

Trabajo Estadística Bayesiana

Eugenio Guzmán* Alejandra Molina† Jaquelin Morillo‡ Diego Ramirez§
Francisco Villarroel¶

2022-08-26

Introducción

El siguiente trabajo, es un análisis desde una metodología Bayesiana en la cual se revisan 5 modelos de toma de decisión usando como función enlace la distribución *Wiener* (Drift Diffusion Models, DDM); y también se compara el ajuste de los modelos desarrollados, usando DIC (*deviance information criterion*) y LOO (*Leave-one-out cross-validation*).

Los procesos de Wiener son importantes en el cálculo estocástico y, por lo tanto, cuando se desconoce la función que maximiza o minimiza el resultado. En metodología bayesiana, la distribución Wiener nos permite encontrar el extremo (sea máximo o mínimo), a priori, del mejor resultado posible, dado nuestras variables y valores. Esta nos permite, calcular la distribución de probabilidad de los puntos extremos del modelo, para cada intervalo, condicionado por los valores conocidos en los límites del intervalo. De esta manera, nos proporciona un criterio para seleccionar el intervalo en que se debe iterar el proceso, y así, incrementar también, la posibilidad de obtener una distribución normal (Guérin et al., 2010; van de Schoot et al., 2021; Wabersich & Vandekerckhove, 2014).

El modelo estándar de difusión de Wiener incorpora los siguientes cuatro parámetros, que se detallan a continuación:

Symbol	Parameter	Interpretation
α	Boundary separation	Speed-accuracy trade-off (high α means high accuracy)
β	Initial bias	Bias for either response ($\beta > 0.5$ means bias towards response 'A')
δ	Drift rate	Quality of the stimulus (close to 0 means ambiguous stimulus)
τ	Nondecision time	Motor response time, encoding time (high means slow encoding, execution)

Utilizamos el módulo JAGS Wiener (Wabersich & Vandekerckhove, 2014) en JAGS, a través del paquete rjags en R-statistics, para estimar las distribuciones.

Drift Diffusion model

You can also embed plots, for example:

*ejguzmanl@udd.cl

†alejandrmm@gmail.com

‡jaquelin.morillo@gmail.com

§diegoramirez.al34@gmail.com

¶fvillarroelr@udd.cl

Note that the `echo = FALSE` parameter was added to the code chunk to prevent printing of the R code that generated the plot.

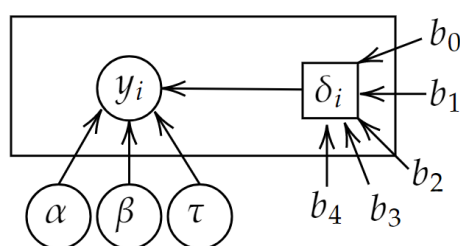
Explicación del experimento

Veinte personas participaron en un juego de ruleta, donde debían apostar a uno de los dos colores: naranja o celeste. Cada color está asociado a una probabilidad de dar un premio, el que está indicado por el área de ese color en la barra de una ruleta, y al monto de dicho premio potencial, indicado por el número sobre la barra. Además, algunas ruletas (botones de la barra) tenían áreas grises que representan una máscara que oculta el verdadero color de esas áreas. Esta condición se conoce como ambigüedad, y tuvo un rango de 0 (sin ambigüedad; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6).

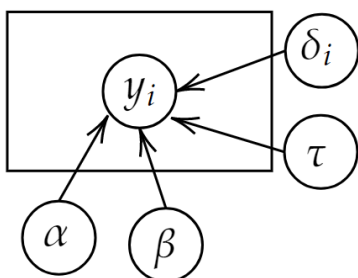
Las variables presentes en la base de datos y que se utilizan para calcular son:

- **P**: Probabilidad del color naranja. La probabilidad del color celeste es el complemento (1-p).
- **O**: Premio normalizado del color naranja. El premio del color celeste es el complemento (1-o).
- **a**: Rango de la máscara o grado de ambigüedad $a=[0 .3 .4 .5 .6]$
- **bias** : Lugar donde estaba la verdadera división de los colores dentro de la máscara. 0: margen izquierdo, 0.5: mitad, 1: margen derecho.
- **pv**: Probabilidad visible izquierdo, ignorando el área de la máscara. probabilidad visible derecha 1-pv.
- **ttp**: tiempo de aparición de las opciones, en sub milisegundos. 10000 sub milisegundos = 1 segundo
- **ttr**: tiempo de la respuesta.
- **F**: Resultados (1: izquierda, 2 Derecha)
- **r**: Decisión (1: izquierda, 2 Derecha)
- **B**: bloque o repetición del experimento en el mismo sujeto
- **sub**: identificador de cada participante

Modelación



$$\begin{aligned}
 y_i &\sim wiener(\alpha, \beta, \tau, \delta_i) \\
 \delta_i &= f(p, o) \\
 \alpha &\sim unif \\
 \beta &\sim unif \\
 \tau &\sim unif \\
 b &\sim norm(\mu, \sigma)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y_i &\sim wiener(\alpha, \beta, \tau, \delta) \\
 \delta_i &= unif \\
 \alpha &\sim unif \\
 \beta &\sim unif \\
 \tau &\sim unif
 \end{aligned}$$

Resultados - Modelos y tablas sumarias

Modelo 1

$$Y_{(ij)} \sim \text{Wiener}(\alpha_{(ij)}, \beta_{(ij)}, \tau_{(ij)}, \delta_{(ij)})$$

Este modelo supone una distribución Wiener dependiente de los parámetros alfa, beta, tau y delta en función de los sujetos estudiados y los *trials*.

Table 1: Media de los parámetros modelados

Modelo 1					
Parámetro	A	B	C	D	E
α	0.76461	0.9084	0.92244	0.93057	0.95987
β	0.46303	0.51041	0.49342	0.5304	0.54067
τ	0.0045092	0.0081149	0.001054	0.017666	0.016152
δ	0.66599	0.085327	0.36738	-0.13167	0.26716

Modelo 2

$$Y_{(ij)} \sim \text{Wiener}(\alpha_{(ij)}, \beta_{(ij)}, \tau_{(ij)}, \delta_{(p_{ij}, o_{ij})})$$

Al igual que el modelo 1 se contemplan los mismos parámetros, con la excepción que el parámetro delta depende linealmente de la probabilidad y del premio normalizado

Table 2: Media de los parámetros modelados

Modelo 2					
Parámetro	A	B	C	D	E
α	0.88527	0.9671	0.96805	0.95355	0.9938
β	0.45883	0.502	0.49792	0.52661	0.53689
τ	0.0021536	0.0061823	0.00085613	0.016333	0.015132
b_0	11.642	6.8589	5.3276	3.0593	2.7807
b_1	-13.817	-7.7817	-5.7075	-2.9145	-1.3458
b_2	-8.503	-5.3981	-4.3687	-3.2749	-4.0697

Modelo 3

$$Y_{(ij)} \sim \text{Wiener}(\alpha_{(ij)}, \beta_{(ij)}, \tau_{(ij)}, \delta_{(p_{ij}, o_{ij})})$$

En esta weá p y o dependen cuadráticamente

Table 3: Media de los parámetros modelados

Modelo 3					
Parámetro	A	B	C	D	E
α	0.88881	0.96849	0.97048	0.95588	0.9952
β	0.45816	0.50246	0.49924	0.5284	0.53707
τ	0.0021119	0.0061697	0.0010137	0.016375	0.015178
b_0	10.486	6.9346	4.8691	1.8444	2.3766
b_1	-10.635	-7.3161	-2.0708	-0.16917	1.3034
b_2	-5.3338	-6.343	-6.2612	0.36938	-5.0773
b_3	-3.264	-0.47105	-3.4009	-2.7109	-2.5218
b_4	-3.2369	0.94515	2.0646	-3.6848	1.1816

Modelo 4

$$Y_{(ij)} \sim \text{Wiener}(\alpha_{(ij)}, \beta_{(ij)}, \tau_{(ij)}, \delta_{(p_{ij})})$$

sólo p depende cuadráticamente

Table 4: Media de los parámetros modelados

Modelo 4					
Parámetro	A	B	C	D	E
α	0.83153	0.93395	0.94481	0.93427	0.96406
β	0.46895	0.50739	0.49798	0.52976	0.53892
τ	0.0029797	0.0070839	0.0011369	0.017322	0.015736
b_0	2.5307	2.1188	0.92531	0.34464	-0.76552
b_1	1.7668	-4.2162	2.2647	-0.33574	5.1825
b_3	-8.9003	0.55325	-5.3849	-0.91345	-4.9913

Modelo 5

$$Y_{(ij)} \sim \text{Wiener}(\alpha_{(ij)}, \beta_{(ij)}, \tau_{(ij)}, \delta_{(o_{ij})})$$

Sólo O depende cuadráticamente

[chantar toda la wea de graficos y tablas acá]

Table 5: Media de los parámetros modelados

Modelo 5					
Parámetro	A	B	C	D	E
α	0.76539	0.90863	0.92702	0.9406	0.9907
β	0.46397	0.51086	0.49501	0.53197	0.53686
τ	0.0044623	0.0079759	0.0012098	0.017156	0.015165
b_0	0.3456	0.21885	1.6944	-0.073462	2.3286
b_2	0.70658	-0.45442	-5.3103	2.6437	-6.063
b_4	-0.037301	0.27331	4.1839	-4.4153	2.5567

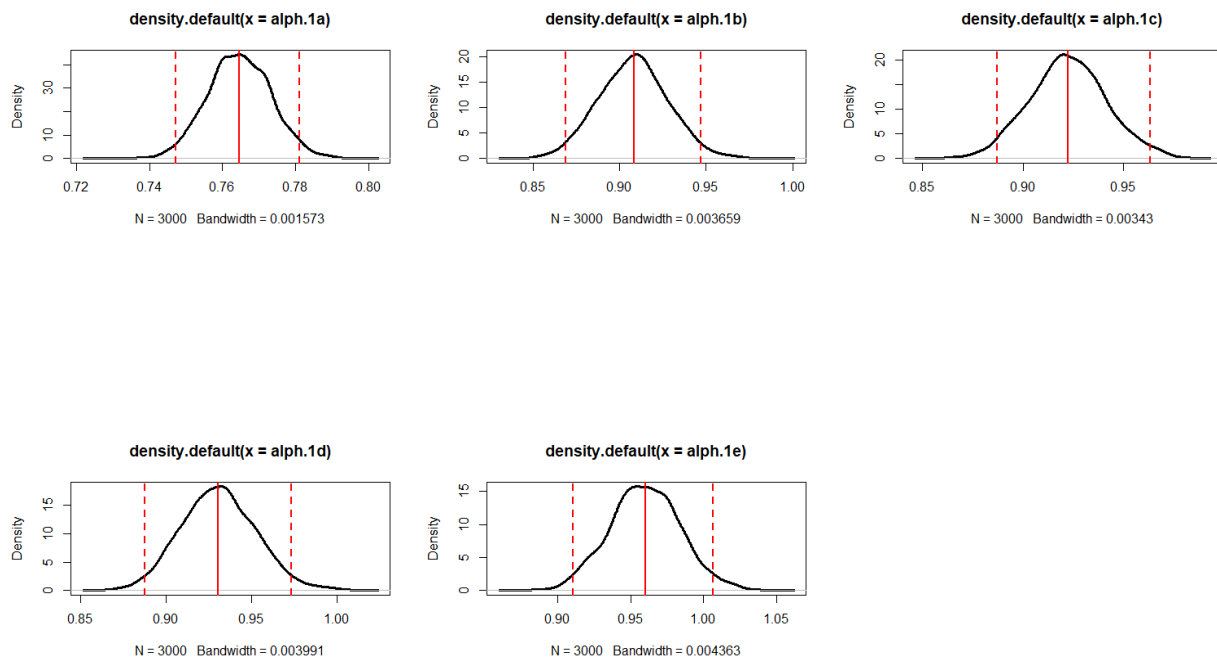
Resultados - Análisis de parámetros comparados por modelo

