METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2003 - 2004

Prof. A. Degasperis
Esercitazioni a cura del Dr. F. Zamponi

21 settembre 2005

- Argomenti trattati nel corso
  1. Funzioni di una variabile complessa
  2. Trasformata di Fourier
- Contenuto di queste note
  1. Programma
  2. Riferimenti bibliografici
  3. Formule utili
  4. Breve riassunto delle lezioni e delle esercitazioni
  5. Raccolta degli esercizi distribuiti e dei compiti di esonero

PROGRAMMA

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA

L'insieme dei numeri complessi: completezza algebrica ed analitica. Rappresentazione Cartesiana e polare. Polidromia di Argz. Punto all'infinito e compattificazione del piano complesso. Sfera di Riemann. Domini e loro frontiera. Funzioni di variabile complessa e trasformazioni di coordinate del piano. Polinomi e Teorema Fondamentale dell'Algebra. Definizione di analiticità attraverso la rappresentazione in serie di potenze. Proprietà della serie di Taylor. Definizione di singolarità. Prolungamento analitico secondo Wiestrass. Monodromia e polidromia (algebrica e trascendente). Analiticità ed equazioni differenziali di Cauchy-Riemann. Esistenza della derivata rispetto ad una variabile complessa. Funzioni intere, razionali e meromorfe. Analiticità e trasformazioni conformi. Integrali curvilinei di forme differenziali complesse e disuguaglianza di Darboux. Forme differenziali esatte. Teorema di Cauchy. Analiticitaà e deformazione dei cammini d'integrazione. Teorema di Morera (senza dimostrazione). Esistenza ed analiticità della primitiva di una funzione analitica. Rappresentazione integrale di Cauchy di una funzione analitica e di tutte le sue derivate. Teorema di Liouville, Teorema Fondamentale dell'Algebra e Teorema del Massimo e Minimo Modulo. La rappresentazione in serie di Laurent e sue proprietà. Singolarità polari ed essenziali. Analisi nell'intorno del punto all'infinito. Residuo e sua relazione con l'integrale su una curva chiusa. Teorema dei Residui e sua applicazione al calcolo di integrali sulla retta reale. Residuo nel punto all'infinito. Proprietà dei residui di funzioni razionali. Relazione tra le funzioni reali armoniche nel piano e le funzioni analitiche di variabile complessa. Polinomi armonici. Polidromia della primitiva di una funzione f(z) nell'intorno di un polo di f(z). Punti di diramazione algebrici e trascendenti. Il logaritmo nel piano complesso. Analiticità della potenza di z con esponente reale. Uso della polidromia e del Teorema dei Residui per il calcolo di integrali sulla retta reale.

SERIE DI FOURIER

Polinomio di z sulla circonferenza e polinomi trigonometrici. Definizione di serie di Fourier. Esempio di serie di Fourier come riduzione della serie di Laurent. Espansione di Fourier in seni e coseni ed in esponenziali. Proprietà di realtà e di parità dei coefficienti di Fourier di funzioni reali e pari o dispari. Serie di Fourier di funzioni di modulo quadrato integrabile e disuguaglianza di Bessel. Teorema di Completezza (senza dimostrazione). Convergenza in media della serie di Fourier. Disuguaglianza di Schwartz. Teorema di Parseval. Teorema di Riemann-Lebesgue (senza dimostrazione). Calcolo approssimato di integrali tipo Fourier per grandi valori della variabile duale. Approssimazione uniforme con polinomi trigonometrici. Teorema di Fejer (senza dimostrazione) e convergenza secondo Cesaro.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

TESTI CONSIGLIATI

- Funzioni di una variabile complessa

  1. Bernardini C., Ragnisco O., Santini P.M. Metodi Matematici della Fisica La Nuova Italia Scientifica, Roma 1993
  2. Calogero F. Metodi Matematici della Fisica Lezioni ciclostilate, Ufficio Dispense del Dipartimento, 1974
  3. Dennery P., Krzywicki A. Mathematics for Physicists Harper & Row 1967
  4. Rossetti C. Metodi Matematici per la Fisica Libreria Ed.Univ. Levrotto & Bella 1978

- Serie di Fourier

  1. D.V.Widder, "Advanced Calculus" (second edition), Prentice-Hall
  2. E.T.Whittaker, G.N.Watson, "A course of Moder Analysis", Cambridge University Press

MANUALI DA CONSULTARE

1. Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions Dover Publ., New York 1968

2. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series and Products Academic Press, New York 1965

FORMULE UTILI

$$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\ \exp(i\theta)$$

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le \rho = |z| < \infty \\ -\pi < \theta = \arg z \le \pi \end{cases}$$

$$\mathrm{Argz} = \arg z + 2\pi n \ \ , n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = |z| \\ \theta = \mathrm{Arctg}(y/x) = \mathrm{Arg}z \end{cases}$$

$$\exp(2i\pi n) = 1 \qquad , n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$|\exp(i\alpha)| = 1, \quad \text{se } \alpha \text{ e' reale}$$

Formula di Eulero: $\cos z + i\sin z = \exp(iz)$
Formula di De Moivre: $(\cos z + i\sin z)^N = \cos Nz + i\sin Nz$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n = c_N z^N + c_{N-1} z^{N-1} + ... + c_1 z + c_0$$

$$P(z) = c_N \prod_{k=1}^{M} (z - z_k)^{m_k} = c_N (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} .....(z - z_M)^{m_M} \ .$$

In questa rappresentazione del polinomio $P(z)$, $z_k \neq z_h$ se $k \neq h$, z_k e' radice di $P(z)$: $P(z_k) = 0$, $M \le N$ e m_k e' la molteplicita' della radice z_k

$$m_1 + m_2 + ... + m_M = \sum_{k=1}^{M} m_k = N \ .$$

Si dice che z_k e' uno zero semplice, doppio, triplo etc. di $P(z)$ se, rispettivamente, $m_k = 1, m_k = 2, m_k = 3$ etc.
Radici N-esime dell'unita' :

$$P(z) = z^N - 1 = \prod_{k=1}^{N} (z - \omega_k^{(N)}) \ , \ \omega_k^{(N)} = \exp(2\pi i k/N)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \omega_k^{(N)} = 0.$$

Radici di un polinomio di secondo grado:

$$P_2(z) = z^2 + c_1 z + c_0 = (z - z_1)(z - z_2)$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}c_1 + \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0} \ , z_2 = -\frac{1}{2}c_1 - \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0}$$

Radici di un polinomio di terzo grado (formule di Cardano):

$$P_3(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$

$$z_1 = -\frac{1}{3}c_2 + \omega(\gamma + \sqrt{\Delta})^{1/3} + \omega^2(\gamma - \sqrt{\Delta})^{1/3}$$

$$z_2 = -\frac{1}{3}c_2 + \omega^2(\gamma + \sqrt{\Delta})^{1/3} + \omega(\gamma - \sqrt{\Delta})^{1/3}$$

$$z_3 = -\frac{1}{3}c_2 + (\gamma + \sqrt{\Delta})^{1/3} + (\gamma - \sqrt{\Delta})^{1/3}$$

$$\omega = \exp(2\pi i/3) \ , \ \gamma = -\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{6}c_1 c_2 - \frac{1}{27}c_2^3$$

$$\Delta = \frac{1}{4}c_0^2 - \frac{1}{108}c_1^2 c_2^2 - \frac{1}{6}c_0\, c_1\, c_2 + \frac{1}{27}c_0\, c_2^3 + \frac{1}{27}c_1^3$$

Somme notevoli:

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^n b^{N-n} \ , \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} = 2^N \ , \ \binom{N}{n} = \binom{N-1}{n} + \binom{N-1}{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \ , \ \sum_{n=0}^{N}(1+z)^n = \sum_{n=0}^{N} \binom{N+1}{n+1} z^n \, ,$$

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{1}{2}N(N+1) \ , \ \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \, .$$

Se $f(z)$ e' analitica in z_0, allora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ converge uniformemente e assolutamente per $|z - z_0| < R$ dove $R = \lim_{n\to\infty} |f_n|^{-1/n}$, $R = \lim_{n\to\infty} |f_n/f_{n+1}|$

$$f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n} f(z)|_{z=z_0}$$

Prodotto di due serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n \ , \ g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z - z_0)^n \ , \ h(z) = f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n (z - z_0)^n$$

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k} g_k \ , \quad \text{(prodotto di convoluzione)}$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z-z_0)^n$ per $|z-z_0| < R \neq 0$, allora $f_n = g_n$ per $n = 0, 1, 2, ...$

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z - z_0)^n, \quad R = \infty$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

$$e^z = \cosh z + \sinh z$$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$\cosh(iz) = \cos z \quad , \quad \sinh(iz) = i \sin z$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \ , \ \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \ , \ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\sinh(z + 2\pi n i) = \sinh z \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$\cosh(z + 2\pi n i) = \cosh z \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} \quad , \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\mathrm{csch} z = \frac{1}{\sinh z} \quad , \quad \mathrm{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

Serie geometrica:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{z})^n \quad , \quad |z| > 1$$

$$\frac{1}{z-z_1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z_1 - z_0)^{-n-1} (z-z_0)^n, \qquad R = |z_1 - z_0|$$

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)....(z-z_N)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{(z-z_n)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{C_n^{(N)}}{z-z_n}$$

dove $C_n^{(N)} = \prod_{k=1, k\neq n}^{N} \frac{1}{(z_n - z_k)}$

$$(1+z)^a = 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} z^3 + ...$$

$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{n!\Gamma(a-n+1)} z^n \ , \ R = 1$$

$$(1+z)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} z - \frac{1}{8} z^2 + \frac{1}{16} z^3 - \frac{5}{128} z^4 + ...$$

$$(1+z)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{3}{8} z^2 - \frac{5}{16} z^3 + \frac{35}{128} z^4 + ...$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt \ \ t^{z-1} \ \ e^{-t} \quad , \quad \mathrm{Re} z > 0$$

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} dt \ \ t^{z-1} \ \ e^{-t} \quad , \quad z \neq 0, -1, -2...$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad \mathrm{Res}[\Gamma(\mathrm{z})]_{\mathrm{z}=-\mathrm{n}} = \frac{(-)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!} \ \ , \mathrm{n} = 0, 1, 2, ...,$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Lemma di Gauss: sia C una curva chiusa, continua con tangente continua, orientata in senso antiorario e sia S_c la porzione finita del piano interna a C:

$$\oint_C [a(x,y)dx + b(x,y)dy] = \int\int_{S_c} dxdy [b_x(x,y) - a_y(x,y)]$$

Se $z_0 \notin C$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz \frac{1}{(z-z_0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } z_0 \notin S_c \\ 1 & \text{se } z_0 \in S_c \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz (z-z_0)^n = 0 \quad \text{se } n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Se z_0 non e' un punto di diramazione di $f(z)$, allora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n (z-z_0)^n = \cdots + \frac{f_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{f_{-1}}{z-z_0} + f_0 + f_1(z-z_0) + \cdots$$

$$0 < \epsilon \leq |z-z_0| < R \quad , \quad R = \lim_{n\to+\infty} |f_n|^{-1/n}$$

$$\mathrm{Res}[f(z)]_{z_0} = f_{-1}$$

Se z_0 e' un polo d'ordine N $\quad (f_{-N} \neq 0\ ,\ f_n = 0 \ \text{ per } \ n \leq -N-1)$

$$\mathrm{Res}[f(z)]_{z_0} = \lim_{z\to z_0}\left\{\frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}[(z-z_0)^N f(z)]\right\}$$

Se $f(z)$ ha un polo d'ordine N in z_0

$$f(z) = \frac{f_{-N}}{(z-z_0)^N} + \frac{f_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}} + \cdots + \frac{f_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-z_0)^n$$

e $g(z)$ e' analitica in z_0

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z-z_0)^n \quad ,$$

allora

$$\mathrm{Res}[g(z)f(z)]_{z_0} = f_{-N}g_{N-1} + f_{-N+1}g_{N-2} + \cdots + f_{-1}g_0 = \sum_{n=0}^{N-1} g_n f_{-n-1}$$

$$\mathrm{Res}\ [e^z/(z-z_0)^N]_{z_0} = e^{z_0}/(N-1)! \quad , \quad N = 1, 2, 3, \cdots$$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA

Ulteriori riferimenti bibliografici

1. Ahlfors L.V. Complex Analysis McGraw-Hill 1966
2. Krasnov M., Kiselev A., Makarenko G. Funzioni di una variabile complessa MIR, Mosca 1987
3. Markushevic A.I. Elementi di Teoria delle Funzioni Analitiche Editori Riuniti 1988
4. Markushevic A.I. Theory of Functions of a Complex Variable (3 volumi) Prentice-Hall, 1965
5. Rudin W. Real and Complex Analysis McGraw-Hill 1966
6. Spiegel M.R. Variabili Complesse Etas 1976
7. Sveshnikov A., Tikhonov A. The Theory of Funcyions of a Complex Variable MIR, Mosca 1982

13 GENNAIO LEZIONE
Estensione algebrica dai numeri interi a quelli razionali, irrazionali ed algebrici complessi (con esempi). Insieme astratto normato, definizione di distanza ed il problema dell'esistenza del limite di una successione. Successioni di Cauchy e completezza di un insieme normato (con esempi). Completezza dell'insieme dei numeri complessi. Il piano complesso, rappresentazione cartesiana e polare di un numero complesso e trasformazione dall'una all'altra rappresentazione. Formule di Eulero e di De Moivre. Rappresentazione di un numero complesso come matrice reale $2X2$.

