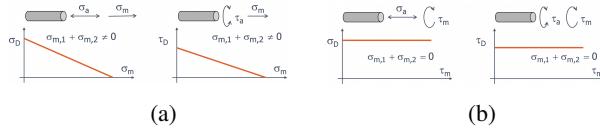


Figura 1.18

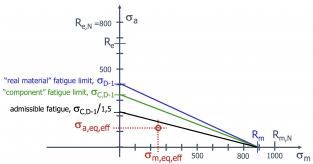


Figura 1.19

l'andamento di σ_a e τ_a in funzione di σ_m , ed altri 2 in cui vediamo l'andamento delle medesime in funzione ora di τ_m . Ciò che venne fuori da queste prove è che i limiti a fatica normale e tangenziale diminuiscono linearmente con la σ_m , mentre rimangono *costanti* con la τ_m , per cui diciamo che la tensione **tangenziale** media *non influenza* il limite a fatica né normale né tangenziale¹¹.

Il passo successivo quindi è quello di fare la seguente considerazione: abbiamo visto che possiamo calcolare una tensione equivalente per fare i nostri conti sul limite a fatica (i.e sul diagramma di Haigh), e abbiamo anche visto che la tensione normale media influenza il limite a fatica in maniera lineare, per cui possiamo pensare di scrivere un'equazione di una retta nel diagramma di Haigh (dove come σ_a usiamo quella equivalente $\sigma_{a,eq}$ alla von Mises) che tenga conto del fatto che ci sia un andamento decrescente lineare con la tensione media (e come tensione media prendiamo invece quella normale perché tanto la tangenziale non ha influenza sul limite di fatica, come abbiamo visto).

$$\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} + \alpha\sigma_m \leq \beta$$

In questo modo diciamo che, con una tensione equivalente alternata pari a $\sigma_{a,eq}$ e una tensione media σ_m bisogna essere sotto la retta $\sigma_{a,eq} = \beta - \alpha\sigma_m$ per avere vita a fatica infinita.

Ora non ci rimane altro che calcolare i coefficienti della retta, e per farlo possiamo porci in due casi noti (due coefficienti da determinare), ossia un primo caso di tensione media nulla ($\sigma_m = 0$), dove quindi, dovendo sempre valere l'equazione della retta, si ha che

$$\sigma_{g,eg} = \beta$$

Ma in questo caso noto $\sigma_{a,eg} = \sigma_{D-1}$, per cui

$$\beta = \sigma_{D-1}$$

L'altro caso noto invece è quando abbiamo $\sigma_{a,eq} = 0$, ossia quando abbiamo $\sigma_a = \tau_a = 0$, ovvero quando $\sigma_m = R_m$, per cui si ottiene

$$\alpha R_m = \sigma_{D_{-1}}$$

e quindi

$$\alpha = \frac{\sigma_{D_{-1}}}{R_m}$$

Scriveremo pertanto che, nel caso in cui vi sia una tensione media non nulla (basta che sia quella normale, quella tangenziale può fare quello che gli pare, tanto non conta qua) la diseguaglianza da rispettare per avere vita a fatica infinita (i.e la retta nel diagramma di Haigh) è

$$\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} + \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} \sigma_m \leq \sigma_{D-1} \quad (1.23)$$

In altre parole, abbiamo enunciato il **criterio** di cedimento a fatica nel caso biassiale e con tensione media eventualmente non nulla. Dovremo quindi sempre assicurarsi che questo sia rispettato, definendo eventualmente un opportuno coefficiente di sicurezza.

¹¹Il primo invarianto del tensore medio degli sforzi, ossia la traccia della matrice, in questo caso è nullo. Nel caso di tensione normale media non nulla invece non è nullo.

Caso tridimensionale

Analogamente a prima, possiamo anzitutto definire una tensione equivalente con la formula di von Mises in tensioni principali che abbiamo visto sopra ($\sigma_{a,eq,3D}$). Possiamo poi fare lo stesso ragionamento che abbiamo fatto nel caso biassiale, solo che ora non possiamo metterci semplicemente la tensione media σ_m , ma dobbiamo trovare una sorta di "parente" in campo tridimensionale; esso è rappresentato, come sappiamo, dal *primo invariante*, essendo questo la traccia del tensore medio degli sforzi (ovvero la somma degli elementi sulla diagonale, che sono proprio le tensioni normali!), per cui possiamo scrivere che in caso tridimensionale il criterio di cedimento diventa

$$\sigma_{a,eq,3D} + \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} I_m \leq \sigma_{D-1}$$

Anche qua abbiamo espanso teoricamente delle prove sperimentali, dal momento che le prove si fermano al biassiale. Ci fidiamo comunque di queste cose, dal momento che abbiamo tutti creduto in cose peggiori probabilmente.

1.9.2 Modifica per effetto di intaglio

Ci possiamo infine chiedere come si modificano le cose se abbiamo un componente con intaglio. Ebbene, noi sappiamo che in tal caso le nostre tensioni alternate non sono quelle che abbiamo misurato ora, ma ci sono dei valori *effettivi* scalati con il K_f (c'è un K_f per la torsione e uno per la trazione-compressione!), per cui basterà ricordare che

$$\sigma_{a,eff} = K_f^{tc} \sigma_a, \quad \tau_{a,eff} = K_f^t \tau_a$$

e usare la solita formula von Mises-like per valutare la tensione equivalente

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_{a,eff}^2 + 3\tau_{a,eff}^2}$$

da confrontare poi con il limite di fatica solito

$$\sigma_{a,eq} \leq \sigma_{D-1}$$

come visto in precedenza. La stessa identica cosa dovremo fare nel caso di tensione media non nulla, andando a considerare al posto di $(\sigma, \tau)_a$ i loro valori effettivi $(\sigma, \tau)_{a,eff}$, scalati del loro $K_f^{(tc,t)}$. Avremo quindi che

$$\sqrt{\sigma_{a,eff}^2 + 3\tau_{a,eff}^2} + \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} (K_f^{tc} \sigma_m^{tc} + K_f^t \sigma_m^t) \leq \sigma_{D-1}$$

1.10 Regola di Miner per il conteggio della vita a fatica

Tutto quello che abbiamo presentato fino ad adesso ci ha permesso di identificare sostanzialmente un generico criterio per cui una certa tensione alternata (eventualmente equivalente) debba essere minore di un certo limite a fatica (eventualmente ridotto di un qualcosa di proporzionale alla tensione media, se questa non è nulla).

Tuttavia, questo discorso l'abbiamo fatto immaginando che la tensione vari nel tempo secondo un andamento che è sempre lo stesso (ad esempio armonico). Vogliamo però adesso capire cosa fare se abbiamo *più carichi variabili nel tempo*, nel senso che c'è una sequenza di carichi diversi, e quindi ci saranno σ_a e σ_m variabili "nel lungo periodo". In altre parole, abbiamo un primo carico variabile per un certo periodo T_1 (i.e un certo numero di cicli n_1), poi un altro carico variabile per n_2 , e così via. Ciascun carico variabile ha la sua $\sigma_a = \sigma_{a,1}, \sigma_{a,2}, \dots$, ed eventualmente il suo valore medio.

Quello che vogliamo capire è, applicando questa serie di carichi tra loro diversi, ciascuno per un suo determinato numero di cicli, quando avviene la rottura (in termini di numero di cicli *totale*)?

Palmgren e Miner sono pervenuti ad una teoria, seppur molto approssimativa e poco coincidente con le prove sperimentali, che ci permette di calcolare il numero totale di cicli prima che avvenga la rottura quando sollecitiamo il componente con una sequenza variabile di carichi. Tale teoria si basa sulla fondamentale (e forte) *ipotesi* che la vita a fatica non sia influenzata dall'ordine in cui sono applicati i livelli di carico, ossia è indifferente la sequenza con cui applichiamo i vari carichi ciclici.

Poniamo allora n_i il numero di cicli a cui si sollecita il materiale con $\sigma_a = \sigma_{a,i}$ e con N_i indichiamo invece il numero di cicli a cui il materiale si romperebbe a fatica se sollecitato con $\sigma_{a,i}$. Deve naturalmente essere $n_i < N_i$. La regola di Miner stabilisce che non solo deve essere questo, ma deve anche essere

$$\sum_i \frac{n_i}{N_i} \leq 1 \tag{1.24}$$

Ovvero la somma dei *danneggiamenti* parziali dati da ogni livello di carico deve sempre essere inferiore all'unità; quando la raggiunge allora si ha rottura a fatica. Per danneggiamento si intende qua proprio la frazione del limite a fatica per quel livello di carico.

Vogliamo ora ricavare il numero di cicli per cui avremo rottura, quindi anzitutto portiamo la disuguaglianza a uguaglianza e facciamo comparire il numero di cicli totali a rottura, che chiamiamo N_{tot} , moltiplicando e dividendo il primo membro per tale numero (che è una costante, quindi può entrare e uscire tranquillamente dalla sommatoria).

$$N_{tot} \sum_i \frac{n_i}{N_{tot}} \frac{1}{N_i} = 1$$

Poniamo a questo punto pari ad α_i la frazione sul numero di cicli totali a rottura dei cicli che compiamo a $\sigma_{a,i}$.

$$\alpha_i = \frac{n_i}{N_{tot}}$$

Il numero di cicli a rottura per $\sigma_a = \sigma_{a,i}$ invece è banale stimarlo dalla legge di Paris ricordando che il limite a fatica lo si ha per, ad esempio, $2 \cdot 10^6$ cicli, per cui

$$2 \cdot 10^6 \sigma_D^k = N_i \sigma_{a,i}^k$$

e quindi si ha che

$$N_i = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{\sigma_D}{\sigma_{a,i}} \right)^k$$

Avremo pertanto che la vita a fatica nel caso di una sequenza di carichi sarà

$$N_{tot} = \frac{2 \cdot 10^6}{\sum_i \alpha_i \left(\frac{\sigma_{a,i}}{\sigma_D} \right)^k} \quad (1.25)$$

Per fare questo calcolo ci serve conoscere 3 cose: il limite a fatica (lo conosciamo bene), la σ_a di ogni livello di carico (la conosciamo ovviamente bene), i coefficienti α_i . Questi ultimi purtroppo non li conosciamo ancora, per cui dobbiamo trovare il modo di calcolarli.

Calcolo dei coefficienti α_i

Immaginiamo di avere il grafico $\sigma - t$ relativo ad un solo periodo di ripetizione della sequenza di carichi e di poter quindi andare a leggere il numero di cicli a cui si applica ogni carico, nonché il numero di cicli totali *di quel periodo*.

Se facciamo l'ipotesi che il rapporto tra il numero di cicli di applicazione del carico i -esimo ed il numero di cicli totali in quel periodo sia lo stesso del medesimo grafico relativo all'intera vita a fatica del materiale (ossia immaginiamo che il materiale si rompa dopo un numero preciso di periodi perfettamente ripetuti, o che comunque il numero totale di periodi sia abbastanza grande da trascurare il fatto che un periodo non si compia tutto) allora possiamo scrivere che

$$\alpha_i = \frac{n_i^*}{\sum_i n_i^*} \quad (1.26)$$

Dove abbiamo messo l'apice "*" per indicare che il tutto è relativo solo ad un periodo e non a tutta la vita a fatica.

1.10.1 Metodo Bathhub per spettri di carico

Complichiamo un po' le cose ora e immaginiamo di non avere più una sequenza bella ordinata e leggibile di tensioni armoniche (magari anche fondamentali), ma di avere invece uno *spettro* di tensioni, ossia una tensione che è variabile in maniera *aleatoria* nel tempo. Facciamo sempre l'ipotesi che si possa isolare un certo periodo e che questo si ripeta per un certo numero di volte nel tempo sino a rottura, in modo tale da calcolare i coefficienti α_i ragionando sul singolo periodo.

Siamo interessati quindi al calcolo dei suddetti coefficienti, nonché alla determinazione di ben precisi valori di $\sigma_{a,i}$ da inserire nella formula di Miner per il calcolo della vita a fatica.

- Prendiamo quindi un certo periodo, che identifichiamo come tutto ciò che è compreso tra due massimi pressoché uguali, ottenendo quindi quello che si vede in figura 1.20a.

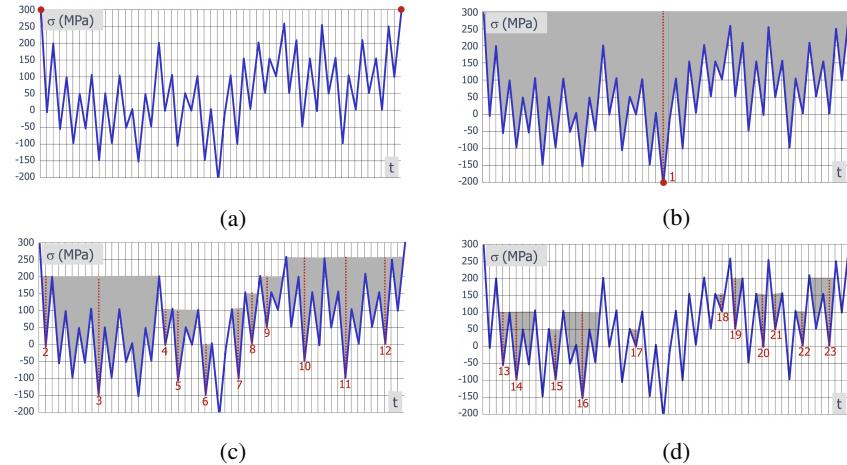


Figura 1.20

- Immaginiamo ora di riempire con del liquido la "vasca" delimitata inferiormente dallo spettro di carico, fino all'orlo, come mostrato in figura 1.20b.
- Identifichiamo adesso il punto più basso del grafico in cui arriva il liquido (la tensione minima che si ha nel periodo). Il nostro primo ciclo assumiamo allora che sia con tensione massima pari al massimo identificato all'inizio (300MPa) e tensione minima pari al minimo appena identificato (-200MPa). Calcoliamo di conseguenza $\sigma_a = 250MPa$ e $\sigma_m = 50MPa$ e identifichiamo per tali valori il limite a fatica σ_D su un apposito diagramma di Haigh.
- Immaginiamo ora di svuotare la vasca seguendo questo ragionamento: prendiamo il liquido e ne abbassiamo il livello dal primo massimo finché non ne incontriamo un secondo, nonché abbassiamo il livello del primo minimo finché non ne incontriamo anche qua un secondo.
- Facciamo anche qua i calcoli di prima con le nuove tensioni massima e minima.
- Ripetiamo questi ultimi due punti finché non finisce tutto il liquido, ottenendo quindi una serie di tensioni alternate $\sigma_{a,i}$ e medie $\sigma_{m,i}$, ciascuna per ogni operazione di "svuotamento" della vasca, che assumeremo essere un ciclo.
- A questo punto prendiamo il numero di "svuotamenti" totale e diciamo che α_i è pari al rapporto tra il numero di volte in cui abbiamo la stessa tensione alternata $\sigma_{a,i}$ e media $\sigma_{m,i}$ ed il numero totale di svuotamenti.

$$\alpha_i = \frac{\#\text{volte}}{\#\text{svuotamenti}}$$

In questo modo abbiamo ottenuto quindi sia una misura di α_i che di $\sigma_{a,i}$ e $\sigma_{m,i}$, con cui possiamo calcolare N_i e pertanto mettere tutto nella regola di Miner per calcolare finalmente la vita a fatica del nostro componente.

Capitolo 2

Dischi

Un disco è un solido assialsimmetrico caratterizzato dall'essere *sottile*, ossia il suo spessore è molto più piccolo del raggio (altezza e lunghezza, le altre 2 dimensioni). Di questo disco ci interessa lo *stato di tensione* e lo *stato di deformazione* (legati dalla legge di Hooke).

La seguente trattazione viene fatta nell'*ipotesi* che il disco sia caricato in modo *simmetrico*, in quanto le soluzioni analitiche dello stato di tensione esistono solo nel caso di carico simmetrico e antisimmetrico (che noi non vediamo).

Consideriamo pertanto un disco spesso b , di raggio esterno r_e e raggio interno r_i , caricato assialsimmetricamente da una pressione esterna p_e sul raggio esterno e una pressione interna p_i sul raggio interno. Dal momento che è caricato simmetricamente, ci aspettiamo uno stato di tensione simmetrico, ossia tensioni *simmetriche*.

2.1 Scrittura equazioni per tensioni e spostamenti

Quello che vogliamo ottenere qua è scrivere delle equazioni che ci esprimano l'*andamento* delle tensioni radiale e circonferenziale, nonché dello spostamento radiale in funzione del *raggio* (i.e la distanza dal centro), chiaramente per un valore che va dal raggio interno al raggio esterno del disco.

Per fare ciò estraiamo un volumetto infinitesimo di disco che si trova al generico raggio r ed è quindi lungo dr e largo $r d\theta$, chiamando θ l'angolo che il raggio spazza. Lo spessore è quello del disco b . Su tale volumetto agiscono sicuramente le reazioni vincolari delle pressioni.

Ci chiediamo anzitutto se lo stato di tensione può ammettere tensioni tangenziali. Sappiamo che esse agiscono nel senso "punta-coda", per cui sono *antisimmetriche*, e pertanto dobbiamo concludere che sul volumetto agiscono solo tensioni normali (i.e tensioni *principali*). Avremo quindi una tensione radiale σ_r diretta secondo la congiungente il centro del disco con il volumetto e una tensione circonferenziale σ_c perpendicolare alle facce laterali del volumetto.

2.1.1 Equazioni di equilibrio

Scriviamo ora le equazioni di equilibrio di forza in direzione radiale e circonferenziale, considerando che la forza è pari alla tensione per l'area (area radiale è $brd\theta$, area circonferenziale è bdr), nonché che possiamo scrivere le tensioni in corrispondenza di $r + dr$ (radiale) e di $d\theta$ (circonferenziale) con uno sviluppo in serie al primo ordine.

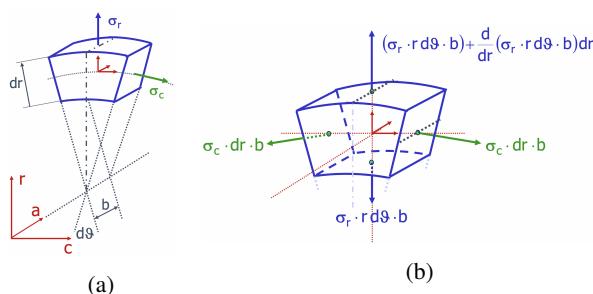


Figura 2.1

Avremo pertanto che in direzione radiale si avrà

$$\sigma_r b r d\theta + \frac{\partial \sigma_r b r d\theta}{\partial r} dr - 2\sigma_c b dr \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

Semplificando e approssimando seno con angolo (angolo infinitesimo) si ottiene che

$$\frac{\partial \sigma_r r}{\partial r} - \sigma_c = 0 \quad (2.1)$$

Oppure, espandendo la derivata

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_c) = 0 \quad (2.2)$$

2.1.2 Equazioni di congruenza

Considerando che lo spostamento in direzione radiale è

$$\varepsilon_r = \frac{u + du - u}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Mentre quello in direzione circonferenziale è

$$\varepsilon_c = \frac{(r + u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}$$

Possiamo dire che $u = \varepsilon_c r$, per cui

$$\frac{du}{dr} = \frac{d\varepsilon_c r}{dr} \quad (2.3)$$

Oppure, espandendo la derivata

$$r \frac{d\varepsilon_c}{dr} + (\varepsilon_c - \varepsilon_r) = 0 \quad (2.4)$$

Equazioni (circa) analoghe a quelle delle tensioni. Abbiamo fatto tutto ciò perché il disco è *continuo*, ossia non ci sono vuoti di nessun tipo e quindi gli spostamenti devono essere congruenti.

2.1.3 Equazioni del materiale

Consideriamo la legge di Hooke generale per un materiale che è soggetto a sole tensioni normali (o scrivendo il tutto in tensioni principali, ma nel nostro caso è la stessa cosa)

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_c - \sigma_a)] \\ \varepsilon_c = \frac{1}{E} [\sigma_c - \nu(\sigma_r + \sigma_a)] \\ \varepsilon_a = \frac{1}{E} [\sigma_a - \nu(\sigma_r + \sigma_c)] \end{cases}$$

Nel disco però la tensione assiale (e quindi lo spostamento assiale) è nulla (non c'è carico assiale agli estremi, e dentro anche se ci fosse, non avrebbe molto spazio per variare, essendo piccolo lo spessore del disco sottile, e dovendo comunque appunto essere nulla agli estremi), per cui si ha

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_c) \\ \sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_c + \nu \varepsilon_r) \end{cases} \quad (2.5)$$

Oppure, al contrario

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_c) \\ \varepsilon_c = \frac{1}{E} (\sigma_c - \nu \sigma_r) \end{cases} \quad (2.6)$$

2.1.4 Risultati

Mettendo il tutto insieme (equazioni di equilibrio, congruenza e materiale) si dimostra anzitutto che

$$\sigma_r + \sigma_c = cost = 2A \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_c = cost = 2M \quad (2.8)$$

E poi si dimostra che

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} \quad (2.9)$$

$$\sigma_c = A - \frac{B}{r^2} \quad (2.10)$$

$$u = Mr + \frac{N}{r} \quad (2.11)$$

Le costanti A e B possono essere determinate con le condizioni al bordo sulle tensioni, considerando che a $r = r_i$ si ha $\sigma_r = -p_i$ (pressioni entranti, tensioni uscenti) e a $r = r_e$ invece si ha $\sigma_r = -p_e$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -p_i = A + \frac{B}{r_i^2} \\ -p_e = A + \frac{B}{r_e^2} \end{cases}$$

Si trovano le costanti di integrazione e si ottengono pertanto gli andamenti sulle tensioni. Abbiamo espresso il risultato delle deformazioni in termini dello spostamento u perché tanto le deformazioni radiale e circonferenziale (in funzione di r) si calcolano a partire da u .

Vediamo ora come calcolare esplicitamente le costanti A e B , con l'imposizione delle condizioni al contorno. Dal sistema scritto sopra possiamo sottrarre un'equazione all'altra e trovare pertanto che

$$B = \frac{p_e - p_i}{\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2}}$$

Sostituendo in una delle due equazioni ricaviamo allora che

$$A = \frac{p_e r_e^2 - p_i r_i^2}{r_i^2 - r_e^2}$$

Come possiamo notare, le costanti A e B dipendono solo dalla *geometria* e dai *carichi* esterni. Tuttavia, ingegneristicamente è meglio usare i diametri che i raggi (il diametro lo misuro precisamente col calibro, per misurare il raggio devo definire precisamente il centro, che è una cosa non così banale), per cui si sostituisce e si trova

$$A = p_i \frac{\frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} - p_e \frac{1}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}}, \quad B = \frac{(p_e - p_i)(\frac{D_i}{2})^2}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}}$$

Sostituendo quindi nelle formule iniziali delle tensioni si trova che

$$\sigma_r = -p_i \frac{\frac{D_i^2}{D_e^2} - \frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} - p_e \frac{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}}$$

$$\sigma_c = p_i \frac{\frac{D_i^2}{D_e^2} + \frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} - p_e \frac{1 + \frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}}$$

Quello che abbiamo in mano qua dunque è un set di formule per calcolare, dati carichi esterni e geometria, lo stato di tensione (completo, perché sappiamo per certo che $\sigma_a = 0$ e $\tau = 0$) in maniera *analitica*, proprio come facevamo con la trave di Saint Venant!

Possiamo comunque ricavare una formula esplicita anche per lo spostamento u , dal momento che le costanti M e N devono essere anch'esse in qualche modo esplicitate, e ora vediamo come.

Purtroppo, non abbiamo delle condizioni al contorno sugli spostamenti u_e e u_i , quindi per trovare le costanti dobbiamo usare quello che già sappiamo, ossia le condizioni al contorno in termini di tensioni (pressioni). Infatti, se ricordiamo l'espressione della deformazione circonferenziale e la invertiamo per ricavare u abbiamo

$$u = r\varepsilon_c = r \frac{1}{E}(\sigma_c - \nu\sigma_r)$$

Sostituendo a questo punto le espressioni delle tensioni (usiamo le costanti A e B per semplicità ma quelle le abbiamo già scritte e sono note una volta nota la geometria e i carichi esterni, quindi sono per noi di fatto dei numeri) e troviamo quindi che

$$u = r \frac{1}{E} \left[A - \frac{B}{r^2} - \nu(A + \frac{B}{r^2}) \right]$$

Rimaneggiando questa formula otteniamo allora

$$u = \frac{A(1-\nu)}{E}r - \frac{B(1+\nu)}{E} \frac{1}{r}$$

E quindi otteniamo che

$$M = \frac{A(1-\nu)}{E}, \quad N = -\frac{B(1+\nu)}{E}$$

Come possiamo notare, le costanti (e quindi gli spostamenti e quindi le deformazioni) dipendono, oltre che da geometria e carichi (A e B), anche dal *materiale*, essendoci ν e E . Vorrà dire che dischi di materiale diverso, con stessa geometria e carichi, avranno eguale stato di tensione, ma diverso stato di deformazione. Se esplicitiamo le costanti A e B nell'espressione di u possiamo scrivere in maniera sintetica che

$$u = \frac{D}{2}p_i\delta_i - \frac{D}{2}p_e\delta_e$$

Dove nei coefficienti δ sono "condensati" i diametri del disco (geometria) e i dati del materiale (E , ν). Tali coefficienti sono denominati coefficienti di *deformabilità*, in quanto sono dei coefficienti che legano dei carichi a degli spostamenti.¹

Riassunto Cosa abbiamo fatto fino ad ora? Abbiamo anzitutto ipotizzato che il nostro disco sottile (solido assialsimmetrico) sia caricato in modo assialsimmetrico, quindi dedotto che lo stato di tensione è per forza assialsimmetrico, quindi ci sono solo tensioni normali.

Abbiamo poi scritto l'equilibrio di un volume infinitesimo di disco soggetto a tali tensioni (solo due, una radiale e una circonferenziale, dato che quella assiale è nulla, essendo il disco non caricato assialmente e sottile, per cui la tensione agli estremi è nulla e dentro non può variare molto, non avendo chissà quanto spazio) e trovato due forme di un'equazione differenziale.

Abbiamo poi scritto le deformazioni radiale e circonferenziale del disco in funzione dello spostamento radiale u del disco (quello assiale non c'è perché non c'è tensione e quello circonferenziale lo ricaviamo in funzione di quello radiale, andando col seno della metà di $d\theta$) e legato queste due in un'equazione differenziale (anch'essa con due forme).

Abbiamo infine scritto il legame tra tensioni e deformazioni sfruttando la legge di Hooke particolarizzata per il nostro disco (solo tensioni normali, tensione assiale nulla).

Infine abbiamo risolto (abbiamo solo presentato i risultati, fidandoci) questo set di equazioni ottenuto e siamo pertanto giunti ad un risultato che esprime gli andamenti delle tensioni e delle deformazioni (in realtà dello spostamento, ma le deformazioni si calcolano di conseguenza) in funzione del raggio r . Abbiamo quindi determinato lo *stato di tensione e di deformazione* del nostro disco sottile caricato assialsimmetricamente imponendo le condizioni al contorno (raggio interno ed esterno) in termini di carico, da cui abbiamo esplicitato le tensioni e, ricavando la u dalla deformazione, a sua volta esplicitata in funzione delle tensioni con la legge del materiale, abbiamo esplicitato anche lo spostamento. Ci siamo accorti in particolare che lo stato di tensione dipende solo da geometria e carichi esterni, mentre lo stato di deformazione dipende anche dal materiale.

Grazie a tutto ciò siamo in grado quindi di formulare i criteri statici e a fatica che abbiamo visto nel capitolo precedente, dato che sappiamo qual è lo stato di tensione a partire dai carichi esterni.

¹ Si pensi alla formula classica della molla $F = kx$, dove k è la rigidezza; se la si inverte si ottiene $x = \frac{1}{k}F$, dove $\frac{1}{k}$ è la *cedevolezza*. Analogamente, se si passa alle pressioni e agli spostamenti si ha che $p = E\varepsilon$, dove E è la rigidità, per cui $\varepsilon=Dp$, con D la deformabilità.

2.2 Diagramma dello stato di tensione in casi notevoli

Ora che abbiamo trovato un'espressione analitica dello stato di tensione nel disco caricato simmetricamente, vediamo di rappresentare graficamente gli andamenti di σ_r e σ_c lungo il raggio del disco stesso.

Quello che faremo sarà quindi proprio questo, dal punto di vista ovviamente qualitativo (i valori numerici delle costanti sappiamo che dipendono da geometria e carichi, che assumiamo fissati), e cercheremo anche di trovare un modo grafico molto semplice e veloce per visualizzare il criterio di Tresca. Il tutto verrà fatto per alcuni casi notevoli di dischi.

2.2.1 Pressione esterna

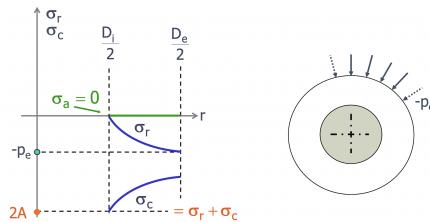


Figura 2.2

Consideriamo anzitutto un disco "classico" sottile, caricato solo da una pressione esterna. La tensione radiale sarà sicuramente dunque nulla al raggio interno, e pari a $-p_e$ al raggio esterno. Avremo quindi che la σ_r è sempre minore o uguale a zero al più. La sua concavità sarà positiva in quanto se facciamo la derivata seconda rispetto a r vediamo che

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = A - 2\frac{B}{r^3} \rightarrow \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} = A + 6\frac{B}{r^4} > 0$$

Per diagrammare invece la σ_c possiamo sfruttare anzitutto il fatto che $\sigma_r + \sigma_c = 2A$ (costante), per cui quando $\sigma_r = 0$, ossia al raggio interno, si ha $\sigma_c = 2A$. Tale valore è negativo per due motivi: il primo è che matematicamente, con $p_i = 0$ ed essendo $D_i < D_e$, si ha $A < 0$, il secondo è che, se facciamo l'equilibrio di un volume infinitesimo di disco, vediamo che la tensione radiale al raggio $r + dr$ è sicuramente maggiore della tensione radiale al raggio r (sono entrambe entranti nel volume essendo $\sigma_r < 0$), quindi c'è un contributo netto verso il basso. Facendo quindi equilibrio verticale, vediamo che la tensione σ_c deve essere anche lei di compressione (così le componenti verticali sono verso l'alto e bilanciano il contributo netto dato dalla tensione radiale), per cui è negativa.

Al contrario della radiale, la tensione circonferenziale ha concavità negativa, essendo la sua derivata seconda negativa, dato che si parte con un segno "-" e non "+" e quindi alla fine esce $A - 6\frac{B}{r^4} < 0$. Il suo valore al raggio esterno può essere calcolato sempre sfruttando la costanza della somma delle tensioni, per cui $\sigma_c = 2A + p_e$ al raggio esterno.

Criterio statico di Tresca Dal punto di vista statico, vogliamo capire dove si romperebbe il nostro disco, ossia dove si ha il valore più elevato di tensione equivalente secondo Tresca. Calcoliamo allora la tensione di Tresca in tensioni principali, che poi sono effettivamente le nostre tensioni assiale, radiale e circonferenziale, dato che le τ abbiamo detto essere per definizione nulle. Il criterio di Tresca dice che la tensione equivalente in assi principali è pari alla differenza tra la massima e la minima tensione $\sigma_{eq,T} = \sigma_1 - \sigma_3$. La tensione più piccola sappiamo che è quella circonferenziale, mentre la più grande è quella...assiale! Ebbene, la tensione assiale è nulla, ma è comunque presente, mentre la radiale è non nulla ma è negativa, quindi più piccola di zero. Sarà pertanto

$$\sigma_{eq,T} = -\sigma_c$$

Dal punto di vista grafico allora avremo che la tensione equivalente di Tresca è, lungo il raggio, il segmento verticale σ_c -asse r . Come possiamo notare, la tensione di Tresca è costante lungo il raggio e quindi il disco si rompe un po "ovunque" quando questo valore supera un certo limite.

2.2.2 Pressione interna

Consideriamo il medesimo disco di prima, ma caricato ora a sola pressione interna p_i . Avremo che la tensione radiale al raggio interno sarà pari a $-p_i$, mentre al raggio esterno sarà nulla. Questa volta la concavità della curva è negativa, dal momento che con $p_e = 0$ si ha $B < 0$ e $A > 0$, quindi le derivate seconde hanno segno invertito.

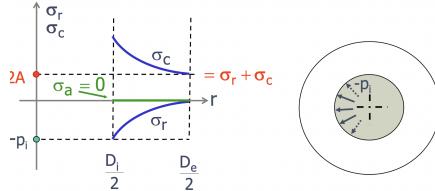


Figura 2.3

Se facciamo lo stesso gioco con la tensione circonferenziale vediamo ora che essa è pari a $2A$ al raggio esterno, e sia perché $A > 0$, sia perché ora la tensione radiale è maggiore al raggio interno e minore al raggio esterno, è comunque sempre di compressione e quindi la tensione circonferenziale deve essere di trazione per garantire equilibrio verticale.

Se applichiamo Tresca vediamo adesso invece che la tensione maggiore è quella circonferenziale e quella minore la radiale, per cui

$$\sigma_{eq,T} = \sigma_c - \sigma_r$$

In questo caso l'andamento non è costante lungo il raggio ma vediamo che è minimo al raggio esterno e massimo al raggio interno; questo vuol dire che il disco si romperà al raggio *interno* per primo.

2.2.3 Disco pieno

Consideriamo ora un disco "senza il buco", quindi con soltanto una pressione esterna a caricarlo (non c'è più raggio interno). La tensione radiale al raggio esterno è chiaramente $-p_e$. Al raggio interno però (immaginiamo che sia $r_i = 0$) tecnicamente la tensione dovrebbe essere infinita (sia la radiale che la circonferenziale), ma questo non può ovviamente avvenire (nessun materiale è lineare elastico all'infinito), quindi l'unica condizione per cui a $r = 0$ non vi sia una *singolarità* è che sia $B = 0$, per cui troviamo che $\sigma_r = \sigma_c = A$ e, siccome A è costante e $\sigma_r = -p_e$ al raggio esterno, avremo che

$$\sigma_r = \sigma_c = -p_e$$

Ossia le tensioni sono entrambe *uguali* e *costanti* lungo tutto il raggio. Questo potevamo capirlo anche semplicemente andando a considerare il centro del disco, nel quale la definizione di radiale e circonferenziale perde di senso, e quindi la tensione lì deve avere un solo e unico valore; dovendo essere $\sigma_r = \sigma_c$, e l'unico modo perché ciò avvenga è che sia $B = 0$.

2.2.4 Anello sottile

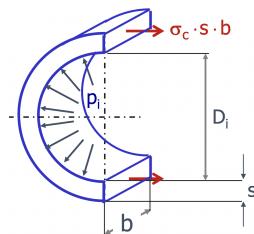


Figura 2.4

Consideriamo adesso un disco caricato internamente e per cui si abbia $s = r_e - r_i$ molto piccolo rispetto al raggio, ossia $\frac{s}{r} \ll 1$. Sotto questa ipotesi abbiamo quindi che il raggio lungo cui può variare la tensione è molto piccolo;

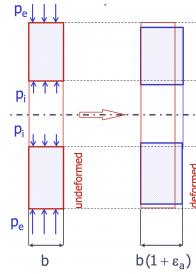


Figura 2.5

stante questa ipotesi, possiamo affermare quindi che²

$$\sigma_c = \text{cost.}$$

Se ora facciamo l'equilibrio in direzione verticale (radiale) otteniamo che

$$p_i r b d\theta = 2\sigma_c s b \frac{d\theta}{2}$$

Da cui

$$\sigma_c = p_i \frac{r}{s}$$

Siccome $\frac{r}{s} \gg 1$ allora abbiamo che $\sigma_c \gg \sigma_r$, dal momento che σ_r è al massimo p_i , quindi possiamo *trascurare* la tensione radiale nell'anello sottile. Se non volessimo proprio fare ciò potremmo prendere il suo valor medio tra p_i e 0, ossia $\sigma_r = \frac{p_i}{2}$.

