
Redes multicapa

PID_00286332

María J. Palazzi Nieves

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 3 horas



María J. Palazzi Nieves

Doctora, con mención *cum laude*, en Tecnologías de la Información y Redes por la Universitat Oberta de Catalunya (UOC) en 2020, máster en Física Fundamental por la Universidad de los Andes-Venezuela (ULA) en 2013 y Licenciada en Física por la ULA en 2011. Desde 2022, se desempeña como científica de datos para la empresa MJ Hudson Quantitative Solutions, donde está a cargo del desarrollo de una nueva herramienta automatizada para la evaluación del riesgo climático y ESG screening para la elaboración de reportes regulatorios en fondos de inversión líquidos.

El encargo y la creación de este recurso de aprendizaje UOC han sido coordinados por el profesor: Jordi Casas Roma

Cómo citar este recurso de aprendizaje con el estilo Harvard:

Palazzi Nieves, M. J. (2023) *Redes multicapa*. [Recurso de aprendizaje textual]. 1.^a ed. Barcelona: Fundació Universitat Oberta de Catalunya (FUOC).

Primera edición: septiembre 2023
© de esta edición, Fundació Universitat Oberta de Catalunya (FUOC)
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Autoria: María J. Palazzi Nieves
Producción: FUOC
Todos los derechos reservados

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea este eléctrico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita del titular de los derechos.

Índice

Introducción	5
Objetivos	6
1. Introducción a las redes multicapa	7
1.1. Definiciones	7
1.1.1. Red multiplex	9
1.1.2. Red temporal	9
1.2. Caracterización estructural de las redes multicapa	10
1.2.1. Grado de un nodo	10
1.2.2. Distribución de grado	11
1.2.3. Coeficiente de agrupamiento	11
1.2.4. Longitud de camino más corto	12
1.2.5. Diámetro de la red multicapa.....	12
1.3. Correlaciones estructurales en redes multiplex	13
1.3.1. Correlaciones de grado intercapa	13
1.3.2. Solapamiento y multigrados.....	15
2. Modelos generativos.....	17
2.1. Modelos generativos de redes multicapa	17
2.1.1. Modelos de crecimiento basados en conexión preferencial	17
2.1.2. <i>Ensambles</i> de redes multicapa.....	20
2.2. Modelos generativos de redes temporales	24
2.2.1. Modelo de actividad temporal.....	24
2.2.2. Modelo exponencial de grafo aleatorio temporal	25
3. Procesos dinámicos en redes multicapa	27
3.1. Percolación	27
3.2. Modelos de propagación de epidemias	28
3.2.1. Modelo SIS	28
3.2.2. Modelo SIR	30
4. Aplicaciones en redes reales	31
4.1. Redes de transporte	31
4.2. Redes económicas y financieras	32
4.3. Redes multicapa en biomedicina	34

4.4. Redes sociales	35
Resumen	37
Glosario	38
Bibliografía	39

Introducción

Anteriormente, se ha descrito cómo diversos tipos de sistemas pueden ser representados y estudiados en formato de red. Se han introducido conceptos básicos de la teoría de grafos y sus capacidades para representar redes reales, se han estudiado diferentes medidas estructurales y herramientas que han permitido comprender, en cierta medida, el funcionamiento de muchos sistemas. No obstante, describir algunos sistemas reales en formato de red como los introducidos hasta el momento puede resultar inapropiado y conducir a conclusiones inexactas sobre los procesos dinámicos que se llevan a cabo en ellos.

Por esta razón, en los últimos años se ha desarrollado una generalización a la formulación clásica de teoría de redes, denominada *redes multicapa* (en inglés *multilayer networks*). Una red multicapa puede definirse como un conjunto de redes en distintos planos (o capas) conectadas entre sí, y donde un mismo elemento de la red puede presentar diversos tipos de interacciones en cada capa. Un ejemplo sencillo donde la formulación de redes multicapa resulta apropiada son los sistemas de transporte: aeropuertos, carreteras o metro. Por un lado, cada capa puede representar un medio de transporte. En cambio, si nos centramos en un medio de transporte en particular, una red de aeropuertos por ejemplo, cada capa puede representar una compañía aérea.

En este módulo didáctico se presenta un resumen sobre el estado actual de la teoría de redes multicapa. Se introducirá el formalismo matemático básico necesario para describir y analizar este tipo de redes, algunos de los procesos dinámicos que tienen lugar en ellas y un pequeño resumen sobre sus aplicaciones prácticas.

Iniciaremos el módulo definiendo formalmente el concepto de redes multicapa e introduciremos las principales métricas que han sido diseñadas para su caracterización. A continuación, describiremos brevemente los principales modelos generativos de redes que han sido adaptados a la formulación multicapa y, seguidamente, presentaremos algunos de los procesos dinámicos más relevantes estudiados bajo este enfoque. Finalmente, en el último apartado, veremos varios ejemplos de aplicaciones de la teoría de redes multicapa al estudio de sistemas reales.

Objetivos

En los materiales didácticos de este módulo encontraremos las herramientas indispensables para asimilar los siguientes objetivos:

- 1.** Conocer las principales formas de representación de las redes multicapa, así como las definiciones básicas necesarias para su descripción.
- 2.** Conocer las principales métricas requeridas para la caracterización estructural de las redes multicapa.
- 3.** Conocer los principales modelos para generar redes multicapa sintéticas y la utilidad de dichos modelos.
- 4.** Familiarizarse con las principales aplicaciones prácticas de la teoría de redes multicapa para el estudio de redes reales.

1. Introducción a las redes multicapa

Las redes multicapa pueden verse como una generalización de la teoría tradicional de redes. Estas fueron introducidas por primera vez en el contexto de las ciencias sociales, como una manera de poder caracterizar los diferentes tipos de vínculos existentes entre personas en una red social (amigos, compañeros de trabajo, familiares, etc.). Recientemente, esta concepción de las redes ha despertado un gran interés en la comunidad científica, y su uso se ha extendido para el estudio de redes de transporte, redes genéticas, redes de interacción de proteínas o redes de neuronas, entre muchas otras aplicaciones.

En este apartado introduciremos las definiciones matemáticas básicas desarrolladas para el estudio de redes multicapa. Además, se introducirán algunas métricas básicas necesarias para su caracterización estructural. No obstante, un estudio a profundidad sobre las redes multicapa se escapa de los objetivos de este texto. El lector interesado puede encontrar más información en la bibliografía para profundizar en este tema.

Lectura complementaria

G. Bianconi (2018).
Multilayer Networks: Structure and Function. Oxford University Press. ISBN: 9780198753919.

1.1. Definiciones

Formalmente, una **red multicapa** se representa como un par $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{G} = \{G_\alpha, \alpha = 1, \dots, M\}$ constituye una familia de grafos $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$, que conforman las *capas* de la red multicapa \mathcal{M} . Así mismo, $\mathcal{E} = \{E_{\alpha\beta} \subseteq V_\alpha \times V_\beta; \alpha, \beta \in 1, 2, 3, \dots, M; \alpha \neq \beta\}$ representa el conjunto de interconexiones entre nodos (o vértices) de las diferentes capas, cuyos elementos se denominan *capas cruzadas o transversales*.

Los grafos que componen la red pueden ser ponderados, no ponderados, dirigidos o no dirigidos. De esta forma, el grafo G_α estará asociado a la capa α , con N_α nodos y con sus elementos E_α , formando las conexiones *intracapa* (en inglés, *intralayer links*). Finalmente, el conjunto de enlaces entre los nodos de las capas α y β ($\alpha \neq \beta$), $E_{\alpha\beta}$, se denomina conexiones *intercapa* (*interlayer links*, en inglés).

La figura 1 muestra una red multicapa compuesta de dos capas:

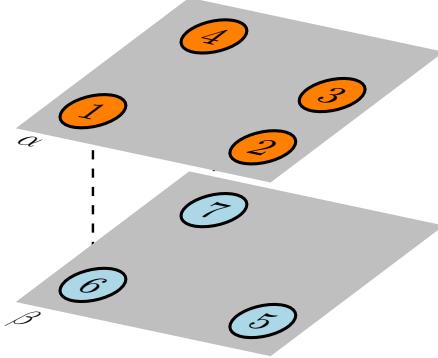
- 1) La primera capa α descrita como: $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ con $V_\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E_\alpha = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

2) La segunda capa β como: $G_\beta = (V_\beta, E_\beta)$ con $V_\beta = \{5, 6, 7\}$ y $E_\beta = \{(5, 6), (5, 7)\}$.

3) Adicionalmente, una capa cruzada viene representada por:

$$E_{\alpha\beta} = \{(1_\alpha, 6_\beta), (4_\alpha, 7_\beta)\}.$$

Figura 1. Ejemplo de una red multicapa



En el caso de las redes multicapa, estas también pueden representarse definiendo una **matriz de adyacencia** para cada capa. Así, por ejemplo, la capa G_α la denotamos como $A^{[\alpha]} = (a_{ij}^\alpha) \in \mathbb{R}^{N_\alpha \times N_\alpha}$, donde:

$$a_{ij}^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i^\alpha, v_j^\alpha) \in E_\alpha \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (1)$$

Y una matriz de adyacencia correspondiente a las capas cruzadas $A^{[\alpha\beta]} = (a_{ij}^{\alpha\beta}) \in \mathbb{R}^{N_\alpha \times N_\beta}$ cuyos elementos se definen mediante:

$$a_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i^\alpha, v_j^\beta) \in E_{\alpha\beta} \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (2)$$

Estas definiciones pueden extenderse también al caso de redes dirigidas o ponderadas. Además de las definiciones presentadas, podemos definir también la **red de proyección** de \mathcal{M} , como una monocapa $\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, donde \tilde{V} es la unión disjunta de los nodos de V_1, \dots, V_m ,

$$\tilde{V} = \bigcup_{\alpha=1}^M V_\alpha,$$

mientras \tilde{E} viene dado por

$$\tilde{E} = \left(\bigcup_{\alpha=1}^M E_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M E_{\alpha\beta} \right), \quad (3)$$

De esta manera, $\tilde{\mathcal{M}}$ constituye un grafo cuya matriz de adyacencia, denominada **matriz de supra-adyacencia** es la siguiente:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^1 & A^{12} & \dots & A^{1M} \\ A^{21} & A^2 & \dots & A^{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{M1} & A^{M2} & \dots & A^M \end{pmatrix} \quad (4)$$

1.1.1. Red multiplex

Un caso particular de las redes multicapa, denominadas **redes multiplex**, es aquel donde las redes están constituidas por un conjunto fijo de nodos con conexiones de diferente naturaleza (nodos replicados), y las únicas conexiones intercapa permitidas son entre nodos que representan la misma entidad en las diferentes capas. Formalmente, como todas las capas contienen los mismos nodos, podemos definir $V_1 = V_2 = \dots = V_M = V$ con las conexiones intercapa $E_{\alpha\beta} = \{(v_i^\alpha, v_i^\beta), i \in V, \alpha \neq \beta\}$. En este caso, las submatrices $A^{\alpha\beta}$ de la ecuación 4 tienen la forma $A^{\alpha\beta} = I_N$, donde I_N es la matriz identidad.

