Università degli Studi di Salerno

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione ed Elettrica e Matematica Applicata (DIEM)

Relazione di progetto

Sviluppo di un modello di regressione lineare su dataset

Corso di Statistica Applicata - A.A. 2024/25

Studenti Gruppo 16:

Corradomaria Giachetta
Matricola: 0612708054
Francesco Peluso
Matricola: 0612707469

Gerardo Selce
Matricola: 0612707692

Anuar Zouhri
Matricola: 0612707505

Docenti:
Prof. Fabio Postiglione
Prof. Paolo Addesso

Last update: 22 giugno 2025

Indice

1 Descrizione del dataset fornito

A completezza del progetto si riporta la descrizione del dataset da analizzare. Il dataset contiene $n = 100$ osservazioni, costituite da:

Variabile dipendente

y_VideoQuality → Qualità percepita del video

Tale indice è immaginato come frutto di una opportuna trasformazione di un punteggio assegnato a un campione di immagini da volontari che compilano un questionario. Esso sarà funzione di diverse caratteristiche proprie dei video, tra cui:

- la presenza o meno di rumore;
- la presenza o meno di *motion blur*;
- la nitidezza;
- la profondità di campo;
- la risoluzione;
- le aberrazioni ottiche visibili;
- la gamma dinamica;
- la fedeltà cromatica.

Variabili indipendenti (regressori)

Sono delle quantità di cui l'operatore ha il controllo (parziale o totale) selezionando:

- l'attrezzatura video da utilizzare;
- i parametri di ripresa.

Rappresentano indici standardizzati:

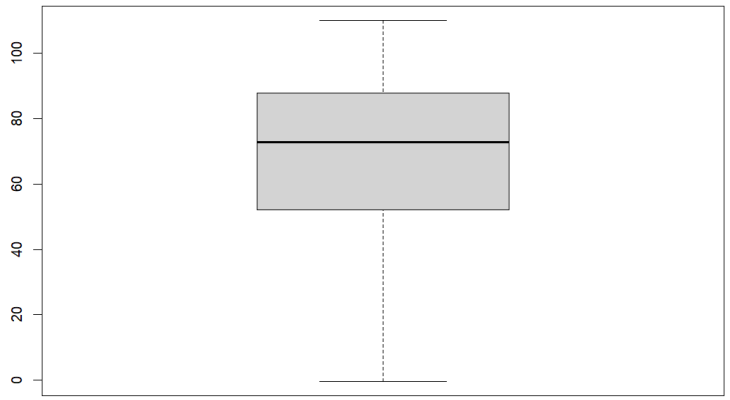
- `x1_ISO` → ISO (sensibilità del sensore)
- `x2_FRatio` → Rapporto Focale
- `x3_Time` → Tempo di Esposizione (in relazione al frame rate utilizzato)
- `x4_MP` → Megapixel del sensore
- `x5_CROP` → Fattore di Crop
- `x6_FOCAL` → Focale
- `x7_PixDensity` → Densità di pixel

2 Analisi delle caratteristiche del dataset

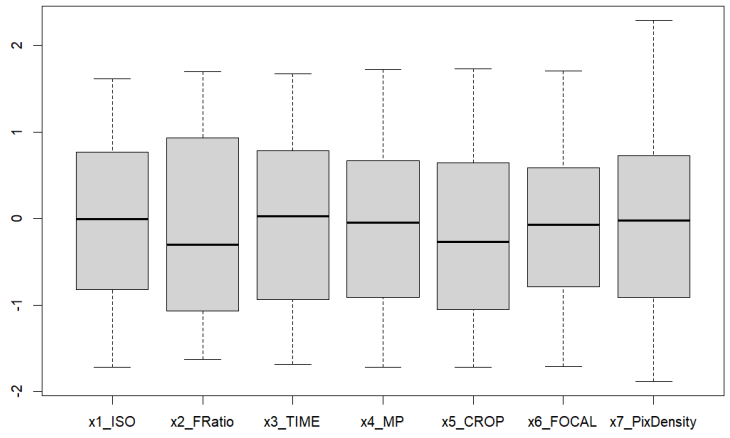
In questa fase preliminare si illustreranno le principali considerazioni fatte sul dataset fornito.

2.1 Boxplot dei dati

Si considerino i seguenti boxplot delle variabili del dataset.