Parámetro Alfa

Modelo 1

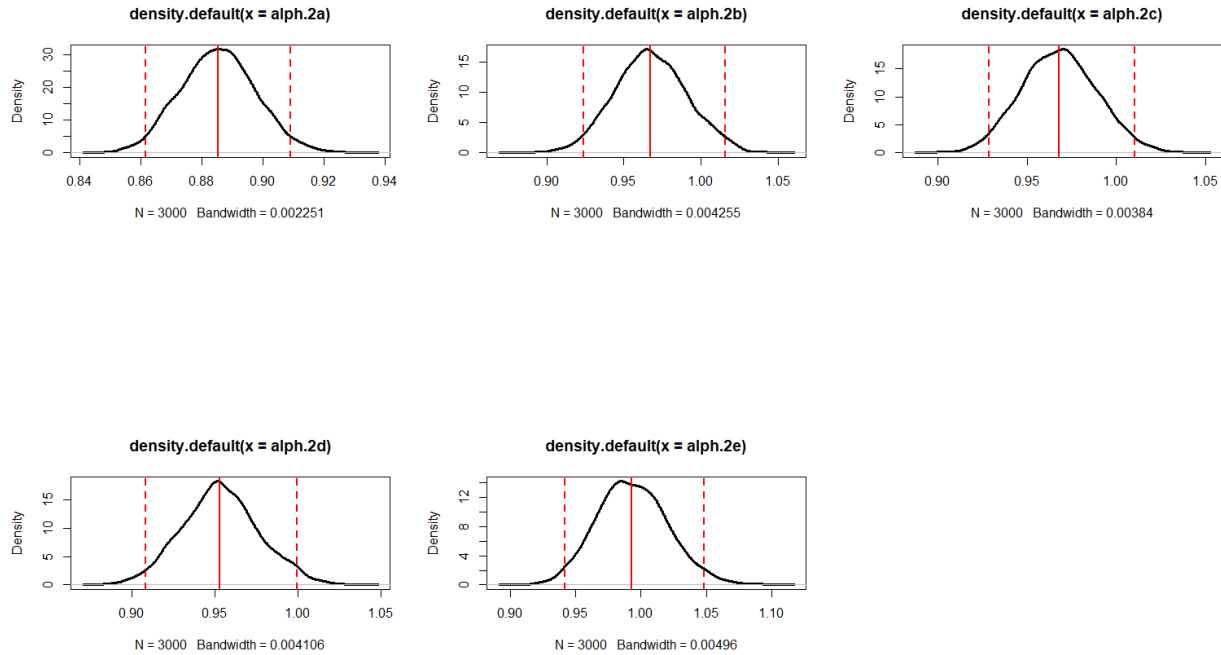
Mayores niveles de α (*trade-off Speed-accuracy*) está relacionado con un mayor nivel de accuracy que tuvieron los participantes. Si comparamos todos los α , como se muestran en la figura 1, desde la figura 1 “alpha.1a” (sin ambigüedad) hasta la “alpha.1.e” (mayor nivel de ambigüedad); es posible apreciar que entre menor grado de ambigüedad, más bajo es el nivel de α , es decir, menor accuracy, el que iría aumentando a medida que el contraste incrementa.

Esto podría deberse a que en “alpha.1a”, la velocidad podría verse disminuida ya que los participantes pueden ver con claridad (no hay ambigüedad) la barra de la ruleta con los colores, y así, “tomarse más tiempo” para tomar una decisión; lo que no ocurriría en alpha.1.e, ya que la barra tiene una máscara que oculta el verdadero color de esas áreas.



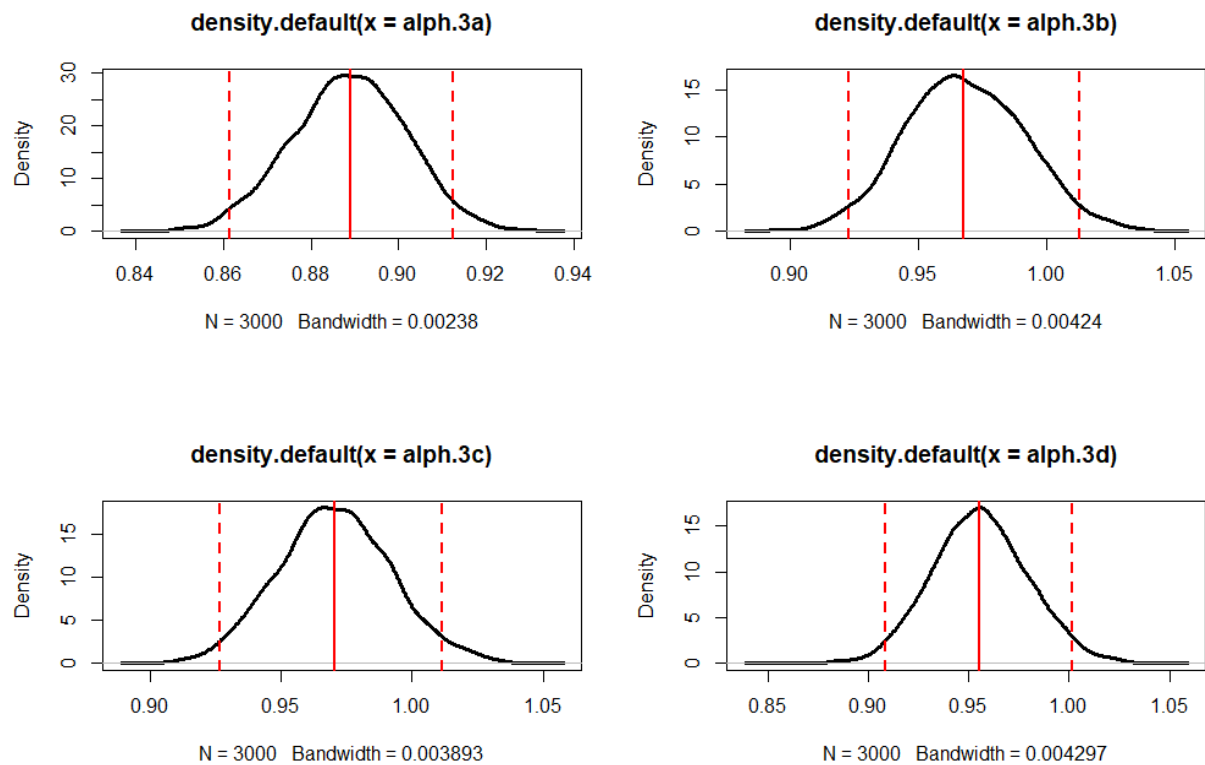
Modelo 2

Con respecto a los α , a nivel general, al igual que en el modelo 1, cuando no se presenta el contraste o ambigüedad, el trade-off entre el tiempo y accuracy es menor, a que cuando hay ambigüedad.



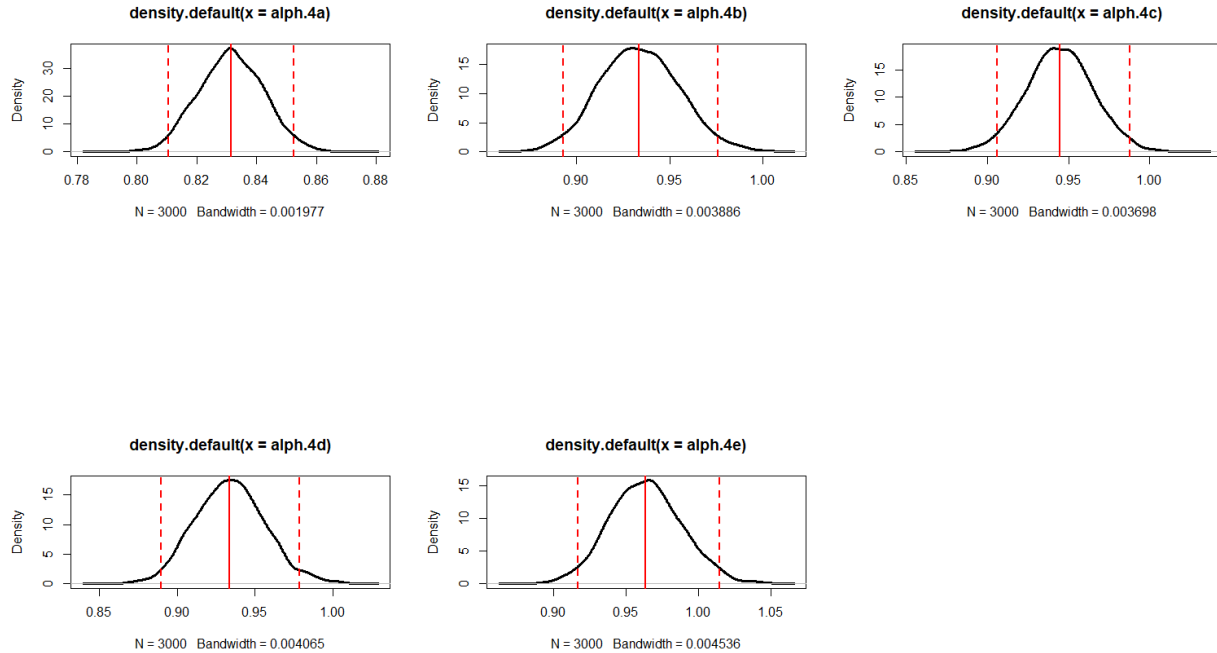
Modelo 3

En relación a los α , al igual que en los modelos anteriores (1 y 2), cuando no hay presencia de ambigüedad (contraste que oscurece la barra), el trade-off entre el tiempo y accuracy es menor a cuando si hay presencia de ambigüedad.



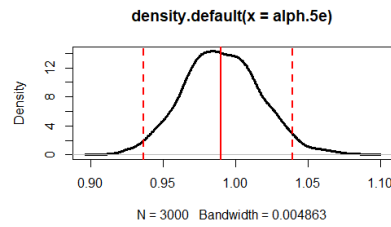
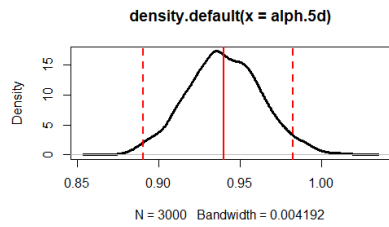
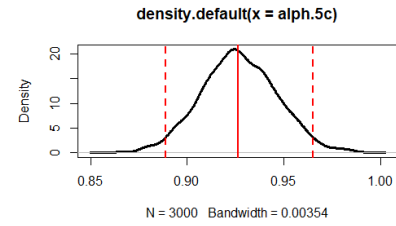
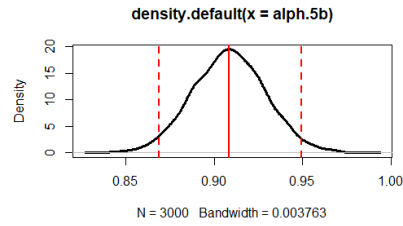
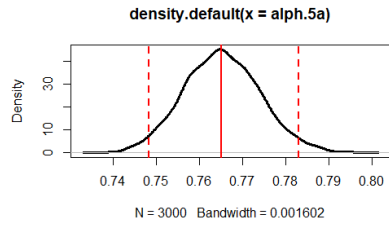
Modelo 4

En relación a los α del modelo 3, al igual que en los modelos anteriores (1,2 y 3), cuando no hay presencia de ambigüedad (contraste que oscurece la barra), el trade-off entre el tiempo y accuracy, es menor a cuando si hay ambigüedad.