Una forma particular de representar una red multiplex es considerando la **red multiplex agregada** $\tilde{\mathcal{G}} = (V, \tilde{E})$, que es el resultado de tomar en cuenta todas las interacciones de la red multiplex, pero sin considerar las diferencias entre los diferentes tipos de enlaces, y posee una matriz de adyacencia \tilde{a} cuyos elementos a_{ij} son iguales a uno solo si existe un enlace en una o más capas:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{\alpha=1}^M a_{ij}^\alpha > 0, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (5)$$

Matriz identidad

Es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, cuyos elementos de la diagonal principal son unos (1) y todos los demás elementos son ceros (0), y que tiene como propiedad ser el elemento neutro para el producto de matrices cuadradas.

1.1.2. Red temporal

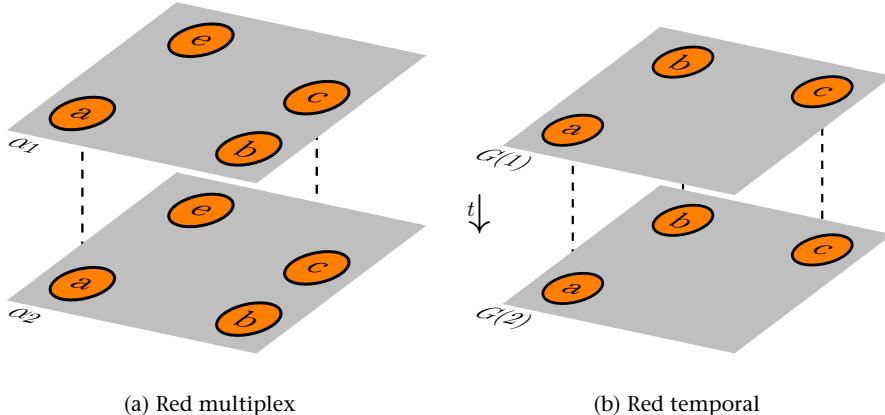
Otro caso particular de redes multicapa usadas para describir la dinámica temporal de una red compleja son las **redes temporales**. En este tipo de redes también nos encontramos con un conjunto de nodos replicados, pero donde los enlaces entre nodos se activan o desactivan (cambian) en el tiempo, en que cada instante de tiempo forma una capa de la red.

En este caso, el conjunto de capas $\mathcal{G} = \{G_t, t = 0, \dots, T\}$ con $G_t = G(t)$, $E_{\alpha\beta} = \emptyset$ si $\beta \neq \alpha + 1$ y $E_{\alpha,\alpha+1} = \{(v_i^\alpha, v_i^{\alpha+1}), i \in V_\alpha \cap V_{\alpha+1}\}$.

En este caso particular también es posible construir la red agregada si se desprecia la naturaleza temporal de los enlaces, cuya matriz de adyacencia tiene la misma forma que la ecuación 5.

La figura 2a muestra una red multiplex con dos capas, cuatro nodos y dos conexiones intercapa. La figura 2b muestra una representación de una red temporal como una red multicapa, donde cada instante de tiempo $t = 1, 2, \dots$, es representado a una capa diferente. Además de estos dos casos particulares, el formalismo de redes multicapa engloba también a las redes multidimensionales, redes interconectadas e hipergrafos, entre otras. No obstante, su estudio detallado escapa de los objetivos de este módulo.

Figura 2. Ejemplos de red multiplex y red temporal



1.2. Caracterización estructural de las redes multicapa

Para caracterizar la estructura de las redes multicapa, también podemos extender algunas métricas que hemos introducido previamente para caracterizar grafos. No obstante, dado que las conexiones de cada capa representan distintos tipos de interacciones, es importante extender estas medidas teniendo en cuenta las distinciones existentes en cada capa de la red.

1.2.1. Grado de un nodo

Es una de las principales medidas de centralidad en el análisis de redes, definiendo como el número de aristas que posee un nodo v_i en una capa α . En el caso de las redes multicapa, se representa como el vector:

$$\mathbf{k}_{v_i}^{\alpha} = k_{v_i}^{\alpha,1}, k_{v_i}^{\alpha,2}, \dots, k_{v_i}^{\alpha,M}, \quad (6)$$

donde $k_{v_i}^{\alpha,\beta} = \sum_j a_{ij}^{\alpha,\beta}$ es el número total de aristas que conectan al nodo v_i^{α} a otros nodos en la capa β .

Lectura complementaria

S. Boccaletti y otros (2014). «The structure and dynamics of multilayer networks». *Physics Reports* (vol. 544, págs. 1-122). DOI: 10.1016/j.physrep.2014.07.001

En el caso de las redes multiplex o temporales, se representa como:

$$\mathbf{k}_{v_i} = k_{v_i}^1, k_{v_i}^2, \dots, k_{v_i}^M, \quad (7)$$

donde $k_{v_i}^\alpha = \sum_j a_{ij}^\alpha$ es el grado del nodo v_i en la capa $\alpha = 1, 2, \dots, M$. Esta representación también pueden extenderse a redes multicapa dirigidas o ponderadas.

Adicionalmente, es posible definir el grado del nodo v_i en la red agregada como:

$$\mathbf{K}_{v_i} = \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}, \quad (8)$$

y la multiplicidad v_{ij} de los nodos v_i y v_j en la red agregada, que permite cuantificar en cuantas capas existe un enlace entre ellos $v_{ij} = \sum_{\alpha=1}^M a_{ij}^\alpha$.

1.2.2. Distribución de grado

En redes multicapa, definimos la distribución de grados $P^\alpha(\mathbf{k})$ como la probabilidad de que un nodo aleatorio de la capa α tenga un grado multicapa $\mathbf{k}_{v_i}^\alpha = \mathbf{k}$ y viene dada por:

$$P^\alpha(\mathbf{k}) = \frac{N^{[\alpha]}(\mathbf{k})}{N_\alpha}, \quad (9)$$

donde $N^{[\alpha]}(\mathbf{k})$ indica el número de nodos de la capa α con grado $\mathbf{k}_{v_i}^\alpha = \mathbf{k}$. De forma similar, podemos definir la distribución de grado en redes multiplex $P(\mathbf{k})$ como la probabilidad de que un nodo aleatorio tenga un grado $\mathbf{k}_{v_i} = \mathbf{k}$:

$$P(\mathbf{k}) = \frac{N(\mathbf{k})}{N}, \quad (10)$$

donde $N(\mathbf{k})$ expresa el número de nodos con grado $\mathbf{k}_{v_i} = \mathbf{k}$.

1.2.3. Coeficiente de agrupamiento

Cuantifica el nivel de agrupación de un nodo con sus vecinos. En el caso de redes multicapa, puede ser definido de diversas maneras. Una forma de definirlo es la siguiente:

$$V_C^{\mathcal{M}}(v_i) = \frac{2 \sum_{\alpha=1}^M |E_\alpha(v_i)|}{\sum_{\alpha=1}^M |\Gamma_\alpha(v_i)| (|\Gamma_\alpha(v_i)| - 1)}, \quad (11)$$

donde, de manera similar a las redes monocapa, $\Gamma_\alpha(v_i)$ es el conjunto de nodos vecinos del nodo v_i en el grafo proyectado $\tilde{\mathcal{M}}$ de la red multicapa que pertenecen a la capa α , y $E_\alpha(i) = \{(n_{v_k}^\alpha, n_{v_j}^\alpha) \in E_\alpha; v_k, v_j \in \Gamma_\alpha(v_i)\}$. No obstante, se han introducido diferentes generalizaciones al coeficiente de agrupamiento en redes multicapa.

Si bien las medidas introducidas hasta ahora son útiles para identificar nodos relevantes en las redes multicapa, si se quiere tener una visión más global del funcionamiento de estas es necesario introducir estructuras métricas más generales.

1.2.4. Longitud de camino más corto

De forma análoga a las redes monocapa, en las multicapa también es posible definir el *camino* como la secuencia de aristas que se deben atravesar para llegar de un nodo origen a un nodo destino, pero considerando el conjunto completo de enlaces $E(\mathcal{M}) = \{E_1, \dots, E_M\} \cup \mathcal{E}$, donde a diferencia de un *walk* cada nodo es visitado solo una vez. Se puede definir así la longitud de camino más corto (*shortest path length*) entre dos nodos, como el camino mínimo entre estos nodos. Es decir, el número mínimo de aristas que habría que recorrer para ir de un nodo origen al nodo destino, pero teniendo en cuenta que en redes multicapa tenemos aristas de distinta naturaleza (intra e intercapa).

1.2.5. Diámetro de la red multicapa

Para introducir la definición del diámetro de la red multicapa, debemos introducir primero la distancia $d(v_i, v_j)$ entre dos nodos v_i y v_j como la longitud del camino más corto que conecta dichos nodos. Los caminos de menor longitud se denominan *distancias geodésicas*. Entonces, de forma análoga a las redes simples, se define el diámetro de la red multicapa como la distancia máxima $D(\mathcal{M})$ entre cualquier par de nodos de \mathcal{M} de la red.

Teniendo estos conceptos en mente, podemos introducir ahora la **longitud de caminos característica**, en inglés *characteristic path length*, como una cantidad que sirve para evaluar, en cierta medida, el rendimiento de la red, y cuya forma se define como:

$$L(\mathcal{M}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{v_i, v_j \\ v_i \neq v_j}} d(v_i, v_j), \quad (12)$$

donde N es el número total de nodos. Un valor elevado de esta longitud, en comparación al tamaño total de la red, sirve de indicativo de la dificultad de comunicación que existe entre los nodos. A su vez, podemos introducir la **eficiencia de la red multicapa** como:

$$L(\mathcal{M}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{v_i, v_j \\ v_i \neq v_j}} \frac{1}{d(v_i, v_j)} \quad (13)$$

Respecto a la identificación de la **estructura de comunidades** en redes multicapa, se han propuesto diferentes enfoques, a través de la optimización de funciones objetivo como modularidad, que han sido generalizadas directamente a una definición para redes multicapa. El lector interesado puede encontrar más información en la bibliografía para profundizar en este tema.

