

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

A.A. 2003 - 2004

Prof. A. Degasperis
Esercitazioni a cura del Dr. F. Zamponi

2 novembre 2005

- Argomenti trattati nel corso

1. Spazi lineari con dimensione finita ed infinita
2. Funzioni generalizzate (distribuzioni)
3. Applicazioni

- Contenuto di queste note

1. Programma del corso
2. Riferimenti bibliografici
3. Richiami sugli spazi vettoriali (F. Zamponi)
4. Contenuto delle lezioni
5. Raccolta degli esercizi distribuiti con soluzioni e dei compiti di esonero e d'esame

PROGRAMMA DEL CORSO

SPAZI LINEARI CON DIMENSIONE FINITA ED INFINITA

Lo spazio lineare astratto e le sue strutture: algebrica, geometrica ed analitica. Spazio di Banach e spazio di Hilbert. Rappresentazioni di spazi lineari con vari esempi. Gli spazi V_N , l_2 ed $L_2(a, b)$. Dipendenza ed indipendenza lineare di p vettori. Ortonormalizzazione di p vettori. Definizione di base. Sottospazi finito-dimensionali ed infinito-dimensionali. Disuguaglianza di Bessel. Limite forte e limite debole di una successione di vettori e loro proprietà. Rappresentazione di un vettore dello spazio di Hilbert in una base ortonormale. Ortonormalizzazione delle potenze $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ in $L_2(-1, 1)$ e polinomi di Legendre. Trasformazioni lineari tra spazi lineari. Dominio di definizione di una trasformazione lineare, nucleo ed invertibilità. Funzionali lineari e forme in V_N . Spazio lineare duale. Base duale. Funzionali lineari limitati su uno spazio di Hilbert. Teorema di Fisher–Ritz (senza dimostrazione). Esempi di funzionali non limitati in L_2 . Operatori lineari. Commutatori, regole di calcolo di commutatori ed identità di Jacobi. Operatori integrali, di moltiplicazione e differenziali. Operatore Hermitiano coniugato. Operatori limitati Hermitiani. Operatori non limitati Hermitiani ed operatori autoaggiunti (con esempi). Operatori di Sturm–Liouville. Esempi di problemi di Sturm–Liouville e esempi di basi ortonormali in $L_2(-1, 1)$, $L_2(0, +\infty)$ e $L_2(-\infty, +\infty)$. Proprietà dei polinomi di Legendre, Laguerre ed Hermite. Base di Fourier in $L_2(a, b)$ e suo limite per $a \rightarrow -\infty$ e $b \rightarrow +\infty$. Trasformata di Fourier e sue proprietà. Trasformazione di Fourier di operatori lineari.

FUNZIONI GENERALIZZATE (DISTRIBUZIONI)

Funzionali lineari nello spazio di Schwartz. Funzionali lineari non regolari con esempi in fisica. Limite di successioni di funzionali lineari e definizione di distribuzione. Distribuzione di Dirac e sue proprietà. Derivate della distribuzione di Dirac. Distribuzione di Heaviside. Trasformata di Fourier di una distribuzione. Trasformata di Fourier della distribuzione di Heaviside. Formule di Plemelj.

APPLICAZIONI

L'oscillatore armonico forzato: funzione di Green ritardata e soluzione del problema del transiente. Moto di una particella in un potenziale sulla retta: i) meccanica classica: equazioni di Hamilton, parentesi di Poisson ed analisi qualitativa; ii) meccanica quantistica: equazione di Schrödinger, soluzioni stazionarie, coefficienti di riflessione e di trasmissione e loro calcolo nell'approssimazione di Bohr.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Attenzione: non esiste il "libro di testo". Gli argomenti del corso sono trattati in numerosi libri. Qui di seguito sono elencati alcuni testi tra i tanti adatti alla consultazione ed allo studio di parti del programma.

1. Bernardini C , Ragnisco O ,Santini P M "Metodi Matematici della Fisica" La Nuova Italia Scientifica, Roma 1993.
2. Dennerly P , Krzywicki A "Mathematics for Physicists" Harper&Row 1967.
3. Halmos P R "Finite dimensional Vector Spaces" Van Nostrand Comp. 1958.
4. Hirsch M W , Smale S "Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra" Academic Press 1974.
5. Ince E L "Ordinary Differential Equations" Dover Publ., New York 1956.
6. Rossetti C "Metodi Matematici per la Fisica" Libreria Ed.Univ. Levrotto&Bella, Torino 2000.
7. Shilov G E "An Introduction to the Theory of Linear Spaces" Prentice-Hall 1961.
8. Smirnov V I "Corso di Matematica Superiore" Editori Riuniti, Roma 1978.
9. Taylor A E "Introduction to Functional Analysis" John-Wiley&Sons 1958.
10. Vladimirov V "Distributions en Physique Mathématique" MIR, Moscou 1979.

Per le funzioni elementari e speciali, il calcolo di serie e di integrali consultare

1. Abramowitz M , Stegun I A "Handbook of Mathematical Functions" Dover Publ., New York 1968.
2. Gradshteyn I S, Ryzhik I M "Table of Integrals, Series and Products" Academic Press, New York 1965.

Spazi vettoriali

Queste note sono tratte da: A.N.Kolmogorov, S.V.Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, MIR, 1980, Capitolo III, par. 1 e 4 e Capitolo IV, par. 5.

Spazi vettoriali (o lineari) complessi

Uno spazio vettoriale è un insieme V sul quale sono definite una operazione di somma e una operazione di prodotto per un numero complesso¹ tali che, $\forall x, y, z \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$x + y = y + x \quad (1)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad (2)$$

$$\exists 0 \in V : x + 0 = x \quad (3)$$

$$\exists -x \in V : x + (-x) = 0 \quad (4)$$

$$\lambda(\mu x) = \mu(\lambda x) \quad (5)$$

$$1 \cdot x = x \quad (6)$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad (7)$$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad (8)$$

Esercizio: verificare che gli spazi seguenti sono spazi vettoriali definendo opportunamente la somma di due vettori e il prodotto di un vettore per un numero complesso.

1. Spazio dei vettori complessi n -dimensionali \mathbb{C}^n : $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{C}$.

2. Spazio delle matrici $m \times n$ complesse $\mathcal{M}(m, n)$: $x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

3. Spazio delle funzioni $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

4. Spazio delle funzioni $f(z)$ analitiche in un dominio \mathcal{D} del piano complesso z .

5. Spazio l_2 delle successioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in \mathbb{C}$, tali che $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$.

6. Spazio $L_2[a, b]$ delle funzioni $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tali che $\int_a^b dx |f(x)|^2 < \infty$.

Indipendenza lineare e dimensione di uno spazio vettoriale: n vettori $\{x^1, \dots, x^n\}$ ² si dicono *linearmente indipendenti* se, $\forall \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i \quad (9)$$

La *dimensione di uno spazio vettoriale* è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che si possono trovare nello spazio stesso. Ovvero, se in uno spazio vettoriale si possono trovare al massimo n vettori linearmente indipendenti, lo spazio ha dimensione n . Se per qualunque $n \in \mathbb{N}$ è possibile trovare un insieme di n vettori linearmente indipendenti si dice che lo spazio ha dimensione infinita.

¹E' possibile definire uno spazio vettoriale su un campo K qualunque. Noi consideriamo solo il caso $K = \mathbb{C}$ per semplicità.

²Indichiamo sempre con un indice alto insiemi di vettori, mentre un indice basso indica la componente di un vettore.

Base di uno spazio vettoriale: Se uno spazio vettoriale ha dimensione n è possibile trovare un insieme di vettori $\{e^1, \dots, e^n\}$ (detti *vettori di base*) tali che ogni vettore x dello spazio è una combinazione lineare dei vettori della base, ovvero, $\forall x \in V, x = \sum_{i=1}^n x_i e^i, x_i \in \mathbb{C}$.

Esercizi:

1. Dimostrare che lo spazio \mathbb{C}^n ha dimensione n .
2. Scrivere una base per lo spazio $\mathcal{M}(m, n)$.
3. Dimostrare che lo spazio dei polinomi di grado N di variabile complessa, $P_N(z) = c_N z^N + c_{N-1} z^{N-1} + \dots + c_0$, ha dimensione $N + 1$.
4. Dimostrare che lo spazio delle funzioni $f(z)$ analitiche nel cerchio di centro 0 e raggio 1 ha dimensione infinita (suggerimento: utilizzare il risultato dell'esercizio precedente).
5. Dimostrare che lo spazio l_2 ha dimensione infinita (suggerimento: provare a costruire esplicitamente n vettori linearmente indipendenti per ogni intero n).

Prodotto scalare: un prodotto scalare su uno spazio vettoriale complesso V è una funzione $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ che verifica le seguenti proprietà (notazione: se λ è un numero complesso, $\bar{\lambda}$ è il suo complesso coniugato):

$$x \cdot y = \overline{y \cdot x} \quad (10)$$

$$x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y) \quad (11)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (12)$$

$$x \cdot x \geq 0, \quad = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (13)$$

Osserviamo che $x \cdot y$ in generale è un numero complesso; tuttavia, dalla (10) segue che $x \cdot x \in \mathbb{R}$ per cui la disuguaglianza (13) è ben definita³.

Esercizi:

1. Dimostrare che $(\lambda x) \cdot y = \bar{\lambda} x \cdot y$.
2. Dimostrare la *disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij*: $|x \cdot y| \leq |x| |y|$, dove $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ (suggerimento: calcolare $|x + \mu y|^2$ per $\mu = -(y \cdot x)/|y|^2$).
3. Verificare che $x \cdot y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \equiv x^\dagger y$ è un prodotto scalare⁴ su \mathbb{C}^n .
4. Verificare che $x \cdot y = \sum_{i=2}^n \bar{x}_i y_i$ non è un prodotto scalare su \mathbb{C}^n .
5. Verificare che $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ non è un prodotto scalare su \mathbb{C}^n .
6. Verificare che $A \cdot B = \text{Tr} A^\dagger B$ è un prodotto scalare⁵ su $\mathcal{M}(n, n)$.
7. Verificare che $f \cdot g = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx \overline{f(x)} g(x)$ è un prodotto scalare su $L_2[a, b]$.

³Ricordiamo che le disuguaglianze fra numeri complessi non sono definite, per cui non avrebbe senso chiedersi se $x \cdot x \geq 0$ se $x \cdot x$ fosse complesso.

⁴D'ora in poi useremo sempre la notazione $x^\dagger y$ per il prodotto scalare su \mathbb{C}^n . Si usa questa notazione perché se x è un vettore colonna di componenti x_i , x^\dagger indica il vettore riga di componenti \bar{x}_i (*hermitiano coniugato* di x). Allora $x^\dagger y$ indica il normale prodotto righe per colonne.

⁵La matrice A^\dagger è definita da $(A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

Basi ortonormali, isomorfismo fra spazi vettoriali e cambiamenti di base

Base ortonormale: una base e^i , $i = 1, \dots, n$, è detta ortonormale se $e^i \cdot e^j = \delta_{ij}$.

Esercizio: verificare che se $e^i \cdot e^j = \delta_{ij}$ i vettori e^i sono linearmente indipendenti (suggerimento: calcolare $e^k \cdot \sum_i \lambda_i e^i$).

In ogni spazio vettoriale V di dimensione finita esiste una base ortonormale.

Infatti sia f^k , $k = 1, \dots, n$ una base per lo spazio V . Per costruire una base *ortogonale* si procede nel modo seguente (*metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*):

$$\begin{aligned} e^1 &= f^1 \\ e^2 &= f^2 - \frac{e^1 \cdot f^2}{e^1 \cdot e^1} e^1 \\ e^3 &= f^3 - \frac{e^1 \cdot f^3}{e^1 \cdot e^1} e^1 - \frac{e^2 \cdot f^3}{e^2 \cdot e^2} e^2 \\ &\dots\dots\dots \\ e^k &= f^k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^i \cdot f^k}{e^i \cdot e^i} e^i \end{aligned}$$

Esercizi:

1. Verificare che i vettori e^k sono tra loro ortogonali.
2. (facoltativo) Verificare che $|e^k| \neq 0$ se i vettori f^k sono linearmente indipendenti.

Per ottenere una base ortonormale è sufficiente alla fine dividere ogni vettore e^k per il suo modulo. Dalla formula esplicita si vede che i vettori della nuova base e^k sono combinazioni lineari dei vettori f^k : dunque, se per ogni vettore x dello spazio si aveva $x = \sum_k x_k f^k$, si avrà anche $x = \sum_k x'_k e^k$, per cui i vettori e^k sono una base ortonormale dello spazio.

Ogni spazio vettoriale V di dimensione n è isomorfo a \mathbb{C}^n .

Due spazi vettoriali U, V si dicono isomorfi se esiste una corrispondenza biunivoca tra vettori di U e vettori di V in modo che, se $x, y \in U$ corrispondono rispettivamente a $x', y' \in V$, si abbia che $x + y$ corrisponde a $x' + y'$ e λx corrisponde a $\lambda x'$ per ogni numero complesso λ . Se due spazi sono isomorfi essi possono essere pensati come rappresentazioni diverse di uno stesso spazio, perchè tutte le proprietà di uno spazio vettoriale sono determinate dalle operazioni di somma e prodotto scalare su di esso definite.

