Analisi di un Oscillatore Van der Pol del Terzo Ordine

Francesco Grella
Andrea Melis

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

Introduzione e Obiettivi

- Si vuole fornire un'analisi esaustiva mediante simulazione in MATLAB di un *sistema non lineare del terzo ordine*

- L'analisi è stata effettuata combinando *metodi a 'Forza Bruta'* e *metodi di Continuazione*

- Gli obiettivi dell'analisi si sono concentrati sullo studio del comportamento del sistema al *variare dei parametri α e β*

- Molto importante è stato lo *studio della stabilità* e la *ricerca delle biforcazioni* nello spazio definito dai suddetti parametri

Descrizione del Sistema

- Il sistema in esame appartiene alla famiglia degli oscillatori di Van der Pol, un insieme di modelli nati in ambito elettrotecnico, relativamente alle valvole termoioniche

- Le equazioni sono espresse in spazio di stato tridimensionale (x, y, z) e dipendono da due parametri α *e* β, e sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(\,\alpha y\; - x^3 + 3\,x - \beta) \\ \dot{y} &= x - 2y + z \\ \dot{z} &= y - z \end{aligned}$$

- I valori dei parametri forniti, per la analisi iniziale sono α = 0.15 e β = 0

Considerazioni Iniziali

- Osservando le equazioni si nota che la *nonlinearità è concentrata nella prima equazione*, relativa all'evoluzione di x, più precisamente in un termine cubico $-x^3$

- Entrambi *i parametri* sono presenti solo nella *prima equazione* di stato, quindi la variazione di α *e* β andrà a influenzare l'andamento di $\dot{x}$

- Le equazioni $\dot{y}$ e $\dot{z}$ *sono invece lineari* in quanto somme di termini lineari, del tipo $'ay'$ con a costante e y generica variabile di stato

Analisi delle Isocline Nulle I

- Il punto di partenza dell'analisi è stato effettuato studiando il *comportamento delle isocline nulle*, ovvero le curve/superfici per i quali il *flusso* del campo vettoriale dato da $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ *risulta nullo*

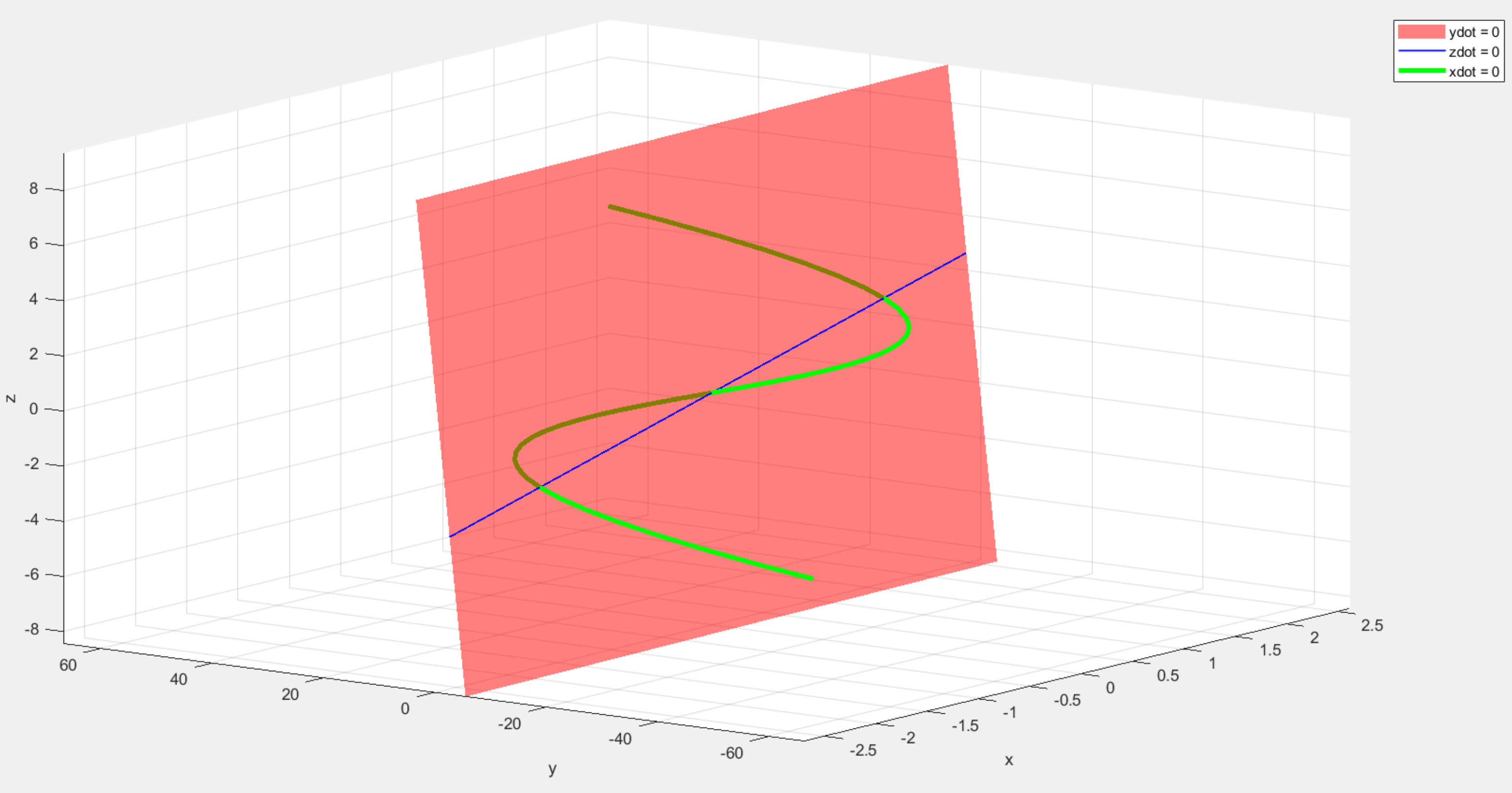
- Le isocline nulle del sistema sono le seguenti:

$$\alpha y \ - x^3 + 3\,x \text{ - } \beta = 0$$
$$x - 2y + z = 0$$
$$y - z = 0$$

- L'obiettivo è ricavare i *punti di equilibrio* nello spazio di stato *osservando le intersezioni* tra la curva $\dot{x} = 0$, il piano $\dot{y} = 0$ e la retta $\dot{z} = 0$, che giace sul piano. Tramite visualizzazione delle isocline nulle è stato inoltre possibile evidenziare la *simmetria del sistema*

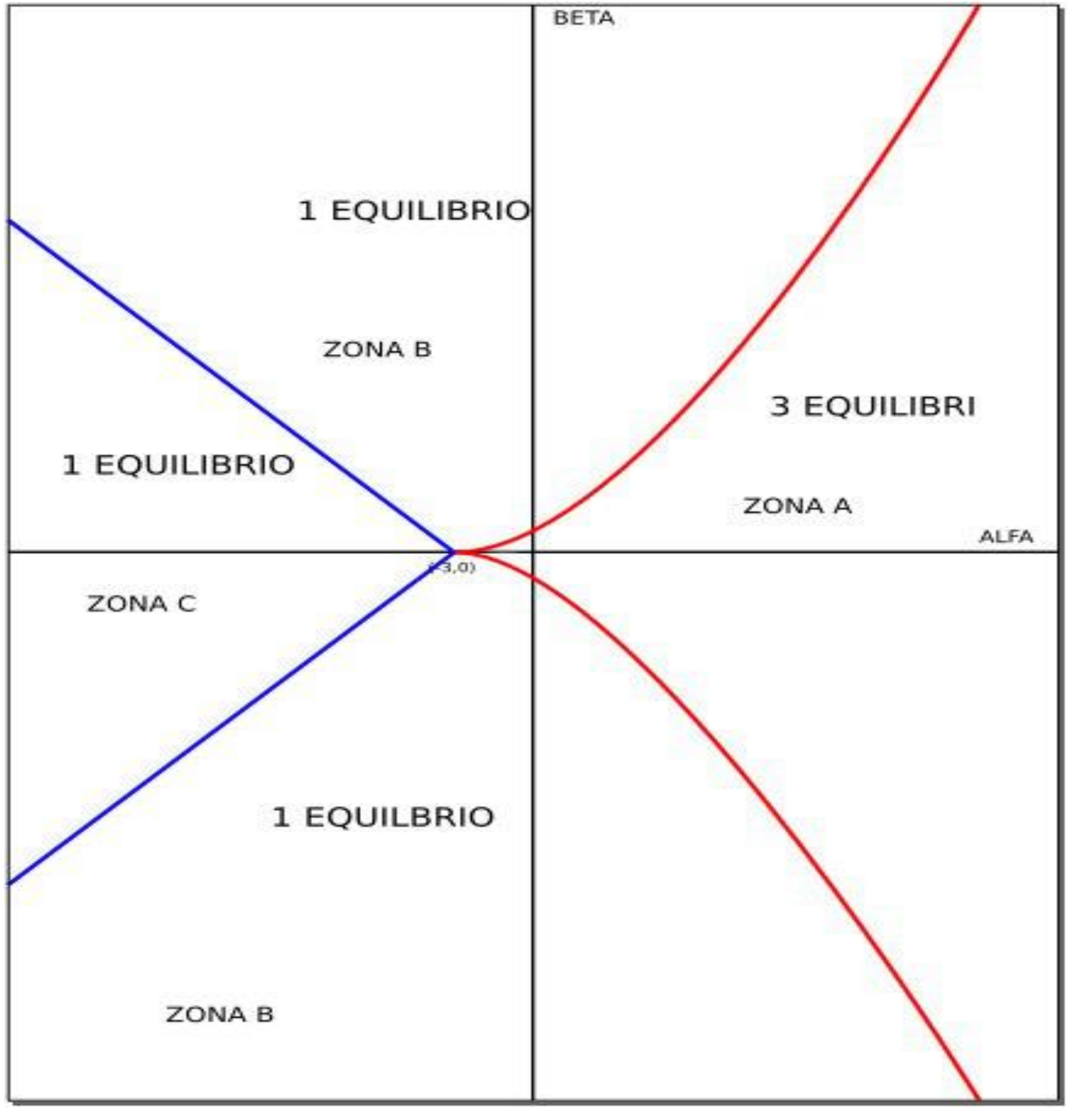
Analisi delle Isocline Nulle II

- In figura è mostrato il luogo delle isocline nulle ottenuto in Matlab per $\alpha = 0.15$ e $\beta = 0$. La simmetria del sistema, in particolare del termine non lineare, è evidente. Sono ben visibili i *tre punti di equilibrio*, uno nell'origine e gli altri due simmetrici ad esso



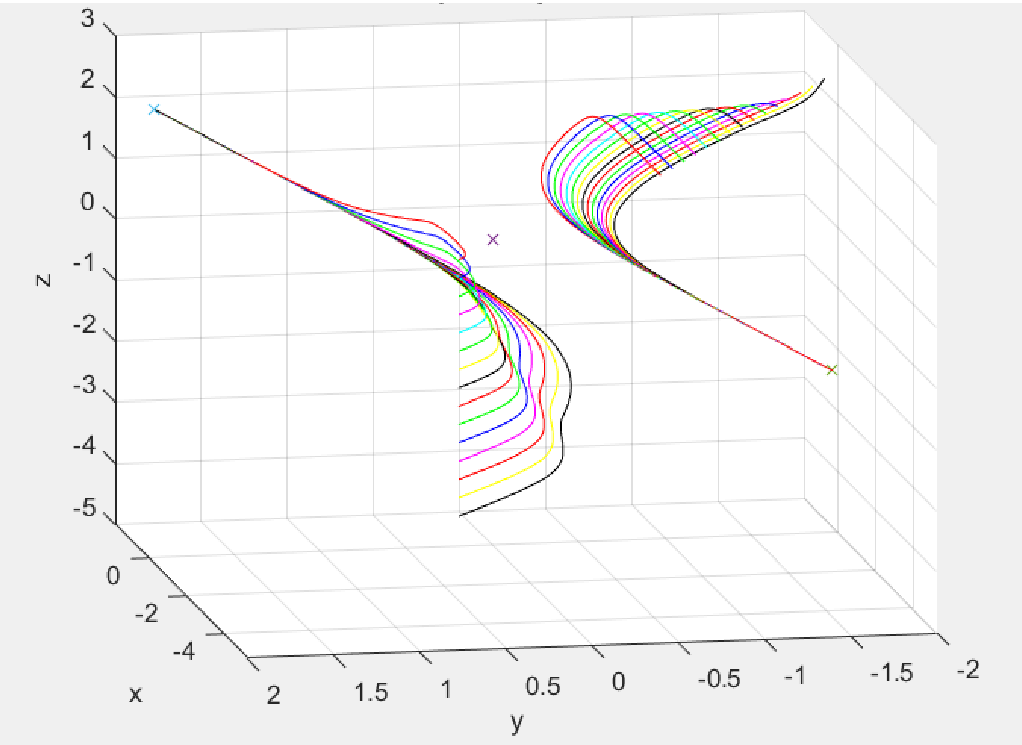
Il *Piano dei Parametri*

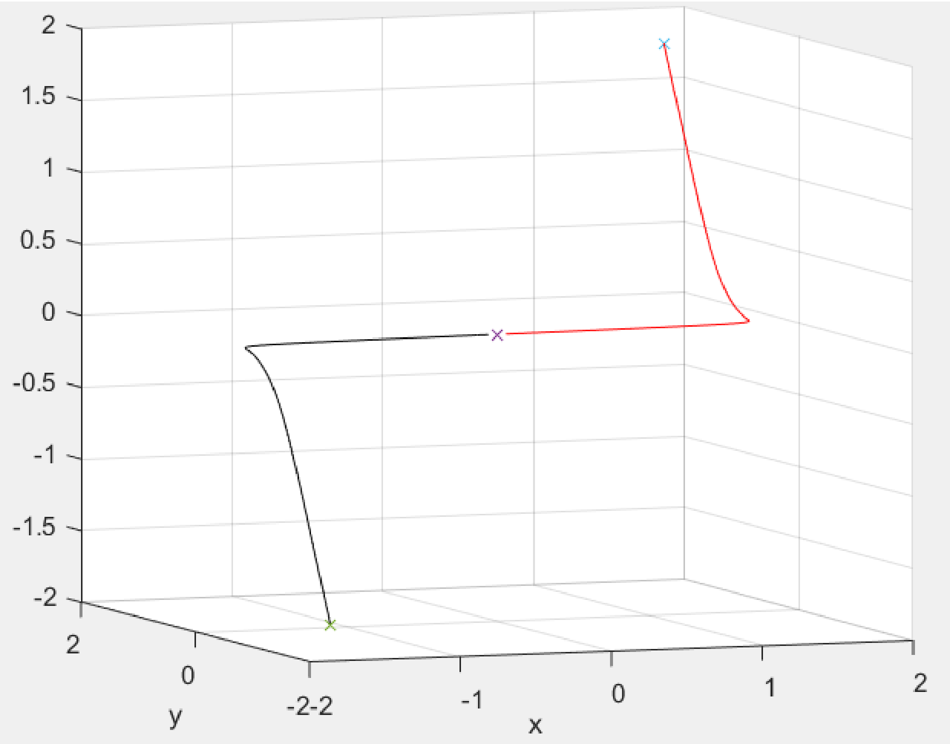
- L'immagine mostra il *piano dei parametri* con il diagramma di biforcazione ricavato durante l'analisi. Nel seguito saranno analizzate le *proprietà delle varie regioni*.



Regione A

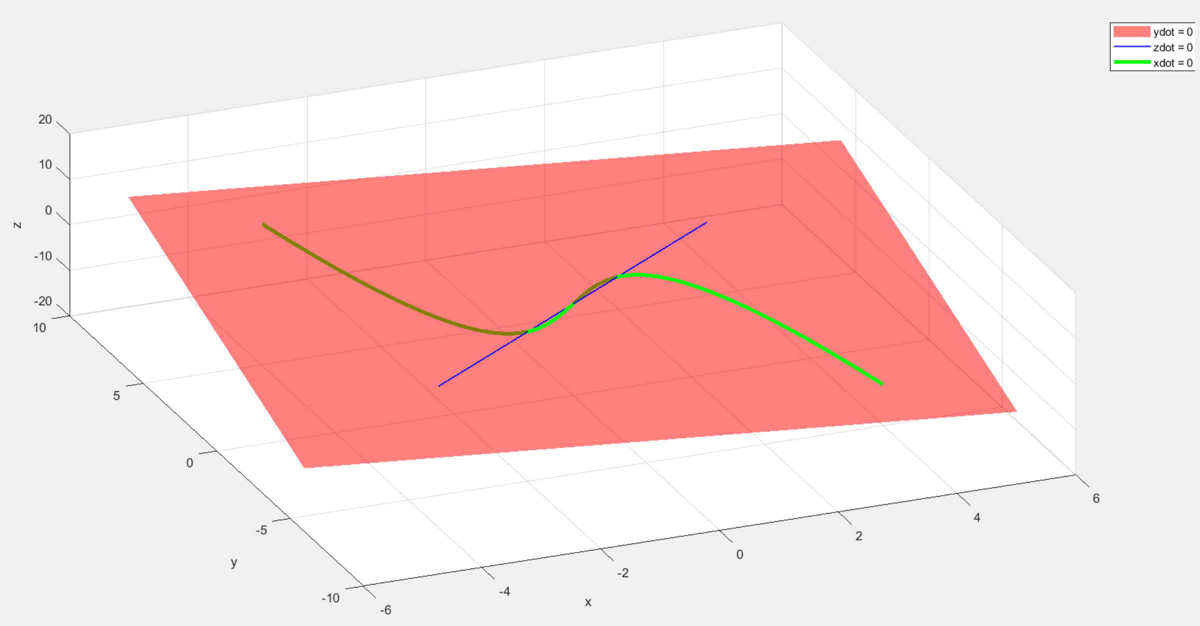
- La prima regione analizzata, indicata con ‘A’, alla quale appartiene anche il punto $(\alpha, \beta) = (0.15, 0)$, è caratterizzata dalla presenza di *3 equilibri:* analizzando gli autovalori del sistema linearizzato (quindi della Jacobiana) in ciascuno di essi si evince che il sistema ha *2 equilibri stabili in (1.77,1.77,1.77) e (-1.77, -1.77, -1.77)* e una *sella in (0,0,0)* con *varietà stabile* di *dimensione 2* e *varietà instabile* di *dimensione 1*.



