Esercizio 2:

Esercizio 1 (10 punti, minimo 6)

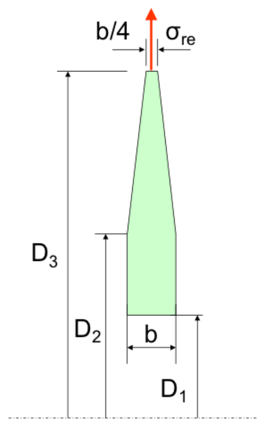
Un disco in acciaio con spessore variabile è caricato al bordo esterno con una tensione σ_{re}= 100 MPa. Calcolate, con il metodo di Grammel, nei punti di variazione di diametro

1) lo spostamento radiale u;
2) le tensioni radiale σ_r e circonferenziale σ_c.

D_1 = 240 mm, $D_1/D_2 = D_2/D_3$ =0.8 (questo vi facilita il lavoro)
b = 20 mm; Modulo di elasticità E = 200 000 MPa; Coefficiente di Poisson ν = 0.3

Cosa è richiesto:

- impostate le formule nella sequenza in cui vanno usate, come se si stesse preparando il flusso di calcolo, definendo i simboli utilizzati (60%)
- sostituite i numeri per caratterizzare i due settori (20%) risolvete (20%).



Promemoria di formule utili per l'esercizio

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} = -p_i \frac{\frac{D_i^2}{D^2} - \frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} - p_e \frac{1 - \frac{D_i^2}{D^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} \qquad \sigma_c = A - \frac{B}{r^2} = p_i \frac{\frac{D_i^2}{D^2} + \frac{D_i^2}{D_e^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} - p_e \frac{1 + \frac{D_i^2}{D^2}}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}}$$

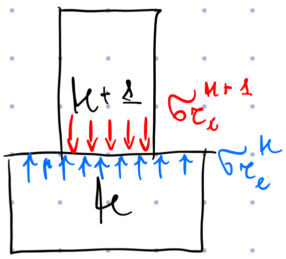
$$\begin{Bmatrix} u_e \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_e \\ n_i \end{Bmatrix}$$

$$u = \frac{D\,p_i}{2\,E}\left[\frac{\frac{D_i^2}{D^2}(1+\nu) + \frac{D_i^2}{D_e^2}(1-\nu)}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}}\right] - \frac{D\,p_e}{2\,E}\left[\frac{\frac{D_i^2}{D^2}(1+\nu) + (1-\nu)}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}}\right]$$

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ n_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a'}{c'} & b' - \frac{a'}{c'} \cdot d' \\ \frac{1}{c'} & -\frac{d'}{c'} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ n_i \end{Bmatrix}$$

Il Metodo di Grammel è un Metodo Numerico che consente di ottenere i Valori degli Spostamenti e delle Sollecitazioni all'interno di un disco a spessore Variabile.

Esso si Basa sul concetto che all'interfaccia dei Blocchi a spessore costante con i quali viene approssimato il disco, forze e Spostamenti sono uguali:



Per l'equilibrio delle forze: $(F_{r_e}^k = F_{r_i}^{k+1})$

$$\sigma_{r_i}^{k+1} \cdot b^{k+1} \cdot r_i^{k+1} \cdot \cancel{\theta} = \sigma_{r_e}^{k} \cdot b^{k} \cdot r_e^{k} \cdot \cancel{\theta}$$

Per la continuità: $r_e^{k+1} = r_i^{k+1}$

Quindi:

$$\sigma_{r_i}^{k+1} \cdot b^{k+1} = \sigma_{r_e}^{k} \cdot b^{k}$$

$$\downarrow$$

$$n_i^{k+1} = n_e^{k}$$

Inoltre, per la congruenza degli Spostamenti:

$$u_e^{k} = u_i^{k+1}$$

Gli spostamenti hanno queste espressioni:

$$\begin{cases} u_e = S\sigma_{r_e} + P\sigma_{r_i} + u_e^{\omega} + u_e^{T} \\ u_i = Q\sigma_{r_e} + R\sigma_{r_i} + u_i^{\omega} + u_i^{T} \end{cases}$$