15 GENNAIO LEZIONE
Operazione di coniugazione complessa, $z \to z^*$. Definizione di $|z|$ e di arg$z$ e Arg$z$. Discussione del limite per $|z| \to \infty$. Trasformazione stereografica tra la sfera di Riemann ed il piano complesso. Piano complesso compatto e introduzione del punto ∞. Intorni circolari nel piano complesso. Insiemi aperti e loro frontiera. Insiemi semplicemente connessi. Domini e loro frontiera. Degenerazione di frontiere a tagli e punti. Introduzione di funzioni $f(z)$ di una variabile complessa a valori complessi come trasformazioni del piano complesso in se': $z \to w = f(z)$. Identificazione di una funzione $w = f(z)$ della variabile indipendente z, come coppia di due funzioni reali di due variabili reali $u(x, y)$ e $v(x, y)$ attraverso la rappresentazione cartesiana della variabile indipendente, $z = x + iy$ e della variabile dipendente $w = u+iv$. Funzione complessa di una variabile complessa come trasformazione di coordinate del piano. Polinomi di grado arbitrario. Teorema fondamentale dell'algebra. Derivazione della rappresentazione di un polinomio come prodotto di monomi. Molteplicita' delle radici. Espressione dei coefficienti di un polinomio in funzione delle sue radici.

16 GENNAIO LEZIONE
Cenni alle radici del polinomio $P_N(z) = z^N - 1$: radici ennesime dell'unita'. Richiami di analiticita' di funzioni reali di una variabile reale. Rappresentazione di una funzione reale analitica come serie di potenze. Intervallo di convergenza della serie di Taylor. Richiami sulla convernza uniforme ed assoluta.

22 GENNAIO LEZIONE
La serie di potenze nel campo complesso come estensione della serie di potenze nel campo reale. Definizione di analiticita' di una funzione di una variabile complessa $f(z)$ in un punto z_0 attraverso la sua rappresentazione in serie di potenze, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-z_0)^n$. Convergenza uniforme ed assoluta della serie di potenze, alias serie di Taylor, in un cerchio di centro z_0 e raggio $R \neq 0$, $|z - z_0| < R$. La rappresentazione in serie di potenze di una funzione analitica $f(z)$ come trasformazione biunivoca tra la funzione ed i coefficienti della serie, $f(z) \leftrightarrow \{f_n\}_0^{\infty}$. I coefficienti f_n come funzione a valori complessi definita sul reticolo degli interi non negativi. Calcolo del raggio R di convergenza di una serie di Taylor attraverso i suoi coefficienti f_n. Cenni alla convergenza della serie di potenze sulla circonferenza $|z - z_0| = R$ del suo cerchio di convergenza ed alle funzioni con frontiera naturale. La serie di potenze $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$ come esempio di serie che converge in tutti i punti di frontiera, $|z| = 1$, del suo cerchio di convergenza. Zero di una funzione analitica, $f(z_0) = 0$, sua molteplicita'M e rappresentazione in serie di potenze nello zero, $f(z) = (z - z_0)^M \phi(z)$ dove $\phi(z)$ e' analitica in z_0 e $\phi(z_0) \neq 0$. Definizione di punto singolare, o singolarita', di una funzione di variabile complessa. Calcolo del raggio di convergenza R di una serie di potenze in z_0 come distanza di z_0 dalla piu' vicina singolarita' della funzione $f(z)$ rappresentata dalla serie. Cenni al prolungamento analitico alla Weierstrass di una funzione $f(z)$ fuori dal cerchio di convergenza della serie di Taylor che la rappresenta. Cenni alla monodromia e polidromia (algebrica e trascendente) di una funzione di variabile complessa.

23 GENNAIO LEZIONE
Differenziabilita' di una funzione analitica nel cerchio di convergenza della sua rappresentazione in serie di Taylor. Uso formale delle variabili z e z^*, e della loro trasformazione nelle coordinate cartesiane x e y, nel calcolo delle derivate parziali di funzioni definite nel piano complesso:

$$\partial \bullet /\partial x = \partial \bullet /\partial z + \partial \bullet /\partial z^* \ , \ \partial \bullet /\partial y = i\partial \bullet /\partial z - i\partial \bullet /\partial z^*$$

$$\partial \bullet /\partial z = \frac{1}{2}\partial \bullet /\partial x - i\frac{1}{2}\partial \bullet /\partial y \ , \ \partial \bullet /\partial z^* = \frac{1}{2}\partial \bullet /\partial x + i\frac{1}{2}\partial \bullet /\partial y$$

Deduzione, dalla rappresentazione in serie di potenze di una funzione analitica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, dell'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti $f_x(z) + if_y(z) = 0$, sua equivalenza alla equazione differenziale $f_{z^*} = 0$ ed alle condizioni di Cauchy-Riemann $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ e $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$. Seconda definizione di analiticita': una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e' analitica in un dominio del piano complesso se in ogni punto del dominio la sua parte reale

$u(x, y)$ e la sua parte immaginaria $v(x, y)$ soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann. Dimostrazione che le condizioni di Cauchy-Riemann sono necessarie e sufficienti per l'esistenza della derivata rispetto a z, $df(z)/dz$, di una funzione $f(z)$ come limite $lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$. Terza definizione di analiticita': una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e' analitica in un dominio del piano complesso se in ogni punto del dominio esiste la sua derivata rispetto alla variabile z .

29 GENNAIO   LEZIONE

Derivate di funzioni elementari: $dz^n/dz = nz^{n-1}, d\sin(z)/dz = \cos(z)$, etc. Dimostrazione esplicita, fatta usando lo sviluppo in serie di Taylor, che, se la funzione $f(z)$ e' analitica in un punto, allora anche la sua derivata $df(z)/dz$ e' analitica in quel punto. Dimostrazione esplicita, fatta usando le condizioni di Cauchy–Riemann, che, se la funzione $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e' analitica in un dominio, allora la sua derivata $df(z)/dz = U(x, y) + iV(x, y)$ e' analitica nello stesso dominio. Analiticita'delle derivate $d^n f(z)/dz^n$ di ogni ordine n di una funzione analitica $f(z)$. Derivazione della formula di Taylor $f_n = \frac{1}{n!} d^n f(z)/dz^n|_{z=z_0}$ per i coefficienti f_n dello sviluppo in serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$. Classi di funzioni analitiche nel piano complesso: polinomi e funzioni intere. Funzioni razionali e funzioni meromorfe. Trasformazioni del piano $z = x + iy$ nel piano $w = u + iv$ e definizione di trasformazione conforme. Dimostrazione, fatta usando le condizioni di Cauchy–Riemann, che la trasformazione $w = f(z)$ e' conforme se e solo se la funzione complessa $f(z)$ e' analitica. Richiami sulle forme differenziali $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ nel piano (x, y). Integrale di una forma differenziale su una curva del piano come integrale di una funzione reale di una variabile reale t su un intervallo, mediante l'uso di una parametrizzazione $x = a(t),\ y = b(t)$ della curva. Curve chiuse orientate e lemma di Gauss: $\oint_C A(x, y)dx + B(x, y)dy = \int\int_{S_C} [B_x(x, y) - A_y(x, y)]dxdy$. Forme differenziali esatte: $A_y(x, y) = B_x(x, y)$ ed esistenza della primitiva $F(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} A(x, y)dx + B(x, y)dy$.

30 GENNAIO   LEZIONE

Forme differenziali complesse e loro integrazione su una curva del piano complesso. Parte reale e parte immaginaria dell'integrale di una forma differenziale complessa. Dimostrazione della disuguaglianza di Darboux: $|\int_C f(z)dz| \leq ML$, essendo $|f(z)| \leq M$ per $z \in C$ ed essendo L la lunghezza della curva C. Dimostrazione che condizione necessaria e sufficiente affinche' la forma differenziale complessa $f(z)dz$ sia esatta e'che la funzione $f(z)$ sia analitica. Dimostrazione del Teorema di Cauchy: se $f(z)$ e' analitica allora $\oint_C f(z)dz = 0$. Metodo di deformazione dei cammini lungo cui si integra una funzione analitica con applicazione a curve aperte e chiuse.

6 FEBBRAIO   LEZIONE

Teorema di Morera ed ipotesi di questo teorema come IV definizione di analiticita'. Definizione e costruzione della funzione primitiva di una funzione analitica. Costruzione esplicita della funzione primitiva come integrale lungo una poligonale. Espressione della parte reale e della parte immaginaria della funzione primitiva. Dimostrazione che la funzione $F(z)$ primitiva di una funzione analitica $f(z)$ e' essa stessa analitica e tale che $dF(z)/dz = f(z)$.

12 FEBBRAIO LEZIONE

Uso delle relazioni di Cauchy-Riemann per costruire, mediante l'integrazione di una forma differenziale esatta, la parte reale (immaginaria) di una funzione analitica supponendo nota la sua parte immaginaria (reale) (a meno di una costante additiva arbitraria). Calcolo esplicito degli integrali $\mathcal{I}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz(z - z_0)^n$ lungo una curva chiusa C orientata in senso antiorario, dove z_0 non appartiene alla curva ed e' interno alla regione finita del piano delimitata da C e n e' un intero relativo, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Derivazione della rappresentazione integrale di Cauchy di una funzione analitica $f(z)$ e delle sue derivate di ogni ordine $d^n f(z)/dz^n$ mediante la sua rappresentazione in serie di Taylor e la tecnica di deformazione dei cammini di integrazione. Dimostrazione del Teorema di Liouville (una funzione analitica e di modulo limitato in tutto il piano complesso (compattificato) e' costante). Dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Dimostrazione del Teorema del Massimo e Minimo Modulo.

13 FEBBRAIO LEZIONE

Introduzione alla rappresentazione in serie di Laurent di una funzione analitica nell'intorno di punti di singolarita'. Due esercizi preliminari alla derivazione della serie di Laurent : i) derivazione della rappresentazione integrale di Cauchy di una funzione analitica in un dominio anulare con una lacuna contenente punti di singolarita'; ii) espansione come serie geometrica della funzione $1/(z' - z)$ in potenze di $(z' - z_0)$ in modo che sia covergente sia nel caso $|z' - z_0| < |z - z_0|$ che nel caso $|z' - z_0| > |z - z_0|$.

20 FEBBRAIO LEZIONE

Costruzione esplicita della seria di potenze di Laurent nell'intorno di lacune del dominio di analiticita'. Derivazione esplicita dell'espressione dei coefficienti della serie di Laurent mediante integrali su curve chiuse. Parte principale e parte analitica di una serie di Laurent. Riduzione della serie di Laurent alla serie di Taylor nell'ipotesi di una funzione priva di punti di singolarita' nella lacuna. Caso particolare della serie di Laurent come rappresentazione in serie di potenze di una funzione analitica nell'intorno di una sua singolarita' isolata z_0 e sua convergenza in un cerchio di centro z_0, raggio R e privo del suo centro. Criteri di calcolo del raggio di convergenza R.

