

«««< HEAD

=====

»»»> 0ef4de25332bda7dde8eae18791271845b8495f





Università degli Studi di Salerno

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione ed Elettrica e
Matematica Applicata (DIEM)

Relazione di progetto

Sviluppo di un modello di regressione lineare su dataset

Corso di Statistica Applicata - A.A. 2024/25

Studenti Gruppo 16:

Corradomaria Giachetta

Matricola: 0612708054

Francesco Peluso

Matricola: 0612707469

Gerardo Selce

Matricola: 0612707692

Anuar Zouhri

Matricola: 0612707505

Docenti:

Prof. Fabio Postiglione

Prof. Paolo Addesso



Last update: 22 giugno 2025

Indice

1	Descrizione del dataset fornito	2
2	Analisi delle caratteristiche del dataset	3
2.1	Boxplot dei dati	3
2.2	Analisi di normalità	4
3	Analisi della dipendenza tra le variabili	6
3.1	Analisi di correlazione	6
3.2	Analisi di regressione	7
4	Analisi dei modelli	8
4.1	Modello 1	8
4.2	Modello 2	8
4.3	Modello 3	9
4.4	Modello 4	11
4.5	Modello 5	11
5	Scelta del modello	13



1 Descrizione del dataset fornito

A completezza del progetto si riporta la descrizione del dataset da analizzare. Il dataset contiene $n = 100$ osservazioni, costituite da:

Variabile dipendente

y_VideoQuality → Qualità percepita del video

Tale indice è immaginato come frutto di una opportuna trasformazione di un punteggio assegnato a un campione di immagini da volontari che compilano un questionario. Esso sarà funzione di diverse caratteristiche proprie dei video, tra cui:

- la presenza o meno di rumore;
- la presenza o meno di *motion blur*;
- la nitidezza;
- la profondità di campo;
- la risoluzione;
- le aberrazioni ottiche visibili;
- la gamma dinamica;
- la fedeltà cromatica.

Variabili indipendenti (regressori)

Sono delle quantità di cui l'operatore ha il controllo (parziale o totale) selezionando:

- l'attrezzatura video da utilizzare;
- i parametri di ripresa.

Rappresentano indici standardizzati:

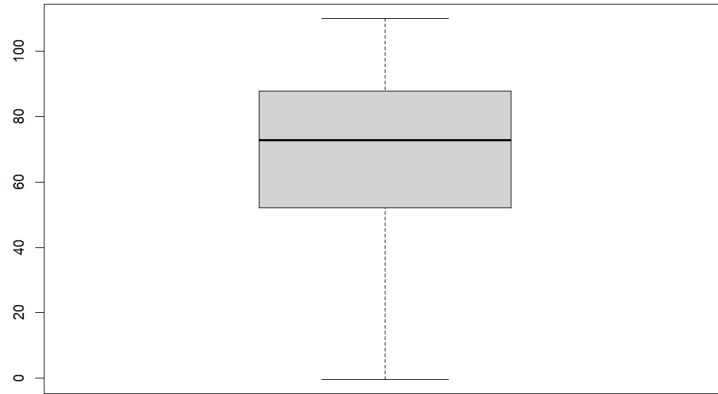
- **x1_ISO** → ISO (sensibilità del sensore)
- **x2_FRatio** → Rapporto Focale
- **x3_Time** → Tempo di Esposizione (in relazione al frame rate utilizzato)
- **x4_MP** → Megapixel del sensore
- **x5_CROP** → Fattore di Crop
- **x6_FOCAL** → Focale
- **x7_PixDensity** → Densità di pixel

2 Analisi delle caratteristiche del dataset

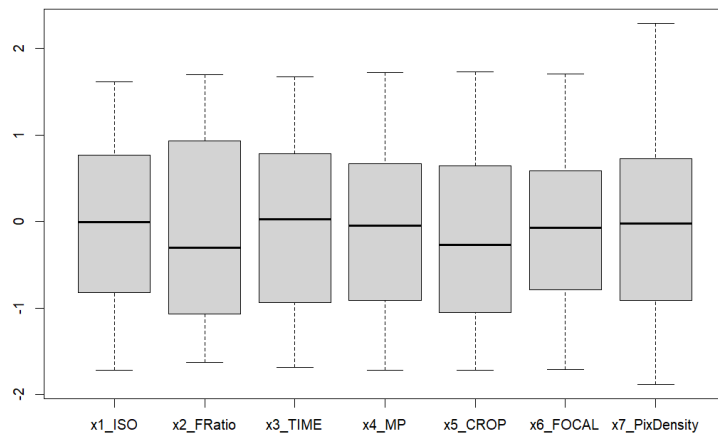
In questa fase preliminare si illustreranno le principali considerazioni fatte sul dataset fornito.

2.1 Boxplot dei dati

Si considerino i seguenti boxplot delle variabili del dataset.



(a) Boxplot della variabile dipendente $y_VideoQuality$



(b) Boxplot delle variabili indipendenti x_i

Figura 1: Boxplot delle variabili considerate

Si osservi innanzitutto che i valori per ciascuna variabile sono tutti contenuti all'interno dell'intervallo interquartile e che quindi non sono presenti outliers. Per quel che riguarda la variabile dipendente $y_VideoQuality$ si è osservato che il valore della media e della mediana sono simili, infatti valgono rispettivamente $media = 72.8135$, $mediana = 68.6081$. Si è osservato inoltre che i valori assunti dalla variabile $x7_PixDensity$ coprono un intervallo maggiore rispetto alle altre variabili indipendenti.