Riassunto Abbiamo visto quindi che un disco sottile "bucato" caricato a pressione esterna ha tensione radiale negativa con concavità positiva, tensione circonferenziale ancora più negativa con concavità negativa e quindi tensione di Tresca costante sul raggio, mentre il medesimo disco caricato a pressione interna ha tensione radiale negativa con concavità negativa, tensione circonferenziale positiva con concavità positiva e massima tensione (non costante) di Tresca al raggio interno. Un disco solido ha invece tensioni circonferenziale e radiale uguali e costanti, pari alla pressione esterna (come un pannello caricato a trazione/compressione che ha ovunque tensione normale costante), mentre infine un anello sottile ha tensione circonferenziale costante e tensione radiale trascurabile.

2.3 Distinzione disco - tubo

Torniamo alle equazioni del disco; in generale la legge di Hooke in tensioni principali dice che

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E}(\sigma_a - \nu\sigma_r - \nu\sigma_c)$$

Nel disco sappiamo che $\sigma_a = 0$, ma da come possiamo intuire guardando la formula appena scritta, $\varepsilon_a \neq 0$

$$\varepsilon_a = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_c)$$

Un disco è soggetto a deformazione *assiale*! Quello che succede, ad esempio nel caso di un disco caricato esternamente, è che questo si schiaccia e, schiacciandosi, si allunga assialmente.

Immaginiamo ora di prendere un **tubo**, il quale è un solido, al contrario del disco, molto *spesso*. Possiamo vedere il tubo come una "somma" di dischi impacchettati uno dietro l'altro. Ogni striscia sottile del tubo è quindi come se fosse un disco, che immaginiamo caricato anch'esso a pressione esterna.

Quello che ci aspetteremmo da un disco è che la tensione assiale sia nulla (non c'è alcun vincolo che crei la necessità di una reazione vincolare assiale), mentre vi sia uno spostamento assiale; tuttavia, non è ciò che avviene nel tubo, dal momento che ogni "disco" componente il tubo è vincolato tra altri due dischi (uno avanti e uno dietro), quindi non può deformarsi assialmente ($\varepsilon_a = 0$).

²Teniamo a mente che il raggio varia pochissimo; è comunque un valore molto maggiore dello spessore, ma il campo di variazione di r è molto limitato.

Ciò che avviene allora è che, per via dell'impedimento al "disco elementare" di sperimentare deformazione assiale, si crea una **tensione assiale** non nulla, per via del fatto che è *nulla la deformazione assiale*.

Imponiamo allora che sia $\varepsilon_a = 0$, considerando ora però $\sigma_a \neq 0$, attraverso il modello del materiale scritto in generale per tensioni principali (questo rimane sempre dato che le τ continuano ad essere nulle).

$$\frac{1}{E}[\sigma_a - \nu(\sigma_r + \sigma_c)] = 0$$

Per cui ricaviamo che

$$\sigma_a = E\nu(\sigma_r + \sigma_c) \quad (2.12)$$

Si dimostra che le equazioni di σ_r e σ_c rimangono le *stesse* che avevamo trovato per il disco. Abbiamo quindi trovato una sorta di "pseudo-duale" del disco, dove la deformazione assiale è nulla e per questo la tensione assiale è non nulla (si genera una tensione assiale per via proprio di questo impedimento alla deformazione assiale).

2.4 Calettamento albero - mozzo per interferenza

Discutiamo ora riguardo uno dei possibili modi per *calettare* un mozzo ad un albero, ossia per rendere i due componenti *solidali*. Questo è un metodo che va bene quando le coppie trasmesse non sono troppo elevate (sebbene ci siano casi particolari dove le coppie sono anche elevate, ma si fa uso anche di adesivi strutturali in quel caso). Calettiamo quindi ruote dentate e cuscinetti, ma non turbine aeronautiche ad esempio.

Avere interferenza significa far sì che il diametro dell'albero sia *maggior* del diametro del mozzo, per cui si ha quello che viene chiamato accoppiamento *forzato*. Ovviamente questa maggioranza di diametro non può essere troppo elevata, in prima motivazione perché il mozzo premerebbe troppo sull'albero e questo potrebbe snervarsi.

Sostanzialmente noi abbiamo che viene trasmessa una certa *coppia* ad uno dei due elementi; tale coppia, per rendere questi solidali, deve *trasmettersi* interamente sull'altro componente, e per farlo c'è bisogno che una certa tensione *tangenziale* generi proprio quella coppia. Calcoliamo quindi la coppia infinitesima su un elemento di circonferenza dell'albero.

$$dC = \tau b r d c$$

Vi è lo spessore del mozzo b in quanto la tensione agisce solo all'interfaccia ovviamente, vi è il raggio r perché è il braccio della forza e vi è dc perché tale coppia è relativa a un elemento di circonferenza. Integrando su tutta la circonferenza $2\pi r$ si ottiene quindi, nell'ipotesi di $\tau = \text{cost}$, che

$$C = \tau b 2\pi r^2$$

Nota quindi la coppia da trasmettere e la geometria, possiamo calcolare la tensione tangenziale che deve generarsi. Tale tensione tangenziale come si genera? La risposta è molto semplice: con l'*attrito*.

Bisognerà infatti che si generi una *pressione* sull'albero (detta pressione di calettamento p_c) in modo che si abbia al limite

$$\tau = \mu p_c$$

Noto quindi il coefficiente di attrito, possiamo calcolare la pressione di calettamento necessaria per avere la forza tangenziale necessaria per trasmettere la coppia desiderata.

Prima di iniziare con la scrittura delle equazioni, consideriamo un accoppiamento albero-mozzo e definiamo l'*interferenza* come la differenza tra il diametro esterno dell'albero e il diametro interno del mozzo.

$$i = d_{a,e} - D_{m,i} \quad (2.13)$$

2.4.1 Equazioni

Consideriamo a questo punto un albero cavo (può anche essere pieno, cambia poco) di diametri d_a e un mozzo di diametri D_m ; l'albero lo assimiliamo a un tubo, mentre il mozzo ad un disco. Per entrambi i componenti abbiamo calcolato le tensioni radiale e circonferenziale.

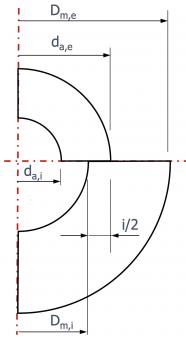


Figura 2.6

Se immaginiamo di considerare singolarmente i componenti abbiamo che l'albero è soggetto ad una pressione esterna $p_e = p_c$, mentre il mozzo è soggetto ad una pressione interna del medesimo valore $p_i = p_c$.³ Specializziamo allora le equazioni calcolate nella prima sezione del capitolo per albero e mozzo. Per l'**albero** abbiamo che

$$\begin{cases} \sigma_r = -p_c \frac{1 - \frac{d_{a,i}^2}{D^2}}{1 - \frac{d_{a,e}^2}{D^2}} \\ \sigma_c = -p_c \frac{1 + \frac{d_{a,i}^2}{D^2}}{1 - \frac{d_{a,e}^2}{D^2}} \end{cases} \quad (2.14)$$

Invece per il **mozzo** abbiamo che

$$\begin{cases} \sigma_r = -p_c \frac{\frac{D_{m,i}^2}{D^2} - \frac{D_{m,e}^2}{D^2}}{1 - \frac{D_{m,e}^2}{D^2}} \\ \sigma_c = p_c \frac{\frac{D_{m,i}^2}{D^2} + \frac{D_{m,e}^2}{D^2}}{1 - \frac{D_{m,e}^2}{D^2}} \end{cases} \quad (2.15)$$

Il loro andamento è mostrato nella figura 2.7 ed è derivabile facendo analoghe considerazioni a quelle fatte nei casi notevoli di dischi caricati a pressione esterna e interna (nel tubo ci sarà anche una tensione assiale, ma questo non ci interessa ora).

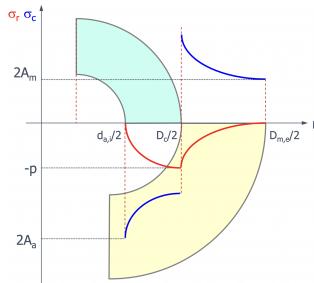


Figura 2.7

Il passo successivo da fare è andare a scrivere lo spostamento radiale essendo questo funzione del materiale e delle tensioni radiale e circonferenziale.

$$u = \frac{D}{2} \frac{p_i}{E} \left[\frac{\frac{D_i^2}{D^2} (1 + \nu) + \frac{D_e^2}{D^2} (1 - \nu)}{1 - \frac{D_i^2}{D^2}} \right] - \frac{D}{2} \frac{p_e}{E} \left[\frac{\frac{D^2}{D^2} (1 + \nu) + (1 - \nu)}{1 - \frac{D_i^2}{D^2}} \right]$$

³Se il mozzo fosse una ruota dentata avrebbe anche un carico esterno (le forze scambiate dai denti), ma possiamo trascurarlo perché tali forze sono scambiate solo localmente.

Specializzando ora questa relazione per albero e mozzo troviamo che

$$\begin{cases} u_a = -\frac{d}{2} \frac{(1+\nu_a) \frac{d_{a,i}^2}{d^2} + (1-\nu_a)}{E_a(1-\frac{d_{a,i}^2}{d_{a,e}^2})} p_c \\ u_m = \frac{D}{2} \frac{(1+\nu_m) \frac{D_{m,i}^2}{D^2} + (1-\nu_m)}{E_m(1-\frac{D_{m,i}^2}{D_{m,e}^2})} p_c \end{cases} \quad (2.16)$$

Ponendo le frazioni pari a δ , cedevolezza, scriviamo sinteticamente che

$$\begin{cases} u_a = -\frac{d}{2} \delta_a(d) p_c \\ u_m = \frac{D}{2} \delta_m(D) p_c \end{cases}$$

Lo spostamento dell'albero è negativo perché il mozzo lo schiaccia, mentre il mozzo stesso ha spostamento positivo perché è spinto verso l'esterno.

Come possiamo notare, fissata geometria e materiale dei componenti, abbiamo che lo spostamento di questi è *proporzionale* (lineare) con la pressione di calettamento secondo il diametro a cui lo si calcola e secondo la cedevolezza.

Quello che dobbiamo fare adesso è far entrare in gioco l'interferenza (la nostra incognita), esplicitando come questi spostamenti di albero e mozzo sono legati ad essa.

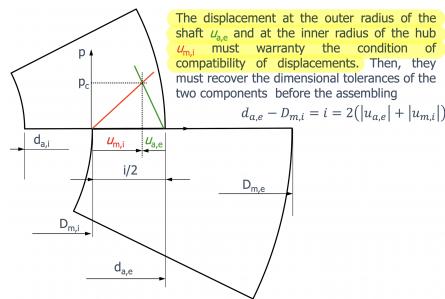


Figura 2.8

Con riferimento alla figura 2.8 vediamo che quando la pressione su albero e mozzo raggiunge per entrambe il valore di quella di calettamento, gli spostamenti hanno contestualmente raggiunto i valori $u_{a,e}$ e $u_{m,i}$, ossia i loro valori calcolati con $d_{a,e}$ e $D_{m,i}$. Tali spostamenti, sommati in valore assoluto, dovranno essere pari al segmento $\frac{i}{2}$ come da figura.

$$|u_{a,e}| + |u_{m,i}| = \frac{i}{2}$$

Calcoliamo allora gli spostamenti ed esplicitiamo questa relazione; in particolare, consideriamo che il diametro esterno dell'albero ed il diametro interno del mozzo sono sì diversi (per avere interferenza), ma comunque i loro valori non differiranno di molto in relazione alle loro grandezze assolute, per cui possiamo porre i due diametri uguali al diametro *nominale* di calettamento D_c e scrivere così che l'interferenza necessaria per avere la p_c calcolata è

$$i = D_c [\delta_a(D_c) + \delta_m(D_c)] p_c \quad (2.17)$$

Se invece ricaviamo p_c otteniamo una formula per la pressione di calettamento.

$$p_c = \frac{i}{D_c [\delta_a(D_c) + \delta_m(D_c)]} \quad (2.18)$$

Abbiamo quindi ottenuto una formula che ci da l'interferenza con cui calettare albero e mozzo per avere l'accoppiamento che ci da la trasmissione di coppia decisa all'inizio. A *progetto* dovremo usare quella. La seconda formula (pressione in funzione dell'interferenza) ci serve invece come *verifica*, per un discorso che andiamo adesso a esporre.

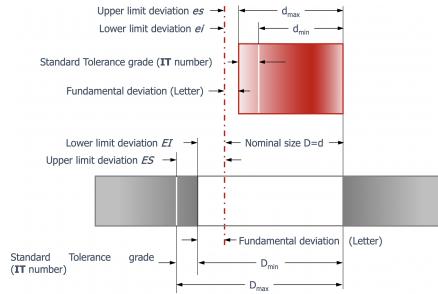


Figura 2.9

2.4.2 Tolleranze e interferenza

Quando si realizza un componente ci sono chiaramente delle imperfezioni date dalla lavorazione, per cui dobbiamo tenere conto del fatto che i nostri diametri (massimo e minimo) di entrambi i componenti possano variare entro un certo range di *tolleranza*. L'ampiezza di questo range dipende dalla precisione richiesta.

Affinché ci sia interferenza di sicuro è necessario che il diametro esterno minimo dell'albero sia maggiore del diametro interno massimo del mozzo. Stabiliamo di lavorare con un sistema foro base di tipo H^4 (ossia per cui il diametro interno minimo del foro sia il diametro nominale); in queste condizioni avremo che la minima interferenza (quella nel peggior dei casi) è pari alla differenza tra il diametro esterno minimo dell'albero d_{min} e il diametro interno massimo del foro D_{max} .

$$i_{min} = d_{min} - D_{max} \quad (2.19)$$

A progetto dovremo considerare che l'interferenza che calcoliamo con la sua formula in funzione di p_c sia proprio questa (worst case), per essere conservativi. Dovremo poi verificare però che, nell'altro caso peggiore, ossia l'interferenza massima

$$i_{max} = d_{max} - D_{min} \quad (2.20)$$

La pressione di calettamento che ne risulta (calcolata con la sua formula in funzione dell'interferenza) non sia tale per cui il materiale si snervi.

Un'altra verifica che dobbiamo fare, opposta a quella appena fatta, consiste nel controllare che la pressione di calettamento non scenda sotto un certo limite per cui non si ha più la coppia richiesta; ciò che succede infatti è che l'interferenza diminuisce per un effetto legato alla rugosità, in quanto il fatto che i due componenti vengano schiacciati tra loro fa sì che le "crestre" di rugosità si appiattiscano e quindi ci sia una minore interferenza rispetto a quella prevista.

Possiamo allora definire un'interferenza *nominale* i_{nom} (quella ottenuta misurando precisamente i diametri dei componenti finiti) e dire che questa si riduce per effetto della *rugosità* (di albero e mozzo). Dal punto di vista empirico si è visto che una formula abbastanza veritiera è la seguente.

$$i_{eff} = i_{nom} - 2 \cdot 0.4(R_a + R_m) \quad (2.21)$$

Dove il 2 c'è perché la rugosità è misurata sul raggio e l'interferenza invece sul diametro; il valore 0.4 indica che il 40% della rugosità contribuisce a ridurre l'interferenza. Calcoleremo allora il valore nuovo di p_c con questa i_{eff} e verificheremo che sia tale per cui si trasmetta la coppia richiesta.

Riassunto Ripercorriamo brevemente il cammino di questa sezione: abbiamo anzitutto detto che vogliamo calettare un albero e un mozzo (renderli solidali sotto l'azione di una coppia che genera moto rotativo, ossia far sì che quando la coppia è esercitata ad esempio sul disco, l'albero ruoti allo stesso identico modo); per fare ciò è necessario che la coppia che applichiamo al disco si trasmetta pari all'albero, e questo è possibile se c'è una forza tangenziale che agisce sull'albero e crea momento.

Dunque conoscendo la coppia che applichiamo possiamo calcolare la tensione tangenziale che deve generarsi all'interfaccia tra mozzo e albero affinché tale coppia si trasmetta sull'albero; per generarsi la tensione tangenziale è necessario che vi sia dell'attrito tra albero e mozzo, in quanto la forza (tensione) di attrito è proprio tangenziale.

⁴Scostamento inferiore sempre nullo per il tipo H, scostamento superiore pari al diametro massimo. La lettera maiuscola si riferisce al foro, se ci fosse stata la minuscola allora saremmo stati in albero base. Tipicamente per noi si lavora in H7. Ci sono comunque le tabelle ISO nelle slide.

Allora diciamo che dobbiamo esercitare un carico normale (pressione di calettamento) per avere una tensione tangenziale proporzionale a tale pressione (secondo il coefficiente di attrito) e ci riconduciamo quindi ad un valore di pressione necessaria per trasmettere la coppia.

Questa pressione si genera perché accoppiamo albero e mozzo con una certa interferenza, per cui il mozzo spinge sull'albero e vi sono degli spostamenti radiali che generano questa pressione all'interfaccia. Scrivendo le equazioni delle tensioni radiale e circonferenziale in albero e mozzo (sono le stesse) e specializzando queste per il caso in esame, ossia pressione esterna dell'albero e pressione interna del mozzo pari alla p_c possiamo ricavare, con le leggi del materiale, gli spostamenti radiali di albero e mozzo stessi, che vediamo essere lineari con la p_c .

A questo punto facciamo entrare in gioco l'interferenza $i = d_{a,e} - D_{m,i}$ dicendo che gli spostamenti radiali, sommati in valore assoluto, devono essere pari a metà dell'interferenza (c'è la metà perché la riferiamo al diametro e gli spostamenti al raggio), per la loro congruenza.

Da questo ricaviamo quindi il valore di interferenza che dobbiamo dare all'accoppiamento per generare la p_c necessaria a trasmettere la coppia desiderata.

Dobbiamo poi fare due verifiche a posteriori: anzitutto, dobbiamo ipotizzare che l'interferenza appena calcolata sia la minima interferenza (secondo le tolleranze), allora calcoliamo invece la massima interferenza che si avrebbe secondo le tolleranze e con quella calcoliamo la pressione di calettamento che si avrebbe (invertendo la formula), verificando quindi che questa sia sopportabile dai componenti.⁵

L'altra verifica da fare infine riguarda il fatto che, una volta che abbiamo i nostri pezzi fatti e finiti (di cui conosciamo quindi le dimensioni precise e quindi la precisa interferenza che avrebbero se calettati), l'interferenza nominale (quella che calcoliamo con la formula) in realtà è ridotta da un effetto di "abbattimento creste" della rugosità, per cui dobbiamo controllare che la pressione di calettamento che consegue sia sufficiente a generare la coppia richiesta. Se siamo sempre a progetto possiamo usare come interferenza nominale ad esempio l'interferenza minima, come è banale supporre.

2.5 Dischi rotanti

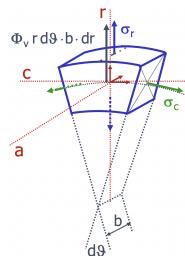


Figura 2.10

Consideriamo adesso di nuovo un disco come all'inizio, solo che ora lo mettiamo in rotazione con una certa velocità angolare ω , per cui sul volume infinitesimo con cui abbiamo scritto le equazioni di equilibrio si aggiunge una forza (di volume) che è la forza *centrifuga* per unità di volume.

$$\Phi = \rho\omega^2 r$$

Facendo l'equilibrio radiale troviamo che

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_c = -\rho\omega^2 r^2$$

L'equilibrio tangenziale, le equazioni di congruenza e del materiale sono le stesse trovate per il disco fermo. Mettiamo insieme queste con l'equilibrio radiale (diverso) e troviamo come risultato *parziale* che

$$\sigma_r + \sigma_c = 2A - (1 + \nu)\rho\omega^2 \frac{r^2}{2} \quad (2.22)$$

⁵Sostanzialmente agiamo così perché le tolleranze ci dicono che i nostri componenti che stiamo progettando avranno delle dimensioni pari al nominale +/- un certo valore (che dipende dalla precisione finita che prescriviamo), quindi noi assumiamo che la p_c desiderata l'abbiamo nel caso di interferenza minima, però se siamo nell'altro caso peggiore (interferenza massima) la pressione di calettamento deve essere comunque sopportabile.

Ossia che la somma di tensione radiale e circonferenziale **non** è più costante. Come risultato *finale* invece troviamo che

$$\begin{cases} \sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \\ \sigma_c = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{cases} \quad (2.23)$$

Spesso però si preferisce riferire la forza tensione $\rho \omega^2 r^2$ ad una tensione circonferenziale di riferimento σ_0 , definita come la tensione circonferenziale che si ha in un anello sottile rotante di raggio pari al raggio esterno r_e del disco ed eguale spessore.

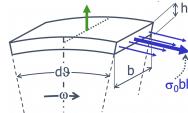


Figura 2.11

Facendo l'equilibrio come abbiamo visto nel suo paragrafo troviamo che

$$\sigma_0 = \rho \omega^2 r_e^2$$

Per cui le equazioni diventano

$$\begin{cases} \sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \frac{r^2}{r_e^2} \sigma_0 \\ \sigma_c = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \frac{r^2}{r_e^2} \sigma_0 \end{cases}$$

Mancano a questo punto solo da determinare le costanti di integrazione, e per farlo ci serviamo delle condizioni al contorno sulla tensione radiale, ossia le pressioni interna ed esterna; non abbiamo però imposto alcuna pressione, per cui scriviamo che

$$\sigma_r(r_i) = \sigma_r(r_e) = 0$$

Sostituendo e risolvendo il sistema per A e B si ottengono le suddette costanti. Gli andamenti delle tensioni lungo il raggio sono mostrati in figura 2.12a. Come possiamo notare, la tensione equivalente di Tresca è

$$\sigma_{id,T} = \sigma_c$$

Essendo la tensione circonferenziale quella maggiore e la assiale quella minore (nulla). La tensione radiale vediamo che è nulla agli estremi e in mezzo varia con concavità negativa. La tensione equivalente è quindi massima al raggio *interno*.

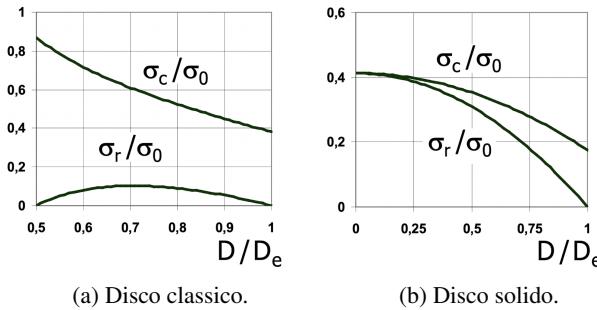


Figura 2.12

In ogni caso, se avessimo delle pressioni p_e e/o p_i ai raggi di estremità possiamo o applicare una sovrapposizione degli effetti sulle tensioni, oppure imporle direttamente come condizioni al contorno e calcolare delle nuove costanti di integrazione A e B che tengano conto dei carichi esterni.

Se abbiamo infine a che fare con un **disco solido** sappiamo sicuramente che $B = 0$, nonché che per $r = 0$ (non esiste r_i o $r_i = 0$) si ha $\sigma_r = \sigma_c = A$ (il contributo della forza centrifuga si annulla al centro del disco ovviamente).

Se immaginiamo che il disco non sia caricato esternamente possiamo trovare facilmente A dall'equazione della tensione radiale calcolata al raggio esterno e posta uguale a zero.

$$A = \frac{3+\nu}{8} \sigma_0$$

L'andamento delle tensioni è rappresentato in figura 2.12b.

2.5.1 Disco a uniforme resistenza

Poniamoci ora un altro problema: vogliamo realizzare un disco (rotante) che abbia una tensione equivalente (di Tresca, per semplicità) *costante* lungo tutto il raggio. Questo permetterebbe di *ottimizzare* il materiale, dal momento che non ci sarebbero zone del disco più sollecitate di altre, e quindi esso si romperebbe in punti a caso, a seconda dei vari difetti localizzati.

Dunque quello che facciamo è imporre che sia $\sigma_{id,T} = cost$, e dobbiamo quindi ricavarci la *geometria* associata a questa condizione che imponiamo.

Consideriamo anzitutto l'equazione di equilibrio radiale per un disco rotante

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r rb) - \sigma_c b = -\rho\omega^2 r^2 b$$

dove abbiamo messo uno spessore variabile perché dovrà necessariamente esserlo, dal momento che se non lo fosse la tensione non potrebbe essere costante (abbiamo visto come varia lungo il raggio e non è per nulla costante).

A questo punto pensiamo bene a cosa vuol dire tensione (equivalente) costante: vuol dire che la tensione σ_c deve essere costante, essendo la tensione equivalente pari alla differenza tra questa e la tensione assiale (sicuramente nulla nel disco); qui però nasce un problema: non possiamo imporre solo $\sigma_c = cost$, perché potrebbe darsi che a quel punto è la σ_r ad essere la maggiore, per cui dobbiamo necessariamente imporre $\sigma_r = cost$ anche.

Tuttavia, imporre ciò vorrebbe necessariamente dire $\sigma_r = 0$, perché tale tensione deve essere comunque nulla agli estremi (disco non caricato). Avere però questa tensione nulla non renderebbe più costante la σ_c , perché questa varierebbe col raggio (dall'equilibrio radiale lo si può ben notare).

Per venire fuori da questo guaio possiamo solo imporre che il disco sia un disco *solido*, in quanto lì è verificato che le tensioni radiale e circonferenziale sono entrambe costanti (lo sono al centro, posso mantenere quel valore per tutto il raggio se vario lo spessore).⁶

Scrittura equazione dello spessore

Ora che abbiamo quindi definito il tipo di disco che avremo (*disco solido a spessore variabile*) ci accingiamo a scrivere le equazioni necessarie a trovare una legge di spessore col raggio.

Siccome abbiamo imposto tensioni radiale e circonferenziale uguali per tutto il raggio poniamo $\sigma_r = \sigma_c = \sigma$ e scriviamo l'equilibrio radiale con spessore variabile.

$$\frac{d}{dr}(\sigma rb) - \sigma b = -\rho\omega^2 r^2 b$$

Considerando che la tensione è costante lungo il raggio, espandiamo la derivata e scriviamo quindi che

$$\sigma r \frac{db}{dr} + \sigma b - \sigma b = -\rho\omega^2 r^2 b$$

Semplifichiamo dove possibile e separiamo le variabili, trovando che

$$\frac{db}{b} = -\frac{\rho\omega^2 r}{\sigma} dr$$

Integriamo ora tra 0 e il generico raggio r , nonché tra lo spessore b_0 che c'è al centro (raggio 0) ed il generico spessore b al generico raggio r , trovando che

$$b = b_0 e^{-\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}} \quad (2.24)$$

Questa è la legge di come deve variare lo spessore di un disco solido lungo il raggio per far sì che la tensione equivalente sia costante (lungo il raggio). Lo spessore diciamo quindi che ha andamento *esponenziale* lungo il raggio. La tensione (uniforme) che compare nell'equazione ovviamente la sceglieremo noi (che tensione - uniforme - accetto che ci sia nel mio disco?) e può essere ad esempio una frazione del limite di snervamento.

Si chiama comunque disco a uniforme resistenza perché se la tensione al suo interno è uniforme allora esso quando raggiungerà il limite lo farà allo stesso modo lungo tutto il raggio.

⁶Il disco solido si caletta all'albero mediante delle *flange*, non potendo chiaramente ricevere alcun accoppiamento "diretto".

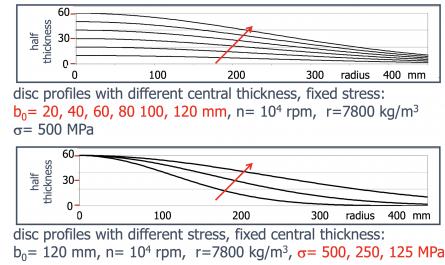


Figura 2.13

Passiamo però alla vita reale: in teoria questo spessore che da uniforme resistenza ce l'abbiamo per un disco di diametro (raggio) *infinito* (dove lo spessore è nullo), mentre noi possiamo fare dischi di poche decine di centimetri di raggio, quindi è come se effettivamente "*troncassimo*" il disco prima del raggio infinito e questo in teoria non ci darebbe più uniforme resistenza.

Tuttavia c'è un escamotage a tutto questo, perché noi possiamo matematicamente calcolare qual è la forza (centrifuga) che dal raggio a cui si tronca il disco fino a raggio infinito agirebbe sul disco "ideale" di uniforme resistenza (quello infinito), e possiamo poi applicare questa forza (un valore finito) sul disco "reale" che rimane dopo il troncamento.⁷ Ovviamente la resistenza non sarà proprio precisamente uniforme, ma comunque sarà pressoché tale.

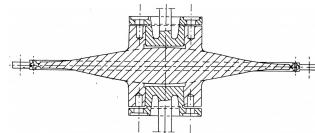


Figura 2.14

Tra l'altro, ora che abbiamo visto ciò possiamo renderci conto effettivamente di quanto i dischi a cui si calettano le *palette* di turbomacchine hanno delle geometrie estremamente simili a quelle per avere uniforme resistenza (e uno dei motivi è proprio questo!). Ovviamente le palette vanno calettate in qualche modo, per cui c'è un ingrossamento di sezione al bulbo, ma per il resto la geometria è bene o male quella.

Infine, visto che parliamo di palette, diciamo che a rigore ci sarebbe effettivamente un carico esterno di trazione sul disco, dato dal fatto che la paletta "tira" il disco per via della forza centrifuga, andando quindi a sollecitare l'attacco disco-pala; ci sarebbero poi anche altri carichi come quelli termici, ma per il momento non è il caso di mettere troppe cose in mezzo.

2.6 Dischi plasticizzati

Immaginiamo di prendere un disco e di applicargli una pressione *interna* tale per cui lo stato di tensione (equivalente, per esempio secondo Tresca) all'interno di esso superi almeno in un punto (il più sollecitato) il limite di *snervamento* R_e .

Andiamo a ragionare matematicamente su cosa vuol dire tutto ciò, individuando anzitutto che, come abbiamo visto in precedenza, il punto più sollecitato di un disco caricato internamente è il raggio *interno*; vorrà dire quindi che il limite di snervamento sarà superato prima di tutti dalla sezione a raggio interno, e dunque il disco si plasticizzerà a partire da quel raggio. Man mano poi che la tensione equivalente raggiungerà il limite di snervamento anche nei raggi più esterni avremo che anche in tali zone il disco sarà plasticizzato.

Facciamo adesso qualche considerazione riguardo il materiale e la sua curva $\sigma - \varepsilon$. Immaginiamo di avere a che fare con un materiale duttile (sennò niente plasticizzazione) che abbia un comportamento quindi elastico e plastico; ipotizziamo ora che il comportamento *plastico* sia *ideale* (materiale elastico idealmente plastico), ovvero che quando la σ raggiunge il limite di snervamento R_e essa resta *costante* all'infinito e pari proprio appunto a R_e . Questo modello non è troppo approssimativo se si considerano deformazioni non troppo elevate, ossia vale piuttosto bene in un certo range di deformazioni, oltre il quale invece vi è una leggera risalita e poi la rottura.

⁷Lo si può fare con *masse concentrate* collegate al disco mediante delle cerniere.

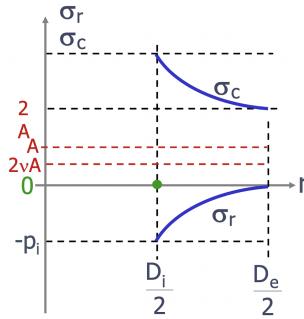


Figura 2.15

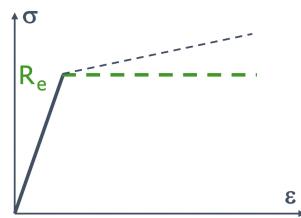


Figura 2.16

Ecco dunque che abbiamo individuato un'opportuna *legge* del materiale che ci dice come sono legate la tensione e la deformazione, tenendo conto del fatto che la tensione possa arrivare al limite di snervamento e, non potendoci essere rottura istantanea (comportamento fragile), essa deve fare altro (rimanere costante). Precisiamo che la tensione di cui parliamo è la tensione equivalente (per esempio di Tresca), per cui abbiamo che in campo **plastico** si osserva la seguente relazione.

$$\sigma_{eq,T} = \sigma_c - \sigma_r = R_e \quad (2.25)$$

La tensione equivalente di Tresca sappiamo che è così perché l'andamento delle tensioni per un disco sottile caricato internamente fa sì che la tensione massima sia la circonferenziale e la tensione minima sia la radiale.

2.6.1 Scrittura equazioni delle tensioni

Abbiamo un disco caricato solo internamente, per cui la costante A risulta essere

$$A = \frac{\frac{D_i^2}{D_e^2} p_i}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}}$$

L'equazione di equilibrio in direzione radiale invece sappiamo bene essere

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_c = 0$$

A questo punto immaginiamo che la pressione interna p_i sia tale per cui le sezioni del disco da r_i a un generico raggio r siano caratterizzate da una tensione equivalente di Tresca pari al limite di snervamento, ossia il disco è plasticizzato fino a r .

Per trovare l'andamento delle tensioni nel disco (nella zona plasticizzata) dobbiamo allora usare il modello di materiale elastico idealmente plastico, e scrivere quindi che $R_e = \sigma_c - \sigma_r$. Mettendo questo risultato nell'equazione di equilibrio radiale otteniamo che

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} - R_e = 0$$

Separando le variabili possiamo scrivere che

$$d\sigma_r = R_e \frac{1}{r} dr$$

Integrando tra il raggio interno ed il generico raggio r otteniamo quindi che

$$\sigma_r(r) - \sigma_r(r_i) = R_e \ln \frac{r}{r_i}$$

Ma noi sappiamo che $\sigma_r(r_i) = -p_i$ per le condizioni al contorno, quindi avremo che l'andamento della tensione radiale in campo plasticò è

$$\sigma_r(r) = R_e \ln \frac{r}{r_i} - p_i \quad (2.26)$$

Ricordiamo, questa relazione vale *solo* se tra r_i e r il disco è plasticizzato (i.e se la tensione $\sigma_c - \sigma_r = \sigma_{eq,T}$ è pari al limite di snervamento R_e).

Per calcolare poi invece la tensione circonferenziale possiamo sfruttare la legge del materiale $R_e = \sigma_c - \sigma_r$ e scrivere quindi, esplicitando σ_r , che

$$\sigma_c(r) = R_e \left(\ln \frac{r}{r_i} + 1 \right) - p_i \quad (2.27)$$

Come possiamo notare, gli **andamenti** delle due tensioni sono uguali e *traslati* di R_e l'uno rispetto all'altro, e sono degli andamenti **logaritmici**. Chiaramente questi andamenti saranno tali solo tra r_i e r , mentre tra r e r_e ci sarà l'andamento solito, dato che quella zona di disco non è plasticizzata.

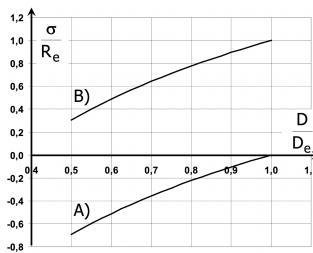


Figura 2.17: Notare che il disco qua è tutto plasticizzato, avendo tratto logaritmico fino a r_e .

2.6.2 Calcolo delle pressioni notevoli

A questo punto possiamo sicuramente definire dei valori notevoli della pressione interna p_i che permettono di avere delle situazioni particolari. Definiamo quindi:

- La pressione di **burst** come quella pressione per cui *tutto* il disco è plasticizzato. Si chiama così perché lo stato di tensione nel disco intero fa sì che la tensione equivalente abbia raggiunto ovunque il limite di snervamento, per cui se questa tensione aumenta anche di pochissimo si ha che, siccome il campo plasticò vede una tensione costante per ogni deformazione, allora il disco si allunga all'infinito ed esplode.⁸
- La pressione **limite di incipiente snervamento** come quella pressione per cui il disco è plasticizzato *solo* al raggio *interno*. Essa è quindi il limite inferiore per cui nel disco c'è almeno un raggio a cui è plasticizzato (quello interno).