Moltiplicandolo e dividendolo per b, si ottengono le variabili m

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & P' \\ Q' & R' \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_e \\ m_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{u}_e \\ \tilde{u}_i \end{Bmatrix}$$

Vorremmo portare a sinistra tutte le variabili al raggio esterno:

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^* \\ m^* \end{Bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix} + \{V\}$$

Specializzandole per i blocchi k, k+1

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix}_k = [T]_k \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix}_k + \{V\}_k$$

uguali

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix}_{k+1} = [T]_{k+1} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix}_{k+1} + \{V\}_{k+1}$$

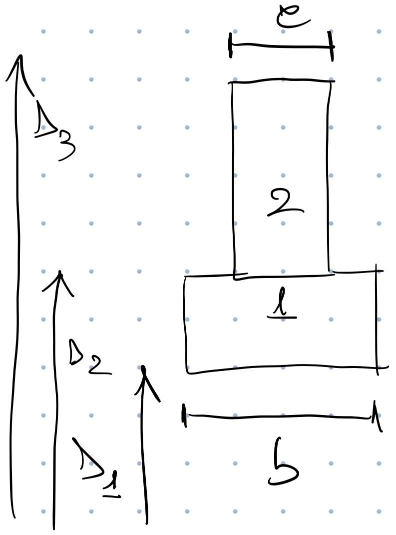
$$\begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix}_{k+1} = [T]_{k+1} \left([T]_k \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix}_k + \{V\}_k \right) \{V\}_{k+1}$$

Questo ragionamento va ripetuto per tutti i blocchi fino ad ottenere:

$$\begin{Bmatrix} M_e \\ m_e \end{Bmatrix}_N = [\tilde{T}] \cdot \begin{Bmatrix} M_i \\ m_i \end{Bmatrix}_1 + \{\tilde{V}\}$$

Nel caso in esame il vettore $\{\tilde{V}\}$ è nullo poi non ci sono spostamenti dovuti a rotazione e carico termico.

Il disco è approssimato con 2 blocchi:



$D_1 = 240$ mm

$D_2 = 300$ mm

$D_3 = 375$ mm

$b = 20$ mm

$$e = \frac{b + b/4}{2} = 12{,}5 \text{ mm.}$$

Il valore di $m_e^{(2)} = \sigma r_e \cdot e = 1250 \frac{N}{mm}$

Il valore di $m_i^{(1)} = 0$

Inoltre la matrice $[T]$ è pari a:

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{S'}{Q'} & P' - \frac{S'}{Q'} \cdot R' \\ \frac{1}{Q'} & -\frac{R'}{Q'} \end{bmatrix}$$

Dove:

$$S' = \frac{S}{b_i} \qquad P = \frac{P}{b_i}$$

$$Q' = \frac{Q}{b_i} \qquad R = \frac{R}{b_i}$$

e

$$S = \frac{D_e}{2E} \cdot \left[\frac{\frac{D_i^2}{D_e^2}(1+\nu) + (1-\nu)}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} \right]$$

$$P = -\frac{D_e}{2E} \cdot \left[\frac{\frac{D_i^2}{D_e^2} \cdot (1+\nu) + \frac{D_i^2}{D_e^2}(1-\nu)}{1 - \left(\frac{D_i}{D_e}\right)^2} \right]$$

$$Q = \frac{D_i}{2E} \cdot \left[\frac{2}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} \right]$$

$$R = -\frac{D_i}{2E} \cdot \left[\frac{(1+\nu) + \frac{D_i^2}{D_e^2} \cdot (1-\nu)}{1 - \frac{D_i^2}{D_e^2}} \right]$$

Quindi:

Blocco 1:

$S = 3,1917 \cdot 10^{-3}$ $\quad S' = 1,5958 \cdot 10^{-4}$

$P = -2,6667 \cdot 10^{-3}$ $\quad P' = -1,3334 \cdot 10^{-4}$

$Q = 3,333 \cdot 10^{-3}$ $\quad Q' = 1,6665 \cdot 10^{-4}$

$R = -2,9133 \cdot 10^{-3}$ $\quad R' = -1,4567 \cdot 10^{-4}$

Blocco 2:

$S = 3,8896 \cdot 10^{-3}$ $\quad S' = 3,1917 \cdot 10^{-4}$

$P = -3,333 \cdot 10^{-3}$ $\quad P' = -2,6664 \cdot 10^{-4}$

$Q = 4,1667 \cdot 10^{-3}$ $\quad Q' = 3,3334 \cdot 10^{-4}$

$R = -3,6417 \cdot 10^{-3}$ $\quad R' = -2,9134 \cdot 10^{-4}$

Quindi le Matrici $[T]$ sono:

$$[T]_1 = \begin{bmatrix} 0,9576 & 6,1536 \cdot 10^{-6} \\ 6000,6 & 0,8741 \end{bmatrix}$$

$$[T]_2 = \begin{bmatrix} 0,9575 & 1,4565 \cdot 10^{-4} \\ 2999,34 & 0,874 \end{bmatrix}$$

Esplicitando il Tutto:

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9575 & 1{,}4565\cdot 10^{-4} \\ 2999{,}34 & 0{,}874 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix}_2$$

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}9576 & 6{,}1536\cdot 10^{-6} \\ 6000{,}6 & 0{,}8741 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix}_1$$

Ma: $\begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix}_1$ Quindi:

— : Incognite

— : Valori Noti.

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9575 & 1{,}4565\cdot 10^{-4} \\ 2999{,}34 & 0{,}874 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}9576 & 6{,}1536\cdot 10^{-6} \\ 6000{,}6 & 0{,}8741 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix}_1$$

Sistema di 2 eq-ni in 2 incognite. Risolvendo:

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ 1250 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9575 & 1{,}4565\cdot 10^{-4} \\ 2999{,}34 & 0{,}874 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}9576\, u_i \\ 6000{,}6 \cdot u_i \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ 1250 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1{,}7909 \cdot u_i^{(1)} \\ 8117{,}27\, u_i^{(1)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} u_i^{(1)} = 0{,}154 \text{ mm} \\ u_e^{(2)} = 0{,}2758 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

Per calcolare i valori all'interfaccia:

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ m_e \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9576 & 6{,}1536\cdot 10^{-6} \\ 6000{,}6 & 0{,}8741 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ m_i \end{Bmatrix}_1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \underline{u_e^{(1)} = u_i^{(2)} = 0{,}1474 \text{ mm}} \\ \underline{m_e^{(1)} = m_i^{(2)} = 924{,}09 \ \frac{N}{mm}} \end{cases}$$

Calcoliamo quindi la σ_r e la σ_c.

Andamento a tratti delle sigma.

$$\sigma_r = \frac{m}{b} \longrightarrow \sigma_r(D_1) = \frac{m_i^{(1)}}{b} = 0$$

$$\sigma_r(D_2) = \frac{m_i^{(2)}}{b} = 46{,}2045 \text{ MPa} \ (73{,}927 \text{ MPa})$$

$$\sigma_r(D_3) = 100 \text{ MPa}.$$

Per quanto riguarda la σ_c, ricordo che:

$$\varepsilon_c = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}\cdot\left(\sigma_c - \nu\sigma_r\right) + \cancel{\alpha\Delta T} \rightarrow \text{NON PRESENTE}$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_c = \frac{E\cdot u}{r} + \nu\sigma_r \longrightarrow$$

$$\sigma_c(D_1) = 256{,}67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c(D_2) = 210{,}39 \text{ MPa} \ (218{,}71 \text{ MPa})$$

$$\sigma_c(D_3) = 324{,}187 \text{ MPa}$$

Riassumendo:

	u	σ_r	σ_c
D_1	0,154	0	256,67
D_2	0,1474	46,2045	210,39
D_3	0,2758	100	324,187