(a) Boxplot della variabile dipendente y_VideoQuality



(b) Boxplot delle variabili indipendenti x_i

Figura 1: Boxplot delle variabili considerate

Si osservi innanzitutto che i valori per ciascuna variabile sono tutti contenuti all'interno dell'intervallo interquartile e che quindi non sono presenti outliers. Per quel che riguarda la variabile dipendente y_VideoQuality si è osservato che il valore della media e della mediana sono simili, infatti valgono rispettivamente media $= 72.8135$, mediana $= 68.6081$. Si è osservato inoltre che i valori assunti dalla variabile x7_PixDensity coprono un intervallo maggiore rispetto alle altre variabili indipendenti.

2.2 Analisi di normalità

Anche se non strettamente necessario ai fini del metodo di regressione, si è comunque deciso di verificare se qualcuna delle variabili indipendenti avesse una distribuzione normale. Tra i diversi qq-plot, si osserva che la variabile x6_Focal sembrerebbe avere una

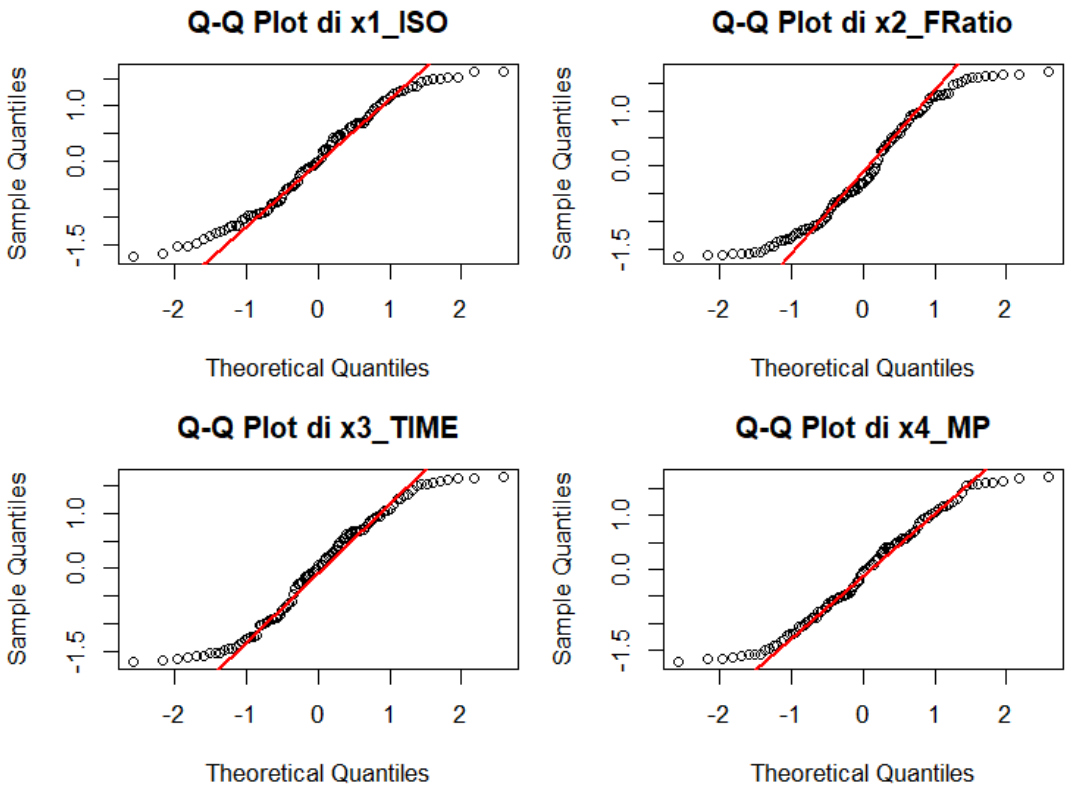
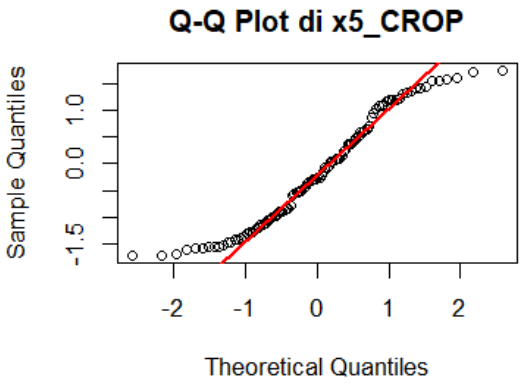


