Computação Paralela e Distribuída

Relatório 1: Multiplicação de Matrizes

António Ribeiro up201906761
Diogo Maia up201804974
Filipe Pinto up201907747

Explicação dos algoritmos

Algoritmo 1: Multiplicação genérica/ Schoolbook's algorithm

A multiplicação genérica segue o algoritmo feito "à mão":

1. Fixamos uma linha da $\mathbf{M_{esq}}$.
2. Iteramos cada elemento da $\mathbf{M_{esq}}$, multiplicando-o com o elemento correspondente da coluna selecionada $\mathbf{M_{dir}}$ ($\mathbf{M_{dir}}^{[i,k]}$ * $\mathbf{M_{dir}}^{[k,j]}$), acumulando esse mesmo valor numa variável temporária.
3. Continuamos esta iteração pela linha e coluna de cada uma das matrizes, ao terminarmos o loop de k, temos na variável temporária a célula correspondente *i, j* da matriz resultado, e podemos prosseguir para uma nova coluna, mantendo a linha.
4. Repetimos este processo para todas as linhas da $\mathbf{M_{esq}}$.

Iteração para o cálculo da primeira célula do resultado (cores representam multiplicações):

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ a_6 & a_7 & a_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 & b_5 \\ b_6 & b_7 & b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0b_0 + a_1b_3 + a_2b_6 & \ldots & \ldots \\ & \ldots\ldots & \\ & \ldots\ldots & \end{bmatrix}$$

Implementação em python:

```python
for i in range(0, m_ar): # iteração linha a linha matriz esq
   for j in range(0, m_br): # iteração coluna a coluna da matriz esq
     temp = 0 # acumulador do valor da célula resultado
     for k in range(0, m_ar): # iteração da coluna
       temp += m_a[i * m_ar + k] * m_b[k * m_br + j]
     m_c[i * m_ar + j] = temp # posicionar o resultado na matriz
```

Algoritmo 2: Multiplicação por linha

A multiplicação comporta-se da seguinte forma:

1. Fixamos uma linha da $\mathbf{M_{esq}}$ (seguindo o algoritmo convencional acima).
2. Em vez de saltarmos para a linha seguinte mantendo a coluna (como faríamos "à mão"), mantemos a multiplicação de cada elemento da $\mathbf{M_{esq}}$ (selecionado na iteração) com uma linha inteira da $\mathbf{M_{dir}}$, colocando-os no respectivo lugar da matriz de resultado.
3. A cada posicionamento deste tipo, acedemos ao valor já acumulado na célula do resultado, para que cada vez que mudamos de linha (da $\mathbf{M_{esq}}$) possamos somá-lo com a nova multiplicação.

Como será explicado na análise de resultados, esta implementação é, em teoria, mais vantajosa dada a implementação da hierarquia de memória num determinado computador.

Iteração sob a primeira linha, para o cálculo da primeira linha do resultado:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ a_6 & a_7 & a_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 & b_5 \\ b_6 & b_7 & b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0b_0 + a_1b_3 + a_2b_6 & a_0b_1 + a_1b_4 + a_2b_7 & a_0b_2 + a_1b_5 + a_2b_8 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{bmatrix}$$

Implementação em python, com a alteração que inverteu os *loops* *k* e *j* interiores:

```
for i in range(0, m_ar):# iterador de acesso aos elementos das linha da matriz
esquerda
  for k in range(0, m_ar):# fixação da linha horizontal da matriz direita
    for j in range(0, m_br):# acesso horizontal às colunas da matriz direita
        m_c[i*m_ar+j] += m_a[i*m_ar+k] * m_b[k*m_br+j]
```

Algoritmo 3: Multiplicação por bloco

A multiplicação por bloco comporta-se da seguinte forma:

1. Subdividir ambas as matrizes em blocos *B* de tamanho igual, gerando blocos de matrizes, abstraídos a "elementos" de uma outra matriz *M'*.
2. Aplicamos o algoritmo mais eficiente que conhecemos (*Alg. 2*, multiplicação por linha), tanto para a seleção dos blocos da matriz *M'*, como também para o cálculo individual da multiplicação de cada *B*.