Costruiamo una base ortonormale e^k dello spazio V . Ogni vettore x è rappresentabile come

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e^k \quad \Rightarrow \quad x \leftrightarrow \{x_k\}_{k=1}^n \tag{14}$$

cioè ad ogni vettore corrisponde l'insieme delle sue coordinate⁶ nella base e^k , che è proprio un vettore di \mathbb{C}^n . Si verifica facilmente che alla somma di due vettori corrisponde la somma delle loro coordinate e che il vettore λx ha coordinate $\{\lambda x_k\}_{k=1}^n$. Dunque, ogni spazio vettoriale V è isomorfo a \mathbb{C}^n ovvero, in pratica, *ogni spazio vettoriale di dimensione n può essere pensato come una rappresentazione di \mathbb{C}^n .*

⁶Ricordate che dal momento che lo spazio vettoriale è complesso, le coordinate saranno in generale numeri complessi.

Il prodotto scalare di due vettori si rappresenta in termini delle loro coordinate nel modo seguente. Per ogni coppia di vettori $x, y \in V$ si ha (ricordando che $(\lambda x) \cdot y = \bar{\lambda}(x \cdot y)$):

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^n x_i e^i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k e^k \right) = \sum_{i,k} \bar{x}_i y_k e^i \cdot e^k = \sum_{i,k} \bar{x}_i y_k \delta_{ik} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k \equiv x^\dagger y \quad (15)$$

Dunque, in termini delle coordinate, il prodotto scalare di due vettori $x, y \in V$ è proprio il prodotto scalare $x^\dagger y$ che abbiamo precedentemente introdotto in \mathbb{C}^n . Riassumendo, *ogni spazio vettoriale V di dimensione n con un qualunque prodotto scalare può essere pensato come una rappresentazione di \mathbb{C}^n con il prodotto scalare $x^\dagger y$.*

Esercizi:

1. Verificare che le coordinate x_i di un vettore $x \in V$ rispetto a una base ortonormale e^i sono date da $x_i = e^i \cdot x$.
2. Costruire una base ortonormale per lo spazio $\mathcal{M}(2, 2)$ col prodotto scalare $A \cdot B = \text{Tr} A^\dagger B$.
3. Costruire una base ortonormale per lo spazio dei polinomi $P_N(\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (serie di Fourier troncate all'ordine N) col prodotto scalare $P \cdot Q = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\theta \overline{P(\theta)} Q(\theta)$.
Suggerimento: è sempre possibile scrivere

$$P_N(\cos \theta, \sin \theta) = f_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

4. Dimostrare che, se e^i e f^i sono due basi ortonormali, si ha

$$f^i = \sum_{j=1}^n \overline{U_{ij}} e^j$$

e $U_{ij} = f^i \cdot e^j$ è una matrice unitaria, cioè tale che $U^\dagger U = 1$.

(Nota: il coniugato nella formula è stato messo perché sarà utile in seguito.)

Trasformazioni di coordinate tra basi ortonormali⁷: consideriamo due basi ortonormali, e^i e f^i . Abbiamo appena dimostrato che $f^i = \sum_{j=1}^n \overline{U_{ij}} e^j$ con $U_{ij} = f^i \cdot e^j$. Inoltre U è una matrice unitaria, $U^\dagger U = 1$. Vediamo ora come si trasformano le coordinate di un vettore x . Nella base e^i si ha $x = \sum_i x_i e^i$ con $x_i = e^i \cdot x$. Nella base f^i si avrà $x = \sum_i x'_i f^i$ e

$$x'_i = f^i \cdot x = \left(\sum_{j=1}^n \overline{U_{ij}} e^j \right) \cdot x = \sum_{j=1}^n U_{ij} (e^j \cdot x) = \sum_{j=1}^n U_{ij} x_j \quad \Rightarrow \quad x' = Ux \quad (16)$$

Dunque le coordinate nella nuova base si ottengono applicando alle coordinate nella vecchia base la trasformazione unitaria U .

Esercizio: verificare che il prodotto scalare di due vettori espresso in termini delle loro coordinate, $x^\dagger y$, non dipende dalla scelta della base, purché ortonormale.

⁷Come al solito, ci restringiamo alle basi ortonormali per semplicità, ma formule analoghe possono essere derivate per basi qualsiasi.

Operatori lineari e matrici

Un operatore lineare su uno spazio vettoriale⁸ V è una funzione $A : V \rightarrow V$ tale che, $\forall x, y \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}A(x + y) &= A(x) + A(y) \\ A(\lambda x) &= \lambda A(x)\end{aligned}$$

D'ora in poi utilizziamo la notazione Ax invece di $A(x)$ per semplicità.

Dati due operatori lineari A e B e un numero complesso λ , possiamo definire⁹ gli operatori $A + B$ e λA come

$$\begin{aligned}(A + B)x &\equiv Ax + Bx \\ (\lambda A)x &\equiv \lambda(Ax)\end{aligned}$$

Possiamo inoltre definire l'operatore prodotto AB come $ABx = A(Bx)$; quindi possiamo definire l'operatore $A^2 = AA$ e per iterazione l'operatore $A^n = AA^{n-1}$.

Esercizi:

1. Verificare che $Ix = x$ e $Ox = 0$, $\forall x \in V$, sono operatori lineari per qualunque spazio vettoriale V .
2. Verificare che gli operatori $A + B$, λA e AB sono effettivamente operatori lineari.
3. Verificare che l'insieme degli operatori A su uno spazio vettoriale V con le operazioni di somma e prodotto per un numero complesso definite sopra è uno spazio vettoriale complesso (suggerimento: utilizzare come operatore nullo l'operatore O definito nell'esercizio 1).

Esercizio (banale): verificare che i seguenti operatori sono operatori lineari.

1. $y = Ax$ con $y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j$, dove A_{ij} è una matrice complessa $n \times n$ e $x \in \mathbb{C}^n$.
2. $\mathcal{P}_y x = \frac{y \cdot x}{y \cdot y} y$ dove $y \in V$ è un vettore fissato (\mathcal{P}_y è detto proiettore su y).
3. $(Df)(z) = \frac{d}{dz} f(z)$, $f(z) \in V$ dove V è lo spazio delle funzioni analitiche in un dominio \mathcal{D} del piano complesso.
4. $(Kf)(x) = \int_a^b dy K(x, y) f(y)$ dove $K(x, y)$ è una funzione continua e $f \in V = C[a, b]$.

Abbiamo appena visto che una matrice complessa $n \times n$ può essere pensata come un operatore lineare sullo spazio vettoriale \mathbb{C}^n . Sappiamo anche che lo spazio delle matrici complesse $n \times n$ è uno spazio vettoriale. Mostriamo ora che lo spazio (vettoriale) degli operatori lineari che agiscono su uno spazio vettoriale complesso di dimensione n è isomorfo allo spazio delle matrici complesse $n \times n$ ovvero, in termini più semplici, che

ogni operatore lineare su uno spazio V di dimensione n è rappresentato da una matrice sullo spazio \mathbb{C}^n delle coordinate dei vettori di V .

Infatti, consideriamo una base ortonormale¹⁰ e^i di V . Per ogni $x \in V$ si ha

$$y = Ax = A \sum_{i=1}^n x_i e^i = \sum_{i=1}^n x_i A e^i$$

⁸Consideriamo solo operatori lineari da uno spazio V in sé stesso per semplicità.

⁹Un operatore è definito dalla sua azione su un generico vettore x : cioè, se per ogni vettore x sappiamo costruire il vettore Ax , l'operatore A è completamente determinato.

¹⁰Il ragionamento può essere ripetuto per una base qualunque di V , ma è leggermente più complicato. Per comodità consideriamo direttamente una base ortonormale (tanto esiste sempre!).

Decomponendo y nelle sue componenti $y_i = e^i \cdot y$, si ha

$$y_i = e^i \cdot \sum_{j=1}^n x_j A e^j = \sum_{j=1}^n x_j e^i \cdot A e^j \quad (17)$$

Definiamo la matrice $A_{ij} = e^i \cdot A e^j$. Allora l'azione dell'operatore A su un vettore $x \in V$ si rappresenta, in termini di coordinate, come

$$y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \quad (18)$$

Dunque, *ad ogni operatore lineare A su uno spazio vettoriale V corrisponde la matrice $A_{ij} = e^i \cdot A e^j$ che agisce sullo spazio \mathbb{C}^n delle coordinate dei vettori di V , come volevamo dimostrare.*

Esercizi:

1. Mostrare che all'operatore $A + B$ corrisponde la matrice $A_{ij} + B_{ij}$.
2. Mostrare che all'operatore λA corrisponde la matrice λA_{ij} .
3. Mostrare che all'operatore AB corrisponde la matrice prodotto righe per colonne di A_{ij} e B_{ij} .
4. Sia e^i una base ortonormale dello spazio V e $\mathcal{P}_i \equiv \mathcal{P}_{e^i}$ il proiettore sul vettore e^i della base. Scrivere esplicitamente la matrice che rappresenta \mathcal{P}_i .

Trasformazioni tra basi ortonormali: vediamo come si trasforma la matrice che rappresenta l'operatore A nel passaggio tra due basi ortonormali e^i e $f^i = \sum_{j=1}^n \overline{U_{ij}} e^j$. Abbiamo già visto che le coordinate dei vettori si trasformano con la matrice U , ovvero, se x' sono le coordinate nella base f^i e x quelle nella base e^i , $x' = Ux$. Nella base e^i , la matrice che rappresenta A è data da¹¹ $A_{ij} = e^i \cdot A e^j$. La matrice A'_{ij} che rappresenta A nella base f^i è quindi data da

$$A'_{ij} = f^i \cdot A f^j = \left(\sum_{k=1}^n \overline{U_{ik}} e^k \right) \cdot A \left(\sum_{l=1}^n \overline{U_{jl}} e^l \right) = \sum_{k,l}^{1,n} U_{ik} (e^k \cdot A e^l) \overline{U_{jl}} = \sum_{k,l}^{1,n} U_{ik} A_{kl} U_{lj}^\dagger \quad (19)$$

ovvero $A' = U A U^\dagger$.

Esercizi:

1. Ricordando che nel cambiamento di base si ha $x' = Ux$ e $A' = U A U^\dagger$, verificare che $y = Ax$ si trasforma in $y' = U y$.
2. Verificare che $\forall x, y \in V$ la quantità $y \cdot Ax$ (detta *elemento di matrice* dell'operatore A tra i vettori x e y) non cambia nel cambiamento di base, ovvero che, in coordinate, $y^\dagger A x = y'^\dagger A' x'$.

¹¹Attenzione: se la base **non** è ortonormale, questa espressione non è corretta.

Operatore aggiunto: dato un operatore A , si definisce l'operatore aggiunto A^\dagger imponendo che, per ogni coppia di vettori $x, y \in V$, si abbia, dato un prodotto scalare su V ,

$$x \cdot Ay = A^\dagger x \cdot y \quad (20)$$

Verifichiamo che l'operatore A^\dagger è rappresentato dalla matrice $(A^\dagger)_{ij}$. Infatti, la matrice B_{ij} che rappresenta l'operatore A^\dagger è data da

$$B_{ij} = e^i \cdot A^\dagger e^j = \overline{A^\dagger e^j \cdot e^i} = \overline{e^j \cdot Ae^i} = \overline{A_{ji}} = (A^\dagger)_{ij} \quad (21)$$

Operatore inverso: sia dato un operatore A tale che l'equazione $y = Ax$ ammette una ed una sola soluzione. Allora l'operatore A è detto invertibile e si definisce l'operatore inverso A^{-1} in modo che

$$A^{-1}A = I \quad (22)$$

dove I è l'operatore unità tale che $Ix = x, \forall x \in V$. Dal momento che l'operatore I è rappresentato dalla matrice 1 e che il prodotto di due operatori è rappresentato dal prodotto delle matrici corrispondenti, è evidente che A^{-1} è rappresentato dalla matrice inversa di A .

Operatori hermitiani e unitari: un operatore hermitiano è definito dalla condizione $A^\dagger = A$ ed è rappresentato da una matrice hermitiana. Un operatore unitario è definito dalla condizione $U^\dagger = U^{-1}$ ed è rappresentato da una matrice unitaria.

Esercizi: (ricordare che $\det AB = \det A \det B$ e $\text{Tr}ABC = \text{Tr}BCA$)

1. Mostrare che una matrice unitaria ha $|\det U| = 1$ e una matrice hermitiana ha $\det A \in \mathbb{R}$.
2. Mostrare che se U è unitaria si ha $\text{Tr}(U^\dagger AU) = \text{Tr}A$.
3. Mostrare che l'operatore \mathcal{P}_i è hermitiano e non è invertibile.

Autovalori ed autovettori di un operatore

Un numero complesso λ è detto autovalore dell'operatore A se l'equazione

$$Ax = \lambda x \quad (23)$$

ha delle soluzioni $x \in V$ diverse da 0. L'insieme degli autovalori di un operatore A è detto *spettro* dell'operatore. Se λ è un autovalore di A , un vettore $x \neq 0$ tale che $Ax = \lambda x$ è detto autovettore corrispondente all'autovalore λ .

Dal momento che ogni operatore è rappresentato da una matrice complessa, d'ora in poi considereremo direttamente la rappresentazione matriciale degli operatori supponendo di aver fissato una base¹² nello spazio V .