26 FEBBRAIO LEZIONE

Definizione di singolarita' polare e di singolarita' essenziale. Definizione di molteplicita' di un polo. Analisi di una funzione $f(z)$ nell'intorno del punto $z_0 = \infty$ mediante la trasformazione del piano complesso z nel piano complesso w: $z = z_0 + \frac{1}{w}$ ovvero $w = \frac{1}{z - z_0}$, dove z_0 e un numero complesso arbitrario. Rappresentazione in serie di Taylor di una funzione $f(z)$

analitica in $z_0 = \infty$ nell'intorno di $z_0 = \infty$ e dominio di convergenza della serie. Rappresentazione in serie di Laurent nell'intorno di $z_0 = \infty$ di una funzione $f(z)$ che ha in $z_0 = \infty$ un polo od una singolarita' essenziale. Dominio di convergenza di questa serie di Laurent, sua parte analitica e sua parte principale. Esempi di funzioni analitiche in $z_0 = \infty$ e di funzioni che hanno in $z_0 = \infty$ un polo od una singolarita' essenziale. Importanza dell'espressione del coefficiente f_{-1}, $f_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz f(z)$, per il cacolo dell'integrale di una funzione $f(z)$ su una curva chiusa. Definizione di residuo $\text{Res}[f(z)]_{z_0}$ di una funzione $f(z)$ che ha in z_0 un polo od una singolarita' essenziale. Formula per il calcolo del residuo di una funzione in z_0 se z_0 e' un polo semplice. Dimostrazione della formula per il calcolo del residuo in z_0 di una funzione che ha in z_0 un polo di ordine N. Dimostrazione del teorema dei residui. Uso del teorema dei residui per il calcolo di integrali del tipo $\int_0^{2\pi} d\theta R(\cos\theta, \sin\theta)$ e del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(ikx) R(x)$ dove $R(x, y)$ e' una funzione razionale di due variabili, $R(x)$ e' una funzione razionale di una variabile e k e' un parametro reale.

27 FEBBRAIO LEZIONE

Definizione di residuo in $z_0 = \infty$, $\text{Res}[f(z)]_\infty$, di una funzione $f(z)$. Dimostrazione che se $f(z)$ e' razionale e $zf(z) \to 0$ per $z \to \infty$, allora la somma dei residui in tutte le singolarita' z_k di $f(z)$ e' nulla, $\sum_k \text{Res}[f(z)]_{z_k} = 0$. Definizione di funzione $u(x, y)$ reale armonica in un dominio del piano (x, y). Uso delle equazioni di Cauchy-Riemann per mostrare che la parte reale $u(x, y)$ e la parte immaginaria $v(x, y)$ di una funzione $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitica in un dominio del piano complesso $z = x + iy$ sono armoniche in quel dominio. Definizione e costruzione dei polinomi armonici $P_N(x, y) = Re[z^N]$ e $Q_N(x, y) = Im[z^N]$ sia in coordinate cartesiane (x, y) che in coordinate polari (ρ, θ). Costruzione della funzione $F(z)$ primitiva di una funzione $f(z)$ in un dominio del piano complesso in cui $f(z)$ e' monodroma con una singolarita' isolata in z_0 (polo o singolarita' essenziale). Dimostrazione che la primitiva $F(z)$ e' polidroma con infiniti rami se e solo se $\text{Res}[f(z)]_{z_0} \neq 0$. Definizione di polidromia algebrica e trascendente.

4 MARZO LEZIONE

Uso della serie di Laurent per la costruzione della primitiva $F(z)$ di una funzione $f(z)$ nell'intorno di una singolarita' isolata z_0 che sia un polo od una singolarita' essenziale. Importanza della primitiva della funzione $\frac{1}{z}$. Definizione della funzione logaritmo $\ln(z)$ e sue proprieta' di analiticita' nel piano complesso. Punti di diramazione trascendenti del logaritmo in $z = 0$ e $z = \infty$. Rami del logaritmo, $\text{Ln}(z) = \ln(z) + 2\pi i n$ con $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ Richiami delle proprieta' del logaritmo estese al piano complesso come conseguenza della formula $\text{Ln}(z_1 z_2)$ =$\text{Ln} z_1$+$\text{Ln} z_2$. Definizione di ramo principale e suo legame con la determinazione $0 \leq \theta < 2\pi$ della fase θ di $z = \rho \exp(i\theta)$. Altra definizione di ramo principale del logaritmo legata alla determinazione $-\pi < \theta \leq \pi$ della fase θ di z.Definizione di discontinuita' di una funzione polidroma. Calcolo della discontinuita' del logaritmo. Analisi della funzione $f(z) = z^a$ e delle sue singolarita' nel caso in cui a e' reale intero, razionale e irrazionale. Studio della polidromia di $f(z) = z^a$ nel caso in cui a e' reale razionale e irrazionale.

5 MARZO LEZIONE
Analiticita' della funzione $f(z) = z^a$ per z diverso da $z = 0$ e da $z = \infty$. Rami della funzione $f(z) = z^a$. Ramo principale di $f(z) = z^a$ legato alla determinazione $0 \leq \theta < 2\pi$ della fase θ di $z = \rho \exp(i\theta)$. Calcolo della discontinuita' di della funzione $f(z) = z^a$ lungo la semiretta positiva reale $0 \leq x < +\infty$. Uso del teorma dei residui per il calcolo di integrali del tipo $\int_0^{+\infty} dx x^a R(x)$ dove $R(x)$ e' una funzione razionale. Dimostrazione della formula per il calcolo di integrali di questo tipo.

SERIE DI FOURIER

11 MARZO LEZIONE (FZ)
Serie di Fourier per funzioni analitiche definite in $[0, 2\pi]$ come serie di Laurent sulla circonferenza di raggio 1. Espressione per i coefficienti della serie di Fourier in forma esponenziale, $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}$. Simmetria dei coefficienti f_n per funzioni reali ($f_n^* = f_{-n}$). Serie di Fourier in funzione di seni e coseni: $f(\theta) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$. Espressione dei coefficienti a_n e b_n. Simmetrie dei coefficienti f_n per funzioni pari e dispari in $[-\pi, \pi]$, e corrispondenti relazioni per i coefficienti a_n e b_n. Calcolo dei coefficienti di Fourier per la funzione $f(\theta) = 1/(2 + \cos\theta)$.

12 MARZO LEZIONE (FZ)
Serie di Fourier per funzioni $f(x)$ definite in $x \in [0, L]$. Prodotto scalare di funzioni $f(\theta) \in L_2[0, 2\pi]$ definito da $f \cdot g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f(\theta) g(\theta)$. Ortogonalità delle funzioni $[1, \cos n\theta, \sin n\theta]$ e loro normalizzazione. Serie di Fourier come decomposizione della funzione f su una base completa costituita da seni e coseni. Cenni alle proprietà di convergenza della serie di Fourier: convergenza uniforme per funzioni C_∞, convergenza non uniforme intorno a una discontinuità. Il caso della funzione gradino.

16 MARZO LEZIONE
Uso della funzione $\ln(z)$ per il calcolo di integrali: in particolare calcolo, con il teorema dei residui, dell'integrale $\int_0^{+\infty} dx R(x)$ e dell'integrale $\int_0^{+\infty} dx \ln(x) R(x)$ dove $R(x)$ e' una funzione razionale di x. Espressione di un polinomio $P(z)$ della variabile complessa $z = \rho \exp(i\theta)$ sulla circonferenza $|z| = \rho = 1$ come funzione della variabile angolare θ. Definizione di polinomi trigonometrici e di serie trigonometrica. Espressione di polinomi trigonometrici e di serie trigonometriche tramite le funzioni seno e coseno, $\sum [c_n \cos(n\theta) + s_n \sin(n\theta)]$, e tramite la funzione esponenziale, $\sum a_n \exp(in\theta)$, e trasformazione da una forma all'altra. Definizione di serie di Fourier nell'intervallo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ed espressione integrale dei suoi coefficienti, sia nella sua rappresentazione in seni e coseni che nella sua rappresentazione con esponenziali. Esempio di serie di Fourier convergente: sviluppo in serie di Laurent sulla circonferenza $z = \exp(i\theta)$ di una funzione $f(z)$ monodroma e analitica in un dominio contenente la circonferenza $|z| = 1$. Dimostrazione che una serie trigonometrica uniformemente

convergente nell'intervallo $-\pi \le \theta \le \pi$ e' di Fourier. Definizione del simbolo di Kronecker δ_{nm} e suo uso nelle relazioni integrali $\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp[i(n-m)\theta]$. Dimostrazione della disuguaglianza di Bessel $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{2\pi} |f(\theta)|^2 \le \sum_{k=-n}^{n} |a_n|^2$ se la funzione $f(\theta)$, associata alla serie di Fourier $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \exp(in\theta)$, ha il modulo quadrato integrabile, $\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta |f(\theta)|^2 < \infty$.

18 MARZO LEZIONE

Dimostrazione che, se la funzione $f(\theta)$ associata alla serie di Fourier $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \exp(in\theta)$ e' di modulo quadrato integrabile, allora la serie numerica $\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2$ e' convergente. Teorema di completezza (senza dimostrazione) nella versione $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{2\pi} |f(\theta)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2$ e nella versione $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\theta) - \sum_{k=-n}^{n} a_n \exp(in\theta)|^2 = 0$. Definizione di convergenza in media (o convergenza forte) della serie di Fourier. Dimostrazione della disuguaglianza di Schwartz nel caso di funzioni reali di quadrato integrabile e sua interpretazione geometrica. Estensione (senza dimostrazione) della disuguaglianza di Schwartz al caso di funzioni a valori complessi. Dimostrazione del teorema di Parseval per funzioni di modulo quadrato integrabile nell'intervallo $-\pi \le \theta \le \pi$. Dimostrazione che, se a_n sono i coefficienti di Fourier associati ad una funzione di modulo quadrato integrabile, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Teorema (senza dimostrazione) di Riemann-Lebesgue. Calcolo approssimato (mediante integrazione per parti) di integrali del tipo $\int_a^b dx \cos(tx+\alpha) f(x)$ quando il parametro t e' molto grande. Approssimazione uniforme di una funzione continua in un intervallo finito mediante polinomi (teorema di Weiestrass). Approssimazione uniforme di una funzione $f(\theta)$ continua e periodica con periodo 2π nell'intervallo $-\pi \le \theta \le +\pi$ mediante polinomi trigonometrici. Convergenza puntuale della serie di Fourier: teorema di Fejer. Convergenza della serie di Fourier agli estremi dell'intervallo $-\pi \le \theta \le +\pi$. Definizione di convergenza di una successione secondo Cesaro. Osservazione che la convergenza della serie di Fourier nel teorema di Fejer e' definita secondo Cesaro.

19 MARZO LEZIONE

Calcolo diretto dell'integrale della Gaussiana $G = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2)$. Dimostrazione che l'integrale $\int_C dz \exp(-z^2) = G$ dove la curva C e' la retta parallela all'asse reale $\{z \epsilon C : z = x + iy, -\infty \le x \le +\infty, y = a\}$ e dove a e' un numero reale finito arbitrario. Uso di questo risultato per calcolare l'integrale $\mathcal{I}(u,k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-ux^2 + ikx)$ con u reale positivo e k reale arbitrario.

ESERCITAZIONE I (20/01/2004)

A. Numeri complessi

Esercizio 1 - Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di 5^{3i}, $\frac{1+i}{2-i}$, i^n (per n intero positivo).

Esercizio 2 - Disegnare le seguenti regioni del piano complesso:

$|z-i+5| = 3 \qquad |3z+i| \geq 1 \qquad \mathrm{Re}z \leq \mathrm{Im}z \qquad |z-1|-|z+1| = 2 \qquad |z-1|+|z+i| = 0$

Esercizio 3 - Trovare la condizione necessaria e sufficiente per avere $|z+w| = |z|+|w|$

Esercizio 4 - Dimostrare per induzione che

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$$

Esercizio 5 - Dimostrare per induzione che

$$|z_1 \cdots z_n| = |z_1| \cdots |z_n|$$

Esercizio 6 - Dimostrare per induzione che

$$\overline{z_1 \cdots z_n} = \overline{z_1} \cdots \overline{z_n}$$

Esercizio 7 - Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di $\cos z$ e di $\tanh z$.

Esercizio 8 - Dimostrare che $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Esercizio 9 - Dimostrare che, per $\theta \neq 0$,

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)} \cos(n\theta/2)$$

Mostrare che la relazione è verificata anche per $\theta \to 0$.