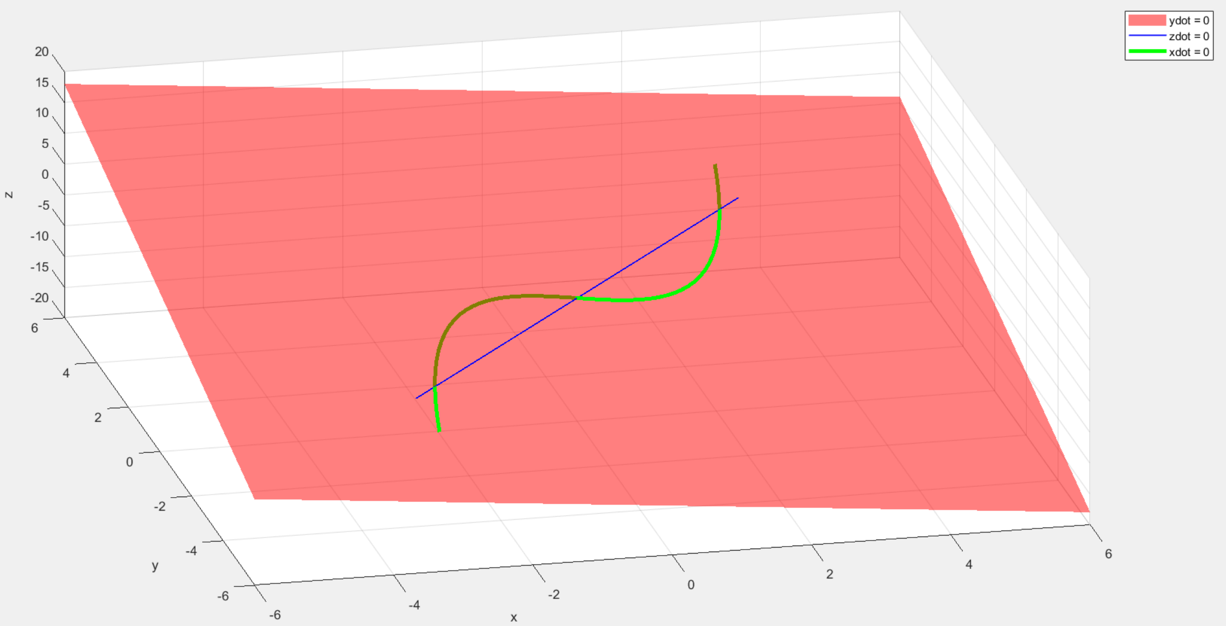


Regione A – Variazione di α

- Muovendosi all'interno della regione la variazione dei parametri comporta alcune conseguenze: Al variare di α si agisce sul termine lineare che 'guida' l'inclinazione del termine cubico nell'origine, quindi si assiste a una *distensione (incremento di α)* o a una *contrazione(decremento di α)* progressive. Entro i limiti della regione ciò risulta in un *allontanamento*/*avvicinamento* degli equilibri stabili rispetto all'origine.



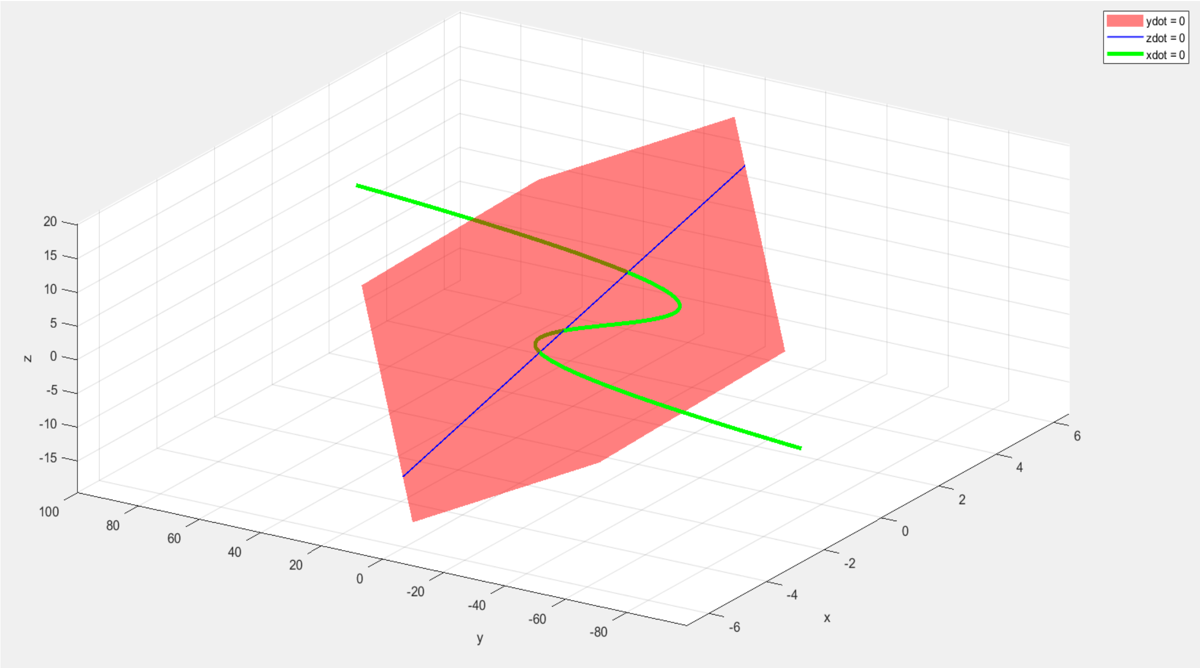
$\alpha = -2, \beta = 0$ Equilibri Stabili in +/- [1,1,1]



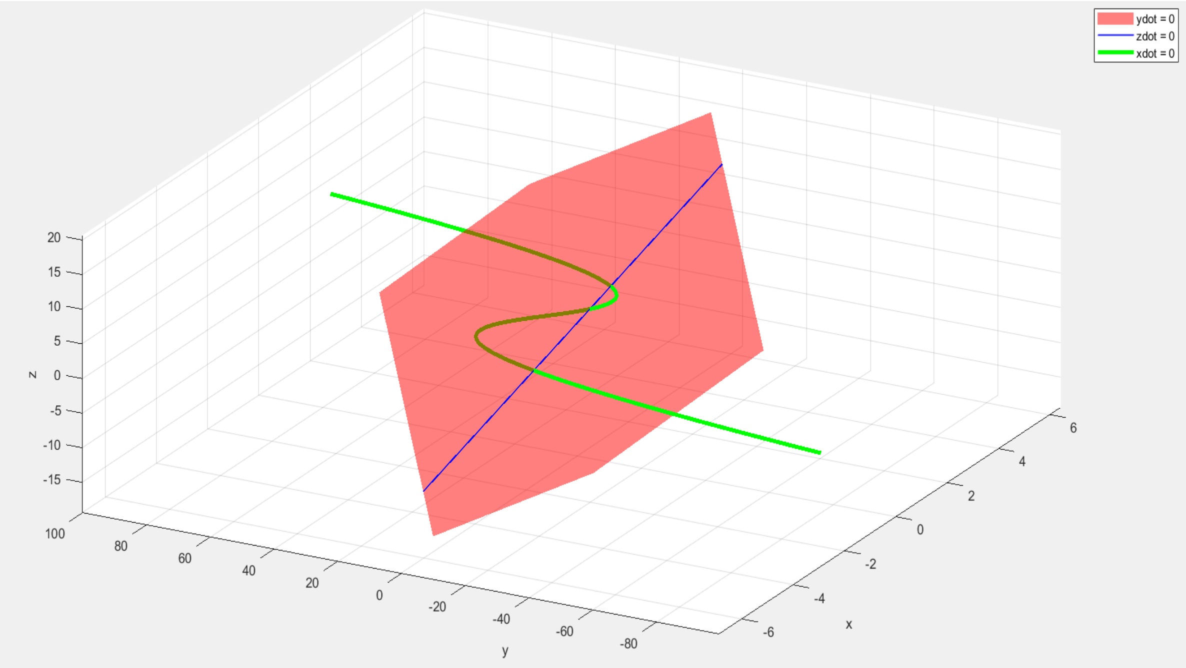
$\alpha = 4, \beta = 0$ Equilibri Stabili in +/- [2.645, 2.645, 2.645]

Regione A – Variazione di β

- Al variare del parametro β si va invece ad agire su un *termine costante* che è *sommato alla cubica*, quindi ciò che si può considerare un offset della funzione stessa.
  All'aumentare/diminuire di β si ha un *comportamento simmetrico* per il quale gli *equilibri si spostano* lungo la linea evidenziata in blu, corrispondente a $\dot{z} = 0$



$\alpha = 0.15, \beta = -1.5$ *Nodo Stabile* in -[1.456,1.456,1.456]
Nodo Stabile in [1.977,1.977,1.977]
Punto Sella in -[0.521,0.521,0.521]



$\alpha = 0.15, \beta = 1.5$ *Nodo Stabile* in [1.456,1.456,1.456]
Nodo Stabile in -[1.977,1.977,1.977]
Punto Sella in [0.521,0.521,0.521]

Confine Regione A – *Biforcazioni Fold*

- Al variare di β oltre un certo valore, *sia in negativo che in positivo* per simmetria, si va incontro alle prime biforcazioni trovate durante l'analisi

- Detta anche *biforcazione Sella-Nodo*, per il fatto che è data dalla collisione tra un Nodo ed un Punto Sella

- Viene definita come 'meccanismo base per la *creazione* e la *distruzione* di punti fissi', ed è una biforcazione di *Codimensione 1*

- Nell'oscillatore analizzato avviene quando, per α appartenente alla regione A, ho $\beta \geq 2.16$ oppure $\beta \leq -2.16$, ho in entrambi i casi la collisione tra il Punto Sella e uno dei due Nodi Stabili, con conseguente *distruzione di entrambi*.

Confine Regione A – *Biforcazioni Fold II*

- Nel seguito è mostrato il grafico delle isocline nulle per $\beta = 2.5$: si può notare che è appena avvenuta una *collisione tra i due invarianti*, ed è rimasto un solo *Nodo Globalmente Stabile* in -[2.08,2.08,2.08], con l'intero spazio come *bacino di attrazione*.

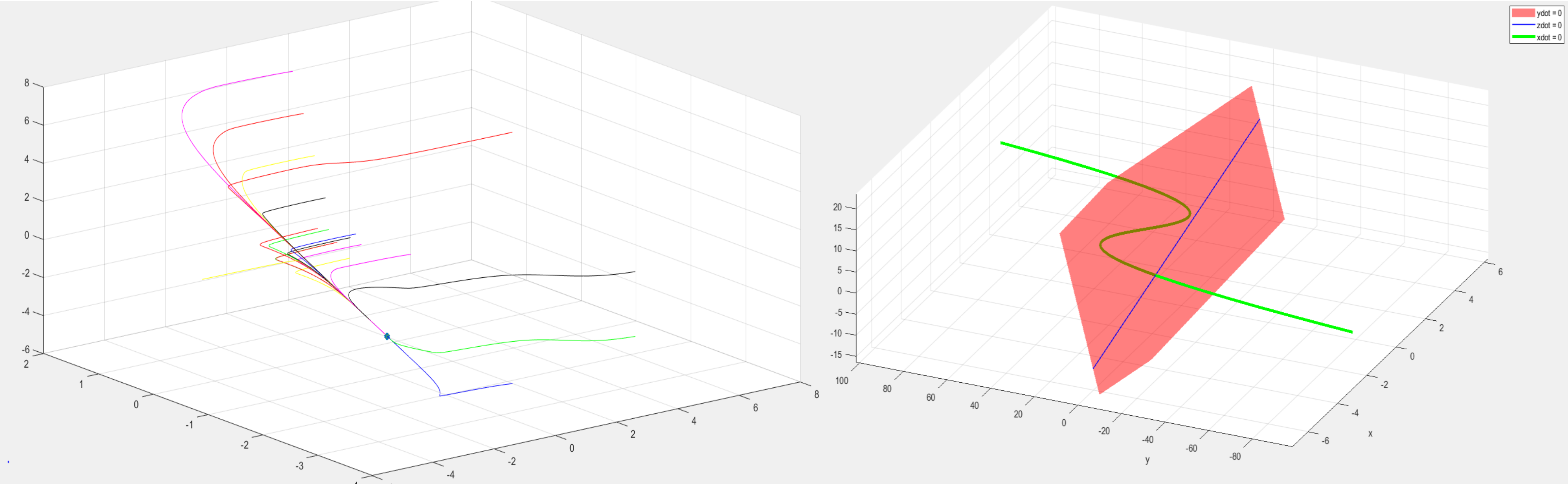
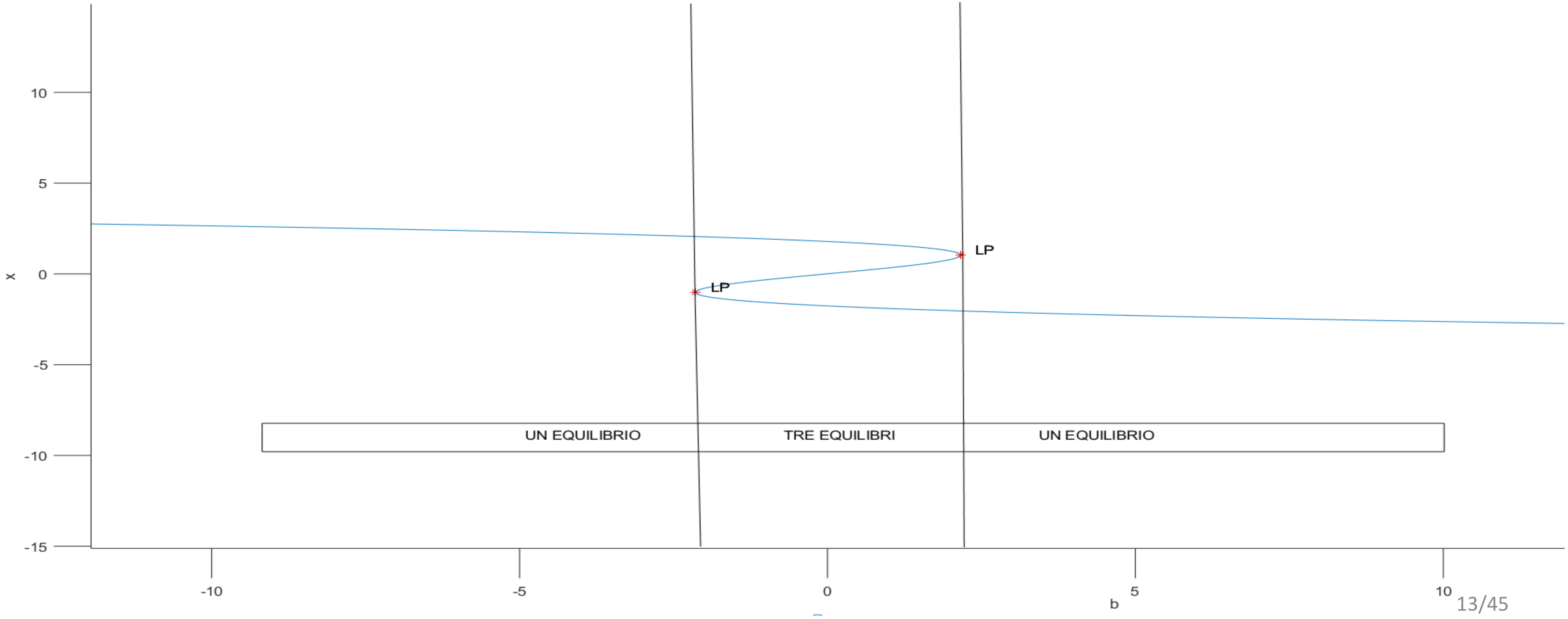


Diagramma di *Biforcazione Fold*

- Ottenuto con Matcont, mette in evidenza il comportamento dei punti di equilibrio al variare di β nella regione considerata.