Modelo 5

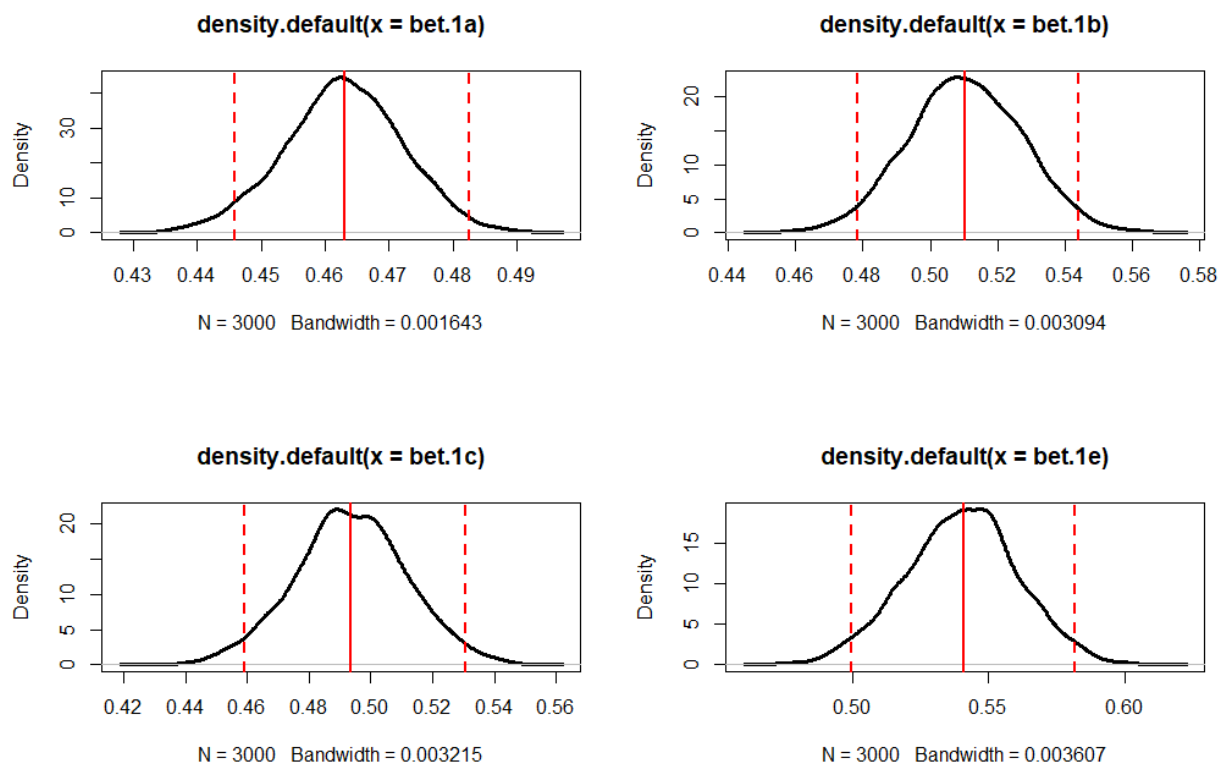
Con respecto a los α , a nivel general, al igual que en los modelos 1,2,3 y 4, cuando no se presenta el contraste o ambigüedad, el trade-off entre el tiempo y accuracy es menor a que cuando hay ambigüedad, o el contraste es ambiguo.



Betas

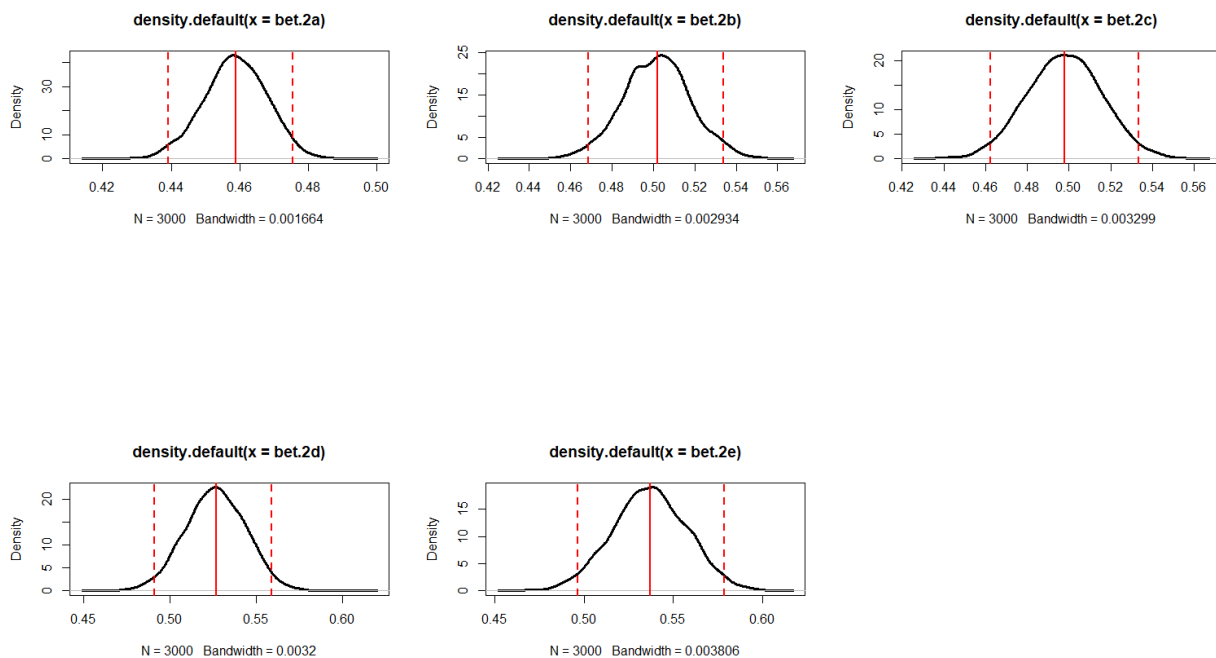
Modelo 1

Respecto a los β , cuando no se presenta ambigüedad, es posible apreciar que existe cierto margen de sesgo (*bias*) hacia presionar el botón de la ruleta izquierdo. Sin embargo, a medida que se va presentando ambigüedad, el sesgo deja de presentarse.



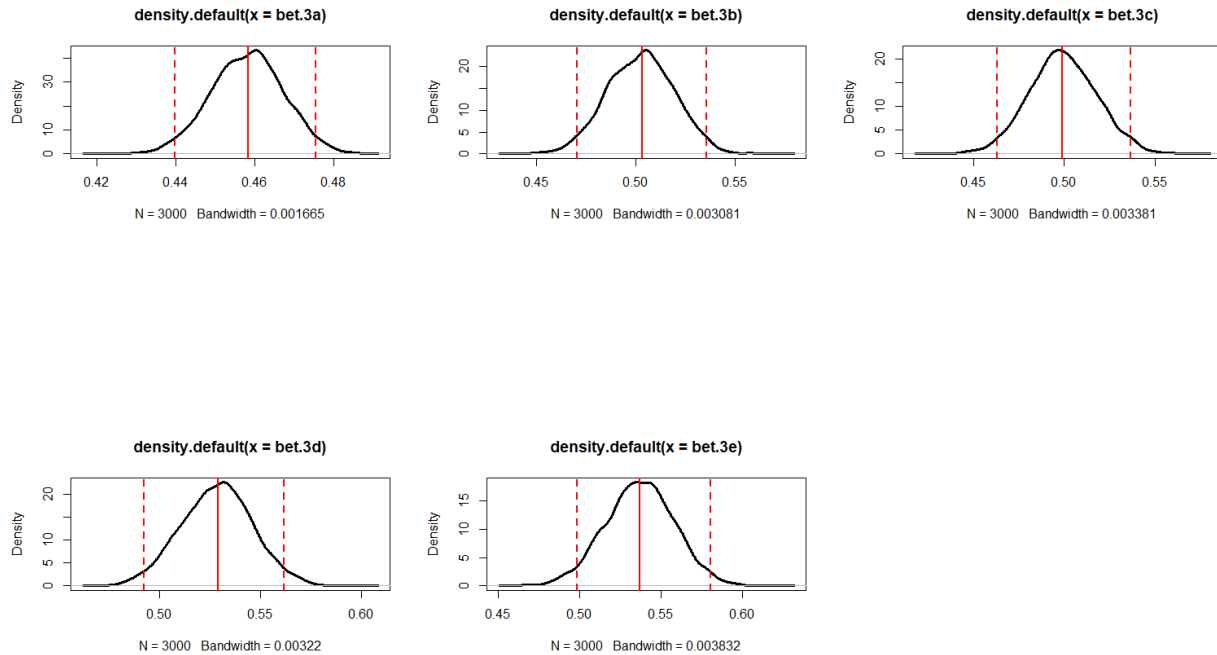
Modelo 2

Respecto al β o *bias inicial*, cuando no hay ambigüedad, nuevamente (al igual que el Beta del modelo 1), existe un sesgo hacia presionar la barra izquierda, versus la derecha. Fenómeno que tendería a desaparecer a medida que el contraste de la barra y/o ambigüedad que se va presentando aumenta.



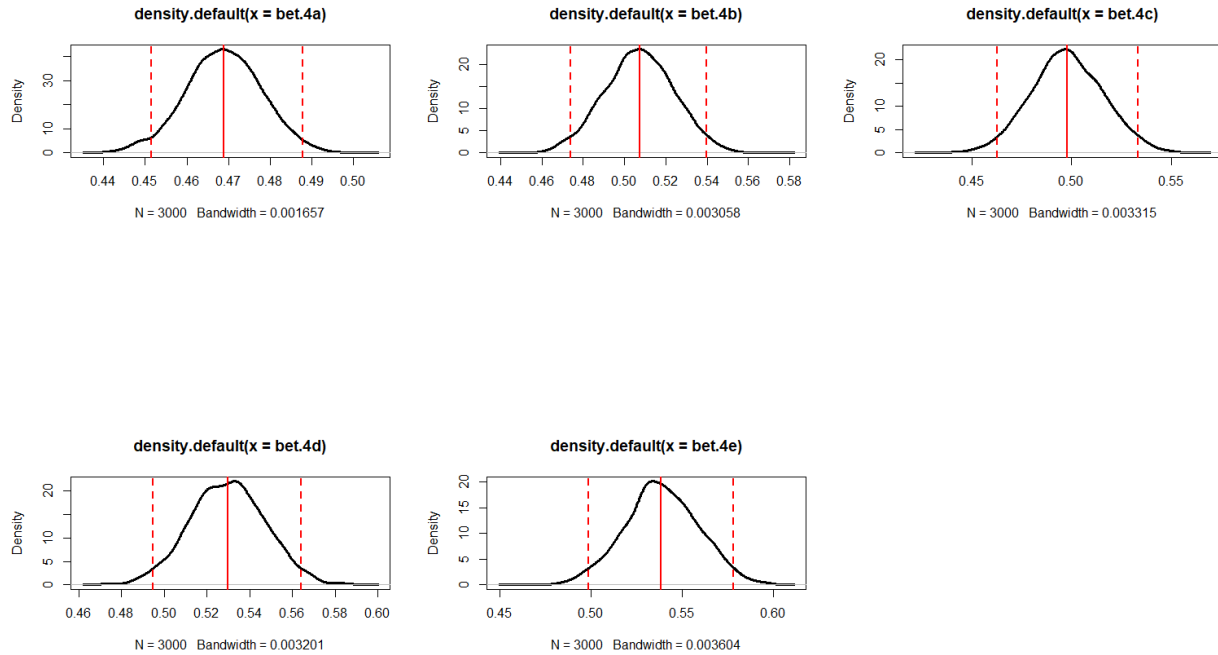
Modelo 3

Respecto al β , cuando no hay ambigüedad, nuevamente, existe un sesgo hacia presionar la barra izquierda, versus la derecha. Fenómeno que tendería a desaparecer a medida que el contraste de la barra y/o ambigüedad que va teniendo el participante, aumenta.