Vediamo ora come calcolare dunque queste due pressioni, applicando semplicemente la formula per il calcolo di σ_r e ricavando di conseguenza la p_i .

Pressione di burst

Abbiamo detto che il disco è plasticizzato tutto, quindi la relazione di $\sigma_r(r)$ si estende da r_i a r_e ; scriviamo allora che deve valere al raggio esterno, dove la tensione radiale è nulla per le condizioni al contorno, e quindi si ha

$$\sigma_r(r_e) = R_e \ln \frac{r_e}{r_i} - p_{i,burst} = 0$$

Da questa ricaviamo che

$$p_{i,burst} = R_e \ln \frac{r_e}{r_i} \quad (2.28)$$

⁸In realtà non lo fa proprio per R_e dato che c'è un'ulteriore tratta a rottura, però nel modello di materiale idealmente plasticò il comportamento sarebbe quello.

Pressione limite di incipiente snervamento

In questo caso abbiamo invece che al solo raggio interno vi è comportamento plastico (i.e solo lì valgono le equazioni scritte per il campo plastico), ma vi è *incipiente* snervamento, ossia siamo su un "*confine*" tra campo elastico e campo plastico, quindi a raggio interno (e solo a raggio interno), valgono **anche** le equazioni in campo elastico.

Prendiamo allora le relazioni scritte sia per il campo elastico che per quello plastico e mettiamole a sistema

$$\begin{cases} \sigma_r + \sigma_c = 2A \\ \sigma_c - \sigma_r = R_e \end{cases}$$

Sottraiamo la seconda alla prima e troviamo così che

$$2\sigma_r = 2A - R_e$$

Esplicitiamo A come lo abbiamo scritto all'inizio di questa sezione e troviamo allora che

$$\sigma_r = \frac{\frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} p_i - \frac{R_e}{2}$$

Così abbiamo espresso la tensione radiale al raggio interno (e solo lì, perché questa relazione è scritta quando valgono *contemporaneamente* entrambe le relazioni, sia in campo elastico che plastico) e, siccome questa vale solo al raggio interno, sappiamo che lì la tensione radiale è pari alla pressione interna (cambiata di segno), per le condizioni al contorno, quindi abbiamo che

$$p_i = \frac{\frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} p_i - \frac{R_e}{2}$$

Ricavando da questa relazione la p_i possiamo trovare la pressione interna limite di incipiente snervamento come

$$p_{i,lim} = \left(1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}\right) \frac{R_e}{2} \quad (2.29)$$

Non potendo essere altre che lei, dato che abbiamo scritto la relazione di partenza considerando incipiente snervamento al solo raggio interno. Ovviamente si ha che $p_{i,lim} < p_{i,burst}$, e anzi diciamo anche che queste due pressioni interne sono i confini del campo plastico: la pressione limite di incipiente snervamento è il confine inferiore, dal momento che ogni pressione al di sotto di essa non plasticizza neanche il raggio interno al disco (quindi non lo plasticizza proprio), mentre la pressione di burst è il confine superiore, dato che una pressione superiore ad essa fa esplodere il disco.

Applicazione di pressione intermedia tra incipiente snervamento e burst

Adesso che abbiamo analizzato i confini inferiore e superiore del campo plastico (disco plasticizzato al solo raggio interno, disco tutto plasticizzato), immaginiamo di applicare una p_i tale che sia $p_{i,lim} < p_i < p_{i,burst}$ e che quindi plasticizzi il disco soltanto fino ad un certo diametro D^* tale $D_i < D^* < D_e$. Vogliamo allora calcolare la pressione interna p_i che dobbiamo applicare per plasticizzare il disco da D_i a D^* , noto ovviamente che sia D^* (oltre che geometria e materiale del disco, naturalmente).

Ragioniamo nel seguente modo: noi sappiamo che il tratto da D_i a D^* è in campo plastico, per cui sappiamo qual è la relazione che lega tensione, diametro e pressione interna; sappiamo poi che il tratto da D^* a D_e invece è in campo elastico. A $D = D^*$ quindi avremo che si ha la transizione da campo plastico a campo elastico, quindi in quel punto (e solo in quel punto) valgono sia le leggi in campo elastico che in campo plastico.

Ma questo è assolutamente analogo al caso di incipiente snervamento⁹, per cui possiamo calcolare la pressione p^* che causa incipiente snervamento non più ora a D_i ma a D^* ed essa vale

$$p^* = \left(1 - \frac{D^*^2}{D_e^2}\right) \frac{R_e}{2}$$

Questo lo possiamo scrivere perché se immaginiamo di separare la parte plasticizzata e quella non plasticizzata di disco abbiamo da una parte un disco tutto plasticizzato di diametro interno D_i e diametro esterno D^* , mentre dall'altra abbiamo un disco plasticizzato solo al diametro interno D^* e di diametro esterno D_e ; applichiamo allora le

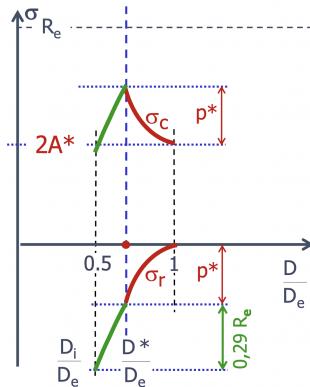


Figura 2.18

considerazioni dell'incipiente snervamento al secondo pezzo di disco e scriviamo la relativa p^* (che è poi la pressione interna del secondo disco, ma la chiamiamo p^* perché è al diametro D^* , diametro interno del secondo disco).

A questo punto immaginiamo di prendere il primo pezzo di disco (quello tutto plasticizzato) e imponiamo naturalmente che valga la legge di $\sigma_r(r)$ in campo plastico al suo diametro esterno D^* , per cui abbiamo che

$$\sigma_r(D^*) = R_e \ln \frac{D^*}{D_i} - p_i$$

Noi però sappiamo quanto vale la tensione radiale al diametro D^* perché, avendo separato il disco originario in due pezzi, all'interfaccia tra questi deve essere scambiata la stessa forza (i.e la stessa tensione, avendo chiaramente eguale sezione di interfaccia), per cui avremo che la tensione $\sigma_r(D^*)$ non può che valere $-p^*$, e quindi abbiamo che

$$-p^* = R_e \ln \frac{D^*}{D_i} - p_i$$

A questo punto però noi possiamo esplicitare la pressione interna p_i che è la pressione interna del disco originario (nonché quella del primo disco, quello tutto plasticizzato) e scrivere quindi che la pressione interna da applicare al disco originario per plasticizzarlo sino al diametro D^* è pari a

$$p_i = R_e \left[\ln \frac{D^*}{D_i} + \frac{\left(1 - \frac{D^*}{D_e}\right)^2}{2} \right] \quad (2.30)$$

2.6.3 Perché plasticizzare?

Abbiamo visto quali sono gli andamenti delle tensioni in campo plastico nel disco e come ricavare le varie pressioni interne per plasticizzare un raggio, tutti i raggi o solo fino ad un certo raggio il disco, ma non ci siamo ancora chiesti *perché* dovremmo voler plasticizzare un disco, ad esempio, fino ad un certo diametro (quello che si fa di solito, dato che per plasticizzare tutto si rischia l'esplosione e plasticizzare solo il diametro interno non ha molto senso dato che le tensioni non cambiano andamento di fatto).

Tra l'altro, noi applichiamo effettivamente questa pressione interna al disco che plasticizza parte di esso, ma non possiamo pensare di caricarlo per sempre (non avrebbe senso applicare quella p_i perché modificherebbero semplicemente lo stato di tensione ma non migliorerebbero le cose), quindi ci sarà un certo momento in cui questo disco verrà scaricato.

Avendo indotto plasticizzazione, ossia una deformazione associata al campo plastico, quindi una deformazione plastica *permanente*, avremo che il disco sarà soggetto a delle **tensioni residue**, indotte appunto da queste deformazioni permanenti¹⁰. Non essendoci chiaramente alcun carico dopo lo scarico (e grazie anche), queste tensioni residue devono essere globalmente *nulle* su ogni sezione (i.e produrre forza nulla).

⁹È così perché si tratta sempre e comunque di un punto di transizione tra campo plastico ed elastico, dove valgono quindi entrambe le leggi.

¹⁰Il fatto che le pareti esterne si rilassino elasticamente e tornino alla loro posizione iniziale fa sì che invece le pareti interne siano compresse tra loro, inducendo tensioni residue di compressione

Queste tensioni residue capiamo allora essere effettivamente ciò che ci interessa e per cui facciamo la plasticizzazione dei dischi (avranno effetti benefici supponiamo), e quindi cerchiamo adesso un modo quantomeno qualitativo di trovare queste tensioni residue dal punto di vista matematico (sappiamo che ci sono ma non sappiamo come sono fatte). Dobbiamo, in altre parole, *simulare* lo scarico del disco, scarico che avviene naturalmente in campo *elastico*, dato che la tensione si riduce man mano e sta naturalmente sempre sotto il limite di snervamento (in realtà se scende fin sotto lo zero e incontra il limite di snervamento negativo si ritorna in campo plastico, ma noi siamo bravi e ci fermiamo prima).

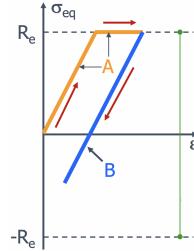


Figura 2.19

Per simulare il processo di carico - plasticizzazione - scarico immaginiamo che avvenga la seguente cosa:

1. Anzitutto carichiamo il disco con una pressione interna tale da plasticizzarne una parte, come abbiamo visto nell'ultima parte del precedente paragrafo.
2. Il disco quindi si plasticizza in parte, e quindi la tensione equivalente nelle zone plasticizzate egualia il limite di snervamento e rimane costante all'aumentare della deformazione.
3. Arrivati a un certo punto decidiamo di scaricare il disco, e per farlo possiamo pensare di applicare ad esso una pressione interna *uguale e contraria* a quella applicata per plasticizzarlo, per cui avremo ora che il disco è di nuovo scarico all'esterno (pressione interna nulla).

La cosa bella è che noi lo stato di tensione nel disco parzialmente plasticizzato lo conosciamo (anche matematicamente), avendolo calcolato poco sopra (quello in campo plastico) e nel corso di questo capitolo (quello in campo elastico) e ovviamente conosciamo anche lo stato di tensione associato ad un disco (completamente in campo elastico) e caricato internamente, con la sola differenza che ora siccome la pressione interna è di segno opposto (è a trazione) il tutto è ribaltato. Quello che ci manca conoscere è lo stato di tensione nel disco scaricato che, essendoci stata plasticizzazione (deformazioni permanenti), non potrà essere uguale allo stato di tensione nullo (è una sorta di ciclo isteretico).

E quindi cosa facciamo? Molto semplice! Per ottenere lo stato di tensione del disco scaricato ci basta per l'appunto **sommare** allo stato di tensione del disco carico e parzialmente plasticizzato lo stato di tensione del disco che viene scaricato (è come se al primo sottraessi lo stato di tensione di un caricamento elastico, dato che quest'ultimo è ribaltato).

Otteniamo in questo modo un andamento lungo il raggio dello stato di tensione del disco scaricato, ossia l'andamento lungo il raggio delle *tensioni residue*.

Quello che notiamo è che la tensione residua radiale è pressoché nulla lungo il raggio, mentre la tensione residua circonferenziale è, per un certo tratto *negativa*, ossia a compressione, e questo, come vedremo, è molto vantaggioso. Una pratica di questo tipo prende comunque il nome di *autofrettage*.

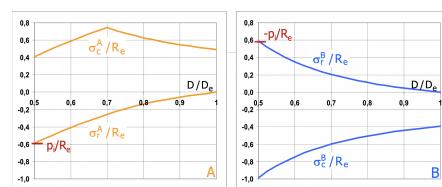


Figura 2.20

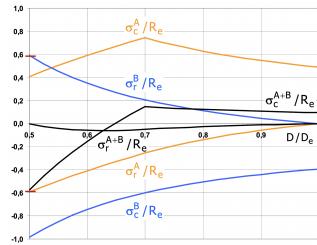


Figura 2.21

Vantaggi dell'autofrettage

Una simile pratica ha prevalentemente tre vantaggi:

- Migliora la vita a fatica
- Sposta il massimo di tensione dal diametro interno (superficie) ad un diametro maggiore. Questo è ottimo perché la fatica è un fenomeno superficiale e avere il massimo di tensione ad un raggio maggiore di quello interno (i.e all'interno del disco) evita che difetti superficiali e rugosità peggiorino la fatica
- Permette di avere una minore tensione alternata σ_a a fatica.

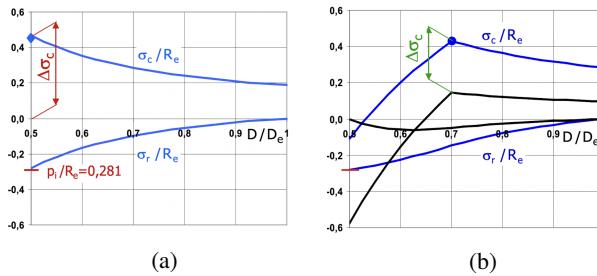


Figura 2.22

Possiamo in particolare visualizzare molto bene l'ultimo punto se andiamo a considerare gli andamenti delle tensioni su un disco senza autofrettage caricato internamente (con una pressione inferiore al limite di plasticizzazione¹¹): il $\Delta\sigma_c$ massimo è quello che c'è tra lo zero e il raggio interno (zona tra l'altro molto critica, come detto, per i fenomeni superficiali pericolosi che possono annidarsi).

Consideriamo ora invece un disco sottoposto ad autofrettage a caricato con la medesima pressione; a parte che il picco si è spostato all'interno del disco (e un filo più in basso tra l'altro), vediamo soprattutto che il $\Delta\sigma_c$ ora è significativamente inferiore, dal momento che si parte da uno stato di tensione residuo non nullo. Questo quindi fa sì che, oltre a non avere problemi dovuti alla criticità della zona superficiale interna del disco, si abbia una $\sigma_{c,a}$ ben inferiore al caso senza autofrettage (a scapito di una tensione media un pochino maggiore), di fatto *migliorando* la vita a fatica del materiale e, potenzialmente, facendo scendere la tensione alternata ora sotto il limite a fatica.

Dunque, creare delle tensioni residue a compressione (per una parte di raggio) nel disco ne migliora la vita a fatica per molteplici ragioni (non si ha tensione massima al raggio interno, i.e in superficie, si ha minore tensione alternata). Queste tensioni residue allora le creiamo proprio andando a plasticizzare il disco e poi a scaricarlo.

Una cosa del genere viene fatta in quei componenti (come ad esempio dischi e tubi per l'appunto) che sono sottoposti a carichi ciclici e che devono quindi migliorare la loro vita a fatica, per cui prima di metterli in esercizio li si carica con valori tali da indurre plasticizzazione in parte di essi e poi li si scarica, creando dunque tensioni residue che hanno gli effetti benefici esposti in precedenza.

¹¹Ora non ci interessa più plasticizzare; il disco in opera avrà sempre carico inferiore al limite di incipiente snervamento perché deve lavorare sempre e solo in campo elastico (avere comportamento plastico è inutile e probabilmente addirittura peggiorativo).

2.7 Metodo di Grammel

Abbiamo visto nelle precedenti sezioni che è talvolta conveniente prevedere dei dischi a *spessore variabile*, per cui siamo interessati ora a capire come poter calcolare lo *stato di tensione* all'interno di dischi a spessore variabile.

Sebbene il FEM sia un metodo piuttosto preciso, non sempre è così facile fare delle FEM, specie se dobbiamo scegliere tra varie configurazioni di dischi, per cui introduciamo di seguito un metodo numerico piuttosto semplice (nasce negli anni 1920 per essere fatto a mano, lo si può facilmente implementare su Matlab o su Excel) per calcolare in maniera approssimata (più del FEM ovviamente) lo stato di tensione di dischi a spessore variabile.

Il suddetto metodo consiste banalmente nel suddividere il disco di spessore variabile in un numero finito di dischi a spessore costante. Nelle zone in cui effettivamente lo spessore è costante non ci preoccupiamo particolarmente; nelle zone invece in cui lo spessore varia, ad esempio in maniera trapezoidale, allora prendiamo uno spessore medio ottenuto facendo la media "geometrica" degli spessori agli estremi di quel blocco oppure, più rigorosamente, possiamo calcolare uno spessore tale per cui il disco di quello spessore avrebbe una *forza centrifuga* uguale a quella che ha il pezzo di disco che è a spessore variabile (cambia poco comunque).

In ogni caso, noi abbiamo ora suddiviso il nostro disco a spessore continuamente variabile in N dischi di spessore costante, l'uno diverso dall'altro in generale, ciascuno denominato b_k , con $k = 1, \dots, N$.

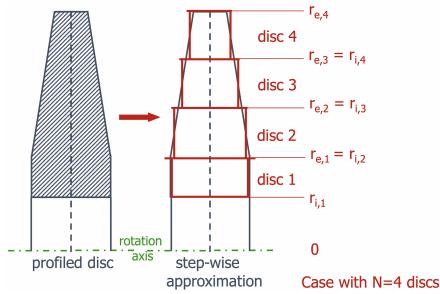


Figura 2.23

2.7.1 Scrittura equazioni

A questo punto consideriamo l'interfaccia tra il blocco k e il blocco $k+1$ generici ($r_{e,k}$ e $r_{i,k+1}$); nonostante la geometria vari ora in maniera discreta (per cui le tensioni non possono essere uguali all'interfaccia), deve essere sempre rispettato l'*equilibrio di forze* radiali in tale zona, per cui dobbiamo imporre che

$$F_{r_{e,k}} = F_{r_{i,k+1}}$$

La forza è pari alla tensione radiale moltiplicata per l'area, ossia il prodotto tra lo spessore b_k e l'arco $r_k \theta^{12}$, per cui

$$\sigma_{r_{e,k}} b_k r_{e,k} \theta = \sigma_{r_{i,k+1}} b_{k+1} r_{i,k+1} \theta$$

Tuttavia, per la continuità deve verificarsi necessariamente che

$$r_{e,k} = r_{i,k+1}$$

per cui, essendo anche ovviamente l'arco θ lo stesso, si ottiene che

$$\sigma_{r_{e,k}} b_k = \sigma_{r_{i,k+1}} b_{k+1}$$

Se ora poniamo per semplicità $n_j = \sigma_{r_j} b_j$ otteniamo che deve essere

$$n_k = n_{k+1} \quad (2.31)$$

Tuttavia, dobbiamo imporre anche che vi sia la *congruenza degli spostamenti*¹³ sempre all'interfaccia tra i blocchi, per cui dovremo imporre che

$$u_{e,k} = u_{i,k+1}$$

¹²Il modello che usiamo e abbiamo sempre usato considera tensione radiale costante lungo lo spessore b del blocco generico.

¹³Ci sono spostamenti radiali perché sono presenti dei carichi.

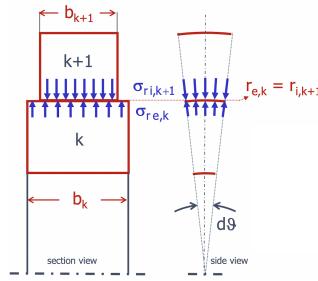


Figura 2.24

La formula generale per lo spostamento radiale la possiamo ricavare dal modello del materiale, tenendo conto anzitutto dello spostamento dovuto alla presenza di tensioni radiale e circonferenziale, che si ottiene esplicitando la legge del materiale

$$u = \frac{D}{2} \frac{1}{E} \left\{ \frac{-\frac{D_i^2}{D^2}(1+\nu) + \frac{D_i^2}{D_e^2}(1-\nu)}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} \sigma_{r_i} + \frac{(1-\nu) + \frac{D_i^2}{D^2}(1+\nu)}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} \sigma_{r_e} \right\}$$

Poi considerando anche la presenza di forza centrifuga, che si dimostra produrre uno spostamento radiale

$$u^\omega = \sigma_0 D \frac{(3+\nu)}{16E} \left[(1-\nu)(1 + \frac{D_i^2}{D_e^2}) + (1+\nu) \frac{D_i^2}{D^2} - \frac{(1-\nu^2)}{(3+\nu)} \frac{D^2}{D_e^2} \right]$$

Dove si ricorda che $\sigma_0 = \rho \omega^2 r_e$, tensione circonferenziale che la forza centrifuga causa su un anello sottile di raggio r_e pari al raggio esterno del disco. Infine si deve considerare anche lo spostamento dovuto al carico termico, ossia alla presenza di un *gradiente di temperatura* tra raggio interno ed esterno. Esso si dimostra essere

$$u^T = \frac{D}{2} \frac{\alpha^*}{3} \frac{T_e - T_i}{1 - \frac{D_i}{D_e}} \left[(1-\nu) \frac{1 + \frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 + \frac{D_i}{D_e}} - (2-\nu) \frac{D}{D_e} + (1+\nu) \frac{\frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 + \frac{D_i}{D_e}} \frac{D_e^2}{D^2} \right] + \frac{D}{2} \alpha^* (T - T_0)$$

Dove α^* è il coefficiente di dilatazione termica, T_e e T_i sono le temperature a raggio esterno e interno, T_0 è una temperatura di riferimento e T è la temperatura al raggio a cui vogliamo calcolare u^T .

Tenuto quindi conto di questi tre contributi (uno classico, due aggiuntivi), possiamo allora scrivere che

$$u = A_1 \sigma_{r_e} + A_2 \sigma_{r_i} + u^\omega + u^T$$

Le costanti A_1 e A_2 sono funzione ovviamente di geometria, materiale e raggio a cui calcoliamo lo spostamento. A questo punto possiamo allora scrivere gli spostamenti al raggio interno ed esterno (stiamo finora ragionando per un generico disco a spessore costante, per cui queste formule valgono per ciascuno dei blocchi in cui abbiamo suddiviso il disco a spessore variabile, ciascuno coi suoi valori propri).

$$\begin{cases} u_e = S \sigma_{r_e} + P \sigma_{r_i} + u_e^\omega + u_e^T \\ u_i = Q \sigma_{r_e} + R \sigma_{r_i} + u_i^\omega + u_i^T \end{cases}$$

Le costanti S, P, Q, R sono le costanti A_1 e A_2 calcolate le prime due a $D = D_e$ e le seconde due a $D = D_i$. Possiamo scrivere tutto in notazione matriciale.

$$\begin{cases} u_e \\ u_i \end{cases} = \begin{bmatrix} S & P \\ Q & R \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_{r_e} \\ \sigma_{r_i} \end{cases} + \begin{cases} u_e^\omega \\ u_i^\omega \end{cases} + \begin{cases} u_e^T \\ u_i^T \end{cases}$$

Facciamo ora comparire $n = \sigma_r b$ al posto delle tensioni radiali, moltiplicando e dividendo il primo addendo a secondo membro per b e ponendo $S' = \frac{S}{b}$ (analogo per P, Q e R).

$$\begin{cases} u_e \\ u_i \end{cases} = \begin{bmatrix} S' & P' \\ Q' & R' \end{bmatrix} \begin{cases} n_e \\ n_i \end{cases} + \begin{cases} \tilde{u}_e \\ \tilde{u}_i \end{cases}$$

Avendo condensato in $\tilde{u} = u^\omega + u^T$ i contributi di forza centrifuga e carico termico. Tuttavia, le equazioni così scritte non sono molto utili, in quanto noi vorremmo idealmente i valori al raggio esterno in funzione dei valori al raggio esterno (valori di n e u). Possiamo manipolare quindi questa ultima espressione e scrivere che

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ n_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^* \\ n^* \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Dove la matrice ha cambiato gli elementi ovviamente e dove si è condensato nel vettore $\{u^* \ n^*\}^T$ i termini di u dipendenti da ω^2 e ΔT che non sono moltiplicati per A, B, C o D . A questo punto poniamo per semplicità

$$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \{V\} = \begin{Bmatrix} u^* \\ n^* \end{Bmatrix}$$

E possiamo quindi scrivere per il generico blocco k -esimo che i valori al raggio esterno saranno funzione dei valori al raggio interno come

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix}_k = [T]_k \begin{Bmatrix} u_i \\ n_i \end{Bmatrix}_k + \{V\}_k$$

Analogamente per il blocco $k+1$ -esimo si avrà che

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix}_{k+1} = [T]_{k+1} \begin{Bmatrix} u_i \\ n_i \end{Bmatrix}_{k+1} + \{V\}_{k+1}$$

Tuttavia, dall'equilibrio delle forze e dalla congruenza degli spostamenti all'interfaccia tra il blocco k e il blocco $k+1$ abbiamo visto che

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} u_i \\ n_i \end{Bmatrix}_{k+1}$$

Per cui possiamo scrivere che

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix}_{k+1} = [T]_{k+1} \begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix}_k + \{V\}_{k+1}$$

Sostituendo i valori al raggio esterno nel blocco k con la loro formula otteniamo allora

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix}_{k+1} = [T]_{k+1} \left([T]_k \begin{Bmatrix} u_i \\ n_i \end{Bmatrix}_k + \{V\}_k \right) + \{V\}_{k+1}$$

Se consideriamo il blocco $k+2$ abbiamo dunque che

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix}_{k+2} = [T]_{k+2} \left([T]_{k+1} \begin{Bmatrix} u_i \\ n_i \end{Bmatrix}_{k+1} + \{V\}_{k+1} \right) + \{V\}_{k+2}$$

Sostituendo i valori al raggio interno nel blocco $k+1$ e ricordando che questi sono pari ai valori al raggio esterno nel blocco k otteniamo quindi che

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix}_{k+2} = [T]_{k+2} \left([T]_{k+1} \left([T]_k \begin{Bmatrix} u_i \\ n_i \end{Bmatrix}_k + \{V\}_k \right) + \{V\}_{k+1} \right) + \{V\}_{k+2}$$

Applicando in cascata questo ragionamento, partendo dal blocco 1 e arrivando al blocco N (scrivo blocco N in funzione di $N-1$ e così via fino a 1) possiamo scrivere sinteticamente che

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix}_N = [\tilde{T}] \begin{Bmatrix} u_i \\ n_i \end{Bmatrix}_1 + \{\tilde{V}\}$$

Dove la matrice $[\tilde{T}]$ è il prodotto di tutte le matrici $[T]_j$, $j = 1, \dots, N$, mentre il vettore $\{\tilde{V}\}$ è la somma dei vettori $\{V\}_j$, moltiplicati ciascuno per il prodotto delle matrici $[T]_i$, con $i = 1, \dots, j-1$.

Matematica a parte, noi abbiamo che la matrice $[\tilde{T}]$ la possiamo calcolare perché dipende solo da geometria e materiale, e possiamo calcolare anche il vettore $\{\tilde{V}\}$ perché dipende in più da gradiente di temperatura e velocità angolare del disco, che sono valori comunque noti anch'essi.

2.7.2 Risoluzione equazioni

A questo punto abbiamo un sistema in cui ci sono tecnicamente 4 incognite e sole 2 equazioni; tuttavia, noi sappiamo che al raggio interno del blocco 1 (raggio interno del disco intero) la tensione radiale è nulla perché è nulla la pressione applicata (è pari al valore ambiente ma riferiamo tutto ad esso, per cui è nulla), quindi $n_{i,1} = 0$, e allo stesso modo conosciamo la tensione radiale al raggio esterno del blocco N (raggio esterno del disco intero), essendo lei pari alla forza centrifuga che la paletta trasferisce al disco, quindi $n_{e,N} = \bar{n}_{e,N}$.

In questo modo il sistema diventa 2×2 ed è quindi risolvibile univocamente, permettendoci dunque di calcolare gli spostamenti $u_{i,1}$ e $u_{e,N}$ al raggio interno ed esterno del disco intero. Noti questi, possiamo calcolare le n e gli u al raggio interno ed esterno di *tutti* gli N blocchi in cui abbiamo suddiviso il disco, facendoci ottenere quindi andamenti "a tratti" di u e σ_r (risalgo a σ_r ricordando che $\sigma_r = \frac{n}{b}$).

Come possiamo ben notare, lo spostamento al raggio interno del disco intero ($u_{i,1}$) è direttamente proporzionale alla tensione radiale al raggio esterno del disco intero (proporzionale a ω^2), quindi $u_{i,1}$ è a sua volta proporzionale a ω^2 .

Calcolo tensione circonferenziale

Ci manca solo più la tensione circonferenziale σ_c da calcolare per avere noto lo stato di tensione (e il campo di spostamenti, ma quello già lo abbiamo, essendoci da calcolare solo u). Essa la possiamo calcolare scrivendo lo spostamento circonferenziale ε_c e ricordando che è pari a $\varepsilon_c = \frac{u}{r} = \frac{2u}{D}$.

$$\varepsilon_c = \frac{1}{E}(\sigma_c - \nu\sigma_r) + \alpha^*\Delta T = \frac{u}{r}$$

Possiamo ricavare la σ_c in funzione di u e σ_r come

$$\sigma_c = \frac{u}{r}E + \nu\sigma_r - E\alpha^*\Delta T \quad (2.33)$$

Siccome u e σ_r li abbiamo calcolati poco sopra, possiamo automaticamente calcolare σ_c , essendo tutto il resto (geometria, materiale e gradiente di temperatura) noto.

Come dobbiamo sempre ricordare, anche in questo caso, il punto *più sollecitato* è il **raggio interno** del disco intero.

Confronto Grammel vs FEM

Il FEM è ovviamente più preciso, perché non discretizza il disco in dischi di spessore costante, quindi ci permette di avere valori più precisi specialmente nelle zone di *raccordo*¹⁴. Con Grammel troviamo invece dei valori sullo spessore medio di ogni zona, quindi si perde qualcosa.

Ovviamente nemmeno il FEM è preciso al 100% e ci vuole bravura nel leggere i dati e capire se ci sono problemi.

In ogni caso, Grammel rimane un metodo molto veloce ed economico computazionalmente per valutare bene o male gli andamenti di tensione e spostamento radiale e può essere un modo per fare un cross-check col FEM oppure per fare stime di avamprogetto.

2.7.3 Calcolo velocità angolare di burst

Una volta calcolato l'andamento (a tratti) di σ_r , σ_c e u lungo il raggio del disco a spessore variabile col metodo di Grammel appena presentato siamo interessati al calcolo della velocità angolare ω alla quale vi è uno stato di tensione per cui si verifica il burst del disco, ossia questo è tutto plasticizzato ed esplode.

Per calcolare la suddetta velocità angolare dobbiamo avvalerci necessariamente di un *criterio di cedimento*, che ci dica quindi effettivamente cosa significa burst (abbiamo calcolato solo la pressione interna di burst, ma abbiamo detto che qua la pressione interna è nulla, quindi non sappiamo ancora come fare). Il suddetto criterio di cedimento che adottiamo è il criterio di **Robinson**¹⁵, il quale prescrive che il burst si verifica nel momento in cui la tensione circonferenziale *media*¹⁶ nel disco raggiunge il limite di rottura R_m .

Capiamo quindi che è necessario calcolare questa $\sigma_{c,m}$, e possiamo farlo seguendo un ragionamento molto semplice:

¹⁴Questo anche perché il FEM ci dà le tensioni in due dimensioni, quindi cattura meglio gli effetti localizzati dovuti alla variazione di geometria.

¹⁵Un altro criterio, più usato in realtà, è quello di Hallinan, che tiene conto dell'effetto di intaglio e usa anche la $\sigma_{c,max}$ oltre che quella media.

¹⁶La tensione circonferenziale varia lungo il raggio.

- Calcoliamo la forza circonferenziale che si sviluppa in ogni blocco i -esimo moltiplicando la tensione circonferenziale in tale blocco per l'area del suddetto.

$$F_{circ_i} = \sigma_{c_i} A_i$$

- Calcoliamo la forza circonferenziale in tutto il disco sommando i contributi dei singoli blocchi appena calcolati.

$$F_{circ} = \sum_{i=1}^N \sigma_{c_i} A_i$$

- Calcoliamo la tensione circonferenziale media dividendo la forza circonferenziale totale per l'area totale del disco, pari chiaramente alla somma delle aree dei singoli blocchi.

$$\sigma_{c,m} = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_{c_i} A_i}{\sum_{i=1}^N A_i} \quad (2.34)$$

A questo punto noi consideriamo che la tensione circonferenziale in ogni blocco è proporzionale a ω^2 (velocità angolare a cui gira il disco e che è nota), per cui anche la tensione circonferenziale media è proporzionale a ω^2 .

$$\sigma_{c,m} \propto \omega^2$$

Quando la tensione circonferenziale media è pari a R_m abbiamo che ω è pari a ω_b , per cui

$$R_m \propto \omega_b^2$$

Siccome la costante di proporzionalità è la medesima per il medesimo disco, avremo che

$$\frac{R_m}{\sigma_{c,m}} = \frac{\omega_b^2}{\omega^2}$$

E quindi potremo facilmente calcolare

$$\omega_b = \omega \sqrt{\frac{R_m}{\sigma_{c,m}}} \quad (2.35)$$

La ω è nota perché sappiamo a quanto gira il disco per avere quella $\sigma_{c,m}$ che abbiamo calcolato, ed è nota quindi anche la $\sigma_{c,m}$, così come è noto R_m (caratteristica del materiale).

NOTA In realtà la tensione circonferenziale media non è proporzionale esattamente a ω^2 ma c'è il contributo termico che è proporzionale a ω . Tuttavia facciamo un'approssimazione, anche perché nel modello di materiale idealmente plastico gli effetti del carico termico in teoria spariscono.

2.8 Analisi incidenti aerei per rottura dischi a fatica

In questa sezione andiamo brevemente a considerare tre casi reali di incidenti aerei avvenuti per un cedimento a *fatica* di un disco nel motore.

Prima di farlo però ragioniamo un attimo su cosa vuol dire rottura a fatica di un disco; un disco solitamente è soggetto a *LCF*, ossia fatica a basso numero di cicli, questo perché i carichi a cui è soggetto sono prossimi allo snervamento.

Inoltre, la LCF è associata ad un campo di *deformazioni* imposto, come può essere ad esempio il caso della presenza di un gradiente termico. Le deformazioni imposte quindi causano conseguenzialmente delle tensioni che, essendo vicine al limite di snervamento, comportano una rottura per fatica a basso numero di cicli.¹⁷

Un'altra cosa che possiamo dire è che il disco è soggetto a forza centrifuga, che varia dunque con la velocità angolare. Quando la macchina è spenta ovviamente la tensione centrifuga è nulla, mentre quando è a regime è massima.

¹⁷Nelle macchine di prova per queste applicazioni infatti succede che si impongono delle deformazioni e non delle forze.

Questo significa che il rapporto $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ nel caso di questa sollecitazione centrifuga è $R = 0$, dato che la tensione minima è nulla (macchina spenta).

Per quanto riguarda invece le **palette** calettate al disco, abbiamo che esse sono soggette prevalentemente a *vibrazioni*¹⁸, quindi si rompono per *HCF* (frequenze di sollecitazione tipiche di centinaia o migliaia di Hz). Sulle palette però agisce anche la forza centrifuga, che abbiamo visto essere sostanzialmente qualcosa di LCF, quindi a rigore potremo dire che le palette sono soggette a CCF (Combined Cycle Fatigue).

2.8.1 Incidente Chicago O'Hare, 2016, B767-300

Questo incidente è avvenuto al take-off (quando si chiede il 100-110% di potenza al motore), fondamentalmente col disco che è andato in *burst* ed è schizzato via in tre pezzi¹⁹.

Il disco si è rotto al bordo *interno* ed è stato stabilito che ad innescare la cricca era stata un'*inclusione* presente nel disco (particelle non amalgamate col resto).

Con questo capiamo che il problema non era il dimensionamento del disco (non lo è mai, a meno di appaltare il lavoro a Topo Gigio), bensì il *processo manifatturiero*. Sappiamo quindi cosa fare ma spesse volte non sappiamo come farlo bene.

