La stima Bayesiana 3 - 17/10 (MSE stima parametro aleatorio Y)

Valutiamo il MSE del nostro approccio per la stima del parametro aleatorio Y

Riprendiamo l'esercizio originale con il quale abbiamo introdotto la stima Bayesiana.

STIMA BAYESIANA

$$X = Y + W$$

$\hookrightarrow W \sim N(0, \sigma_w^2)$

$Y \sim N(0, \sigma_y^2)$ r.v.

Ora vogliamo valutare l'errore dello stimatore calcolato con il nostro approccio che è il Mean Squared Error.

> 💡 Prendiamo il Mean Squared Error e lo consideriamo come funzione di rischio che vogliamo ottimizzare, si parla infatti di Rischio Bayesiano.

Il Mean Squared Error è la media su X e Y della differenza al quadrato tra Y e la sua stima. La media è su X e Y perché ci sono due variabilità visto che può variare Y che è una variabile aleatoria ma può anche variare X, di nuovo variabile aleatoria, dal quale stiamo provando a fare inferenza.

Una media su due valori richiederebbe la congiunta su XY, per non doverla avere utilizziamo una proprietà dei valori attesi chiamata Tower Property o anche Legge dei Valori Attesi iterati, ha anche altri nomi.

Espressione generale:

$$\mathbb{E}_{x,y}[(y-\hat{y})^2] = \int_x \int_y (y-\hat{y}(x))^2 p(x,y)\, dy\, dx$$

calcoliamo il valore del MSE della stima

Theoretical error of MMSE

$$\mathbb{E}_{x,y}[(Y-\hat{Y})^2] = \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}_X[(Y-\hat{Y})^2 \mid Y]]$$

TOWER PROPERTY $\rightarrow \mathbb{E}_{x,y}[h(x,y)] = \mathbb{E}_y[\mathbb{E}_x[h(x,y) \mid y]]$

applichiamo la tower property allo stimatore Bayesiano

In pratica dividiamo la media sulle due variabili calcolando la media su Y della media su X della quantità di nostro interesse **condizionata** ad Y. Nell'applicazione della Tower Property si sceglie chi usare come condizionante a seconda di quali medie possono essere più facili da calcolare, non c'è una relazione d'ordine.

Dopo aver calcolato la media su X resterà una funzione su Y.

La media interna

Partiamo dal calcolo della media interna ottenuta dalla Tower Property.

Ricordiamo il valore dello stimatore di Y:

Recall that est of Y is $\hat{Y} = \mathbb{E}[Y \mid X] = a\overline{X} = \dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2 + \frac{\sigma_W^2}{N}}\overline{X}$

Iniziamo.

Inner exp value : $\mathbb{E}[(Y-\hat{Y})^2 \mid Y = y] =$

↳ y piccolo perché dopo aver fissato Y la grande diventa piccola

Scriviamo Y = y perché visto che il valore atteso è su X concettualmente va calcolato per un fissato valore di Y, un valore fissato non è più maiuscolo ma è minuscolo.

$$= \mathbb{E}[(y - a\overline{x})^2 \mid Y = y] = \mathbb{E}[(y - a(y + \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_i w_i))^2 \mid Y = y]$$

diamo per contato che $Y = y$ quindi non lo scriviamo più

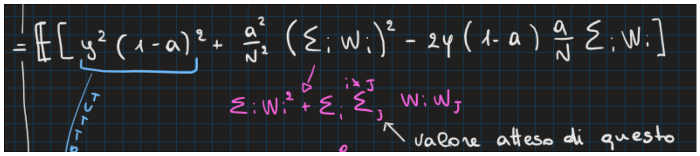
$\overline{x} = y + \frac{1}{N}\sum_i w_i$

↳ $\frac{1}{N}E[x_i] \mapsto \sum_i w_i$

Sostituiamo il valore di $\hat{Y}$ e poi sostituiamo anche il valore di $\overline{x}$. Invece di essere sommatoria di x_i è sommatoria di w_i con y sommato a parte perché y è stato fissato quindi è indipendente da i.

$$= \mathbb{E}[(y - ay - \tfrac{a}{N}\textstyle\sum_i w_i)^2] = \mathbb{E}[(y(1-a) - \tfrac{a}{N}\textstyle\sum_i w_i)^2]$$

Abbiamo ricondotto il contenuto della media al quadrato di una differenza che ora svolgiamo.