2.2 Analisi di normalità

Anche se non strettamente necessario ai fini del metodo di regressione, si è comunque deciso di verificare se qualcuna delle variabili indipendenti avesse una distribuzione normale. Tra i diversi qq-plot, si osserva che la variabile `x6_Focal` sembrerebbe avere una

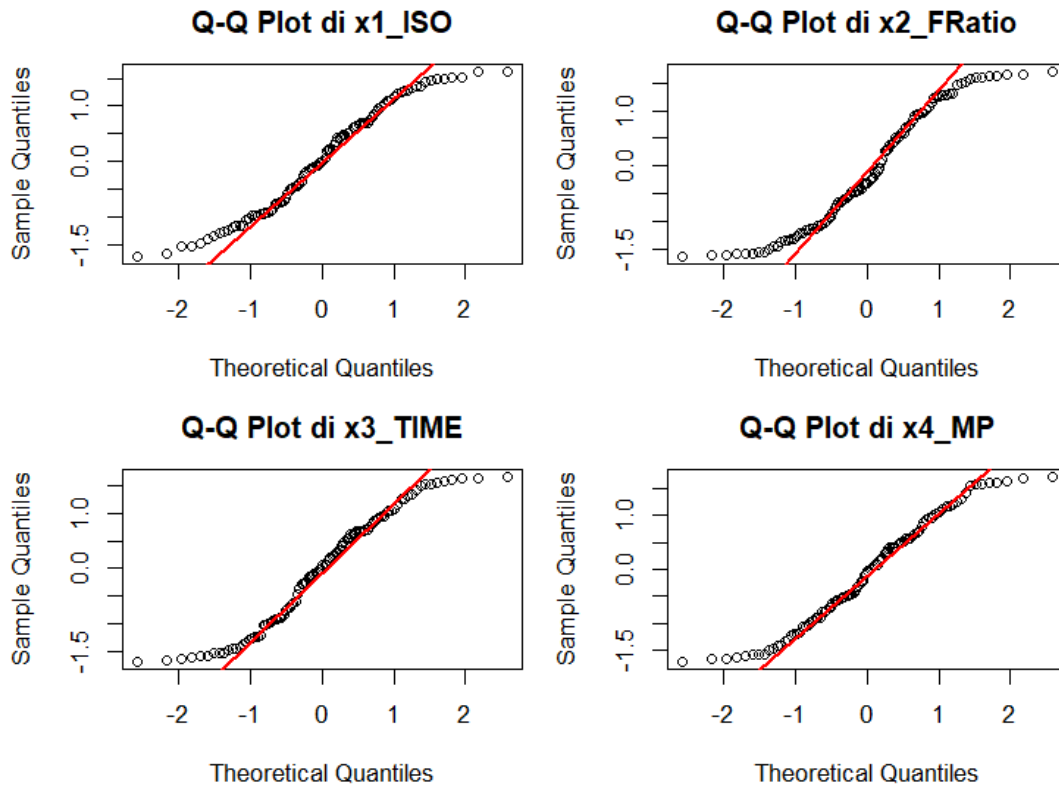
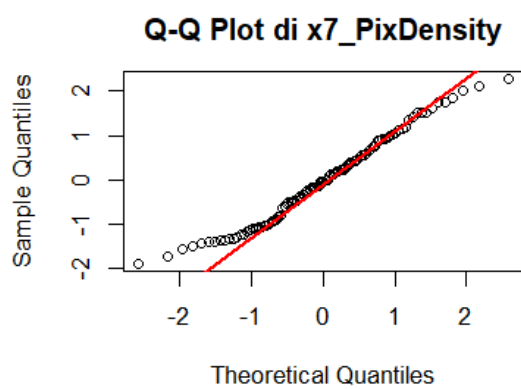
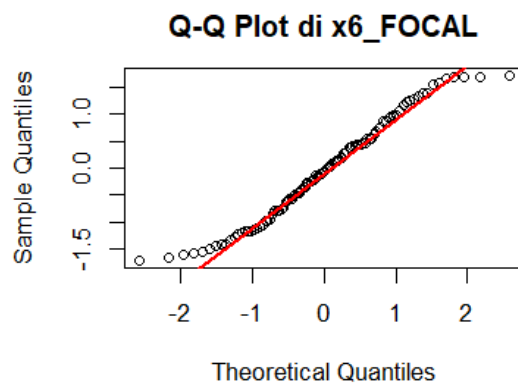
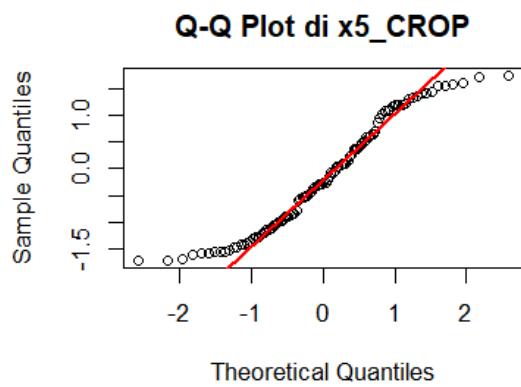


Figura 2:

distribuzione normale. Applicando il test di shapiro a questa variabile si ottiene

$$W = 0.97, p\text{-value} = 0.02.$$

Il valore di p-value ottenuto non si discosta molto da 0.05 e si potrebbe perciò supporre che la variabile sia distribuita come una normale.