Biforcazione Cusp - Introduzione

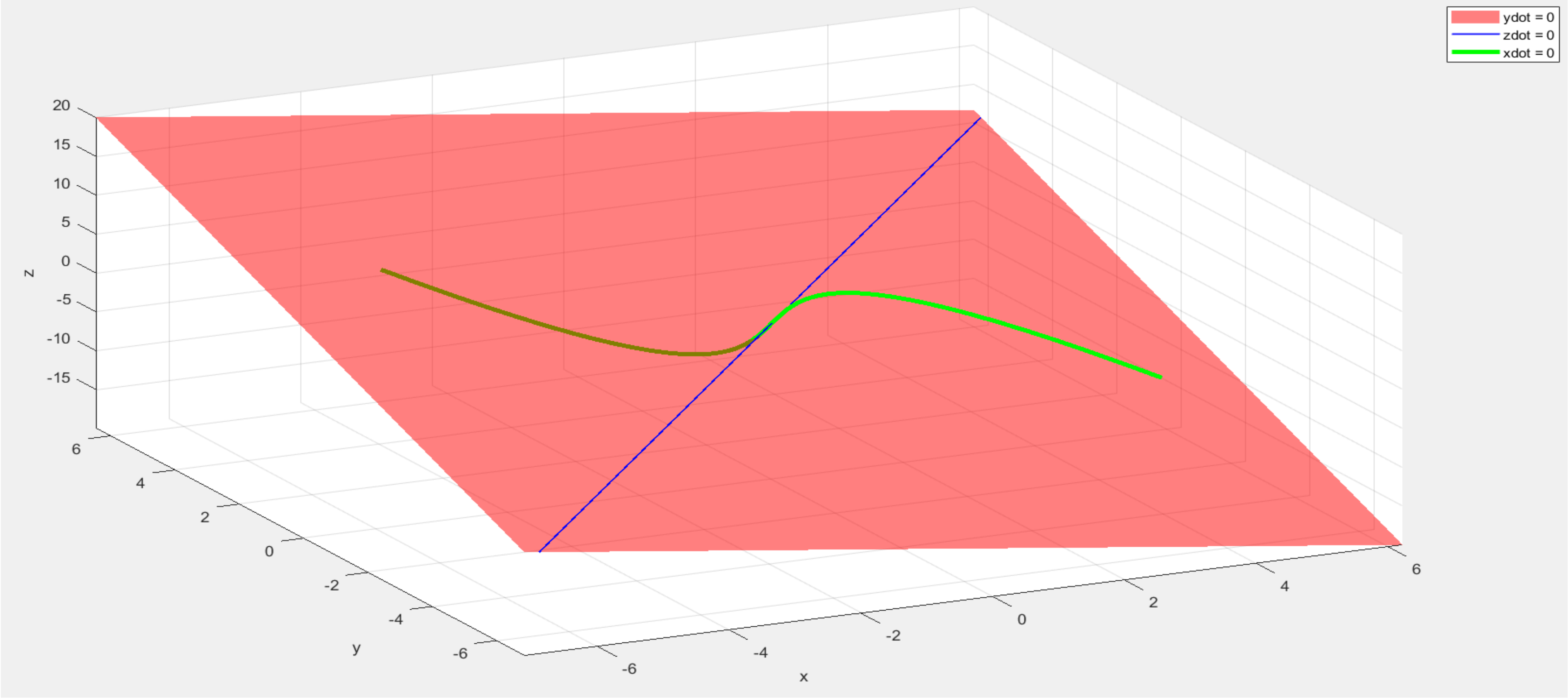
- Il diagramma di biforcazione si ottiene *continuando uno dei due punti di biforcazione Fold*, evidenziati in precedenza.

- Definita come *Fold Generalizzata*, è una biforcazione di *Codimensione 2*; il suo luogo segue i punti che soddisfano la condizione di biforcazione Fold, quindi due curve simmetriche sul piano (α, β) che si incontrano e terminano nel punto $(\alpha, \beta) = (-3,0)$

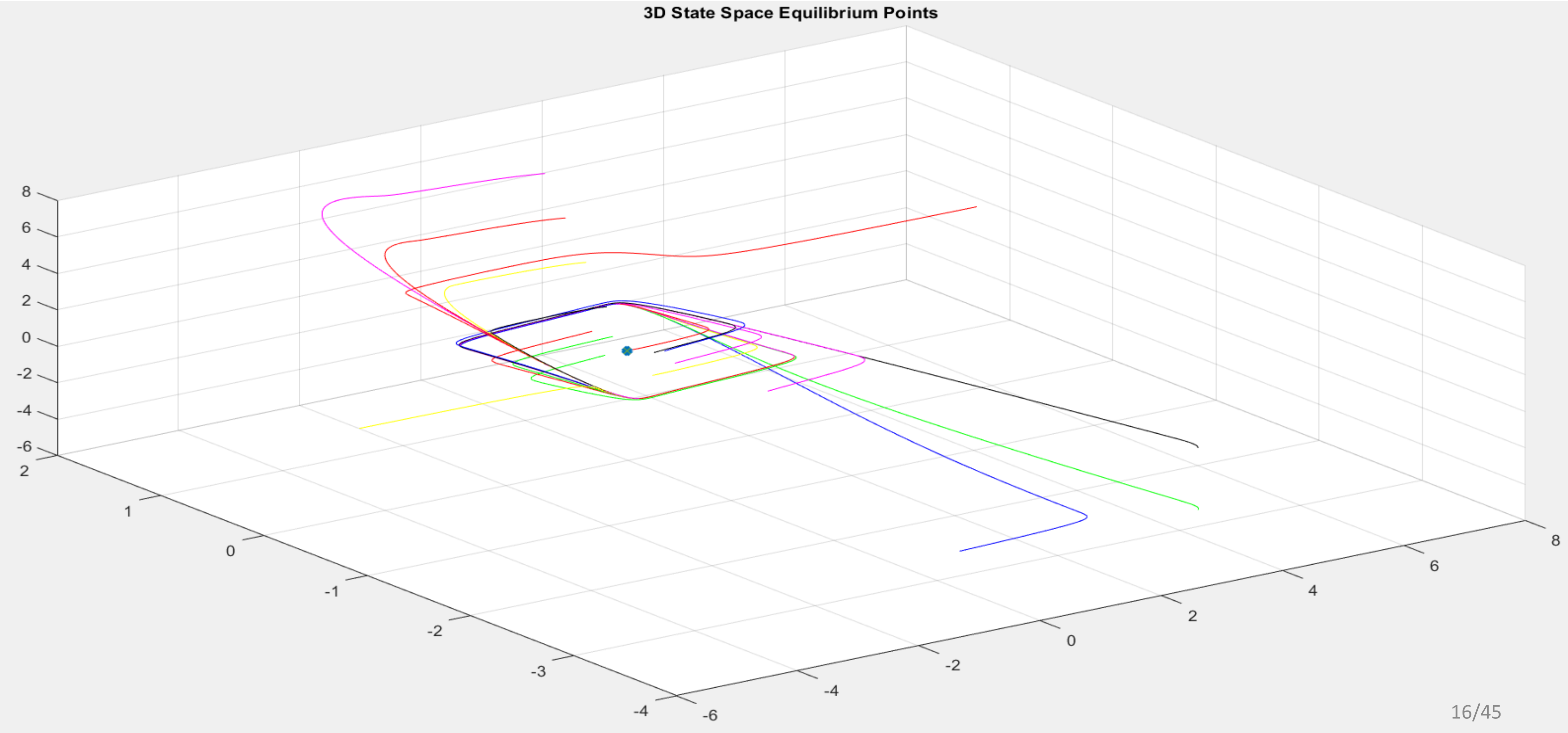
- Riguardo le isocline nulle si ha una *distensione del termine cubico* che di fatto annulla le due 'anse' che intersecano il piano $\dot{y} = 0$ e la retta $\dot{z} = 0$, lasciando un solo equilibrio che per $\beta = 0$ è localizzato nell'origine.

Biforcazione Cusp – Isocline Nulle

- Nella figura sono mostrate le Isocline Nulle del sistema per $(\alpha, \beta) = (-3,0)$, risulta evidente il fatto che i due nodi stabili si sono avvicinati in modo simmetrico all'origine fino a collidere con essa.

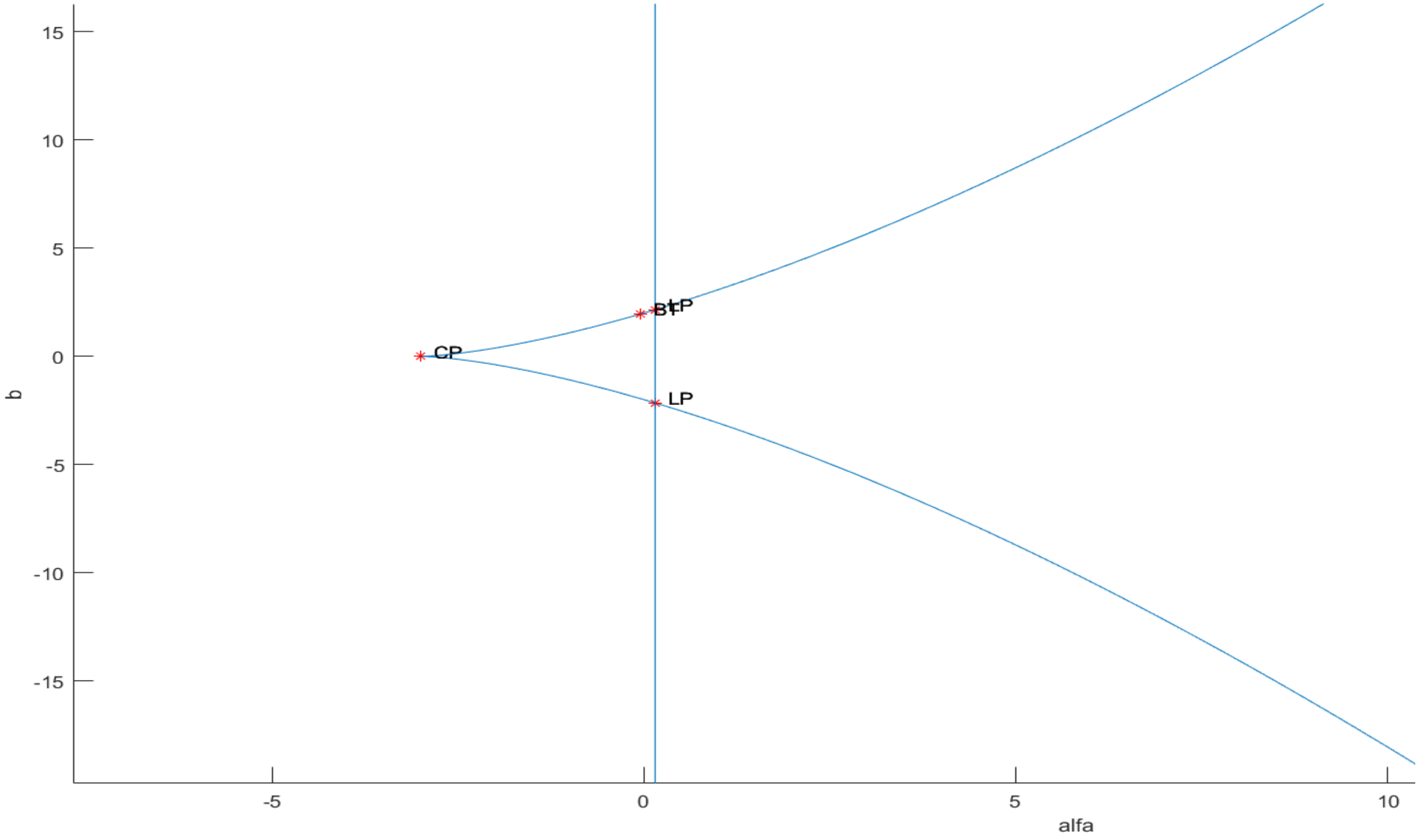


Biforcazione Cusp – Spazio di Stato



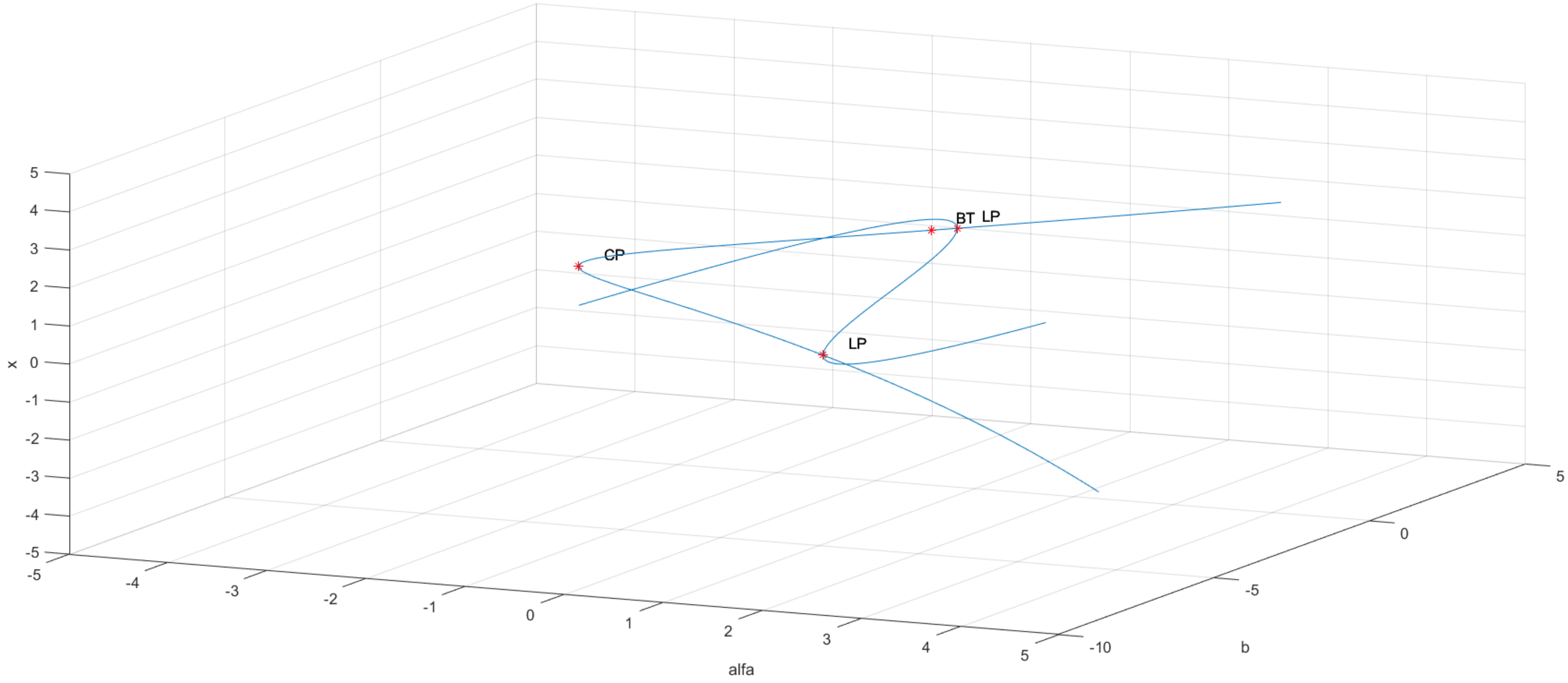
Biforcazione Cusp – Piano dei Parametri

- Sul piano (α, β) sono evidenti le due curve simmetriche descritte in precedenza. Individuano e *racchiudono la regione* in cui il *sistema ha tre equilibri*, *altrove* il sistema ne ha *solo uno*



Biforcazione Cusp – Spazio di Controllo

- Qui è fornita un'ultima 'vista' della regione associata alla biforcazione Cusp, con una terza dimensione rappresentata dalla variabile di stato x.



Biforcazione Hopf – Introduzione

- Biforcazione di *Codimensione 1*, localizzata *simmetricamente* per $\alpha \leq -3$ per valori positivi e negativi di β.

- Al di sotto della curva ho un *Ciclo Limite Stabile* localizzato intorno al Punto di Sella, l'origine nel caso di $\beta = 0$.

- La biforcazione in questione è una *Hopf Supercritica*, caso non catastrofico, nel quale il *ciclo generato gradualmente* dall'attraversamento da parte di due autovalori complessi coniugati della frontiera di stabilità risulta stabile.
  Tale affermazione è supportata dall'analisi in Matcont, che restituisce una funzione detta *Primo Coefficiente di Lyapunov*, negativa nel caso di Hopf Supercritica, nello specifico del valore di -1.513.

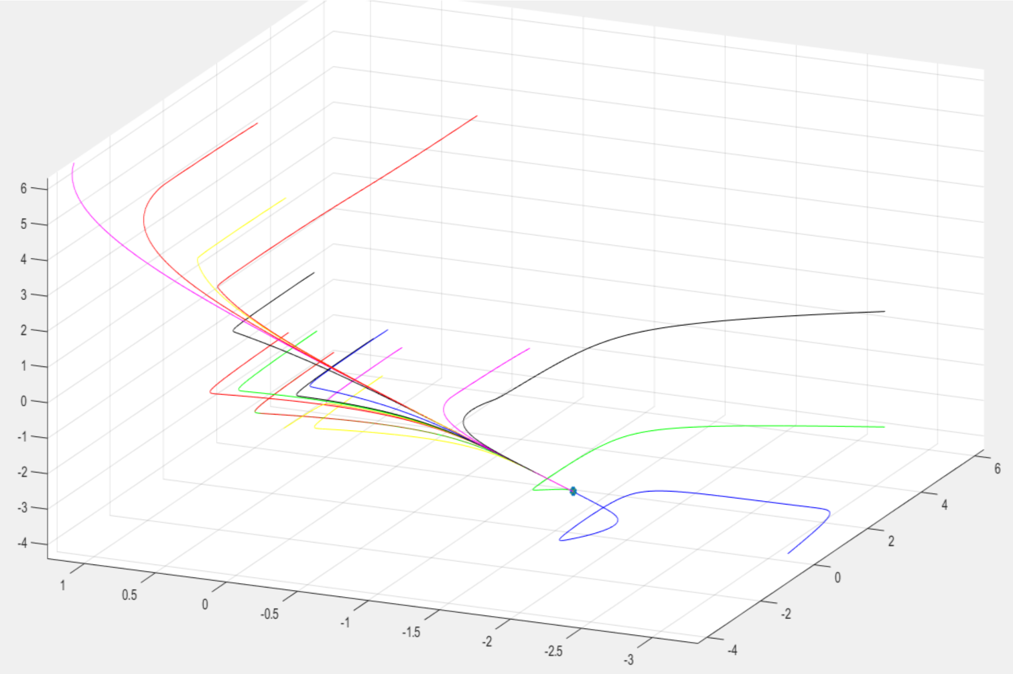
Biforcazione Hopf – Spazio di Stato

- Qui sono mostrate le traiettorie nello spazio 3D di stato a cavallo della biforcazione Hopf. Il punto sulla curva di biforcazione sulla curva è stato scelto in (α, β) = (-9,6.8). Un risultato analogo si ottiene per $\beta = -6.8$

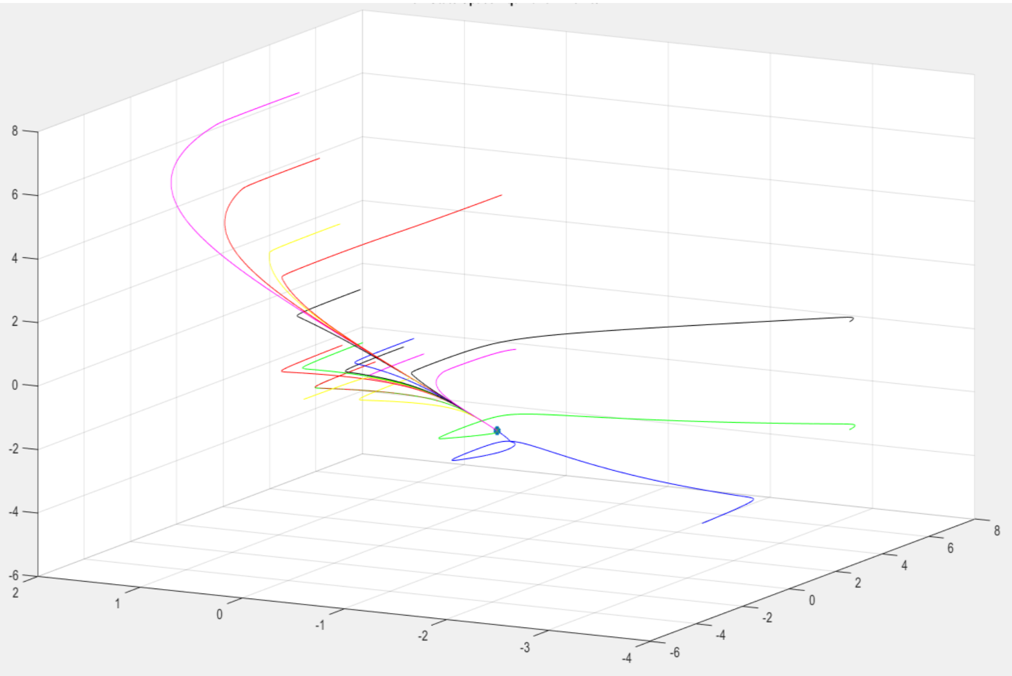
- Per analizzare in dettaglio la biforcazione, l'idea è stata quella di proporre una *'sequenza di eventi'* mostrando le traiettorie nello spazio di stato, per un valore costante di α, partendo da un β abbastanza lontano dalla curva, per il quale *l'equilibrio è un nodo stabile*, ed avvicinarsi fino ad attraversare la curva riducendo β, per rappresentare la creazione del ciclo stabile.