Autovalori: l'equazione $Ax = \lambda x$ può essere riscritta come $(A - \lambda I)x = 0$. Questa equazione ha una soluzione x non nulla se e solo se $\det(A - \lambda I) = 0$. Gli autovalori sono quindi le soluzioni dell'equazione $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. $P(\lambda)$ è un polinomio di grado n ed è detto *polinomio caratteristico* della matrice A . L'equazione $P(\lambda) = 0$ ammette sempre n soluzioni complesse: dunque, un operatore A che agisce su uno spazio di dimensione n ha sempre n autovalori complessi (alcuni eventualmente coincidenti). Diremo che l'autovalore λ_i ha molteplicità m_i se è soluzione di $P(\lambda) = 0$ con molteplicità m_i . Dunque, se ci sono k autovalori distinti, si avrà $\sum_{i=1}^k m_i = n$.

Autovettori: ad ogni autovalore λ_i corrisponde almeno un autovettore x^i , e lo stesso autovettore non può corrispondere a due autovalori diversi. E' possibile inoltre mostrare (vedi gli esercizi che seguono) che autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Dunque, se gli autovalori sono tutti distinti, ci saranno n autovettori distinti linearmente indipendenti, per cui gli autovettori di A sono una base per lo spazio V (in generale *non ortonormale*). In questo caso si dice che l'operatore A è *diagonalizzabile*. Se invece ci sono autovalori con molteplicità $m > 1$, possono darsi due casi:

1. Per ogni autovalore di molteplicità $m > 1$ è possibile trovare m autovettori linearmente indipendenti. In questo caso gli autovettori di A costituiscono ancora una base per lo spazio e l'operatore è diagonalizzabile.
2. Per almeno uno degli autovalori di molteplicità $m > 1$ non è possibile trovare m autovettori linearmente indipendenti. In questo caso l'operatore non è diagonalizzabile.

Esercizio (facoltativo): dimostrare che autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti seguendo i passaggi elencati.

1. Dimostrare che un autovettore x di A , corrispondente ad un autovalore λ , non può essere combinazione lineare di altri autovettori x^i linearmente indipendenti corrispondenti ad autovalori $\lambda_i \neq \lambda$.
Suggerimento: scrivere, per assurdo, $x = \sum_i c_i x^i$ e confrontare i due membri dell'uguaglianza $Ax = \lambda x$.
2. Dimostrare che due autovettori corrispondenti ad autovalori distinti non possono essere proporzionali.
3. Completare la dimostrazione per induzione.

¹²Osserviamo ancora che per rappresentare gli operatori come matrici non è necessario considerare una base ortonormale, e dunque non è necessario neanche introdurre un prodotto scalare sullo spazio V . Tuttavia, salvo diversamente specificato, considereremo sempre una base ortonormale per semplicità.

Esercizi:

1. Calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.
2. Calcolare gli autovalori e gli autovettori dell'operatore \mathcal{P}_i .
3. Si consideri lo spazio dei polinomi di secondo grado $P_2(z) = a + bz + cz^2$ con $c \neq 0$ e l'operatore lineare $AP(z) = \frac{dP}{dz} = b + 2cz$. Calcolare autovalori e autovettori di questo operatore. Verificare che non è diagonalizzabile. Suggerimento: in questo caso non conviene assolutamente cercare di rappresentare A su una base ortonormale.
4. Si consideri lo spazio dei polinomi $P_1(\cos \theta, \sin \theta) = f + a \cos \theta + b \sin \theta$ e l'operatore lineare $AP(\theta) = P(\frac{\pi}{2} - \theta)$. Calcolare autovalori e autovettori di A e verificare che A è diagonalizzabile.
5. Sullo stesso spazio, considerare l'operatore K definito da

$$(KP)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \cos(\theta - \psi) P(\psi)$$

Calcolare autovettori ed autovalori di K e verificare che è diagonalizzabile.
Suggerimento: utilizzare la relazione $\cos(\theta - \psi) = \cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi$.

Diagonalizzazione di un operatore e cambiamento di base: la rappresentazione di un operatore in forma matriciale dipende, come abbiamo visto, dalla base che si è scelta nello spazio V . Abbiamo detto che un operatore è diagonalizzabile se i suoi autovettori costituiscono una base per lo spazio V : questo vuol dire che nella base degli autovettori l'operatore A è rappresentato da una matrice diagonale. Dal momento che un cambiamento di base nello spazio V induce un corrispondente cambiamento di coordinate, la diagonalizzazione dell'operatore A corrisponde a un cambiamento di coordinate nello spazio V .

Come caso particolare, possiamo considerare un operatore A i cui autovettori costituiscono una base ortonormale dello spazio V ¹³. L'operatore A sarà rappresentato da una matrice A_{ij} in una certa base ortonormale e^i . Il passaggio dalla base e^i alla base x^i degli autovettori di A è una trasformazione fra basi ortonormali, quindi la matrice D che rappresenta A nella base x^i sarà data da

$$D = UAU^\dagger \quad (24)$$

dove $U_{ij} = x^i \cdot e^j$. La matrice D è diagonale, perchè rappresenta A nella base dei suoi autovettori: dunque, la matrice A è una matrice che può essere diagonalizzata da una matrice unitaria U .

Esercizi:

1. Verificare che la matrice U^\dagger ha come righe le coordinate degli autovettori x^i nella base e^i , cioè che $U_{ij}^\dagger = (x^i)_j$.
2. Verificare che la matrice $\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$, ha autovalori distinti ed autovettori ortogonali pur non essendo hermitiana.

¹³Questa ipotesi in generale non è verificata, ma lo è ad esempio per gli operatori hermitiani, come discuteremo tra breve.

Operatori hermitiani

Gli operatori hermitiani, cioè tali che $A^\dagger = A$, hanno una serie di proprietà di notevole interesse per la fisica¹⁴, per cui meritano una trattazione approfondita. Ci interessa mostrare due proprietà fondamentali:

1. Un operatore hermitiano ha autovalori reali.
2. Gli autovettori di un operatore hermitiano possono essere scelti in modo da costituire una base ortonormale dello spazio V .

Come abbiamo già visto, una conseguenza interessante della seconda proprietà è che un operatore hermitiano può essere diagonalizzato con una trasformazione unitaria.

Esercizi:

1. Dimostrare che un operatore hermitiano A ha autovalori reali (suggerimento: sia λ un autovalore e x un autovettore corrispondente. Utilizzare la relazione $x \cdot Ax = Ax \cdot x$).
2. Dimostrare che, se λ e μ sono due autovalori distinti di un operatore hermitiano A e x, y sono gli autovettori corrispondenti, si ha $x \cdot y = 0$. (Suggerimento: utilizzare una relazione simile alla precedente.)
3. Dimostrare che, se x è un autovettore di un operatore hermitiano A , il sottospazio ortogonale a x è invariante sotto l'azione di A , cioè che, se $x \cdot y = 0$, anche $x \cdot Ay = 0$.

Per dimostrare¹⁵ che gli autovettori di un operatore hermitiano formano una base ortogonale si sfrutta la proprietà dimostrata nell'esercizio 3. Consideriamo un primo autovalore λ_1 e un autovettore corrispondente x^1 che esistono sicuramente. Dal momento che l'insieme dei vettori ortogonali a x^1 si trasforma in sé stesso sotto l'azione dell'operatore A , possiamo considerare la restrizione dell'operatore A su questo sottospazio, che è ancora un operatore hermitiano $A^{(2)}$ su uno spazio di dimensione $n - 1$. L'operatore $A^{(2)}$ avrà almeno un autovalore λ_2 e un autovettore corrispondente x^2 che per costruzione è ortogonale a x^1 . Iterando il procedimento si ottengono n autovettori ortogonali di A che formano quindi una base.

Esercizi:

1. Calcolare autovalori e autovettori dell'operatore $AP(\theta) = i \frac{dP}{d\theta}$ sullo spazio dei polinomi $P(\theta) = f + a \cos \theta + b \sin \theta$ con il prodotto scalare $P \cdot Q = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\theta \overline{P(\theta)} Q(\theta)$. Mostrare che gli autovettori di A sono ortogonali.
2. Dimostrare che l'operatore $AP(\theta) = i \frac{dP}{d\theta}$ sullo spazio $P(\theta) = P_N(\cos \theta, \sin \theta)$ è hermitiano. Suggerimento: scrivere la matrice che rappresenta A e verificare che è hermitiana, oppure utilizzare direttamente la definizione di operatore aggiunto e integrare per parti.
3. Dimostrare che l'operatore $(Kf)(x) = \int_a^b dy K(x, y) f(y)$ dove $K(x, y)$ è una funzione continua e $f \in V = C[a, b]$ è hermitiano rispetto al prodotto scalare $f \cdot g = \int_a^b dx f(x) \overline{g(x)}$ se $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

¹⁴Ad esempio, rappresentano le grandezze osservabili in meccanica quantistica.

¹⁵Per una discussione più dettagliata si può consultare un qualunque libro di algebra lineare.

Spazio vettoriale delle matrici hermitiane

Le matrici hermitiane $n \times n$ formano uno spazio vettoriale reale. Infatti, è facile vedere che se A e B sono due matrici hermitiane anche $aA + bB$ è hermitiana se a e b sono coefficienti reali (ma non se sono complessi).

Esercizi:

1. Verificare che la dimensione dello spazio delle matrici hermitiane $n \times n$ è n^2 .
Suggerimento: contare quanti numeri reali servono per specificare completamente una matrice hermitiana $n \times n$.
2. Verificare che le matrici di Pauli $\sigma_0 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sono una base per lo spazio delle matrici hermitiane 2×2 ortonormale rispetto al prodotto scalare $A \cdot B = \frac{1}{2} \text{Tr} AB$.
3. Dedurre dall'esercizio precedente che ogni matrice A hermitiana 2×2 si può scrivere come $A = \sum_{i=0}^3 a_i \sigma_i$, dove $a_i = \frac{1}{2} \text{Tr} A \sigma_i$.

Contenuto delle lezioni

19/04/04

Lo spazio lineare astratto e le sue strutture. La struttura algebrica sui complessi. La struttura geometrica caratterizzata dal prodotto scalare. Definizione di norma e sue proprietà. Dimostrazione della disuguaglianza di Schwartz e della disuguaglianza triangolare. Struttura metrica e definizione di distanza. Struttura analitica e definizione di limite di una successione. Successioni di Cauchy e condizione di completezza dello spazio. Definizione di spazio di Banach e di spazio di Hilbert. Isomorfismi ed isometrie tra spazi lineari. Cenni alle rappresentazioni di spazi astratti. Discussione di esempi: lo spazio V_N della N -ple ordinate di numeri complessi, lo spazio dei polinomi di grado 2 di una variabile complessa come spazio V_3 con calcolo della matrice che rappresenta l'operazione di derivata d/dz . Definizione dello spazio l_p . Lo spazio l_2 : dimostrazione che è lineare. Definizione del prodotto scalare in l_2 e dimostrazione che esiste per ogni coppia di vettori.

21/04/04

Definizione dello spazio $L_2(a, b)$. Dimostrazione che $L_2(a, b)$ è uno spazio lineare. Definizione del prodotto scalare in $L_2(a, b)$ e dimostrazione che esiste per ogni coppia di vettori. Distanza tra funzioni di $L_2(a, b)$ ed indistinguibilità tra funzioni che differiscono soltanto su un sottinsieme dell'intervallo (a, b) di misura nulla. Cenni al problema della completezza di $L_2(a, b)$ ed all'integrale di Lebesgue. Definizione di funzioni ortogonali e di funzioni linearmente indipendenti. Indipendenza lineare di p vettori $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)}\}$ in uno spazio astratto. Dimostrazione del criterio numerico $\det(v^{(j)}, v^{(k)}) \neq 0$ per stabilire la loro lineare indipendenza. Metodo di Gram-Schmidt di ortonormalizzazione di p vettori linearmente indipendenti (struttura triangolare e calcolo esplicito). Definizione di dimensione di uno spazio lineare nel caso finito-dimensionale. Definizione di base di uno spazio lineare finito-dimensionale. Espansione di un generico vettore in una base. Il problema del calcolo delle componenti di un vettore in una base generica. Definizione di metrica associata ad una base e sue proprietà nel caso finito-dimensionale. Definizione di base ortonormale e espressione della metrica associata a questa base. Calcolo delle componenti di un generico vettore in una base ortonormale. Espressione del prodotto scalare (v, u) in funzione delle componenti dei due vettori v e u . Espressione della norma $\|v\|$ del vettore v in funzione delle sue componenti.

28/04/04

Definizione di sottospazio finito-dimensionale di uno spazio di Hilbert e della distanza tra un generico vettore u e questo sottospazio. Dimostrazione della disuguaglianza di Bessel. Definizione di base di uno spazio lineare con dimensione infinita. Definizione di sottospazio infinito-dimensionale con esempi. Definizione di spazio di Hilbert separabile. Definizione di limite forte di una successione di vettori. Definizione di limite debole di una successione di vettori. Distinzione tra limite forte e limite debole in uno spazio infinito-dimensionale. Dimostrazione che l'esistenza del limite forte implica quella del limite debole. Esempio di esistenza del limite debole ma non di quella del limite forte. Rappresentazione di un vettore generico u in una base ortonormale $\{e^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ in uno spazio di Hilbert e convergenza della serie $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{(n)}$. Costruzione di un isomorfismo tra lo spazio di Hilbert e lo spazio l_2 mediante una base ortonormale dello spazio di Hilbert. Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt delle potenze $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ nello spazio $L_2(-1, 1)$ e polinomi di Legendre.

