逻辑公理系统及证明实例

FrantzBekoic

2026 年 2 月 14 日

1 命题逻辑的推理证明

1.1 公理系统及 MP 规则——逻辑推演的基石

1.1.1 常见公理系统

常见公理系统包括 Freig 公理系统、Lukasiewicz 公理系统以及 Russel 公理系统，若无特别标注，本课程所述内容默认为 Lukasiewicz 公理系统，包含如下三个公理事实：

$\mathcal{A}_1 : Q \to (P \to Q)$ 肯定后件律

$\mathcal{A}_2 : (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ 蕴含词分配律

$\mathcal{A}_3 : (\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$ 换位律

1.1.2 MP 规则与形式推演

Def: 形式推演
设 Γ 为公式集，若公式序列 $A_1, A_2, ..., A_n$ 中的每个公式 A_i 满足以下条件之一：

(1) A_i 是公理

(2) $A_i \in \Gamma$

(3) $\exists j, k < i,$ 若有 A_j、$A_k = A_j \to A_i$ 均成立，则 A_i 成立

则该序列为公式 A_n 从公式集 Γ 的一个推演，记为 $\Gamma \vdash A_n$。其中 Γ 称为推演的**前提集**，A_n 称为**结论**。

2 定理描述与形式化证明实例

在这个部分我们将由易入难地证明公理系统中常见的结论，前面的定理往往会作为结论运用于后面定理证明，希望大家仔细体会证明过程，掌握构造的方法和思路。

当然考场上并不会直接丢给你们一个形式推演要求证明，往往会给出可直接使用的推论，所以大家不必太担心，掌握构造手法即不难。

本部分最重要的是不要想当然，即使是很显然的结论也不要贸然使用，谨记三个公理和 MP 规则。

2.1 $P \to Q, Q \to R \vdash P \to R$ （传递律）

证明： **证据：**

$A_1 = (Q \to R) \to (P \to (Q \to R))$ $\mathcal{A}_1$

$A_2 = Q \to R$ $A_2 \in \Gamma$

$A_3 = P \to (Q \to R)$ $A_1 = A_2 \to A_3$

$A_4 = (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ $\mathcal{A}_2$

$A_5 = (P \to Q) \to (P \to R)$ $A_4 = A_3 \to A_5$

$A_6 = P \to Q$ $A_6 \in \Gamma$

$A_7 = P \to R$ $A_5 = A_6 \to A_7$

2.2 $\vdash (P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$ （换前律）

证明： **证据：**

$A_1 = (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ $\mathcal{A}_2$

$A_2 = ((P \to Q) \to (P \to R)) \to (Q \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$ $\mathcal{A}_1$

$A_3 = (Q \to ((P \to Q) \to (P \to R))) \to ((Q \to (P \to Q)) \to (Q \to (P \to R)))$ $\mathcal{A}_2$

$A_4 = (P \to (Q \to R)) \to ((Q \to (P \to Q)) \to (Q \to (P \to R)))$ $A_1, A_2, A_3 \vdash A_4$

$A_5 = (P \to (Q \to R)) \to ((Q \to (P \to Q)) \to (Q \to (P \to R))) \to$
$((P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to Q))) \to ((P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R)))$ $\mathcal{A}_2$

$A_6 = ((P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to Q))) \to ((P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R)))$ $A_5 = A_4 \to A_6$

$A_7 = Q \to (P \to Q)$ $\mathcal{A}_1$

$A_8 = (Q \to (P \to Q)) \to ((P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to Q)))$ $\mathcal{A}_2$

$A_9 = (P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to Q))$ $A_8 = A_7 \to A_9$

$A_{10} = (P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$ $A_6 = A_9 \to A_{10}$

2.3 $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ （前提加入）

证明： **证据：**

$A_1 = (Q \to R) \to (P \to (Q \to R))$ $\mathcal{A}_1$

$A_2 = (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ $\mathcal{A}_2$

$A_3 = (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ $A_1, A_2 \vdash A_3$

2.4 $\vdash (P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$ (换前律推论)

证明: **证据:**

$A_1 = (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ $\quad \vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

$A_2 = ((Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$

$\quad \to ((P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R)))$ $\quad \vdash (P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$

$A_3 = (P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$ $\quad A_1, A_2 \vdash A_3$

上面的做法仅限于我们已知 2.3 结论的情况下，考试时如果要证明需要完整复现 2.2 和 2.3 的证明过程。不过鉴于 2.2 证明过程较长一般会直接给出，此时写全 2.3 证明过程即可。

2.5 $\vdash ((P \to Q) \to (P \to R)) \to (P \to (Q \to R))$ ($\mathcal{A}_2$ 的逆命题)