Lectura complementaria

Xinyu Huang y otros (2021). «A survey of community detection methods in multilayer networks». *Data Mining and Knowledge Discovery* (vol. 35, págs. 1-45). DOI: 10.1007/s10618-020-00716-6

1.3. Correlaciones estructurales en redes multiplex

Habitualmente, las redes multiplex reales exhiben características estructurales que están altamente correlacionadas, por lo tanto, explorar algunas de estas correlaciones nos permite extraer información relevante sobre su funcionamiento. Algunos de los principales tipos de correlaciones estructurales estudiados hasta el momento incluyen las correlaciones de grado intercapa y el solapamiento y multigrados, que veremos en detalle a continuación.

1.3.1. Correlaciones de grado intercapa

Las correlaciones de grado de un nodo en diferentes capas pueden correlacionarse tanto positivamente como negativamente. De esta forma, podemos diferenciar si un nodo está fuertemente (o débilmente) conectado en las diferentes capas, o si, por el contrario, se encuentra fuertemente conectado en una capa, pero débilmente en otra. Para caracterizar este tipo de correlaciones, se han desarrollado diferentes medidas.

Un ejemplo de medida podría ser el cálculo de la probabilidad de tener un nodo v_i con un grado $k_{v_i}^\alpha$ en la capa α y grado $k_{v_i}^\beta$ en la capa β . Su fórmula de cálculo se describe a continuación:

$$P(k^\alpha | k^\beta) = \frac{P(k^\alpha, k^\beta)}{\sum_{k^\alpha} P(k^\alpha, k^\beta)}, \quad (14)$$

donde la matriz $P(k^\alpha, k^\beta)$ viene definida por:

$$P(k^\alpha, k^\beta) = \frac{N(k^\alpha, k^\beta)}{N}, \quad (15)$$

y $N(k^\alpha, k^\beta)$ es el número de nodos que tienen grado k^α en la capa α y grado k^β en la capa β .

A partir de esta matriz, es posible determinar los patrones de correlación de grado intercapas. A continuación presentamos algunos ejemplos:

- **Grado promedio en la capa α** condicionado a un grado en la capa β :

$$\bar{k}^\alpha(k^\beta) = \sum_{k^\alpha} k^\alpha P(k^\alpha | k^\beta) = \frac{\sum_{k^\alpha} k^\alpha P(k^\alpha, k^\beta)}{\sum_{k^\alpha} P(k^\alpha, k^\beta)}. \quad (16)$$

Cuando esta expresión sea independiente de k^β , tendremos que los grados en las dos capas no estarán correlacionados. Mientras que si la expresión es creciente (o decreciente) en k^β , los grados de los nodos en las dos capas exhibirán correlaciones positivas (o negativas).

- **Coeficiente de correlación de Pearson.** Este coeficiente $r_{\alpha\beta}$ está definido por:

$$r_{\alpha\beta} = \frac{\langle k^\alpha k^\beta \rangle - \langle k^\alpha \rangle \langle k^\beta \rangle}{\sigma_\alpha \sigma_\beta}, \quad (17)$$

donde $\langle k^\alpha k^\beta \rangle$, $\langle k^\alpha \rangle$ y σ_α tiene la forma:

$$\langle k^\alpha \rangle = \frac{1}{N} \sum_{v_i=1}^N k_{v_i}^\alpha,$$

$$\langle k^\alpha k^\beta \rangle = \frac{1}{N} \sum_{v_i=1}^N k_{v_i}^\alpha k_{v_i}^\beta, \quad (18)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{v_i=1}^N \left[(k_{v_i}^\alpha - \langle k^\alpha \rangle)^2 \right]$$

- **Coeficiente de correlación de Spearman.** Este coeficiente $\rho_{\alpha\beta}$ está dado por:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{\langle x^\alpha x^\beta \rangle - \langle x^\alpha \rangle \langle x^\beta \rangle}{\hat{\sigma}_\alpha \hat{\sigma}_\beta}, \quad (19)$$

donde x^α y x^β son los rangos de los grados $k_{v_i}^\alpha, k_{v_i}^\beta$ dentro de las secuencias $\{k_{v_i}^\alpha\}, \{k_{v_i}^\beta\}$, respectivamente, y σ_α tiene la forma:

$$\langle x^\alpha \rangle = \frac{1}{N} \sum_{v_i=1}^N x_{v_i}^\alpha,$$

$$\langle x^\alpha x^\beta \rangle = \frac{1}{N} \sum_{v_i=1}^N x_{v_i}^\alpha x_{v_i}^\beta, \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{v_i=1}^N \left[(x_{v_i}^\alpha - \langle x^\alpha \rangle)^2 \right]$$

1.3.2. Solapamiento y multigrados

Otra forma en la que los patrones de conectividad de los nodos se pueden correlacionar en dos o más capas es a través del **solapamiento** (*overlapping*) en sus enlaces o en los grados de sus nodos. Es decir, por la presencia simultánea de enlaces en dos capas diferentes.

En el caso de redes sociales, por ejemplo, esto puede interpretarse cuando tenemos una fracción de amigos con los que nos comunicamos a través de múltiples medios (capas), como pueden ser el teléfono, el correo electrónico y la mensajería instantánea. El solapamiento se puede cuantificar de forma global o local entre dos capas, o por los multigrados de los nodos.

Para medir la importancia de un nodo en la red podemos empezar por definir el **solapamiento de los grados de un nodo** sobre las distintas capas como:

$$O_{v_i} = \sum_{\alpha=1}^M k_{v_i}^{\alpha}. \quad (21)$$

En la misma línea, es posible definir el **solapamiento total entre capas**, calculado entre dos capas α y β , como el número total de aristas en común en ambas capas:

$$O^{\alpha\beta} = \sum_{i < j} a_{ij}^{\alpha} a_{ij}^{\beta} \text{ con } \alpha \neq \beta. \quad (22)$$

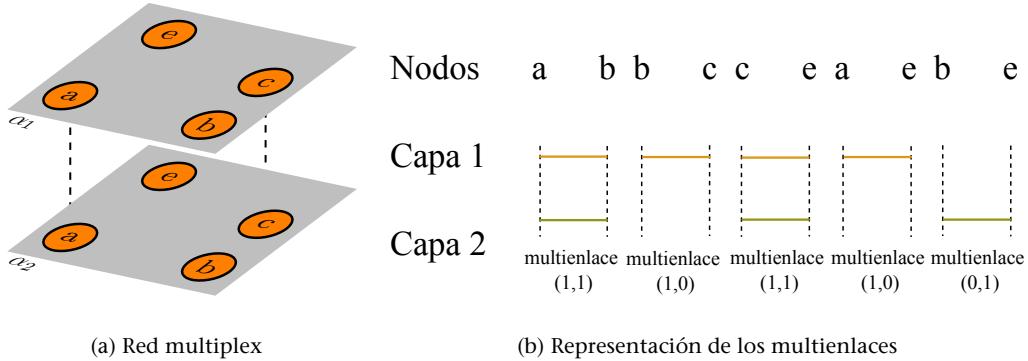
Y el **solapamiento local entre capas**, definido como el número total de vecinos del nodo v_i que son vecinos en ambas capas,

$$O_{v_i}^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\alpha} a_{ij}^{\beta}. \quad (23)$$

Otra forma de caracterizar el solapamiento de enlaces en una red multiplex es por medio del concepto de multienlaces. Un multienlace entre cualquier par de nodos v_i y v_j nos indica en qué capas de la red multiplex se encuentran conectados dichos nodos.

Por ejemplo, para la red multiplex de la figura 3 con $M = 2$ capas, los nodos a y b están conectados por un enlace en la primera capa y un enlace en la segunda. Por lo tanto, decimos que los nodos están conectados por un multienlace $(1,1)$. De manera similar, los nodos b y c están conectados por un enlace en la primera capa, mientras que no existe ningún enlace que los una en la capa α_2 . Por lo tanto, están conectados por un multienlace $(1,0)$.

Figura 3. Ejemplo de una red multiplex con sus multienlaces



Los multienlaces suelen definirse de la siguiente manera: empecemos considerando el vector $\vec{m} = (m^1, m^2, \dots, m^M)$ con $m^i \in \{0, 1\}$. Cada par de nodos v_i y v_j estará conectado por un multienlace \vec{m} , si y solo si existe un enlace entre ellos en cada capa α en la que $m^\alpha = 1$, y se encuentran desconectados en cada capa β donde $m^\beta = 0$.

Ahora, es posible definir las matrices de multiadyacencia $A^{\vec{m}}$, cuyos elementos $A_{ij}^{\vec{m}}$ serán igual a 1 siempre que exista un multienlace entre los nodos v_i y v_j , y será cero en caso contrario:

$$A_{ij}^{\vec{m}} = \prod_{\alpha=1}^M [a_{ij}^\alpha m^\alpha + (1 - a_{ij}^\alpha)(1 - m^\alpha)], \quad (24)$$

satisfaciendo la condición $\sum_{\vec{m}} A_{ij}^{\vec{m}} = 1$, para cada par de nodos v_i y v_j . Es importante remarcar que, si bien estas matrices engloban la misma información que las matrices de adyacencia descritas anteriormente en este apartado, estas resultan útiles para la caracterización de propiedades estructurales como correlaciones y solapamiento.

Finalmente, es posible definir el multigrado de $k_{v_i}^{\vec{m}}$ de un nodo v_i como el número total de multienlaces que posee:

$$\bar{k}_{v_i}^{\vec{m}} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{\vec{m}}. \quad (25)$$

Y la distribución de multigrado $P(\{\bar{k}^{\vec{m}}\})$, que indica la probabilidad de que un nodo aleatorio en una red multiplex tenga un multigrado $\bar{k}_{v_i}^{\vec{m}} = k^{\vec{m}}$ por cada multigrado $\vec{m} \neq 0$ como:

$$P(\{\bar{k}^{\vec{m}}\}) = \frac{N(\{\bar{k}^{\vec{m}}\})}{N}, \quad (26)$$

con $N(\{\bar{k}^{\vec{m}}\})$ indicando el número de nodos con multigrado $\vec{m} \neq 0$.

2. Modelos generativos

De manera similar a la teoría de redes clásica, la construcción de modelos de redes multicapa y el estudio de los diferentes procesos dinámicos que tienen lugar en estas, han sido de gran interés para la comunidad científica durante los últimos años. Este apartado tiene como objetivo presentar brevemente algunos de los principales modelos generativos introducidos para las redes multicapa.

2.1. Modelos generativos de redes multicapa

Como ya se explicó, la construcción de modelos de redes multicapa con ciertas características estructurales o sujetas a procesos dinámicos específicos conforma un aspecto central en el estudio de las mismas. En redes multicapa, gran parte de los modelos generativos que han sido desarrollados pueden dividirse en dos clases:

- **Modelos de crecimiento en redes multicapa:** de manera similar a los modelos clásicos de redes, como el modelo de Barabási-Albert, incluye dos ingredientes principales:
 - El *crecimiento de la red*, por aumento en el número de nodos.
 - La *conexión preferencial (preferential attachment)*, generalizada al caso multicapa.
- **Ensambles de redes multicapa:** modelos que permiten generar ensambles de redes multicapa que satisfacen diferentes propiedades estructurales, como la secuencia de grado de los nodos, por ejemplo.