Sequenza Biforcazione Hopf - I

- Tenendo α fissato, si parte da un valore $\beta = 20$, regione in cui si ha un solo equilibrio stabile, e si prosegue diminuendo il valore avvicinandosi al punto di biforcazione.



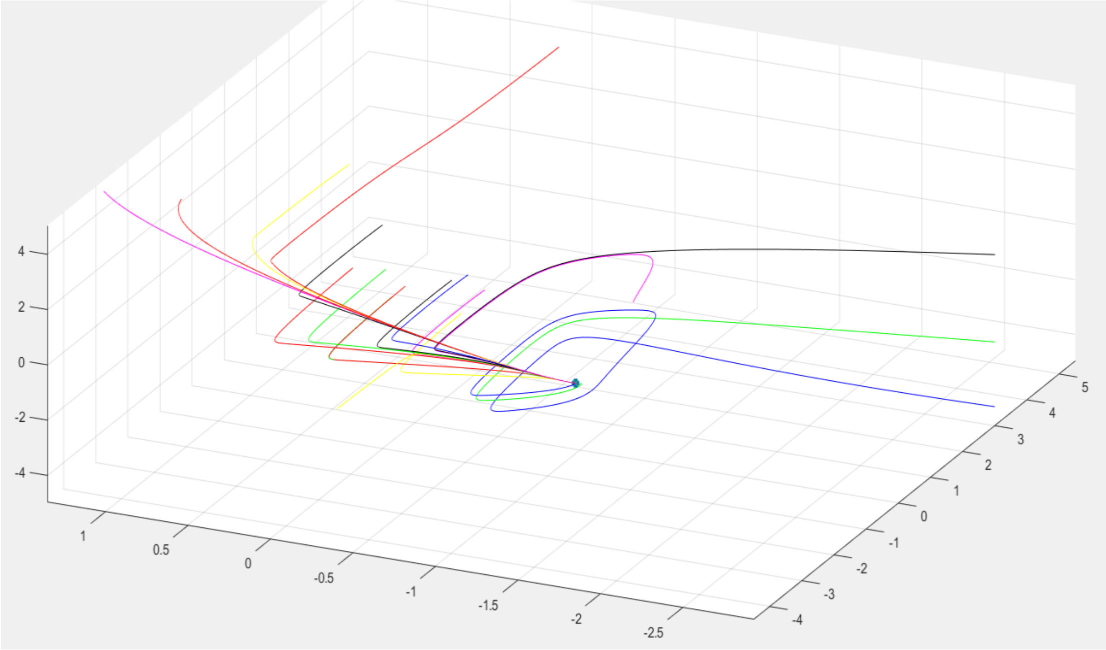
$\beta = 20$



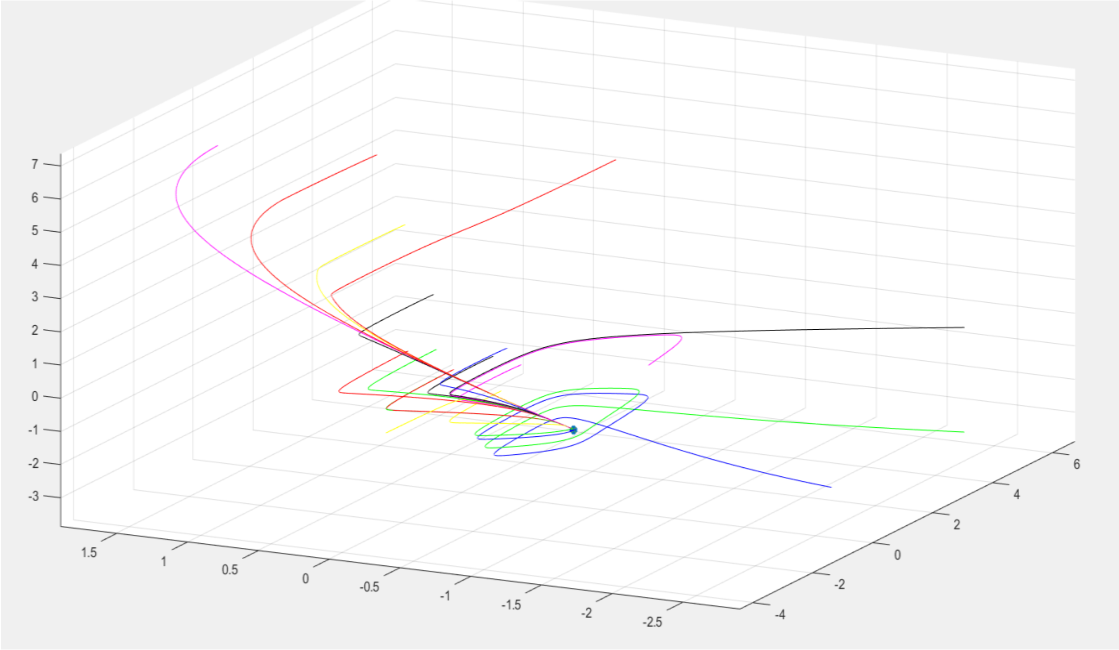
$\beta = 12$

Sequenza Biforcazione Hopf - II

- In questa figura ci si sta avvicinando al punto di biforcazione. Ora l'equilibrio è un *Nodo-Fuoco Stabile*, in quanto possiede due *Autovalori Complessi Coniugati* a parte reale negativa



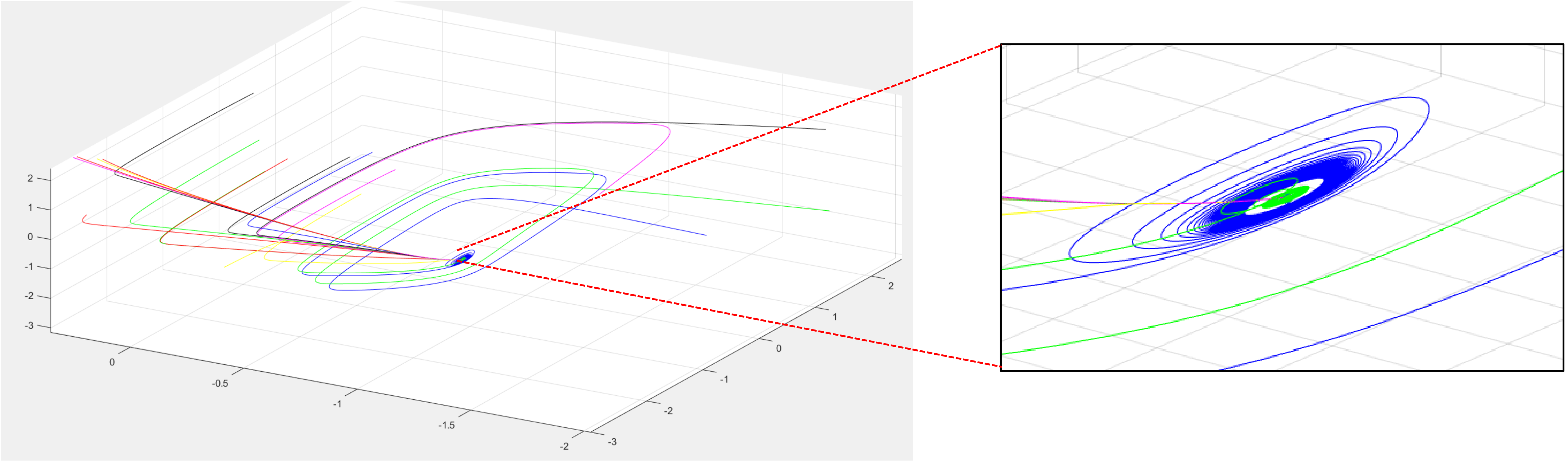
$\beta = 7.5$



$\beta = 7$

Sequenza Biforcazione Hopf - III

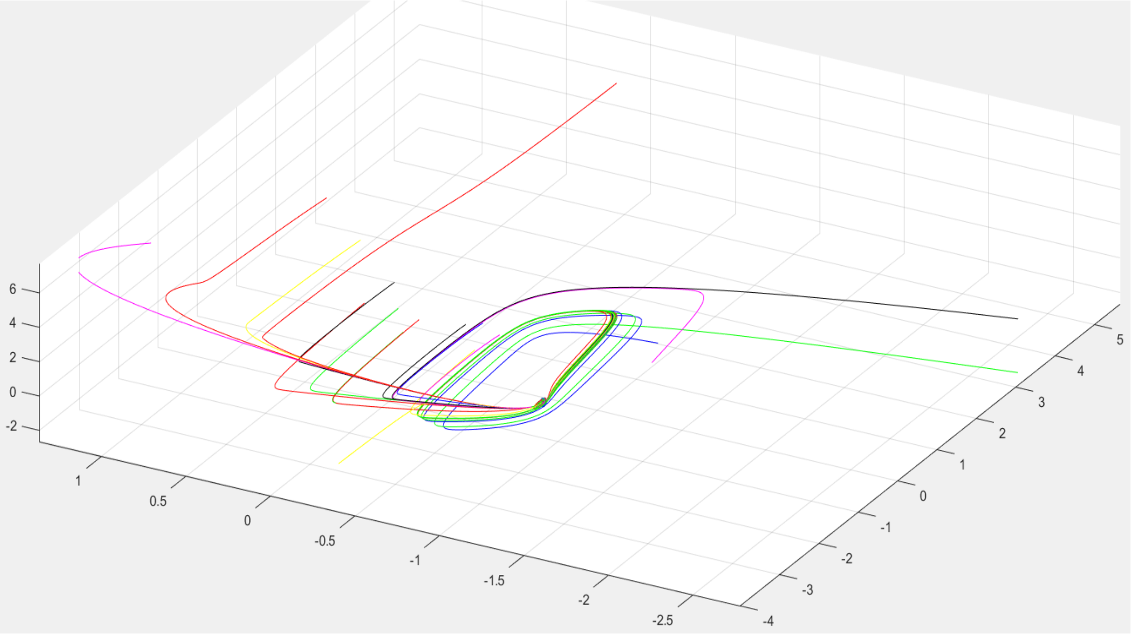
- Ponendosi ora *appena al di sotto* del valore di biforcazione comincia ad apparire evidente la formazione del *ciclo limite stabile*.



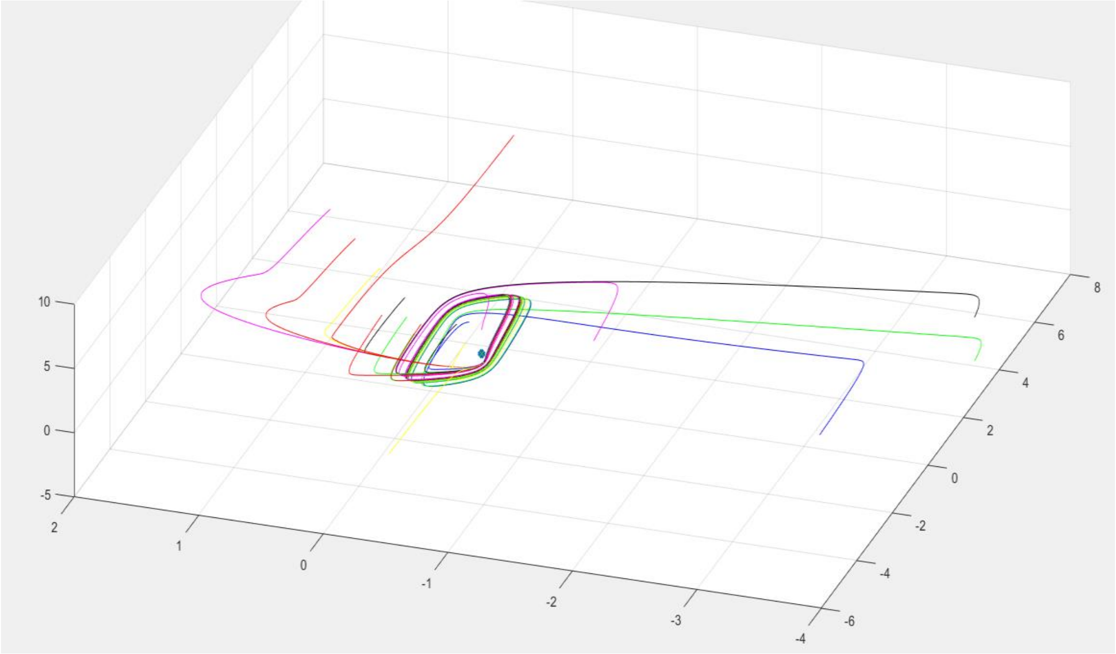
$\beta = 6.7$

Sequenza Biforcazione Hopf - IV

- Continuando a diminuire β si ha il *Ciclo Limite Stabile*, *proseguendo in negativo* ci si dirige verso il punto di biforcazione simmetrico, che comporterà la scomparsa del ciclo a β=-6.8. L'*equilibrio* è ora una *Sella*, ha due autovalori complessi coniugati a Re>0 ed uno reale negativo.



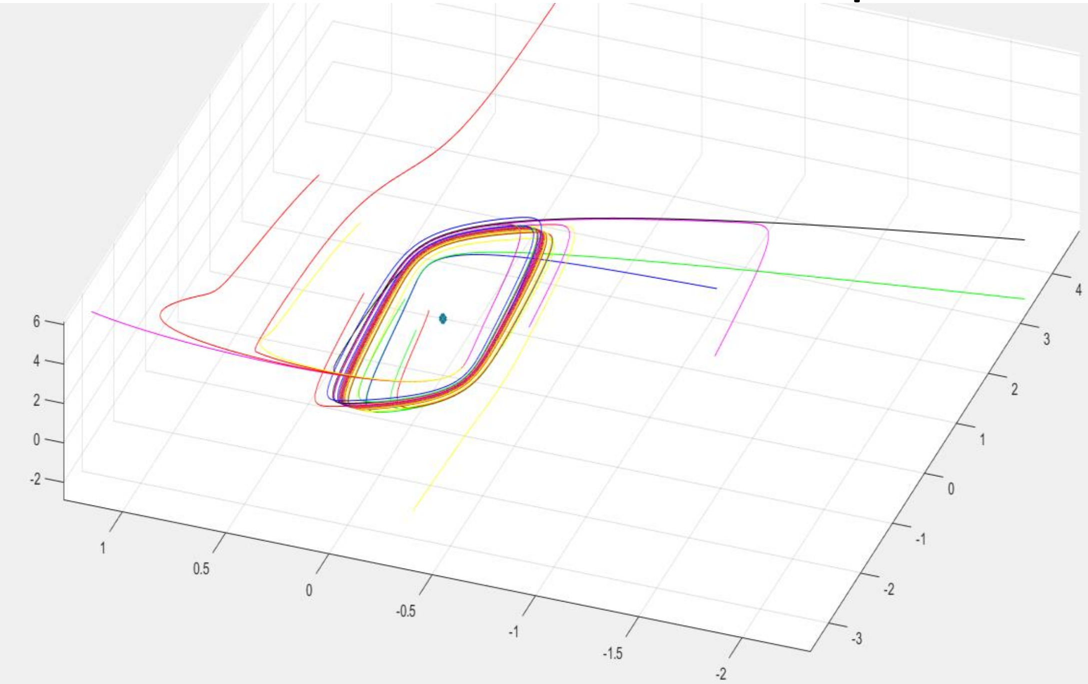
$\beta = 6$



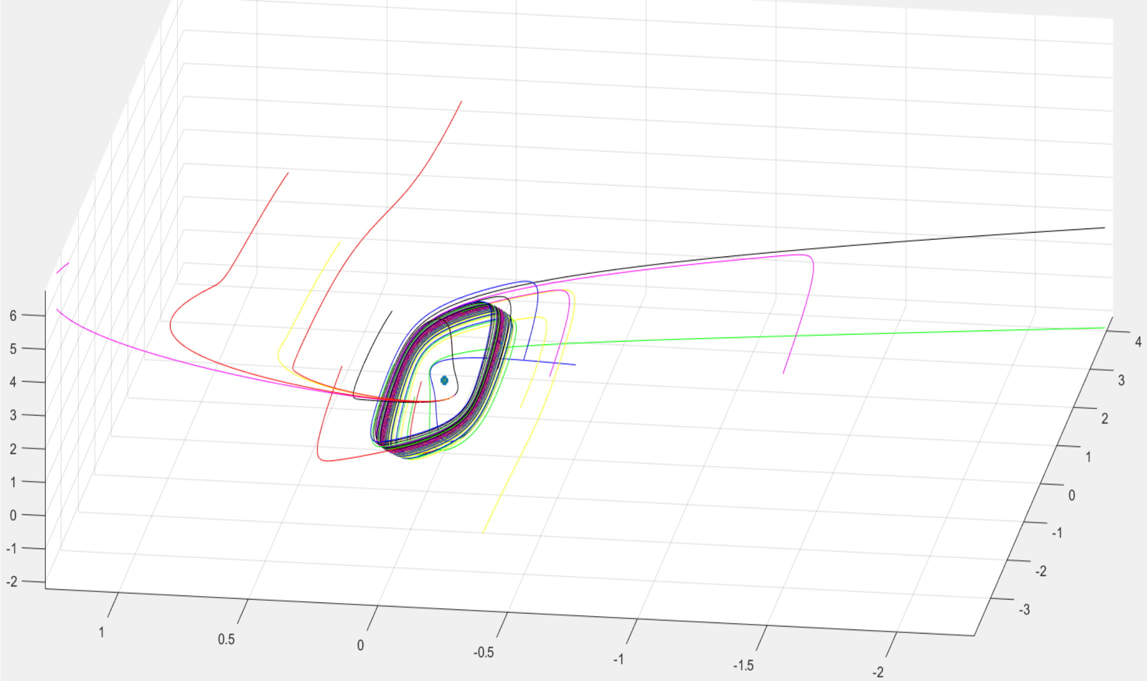
$\beta = 3$

Sequenza Biforcazione Hopf - V

- Per β=0 sono evidenti il Punto di Sella (con autovalori reali, dimensione di varietà instabile pari a 2) ed il ciclo limite nella forma caratteristica degli oscillatori Van der Pol. Diminuendo ulteriormente α invece si ottiene un aumento delle oscillazioni prima della convergenza al ciclo