分析: 看到 $(P \to (Q \to R))$ 要想到换前，即证 $((P \to Q) \to (P \to R)) \to (Q \to (P \to R))$，注意到两者拥有相同的后件，且前件结构类似 $Q \to (P \to Q)$, 容易想到用 $\mathcal{A}_2$ 的推论构造 $((P \to Q) \to (P \to R)) \to ((Q \to (P \to Q)) \to (Q \to (P \to R)))$, 此时再用一次换前即可证明。本质也就是定理 2.4 的证明过程。

完整证明过程如下:

证明: **证据:**

$A_1 = ((P \to Q) \to (P \to R)) \to (Q \to (((P \to Q) \to (P \to R))))$ $\quad \mathcal{A}_1$

$A_2 = (Q \to ((P \to Q) \to (P \to R))) \to ((Q \to (P \to Q)) \to (Q \to (P \to R)))$ $\quad \mathcal{A}_2$

$A_3 = ((P \to Q) \to (P \to R)) \to ((Q \to (P \to Q)) \to (Q \to (P \to R)))$ $\quad A_1, A_2 \vdash A_3$

$A_4 = (((P \to Q) \to (P \to R)) \to ((Q \to (P \to Q)) \to (Q \to (P \to R))))$

$\quad \to ((Q \to (P \to Q)) \to (((P \to Q) \to (P \to R)) \to (Q \to (P \to R))))$ $\quad \vdash (P \to (Q \to R))$

$\quad \to (Q \to (P \to R))$

$A_5 = (Q \to (P \to Q)) \to (((P \to Q) \to (P \to R)) \to (Q \to (P \to R)))$ $\quad A_4 = A_3 \to A_5$

$A_6 = Q \to (P \to Q)$ $\quad \mathcal{A}_1$

$A_7 = ((P \to Q) \to (P \to R)) \to (Q \to (P \to R))$ $\quad A_5 = A_6 \to A_7$

$A_8 = (Q \to (P \to R)) \to (P \to (Q \to R))$ $\quad \vdash (P \to (Q \to R))$

$\quad \to (Q \to (P \to R))$

$A_9 = ((P \to Q) \to (P \to R)) \to (P \to (Q \to R))$ $\quad A_7, A_8 \vdash A_9$

2.6 $\vdash Q \to Q$ (非常重要的结论)

分析:

借助本题希望大家掌握一些基本的构造思想。

首先看到一个结论，如果前件和后件的结构均不能与公理中的某个部分产生联系，则把整个部分作为后件来构造。自然的想到 $Q \to (Q \to Q)$（$\mathcal{A}_1$ 的变形），此时虽然后件得到了我们想要的形式，但是前件依然无从下手, 继续延续嵌套构造的思路。注意到 $Q \to (Q \to Q)$ 和 $Q \to Q$ 拥有相同的前件，尝试用 $\mathcal{A}_2$ 拼凑，得到 $Q \to ((Q \to Q) \to Q)$, 根据 $\mathcal{A}_1$ 则证明完毕。

完整证明过程如下:

证明:	证据:
$A_1 = Q \to ((Q \to Q) \to Q)$	$\mathcal{A}_1$
$A_2 = (Q \to ((Q \to Q) \to Q)) \to ((Q \to (Q \to Q)) \to (Q \to Q))$	$\mathcal{A}_2$
$A_3 = (Q \to (Q \to Q)) \to (Q \to Q)$	$A_2 = A_1 \to A_3$
$A_4 = Q \to (Q \to Q)$	$\mathcal{A}_1$
$A_5 = Q \to Q$	$A_3 = A_4 \to A_5$

2.7 $\vdash \neg\neg Q \to Q$

证明:	证据:
$A_1 = \neg\neg Q \to (\neg\neg\neg\neg Q \to \neg\neg Q)$	$\mathcal{A}_1$
$A_2 = ((\neg\neg\neg\neg Q \to \neg\neg Q) \to (\neg Q \to \neg\neg\neg Q))$	$\mathcal{A}_3$
$A_3 = ((\neg Q \to \neg\neg\neg Q) \to (\neg\neg Q \to Q))$	$\mathcal{A}_3$
$A_4 = \neg\neg Q \to (\neg\neg Q \to Q)$	$A_1, A_2, A_3 \vdash A_4$
$A_5 = (\neg\neg Q \to (\neg\neg Q \to Q)) \to ((\neg\neg Q \to \neg\neg Q) \to (\neg\neg Q \to Q))$	$\mathcal{A}_2$
$A_6 = (\neg\neg Q \to \neg\neg Q) \to (\neg\neg Q \to Q)$	$A_5 = A_4 \to A_6$
$A_7 = \neg\neg Q \to \neg\neg Q$	$\vdash Q \to Q$
$A_8 = \neg\neg Q \to Q$	$A_6 = A_7 \to A_8$