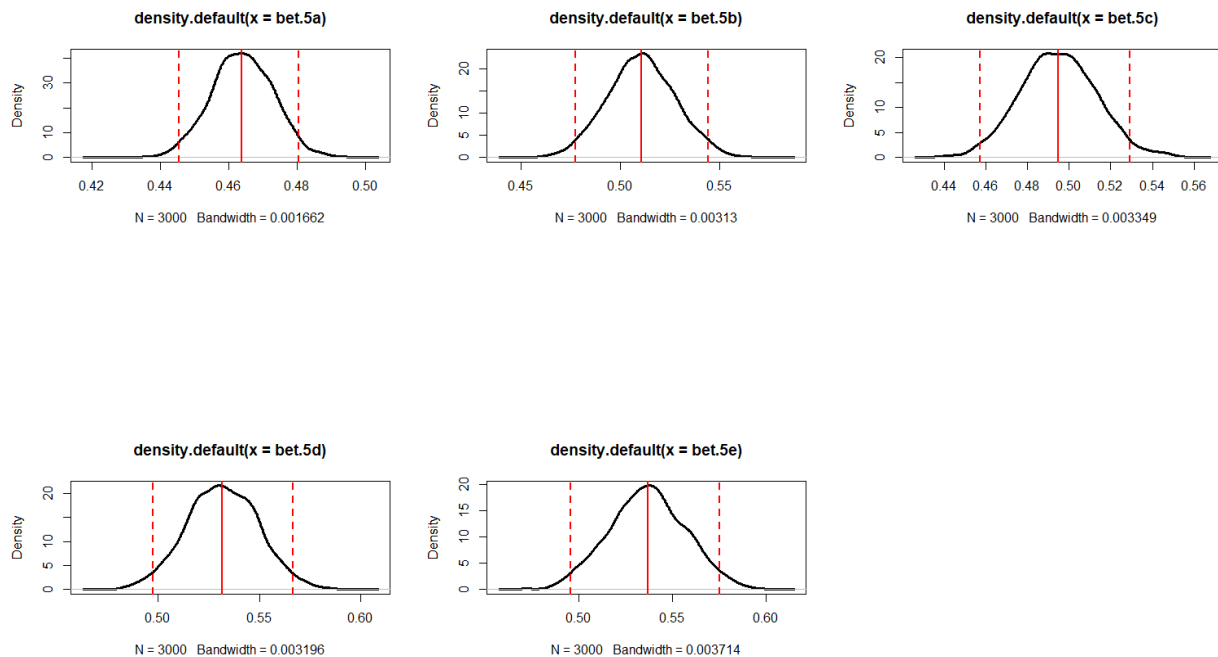
Modelo 4

Respecto al β o bias inicial, cuando no hay ambigüedad, nuevamente, existe un sesgo hacia presionar la barra izquierda, versus la derecha. Fenómeno que tendería a desaparecer a medida que el contraste de la barra y/o ambigüedad que va teniendo el participante, aumenta.



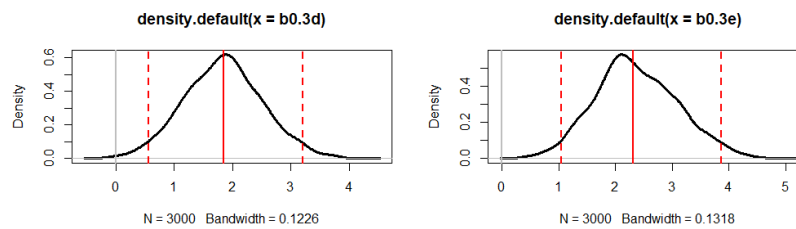
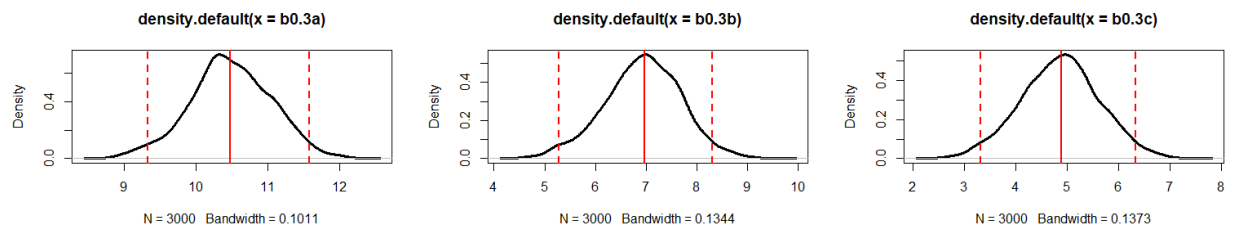
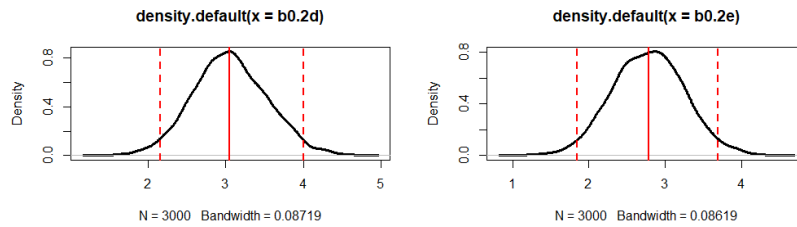
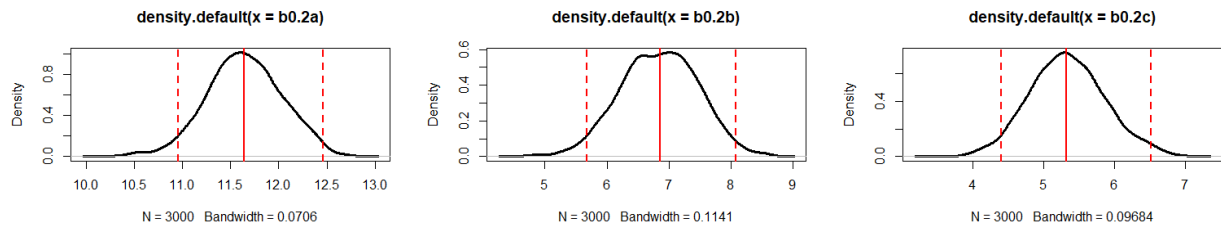
Modelo 5

Respecto al β o bias inicial, cuando no hay ambigüedad, nuevamente, existe un sesgo hacia presionar la barra izquierda, versus la derecha. Fenómeno que tendería a desaparecer a medida que el contraste de la barra y/o ambigüedad que va teniendo el participante, aumenta.

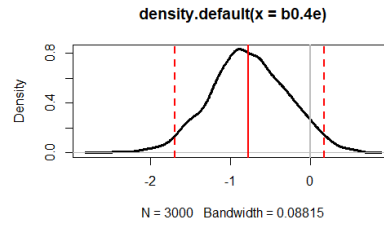
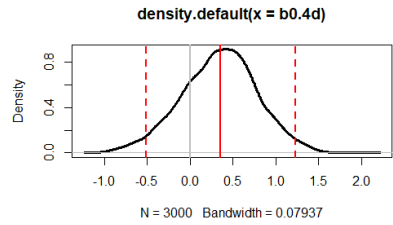
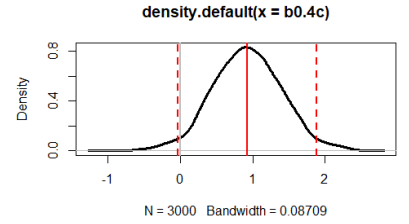
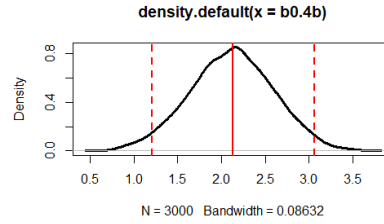
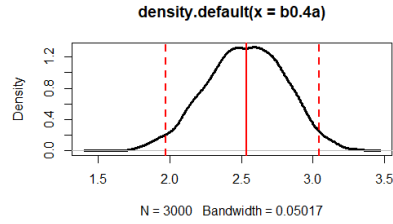


B0

Modelo 2

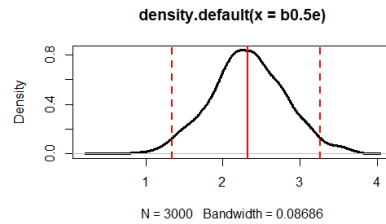
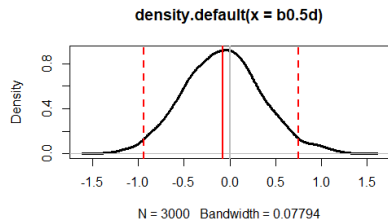
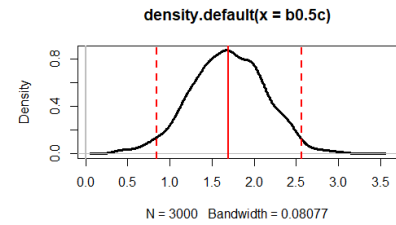
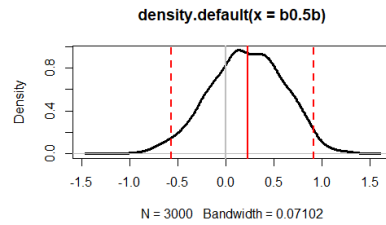
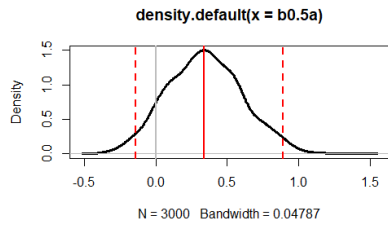