A continuación, describiremos con más detalle los dos principales modelos generativos de redes multicapa mencionados.

2.1.1. Modelos de crecimiento basados en conexión preferencial

De manera similar a los modelos clásicos de redes, este modelo se basa en la noción de que, en los procesos de crecimiento de una red, las conexiones de los nodos que se incorporan a la red no se producen de forma aleatoria, sino que por el contrario siguen un mecanismo de preferencia, de acuerdo a

Lectura complementaria

Para una revisión más en profundidad, podéis consultar el capítulo 10 («Multilayer Network Models») de G. Bianconi (2018). *Multilayer Networks: Structure and Function*. Oxford University Press. ISBN: 9780198753919.

ciertas reglas. En redes multicapa, hasta el momento, contamos con modelos de crecimiento y conexión preferencial lineal y no lineal.

Modelo de conexión preferencial lineal

El modelo de crecimiento basado en conexión preferencial lineal incorpora un mecanismo de conexión preferencial en el cual los nodos que se incorporan a la red formarán sus enlaces de forma preferente con aquellos nodos de grado más alto. Este mecanismo es capaz de producir capas *libres de escala (scale-free networks)*, que correlacionan positivamente con los grados de las diferentes capas de la red.

A continuación, introduciremos brevemente este modelo para el caso de una red multiplex compuesta por dos capas. A un tiempo $t = 1$ la red, que contiene N_0 nodos y $m_0 > m$ enlaces en cada capa, el modelo evoluciona de la siguiente forma:

- **Crecimiento:** a cada instante de tiempo $t \geq 1$ un nuevo nodo (replicado en cada capa) es añadido a la red y está conectado al resto de nodos de su capa con m enlaces.
- **Conexión preferencial generalizada:** cada nodo añadido a las capas $\alpha = \{1,2\}$ formará un enlace con un nodo v_i con una probabilidad Π_i^α , que será proporcional a la combinación lineal del grado $k_{v_i}^1$ del nodo v_i en la capa $\alpha = 1$ y del grado $k_{v_i}^2$ de la capa $\alpha = 2$:

$$\begin{aligned}\Pi_{v_i}^1 &\propto c_{1,1}k_{v_i}^1 + c_{1,2}k_{v_i}^2, \\ \Pi_{v_i}^2 &\propto c_{2,1}k_{v_i}^1 + c_{2,2}k_{v_i}^2\end{aligned}\tag{27}$$

donde $c_{\alpha,\beta} \in [0,1]$ con $c_{1,1} + c_{1,2} = c_{2,1} + c_{2,2} = 1$.

Si $c_{1,1} = c_{2,2} = 1$, el modelo reduce a dos modelos de Barabási-Albert desacoplados. Para este caso particular, es posible encontrar una solución analítica, calculando exactamente el grado medio en una capa, condicionado al grado en la otra capa.

La probabilidad de tener en una capa $\alpha = 1$ un grado $k_{v_i}^1 = k$ condicionado a tener un grado $k_{v_i}^2 = q$ en la capa $\alpha = 2$ tiene la forma:

$$P(k,q) = \frac{2\Gamma(2+2m)\Gamma(k)\Gamma(q)\Gamma(k+q-2m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(m)\Gamma(k+q+3)\Gamma(k-m+1)\Gamma(q-m+1)}.\tag{28}$$

De esta manera, el grado promedio condicionado $\bar{k}(q)$ viene dado por:

$$\bar{k}(q) = \sum_{k^1} = k^1 P(k^1 | k^2 = q) = \frac{m(q+2)}{1+m}. \quad (29)$$

Y así se tienen correlaciones de grado positivas entre ambas capas. En este caso, la distribución de grado de cada capa está dada por la distribución de grado del modelo de Barabási-Albert.

Modelo de conexión preferencial no lineal

Un caso particular de modelo generativo en redes multicapa, capaz de generar redes con correlaciones de grado negativas entre los nodos de las distintas capas, es el modelo de conexión preferencial no lineal.

Continuando con el ejemplo anterior para una red compuesta de dos capas, con N_0 nodos y $m_0 > m$ enlaces en cada capa a $t = 1$, el modelo evoluciona de la manera siguiente:

- **Crecimiento:** a cada instante de tiempo $t \geq 1$ un nuevo nodo (replicado en cada capa) es añadido a la red y está conectado al resto de nodos de su capa con m enlaces.
- **Conexión preferencial generalizada:** cada nodo añadido a la red formará un enlace con un nodo v_i con una probabilidad Π_i^1 , para la capa $\alpha = 1$ y con probabilidad Π_i^2 para la capa $\alpha = 2$:

$$\begin{aligned} \Pi_{v_i}^1 &\propto (k_{v_i}^{[1]})^\eta (k_{v_i}^{[2]})^\theta, \\ \Pi_{v_i}^2 &\propto (k_{v_i}^{[2]})^\theta (k_{v_i}^{[1]})^\eta \end{aligned} \quad (30)$$

donde $k_{v_i}^{[1]}$ es el grado del nodo v_i en la capa $\alpha = 1$, $k_{v_i}^{[2]}$ su grado en la capa $\alpha = 2$, finalmente η y θ son dos parámetros del modelo que toman valores reales. Si ambos parámetros toman valores positivos, los nodos de alto grado en cada capa serán los más propensos a adquirir nuevos enlaces en ambas capas. En el caso de tener $\eta > 0$ y $\theta < 0$, los nodos que tienen un alto grado en una capa serán más propensos a adquirir nuevos enlaces en esta capa que en la capa en la que están menos conectados.

Por lo tanto, para $\eta > 0$, tendremos correlaciones de grado negativas cuando $\theta > 0$ y correlaciones positivas si $\theta < 0$.

Además de generar correlaciones de grado positivas y negativas para ciertos valores de sus parámetros η y θ , es capaz también de exhibir condensación

de enlaces, lo cual significa que, bajo ciertas condiciones, un nodo en la red (el más viejo) puede adquirir la mayoría de las conexiones de la misma. Se ha demostrado que la condición para la condensación de enlaces ocurre para $\eta > \min(1, 1 - \theta)$.

2.1.2. **Ensambles de redes multicapa**

Como se explicó al inicio de este apartado, los modelos de *ensambles* de redes son modelos que permiten generar redes multicapa que preservan alguna propiedad estructural de la red, mientras que el resto puede variar de forma aleatoria. Los ensambles de redes multicapa han sido usados ampliamente en el análisis de redes como modelos nulos. En este subapartado introduciremos el formalismo matemático desarrollado para construir ensambles de redes multiplex.

Ensambles de redes multiplex

Para una red multiplex formada por N nodos $v_i = 1, 2, \dots, N$ y M capas, donde $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_M)$ constituye el conjunto de todas las redes G_α en la capa $\alpha = \{1, 2, \dots, M\}$ que conforman la multiplex. El ensamble multiplex es definido a partir de la probabilidad de $P(\vec{G})$ para cada posible multiplex y la entropía del *ensamble* multiplex se define como:

$$S = - \sum_{\vec{G}} P(\vec{G}) \log P(\vec{G}). \quad (31)$$

Dado un conjunto de propiedades estructurales a preservar (restricciones), es posible construir el ensamble de redes que preserven dichas propiedades al maximizar la entropía del ensamble dada por la ecuación 31. Estos ensambles puede ser microcanónicos, en los que las restricciones se imponen de forma estricta, es decir, cada red multiplex del ensamble preserva la propiedad estructural asociada, como el número total de enlaces o la secuencia de grados por cada capa. También es posible producir ensambles canónicos, donde las restricciones se imponen de forma suave. Esto quiere decir que, en lugar de fijar la propiedad estructural en cada multiplex, como el número de enlaces por capa, estos pueden fluctuar a lo largo de las capas, siempre que el número promedio en el ensamble se mantenga. A su vez, los ensambles pueden ser correlacionados, en los que los enlaces entre las diferentes capas se correlacionan, o no correlacionados.

Ensambles multiplex no correlacionados

Para redes multiplex en las que no hay correlaciones entre los enlaces en las diferentes capas, la probabilidad $P(\vec{G})$ de la red puede reescribirse en función de las probabilidades $P(G_\alpha)$ de cada capa como:

$$P(\vec{G}) = \prod_{\alpha=1}^M P_\alpha(G_\alpha). \quad (32)$$

Y la entropía se puede reescribir como el sumatorio sobre las capas, tal como se indica a continuación:

$$S = \sum_{\alpha=1}^M S^\alpha = - \sum_{\alpha=1}^M P_\alpha(G_\alpha) \log P_\alpha(G_\alpha). \quad (33)$$

Podemos distinguir dos casos principales, conocidos como ensamble canónico y ensamble microcanónico. A continuación, veremos brevemente estas dos aproximaciones.

- **Ensamble canónico:** para este caso, la restricción estructural es sobre la secuencia de grado esperada $\bar{k}_{v_i}^\alpha$ y la probabilidad $P_C(\vec{G})$ de la red multiplex está definida como:

$$P_C(\vec{G}) = \prod_{\alpha=1}^M \prod_{v_i < v_j} [p_{ij}^\alpha a_{ij}^\alpha + (1 - p_{ij}^\alpha)(1 - a_{ij}^\alpha)], \quad (34)$$

donde p_{ij}^α indica la probabilidad de que exista un enlace entre los nodos v_i y v_j en la capa α y está expresada en términos de los multiplicadores de Lagrange λ_i^α como:

$$p_{ij}^\alpha = \frac{e^{-\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha}}{1 + e^{-\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha}}. \quad (35)$$

Los multiplicadores de Lagrange son fijados para satisfacer la restricción de preservar la secuencia de grado esperada en la capa α como $\bar{k}_{v_i}^\alpha = \sum_{j=1}^N p_{ij}^\alpha$. Cuya solución tiene la forma:

$$p_{ij}^\alpha = \frac{\bar{k}_{v_i}^\alpha \bar{k}_{v_j}^\alpha}{\langle \bar{k}^\alpha \rangle N}, \quad (36)$$

siempre que $\bar{k}_{v_i}^\alpha < \sqrt{\langle \bar{k}^\alpha \rangle N}$. La entropía del ensamble canónico puede también reescribirse en función de p_{ij}^α como:

$$S = - \sum_{v_i < v_j} [p_{ij}^\alpha \ln p_{ij}^\alpha + (1 - p_{ij}^\alpha) \ln(1 - p_{ij}^\alpha)], \quad (37)$$

