

**Trabalho individual #2**  
**Projeto de Testes e validação de resultados**

**Instruções:**

- o trabalho consiste em resolver os quesitos utilizando MATLAB e produzir um relatório dos resultados obtidos, incluindo figuras, equações, comentários e considerações onde apropriado.
- o material a ser entregue no Moodle para a avaliação é:
  - um file .m contendo o código matlab usado para resolver os quesitos (NOTE: o código deve estar funcionando em todas as suas partes, ou seja, quando executado tem que executar todas as tarefas sem produzir erros)
  - um file pdf com o relatório.
- o material entregue será objeto de avaliação: não é suficiente produzir somente os resultados numéricos: as respostas precisam ser fundamentadas do ponto de vista teórico e relacionadas com os tópicos da disciplina
- O prazo de entrega é até a aula do dia 17/10/2017: entrega após do prazo no Moodle resultará em uma redução automática e não negociável de 50% na nota
- o trabalho é INDIVIDUAL: a interação entre os alunos para a solução dos exercícios é admissível, mas a redação do relatório e a análise crítica dos resultados é individual.

**Notas:**

Nos exercícios é vetado o uso das seguintes funções do MATLAB:

- "lsim"
- de qualquer outra função embutida de matlab que calcule a resposta no tempo ou em frequência de um sistema (As simulações respostas do sistema tem que ser calculadas usando laços "for")
- "regress", "Linearmodel", "mvregress", "arx" ou de qualquer função que execute automaticamente regressões lineares. Para solução do problema dos mínimos quadrados, sugiro usar a função "mldivide"

**Exercício 1: Mínimos Quadrados 1**

Considere o sistema linear e invariante no tempo representado pela seguinte função de transferência

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

em que  $a_1, a_2, b_1, b_2$  são constantes. Pede-se:

- 1) Execute o arquivo `gera_coeficientes` onde matrícula corresponde ao seu número completo de matrícula conforme o script abaixo:

```
matricula = 201601;  
  
[b1,b2,a1,a2] = gera_coeficientes(matricula);
```

O sistema com os coeficientes gerados é estável? Caso não seja, altere os valores dos coeficientes para garantir a estabilidade. Simule a resposta ao degrau deste sistema. (Lembrete: utilize laços “for”)

- 2) Simule a resposta  $y(k)$  do sistema a uma entrada  $u(k)$  do tipo ruído branco (função “`randn`” no Matlab). Dica: para consistência no caso de múltiplas execuções, avalie utilizar a função “`rng`”.
- 3) Formule o problema de estimação de parâmetros sob a perspectiva do algoritmo de mínimos quadrados. Ou seja, defina a matriz de regressores  $\mathbf{A}$ , o vetor de observações  $\mathbf{y}$  e o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\vartheta}$  do problema  $\mathbf{y} = \mathbf{A} \boldsymbol{\vartheta}$ . Apresente no relatório a formulação desta matriz  $\mathbf{A}$  (de uma forma independente de seus valores, ou seja, em função de  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$ ) e os coeficientes esperados em  $\boldsymbol{\vartheta}$ .
- 4) Estime os parâmetros desse sistema a partir da formulação efetuada no item 3) Interprete os resultados fazendo uma comparação entre os valores estimados para os parâmetros e os valores verdadeiros.
- 5) Agora considere a presença de um ruído aleatório  $e(k)$  no sinal simulado no item 2) com uma relação sinal-ruído de aproximadamente 10dB. Obtenha a nova matriz de regressores  $\mathbf{A}_e$  e estime o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\vartheta}_e$  para esta “saída ruidosa”  $y_e$  tal que:

$$y_e(k) = y(k) + e(k)$$

Observações:  $e(k)$  pode ser gerado usando a função do Matlab “`randn`”. Escolha o desvio padrão do ruído aleatório  $e(k)$  de forma a obter uma relação sinal-ruído (SNR) aproximadamente 10dB. Lembre que a SNR de um sinal  $y_e(k) = y(k) + e(k)$  é dada por  $SNR = 20 \log_{10}(\sigma_y / \sigma_e)$  em que  $\sigma_y$  e  $\sigma_e$  são os desvios padrões  $y(k)$  e  $e(k)$ , respectivamente.