Modelo 3



Modelo 4

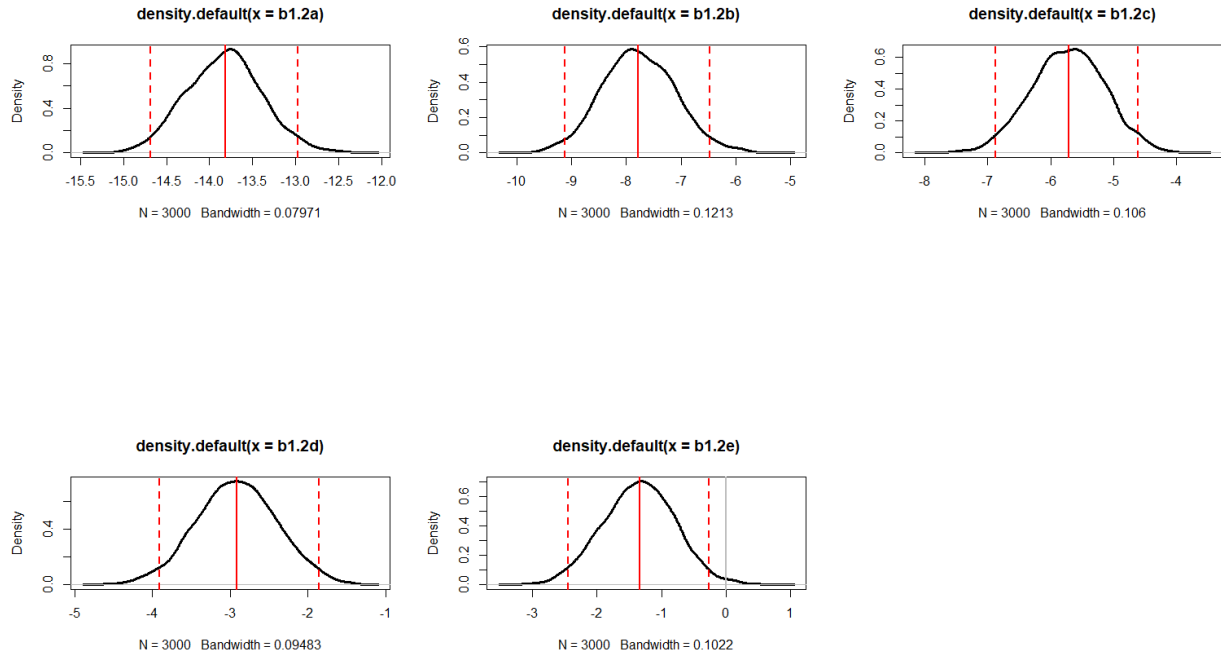
Modelo 5



B1

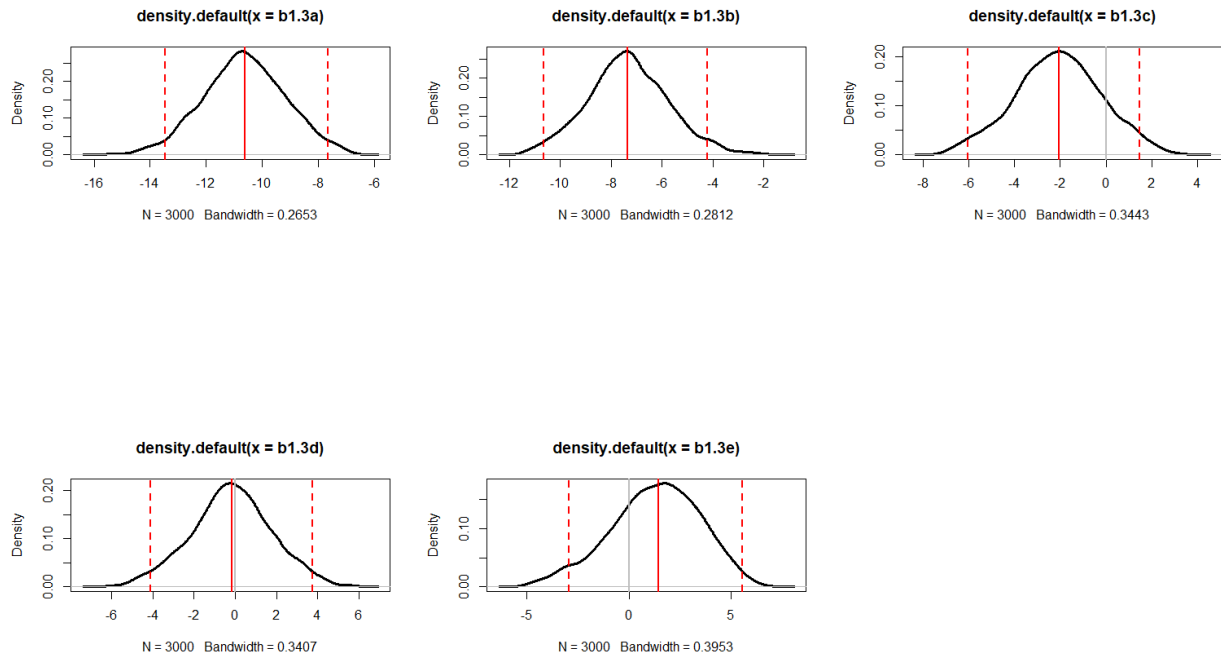
Modelo 2

De acuerdo a los b1, tanto en condiciones de ambigüedad como de no ambigüedad, la probabilidad que acompaña al b1 si influye en el cálculo del drift.



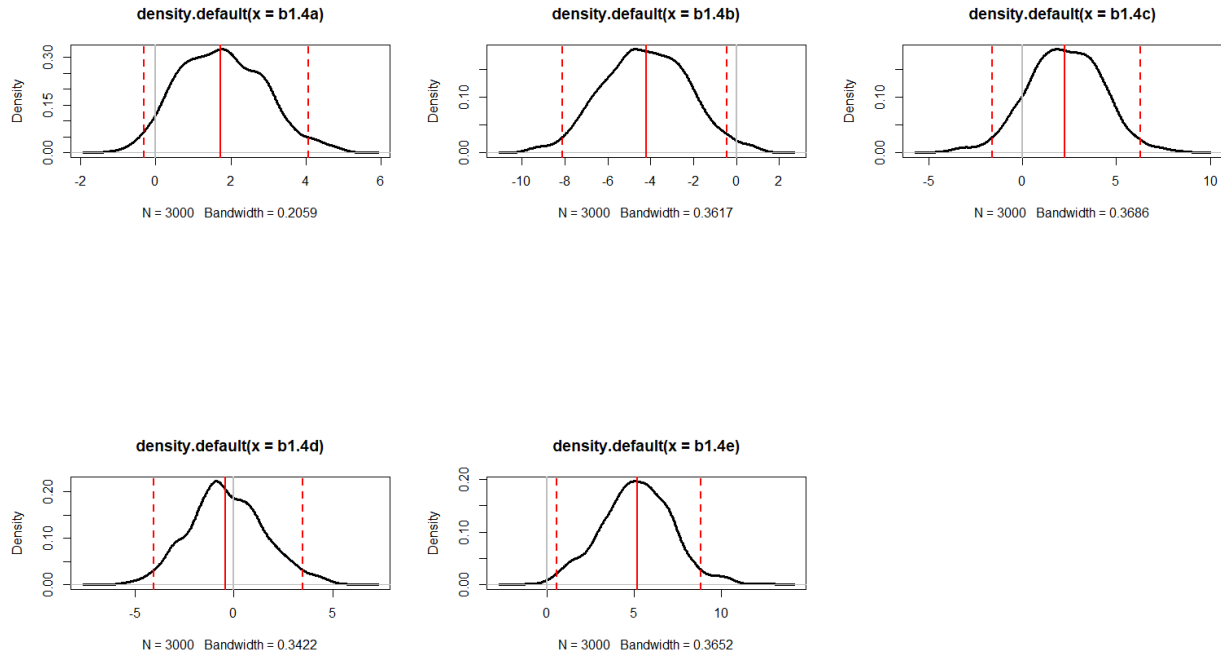
Modelo 3

De acuerdo a los b1, a diferencia del modelo 1 y 2, ahora, a medida que se va presentando un aumento de contraste (o ambigüedad), la probabilidad que acompaña al b1 deja de influir en el cálculo del drift.



Modelo 4

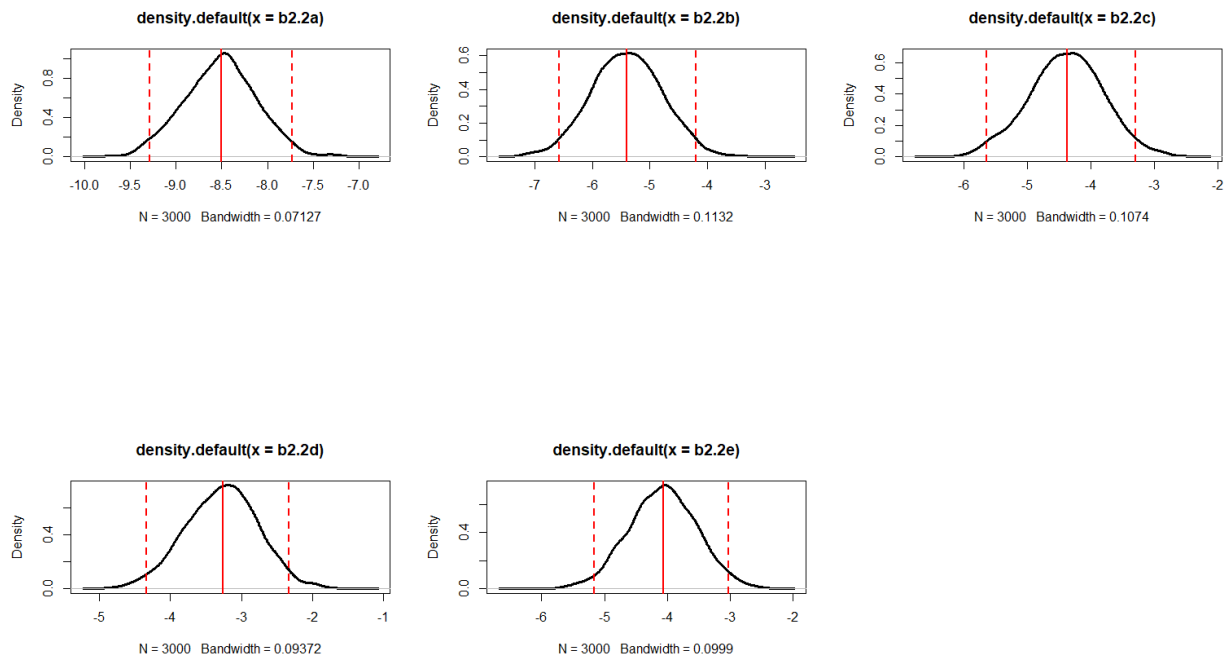
De acuerdo a los b1, tanto en condiciones de ambigüedad como de no ambigüedad, la probabilidad que acompaña al b1 no influye en el cálculo del drift, sin embargo, esto cambia según el contraste que se le presente a los participantes.



B2

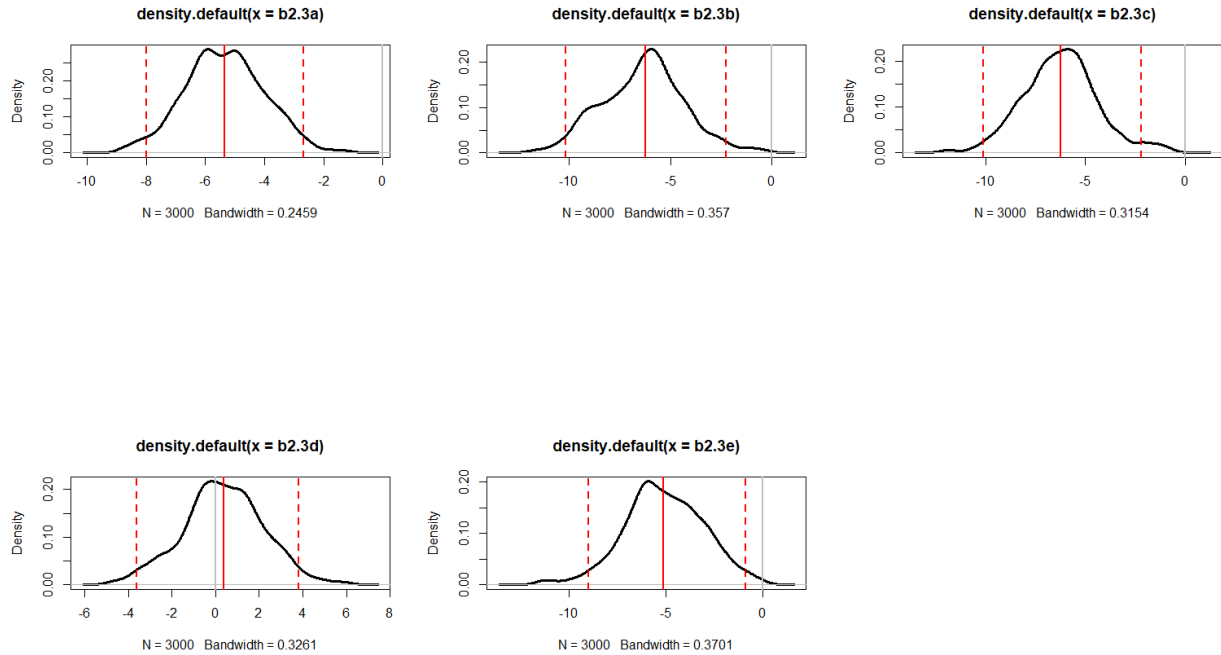
Modelo 2

Finalmente, respecto a b2, tanto en condiciones de ambigüedad como de no ambigüedad, el pago que acompaña al b2 si influye en el cálculo del drift.