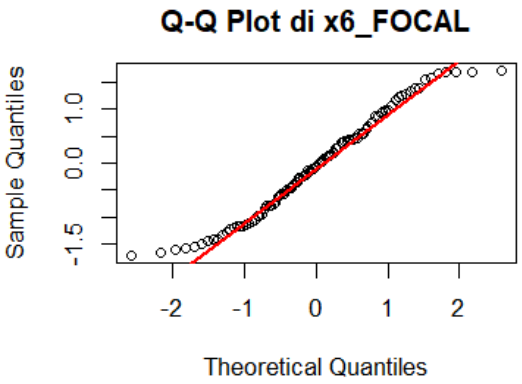
Figura 2:

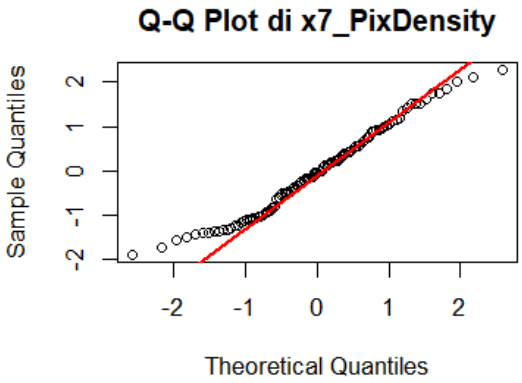
distribuzione normale. Applicando il test di shapiro a questa variabile si ottiene

$$\text{W} = 0.97, \text{p-value} = 0.02.$$

Il valore di p-value ottenuto non si discosta molto da 0.05 e si potrebbe perciò supporre che la variabile sia distribuita come una normale.


Q-Q Plot di x5_CROP
Sample Quantiles
-1.5
0.0
1.0
-2
-1
0
1
2
Theoretical Quantiles


Q-Q Plot di x6_FOCAL
Sample Quantiles
-1.5
0.0
1.0
-2
-1
0
1
2
Theoretical Quantiles


Q-Q Plot di x7_PixDensity
Sample Quantiles
-2
-1
0
1
2
-2
-1
0
1
2
Theoretical Quantiles