B. Polinomi

Notazione: Ogni matrice A complessa nxn ha n autovalori complessi, soluzioni di $P(z) = \det(A - zI) = 0$, che indichiamo con $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. $P(z)$ è detto *polinomio caratteristico* della matrice A.
Se gli autovalori sono tutti diversi tra loro e se $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, esiste una matrice B tale che $A = BDB^{-1}$. Si ha quindi:

$$\det A = \det D = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \ , \qquad\qquad \mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ .$$

Se A è Hermitiana ($A^+ = A$) gli autovalori sono reali e la matrice B è unitaria ($B^+ = B^{-1}$).

Esercizio 1 - Dimostrare col calcolo diretto che, se A è una generica matrice complessa 2x2, e I è la matrice unità 2x2, si ha

$$P(z) = \det(A - zI) = \det A - \mathrm{Tr}A \ z + z^2 \ .$$

Esercizio 2 (generalizzazione dell'esercizio precedente) - Dimostrare che, se A è una matrice complessa nxn, si ha

$$P(z) = \det(A - zI) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k z^{n-k}$$
$$a_k = \begin{cases} \sum_{(i_1, \cdots, i_k)} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

Il simbolo $(i_1, \cdots, i_k)$ indica tutti i possibili insiemi ordinati di k numeri interi distinti compresi tra 1 ed n, cioè tali che $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$: ad esempio, per $k = 2$ si hanno tutte le possibili coppie (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$.

Esercizio 3 - Nel caso precedente verificare che $a_n = \det A$ e $a_1 = \mathrm{Tr}A$ per cui

$$P(z) = \det A + \cdots + \mathrm{Tr}A \ (-1)^{n-1} z^{n-1} + (-1)^n z^n \ .$$

Verificare che per $n = 2$ si riottiene il caso dell'esercizio 1.

Esercizio 4 - Utilizzando i risultati precedenti, dimostrare che, dette $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ le soluzioni dell'equazione $z^n = 1$ (radici n-esime dell'unità), si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0 \ , \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^{n-1} \ .$$

Esercizio 5 - Riottenere il risultato dell'esercizio precedente a partire dalla forma esplicita dei λ_k:

$$\lambda_k = \exp\left(2\pi i \frac{k}{n}\right) \ ,$$

ricordando che:

$$\sum_{k=1}^{n} z^k = z\frac{1-z^n}{1-z} \ , \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \ .$$

Esercizio 6 - Disegnare nel piano complesso i λ_k e dare una interpretazione geometrica di $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$.

SOLUZIONI ESERCITAZIONE I

A. Numeri complessi

Esercizio 1:

$$
\begin{aligned}
&5^{3i} = e^{3i\log 5} = \cos(3\log 5) + i\sin(3\log 5)\\
&\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{5}\\
&i^n = e^{in\pi/2} = \cos(n\pi/2) + i\sin(n\pi/2) = \begin{cases}(-1)^p & \text{se } n = 2p\\ i(-1)^p & \text{se } n = 2p+1\end{cases}
\end{aligned}
$$

Esercizio 2:
$|z - i + 5| = 3$ è una circonferenza di centro $i - 5$ e raggio 3
$|3z + i| \geq 1$ è la parte di piano esterna alla circonferenza di centro $-i/3$ e raggio $1/3$
$\mathrm{Re}z \leq \mathrm{Im}z$ è la parte di piano al di sopra della retta $y = x$
$|z - 1| - |z + 1| = 2$ è l'asse x per $x \leq -1$
$|z - 1| + |z + i| = 0$ è l'insieme vuoto

Esercizio 3:
La condizione è che $w = az$, con a numero reale positivo, ovvero che w e z abbiano la stessa fase in rappresentazione polare, $\arg w = \arg z$.

Esercizio 7: Usiamo la notazione $z = x + iy$. Allora:

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x\\
\tanh z &= \frac{\sinh(2x) + i\sin(2y)}{\cosh(2x) + \cos(2y)}
\end{aligned}
$$

Esercizio 8:

$$
\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\left(e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}\right)\\
&\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{4}\left[(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})(e^{i\beta}+e^{-i\beta}) + (e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})(e^{i\beta}-e^{-i\beta})\right]
\end{aligned}
$$

Sviluppando la seconda espressione si vede subito che è uguale alla prima.

Esercizio 9:
Si riscrive la somma come ($z = \exp i\theta$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) =& \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n} z^k = \mathrm{Re} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \mathrm{Re} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ =& \mathrm{Re} \frac{e^{i(n+1)\theta/2}\big(e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{i(n+1)\theta/2}\big)}{e^{i\theta/2}\big(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\big)} = \mathrm{Re}\left[e^{in\theta/2} \frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}\right]\end{aligned}$$

da cui si ottiene il risultato.

ESERCITAZIONE II (27/01/2004)

A. Serie e serie di potenze

Nota: Ricordate la formula di Stirling: $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ per $n \to \infty$, e le formule per il raggio di convergenza della serie di Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$: $R = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n}$, $R = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$.

Esercizio 1 - Discutere la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n},\ a \in R \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$$

Esercizio 2 - Calcolare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^a},\ a > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^a} z^n,\ a > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} z^n,\ c \in C \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$

Esercizio 3 - Dimostrare che le due serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^b a_n z^n,\ b \in R$$

hanno lo stesso raggio di convergenza.

Esercizio 4 - Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza R, qual è il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^2 z^n$?

Esercizio 5 - Calcolare lo sviluppo di Taylor di centro $z = 0$ delle seguenti funzioni e il suo raggio di convergenza:

$$\frac{1}{z^2+1} \qquad \frac{1}{z^2+z-2} \qquad \cosh z \qquad \frac{1}{z-c},\ c \in C$$

Esercizio 6 - Calcolare lo sviluppo di Taylor di centro $z_0 \neq 2$ di $f(z) = 1/(z-2)$ e il suo raggio di convergenza al variare di z_0. Vi viene in mente una interpretazione del risultato?

B. Integrazione dell'oscillatore armonico

Questo esercizio guidato serve a presentare una applicazione fisica elementare della teoria dei numeri complessi. Il quesito 3) richiede la conoscenza della teoria dei sistemi dinamici Hamiltoniani isegnata nel corso di Meccanica analitica e relativistica.

Consideriamo l'oscillatore armonico la cui coordinata $q(t)$ soddisfa l'equazione differenziale del secondo ordine $\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$.

1) Scrivere le equazioni del moto nella forma di Hamilton usando la Hamiltoniana $H(p,q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}$. Definire la variabile complessa $z(t) = p(t) + i\omega q(t)$ e mostrare che le equazioni del moto per la variabile z sono date da un'unica equazione differenziale del primo ordine.

2) Risolvere le equazioni del moto per z. Mostrare che, esprimendo z in rappresentazione polare ($z = |z|e^{i\theta}$), si identificano la quantità conservata $A = |z|^2/2\omega$ e la variabile angolare $\theta = \arg z$. Quale significato fisico ha la quantità conservata A?

Facoltativo: Ricordiamo che un sistema Hamiltoniano (p,q) è detto *integrabile* se esiste una coppia di variabili (*variabili azione-angolo*) $A(p,q)$ e $\theta(p,q)$ tali che:

1) La trasformazione $(p,q) \to (A,\theta)$ è canonica; una condizione sufficiente è che esista una funzione $S(q,\theta)$ tale che $p = \partial S/\partial q$ e $A = -\partial S/\partial \theta$.

2) Nelle nuove variabili si ha $H(A,\theta) = \omega A$, dove ω è la frequenza propria del sistema.

La variabile A è una quantità conservata, mentre la variabile θ evolve linearmente nel tempo: $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$.

3) Mostrare che la coppia di variabili (A,θ) è una coppia di variabili azione-angolo (suggerimento: considerare la funzione generatrice $S(q,\theta) = \frac{\omega q^2}{2\tan\theta}$). Mostrare che nelle nuove variabili $H = \omega A$.

SOLUZIONI ESERCITAZIONE II

A. Serie e serie di potenze

Esercizio 1:

I) Usando il criterio del rapporto si ha (ponendo $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}(n+1)!n^n}{a^n n!(n+1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{an^n}{(n+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}\right| = \frac{|a|}{e}$$

quindi per $|a| < e$ la serie converge, per $|a| > e$ diverge. Se $|a| = e$ il criterio non è applicabile perchè il limite è 1. Tuttavia in questo caso, usando la formula di Stirling, si ha, per $n \to \infty$,

$$|a_n| = e^n \frac{n!}{n^n} \sim e^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = \sqrt{2\pi n} \to \infty$$

e quindi la serie diverge perchè il suo termine n-esimo diverge in modulo. Riassumendo, la serie converge per $|a| < e$ e diverge per $|a| \geq e$.

II) Osservando che

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

e che la serie $\sum 1/n^2$ è convergente, si ottiene la convergenza della serie considerata.

III) Usando il criterio della radice si ha (ponendo $a_n = (\log n)^{-n}$)

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

per cui la serie converge.

IV) Per discutere la convergenza osserviamo che per n grande, $1/n$ è molto piccolo e quindi si può sviluppare il seno in serie di Taylor:

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^5})$$

e quindi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^4}) = 1$$

per cui la serie considerata ha lo stesso comportamento asintotico di $\sum\frac{1}{n}$, ed è quindi divergente.

Esercizio 2:

$$\textbf{I)}\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^a}{[n!]^a} = \lim_{n\to\infty}(n+1)^a = \infty$$

$$\textbf{II)}\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e}$$

$$\textbf{III)}\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)![(n+1)!]^2}{(n!)^2(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\textbf{IV)}\ R = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(e^{\sqrt{n}})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

$$\textbf{V)}\ R = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(n!e^{-n^a})^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(n^ne^{-n-n^a}\sqrt{2\pi n})^{-\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}n^{-1}e^{1+n^{a-1}}\exp\left[-\frac{1}{2n}\log(2\pi n)\right] = \begin{cases}\infty \text{ per } a>1\\ 0 \text{ per } a\le 1\end{cases}$$

$$\textbf{VI)}\ R = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}|c|^{-n} = \begin{cases}\infty \text{ per } |c|<1\\ 0 \text{ per } |c|>1\\ 1 \text{ per } |c|=1\end{cases}$$

$$\textbf{VII)}\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log n}{\log(n+1)}\right]^2 = 1$$

La discussione dell'ultima serie è più complicata. Osserviamo che

$$S_k = \sum_{n=1}^{k}|z^{n!}| \le \sum_{n=1}^{k!}|z^n| = T_k$$

(provate a scriverlo esplicitamente per $k = 1, 2, 3$ e osservate che a sinistra mancano alcuni termini positivi presenti a destra). D'altronde la successione T_k converge a un limite finito per $k \to \infty$ se $|z| < 1$ (è la serie geometrica). Allora, per $|z| < 1$, S_k è una successione a termini positivi limitata e quindi converge. D'altronde, per $|z| > 1$ il termine n-esimo della serie considerata diverge, e quindi la serie non può convergere. Quindi il raggio di convergenza è $R = 1$.

Esercizio 3: Si ha

$$R_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^b a_n}{(n+1)^b a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\right]^b\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R_1$$

Esercizio 4:
Supponiamo che esista il limite (eventualmente infinito)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R_1$$

Allora R_1 è il raggio di convergenza di $\sum a_n z^n$. Il raggio di convergenza di $\sum (a_n)^2 z^n$ è dato da

$$R_2 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|^2 = R_1^2$$

dalla continuità della funzione x^2 per ogni x reale.

Esercizio 5:
Ricordiamo che

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

per $|z| < 1$.
I) Ponendo $w = -z^2$ si ha

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

La serie converge per $|w| = |z|^2 < 1$, ovvero $|z| < 1$.
II) Scomponiamo il polinomio di secondo grado:

$$\frac{1}{z^2+z-2} = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1}$$

I coefficienti A e B si determinano richiedendo l'uguaglianza con l'espressione di partenza e si ottiene $A = -1/3$, $B = 1/3$ da cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2+z-2} &= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{1-z}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right] z^n \end{aligned}$$

La serie converge per $|z| < 1$, come si può mostrare nei tre modi seguenti:
a) La singolarità più vicina a 0 nella funzione di partenza è in $z = 1$.
b) Calcolando $R = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = 1$.
c) Osservando che le due serie in cui abbiamo scomposto la funzione convergono per $|z| < 1$ (la seconda) e per $|z| < 2$ (la prima), per cui il raggio di convergenza della loro somma è il minore dei due (e quindi $|z| < 1$).
III) Dal momento che

$$\frac{d^n}{dz^n} e^z = e^z \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

si ottiene lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

da cui

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}\;\frac{z^n}{n!}$$

Il coefficiente di $z^n/n!$ è zero per n dispari e uno per n pari, per cui i termini dispari sono assenti. La serie può essere riscritta, ponendo $n = 2k$, come

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

(per visualizzare meglio il procedimento potete scrivere i primi quattro-cinque termini dello sviluppo di e^z e di e^{-z} e poi sommare). Lo sviluppo converge in tutto il piano complesso dal momento che la funzione $\cosh z$ è analitica $\forall z \in \mathbb{C}$ (potete verificarlo calcolando il raggio di convergenza).