3 Analisi della dipendenza tra le variabili

3.1 Analisi di correlazione

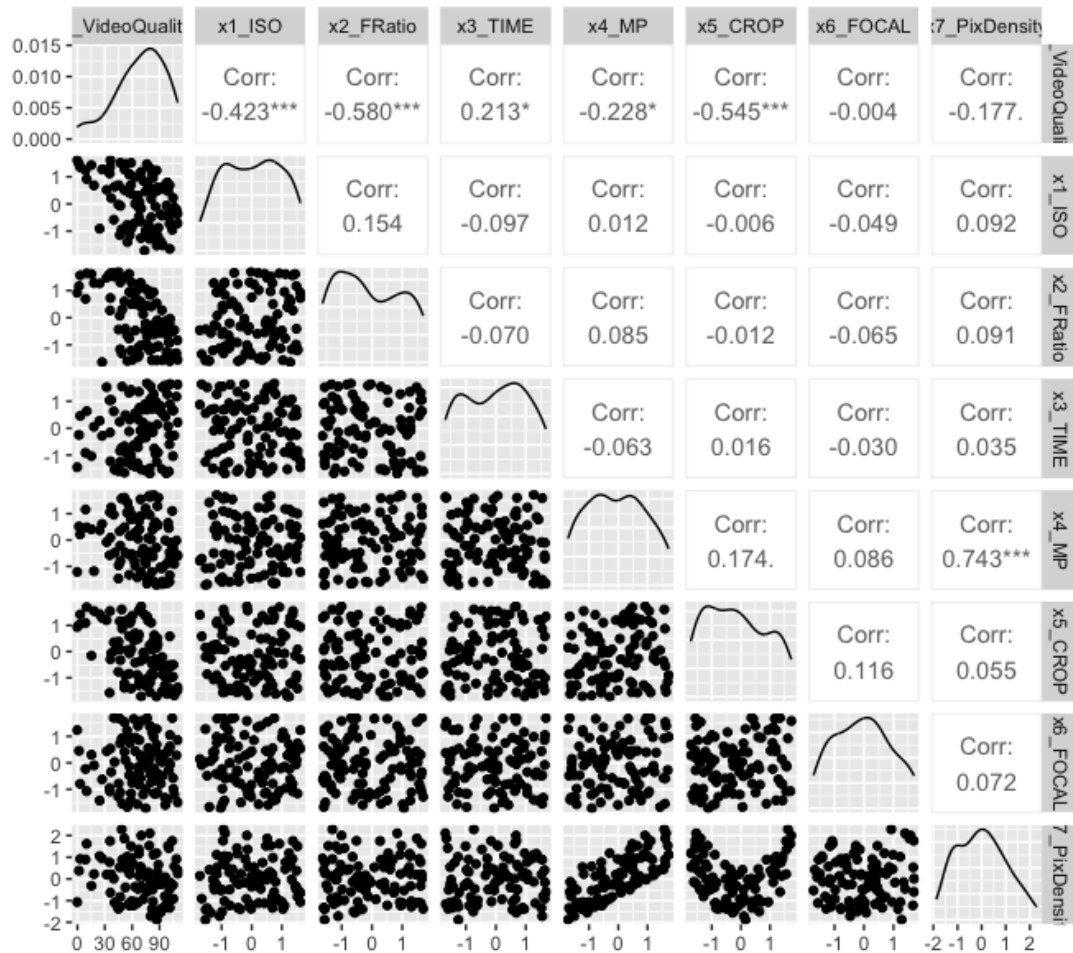


Figura 3: Scatter plot delle variabili presenti nel dataset.

Dalla Figura (3) notiamo, anche dal coefficiente di correlazione, una dipendenza lineare tra le variabili:

- **x4_MP** e **x7_PixDensity**

Invece notiamo la presenza di dipendenze non lineari che non vengono descritte dal coefficiente di correlazione. In particolare la notiamo tra le variabili:

- **y_VideoQuality** e **x1_ISO**
- **y_VideoQuality** e **x2_FRatio**
- **y_VideoQuality** e **x3_Time**
- **y_VideoQuality** e **x5_CROP**
- **x5_CROP** e **x7_PixDensity**

3.2 Analisi di regressione

Le dipendenze tra la variabile $y_VideoQuality$ e le diverse variabili indipendenti sono state analizzate attraverso una regressione semplice sulle singole variabili indipendenti.

Variabile indipendente	p-value
x1_ISO	$1.17e - 05$
x2_FRatio	$2.63e - 10$
x3_TIME	$0.0331e$
x4_MP	0.0227
x5_CROP	$4.39e - 09$
x6_FOCAL	0.97
x7_PixDensity	0.0775

Tabella 1: Sono rappresentati i p-value relativi alle regressioni delle singole variabili indipendenti al primo grado.

Diversamente da quanto ottenuto nell'analisi di correlazione, dalla Tabella (1) risultano rilevanti i regressori x1, x2, x3, x5. La stessa analisi è stata poi effettuata considerando anche i regressori al secondo ordine.