3 Analisi della dipendenza tra le variabili

3.1 Analisi di correlazione

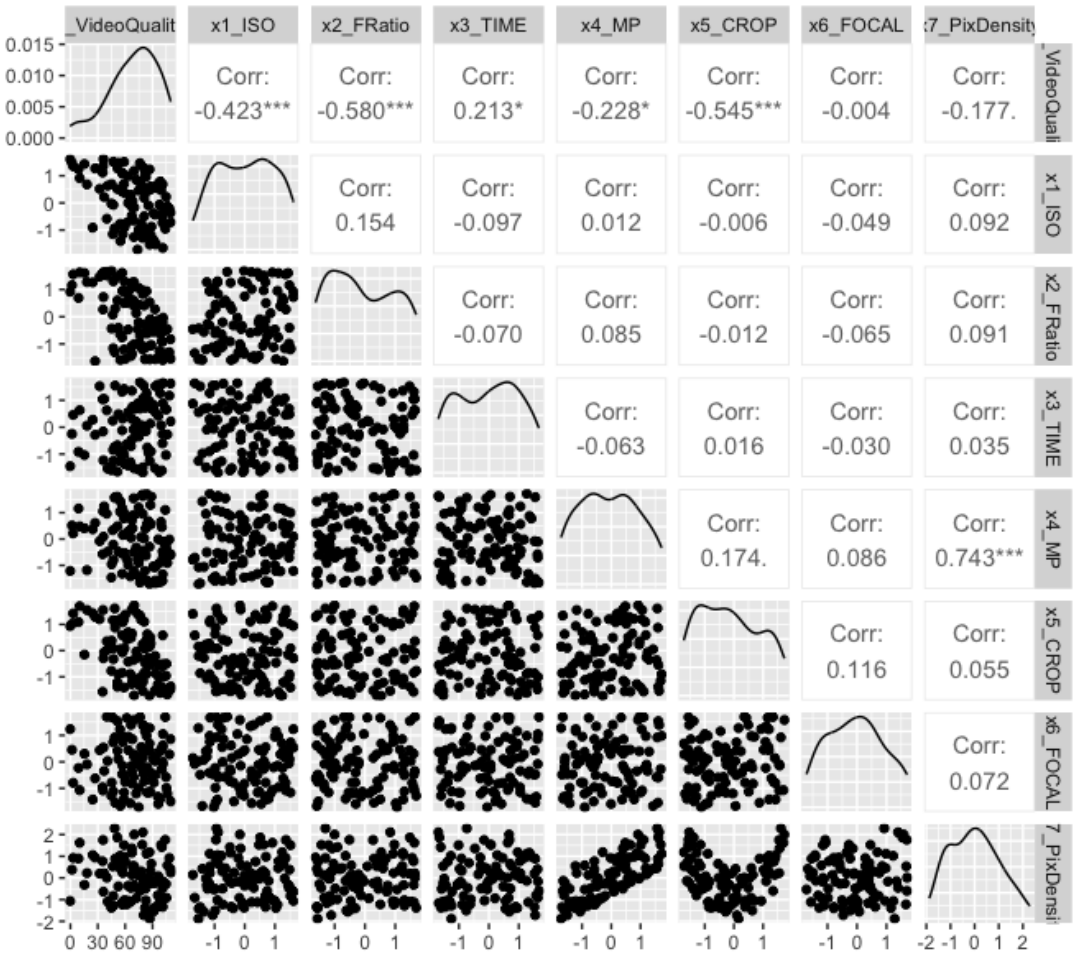


Figura 3: Scatter plot delle variabili presenti nel dataset.

Dalla Figura (3) notiamo, anche dal coefficiente di correlazione, una dipendenza lineare tra le variabili:

- **x4_MP** e **x7_PixDensity**

Invece notiamo la presenza di dipendenze non lineari che non vengono descritte dal coefficiente di correlazione. In particolare la notiamo tra le variabili:

- **y_VideoQuality** e **x1_ISO**
- **y_VideoQuality** e **x2_FRatio**
- **y_VideoQuality** e **x3_Time**
- **y_VideoQuality** e **x5_CROP**
- **x5_CROP** e **x7_PixDensity**

3.2 Analisi di regressione

Le dipendenze tra la variabile y_VideoQuality e le diverse variabili indipendenti sono state analizzate attraverso una regressione semplice sulle singole variabili indipendenti.

Variabile indipendente	**p-value**
x1_ISO	$1.17e-05$
x2_FRatio	$2.63e-10$
x3_TIME	$0.0331e$
x4_MP	0.0227
x5_CROP	$4.39e-09$
x6_FOCAL	0.97
x7_PixDensity	0.0775

Tabella 1: Sono rappresentati i p-value relativi alle regressioni delle singole variabili indipendenti al primo grado.

Diversamente da quanto ottenuto nell'analisi di correlazione, dalla Tabella (1) risultano rilevanti i regressori x1, x2, x3, x5. La stessa analisi è stata poi effettuata considerando anche i regressori al secondo ordine.

Variabile indipendente	**p-value**
x1_ISO	$2.46e-03$
x2_FRatio	$1.28e-3$
x3_TIME	0.3094
x4_MP	0.2899
x5_CROP	0.368
x6_FOCAL	0.770
x7_PixDensity	0.8038

Tabella 2: Sono rappresentati i p-value relativi alle regressioni delle singole variabili indipendenti al secondo grado.

Dalla Tabella (2) risulta evidente una dipendenza quadratica della variabile dipendente dai regressori x1, x2.

4 Analisi dei modelli

In questa sezione si analizzeranno differenti modelli e successivamente li si confronteranno verificando quale dei modelli meglio soddisfa l'ipotesi di normalità dei residui tramite dei grafici e test diagnostici. Inoltre, dato il numero non elevato di campioni si confronteranno i valori di AIC e di adjusted-R^2.