30/04/04

Insieme delle funzioni lineari $\mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$ definite su uno spazio lineare \mathcal{H} a valori in un altro spazio lineare $\hat{\mathcal{H}}$ e loro struttura di spazio lineare. Funzioni lineari limitate e definizione di norma di una funzione. Funzioni continue e funzioni limitate e loro equivalenza. Dominio di definizione di una funzione lineare. Esempi di dominio coincidente con l'intero spazio \mathcal{H} e di dominio ovunque denso in \mathcal{H} . Definizione di nucleo di una funzione lineare e di funzione inversa. Dimostrazione che condizione necessaria e sufficiente che la funzione inversa esista è che il nucleo contenga solo il vettore nullo. Forme lineari e funzionali lineari.

05/05/04

Spazio delle forme lineari definite su V_N come spazio lineare duale V_N^* . Costruzione dell'isomorfismo tra V_N e V_N^* . Base ortonormale dello spazio duale V_N^* come duale di una data base ortonormale di V_N . Espansione di una forma nella base duale. Norma di una forma lineare e sua espressione mediante l'isomorfismo con V_N . Funzionali lineari come forme su uno spazio infinito-dimensionale. Funzionali limitati e continui. Teorema di Fisher–Ritz della rappresentazione di un funzionale lineare (senza dimostrazione). Esempi di funzionali limitati e non limitati su uno spazio di Hilbert e sullo spazio $L_2(-1, 1)$. Definizione di operatore lineare. Operatori limitati, compatti e non limitati. Definizione di prodotto di operatori lineari e loro algebra non commutativa. Definizione di commutatore e di anti-commutatore di due operatori lineari.

07/05/04

Regole algebriche per il calcolo di commutatori di operatori. Regola di Leibnitz ed identità di Jacobi. Operatori integrali in $L_2(a, b)$ e loro analogia con le matrici come operatori su V_N e su l_2 . Definizione di nucleo di un operatore integrale su $L_2(a, b)$. Operatori di moltiplicazione ed operatori differenziali di ordine M su $L_2(a, b)$. Algebra degli operatori differenziali e regole di calcolo dei loro commutatori.

14/05/04

Definizione di operatore Hermitiano coniugato e suo dominio di definizione nel caso di spazi lineari infinito-dimensionali. Operatori limitati Hermitiani ed operatori non limitati Hermitiani ed autoaggiunti. Esempi di operatori non limitati su $L_2(a, b)$ Hermitiani ma non autoaggiunti.

19/05/04

Esempi in meccanica quantistica di operatori differenziali non limitati e Hermitiani. Operatori differenziali con condizioni al contorno di Dirichlet e di periodicità. Operatori di Sturm–Liouville regolari e singolari. Verifica esplicita dell'Hermitianità degli operatori di Sturm–Liouville regolari. Dominio di definizione di un operatore di Sturm–Liouville regolare con condizioni al contorno di Dirichlet, di Neumann e di periodicità e dimostrazione che è autoaggiunto.

21/05/04

Il problema di Sturm–Liouville come problema agli autovalori. Soluzione di un problema di Sturm–Liouville per costruire una base ortonormale in $L_2(a, b)$. Costruzione esplicita di una base ortonormale in $L_2(c, d)$ a partire da una base ortonormale nota in $L_2(a, b)$. Basi ortonormali negli spazi $L_2(-1, 1)$, $L_2(0, +\infty)$ e $L_2(-\infty, +\infty)$. I polinomi ortogonali di Legendre: il corrispondente problema di Sturm–Liouville, sue autofunzioni ed autovalori, la funzione generatrice, la formula di Rodriguez, la relazione di ricorrenza.

26/05/04

I polinomi ortogonali di Laguerre: il corrispondente problema di Sturm–Liouville, sue autofunzioni ed autovalori, la funzione generatrice, la formula di Rodriguez, la relazione di ricorrenza. I polinomi ortogonali di Hermite: il corrispondente problema di Sturm–Liouville, sue autofunzioni ed autovalori, la funzione generatrice, la formula di Rodriguez, la relazione di ricorrenza. La base ortonormale di Fourier: il corrispondente problema di Sturm–Liouville, calcolo delle sue autofunzioni ed autovalori, Costruzione della base di Fourier in $L_2(a, b)$. Calcolo esplicito del limite per $a \rightarrow -\infty$ e $b \rightarrow +\infty$ dell'espansione in serie di Fourier di una funzione di $L_2(a, b)$. Definizione di trasformata ed antitrasformata di Fourier di una funzione di $L_2(-\infty, +\infty)$. Dimostrazione che la trasformata di Fourier lascia il prodotto scalare invariante.

28/05/04

La trasformata di Fourier nello spazio $L_1(-\infty, +\infty)$. Esempi di funzioni che appartengono allo spazio $L_1(-\infty, +\infty)$ ma non allo spazio $L_2(-\infty, +\infty)$ e viceversa. Trasformazione delle proprietà di parità e di realtà di una funzione di $L_2(-\infty, +\infty)$ con la trasformazione di Fourier. Definizione di prodotto di convoluzione e sua trasformazione di Fourier. Trasformazione di Fourier di operatori lineari integrali e differenziali su $L_2(-\infty, +\infty)$.

09/06/04

Definizione dello spazio funzionale di Schwartz. Funzionali lineari continui definiti sullo spazio di Schwartz. Successioni convergenti di funzioni nello spazio di Schwartz. Funzionali regolari e loro rappresentazione. Esempi in fisica di funzionali non regolari: meccanica impulsiva, densita' di carica (o di massa) di una particella puntiforme. Definizione del funzionale derivata di un funzionale lineare regolare. Definizione della trasformata di Fourier di un funzionale regolare. Definizione di funzione generalizzata o distribuzione come limite di una successione di funzionali regolari. Successioni equivalenti. Definizione della distribuzione di Dirac e sua rappresentazione come limite di successioni di funzionali regolari. Esempi espliciti di tali successioni.

11/06/04

Distribuzione di Dirac e uso del suo simbolo $\delta(x - x_0)$. Proprieta' di realta' e parita' della distribuzione di Dirac. Proprieta' di calcolo con la distribuzione di Dirac. Derivate della distribuzione di Dirac. Trasformata di Fourier della distribuzione di Dirac e sua rappresentazione come integrale di Fourier. Primitiva della distribuzione di Dirac e definizione di distribuzione di Heaviside. Esempi di uso della distribuzione di Heaviside nel calcolo differenziale su funzioni discontinue.

16/06/04

La distribuzione di Dirac nello spazio delle funzioni discontinue. Definizione della trasformazione di Fourier della distribuzione di Heaviside attraverso la regolarizzazione dell' integrale di Fourier. Studio della parte reale e della parte immaginaria della trasformata di Fourier della distribuzione di Heaviside. La distribuzione valor principale e le distribuzioni $\delta^\pm(x - x_0)$. Derivazione delle formule di Plemelj. Connessione tra l'operatore unita' nello spazio $L_2(a, b)$ e la distribuzione di Dirac e suo uso nella relazione di completezza di una base ortonormale. Uso della distribuzione di Dirac nella risoluzione di equazioni differenziali lineari omogenee e non omogenee. Applicazione al moto dell'oscillatore armonico: definizione e calcolo della funzione di Green ritardata.

18/06/04

Il problema del transiente per l'oscillatore armonico forzato. Definizione e calcolo della funzione di trasferimento per mezzo della funzione di Green ritardata. Soluzione esplicita del problema del transiente e trasformata di Fourier. Richiami di meccanica analitica nella formulazione di Hamilton e parentesi di Poisson: moto di una particella in un potenziale sulla retta. Riformulazione di questo problema nella meccanica quantistica nella rappresentazione di Schrödinger. Equazione di Schrödinger e sue soluzioni stazionarie. Equazione integrale per le soluzioni stazionarie con energia positiva ottenuta con la funzione di Green ritardata dell'oscillatore armonico. Definizione dei coefficienti di riflessione e trasmissione e loro espressione integrale implicita. Espressione dei coefficienti di riflessione e trasmissione nell'approssimazione di Born.

Contenuto delle Esercitazioni ed Esercizi d'esame

Esercitazione I

Distribuita il 23/04/2004, correzione il 26/04/2004

1. Mostrare che, se $f(x) = x^n$ e $g(x) = \frac{df}{dx}$ sono definite in $L_2[-1, 1]$, si ha $(f, g) = 0$.
2. Ortonormalizzare le funzioni $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = xe^{-x}$ in $L_2[0, \infty)$.
3. Calcolare i primi tre polinomi di Legendre $P_0(x)$, $P_1(x)$ e $P_2(x)$ ortogonalizzando le funzioni 1 , x e x^2 in $L_2[-1, 1]$ e ricordando che $(P_n, P_n) = 2/(2n+1)$.
4. Trovare una funzione $f(x)$ ortogonale in $L_2[0, \pi]$ a $a(x) = x$ e $b(x) = \cos x$.
5. Siano $u = \left\{ \left(\frac{i}{4}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ e $v = \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty}$ in l_2 . Calcolare $|u|^2$ e (u, v) .

Soluzioni Esercitazione I

1. $(f, g) = \int_{-1}^1 dx x^n n x^{n-1} = 0$.
2. Usando il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt: $h_1 = f$ e $h_2 = g - \frac{(f, g)}{(f, f)} f$ sono ortogonali. Poichè $(f, f) = \int_0^{\infty} dx e^{-2x} = \frac{1}{2}$; $(g, g) = \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-2x} = \frac{1}{4}$; $(f, g) = \int_0^{\infty} dx x e^{-2x} = \frac{1}{4}$ si ha $h_2 = (x - \frac{1}{2}) e^{-x}$. Dato che $(h_2, h_2) = \frac{1}{8}$ si ottiene quindi che le due funzioni $e_1 = \sqrt{2}h_1$, $e_2 = 2\sqrt{2}h_2$ sono ortonormali come richiesto.
3. Seguendo la stessa procedura dell'esercizio precedente si ottiene $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ e $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.
4. Cercando ad esempio $f(x)$ nella forma $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, si risolvono le due equazioni $(f, a) = \frac{\pi^2}{12}(6c_0 + 4\pi c_1 + 3\pi^2 c_2) = 0$ e $(f, b) = -2(c_1 + \pi c_2) = 0$. Il coefficiente c_0 può essere scelto a piacere purchè non nullo (ad esempio, imponendo $(f, f) = 1$).
5. $|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} - 1 = \frac{1}{15}$; $(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{4^n n!} = e^{i/4} - 1 = \cos \frac{1}{4} - 1 + i \sin \frac{1}{4}$.

Esercitazione II

Distribuita il 30/04/2004, correzione il 3/5/2004

1. Calcolare $\exp(i\alpha\sigma_2)$, dove $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Calcolare $\tanh A$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ (suggerimento: calcolare A^2).
3. Calcolare al terzo ordine in ϵ la matrice $\exp(i\epsilon(\sigma_2 - \sigma_3))$ utilizzando le proprietà delle matrici di Pauli.
4. Se A_{ij} sono gli elementi di matrice della matrice $n \times n$, mostrare che $\mathcal{F}_{ij}(A) = A_{ij}$ è un funzionale lineare sullo spazio delle matrici $n \times n$. Dato il prodotto scalare $(A, B) = \text{Tr} A^\dagger B$, identificare il vettore F_{ij} tale che $\mathcal{F}_{ij}(A) = (F_{ij}, A)$.
5. Mostrare che $\mathcal{F}(P) = \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta}$ è un funzionale lineare sullo spazio dei polinomi trigonometrici $P(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$.
6. Dato il funzionale $\mathcal{F}(P)$ definito nell'esercizio precedente, e dato il prodotto scalare $(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \overline{P(\theta)} Q(\theta)$, trovare il vettore F tale che $\mathcal{F}(P) = (F, P)$.

Soluzioni Esercitazione II

:

1. Usando $(\sigma_2)^2 = 1$ si ha $(\sigma_2)^{2n} = 1$ e $(\sigma_2)^{2n+1} = \sigma_2$.

$$e^{i\alpha\sigma_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\sigma_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sigma_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha \sigma_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

2. Si verifica facilmente che $A^2 = 0$ da cui $A^n = 0$ per $n \geq 2$. Dunque $\tanh A = A + O(A^3) = A$.
3. Usando l'anticommutatività delle matrici σ si ha $(\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2 - \{\sigma_2, \sigma_3\} = 2$ e quindi $(\sigma_2 - \sigma_3)^3 = 2(\sigma_2 - \sigma_3)$. Dunque

$$e^{i\epsilon(\sigma_2 - \sigma_3)} = 1 + i\epsilon(\sigma_2 - \sigma_3) - \epsilon^2 - \frac{i\epsilon^3}{3}(\sigma_2 - \sigma_3) + O(\epsilon^4) = \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon - \epsilon^2 + \frac{i\epsilon^3}{3} & \epsilon - \frac{\epsilon^3}{3} \\ -\epsilon + \frac{\epsilon^3}{3} & 1 + i\epsilon - \epsilon^2 - \frac{i\epsilon^3}{3} \end{pmatrix} + O(\epsilon^4)$$

4. La linearità di \mathcal{F}_{ij} si mostra facilmente. Il vettore F_{ij} ha componenti $(F_{ij})_{kl} = \delta_{ki}\delta_{lj}$, ovvero le componenti sono tutte nulle tranne la componente $(F_{ij})_{ij} = 1$.
5. La linearità di \mathcal{F} segue facilmente dalle proprietà di linearità dell'integrale e della derivata.
6. Integrando per parti si ha $\mathcal{F}(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta P(\theta) = (\sin \theta, P(\theta))$. Dunque $F = \sin \theta$.