IV) Supponendo $c \neq 0$ (altrimenti la funzione ha un polo in $z = 0$ e non può essere sviluppata in serie di Taylor)

$$\frac{1}{z-c} = -\frac{1}{c}\;\frac{1}{1-\frac{z}{c}} = -\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{c}\right)^n$$

Lo sviluppo converge per $|z/c| < 1$, ovvero $|z| < |c|$.

Esercizio 6:

Si riscrive

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-z_0+z_0-2} = \frac{1}{z_0-2}\;\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{2-z_0}} = \frac{1}{z_0-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{2-z_0}\right)^n$$

Lo sviluppo converge per

$$\left|\frac{z-z_0}{2-z_0}\right| < 1$$

ovvero $|z-z_0| < |2-z_0|$. Si vede quindi che la serie converge se la distanza di z da z_0 è minore della distanza di 2 da z_0, cioè il cerchio di convergenza arriva fino alla singolarità di $f(z)$.

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
I COMPITO D'ESONERO 3/02/04 - COMPITO A
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare la funzione $A(x, y) = |z\sin(z)|^2$ nel piano complesso $z = x + iy$..[6]
2. Trovare i valori di z per i quali $\cos(z) = 2$ e riportarli nel piano complesso z ...[8]
3. Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$ lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ in $z_0 = 1$. Calcolare i coefficienti f_n ed il raggio di convergenza R...[7]
4. Disegnare il dominio $|e^{z^2}| \geq 1$ nel piano complesso $z = x + iy$ .....[5]
5. Trovare le 3 radici del polinomio $P(z) = z^3 - 8i$..[6]
6. Sia $P_N(z)$ un polinomio di grado N e siano z_k le sue N radici, $k = 1, 2, ..., N$. Dimostrare che, se $P_N(z)$ e' pari , cioe' $P_N(-z) = P_N(z)$, allora $\sum_{k=1}^{N} z_k = 0$ ......[8]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 6 VOTI PARZIALI (con riserva di una eventuale rinormalizzazione).

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
I COMPITO D'ESONERO 3/02/04 - COMPITO B
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare la funzione $A(x,y) = |z^2 e^{z^2}|$ nel piano complesso $z = x + iy$...[6]
2. Trovare i valori di z per i quali $\cosh(z) = 2$ e riportarli nel piano complesso z...[8]
3. Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(z) = \frac{(z+2)^2}{z-1}$ in $z_0 = -2$. Calcolare i coefficienti f_n ed il raggio di convergenza R...[7]
4. Disegnare il dominio $\mathrm{Im}(\sinh z) \geq 0$ nel piano complesso $z = x + iy$...[5]
5. Trovare le 4 radici del polinomio $P(z) = z^4 + 16$...[6]
6. Sia $P_N(z)$ un polinomio di grado N e siano z_k le sue N radici, $k = 1, 2, ..., N$. Dimostrare che, se $P_N(z)$ e' pari , cioe' $P_N(-z) = P_N(z)$, allora $\sum_{k=1}^{N} z_k = 0$
...[8]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 6 VOTI PARZIALI (con riserva di una eventuale rinormalizzazione).

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
I COMPITO D'ESONERO 3/02/04 - COMPITO C
A.A. 2003-04   Prof. A. DEGASPERIS

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare la funzione $A(x, y) = |\frac{\sinh(z)}{z}|^2$ nel piano complesso $z = x + iy$...[6]
2. Trovare i valori di z per i quali $\sin(z) = 2$ e riportarli nel piano complesso z...[8]
3. Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(z) = \frac{z}{z^2+2}$ in $z_0 = 0$. Calcolare i coefficienti f_n ed il raggio di convergenza R...[7]
4. Disegnare il dominio $|e^{z+z^2}| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ nel piano complesso $z = x + iy$...[5]
5. Trovare le 3 radici del polinomio $P(z) = z^3 + 27$...[6]
6. Sia $P_N(z)$ un polinomio di grado N e siano z_k le sue N radici, $k = 1, 2, ..., N$. Dimostrare che, se $P_N(z)$ e' pari , cioe' $P_N(-z) = P_N(z)$, allora $\sum_{k=1}^{N} z_k = 0$
...[8]

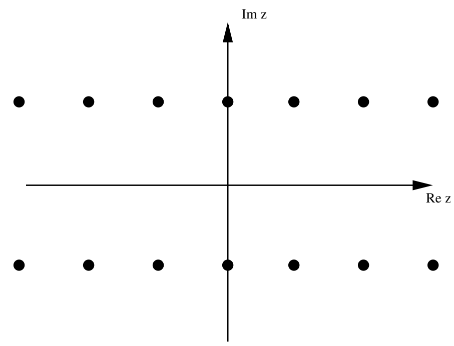
IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 6 VOTI PARZIALI (con riserva di una eventuale rinormalizzazione).

SOLUZIONI I COMPITO D'ESONERO (03/02/2004)

Compito A:

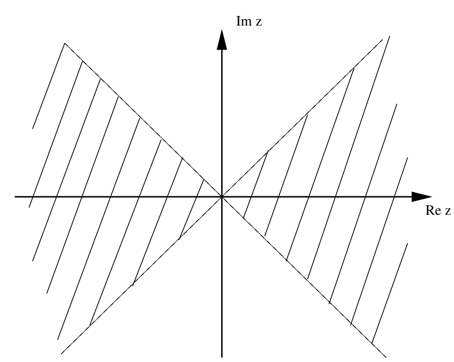
1) $A(x,y) = (x^2 + y^2)(\sin^2 x + \sinh^2 y)$.

2) $z = z_n^{\pm} = \pm i \log(2 + \sqrt{3}) + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



3) $f_0 = 0, \quad f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ per $n \geq 1; \quad R = 2.$

4) $x^2 \geq y^2$.

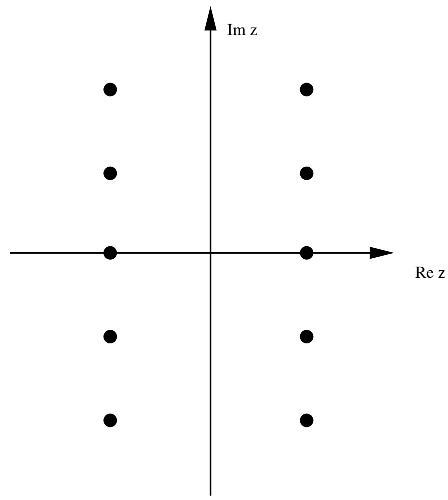


5) $z^3 - 8i = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3); \quad z_1 = \sqrt{3} + i, \;\; z_2 = -\sqrt{3} + i, \;\; z_3 = -2i.$

Compito B:

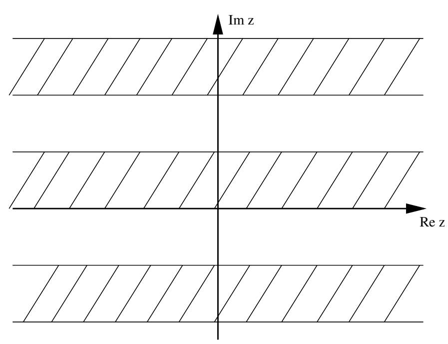
1) $A(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.

2) $z = z_n^{\pm} = \pm\log(2+\sqrt{3}) + 2\pi i n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



3) $f_0 = f_1 = 0, \quad f_n = -\frac{1}{3^{n-1}}$ per $n \geq 2; \quad R = 3.$

4) $\mathrm{Im}(\sinh z) = \cosh x \sin y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\infty < x < \infty$,
$2\pi n \leq y \leq \pi + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

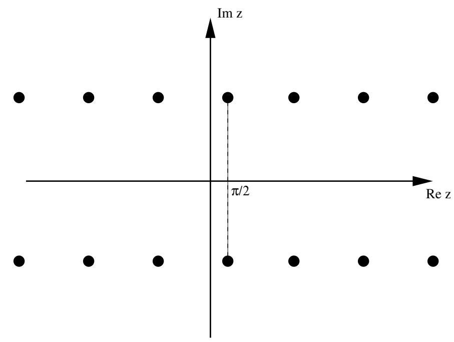


5) $z^4 + 16 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4); \quad z_1 = \sqrt{2}(1+i), \quad z_2 = -\sqrt{2}(1+i),$
$z_3 = \sqrt{2}(1-i), \;\; z_4 = -\sqrt{2}(1-i).$

Compito C:

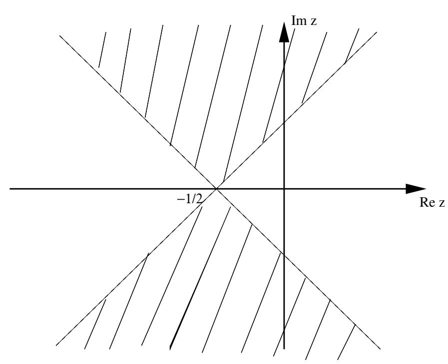
1) $A(x,y) = \frac{\sinh^2 x + \sin^2 y}{x^2+y^2}$.

2) $z = z_n^{\pm} = \pm i \log(2+\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



3) $f_n = 0$ per $n = 2p, \quad f_n = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{(n+1)/2}}$ per $n = 2p+1; \quad R = \sqrt{2}$.

4) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \le y^2$.



5) $z^3 + 27 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3); \quad z_1 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \ z_3 = -3.$

6) (comune ai tre compiti):

I) Si scrive

$$P_n(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 \tag{1}$$

Se $P_n(z) = P_n(-z)$, allora n è pari e $c_{n-1} = c_{n-3} = \cdots = c_1 = 0$ (tutti i coefficienti delle potenze dispari sono nulli). Scrivendo

$$P_n(z) = c_n(z - z_1) \cdots (z - z_n) \tag{2}$$

si ha

$$c_{n-1} = -c_n \sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \tag{3}$$

come volevasi dimostrare.

II) Si osserva che se z_1 è soluzione di $P_n(z_1) = 0$, anche $-z_1$ lo è. Allora

$$P_n(z) = (z - z_1)(z + z_1)P_{n-2}(z) = (z^2 - z_1^2)P_{n-2}(z) \tag{4}$$

e anche il polinomio $P_{n-2}(z)$ è pari essendo il rapporto di due funzioni pari. Quindi se z_2 è soluzione di $P_{n-2}(z) = 0$ (eventualmente coincidente con z_1) anche $-z_2$ è soluzione. E quindi

$$\begin{aligned} P_{n-2}(z) &= (z - z_2)(z + z_2)P_{n-4}(z) = (z^2 - z_2^2)P_{n-4}(z) \\ P_n(z) &= (z - z_1)(z + z_1)(z - z_2)(z + z_2)P_{n-4}(z) \end{aligned} \tag{5}$$

Iterando questa costruzione si vede che per ogni radice z_p esiste la corrispondente radice $-z_p$ e che la loro molteplicità è la stessa, e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{p=1}^{P} m_p z_p + \sum_{p=1}^{P} m_p(-z_p) = 0 \tag{6}$$

come volevasi dimostrare.

ESERCITAZIONE III (10/02/2004)

Esercizio 1 - Calcolare tutti i possibili valori di $z = i^{\frac{1}{3}}$ e di $w = \log(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$.

Risultato: $z_1 = \exp\frac{i\pi}{6}$, $z_2 = \exp\frac{5i\pi}{6}$, $z_3 = \exp\frac{3i\pi}{6} = -i$; $w_n = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Esercizio 2 - Calcolare le soluzioni dell'equazione

$$e^{\frac{1}{z}} = \alpha$$

dove α è un numero complesso assegnato. Mostrare che se $|\alpha| \neq 0$ il numero di soluzioni appartenenti al cerchio $|z| \leq \varepsilon$ è infinito per qualunque ε.