Variabile indipendente	p-value
x1_ISO	$2.46e - 03$
x2_FRatio	$1.28e - 3$
x3_TIME	0.3094
x4_MP	0.2899
x5_CROP	0.368
x6_FOCAL	0.770
x7_PixDensity	0.8038

Tabella 2: Sono rappresentati i p-value relativi alle regressioni delle singole variabili indipendenti al secondo grado.

Dalla Tabella (2) risulta evidente una dipendenza quadratica della variabile dipendente dai regressori x1, x2.

4 Analisi dei modelli

In questa sezione si analizzeranno differenti modelli e successivamente li si confronteranno verificando quale dei modelli meglio soddisfa l'ipotesi di normalità dei residui tramite dei grafici e test diagnostici. Inoltre, dato il numero non elevato di campioni si confronteranno i valori di AIC e di adjusted- R^2 .

4.1 Modello 1

Il primo modello analizzato è quello che include i regressori (di primo grado) più significativi (in base al valore di p_value misurato precedentemente). Ovvero:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_5 x_5.$$

La stima dei parametri ottenuti per questo modello è

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_0	65.62	1.30
β_1	-9.37	1.38
β_2	-13.33	1.24
β_3	4.01	1.26
β_5	-14.52	1.26

Tabella 3: Stime dei coefficienti e deviazioni standard del modello

Gli intervalli di confidenza al 5%, ottenuti tramite il metodo `confint()` di R, sono:

Parametro	Lower bound	Upper bound
β_0	63.04	68.20
β_1	-12.11	-6.62
β_2	-15.79	-10.87
β_3	1.51	6.51
β_5	-17.01	-12.03

Tabella 4: Intervalli di confidenza al 95% per i coefficienti del modello

I valori dell'adjusted R^2 e AIC ottenuti sono:

$$R^2 = 0.77, \quad AIC = 514.69.$$

4.2 Modello 2

Il prossimo modello analizzato è quello ottenuto aggiungendo tutti i regressori più significativi con l'aggiunta di alcuni regressori al quadrato.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \beta_3 x_2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_3 + \beta_6 x_5$$

La stima dei parametri ottenuti per questo modello è

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_0	79.93	1.95
β_1	-8.66	1.05
β_2	-8.03	1.23
β_3	-13.49	0.94
β_4	-6.38	1.09
β_5	3.94	0.95
β_6	-13.23	0.96

Tabella 5: Stime dei coefficienti e errori standard del modello

Gli intervalli di confidenza al 5%, ottenuti tramite il metodo `confint()` di R, sono:

Parametro	Lower bound	Upper bound
β_0	76.06	83.80
β_1	-10.75	-6.58
β_2	-10.48	-5.58
β_3	-15.36	-11.63
β_4	-8.55	-4.22
β_5	2.05	5.84
β_6	-15.14	-11.32

Tabella 6: Intervalli di confidenza al 95% per i coefficienti del modello

I valori dell'adjusted R^2 e AIC ottenuti sono:

$$R^2 = 0.87, \quad AIC = 460.76.$$

4.3 Modello 3

Questo modello è ottenuto tramite la seguente istruzione R, adottando la funzione `step()`:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_6 x_6 + \beta_7 x_7 + \beta_8 x_1^2 + \beta_9 x_2^2 + \beta_{10} x_6^2 + \beta_{11} x_7^2 + \beta_{12} x_1 x_6 + \beta_{13} x_2 x_4 + \beta_{14} x_3 x_4 + \beta_{15} x_3 x_5 + \beta_{16} x_3 x_7 + \beta_{17} x_4 x_7.$$

In particolare il modello di partenza da cui si è partiti:

```
model_step_interactions <- lm(y_VideoQuality ~ (.)^2 + I(x1_ISO^2) +
I(x2_FRatio^2) + I(x3_TIME^2) + I(x4_MP^2) + I(x5_CROP^2) + I(x6_FOCAL^2) +
I(x7_PixDensity^2), data = data)
```

La stima dei parametri ottenuti per questo modello è:

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_0	81.64	2.18
β_1	-8.77	1.00
β_2	-13.56	0.90
β_3	4.31	1.03
β_4	-0.25	1.46
β_5	-13.37	0.92
β_6	0.62	0.99
β_7	-2.96	1.60
β_8	-8.85	1.16

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_9	-6.57	1.01
β_{10}	-1.89	1.07
β_{11}	2.91	1.86
β_{12}	-1.71	1.18
β_{13}	1.66	0.99
β_{14}	-2.81	1.42
β_{15}	2.83	0.99
β_{16}	3.24	1.54
β_{17}	-3.55	2.25

Tabella 7: Stime dei coefficienti e deviazioni standard del modello

Gli intervalli di confidenza al 5%, ottenuti tramite il metodo `confint()` di R, sono:

Parametro	L.B.	U.B.
β_0	77.29	85.99
β_1	-10.76	-6.78
β_2	-15.34	-11.77
β_3	2.26	6.37
β_4	-3.16	2.65
β_5	-15.20	-11.53
β_6	-1.34	2.59
β_7	-6.14	0.22
β_8	-11.16	-6.55

Parametro	L.B.	U.B.
β_9	-8.58	-4.57
β_{10}	-4.01	0.23
β_{11}	-0.78	6.61
β_{12}	-4.05	0.64
β_{13}	-0.31	3.62
β_{14}	-5.65	0.02
β_{15}	0.86	4.81
β_{16}	0.19	6.30
β_{17}	-8.02	0.93