Esercitazione III

(Esercizi di preparazione per l'esonero del 12/05/2004)

Distribuita il 7/5/2004, correzione il 10/5/2004

Nel seguito, le matrici σ_i sono le matrici di Pauli, e con “polinomio trigonometrico $P(\theta)$ di grado N ” intendiamo una funzione della forma $P(\theta) = f_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. Il prodotto scalare di due polinomi trigonometrici è definito da: $(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \overline{P(\theta)} Q(\theta)$.

1. Calcolare al quarto ordine in ϵ la matrice $A_\epsilon = [1 - i\epsilon(\sigma_1 + \sigma_3)]^{-1}$.
2. Calcolare $\cos^3(\frac{\pi}{2}A)$, dove $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_1$.
3. Trovare il polinomio trigonometrico $F(\theta)$ tale che il funzionale $\mathcal{F}(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin 3\theta \frac{d^2 \cos \theta P(\theta)}{d\theta^2}$ si rappresenta come $\mathcal{F}(P) = (F, P)$.
4. Calcolare autovalori ed autovettori dell'operatore $(KP)(\theta) = \int_0^{2\pi} d\phi [\sin(2\theta - \phi) + \sin(2\phi - \theta)]P(\phi)$ dove $P(\theta)$ è un polinomio trigonometrico di grado 2.
5. Siano $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ e $v^{(3)}$ i vettori di una base ortormale dello spazio V_3 e sia A l'operatore Hermitiano ed a traccia nulla tale che $Av^{(1)} = v^{(2)}$ e $A^2v^{(1)} = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}$. Determinare la matrice M che rappresenta A in questa base.
6. Sia definito su $L_2(-\pi, \pi)$ il funzionale $F(f) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2(x)f(x)$. Calcolare la norma $\|F\|$ ed almeno due funzioni di $L_2(-\pi, \pi)$ per le quali $F(f) = 0$.
7. Determinare i valori del parametro reale a per i quali la funzione $f(x) = \{\exp[-(1+a)x]\}/(1-ax^2)$ appartiene ad $L_2(0, +\infty)$
8. Determinare i valori del parametro reale a per i quali la funzione $f(x) = \sin(ax)/(1+ax^2)$ appartiene ad $L_2(-1, 1)$.
9. Calcolare $p = (u, Bu)$ sapendo che in una base ortonormale $\{e^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \dots, \infty$ dello spazio di Hilbert \mathcal{H} si ha $u = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n e^{(n)}$ e $Be^{(n)} = (n/4)e^{(n)} + (n-1)e^{(n-1)}$ per $n = 1, 2, \dots, \infty$.

Soluzioni Esercitazione III

1. $A_\epsilon = 1 - 2\epsilon^2 + 4\epsilon^4 + i\epsilon(1 - 2\epsilon^2)(\sigma_1 + \sigma_3) + O(\epsilon^5)$.
2. Poichè $A = U^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U$ con $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, si ha $\cos^3(\frac{\pi}{2}A) = U^\dagger \cos^3(\frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) U = U^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U = \frac{1}{2}(1 - \sigma_1)$.
3. La soluzione si trova integrando due volte per parti.
4. Sia $P(\theta) = f_0 + a_1 \cos(\theta) + a_2 \cos(2\theta) + b_1 \sin(\theta) + b_2 \sin(2\theta)$, allora l'equazione agli autovalori si scrive $\pi[b_2 \cos(\theta) - b_1 \cos(2\theta) - a_2 \sin(\theta) + a_1 \sin(2\theta)] = \lambda P(\theta)$. Risolvendo si trova che $\lambda = 0$ è semplice con autofunzione $P(\theta) = 1$, $\lambda = \pi$ è doppio con autofunzioni $P(\theta) = \cos(\theta) + \sin(2\theta)$ e $P(\theta) = \cos(2\theta) - \sin(\theta)$, $\lambda = -\pi$ è doppio con autofunzioni $P(\theta) = \cos(\theta) - \sin(2\theta)$ e $P(\theta) = \cos(2\theta) + \sin(\theta)$.
5. Sapendo che $M_{ij} = (v^{(i)}, Av^{(j)})$, $\text{Tr}M = 0$ e $M_{ij} = \overline{M_{ji}}$, si trova $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Poichè $|F(f)| \leq \|f\| \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2(x)}$ si ha $\|F\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2(x)} = \sqrt{\pi}$. Dalla formula trigonometrica $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ e ricordando la base ortogonale di Fourier, si ha $F(\sin(x)) = 0$ e $F(\cos(x)) = 0$.
7. Per avere convergenza all'infinito deve essere $a \geq -1$. Inoltre se $a > 0$ la funzione ha due poli in $x = \pm 1/\sqrt{a}$ che danno luogo a singolarità non integrabili. Dunque deve essere $-1 \leq a \leq 0$.
8. Per $a \geq 0$ la funzione non ha poli nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ e l'integrale converge. Per $a < 0$ la funzione ha due poli in $x = \pm 1/\sqrt{|a|}$. I poli si trovano all'interno dell'intervallo chiuso $[-1, 1]$ per $a \leq -1$ e danno luogo a singolarità non integrabili. Dunque deve essere $a > -1$. Inoltre $f(x) \in L_2(-1, 1)$ anche per i valori $a_n = -n^2\pi^2$ per $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.
9. Le componenti di u nella base $e^{(n)}$ sono date da $u_n = 2^{-n}$. Per calcolare le componenti $(Bu)_n$ di Bu osserviamo che

$$Bu = \sum_{n=1}^{\infty} u_n B e^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{n}{4} e^{(n)} + (n-1) e^{(n-1)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \frac{n}{2^n} e^{(n)}$$

dunque $(Bu)_n = \frac{3}{4} \frac{n}{2^n}$ e $p = \sum_{n=1}^{\infty} u_n (Bu)_n = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n 4^{-n} = \frac{3}{4} \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$. La somma $\sum_{n=1}^{\infty} n 4^{-n} = \frac{4}{9}$ si calcola ricordando che $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ e derivando $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ da cui $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Esercitazione IV

(Esercizi di preparazione per l'esonero del 12/05/2004)

Distribuita il 10/5/2004, correzione l'11/5/2004

1. Siano $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ e $v^{(3)}$ i vettori di una base ortonormale dello spazio V_3 e sia M l'operatore lineare tale che $Mv^{(1)} = 2v^{(2)} + v^{(3)}$, $M^2v^{(1)} = 3v^{(2)} + 2v^{(3)}$ e $M^3v^{(1)} = 2v^{(2)} + 3v^{(3)}$. Calcolare lo spettro di M .
2. Sia $K(x, y) = 3e^{-x-y} [e^{-px} + e^{-py}]$ il nucleo dell'operatore integrale K che agisce su $L_2(0, \infty)$. Calcolare il valore del parametro positivo p per cui $\text{Tr}K = 1$.
3. Calcolare la traccia $T = \text{Tr}B$ e il determinante $D = \det B$ della matrice $B = F(A)$ con $F(z) = [\sin(\pi z/2)]/(1+z)$ e $A = 3 + \sqrt{3}\sigma_1 + \sigma_2$.
4. Sia M la matrice hermitiana 3×3 il cui polinomio caratteristico è $P(z) = -z^3 + 3,5z^2 + 12,5z - 42$. Calcolare la traccia $\alpha = \text{Tr}(1 + M)$ ed il determinante $\beta = \text{Det}(1 + M)$.
5. Siano dati il vettore delle matrici di Pauli $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, il vettore $\vec{a} = (3, 4, 0)$ e la matrice $A = \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$. Calcolare gli autovalori μ_{\pm} e gli autovettori $v^{(\pm)}$ della matrice $M = [1 + A \exp(i\pi A)]^{-1}$.
6. Sia \mathcal{P} il proiettore che proietta su un sottospazio di V_N di dimensione $n < N$, e $g(z) = (1 - z)/[(4 + z) \cosh z]$. Determinare l'operatore $G = g(\mathcal{P})$ e calcolare la sua traccia $T = \text{Tr}G$.
7. Si consideri lo spazio delle successioni $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ col prodotto scalare $(u, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{u}_n v_n$ e sia dato l'operatore di traslazione T definito da $(Tu)_n = u_{n+1}$. a) Calcolare la matrice che rappresenta T ; b) dato il vettore $u = \{2^{-|n|}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, calcolare (u, Tu) ; c) Mostrare che l'operatore T è unitario, cioè che $TT^\dagger = 1$.
8. Trovare due funzioni $a(x)$ e $b(x)$ tali che $[a(x)D, b(x)D] = D$, dove $D = \frac{d}{dx}$.

Soluzioni Esercitazione IV

1. Poichè $Mv^{(1)} = 2v^{(2)} + v^{(3)}$, $Mv^{(2)} = 4v^{(2)} + v^{(3)}$, $Mv^{(3)} = -5v^{(2)}$ si trova $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi i tre autovalori sono $\lambda = 0$, $\lambda = 2 + i$ e $\lambda = 2 - i$.
2. L'operatore K è separabile di rango 2, $K(x, y) = a(x)b(y) + b(x)a(y)$ con $a(x) = 3\exp[-(1+p)x]$, $b(x) = \exp(-x)$. L'equazione agli autovalori $Kf = \lambda f$ per $\lambda \neq 0$ diventa l'equazione agli autovalori per la matrice $2 \times 2 \begin{pmatrix} (b,a) & (b,b) \\ (a,a) & (a,b) \end{pmatrix}$ e quindi $\text{Tr}K = 2(a, b) = \frac{6}{2+p}$ che implica $p = 4$.
3. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 1$. Quindi $T = F(5) + F(1) = \frac{2}{3}$, $D = F(5)F(1) = \frac{1}{12}$.
4. Ricordando che $P(z) = \text{Det}(M - z1)$ si ha $\beta = P(-1)$. Inoltre si nota che $\alpha = \text{Tr}(1 + M) = \text{Tr}(1) + \text{Tr}(M) = 3 + \text{Tr}(M)$ e poichè $P(z) = -(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3) = -z^3 + z^2\text{Tr}(M) + \dots$, si ha $\text{Tr}(M) = 3, 5$ e quindi $\alpha = 6, 5$.
5. Gli autovalori α_{\pm} e gli autovettori $v^{(\pm)}$ della matrice A sono $\alpha_{\pm} = \pm|\vec{a}|$ e $v^{(\pm)} = \begin{pmatrix} a_1 - ia_2 \\ \pm|\vec{a}| - a_3 \end{pmatrix}$ per cui gli autovalori ed autovettori della matrice M sono $\mu_+ = -\frac{1}{4}$, $\mu_- = \frac{1}{6}$, $v^{(\pm)} = \begin{pmatrix} 3 - 4i \\ \pm 5 \end{pmatrix}$.
6. Gli autovalori di \mathcal{P} sono 1 con molteplicità n e 0 con molteplicità $N - n$ per cui $G = g(\mathcal{P}) = g(1)\mathcal{P} + g(0)(1 - \mathcal{P}) = \frac{1}{4}(1 - \mathcal{P})$ e $\text{Tr}G = \frac{1}{4}(N - n)$.
7. a) Poichè $(Tu)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm}u_m$ si ha $T_{nm} = \delta_{m, n+1}$. b) $(u, Tu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{u}_n u_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_0^{+\infty} \frac{1}{4^n} + 2 \sum_1^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$. c) $(TT^\dagger)_{nk} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm}(T^\dagger)_{mk} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_{nm}T_{km} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{m, n+1}\delta_{m, k+1} = \delta_{nk}$.

8. $[a(x)D, b(x)D] = [a(x)b'(x) - b(x)a'(x)]D$. Quindi, per esempio, $a(x) = 1, b(x) = x$.

Esercitazione V

Distribuita il 14/5/2004, correzione il 17/5/2004

1. Dimostrare che l'operatore $\mathcal{D} = e^{-V(x)} D e^{V(x)}$ è uguale all'operatore $D + V'(x)$ dove $D = d/dx$ e $V(x)$ è una funzione arbitraria in C_1 .
2. Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione analitica in x per $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha, per L non nullo, $e^{LD} f(x) = f(x + L)$.
3. Utilizzando il risultato e le ipotesi dell'esercizio precedente, dimostrare che l'operatore $e^D e^{V(x)}$ è uguale all'operatore $e^{V(x+1)} e^D$.
4. Dimostrare che $e^{\epsilon D} e^{\epsilon V(x)} = e^{\epsilon(D+V(x)) + \frac{\epsilon^2}{2} V'(x)} + O(\epsilon^3)$.
5. Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ tre funzioni ortonormali e sia $K(x, y) = f_2(x)f_1(y) + f_1(x)f_2(y) + f_3(x)f_2(y) + f_2(x)f_3(y)$ il nucleo dell'operatore K . Siano $g_1(x), \dots, g_n(x), \dots$ una base del sottospazio ortogonale al sottospazio generato da $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$. Calcolare autovalori ed autovettori di K .
6. Costruire esplicitamente una base di autovettori di K definito nell'esercizio precedente nel caso in cui lo spazio vettoriale è $L_2[-\pi, \pi]$ e $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x)$, $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x)$.
7. Si consideri lo spazio delle successioni $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ col prodotto scalare $(u, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{u}_n v_n$ e siano dati l'operatore di traslazione T definito da $(Tu)_n = u_{n+1}$ e l'operatore di "inversione" I definito da $(Iu)_n = u_{-n}$. a) Mostrare che T e I sono unitari e che $TI = IT^{-1}$; b) Scrivere le matrici T_{nm} e I_{nm} che rappresentano T e I .