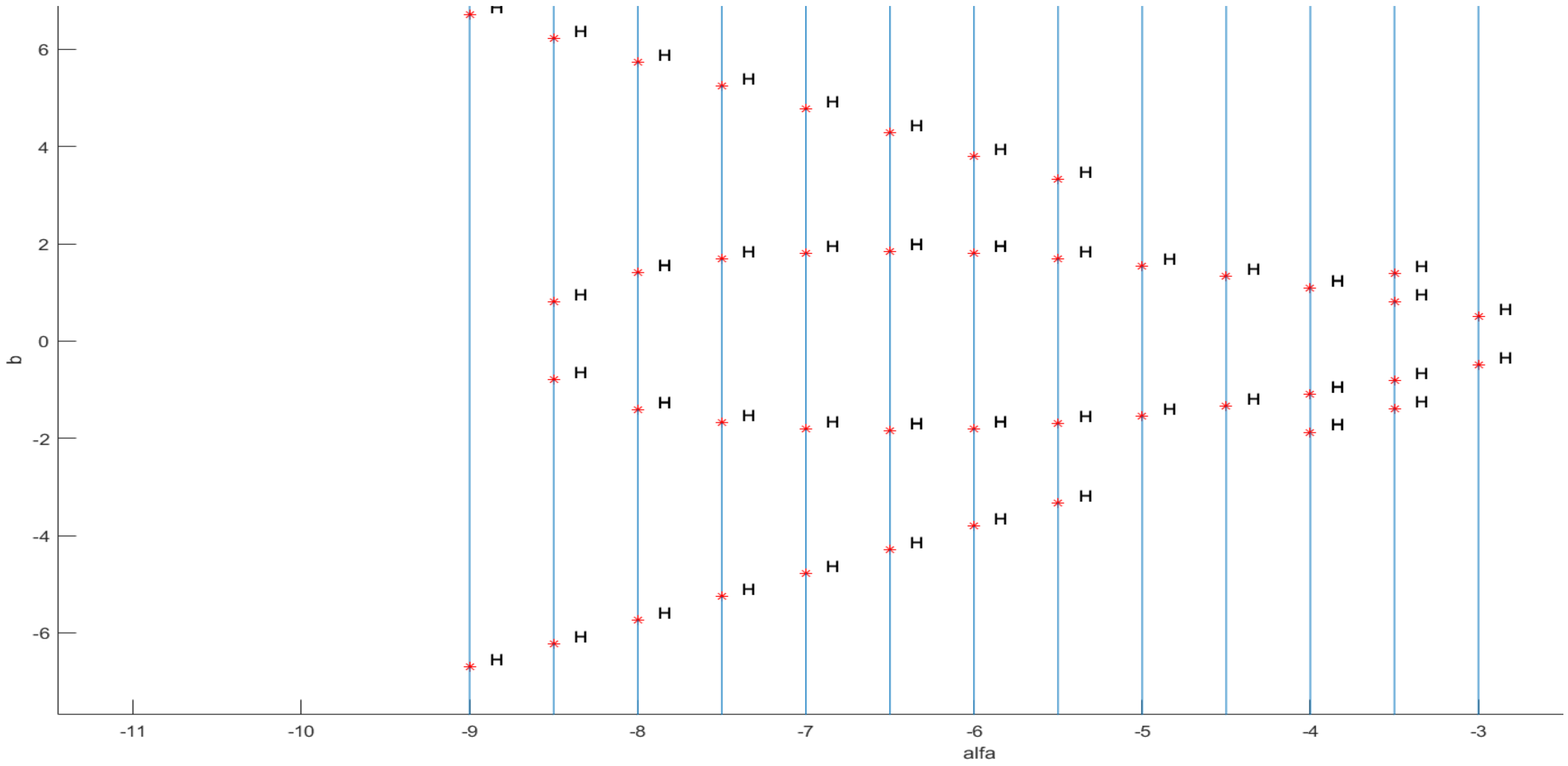
α = -9



α = -20

Biforcazione Hopf in Matcont

- Utilizzando Matcont, continuando equilibri al variare di β, si è ricavato, a meno di alcuni punti, il profilo delle curve di biforcazione Hopf.
- Le due ‘curve’ più interne corrispondono invece a delle ‘Neutral Saddles’



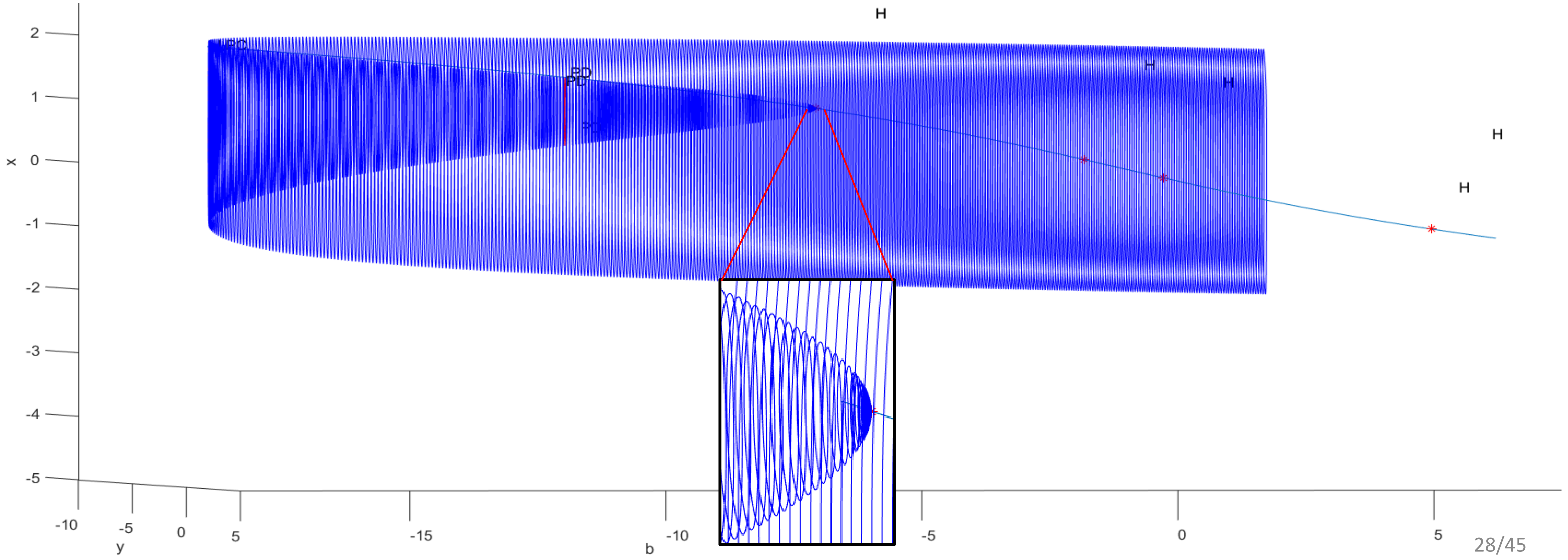
Continuazione della Hopf – Cicli Limite

- Per concludere l'analisi del sistema, sono state effettuate delle *continuazioni* nei punti di biforcazione *Hopf* trovati. Quanto segue è mostrato per un singolo punto, ma i risultati sono simili per ogni punto delle curve Hopf.

- In particolare sono stati evidenziati i *cicli limite nello spazio di controllo*, inoltre sono stati rilevati *Raddoppiamenti di Periodo* e una *Biforcazione Fold di Ciclo*, segnalata con la label 'LPC' da Matcont.

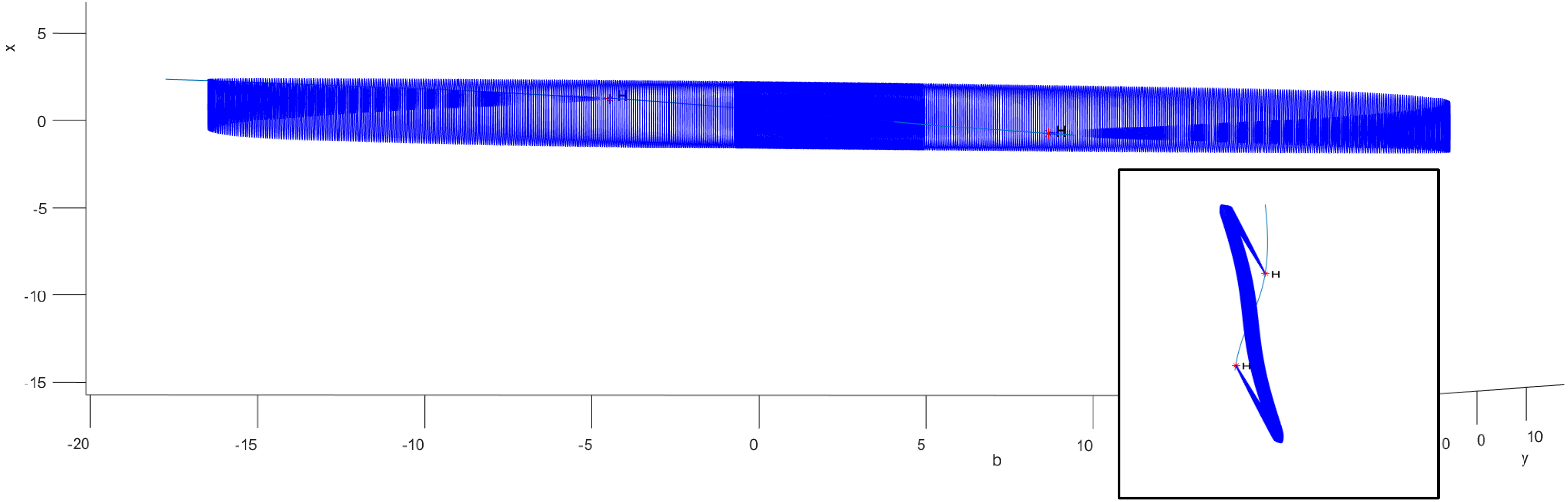
Cicli Limite

- Lo spazio di controllo considerato comprende le due variabili di stato x, y, e il parametro β, per mettere in evidenza *la generazione del ciclo*. Il seguente grafico è ottenuto continuando una delle due Hopf.



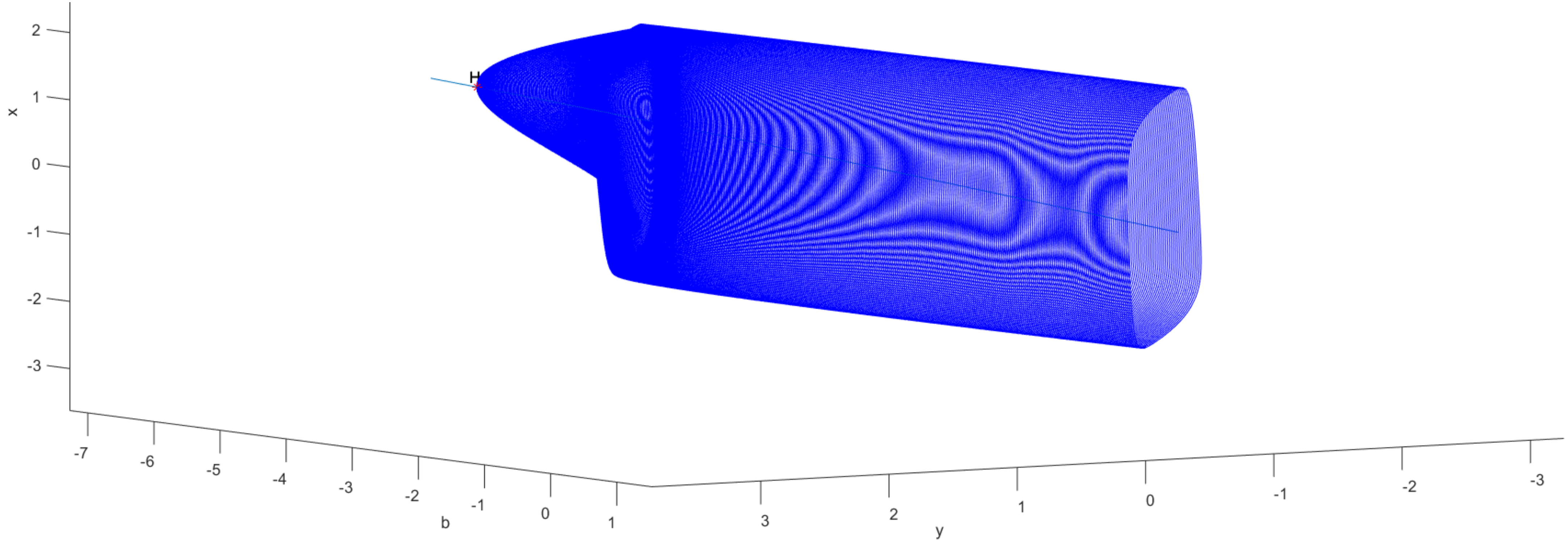
Cicli Limite II

- Nel grafico seguente invece sono state continuate al *variare dei due parametri* entrambe le Hopf. Si può osservare il *ciclo limite* che nasce (o termina) da una Hopf e termina (o nasce) in quella simmetricamente opposta.

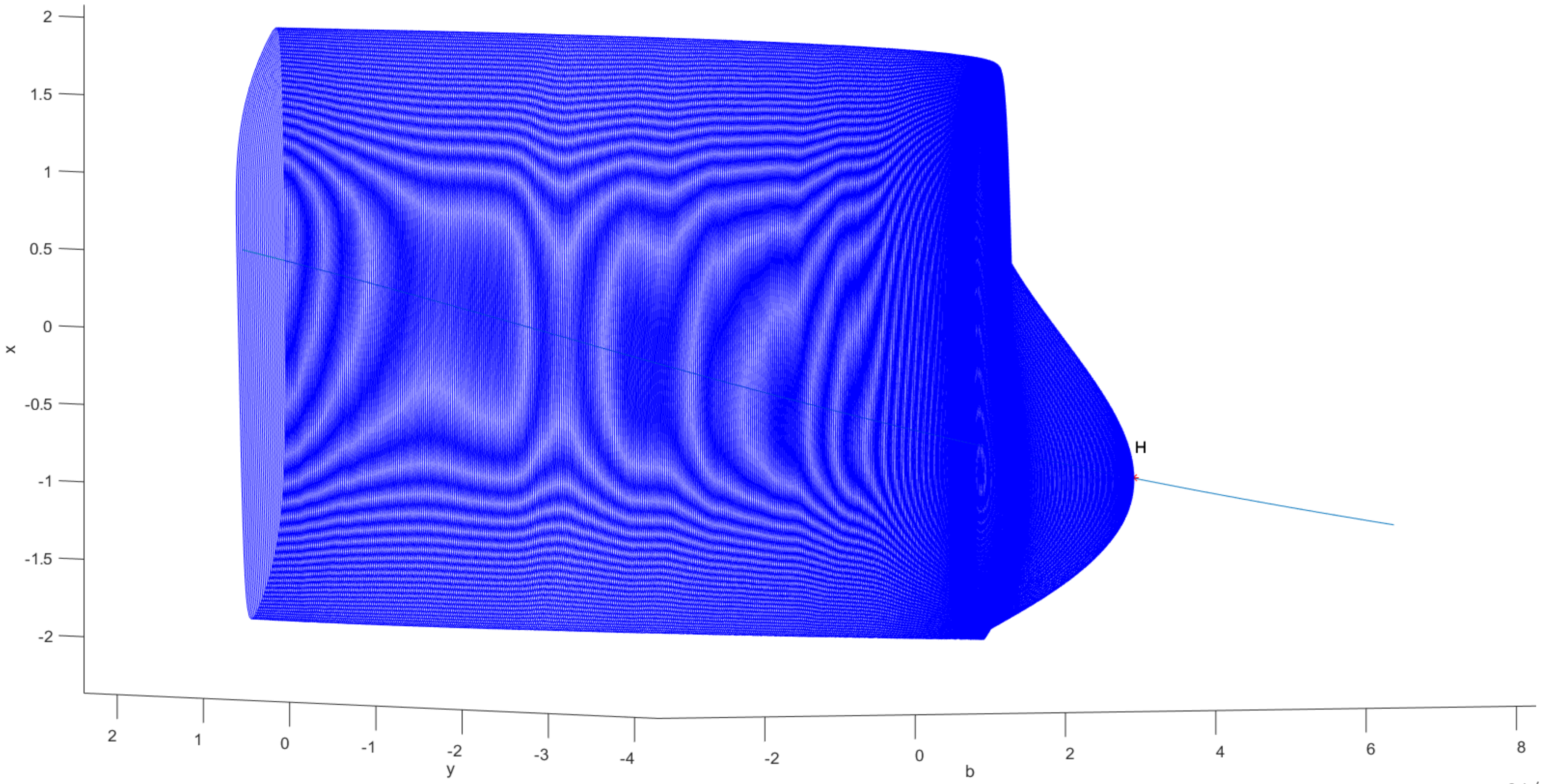


Cicli Limite III

- Nei grafici seguenti invece sono state *continuate* in entrambe le Hopf utilizzando *β e il Periodo*. I risultati sono coerenti con quanto detto nelle slide precedenti, le conclusioni sono analoghe.