Subdivisão em blocos:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ \hline a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ \hline b_8 & b_9 & b_{10} & b_{11} \\ b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \end{array}\right] \equiv \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0B_0 + A_1B_2 & A_0B_1 + A_1B_3 \\ A_2B_0 + A_3B_2 & A_2B_1 + A_3B_3 \end{bmatrix}$$

Block selection and matrix multiplication done with the line multiplication algorithm

Implementação em python:

```
for ii in range(0, m_ar, blkSize): # iteração sob a linha de blocos da Mesq
   for kk in range(0, m_br, blkSize): # iteração sob a linha de blocos da Mdir
       for jj in range(0, m_br, blkSize): # iteração sob as colunas de blocos da
linha escolhida da Mdir
         # algoritmo previamente descrito, começando a iteração na secção do bloco
          for i in range(ii, ii + blkSize):
            for k in range(kk, kk + blkSize):
               for j in range(jj, jj + blkSize):
                    matrixC[i * m_ar + j] += m_a[i*m_ar+k] * m_b[k*m_br+j]
```

Explicação das métricas de avaliação de performance

Especificações do sistema usado:

- Intel(R) Core(TM) i7-10510U CPU @ 1.80GHz, 8 Cores, 2 Threads/Core, x86_64.
- L1d: 128 KiB, L2: 1MiB, L3: 8 MiB;
- RAM: 7887160 kB ;
- Execução feita com o mínimo de processos em background (OS: Linux Mint);

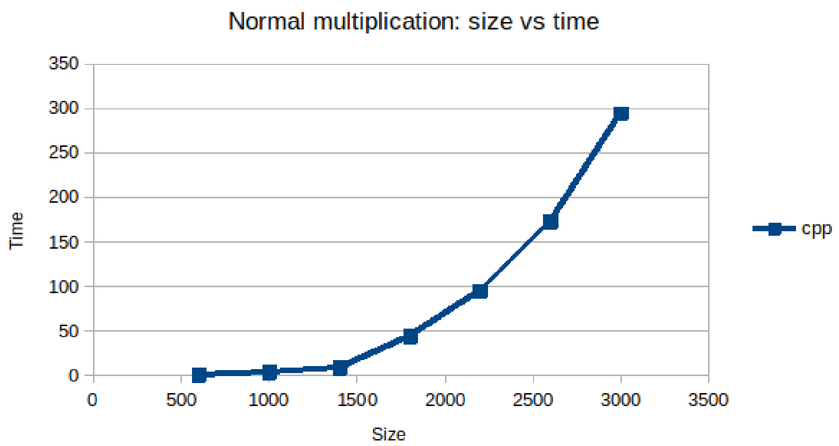
Métricas:

- **Tempo de execução:** métrica mais comum e simples de quantificar, para avaliação de sistemas. Quanto maior é esta quantia, mais tempo recursos estão indisponíveis para outras ações, mais tarde temos os resultados pretendidos e mais energia é gasta no cálculo da multiplicação das matrizes. Devemos procurar minimizá-lo.
- ***GFLops/s*:** medição da quantidade de operações realizadas ao longo do cálculo por segundo. Para isso, podemos recorrer à fórmula $2 * n^3 / \Delta t$ (nº máximo de operações de multiplicação e adição dividido pelo tempo de execução). Cálculos deste tipo são operações custosas (tendo em conta a mantissa, expoente e alocação de registos *FP*), o que poderá ser um fator determinante da *performance*.
- **Falhas/*Misses* de leitura da *cache* (nível 1 e nível 2, *PAPI_L1_DCM, PAPI_L2_DCM*):** Um dos objetivos do trabalho é estabelecer o impacto da má gestão de memória nos diferentes algoritmos. Este *overhead* é introduzido cada vez que os dados que procuramos não estão na região de memória mais próxima e rápida. Por este motivo, é essencial perceber que escolha traz consigo mais situações em que o acesso a *cache* não é aproveitado, e em que os níveis de memória mais custosos têm de ser utilizados.

Resultados e Análise

Algoritmo 1: Multiplicação genérica

O gráfico seguinte representa a evolução do tempo de execução com o crescimento do tamanho das matrizes em pleno CPP:



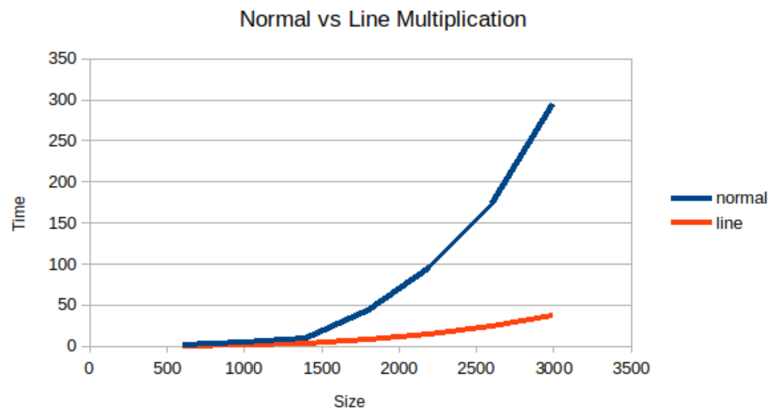
Python	
Size	Time
600	75.60906
1000	380.0178
1400	1089.823
1800	2333.325
2200	4295.777
2600	7134.925
3000	11106.5