Soluzioni Esercitazione V

1. Applicando l'operatore \mathcal{D} ad una generica funzione differenziabile $f(x)$ si ha $\mathcal{D}f(x) = e^{-V(x)} D e^{V(x)} f(x) = e^{-V(x)} [e^{V(x)} f'(x) + V'(x) e^{V(x)} f(x)] = f'(x) + V'(x) f(x) = (D + V'(x)) f(x)$, c.v.d.
2. Si ha $e^{LD} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} D^n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} f^{(n)}(x)$. L'ultima espressione è lo sviluppo di Taylor di f di centro x e raggio L , che converge per $L \neq 0$, essendo $f(x)$ analitica in tutto l'asse reale, e vale $f(x+L)$, c.v.d.
3. Si ha, per una qualunque funzione di prova $f(x)$, $e^D(e^{V(x)} f(x)) = e^{V(x+1)} f(x+1) = e^{V(x+1)} e^D f(x)$, da cui $e^D e^{V(x)} = e^{V(x+1)} e^D$, c.v.d.
4. Espandere gli esponenziali in potenze di ϵ e verificare che: $e^{\epsilon D} e^{\epsilon V(x)} - e^{\epsilon\{[D+V(x)]+\frac{\epsilon}{2}V'(x)\}} = O(\epsilon^3)$. Usare l'uguaglianza $DV(x) = V'(x) + V(x)D$.
5. L'operatore K è separabile di rango 3. L'equazione agli autovalori $Ku = \lambda u$ ha le soluzioni: due autovalori semplici $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{2}$ con autofunzioni $u^{(\pm)} = f_1(x) \pm \sqrt{2}f_2(x) + f_3(x)$, l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità infinita e autofunzioni $u_0(x) = f_1(x) - f_3(x)$ e le funzioni di base $g_n(x)$ per $n = 1, 2, \dots$.
6. Una base ortonormale (quella di Fourier!) di $L_2[-\pi, \pi]$ è data da $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ per $n = 1, 2, \dots$. Quindi la base delle autofunzioni di K è $u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x)$, $u^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x)$, mentre le funzioni $g_n(x)$ sono le funzioni $c^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ per $n = 2, 3, 4, \dots$, $s^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ per $n = 1, 3, 4, \dots$.
7. a) Per mostrare che T e I sono unitari è sufficiente mostrare che conservano il prodotto scalare $((u, T^\dagger T v) = (Tu, Tv) = (u, v))$. Si ha $(Tu, Tv) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{u}_{n+1} v_{n+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{u}_m v_m = (u, v)$ (porre $m = n+1$) e $(Iu, Iv) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{u}_{-n} v_{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{u}_m v_m = (u, v)$ (porre $m = -n$). Inoltre, poichè si ha $(TIu)_n = u_{-n-1}$, applicando due volte TI si ottiene $(TITI u)_n = u_{-(-n-1)-1} = u_n$ per cui $TITI = 1$, il che implica $T^{-1} = ITI$. Poichè $I^2 = 1$ ne segue $IT^{-1} = TI$ c.v.d. b) $T_{nm} = \delta_{m, n+1}$, $I_{nm} = \delta_{-n, m}$.

Esercitazione VI

Distribuita il 21/5/2004, correzione il 24/5/2004

1. L'oscillatore forzato $x(t)$ soddisfa l'equazione $\ddot{x}(t) + x(t) = a \sin(\omega t)$. Calcolarne la soluzione generale.
2. Sia $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ il vettore delle matrici di Pauli e $\vec{\omega} = (2, 1, -2)$. Calcolare il vettore $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ che risolve l'equazione differenziale $\frac{dv}{dt} = i\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma} v$ con la condizione iniziale $v(0) = (1, 0)$.
3. Calcolare la soluzione generale dell'equazione $\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} = 3$.
4. Calcolare la soluzione generale dell'equazione $\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{2x}{1+x^2} \frac{df}{dx} = 1$.
5. Dati gli operatori differenziali $D_1 = \frac{d}{dx} - \tanh x$ e $D_2 = \frac{d}{dx} - 1$, calcolare la soluzione generale dell'equazione $D_1 D_2 f(x) = 0$.

Soluzioni Esercitazione VI

1. La soluzione generale dell'equazione omogenea è $x_0(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$. Una soluzione particolare si cerca della forma $x_p(t) = A \sin \omega t$; sostituendo nell'equazione si trova $A = \frac{a}{1-\omega^2}$. Quindi, per $|\omega| \neq 1$, la soluzione generale è $x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + \frac{a}{1-\omega^2} \sin \omega t$. Per $|\omega| = 1$ l'espressione precedente diverge e una soluzione particolare si cerca nella forma $x_p(t) = At \cos t$. Sostituendo si trova $A = -a/2$ e la soluzione generale è $x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t - \frac{a}{2} t \cos t$.
2. Gli autovalori ed autovettori della matrice $\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma} = \omega_1 \sigma_1 + \omega_2 \sigma_2 + \omega_3 \sigma_3$ sono (vedi Esercitazione IV, esercizio 5) $\omega_{\pm} = \pm |\vec{\omega}|$ e $v^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \omega_1 - i\omega_2 \\ \pm |\vec{\omega}| - \omega_3 \end{pmatrix}$. Sviluppando la soluzione $v(t)$ nella base ortogonale $\{v^{(+)}, v^{(-)}\}$ si ha $v(t) = v_+(t)v^{(+)} + v_-(t)v^{(-)}$ da cui l'equazione diventa $\frac{d}{dt}v_+(t)v^{(+)} + \frac{d}{dt}v_-(t)v^{(-)} = i\omega_+v_+(t)v^{(+)} + i\omega_-v_-(t)v^{(-)}$ e quindi $\frac{d}{dt}v_{\pm}(t) = \pm i|\vec{\omega}|v_{\pm}(t)$ la cui soluzione generale è $v_{\pm}(t) = \exp(\pm i|\vec{\omega}|t)v_{\pm}(0)$. Ponendo $\vec{\omega} = (2, 1, -2)$ e $v_+(0)v^{(+)} + v_-(0)v^{(-)} = (1, 0)$ si ottiene $v_1(t) = \cos(3t) - \frac{2i}{3} \sin(3t)$ e $v_2(t) = -\frac{1}{3}(1 - 2i) \sin(3t)$.
3. Ponendo $g = f'$ si ottiene per g l'equazione del primo ordine $g' + g/x = 3$, la cui soluzione generale è $g(x) = c_1/x + 3x/2$. Dunque si ha $f(x) = c_2 + \int^x dx' g(x') = c_2 + c_1 \log x + 3x^2/4$.
4. Ponendo $g = f'$ si ottiene per g l'equazione del primo ordine $g' - \frac{2x}{1+x^2}g = 1$, la cui soluzione generale è $g(x) = c_1(1+x^2) + (1+x^2) \arctan x$. Dunque si ha $f(x) = c_2 + \int^x dx' g(x') = c_2 + c_1(x + x^3/3) + \int^x dx' (1+x'^2) \arctan x'$. L'ultimo integrale si fa per parti, $f(x) = c_2 + c_1(x + \frac{x^3}{3}) \arctan x - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{3} \log(1+x^2)$.
5. Ponendo $g(x) = D_2 f(x)$ si ottiene per $g(x)$ l'equazione del primo ordine $g' - g \tanh x = 0$ la cui soluzione generale è $g(x) = c_1 \cosh x$. L'equazione per f è $f' - f = g$. Una soluzione dell'omogenea è $f(x) = e^x$. Una soluzione particolare si cerca nella forma $f(x) = \alpha(x)e^x$ per cui $\alpha'(x) = e^{-x}g(x)$. Si ottiene quindi $f(x) = e^x[c_2 + \int^x dx' e^{-x'}g(x')] = c_1(xe^x - \frac{1}{2}e^{-x}) + c_2e^x$.

Esercitazione VII

Distribuita il 28/5/2004, correzione il 31/5/2004

Operatori lineari

1. Calcolare autovalori ed autovettori dell'operatore integrale il cui nucleo è dato da $K(x, y) = x + y$ in $L_2(-1, 1)$.
2. Trovare la soluzione dell'equazione $F(x) + \int_{-1}^1 dy (x + y)^2 F(y) = 7x$.
3. Dati gli operatori $H_1 = -D^2 + e^x$ e $H_2 = -D^2 - e^{-x}$ trovare tutte le funzioni $f \in L_2(-1, 1)$ tali che $[H_1, H_2]f = 0$.
4. Dati i vettori $u = (1, 1, i)$ e $v = (1, -1, 1)$ e l'operatore $A = uv^\dagger$, calcolare traccia e determinante di $B = (1 + A) \cosh(\pi A)$.
5. Espandere $f(x) = x^2 e^{-x/2}$ nella base di Laguerre $f^{(n)}(x) = e^{-x/2} L_n(x)$.
6. Trovare autovalori ed autofunzioni di $A = -i \frac{d}{dx} + \sin x$ in $L_2(-\pi, \pi)$ con $f(-\pi) = f(\pi)$.
7. Trovare autovalori ed autofunzioni di $B = -i \frac{d}{dx} + x^2$ in $L_2(-\pi, \pi)$ con $f(-\pi) = f(\pi)$.

Trasformate di Fourier

Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx}$ delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \exp\left(-x^2/L^2\right)$. Calcolare inoltre $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle k \rangle$, $\langle k^2 \rangle$ e studiare l'andamento di $\langle x^2 \rangle \langle k^2 \rangle$ in funzione di L (usare le definizioni $\langle x^n \rangle = (\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n |f(x)|^2) / (\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2)$, $\langle k^n \rangle = (\int_{-\infty}^{\infty} dk k^n |\hat{f}(k)|^2) / (\int_{-\infty}^{\infty} dk |\hat{f}(k)|^2)$).
2. $f(x) = \exp\left(-|x|/L\right)$.
3. $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$ per $x \in [-L, L]$ e $f(x) = 0$ altrove.
4. $f_1(x) = x \exp\left(-x^2/L^2\right)$ e $f_2(x) = x^2 \exp\left(-x^2/L^2\right)$ (suggerimento: usare $x e^{-ikx} = i \frac{d}{dk} e^{-ikx}$).

Soluzioni Esercitazione VII

Operatori lineari

Utilizziamo come prodotto scalare in $L_2[-1, 1]$ l'espressione $(f, g) = \int_{-1}^1 dx \overline{f(x)} g(x)$.

1. Ricordando che $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$ sono i primi due polinomi di Legendre, si ha che l'operatore K ha la forma $Kf = (P_1, f) + x(P_0, f) = (P_1, f)P_0 + (P_1, f)P_1$. Quindi tutti i polinomi di Legendre $P_n(x)$ con $n \geq 2$ sono autofunzioni di K con autovalore nullo. Le due autofunzioni corrispondenti agli autovalori non nulli sono combinazioni lineari di P_0 e P_1 . La matrice M che rappresenta K in questo sottospazio è data da $M = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ i cui autovalori sono $\lambda_{\pm} = \pm 2/\sqrt{3}$. Le autofunzioni corrispondenti sono $f_{\pm}(x) = P_0(x) \pm \sqrt{3}P_1(x) = 1 \pm \sqrt{3}x$.
2. Si ha $F(x) + x^2(1, F) + 2x(x, F) + (x^2, F) = 7x$. Si vede quindi che $F(x)$ deve essere una combinazione lineare di $1, x, x^2$. Cerchiamo quindi F della forma $F(x) = a + bx + cx^2$. Sostituendo questa espressione nella equazione e calcolando i prodotti scalari si ottiene $a + bx + cx^2 = 7x - (\frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c) - 2x(\frac{2}{3}b) - x^2(2a + \frac{2}{3}c)$. Uguagliando a zero i coefficienti di $1, x, x^2$ si ottiene $a = c = 0$ e $b = 3$.
3. Si ha $[H_1, H_2] = [D^2, e^x] + [D^2, e^{-x}] = [D^2, 2 \cosh x] = 4 \sinh x D + 2 \cosh x$. L'equazione per f diventa $4 \sinh x f' + 2 \cosh x f = 0$ la cui soluzione generale è $f(x) = A(\sinh x)^{-1/2}$.
4. Due autovalori di A sono nulli e corrispondono al sottospazio ortogonale a v , mentre il terzo autovalore è $(v, u) = i$ e corrisponde all'autovettore u . Due autovalori di B sono uguali a 1 e il terzo è dato da $(1 + i) \cosh(\pi i) = -1 - i$. Quindi $\text{Tr} B = 1 - i$ e $\det B = -1 - i$.
5. Ricordando che i primi tre polinomi di Laguerre sono dati da $L_0 = 1, L_1 = 1 - x, L_2 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$, si ha $f(x) = 2f^{(2)}(x) - 4f^{(1)}(x) + 2f^{(0)}(x)$.
6. La soluzione generale di $-if' + \sin x f = \lambda f$ è $f(x) = A \exp[i(\lambda x + \cos x)]$. Imponendo la condizione $f(-\pi) = f(\pi)$ si ottiene la condizione $\lambda = k \in Z$, per cui le autofunzioni sono $f_k(x) = \exp[i(kx + \cos x)]$ con autovalore $\lambda = k$.
7. La soluzione generale di $-if' + x^2 f = \lambda f$ è $f(x) = A \exp[i(\lambda x - x^3/3)]$. Imponendo la condizione $f(-\pi) = f(\pi)$ si ottiene la condizione $\lambda = \frac{\pi^2}{3} + k, k \in Z$, per cui le autofunzioni sono $f_k(x) = \exp\left[i\left(kx + \frac{\pi^2}{3}x - \frac{x^3}{3}\right)\right]$ con autovalore $\lambda = k + \frac{\pi^2}{3}$.