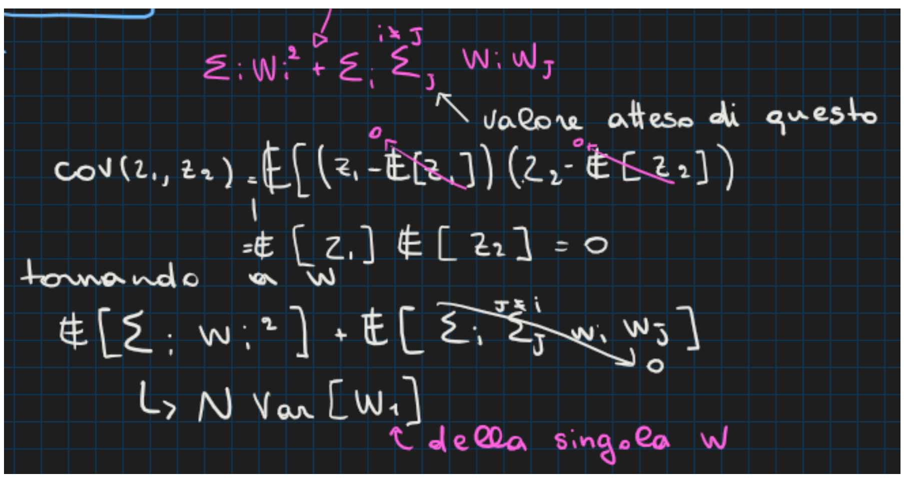
Avere un valore atteso con delle somme non è complicato, i quadrati potrebbero porre un problema.

Siccome alla fine bisognerà fare il Valore Atteso della somma dei Valori Attesi (questa media si divide in somme di medie ed è tutto contenuto nella media esterna).

Abbiamo diverse parti costanti che quindi sono semplici perché la media di una costante è la costante stessa **ma** ci resta il valore atteso della sommatoria al quadrato delle w_i, che sarà (in rosa) la sommatoria delle w_i^2, cioè tutti i quadrati, più tutti i doppi prodotti.

Di questo oggetto (rosa) è necessario calcolare il valore atteso.

$$\mathbb{E}[Z_1 Z_2] = \mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) + \mathbb{E}[Z_1] \cdot \mathbb{E}[Z_2]$$



La media del prodotto per variabili incorrelate equivale al prodotto delle medie, che in questo caso è 0.

La media della sommatoria sarà la sommatoria della media, la media della variabile aleatoria al quadrato è il momento del secondo ordine che per le variabili a media nulla equivale alla varianza.

Quindi in sintesi:

$$= \mathbb{E}\Big[\underbrace{y^2 (1-a)^2}_{\text{TUTTO COSTANTE}} + \frac{a^2}{N^2} \Big(\sum_i w_i\Big)^2 - 2y(1-a)\frac{a}{N}\sum_i w_i \Big]$$

$$\sum_i w_i^2 + \sum_i \sum_j^{i \neq j} w_i w_j$$

valore atteso di questo

$$\mathrm{cov}(z_1, z_2) = \mathbb{E}\big[(z_1 - \cancel{\mathbb{E}[z_1]})(z_2 - \cancel{\mathbb{E}[z_2]})\big]$$

$$= \mathbb{E}[z_1]\,\mathbb{E}[z_2] = 0$$

tornando a W

$$\mathbb{E}\Big[\sum_i w_i^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_i \sum_j^{j \neq i} w_i w_j\Big] \rightarrow 0$$

$$\hookrightarrow N\,\mathrm{Var}[W_1]$$

della singola W

$$= y^2(1-a)^2 + \frac{a^2}{N}\sigma_w^2 + 0$$

Per quanto riguarda l'ultimo termine a destra, questo fa 0 perché è tutto moltiplicato per la somma delle medie delle w_i che sono tutte 0.