Como podemos ver no gráfico, estamos perante uma curva exponencial, o que faz sentido, sendo que estamos a fazer a multiplicação de duas matrizes nxn (sendo *n* o número de valores numa coluna) e o número de operações cresce de forma exponencial com o tamanho. Quanto a falhas de leitura da cache, ambos seguem o mesmo crescimento exponencial aqui visto.

Quanto aos resultados em python, obtivemos uma curva semelhante, no entanto a ordem de grandeza dos valores de tempo obtidos são consideravelmente maiores devido às técnicas *built-in* do *python* quando se trata de operações em memória. *Python* é também uma linguagem de *scripting* interpretada, onde se realiza grande parte do trabalho em segundo plano, como a inferência de tipos e gestão de memória, contribuindo com um *overhead* significativo, em comparação com uma linguagem já compilada e otimizada para código máquina (no pior caso, 5 min em *c++* e 185 min em *python*).

Algoritmo 2: Multiplicação por linha

O gráfico seguinte representa a evolução do tempo de execução com o crescimento do tamanho das matrizes em, pleno CPP e a sua comparação com a multiplicação genérica:



Python

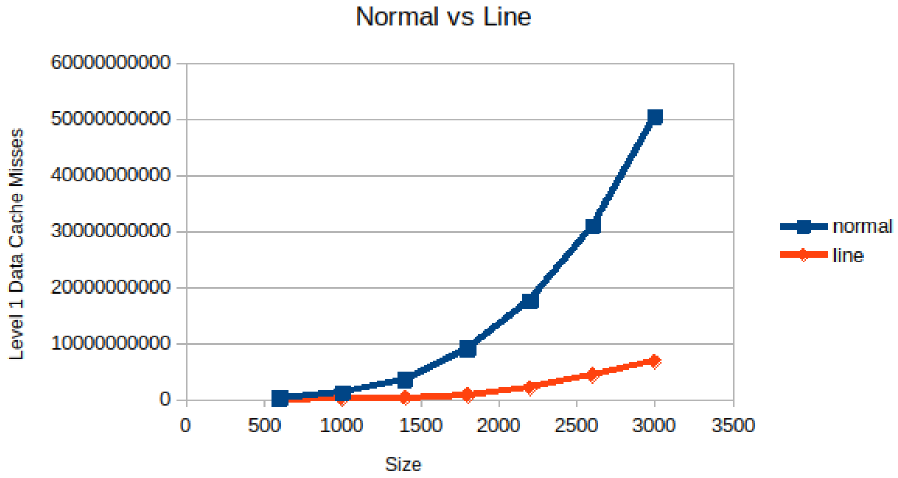
Size	Time
600	103.894
1000	485.409
1400	1346.39
1800	2876.76
2200	5289.61
2600	9205.54
3000	13769

Como podemos ver, estamos outra vez perante curva exponencial, no entanto, a taxa de variação da multiplicação em linha é bastante menor do que a multiplicação genérica. Isto pode-se explicar pela redução da necessidade de substituição de memória em cache, levando a uma redução do overhead na multiplicação em linha.

Sabemos que o acesso à *cache* é originado por dois fatores (temporal e probabilístico). Utilizando-os a nosso favor, extrai-se da memória RAM a quantidade máxima de dados que poderemos necessitar para a memória cache, que devido à forma como o *array* está alocado, serão os valores imediatamente a seguir à célula do segundo operando na multiplicação (parte ou toda a linha da $\mathbf{M}_{dir}$).

Desta forma, apesar de uma célula da matriz resultado não ser calculada de uma só vez, existe uma maior hipótese de encontrar os elementos da linha a ser multiplicados em cache (aumentando a performance, devido ao menor custo de *fetch*).