Trasformate di Fourier

1. $\hat{f}(k) = \frac{L}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{L^2}{2}k^2)$ (ricordare che $\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi}$).
2. $\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} L / (1 + L^2 k^2)$.
3. $\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [1 - \cos(kL)] / (Lk^2)$.
4. $\hat{f}_1(k) = -\frac{iL^3}{\sqrt{8}} k \exp(-\frac{L^2}{4}k^2), \hat{f}_2(k) = \frac{L^3}{\sqrt{8}} (1 - \frac{L^2}{2}k^2) \exp(-\frac{L^2}{4}k^2)$.

Esercitazione VIII

Distribuita il 31/5/2004, correzione il 4/6/2004

1. Calcolare la soluzione $F(x)$ dell'equazione integrale $F(x) + \int_{-\pi}^{\pi} dy \sin(x-2y)F(y) = 3 \sin(2x)$.
2. Data la matrice 2×2 $T(x) = x + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)$, determinare i valori reali di x per i quali la serie $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [T(x)]^n$ converge e scrivere la rappresentazione spettrale di $S(x)$.
3. Siano dati i vettori (colonna) $a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (1, 0, i, 0)$, $c = (-1, 0, i, 0)$ e $d = (-1, 0, 0, 1)$ e la matrice $A = ab^\dagger + cd^\dagger$. Calcolare traccia e determinante di $B = \sin(\pi \cosh 2\pi i A)$.
4. Sia dato su $L_2[-\pi, \pi]$ l'operatore integrale K di nucleo $K(x, y) = \sin(x-y)$. Calcolare il nucleo dell'operatore $A = 1 - \cosh K$ (suggerimento: usare la rappresentazione spettrale).
5. Trovare la rappresentazione spettrale della matrice $F = (1 - M)(1 + M)^{-1}$ dove $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Data la matrice M dell'esercizio precedente e il vettore $w = (0, \alpha, 1)$, discutere la convergenza della soluzione di $v - \lambda Mv = w$ in serie di potenze di λ al variare del parametro α .
7. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $G(x) = \frac{d^2}{dx^2} \exp(-|\frac{x+a}{L}|)$ in $L_2(-\infty, \infty)$.
8. Siano $a(x)$ e $b(x)$ due funzioni di $L_2(-\pi, \pi)$ la cui espansione nella base di Fourier è $a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4^{-|n|} e^{inx}$ e $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)/n!$; calcolare il prodotto scalare (a, b) .
9. Dato l'operatore integrale $(Kf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dy K(x, y)f(y)$ con $K(x, y) = \sin x \sin y + \lambda \cos x \cos y$. Determinare i valori del parametro λ per i quali $K^3 - 3\pi K^2 + 2\pi^2 K = 0$.
10. Sia $L = \frac{d}{dx} - \frac{2}{x}$. Trovare la soluzione generale dell'equazione $L^2 f(x) = 5$.
11. Siano P_1 , P_2 e P_3 i proiettori su una base ortonormale di V_3 . Determinare il vettore $v(t)$ soluzione generale dell'equazione $(1 + 2P_1 + P_2) \frac{dv}{dt} = (P_1 - 3P_3)v(t)$.
12. Sia data la matrice $A = 2\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3$ ed il vettore $w = (1 - i, 1)$. Calcolare la soluzione $v(t)$ dell'equazione differenziale $\frac{dv}{dt} = Av(t) + w$ con dato iniziale $v(0) = (1, 0)$. Discutere il comportamento di $v(t)$ per $t \rightarrow \infty$.
13. Data la funzione $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-|x-y|}}{1+y^2}$, calcolarne la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$.
14. Calcolare l'espressione esplicita del pacchetto d'onda $F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ik(x-ct)}$ sapendo che $g(k) = e^{-k^2 \sigma^2}$. Discutere il comportamento del pacchetto in funzione del tempo.
15. Trovare la soluzione dell'equazione $F(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-|x-y|} F(y) = e^{-|x|}$ per $\lambda > 0$ (suggerimento: scrivere l'equazione per la trasformata di Fourier di F).

Soluzioni Esercitazione VIII

1. Sviluppando l'integrale l'equazione diventa $F(x) - \cos x \int_{-\pi}^{\pi} dy \sin 2y F(y) + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} dy \cos 2y F(y) = 3 \sin 2x$, dunque la soluzione è della forma $F(x) = a \sin x + b \cos x + c \sin 2x$. Sostituendo nell'equazione e calcolando i prodotti scalari si ottiene $a = 0$, $b = 3\pi$ e $c = 3$.
2. Gli autovalori di $T(x)$ sono dati da $\lambda_{\pm} = x \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Gli autovettori normalizzati corrispondenti sono $v_{\pm} = \left(\frac{1+i}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Per $|z| < 1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$. Quindi la serie $S(x)$ converge per $|\lambda_{\pm}| < 1$, ovvero $|x| < 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$, e la rappresentazione spettrale di $S(x)$ è data da $S(x) = -\log(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} - x)v_+v_+^{\dagger} - \log(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} - x)v_-v_-^{\dagger}$.
3. Si ha $A^2 = ab^{\dagger}ab^{\dagger} + ab^{\dagger}cd^{\dagger} + cd^{\dagger}ab^{\dagger} + cd^{\dagger}cd^{\dagger} = ab^{\dagger} + cd^{\dagger} = A$ poichè $b^{\dagger}a = d^{\dagger}c = 1$ e $b^{\dagger}c = d^{\dagger}a = 0$. Se $A^2 = A$ (A è un proiettore) si ha $B = f(A) = f(0) + [f(1) - f(0)]A$ e quindi $B = 0$, da cui $\text{Tr}B = \det B = 0$.
4. L'operatore K ha la forma $Kf = \sin x(\cos x, f) - \cos x(\sin x, f)$, dove $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \bar{f}(x)g(x)$. Quindi tutte le funzioni ortogonali a $\cos x$ e $\sin x$ sono autovettori con autovalore nullo, mentre nel sottospazio generato da $\cos x$ e $\sin x$ l'operatore K ha autovalori $\lambda_{\pm} = \pm i\pi$ e autovettori $v_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos x \mp i \sin x) = \frac{e^{\mp ix}}{\sqrt{2\pi}}$ (normalizzati ad 1). Dal momento che $1 - \cosh 0 = 0$ tutti gli autovettori corrispondenti ad autovalori nulli non contribuiscono alla rappresentazione spettrale di A , il cui nucleo è quindi dato da $A(x, y) = [1 - \cosh(i\pi)]v_+(x)v_+(y) + [1 - \cosh(-i\pi)]v_-(x)v_-(y) = \frac{e^{-ix}e^{iy}}{\pi} + \frac{e^{ix}e^{-iy}}{\pi} = \frac{2}{\pi} \cos(x-y)$.
5. Gli autovalori di M sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Gli autovalori λ_2 e λ_3 non contribuiscono alla rappresentazione spettrale di F perchè corrispondono all'autovalore nullo di F . Quindi $F = \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}v^{(1)}v^{(1)\dagger} = -3v^{(1)}v^{(1)\dagger}$. E' sufficiente quindi calcolare l'autovettore $v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$.
6. La soluzione dell'equazione è $v = (1 - \lambda M)^{-1}w = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1 - \lambda \lambda_i} v^{(i)}(v^{(i)}, w) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\alpha-1}{1+2\lambda} v^{(1)} + \frac{1}{1-\lambda} [(v^{(2)}, w)v^{(2)} + (v^{(3)}, w)v^{(3)}]$. L'autovalore massimo di M è $\lambda_1 = -2$ e l'autovettore corrispondente è $v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ (vedi esercizio precedente). Dunque, se $(v^{(1)}, w) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha-1) \neq 0$, lo sviluppo in serie di potenze di λ converge per $|\lambda| < \frac{1}{2}$. Tuttavia, se $\alpha = 1$ il termine con λ_1 non contribuisce e quindi la serie converge nel dominio più grande $|\lambda| < 1$ dato che gli altri due autovalori sono $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
7. Si ha $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} e^{-|x+a|/L} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} L \frac{e^{ika}}{(1+L^2k^2)}$. L'operatore d^2/dx^2 corrisponde alla moltiplicazione per $-k^2$ della trasformata di Fourier quindi $\hat{G}(k) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} L k^2 \frac{e^{ika}}{(1+L^2k^2)}$.
8. Sviluppando le due funzioni $a(x)$ e $b(x)$ nella base ortonormale (di Fourier) degli esponenziali, $a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ e $b(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, si ottiene $(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n b_n$. Essendo $a_n = \sqrt{2\pi} 4^{-|n|}$ e $b_n = \sqrt{2\pi} (\frac{1}{2(|n|)!} + \frac{\delta_{n0}}{2})$, si ha $(a, b) = 2\pi (2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n \frac{1}{2} n!} + 1) = 2\pi e^{\frac{1}{4}}$.
9. L'operatore K ha infiniti autovalori nulli ed ha due autovettori: $\sin x$ con autovalore π e $\cos x$ con autovalore $\lambda\pi$. L'operatore K verifica l'equazione data se tutti i suoi autovalori la verificano. Poichè questa equazione ha le tre radici 0, π e 2π , è sufficiente che l'autovalore $\lambda\pi$ sia una di queste radici. Quindi i valori del parametro λ devono essere $\lambda = 0, 1, 2$.
10. Si ponga $Lf(x) = g(x)$. La funzione $g(x)$ soddisfa allora l'equazione del primo ordine $g'(x) - \frac{2}{x}g(x) = 5$ la cui soluzione è $g(x) = c_1 x^2 - 5x$. Quindi $f(x)$ soddisfa l'equazione $f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = g(x)$ la cui soluzione generale è $f(x) = c_2 x^2 + c_1 x^3 - 5x^2 \log x$.

11. Ricordando che $1 = P_1 + P_2 + P_3$, l'equazione si scrive banalmente per le componenti del vettore $v(t)$: $3 \frac{dv_1}{dt} = v_1$, $2 \frac{dv_2}{dt} = 0$, $\frac{dv_3}{dt} = -3v_3$. Le soluzioni generali sono $v_1(t) = v_1(0)e^{t/3}$, $v_2(t) = v_2(0)$, $v_3(t) = v_3(0)e^{-3t}$ e quindi si ha $v(t) = (e^{t/3}P_1 + P_2 + e^{-3t}P_3)v(0)$.
12. Gli autovalori di A sono $\lambda_{\pm} = \pm 3$ con autovettori $v_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-i, 1)$ e $v_- = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1+i)$. La soluzione dell'equazione è $v(t) = e^{At}[v(0) + A^{-1}w] - A^{-1}w = e^{At}v(0) - A^{-1}(1 - e^{At})w$. Osserviamo che $w = \sqrt{3}v_+$, per cui $A^{-1}(1 - e^{At})w = \sqrt{3}\lambda_+^{-1}(1 - e^{\lambda_+ t})v_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - e^{3t})v_+$. Utilizzando la rappresentazione spettrale per il primo termine la soluzione si riscrive come $v(t) = e^{\lambda_+ t}v_+(v_+, v(0)) + e^{\lambda_- t}v_-(v_-, v(0)) - \sqrt{3}\lambda_+^{-1}(1 - e^{\lambda_+ t})v_+ = e^{3t}\frac{1-i}{\sqrt{3}}v_+ - e^{-3t}\frac{1}{\sqrt{3}}v_- - \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - e^{3t})v_+$. Per $t \rightarrow \infty$ i termini proporzionali a e^{3t} dominano: $v(t) \sim e^{3t}\frac{2-i}{\sqrt{3}}v_+$.
13. La funzione $f(x)$ è il prodotto di convoluzione delle funzioni $\frac{1}{1+x^2}$ e $e^{-|x|}$, quindi la sua trasformata di Fourier è il prodotto delle trasformate di Fourier di $\frac{1}{1+x^2}$ e di $e^{-|x|}$, che sono date rispettivamente da $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}$ e da $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2}$. Quindi $\hat{f}(k) = \frac{e^{-|k|}}{1+k^2}$.
14. $F(x, t) = f(x - ct)$ descrive un'onda con profilo $f(x)$ che si muove con velocità c . Il profilo è $f(x) = \sqrt{\pi} \exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2})$.
15. Passando alla trasformata di Fourier l'equazione diventa $\hat{F}(k) + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\hat{F}(k)}{1+k^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2}$, da cui $\hat{F}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}+k^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha^2+k^2}$ avendo definito $\alpha = \sqrt{1+\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}} > 0$. Antitrasformando (con un cambio di variabile $k' = k/\alpha$) si ottiene $F(x) = e^{-\alpha|x|}/\alpha$.

Esercitazione IX

Distribuita e corretta il 14/06/2004

1. Sia data la successione di funzionali regolari

$$F^{(n)}[\phi] = n \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-n^2(x-1)^2] \phi(x).$$

Calcolare il funzionale $F[\phi] = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)}[\phi]$ per $\phi \in S$ (S = spazio di Schwartz).