Tabella 8: Intervalli di confidenza al 95% per i coefficienti del modello

I valori dell'adjusted R^2 e AIC ottenuti sono:

$$R^2 = 0.89, \quad AIC = 448.27.$$

4.4 Modello 4

Questo modello è stato ottenuto riducendo il Modello 3

4.5 Modello 5

Questo modello è stato ottenuto analizzando anche i termini cubici. In particolare, il modello si presenta nel seguente modo:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_5 + \beta_5 x_6 + \beta_6 x_7 + \beta_7 x_1^2 + \beta_8 x_2^2 + \beta_9 x_6^2 + \beta_{10} x_1^3 + \beta_{11} x_7^3 + \beta_{12} x_1 x_7 + \beta_{13} x_1 x_2 + \beta_{14} x_1 x_5 + \beta_{15} x_1 x_6 + \beta_{16} x_1 x_7 + \beta_{17} x_2 x_5 + \beta_{18} x_2 x_6 + \beta_{19} x_2 x_7 + \beta_{20} x_5 x_6 + \beta_{21} x_5 x_7 + \beta_{22} x_6 x_7 + \beta_{23} x_1^2 x_2 + \beta_{24} x_1^2 x_5 + \beta_{25} x_1^2 x_6 + \beta_{26} x_1^2 x_7 + \beta_{27} x_2^2 x_5 + \beta_{28} x_2^2 x_6 + \beta_{29} x_2^2 x_7 + \beta_{30} x_5^2 x_6 + \beta_{31} x_5^2 x_7 + \beta_{32} x_6^2 x_7 + \beta_{33} x_1^3 x_2 + \beta_{34} x_1^3 x_5 + \beta_{35} x_1^3 x_6 + \beta_{36} x_1^3 x_7 + \beta_{37} x_2^3 x_5 + \beta_{38} x_2^3 x_6 + \beta_{39} x_2^3 x_7 + \beta_{40} x_5^3 x_6 + \beta_{41} x_5^3 x_7 + \beta_{42} x_6^3 x_7 + \beta_{43} x_1^2 x_2 x_5 + \beta_{44} x_1^2 x_2 x_6 + \beta_{45} x_1^2 x_2 x_7 + \beta_{46} x_1^2 x_5 x_6 + \beta_{47} x_1^2 x_5 x_7 + \beta_{48} x_1^2 x_6 x_7 + \beta_{49} x_2^2 x_5 x_6 + \beta_{50} x_2^2 x_5 x_7 + \beta_{51} x_2^2 x_6 x_7 + \beta_{52} x_5^2 x_6 x_7 + \beta_{53} x_1^3 x_2 x_5 + \beta_{54} x_1^3 x_2 x_6 + \beta_{55} x_1^3 x_2 x_7 + \beta_{56} x_1^3 x_5 x_6 + \beta_{57} x_1^3 x_5 x_7 + \beta_{58} x_1^3 x_6 x_7 + \beta_{59} x_2^3 x_5 x_6 + \beta_{60} x_2^3 x_5 x_7 + \beta_{61} x_2^3 x_6 x_7 + \beta_{62} x_5^3 x_6 x_7 + \beta_{63} x_1^2 x_2^2 x_5 + \beta_{64} x_1^2 x_2^2 x_6 + \beta_{65} x_1^2 x_2^2 x_7 + \beta_{66} x_1^2 x_5^2 x_6 + \beta_{67} x_1^2 x_5^2 x_7 + \beta_{68} x_1^2 x_6^2 x_7 + \beta_{69} x_2^2 x_5^2 x_6 + \beta_{70} x_2^2 x_5^2 x_7 + \beta_{71} x_2^2 x_6^2 x_7 + \beta_{72} x_5^2 x_6^2 x_7 + \beta_{73} x_1^3 x_2^2 x_5 + \beta_{74} x_1^3 x_2^2 x_6 + \beta_{75} x_1^3 x_2^2 x_7 + \beta_{76} x_1^3 x_5^2 x_6 + \beta_{77} x_1^3 x_5^2 x_7 + \beta_{78} x_1^3 x_6^2 x_7 + \beta_{79} x_2^3 x_5^2 x_6 + \beta_{80} x_2^3 x_5^2 x_7 + \beta_{81} x_2^3 x_6^2 x_7 + \beta_{82} x_5^3 x_6^2 x_7 + \beta_{83} x_1^2 x_2^3 x_5 + \beta_{84} x_1^2 x_2^3 x_6 + \beta_{85} x_1^2 x_2^3 x_7 + \beta_{86} x_1^2 x_5^3 x_6 + \beta_{87} x_1^2 x_5^3 x_7 + \beta_{88} x_1^2 x_6^3 x_7 + \beta_{89} x_2^3 x_5^3 x_6 + \beta_{90} x_2^3 x_5^3 x_7 + \beta_{91} x_2^3 x_6^3 x_7 + \beta_{92} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{93} x_1^2 x_2^2 x_5 x_6 + \beta_{94} x_1^2 x_2^2 x_5 x_7 + \beta_{95} x_1^2 x_2^2 x_6 x_7 + \beta_{96} x_1^2 x_5^2 x_6 x_7 + \beta_{97} x_2^2 x_5^2 x_6 x_7 + \beta_{98} x_5^2 x_6^2 x_7 + \beta_{99} x_1^3 x_2^2 x_5 x_6 + \beta_{100} x_1^3 x_2^2 x_5 x_7 + \beta_{101} x_1^3 x_2^2 x_6 x_7 + \beta_{102} x_1^3 x_5^2 x_6 x_7 + \beta_{103} x_2^3 x_5^2 x_6 x_7 + \beta_{104} x_5^3 x_6^2 x_7 + \beta_{105} x_1^2 x_2^3 x_5 x_6 + \beta_{106} x_1^2 x_2^3 x_5 x_7 + \beta_{107} x_1^2 x_2^3 x_6 x_7 + \beta_{108} x_1^2 x_5^3 x_6 x_7 + \beta_{109} x_2^3 x_5^3 x_6 x_7 + \beta_{110} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{111} x_1^2 x_2^2 x_5^2 x_6 + \beta_{112} x_1^2 x_2^2 x_5^2 x_7 + \beta_{113} x_1^2 x_2^2 x_6^2 x_7 + \beta_{114} x_1^2 x_5^2 x_6^2 x_7 + \beta_{115} x_2^2 x_5^2 x_6^2 x_7 + \beta_{116} x_5^2 x_6^2 x_7 + \beta_{117} x_1^3 x_2^2 x_5^2 x_6 + \beta_{118} x_1^3 x_2^2 x_5^2 x_7 + \beta_{119} x_1^3 x_2^2 x_6^2 x_7 + \beta_{120} x_1^3 x_5^2 x_6^2 x_7 + \beta_{121} x_2^3 x_5^2 x_6^2 x_7 + \beta_{122} x_5^3 x_6^2 x_7 + \beta_{123} x_1^2 x_2^3 x_5^2 x_6 + \beta_{124} x_1^2 x_2^3 x_5^2 x_7 + \beta_{125} x_1^2 x_2^3 x_6^2 x_7 + \beta_{126} x_1^2 x_5^3 x_6^2 x_7 + \beta_{127} x_2^3 x_5^3 x_6^2 x_7 + \beta_{128} x_5^3 x_6^2 x_7 + \beta_{129} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6 + \beta_{130} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{131} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{132} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{133} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{134} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{135} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6 + \beta_{136} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{137} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{138} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{139} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{140} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{141} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{142} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{143} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{144} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{145} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{146} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{147} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{148} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{149} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{150} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{151} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{152} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{153} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{154} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{155} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{156} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{157} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{158} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{159} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{160} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{161} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{162} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{163} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{164} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{165} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{166} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{167} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{168} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{169} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{170} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{171} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{172} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{173} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{174} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{175} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{176} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{177} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{178} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{179} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{180} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{181} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{182} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{183} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{184} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{185} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{186} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{187} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{188} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{189} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{190} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{191} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{192} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{193} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{194} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{195} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{196} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{197} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{198} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{199} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{200} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{201} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{202} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{203} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{204} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{205} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{206} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{207} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{208} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{209} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{210} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{211} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{212} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{213} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{214} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{215} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{216} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{217} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{218} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{219} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{220} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{221} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{222} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{223} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{224} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{225} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{226} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{227} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{228} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{229} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{230} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{231} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{232} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{233} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{234} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{235} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{236} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{237} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{238} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{239} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{240} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{241} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{242} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{243} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{244} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{245} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{246} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{247} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{248} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{249} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{250} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{251} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{252} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{253} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{254} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{255} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{256} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{257} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{258} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{259} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{260} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{261} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{262} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{263} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{264} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{265} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{266} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{267} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{268} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{269} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{270} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{271} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{272} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{273} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{274} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{275} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{276} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{277} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{278} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{279} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{280} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{281} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{282} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{283} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{284} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{285} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{286} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{287} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{288} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{289} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{290} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{291} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{292} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{293} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{294} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{295} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{296} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{297} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{298} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{299} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{300} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{301} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{302} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{303} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{304} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{305} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{306} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{307} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{308} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{309} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{310} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{311} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{312} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{313} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{314} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{315} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{316} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{317} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{318} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{319} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{320} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{321} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{322} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{323} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{324} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{325} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{326} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{327} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{328} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{329} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{330} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{331} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{332} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{333} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{334} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{335} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{336} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{337} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{338} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{339} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{340} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{341} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{342} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{343} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{344} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{345} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{346} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{347} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{348} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{349} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{350} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{351} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{352} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{353} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{354} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{355} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{356} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{357} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{358} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{359} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{360} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{361} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{362} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{363} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{364} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{365} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{366} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{367} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{368} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{369} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{370} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{371} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{372} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{373} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{374} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{375} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{376} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{377} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{378} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{379} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{380} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{381} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{382} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{383} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{384} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{385} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{386} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{387} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{388} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{389} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{390} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{391} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{392} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{393} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{394} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{395} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{396} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{397} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{398} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{399} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{400} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{401} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{402} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{403} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{404} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{405} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{406} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{407} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{408} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{409} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{410} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{411} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{412} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{413} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{414} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{415} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{416} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{417} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{418} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{419} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{420} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{421} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{422} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{423} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{424} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{425} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{426} x_1^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{427} x_2^3 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{428} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{429} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{430} x_1^2 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{431} x_1^2 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{432} x_1^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{433} x_2^2 x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{434} x_5^3 x_6^3 x_7 + \beta_{435} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_6^2 + \beta_{436} x_1^3 x_2^2 x_5^3 x_7 + \beta_{437} x_1^3 x_2^2 x_6^3 x_7 + \beta_{438}$$