2.8.2 Incidente LAX, 2006, B767 con GE CF6

Qua è successo che un disco è esploso, facendo di conseguenza esplodere uno dei motori, in una condizione in cui il velivolo aveva appena scaricato i passeggeri e stava dirigendosi verso la manutenzione (i piloti avevano notato qualcosa di strano).

È stato stabilito che la cricca non è partita dal bordo interno del disco, bensì dallo *slot* in cui si calettano le palette, che era fatto a "duck tail".

Ciò è stato dovuto ad un duplice effetto:

- Anzitutto in corrispondenza della base dello slot vi era una *concentrazione* di tensioni dovuta al fatto che sostanzialmente le "linee di flusso" dovevano necessariamente curvare per la presenza dello slot e questo induceva una concentrazione di tensioni proprio alla base centrale dello slot. In quel caso si è visto che il K_t era pari circa a 1.4.
- Il processo produttivo del disco (broccatura) si è visto che causava un *difetto* che innescava successivamente una cricca.

La compresenza di una cricca in una zona già di per sé criticamente sollecitata ha dunque portato alla sua rapida propagazione e alla successiva rottura del disco.

2.8.3 Incidente Pensacola, 1996, MD-88

In questo caso è successo che un disco è esploso, entrando in fusoliera e uccidendo 2 persone, ferendone molte altre.

Il problema qui era dato dal fatto che il disco in questione era *flangiato* direttamente con delle viti nel disco stesso, e il processo di *foratura* con cui erano stati creati gli alloggiamenti per le viti si è visto che lasciava sistematicamente dei difetti (tra l'altro non erano nemmeno ben chiare le procedure con cui era verificata la bontà del processo produttivo).

Questi difetti dunque hanno propagato la cricca e, essendo tali fori ovviamente al raggio interno, il fatto che quel punto sia il più sollecitato non ha di certo aiutato a impedire la propagazione della cricca.

¹⁸Queste vibrazioni sono date ad esempio dall'instazionarietà dei gas che scorrono nella turbomacchina, alla spinta data dal combustore o anche alla deviazione del flusso da parte delle palette statoriche.

¹⁹Questione della massima divisione dell'energia.

Capitolo 3

Collegamenti filettati

In questo capitolo affronteremo tutto il discorso sui collegamenti filettati, quindi viti e madreviti (dadi o pezzi filettati), andando a ragionare sulle metodologie di modellazione di questi componenti al fine di verificare la loro resistenza *strutturale* sia dal punto di vista *statico* ma soprattutto a *fatica*.¹

Se pensiamo infatti ad una vite coi suoi filetti (pane della vite) vediamo che in pratica quella zona è la fiera dell'effetto di *intaglio*, e quindi da ogni parte può potenzialmente nascere una cricca. Nella nostra trattazione comunque andremo sempre a ipotizzare che a rompersi sia sempre la *vite* e mai la madrevite, questo perché se il tutto è fatto correttamente è sempre la madrevite ad avere maggior resistenza.²

3.1 Introduzione

Come prima cosa pensiamo ad un classico collegamento filettato tra due piastre; esse devono essere fissate tra loro, per cui non deve esserci *scorrimento* se queste sono sottoposte ad una forza *tangenziale* l'una rispetto l'altra.

Per assicurare che ciò sia rispettato dovremo allora far sì che tra queste due piastre si generi una certa forza di *attrito*. Una tale forza di attrito necessita ovviamente di una certa pressione di *precarico*, che è proprio quanto generato dal bullone, in questo caso.

Infatti avremo che, tenendo ferma in montaggio la vite e fornendo una rotazione (mediante applicazione di torsione) al dado, esso salirà e tenderà quindi a schiacciare tra loro le due piastre, essendoci dall'altro lato la testa della vite.

In tal modo quindi vedremo che, a causa del precarico sulla vite, si genererà una forza di attrito tra le due piastre che ne impedirà il moto tangenziale, oltre che naturalmente quello normale.

C'è comunque da rimarcare che le viti non sono fatte per lavorare a taglio (sarebbero altrimenti delle spine), per cui la forza tangenziale a cui sono soggette le piastre deve essere sempre inferiore alla forza di attrito che si genera in presenza del collegamento filettato; in altre parole le piastre *non* devono in alcun modo scivolare tra loro.

Un'importante considerazione che dovremo fare, che sarà poi la base effettivamente del nostro modello matematico, è quella di capire come mettere in *relazione* la coppia che applichiamo alla vite (o al dado, dipende che collegamento c'è e chi è tenuto fermo tra vite e dado eventualmente) ed il precarico (forza assiale) che otteniamo conseguentemente.

Quando andiamo quindi a effettuare il collegamento, diciamo che effettuiamo un'operazione di *serraggio*, la quale ci permette di ottenere il precarico necessario ad assicurare efficacemente il collegamento desiderato. Per ottenere tale precarico abbiamo detto che è necessaria l'applicazione di una specifica coppia. Per sapere esattamente la coppia che stiamo effettivamente applicando (i.e per fare serraggi di qualità) usiamo un particolare strumento, chiamato *chiave dinamometrica*, la quale ci dice per l'appunto la coppia che stiamo applicando.

3.1.1 Tipologie di collegamenti filettati

Sostanzialmente possiamo individuare 3 tipologie notevoli di collegamenti filettati possibili:

¹ Andremo a considerare prevalentemente viti per scopi strutturali.

² Una possibile rottura, ad esempio statica, può essere quella dei filetti della vite, nel senso che succede qualcosa per cui i filetti della vite vengono strappati via e rimangono nella madrevite.

- Collegamento vite passante (*bolt*). Si tratta del classico collegamento vite-dado, che da vita quindi al bullone. Dado e testa della vite impediscono alle due facce di muoversi in direzione assiale ed esercitano inoltre la pressione tale per cui la forza di attrito che si genera impedisce il movimento tangenziale delle due facce.
- Collegamento vite-madrevite (*screw*). In questo caso si ha la vite che viene avvitata nella madrevite, la quale è direttamente una delle due piastre, il cui foro è ovviamente filettato e tipicamente non passante. In questo modo la testa della vite preme contro la piastra esterna e genera all'interfaccia delle due un precarico che ne impedisce il moto tangenziale.
- Collegamento vite-madrevite con *prigioniero*. Ciò che qua si osserva è la presenza di *deformazione plastica* nella madrevite, che impedisce alla vite di muoversi assialmente. Un dado invece assicura il precarico all'interfaccia tra le due piastre.

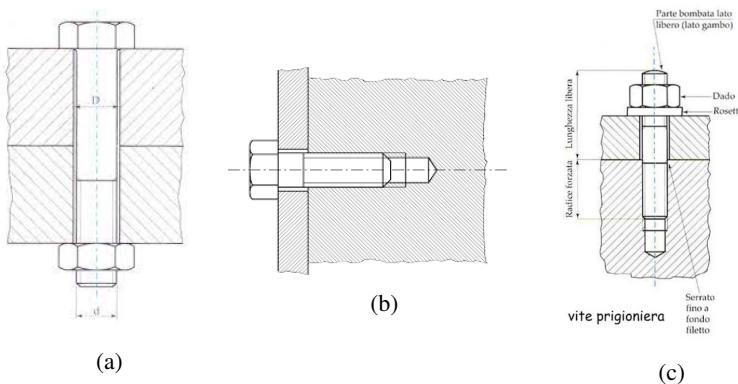


Figura 3.1

3.1.2 Tecnologie produttive

La filettatura di una vite può avvenire per *asportazione* di truciolo, anche se questa tecnica produttiva non è spesso adottata, se non quando strettamente necessario (filettatura di un albero) in quanto produce delle tensioni residue indesiderate ed è inoltre un processo che si adatta poco alle esigenze di larghi volumi di produzione di questi componenti.

Per questo motivo le viti si producono in maniera tipicamente diversa, andando anzitutto a prendere un cilindro di materiale, poi creando la testa martellandolo, rendendola successivamente esagonale (o la forma sua), rastremando poi la zona da filettare e infine filettando tale zona facendo passare il componente in una macchina che, per *deformazione plastica* crea la filettatura. Tipicamente queste macchine possono essere a scorrimento alternativo oppure, meglio ancora, a scorrimento circolare, così che entrino da una parte tutte le viti da filettare ed escano dall'altra le viti filettate.

Tendenzialmente questi processi produttivi sono tutti a *freddo*.

3.1.3 Nomenclatura

Andiamo adesso anzitutto a dire due parole su come si può, dal nome della vite, capire alcune informazioni molto importanti su di essa.

- Per quanto riguarda anzitutto la *filettatura* abbiamo che la sigla è tipicamente qualcosa del tipo

"M xx "

Dove la lettera, in questo caso "M", indica la *tipologia* di filettatura. "M" sta ad esempio per filettatura metrica, quindi con delle precise caratteristiche, che presenteremo poco più avanti. Il numero " xx " indica invece il *diametro esterno* della vite, che definiremo anche lui poco sotto.

- C'è poi invece da indagare anche sulla *sigla* della vite, la quale ci può dare altre informazioni molto utili riguardo sostanzialmente la sua composizione e la sua resistenza.

- Quando leggiamo qualcosa del tipo

Ax-xx

dobbiamo considerare che la lettera, in questo caso la "A" sta a indicare il tipo di *acciaio* che è stato usato, in questo caso austenitico; il numero x dopo la lettera indica invece la composizione chimica di tale acciaio, mentre infine il numero dopo il trattino xx indica il valore di R_m diviso per 10, quindi $xx = \frac{R_m}{10}$. Se leggeremo quindi 80 vorrà dire che R_m sarà pari a $800 MPa$.

- Quando leggiamo poi qualcos'altro del tipo

x.y

dobbiamo considerare che x indica la resistenza (*classe*) della vite, ossia $\frac{R_m}{100}$ (nell'esempio di prima ci sarebbe dovuto essere quindi 8), mentre y è il valore di $\frac{R_e}{R_m}$, ossia del carico di snervamento R_e rispetto a quello di rottura R_m . Se leggiamo ad esempio 8.8 vorrà dire che il carico di rottura sarà $800 MPa$, mentre il carico di snervamento sarà l'80% del carico di rottura, ossia $640 MPa$.

Tutto questo ci è quindi molto utile per comprendere delle informazioni molto utili riguardo la resistenza e la tipologia di materiale della vite che stiamo analizzando.

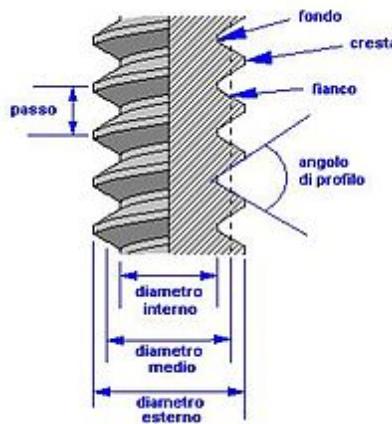


Figura 3.2

Andiamo adesso a vedere nel dettaglio come si definiscono le principali *grandezze* di un collegamento filettato, prendendo l'esempio di uno schema vite-madrevite come in figura.

- Definiamo *passo* la distanza assiale tra due teste dello stesso filetto.
- Definiamo *diametro minimo* d_3 la distanza radiale tra due gole del filetto. È chiamato così perché è il minimo diametro che ha la parte filettata.
- Definiamo *diametro massimo* d invece la distanza radiale tra due teste del filetto. È chiamato così perché è il massimo diametro che ha la parte filettata.
- Definiamo *diametro medio* d_2 invece il diametro intermedio tra d_3 e d (distanza radiale tra i fianchi).
- Definiamo l'*apertura* del filetto 2β come l'angolo di apertura che c'è nel filetto.

Nella filettatura *metrica* si osserva che il pane della vite è di forma *triangolare* e l'angolo 2β vale 60° .

3.2 Relazione forza - coppia di serraggio

Come abbiamo detto nell'introduzione, affinché i due pezzi non si muovano in direzione tangenziale, è necessario che si sviluppi un certo attrito, per cui dobbiamo dare un certo *precarico* alla vite in fase di serraggio, così che si sviluppi l'attrito necessario a impedire il moto tangenziale dei pezzi.

Supponiamo quindi di aver fatto i nostri calcoli e trovato un valore di precarico da dare alla vite in serraggio: il passo successivo è trasformare tale valore in qualcosa di *operativamente* misurabile, come è per l'appunto la coppia di serraggio, che è misurata con la chiave dinamometrica. Dobbiamo pertanto andare a sviluppare una relazione che, data in input la forza assiale di precarico, ci dia in output la coppia di serraggio da dare con la chiave.

3.2.1 Scrrittura delle forze elementari sul filetto

Consideriamo una generica vite con filettatura metrica, per cui $\beta = 30^\circ$; il piano perpendicolare al filetto è chiamato $n - n$, mentre il piano verticale è chiamato $a - a$. Tra i due piani vi è un angolo che chiamiamo α .

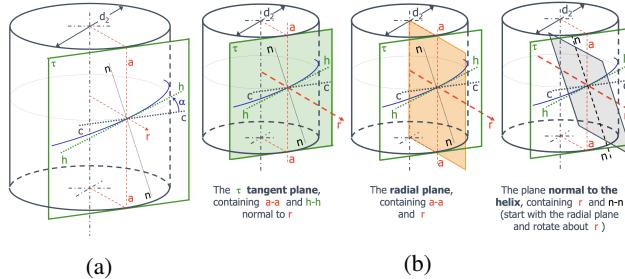


Figura 3.3

Quando il collegamento filettato è operativo, avremo che vite e madrevite si scambiano una forza di *contatto* dF_m se vista sul piano $a - a$, che possiamo ragionevolmente immaginare concentrata al diametro medio (sarebbe distribuita su tutto il filetto, ma possiamo concentrarla al diametro medio) e che è per definizione agente in direzione normale al contatto, quindi è normale al filetto.

Possiamo proiettare questa forza sul piano $n - n$, considerando che a rigore l'angolo di apertura del filetto non è più 2β e $2\beta'$; vedremo comunque che potremo confondere i due angoli, non essendo così diversi.³

$$dF_n = dF_m \cos(\beta')$$

Essendoci questa forza di contatto scambiata in direzione normale al filetto, avremo che in tale punto vi sarà anche una forza di *attrito*, pari alla massima forza di attrito possibile.

$$dF_h = \mu_g dF_m$$

È possibile scrivere il coefficiente di attrito come la tangente di un certo angolo ϕ , angolo tra la forza normale e la forza tangenziale. Scrivendo ciò, e ricordando come sono legate dF_m e dF_n , possiamo dire che

$$dF_h = \frac{dF_n}{\cos(\beta')} \tan(\phi)$$

Possiamo allora vedere questa espressione da un punto di vista diverso, ossia dicendo che la forza di attrito è pari ad un coefficiente di attrito "apparente" μ'_g per il precarico normale dF_n stavolta

$$dF_h = \mu'_g dF_n = \tan(\phi') dF_n$$

In tal modo avremo che, dovendo essere sempre uguale il valore di dF_h , sarà

$$\tan(\phi') = \frac{\tan(\phi)}{\cos(\beta')}$$

È bene precisare comunque che la forza dF_m viene scambiata fisicamente da vite e madrevite, mentre dF_n è una proiezione di dF_m su un altro piano. In ogni caso, dF_m ha due componenti nel piano dell'*elica* $n - n$: una è dF_n e l'altra è una componente tangenziale. Fuori dal piano dell'*elica* infine vi è una forza *radiale*, ma essa non presenta particolare dignità di attenzione, se non per le filettature Gas nei tubi, dove la vite non è piena; per tutti i casi di vite piena invece non è un problema e non la considereremo pertanto, rimanendo sempre nel piano dell'*elica* o in quello assiale.

³Ciò è dovuto al fatto che stiamo vedendo le cose su due piani diversi. I due angoli comunque sono legati tra loro.

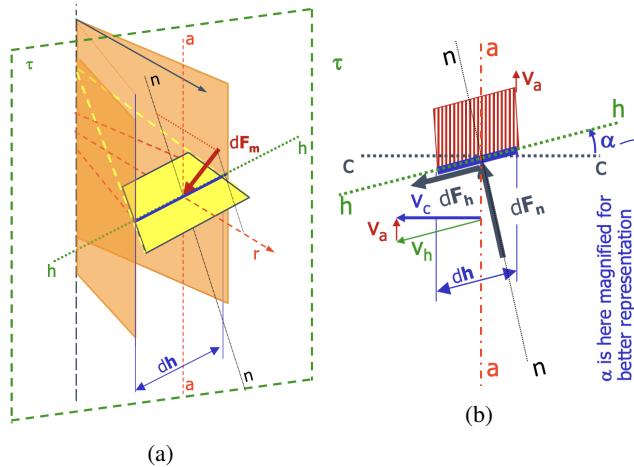


Figura 3.4

A questo punto mettiamoci sempre nel piano $n - n$ e diciamo che la forza totale dF nel punto di contatto ha componenti dF_h e dF_n , le quali formano un triangolo rettangolo di angolo ϕ' compreso tra dF_n e dF . Nel piano $a - a$ invece, inclinato di α rispetto a $n - n$, abbiamo che la forza dF ha componenti **assiale** e **circonferenziale**, che possiamo calcolare come

$$\begin{cases} dF_a = dF \cos(\phi' + \alpha) \\ dF_c = dF \sin(\phi' + \alpha) \end{cases}$$

Facciamo il rapporto membro a membro e troviamo che

$$dF_c = dF_a \tan(\phi' + \alpha)$$

3.2.2 Calcolo della coppia

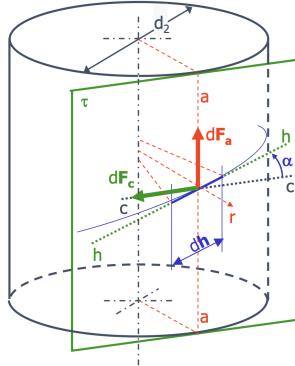


Figura 3.5

La coppia torcente che risulterà conseguentemente all'applicazione di dF al raggio medio sarà data chiaramente dalla forza circonferenziale e sarà pari a

$$dM_g = dF_a \tan(\phi' + \alpha) \frac{d_2}{2}$$

Integrando il tutto e considerando che non cambia né l'attrito, né ovviamente il diametro medio lungo l'asse, possiamo ottenere

$$M_g = F_a \tan(\phi' + \alpha) \frac{d_2}{2}$$

Questa quindi è una relazione tra la coppia torcente e la forza assiale (di precarico) che si sviluppa sul filetto al serraggio. Tecnicamente potremmo essere contenti così, ma dobbiamo considerare in realtà che quando andiamo a serrare la vite c'è la testa di questa che, dovendo stare ferma (immagino di girare il dado con la chiave), deve sviluppare una forza di attrito tra il suo sotto-testa e il pezzo a contatto con essa. Questa forza di attrito è pari al coefficiente di attrito del sotto-testa per la forza assiale di precarico F_a , per cui la coppia che tale forza produrrà sarà pari ad essa moltiplicata per il raggio medio del sotto-testa, che indichiamo con il pedice "k".

$$M_k = \mu_k F_a \frac{D_{k,m}}{2}$$

La coppia totale quindi che dovrà essere applicata per generare il precarico F_a voluto sarà la somma di questi due contributi appena calcolati, ossia

$$M_A = M_g + M_k = F_a \left[\tan(\phi' + \alpha) \frac{d_2}{2} + \mu_k \frac{D_{k,m}}{2} \right]$$

Data quindi in input la F_a e conosciuti i vari parametri presenti nella parentesi quadra, si può calcolare la coppia di serraggio da dare per avere quel precarico F_a desiderato. Possiamo esplicitare ulteriormente ϕ' e α ricordando anzitutto che $\tan(\phi') = \frac{\mu_g}{\cos(\beta')}$; l'angolo α lo possiamo poi calcolare considerando di "srotolare" l'elica della vite e scrivendo pertanto che

$$\tan(\alpha) = \frac{p}{\pi d_2}$$

Se a questo punto facciamo l'approssimazione di confondere la tangente di $\phi' + \alpha$ con la somma delle tangenti di ϕ' e α e confondiamo poi la tangente con l'angolo otteniamo che

$$M_A = F_a \left[\left(\frac{\mu_g}{\cos(\beta')} + \frac{p}{\pi d_2} \right) \frac{d_2}{2} + \mu_k \frac{D_{k,m}}{2} \right] \quad (3.1)$$

Il tutto è quindi funzione, oltre che del precarico assiale naturalmente, della geometria (nota) della vite e dell'attrito che si sviluppa tra vite e madrevite e tra sotto-testa della vite e pezzo.

Considerazioni sul valore di attrito da usare

Immaginiamo di aver calcolato la forza assiale da far sviluppare alla vite per tenere uniti i pezzi e di dover quindi trovare la coppia di serraggio da dare per sviluppare tale forza. La geometria della vite è nota con una più che buona accuratezza (a meno delle tolleranze, ma cambia poco davvero), mentre l'attrito è noto purtroppo con una certa incertezza non trascurabile, essendo molto più difficile da misurare.

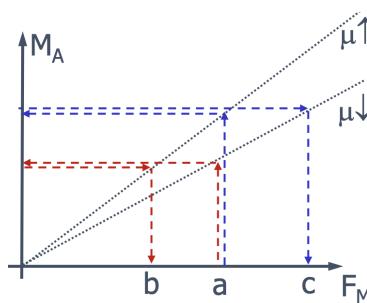


Figura 3.6

Consideriamo quindi di avere un valore massimo e minimo di μ_g e μ_k , in una certa forchetta (che può anche raddoppiare talvolta); avremo di conseguenza anche un valore massimo e minimo di M_A , e ci chiediamo, in questa incertezza, che valore dobbiamo prendere. Andiamo allora a tracciare l'andamento di M_A in funzione di F_a , al variare di μ ; esso è un fascio di rette centrato nell'origine.

- Ipotizziamo di prendere il valore di M_A associato a μ_{min} , per cui entriamo con F_a nel grafico e troviamo M_A di conseguenza. Se per caso μ dovesse essere pari al suo valore massimo però (non possiamo saperlo con precisione), allora noi avremmo dato una coppia pari a M_A con μ_{max} , e dunque con una simile coppia (diversa da quella con μ_{min}) avremmo una certa F_a diversa da quella che vogliamo, ma sicuramente minore di essa (la curva con μ_{max} è più inclinata).

- Se invece prendiamo il valore massimo di μ in partenza e poi si rivela invece che il valore corretto è μ_{min} allora avremmo una corrispondente F_a ben maggiore di quella che volevamo, e questo può causare dei danni perché, come vedremo poco più avanti, le viti si serrano molto vicine allo snervamento in termini di F_a , quindi non c'è molto margine per eccedere e si rischierebbe di snervare (o peggio ancora, rompere) la vite.

È quindi dimostrato che bisogna prendere il valore minimo di μ , ed eventualmente poi serrare ancora, anziché rischiare di snervare tutto con un singolo serraggio.

3.3 Diagramma forzamento vite - pezzo

Consideriamo adesso il collegamento avvenuto, quindi abbiamo la vite che tiene insieme il pezzo, il quale è *compresso* dalla vite, che invece è soggetto a *trazione*, dal momento che il pezzo, accorciandosi, preme contro la vite stessa.

Da un certo punto di vista, è come se noi avessimo prima *tirato* la vite allungandola di u_s e poi l'avessimo fatta comparire nel pezzo, per poi rilasciare la vite e far sì che essa, premendo contro il pezzo, lo accorciasse di u_p .

Diagrammiamo allora l'andamento del modulo della forza che si sviluppa sulla vite e sul pezzo quando questi sono soggetti a uno spostamento u_s e u_p . Essendo sempre in campo elastico, la relazione è lineare. In particolare, la vite parte da 0 e aumenta linearmente, essendo trazionata, mentre il pezzo parte da un certo "offset" e diminuisce linearmente, essendo lui invece compresso⁴.

Quando $u = u_s$ per la vite e $u = u_p$ (in modulo) per il pezzo, avremo che la forza su vite e pezzo è la stessa ed è pari proprio alla forza assiale al montaggio $F_a = F_M$, essendo questa per definizione la forza scambiata tra vite e pezzo (azione - reazione). Un analogo ragionamento l'abbiamo fatto quando si è parlato del calettamento albero-mozzo con interferenza.

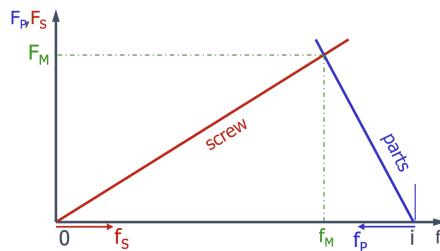


Figura 3.7

Dal punto di vista *modellistico*, possiamo considerare la vite come un'asta, per cui schematizzarla con una molla di rigidezza k_s , mentre il pezzo può essere considerato come una molla di rigidezza k_p anch'esso. Nel collegamento le due molle sono in *serie*, essendo soggette alla stessa forza (F_M) ma a diverso spostamento (u_s e u_p).

Avremo in ogni caso che la forza assiale che agisce sulla vite provoca sullo stelo una tensione *normale* σ , mentre la coppia M_g provoca una tensione *tangenziale* τ (c'è solo lei perché la coppia M_k non agisce sullo stelo). Bisognerà far sì chiaramente che la tensione equivalente sia inferiore allo snervamento.

Ci viene in mente a questo punto che, se potessimo eliminare la coppia di serraggio, avremmo campo libero per la σ , potendo essere maggiore, ossia potremmo caricare di più la vite, avendone di fatto aumentato la resistenza. Una simile cosa si può fare e consiste proprio nell'infilare la vite nel pezzo, allungarla, chiudere il dado finché non è a contatto con il pezzo e rilasciare la vite; in questo modo ci sarà solo forza assiale e non coppia di serraggio.

3.3.1 Ripartizione del carico esterno

Immaginiamo adesso di avere il nostro pezzo in condizioni operative e di applicare alla testa della vite una forza assiale F_A che cerca di separare i due pezzi (analogamente se li preme l'uno contro l'altro). Questo carico esterno ovviamente solleciterà sia pezzo che vite, ma ci chiediamo effettivamente quanto solleciti la vite e quanto il pezzo.

L'effetto che ha questo carico esterno è quello di allungare (o accorciare, se il carico esterno tende a premere i pezzi l'uno contro l'altro) della *stessa* quantità sia la vite che il pezzo, quindi dal punto di vista modellistico le molle k_s e k_p sono in *parallelo* (stesso spostamento, forza diversa ora).

⁴È così perché stiamo diagrammando l'andamento del modulo della forza con lo spostamento, quindi è come se traslassimo la retta del pezzo dal quarto al primo quadrante, e quindi risulta questo offset di spostamento per cui la forza è nulla.

Per capire la ripartizione del carico tra vite e pezzo andiamo a riprendere il diagramma di forzamento (modulo della forza con lo spostamento) e diciamo quindi che inizialmente la forza agente su vite e pezzo è la stessa e pari a F_M ; successivamente all'applicazione del carico, succede che vite e pezzo subiscono uno spostamento u che fa variare conseguentemente la forza agente su di essi di un $\Delta F_s = F_{SA}$ e $\Delta F_p = F_{PA}$ rispettivamente. Per il principio di azione e reazione dovrà naturalmente essere che $F_A = \Delta F_s + \Delta F_p$.

Se consideriamo $u > 0$ (carico esterno di trazione) abbiamo che la vite è caricata ulteriormente, mentre il pezzo è scaricato un po', questo perché la vite era già trazionata di suo senza carico esterno, mentre il pezzo era compresso.

Dal momento che abbiamo modellato vite e pezzo come due molle, andiamo a scrivere il principio di azione e reazione citato poco sopra.

$$k_s u + k_p u = F_A$$

Anziché usare le rigidezze passiamo alle cedevolezze.

$$\left(\frac{1}{\delta_s} + \frac{1}{\delta_p} \right) u = F_A$$

Avremo pertanto che

$$u = \frac{\delta_s \delta_p}{\delta_s + \delta_p} F_A$$

E quindi che

$$\begin{cases} F_{SA} = \frac{\delta_p}{\delta_s + \delta_p} F_A \\ F_{PA} = \frac{\delta_s}{\delta_s + \delta_p} F_A \end{cases}$$

Come possiamo ben notare, la quota parte del carico esterno che agisce sulla vite è proporzionale alla cedevolezza del pezzo, mentre la quota parte del carico esterno che agisce sul pezzo è proporzionale alla cedevolezza della vite.

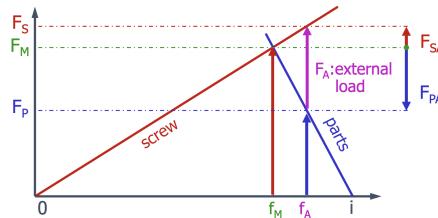


Figura 3.8

Ora dobbiamo capire cosa farcene di questa informazione, perché vogliamo sapere effettivamente come conviene fare la vite per evitare possibilmente che si rompa in fretta, specialmente a fatica.

Infatti, se consideriamo F_A come un carico ciclico, abbiamo che sulla vite si ha un certo carico ciclico che dipende dalla cedevolezza del pezzo e, viceversa, sul pezzo agisce un carico ciclico che dipende dalla cedevolezza della vite. Siccome poi la vite è molto più soggetta a fatica, essendo di fatto coi filetti una vera e propria fiera dell'effetto di intaglio, vogliamo che il carico si ripartisca molto più sul pezzo che sulla vite, essendo poi comunque il pezzo anche di dimensioni maggiori e quindi con una maggior distribuzione della F_{PA} .

Tutto questo quindi si traduce nel fare una vite molto **più cedevole** rispetto al pezzo, così che la cedevolezza del pezzo sia bassa e quindi F_{SA} sia bassa, mentre F_{PA} sarà più alta.

In altre parole, il pezzo è di norma sollecitato con una quota parte del carico esterno maggiore di quella della vite e ciò lo si raggiunge facendo una vite molto più cedevole del pezzo.

$$F_{SA} < F_{PA}$$

3.4 Dimensionamento e verifica della vite

3.4.1 Statica

Dimensionamento statico

Prima della verifica dobbiamo capire lo *stato di tensione* agente sulla vite. Abbiamo detto che su di essa è presente una σ e un τ , date dalla F_M e dalla M_g , per cui

$$\sigma_M = \frac{F_M}{\frac{\pi d_0^2}{4}}, \quad \tau = \frac{M_g}{\frac{\pi d_0^4}{32}} \frac{d_0}{2}$$

Abbiamo tuttavia espresso M_g in funzione di F_M , per cui scriviamo che

$$\tau = \frac{M_g}{\frac{\pi d_0^3}{16}} = \frac{16}{\pi d_0^3} \left[\left(\frac{\mu_g}{\cos(\beta')} + \frac{p}{\pi d_2} \right) \frac{d_2}{2} \right] F_M$$

Ma siccome $\sigma_M = \frac{4F_M}{\pi d_0^2}$, allora possiamo dire che

$$\tau = \frac{\left[\left(\frac{\mu_g}{\cos(\beta')} + \frac{p}{\pi d_2} \right) \frac{d_2}{2} \right]}{\frac{d_0}{4}} \sigma_M$$

Sinteticamente scriviamo che $\tau = k\sigma_M$. Avremo allora che la tensione equivalente di von Mises $\sigma_{eq,VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ sarà

$$\sigma_{eq,VM} = \sigma_M \sqrt{1 + 3k^2}$$

Essa è proporzionale alla tensione al montaggio ed è chiaramente superiore ad essa, essendo $\sqrt{1 + 3k^2} > 1$.

A questo punto noi dobbiamo imporre che questa tensione equivalente sia pari al massimo ad un certo valore di dimensionamento, che viene tipicamente posto pari al 90% dello snervamento, per cui $\sigma_{id,VM} = 0.9R_{p02}$. Tra l'altro questo valore di snervamento lo conosciamo se è nota la classe della vite (es. "8.8"). Nota la tensione equivalente, possiamo calcolare la tensione al montaggio come

$$\sigma_M = \frac{0.9R_{p02}}{\sqrt{1 + 3k^2}}$$

Da questa possiamo ricavare la forza al montaggio e dalla forza al montaggio la relativa coppia

$$M_g = \left[\left(\frac{\mu_g}{\cos(\beta')} + \frac{p}{\pi d_2} \right) \frac{d_2}{2} \right] \frac{\pi d_0^2}{4} \sigma_M$$

Verifica statica

Quanto fatto finora ci è servito per dimensionare la vite, adesso vogliamo verificare (o meglio, imporre un criterio di progetto) che la vite, sotto l'effetto di un *carico esterno*, non arrivi allo snervamento (al limite sono a quel valore). Il workflow da seguire è molto semplice:

1. Calcolo la forza di montaggio F_M e la sua relativa tensione σ_M .
2. Calcolo la quota parte di carico esterno sulla vite F_{SA} e la relativa tensione σ_{SA} .
3. Calcolo la tensione ideale di von Mises considerando la τ sempre pari a $\tau = k\sigma_M$ (il carico esterno è assiale e non produce quindi torsione), mentre la σ è ora pari alla somma di σ_M e σ_{SA} , per cui

$$\sigma_{eq,VM} = \sqrt{(\sigma_M + \sigma_{SA})^2 + 3k^2\sigma_M^2}$$

4. Verifico che questa tensione equivalente sia al limite pari allo snervamento.

$$\sigma_{eq,VM} \leq R_{p02}$$

Verifica "ingegneristica": una strada alternativa e più semplice Anziché fare tutto questo, possiamo imporre come condizione di verifica che sia

$$\sigma_{SA} \leq 0.1R_{p02}$$

In questo modo avremo che la tensione ideale prima dell'applicazione del carico è $\sqrt{\sigma_M^2 + 3k^2\sigma_M^2} = 0.9R_{p02}$, mentre dopo aver applicato il carico essa sarà

$$\sigma_{eq,VM}^{new} = \sqrt{(\sigma_M + 0.1R_{p02})^2 + 3k^2\sigma_M^2}$$

e sarà sicuramente minore di R_{p02} , per cui questa verifica più "ingegneristica" risulta essere maggiormente *conservativa*.

3.4.2 Fatica

Avendo ben capito come funziona il tutto dal punto di vista statico, e avendo capito in precedenza il discorso sulla fatica, è quasi banale delineare il da farsi.

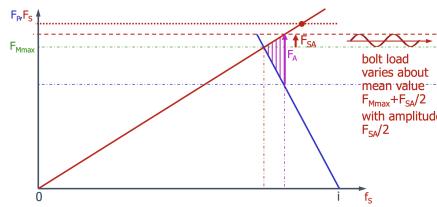


Figura 3.9

Assumiamo che sulla vite agisca un carico esterno all'origine ($R = 0$), per cui avremo che $F_A(t)$ varierà armonicamente tra 0 e F_A . Sulla vite avremo che la tensione media sarà data dalla somma della tensione σ_M al montaggio⁵ e della metà della tensione σ_{SA} che si genera per via di F_A (perché abbiamo $R = 0$), mentre la tensione alternata sarà pari solo a $\frac{\sigma_{SA}}{2}$, essendo che la σ_M è costante nel tempo.

$$\sigma_m = \sigma_M + \frac{\sigma_{SA}}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{SA}}{2}$$

A questo punto, avendo questi due valori possiamo entrare nel diagramma di *Haigh* (che sarà parametrizzato col diametro della vite, essendo che la fatica dipende dalle dimensioni per l'effetto scala) e vedere se, per quella vite di quel diametro, si è sotto o sopra la retta di *Goodman* e con quale margine. Tra l'altro, la fascia di σ_m in cui ci aspettiamo di stare è tra il 70% e il 90% di R_{p02} , questo perché noi serriamo a $\sigma_{eq} = 0.9R_{p02}$, e quindi $\sigma_m = \sigma_M + \frac{\sigma_{SA}}{2}$ sarà pari circa al 60-70% dello snervamento senza carico esterno, mentre quando poi carichiamo la vite allora si arriva al 70-90% dello snervamento; se otterremo valori inferiori avremo sbagliato i conti.