2. Calcolare l'integrale $C = \int_{-7}^4 dx x^2 \delta(\sin(x))$.
3. Calcolare la derivata seconda $g(x) = \frac{d^2}{dx^2} \exp(-2|x|)$.
4. Fare il grafico di $f(t) = \cos(t)[H(t) - H(t - \pi)]$ e calcolare la derivata $df(t)/dt$.
5. Calcolare l'integrale

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_2 \exp[-a^2(p_1^2 + p_2^2)] \delta(p_1^2 + p_2^2 - A^2)$$

con a e A reali.

6. Calcolare la distribuzione corrispondente al simbolo

$$\Delta(x) = x^2 \delta^{(2)}(x-1).$$

Soluzioni Esercitazione IX

1. Cambiando variabile d'integrazione $x = 1 + \frac{y}{n}$ si ha $F^{(n)}[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y^2} \phi(1 + \frac{y}{n})$ per cui $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)}[\phi] = \sqrt{\pi} \phi(1)$ ovvero, simbolicamente, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \exp[-n^2(x-1)^2] = \sqrt{\pi} \delta(x-1)$.
2. Poichè $\delta(\sin x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\pi)$ si ha $C = \sum_{n=-2}^1 \int_{-7}^4 dx x^2 \delta(x - n\pi) = 6\pi^2$.
3. Poichè $\exp(-2|x|) = \exp(-2x)H(x) + \exp(2x)H(-x)$ si ha $\frac{d}{dx} \exp(-2|x|) = -2[\exp(-2x)H(x) - \exp(2x)H(-x)]$ e quindi $g(x) = 4[\exp(-2x)H(x) + \exp(2x)H(-x)] - 4\delta(x) = 4\exp(-2|x|) - 4\delta(x)$.
4. $df(t)/dt = -\sin(t)[H(t) - H(t - \pi)] + \delta(t) + \delta(t - \pi)$.
5. $Z = 2\pi \int_0^\infty d\rho \rho \exp(-a^2 \rho^2) \delta(\rho^2 - A^2) = \pi \int_0^\infty dx \exp(-a^2 x) \delta(x - A^2) = \pi \exp(-a^2 A^2)$.
6. Poichè $x^2 \frac{d^2}{dx^2} \delta(x-1) = \frac{d^2}{dx^2} [x^2 \delta(x-1)] - 4 \frac{d}{dx} [x \delta(x-1)] + 2\delta(x-1)$ e poichè $x\delta(x-1) = \delta(x-1)$, si ottiene $\Delta(x) = \delta^{(2)}(x-1) - 4\delta^{(1)}(x-1) + 2\delta(x-1)$.

Esercitazione X

Distribuita e corretta il 21/06/2004

1. Calcolare l'integrale $I = \int_0^4 dx \cos(\pi x) \delta(x^2 + x - 2)$
2. Trovare il simbolo $\Delta(x)$ corrispondente alla distribuzione
 $F[\phi] = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx [d\text{sign}(x)/dx] d\phi(x)/dx$, $\phi \in S$
3. Calcolare il simbolo $\alpha(x) = a(x)\delta^{(1)}(x-1)$ per $a(x) \in C^{(1)}$
4. Calcolare la trasformata di Fourier di
i) $f(x) = [1/(1+x+2x^2)]\delta(x+1)$, ii) $g(x) = [1/(1+x^2)]\delta^{(1)}(x-2)$
5. Calcolare la soluzione particolare $x(t)$ per $t > 0$ dell'equazione
 $\ddot{x}(t) + x(t) = -3\delta(t^2 + 2t - 3)$
con le condizioni $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$
6. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
 $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 3\sin(2t) - 3\delta(t - \pi)$
7. Calcolare la soluzione del problema del transiente:
 $\ddot{x}(t) + x(t) = \exp(-2t)[H(t) - H(t-3)]$, $x(t) = 0$ per $t < 0$
ovvero calcolare $x(t)$ per $t > 3$
8. Calcolare la soluzione dell'equazione
 $d^2f(x)/dx^2 + df(x)/dx - 2f(x) = 4\delta(x)$
che appartiene allo spazio $L_2(-\infty, +\infty)$

Soluzioni Esercitazione X

1. Poichè $\delta(x^2 + x - 2) = \frac{1}{3}\delta(x - 1) + \frac{1}{3}\delta(x + 2)$ si ha $I = -\frac{1}{3}$.
2. Poichè $\frac{d}{dx}\text{sign}(x) = \frac{d}{dx}[H(x) - H(-x)] = 2\delta(x)$ si ha $F[\phi] = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) d\phi(x)/dx = -4 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta^{(1)}(x) \phi(x)$ e quindi $\Delta(x) = -4\delta^{(1)}(x)$.
3. $\alpha(x) = a(x) \frac{d}{dx} \delta(x - 1) = \frac{d}{dx} [a(x) \delta(x - 1)] - a'(x) \delta(x - 1) = a(1) \delta^{(1)}(x - 1) - a'(1) \delta(x - 1)$.
4. $f(x) = \frac{1}{2} \delta(x + 1)$, $g(x) = \frac{1}{5} \delta^{(1)}(x - 2) + \frac{4}{25} \delta(x - 2)$ quindi $\hat{f}(k) = \frac{e^{-ik}}{2\sqrt{2\pi}}$, $\hat{g}(k) = \frac{e^{2ik}}{25\sqrt{2\pi}}(4 - 5ik)$.
5. Poichè $\delta(t^2 + 2t - 3) = \frac{1}{4}\delta(t - 1) + \frac{1}{4}\delta(t + 3)$ conviene usare la funzione di Green. Si ottiene, per $t \geq 0$, $x(t) = \sin(t) - \frac{3}{4} \int_0^t dx \sin(t - x) \delta(x - 1) = \sin(t) - \frac{3}{4} \sin(t - 1) H(t - 1)$.
6. La soluzione generale dell'omogenea è $x_0(t) = e^{(-t)}[a \cos(3t) + b \sin(3t)]$. Una soluzione particolare dell'equazione $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 10y(t) = 3 \sin(2t)$ è $y(t) = \frac{9}{26} \sin(2t) - \frac{3}{13} \cos(2t)$, mentre una soluzione particolare dell'equazione $\ddot{z}(t) + 2\dot{z}(t) + 10z(t) = -3\delta(t - \pi)$ è $z(t) = e^{-(t-\pi)} \sin(3t) H(t - \pi)$, quindi si ha $x(t) = x_0(t) + y(t) + z(t) = e^{(-t)}[a \cos(3t) + b \sin(3t)] + \frac{9}{26} \sin(2t) - \frac{3}{13} \cos(2t) + e^{-(t-\pi)} \sin(3t) H(t - \pi)$.
7. Usando la funzione di Green si ha $x(t) = \int_0^t dy \sin(t - y) e^{-2y} [H(y) - H(y - 3)]$ quindi per $t > 3$ $x(t) = \int_0^3 dy e^{-2y} (\sin t \cos y - \cos t \sin y) = A \sin t + B \cos t$ con $A = \int_0^3 dy e^{-2y} \cos y = \frac{1}{5} [2 + e^{-6} (\sin 3 - 2 \cos 3)]$ e $B = -\int_0^3 dy e^{-2y} \sin y = \frac{1}{5} [-1 + e^{-6} (2 \sin 3 + \cos 3)]$.
8. Poichè due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea sono e^x e e^{-2x} , l'unica soluzione che appartiene a $L_2(-\infty, +\infty)$ è $f(x) = -\frac{4}{3} [e^x H(-x) + e^{-2x} H(x)]$.

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
I COMPITO D'ESONERO 12/05/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS

ATTENZIONE:

scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Sia A una matrice 4×4 tale che $A^2 = 2A + 3$. Sapendo che $\text{tr} A = 8$, calcolare il determinante $\det A$[7]
2. Sia $F[f]$ il funzionale continuo definito in $L_2(-\infty, +\infty)$ come $F[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-2x^2)f(x)$.
Calcolare la sua norma $\|F\|$[7]
3. Sia M l'operatore sulle successioni $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$ di l_2 definito dalla matrice infinita $M_{nm} = \frac{1}{3^n 2^{m+1}}$, $n, m \geq 0$. Calcolare tutti gli autovalori ed almeno due autovettori di M[8]
4. Sia dato l'operatore $D = d/dx$. Trovare la funzione $V(x)$ tale che $[D^2 + V(x)D, D + \tanh x] = 0$.
.....[6]
5. Mostrare che l'operatore lineare U , $f(x) \rightarrow g(x) = Uf(x) = \alpha f(\alpha^2 x)$, con $\alpha \neq 0$ e reale, e' un operatore unitario in $L_2(-\infty, +\infty)$ (ovvero $(Uf^{(1)}, Uf^{(2)}) = (f^{(1)}, f^{(2)})$).[7]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 5 VOTI PARZIALI.

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
II COMPITO D'ESONERO 07/06/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS

ATTENZIONE: scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Sia $L > 0$ e sia $f(x) = L$ per $0 \leq x \leq L$ e $f(x) = 0$ per $x < 0$ e $x > L$. Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$ e la sua norma $\|\hat{f}\|$ in $L_2(-\infty, +\infty)$ [7]
2. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
 $d^2u(x)/dx^2 - u(x) = 3\exp(2x) + \exp(-x)$ [7]
3. Calcolare la soluzione $g(x)$ dell'equazione integrale
 $g(x) + 2 \int_{-\pi}^{\pi} dy \cos(x-y)g(y) = 1 + \sin(x)$ [6]
4. Sapendo che gli autovalori λ_1 e λ_2 ed i corrispondenti autovettori $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ della matrice 2×2 M sono
 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, v^{(1)} = (1, i), v^{(2)} = (i, 1)$, calcolare gli elementi di matrice A_{jk} della matrice $A = (2\mathbb{I} + M)^{-1} \exp(i\pi M)$ [7]
5. Sia $H(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, $D = d/dx$ e sia K l'operatore integrale definito dal prodotto di convoluzione
 $Kf = \int_{-\infty}^{\infty} dy H(x-y)f(y) = (H * f)(x)$.
Mostrare che $[K, D] = 0$ [7]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 5 VOTI PARZIALI.

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
III COMPITO D'ESONERO 23/06/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS

ATTENZIONE:

scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Calcolare l'integrale $A = \int_{-2}^1 dx(2x^2 + x - 1)\delta(\cos(\pi x))$[7]
2. Calcolare la soluzione generale $x(t)$ dell'equazione differenziale
 $d^2x(t)/dt^2 + 4x(t) = 2\cos(2t) - 4\delta(t)$[7]
3. Calcolare la soluzione $g(x)$ dell'equazione differenziale
 $d^2g(x)/dx^2 + 3dg(x)/dx + 2g(x) = 4\delta(x)$ che soddisfa le condizioni iniziali $g(-1) = 0$ $g_x(-1) = 0$[6]
4. Calcolare il simbolo
 $\Delta(x) = (1 + x^2)^{-1}\delta(x - 2) + \exp(-x^2)\delta^{(1)}(x)$[6]
5. Trovare una funzione $f(x)$ limitata, reale, $f(x) = f^*(x)$ e nulla, $f(x) = 0$, per $|x| > \pi$, tale che l'equazione differenziale
 $d^2\psi(x)/dx^2 + 4\psi(x) = f(x)$ ammetta una soluzione $\psi(x)$
che appartiene allo spazio $L_2(-\infty, +\infty)$[8]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO E' IL VOTO MASSIMO. IL VOTO TOTALE E' LA SOMMA DEI 5 VOTI PARZIALI.

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
COMPITO D'ESAME 28/06/04
A.A. 2003-04 Prof. A. DEGASPERIS

ATTENZIONE:

scrivere su ciascun foglio il cognome ed indicare *chiaramente* l'inizio e la fine di ogni esercizio.

1. Sia P un proiettore Hermitiano, $P = P^\dagger, P^2 = P$, che proietta i vettori di V_6 in un sottospazio di dimensione 3. Calcolare tutti i valori dei due numeri complessi z_1 e z_2 tali che $Tr(z_1 \mathbb{I} + z_2 P) = 0$ e $Det(z_1 \mathbb{I} + z_2 P) = -1$[10]
2. Calcolare la soluzione $f(x)$ dell'equazione integrale
 $f(x) + \int_{-1}^1 dy K(x, y) f(y) = 2x^3 + x$ con $K(x, y) = xy(x + y)$[9]
3. Sia $q(t)$ la soluzione dell'equazione
 $\ddot{q}(t) + \pi^2 q(t) = 6\delta(t^2 - t - 2)$ che soddisfa le condizioni iniziali $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 2$. Calcolare $q(2, 25)$[11]
4. Sia dato l'operatore differenziale $A = -4d^2/dx^2 + 3x^4$ che opera su $L_2(a, b)$ nel dominio $\{\phi(x) \in L_2(a, b) : \phi(a) = \phi(b), \pm \phi_x(a) = \phi_x(b)\}$ (condizioni di periodicità). Mostrare che, se λ è un autovalore di A , allora λ è reale e positivo, $\lambda > 0$[10]

IL NUMERO RIPORTATO ALLA FINE DI CIASCUN ESERCIZIO È IL VOTO MASSIMO. SVOLGERE L'ESERCIZIO k ,
($k = 1, 2, 3$), PER IL RECUPERO DELL'ESONERO k ,
SVOLGERE L'ESERCIZIO 4 PER IL RECUPERO DELL'ESONERO ORALE.