4.1 Modello 1

Il primo modello analizzato è quello che include i regressori (di primo grado) più significativi (in base al valore di p_value misurato precedentemente). Ovvero:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_5 x_5.$$

La stima dei parametri ottenuti per questo modello è

Parametro	**Stima**	**Dev. Std.**
β_0	65.62	1.30
β_1	-9.37	1.38
β_2	-13.33	1.24
β_3	4.01	1.26
β_5	-14.52	1.26

Tabella 3: Stime dei coefficienti e deviazioni standard del modello

Gli intervalli di confidenza al 5%, ottenuti tramite il metodo confint() di R, sono:

Parametro	**Lower bound**	**Upper bound**
β_0	63.04	68.20
β_1	-12.11	-6.62
β_2	-15.79	-10.87
β_3	1.51	6.51
β_5	-17.01	-12.03

Tabella 4: Intervalli di confidenza al 95% per i coefficienti del modello

I valori dell'adjusted R^2 e AIC ottenuti sono:

$$R^2 = 0.77, \quad AIC = 514.69.$$

4.2 Modello 2

Il prossimo modello analizzato è quello ottenuto aggiungendo tutti i regressori più significativi con l'aggiunta di alcuni regressori al quadrato.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \beta_3 x_2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_3 + \beta_6 x_5$$

La stima dei parametri ottenuti per questo modello è

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_0	79.93	1.95
β_1	-8.66	1.05
β_2	-8.03	1.23
β_3	-13.49	0.94
β_4	-6.38	1.09
β_5	3.94	0.95
β_6	-13.23	0.96

Tabella 5: Stime dei coefficienti e errori standard del modello

Gli intervalli di confidenza al 5%, ottenuti tramite il metodo confint() di R, sono:

Parametro	Lower bound	Upper bound
β_0	76.06	83.80
β_1	-10.75	-6.58
β_2	-10.48	-5.58
β_3	-15.36	-11.63
β_4	-8.55	-4.22
β_5	2.05	5.84
β_6	-15.14	-11.32

Tabella 6: Intervalli di confidenza al 95% per i coefficienti del modello

I valori dell'adjusted R^2 e AIC ottenuti sono:

$$R^2 = 0.87, \quad AIC = 460.76.$$

4.3 Modello 3

Questo modello è ottenuto tramite la seguente istruzione R, adottando la funzione step():

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_6 x_6 + \beta_7 x_7 + \beta_8 x_1^2 + \beta_9 x_2^2 + \beta_{10} x_6^2 + \beta_{11} x_7^2 + \beta_{12} x_1 x_6 + \beta_{13} x_2 x_4 + \beta_{14} x_3 x_4 + \beta_{15} x_3 x_5 + \beta_{16} x_3 x_7 + \beta_{17} x_4 x_7.$$

In particolare il modello di partenza da cui si è partiti:

```
model_step_interactions <- lm(y_VideoQuality ~ (.)^2 + I(x1_ISO^2) +
I(x2_FRatio^2) + I(x3_TIME^2) + I(x4_MP^2) + I(x5_CROP^2) + I(x6_FOCAL^2) +
I(x7_PixDensity^2), data = data)
```

La stima dei parametri ottenuti per questo modello è:

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_0	81.64	2.18
β_1	-8.77	1.00
β_2	-13.56	0.90
β_3	4.31	1.03
β_4	-0.25	1.46
β_5	-13.37	0.92
β_6	0.62	0.99
β_7	-2.96	1.60
β_8	-8.85	1.16

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_9	-6.57	1.01
β_{10}	-1.89	1.07
β_{11}	2.91	1.86
β_{12}	-1.71	1.18
β_{13}	1.66	0.99
β_{14}	-2.81	1.42
β_{15}	2.83	0.99
β_{16}	3.24	1.54
β_{17}	-3.55	2.25

Tabella 7: Stime dei coefficienti e deviazioni standard del modello

Gli intervalli di confidenza al 5%, ottenuti tramite il metodo confint() di R, sono:

Parametro	L.B.	U.B.
β_0	77.29	85.99
β_1	-10.76	-6.78
β_2	-15.34	-11.77
β_3	2.26	6.37
β_4	-3.16	2.65
β_5	-15.20	-11.53
β_6	-1.34	2.59
β_7	-6.14	0.22
β_8	-11.16	-6.55

Parametro	L.B.	U.B.
β_9	-8.58	-4.57
β_{10}	-4.01	0.23
β_{11}	-0.78	6.61
β_{12}	-4.05	0.64
β_{13}	-0.31	3.62
β_{14}	-5.65	0.02
β_{15}	0.86	4.81
β_{16}	0.19	6.30
β_{17}	-8.02	0.93