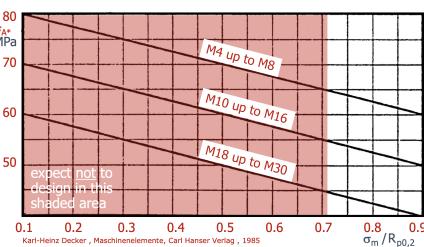


Figura 3.10

Notare che la tensione tangenziale τ non entra minimamente in gioco perché abbiamo già visto che la tensione tangenziale media (quale è la $\tau = k\sigma_M$, essendo costante nel tempo) non ha effetto sulla fatica (Sines).

⁵È l'offset da cui si parte, essendo che senza carico esterno nella vite c'è comunque la tensione dovuta al montaggio.

3.4.3 Verifica a carico minimo

Occupiamoci adesso di un possibile problema che abbiamo iniziato a trattare quando abbiamo parlato dell'incertezza dell'attrito. Abbiamo detto che serriamo con la coppia di attrito minimo, così che nel caso peggiore abbiamo una forza al montaggio minore di quella che ci serve.

Abbiamo ignorato questo problema perché poi quello che abbiamo fatto è stato discutere di verifica e dimensionamento, per cui abbiamo giustamente assunto che la forza al montaggio fosse quella massima (attrito massimo), dato che bisogna sempre ragionare nelle condizioni più gravose, e per la verifica e il dimensionamento queste sono le condizioni di forza al montaggio massima.

Ora però facciamo l'ipotesi che in realtà non abbiamo la forza al montaggio massima, bensì quella minima, perché il coefficiente di attrito non è minimo ma è massimo e noi abbiamo comunque serrato con la coppia per l'attrito minimo. Esprimiamo la forza minima come una frazione di quella massima, mediante un coefficiente che chiamiamo *incertezza di serraggio* α_A .

$$F_{M_{min}} = \frac{F_{M_{max}}}{\alpha_A}$$

Questa incertezza è dovuta sia al fatto che l'attrito varia in un certo range di incertezza, ma può essere ulteriormente aumentata se serriamo con degli strumenti più grossolani della chiave dinamometrica, o può essere diminuita se usiamo strumenti più precisi, come ad esempio un controllo sugli allungamenti, che misura direttamente la F_M e quindi bypassa l'attrito. I valori sono comunque tabulati in funzione di quanto appena descritto.

Abbiamo poi un'*ulteriore perdita di carico* dovuta al fatto che la *rugosità* viene abbattuta in esercizio, sia perché il serraggio schiaccia le creste, sia perché le possibili vibrazioni in opera tendono a "tagliarle" via. Tutto questo si traduce in una diminuzione dell'*interferenza* tra vite e pezzo.

Vediamo meglio a livello matematico questo cosa comporta: consideriamo il diagramma di forzamento e assumiamo che la forza al montaggio sia la minima; per via di quanto appena esposto succede che l'interferenza diminuisce di Δi , valore che assumiamo di conoscere⁶, e questo causerà quindi uno spostamento di vite e pezzo u_s e u_p rispetto alle condizioni di interferenza nominale. Una simile cosa allora causerà una variazione di forza al montaggio ΔF_s rispetto alla forza al montaggio minima calcolata prima.

Per calcolare questa variazione di forza possiamo sfruttare le equazioni scritte in precedenza, in quanto sappiamo che ogni forza che si scarica al contatto tra vite e pezzo è esprimibile con la legge di Hooke, per cui diciamo che

$$\Delta F_s = \frac{1}{\delta_s} u_s = \frac{1}{\delta_p} u_p$$

Ricaviamo da questa che

$$u_s = \delta_s \Delta F_s, \quad u_p = \delta_p \Delta F_s$$

Siccome l'interferenza è la somma degli spostamenti di vite e pezzo avremo che

$$\Delta i = u_s + u_p = (\delta_s + \delta_p) \Delta F_s$$

E pertanto

$$\Delta F_s = \frac{\Delta i}{\delta_s + \delta_p} \tag{3.2}$$

Le cedevolezze assumiamo per ora di conoscerle, ma vedremo nella sezione successiva come calcolarle esplicitamente.

Quanto abbiamo ora dunque è che il nostro precarico, nelle condizioni peggiori (attrito massimo con coppia di serraggio per attrito minimo e perdita di interferenza), è pari a

$$F_M^{new} = \frac{F_{M_{max}}}{\alpha_A} - \frac{\Delta i}{\delta_s + \delta_p}$$

Adesso immaginiamo che il componente sia soggetto ad un carico esterno F_A ; vogliamo sapere cosa succede alla ripartizione del carico tra vite e pezzo in questo caso. Se andiamo a prendere il diagramma di forzamento e ci mettiamo nelle condizioni di precarico più basso possibile vediamo che la quota parte di F_A che si scarica sul pezzo è sempre più vicina allo zero; se da un lato non abbiamo problemi di rottura statica (F_{SA} è sicuramente inferiore rispetto al valore limite per la rottura statica), succede che se F_{PA} si annulla allora tutto il carico si ripartisce sulla vite, e questo, pur non rompendola staticamente, causa una rottura *a fatica*, in particolare con LCF. Diciamo quindi che la diminuzione

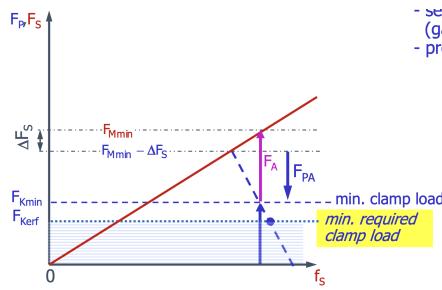


Figura 3.11

della forza al montaggio provoca un aumento della quota parte di F_A che prende la vite, che rimane sempre sotto il valore massimo ammissibile, ma peggiora drasticamente la vita a fatica, essendo $\sigma_a = \frac{\sigma_{SA}}{2}$.

Per progettare dunque a carico minimo capiamo bene che dovremo impostare una condizione tale per cui la forza che si scarica sul pezzo

$$F_k = \frac{F_{M_{max}}}{\alpha_A} - \frac{\Delta i}{\delta_s + \delta_p} - F_{PA}$$

sia maggiore o uguale allo zero; in realtà quello che si fa è impostare maggiore o uguale ad un valore minimo ("erf") tale per cui non si ha trafiletto di fluido.

$$F_{k_{min}} = \frac{F_{M_{max}}}{\alpha_A} - \frac{\Delta i}{\delta_s + \delta_p} - F_{PA} \geq F_{k,erf}$$

3.5 Cedevolezza vite e pezzo

Abbiamo imparato negli ultimi paragrafi come effettuare il dimensionamento e la verifica (statica, a fatica e a carico minimo) di una vite, ma abbiamo visto che in molte formule compaiono le cedevolezze di vite e pezzo, per cui è arrivato il momento di vedere come calcolarle.

3.5.1 Vite

Abbiamo già detto che la vite la possiamo assimilare ad un'asta, essendo soggetta solo a carico normale di fatto, con l'accortezza di considerare come "asta equivalente" un'asta di lunghezza pari non per forza a quella dello stelo della vite, bensì pari alla lunghezza dello stelo della vite che si trova *dentro* il pezzo. Se quindi c'è una zona che esce oltre il dado escludiamo questa, più ovviamente la lunghezza di testa e di quanto entra nel dado.

Preso quest'asta di sezione A (calcolata al diametro *nominale*) e lunghezza L , sappiamo che la rigidezza di quest'asta è data da

$$k_s = \frac{EA}{L}$$

Pertanto la cedevolezza sarà pari a

$$\delta_s = \frac{L}{EA}$$

Questo va benissimo se lo stelo della vite è semplice e non presenta variazioni di sezione o altri elementi. Se abbiamo invece, come capita, una bozza centrale (utile per il centraggio dei pezzi), allora possiamo dividere l'asta in tre aste di lunghezza l_1, l_2 e l_3 e, considerando che la forza che si scarica su di esse è sempre la stessa, avremo che le molle saranno in serie e quindi le cedevolezze si sommeranno, quindi

$$\delta_s = \sum_i \delta_{s_i} = \sum_i \frac{l_i}{EA_i}$$

Dobbiamo infine considerare che in realtà sia parte della testa che parte del filetto nella madrevite/dado effettivamente danno un contributo non trascurabile alla cedevolezza della vite (dovendo farla molto cedevole meglio essere accorti qua).

⁶Esso dipende dalla rugosità, dal numero di superfici di separazione e dal tipo di carichi esterni a cui è soggetta la vite.

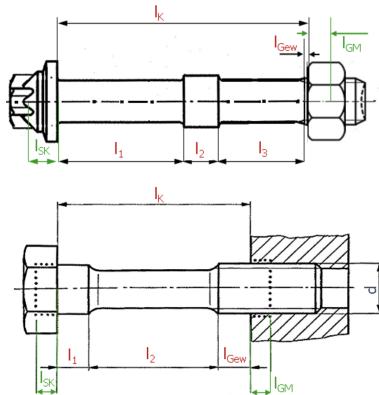


Figura 3.12

Per tenere conto di questi contributi allora possiamo considerare questi elementi come delle ulteriori "aste equivalenti" di lunghezza l_{sk} per la testa e l_{gm} per il filetto e la madrevite, che saranno pari ad una frazione del diametro nominale, e considerare quindi la cedevolezza complessiva della vite come somma di queste cedevolezze "collaboranti" e delle cedevolezze dei singoli elementi.

$$\delta_s = \delta_{sk} + \delta_{gm} + \sum_i \delta_{si} \quad (3.3)$$

Considerando ovviamente per semplicità stesso materiale ovunque avremo che

$$\delta_{sk} = \frac{l_{sk}}{EA}, \quad \delta_{gm} = \delta_g + \delta_m$$

Dove A è l'area al diametro nominale e

$$\delta_g = \frac{l_g}{E_m A_{d_3}}, \quad \delta_m = \frac{l_m}{E_m A}$$

Dove A_{d_3} è l'area al diametro di nocciolo (minimo). La δ_g è il contributo del filetto, mentre la δ_m è il contributo della madrevite, di materiale E_m .

3.5.2 Pezzo

Consideriamo un collegamento filettato del tipo bullone (vite+dado), per cui vogliamo stimare la rigidezza del pezzo, da cui calcolare la cedevolezza come $\delta = k^{-1}$.

Facciamo l'ipotesi che il pezzo sia assimilabile ad un *tubo* lungo e snello, per cui possa essere effettivamente trattato come una *trave*. Tale tubo ha il diametro esterno pari a D_A ed il diametro interno pari al diametro esterno della vite, che qua chiamiamo d_h .

Un'altra ipotesi che facciamo in questa trattazione è quella di non considerare la rigidezza del contatto tra le due piastre che compongono il pezzo, modellando quest'ultimo di fatto come una rigidezza infinita (i.e una cedevolezza nulla, che non rientra nel calcolo di questa).

Diametro del pezzo inferiore al diametro di testa della vite

Mettiamoci ora in un caso molto particolare, ossia quello in cui $D_A \leq d_h$; quello che si osserva dunque è che il pezzo è sollecitato uniformemente agli estremi, in virtù del carico assiale che il sottotesta scambia con il pezzo.

Se andiamo a calcolare lo stato di tensione nel tubo assimilato ad una trave, abbiamo che esso è soggetto ad uno sforzo normale costante e quindi fondamentalmente abbiamo un'asta, dato che una trave soggetta a solo sforzo assiale è equivalente ad un'asta; in questo caso abbiamo allora che la rigidezza si calcola come per la vite, per cui la cedevolezza del pezzo sarà

$$\delta_p = \frac{l_k}{E_p A_p}, \quad \text{se } D_A \leq d_h \quad (3.4)$$

Dove $A_p = \frac{\pi}{4}(d_k^2 - D_A^2)$, area della corona circolare.

Questo è possibile scriverlo solo se il tubo è più piccolo della testa della vite, in quanto altrimenti non sarebbe uniformemente sollecitato normalmente e non potremmo scrivere che $\sigma = \frac{N}{A}$.

Diametro del pezzo maggiore al diametro di testa della vite

Usciamo adesso da questo caso particolare e consideriamo che invece, come è più tipico, il diametro del pezzo sia maggiore del diametro di testa della vite.

Quello che possiamo ragionevolmente supporre che succeda è che ora l'area del pezzo che è soggetta alla forza assiale agente al sottotesta non sia più tutta l'area della corona circolare, bensì solo quella che va dal diametro interno del tubo al diametro della testa (opportuno considerare un diametro medio), almeno per quanto riguarda la superficie a contatto con il sottotesta della vite.

In altre parole, stiamo dicendo che c'è una porzione *collaborante* del pezzo che è soggetta a una tensione non nulla e quindi presenta un contributo alla rigidità del pezzo stesso; tutto ciò che non è nell'area sopra citata non è sollecitato e quindi non contribuisce alla rigidità.

Noi però questo lo stiamo dicendo immaginando di stare al contatto tra pezzo e sottotesta, e non possiamo in generale dire che la porzione collaborante di area sia sempre quella se aumentiamo la coordinata z (che va dal sottotesta della vite al dado).

Ciò che succede e che si dimostra essere tale è infatti che, lungo la z , l'area collaborante aumenta *linearmente*, per cui in 3D diciamo che ha un andamento *conico*⁷. Ad ogni stazione z quindi avremo che l'area collaborante sarà diversa, in quanto è aumentato il diametro rispetto cui si calcola $A_p = \frac{\pi}{4}(D(z)^2 - d_h^2)$; al di fuori di questa area non si ha tensione, quindi nemmeno contributo alla rigidità⁸.

Consideriamo quindi che l'area collaborante sia proprio

$$A_p(z) = \frac{\pi}{4}(D(z)^2 - d_h^2)$$

Per calcolare questo valore dovremo esprimere il diametro $D(z)$ in qualche modo; per farlo consideriamo che a $z = 0$ sappiamo che valore assume, ossia quello del diametro medio della testa, che chiamiamo d_w , e consideriamo poi che sappiamo che il suo è un andamento lineare in z .

Se quindi chiamiamo ϕ l'angolo che c'è tra l'asse z e la retta che descrive il cono (e supponiamo di poterlo calcolare o di conoscerlo, vedremo dopo come fare) possiamo scrivere che

$$D(z) = d_w + 2z \tan(\phi)$$

È stato messo il 2 perché la retta è sul raggio e noi stiamo esprimendo un diametro.

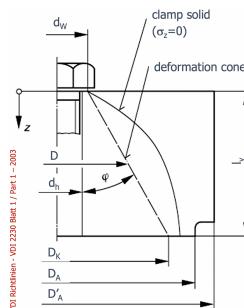


Figura 3.13

Prima di procedere con il calcolo della cedevolezza è bene fare due considerazioni:

- Il cono (paraboloide) di cui abbiamo parlato è riferito ad una piastra del pezzo; sull'altra piastra avverrà una cosa analoga, per cui sul pezzo intero ci sarà una sorta di "bi-cono" fatto dai due coni speculari.

⁷In realtà l'andamento sarebbe a paraboloide.

⁸No tensione = no deformazione, no deformazione = no rigidità.

- Abbiamo sì imposto un diametro minimo del pezzo D_A , ma abbiamo soltanto detto che è maggiore di quello della testa della vite; può succedere che il diametro del pezzo sia maggiore di quello della testa, ma minore del diametro del cono a $z = \frac{l_k}{2}$, ossia $D_{lim} = d_w + l_k \tan(\phi)$ (non c'è il 2 perché ragioniamo su una metà del "bi-cono", quindi sarebbe $2\frac{l_k}{2}$).

Se fosse $D_A < D_{lim}$ si avrebbe che il cono non riesce interamente a svilupparsi nel pezzo, per cui succede che la distribuzione di tensione (i.e area collaborante) è formata da un cono, una parte cilindrica e poi un altro cono, anziché il "bi-cono".

In tal caso allora il cilindro si comporta esattamente come quello analizzato prima ($D_A \leq d_k$), mentre i due coni come tali.

Capiamo quindi che per calcolare la cedevolezza del pezzo dovremo distinguere questi due casi, essendo che nel primo il diametro varia linearmente con z , mentre nel secondo dovremo dividere in tre parti il calcolo: due (simmetriche) riguardo le parti coniche e la terza riguardo la parte cilindrica centrale, che in realtà già sappiamo fare.

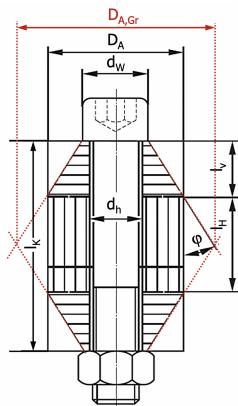


Figura 3.14

A questo scopo presentiamo di seguito il calcolo della rigidezza del pezzo nel caso in cui il cono si sviluppi tutto; per calcolare la rigidezza della parte di cono che rientra nel pezzo, nel caso in cui esso sia più piccolo del diametro limite D_{lim} basterà usare le stesse formule, considerando come lunghezza del pezzo non la l_k totale ma solo la parte in cui c'è il cono.

Per calcolare la cedevolezza del pezzo, in ogni caso, procediamo scrivendo la cedevolezza di un tratto infinitesimo di pezzo lungo dz e applicando la formula tipica $\delta = \frac{l}{EA}$.

$$d\delta_p = \frac{dz}{E_p A_p(z)}$$

Dove $A_p(z) = \frac{\pi}{4} [(d_w + 2 \tan(\phi)z)^2 - d_h^2]$. Possiamo calcolare la cedevolezza del pezzo intero andando a sommare le cedevolezze infinitesimali di ogni tratto dz (sono in serie), per cui di fatto andiamo a integrare tra $z = 0$ e $z = l_v = \frac{l_k}{2}$.

$$\delta_p = \frac{2}{\pi E_p d_h \tan(\phi)} \ln \left[\frac{(d_w + d_h)(d_w + l_k \tan(\phi) - d_h)}{(d_w - d_h)(d_w + l_k \tan(\phi) + d_h)} \right], \quad \text{se } D_A \geq D_{lim} \quad (3.5)$$

Applicando quanto detto poco sopra, possiamo calcolare la cedevolezza del pezzo nel caso in cui $D_A < D_{lim}$.

$$\delta_p = \frac{1}{\pi E_p} \left\{ \frac{2}{d_h \tan(\phi)} \ln \left[\frac{(d_w + d_h)(D_A - d_h)}{(d_w - d_h)(D_A + d_h)} \right] + \frac{4}{D_A^2 - d_h^2} \left[l_k - \frac{D_A - d_w}{\tan(\phi)} \right] \right\}, \quad \text{se } D_A < D_{lim} \quad (3.6)$$

L'angolo ϕ si calcola come

$$\tan(\phi) = 0.362 + 0.032 \ln \left(\frac{l_k}{2d_w} \right) + 0.0153 \ln \left(\frac{D'_A}{d_w} \right) \quad (3.7)$$

Caso vite mordente

Se abbiamo una vite mordente cambiano un pochino le formule. Per semplificare il calcolo della cedevolezza, si può sostituire il "bi-cono" con un unico cono di lunghezza l_k e applicare ragionamenti analoghi; in questo modo si vede che in pratica dove facevamo il discorso di togliere il "2" perché sarebbe stato $2\frac{l_k}{2}$, non si fa più ciò ma, considerando un unico cono, il "2" permane sempre e quindi le formule si modificano come.

$$\delta_p = \frac{2}{\pi E_p d_h \tan(\phi)} \ln \left[\frac{(d_w + d_h)(d_w + 2l_k \tan(\phi) - d_h)}{(d_w - d_h)(d_w + 2l_k \tan(\phi) + d_h)} \right], \quad \text{se } D_A \geq D_{lim}$$

$$\delta_p = \frac{1}{\pi E_p} \left\{ \frac{2}{d_h \tan(\phi)} \ln \left[\frac{(d_w + d_h)(D_A - d_h)}{(d_w - d_h)(D_A + d_h)} \right] + \frac{4}{D_A^2 - d_h^2} \left[l_k - \frac{D_A - d_w}{2 \tan(\phi)} \right] \right\}, \quad \text{se } D_A < D_{lim}$$

$$\tan(\phi) = 0.348 + 0.013 \ln \left(\frac{l_k}{2d_w} \right) + 0.0193 \ln \left(\frac{D'_A}{d_W} \right)$$

3.6 Applicazione carico esterno non al sottotesta

Fino ad ora abbiamo sempre immaginato che, nel caso in cui fosse applicato un carico esterno F_A , esso fosse applicato al sottotesta della vite, e da lì abbiamo fatto i conti per calcolare la quota parte di F_A che si scarica sulla vite F_{SA} .

Ora però immaginiamo che il carico sia applicato non più al sottotesta, ma più in basso, e che sia un carico che tenda a separare le due piastre, ad esempio come se ci fossero due appendici sulle piastre, soggette a carico di trazione in direzioni opposte.

Passiamo al modello equivalente di vite e pezzo con le molle e vediamo che in pratica il carico F_A è applicato "in mezzo" alla molla equivalente del pezzo; quello che possiamo fare allora è splittare la rigidezza del pezzo in tre parti: una a valle del carico F_A lungo una direzione, una in mezzo ai due carichi e l'ultima a valle del carico lungo l'altra direzione.

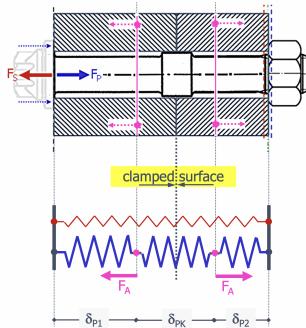


Figura 3.15

In questo modo però possiamo notare come effettivamente le cedevolezze δ_{p1} e δ_{p2} siano in *serie* con quella della vite δ_s , per cui abbiamo che la cedevolezza "nuova" della vite è $\delta_s + \delta_{p1} + \delta_{p2}$, mentre quella del pezzo è solo più δ_{pk} .

In altre parole, abbiamo reso la vite più cedevole ed il pezzo meno cedevole; questo ci fa sicuramente piacere, perché adesso la quota parte di F_A che si scarica sulla vite è diminuita, ossia la vite è *meno sollecitata* del caso con F_A al sottotesta.

$$F_{SA} = \frac{\delta_{pk}}{\delta_s + \delta_p} F_A$$

Se ora definiamo $n = \frac{\delta_{pk}}{\delta_p}$ tale fattore di *ripartizione* del carico, possiamo scrivere che

$$F_{SA} = n \frac{\delta_p}{\delta_s + \delta_p} F_A, \quad 0 < n \leq 1 \quad (3.8)$$

Ovviamente $\delta_{pk} \leq \delta_p$ perché è come se avessimo accorciato il pezzo, e quindi abbiamo aumentato la sua rigidezza (i.e. diminuito la cedevolezza) e, analogamente, avessimo allungato la vite (aumentato cedevolezza/diminuito rigidezza).

Precisiamo che queste variazioni di cedevolezza di vite e pezzo le abbiamo *solo* in presenza di un'applicazione del carico esterno F_A .

Se adesso andiamo a disegnare il diagramma di forzamento vite-pezzo possiamo vedere come le rette di vite e pezzo cambino la loro *pendenza*, a partire dal punto in cui $F = F_M$ (questo perché la cedevolezza cambia solo quando applichiamo il carico esterno F_A), e dunque si vede proprio come la F_{SA} si riduca rispetto al caso di carico al sottotesta.

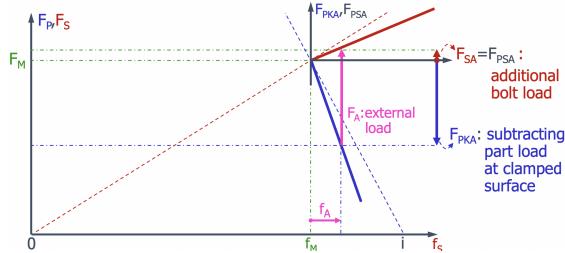
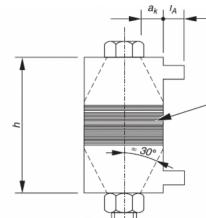


Figura 3.16

Per stimare il valore di n si utilizza quanto prescritto dalla normativa, la quale fornisce dei valori di n a seconda di dove è applicato il carico F_A e delle dimensioni dell'accoppiamento (in particolare la lunghezza del pezzo, il braccio della forza rispetto al pezzo e la distanza tra il pezzo e la testa della vite).

The height h , the distance a_k and the length l_A must be determined from the geometry of the joint as in the Figure. In the case of concentric loading $l_A = 0$

The load introduction factor n can finally be determined either directly or by linear interpolation from the Table



l_A/h	0,00			0,10			0,20			$\geq 0,30$						
a_k/h	0,00	0,10	0,30	$\geq 0,50$	0,00	0,10	0,30	$\geq 0,50$	0,00	0,10	0,30	$\geq 0,50$				
SV 1	0,70	0,55	0,30	0,13	0,52	0,41	0,22	0,10	0,34	0,28	0,16	0,07	0,16	0,14	0,12	0,04
SV 2	0,57	0,46	0,30	0,13	0,44	0,36	0,21	0,10	0,30	0,25	0,16	0,07	0,16	0,14	0,12	0,04
SV 3	0,44	0,37	0,26	0,12	0,35	0,30	0,20	0,09	0,26	0,23	0,15	0,07	0,16	0,14	0,12	0,04
SV 4	0,42	0,34	0,25	0,12	0,33	0,27	0,16	0,08	0,23	0,19	0,12	0,06	0,14	0,13	0,10	0,03
SV 5	0,30	0,25	0,22	0,10	0,24	0,21	0,15	0,07	0,19	0,17	0,12	0,06	0,14	0,13	0,10	0,03
SV 6	0,15	0,14	0,14	0,07	0,13	0,12	0,10	0,06	0,11	0,11	0,09	0,06	0,10	0,10	0,08	0,03

Figura 3.17

L'effetto, purtroppo, negativo di questa cosa è che, aumentando F_{PA} (perché aumenta δ_s), si diminuisce il precarico residuo $F_{p,min}$, dato che nella sua formula si sottrae F_{PA} , con il rischio di scendere sotto il valore di $F_{k,erf}$.

3.7 Ripartizione del carico sul filetto

Immaginiamo di voler indagare come ogni elica del filetto della vite si "sobbarca" parte del carico che si scambiano vite e madrevite; infatti, fino ad ora abbiamo ragionato in termini macroscopici dal punto di vista della vite, invece ora vogliamo andare a vedere come varia la quota parte di forza che ciascun'elica si prende.

È chiaro che ci piacerebbe molto se ogni elica prendesse una quota più o meno uguale a quella delle altre, perché in caso contrario avremmo parti più o meno sollecitate e la cosa non sarebbe troppo carina.

Indagine empirica

Se andiamo a vedere prima i risultati qualitativi di una simile analisi ci accorgiamo purtroppo che, senza ulteriori accorgimenti, il carico è distribuito prevalentemente sui *primi* filetti, lasciando gli ultimi di fatto molto più scarichi. Una simile cosa non è troppo inaspettata, se ci pensiamo bene.

Consideriamo il nostro accoppiamento vite - madrevite e facciamo uno zoom sui vari filetti; partiamo dagli ultimi filetti e vediamo cosa succede. Nei dintorni del punto di contatto, per effetto della forza che si scambiano dado e vite, il dado si schiaccia flettendosi, e così fanno anche i suoi filetti vicini; questo fa sì che un simile schiacciamento consenta al filetto di "sottrarsi" al carico.

Scendiamo più verso sotto e vediamo che si verifica qualcosa di analogo, tuttavia succede che, essendosi già schiacciato il dado, è più *corto* e quindi è vero che cede il filetto, ma lo fa di meno perché risulta più rigido e quindi si sposta di meno, sottraendosi in maniera inferiore al carico.

Se ripetiamo questo ragionamento fino ai primi filetti in profondità, vediamo che sostanzialmente questi diventano sempre più *rígidi* e quindi possono accorciarsi sempre di meno, dovendosi sobbarcare per questo sempre più carico. È come se i filetti più superficiali scappassero via perché hanno la strada libera, inseguiti da qualcuno, che se la prende invece coi filetti più in profondità, penalizzati dagli altri.

Formulazione matematica

Dopo esserci raccontati questa bella storia, cerchiamo di trovare un riscontro anche a livello quantitativo, cercando di scrivere un'equazione che illustri l'andamento del carico sobbarcato da ogni filetto lungo l'asse x della vite.

Consideriamo allora vite e madrevite al loro contatto e isoliamo una striscia di filetto di vite e madrevite, infinitesima e lunga dx . Ignorando il fatto che siano di forma elicoidale, modelliamole come delle *aste* pure, soggette a solo sforzo normale.

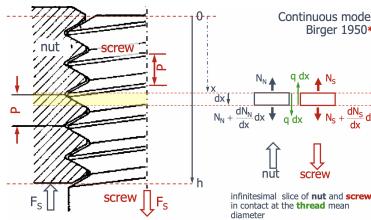


Figura 3.18

Facciamo il diagramma di corpo libero di queste due strisce e andiamo a scriverne l'equilibrio in direzione x . Sappiamo sicuramente che, alle facce, ci sono gli sforzi normali, incrementati di una quantità infinitesima; sappiamo poi che vite e madrevite si scambiano una forza di contatto, che possiamo scrivere come una forza per unità di lunghezza q moltiplicata per la lunghezza del tratto dx .

$$\begin{cases} \frac{dN_N}{dx} = -q \\ \frac{dN_S}{dx} = q \end{cases}$$

Il carico per unità di lunghezza q moltiplicato per la striscia di filetto dx (integrandato tra x e $x + P$, con P il passo) è proprio la parte di carico che si sobbarca il filetto alla stazione $[x, x + P]$.

Consideriamo ora che, per effetto di questa forza che si scarica su vite e madrevite, questi subiscono degli *spostamenti* rispettivamente u_S e u_N . Da questi possiamo passare alle *deformazioni* considerando che

$$\varepsilon = \frac{l + \Delta l}{l}$$

Per cui scriviamo che

$$\begin{cases} \varepsilon_N = \frac{du_N}{dx} \\ \varepsilon_S = \frac{du_S}{dx} \end{cases}$$

A questo punto scriviamo gli spostamenti con la legge del *materiale*, per cui

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Dove in questo caso $\sigma = \frac{N}{A}$, per cui

$$\begin{cases} \frac{N_N}{E_N A_N} = \frac{du_N}{dx} \\ \frac{N_S}{E_S A_S} = \frac{du_S}{dx} \end{cases}$$

Ciò che ci manca per unire il tutto in un'equazione che ci dia come soluzione l'andamento di $q(x)$ lungo x (da integrare poi eventualmente tra x e $x+P$) è scrivere esplicitamente q considerando che tale forza si genera per via della reazione *elastica* al contatto tra vite e madrevite.

Infatti, vite e madrevite si spostano di due quantità in generale diverse, e questo crea una reazione elastica al loro contatto che possiamo scrivere con la solita legge lineare.

$$q = k(u_S - u_N)$$

Deriviamo allora questa espressione lungo x e troviamo che

$$\frac{dq}{dx} = k \left(\frac{du_S}{dx} - \frac{du_N}{dx} \right)$$

Ovvvero

$$\frac{dq}{dx} = k \left(\frac{N_S}{E_S A_S} - \frac{N_N}{E_N A_N} \right)$$

Deriviamo ancora una volta l'espressione per poter fare comparire q anche a secondo membro ed eliminare gli N .

$$\frac{d^2q}{dx^2} = k \left(\frac{1}{E_S A_S} + \frac{1}{E_N A_N} \right) q$$

A parte q , che è la nostra incognita, tutto il resto in questa equazione è noto oppure è calcolabile in maniera sperimentale, per cui poniamo

$$k \left(\frac{1}{E_S A_S} + \frac{1}{E_N A_N} \right) = \lambda^2$$

E scriviamo infine che

$$\frac{d^2q}{dx^2} = \lambda^2 q \quad (3.9)$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che ha soluzione del tipo

$$q(x) = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x}$$

Per trovare le costanti dobbiamo impostare le *condizioni al contorno*; tuttavia, noi q non la conosciamo da nessuna parte, per cui dobbiamo trovare il modo di ricondurci a qualcosa che conosciamo agli estremi del dominio $x = 0$ e $x = l_N$ (lunghezza della madrevite).

Noi effettivamente sappiamo quali sono gli sforzi normali agli estremi del dado per esempio, in quanto sappiamo che da una parte esso è nullo (c'è aria), mentre dall'altra parte esso è pari alla forza di montaggio che lo comprime. Per la vite invece sarà sempre che da un lato lo sforzo normale è nullo, mentre dall'altro lato lo sforzo normale è la forza di montaggio che traziona la vite (azione e reazione tra vite e dado)

Abbiamo scritto qualche riga sopra un'espressione di $\frac{dq}{dx}$ in cui compaiono effettivamente N_S e N_N , quindi possiamo sfruttare quella e scrivere che

$$\frac{dq}{dx} = \lambda(A_1 e^{\lambda x} - A_2 e^{-\lambda x}) = k \left(\frac{N_S}{E_S A_S} - \frac{N_N}{E_N A_N} \right)$$

In questo modo, imponendo che per il dado

$$\begin{cases} N_N(x=0) = 0 \\ N_N(x=l_N) = -F_M \end{cases}$$

E per la vite

$$\begin{cases} N_S(x=0) = 0 \\ N_S(x=l_N) = F_M \end{cases}$$

Possiamo calcolare A_1 e A_2 e quindi ottenere un'espressione definita di $q(x)$ che, integrata tra x e $x+P$, ci porta a conoscere l'andamento del carico di ogni filetto lungo x .

Se plottiamo l'andamento di $Q(x) = \int_x^{x+P} q(x)dx$ vediamo che tale funzione, essendo (provare per credere) qualcosa che va come il *seno iperbolico* di λx , ha un andamento esponenziale per x crescente. Questo vuol dire che man mano che andiamo in profondità effettivamente i filetti si sovrappongono più carico.

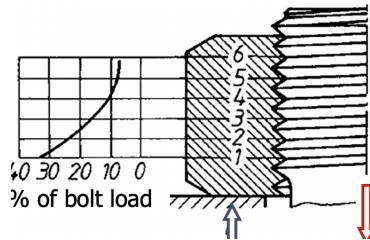


Figura 3.19

Possibili miglioramenti

A questo punto, convinti anche matematicamente del fatto che i filetti più in profondità si prendono più carico, ci chiediamo come si possa migliorare la situazione e ottenere un andamento di $Q(x)$ più costante.

Ragionando su quanto fatto fino ad ora, possiamo sicuramente dire che la trattazione matematica usata per avere un'espressione di $q(x)$, finché non abbiamo introdotto le condizioni al contorno, non ci permette di modificare l'andamento della funzione.

Allora quello che possiamo fare è proprio *cambiare le condizioni al contorno*, così che si ottenga un diverso andamento di $Q(x)$.

- Se, per esempio, andiamo a *trazionare* il dado a $x = 0$, otteniamo un andamento molto più costante (figura 3.20a), avendo stravolto le BC e quindi l'andamento di $Q(x)$ (le soluzioni di ODE sono molto sensibili alle BC).
- Una soluzione di compromesso, con risultati intermedi, è quella di trazionare il dado a $x = l_N$ e non a $x = 0$ come prima. L'andamento è peggiore del primo caso ma sicuramente migliore del caso generico (figura 3.20b).
- Un'ultima possibilità può essere quella di agire non sulle BC ma sulla *lunghezza dei filetti*, facendo dei filetti sempre più lunghi all'aumentare di x ; questo ne varia la rigidezza e permette ai filetti che sarebbero più rigidi per colpa di quelli superficiali di deformarsi di più, così come non permette a quelli superficiali di deformarsi troppo e gli fa prendere parte del carico.

Si può anche, al posto di fare filetti di diversa lunghezza, invece decidere di *caricare più o meno in punta* i filetti al variare di x . Questo fa sì che i filetti caricati più in punta siano meno rigidi (in profondità), mentre quelli caricati più verso l'"incastro" sono più rigidi (in superficie).