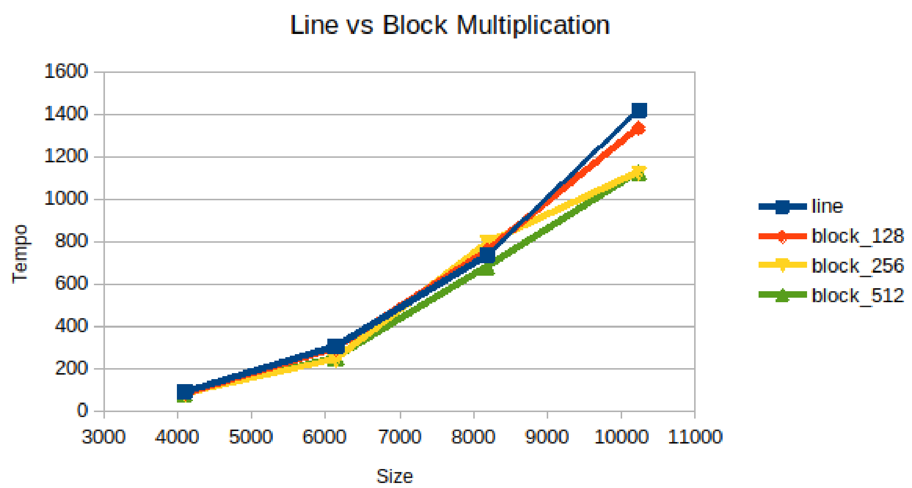
Isto pode ser comprovado perante os valores de falhas de informação na cache de nível 1 no gráfico seguinte.



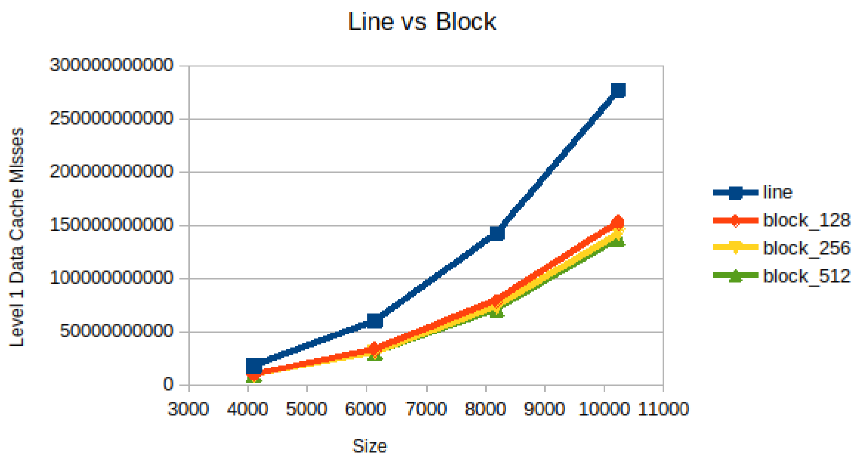
Quanto aos dados obtidos no *python*, podemos verificar o mesmo que na multiplicação normal.

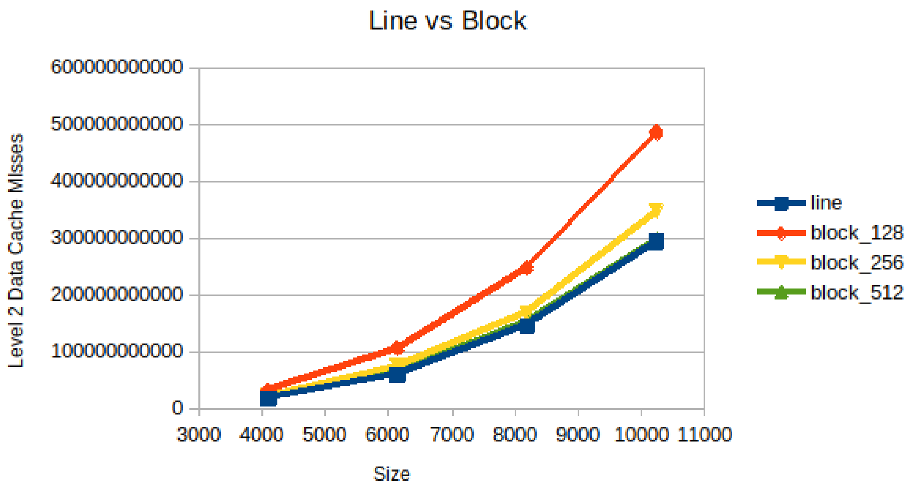
Algoritmo 3: Multiplicação por bloco

O gráfico seguinte compara o tempo de execução da multiplicação em linha e a multiplicação em bloco (tamanhos 128, 256 e 512):



Analisando o tempo, podemos ver que a multiplicação por bloco permite uma melhor performance em relação ao tempo de execução (sendo a melhor quando o bloco é de tamanho 512). No entanto, a diferença temporal entre as variações testadas não é elevada. O particionamento em blocos (com tamanhos adequados à hierarquia de memória) favorece o acesso à cache, dado que tendo as sub-matrizes a menor distância de CPU, é possível retirar o conjunto dados com menos custo de tempo para níveis cada vez mais baixos de memória.