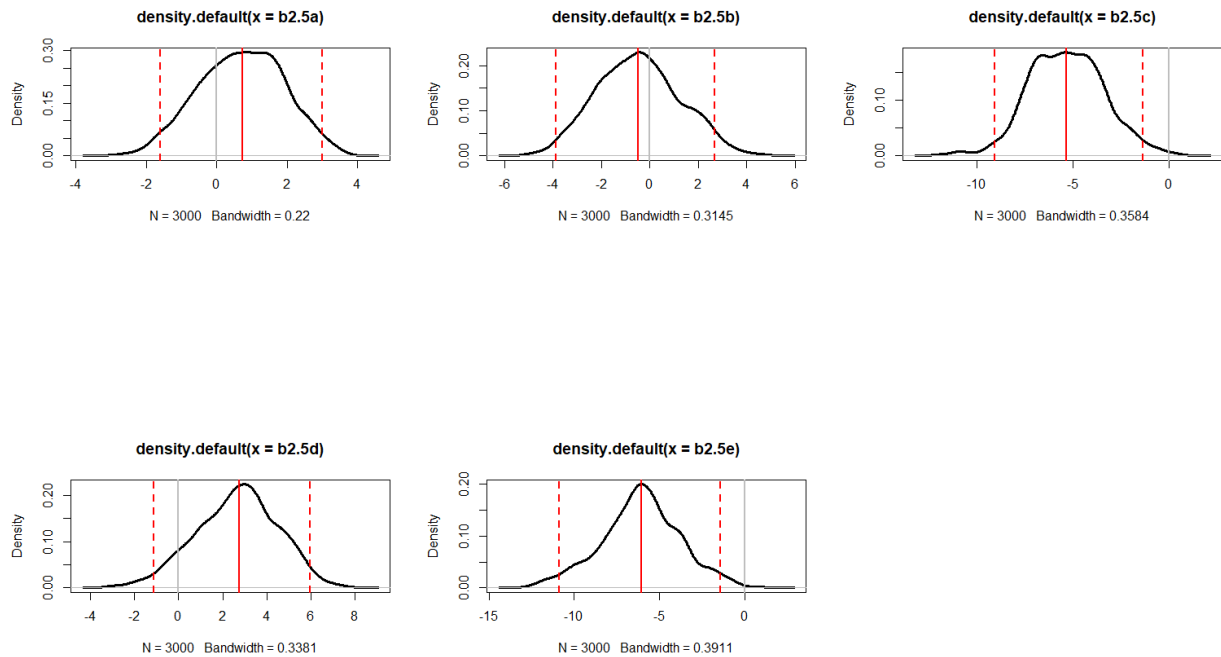
B2 Modelo 3

A nivel general el pago que acompaña a b2 si influye en el cálculo del drift, a excepción del b2.3d.



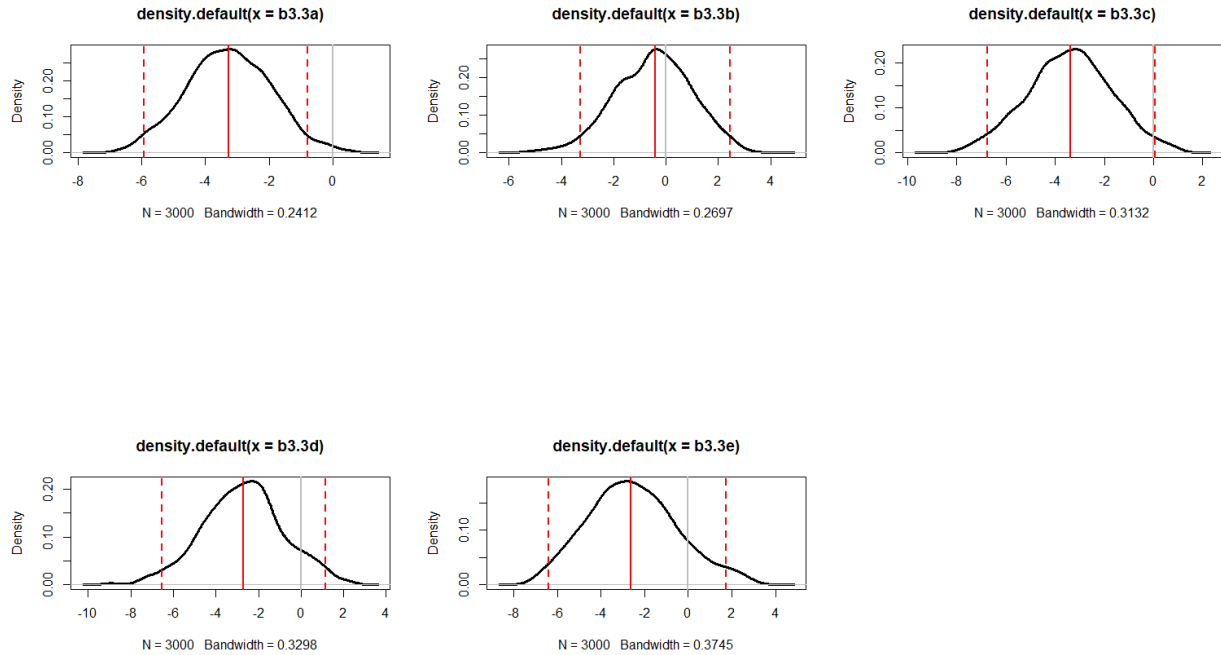
B2 modelo 5

De acuerdo a los b2 (modelo no incluye ni b1 ni b3), a nivel general, el pago que acompaña a b2, influye y no influye en el cálculo del *drift*, dependiendo del nivel de ambigüedad (o no) que se presenta a los participantes. Por ejemplo en b2.5a, b2.5b, y b2.5d si influye, pero en b2.5c y b2.5e no influye.



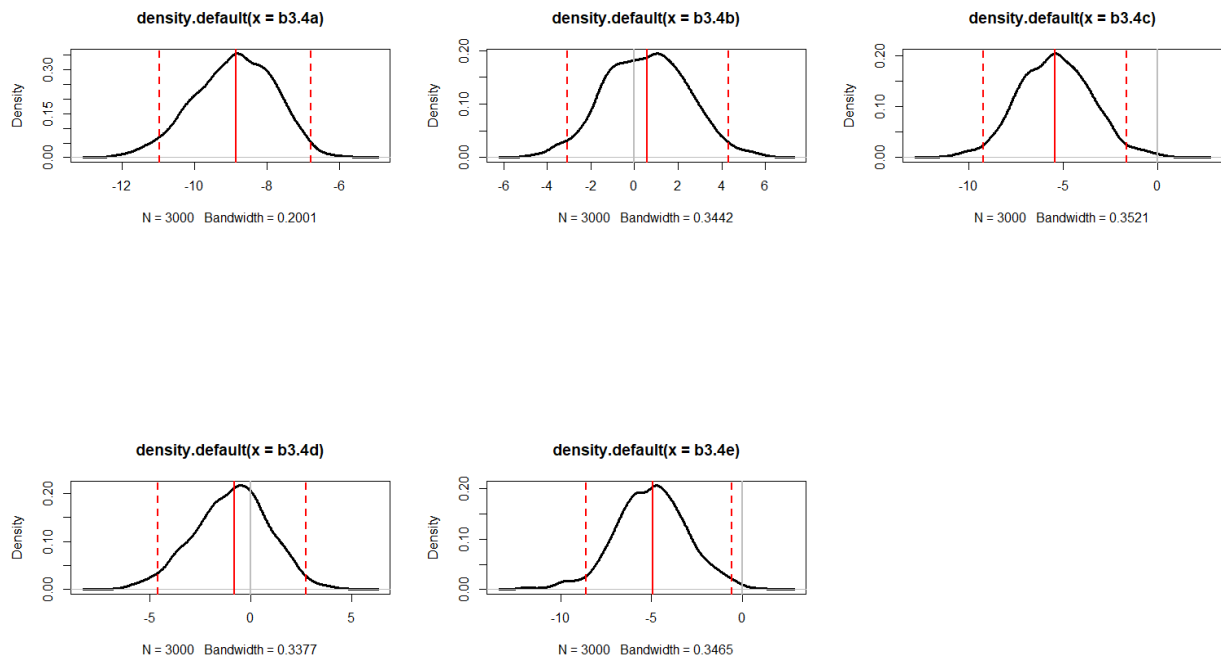
B3 modelo 3

De acuerdo a los b3, que es una función cuadrática de la probabilidad; es posible apreciar que a medida que aumenta la ambigüedad la probabilidad de los b3 no influye en el cálculo drift.



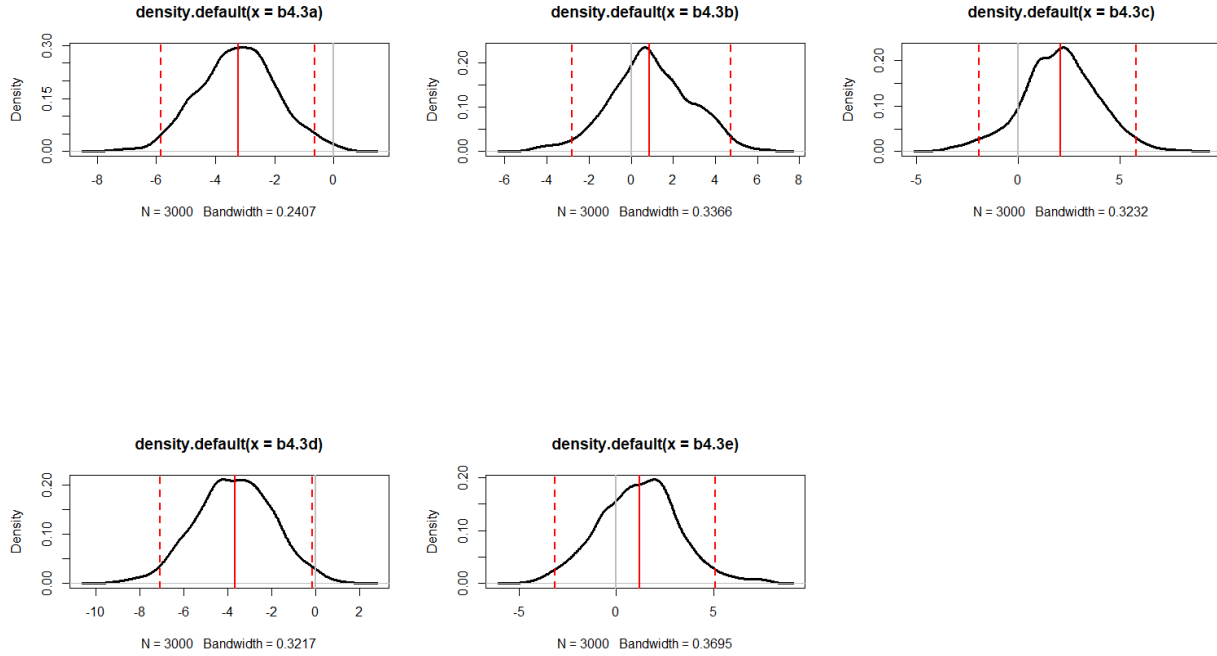
B3 modelo 4

Finalmente, de acuerdo a los b3 (el modelo no incluye b2 y b4), sólo en condiciones de ambigüedad, la probabilidad que acompaña al b3 no influye en el cálculo del drift, sin embargo, esto cambia según el contraste en el que estén los participantes.



