Esami Simulati:

Esercizio 1:

Esercizio 1 (10 punti, minimo 6)

Progettate un disco rotante a uniforme resistenza la cui tensione ideale σ sia costante. Lo spessore iniziale al raggio zero è b_0. In particolare, determinate

- lo spessore b_{rmax} al raggio massimo r_{max},
- la massa equivalente da aggiungere al raggio r_{max} per ottenere un disco "finito" equivalente al disco ideale di raggio infinito.

L'equazione di equilibrio (con l'usuale notazione per le variabili) è

$$\frac{d}{d_r}(\sigma_r r b) - \sigma_c b = -\rho\omega^2 r^2 b$$

In prima approssimazione l'integrale $\int e^{-Ax^2}x^2dx$ vale

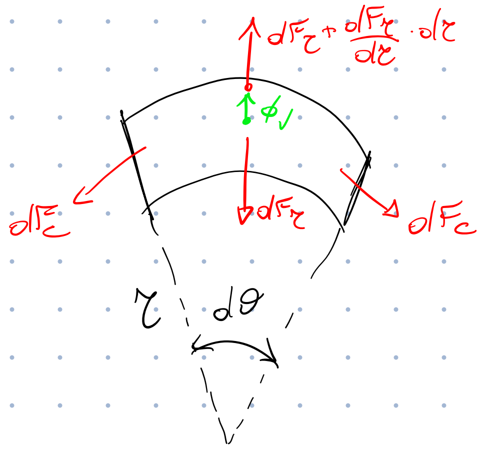
$$\int e^{-Ax^2}x^2dx \cong \frac{\sqrt{\pi}}{4A^{2/3}} - \frac{e^{-Ax^2}}{2A}x$$

$7{,}8\cdot10^{-6}\ \frac{kg}{mm^3}$

Dati: ρ= 7800 kg/m³; σ = 500 MPa; ω = 10000 rpm; r_{max} = 300 mm; b_0 = 80 mm.

$\to 1047{,}2\ \frac{Rad}{s}$

Dall'equilibrio sul concio elementare:



$$dF_r = \sigma_r \cdot r\,d\theta\cdot b$$

$$dF_c = \sigma_c\cdot dr\cdot b$$

$$\phi_v = \rho\omega^2 r$$

Quindi:

$$-\cancel{\sigma_r r\,d\theta\cdot b} + \left(\cancel{\sigma_r r\,d\theta\,b} + \frac{d(\sigma_r r\,\cancel{d\theta}\,b)}{dr}\cancel{dr}\right) - \cancel{2}\sigma_c\cdot \cancel{dr}\,b\cdot\sin\left(\frac{\cancel{d\theta}}{\cancel{2}}\right) =$$

$$= -\rho\omega^2 r\cdot r\,\cancel{d\theta}\cdot b\cdot \cancel{dr}$$

Quindi:

$$\frac{d(\sigma_r r\cdot b)}{dr} - \sigma_c\cdot b = -\rho\omega^2 r^2\cdot b$$

Esplicitando la derivata:

$$r\cdot b\cdot\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r\cdot b + \sigma_r\cdot r\cdot\frac{db}{dr} - \sigma_c\cdot b = -\rho\omega^2 r^2\cdot b$$

Dato che per avere un disco ad uniforme resistenza bisogna avere che $\sigma_{id}^{T} = COST = \sigma_c - \sigma_a = \sigma_c$. Ma anche $\sigma_r = COST$ per evitare che $\sigma_r > \sigma_c$. Quindi l'unico modo per ottenere $\sigma_{id}^{T} = COST$ è avere un disco solido poiché lì è verificato che $\sigma_r = \sigma_c = COST = \sigma$

Quindi:

$$r \cdot b \cdot \cancel{\frac{d\sigma}{dr}}^{\,0} + \cancel{\sigma b} + \sigma r \frac{db}{dr} - \cancel{\sigma b} = -\rho\omega^2 r^2 b$$

$$\sigma \cancel{r} \cdot \frac{db}{dr} = -\rho\omega^2 r^{\cancel{2}} b$$

Separando le variabili:

$$\frac{db}{b} = -\frac{\rho\omega^2}{\sigma}\, r\, dr$$

Integro:

$$\int_{b_0}^{b} \frac{db}{b} = \int_{0}^{r} -\frac{\rho\omega^2}{\sigma}\, r\, dr$$

$$\downarrow$$

$$\ln\left(\frac{b}{b_0}\right) = -\frac{\rho\omega^2}{2\sigma} r^2$$

$$\downarrow$$

$$b = b_0 \cdot e^{-\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}}$$ → Andamento dello spessore per avere uniforme resistenza.

Quindi:

$$b_{r_{max}} = 0{,}0370\ m = 37\ mm$$

N.B: Bisogna portare tutto in m e $\frac{N}{m^2}$

Il disco per essere effettivamente ad uniforme resistenza dovrebbe essere infinito. Ciò nella realtà non è possibile e quindi ad un certo punto il raggio va troncato.
Per simulare la presenza della massa che va da r_e a $+\infty$ si può calcolare la F_c che questa genererebbe e tramite l'espressione della forza centrifuga, calcolare la massa d'aggiungere equivalente.

La F_c è:

$$F_c = \int_{r_T}^{+\infty} \rho\omega^2 r \cdot 2\pi r \cdot b \, dr = \int_{r_T}^{+\infty} \rho\omega^2 r^2 \cdot 2\pi \cdot b_0 \cdot e^{-\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}} \cdot dr_c$$

$$= \rho\omega^2 \cdot 2\pi \cdot b_0 \cdot \int_{r_T}^{+\infty} r^2 \cdot e^{-\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}} \, dr$$

Dove: $A = \frac{\rho\omega^2}{2\sigma} = 8{,}5537$

utilizzando la soluzione approssimata fornita in traccia:

$$F_c = \rho\omega^2 \cdot 2\pi \cdot b_0 \cdot \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4 A^{2/3}} - \frac{e^{-A r^2}}{2A} \cdot r \right]_{r_{max}}^{+\infty} =$$

$$= \rho\omega^2 \cdot 2\pi \cdot b_0 \cdot \left[\left(\cancel{\frac{\sqrt{\pi}}{4 A^{2/3}}} - 0 \right) - \left(\cancel{\frac{\sqrt{\pi}}{4 A^{2/3}}} - \frac{e^{-A r_{max}^2}}{2A} r_{max} \right) \right] =$$

$$= m_{eq}\, \omega^2 r_{max} \longrightarrow m_{eq} = \frac{F_c}{\omega^2 \cdot r_{max}} = \underline{3748{,}2 \text{ kg}}$$