La media esterna

ritorniamo in forma di y come variabile aleatoria

The outer expectation is : $\mathbb{E}_Y\Big[y^2(1-a)^2 + \frac{a^2}{N}\sigma_w^2 \Big] =$

Calcolata la media interna passiamo alla media esterna.

Per il calcolo della media interna avevamo "fissato" y che quindi era un valore costante, ora torniamo a considerare Y variabile aleatoria per calcolarne la media.

$$= (1-a)^2\,\mathbb{E}[Y^2] + \frac{a^2}{N}\sigma_w^2 = (1-a)^2\sigma_Y^2 + \frac{a^2\sigma_w^2}{N}$$

$$a = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2 + \frac{\sigma_w^2}{N}}$$

Ancora una volta visto che la variabile aleatoria che stiamo considerando ha media 0 il suo momento del secondo ordine è pari alla varianza della variabile aleatoria, quindi σ_Y^2.

Ricordiamo che a era un valore specifico che abbiamo definito precedentemente e che poteva essere diverso da 1.

Risultato MSE

Sostituendo a nel risultato che abbiamo ottenuto troviamo finalmente l'MSE.

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[(Y-\hat{Y})^2\right] = \frac{\sigma_y^2\,\sigma_w^4}{N^2\left(\sigma_y^2+\sigma_w^2/N\right)^2} + \frac{\sigma_y^4\,\sigma_w^2}{N\left(\sigma_y^2+\frac{\sigma_w^2}{N}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sigma_y^2\,\sigma_w^2\,\cancel{\left(\sigma_w^2/N+\sigma_y^2\right)}}{N\left(\sigma_y^2+\frac{\sigma_w^2}{N}\right)^{\cancel{2}}} = \frac{\sigma_y^2\,\sigma_w^2}{N\sigma_y^2+\sigma_w^2} = \sigma^2$$

↳ l'abbiamo già trovata varianza di $f(y|x)$

💡 Notiamo che l'espressione finale che otteniamo per l'MSE è proprio pari alla varianza della posteriori $f_{Y|X}(y|x)$.

Quindi l'MSE è pari a quella che era la varianza dello stimatore, che poi è anche la varianza della posterior, questo ha senso visto che nel Bayesiano il bias non ha valore l'MSE è di fatto determinato dalla varianza.

Ricapitolazione

$$\begin{array}{lllll}
\text{Se} & \sigma_y^2 \to \infty & \mathbb{E}\left[(Y-\hat{Y})^2\right] = \frac{\sigma_w^2}{N} & , & \text{MMSE} = \bar{x} \\
& \sigma_y^2 \to 0 & \quad '' \quad = 0 & , & \text{MMSE} = 0 = \mu_y \\
& \sigma_w^2 \to \infty & \quad '' \quad = \sigma_y^2 & , & \text{MMSE} = 0 = \mu_y \\
& \sigma_w^2 \to 0 & \quad '' \quad = 0 & , & \text{MMSE} = \bar{x}
\end{array}$$

$\sigma_y^2 \to \infty$

Se la varianza della prior è infinita la prior non è informativa e quindi quello che domina l'MSE è la varianza dei dati, che però erano proprio dati dallo stimatore, il valore atteso di Y dato X, cioè l'MMSE.

L'MMSE con varianza infinita delle Y era proprio la $\overline{x}$.

Sto dicendo che senza informazioni a priori la varianza è $\frac{\sigma_w^2}{N}$ cioè la stessa di quella dello stimatore a massima verosimiglianza, in altre parole solo i dati contano e nei dati la cosa importante è la W, cioè l'errore, perché è l'errore che crea la variabilità vera.

$\sigma_y^2 \to 0$

In questo caso il MMSE è 0 che è anche la media della Y.

Del resto se la prior è perfettamente affidabile ed informativa ha senso che il risultato che esce sia la media della distribuzione, che è 0.

$\sigma_w^2 \to \infty$

In questo caso resta solo σ_y^2.