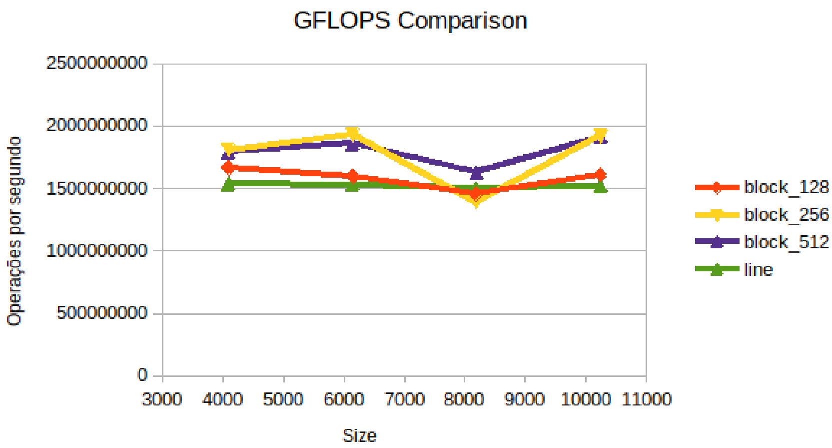




Mas, quando falamos de falhas de informação na cache de nível 1, o crescimento da quantidade de falhas é bastante mais elevado na multiplicação em linha do que nas multiplicações por blocos.

Em relação a L2, observamos que o algoritmo de bloco com 128x128 elementos (de 8 B) tem um pior desempenho que o algoritmo de linha. Isto poderá resultar da elevada limitação do número de elementos que são colocados em cache. Em *L1* temos um espaço reduzido (128 KiB), que é preenchido na totalidade pelo bloco (125 KiB), o que torna direto o acesso à matriz neste caso. Para *L2*, o mesmo bloco ocupa 13% do espaço, não sendo aproveitado, levando a mais *misses*. Blocos com maior tamanho (512x512) e o algoritmo de linha (com gestão implícita de memória) acabam por tirar mais proveito deste nível da cache. O tamanho de cada bloco tem de ser por isso equilibrado com os tamanhos disponíveis de *cache*.

Quando falamos em termos de GFLOPS, podemos reparar que independentemente do tamanho dos blocos e se a multiplicação é em linha ou em blocos, os valores tendem a estabilizar-se entre as 1500000000 e as 2000000000 operações por segundo (apesar de mudar o tamanho dos blocos, a matriz resultado é constante).



Conclusão

A análise dos resultados apresentados, leva-nos a concluir que para termos uma melhoria de performance, não basta analisar o algoritmo no sentido teórico. É necessário ter em conta todos os passos que um computador (numa arquitectura Von Neumann) tem de realizar, seja uma instrução de cálculo ou acesso à memória.

Do primeiro para o segundo algoritmo percebemos a importância que uma pequena, e quase imperceptível alteração (inversão da ordem dos loops), tem no desempenho temporal da multiplicação (em *C++*). A partir dessa observação, o algoritmo de divisão em blocos, é um passo lógico que progride esta cadeia de pensamento.

Percebemos também a importância da escolha da linguagem para problemas de elevada complexidade matemática, neste caso *C++* seria uma opção lógica para a realização dos cálculos (apesar de python poder ser "pseudo" compilado, como é o caso de *numba* com *JIT*).

Futuras melhorias deste algoritmo poderiam recorrer a novos métodos numéricos (como Coppersmith/Winograd), ou à adoção de threading/multicores (maximizando o aproveitamento da(s) unidade(s) de processamento).

Referências

Documentação Papi

- http://icl.cs.utk.edu/papi/docs/
- http://icl.cs.utk.edu/projects/papi-2.1/files/html_man/papi_presets.html

Algoritmos

- https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_complexity_of_matrix_multiplication
- https://iitd-plos.github.io/col729/lec/matrix_multiplication.html
- https://handwiki.org/wiki/Coppersmith%E2%80%93Winograd_algorithm
- https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/2213977.2214056?casa_token=OswrkZO3YaYAAAAA:BNrh4Pimq61n9zxC6Sf2lbJRNODK5uT2by9QtFCurpAAQN9JsvO01FWF1AV3WS-I8G5RHWN9GPIEm5w