1 Serie e trasformata di Fourier. 1

Il teorema di Fourier rappresenta non soltanto uno dei più bei risultati dell'analisi moderna, ma fornisce anche uno strumento indispensabile per lo studio di quasi tutti i principali problemi della fisica moderna.

W. Thomson e P. G. Tait, Philosophie Naturelle (1867).

(1) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ le funzioni

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (0, \pi] \\ -1 & \text{per } x \in [-\pi, 0) \end{cases} \qquad (b) \quad f(x) = |x|.$$

(2) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x.$$

Suggerimento: utilizzare la forma complessa della serie di Fourier.

(3) Utilizzare il risultato dell'esercizio precedente per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right).$$

(4) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione

$$f(x) = x^2,$$

ed utilizzare il risultato per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$