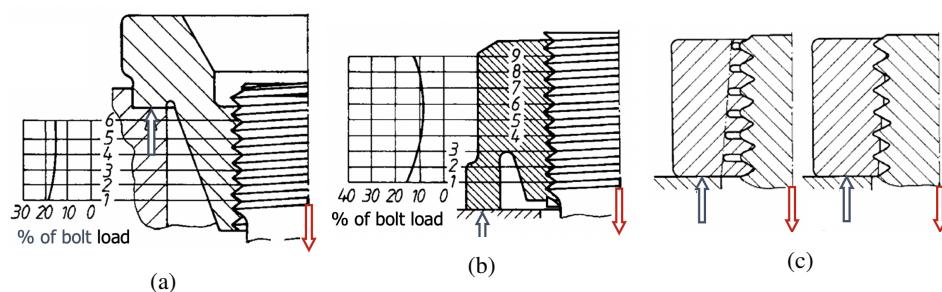


Figura 3.20

Capitolo 4

Contatti Hertziani

Nelle applicazioni ingegneristiche non è raro dover risolvere un *problema di contatto*, a partire dalle geometrie e dall'applicazione del carico su due corpi a contatto, ossia calcolare come sono *distribuite* le forze che si scambiano i due corpi al contatto.

Esiste una categoria di contatti, denominata contatti Hertziani, che rispetta un certo set di ipotesi, studiata da Hertz e risolvibile in una certa maniera a noi congeniale.

Quello che faremo nel corso di questo capitolo sarà proprio cercare di formulare, e successivamente risolvere, un problema di contatto nell'ipotesi di contatto Hertziano. Per farlo, sarà necessario in qualche modo conoscere o calcolare:

- La geometria dei corpi (nota).
- Il carico applicato per schiacciare tra loro i corpi (noto).
- L'area (impronta) di contatto A_c .
- La pressione al contatto p .
- L'accostamento dei corpi a contatto δ .¹

4.1 Definizioni ed ipotesi

La prima cosa che dobbiamo fare è andare effettivamente a definire quali sono le *ipotesi* primordiali che facciamo nel considerare un contatto Hertziano.

4.1.1 Ipotesi

L'ipotesi fondamentale che si fa è che i due corpi a contatto siano corpi *non conformi*, ossia che siano abbastanza diversi da loro, in modo tale che l'*area* di contatto sia *piccola* rispetto alle dimensioni caratteristiche dei corpi. Un'altra ipotesi è poi che si possa *trascrivere l'attrito* che si scambiano eventualmente i due corpi.

Prendiamo allora due corpi non conformi, come ad esempio due sferoidi, e immaginiamo di metterli a contatto senza esercitare alcuna forza che li prema; se vale l'ipotesi appena fatta, i due corpi saranno a contatto in un unico *punto*, chiamato "punto di contatto".

Definiamo a questo punto un *sistema di riferimento* cartesiano tridimensionale il cui piano xy sia il piano *tangente* ai due corpi, e posizioniamo l'origine del sistema xyz nel punto di contatto, con l'asse z chiaramente perpendicolare al piano xy .

¹I corpi, quando schiacciati tra loro, tendono ad avvicinarsi l'uno all'altro (non potendo compenetrarsi), determinando quindi una *rigidezza* di contatto, molto utile per la dinamica.

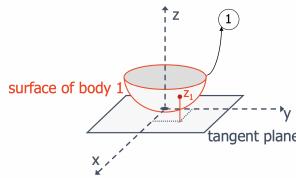


Figura 4.1

4.1.2 Definizione geometria

Assumiamo che la geometria dei due corpi sia nota; dobbiamo ora esprimere dal punto di vista matematico come una funzione $z = f(x, y)$ e per farlo ci serviamo degli *sviluppi di Taylor* arrestati al secondo ordine e centrati nell'origine.²

$$z_1(x, y) \simeq \frac{\partial z_1}{\partial x} \Big|_0 x + \frac{\partial z_1}{\partial y} \Big|_0 y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \Big|_0 x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} \Big|_0 y^2 + \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} \Big|_0 xy$$

Abbiamo qua ipotizzato che la funzione $z(x, y)$ soddisfi il lemma di Schwartz. A questo punto ricordiamo che il piano xy è tangente ai due corpi nel punto $(0, 0)$ dove abbiamo centrato lo sviluppo, quindi le derivate prime sono entrambe nulle (tangente orizzontale ha derivata prima nulla), per cui

$$z_1(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \Big|_0 x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} \Big|_0 y^2 + \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} \Big|_0 xy$$

Per $z_2(x, y)$ sarà una cosa analoga, solo che in quel caso la funzione è negativa, essendo il corpo 2 caratterizzato da $z \leq 0$ per come è messo il SR.

Poniamo per semplicità di notazione $\alpha_{x_i x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\beta_{x_i x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_i \partial x_j}$. In questo modo possiamo scrivere che

$$z_1(x, y) = \alpha_{xx} x^2 + \alpha_{yy} y^2 + \alpha_{xy} xy$$

$$z_2(x, y) = -(\beta_{xx} x^2 + \beta_{yy} y^2 + \beta_{xy} xy)$$

In forma matricialeabbiamo che

$$z_1(x, y) = \begin{Bmatrix} x & y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{xy} & \alpha_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Essendo valido il lemma di Schwartz,abbiamo che la matrice che moltiplica x e y nei vettori è simmetrica, quindi è anche *diagonalizzabile*.

Se la matrice è diagonalizzabile vuole dire che si può scrivere

$$z_1(x, y) = \begin{Bmatrix} X & Y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_X & 0 \\ 0 & \alpha_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

La z_1 è ovviamente sempre la stessa, mentre sono cambiati sia gli α che soprattutto x e y ; questo perché per diagonalizzare una matrice è necessario un *cambio di sistema di riferimento*, dal generico sistema xy al sistema **principale** XY .

Il sistema principale annulla i termini di accoppiamento α_{xy} (in generale annulla i termini di accoppiamento nelle matrici diagonalizzabili).

Calcolo delle derivate seconde in funzione della curvatura

Per avere una espressione esplicita della geometria non ci resta che calcolare le derivate seconde nel punto di contatto per ciascun corpo (z_1 e z_2); per farlo ci servirebbe la funzione z , ma è proprio ciò che cerchiamo, quindi dobbiamo trovare il modo di calcolarle con qualcosa che conosciamo già, ad esempio la geometria dei corpi.

Consideriamo anzitutto che la derivata prima di z in x è la tangente di un angolo α ; in generale sappiamo che z la stiamo approssimando come una funzione quadratica in x , quindi sicuramente non sarà costante $\tan(\alpha)$. Scriviamo che

$$\tan(\alpha) = \frac{dz}{dx} \rightarrow \alpha = \arctan \left(\frac{dz}{dx} \right)$$

²Se li facessimo al primo vedremmo tutto nullo, perché uno sviluppo all'origine nel piano tangente è solo zero; se li facessimo al terzo ordine o superiori saremmo più precisi, ma ci accontentiamo del minor ordine per avere qualcosa di sensato, ossia il secondo

Derivando in x si ha

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \frac{d^2z}{dx^2}$$

Avendo sfruttato la derivata notevole dell'arcotangente e la regola della catena. In questo modo abbiamo che

$$d\alpha = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

Se a questo punto consideriamo il punto in cui stiamo calcolando la tangente di α , abbiamo che nell'intorno di quel punto la funzione z può essere approssimata con il *cerchio osculatore* di raggio R .

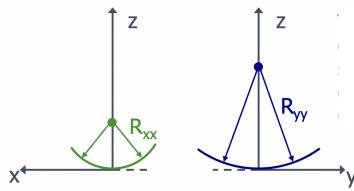


Figura 4.2

Infatti, prendendo un arco di cerchio osculatore di lunghezza infinitesima dl abbiamo che

$$dl = R d\alpha$$

Dove $d\alpha$ è l'angolo infinitesimo di apertura dell'arco. Tuttavia, dl lo possiamo vedere anche come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti dx e dz , per cui

$$dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Sostituendo tutto otteniamo

$$dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = R \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

Ovvero, isolando la derivata seconda di z in x , che è quanto ci interessa, otteniamo

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{R} \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

Specializzando ora questa definizione al punto di contatto, dove la derivata $\frac{dz}{dx}$ è nulla, otteniamo che

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_0 = \frac{1}{R_x} \quad (4.1)$$

Allo stesso identico modo, ragionando nel piano yz , otteniamo

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_0 = \frac{1}{R_y} \quad (4.2)$$

Questo ci dice che la derivata seconda di z in x_j nel punto di contatto è inversamente proporzionale al raggio del cerchio osculatore nel piano $x_j z$ e, essendo l'inverso del raggio osculatore la *curvatura*, diciamo che la derivata seconda di z in x_j è pari alla curvatura del corpo nel piano $x_j z$.

Possiamo scrivere quindi, ricordando le definizioni di α , che

$$\alpha_{xx} = \frac{1}{2R_{xx}}, \quad \alpha_{yy} = \frac{1}{2R_{yy}}, \quad \alpha_{xy} = \frac{1}{2R_{xy}} \quad (4.3)$$

Nel riferimento principale invece

$$\alpha_X = \frac{1}{2R_X}, \quad \alpha_Y = \frac{1}{2R_Y} \quad (4.4)$$

In particolare, si dimostra che, nel sistema *principale* i raggi di curvatura R_X e R_Y sono i due valori *estremi* di raggi di curvatura che si ottengono sezionando il corpo con dei piani passanti per il punto di contatto.

In altre parole, stiamo dicendo che le direzioni di raggio di curvatura massimo e minimo sono direzioni principali.

Inoltre, una proprietà di queste direzioni principali è che sono *ortogonali* tra loro, per cui nota una, l'altra è univocamente determinata.³

Per fare un esempio, se prendiamo una sfera abbiamo che ogni sezione passante per il punto di contatto (ad esempio il suo estremo inferiore) produce un cerchio osculatore uguale, e quindi nella sfera (e in generale in tutti i corpi assalsimmetrici) tutte le direzioni sono principali.

Un cilindro invece avrà una direzione di raggio massimo (infinito) coincidente col suo asse, e l'altra sarà ortogonale (parallela alla sezione frontale).

4.2 Curvature relative principali e variabile ausiliaria

Quanto appena fatto per le curvature vale per il singolo corpo, a contatto con l'altro; ora vogliamo mettere insieme queste informazioni per capire che forma geometrica ha l'*area* di contatto.

Per fare una simile cosa dobbiamo sostanzialmente andare prima di tutto a definire questa area di contatto, e lo possiamo fare dicendo che l'area di contatto è la zona comune ai due corpi in cui la *distanza* lungo z di due punti alla stessa x e y è *nulla*.

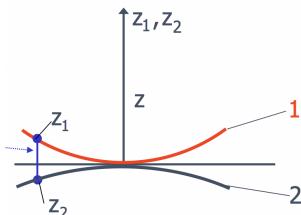


Figura 4.3

4.2.1 Definizione delle curvature relative principali

La prima cosa che dobbiamo fare è calcolare questa *distanza* lungo z tra due punti che si trovano alla medesima x e y . Chiaramente un punto apparterrà al primo corpo e l'altro punto all'altro corpo. Avremo quindi che

$$h(x, y) = z_1(x, y) - z_2(x, y)$$

Sostituendo le espressioni ricavate in precedenza otteniamo, in forma matriciale, che

$$h(x, y) = \begin{Bmatrix} x & y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} + \beta_{xx} & \alpha_{xy} + \beta_{xy} \\ \alpha_{xy} + \beta_{xy} & \alpha_{yy} + \beta_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Riguardo questa espressione dobbiamo dire due cose:

- Abbiamo scritto le $z(x, y)$ nel riferimento xy in quanto i riferimenti principali possono essere in generale diversi per i due corpi. Noi dobbiamo però esprimere tutto in un *riferimento comune*, come è quello usato, essendo il piano xy tangente a entrambi i corpi.
- Il segno "+" c'è fintanto che consideriamo i β positivi, e quindi z_2 negativa. Non è detto che il corpo 2 abbia z negativa, perché può esserci il caso in cui anche la z_2 è positiva, e quindi si avrebbe che gli elementi della matrice sono $\alpha - \beta$. Tuttavia, β in quel caso sarebbe negativo, quindi si avrebbe comunque una somma positiva negli elementi della matrice. La regola aurea per non confondersi è⁴

³Siamo nel piano XY bidimensionale.

⁴Se $z_2 < 0$ allora $\beta > 0$. Se $z_2 > 0$ allora $\beta < 0$, idem con z_1 e α .

"Se il centro del cerchio osculatore è all'interno del corpo, la curvatura è positiva".⁵

In ogni caso, possiamo notare che la matrice contiene la differenza tra α e β , che è sempre una somma di termini positivi perché in un caso il "+" si genera scrivendo $z_2 < 0$ e nell'altro si genera scrivendo $\beta = -|\beta|$. Una tale differenza è comunque fatta tra le curvature dei singoli corpi, ed è chiamata **curvatura relativa**, indicata con γ .

$$h(x, y) = \begin{Bmatrix} x & y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \gamma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Se guardiamo come è fatta la matrice, abbiamo che essa è somma di due matrici simmetriche, quindi è anche lei simmetrica, dunque *diagonalizzabile*.

Ciò vorrà dire che esisterà un sistema di riferimento *principale XY*, in generale diverso dai sistemi di riferimento principali X_1Y_1 e X_2Y_2 dei singoli corpi, che renderà tale matrice diagonale.

$$h(x, y) = \begin{Bmatrix} x & y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_X & 0 \\ 0 & \gamma_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Sviluppando questo prodotto otteniamo quindi che, nel sistema principale comune ai due corpi, la distanza lungo z tra punti con la stessa x e y è

$$h(x, y) = \gamma_X X^2 + \gamma_Y Y^2 \quad (4.5)$$

Poiché questa distanza deve sempre essere positiva (i corpi non possono compenetrarsi), capiamo che deve essere sempre

$$\gamma_X, \gamma_Y \geq 0$$

Siccome $\gamma = \alpha + \beta$, si ha che la somma tra α e β deve essere sempre *positiva*, altrimenti si avrebbe $h < 0$ (compenetrazione dei corpi), cosa impossibile. Se quindi uno tra α e β è negativo, l'altro dovrà per forza essere positivo.

Inoltre, notiamo che questa equazione non è altro che l'equazione di un'*ellisse*, per cui possiamo già immaginare che l'impronta di contatto (punti dove $h = 0$) è di forma *ellittica*.

4.2.2 Definizione della variabile ausiliaria

Ora che abbiamo definito le curvature relative principali, definiamo una variabile ausiliaria che ci servirà nella risoluzione del problema di contatto.

$$\cos(\tau) = \frac{|\gamma_X - \gamma_Y|}{\gamma_X + \gamma_Y} \quad (4.6)$$

Questa variabile è indicata come il coseno di un argomento perché può assumere valori compresi soltanto tra 0 e 1, ricordando che γ è sempre positiva.

Possiamo anticipare che la sua utilità sarà ben chiara quando vedremo che sarà l'input per risolvere un particolare integrale tabulato o diagrammato, al fine di risolvere il problema di contatto.

Come vediamo, comunque, essa è funzione solo delle curvature principali, che vedremo essere funzione a loro volta della geometria dei corpi e del contatto.

4.2.3 Calcolo delle curvature relative principali

Abbiamo definito la distanza h in funzione delle sole curvature principali, ora, per annullare tale distanza e trovare l'area di contatto, è necessario calcolare anzitutto queste curvature principali. Questo ci servirà anche per il calcolo di $\cos(\tau)$.

- Come prima cosa scriviamo le equazioni dei profili dei due corpi nei rispettivi riferimenti principali.

$$z_1 = \frac{1}{2R_{X_1}} X_1^2 + \frac{1}{2R_{Y_1}} Y_1^2, \quad z_2 = \frac{1}{2R_{X_2}} X_2^2 + \frac{1}{2R_{Y_2}} Y_2^2$$

- Possiamo poi *visualizzare* i sistemi principali dei due corpi, immaginando che il sistema X_1Y_1 ed il sistema X_2Y_2 siano ruotati l'uno rispetto all'altro di un angolo *noto*, chiamato θ .

⁵Questo dipende anche da come si seziona il corpo.

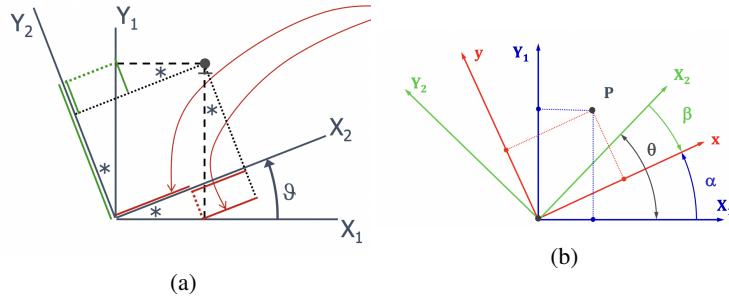


Figura 4.4

- Dovendo calcolare la distanza h tra punti dei due corpi, è necessario che z_1 e z_2 siano scritte in un riferimento comune XY , per cui visualizziamo anche questo riferimento e immaginiamo che sia ruotato di un angolo α rispetto a X_1Y_1 e di un angolo β rispetto a X_2Y_2 . La somma $\alpha + \beta$ sarà ovviamente pari a θ . Gli angoli α e β non li conosciamo.
- Scriviamo a questo punto X_1Y_1 e X_2Y_2 nel riferimento comune, di fatto operando una *rotazione* del sistema di riferimento con la ben nota matrice di rotazione.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

- Sostituiamo X_1Y_1 e X_2Y_2 nelle espressioni di z_1 e z_2 ottenendo che

$$z_1 = \frac{1}{2R_{X_1}}[\cos(\alpha)X - \sin(\alpha)Y]^2 + \frac{1}{2R_{Y_1}}[\sin(\alpha)X + \cos(\alpha)Y]^2$$

$$z_2 = \frac{1}{2R_{X_2}}[\cos(\beta)X + \sin(\beta)Y]^2 + \frac{1}{2R_{Y_2}}[-\sin(\beta)X + \cos(\beta)Y]^2$$

- Raggruppiamo i termini in X^2 , Y^2 e XY nelle due espressioni, ottenendo che

$$z_1 = \left[\frac{\cos^2(\alpha)}{2R_{X_1}} + \frac{\sin^2(\alpha)}{2R_{Y_1}} \right] X^2 + \left[\frac{\sin^2(\alpha)}{2R_{X_1}} + \frac{\cos^2(\alpha)}{2R_{Y_1}} \right] Y^2 + \sin(2\alpha) \left[-\frac{1}{2R_{X_1}} + \frac{1}{2R_{Y_1}} \right] XY$$

$$z_2 = \left[\frac{\cos^2(\beta)}{2R_{X_2}} + \frac{\sin^2(\beta)}{2R_{Y_2}} \right] X^2 + \left[\frac{\sin^2(\beta)}{2R_{X_2}} + \frac{\cos^2(\beta)}{2R_{Y_2}} \right] Y^2 + \sin(2\beta) \left[\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}} \right] XY$$

- Facciamo la differenza $h = z_1 - z_2$, ottenendo che

$$h(X, Y) = \left[\frac{\cos^2(\alpha)}{2R_{X_1}} - \frac{\cos^2(\beta)}{2R_{X_2}} + \frac{\sin^2(\alpha)}{2R_{Y_1}} - \frac{\sin^2(\beta)}{2R_{Y_2}} \right] X^2 +$$

$$+ \left[\frac{\sin^2(\alpha)}{2R_{X_1}} - \frac{\sin^2(\beta)}{2R_{X_2}} + \frac{\cos^2(\alpha)}{2R_{Y_1}} - \frac{\cos^2(\beta)}{2R_{Y_2}} \right] Y^2 +$$

$$+ \left[\sin(2\alpha) \left(-\frac{1}{2R_{X_1}} + \frac{1}{2R_{Y_1}} \right) - \sin(2\beta) \left(\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}} \right) \right] XY$$

Tale differenza la chiamiamo h_0 , per indicare che è fatta quando non è applicata alcuna forza che prema i due corpi.

- Poniamo i termini che moltiplicano X^2 , Y^2 , XY nella precedente espressione pari a γ_X , γ_Y , γ_{XY} ed imponiamo che il riferimento XY comune ai due corpi sia *principale*, quindi che $\gamma_{XY} = 0$.

$$\gamma_{XY} = \left(\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}} \right) \sin(2\beta) - \left(\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}} \right) \sin(2\alpha) = 0$$

Ovvero

$$\frac{\sin(2\alpha)}{\left(\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}}\right)} = \frac{\sin(2\beta)}{\left(\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}}\right)}$$

Se ci pensiamo, questo non è altro che il *teorema dei seni* per un triangolo di angoli 2α e 2β , i cui lati opposti agli angoli sono rispettivamente $\left(\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}}\right)$. Il terzo angolo sarà naturalmente pari a $\pi - 2\alpha - 2\beta = \pi - 2\theta$.

Abbiamo quindi ottenuto γ_X e γ_Y in funzione delle curvature dei singoli corpi nei loro riferimenti principali e degli angoli α e β ; questi angoli sono effettivamente ancora ignoti, ma vedremo nel prossimo paragrafo che γ_X e γ_Y si potranno determinare in qualche modo, bypassando i due angoli e riconducendo tutto a θ .

4.2.4 Calcolo della variabile ausiliaria

Calcolo denominatore

Calcoliamo anzitutto la somma $\gamma_X + \gamma_Y$, scrivendo che

$$\begin{aligned}\gamma_X &= \left[\frac{\cos^2(\alpha)}{2R_{X_1}} - \frac{\cos^2(\beta)}{2R_{X_2}} + \frac{\sin^2(\alpha)}{2R_{Y_1}} - \frac{\sin^2(\beta)}{2R_{Y_2}} \right] \\ \gamma_Y &= \left[\frac{\sin^2(\alpha)}{2R_{X_1}} - \frac{\sin^2(\beta)}{2R_{X_2}} + \frac{\cos^2(\alpha)}{2R_{Y_1}} - \frac{\cos^2(\beta)}{2R_{Y_2}} \right]\end{aligned}$$

Operando la somma si trova che

$$\gamma_X + \gamma_Y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{X_1}} + \frac{1}{R_{X_2}} + \frac{1}{R_{Y_1}} + \frac{1}{R_{Y_2}} \right)$$

Per cui la curvatura relativa principale lungo X è la somma delle curvature principali lungo X_1, Y_1, X_2, Y_2 dei corpi.

Calcolo numeratore

Ora rimane da calcolare il numeratore $|\gamma_X - \gamma_Y|$. Per farlo sfruttiamo il fatto che sia possibile individuare un triangolo di angoli $2\alpha, 2\beta, \pi - 2\theta$ di cui conosciamo due lati e due angoli.

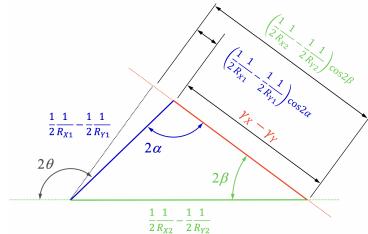


Figura 4.5

Anzitutto vediamo come si possa costruire un triangolo rettangolo di ipotenusa $\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}}$ e angolo compreso con un cateto (ignoto) pari a 2β . In questo modo il cateto ignoto, prolungamento del lato ignoto del triangolo costruito prima, è pari a

$$L_3 = \left(\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}} \right) \cos(2\beta)$$

Analogamente, si può costruire un triangolo rettangolo di ipotenusa $\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}}$ e angolo compreso con un cateto (ignoto), parte del cateto L_3 dell'altro triangolo rettangolo, pari a $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$, per cui tale cateto è pari a

$$L_4 = \left(\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = - \left(\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}} \right) \cos(2\alpha)$$

Infine, si può dire che $L_3 - L_4 = \gamma_X - \gamma_Y$, in quanto il terzo lato del triangolo costruito col teorema dei seni è proprio quello (provare per credere), per cui possiamo calcolare tale lato utilizzando il teorema di Carnot⁶ e scrivendo quindi che

$$|\gamma_X - \gamma_Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}}\right)\left(\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}}\right)\cos(2\theta)}$$

Essendo l'angolo compreso $\pi - 2\theta$ ed essendo $-\cos(\pi - 2\theta) = \cos(2\theta)$. Possiamo allora calcolare

$$\cos(\tau) = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2R_{X_1}} - \frac{1}{2R_{Y_1}}\right)\left(\frac{1}{2R_{X_2}} - \frac{1}{2R_{Y_2}}\right)\cos(2\theta)}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{X_1}} + \frac{1}{R_{X_2}} + \frac{1}{R_{Y_1}} + \frac{1}{R_{Y_2}}\right)} \quad (4.7)$$

Tutto in questa equazione è noto, dipendendo solo dalla geometria e dall'orientamento relativo dei sistemi principali dei corpi.

4.3 Problema di contatto

In questa sezione il nostro scopo è quello di determinare in ultima analisi i parametri p e δ (pressione al contatto e accostamento dei corpi), in modo tale da poter conoscere la distribuzione delle forze (pressioni) al contatto, ossia risolvere il problema di contatto.

4.3.1 Formulazione ed equazioni

Per scrivere le equazioni usiamo le solite 3 cose (congruenza, materiale, equilibrio).

Congruenza

Immaginiamo di prendere il corpo 2 e di applicargli una forza (nota) F verso l'alto, così da premerlo contro il corpo 1; a questa forza è associato uno spostamento δ .

Se il corpo 2 potesse compenetrare il corpo 1 avremmo che non ci sarebbe alcuna deformazione, ma, come ben sappiamo, i due corpi non possono compenetrarsi, quindi succede che la distanza $h(x, y)$ lungo z tra due punti dei due corpi alla stessa x, y è cambiata rispetto a prima. Se indichiamo con $h_0(x, y) = z_1 - z_2$ la distanza *prima* di applicare la forza F , ora possiamo scrivere che

$$h(x, y) = h_0(x, y) - \delta$$

Ossia lo schiacciamento dei due corpi ovviamente *riduce* la distanza tra punti alla stessa x, y . Infatti, il fatto che il corpo 2 venga schiacciato contro il corpo 1 fa sì che il corpo 1 sia spinto verso l'altro e, di contro, il corpo 2 verso il basso, al fine di trovare un equilibrio al contatto.

Tuttavia, nella formula appena scritta non abbiamo ancora considerato il fatto che i corpi si deformino anche *fuori* dal contatto, subendo degli spostamenti *elastici* in ogni punto.⁷ Questo, a differenza di δ , fa sì che i corpi si allontanino tra loro, quindi aumenta h (i corpi reagiscono elasticamente come una molla, volendosi reciprocamente allontanare per tornare alla condizione iniziale con un solo punto di contatto).

$$h = h_0 - \delta + u_1 - u_2$$

Qua c'è $-u_2$ perché dal disegno si vede come $u_2 < 0$.

Ora consideriamo che la zona del contatto è, come anticipato, la zona x, y dove $h = 0$, ossia dove i due corpi hanno distanza nulla tra punti alla stessa x, y , per cui imponiamo $h = 0$ e ricaviamo che

$$u_1 - u_2 = \delta - \gamma_X X^2 - \gamma_Y Y^2 \quad (4.8)$$

Avendo sostituito $h_0 = z_1 - z_2 = \gamma_X X^2 + \gamma_Y Y^2$. Quella appena scritta è un'equazione di congruenza generalizzata.

Tra l'altro, è rilevante notare come nella zona di contatto noi conosciamo h ma non conosciamo la pressione p , mentre fuori dal contatto conosciamo la pressione $p = 0$ (c'è solo aria) ma non conosciamo h .

⁶ $c^2 = a^2 + b^2 - ab \cos(x)$.

⁷Lo spostamento δ del corpo 2 è invece uno spostamento *rigido*.

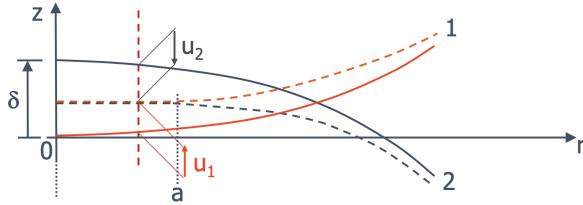


Figura 4.6

Modello materiale

In generale scrivere un modello di materiale significa correlare, mediante il materiale stesso (modulo elastico e Poisson) la forza (o qualcosa di riconducibile ad essa) con lo spostamento (o qualcosa di riconducibile ad esso); ci conviene utilizzare la formulazione proposta da Boussinesque, che immagina di applicare una forza concentrata in un punto e di calcolare lo spostamento prodotto da questa forza in un altro punto, a distanza r_b dall'applicazione della forza.

$$du(r_b) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{1}{r_b} dF$$

Noi però non abbiamo delle forze al contatto, bensì delle pressioni, quindi dovremo un po' rimodulare la cosa e farle comparire. Notiamo inoltre che questa equazione presenta una *singolarità*, in quanto per $r_b \rightarrow 0$ si ha $d_u \rightarrow \infty$. Questa è dovuta al fatto che il modello prescrive l'applicazione di una forza puntuale, che nella realtà non esiste, per cui è più qualcosa di matematico che di fisico, benché sia verissimo il fatto che applicando una forza su un'area piccolissima lo spostamento che si ottiene è enorme (chiodo nel muro).

In ogni caso, quello che facciamo noi è scrivere la forza dF concentrata come la pressione p che si scarica sull'area infinitesima $dxdy$, per cui l'equazione diventa

$$du(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{1}{r_b} p(x, y) dxdy$$

Integriamo a questo punto sull'area di contatto A_c e troviamo che il campo di spostamenti al contatto è pari a

$$u(x, y) = \int_{A_c} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{1}{r_b} p(x, y) dxdy$$

Per rimuovere la singolarità (più matematica che fisica) ci basta fare un passaggio alle coordinate polari, essendo $dxdy = r_b dr d\theta$, per cui

$$u(r, \theta) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} p(r, \theta) dr d\theta$$

Infine, scriviamo l'equazione di $u(x, y)$ per il corpo 1 e per il corpo 2, così da metterle nella 4.8.

$$u_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \int_{A_c} \frac{1}{r_b} p(x, y) dxdy, \quad u_2 = -\frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \int_{A_c} \frac{1}{r_b} p(x, y) dxdy$$

Come notiamo, gli integrali sono gli stessi perché l'area di contatto, la pressione e r_b ⁸ sono comuni per i due corpi. A questo punto possiamo quindi scrivere che

$$\left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \int_{A_c} \frac{1}{r_b} p(x, y) dxdy = \delta - (\gamma_X X^2 + \gamma_Y Y^2) \quad (4.9)$$

Equilibrio

La forza F che spinge il corpo 2 sul corpo 1 deve essere equilibrata, e l'unica altra forza che può farlo è la risultante della pressione sull'area di contatto, per cui

$$F = \int_{A_c} p(x, y) dxdy \quad (4.10)$$

⁸È la distanza dalla forza a cui calcoliamo lo spostamento; siccome h è a pari x, y abbiamo che gli spostamenti u_1, u_2 li calcoliamo alla stessa x, y .

4.3.2 Risoluzione

L'unica incognita che è presente nelle equazioni 4.9 e 4.10 è la distribuzione di pressione sull'area di contatto; Hertz ha ipotizzato una sua forma, e quello che andremo a fare noi ora sarà prendere questa forma da lui ipotizzata e farci i conti, in modo da risolvere il problema di contatto. Per quanto riguarda δ , immaginiamo di conoscerla per adesso, poi successivamente vedremo che in realtà la si può facilmente calcolare.

Analogia con fenomeni elettromagnetici

Ciò che fece Hertz fu, studiando a fondo i fenomeni elettromagnetici, accorgersi che le equazioni 4.9 e 4.10 sono in analogia con quelle del campo elettromagnetico, per cui avranno di conseguenza una soluzione analoga.

In particolare, Hertz sapeva che

"Una carica elettrica in un campo ellittico genera un potenziale parabolico".

Poiché abbiamo osservato che l'area di contatto è ellittica, e dicendo quindi che l'area di contatto è il nostro campo, possiamo conseguentemente affermare che la pressione ha un andamento **parabolico** in x, y .

Se quindi indichiamo con a, b i semiassi dell'ellisse di contatto, definita in un riferimento principale comune, possiamo scrivere che la distribuzione della pressione è

$$p(x, y) = \frac{F}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}} \quad (4.11)$$

Calcolo dei semiassi e dell'accostamento

Ora occupiamoci di calcolare i semiassi dell'ellisse di contatto, nonché l'accostamento δ , che ci eravamo portati dietro immaginandolo noto.

Si tratta di una formulazione matematica alquanto complessa, che noi non trattiamo; quello che è stato fatto comunque è una risoluzione di una particolare famiglia di integrali, nota come integrali ellittici, ed è stato trovato che

$$a = a^* f, \quad b = b^* f$$

$$\delta = \delta^* f^2$$

Dove

$$f = ^3 \sqrt{\frac{3}{2} \frac{F}{2(\alpha_X + \alpha_Y + \beta_X + \beta_Y)} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)} \quad (4.12)$$

I coefficienti con "*" sono invece *tabellati* in funzione di $\cos(\tau)$, definito in precedenza.

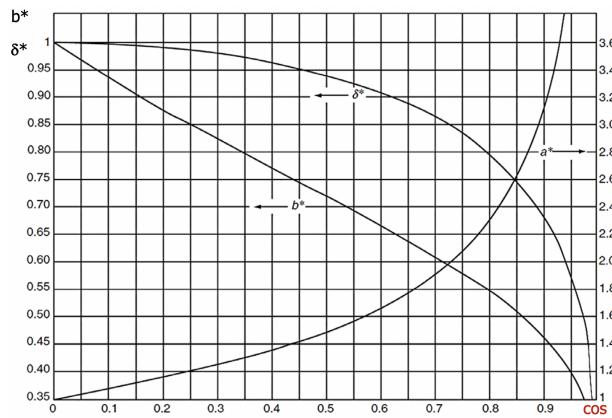


Figura 4.7

Considerazioni

1. Leggendo il grafico di $a^*, b^*, \delta^* - \cos(\tau)$ notiamo una cosa molto importante: per $\cos(\tau) = 0$ si ha $a^* = b^* = \delta^* = 1$. Ci chiediamo a questo punto quali sono le condizioni tali per cui effettivamente $\cos(\tau) = 0$.

- Una prima possibilità, guardando la definizione di $\cos(\tau)$, che sia

$$\gamma_X = \gamma_Y$$

Ossia che si abbiano le curvature relative in direzione X e Y uguali. Due corpi che abbiano curvature relative uguali in entrambe le direzioni non possono che essere due *sfere*.

Queste sfere comunque possono avere raggi diversi, e lo possiamo intuire dal fatto che nella formula di $\cos(\tau)$ in cui compaiono le curvature dei singoli corpi al numeratore ci sono solo differenze tra le curvature in X e Y dello stesso corpo, quindi in sostanza basta che siano due sfere (curvature in X e Y uguali) e si ha $\cos(\tau) = 0$.

- Un'altra possibilità però è che si abbia, guardando la formula completa di $\cos(\tau)$ (formula 4.7), si abbia il numeratore nullo.

Una simile cosa avviene per esempio nel caso di due *cilindri* con lo stesso raggio, ad *assi perpendicolari*. Infatti, sappiamo che le curvature nei rispettivi riferimenti principali sono una relativa al raggio del cilindro e l'altra *nulla*, in quanto il raggio di curvatura nell'altra direzione è infinito.

In questo modo, sostituendo nella 4.7 e considerando che $\theta = 90^\circ$, si ottiene $\cos(\tau) = 0$.⁹

- Tutte le altre possibilità, capiamo, sono quindi quelle in cui il numeratore si annulla, e dunque bisognerà trovare dei raggi di curvatura nel riferimento principale di ogni corpo e un orientamento relativo dei due corpi (θ) tali per cui $\cos(\tau) = 0$.

In tutti i casi in cui $\cos(\tau) = 0$ e quindi $a^* = b^* = 1$, e quindi ancora $a = b = f$, si ha un'impronta *circolare* al contatto, essendo i semiassi dell'ellisse uguali (cerchio).