Tabella 8: Intervalli di confidenza al 95% per i coefficienti del modello

I valori dell'adjusted R^2 e AIC ottenuti sono:

$$R^2 = 0.89, \quad AIC = 448.27.$$

4.4 Modello 4

Questo modello è stato ottenuto riducendo il Modello 3, in particolare escludendo le variabili x_4 e x_6 apparentemente poco significative. Si presenta come:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_5 + \beta_5 x_7 + \beta_6 x_1^2 + \beta_7 x_2^2 + \beta_8 x_3 x_5$$

La stima dei parametri ottenuti per questo modello è:

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_0	80.00	1.86
β_1	-8.19	1.00
β_2	-13.59	0.90
β_3	4.73	0.96
β_4	-13.22	0.92
β_5	-2.91	0.94
β_6	-8.31	1.18
β_7	-6.26	1.04
β_8	1.89	0.94

Tabella 9: Stime dei coefficienti e deviazioni standard del modello

Gli intervalli di confidenza al 5%, ottenuti tramite il metodo confint() di R, sono:

Parametro	Lower bound	Upper bound
β_0	76.31	83.69
β_1	-10.18	-6.19
β_2	-15.38	-11.80
β_3	2.82	6.64
β_4	-15.04	-11.39
β_5	-4.77	-1.05
β_6	-10.65	-5.97
β_7	-8.32	-4.21
β_8	0.02	3.75

Tabella 10: Intervalli di confidenza al 95% per i coefficienti del modello

I valori dell'adjusted R^2 e AIC ottenuti sono:

$$R^2 = 0.88, \quad AIC = 451.56.$$

4.5 Modello 5

Questo modello è stato ottenuto analizzando anche i termini cubici. In particolare, il modello si presenta nel seguente modo:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_5 + \beta_5 x_6 + \beta_6 x_7 + \beta_7 x_1^2 + \beta_8 x_2^2 + \beta_9 x_6^2 + \beta_{10} x_1^3 + \beta_{11} x_7^3 + \\ + \beta_{12} x_1 x_7 + \beta_{13} x_3 x_5 + \beta_{14} x_3 x_7$$

La stima dei parametri ottenuti per questo modello è:

Parametro	Stima	Dev. Std.
β_0	81.87	1.97
β_1	-0.44	2.16
β_2	-13.46	0.84
β_3	4.61	0.90
β_4	-13.74	0.83
β_5	1.57	0.92
β_6	-6.08	1.76
β_7	-8.63	1.10
β_8	-6.79	0.93
β_9	-1.80	0.97
β_{10}	-4.99	1.27
β_{11}	1.97	0.74
β_{12}	1.59	1.00
β_{13}	1.41	0.87
β_{14}	1.78	0.86

Tabella 11: Stime dei coefficienti e deviazioni standard del modello

Gli intervalli di confidenza al 5%, ottenuti tramite il metodo confint() di R, sono:

Parametro	Lower bound	Upper bound
β_0	77.95	85.80
β_1	-4.73	3.86
β_2	-15.13	-11.80
β_3	2.81	6.40
β_4	-15.39	-12.08
β_5	-0.25	-3.39
β_6	-9.58	-2.57
β_7	-10.82	-6.44
β_8	-8.63	-4.95
β_9	-3.72	0.12
β_{10}	-7.52	-2.47
β_{11}	0.50	3.43
β_{12}	-0.39	3.58
β_{13}	-0.31	3.14
β_{14}	0.07	3.49

Tabella 12: Intervalli di confidenza al 95% per i coefficienti del modello

I valori dell'adjusted R^2 e AIC ottenuti sono:

$$R^2 = 0.92, \quad AIC = 431.91.$$

5 Scelta del modello

Si riportano i valori di R^2, AIC e MSE dei cinque modelli.