- 6) Apresente em um mesmo gráfico os valores da resposta do sistema  $y$ , da resposta “ruidosa”  $y_e$ , e as curvas ajustadas a partir dos coeficientes  $\boldsymbol{\vartheta}$  e  $\boldsymbol{\vartheta}_e$  obtidos. Apresente no relatório apenas um trecho desses pontos, de forma que possibilite visualizar a dinâmica das curvas.

Descreva qualitativamente o que foi observado. As curvas ajustadas se aproximaram mais de qual resposta  $y$  ou  $y_e$ ? Por quê?

- 7) Aumente o efeito do ruído sobre o sinal (ou seja, reduza a SNR, pode ser algum valor em torno de 1 aproximadamente). Repita os itens 5) e 6) com este novo valor. A característica observada anteriormente se manteve? O nível de ruído na saída deteriorou a estimação de parâmetros?
- 8) Considere agora uma outra entrada  $u_2(k)$  do tipo ruído branco (100 pontos gerados pela função `randn`). Simule a saída do sistema baseado nos coeficientes gerados no item 1) e de  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\theta}_e$  calculados. Interprete os resultados obtidos e compare-os com dos itens anteriores.
- 9) Nos itens anteriores, a identificação dos parâmetros foi realizada conhecendo *a priori* a estrutura do sistema em estudo (sist. de segunda ordem). Vamos agora supor que essa informação não seja disponível, i.e., é preciso fazer uma suposição sobre a ordem do sistema real. Especificamente, vamos considerar as seguintes possibilidades: (i) que o modelo a ser estimado seja de 1ª ordem (i.e.  $b_2 = a_2 = 0$ ) e (ii) que o modelo a ser estimado seja de 3ª ordem (i.e. defina os parâmetros  $b_3$  e  $a_3$ ). Usando os dados de entrada e saída “ruidosa”  $u(k)$  e  $y_e(k)$  respectivamente, estime os parâmetros do sistema pelo método dos mínimos quadrados.
- 10) Calcule e faça uma análise a partir da resposta ao DEGRAU do sistema verdadeiro (item 1) e do sistema a partir dos parâmetros estimados (somente os modelos obtidos nos itens 5 e 9).

## Exercício 2: Mínimos Quadrados 2

O baroreflexo é um mecanismo fisiológico extremamente importante que, quando a pressão arterial diminui (aumenta), causa um aumento (diminuição) da frequência cardíaca. Esse mecanismo garante uma perfusão suficiente de sangue para os órgãos vitais, e especialmente o cérebro. Se esse mecanismo fisiológico não existisse, todas as vezes que você se levantasse da cama, você desmaiaria. Isto porque, passando da posição supina a vertical, você gera uma coluna de água entre a “bomba” do sangue (coração) e o cérebro. Se essa coluna de água adicional não for compensada rapidamente por um aumento do bombeamento (i.e frequência de batimento do coração), o cérebro receberia por consequência menos sangue e perderia parte da sua funcionalidade (e.g. perda do controle da visão e do equilíbrio).

Nesse exercício estimaremos a funcionalidade desse mecanismo/sistema, ou, mais especificamente, o ganho do seguinte sistema:

$$RR(k) = \sum_{i=1}^N a_i RR(k-i) + \sum_{i=0}^N b_i SAP(k-i) + e_N(k)$$

Onde  $RR(i)$  é a duração (em milissegundos) do  $i$ -ésimo batimento cardíaco (i.e. inverso da frequência cardíaca), e  $SAP(i)$  é o valor da pressão arterial máxima (i.e. sistólica) durante aquele batimento. (NOTA: a somatória relacionada  $SAP(i)$  inicia em ZERO). Usando os dados do file `baroreflex.mat`