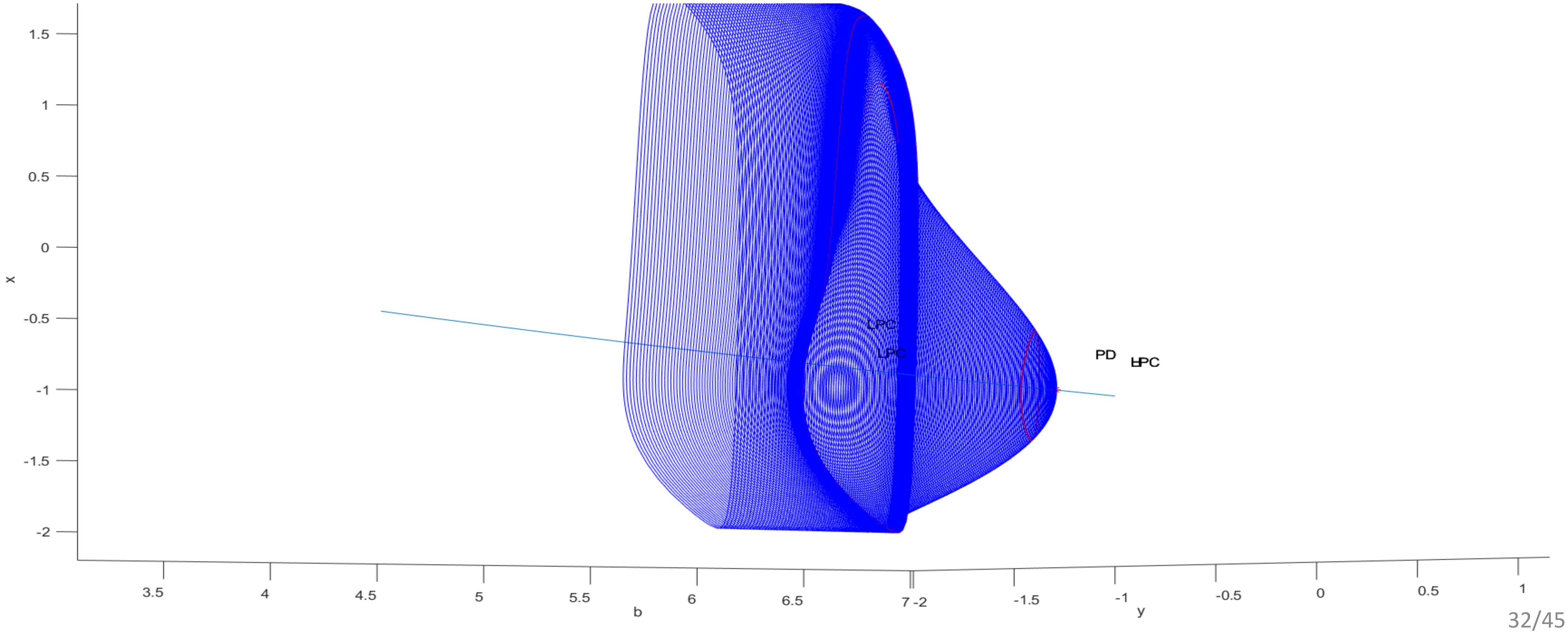


Cicli Limite IV



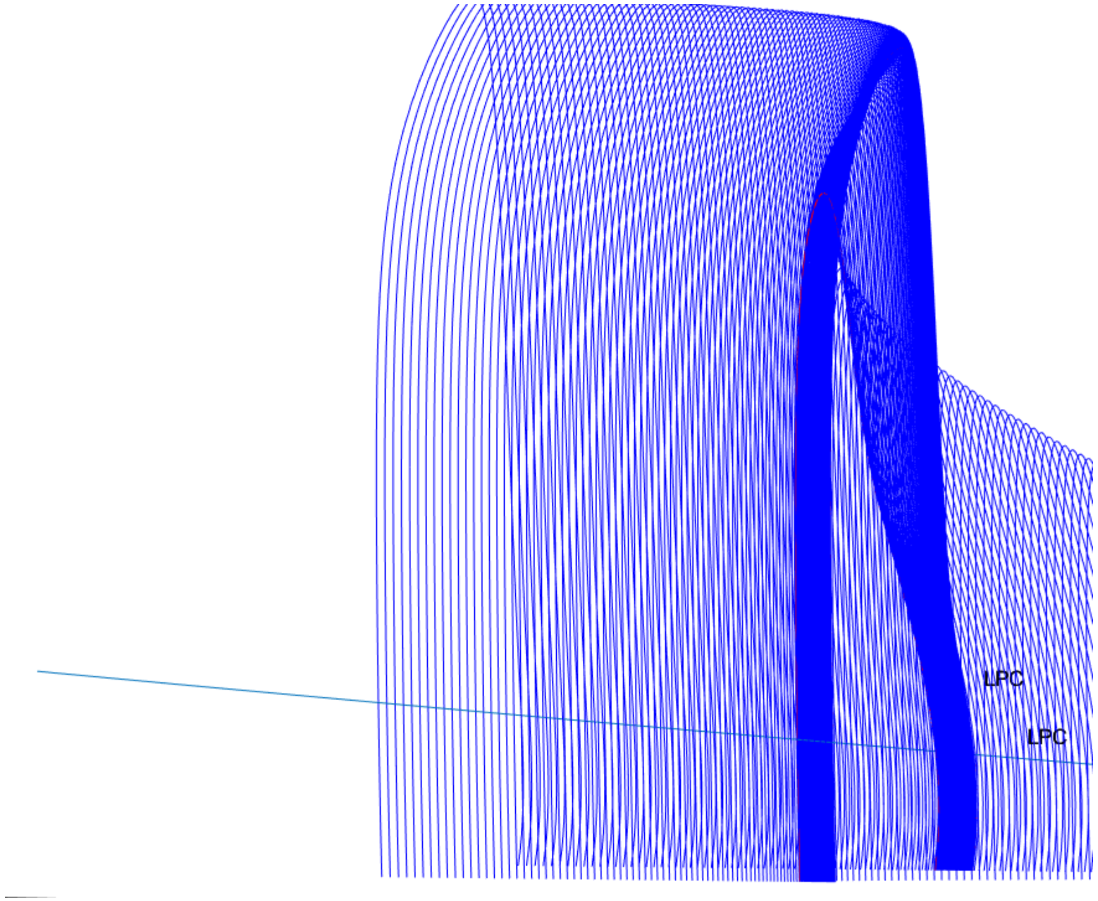
Cicli Limite V

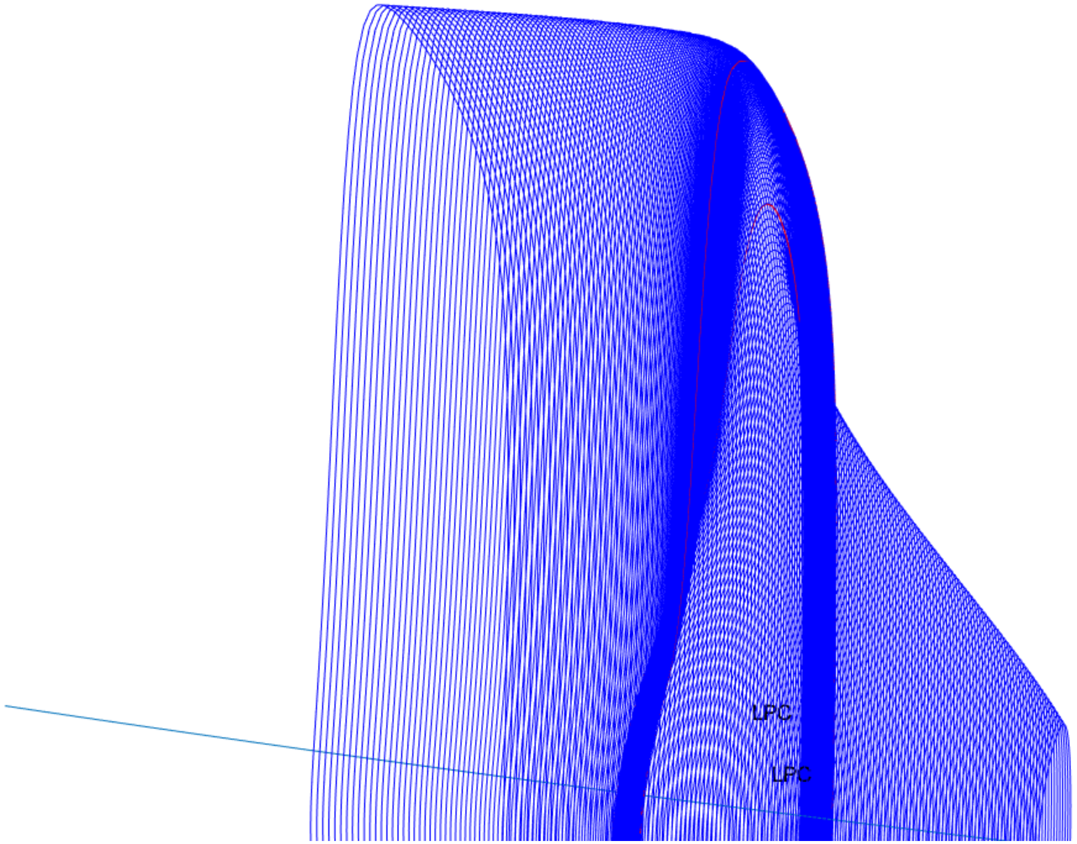
- Qui vengono evidenziate le singolarità incontrate nell'analisi Matcont al variare di β *e del Periodo*. In particolare viene messa in risalto una *biforcazione Fold di Cicli*, indicata come LPC (Limit Point Cycle).



Cicli Limite VI

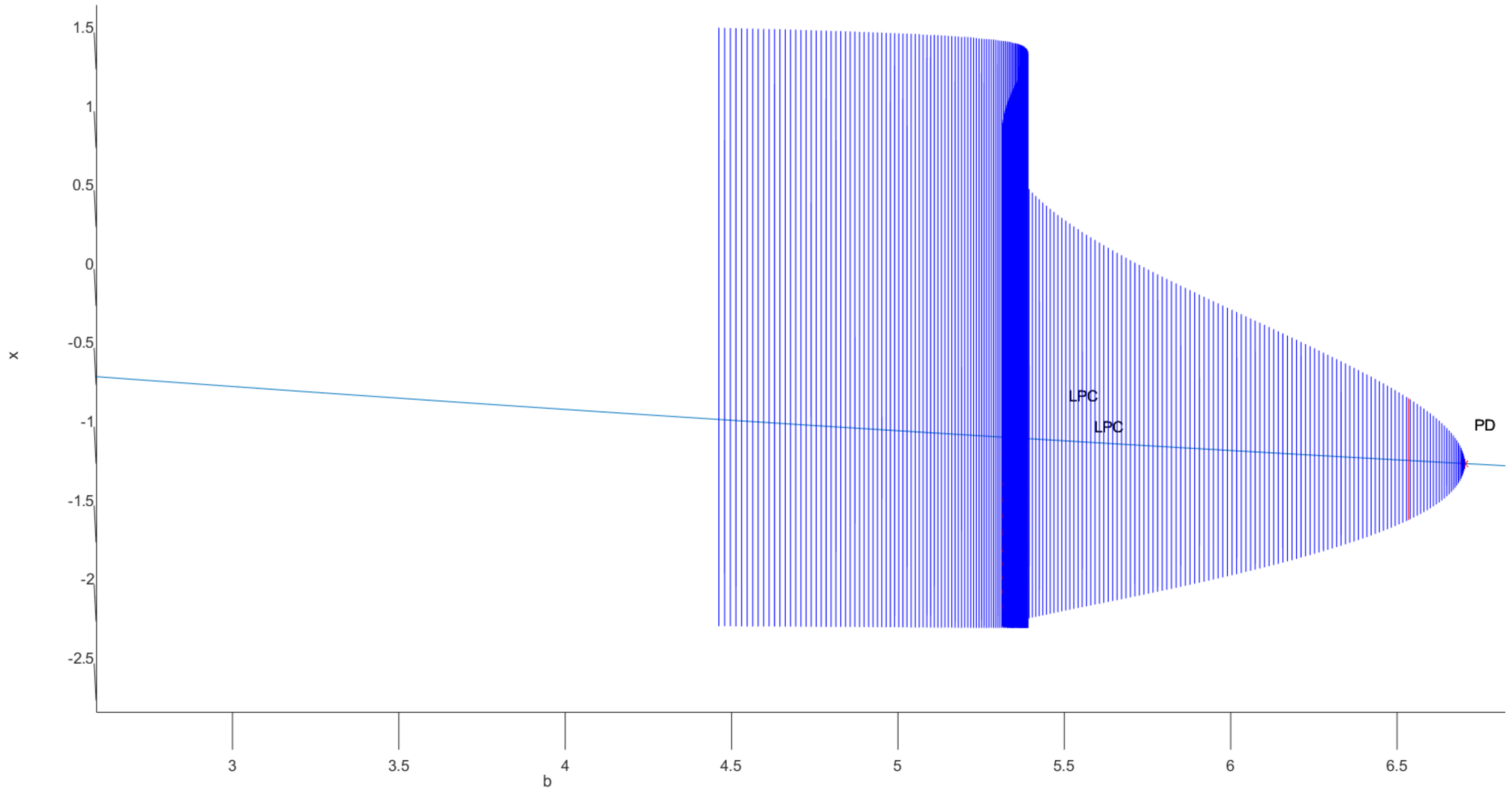
- Dettagli delle *Fold di Cicli*, emersa in questo caso per $\alpha = -9$ e valori di β compresi tra 5 e 5.5





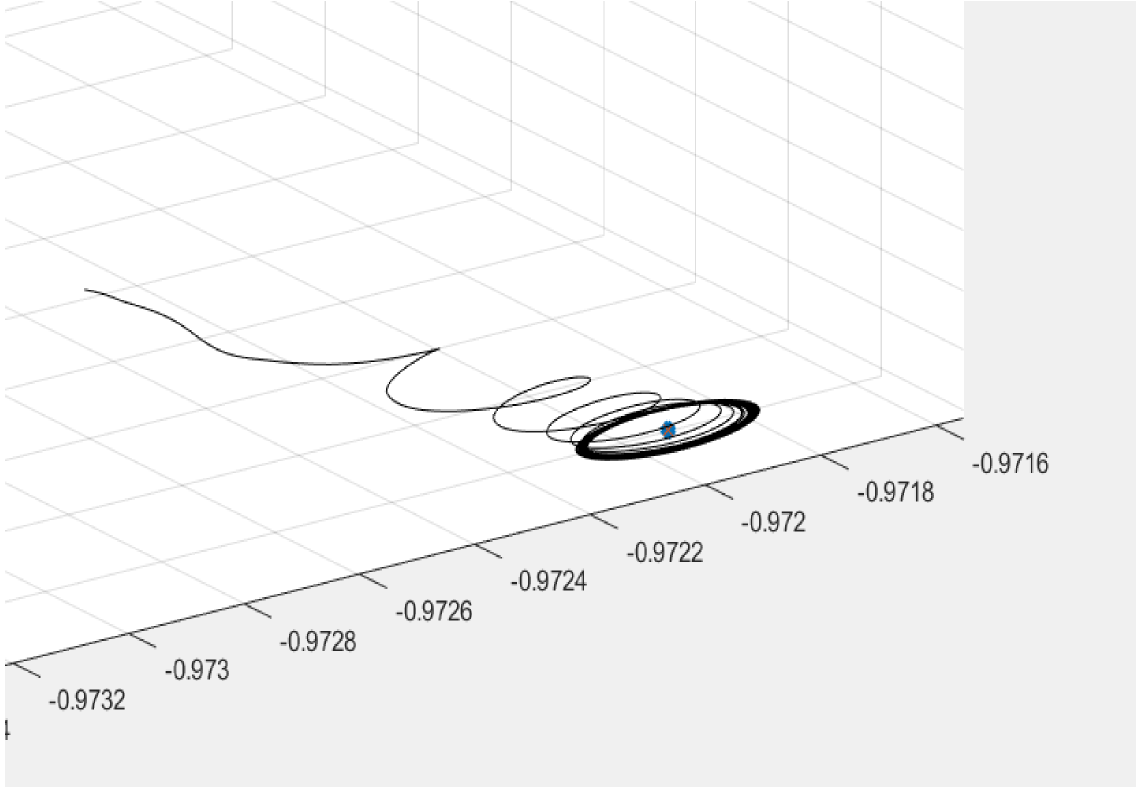
Cicli Limite VI

- Per completezza viene inserita una 'vista laterale' del *luogo dei cicli limite*, la regione 'spessa' è quella racchiusa tra le due Fold di Cicli