Risultato: $z_n = 1/(\log\alpha + 2\pi i n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Esercizio 3 - Dimostrare che la funzione $f(z) = \overline{z}\tanh(\log z)^2$ non è analitica.

Suggerimento: usare la non-analiticità della funzione $z\bar{z} = |z|^2$.

Esercizio 4 - Sia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitica. Trovare la parte immaginaria $v(x,y)$ sapendo che:
a) $u(x,y) = x^3 + 3x(1-y^2)$;
b) $u(x,y) = \cos y \cosh x$;
c) $u(x,y) = e^{-x}[(1+x)\cos y + y \sin y]$.

Risultato: a) $v(x,y) = -y^3 + 3y(1+x^2) + c$; b) $v(x,y) = \sinh x \sin y + c$; c) $v(x,y) = e^{-x}[-(1+x)\sin y + y\cos y] + c$, dove c è un numero reale arbitrario.

Esercizio 5 - Scrivere esplicitamente $\int_\gamma f(z)dz$ in termini di una parametrizzazione della curva γ, se γ è:
a) il triangolo di vertici $[0,1,i]$ percorso in senso orario;
b) la circonferenza di centro i e raggio R percorsa due volte in senso antiorario;
c) il quadrato di centro 0 e lato 2 percorso in senso antiorario.

Esercizio 6 - Calcolare i seguenti integrali:
a) $I_a = \int_\gamma (z+1)^2 dz$; γ è il triangolo di vertici $[-1,1,i]$ orientato in senso antiorario.
b) $I_b = \int_\gamma z\overline{z}\, dz$; γ è la circonferenza di centro $z = 0$ e raggio $R = 5$ orientata in senso orario.
c) $I_c = \int_\gamma e^{\overline{z}}\, dz$; γ è il quadrato di vertici $[0,1,1+i,i]$ orientato in senso antiorario.
d) $I_d = \int_\gamma \cosh z\, dz$; γ è il quadrato di vertici $[0,1,1+i,i]$ orientato in senso antiorario.

Risultato: $I_a = 0$; $I_b = 0$; $I_c = 2(e-1)(1-e^{-i})$; $I_d = 0$.

ESERCITAZIONE IV (17/02/2004)

Esercizio 1 - Calcolare l'integrale $I_\gamma = \int_\gamma \bar{z}\, dz$ dove γ è una qualsiasi curva chiusa percorsa in senso antiorario.

Risultato: usare il teorema di Gauss. $I_\gamma = 2iA_\gamma$, dove A_γ è l'area della porzione di piano interna a γ.

Esercizio 2 - Sia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitica. Trovare $f(z)$ sapendo che $f(0) = 0$ e che:
a) $u(x,y) = e^x[(x^2 - y^2)\cos y - 2xy \sin y]$;
b) $v(x,y) = 3x^2y - y^3$;
c) $v(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$.

Risultato: a) $f(z) = z^2e^z$; b) $f(z) = z^3$; c) $f(z) = \frac{z}{1-z}$.

Esercizio 3 - Calcolare i seguenti integrali:
a) $\int_\gamma \frac{e^{z-1}}{z-1}dz$; γ è la circonferenza di centro $z = 1$ e raggio $R = 1$ orientata in senso antiorario.
b) $\int_\gamma \frac{1}{|z|^2}\, dz$; γ è la curva definita da $z(t) = \cosh t + i \sinh t$, $t \in (-\infty, \infty)$. Disegnare la curva γ.
c) $\int_\gamma \frac{1}{2z-i-1}\, dz$; γ è il quadrato di vertici $[0, 1, 1+i, i]$ orientato in senso antiorario.
d) $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$; γ è l'ellisse di fuochi $z = 1$ e $z = -1$ e asse principale 3.

Risultato: a) $2\pi i$; b) $i\pi/\sqrt{2}$; c) πi; d) $2\pi i$.

Esercizio 4 - Calcolare il massimo del modulo della funzione $f(z)$ nel dominio $\mathcal{D}$, dove:
a) $f(z) = z^2$; $\mathcal{D}$ è il quadrato di vertici $[0, 1, 1+i, i]$.
b) $f(z) = \sinh^2 z$; $\mathcal{D}$ è il quadrato di vertici $[-1/2, 1/2, 1/2 + 2\pi i, -1/2 + 2\pi i]$.
c) $f(z) = z^2 + z$; $\mathcal{D}$ è il triangolo di vertici $[-1, 1, i]$.
d) $f(z) = \frac{1}{z-3}$; $\mathcal{D}$ è il cerchio di centro $z = 0$ e raggio $R = 2$.

Risultato: a) 2; b) $\cosh^2 \frac{1}{2}$; c) 1; d) 1.

Esercizio 5 - Sviluppare in serie di Laurent di centro z_0 le seguenti funzioni:
a) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)}$; $z_0 = 2$.
b) $f(z) = \frac{1}{z^3-z^2-z+1}$; $z_0 = 1$.
c) $f(z) = \frac{e^z}{(z-z_0)^5}$; $\forall z_0$.
d) $f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} - 1$; $z_0 = 0$.

Esercizi di preparazione per il II esonero (27/02/2004)

1 - Scrivere i coefficienti f_n della serie di Laurent:

$$f(z) = \frac{z^2}{z-2} \sin\left(\frac{\pi z}{2z-4}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n (z-2)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)} + \frac{z}{z^2+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n$$

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z^2+2z-3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n (z-1)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - iz + 2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n$$

in uno dei possibili domini di convergenza.

2 - Determinare un polinomio armonico $P(x, y)$ tale che $P(1, 0) = 0$ e $P(0, 1) = 1$.

3 - Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitica. Determinare $f(z)$ sapendo che:
a) $u(x, y) = 3x^2(1-2y) + y^2(2y-3)$ e $v(1, 0) = 2$.
b) $u(x, y) = (x^2 - y^2)\cos x \cosh y + 2xy \sin x \sinh y$ e $f(0) = 0$.
c) $v(x, y) = 3x^3 + (1-y)(9xy-1)$ e $f(0) = 0$.
Trovare i punti in cui $f(z) = 0$.

4 - Calcolare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1+\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta} \ ; \ I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{e^{-2i\theta}\sin\theta}{2+\sin\theta} \ ; \ I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{1+x^2}{(x^2-2x+2)(x^2-3ix-2)} \ ;$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{2+\cos\theta} \ ; \ I_5 = \int_0^{\infty} dx \, \frac{\cos \pi x}{1+4x^2} \ ; \ I_6 = \int_0^{\infty} dx \, \frac{1+\cos \pi x}{x^2+1} \ .$$

5 - Calcolare i seguenti integrali (tutte le curve sono orientate in senso antiorario):

$$I_1 = \int_\gamma dz\; z\overline{z}\;; \quad \gamma \text{ è il triangolo di vertici } [0,1,i].$$

$$I_2 = \int_\gamma d\overline{z}\; (z-1)^2\;; \quad \gamma \text{ è l'unione della semicirconferenza } |z-1| = 1/2,\ \mathrm{Im}z > 0$$

$$\text{e del segmento di asse reale da essa sotteso.}$$

$$I_3 = \int_\gamma dz\; (z+\overline{z})\;; \quad \gamma \text{ è il quadrato di vertici } [0,1,i+1,i].$$

6 - Calcolare i seguenti integrali (tutte le curve sono orientate in senso antiorario):

$$I_1 = \int_\gamma dz\; \frac{\sin \pi z}{(z^2-4)(z-2)^2}\;; \quad \gamma \text{ è la circonferenza } |z-1-i| = 2.$$

$$I_2(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dz\; \frac{1+z}{z^n(z^2+4)}\;; \quad \gamma \text{ è la circonferenza } |z| = 1,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$I_3 = \int_\gamma dz\; \frac{z^4}{\sinh^2 z}\;; \quad \gamma \text{ è la circonferenza } |z-5i| = 3.$$

$$I_4 = \int_\gamma dz\; \frac{z^3-6z}{(z^4+4)(z+2i)}\;; \quad \gamma \text{ è il quadrato con centro nell'origine, lati paralleli agli assi e lato 3.}$$

$$I_5 = \int_\gamma dz\; \frac{3z^4+5}{z^5+2}\;; \quad \gamma \text{ è la circonferenza } |z| = 2.$$

$$I_6 = \int_\gamma dz\; \frac{z^3}{(z^2+1)^5}\;; \quad \gamma \text{ è la circonferenza } |z-1| = 2.$$

7 - Calcolare i seguenti integrali per $k \in \mathbb{R}$:

$$f_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{ikx}\; \frac{x}{(x^2+1)^2}\;;\; f_2(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; \frac{\cos kx}{x^2-2x+2}\;;\; f_3(k) = \int_0^{\infty} dx\; \frac{\cos kx}{(x^2+1)}\;;$$

$$f_4(k) = \int_0^{\infty} dx\; \frac{x^2\cos kx}{(x^2+1)^2}\;;\; f_5(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-ikx}\; \frac{\sin x}{1+x^2}\;;\; f_6(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; \frac{\cos 2kx}{x^4+5x^2+4}\;.$$

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
II COMPITO D'ESONERO 2/03/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS
COMPITO A

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare l'integrale $I = \oint_C dz(1+2z^*)^2$ dove C e' la circonferenza $|z| = 1$ orientata in senso antiorario ....[5]

2. Sia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una funzione intera tale che $f(0) = 0$, e sia $v(x,y) = 4xy + 3y + 1 - \exp(-y)\cos(x)$ la sua parte immaginaria. Calcolare la sua parte reale $u(x,y)$.................................[6]

3. Sia C la circonferenza $|z| = 1$ orientata in senso antiorario, calcolare l'integrale $A = \oint_C dz \frac{z}{(z^2+4)(4z^2+1)}$ ....[7]

4. Calcolare il residuo in $z = i$ della funzione
   $h(z) = \exp(4z)/(z^2+1)^2$.. ....[6]

5. Calcolare l'integrale $B = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2/[(x+i)(x^2-2ix-2)^2]$..[6]

6. Dimostrare che, se $f(z)$ ha un polo od una singolarita' essenziale in z_0, allora il residuo di $g(z) = df(z)/dz$ in z_0 e' nullo... ....[7]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 6 VOTI PARZIALI (con riserva di una eventuale rinormalizzazione).

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
II COMPITO D'ESONERO 2/03/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS
COMPITO B

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare l'integrale $I = \oint_C dz(3z - z^{*2})^2$ dove C e' la circonferenza $|z| = 1$ orientata in senso antiorario ....[5]
2. Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione intera tale che $f(0) = i$, e sia $u(x, y) = -4xy + x + \exp(x) \sin(y)$ la sua parte reale. Calcolare la sua parte immaginaria $v(x, y)$....................................[6]
3. Sia C la circonferenza $|z - 1| = 1$ orientata in senso antiorario, calcolare l'integrale $A = \oint_C dz \frac{1}{(4z^2-1)(4z^2-8z+5)}$ ....[7]
4. Calcolare il residuo in $z = 1$ della funzione $h(z) = z \cos(\frac{\pi z}{2})/(z - 1)^3$.............[6]
5. Calcolare l'integrale $B = \int_0^{2\pi} d\theta 1/[3 - \cos(\theta)]$....................[6]
6. Dimostrare che, se $f(z)$ e' dispari, $f(-z) = -f(z)$, ed ha un polo od una singolarita' essenziale in $z = 0$, allora il residuo di $g(z) = f(z)^2$ in $z = 0$ e' nullo..............[7]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 6 VOTI PARZIALI (con riserva di una eventuale rinormalizzazione).