- 1) Calcule os valores dos coeficientes do modelo, usando uma técnica MQ, para valores de  $N$  (ordem do modelo) de 1 até 8.
- 2) Para cada uma das ordens, faça uma predição do sinal  $RR(k)$ . Para tal simulação utilize os valores de  $RR(k)$  contidos no file `baroreflex.mat`. (esta técnica é chamada de simulação um passo a frente).
- 3) Considere agora uma segunda predição de  $RR(k)$ . Nesta simulação em vez de utilizar os valores de  $RR(k)$  contidos em `baroreflex.mat` (exceto pelos valores iniciais), calcule iterativamente a partir dos valores preditos previamente (esta técnica é conhecida como simulação livre).
- 4) Para cada uma das ordens, trace num mesmo gráfico o sinal  $RR(k)$  original e o sinal predito nos itens 2) e 3). Apresente esses  $N$  gráficos no relatório identificando os sinais e a ordem de cada um deles. Foi observada alguma diferença entre estas simulações? Baseada na natureza destas simulações e faça suposições sobre o motivo da diferença (ou não) dos resultados observados.
- 5) Considerando os resultados do exercício, como você poderia escolher o valor de  $N$  mais apropriado? Tente considerar o erro quadrático médio  $\frac{1}{K} \sum_{i=0}^K e_N(i)^2$ , onde  $K$  é o numero de amostras do sinal. Como ele muda ao aumentar de  $N$ ? Essa mudança justifica o uso de um modelo mais complexo (i.e. modelo de ordem maior)?

## Exercício 3 Validação

Para obter os dados necessários para a resolução do exercício, você deve adicionar o arquivo `simula_sistema.p` no seu diretório de trabalho do Matlab e executá-lo com seu número de matrícula como parâmetro. As saídas deste file corresponderão respectivamente a entrada do sistema e a saída do sistema (com SNR entre 5 e 10).

**Código de exemplo:** Suponha que seu número de matrícula seja 123456

```
%*****  
% Entrada: número de matrícula  
% Saída do script: x-> Vetor da entrada do sistema a ser modelado
```

```
%
                                y-> Vetor de saída do Sistema
[x, y] = simula_sistema(123456);
%*****
```

Considere os dados de entrada(x) e saída (y). Deseja-se identificar um modelo ARX para esse sistema. Pede-se:

- 1) Pré-processamento:
  - a) Escolha um tempo de amostragem adequado para identificação desse sistema (ou seja, se necessário, faça uma decimação dos dados). Considere o método da Seção 12.2.3.
  - b) Verifique se os dados de entrada e saída estão correlacionados para que sejam usados para identificação de um modelo. Porque isso é importante? (Note: você precisa identificar um método para testar se o valor estimado para a correlação é significativamente diferente de zero, i.e. intervalo de confiança)
  - c) Divida os dados reamostrados em dois trechos de tamanho igual: a primeira parte serão os “dados para identificação” e a segunda os “dados para validação”.
- 2) Seleção de estrutura: usando somente os “dados para identificação”, empregue o critério de Akaike para selecionar a ordem do modelo ARX (linear). Considere ordem até 10. Apresente o gráfico e justifique a escolha da ordem.
- 3) Estimação de parâmetros: usando somente os “dados para identificação”, use o estimador de mínimos quadrados para achar os parâmetros do modelo ARX de ordem selecionada no item anterior. Apresente os valores destes parâmetros no relatório.
- 4) Validação usando "dados para identificação": valide o modelo escolhido no item anterior, para os seguintes casos:
  - a) Verifique se os resíduos do modelo estão suficientemente aleatórios (ver seção 13.4 do livro, usando somente os “dados para identificação”). Apresente graficamente. O que isso significa, e porque é importante? (Note: para resolver essa parte você precisa identificar um método para testar se o valor estimado para a autocorrelação é significativamente diferente de zero, i.e. intervalo de confiança)
  - b) Verifique se os resíduos e a entrada são não correlacionados (ver seção 13.4, usando somente os “dados para identificação”). Apresente o gráfico. O que isso significa, e porque é importante? (Note: para resolver essa parte você precisa identificar um método para testar se o valor estimado para a correlação cruzada é significativamente diferente de zero, i.e. intervalo de confiança)
- 5) Validação usando "dados para validação": valide o modelo escolhido no item anterior, para os seguintes casos:
  - a) simulação um passo a frente (usando somente os “dados para validação”) e
  - b) simulação livre (usando somente os “dados para validação”).
  - c) Calcule e apresente gráficos com os resíduos das simulações a) e b) . Calcule também o índice RMSE (ver eq 13.1 do livro) para as duas simulações. O que esse índice significa, e porque é importante? Qual dos dois RMSE é maior? Isto está de acordo com a teoria?