- **Ensamble microcanónico:** en el ensamble microcanónico la restricción estructural es sobre el grado $k_{v_i}^\alpha$ de cada nodo v_i en la capa α . En este caso la probabilidad $P_M(\vec{G})$ se expresa como:

$$P_M(\vec{G}) = \frac{1}{Z} \prod_{\alpha=1}^M \prod_{v_i < v_j} \delta \left(k_{v_i}^\alpha, \sum_{v_j} a_{ij}^\alpha \right), \quad (38)$$

donde Z es una constante de normalización. Para este ensamble la entropía Σ viene dada por:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{\vec{G}} P_M(\vec{G}) \ln P_M(\vec{G}), \\ &= S - \Omega, \end{aligned} \quad (39)$$

donde S es la entropía en el ensamble canónico y Ω tiene la forma:

$$\Omega = -\ln \left[\sum_{\vec{G}} P_C(\vec{G}) \prod_{\alpha=1}^M \prod_{v_i=1}^N \delta \left(k_{v_i}^\alpha, \sum_{v_j=1}^N a_{ij}^\alpha \right) \right], \quad (40)$$

Además, de manera similar al caso canónico, si se cumple la condición $\bar{k}_{v_i}^\alpha < \sqrt{\langle \bar{k}^\alpha \rangle N}$, tenemos que Ω puede expresarse como:

$$\Omega = - \sum_{v_i=1}^N \sum_{\alpha=1}^M \ln \left[\frac{1}{\bar{k}_{v_i}^\alpha!} (k_{v_i}^\alpha)^{k_{v_i}^\alpha} e^{-k_{v_i}^\alpha} \right] \quad (41)$$

Ensambles multiplex correlacionados

Para este caso no es posible reescribir la probabilidad $P(\vec{G})$ como en el caso no correlacionado, ecuación 32. En cambio, estos ensambles permiten producir redes multiplex con niveles controlados de solapamiento de sus enlaces, tanto para el caso canónico como para el microcanónico.

- **Ensamble canónico:** bajo este ensamble, es posible generar redes multiplex con solapamiento de enlaces al fijar la secuencia de multienlaces esperada. Luego, la probabilidad $P(\vec{G})$ de la red multiplex condicionada por dicha restricción se expresa como:

$$P_C(\vec{G}) = \prod_{v_i < v_j} \sum_{\vec{m}} p_{ij}^{\vec{m}} A_{ij}^{\vec{m}}, \quad (42)$$

donde $p_{ij}^{\vec{m}}$ indica la probabilidad de que un par de nodos v_i y v_j se encuentren conectados por un multienlace y $\mathbf{A}^{\vec{m}}$ es la matriz de multiadyacencia. La entropía del ensamble puede entonces reescribirse en términos de las probabilidades $p_{ij}^{\vec{m}}$ como:

$$S = - \sum_{v_i < v_j} \sum_{\vec{m}} p_{ij}^{\vec{m}} \ln p_{ij}^{\vec{m}}, \quad (43)$$

y donde dichas probabilidades se expresan a su vez, en función de los multiplicadores de Lagrange:

$$p_{ij}^{\vec{m}} = \frac{e^{-\lambda_{v_i}^{\vec{m}} - \lambda_{v_j}^{\vec{m}}}}{1 + \sum_{\vec{m} \neq 0} e^{-\lambda_{v_i}^{\vec{m}} - \lambda_{v_j}^{\vec{m}}}} \quad (44)$$

donde, para $\vec{m} \neq 0$ y $\vec{m} = e^{-\lambda_{v_i}^{\vec{m}} - \lambda_{v_j}^{\vec{m}}}$, tenemos:

$$\vec{p}_{ij}^0 = 1 - \sum_{\vec{m} \neq 0} p_{ij}^{\vec{m}}.$$

A su vez, los multiplicadores de Lagrange están sujetos a la restricción:

$$\vec{k}_{v_i}^{\vec{m}} = \sum_{v_j=1}^N p_{ij}^{\vec{m}},$$

con $\vec{m} \neq 0$. Finalmente las probabilidades $p_{ij}^{\vec{m}}$ se pueden expresar como:

$$p_{ij}^{\vec{m}} = \frac{\vec{k}_{v_i}^{\vec{m}} \vec{k}_{v_j}^{\vec{m}}}{\langle \vec{k}^{\vec{m}} \rangle N}, \quad (45)$$

siempre que se cumpla la condición $\vec{k}_{v_i}^{\vec{m}} < \sqrt{\langle \vec{k}^{\vec{m}} \rangle N}$. Por último, es posible construir un ensamble multiplex correlacionado en el caso canónico, haciendo uso de la ecuación 44 y/o ecuación 45.

- **Ensamble microcanónico:** para el caso microcanónico, donde la restricción se impone sobre cada multienlace en cada capa de la multiplex, la probabilidad $P(\vec{G})$ se expresa como:

$$P_M(\vec{G}) = \frac{1}{Z} \delta \left(\vec{k}_{v_i}^{\vec{m}} \sum_{v_j} a_{ij}^{\vec{m}} \right), \quad (46)$$

donde Z es la constante de normalización y la entropía Σ viene dada por:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{\vec{G}} P_M(\vec{G}) \ln P_M(\vec{G}), \\ &= S - \Omega, \end{aligned} \quad (47)$$

donde S es la entropía en el ensamble canónico, y con Ω toma la forma:

$$\Omega = -\ln \left[\sum_{\vec{G}} P_C(\vec{G}) \prod_{v_i=1}^N \prod_{\vec{m} \neq 0} \delta \left(k_{v_i}^a, \sum_{v_j=1}^N A_{ij}^{\vec{m}} \right) \right], \quad (48)$$

Además, de manera similar al caso canónico, si se cumple la condición $k_{v_i}^{\vec{m}} < \sqrt{\langle k^{\vec{m}} \rangle N}$, Ω puede reescribirse como:

$$\Omega = -\sum_{v_i=1}^N \sum_{\vec{m} \neq 0} \ln \left[\frac{1}{k_{v_i}^{\vec{m}}!} \left(k_{v_i}^{\vec{m}} \right)^{k_{v_i}^{\vec{m}}} e^{-k_{v_i}^{\vec{m}}} \right] \quad (49)$$

2.2. Modelos generativos de redes temporales

Como se mencionó anteriormente, es posible modelar redes donde sus enlaces pueden activarse (establecer un enlace) o desactivarse (remover un enlace) a lo largo del tiempo, usando redes temporales. Resulta claro pensar que en estas redes algunos nodos pueden ser más propensos que otros a activarse o establecer enlaces en cualquier instante de tiempo, provocando un impacto en la topología y dinámica de la red.

2.2.1. Modelo de actividad temporal

Esta heterogeneidad de los nodos puede modelarse asumiendo que a una red temporal con N nodos, se le asigna una *actividad temporal* $c_{v_i} = \eta x_{v_i}$, a cada nodo v_i , que se mantiene fija durante toda la evolución dinámica de la red. El valor de x_{v_i} es extraído aleatoriamente de una distribución dada $F(x)$ y η es un parámetro usado para ajustar el número promedio de nodos activos en un tiempo t de la red. El modelo genera una red temporal donde cada capa representa una ventana temporal δ , con $M = T$ capas.

En cada intervalo de tiempo t , los nodos establecen conexiones con m nodos elegidos de forma aleatoria, con una probabilidad proporcional a su nivel actividad temporal $c_{v_i}\delta t$. Cada capa de la red se extrae de forma independiente, pero todas están condicionadas al nivel de actividad temporal de los nodos. Considerando $T/N \ll 1$, es posible derivar una expresión para la distribución

de grado agregada, que está dada por la distribución de actividades temporales de los nodos y es capaz de capturar apropiadamente parámetros de actividad en redes empíricas (N. Perra y otros, 2012):

$$P(\mathbf{K}) \simeq \frac{1}{Tm\eta} F \left[\frac{\mathbf{k}}{Tm\eta} \right]. \quad (50)$$

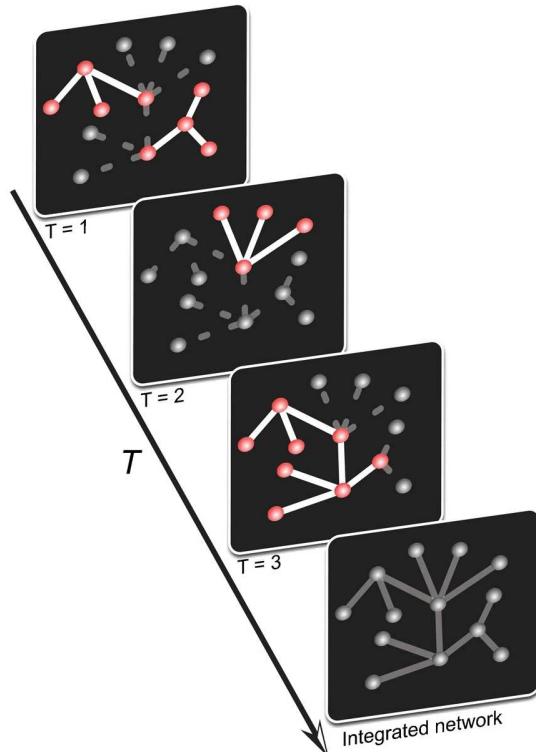
Para una derivación detallada de la ecuación 50, además de extensiones del modelo de actividad temporal, podéis consultar la bibliografía y lecturas recomendadas.

La figura 4 muestra una representación esquemática del modelo de actividad temporal para una red de 13 nodos y 3 capas. Para tres instantes de tiempo, la figura muestra los nodos activos resaltados en rojo.

Lectura complementaria

N. Perra; B. Gonçalves; R. Pastor-Satorras y otros (2012). «Activity driven modeling of time varying networks». Sci. Rep., 2, 469. DOI: 10.1038/srep00469

Figura 4. Representación esquemática del modelo de actividad temporal



Fuente: N. Perra y otros. (2012)

2.2.2. Modelo exponencial de grafo aleatorio temporal

Este modelo resulta de gran utilidad ya que, a diferencia del modelo de actividad temporal, en su formulación original, permite incluir efectos de memoria.