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
II COMPITO D'ESONERO 2/03/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS
COMPITO C

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare l'integrale $I = \oint_C dz(z+z^*)^2/z^*$ dove C e' la circonferenza $|z| = 1$ orientata in senso antiorario ....[5]

2. Sia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una funzione intera tale che $f(0) = 1$, e sia $u(x,y) = 4x + x^2 - y^2 + \exp(2x)\cos(2y)$ la sua parte reale. Calcolare la sua parte immaginaria $v(x,y)$.........................[6]

3. Sia C la circonferenza $|z| = 1$ orientata in senso antiorario, calcolare l'integrale $A = \oint_C dz \frac{z}{(z^2+3)(2z^2+3z-2)}$ ....[7]

4. Calcolare il residuo in $z = 3$ della funzione
$h(z) = (z+1)\sin(\frac{\pi z}{2})/(z-3)^3$............................. ....[6]

5. Calcolare l'integrale $B = \int_0^{2\pi} d\theta \; 1/[9 - 8\sin^2\theta]$.....................[6]

6. Dimostrare che, se $f(z)$ ha un polo od una singolarita' essenziale in z_0, allora il residuo di $g(z) = df(z)/dz$ in z_0 e' nullo... ....[7]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 6 VOTI PARZIALI (con riserva di una eventuale rinormalizzazione).

SOLUZIONI II COMPITO D'ESONERO (02/03/2004)

Esercizio 1
Si pone $z = e^{i\theta}$ da cui $z^* = e^{-i\theta}$ e $dz = ie^{i\theta}d\theta$. Sostituendo negli integrali e ricordando che $\int_0^{2\pi} d\theta\ e^{im\theta} = 2\pi\delta_{m0}$ si ottiene:
A) $I = 8\pi i$ B) $I = -12\pi i$ C) $I = 2\pi i$

Esercizio 2
A) $u(x,y) = 2(x^2 - y^2) + 3x + e^{-y}\sin x, \quad f(z) = 2z^2 + 3z + i - ie^{iz}.$
B) $v(x,y) = 2(x^2 - y^2) + y - e^x \cos y + 2, \quad f(z) = 2iz^2 + z - ie^z + 2i.$
C) $v(x,y) = 4y + 2xy + e^{2x}\sin(2y), \quad f(z) = 4z + z^2 + e^{2z}.$

Esercizio 3
A) $A = 2\pi i \left[Res\left(\frac{z}{(z^2+4)(4z^2+1)}\right)_{\frac{i}{2}} + Res\left(\frac{z}{(z^2+4)(4z^2+1)}\right)_{-\frac{i}{2}} \right] = \frac{2\pi i}{15}.$
B) $A = -2\pi i Res\left(\frac{1}{(4z^2-8z+5)(4z^2-1)}\right)_{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi i}{20}.$
C) $A = 2\pi i Res\left(\frac{z}{(2z^2+3z-2)(z^2+3)}\right)_{\frac{1}{2}} = \frac{4\pi i}{65}.$

Esercizio 4
A) $Res[h(z)]_i = -\left(1 + \frac{i}{4}\right)e^{4i}.$
B) $Res[h(z)]_1 = -\frac{\pi}{2}.$
C) $Res[h(z)]_3 = \frac{\pi^2}{2}.$

Esercizio 5
A) Si chiude il cammino di integrazione su una semicirconferenza all'infinito nel semipiano inferiore (dove c'è un solo polo in $z = -i$) e quindi $B = -2\pi i Res\left(\frac{z^2}{(z+i)(z^2-2iz-2)^2}\right)_{-i} = \frac{2\pi i}{25}.$

Per i compiti B e C si riscrive $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$, $\sin\theta = (z - z^{-1})/2i$ e $d\theta = dz/iz$, dove z varia sulla circonferenza goniometrica C e quindi
B) $B = 2i \oint_C dz \frac{1}{z^2-6z+1} = -4\pi Res\left(\frac{1}{z^2-6z+1}\right)_{3-\sqrt{8}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$
C) $B = -i \oint_C dz \frac{z}{2z^4+5z^2+2} = 2\pi \left[Res\left(\frac{z}{2z^4+5z^2+2}\right)_{\frac{i}{\sqrt{2}}} + Res\left(\frac{z}{2z^4+5z^2+2}\right)_{-\frac{i}{\sqrt{2}}} \right] = \frac{2\pi}{3}$

Esercizio 6

Compiti A e C:

Per $0 < |z - z_0| < R$, $f(z) = \cdots + \frac{f_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{f_{-1}}{(z-z_0)} + f_0 + f_1(z - z_0) + \cdots$, quindi $g(z) = \cdots - \frac{nf_{-n}}{(z-z_0)^{n+1}} + \cdots - \frac{f_{-1}}{(z-z_0)^2} + f_1 + 2f_2(z - z_0) + \cdots$ e questa serie di Laurent mostra che $Res[g(z)]_{z_0} = g_{-1} = 0$.

Compito B:

Se $f(-z) = -f(z)$ allora $g(-z) = g(z)$ e quindi la serie di Laurent di $g(z)$ contiene solo i termini pari: $g(z) = \cdots + \frac{g_{-2n}}{z^{2n}} + \frac{g_{-2n+2}}{z^{2n-2}} + \cdots + \frac{g_{-2}}{z^2} + g_0 + g_2 z^2 + \cdots + g_{2m} z^{2m} + \cdots$ e quindi $Res[g(z)]_0 = g_{-1} = 0$.

ESERCITAZIONE V (9/3/2004)

1 - Determinare un polinomio armonico $P(x,y)$ tale che:
a) $P(0,0)=0$, $P(0,1)=1$ e $P(1,1)=2$.
b) $P(0,-1)=1$, $P(-1,2)=2$.
c) $P(x,x)=x(3-2x^2)$.
d) $P(x,x^2)=x^4-x^2+1$.
e) $P(0,0)=3$, $\frac{\partial P}{\partial x}(1,0)=2$.
f) $P(1,1)=-1$, $\frac{\partial P}{\partial x}(0,0)=1$, $\frac{\partial P}{\partial y}(0,1)=0$.

2 - Calcolare i seguenti integrali:

$$I_1=\int_0^\infty dx\ \frac{\sqrt{x}}{x^2+5x+4}\ ;\ I_2=\int_0^\infty dx\ \frac{x^{2/3}}{x^2+4}\ ;\ I_3=\int_0^\infty dx\ \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\ ;$$
$$I_4=\int_{-\infty}^0 dx\ \frac{\sqrt[3]{x}}{(1-x)^2}\ ;\ I_5=\int_{-\infty}^0 dx\ \frac{x^{-2/3}}{8-x}\ ;\ I_6=\int_0^\infty dx\ \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+5x+4}\ .$$

3 - Calcolare il residuo all'infinito delle seguenti funzioni:

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z^4-2}\ ;\ f(z)=e^{1/z}\ ;\ f(z)=e^{1/z^2}\ ;\ f(z)=\frac{z^5-2}{z^6+z^5+4}\ ;\ f(z)=\frac{z^4+4}{z^4+3z^3}$$

4 - Calcolare la trasformata di Fourier, $\hat{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\ e^{ikx}f(x)$, dove $f(x)$ è data da:

$$f(x)=\exp\Big(-3x^2\Big)\ ;\ f(x)=\exp\left[-\frac{(x-1)^2}{3}\right]\ ;\ f(x)=e^{-x^2}\sin 4x\ ;$$
$$f(x)=\frac{\sin 4x}{x^2+1}\ ;\ f(x)=\exp\Big(-|x|\Big)\ ;\ f(x)=\exp\Big(-|x+5|\Big)$$

Se possibile, verificare che $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\ e^{-ikx}\hat{f}(k)$.
Suggerimento: Ricordate che potete "completare il quadrato", nel senso che

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\ e^{-Ax^2+Bx}=\int_{-\infty}^{\infty}dx\ e^{-A(x-\frac{B}{2A})^2}\ e^{\frac{B^2}{4A}}$$

A questo punto, se A è reale e positivo, mostrate che, $\forall\alpha\in\mathbb{C}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\ e^{-A(x+\alpha)^2}=\sqrt{\frac{\pi}{A}}\ .$$

Simulazione del III esonero (16/03/2004)

1 - Calcolare l'integrale
$$I = \int_{-\infty}^{0} dx \; \frac{x^{4/5}}{x^2 - 3x + 2}$$

2 - Calcolare l'integrale
$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{ikx} \; \frac{x^2 \cos 6x}{x^4 + 16}$$

3 - Calcolare l'integrale
$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{ikx} \; e^{-3(x-1)^2} \sin 2(x-1)$$

4 - Trovare una soluzione $f(x, y)$ dell'equazione di Laplace tale che, sulla circonferenza di centro $(1, 1)$ e raggio $1/2$, si abbia $f = 8x^3 - 12x^2 - 6x + 4$.

5 - Calcolare il residuo all'infinito di $f(z) = \frac{z^4}{z^3+9z} + \cos \frac{1}{z^3}$.

6 - Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(\theta) = \frac{1}{3+\cos^2 \theta}$ nell'intervallo $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

7 - Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ la funzione
$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{\pi} + 1 & \theta \in [-\pi, 0) \\ 1 & \theta \in [0, \pi) \end{cases}$$

1 Serie e trasformata di Fourier. 1

Il teorema di Fourier rappresenta non soltanto uno dei più bei risultati dell'analisi moderna, ma fornisce anche uno strumento indispensabile per lo studio di quasi tutti i principali problemi della fisica moderna.

W. Thomson e P. G. Tait, Philosophie Naturelle (1867).

(1) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ le funzioni

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (0, \pi] \\ -1 & \text{per } x \in [-\pi, 0) \end{cases} \qquad (b) \quad f(x) = |x|.$$

(2) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x.$$

Suggerimento: utilizzare la forma complessa della serie di Fourier.

(3) Utilizzare il risultato dell'esercizio precedente per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right).$$

(4) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione

$$f(x) = x^2,$$

ed utilizzare il risultato per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
III COMPITO D'ESONERO 22/03/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS
COMPITO A

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare l'integrale $I = \int_0^{+\infty} dx \frac{x}{x^3+1}$ ....[6]
2. Calcolare, per ogni k reale, l'integrale di Fourier
$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x \exp(ikx)}{(x^2+1)^2}$ ....[6]
3. Calcolare il residuo in $z_0 = \infty$ della funzione
$f(z) = \frac{z^2}{1+4z^2} \sin(2/z)$ ....[5]
4. Calcolare la serie di Fourier $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \sin(2nx)$ nell'intervallo $-\pi < x < \pi$............................ ....[6]
5. Sia, nell'intervallo $-\pi < x < \pi$, $1/[4 + \cos(x)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(inx)$. Calcolare i coefficienti di Fourier c_n per ogni intero n.....[6]
6. Se la funzione $A(z)$ e' analitica in $z = 0$ ed e' dispari, $A(-z) = -A(z)$, mostrare che la funzione $B(z) = \sqrt{z}A(\sqrt{z})$ e' analitica in $z = 0$...
.......................[6]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 6 VOTI PARZIALI (con riserva di una eventuale rinormalizzazione).

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
III COMPITO D'ESONERO 22/03/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS
COMPITO B

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare l'integrale $I = \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{1/2}}{x^3+1}$ ....[6]
2. Calcolare, per ogni k reale, l'integrale di Fourier
$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2 \exp(ikx)}{(4x^2+1)^2}$ ....[6]
3. Calcolare il residuo in $z_0 = \infty$ della funzione
$f(z) = (\frac{4}{z} + z) \cosh(2z^2)$ ....[5]
4. Calcolare la serie di Fourier $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3^{|n|}} \exp(inx)$ nell'intervallo $-\pi < x < \pi$............................ ....[6]
5. Sia, nell'intervallo $-\pi < x < \pi$, $1/[3 - \sin(x)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(inx)$. Calcolare i coefficienti di Fourier c_n per ogni intero n.....[6]
6. Sia $P(z)$ un polinomio della variabile $z = x + iy$ e siano i polinomi $a(x, y) = Re[P(z)]$ e $b(x, y) = Im[P(z)]$. Mostrare che il polinomio $q(x, y) = a(x, y)b(x, y)$ e' armonico......................[6]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 6 VOTI PARZIALI (con riserva di una eventuale rinormalizzazione).

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
III COMPITO D'ESONERO 22/03/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS
COMPITO C

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare l'integrale $I = \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{1/3}}{x^3+1}$ ....[6]
2. Calcolare, per ogni k reale, l'integrale di Fourier
   $F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\exp(ikx)}{(x^2+4)^2}$ ....[6]
3. Calcolare il residuo in $z_0 = \infty$ della funzione
   $f(z) = (1+z)^4 \sin^2(1/z^2)$ ....[5]
4. Calcolare la serie di Fourier $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos(nx)$ nell'intervallo $-\pi < x < \pi$.....[6]
5. Sia, nell'intervallo $-\pi < x < \pi$, $\sin(x)/[2+\cos(x)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(inx)$. Calcolare i coefficienti di Fourier c_n per ogni intero n.....[6]
6. Mostrare che la serie di Fourier $A(x) = \sum_{n=0}^{=\infty} (1/3^n) \cos(nx)$ converge uniformemente nell'intervallo $-\pi < x < \pi$ ....[6]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 6 VOTI PARZIALI (con riserva di una eventuale rinormalizzazione).