2.8 $\vdash Q \to \neg\neg Q$

证明:	证据:
$A_1 = (\neg\neg\neg Q \to \neg Q) \to (Q \to \neg\neg Q)$	$\mathcal{A}_3$
$A_2 = \neg\neg\neg Q \to \neg Q$	$\vdash \neg\neg Q \to Q$
$A_3 = Q \to \neg\neg Q$	$A_1 = A_2 \to A_3$

借助 2.7 和 2.8 说明一个注意点：形式证明里的否定符号不能随意的添加或删减，与语义证明不相同。

2.9 $\vdash (\neg\neg Q \to \neg\neg R) \to (Q \to R)$

证明: **证据:**

$A_1 = (\neg\neg Q \to \neg\neg R) \to (\neg R \to \neg Q)$	$\mathcal{A}_3$
$A_2 = (\neg R \to \neg Q) \to (Q \to R)$	$\mathcal{A}_3$
$A_3 = (\neg\neg Q \to \neg\neg R) \to (Q \to R)$	$A_1, A_2 \vdash A_3$

2.10 $\vdash (Q \to R) \to (\neg\neg Q \to \neg\neg R)$

分析:

前件和后件都是双变量，无法直观建立联系，考虑一个桥梁连接两者。此处有两种思路。

第一种是构造 $\neg\neg Q \to R$，希望分别证明 $(Q \to R) \to (\neg\neg Q \to R)$ 和 $(\neg\neg Q \to R) \to (\neg\neg Q \to \neg\neg R)$。前者识别出 2.4 的结构，构造 $\neg\neg Q \to Q$，易证。后者为 $\mathcal{A}_2$ 的变形，构造 $R \to \neg\neg R$，易证。

完整证明过程如下:

证明: **证据:**

$A_1 = \neg\neg Q \to Q$	$\vdash \neg\neg Q \to Q$
$A_2 = (\neg\neg Q \to Q) \to ((Q \to R) \to (\neg\neg Q \to R))$	$\vdash (Q \to P) \to (P \to R) \to (Q \to R)$
$A_3 = (Q \to R) \to (\neg\neg Q \to R)$	$A_2 = A_1 \to A_3$
$A_4 = R \to \neg\neg R$	$Q \to \neg\neg Q$
$A_5 = (R \to \neg\neg R) \to (\neg\neg Q \to (R \to \neg\neg R))$	$\mathcal{A}_1$
$A_6 = (\neg\neg Q \to (R \to \neg\neg R)) \to ((\neg\neg Q \to R) \to (\neg\neg Q \to \neg\neg R))$	$\mathcal{A}_2$
$A_7 = (\neg\neg Q \to R) \to (\neg\neg Q \to \neg\neg R)$	$A_4, A_5, A_6 \vdash A_7$
$A_8 = (Q \to R) \to (\neg\neg Q \to \neg\neg R)$	$A_3, A_7 \vdash A_8$

第二种为构造 $Q \to \neg\neg R$, 方法类似，殊途同归留作练习题请自行思考。

延伸思考: 为什么本命题不可像 2.9 一样使用 $\mathcal{A}_3$ 直接证明?

答: $\mathcal{A}_3$ 中前件携带 $\neg$ 而后件不携带，推理过程中相当于对“$\neg$”做减法，而本命题前件本就不携带 $\neg$，不满足 $\mathcal{A}_3$ 的使用条件，故不能直接使用 $\mathcal{A}_3$ 进行证明。

2.11 $\vdash (Q \to R) \to (\neg R \to \neg Q)$ ($\mathcal{A}_3$ 的逆命题)

证明: **证据:**

$A_1 = (Q \to R) \to (\neg\neg Q \to \neg\neg R)$ $\vdash (Q \to R) \to (\neg\neg Q \to \neg\neg R)$

$A_2 = (\neg\neg Q \to \neg\neg R) \to (\neg R \to \neg Q)$ $\mathcal{A}_3$

$A_3 = (Q \to R) \to (\neg R \to \neg Q)$ $A_1, A_2 \vdash A_3$

也就是在 2.10 基础上再用一次 $\mathcal{A}_3$ 即可，一个附加结论而已。

2.12 $\vdash$

证明: **证据:**

$A =$

2.13 $\vdash$

证明: **证据:**

$A =$

2.14 $\vdash$

证明: **证据:**

$A =$