2. Consideriamo ora di avere due cilindri di eguale raggio e di metterli non più ad assi perpendicolari, bensì ad assi *paralleli*. Facendo i conti su $\cos(\tau)$ vediamo che in questo modo, avendo $\theta = 0$, si ottiene

$$\cos(\tau) = 1$$

Se andiamo a vedere il grafico notiamo che per $\cos(\tau) = 1$ si ha $b^* = 0$ e quindi $b = 0$, ossia l'ellisse è degenerata in una *linea*; inoltre, sempre entrando nel grafico, per $\cos(\tau) = 1$ si vede anche che $a^* \rightarrow \infty$, e quindi si ha che l'ellisse è degenerata in una linea *infinitamente lunga*.

Se però ci pensiamo, una tale cosa vorrebbe necessariamente dire che i due cilindri sono di lunghezza infinita, e questo in teoria torna perché una linea può sopportare un carico solo se è infinitamente lunga, in quanto altrimenti la sua area sarebbe nulla e la pressione infinita.

Concludiamo quindi che la soluzione Hertziana per due cilindri ad assi paralleli vale solo se i cilindri sono infinitamente lunghi.

Se invece abbiamo dei cilindri di lunghezza finita non vale più la soluzione Hertziana, ma ne sono state trovate altre dopo. Una dice sempre che l'andamento della pressione è *parabolico*, ma solo lungo Y , ed è quindi costante lungo X (parabola uguale ad ogni stazione X), nonché che l'impronta di contatto è un *rettangolo* di lunghezza L (lunghezza dei cilindri) e altezza b , dove

$$b = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{F}{L} \frac{1}{2(\alpha_X + \beta_X)} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}$$

E quindi

$$p = \frac{2F}{\pi L b} \sqrt{1 - \frac{Y^2}{b^2}}$$

L'accostamento invece è calcolato come

$$\delta = 3.84 \cdot 10^{-5} \left(\frac{F}{L} \right)^{0.9} L^{0.1}$$

Si tratta di una formulazione semiempirica questa, in quanto la famosa singolarità a $r_b = 0$ ci impedisce di effettuare una formulazione matematica rigorosa.

⁹Ogni cilindro ha il suo riferimento principale; se poniamo che l'asse di curvatura minima sia l'asse X , abbiamo $\alpha_Y = 0$ e $\beta_Y = 0$, mentre α_X e β_X sono pari a $\frac{1}{2R}$.

Conclusione

In ogni caso, possiamo **riassumere** i risultati trovati fino ad ora come:

- I contatti Hertziani sono formulati nell'ipotesi di corpi non conformi, in assenza di attrito.
- L'impronta di contatto è di forma ellittica. Se i due corpi sono delle sfere o dei cilindri di eguale raggio ad assi perpendicolari è circolare, se i due corpi sono cilindri infiniti di eguale raggio ad assi paralleli è una linea. Se i cilindri ad assi paralleli sono finiti la soluzione (non Hertziana) prevede un'impronta rettangolare.
- Vi sono dei riferimenti per ciascun corpo nei quali il profilo $z(x, y)$ non ha termini misti, chiamato riferimento principale. Esiste poi un riferimento principale comune ai due corpi, definito come quello che non porta termini misti nella distanza $h = z_1 - z_2$ tra due punti dei due corpi alla stessa x, y . Nei riferimenti principali di ciascun corpo si ha che le curvature sono la massima e la minima, e le rispettive direzioni sono perpendicolari. Scrivendo h nel sistema principale comune si ottiene l'equazione dell'ellisse che dimostra la forma ellittica dell'area di contatto.
- Per la risoluzione del problema di contatto si fa uso delle equazioni di congruenza, materiale (Boussinesque) ed equilibrio. La prima stabilisce che sotto la forza F vi è uno spostamento rigido del corpo su cui si applica F e, poiché non può esserci compenetrazione tra i due corpi, entrambi reagiscono con spostamenti elastici per avere, all'equilibrio, $h = 0$. La seconda esprime una relazione tra spostamenti, pressione di contatto e distanza tra punto in cui si calcola lo spostamento infinitesimo du e punto in cui è applicata la forza infinitesima $dF = pdA = pdxdy$. La terza dice infine che la forza F è equilibrata dalla risultante della pressione sull'area di contatto.
- La pressione di contatto ha andamento parabolico, in analogia con l'elettromagnetismo.

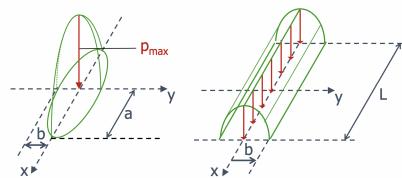
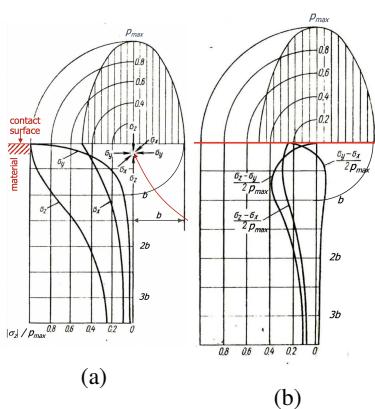


Figura 4.8

4.4 Cedimento

Adesso che abbiamo di fatto risolto il problema di contatto, sappiamo qual è l'andamento della pressione lungo X e Y al contatto. Ci chiediamo ora però come questa pressione effettivamente solleciti i corpi in *profondità*, ossia a $z \neq 0$. Vogliamo in altre parole conoscere lo *stato di tensione* in profondità nei due corpi.

Si può dimostrare che l'andamento delle tensioni normali all'aumentare della profondità nel corpo è quello indicato in figura 4.9a, nonché si può dimostrare che quelle tensioni sono principali.



Noi siamo interessati a capire dov'è che avviene lo *snervamento* lungo z e per farlo dobbiamo andare a indagare qual è l'andamento lungo z della tensione *equivalente*; per semplicità consideriamo la tensione di Tresca, essendo la differenza tra la tensione massima e quella minima.

Si dimostra che l'andamento di questa tensione equivalente aumenta lungo z , fino al suo massimo, per poi diminuire (figura 4.9b). Il massimo, nel caso di un contatto cilindro-cilindro, lo si ha per

$$z \simeq 0.79b$$

Dove b è il semiasse dell'ellisse di contatto. Se il contatto è sfera-sfera si ha $z \simeq 0.48b$. In ogni caso, quello che dobbiamo ricordare qua è semplicemente che l'incipiente snervamento avviene *in profondità*, ad un'altezza che dipende dai corpi a contatto e, in minor parte, dalla tensione equivalente che si considera (Tresca o von Mises).

Un'altra cosa ancora più importante che si vede è che la tensione equivalente massima è pari a circa il 60% della pressione massima, quindi l'incipiente snervamento avviene quando la p è il 167% circa dello snervamento R_e !

$$\sigma_{eq,max} \simeq 0.6p_{max}$$

Questo vuol dire che possiamo caricare il contatto *oltre lo snervamento* senza avere incipiente snervamento (in profondità).

4.5 Cuscinetti

Sono dei particolari componenti che hanno lo scopo primario di dare *moto relativo* tra due oggetti rotanti. Sono tipicamente composti da:

- Tre parti principali:
 - Anello interno
 - Anello esterno
 - Corpi volventi (sfere, rulli, ecc)
- Accessori:
 - Gabbia (serve per tenere i corpi volventi distanziati e alla medesima distanza durante la rotazione)
 - Chiusura (per il lubrificante)

Dal punto di vista del *contatto Hertziano* abbiamo due contatti: uno tra anello interno e corpo volvente, l'altro tra corpo volvente e anello esterno.

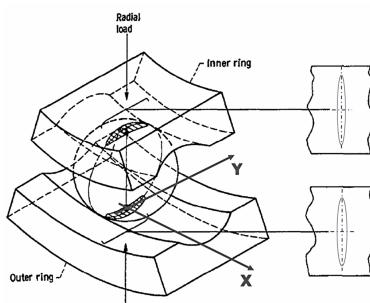


Figura 4.10

Se consideriamo un cuscinetto a sfere abbiamo che le sfere hanno curvatura

$$\alpha_X = \alpha_Y = \frac{1}{d_s}$$

L'anello interno ha curvatura

$$\beta_{X,i} = \frac{1}{d_{1,i}}, \quad \beta_{Y,i} = -\frac{1}{d_{2,i}}$$

Il segno è negativo lungo Y perché lì il raggio è fuori il corpo, a differenza dell'asse X . L'anello esterno invece ha curvatura

$$\beta_{X,o} = -\frac{1}{d_{1,o}}, \quad \beta_{Y,o} = -\frac{1}{d_{2,o}}$$

I segni qua sono entrambi negativi perché entrambi i raggi sono fuori dal corpo.

4.5.1 Tipologie di cuscinetti

Presentiamo ora una breve rassegna di cuscinetti, sostanzialmente in funzione dei vari corpi volventi al loro interno e delle particolari geometrie degli anelli; ciò farà sì che i vari cuscinetti possano reggere o meno alcuni tipi di carichi e il loro quantitativo massimo.

- I cuscinetti a singola fila di sfere resistono a carichi sia radiali che assiali. Nel prossimo paragrafo vedremo perché sopportano anche carichi assiali.
- I cuscinetti a rulli cilindrici sopportano solo carichi radiali. Essi tipicamente sono caratterizzati da una maggiore sopportazione del carico, avendo un'area di contatto maggiore rispetto al contatto sfera-sfera.
- Dato che sopportano solo carico radiale, sono prevalentemente utilizzati per realizzare quella che potrebbe essere una sorta di trave isostatica, in coppia con dei cuscinetti che resistono anche carichi assiali.
- I cuscinetti conici a rulli (pista non piatta) sono una via di mezzo, dato che in una direzione sopportano carico assiale e in un'altra direzione no (tipo "mezzo carrello").
- I cuscinetti a sfere con contatto angolare hanno un'elevata superficie di contatto in una direzione, per cui in essa reggono molto carico assiale, mentre nell'altra ne reggono di meno (ma comunque ne reggono).
- I cuscinetti a doppia fila di sfere reggono maggiore carico.
- I cuscinetti a 4 contatti reggono anche i momenti, dato che si appoggiano su 4 lati.
- I cuscinetti assiali, a rulli e a sfere, reggono solo carico assiale e non radiale.
- I cuscinetti a rulli conici e "a botte" (reggono anche carico assiale loro) sono di tipo auto allineante, cioè allineano loro gli alberi, se sono (un po') disallineati.

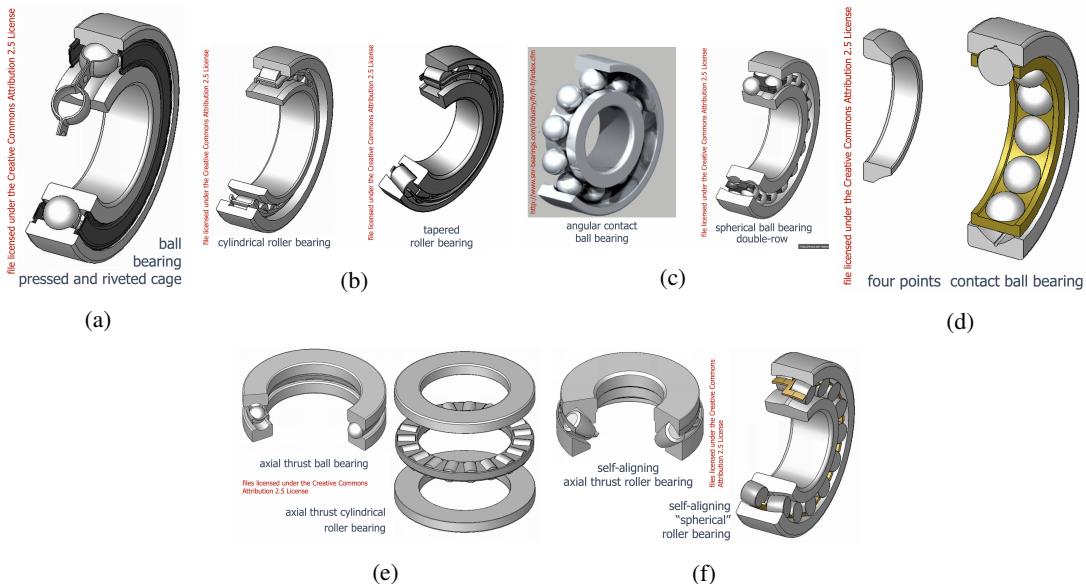


Figura 4.11

4.5.2 Angolo di contatto (cuscinetti a sfere). Perché sopportano anche carichi assiali?

Per quanto un cuscinetto a sfere sia progettato principalmente per reggere carichi radiali, esso può comunque reggere, seppur in forma minore, dei carichi assiali. Lo scopo di questo paragrafo è quindi andare a vedere effettivamente perché e come li regge questi carichi assiali.

Consideriamo quindi la sezione di un tipico cuscinetto a sfere in condizioni di carico assiale e radiale nullo. Le sfere hanno diametro d_s e le piste hanno il loro raggio di curvatura in direzione y , che poniamo pari a r_i e r_o . Chiaramente, i raggi delle piste saranno maggiori del raggio della sfera (tipicamente $r_i = r_o = 1.05r_s$).

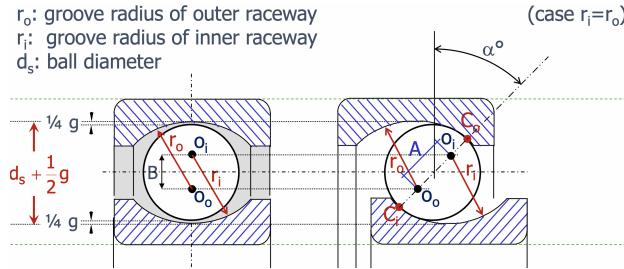


Figura 4.12

Dobbiamo considerare ora che la sfera non è a contatto con le piste, ma c'è un certo **gioco**; questo gioco è presente per due prevalenti motivazioni:

1. Compensare un'eventuale dilatazione termica in esercizio.
2. Permettere proprio al cuscinetto di reggere assialmente il carico.

Vediamo quindi che tra il bordo della sfera e delle piste vi è una distanza pari a $\frac{g}{4}$ (il gioco è sul diametro, qua abbiamo i raggi di curvatura)¹⁰.

Chiamiamo \bar{AB} la distanza tra i centri di curvatura delle piste e scriviamo pertanto che la somma dei raggi delle piste, meno questa distanza, deve essere pari alla somma del diametro della sfera e del "vuoto" dato dal gioco.

$$r_i + r_o - \bar{AB} = d_s + \frac{g}{2}$$

Ricaviamo allora \bar{AB} come

$$\bar{AB} = r_i + r_o - d_s - \frac{g}{2}$$

Immaginiamo ora di applicare un carico *assiale* al cuscinetto, ipotizzando di tenere vincolato l'anello esterno e quindi di far muovere solo quello interno. Ciò che succede è che l'anello interno si muove fino a toccare la sfera e, successivamente, muove la sfera (e sé stesso) finché la stessa sfera non tocca anche l'anello esterno, rimasto fisso.

Si vede quindi che la sfera ha due *punti di contatto*, che risultano tra l'altro essere **allineati** con i centri di curvatura delle piste e col centro della sfera. La retta che passa per questi 5 punti allineati forma con la verticale un angolo che chiamiamo *angolo di contatto* α e che possiamo calcolare come

$$\cos(\alpha) = \frac{\bar{AB}}{A'B}$$

Dove $A'B$ è la distanza tra il centro di curvatura della pista esterna (rimasta fisso) e il centro di curvatura della pista interna (si è spostato da A ad A'). In particolare, $A'B$ è pari a

$$A'B = r_i + r_o - d_s$$

Essendosi annullato il gioco in condizione di carico assiale non nullo. In questo modo si ottiene che

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\frac{g}{2}}{r_i + r_o - d_s} \quad (4.13)$$

Cosa possiamo quindi dedurre? Il fatto che si abbia questo angolo di contatto effettivamente fa sì che la forza di contatto che si genera tra la sfera e le piste sia inclinata proprio di α , e quindi può avere una *componente assiale*, oltre che una radiale!

¹⁰Ovviamente la gravità porterà il gioco tutto da un lato, ma non cambia considerare così

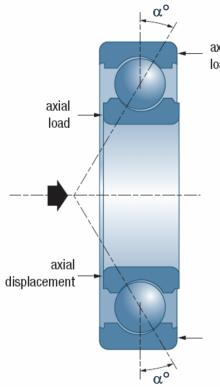


Figura 4.13

E quindi cosa c'entra in tutto ciò il gioco? Perché è lui che permette di sopportare carico assiale? La risposta è molto semplice: se fosse $g = 0$ avremmo che $\alpha = 0$, quindi non ci sarebbe una effettiva inclinazione della retta dei contatti, perché la forza di contatto si genererebbe in direzione perfettamente radiale, e quindi non ci sarebbe alcuna forza in grado di reagire al carico assiale esterno.

Per dei tipici valori di cuscinetti a sfere ($d_s = 10\text{mm}$, $r_i = r_0 = 1.05r_s$ e $g = 20\mu\text{m}$) si ha che $\alpha = 11.5^\circ$ all'incirca.

Variazione sotto carico

Ci chiediamo ora cosa succede quando applichiamo il carico assiale al cuscinetto una volta che questo ha inclinato la retta dei contatti di α . Se applichiamo il carico assiale succede che l'anello interno spinge ulteriormente la sfera, e quindi capiamo subito che *aumenta* α ; questo aumento è comunque *trascurabile*, per cui vediamo che nel caso in cui non ci fosse gioco l'aumento di α non sarebbe sensibilmente apprezzabile e non ci sarebbe pertanto resistenza assiale.

Diminuzioni possibili di gioco

Abbiamo quindi capito che il gioco è molto importante perché ci permette di reggere un carico assiale, facendo in modo che la retta dei contatti si inclini di α ; dunque vorremmo che questo gioco fosse sempre tale da poter reggere una forza assiale non inferiore a quella che prevediamo si scaricherà in esercizio sul cuscinetto.

Tuttavia, il gioco può in esercizio *diminuire*, e lo può fare prevalentemente per due motivi:

- Per calettare cuscinetti ed albero si usa tipicamente un accoppiamento con interferenza, per cui si deve applicare una certa pressione di calettamento, la quale *deforma* l'anello interno, che si dilata, causando quindi una diminuzione del gioco.
- Può succedere poi che, in esercizio, l'albero si *scaldi* maggiormente rispetto al cuscinetto, di fatto causando una maggiore sua dilatazione, andando di conseguenza a dilatare a sua volta l'anello interno.

Precarico al montaggio

Quando montiamo i cuscinetti sul mozzo abbiamo che, se sono scarichi assialmente, c'è un certo gioco, e quindi la sfera può tecnicamente muoversi nella gabbia. Per far sì che essa invece non si muova abbiamo due possibilità:

- Sfruttare il carico esterno assiale, che porta la sfera in contatto con le piste (contatto inclinato di α) e tiene tutto fermo. Questo è molto conveniente quando la forza assiale è sempre nella *stessa direzione*.
- Se la forza assiale *cambia direzione* in esercizio, succederebbe che la sfera si muoverebbe, e questo non vogliamo che accada. Per ovviare al problema possiamo allora **precaricare** con una ghiera o una molla il cuscinetto, così che si crei prima il contatto (inclinato di α) e quindi la sfera non si muova se varia la direzione della forza assiale. Ovviamente la forza di precarico deve essere pari o superiore alla forza assiale (condizione peggiore in cui la forza assiale è opposta al precarico).

4.5.3 Distribuzione del carico radiale (cuscinetti a rulli)

Ora che abbiamo capito come dei cuscinetti a sfera reggano carico assiale (che poi il carico assiale di ogni sfera non sarà altro che il carico esterno diviso il numero di sfere), vogliamo invece capire come si ripartisce tra i vari corpi volventi un carico radiale esterno.

In maniera molto intuitiva, sappiamo già dire che esso non si distribuirà democraticamente come quello assiale, dato che quando caricchiamo radialmente il cuscinetto, possiamo spannometricamente individuare una certa regione in cui i corpi volventi sono direttamente scarichi, a discapito di quelli invece più carichi.

Congruenza spostamenti

Consideriamo una sezione frontale di un cuscinetto a rulli, con anello interno, esterno e corpi volventi (rulli). Prendiamo il centro degli anelli (ovviamente sono concentrici) e chiamiamo ψ l'angolo che il centro di ciascun cuscinetto forma con la verticale.

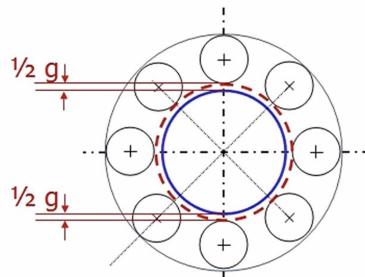


Figura 4.14

Immaginiamo ora di applicare al centro del cuscinetto una forza radiale F_r verso il basso che, in virtù dell'elasticità non nulla dei corpi, provoca uno *spostamento* radiale δ_r , naturalmente verso il basso.

Consideriamo ora un generico rullo il cui centro è ad una posizione angolare ψ rispetto al rullo posizionato con il centro parallelo al centro degli anelli; essendo che lo spostamento δ_r viene impartito all'anello interno fondamentalmente, si ha che quel rullo vede la propria distanza dall'anello interno ridursi e diventare pari a

$$\delta_\psi = \delta_r \cos(\psi) - \frac{g}{2}$$

Quello appena definito è un accostamento *elastico*, e indica sostanzialmente il vuoto che rimane tra rullo e anello interno in seguito all'applicazione di F_r . Esso è l'accostamento δ che abbiamo visto nei contatti Hertziani in generale.

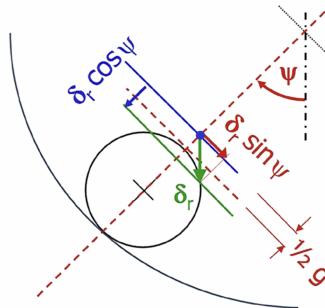


Figura 4.15

A questo punto immaginiamo che la forza radiale sia tale da portare in *contatto* l'anello interno con *alcuni* corpi volventi (vedremo dopo quanti esattamente). Lo spostamento δ_r non è quello che esattamente annulla il gioco, ma ne è almeno pari; consideriamo in questa fase che i corpi possano compenetrarsi.

Succede quindi che l'anello interno compenetrerà un certo numero di rulli, ciascuno dei quali vede un accostamento elastico δ_ψ dipendente da ψ , a parità di tutto il resto.

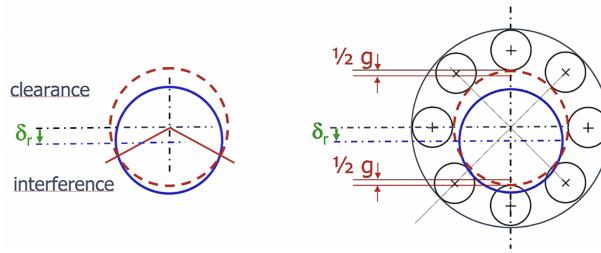


Figura 4.16

Per calcolare quanti rulli effettivamente sono almeno in contatto (o si compenetrano) con l'anello interno è sufficiente imporre che, per $\psi = \psi_{max}$ si abbia $\delta_\psi = 0$, condizione "limite"¹¹, per ricavare quindi che

$$\cos(\psi_{max}) = \frac{\frac{g}{2}}{\delta_r}$$

Vediamo quindi che, con un δ_r verso il basso, non tutta la schiera inferiore di rulli entra in contatto con l'anello interno, bensì soltanto i rulli della semi-schiera inferiore che va da $\psi = 0$ a $\psi = \psi_{max}$. Se il gioco è nullo allora effettivamente tutti i rulli sono in contatto con l'anello interno, altrimenti ne sono di meno.

Possiamo calcolare il rapporto tra l'accostamento del generico rullo nella posizione angolare ψ e quello del rullo "centrale" (a $\psi = 0$) come

$$\frac{\delta_\psi}{\delta_0} = \frac{\cos(\psi) - \cos(\psi_{max})}{1 - \cos(\psi_{max})}$$

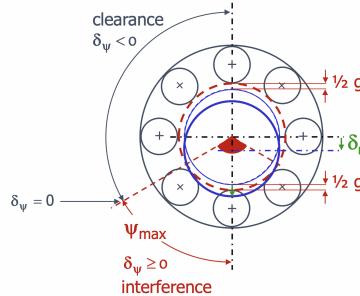


Figura 4.17

Modello materiale

Ora che abbiamo effettivamente definito l'accostamento in funzione dello spostamento radiale che genera la forza radiale, cerchiamo un modo anzitutto per correlare lo spostamento radiale con la forza che applichiamo (il nostro vero input), e poi per correlare questi accostamenti appena calcolati con le forze che si generano effettivamente sui rulli al contatto con gli anelli.

Anzitutto possiamo ricordarci che, nel caso di contatto cilindrico, ci sono varie leggi di forza in funzione dello spostamento; quello che usiamo noi è

$$\delta = 3.84 \cdot 10^{-5} \frac{F^{0.9}}{L^{0.8}} \quad (4.14)$$

Con L la lunghezza assiale dei rulli. Se conosciamo quindi F possiamo ricavare δ e viceversa. Questa è una relazione del materiale, tipo legge di Hooke, solo che è *non lineare*, essendo del tipo $F = k\delta^{1.11}$.

Ora abbiamo una legge che ci permette di conoscere F a partire da δ e viceversa, per cui cerchiamo in qualche modo di ricavare le forze sui rulli a partire dai δ calcolati prima.

Noi però abbiamo calcolato δ_ψ del rullo, che è in un certo senso l'accostamento che si avrebbe se immaginassimo che il solo anello interno cercasse di compenetrare il rullo; in realtà abbiamo che entrambi gli anelli cercano di

¹¹Quando $\delta_\psi = 0$ non si ha compenetrazione virtuale ma solo contatto.

compenetrare il rullo, dato che la forza radiale tende a schiacciare l'anello interno sul rullo, il quale però a sua volta schiaccia anche il rullo esterno, che reagisce con una forza uguale e contraria a quella che il rullo scarica su di lui.

Possiamo allora immaginare che δ_ψ sia pari alla somma di un contributo dell'anello interno e di un contributo dell'anello esterno, che cercano, uno da un lato, e uno dall'altro lato, di compenetrare il povero rullo.

$$\delta_\psi = \delta_i + \delta_o$$

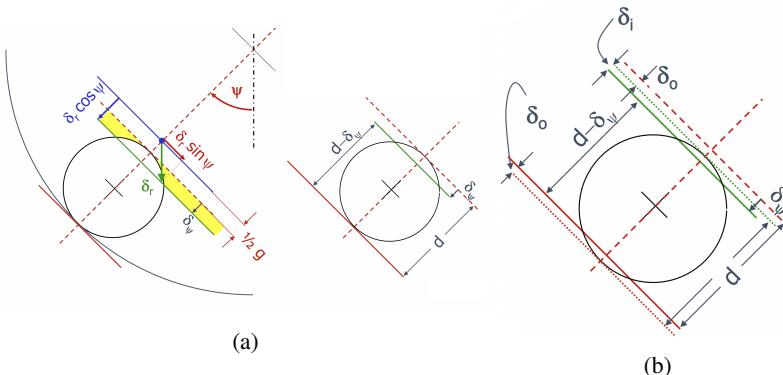


Figura 4.18

Ora noi questi due accostamenti li sappiamo correlare alla forza che ciascun anello scarica sul rullo (in equilibrio statico, quindi le due forze sappiamo già che sono uguali in modulo e opposte in verso¹²) perché possiamo scrivere che

$$\delta_i = 3.84 \cdot 10^{-5} \frac{F_i^{0.9}}{L^{0.8}}, \quad \delta_o = 3.84 \cdot 10^{-5} \frac{F_o^{0.9}}{L^{0.8}}$$

Considerando che $F_i = F_o = F$ e che chiaramente la lunghezza dei rulli è sempre quella, possiamo dire che

$$\delta_\psi = \delta_i + \delta_o = 2 \cdot 3.84 \cdot 10^{-5} \frac{F^{0.9}}{L^{0.8}} \quad (4.15)$$

Ipotizziamo che le rigidezze possano generalmente non essere uguali (le forze invece lo sono sempre), per cui scriviamo che

$$\delta = \left(\frac{1}{k_i^{0.9}} + \frac{1}{k_o^{0.9}} \right) F^{0.9}$$

Dove $k = \frac{1}{\delta}$. Specializziamo a questo punto la suddetta equazione per δ_ψ e δ_0 e facciamo il rapporto tra le forze, per cui

$$\frac{F_\psi}{F_0} = \frac{k_{tot} \delta_\psi^n}{k_{tot} \delta_0^n}$$

Dove $k_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{k_i^{0.9}} + \frac{1}{k_o^{0.9}}}$ e $n = 0.9$. La rigidezza totale non cambia perché il cuscinetto è sempre quello, quindi rimane

$$\frac{F_\psi}{F_0} = \left(\frac{\delta_\psi}{\delta_0} \right)^n$$

Ricordando la relazione tra δ_ψ e δ_0 otteniamo quindi

$$\frac{F_\psi}{F_0} = \left[\frac{\cos(\psi) - \cos(\psi_{max})}{1 - \cos(\psi_{max})} \right]^n \quad (4.16)$$

Le forze F_ψ e F_0 sono rispettivamente le forze che si scaricano sul rullo (anello interno ed esterno, uguali e opposte) posto a ψ e a $\psi = 0$. Ecco quindi che, con il modello del materiale, abbiamo espresso le forze in funzione degli spostamenti e, grazie a ciò, abbiamo poi messo in relazione la generica F_ψ con la F_0 .

¹²Non sarebbe vero a rigore se ci fosse una importante forza centrifuga che agisse sul rullo, ma per ora trascuriamo questa eventualità.

Equilibrio forze

Ora manca l'ultimo tassello del trittico "congruenza - materiale - equilibrio"; ci chiediamo quindi, infine, che legame c'è tra le generiche F_ψ , dove in esse è implicitamente inclusa anche la F_0 , che si scaricano sui rulli e la forza radiale R applicata esternamente al cuscinetto, a cui è associato il δ_r di cui abbiamo parlato prima.

Per l'equilibrio delle forze abbiamo che le componenti verticali delle F_ψ devono essere pari, nella loro somma, alla forza radiale R ; le componenti verticali sono quelle lungo il $\cos(\psi)$, per cui scriviamo che

$$R = \sum_{i=1}^{N_{volv}} F_{\psi_i} \cos(\psi_i)$$

Ma noi abbiamo scritto le F_ψ in funzione di F_0 , $\cos(\psi)$ e $\cos(\psi_{max})$, per cui

$$R = F_0 \sum_{i=1}^{N_{volv}} \left[\frac{\cos(\psi_i) - \cos(\psi_{max})}{1 - \cos(\psi_{max})} \right]^n \cos(\psi_i)$$

Fare la sommatoria da 1 a N_{volv} di ψ_i vuol dire spaziare da $-\psi_{max}$ a ψ_{max} , per cui

$$R = F_0 \sum_{\psi=-\psi_{max}}^{\psi=\psi_{max}} \left[\frac{\cos(\psi) - \cos(\psi_{max})}{1 - \cos(\psi_{max})} \right]^n \cos(\psi) \quad (4.17)$$

Guardando questa equazione possiamo dire che la relazione tra la forza radiale esterna applicata sul cuscinetto e la forza che subisce il corpo volvente *più sollecitato* è funzione della geometria (ψ_{max}).

Soluzione approssimata

Abbiamo ottenuto una bella relazione che, nota la geometria del cuscinetto, ci permette di sapere quanto vale la forza che agisce sul corpo volvente più sollecitato in funzione del carico radiale esterno che applichiamo. Questo è molto utile, perché con due dati noti e un input esterno possiamo ricavare quanto vale il carico su ogni corpo volvente ($F_\psi = f(F_0)$ come già visto prima); tuttavia, dal punto di vista pratico una simile relazione non è molto applicabile: sarebbe molto meglio, paradossalmente, se questa fosse sotto forma di *integrale*.

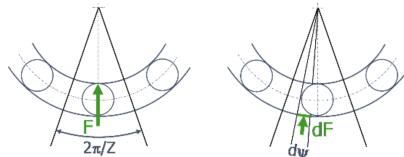


Figura 4.19

Per la prima volta quindi possiamo fare un'approssimazione "inversa" e trasformare la sommatoria discreta in un integrale continuo. Per farlo ricordiamo la forza che si scarica sul corpo volvente a ψ in funzione dell'accostamento medesimo.

$$F_\psi = k_{tot} \delta_\psi^n$$

Immaginiamo a questo punto di spalmare la rigidezza k_{tot} sull'arco di cerchio che compete al corpo volvente a ψ ; dividiamo quindi per l'arco $\frac{2\pi}{Z}$, con Z numero di corpi volventi, e moltiplichiamo per $d\psi$, immaginando quindi che all'interno dell'arco di cerchio competente a ogni corpo volvente vi sia questa rigidezza spalmata così.

$$dk_{tot} = \frac{k_{tot} \frac{2\pi}{Z}}{d} \psi$$

In questo modo avremo che la forza infinitesima sarà

$$dF_\psi = dk_{tot} \delta_\psi^n$$

Ovvero

$$dF_\psi = \frac{k_{tot} \frac{2\pi}{Z}}{\delta} \psi^n d\psi$$

Ma possiamo anche dire che

$$k_{tot} = \frac{F_0}{\delta_0^n}$$

Per cui

$$dF_\psi = F_0 \left(\frac{\delta_\psi}{\delta_0} \right)^n \frac{Z}{2\pi} d\psi$$

A questo punto possiamo immaginare quindi che la forza infinitesima dF_ψ , proiettata lungo $\cos(\psi)$ e integrata tra $-\psi_{max}$ e ψ_{max} sia appunto pari a R , per cui

$$R = F_0 Z \int_{-\psi_{max}}^{\psi_{max}} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos(\psi) - \cos(\psi_{max})}{1 - \cos(\psi_{max})} \right]^n \cos(\psi) d\psi$$

In questo modo possiamo esprimere F_0 in funzione di R e della geometria in maniera praticamente molto più agevole, dal momento che si può calcolare, a differenza della sommatoria, l'integrale

$$J_s = \int_{-\psi_{max}}^{\psi_{max}} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos(\psi) - \cos(\psi_{max})}{1 - \cos(\psi_{max})} \right]^n \cos(\psi) d\psi$$

Detto integrale di Stribeck, per delle classi molto ampie di cuscinetti; la sommatoria infatti andrebbe calcolata caso per caso.

$$F_0 = \frac{J_s}{Z} R \quad (4.18)$$

Se ad esempio si avesse gioco nullo ($\psi_{max} = \frac{\pi}{2}$), avremmo che

$$F_0 = \frac{4.37}{Z} R$$

Per un gioco standard invece

$$F_0 = \frac{5}{Z} R$$

4.5.4 Carico massimo sopportabile dal corpo volvente

Ora conosciamo una relazione che ci permette di calcolare in qualche modo il carico sul rullo più sollecitato (F_0), e siamo quindi interessati a capire che valore non deve superare questo. Sicuramente non vogliamo che ci sia snervamento, o comunque danni permanenti al cuscinetto.

Per fare questo discorso, intuitivamente, possiamo pensare di legare la forza F_0 sul rullo più sollecitato alla pressione che si sviluppa su di esso, immaginando quindi di tornare ad un semplice contatto Hertziano tra rullo e anello.

Sappiamo prima di tutto che la pressione massima è in profondità e non in superficie, ma comunque è proporzionale alla pressione di contatto, che possiamo a sua volta scrivere in qualche modo come la forza (in questo caso F_0) diviso l'area di contatto ab (immaginiamo un contatto tra cilindri).

$$p_{max} \propto \frac{F_0}{a^* b^* f^2}$$

Avendo ricordato che $a = a^* f$ e $b = b^* f$. Possiamo quindi dire che

$$p_{max} \propto \frac{F_0}{f^2}$$

Se però prendiamo la relazione esplicita di f vediamo che $f \propto F_0^{\frac{1}{3}}$, e quindi infine

$$p_{max} \propto F_0^{1-\frac{2}{3}} \rightarrow p_{max} \propto F_0^{\frac{1}{3}}$$

Noi sappiamo poi che l'incipiente snervamento avviene a $p_{max} = \frac{1}{0.6} R_{p_{02}}$, quindi dovremo in un certo senso far sì che la F_0 sia sotto il valore per cui $p_{max} = \frac{1}{0.6} R_{p_{02}}$.