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_0	81.87	1.97
β_1	-0.44	2.16
β_2	-13.46	0.84
β_3	4.61	0.90
β_4	-13.74	0.83
β_5	1.57	0.92
β_6	-6.08	1.76
β_7	-8.63	1.10
β_8	-6.79	0.93
β_9	-1.80	0.97
β_{10}	-4.99	1.27
β_{11}	1.97	0.74
β_{12}	1.59	1.00
β_{13}	1.41	0.87
β_{14}	1.78	0.86

Tabella 9: Stime dei coefficienti e deviazioni standard del modello

Gli intervalli di confidenza al 5%, ottenuti tramite il metodo `confint()` di R, sono:

Parametro	Lower bound	Upper bound
β_0	77.95	85.80
β_1	-4.73	3.86
β_2	-15.13	-11.80
β_3	2.81	6.40
β_4	-15.39	-12.08
β_5	-0.25	-3.39
β_6	-9.58	-2.57
β_7	-10.82	-6.44
β_8	-8.63	-4.95
β_9	-3.72	0.12
β_{10}	-7.52	-2.47
β_{11}	0.50	3.43
β_{12}	-0.39	3.58
β_{13}	-0.31	3.14
β_{14}	0.07	3.49

Tabella 10: Intervalli di confidenza al 95% per i coefficienti del modello

I valori dell'adjusted R^2 e AIC ottenuti sono:

$$R^2 = 0.92, \quad AIC = 431.91.$$

5 Scelta del modello

Si riportano i valori di R^2 , AIC e MSE dei cinque modelli.

Modello	adjusted R^2	AIC	MSE
1	0.77	514.69	155.54
2	0.87	460.76	87.16
3	0.89	448.27	61.72
4	0.88	451.67	76.45
5	0.91	431.91	55.65

Tabella 11: Valori di R^2 e AIC per i quattro modelli

Osservazione. È opportuno considerare che, nella scelta del modello, si è tenuto conto della discreta correlazione lineare osservata tra alcune variabili predittive, in particolare tra **x4_MP** e **x7_PixDensity** (correlazione pari a 0.743).

Un'alta correlazione tra predittori può infatti dar luogo a fenomeni di *multicollinearità*, ossia a situazioni in cui alcune variabili esplicative risultano linearmente dipendenti o quasi dipendenti. Ciò comporta una riduzione del rango della matrice di (*design*), con conseguenti stime instabili dei coefficienti, varianze elevate e difficoltà nell'interpretazione individuale degli effetti delle singole variabili.

Di seguito vengono mostrati i grafici diagnostici ottenuti sui cinque modelli.