Empecemos considerando una red temporal con M capas, donde cada capa es descrita por matrices de adyacencia a^α con $\alpha = 1, 2, \dots, M$ que contienen las interacciones que ocurren en el instante temporal α de la red. Si asumimos

que cada instante temporal solo depende del instante anterior, la probabilidad $P([a_{ij}^\alpha])_{\alpha=1,2\dots M}$ de la red, viene dada por:

$$P([a_{ij}^\alpha])_{\alpha=1,2\dots M} = \prod_{\alpha=2}^M \tilde{P}(a^\alpha | a^{\alpha-1}) \hat{P}(a^1), \quad (51)$$

donde $\hat{P}(a^1)$ es la probabilidad de que el primer instante temporal $\alpha = 1$ tenga la matriz de adyacencia a^1 y $\tilde{P}(a^\alpha | a^{\alpha-1})$ es la probabilidad de que el instante α tenga la matriz de adyacencia a^α , condicionada al hecho de que el instante temporal anterior haya tenido la matriz de adyacencia $a^{\alpha-1}$. Si asumimos, también, que cada segmento temporal es una red de máxima entropía sujeta a una serie de restricciones que también dependen de las propiedades estructurales del segmento temporal anterior, la probabilidad condicionada $\tilde{P}(a^\alpha | a^{\alpha-1})$ tiene la forma:

$$\tilde{P}(a^\alpha | a^{\alpha-1}) = \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_\mu \lambda_\mu F_\mu(a^\alpha | a^{\alpha-1}) \right), \quad (52)$$

donde $F_\mu(a^\alpha | a^{\alpha-1})$ representa las diferentes propiedades estructurales de la red impuestas en promedio (restricciones suaves), λ_μ indican los multiplicadores de Lagrange que imponen los diferentes tipos de restricciones. Las restricciones consideradas suelen ser propiedades globales de la red, tales como la densidad de los enlaces.

3. Procesos dinámicos en redes multicapa

Como se ha mencionado a lo largo de este módulo, el estudio de diversos tipos de sistemas bajo la perspectiva de redes tiene como objetivo comprender el comportamiento y el funcionamiento de dichos sistemas. El estudio y la caracterización de su estructura constituye una parte fundamental para lograr dicho objetivo. Por ejemplo, estudiamos la estructura de la red Internet para comprender cómo fluye el tráfico en esta red, o entender cómo podemos modificarla o reorganizarla para que funcione mejor.

El siguiente paso consiste en hacer la conexión entre la estructura de la red y los procesos dinámicos que se llevan a cabo en ella. Por ejemplo, se ha dedicado un gran esfuerzo al estudio de los fallos y la robustez de las redes, o al estudio de procesos de propagación como las epidemias, por mencionar un par de ejemplos. Este apartado está dedicado a dar una breve descripción de los avances producidos en redes multicapa, para el estudio de algunos de estos procesos.

3.1. Percolación

Los desarrollos provenientes de la teoría de percolación han sido aplicados al campo de las redes complejas para estudiar aspectos como la aparición y la robustez (ante variaciones en su número de nodos o enlaces, por ejemplo) de una *componente gigante* en una red. Los procesos de percolación han sido uno de los procesos dinámicos más estudiados en la teoría clásica de redes y, por lo tanto, cabe esperar que hayan sido generalizados al caso de las redes multicapa. Por ejemplo, en redes multicapa con nodos interdependientes entre las diferentes capas, un fallo en una fracción pequeña de nodos puede propagarse en cascada y afectar a una gran parte de la red global.

La robustez de las redes multicapa puede ser evaluada calculando el tamaño de su *componente gigante* después de que un fallo aleatorio afecte una fracción $1 - p$ de sus nodos. En una red multiplex, por ejemplo, si asumimos que cada capa M tiene una distribución de grado de Poisson con grado medio c , la probabilidad S de que un nodo escogido de forma aleatoria pertenezca a la *componente gigante*, posterior al fallo, satisface la expresión

$$S = p \left(1 - e^{-cs}\right)^M \quad (53)$$

Es relevante remarcar que esta ecuación es comparable a la expresión para el caso de una red monocapa, excepto por el factor $M > 1$. Este factor produce

Nodos interdependientes

Se dice que un nodo es interdependiente de otro en otra capa si necesita de él para poder funcionar adecuadamente.

que la *componente gigante* emerge de forma discontinua en un valor crítico $p = p_c$, en contraste con el caso monocapa donde emerge de forma continua con una transición de segundo orden. A medida que nos acercamos al valor crítico $p = p_c$ se produce una cascada de fallos que se propaga por toda la red.

Generalizando al caso de la red multicapa donde los nodos de las diferentes capas pueden corresponder a entidades distintas, se suele asumir que el fallo inicial afecta de manera independiente a cada nodo (v_i, α) . El fallo inicial se determina a través las variables $s_{v_i\alpha}$, con $s_{v_i\alpha} = 0$ si el nodo fue afectado y $s_{v_i\alpha} = 1$ si no fue afectado.

Asumiendo que cada nodo es afectado con probabilidad $f = 1 - p_\alpha$, la probabilidad para toda la red toma la forma:

$$\hat{P}(s_{v_i\alpha}) = \prod_{\alpha=1}^M \prod_{v_i=1}^N p_\alpha^{s_{v_i\alpha}} (1-p_\alpha)^{1-s_{v_i\alpha}}, \quad (54)$$

Finalmente, en este caso, la probabilidad S de que un nodo escogido de forma aleatoria pertenezca a la *componente gigante*, posterior del fallo, satisface la expresión:

$$S = p \{ [1 - G_0(1 - \sigma)] \}^M \quad (55)$$

3.2. Modelos de propagación de epidemias

Los modelos de propagación de epidemias son uno de los procesos dinámicos que ha captado mayor interés en el campo de las redes complejas. El interés de la comunidad científica en estudiar estos procesos, adaptados a redes multicapa, resulta entonces evidente. A continuación, repasaremos brevemente los modelos de propagación SIS (susceptible-infectado-susceptible) y SIR (susceptible-infectado-recuperado) adaptados al caso multicapa.

3.2.1. Modelo SIS

Este modelo puede ser extendido al caso multiplex de dos maneras:

- Si asumimos que cada nodo presenta el mismo estado para todos sus nodos réplica, con la infección propagándose con tasas de contagio diferentes de acuerdo con los patrones de conexión entre los nodos.
- Si asumimos que cada nodo presenta un estado dinámico diferente, considerándose la misma tasa de recuperación para todos los nodos.

A continuación, introduciremos la formulación para el último caso. Para una revisión más completa, podéis consultar la bibliografía recomendada.

Para este caso, un nodo susceptible $S_{v_i}^\alpha$ en un tiempo t , conectado a un nodo infectado a través de un nodo intracapa ($\alpha = \beta$) o un nodo intercapa ($\alpha \neq \beta$), contraerá la infección en un tiempo $t + 1$ con probabilidad $\xi^{\alpha\beta}$. Por otro lado, un nodo infectado en un tiempo t se volverá susceptible en $t + 1$ con probabilidad μ :



Lectura complementaria

Se recomienda la lectura del capítulo 13 («Epidemic Spreading») de G. Bianconi (2018). *Multilayer Networks: Structure and Function*. Oxford University Press. ISBN: 9780198753919.

Este proceso puede describirse a través de las ecuaciones:

$$X_{v_i}^\alpha(t+1) = \begin{cases} (1 - X_{v_i}^\alpha(t)) & \text{con probabilidad } \pi_{v_i}^\alpha \\ X_{v_i}(t) & \text{con probabilidad } 1 - \pi_{v_i}^\alpha, \end{cases} \quad (57)$$

donde

$$\pi_{v_i}^\alpha = \begin{cases} \left[1 - \prod_{\beta=1}^M \prod_{v_j=1}^N \left(1 - \mathcal{R}_{ij}^{\alpha\beta} X_{v_j}^\beta(t) \right) \right] & \text{si } X_{v_i}^\alpha(t) = 0 \\ \mu & \text{si } X_{v_i}^\alpha(t) = 1, \end{cases} \quad (58)$$

donde, al asumir que no existen correlaciones de grado entre los nodos de la multiplex, es posible derivar una expresión para la probabilidad $p_{v_i}^\alpha(t+1)$ de que un nodo v_i^α se encuentre infectado en un tiempo $t+1$:

$$p_{v_i}^\alpha(t+1) = (1 - p_{v_i}^\alpha(t)) \left[1 - \prod_{\beta=1}^M \prod_{v_j=1}^N \left(1 - \mathcal{R}_{ij}^{\alpha\beta} p_{v_j}^\beta(t) \right) \right] + (1 - \mu)p_{v_i}^\alpha(t), \quad (59)$$

donde \mathcal{R} es una matriz expresada en términos de las matrices de adyacencia $a_{ij}^{\alpha\beta}$ y las tasas de infección $\xi^{\alpha\beta}$,

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \xi^{11} \boldsymbol{a}^{11} & \xi^{12} \boldsymbol{a}^{12} & \dots & \xi^{1M} \boldsymbol{a}^{1M} \\ \hline \xi^{21} \boldsymbol{a}^{21} & \xi^{22} \boldsymbol{a}^{22} & \dots & \xi^{2M} \boldsymbol{a}^{2M} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \xi^{M1} \boldsymbol{a}^{M1} & \check{z}x_i^{M2} \boldsymbol{a}^{M2} & \dots & \xi^{MM} \boldsymbol{a}^{MM} \end{array} \right) \quad (60)$$

Asumiendo, también, que la tasa de propagación es la misma dentro de cada capa $\xi^{\alpha\alpha} = \lambda$ y con una tasa de propagación diferente entre capas diferentes $\alpha \neq \beta$, igual a $\xi^{\alpha\beta} = \eta$ es posible establecer el umbral epidémico como:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\Lambda(\tilde{\mathcal{R}})}, \quad (61)$$

donde $\Lambda(\tilde{\mathcal{R}})$ es el máximo autovalor de la matriz normalizada $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/\lambda$ de la red multiplex.

3.2.2. Modelo SIR

La propagación epidémica en redes multicapa puede incluir casos en los que los nodos infectados mueren o se vuelven inmunes a la infección. Este caso se trata utilizando el marco del modelo Susceptible-Infectado-Recuperado (SIR). En este modelo, los nodos pueden estar en tres estados dinámicos posibles: nodos susceptibles (S_{v_i}), nodos infectados (I_{v_i}) y nodos recuperados (R_{v_i}), que no pueden infectarse de nuevo ni propagar la infección. Además, la propagación de la epidemia puede ocurrir a diferentes tasas dependiendo de las capas a través de las cuales se propagan las epidemias.