Modello	adjusted R^2	AIC	MSE
1	0.77	514.69	155.54
2	0.87	460.76	87.16
3	0.89	448.27	61.72
4	0.88	451.67	76.45
5	0.91	431.91	55.65

Tabella 13: Valori di R^2 e AIC per i quattro modelli

Osservazione. È opportuno considerare che, nella scelta del modello, si è tenuto conto della discreta correlazione lineare osservata tra alcune variabili predittive, in particolare tra **x4_MP** e **x7_PixDensity** (correlazione pari a 0.743).
Un'alta correlazione tra predittori può infatti dar luogo a fenomeni di *multicollinearità*, ossia a situazioni in cui alcune variabili esplicative risultano linearmente dipendenti o quasi dipendenti. Ciò comporta una riduzione del rango della matrice di (*design*), con conseguenti stime instabili dei coefficienti, varianze elevate e difficoltà nell'interpretazione individuale degli effetti delle singole variabili.

Di seguito vengono mostrati i grafici diagnostici ottenuti sui cinque modelli.

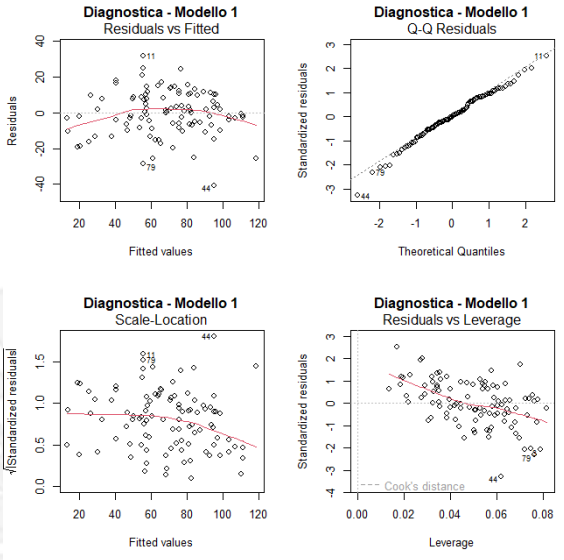


Figura 4: Modello 1: diagnostica

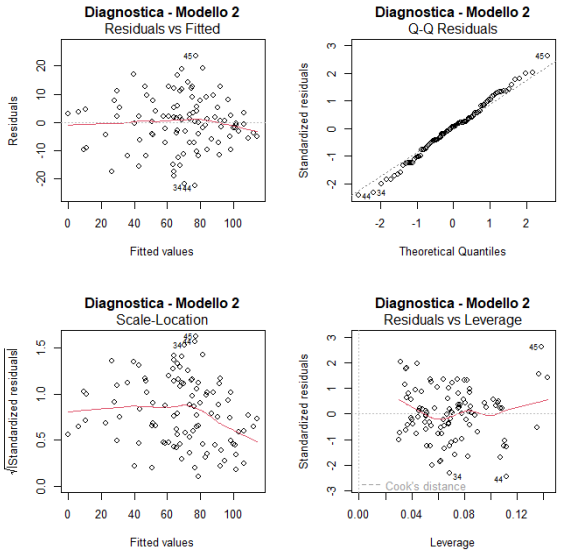