Dettaglio sui Cicli Limite

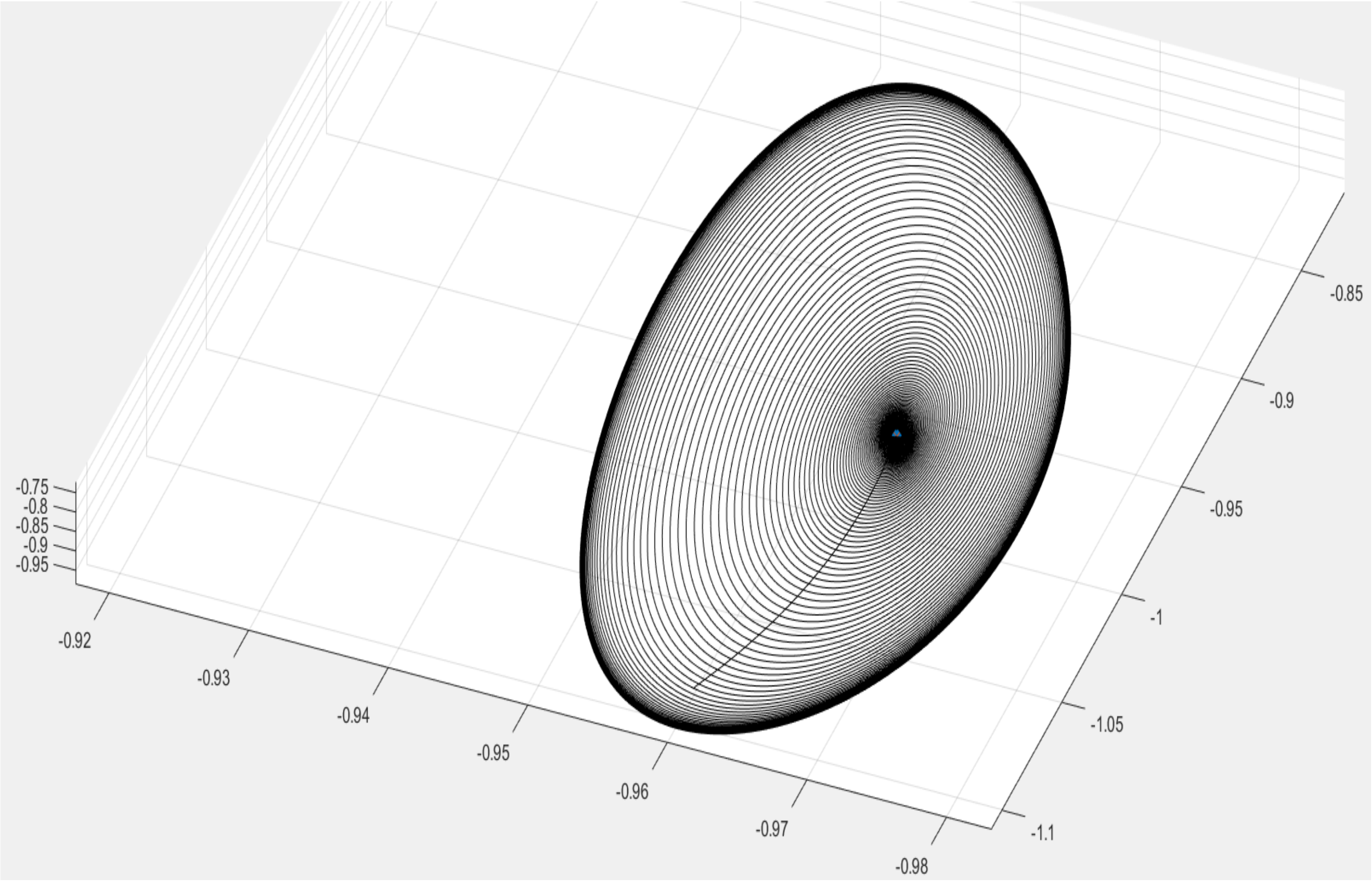
- Di seguito vengono mostrati alcuni grafici delle traiettorie ottenuti utilizzando una sola condizione iniziale, per osservare meglio la comparsa graduale del ciclo limite. Viene approfondita la *transizione tra il ciclo iniziale* generato tramite la Hopf e *quello più ampio* che permane *dopo le Fold di Cicli*.



Dettaglio della generazione del ciclo limite per valore 6.75, appena al di sotto del valore di biforcazione.

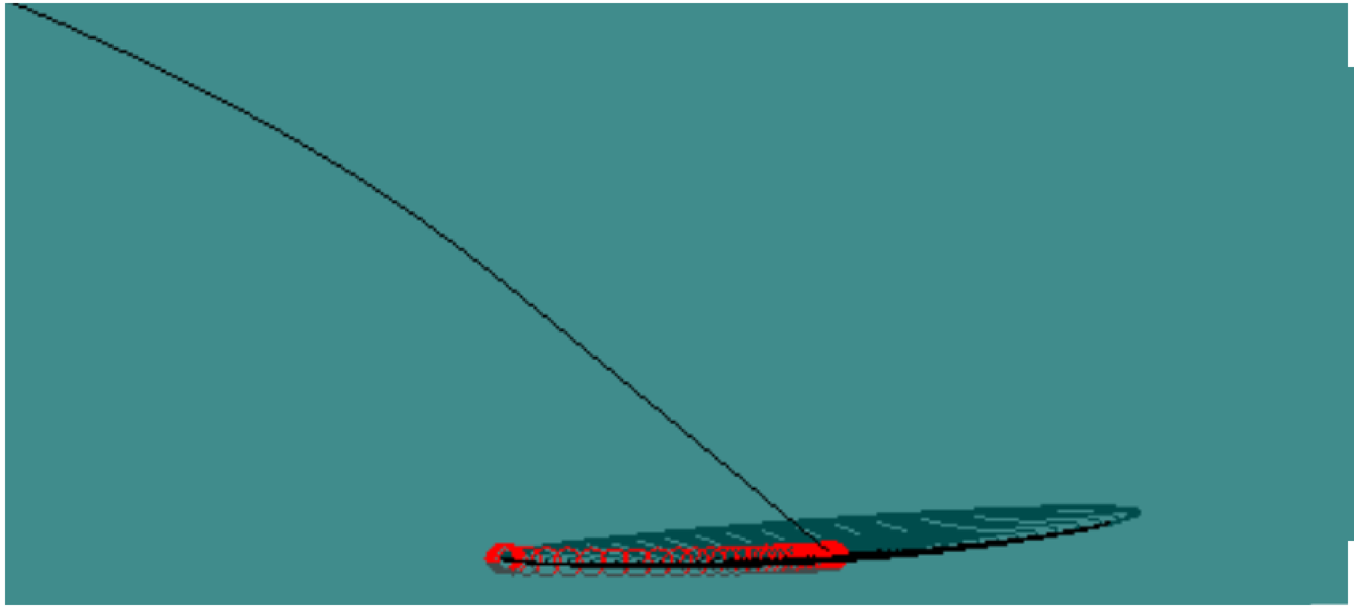
Dettaglio sui Cicli Limite II

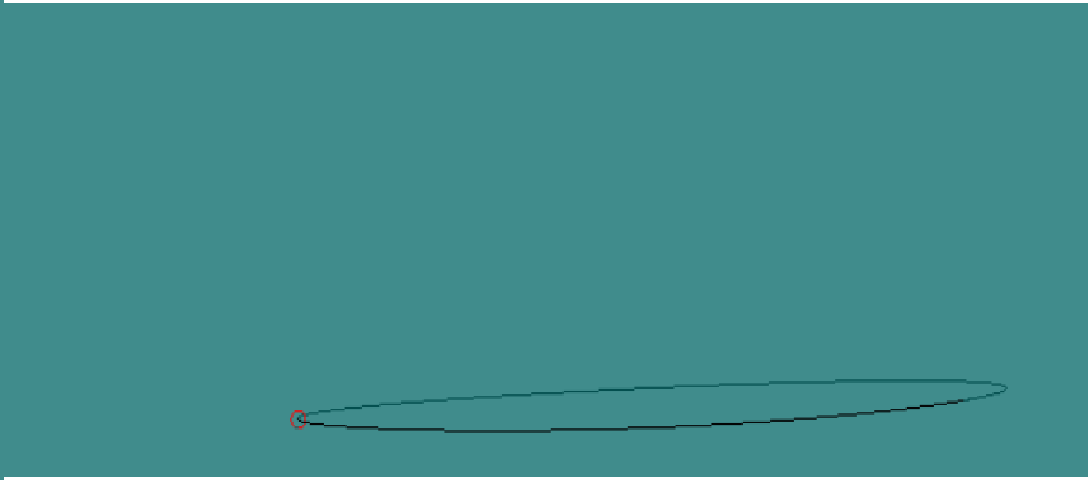
- In questo dettaglio è mostrata l'espansione progressiva del ciclo limite stabile, in particolare per un valore pari a 6.65.



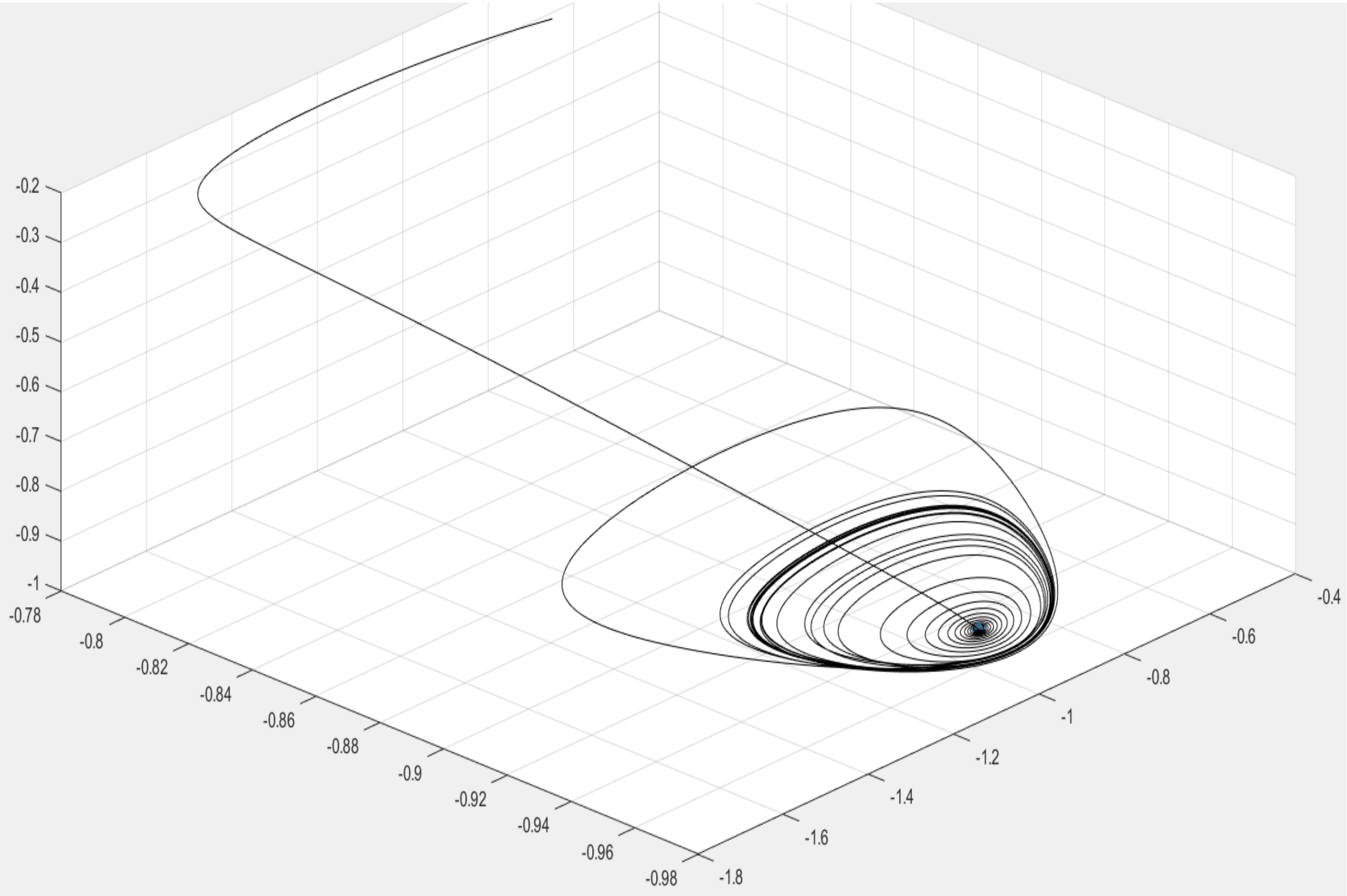
Stabilità del Ciclo

- La stabilità del Ciclo nella situazione precedente è stata valutata tramite *Mappa di Poincarè*, utilizzando la *seconda isoclina nulla* come *Superficie* (durante e dopo transitorio)