Por lo tanto, supondremos que un nodo v_i en el estado susceptible S_{v_i} conectado a un nodo v_j en el estado infectado I_{v_j} por un multienlace \vec{m} está infectado con tasa $\xi^{\vec{m}}$, mientras que cada nodo infectado I_{v_i} se recupera con tasa μ



Para este caso, la transmisibilidad de la infección, definida como la probabilidad de que un nodo infectado transmita la infección a un nodo vecino conectado por un multienlace, se encuentra determinada por:

$$\begin{aligned} \lambda^{\vec{m}} &= \frac{\xi^{\vec{m}}}{\mu} \\ T^{\vec{m}} &= \frac{\lambda^{\vec{m}}}{1 + \lambda^{\vec{m}}}. \end{aligned} \tag{63}$$

Para los casos de redes sin solapamiento de nodos, las tasas de infección solo dependerán de la capa α que establece una conexión entre pares de nodos y es posible determinar una solución analítica. Finalmente, la fracción de nodos infectados que se han recuperado al final de una epidemia tiene la forma:

$$S = \left[1 - \sum_k P(\mathbf{k}) \prod_{\alpha=1}^M (1 - T^\alpha S'_\alpha)^{k^\alpha} \right], \tag{64}$$

4. Aplicaciones en redes reales

En este apartado revisaremos algunos trabajos que se centraron en el estudio de redes reales desde la perspectiva de redes multicapa. De forma similar a la investigación tradicional de redes, las redes sociales han capturado gran parte de la atención de la comunidad científica que estudia las redes multicapa. No obstante, a continuación repasaremos también algunos estudios en redes reales en diferentes contextos.

4.1. Redes de transporte

Las redes de transporte son un ejemplo clásico de sistemas en los que la formulación multicapa puede entenderse de forma intuitiva. Tal como se explicó al inicio de este módulo, en una red de transporte multicapa, las capas pueden representar los distintos tipos de transporte en una ciudad o país (autobús, metro, tranvía), o pueden representar las distintas aerolíneas existentes de una red de aeropuertos, por mencionar algunos casos. Modelar este tipo de sistemas como redes multicapa y caracterizar algunos de los procesos dinámicos que tienen lugar en ellos resulta útil no solo desde una perspectiva teórica, sino también desde un enfoque práctico.

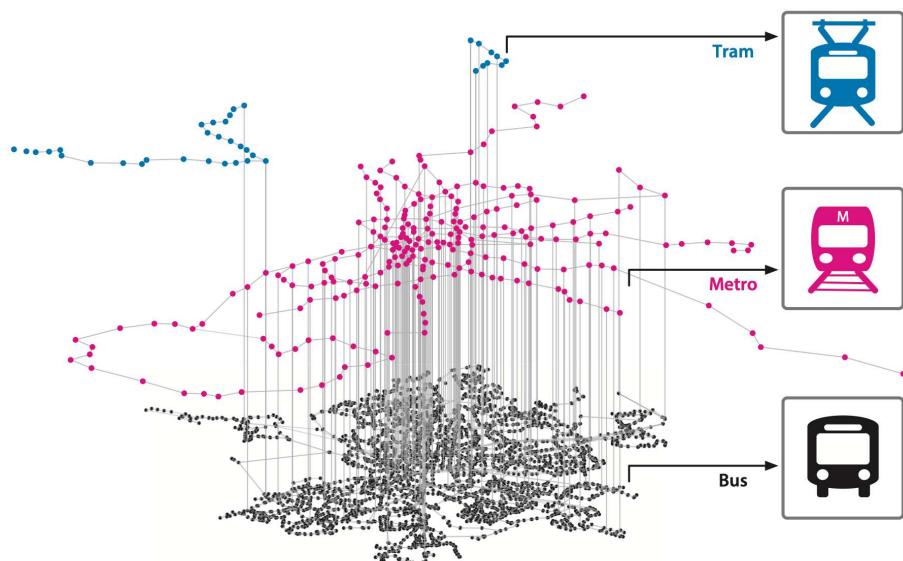
Véase, por ejemplo, la figura 5, donde los autores estudiaron el sistema de transporte de la ciudad de Madrid. En la figura, cada capa representa, precisamente, un sistema de transporte. Los nodos representan la ubicación de una parada a lo largo de la ciudad. Finalmente, los enlaces verticales indican las conexiones entre paradas de cada sistema de transporte, dentro de un radio de 150 m. Usando esta representación de la red de transporte, junto con el horario del servicio y los tiempos de espera, los autores desarrollaron un modelo de movilidad urbana que permite extraer información sobre el funcionamiento de los sistemas de transporte y evaluar sus vulnerabilidades, como el impacto de las interrupciones del servicio.

En el caso de redes de aeropuertos, por ejemplo, su estudio nos permite abordar el problema de propagación en retrasos de vuelos, el movimiento de pasajeros y cómo reubicarlos. Estudiar los patrones de movilidad de los usuarios permite, también, estudiar la propagación de algunas enfermedades.

Lectura complementaria

M. Zanin; F. Lillo (2013). «Modelling the air transport with complex networks: a short review». *The European Physical Journal Special Topics* (vol. 215, págs. 5-21). DOI: 10.1140/epjst/e2013-01711-9

Figura 5. Representación multicapa de la red de transporte de Madrid



Lectura complementaria

R. K. Pan; J. Saramäki (2011). «Path lengths, correlations, and centrality in temporal networks». *Physical Review E* (vol. 84, 016105). DOI: 10.1103/PhysRevE.84.016105

Fuente: A. Aleta y otros (2019). *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 10, 45-62

El estudio de este tipo de sistemas como una red temporal no resulta común, debido principalmente al hecho de que los cambios en las redes de transporte suelen producirse en períodos de tiempo bastante largos, por lo que se consideran redes casi estáticas. No obstante, en algunos casos, es posible emplear su descripción como una red temporal para estudiar un viaje en un sistema de transporte en un momento determinado. La activación o cambios en el tiempo de los enlaces de la red entre nodos conectados corresponde al viaje predeterminado.

4.2. Redes económicas y financieras

Otro ejemplo de sistemas reales en el que el enfoque multicapa ha demostrado ser de utilidad son las redes de intercambio comercial (o *International Trade Networks*, en inglés), donde el estudio de su topología se puede utilizar para evaluar la probabilidad de transmisión de choques económicos entre países o el desarrollo económico de estos.

Es posible, por ejemplo, considerar cada relación de importación y exportación para un producto en particular como una capa de la red. En este sentido, podemos citar el trabajo de C. Ducruet (2013), en el que el autor construyó una red de productos en negocios marítimos, donde los puertos representan los nodos conectados por medio de cinco capas diferentes, que constituyen las cinco categorías principales de productos básicos que se intercambian en el comercio marítimo¹, y cuyos enlaces representan que una mercancía se transporta entre ellos. La figura 6 muestra una representación de esta red.

International Trade Networks

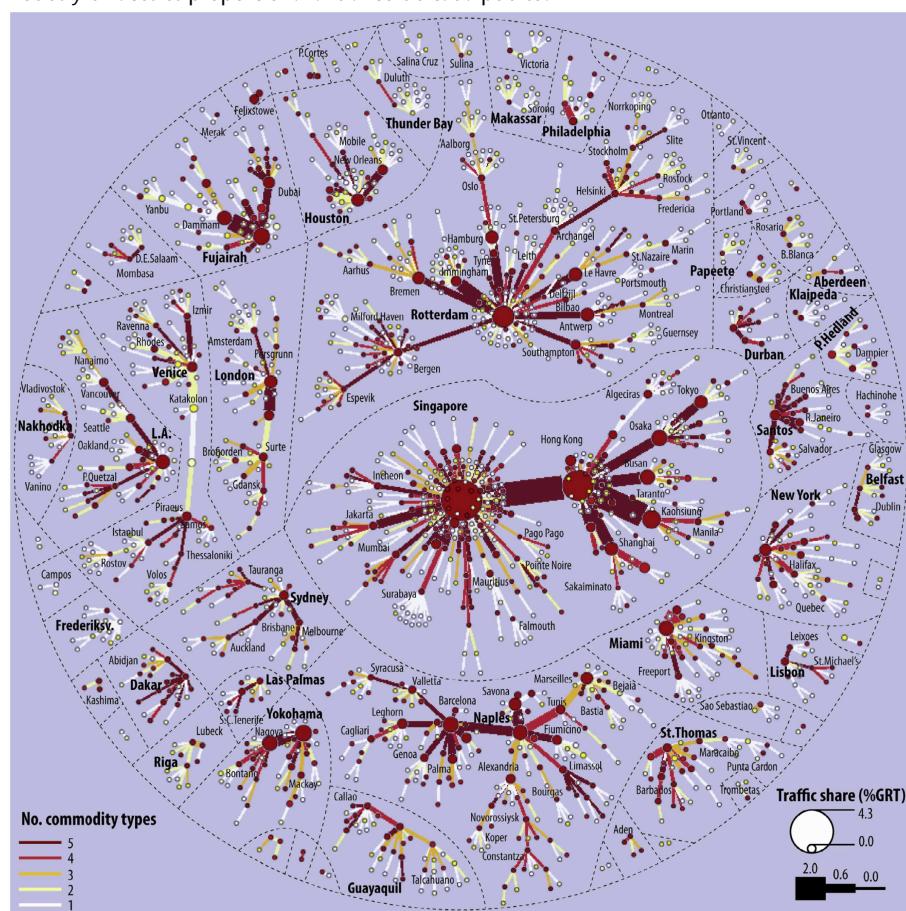
Las redes de intercambio comercial se definen como un grafo de todas las relaciones de importación y exportación entre los diferentes países del mundo.

Lectura complementaria

C. Ducruet, (2013). «Network diversity and maritime flows». *J. Transp. Geogr.*, 30, 77-88. DOI: 10.1038/s42254-021-00322-5

⁽¹⁾Líquidos a granel (como petróleo crudo y sus derivados), sólidos a granel (como cemento o minerales), contenedores, pasajeros/vehículos y carga general.

Figura 6. Representación multicapa de una red de intercambio marítimo. El tamaño de los nodos y enlaces es proporcional al tráfico de cada puerto.



Fuente: C. Ducruet (2013). J. Transp. Geogr., 30, 77-88

El estudio de esta red permitió al autor caracterizar el sistema de acuerdo al tipo de producto comercializado en un conjunto determinado de puertos, y correlacionar el nivel de diversificación del comercio de los mismos con su tráfico y la distancia típica de sus conexiones. Los puertos más diversificados son, en promedio, los más grandes y dominantes en la red. Además, se conectan a distancias físicas mayores que los puertos más especializados.

Modelar sistemas como el mercado financiero en formato de red multicapa nos permite también revelar propiedades importantes de dichos sistemas que no son detectables utilizando el enfoque clásico. Al estudiar las interacciones entre entidades financieras y mercados, es posible, por ejemplo, construir redes de mercado interbancario, donde los nodos representan instituciones financieras, los enlaces las relaciones crediticias entre dos contrapartes y las capas pueden representar la naturaleza de los tipos de transacciones. A partir de aquí, resulta posible caracterizar la estabilidad de las redes financieras o desarrollar modelos de mercado interbancario que permitan evaluar el riesgo sistémico.