Con una varianza enorme i dati sono inutili e solo la prior ha valore, è la varianza di y a dominare la varianza dello stimatore, l'MMSE è ancora una volta 0.

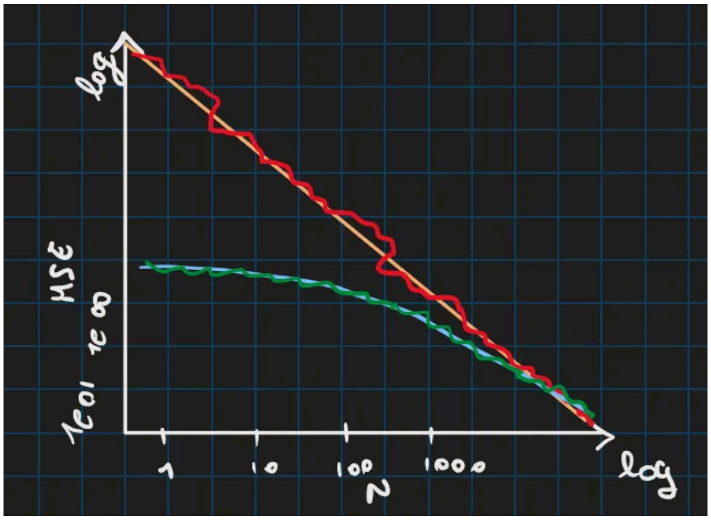
$$\sigma_w^2 \to 0$$

Se la varianza di W è 0 allora i dati hanno precisione assoluta quindi la media campionaria domina la stima.

Conclusioni

In conclusione si riconferma quanto vedemmo nell'esercizio con i dati eterogenei, lo stimatore MMSE, cioè Bayesiano, si sposta dove c'è più precisione tra prior e dati.

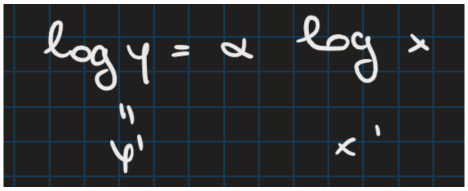
Importanza del grafico Log Log



Quella arancione è teorica la rossa è calcolata con Monte Carlo, lo stesso vale per blu e verde. Essenzialmente la varianza in MMSE è quella blu/verde, che tende ad essere quella di MLE (σ_w^2/N) per N infinito che significa che i dati vincono sulla prior.

Un grafico Log Log è importante perché se abbiamo una relazione del tipo

$Y = x^\alpha$ se decidiamo di fare il logaritmo da entrambe le parti possiamo chiamarli poi y' e x'.



Quello che vediamo sono leggi di potenza, potenza significa anche -1 solo che c'è la potenza negativa.

Tutto questo è comodo perché x^b diventa b*logaritmo, le cose diventano rette.

💡 Il grafico Log Log permette di mettere in evidenza legami di tipo legge ti potenza.

Siccome 1/N è una legge di potenza in termini della nostra N che è la nostra X, il legame σ_w^2/N diventa una retta a pendenza -1, sarebbe sul grafico la linea arancione (teorica) e rossa (calcolata con Montecarlo).

La linea blu (teorica) e verde (calcolata con Montecarlo) è relativa all'MSE, questo parte dal σ_Y^2, sfrutta la priori all'inizio perché si ha un solo punto ma mano a mano che si va a destra il σ_w^2/N diventa sempre più piccolo e quindi si tende ad usare più i dati perché diventano più precisi del prior.

La legge è questa, σ^2/N, è una legge classica, quando gli stimatori seguono σ^2/N le deviazioni standard sono $\sigma/\sqrt{N}$ che indica una decrescita di tipo $\sqrt{N}$, tendono al valore vero come $\sqrt{N}$, questi prendono il nome di radical N consistenti.

Se vanno più piano di radical N a 0 gli stimatori non sono molto apprezzati.

Chiudiamo con questo il tema dei Model Based.

Ora torniamo al concetto di regressione, con un approccio nel quale noi abbiamo sia X sia Y e costruiamo il rapporto, che non conosciamo trai due, approccio supervisionato.