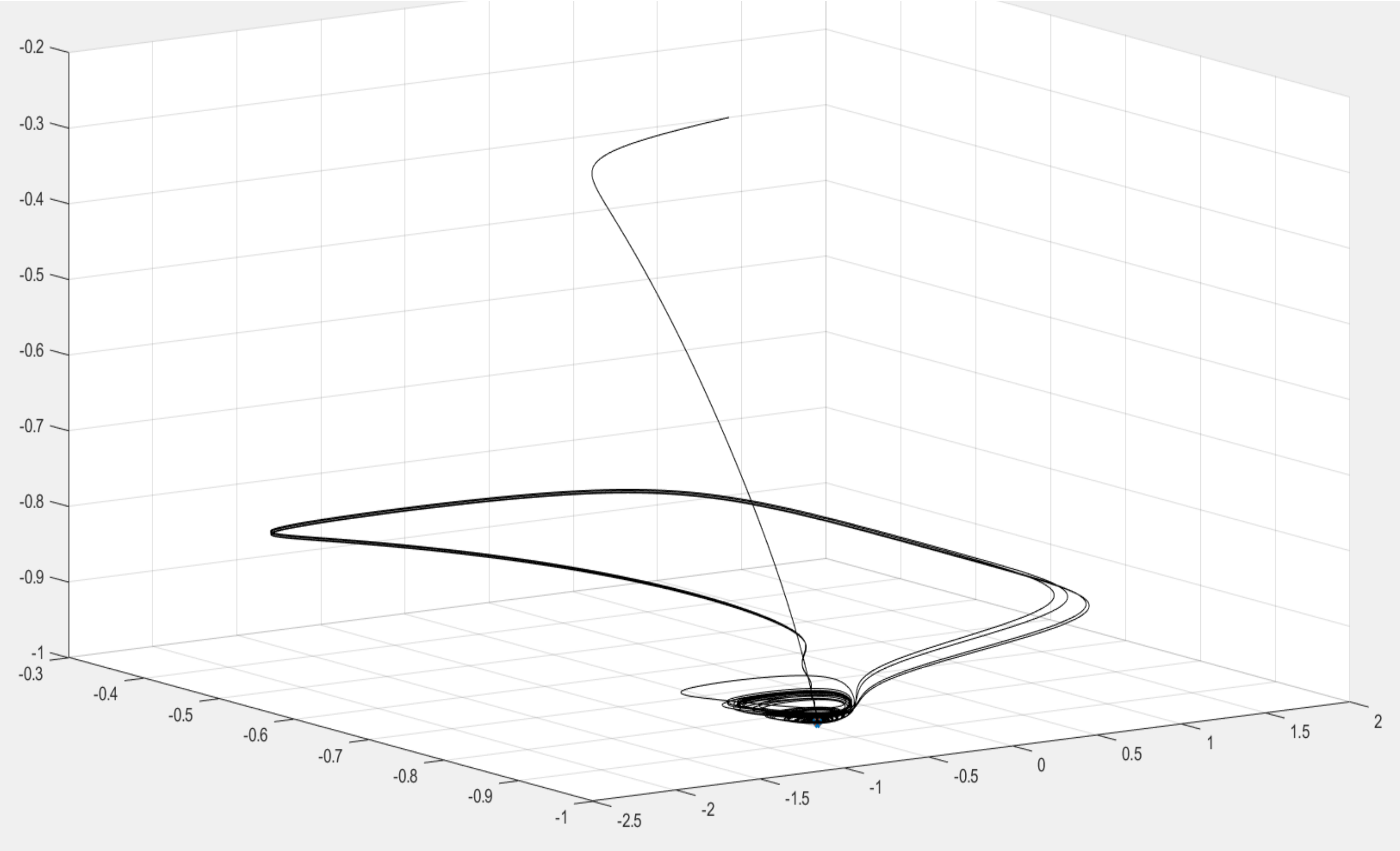
Dettaglio sui Cicli Limite III



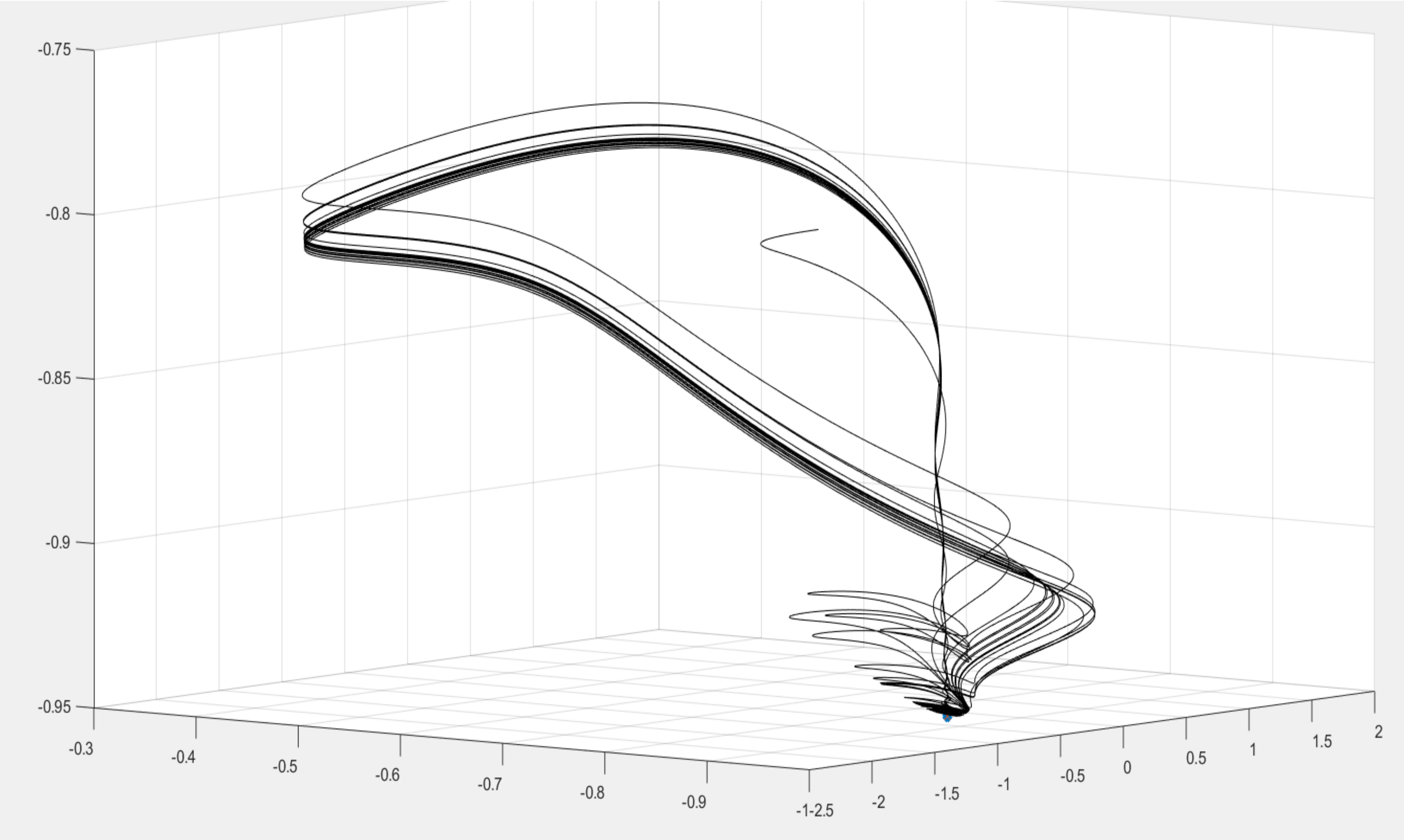
- Qui si evidenzia il ciclo per un valore pari a 6.6, *appena prima* della transizione all'altro ciclo stabile

Dettaglio sui Cicli Limite IV

- Per un valore di β pari a 6.59 si inizia a notare che la traiettoria del sistema tende a percorrere una traiettoria più ampia ed irregolare.



Dettaglio sui Cicli Limite V

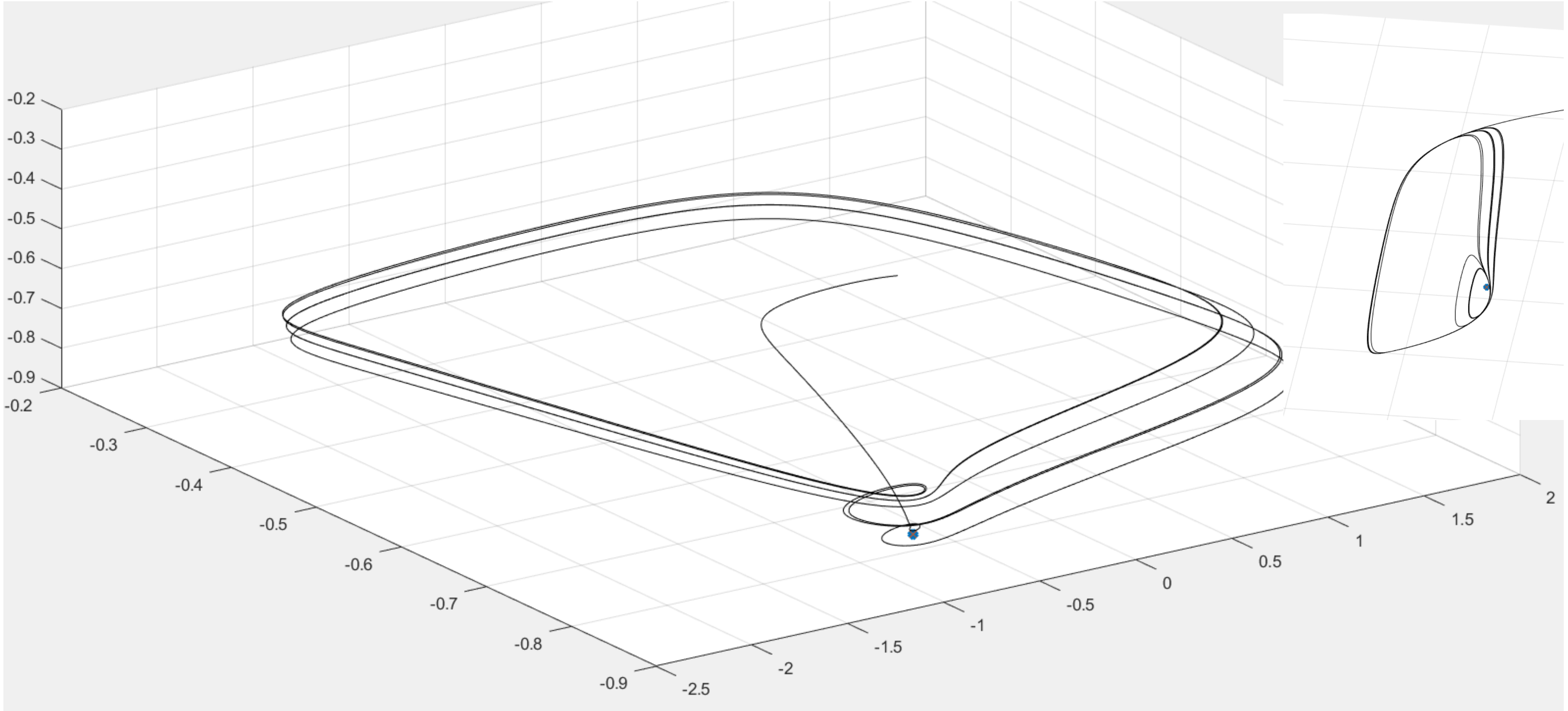


- Questo grafico è stato ottenuto per una differente condizione iniziale e per un valore $\beta = 6.2$

Il ciclo più piccolo si sta deformando fino a scomparire

Dettaglio sui Cicli Limite VI

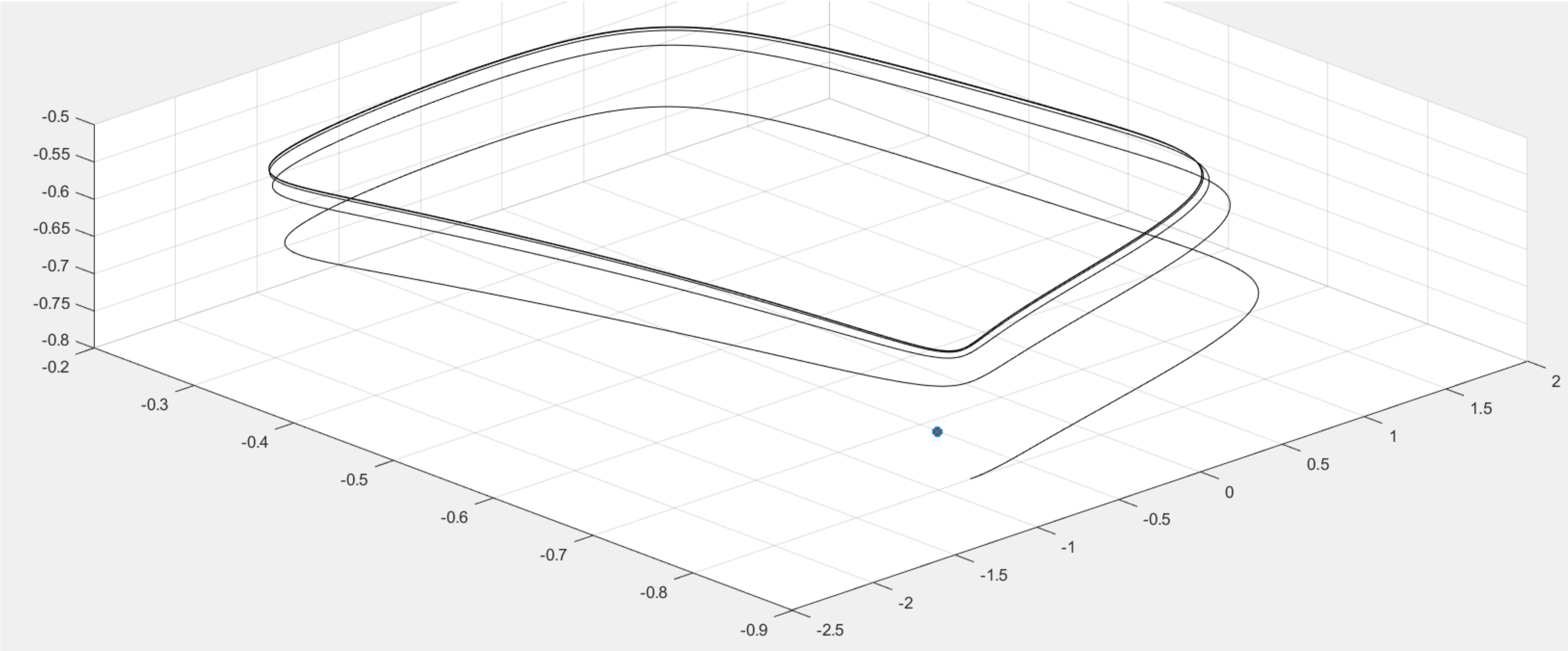
- Al decrescere dei valori di β si ottiene quindi una traiettoria che tende a raggiungere il secondo ciclo limite stabile, quello che permane dopo le due Fold, già evidenziato nelle slide precedenti.



Questa traiettoria ad esempio è stata ottenuta per β = 5.5

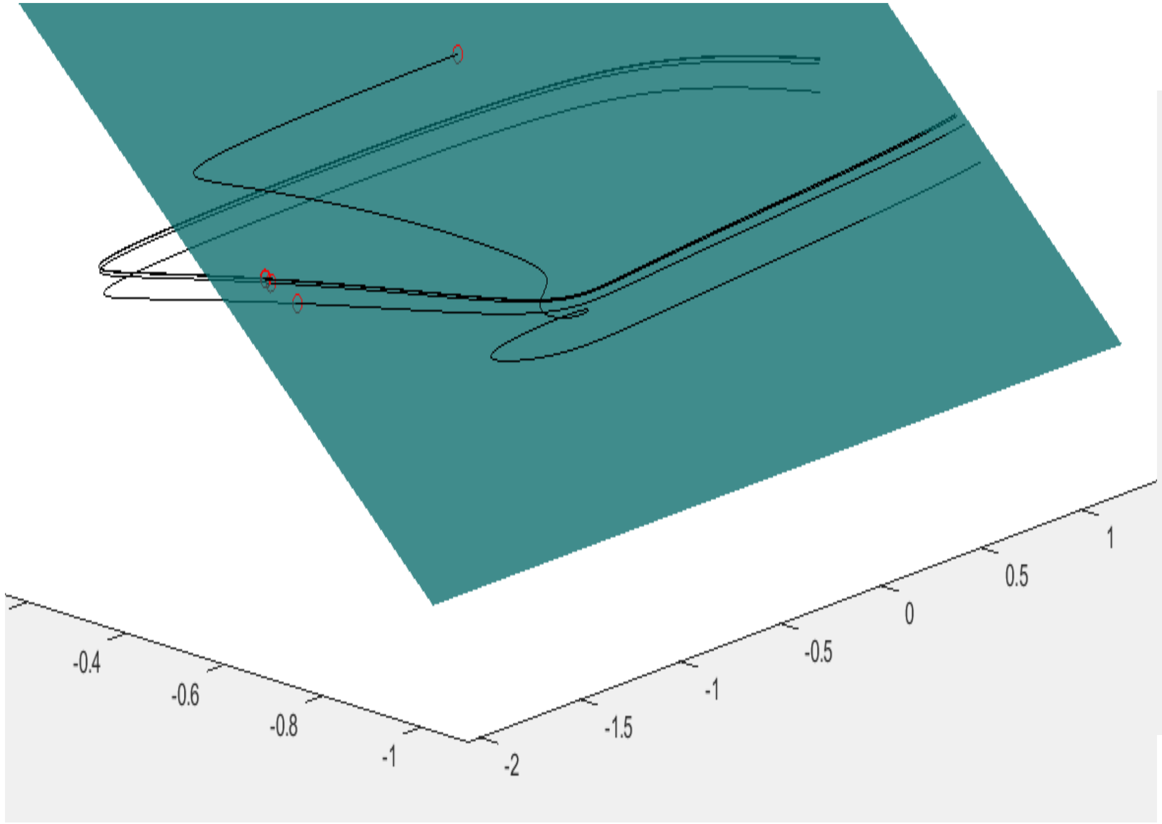
Dettaglio sui Cicli Limite VII

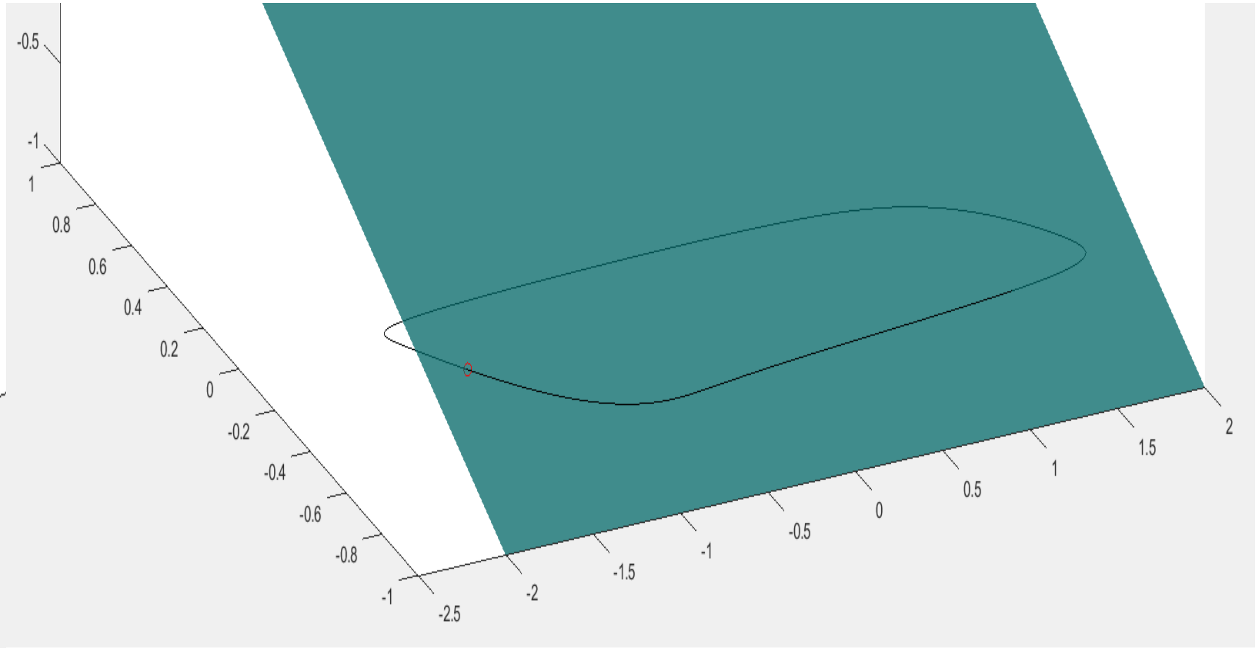
- Per valori di *β al di sotto di 5.2*, ovvero al di sotto del valore di biforcazione per la seconda Fold di ciclo, l'unico Ciclo Limite Stabile è mostrato nel grafico ($\beta = 5$)



Stabilità del Ciclo II

- Come fatto precedentemente, è stata constatata la stabilità di questo Ciclo Limite tramite la *Superficie di Poincarè* opportuna. (Qui per β = 5.2)





Sistema Dissipativo?

A confermare l'assenza di repulsori nel sistema si può valutare la *Divergenza del Campo vettoriale*.

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial}{\partial x}[10(\alpha y - x^3 + 3x - \beta)] + \frac{\partial}{\partial y}[x - 2y + z] + \frac{\partial}{\partial z}[y - z]$$

Si ottiene che $\nabla \cdot f = -30x^2$, ovvero un termine sempre negativo, poiché x^2 sempre positivo.

Il *volume* dunque tenderà a *convergere esponenzialmente* secondo $\dot{V} = -30x^2V$, incompatibilmente con la presenza di repulsori che ne sono una sorgente.

Conclusioni

- Durante l'analisi del sistema *non sono stati riscontrati* comportamenti di tipo *Caotico*, non sono stati rilevati *Strani Invarianti*

- Tutte le considerazioni fatte riguardo alla Biforcazione Hopf e ai conseguenti cicli limite rilevati sono applicabili per ciascun punto delle curve

- Non sono state considerate situazioni per valori 'estremi' dei due parametri