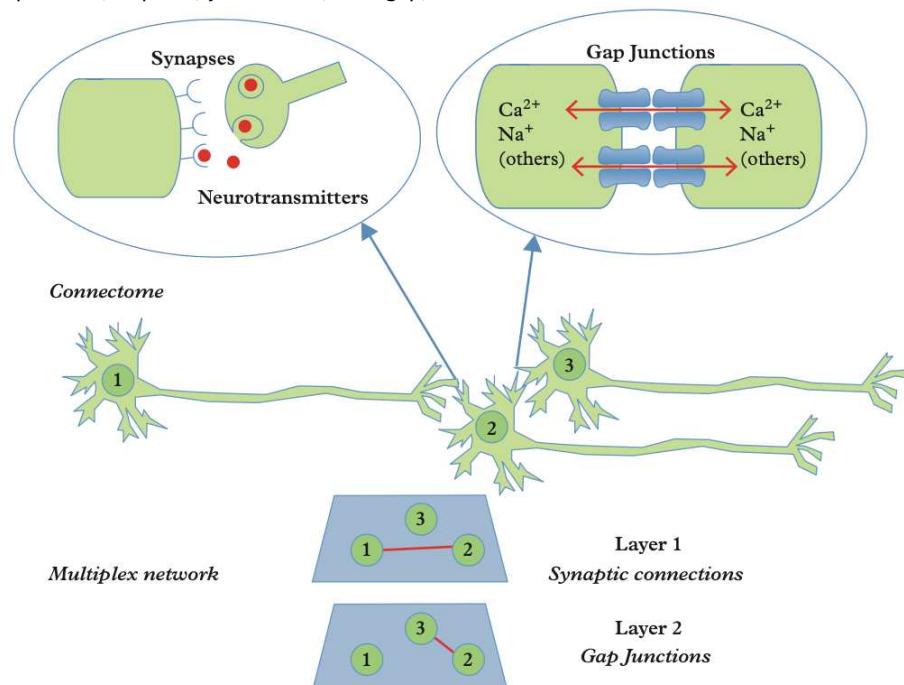
Lectura complementaria

M. Zanin, F. Lillo. (2021). «The physics of financial networks». Nature Rev Phys., 3(7) 490-507. DOI: 10.1038/s42254-021-00322-5

4.3. Redes multicapa en biomedicina

Otro campo relevante donde la aplicación de la teoría de redes multicapa ha resultado de gran utilidad es el campo de la biomedicina, al permitirnos analizar tanto sus elementos constituyentes de seres vivos como también estudiar cómo interactúan entre sí. Por ejemplo, en el campo de la neurociencia, el cerebro puede caracterizarse como una red multiplex, donde las conexiones eléctricas y químicas tienen asociada una dinámica diferente que se representa en las diferentes capas. La red puede constituirse en dos capas, y cada neurona juega un papel diferente en cada capa. Véase en la figura 7 un esquema de esta red. También es posible modelar las redes de neuronas usando redes temporales, donde el cambio en el tiempo en los enlaces representa la dinámica temporal de la activación de las distintas áreas del cerebro.

Figura 7. Representación esquemática multicapa del conectoma formando conexiones químicas (sinápticas) y eléctricas (unión gap)



Fuente: G. Bianconi (2018)

Otro escenario interesante lo encontramos en las redes de interacción proteína-proteína, donde la red puede construirse formando distintas capas, y cada una representa un tipo de interacción entre las proteínas.

Un estudio relevante en esta línea propone un nuevo método para identificar genes conductores de cáncer a partir de redes multiplex. Los autores emplearon una red multiplex de cuatro capas, construida mediante la integración de redes de coexpresión génica, redes de interacción proteína-proteína, de micro-ARN y de factores de transcripción, donde solo la primera capa (coexpresión génica) depende del tipo de cáncer.

Conectoma

Se define como conectoma al mapeado de las conexiones neuronales que existen en un sistema nervioso como el cerebro.

Lectura complementaria

L. Cantini y otros (2015). «Detection of gene communities in multi-networks reveals cancer driver». Sci Rep., 5, 17386. DOI: 10.1038/srep17386

Los autores se centraron en el análisis de cuatro tipos de tejido canceroso: gástrico, pulmonar, pancreático y colorrectal, aunque argumentan que el método se puede extender a otras patologías. Mediante el análisis de la estructura de comunidades de esta red, y comparándola con la estructura hallada en una red de tejidos sanos, fueron capaces de identificar comunidades involucradas en el proceso oncogénico. Encontrando, así, varios oncogenes² ya conocidos y algunos nuevos candidatos a ser oncogenes.

(2)Genes conductores de cáncer.

También es posible estudiar este tipo de redes desde el punto de vista temporal, considerando que las interacciones entre genes no se encuentran siempre activas. En este caso, los nodos son genes que pueden estar activos (siendo transcritos) o no. Los enlaces pueden ser cualesquiera de una serie de relaciones funcionales: un gen que afecta la transcripción de otro, por ejemplo.

4.4. Redes sociales

Dado que las redes sociales constituyen el escenario original donde se ha propuesto la naturaleza multicapa de las redes, no podemos cerrar este apartado sin presentar algún ejemplo de aplicaciones reales en este tipo de sistemas. Como se mencionó al inicio, los integrantes de una red social están relacionados por diferentes tipos de vínculos sociales: amistad, colaboración laboral, lazos familiares, etc., que pueden ser representados, bajo el formalismo de redes, como diferentes capas.

Un tipo interesante de redes sociales que ha sido estudiado bajo este enfoque son las redes de colaboración. Un ejemplo notable ha sido el estudio de colaboración de actores de Hollywood. A partir de la base de datos de películas IMDb³, es posible construir una red multiplex donde cada capa está constituida por un género fílmico. A partir de aquí es posible, por ejemplo, caracterizar el nivel de versatilidad o especialización de los actores.

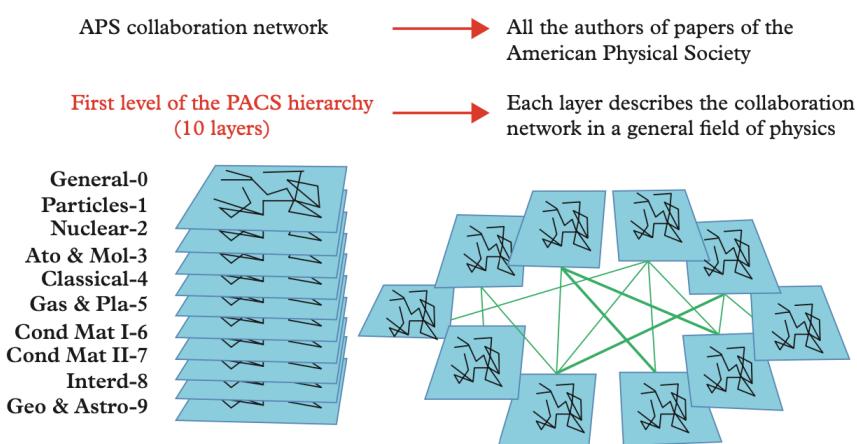
Lectura complementaria

E. Omodei y otros (2016). «Evaluating the impact of interdisciplinary research: A multilayer network approach», *Network Science*, 5(02), 235-246. DOI: 10.1017/nws.2016.15

(3)<https://www.imdb.com/>

Otro caso llamativo han sido las redes de colaboración científica, gracias al acceso a datos de diferentes fuentes editoriales. En diversos estudios, se ha logrado construir redes de colaboración representando como capas las redes de autores que colaboran o se citan entre sí, respectivamente. Así se permite caracterizar la forma en que se establece la reputación científica de un autor a partir de sus índices de citas y sus colaboraciones. También ha sido posible construir redes en las que las capas constituyen las colaboraciones entre diferentes temas científicos, como se puede ver en la figura 8, y de esta forma se puede evaluar el impacto de la interdisciplinariedad en los trabajos científicos.

Figura 8. Representación multicapa de la red de colaboración de la American Physical Society (APS)



Fuente: G. Bianconi (2018)

Finalmente, el modelado de redes sociales como una red temporal resulta particularmente útil para estudiar aspectos como la dinámica de propagación de información en entornos *online*, como listas de correo electrónico y redes sociales, donde contamos con la información temporal en la que se llevan a cabo las interacciones. En estos sistemas es posible también caracterizar aspectos como los tiempos de respuesta después de una interacción, los patrones de actividad circadiana o los cambios en las preferencias de los usuarios de una red social, entre otros.

Actividad circadiana

Son actividades físicas, mentales y conductuales realizadas de forma cíclica, en respuesta a estímulos como la luz (y oscuridad), que afectan a la mayoría de los seres vivos.

Resumen

En este texto hemos presentado una introducción a las redes multicapa. En el primer apartado hemos introducido el formalismo matemático para tratar este tipo de redes, así como las adaptaciones de las principales métricas usadas en el estudio de redes multicapa, incluyendo también algunas medidas necesarias para la caracterización estructural de este tipo de redes.

En el segundo apartado introducimos algunos de los modelos generadores de redes sintéticas usados en redes multicapa, como son los modelos de conexión preferencial y los modelos basados en ensambles, que permiten generar redes con una secuencia de grado concreta. En el tercer apartado presentamos una breve descripción de los principales procesos dinámicos estudiados en redes multicapa. Finalmente, en el cuarto apartado, presentamos ejemplos de trabajos en redes multicapa reales y algunas implicaciones prácticas.

Glosario

actividad circadiana *f* Actividad física, mental y conductual realizada de forma cíclica, en respuesta a estímulos como la luz (y la oscuridad), que afecta a la mayoría de los seres vivos.

conectoma *m* Mapeado de las conexiones neuronales que existen en un sistema nervioso como el cerebro.

International Trade Networks *f* Véase **redes de intercambio comercial**.

matriz identidad *f* Matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, cuyos elementos de la diagonal principal son unos (1) y todos los demás elementos son ceros (0), y que tiene como propiedad ser el elemento neutro para el producto de matrices cuadradas.

nodo interdependiente *m* Se dice que un nodo es interdependiente de otro en otra capa si necesita de él para poder funcionar adecuadamente.

redes de intercambio comercial *f pl* Grafo de todas las relaciones de importación y exportación entre los diferentes países del mundo.
en International Trade Networks

Bibliografía

Bianconi, G. (2018). *Multilayer Networks: Structure and Function (First Edition)*. Oxford University Press. ISBN: 9780198753919.

Boccaletti, S.; Bianconi, G.; Criado, R.; Genio , C. I. del; Gómez-Gardeñes, J.; Romance, M.; Sendiña-Nadal, I.; Wang, Z.; Zanin, M. (2014). «The structure and dynamics of multilayer networks». *Physics Reports* (vol. 544, págs 1-122). <<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.07.001>>

Holme, P.; Saramäki, J. (2012). «Temporal Networks». *Physics Reports* (vol. 519, págs. 97-125). <<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.03.001>>.