SOLUZIONI III COMPITO D'ESONERO (22/03/2004)

Esercizio 1

$$A) \quad I = \int_0^\infty dx \, \frac{x}{x^3+1} = -\sum \text{Res}\left(\frac{z\log z}{1+z^3}\right) = -\sum_k \frac{\log z_k}{3z_k} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$B) \quad I = \int_0^\infty dx \, \frac{x^{1/2}}{1+x^3} = \pi i \sum \text{Res}\left(\frac{z^{1/2}}{1+z^3}\right) = \pi i \sum_k \frac{z_k^{1/2}}{3z_k^2} = \frac{\pi}{3}$$

$$C) \quad I = \int_0^\infty dx \, \frac{x^{1/3}}{1+x^3} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i/3}} \sum \text{Res}\left(\frac{z^{1/3}}{1+z^3}\right) = \frac{\pi e^{2\pi i/3}}{\sin(\pi/3)} \sum_k \frac{z_k^{1/3}}{3z_k^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(2\cos\frac{\pi}{9}-1\right)$$

dove $z_k = \left\{e^{i\pi/3}, e^{i\pi}, e^{5i\pi/3}\right\}$ e la penultima uguaglianza è ottenuta usando la formula di De L'Hopital,

$$\lim_{z\to z_i} \frac{z-z_i}{1+z^3} = \frac{1}{3z_i^2}$$

Esercizio 2

Si deve calcolare un integrale tipo $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f(x)$.

A) Per $k>0$ si chiude il cammino di integrazione nel semipiano superiore e

$$F_+(k) = 2\pi i \text{Res}\left[e^{ikz}\frac{z}{(z^2+1)^2}\right]_{z=i} = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} e^{ikz} \frac{z(z-i)^2}{(z^2+1)^2} = \frac{\pi}{2} ike^{-k}$$

Dal momento che la funzione $f(x)$ è dispari, si ha $F(k) = -F(-k)$ e quindi per $k<0$ si ha

$$F_-(k) = -F_+(-k) = \frac{\pi}{2} ike^{k}$$

e infine, $\forall k \in \mathbb{R}$, $F(k) = \frac{\pi}{2} ike^{-|k|}$. Alternativamente, si può calcolare $F_-(k)$ chiudendo il cammino nel semipiano inferiore.

B) Come nel caso precedente per $k>0$

$$F_+(k) = 2\pi i \text{Res}\left[e^{ikz}\frac{z^2}{(4z^2+1)^2}\right]_{z=i/2} = 2\pi i \lim_{z\to i/2} \frac{d}{dz} e^{ikz} \frac{z^2(z-i/2)^2}{(4z^2+1)^2} = \frac{\pi}{32}(2-k)e^{-k/2}$$

Stavolta la funzione $f(x)$ è pari, quindi $F(k) = F(-k)$ e per $k<0$ si ha

$$F_-(k) = F_+(-k) = \frac{\pi}{32}(2+k)e^{k/2}$$

e infine, $\forall k \in \mathbb{R}$, $F(k) = \frac{\pi}{32}(2-|k|)e^{-|k|/2}$.

C) Come nel caso precedente per $k>0$

$$F_+(k) = 2\pi i \text{Res}\left[e^{ikz}\frac{1}{(z^2+4)^2}\right]_{z=2i} = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz} e^{ikz} \frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}(1+2k)e^{-2k}$$

e $F(k) = F(-k)$ per cui $F(k) = \frac{\pi}{16}(1+2|k|)e^{-2|k|}$.

Esercizio 3

$$A) \quad f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{4+w^2}\sin 2w = \left[\frac{1}{4} - \frac{w^2}{16} + o(w^4)\right][2w + o(w^3)] = \frac{w}{2} + o(w^2) \quad \mathrm{Res} f_\infty = -\frac{1}{2}$$

$$B) \quad f(z) = \left(\frac{4}{z} + z\right)\left[1 + 2z^4 + \frac{2}{3}z^8 + \cdots\right] = \frac{4}{z} + z + 8z^3 + 2z^5 + \cdots \qquad \mathrm{Res} f_\infty = -4$$

$$C) \quad f(z) = (z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1)\left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{3z^8} + \cdots\right) = 1 + \frac{4}{z} + \cdots \qquad \mathrm{Res} f_\infty = -4$$

Esercizio 4

$$A) \quad g(x) = \mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{2nxi} = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{2xi}} - 1\right] = -\frac{2\sin 2x}{5+4\cos 2x}$$

$$B) \quad g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-inx}}{3^n} = 1 + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{3^n} = 1 + 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-e^{ix}/3} - 1\right] = \frac{4}{5-3\cos x}$$

$$C) \quad g(x) = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!} = \mathrm{Re}\ e^{e^{ix}} = e^{\cos x}\cos\sin x$$

Esercizio 5

A) Dalle formule per i coefficienti di Fourier si ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{e^{-inx}}{4+\cos x} = \frac{1}{\pi i}\oint dz \frac{z^{-n}}{z^2+8z+1}$$

dove l'integrale è fatto sulla circonferenza di raggio 1. Per $n \geq 0$ la funzione va a zero più velocemente di $1/z^2$ all'infinito quindi conviene sommare i residui esterni alla circonferenza. L'unico polo esterno è in $z = -4-\sqrt{15}$ e

$$c_n = -2\mathrm{Res}\left[\frac{z^{-n}}{z^2+8z+1}\right]_{-4-\sqrt{15}} = \frac{(-1)^n}{(4+\sqrt{15})^n\sqrt{15}}$$

Dal momento che la funzione è pari si ha $c_{-n} = c_n$ e quindi per $n < 0$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(4+\sqrt{15})^{-n}\sqrt{15}} = \frac{(-1)^n}{(4-\sqrt{15})^n\sqrt{15}}$$

B) Come nel caso precedente

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{e^{-inx}}{3-\sin x} = \frac{1}{\pi}\oint dz \frac{z^{-n}}{-z^2+6iz+1}$$

In questo caso la funzione non ha parità definita per cui bisogna considerare separatamente $n > 0$ e $n \leq 0$. Consideriamo prima il caso $n \leq 0$: la funzione ha un solo polo interno alla circonferenza di raggio 1 in $z = (3 - 2\sqrt{2})i$ e

$$c_n = 2i\text{Res}\left[\frac{z^{-n}}{-z^2 + 6iz + 1}\right]_{(3-2\sqrt{2})i} = \frac{1}{i^n(3 - 2\sqrt{2})^n 2\sqrt{2}}$$

Per $n > 0$ invece come nel caso precedente si considera il residuo esterno in $z = (3 + 2\sqrt{2})i$ e

$$c_n = -2i\text{Res}\left[\frac{z^{-n}}{-z^2 + 6iz + 1}\right]_{(3+2\sqrt{2})i} = \frac{1}{i^n(3 + 2\sqrt{2})^n 2\sqrt{2}}$$

C) Come nel caso precedente

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin x \; e^{-inx}}{2 + \sin x} = -\frac{1}{2\pi}\oint dz \frac{(z^2 + 1)\; z^{-n-1}}{(z - z_+)(z - z_-)}$$

con $z_\pm = -2 \pm \sqrt{3}$. Si ottiene come nel caso precedente

$$c_n = \begin{cases} iz_+^n \quad n \geq 1 \\ 0 \quad n = 0 \\ -iz_+^{-n} \quad n \leq 1 \end{cases}$$

ovvero $c_n = i \;\text{sgn}n \;(\sqrt{3} - 2)^{|n|}$.

Esercizio 6

A) $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+1} \Rightarrow A(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1/2} \Rightarrow B(z) = \sqrt{z}A(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$, e quindi è analitica in $z = 0$ per definizione.

B) $P(z) = a + ib \Rightarrow P^2(z) = a^2 - b^2 + 2iab \Rightarrow ab = \text{Im}P^2(z)/2$ e quindi è un polinomio armonico.

C) $|\sum_{n=0}^{\infty}(1/3^n)\cos(nx)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |(1/3^n)\cos(nx)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}(1/3^n) = 3/2$. Il termine n-esimo della serie è stimato uniformemente dal termine n-esimo di una serie convergente, quindi la serie converge uniformemente.

oppure si somma la serie $A(x) = \text{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{3}\right)^n = \frac{3(3-\cos x)}{10-6\cos x}$ e poiché $A(x)$ è continua in $-\pi \leq x \leq \pi$ e periodica, $A(x + 2\pi) = A(x)$, per il teorema di Fejer la serie di Fourier converge uniformemente.

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
COMPITO D'ESAME 29/03/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS

ATTENZIONE:
scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n (z-1)^n$ lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(z) = (2z^2 - z - 1)/(4z^2 - 4z - 3)$ in $z_0 = 1$. Calcolare i coefficienti f_n ed il raggio di convergenza R. ....[5]

2. Trovare le 4 radici del polinomio $P(z) = 9z^4 + 4$................[5]

3. Sia $g(z) = (z^2 - 4)/[(z^2 + 1)(z^2 + 7z + 10)]$, calcolare l'integrale $G = \oint dz g(z)$ esteso alla cinconferenza $|z| = 3$ orientata in senso antiorario . ...[5]

4. Sia $A(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione intera tale che $A(0) = 0$, e sia $u(x, y) = 2xy - \sinh x \sin y$ la sua parte reale. Calcolare la sua parte immaginaria $v(x, y)$. ....[5]

5. Calcolare l'integrale $I = \int_0^{+\infty} dx 1/[\sqrt{x}(3x^2 + 10x + 3)]$ ....[5]

6. Sia $\pi - |x| = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(nx)$ per $-\pi \leq x \leq \pi$, calcolare i coefficienti di Fourier c_n e s_n ....[5]

7. Sia $P(z)$ un polinomio di grado N e sia $F(z) = d\ln P(z)/dz = dP(z)/dz/P(z)$. Dimostrare che $\mathrm{Res}_{\infty} F(z) = -N$...............[5]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 7 VOTI PARZIALI .
GLI STUDENTI CHE VOGLIONO RECUPERARE UN ESONERO SCRITTO, I O II O III E/O LA DOMANDA TEORICA, SI LIMITANO A SVOLGERE RISPETTIVAMENTE GLI ESERCIZI O (1,2) O (3,4) O (5,6) E/O (7).

SOLUZIONI PROVA D'ESAME DEL 29/03/04

Esercizio 1: $f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-1)^n$; $f_0 = 0$, $f_n = -2^{n-1}$ per $n \geq 1$; il raggio di convergenza è $|z-1| < R = 1/2$.

Esercizio 2: $z_n = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\pi}{4} + \frac{ni\pi}{2}}$, $n = 0, 1, 2, 3$.

Esercizio 3: $G = \frac{\pi i}{13}$. Nota: la funzione $g(z)$ ha tre poli all'interno della circonferenza e un polo all'esterno. Ricordando che $\sum \mathrm{Res} g(z) = 0$ perché $g(z)$ va a zero più velocemente di $1/z$ all'infinito, l'integrale si calcola facilmente usando il solo residuo esterno.

Esercizio 4: $v(x,y) = -x^2 + y^2 + \cosh x \cos y - 1$; $A(z) = -iz^2 + i\cosh z - i$.

Esercizio 5: $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

Esercizio 6: I coefficienti s_n sono nulli perché la funzione è pari. Si ha $c_0 = \pi/2$ e $c_n = \frac{4}{\pi n^2}$ per n dispari, $c_n = 0$ per n pari.

Esercizio 7: Si ha $P(z) = C_0 z^N \left(1 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \cdots\right)$. Quindi $\log P(z) = N \log z + \log C_0 + \log\left(1 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \cdots\right)$ e $\frac{d\log P(z)}{dz} = \frac{N}{z} - \frac{\left(\frac{C_1}{z^2} + \frac{2C_2}{z^3} + \cdots\right)}{\left(1 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \cdots\right)} = \frac{N}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ da cui segue che il residuo all'infinito di $\frac{d\log P(z)}{dz}$ è $-N$.