Figura 5: Modello 2: diagnostica

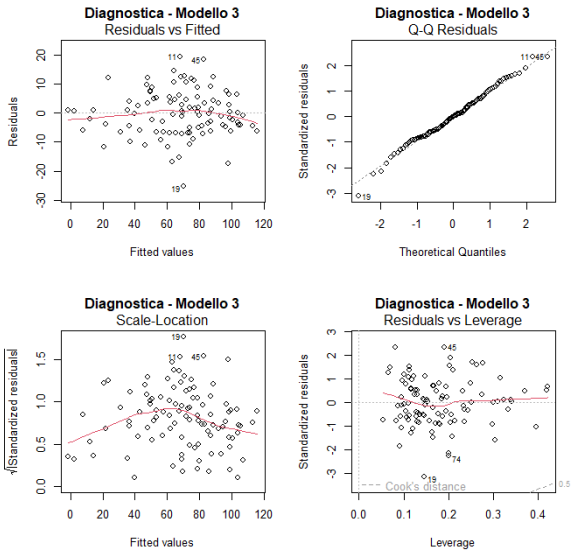


Figura 6: Modello 3: diagnostica

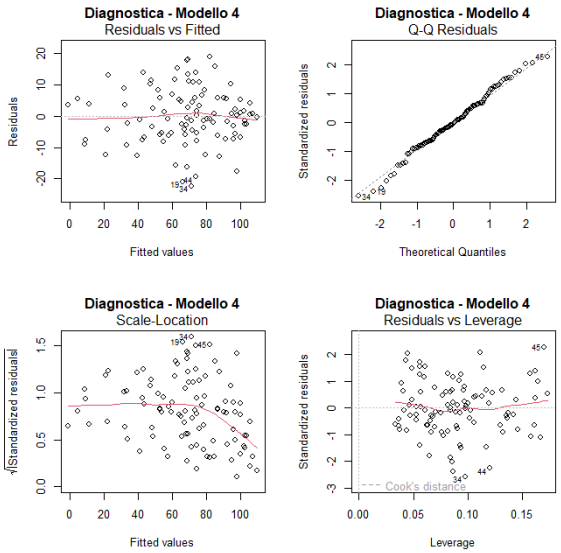


Figura 7: Modello 4: diagnostica

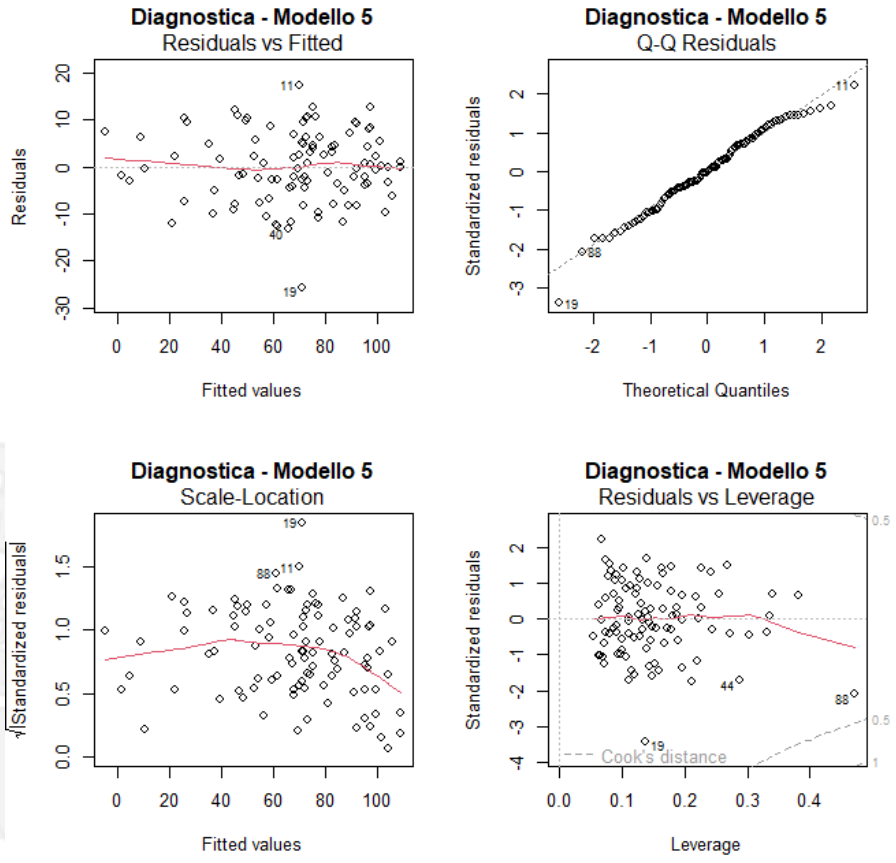


Figura 8: Modello 5: diagnostica

Osservando i grafici 'Residuals vs Fitted' si nota che nel modello 1, la linea rossa presenta un pattern, a differenza degli altri quat soddisfando in buona maniera l'ipotesi di linearità. Inoltre, sempre i modelli 2 e 4 nei grafici 'Q-Q Residuals' l'ipotesi di normalità sembra essere soddisfatta.

Si osservi (dal grafico 'Scale-Location') che però su nessuno dei modelli considerati si può supporre che la varianza sia costante.

Infine comparando i valori di adjusted R^2 e AIC, il modello 4 sarebbe da preferire. Infatti, usando l'AIC, si sceglie il modello che ha valore minore; un valore maggiore di R^2 implica che il modello è in grado di interpretare meglio il fenomeno osservato.

A fronte dei dati ricavati si è stimato che il modello che meglio rappresenta il dataset fornito è il modello 4.