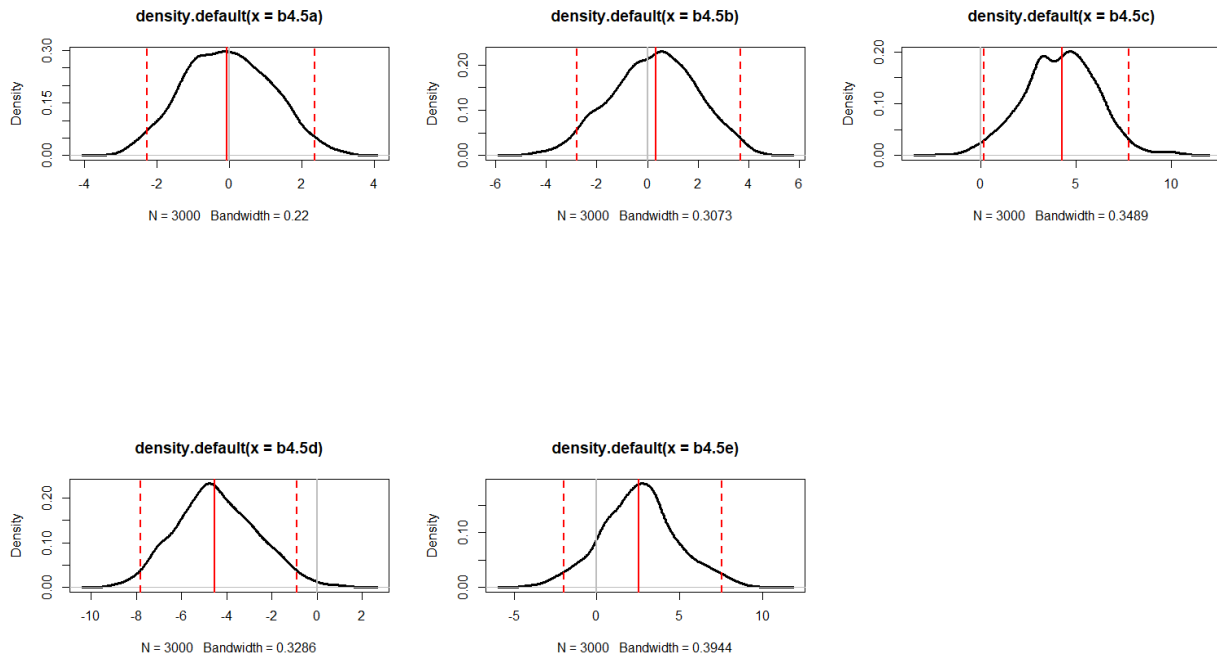
B4

Modelo 3 Finalmente, con respecto a los b4, que es una función cuadrática del pago, es posible apreciar que a medida que aumenta la ambigüedad (al igual que el caso anterior) el pago no influye en el drift.



Modelo 5

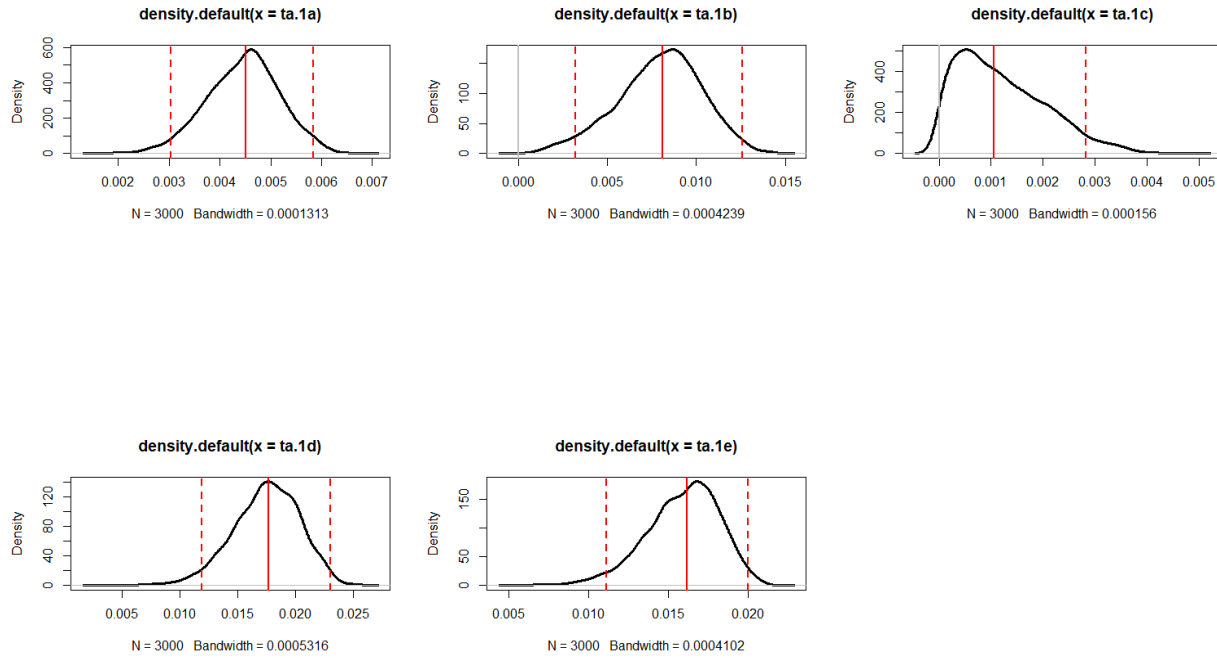
Finalmente, con respecto a los b4, de manera similar al b2, hay casos en que el pago influye en el drift, y casos en que no, independientemente del nivel de ambigüedad.



Tau

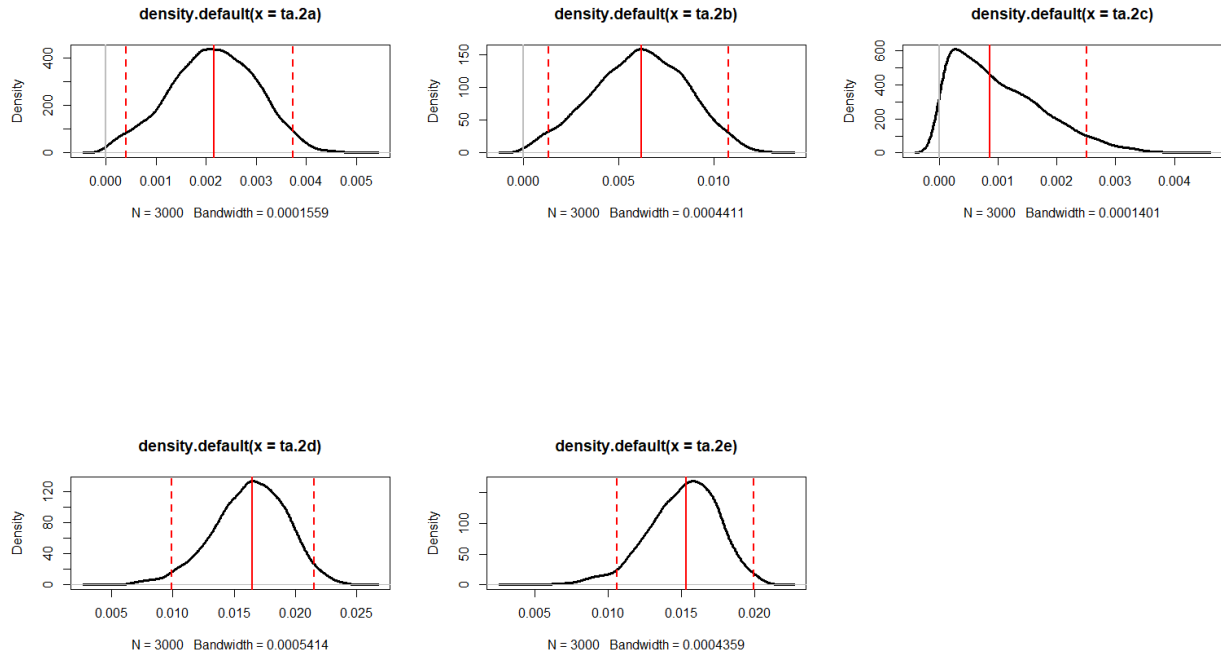
Modelo 1

Finalmente, con respecto a los “tau” o tiempos de no-decisión (tiempo de respuestas motoras, tiempo de codificación, entre otros), los participantes tienen mayores tiempos de no-decisión cuando hay un mayor contraste (que cuando no lo hay).



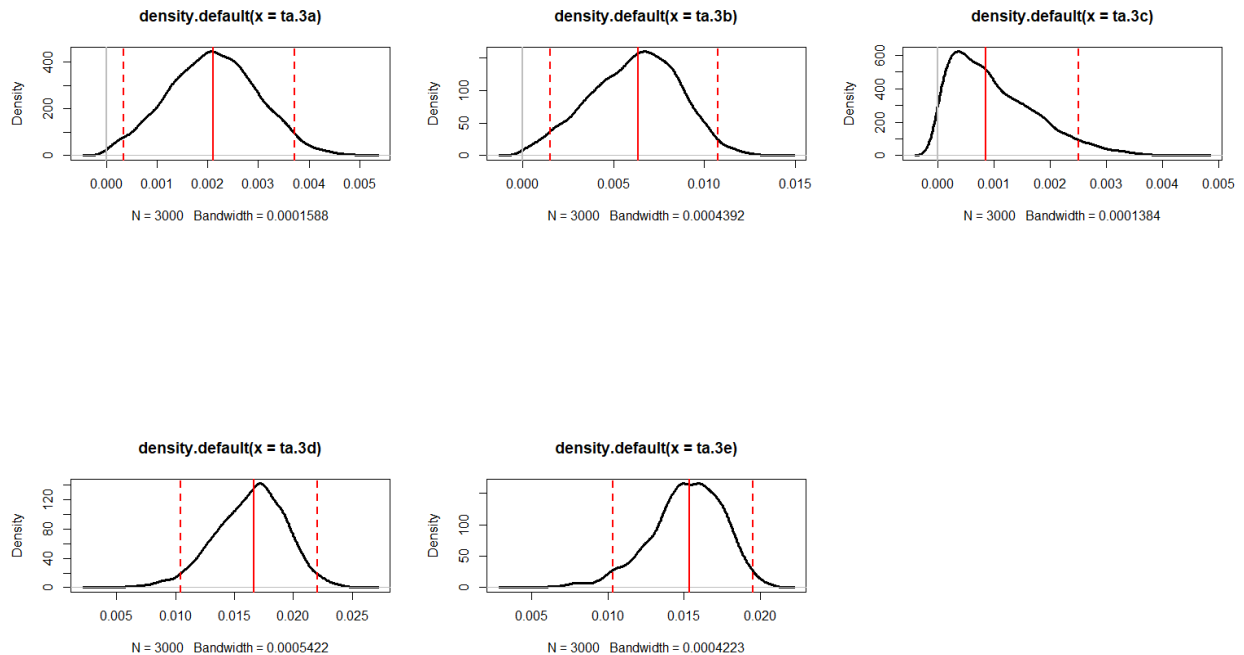
Modelo 2

Con respecto a los “tau” o tiempos de no-decisión, los participantes tienen mayores tiempos de no-decisión cuando hay un mayor contraste, al igual que en el tau del modelo 1.