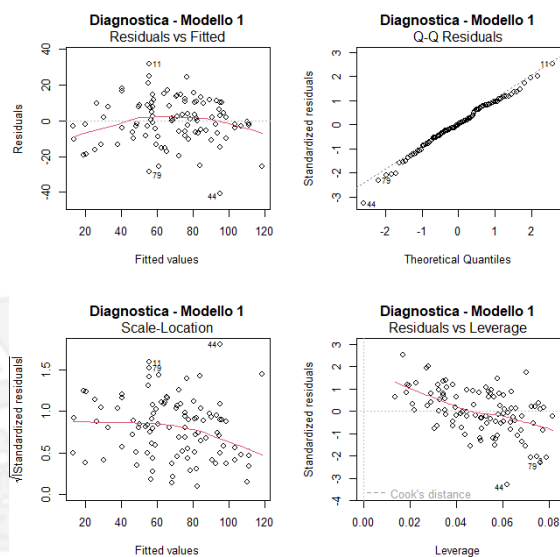


Figura 4: Modello 1: diagnostica

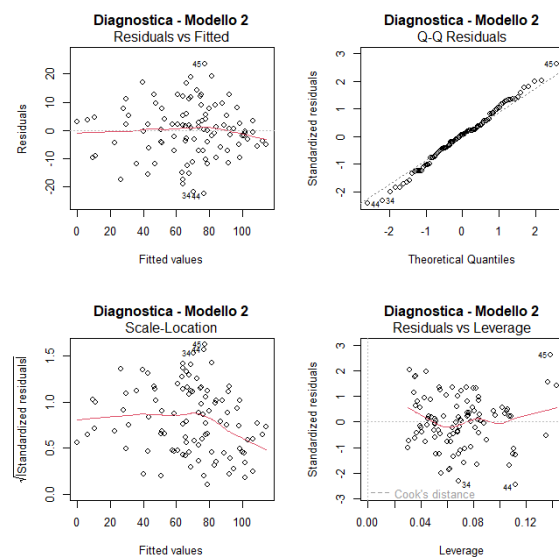


Figura 5: Modello 2: diagnostica

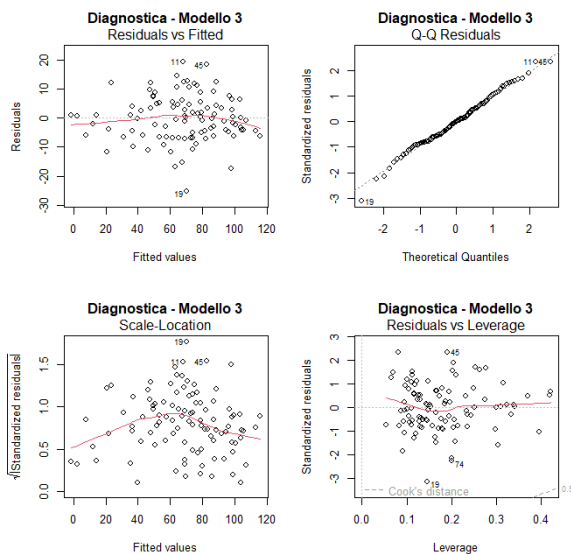


Figura 6: Modello 3: diagnostica

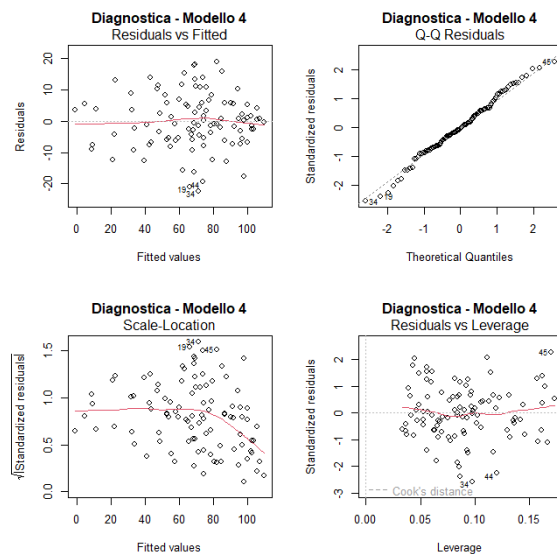


Figura 7: Modello 4: diagnostica

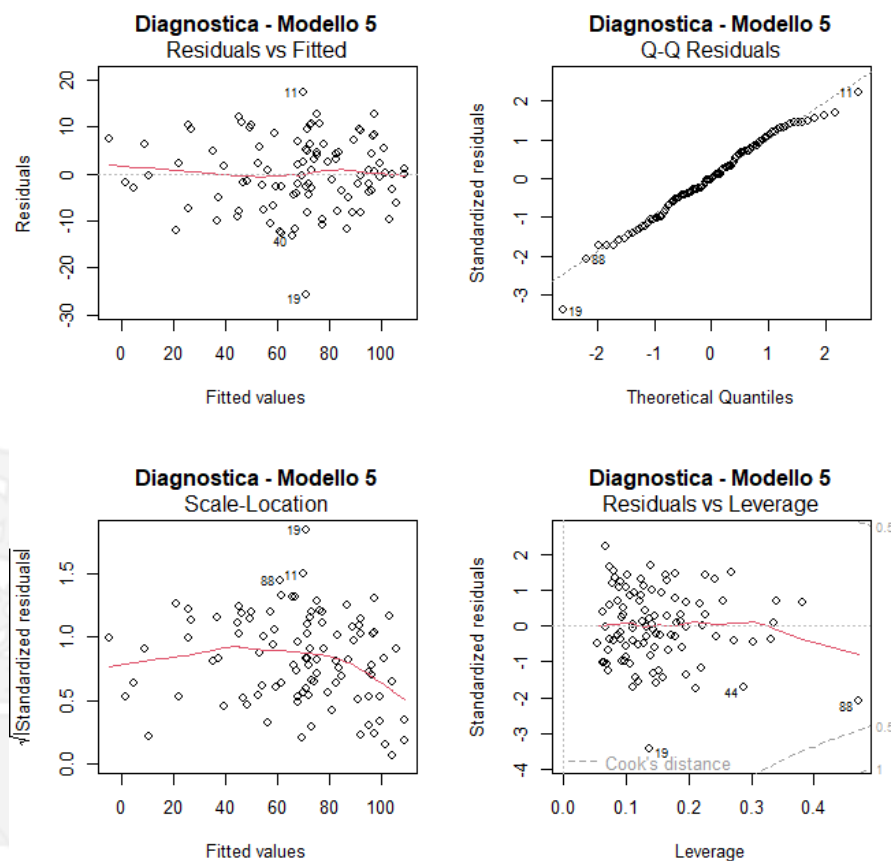


Figura 8: Modello 5: diagnostica

Osservando i grafici 'Residuals vs Fitted' si nota che solo nei modelli 2 e 4, la linea rossa non presenta alcun pattern soddisfacendo in buona maniera l'ipotesi di linearità. Inoltre, sempre i modelli 2 e 4 nei grafici 'Q-Q Residuals' l'ipotesi di normalità sembra essere soddisfatta.

Si osservi (dal grafico 'Scale-Location') che però su nessuno dei modelli considerati si può supporre che la varianza sia costante.

Infine comparando i valori di adjusted R^2 e AIC, il modello 4 sarebbe da preferire. Infatti, usando l'AIC, si sceglie il modello che ha valore minore; un valore maggiore di R^2 implica che il modello è in grado di interpretare meglio il fenomeno osservato.

A fronte dei dati ricavati si è stimato che il modello che meglio rappresenta il dataset fornito è il modello 4.