Tuttavia, nella realtà si riscontra che i cuscinetti sono caricati in modo tale che la $F_0 = \frac{J_s}{Z} R$ porti a una p_{max} ben superiore a $\frac{1}{0.6} R_{p_{02}}$ ¹³

Il motivo di una tale apparente follia è dovuto ad un'ulteriore considerazione fatta da Palmgren, ossia "cosa succede effettivamente se carico oltre lo snervamento incipiente?". La risposta, naturalmente, è che si creano delle **deformazioni permanenti** nel materiale, e quindi si ha plasticizzazione, una volta rimosso il carico.

Palmgren ha effettivamente visto che se queste deformazioni permanenti rimangono entro un certo **limite** allora non si hanno danni permanenti al cuscinetto (in pratica non succede nulla), e quindi ecco spiegato perché si può caricare ben oltre lo snervamento incipiente il rullo.

La deformazione permanente è espressa in relazione al diametro del corpo volvente d e vale

$$\frac{\delta_s}{d} = 1.31 \cdot 10^{-7} \frac{F^2}{d^2} \left(\frac{1}{d} \pm \frac{1}{D_1} \right) \left(\frac{1}{d} \pm \frac{1}{D_2} \right)$$

Con D_1 e D_2 i diametri dell'anello di contatto. Gli inversi dei diametri però sono anche le curvature, per cui

$$\frac{\delta_s}{d} = 1.31 \cdot 10^{-7} \frac{F^2}{d^2} (\alpha_X \pm \beta_X) (\alpha_Y \pm \beta_Y) \quad (4.19)$$

Il limite che non deve essere superato è

$$\frac{\delta_s}{\delta} \leq 10^{-4}$$

4.5.5 Verifica cuscinetti

Nel corso degli ultimi due paragrafi abbiamo imparato che sul cuscinetto agiscono, potenzialmente insieme, due carichi: uno radiale ed uno assiale (se il cuscinetto regge entrambe le tipologie). Tuttavia, noi vogliamo confrontare questi due carichi agenti contemporaneamente con un unico valore, impostando di fatto un vero e proprio *criterio di cedimento*.

Quello che si fa allora è definire un **carico equivalente** secondo quanto stabilito dalla normativa e si confronta tale carico equivalente con un valore, sempre stabilito da normativa, il tutto in funzione dello specifico cuscinetto che si vuole considerare.

Verifica statica

Anzitutto è bene precisare che i cuscinetti, nonostante siano degli elementi che ruotano, per cui di statico hanno ben poco, potrebbero essere soggetti a carichi impulsivi oppure banalmente avere la funzione di perni, per cui non ruotare così di frequente; risulta quindi importante effettuare eventualmente anche una verifica statica.

Si definisce il carico equivalente come

$$P_0 = \begin{cases} R & \text{se } X_0 R + Y_0 A \leq R \\ X_0 R + Y_0 A & \text{se } X_0 R + Y_0 A > R \end{cases}$$

Si confronta tale P_0 con C_0 , coefficiente di carico, tipico del cuscinetto, definendo un coefficiente di sicurezza

$$S_0 = \frac{C_0}{P_0}$$

Il cui valore minimo dipende dall'applicazione dei cuscinetti. Il coefficiente di carico, sia statico che, come vedremo, dinamico, indica una sorta di danno limite/deformazione permanente limite oltre cui non andare, per non far avvenire ciò nell'elemento più sollecitato del cuscinetto.

Verifica a fatica

Per la fatica si definisce un analogo carico equivalente

$$P = \begin{cases} R & \text{se } \frac{A}{R} \leq e \\ X R + Y A & \text{se } \frac{A}{R} > e \end{cases}$$

¹³Per fare un esempio, nel caso in cui $R_{p_{02}} = 1600 MPa$, si carica a $p_{max} = 4200 MPa$, anziché il limite di $p_{max} = 2700 MPa$.

E si definisce la vita a fatica in milioni di giri, al 90% di affidabilità come

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P} \right)^p$$

Dove C è un analogo coefficiente di carico (dinamico) e p è un coefficiente che vale

$$p = \begin{cases} 3 & \text{per sfere} \\ \frac{10}{3} & \text{per rulli} \end{cases}$$

L_{10} è quindi il numero di milioni di giri a cui è attesa la rottura per fatica. È quindi possibile costruire una sorta di "curva di Wohler" per i cuscinetti, diagrammando P in funzione di L_{10} .

Schema semplificato di calcolo

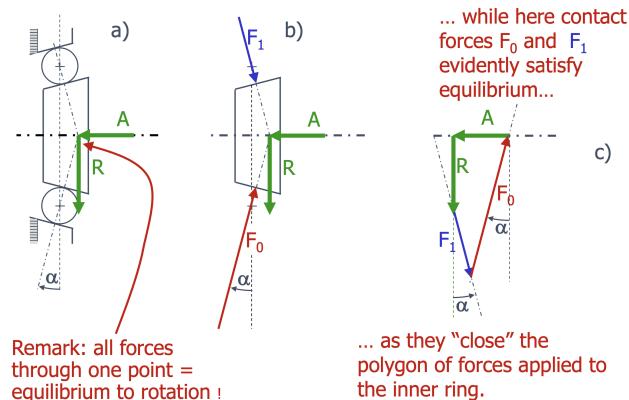


Figura 4.20

Immaginiamo di avere un cuscinetto con due soli corpi volventi, su cui agiscono contemporaneamente un carico assiale A ed un carico radiale R . Sul corpo volvente in basso ($\psi = 0$) si scaricherà la F_0 , essendo lui il più sollecitato; conoscendo la F_0 limite precedentemente esposta, ci chiediamo quali siano i valori limite di A e R per cui $F_0 = F_{0,lim}$.

Prendiamo allora le forze A , R , F_0 , F_1 e componiamo il poligono (chiuso, per avere equilibrio) con esse che, per avere inoltre equilibrio alla rotazione, devono convergere in un punto.

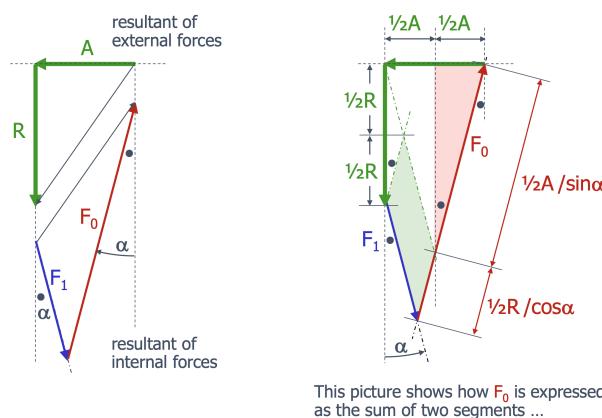


Figura 4.21

Esprimiamo dunque F_0 come la somma di due segmenti, per cui

$$F_0 = \frac{1}{2} \frac{R}{\cos(\alpha)} + \frac{1}{2} \frac{A}{\sin(\alpha)}$$

Quando questo valore è pari al suo limite, quanti valori di R, A ci sono ad esso associati? La risposta è, tecnicamente, infiniti; tuttavia, non è proprio così, in quanto ci possono essere situazioni in cui R e A siano tali per cui $F_1 < 0$ (trazione), e questo non va bene, per cui sono infiniti ma a patto che siano tali per cui $F_1 \geq 0$.

Immaginiamo allora di metterci in una particolare condizione per cui $F_1 = 0$, convenzionalmente (per semplicità), e imponiamo quindi che sia $F_0 = F_{0,lim}$; in tal caso avremo che

$$F_{0,lim} = \frac{R_{lim}}{2 \cos(\alpha)} + \frac{A_{lim}}{2 \sin(\alpha)}$$

Proiettiamo ora la generica F_0 , nel caso in cui $F_1 = 0$, lungo la verticale (radiale) e otteniamo quindi

$$P_0 = F_0 \cos(\alpha) = \frac{R}{2} + \frac{A}{2 \tan(\alpha)}$$

Questo P_0 è proprio il carico equivalente! Quando $F_0 = F_{0,lim}$ abbiamo che $P_0 = P_{0,lim} = C_0$. Inoltre, possiamo dire che

$$X_0 = \frac{1}{2}, \quad Y_0 = \frac{1}{2 \tan(\alpha)}$$

Per questo cuscinetto particolare. Ecco quindi dimostrato il ragionamento sul carico equivalente fatto in caso statico.

4.5.6 Montaggio cuscinetti

In questo paragrafo andiamo anzitutto a vedere cosa succede a livello di forze trasmesse quando ci sono due cuscinetti contigui calettati su un albero e su di esso è applicato un carico assiale A , e poi vediamo come fare per rendere il sistema migliore sotto vari punti di vista.

Consideriamo quindi dei cuscinetti montati a “X” (così perché le rette inclinate di α formano una “X”); l’albero scarica la forza assiale A sull’anello interno del primo cuscinetto (il più vicino al punto di applicazione del carico), che la scarica a sua volta sull’anello interno del secondo cuscinetto¹⁴, il quale a sua volta la scarica, mediante la retta di contatto α , sul suo anello esterno, per arrivare infine al basamento che blocca i due cuscinetti.

Se visualizziamo quindi il “percorso” che segue la forza assiale A vediamo che effettivamente l’unico cuscinetto che lavora è il secondo, dato che il primo è sollecitato solo sull’anello interno, senza coinvolgere né il corpo volante, né l’anello esterno. Se applicassimo il carico dall’altro lato si avrebbe una situazione analoga, con il primo cuscinetto a lavorare ora.

Se disegnassimo quindi un grafico forza-spostamento (carico assiale – spostamento assiale conseguente) vedremo che si avrebbero due curve simmetriche rispetto all’asse F , una relativa a $A > 0$ e l’altra a $A < 0$.

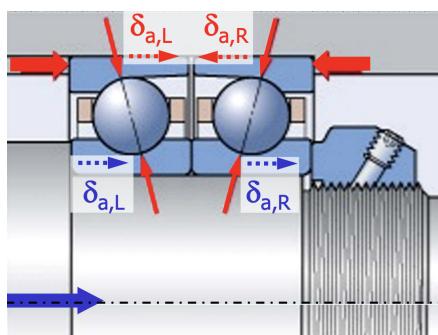


Figura 4.22

Abbiamo quindi visto come i cuscinetti lavorano in maniera *indipendente*, reggendo il carico assiale comunque in entrambe le direzioni. Questo non è quindi un caso di funzionamento proprio ideale, perché se il carico è sempre e solo in una direzione stiamo utilizzando un cuscinetto che non sarà mai sollecitato; quindi, cerchiamo di seguito un modo per poter far lavorare *insieme* i due cuscinetti; vedremo infine anche il perché dovrebbero lavorare insieme i cuscinetti.

¹⁴Il montaggio a “X” prevede che si abbia un contatto tra i cuscinetti solo con gli anelli interni

Applicazione del precarico

Immaginiamo allora, prima di applicare il carico esterno, di applicare un certo *precarico* A_0 sull'anello esterno di un cuscinetto, spingendo di fatto un cuscinetto contro l'altro. Quello che succede, dal punto di vista del percorso di carico, è che il precarico A_0 si trasmette dall'anello esterno all'anello interno mediante la retta inclinata di α , poi dall'anello interno del primo cuscinetto all'anello interno del secondo cuscinetto (unico contatto tra i due è con gli anelli interni) e infine al suo anello esterno.

Consideriamo ora i cuscinetti come delle *rigidezze*; applicando il precarico A_0 succede che il primo cuscinetto viene compresso, e quindi spinge sul secondo cuscinetto che, per reazione, cerca di espandersi. Si troverà poi un *equilibrio* intermedio con i due cuscinetti portati allo stesso valore di spostamento, a cui corrisponderà una forza pari proprio al precarico A_0 .

Se quindi rappresentiamo il tutto nel diagramma $F - \delta$ vediamo che il primo cuscinetto ha una curva caratteristica che parte da 0 e aumenta, mentre il secondo cuscinetto ha una curva caratteristica che parte da uno spostamento non nullo e aumenta diminuendo lo spostamento; questo perché è come se noi mettessimo in equilibrio le due molle che sono a riposo comprimendo una da una parte e l'altra da un'altra parte.

Vedremo quindi sul suddetto diagramma che ci sarà un punto in cui le curve si incontrano e quello corrisponderà, per l'appunto, alla posizione di equilibrio δ_{eq} e al precarico A_0 .

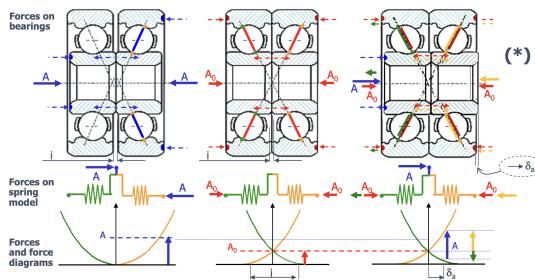


Figura 4.23

Ora immaginiamo di applicare un carico assiale *esterno* A sull'albero; quello che avviene è assolutamente analogo a quanto avveniva nel *diagramma di forzamento vite – pezzo*, con entrambi i cuscinetti che si prendono quindi una *quota parte* di A , in dipendenza dalla loro rigidezza e dal precarico applicato. Questo ha due vantaggi:

- Non ci sono *oscillazioni* a causa del gioco (che deve comunque esserci), in quanto il precarico schiaccia tra loro i cuscinetti e ne impedisce il movimento.
- Aumenta la **rigidezza**, sia perché, partecipando entrambi i cuscinetti, ora la rigidezza è somma tra le rigidezze dei due, ma anche perché l'avere un precarico A_0 fa sì che si lavori in un punto della curva $F - \delta$ di ogni cuscinetto in cui la *pendenza* è maggiore e, essendo la pendenza $\frac{dF}{d\delta}$ proprio la rigidezza, abbiamo quindi che essa aumenta.

Capitolo 5

Ruote dentate

Lo scopo primario di una *coppia* di ruote dentate è quello di **trasmettere potenza** tra assi, eventualmente anche non paralleli.

5.1 Introduzione

Il primo e fondamentale concetto che deve essere capito quando si parla di ruote dentate è il **profilo** dei denti; esso è di una particolare tipologia chiamata **evolvente**, che andiamo adesso a vedere più in dettaglio.

Il profilo a evolvente si *traccia* a partire da un cerchio, noto come **cerchio di base**¹ e consiste nello "srotolamento" di un filo sulla circonferenza. In pratica è come se legassimo una corda intorno al cerchio e, tenendo fermo il cerchio, svolgessimo il filo sempre in tensione e disegnassimo la traccia di questo svolgimento. Non è molto visibile da un disegno normale, ma l'angolo di partenza con cui si svolge il filo è un angolo retto (90°).

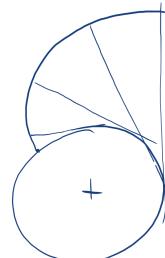


Figura 5.1

Se tracciassimo ora la *normale* al profilo in ogni punto (che poi sarebbe anche la *tangente* al cerchio di base) e poi *accoppiassimo* due di questi profili (due diversi cerchi di base), vedremmo che la normale al profilo nel punto comune di contatto (tangente ai cerchi di base) è **comune**, proprio come nel contatto *Hertziano*!

Possiamo chiamare T_1 e T_2 i punti dei cerchi di base dove la retta di contatto ne è tangente. Inoltre, possiamo vedere come la retta di contatto appena illustrata sia la *stessa* per qualsiasi punto di contatto tra i due profili. In altre parole, se vogliamo far entrare in contatto in un punto i profili generati dai due cerchi di base vediamo che tutti i possibili punti di contatto si trovano su questa retta, tangente ai cerchi di base in T_1 e T_2 .

È quindi proprio questa la *peculiarità* dei profili a evolvente: essi identificano una serie di punti di contatto che stanno tutti sulla retta tangente ai cerchi di base. Trattandosi di una retta, vediamo come questa non si può muovere nello spazio, e questo è un grande *vantaggio*.

In ogni caso, quello che conta e che contraddistingue la *cinematica* delle ruote dentate sono i **cerchi di base**: essi non cambiano mai e sono quindi caratteristiche intrinseche delle ruote. Se il cerchio di base non cambia, è invece quello *primitivo* a cambiare.

Per ulteriormente provare quanto detto sinora sui cerchi di base, immaginiamo di avere due profili in contatto ed i relativi cerchi di base, con la retta dei contatti ad essi tangente. Chiamiamo *interasse* la distanza tra i centri dei cerchi

¹ Per tutte le considerazioni, anche in sede di esame, è bene partire sempre dal cerchio di base!

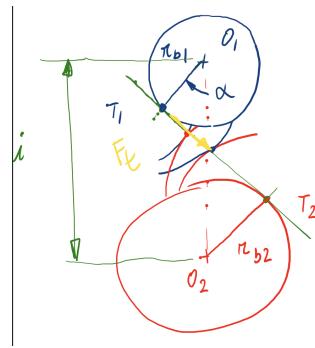


Figura 5.2

di base.

$$i = O_1 \bar{O}_2$$

Immaginiamo ora di aumentare l'interasse, muovendo ad esempio la ruota sottostante più in basso; quello che succede è che i profili sono rimasti sempre gli stessi (il cerchio di base non cambia), ed essi continuano tranquillamente a ingranare! Semplicemente, quello che è successo è che è cambiato sì il contatto (quindi l'angolo α tra l'interasse e la retta dei contatti), ma non il fatto che i due profili siano in contatto e che il punto di contatto ricada sulla retta dei contatti, che si è semplicemente inclinata per rimanere tangente ai due cerchi di base, essendosene spostato uno (senza variare il suo raggio però) in basso.

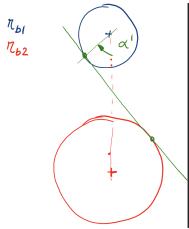


Figura 5.3

5.2 Verifica delle ruote dentate

Quello che interessa prevalentemente a noi non è tanto il progetto delle ruote dentate, quanto la loro verifica; ci occuperemo, in particolare, della verifica sotto tre aspetti diversi:

- *Contatto* (Hertziano). Dovremmo assicurarcici che le tensioni di contatto massime siano sotto un certo limite.
- *Fatica*. Il dente è assimilabile ad una mensola, pertanto il massimo sforzo a flessione sarà localizzato all'incastro (piede del dente). Dovremmo assicurarcici che la tensione sia inferiore ad un certo limite.
- *Strisciamento*. Può capitare che alcuni denti striscino tra loro, causando conseguentemente usura; dovremo allora capire dove è più importante tale strisciamento ed evitare di lavorare in quelle zone.

5.2.1 Verifica a contatto Hertziano

Andiamo prima di tutto a vedere come si specializza la teoria del contatto Hertziano in questo caso, per poi vedere come la normativa la modifica per tenere in conto di vari fattori.

La prima cosa che diciamo è che il contatto in questione è di tipo *cilindro-cilindro*²; le curvature pertanto saranno tutte positive, dal momento che il centro del raggio osculatore si trova, per entrambi i corpi, al loro esterno.

²Sono cilindri con le generatrici involute.

Quello che siamo interessati a conoscere è la **pressione massima** di contatto, che ricordiamo essere

$$p_{max} = \frac{2F}{\pi L b}$$

Dove L è la lunghezza del cilindro e

$$b = \sqrt{\frac{4F}{\pi L} \frac{1}{2(\alpha_X + \beta_X)} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}$$

Le curvature sappiamo essere gli inversi dei diametri, quindi possiamo dire in sostanza che

$$p_{max} \propto \sqrt{F} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{d} + \frac{1}{D}}} = \sqrt{F} \sqrt{\frac{1}{d}} \sqrt{1 + \frac{d}{D}}$$

Dove d è il diametro del cilindro più piccolo e D del più grande. A questo punto ci chiediamo però, in questo caso, chi sono d e D ? Se prendiamo il punto di contatto P , comune tra i due profili, e tracciamo la retta di contatto tangente ai cerchi di base, possiamo convenire che

$$\begin{cases} \frac{D}{2} = T_1^- P \\ \frac{d}{2} = T_2^- P \end{cases}$$

Questo perché il raggio osculatore di ciascun profilo a evolente non è altro che la distanza tra il punto di contatto P e il punto del cerchio di base dove è tangente la retta dei contatti (provare per credere).

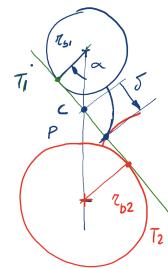


Figura 5.4

Adesso chiamiamo con C il punto in cui la retta dei contatti incrocia l'interasse e definiamo una coordinata auxiliaria δ , originata in C e che si muova lungo la retta dei contatti, positiva verso il basso. Possiamo allora dire che

$$\begin{cases} \frac{D}{2} = T_1^- C + \delta \\ \frac{d}{2} = T_2^- C - \delta \end{cases}$$

Se però andiamo a osservare bene i cerchi di base possiamo dire che

$$T_1^- C = r_{b1} \tan(\alpha), \quad T_2^- C = r_{b2} \tan(\alpha)$$

In questo modo, se ricordiamo che

$$p_{max} \propto \sqrt{F} \sqrt{\frac{1}{d}} \sqrt{1 + \frac{d}{D}} \propto \frac{1}{d} + \frac{1}{D} = \frac{D+d}{dD}$$

Possiamo dire che

$$p_{max} \propto \frac{r_{b1} \tan(\alpha) + r_{b2} \tan(\alpha)}{[r_{b1} \tan(\alpha) + \delta][r_{b2} \tan(\alpha) - \delta]} \quad (5.1)$$

Osservando questa relazione possiamo calcolare, in maniera qualitativa, quando la pressione massima assume il suo valore *minimo*, in termini di δ ; ossia, dove deve stare il punto di contatto rispetto all'incrocio tra la retta dei contatti e l'interasse per avere la pressione di contatto massima al suo valore minimo possibile.

Derivando rispetto a δ la 5.1 possiamo trovare che il δ di p_{max} minima è

$$\delta_{p_{max},min} = \frac{r_{b_2} - r_{b_1}}{2} \tan(\alpha) \quad (5.2)$$

Da questo possiamo notare che se $r_{b_1} \approx r_{b_2}$, cioè se le due ruote non sono troppo diverse in termini di cerchio di base, allora il δ di p_{max} minima è nullo, quindi il punto di p_{max} minimo è proprio il punto C , ovvero il punto medio tra T_1 e T_2 . Per calcolare il valore preciso della p_{max} minima dovremmo richiamare in gioco tutto quello che abbiamo portato nel simbolo di proporzionalità.

Ora vediamo invece dove la p_{max} è *massima*; se guardiamo sempre la 5.1 possiamo vedere che essa è massima quando è minimo il denominatore (il numeratore non dipende da δ), ovvero quando questo si annulla. Il denominatore si annulla quando si annulla uno dei due termini, ossia quando

$$\delta = -r_{b_1} \tan(\alpha)$$

Oppure quando

$$\delta = r_{b_2} \tan(\alpha)$$

Ma questi due punti, se ci pensiamo, sono proprio i punti T_1 e T_2 ! In essi la pressione massima sarebbe *infinita*, quindi non ci vuole una laurea in ingegneria aerospaziale per capire che bisogna evitare a tutti i costi che il punto di contatto P ricada in T_1 o in T_2 . Per fare questo infatti si esegue la *troncatura* esterna dei denti, in modo tale che il profilo non possa arrivare in T proprio perché non esiste fisicamente lì.

Perché i danni avvengono comunque nel punto C?

Ora occupiamoci di indagare su un mistero alquanto preoccupante: se andiamo a vedere nella realtà i danni subiti dai denti, notiamo che essi sono prevalentemente localizzati nel punto C di contatto, sebbene avevamo detto che quello era il punto di minima pressione massima. Le ragioni sono possibilmente tre:

- Anzitutto dobbiamo dire che lì la pressione, per quanto minima, è pur sempre una pressione massima; in altre parole, lungo l'apertura b del contatto (lato del rettangolo dell'area di contatto), la pressione assume un andamento parabolico che ha quindi comunque un massimo. Il fatto che ne si riduca l'intensità di questo massimo non esclude il fatto che i danni avvengano lì.
- Dobbiamo poi considerare anche il fatto che, quando i denti ingranano, ci sono tipicamente 2 coppie di denti che lo fanno in contemporanea (non più di 2-3 coppie di norma); nel punto C si dimostra invece come la coppia di denti in contatto contemporaneamente sia sempre e solo *una*, per cui la forza tangenziale che di norma si dividerebbe tra due coppie di denti, ora è tutta su una coppia sola in presa.
- Un'ultima spiegazione è che, se andiamo a considerare la velocità periferica del punto di contatto in C , sia del profilo appartenente alla ruota 1, che di quello della ruota 2, vedremo che

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

E non può essere altrimenti, perché sennò ci sarebbe compenetrazione tra i denti; questo significa però che nel punto C il moto che si genera è un moto di *rotolamento senza strisciamento*, e ciò crea dei problemi nella *lubrificazione*, perché essa per funzionare bene ha bisogno di un po' di strisciamento relativo tra i corpi.

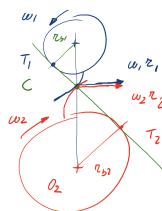


Figura 5.5

Normativa per verifica a contatto

Ora che abbiamo visto come funzionano le cose da un punto di vista qualitativo, andiamo a vedere le formule che si utilizzano effettivamente nella *verifica* delle ruote dentate, in accordo ad una delle normative vigenti in merito. L'idea è quella che si calcoli una tensione (pressione) di contatto Hertziano e poi la si confronti con un certo valore ammissibile limite; il calcolo di questi due termini è presentato di seguito.

Calcolo tensione di contatto La formula è sostanzialmente analoga a quella presentata prima.

$$\sigma_H = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t^*}{d_1 b} \frac{u \pm 1}{u}} \quad (5.3)$$

Dove d_1 è il diametro primitivo³ della ruota più piccola e $u = \frac{D_2}{d_1}$, con D_2 diametro primitivo della ruota più grande. Come vediamo, la formula è, coefficienti a parte, analoga a quella con cui abbiamo espresso la 5.1.

I coefficienti correttivi Z tengono conto di:

- Z_H tiene conto del fatto che usiamo il diametro primitivo e non quello del cerchio osculatore.
- Z_E tiene conto del materiale (E, ν).
- Z_ε tiene conto di quanti denti in media sono contemporaneamente in contatto (rapporto di ricoprimento e di condotta).
- Z_β tiene conto dell'eventuale elicoidalità dei denti.

La forza F_t^* è definita come

$$F_t^* = F_t K_A K_V K_{H_\alpha} K_{H_\beta}$$

Dove F_t è la forza tangenziale al contatto $F_t = \frac{C}{r_b}$ e i coefficienti K tengono conto di:

- K_A tiene conto dei sovraccarichi dinamici provenienti dall'esterno.
- K_V tiene conto dei sovraccarichi dinamici prodotti dalla ruota stessa (entrata in contatto dei denti).
- K_{H_α} tiene conto della non ottimale distribuzione trasversale del carico tra più coppie di denti, per via di errori nel profilo e nel passo.
- K_{H_β} tiene invece conto della non ottimale distribuzione longitudinale di carico, dovuta a disallineamenti e giochi.

Ovviamente $F_t^* > F_t$.

Calcolo limite massimo ammissibile La tensione limite si calcola come

$$\sigma_{H_P} = \sigma_{H,lim} \frac{Z_N Z_L Z_R Z_V Z_W Z_X}{S_{H,min}} \quad (5.4)$$

La tensione $\sigma_{H,min}$ è il limite massimo ammissibile (discorso su incipiente snervamento in profondità e deformazioni permanenti ammissibili), $S_{H,lim}$ è un coefficiente di sicurezza che dipende dalle applicazioni, mentre i coefficienti Z tengono conto di:

- Z_N tiene conto della durata in cicli.
- Z_L tiene conto della lubrificazione.
- Z_R tiene conto della rugosità.
- Z_V tiene conto della velocità periferica sulla lubrificazione (vedi sopra).
- Z_W tiene conto della durezza dei denti.

³Ci andrebbe, a rigore, il diametro del cilindro (cerchio osculatore) ma si fa questa semplificazione, tenendo conto di ciò nei coefficienti correttivi Z .

⁴Coppia e raggio di base di una delle due ruote, tanto la forza che si scambiano è naturalmente la stessa, così come la potenza $P = C\omega$.

- Z_X tiene conto delle dimensioni dei denti (prove effettuate su denti standard).

Se

$$\sigma_H \leq \sigma_{H_P}$$

La verifica è passata.

5.2.2 Verifica a fatica

Anche qua il gioco è sempre lo stesso. Si impone che

$$\sigma_F \leq \sigma_{F_P}$$

Dove

$$\sigma_F = \frac{F_t^*}{bm_n} Y_{F_a} Y_{S_a} Y_\varepsilon Y_\beta \quad (5.5)$$

Con m_n è il modulo normale (vedi progettazione modulare) e con

$$F_t^* = F_t K_A K_V K_{F_\alpha} K_{F_\beta}$$

Analoga a prima (cambiano i valori magari) e dove i coefficienti Y tengono conto di:

- Y_{F_a} tiene conto della forma del dente; è un fattore associato all'inerzia del dente per la tensione nominale a flessione. Lo si usa perché la tensione è $\sigma = \frac{M}{I}y = \frac{F}{I}y^2$, e quindi in questo coefficiente convogliamo I e y^2 .
- Y_{S_a} tiene conto della concentrazione di tensione (fattore di concentrazione delle tensioni per la fatica) e tiene poi anche conto del fatto che la tensione non è prodotta solo dalla flessione ma anche dallo sforzo normale (taglio trascurabile).
- Y_β tiene conto dell'eventuale elicoidalità dei denti.
- Y_ε tiene conto del rapporto di ingranamento (quanti denti in media sono contemporaneamente in presa).

Infine

$$\sigma_{F_P} = \sigma_{F_{lim}} \frac{Y_{S_T} Y_{N_T} Y_{S,rel_T} Y_{R_T} Y_X}{S_{F,min}} \quad (5.6)$$

I coefficienti tengono conto di:

- Y_{S_T} tiene conto della correzione sui test effettuati su una dentatura standard.
- Y_{N_T} tiene conto dell'aumento di tensione limite se si accetta vita non infinita.
- Y_{S,rel_T} tiene conto della sensibilità all'intaglio.
- Y_{R_T} tiene conto della rugosità.
- Y_X tiene conto della diminuzione di resistenza all'aumentare delle dimensioni rispetto allo standard.

5.2.3 Strisciamento specifico

Consideriamo due ruote che ruotino con velocità angolari ω_1, ω_2 ; le suddette, nel punto di contatto P , hanno una loro velocità periferica V_1, V_2 , ciascuna di esse ortogonale a O_1P, O_2P , pertanto i moduli di queste velocità non sono uguali.

Tuttavia, sappiamo che la proiezione di questa velocità sulla retta dei contatti deve essere la stessa, per cui l'altra componente (quella tangenziale) è diversa tra le due ruote. Questo vuol dire che nel piano tangente un profilo striscia rispetto all'altro, e quindi si può provocare *usura*.

Si definisce, per tenere in conto di questo fenomeno, lo strisciamento specifico di ciascuna ruota come

$$\zeta_1 = \frac{v_{t_1} - v_{t_2}}{v_{t_1}}, \quad \zeta_2 = \frac{v_{t_1} - v_{t_2}}{v_{t_2}} \quad (5.7)$$

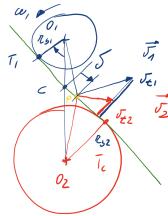


Figura 5.6

Calcoliamo allora le v_t , servendoci sempre della coordinata ausiliaria δ ; sappiamo che la velocità tangenziale è pari alla velocità angolare per la "componente tangenziale" del raggio, ossia

$$v_t = \omega T \bar{P}$$

Per cui

$$v_{t1} = \omega_1 (T_1 \bar{C} + \delta), \quad v_{t2} = \omega_2 (T_2 \bar{C} - \delta)$$

Dove avevamo detto che $T \bar{C} = r_b \tan(\alpha)$. Sostituendo troviamo che

$$\zeta_1 = 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{r_{b_2} \tan(\alpha) - \delta}{r_{b_1} \tan(\alpha) + \delta}$$

$$\zeta_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{r_{b_1} \tan(\alpha) + \delta}{r_{b_2} \tan(\alpha) - \delta} - 1$$

Vediamo quindi che lo strisciamento specifico dipende da δ , per cui vediamo di calcolarlo in dei punti notevoli e di tracciarne poi l'andamento lungo la retta dei contatti, da T_1 a T_2 . Calcoliamolo in particolare in T_1 , T_2 e C , ricordando quanto vale δ in quei punti.

	T_1	C	T_2
δ	$-r_{b_1} \tan(\alpha)$	0	$r_{b_2} \tan(\alpha)$
ζ_1	$-\infty$	0	1
ζ_2	-1	0	∞

Tabella 5.1

Come possiamo ben notare, lo strisciamento specifico è nullo in C (rotolamento puro) ed è infinito in T_1 e T_2 , che si confermano essere punti pessimi dove far avvenire il contatto (tanto tronchiamo, non c'è rischio).

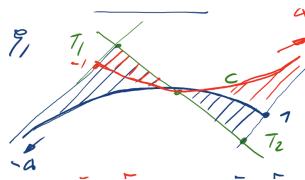


Figura 5.7

Perché specifico?

Ci chiediamo ora perché utilizziamo come "indice" di usura lo strisciamento *specifico* e non semplicemente lo strisciamento $v_{t1} - v_{t2}$. Se facessimo così avremmo che entrambe le ruote avrebbero lo stesso strisciamento (qualcosa di relativo), ma questo non sarebbe "corretto", in quanto le due ruote si usurano in maniera diversa, in ragione del fatto che hanno *velocità diverse*.

Se infatti una ruota è più veloce, allora è come se si sottraesse maggiormente al danno, in quanto spalmerebbe quest'ultimo su una maggiore lunghezza, a parità di tempo. È infatti vero che la potenza dissipata è la stessa, ma

dissiparla in una zona più concentrata (ruota lenta) è peggio che dissiparla in una zona più ampia (ruota veloce); ecco quindi perché si divide per la velocità tangenziale della ruota, unica componente diversa tra le due. Così se la ruota è più veloce lo strisciamento specifico è minore, a pari Δv_t .

5.3 Nomenclatura

5.3.1 Progettazione modulare

La progettazione modulare è un modo molto intelligente di costruire ruote, in quanto permette di definire tutto in funzione di un numero intero, chiamato modulo. Si definisce infatti il diametro primitivo di una ruota come il prodotto del modulo per il numero di denti.

$$d = mZ$$

Ruote con lo stesso modulo ingranano di sicuro, ovunque vengano fatte. Dato α , si sa poi che

$$r_b = \frac{d}{2} \cos(\alpha)$$

Di norma si impone a progetto $\alpha = 20^\circ$; siccome il raggio di base non cambia, avremo che potranno cambiare invece il raggio primitivo e l'angolo α .

5.3.2 Dimensioni dei denti

Definiamo come *addendum* la distanza h_a tra il cerchio primitivo e il cerchio di troncatura esterna; definiamo come *dedendum* la distanza h_f tra il cerchio primitivo e il piede del dente. In questo modo

$$d_a = d + 2h_a, \quad d_f = d - 2h_f$$

Si stabilisce che l'addendum è pari al modulo e il dedendum pari al 125% del modulo.

$$h_a = m, \quad h_f = 1.25m$$

In questo modo vediamo che è definito tutto (d, d_a, d_f) in funzione solo del modulo m .

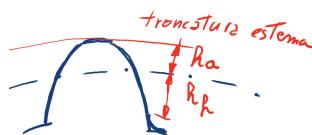


Figura 5.8