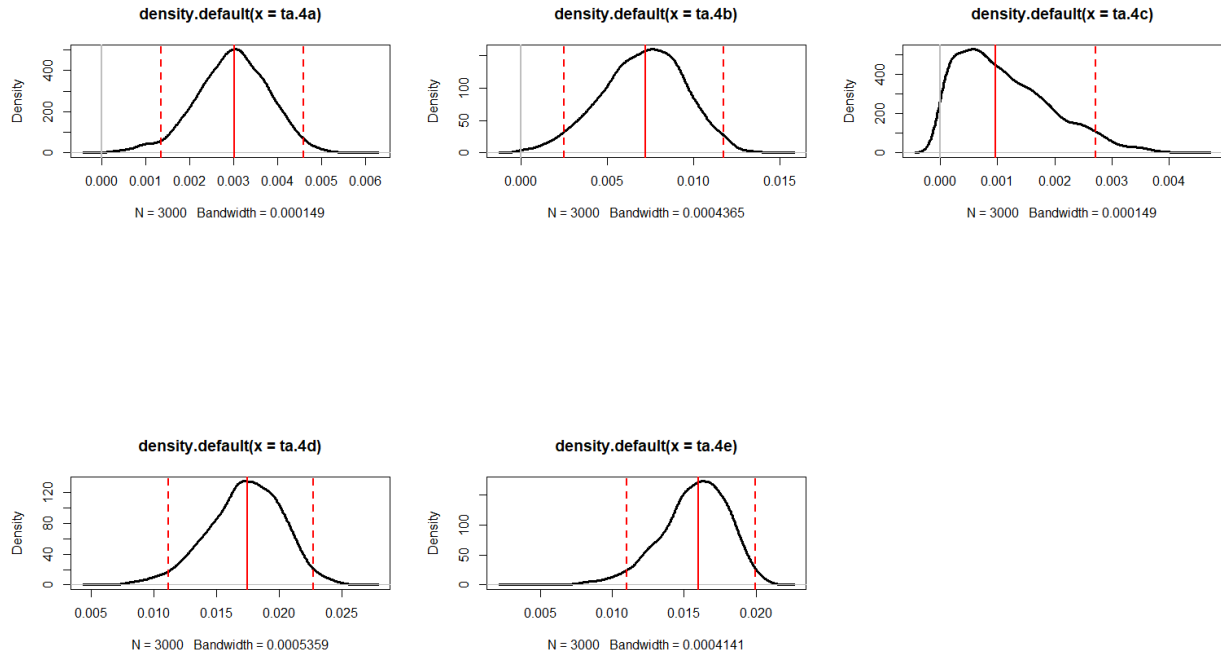
Modelo 3

Con respecto a los “tau” o tiempos de no-decisión, los participantes tienen mayores tiempos de no-decisión cuando hay un mayor contraste.



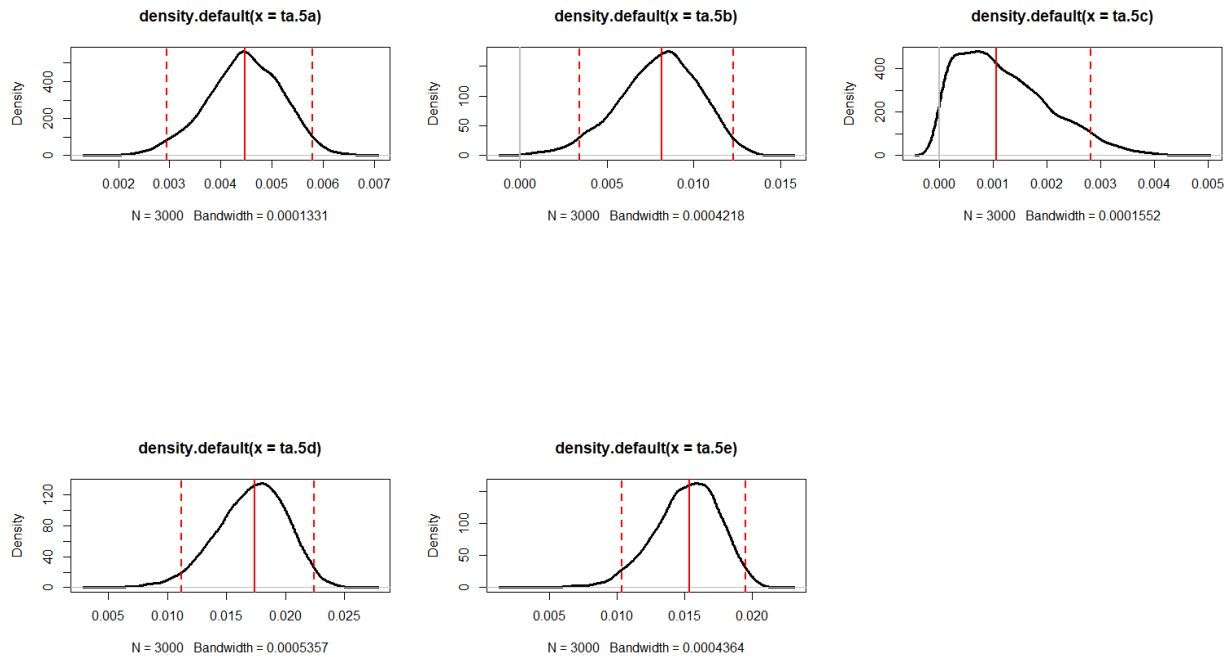
Modelo 4

Con respecto a los “tau” o tiempos de no-decisión, los participantes tienen mayores tiempos de no-decisión cuando hay un mayor contraste, patrón que se repite en los modelos anteriores.

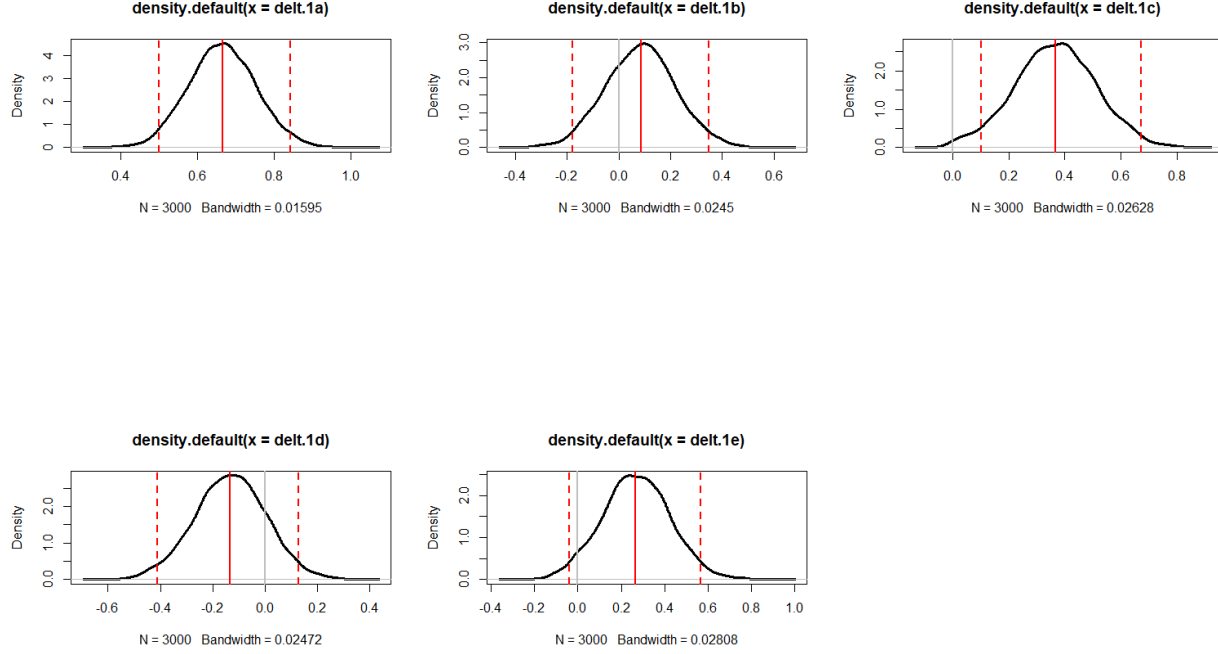


Modelo 5

Con respecto a los “tau” o tiempos de no-decisión, los participantes tienen mayores tiempos de no-decisión cuando hay un mayor contraste.



Delta



Delta modelo 1

Ajuste de modelo DIC y LOO

Como queda en evidencia en la tabla 6, el DIC indica que en el experimento sin máscara (A), el modelo que mas se ajusta a los datos es aquel que incorpora la probabilidad y el premio en una relación cuadrática. Este hallazgo se repite para todos los niveles de ambigüedad, exceptuando la máscara al 0.6 (E) y y al 0.3 (B). No obstante, esta diferencia es marginal.

Table 6: Resultados DIC					
Mascaras					
Modelo	A	B	C	D	E
1	-1367	-31	-76	25	-20
2	-2367	-168	-176	-16	-71
3	-2390	-166	-176	-19	-69
4	-1977	-92	-126	21	-22
5	-1369	-29	-82	7	-65

Los hallazgos resultantes del DIC son concordantes al revisar el Leave-One-Out (LOO), dado que el modelo 3 sigue siendo el de mejor ajuste en función a la muestra trabajada, con una diferencia marginal con el modelo 2 (el cual muestra un ajuste ligeramente mejor en las máscaras al 0.3 y 0.6).

Table 7: Resultados LOO					
Mascaras					
Modelo	A	B	C	D	E
1	683	16	36	-13	8
2	1188	84	86	8	34
3	1195	82	86	9	33
4	988	46	62	-11	9
5	684	14	40	-4	31

Los hallazgos resultantes del DIC son concordantes al revisar el Leave-One-Out (LOO), dado que el modelo 3 sigue siendo el de mejor ajuste en función a la muestra trabajada, con una diferencia marginal con el modelo 2 (el cual muestra un ajuste ligeramente mejor en las máscaras al 0.3 y 0.6).

Finalmente, como próximos desafíos, sería interesante ahondar en otras funciones para la relación de la probabilidad y el premio con el Drift.

Referencias

- Guérin, F., Barreau, M., Demri, A., Cloupet, S., Hersant, J., & Hambli, R. (2010). Bayesian Estimation of Degradation Model Defined by a Wiener Process. In V. V. Rykov, N. Balakrishnan, & M. S. Nikulin (Eds.), *Mathematical and Statistical Models and Methods in Reliability* (pp. 345–357). Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4971-5_27
- van de Schoot, R., Depaoli, S., King, R., Kramer, B., Märtens, K., Tadesse, M. G., Vannucci, M., Gelman, A., Veen, D., Willemsen, J., & Yau, C. (2021). Bayesian statistics and modelling. *Nature Reviews Methods Primers*, 1(1), 1. <https://doi.org/10.1038/s43586-020-00001-2>
- Wabersich, D., & Vandekerckhove, J. (2014). Extending JAGS: A tutorial on adding custom distributions to JAGS (with a diffusion model example). *Behavior Research Methods*, 46(1), 15–28. <https://doi.org/10.3758/s13428-013-0369-3>